

# TD1 : Calcul algébrique de base

2018/2019

E3FI  
Semestre 1

## 1 Fractions

Quelques rappels sur les règles opératoires connues :

- (i)  $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} =$
- (ii)  $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} =$
- (iii)  $\frac{a}{c} \times \frac{b}{c} =$
- (iv)  $\frac{a}{c} \div \frac{b}{c} =$

**Exercice 1.** Mettre sous forme de fractions irréductible :

$$\begin{array}{lll} A) (\frac{1}{12} - \frac{1}{4}) \times \frac{7}{9} & B) \frac{\frac{4}{13}}{\frac{5}{15}} & C) \frac{3}{\frac{5}{15}} \\ D) \frac{5}{\frac{3}{15}} & E) \frac{3}{8} - (\frac{1}{4})^2 & F) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\ G) \frac{64}{49} \times \frac{54}{48} & H) \frac{1}{G^2} & I) (C - D)^2 \\ J) 3 \times (\frac{3}{15} - \frac{4}{12}) - 3 & K) (\frac{1}{2} - 4)^2 - 3 & L) \frac{9}{4} - (1 - \frac{2}{3}) \end{array}$$

**Correction 1.** A)  $\frac{-7}{54}$ , B)  $\frac{12}{13}$ , C) 9, D) 25, E)  $\frac{1}{8}$ , F)  $\frac{13}{60}$ , G)  $\frac{8}{9}$ ; H)  $\frac{81}{64}$ , I) 256, J)  $-\frac{17}{5}$ , K)  $\frac{37}{4}$ , L)  $\frac{23}{12}$

**Exercice 2.** Exprimer de manière la plus simple possible les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} A) \frac{x}{2} \times \frac{x+1}{6} \times \frac{4x}{x^2-1} & B) \frac{a-b}{a} \times \frac{a^2-ab}{5} \times \frac{3a}{a^2-b^2} & C) \frac{\frac{y}{x-y} - \frac{x}{x+y}}{\frac{x+y}{x+y} + \frac{x-y}{x-y}} \\ D) \frac{x+3}{5} \times \frac{x+1}{x^2} \times \frac{x}{(x+3)(x+1)} & E) \frac{1}{a^2-ab} \times \frac{4}{a^2} \times \frac{a^2-b^2}{5} & F) \frac{\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} \end{array}$$

**Correction 2.** A)  $\frac{x^2}{3(x-1)}$ , B)  $\frac{3a(a-b)}{5(a+b)}$ , C) 1, D)  $\frac{1}{5x}$ , E)  $\frac{4(a+b)}{5a^3}$ , F)  $\frac{2x}{x-1}$

## 2 Développer-Factoriser

On rappelle les règles opératoires connues :

- (i)  $k(a+b) = ka + kb$
- (ii)  $k(a+b+c+d+\dots) =$
- (iii)  $k(a-b) =$
- (iv)  $-(a+b+c+d+\dots) =$
- (v)  $(a+b)(c+d) =$
- (vi)  $(a+b)^2 =$
- (vii)  $(a-b)^2 =$
- (viii)  $(a+b)(a-b) =$

**Exercice 3.** Démontrer les quatre dernières propriétés en utilisant la première.

**Exercice 4.** Développer et réduire :

$$\begin{array}{ll} A) -3(2x+3) & F) (2x-3)(y+5) \\ B) (2x-3)^2 & G) (a+b)(c+d+e) \\ C) (7x+1)^2 & H) (a+b+c)^2 \\ D) (9x-4)(2x-1)(3x+2) & I) (a+b)^3 \\ E) -2(2x-4)(4y+5) & J) (2x+3)^3 \end{array}$$

**Correction 3.** A)  $-6x-9$ , B)  $4x^2-12x+9$ , C)  $49x^2+14x+1$ , D)  $54x^3-15x^2-22x+8$ , E)  $-8xy-10x+16y+20$ , F)  $2xy+10x-3y-15$ , G)  $ac+ad+ae+bc+bd+bc$ , H)  $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$ , I)  $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ , J)  $8x^3+36x^2+54x+27$

**Exercice 5.** Factoriser :

A) $2a + 6b$	B) $4a - 6b$	C) $3a + 4a^2$
D) $5a + 15ab$	E) $4ab^2 + 6a^2b + 12abc$	F) $(2x - 3) \times 4x + (2x - 3) \times 5$
G) $(3x - 2) \times 4x + (2x + 4) \times (3x - 2)$	H) $(3x - 9)^2 - (4x + 1)(3x - 9)$	I) $x^2 - 2x + 1$
J) $-x^2 + 2x - 1$	K) $x^2 + 2x + 1$	L) $25x^2 - 9$
M) $4ax^2 - 16a$	N) $(2x - 4)^2 - (3x + 1)^2$	O) $(2x - 3)^2 - (1 - x)(3 - 2x)$

**Correction 4.** A)  $2(a + 3b)$  B)  $2(2a - 3b)$  C)  $a(3 + 4a)$  D)  $5a(1 + 3b)$  E)  $2ab(2b + 3a + 6c)$  F)  $(2x - 3)(4x + 5)$  G)  $2(3x - 1)(x + 4)$  H)  $(3x - 9)(-x - 10)$  I)  $(x - 1)^2$  J)  $-(x - 1)^2$  K)  $(x + 1)^2$  L)  $(5x + 3)(5x - 3)$  M)  $4a(x^2 - 4) = 4a(x + 2)(x - 2)$  N)  $(5x - 3)(-x - 5)$  O)  $(2x - 3)(x - 2)$

### 3 Puissances

Rappels des règles opératoires connues :

- (i)  $a^{-n} =$
- (ii)  $a^0 =$
- (iii)  $a^1 =$
- (iv)  $a^n \times a^m =$
- (v)  $\frac{a^n}{a^m} =$
- (vi)  $(ab)^n$
- (vii)  $(\frac{a}{b})^n =$
- (viii)  $(a^n)^m =$

**Exercice 6.** Donner une idée de démonstration des cinq dernières règles

**Correction 5.**

**Exercice 7.** Mettre sous la forme  $a^n$ , avec  $a \in \mathbb{N}$  le plus petit possible.

A) $(2^3)^{-2}$	B) $(4^3)^{-2}$	C) $\frac{5^5 \times 5^2}{25^2}$
D) $(2^8)^{-2} \times 4^{-3}$	E) $\frac{A^2}{D}$	F) $\frac{0.0001}{10^{-4}}$
G) $100 \times (0,001)^2 \times 10^{-7}$	H) $(\frac{1}{2})^{-5}$	I) $(\frac{2}{40})^{-2}$
J) $\frac{3}{9-1}^4$	K) $(\frac{27}{9^3} \times \frac{1}{3} \times 9^{-4})$	L) $(0,001)^2 \times (100^2)^2 \times \frac{1}{10^{-2}}$

**Correction 6.** A)  $2^{-6}$  B)  $2^{-12}$  C)  $5^3$  D)  $2^{-22}$  E)  $2^{10}$  F)  $1$  G)  $10^{-11}$  H)  $2^5$  I)  $2^{-6}$  J)  $3^{12}$  K)  $3^{-21}$  L)  $10^4$

**Exercice 8.** Mettre sous la forme  $a^n b^n$  avec  $a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$  les plus petits possible :

A) $\frac{8}{9}$	B) $\frac{100}{27^3}$
C) $\frac{81^{-3}}{0,001}$	D) $\frac{8}{27^{-3}} \times (\frac{1}{16})^{-4} \times (\frac{1}{\frac{1}{2}})^3$
E) $\frac{25}{5^{-3}} \times \frac{10}{100^2} \times \frac{1}{8}$	F) $0,1 \times 4 \times \frac{1}{10 \times 10^6} \times \frac{5^2}{5^{-3}}$

**Correction 7.** A)  $2^3 \times 3^{-2}$  B)  $2^2 \times 5^2 \times 3^6$  C)  $3^{-12} \times 10^3$  D)  $\frac{2^3}{3^2} \times 3^9 \times 2^4 \times 8^4 \times 2^3$  E)  $2^{-6} \times 5^2$  F)  $5^3$

**Exercice 9.** Rappeler dans quels cas on change le sens d'une équation

**Exercice 10.** Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

A) $4x - 3 = 1 - 3x$	B) $5x - 4 = 2 - x$
C) $-3x + 2 < -x + 4$	D) $-5x + 4 > 4x + 2$
E) $-2(4x + 2) < 4(x - 3)$	F) $(x + 1)^2 \geq (x - 1)^2$
G) $2x - p \neq 4(x - p) + p$	H) $5a - 3 \leq 2a + x$
I) $4x + 6a > -(a - x)$	J) $2x + 3 \neq 6(x - 3) - 8$

**Correction 8.** A)  $x = \frac{4}{7}$  B)  $x = 1$  C)  $x > 1$  D)  $x < \frac{2}{9}$  E)  $x > \frac{2}{3}$  F) Après avoir développer on trouve  $x \geq 0$  G) On trouve  $x \neq p$  donc  $x \in \mathbb{R} \setminus \{p\}$  H)  $3a - 3 \leq x$  I)  $x \geq -\frac{7a}{3}$  J)  $x \neq \frac{29}{4}$

**Exercice 11.** Donner l'ensemble des solutions des équations et inéquations suivantes :

A) $(2x - 3)(5 - x) = 0$	B) $(4x - 3)^2 = 0$
C) $4x^2 - 9 = 0$	D) $\frac{2x-3}{(4x-8)(3x+5)} > 0$
E) $\frac{x^2-1}{2x+3} = 0$	F) $\frac{1-4x}{x+3} < 0$
G) $\frac{(2x-3)^2}{4} \geq 0$	H) $\frac{x^2+2x+1}{(3-x)(x^2+1)} < 0$

**Correction 9.** A)  $\{\frac{3}{2}; 5\}$  B)  $\{\frac{3}{4}\}$  C)  $\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$  D)  $]-\frac{5}{3}; \frac{3}{2}[ \cup 2, +\infty[$  E)  $\{-1; 1\}$  F)  $]-\infty; -3[ \cup ]\frac{1}{4}; +\infty[$  G)  $\mathbb{R}$  H)  $]3; +\infty[$

**Exercice 12.** *Rappeler, suivant le signe de  $a$ , l'ensemble des solutions de l'équation  $X^2 = a$*

— si  $a > 0$ , l'ensemble des solutions est :  $S =$

— si  $a = 0$ , l'ensemble des solutions est :  $S =$

— si  $a < 0$ , l'ensemble des solutions est :  $S =$

*Démontrer ces trois propriétés.*

**Correction 10.**  $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$

**Exercice 13.** *Résoudre les équations suivantes :*

A)  $x^2 = -3$       B)  $x^2 = 5$       C)  $x^2 = 0$

D)  $(x + 1)^2 = -3$     E)  $(2x - 3)^2 = 2$     F)  $(3x - 2)^2 = -4$

G)  $9x^2 - 4 = 0$     H)  $(4x + 2)^2 = 0$     I)  $8 \times (2x - 1)^2 = 4$

**Correction 11.** A)  $\emptyset$  B)  $\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$  C)  $\{0\}$  D)  $\emptyset$  E)  $\{\frac{-\sqrt{2}+3}{2}, \frac{-\sqrt{2}+3}{2}\}$  F)  $\emptyset$  G)  $\{\frac{-2}{3}; \frac{2}{3}\}$  H)  $\frac{-1}{2}$  I)  $\{\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{2+\sqrt{2}}{4}\}$