TD8 : Calcul Différentiel

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Dérivation

On rappelle les formules usuelles de dérivations :

Fonction	Dérivée
$x \to x^n$	$x \to nx^{n-1}$
$x \to \sqrt{x}$	$x \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \to e^x$	$x \to e^x$
$x \to \ln(x)$	$x \to \frac{1}{x}$
$x \to \cos(x)$	$x \to -\sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$x \to \cos(x)$

Et les formules usuelles d'opérations sur les dérivées :

$(u+v)'$	$u'+v'$
$(uv)'$	$u'v+uv'$
$(ku)'$	ku'
$(\frac{1}{u})'$	$\frac{-u'}{u^2}$
$(\frac{u}{v})$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$(g \circ u)'$	$g' \circ u \times u'$

Exercice 1. (i) *Que devient cette dernière formule dans le cas où g est l'exponentielle ? Le logarithme népérien ? Où $g(x) = x^n$?*

(ii) *Calculer les dérivées des fonctions suivantes :*

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 4\,; \quad g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\,; \quad h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}\,; \quad i(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x}\,;$$
$$j(x) = \frac{3x^2-4x+1}{2x-3}\,; \quad k(x) = \frac{10}{x^2}\,; \quad l(x) = (-5x^2+1)^2 \quad m(x) = \frac{1}{(x-3)(x+2)}$$

(iii) *On rappelle que l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ Donner les équations des tangentes en au point d'abcisse 1 aux courbes représentant les fonctions f, g, h de la question précédante.*

(iv) *Etudier les variations des fonctions suivantes après avoir préciser l'ensemble de définition.*
$f : x \to ax^2 + bx + c$
$g : x \to x^3 - 3x - 3$
$h : x \to \frac{-10}{(x-3)^2}$

(v) *On considère la fonction f définie par la relation : $f(x) = \frac{3x^2-2x-2}{2x^2+x+1}$ Etablir que $f'(x) = \frac{7x^2+14x}{(2x^2+x+1)^2}$ et en déduire que la fonction admet pour minorant le nombre -2 et pour majorant le nombre 2.*

(vi) *Dériver les fonctions suivantes : $f : x \to \ln(\frac{1-x}{1+x})$ et $g(x) = \sqrt{1+5x^3}e^{-x^2}$*

2 Limites

(i) *Rappeler les quatre "formes indéterminées" usuelles.*

(ii) *Rappeler les résultats suivants (croissances comparées) :*
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} =$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x x^n =$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$

(iii) *Rappeler l'énoncé du théorème des gendarmes.*

(iv) *Calculer les limites suivantes en expliquant clairement quelle technique permet de lever l'indétermination.*
A) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2-3}{5x^3+2x-8}$ *B).* $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2\sin(x) =$ *C)* $\lim\limits_{x\to+\infty} 8x^2 - 4x =$ *D)* $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x}{4-x^2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x}{4-x^2}$

3 Intégration

On rappelle les formules suivantes :

Fonction	Primitive (à une constante près)
$x \to x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \to \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$x \to \frac{1}{x^n}$	$x \to \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$x \to \frac{1}{x}$	$x \to \ln(\lvert x\rvert)$
$x \to e^u(x)$	$x \to u'(x)e^u(x)$
$x \to \ln(x)$	$x \to x\ln(x) - x$
$x \to \cos(x)$	$x \to \sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$x \to -\cos(x)$

Et les formules usuelles d'opération sur les primitives :

$f'(x)f(x)$	$\frac{1}{2}[f(x)]^2$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$f'(x)[f(x)]^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

Donner une primitive des fonctions suivantes (on suppose a non nul dans tout l'exercice).

$$\begin{array}{rr} f(x = (ax+b)^n & j(x) = \frac{1}{2x-3} \\ g(x) = e^{ax+b} & k(x) = \frac{5}{2e^{3x}} \\ h(x) = \cos(ax+b) & l(x) = \sqrt{ax+b} \\ i(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5 & m(x) = 3^x \end{array}$$

Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{rr} I_1 = \int_{-1}^{3} (3u^2 + 2u - 1)du & I_2 = \int_2^7 \frac{1}{2x+8}dx \\ I_3 = \int_4^5 \frac{1}{\sqrt{5x+1}}dx & I_4 = \int_2^8 2^x dx \\ I_5 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{e^x}dx & \end{array}$$

Une des définitions possibles du nombre π est la suivante : $\pi = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Commenter cette définition.