TD6

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Equations cartésiennes de droites

(i) **Définition :** A étant un point et $\vec{u} \neq \vec{0}$ un vecteur du plan, on appelle droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ l'ensemble des point M du plan tels que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires ;

(ii) **Théorème :** Toute droite admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$, où a, b et c sont trois réels tels que $(a, b) \neq (0, 0)$

(iii) **Propriété :** Toute droite possède une équation de l'un des deux types suivants :
1^{er} cas : $y = mx + p$. On parle alors d'équation réduite. m est appelé le coefficeint directeur de la droite (ou la pente) et p l'ordonnée à l'origine. Et étant donné deux points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ de la droite, on a : $m = \frac{y_B - y_A}{x_b - x_A}$
2^{ieme} cas : $x = k$

(iv) **Propriété :** Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ dirige la droite d'équation $ax + by + c = 0$

(v) **Corollaire :** Deux droites $D_1 : ax + by + c = 0$ et $D_2 : a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si $(a; b)$ et $(a'; b')$ sont proportionnels. C'est à dire si $ab' - a'b = 0$

(vi) **Définition et théorème :** Soit D une droite du plan. On appelle vecteur normal à D tout vecteur directeur d'une droite perpendiculaire à D. Par ailleurs, si D a pour équation $ax + by + c = 0$, elle possède un vecteur normal $\vec{n}(a, b)$

(vii) **Propriété :** Deux droites $D_1 : ax + by + c = 0$ et $D_2 : a'x + b'y + c' = 0$ sont perpendiculaire si et seulement si : $aa' + bb' = 0$. Dans le cas de deux droites admettant des équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ cette condition revient à $mm' = -1$

(viii) **Propriété :** La distance d'un point A du plan à une droite D est donnée par la formule : $d(A, D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exercice 1. (i) *Dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, tracer les droites d'équation suivantes :* $(D_1) : y = 2x + 3$
$(D_4) : -3y - 2x + 3 = 0$

(ii) *Donner trois vecteurs directeurs de la droite passant par les points $A(-2; 6)$ et $B(3; 8)$. Donner trois équations cartésiennes distinctes de (AB) puis l'équation réduite.*

(iii) *On donne $A(2; 1)$ et $B(3; 3)$. Trouver (par la méthode de votre choix) l'équation réduite de la droite (AB). Même question pour la droite (CD) avec $C(-3; 9)$ et $D(4; 6)$.*

(iv) *Trouver l'équation réduite de (AB) avec $A(-2; 1)$ et $B(-2; 3)$.*

(v) *Etudier l'intersection des droites $(AB) : 2x - y + 3 = 0$ et $(CD) : 4x + 3y - 7 + 0$.*

(vi) *Résoudre et interpréter géométriquement le système :* $\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x - y + 10 = 0 \end{cases}$

(vii) *Soit (d) une droite d'équation cartésienne : $2x - 6y + 3 = 0$. Donner l'équation réduite de la parallèle à (d) passant par l'origine du repère. Donner ensuite l'équation de la perpendiculaire à (d) passant par l'origine du repère.*

(viii) *On donne $(D)) : y = -x + 2$ et $A(-1; -1)$. Calculer la distance de A à (D).*

(ix) *On considère $(D) : y = -\frac{1}{3}x + 2$. Quelle est l'équation de la perpendiculaire à (D) passant par le point d'intersection de (D) et l'axe des abscisses ?*

(x) *On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équation $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$ et $(BC) : 2x + 3y = 4$. Quelles sont les coordonnées des points A, B et C ? Quels sont les coordonnées des milieux I, J et K de $[AB], [AC]$ et $[BC]$? Donner l'quation des trois médianes et vérifier qu'elles sont concourantes.*

(xi) *Démontrer les propriétés (ii) et (iii) en partant de la condition analytique de colinéarité de deux vecteurs : $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$ colinéaires $\Leftrightarrow xy' - yx' = 0$*

(xii) *Démontrer la propriété $(viii)$ en remarquant que $\mid \vec{n}.\vec{AH} \mid = \| \vec{n}.\vec{AH} \|$ et que pour tout M de (D) on a : $\vec{n}.\vec{AH} = \vec{n}.\vec{AM}$*

2 Equations cartésiennes de cercles

(i) Rappeler la définition d'un cercle. Quelle est la différence entre un cercle et un disque ?

(ii) Montrer que le cercle de centre $O(a, b)$ et de rayon R admet pour équation cartésienne dans le plan $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

(iii) Quelles parties du plan sont définies par les équations suivantes :
(1) : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0$ (2)$(x-42)^2 + (y+3)^2 = -4$
(3) : $(x+2)^2 + (4-y)^2 = 9$ (4) : $(2x+2)^2 + (2y-8)^2 = 0$
(5) : $(x+2)^2 - (x-2)^2 = 16$

(iv) Montrer que les équations suivantes sont des équations de cercles dont on précisera le centre et le rayon : $E_1 : x^2 + y^2 - 8x + 2y + 8 = 0$ et $E_2 : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

(v) Faire des schémas correspondant aux trois positions relative d'un cercle et d'une droite. (extérieurs/tangents/sécants en deux points).

(vi) Faire des schémas correspondants à la positions relatives de deux cercles non concentriques (extérieurs/ tangents extériereurement/sécants/tangents intérieusement / l'un a l'intérieur de l'autre)

(vii) Etudier l'intersection suivante : $\left\{ \begin{array}{l} (C) : (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \\ (d) : y = x + 3 \end{array} \right.$

(viii) Etudier l'intersection suivante : $\{\ (C) : (x+1)^2 + y^2 = 9(C') : (x-1)^2 + y^2 = 1$

(ix) Lien avec le produit scalaire :
Soit C un cercle de $[AB]$. Montrer la double équivalence :

$$M \in C \Leftrightarrow \vec{MA}.\vec{MB} = 0 \Leftrightarrow (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$