TD5 : Vecteurs du plan

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Généralités

1.1 Relation de Chasles

(i) Rappeler ce qu'est la relation de Chasles et l'illustrer par un dessin.

(ii) Exprimer le plus simplement possibles les vecteurs suivants : $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{AC} - \vec{CB}; \vec{v} = 2\vec{AB} - \vec{BC} - \vec{CA}; \vec{w} = \vec{AC} + 2\vec{CB} + \vec{BA}$

1.2 Coordonnées dans le plan

(i) Soient les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, quelles sont les coordonnées de$\vec{AB}$.

(ii) Soient $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, quelles sont les coordonnées des vecteurs $\alpha\vec{u}$ et $\vec{u} + \vec{v}$?

(iii) On donne $A(3; -5)$, $C(6; 2)$ et $F(-1; \frac{1}{2})$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{CA}; \vec{CF}; \vec{FA}$? Quelles sont les coorconnées de $\vec{w} = 3\vec{CA} - \vec{AF}$?

1.3 Vecteurs colinéaires

(i) Rappeler la définition de deux vecteurs colinéaires.

(ii) Quelle égalité faut-il tester au niveau des coordonnées pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires ?

(iii) Comment traduire le parallélisme de deux droites (AB) et (CD) à l'aide de vecteurs ?

(iv) Comment traduire l'alignement de trois points A, B et C à l'aide de vecteurs ?

(v) Soit ABC un triangle. On considère E et F tels que $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BC}$ et $\vec{AF} = \frac{3}{2}\vec{AC} + \vec{BA}$. Exprimer $\vec{EF}$ en fonction de $\vec{BC}$. Que peut-on en déduire sur les droites (EF) et (BC) ?

1.4 Norme d'un vecteur

(i) Rappeler la formule donnant la norme $\|\vec{u}\|$ d'un vecteur $\vec{u}$ du plan valable dans un repère orthonormé. (Expliquer par un dessin)

(ii) Démontrer que pour tout réel λ et tout vecteur $\vec{u}$ on a : $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|.\|\vec{u}\|$

(iii) On donne $A(-3; 2), B(2; -1), C(2; 5), D(-3; -2), E(0; 6)$. Calculer la norme des vecteurs suivants :

$\vec{u} = 2\vec{AB}$	$\vec{u} - \vec{w}$
$\vec{v} = \vec{EB}$	$3\vec{u} - v$
$\vec{w} = -2\vec{CD}$	$\vec{v} - 3\vec{w}$

2 Produit scalaire du plan

(i) On rappelle la définition du produit scalaire entre deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$
A quelle condition sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit scalaire est-il nul ? Positif ? Négatif ?

(ii) Justifier l'égalité : $\|\vec{u}\| = \vec{u}^2$

(iii) On rappelle les propriétés opératoire suivantes :

(a) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

(b) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

(c) $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta \times \vec{u}.\vec{v}$

Démontrer les trois identités remarquables suivantes :

(a) $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

(b) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

(c) $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

(iv) A l'aide de ces égalités, démontrer : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

(v) Soit $ABCD$ un carré de côté $5cm$. Soit O le centre de ce carré (point d'intersection des diagonales). Exprimer les produits scalaires suivant : $\vec{AB}.\vec{DC}, \vec{AB}.\vec{DB}, \vec{BC}.\vec{CD}, \vec{AB}.\vec{AO}$.

(vi) Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soient I, J, K les milieux respectifs de $[AB], [AC]$ et $[BC]$. Calculer : $\vec{AB}.\vec{AJ}; \vec{AB}.\vec{AK}; \vec{AB}.\vec{AC}; \vec{AI}.\vec{AC}$

(vii) Dans un triangle ABC, en posant $a = BC, b = AC, c = AB$, on a *l'égalité d'AL-Kashi :* $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C})$ Que devient ce résultat dans un triangle rectangle ? Démontrer le résultat pour le cas général.

(viii) On donne DEF un triangle tel que $DE = 3cm, DF = 7cm$ et $\widehat{DEF} = 45°$. Calculer la longueur EF.

(ix) *Théorème de la médiane :* Soit ABC un triangle, on note (AI) la médiane issue de A et (AH) la hauteur issue de A. Démontrer les trois égalités suivantes :

(a) $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$

(b) $\vec{AB}.\vec{AC} = AI^2 - \frac{1}{4}BC^2$

(c) $|AB^2 - AC^2| = 2 \times BC \times IH$

3 Produit scalaire en géométrie repérée

(i) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, si $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ alors $\vec{u}.\vec{v} =$

(ii) A l'aide de cette relation, démontrer les propriétés du (iii) de la partie 2.

(iii) Soit $ABCD$ le carré définie à la question (iv) de la partie 2, on le muni d'un repère soigneusement choisi. Retrouver les résultats obtenus précédement de manière analytique.

(iv) Soient $A(3; -2), B(-4, -12); C(3; 5), D(3; -2), E(-4; 6)$. Calculer les produits scalaires suivantes :
$\vec{AB}.\vec{AC}$ $\quad$ $\vec{AC}.\vec{AD}$ $\quad$ $\vec{DB}.\vec{AE}$