МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Поиск с возвратом
Вариант 1р.

Студент гр. 3388 _____ Лексин М.В.

Преподаватель _____ Жангиров Т.Р.

Санкт-Петербург
2025

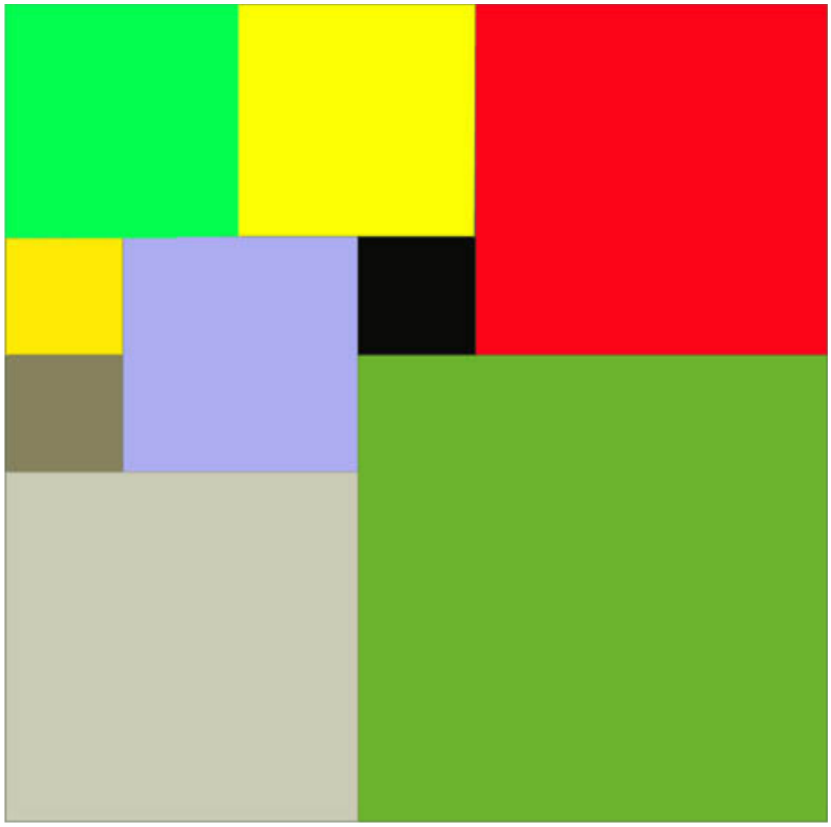
Цель работы.

Разработка и реализация эффективного алгоритма поиска с возвратом для решения задачи квадрирования квадрата при условии использования минимального общего количества квадратов.

Задание.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до $N - 1$, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N . Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7×7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 20$).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить
столешницу(квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x,y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x,y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Описание алгоритма.

Алгоритм должен найти такое покрытие столешницы квадратами различных размеров, чтобы:

- Квадраты не пересекались между собой.
- Их объединение полностью покрывало область N * N.
- Количество использованных квадратов было минимальным.

Для этого используется комбинация предопределенных разбиений для специальных случаев и рекурсивного поиска с возвратом для общего случая, дополненная оптимизациями, сокращающими время выполнения.

Основные этапы алгоритма:

1. Обработка специальных случаев. Для некоторых значений N, кратных 2, 3 или 5, существуют заранее известные оптимальные различения, которые позволяют избежать полного рекурсивного поиска. Если N соответствует одному из этих условий, алгоритм возвращает существующее разбиение и завершает работу.
2. Инициализация. Для общего случая (когда N не кратно 2, 3 или 5):
   - Создается двумерный массив grid размером N * N, где изначально все клетки свободны.
   - Инициализируется переменная minSquareCount, которая хранит минимальное найденное количество квадратов (начальное значение — N * N, максимальное возможное).
   - Создается массив optimalSolution для хранения координат и размеров квадратов оптимального решения.
3. Начальное размещение. Чтобы уменьшить область поиска, алгоритм начинает с размещения трех крупных квадратов:
   - Первый квадрат размером maxWidth = (N + 1) / 2 размещается в позиции (0, 0).
   - Второй квадрат размером largerWidth = N - maxWidth — в позиции (0, maxWidth).
   - Третий квадрат размером largerWidth — в позиции (maxWidth, 0).

   Эти квадраты покрывают значительную часть столешницы, оставляя меньшую область для дальнейшего поиска.
4. Рекурсивный поиск с возвратом. Основная часть алгоритма — функция backtrack, которая рекурсивно заполняет оставшуюся площадь:
   - Входные параметры:
     - currentCount — текущее количество размещенных квадратов.

- squares — массив текущих квадратов (координаты и размеры).
- remainingArea — оставшаяся незакрытая площадь.

- Процесс:

1. Если currentCount >= minSquareCount, ветвь обрезается, так как текущее решение не улучшит найденное.
2. Находится первая свободная клетка в grid.
3. Вычисляется максимальный размер квадрата, который можно разместить в этой клетке (не больше (N + 1) / 2 и ограниченный границами или занятыми клетками).
4. Для каждого размера (от большего к меньшему):
   - Проверяется, можно ли разместить квадрат этого размера без перекрытия и выхода за границы.
   - Если можно, квадрат размещается: обновляется grid, squares и remainingArea.
   - Рекурсивно вызывается backtrack для следующей свободной клетки.
   - После возврата квадрат удаляется (откат), чтобы попробовать другой размер.
5. Если remainingArea == 0 и currentCount < minSquareCount, решение сохраняется как новое оптимальное.

5. Используемые оптимизации:

- Специальные случаи: Использование предопределенных различений для N, кратных 2, 3 или 5.
- Начальные крупные квадраты: Уменьшают оставшуюся площадь поиска.
- Размещение от большего к меньшему: Позволяет быстрее покрывать большие области.
- Отсечение ветвей: Прекращение поиска, если текущее количество квадратов не улучшает минимум.

• Ограничение размера, Максимальный размер квадрата ограничен (N + 1) / 2.

• Учет оставшейся площади: Квадрат размещается, только если его площадь не превышает remainingArea.

• Быстрый поиск свободной клетки: Эффективно определяет следующую позицию.

Оценка сложности.

Временная сложность зависит от того, как алгоритм отрабатывает входные данные:

• Специальные случаи. Если N кратно 2, 3 или 5, алгоритм использует заранее известное разбиение и выполняется за константное время: O(1).

• Общий случай. В общем случае алгоритм использует рекурсивый поиск с возвратом, что приводит к более высокой сложности. В худшем случае алгоритм перебираем все возможные комбинации размещения квадратов в сетке N * N. На каждом шаге рекурсии:

• Алгоритм пытается разместить квадрат максимального возможного размера в первый свободной ячейке, уменьшая размер, если размещение невозможно.

• Число возможных размеров квадрата для каждой позиции ограничено O(N).

• Глубина рекурсии может достигать O(N^2), если вся столешница заполняется квадратами 1 * 1.

• На каждом уровне рекурсии количество вариантов выбора размера квадрата составляет O(N), а общее число шагов может быть экспоненциальным из-за ветвления.

• Формально, в худшем случае временная сложность достигает O(N^(N^2)), что является экспоненциальной зависимостью.

Сложность по памяти. Пространственная сложность определяется используемыми структурами данных и рекурсивным стеком:

1. Структуры данных:
   - Массив grid размером N * N занимает O(N^2) памяти.
   - Массивы squares и optimalSolution, хранящие информацию о размещенных квадратах, в худшем случае содержат до N^2 элементов (если вся сетка заполнена квадратами 1 * 1). Это также занимает O(N^2) памяти.
2. Рекурсивный стек:
   - Глубина рекурсии в худшем случае достигает O(N^2).
   - На каждом уровне рекурсии хранится константное количество данных, что дает дополнительную память O(N^2).

Общая память складывается из затрат на структуры данных и рекурсивный стек, что в сумме составляет O(N^2).

Тестирование.

Алгоритм был протестирован на различных наборах входных данных

Табл.1

Входные данные	Выходные данные
N = 2	Итоговое решение: 4 1 1 1 2 1 1 1 2 1 2 2 1
N = 11	Итоговое решение: 11 1 1 6 1 7 5 7 1 5 6 7 3 6 10 2 7 6 1 8 6 1 8 10 1 8 11 1 9 6 3 9 9 3

N = 15	Итоговое решение: 6 1 1 10 1 11 5 6 11 5 11 1 5 11 6 5 11 11 5
N = 37	Итоговое решение: 15 1 1 19 1 20 18 20 1 18 19 20 2 19 22 5 19 27 11 20 19 1 21 19 3 24 19 8 30 27 3 30 30 8 32 19 6 32 25 1 32 26 1 33 25 5

Выводы.

В ходе выполнения лабораторной работы был реализован алгоритм поиска с возвратом для решения задачи квадрирования квадрата, так же проведено тестирование реализованного алгоритма.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Код.

Файл main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdbool.h>

typedef struct {
    int row;
    int col;
    int size;
} SquareInfo;

int gridSize;
int minSquareCount;
SquareInfo* optimalSolution;
int** grid;
int backtrackCalls = 0;
int squaresPlaced = 0;
int squaresRemoved = 0;

void printGrid() {
    printf("\n═══ Текущее состояние сетки %d×%d ═══\n",
gridSize, gridSize);
    printf("    ");
    for (int j = 0; j < gridSize; j++) {
        printf("%2d ", j + 1);
    }
    printf("\n    ");
    for (int j = 0; j < gridSize; j++) {
        printf("──");
    }
    printf("\n");

    for (int i = 0; i < gridSize; i++) {
        printf("%2d │ ", i + 1);
        for (int j = 0; j < gridSize; j++) {
            if (grid[i][j] == 0) {
                printf(" · ");
            } else {
                printf("%2d ", grid[i][j]);
            }
        }
        printf("\n");
    }
    printf("═══════════════════════════════════\n");
}
```

```
bool canPlaceSquare(int row, int col, int size) {
    printf("Проверка возможности размещения квадрата размера %d в
позиции (%d, %d)\n",
           size, row + 1, col + 1);

    if (row + size > gridSize || col + size > gridSize) {
        printf("  Квадрат выходит за границы сетки\n");
        return false;
    }

    for (int i = row; i < row + size; i++) {
        for (int j = col; j < col + size; j++) {
            if (grid[i][j] != 0) {
                printf("  Ячейка (%d, %d) уже занята квадратом
#%d\n", i + 1, j + 1, grid[i][j]);
                return false;
            }
        }
    }

    printf("  Квадрат можно разместить\n");
    return true;
}

void markArea(int row, int col, int size, int value) {
    if (value > 0) {
        printf("Размещение квадрата #%d размера %d в позиции (%d,
%d)\n",
               value, size, row + 1, col + 1);
        squaresPlaced++;
    } else {
        printf("Удаление квадрата из позиции (%d, %d) размера
%d\n",
               row + 1, col + 1, size);
        squaresRemoved++;
    }

    for (int i = row; i < row + size; i++) {
        for (int j = col; j < col + size; j++) {
            grid[i][j] = value;
        }
    }
}

void saveSolution(int count, SquareInfo* squares) {
    printf("\nНАЙДЕНО НОВОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ: %d квадратов
(ранее было: %d)\n",
           count, minSquareCount);

    minSquareCount = count;
```

```
    printf("Решение содержит следующие квадраты:\n");
    for (int i = 0; i < count; i++) {
        optimalSolution[i].row = squares[i].row + 1;
        optimalSolution[i].col = squares[i].col + 1;
        optimalSolution[i].size = squares[i].size;

        printf("  Квадрат #%d: позиция (%d, %d), размер %d\n",
               i + 1, optimalSolution[i].row,
optimalSolution[i].col, optimalSolution[i].size);
    }
    printf("\n");
}

bool findFirstEmptyCell(int* outRow, int* outCol) {
    for (int row = 0; row < gridSize; row++) {
        for (int col = 0; col < gridSize; col++) {
            if (grid[row][col] == 0) {
                *outRow = row;
                *outCol = col;
                printf("Найдена первая пустая ячейка в позиции
(%d, %d)\n", row + 1, col + 1);
                return true;
            }
        }
    }
    printf("Пустых ячеек не найдено. Все заполнено!\n");
    return false;
}

bool handleSpecialCases() {
    printf("\nПроверка особых случаев для gridSize = %d\n",
gridSize);

    if (gridSize % 2 == 0) {
        int half = gridSize / 2;
        printf("Особый случай: gridSize делится на 2. Можно
покрыть 4 квадратами размера %d\n", half);

        SquareInfo squares[4] = {
            {0, 0, half},
            {half, 0, half},
            {0, half, half},
            {half, half, half}
        };
        saveSolution(4, squares);
        return true;
    } else if (gridSize % 3 == 0) {
        int third = gridSize / 3;
        printf("Особый случай: gridSize делится на 3. Можно
покрыть 6 квадратами\n");
```

```
        SquareInfo squares[6] = {
            {0, 0, 2 * third},
            {0, 2 * third, third},
            {third, 2 * third, third},
            {2 * third, 0, third},
            {2 * third, third, third},
            {2 * third, 2 * third, third}
        };
        saveSolution(6, squares);
        return true;
    } else if (gridSize % 5 == 0) {
        int fifth = gridSize / 5;
        printf("Особый случай: gridSize делится на 5. Можно
покрыть 8 квадратами\n");

        SquareInfo squares[8] = {
            {0, 0, 3 * fifth},
            {3 * fifth, 0, 2 * fifth},
            {3 * fifth, 2 * fifth, 2 * fifth},
            {0, 3 * fifth, 2 * fifth},
            {2 * fifth, 3 * fifth, fifth},
            {2 * fifth, 4 * fifth, fifth},
            {3 * fifth, 4 * fifth, fifth},
            {4 * fifth, 4 * fifth, fifth}
        };
        saveSolution(8, squares);
        return true;
    }

    printf("Для N = %d не найдено особых случаев. Применяем общий
алгоритм\n", gridSize);
    return false;
}

int min3(int a, int b, int c) {
    int min = a;
    if (b < min) min = b;
    if (c < min) min = c;
    return min;
}

void backtrack(int currentCount, SquareInfo* squares, int
remainingArea) {
    backtrackCalls++;

    printf("\n----- Вызов backtrack #%d -----\n", backtrackCalls);
    printf("Текущее количество квадратов: %d, Оптимальное: %d,
Оставшаяся площадь: %d\n",
           currentCount, minSquareCount, remainingArea);
```

```
    if (currentCount >= minSquareCount) {
        printf("Отсечение ветви: текущее количество квадратов >=
минимальное (%d >= %d)\n",
               currentCount, minSquareCount);
        return;
    }

    int row, col;
    if (findFirstEmptyCell(&row, &col)) {
        int maxSize = min3(gridSize - row, gridSize - col,
(gridSize + 1) / 2);
        printf("Максимально возможный размер квадрата для позиции
(%d, %d): %d\n",
               row + 1, col + 1, maxSize);

        for (int size = maxSize; size >= 1; size--) {
            printf("\nПробуем поставить квадрат размера %d в
позицию (%d, %d)...\n",
                   size, row + 1, col + 1);

            if (size * size <= remainingArea &&
canPlaceSquare(row, col, size)) {
                markArea(row, col, size, currentCount + 1);
                printGrid();

                squares[currentCount].row = row;
                squares[currentCount].col = col;
                squares[currentCount].size = size;

                printf("Рекурсивный вызов с добавленным квадратом
#%d (размер %d, позиция (%d, %d))\n",
                       currentCount + 1, size, row + 1, col + 1);
                backtrack(currentCount + 1, squares, remainingArea
- size * size);

                printf("Возврат из рекурсии, удаление квадрата из
позиции (%d, %d) размера %d\n",
                       row + 1, col + 1, size);
                markArea(row, col, size, 0);
                printGrid();
            } else {
                if (size * size > remainingArea) {
                    printf("  Квадрат слишком большой для
оставшейся площади: %d > %d\n",
                           size * size, remainingArea);
                }
            }
        }
    } else if (currentCount < minSquareCount) {
        saveSolution(currentCount, squares);
    }
```

```
}

void solve() {
    printf("\n=== Начало решения для N = %d ===\n", gridSize);

    optimalSolution = (SquareInfo*)malloc(gridSize * gridSize *
sizeof(SquareInfo));
    SquareInfo* squares = (SquareInfo*)malloc(gridSize * gridSize
* sizeof(SquareInfo));

    if (!handleSpecialCases()) {
        printf("\nПрименяем общий алгоритм для N = %d\n",
gridSize);
        printf("Начальное размещение трех больших квадратов для
разделения области\n");

        int maxWidth = (gridSize + 1) / 2;
        int largerWidth = gridSize - maxWidth;

        printf("Максимальная ширина: %d, Оставшаяся ширина: %d\n",
maxWidth, largerWidth);

        squares[0].row = 0;
        squares[0].col = 0;
        squares[0].size = maxWidth;

        squares[1].row = 0;
        squares[1].col = maxWidth;
        squares[1].size = largerWidth;

        squares[2].row = maxWidth;
        squares[2].col = 0;
        squares[2].size = largerWidth;

        markArea(0, 0, maxWidth, 1);
        markArea(0, maxWidth, largerWidth, 2);
        markArea(maxWidth, 0, largerWidth, 3);

        printGrid();

        int remainingArea = gridSize * gridSize - maxWidth *
maxWidth - 2 * largerWidth * largerWidth;
        printf("Размещены три начальных квадрата. Оставшаяся
площадь: %d\n", remainingArea);

        backtrack(3, squares, remainingArea);
    }

    printf("\n=== ИТОГОВАЯ СТАТИСТИКА ===\n");
    printf("Всего вызовов backtrack: %d\n", backtrackCalls);
    printf("Размещено квадратов: %d\n", squaresPlaced);
```

```
    printf("Удалено квадратов: %d\n", squaresRemoved);

    printf("\n=== ФИНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ===\n");
    printf("%d\n", minSquareCount);
    for (int i = 0; i < minSquareCount; i++) {
        printf("%d %d %d\n", optimalSolution[i].row,
optimalSolution[i].col, optimalSolution[i].size);
    }

    for (int i = 0; i < gridSize; i++) {
        for (int j = 0; j < gridSize; j++) {
            grid[i][j] = 0;
        }
    }

    for (int i = 0; i < minSquareCount; i++) {
        int row = optimalSolution[i].row - 1;
        int col = optimalSolution[i].col - 1;
        int size = optimalSolution[i].size;
        markArea(row, col, size, i + 1);
    }

    printf("\nФинальное расположение квадратов:\n");
    printGrid();

    free(squares);
    free(optimalSolution);

    for (int i = 0; i < gridSize; i++) {
        free(grid[i]);
    }
    free(grid);
}

int main() {
    int n;
    if (scanf("%d", &n) != 1 || n < 2 || n > 40) {
        printf("Ошибка: N должно быть в диапазоне [2, 40]\n");
        return 1;
    }

    gridSize = n;
    minSquareCount = gridSize * gridSize;

    printf("Задача о разбиении квадрата %d×%d на минимальное
количество квадратов\n", n, n);

    grid = (int**)malloc(gridSize * sizeof(int*));
    for (int i = 0; i < gridSize; i++) {
        grid[i] = (int*)calloc(gridSize, sizeof(int));
    }
```

```
    solve();

    return 0;
}
```