TD2

2018/2019

E3FI
Semestre 1

1 Révisions de la semaine dernières

Exercice 1. *Résoudre les équations et les inéquations suivantes :*

(i) $\frac{2x-3}{(3x-6)^2} \geq 0$

(ii) $\frac{1}{2+x} - 5 > 0$

(iii) $\frac{9x^2-4}{x^2-1} \leq 0$

Correction 1. (i) $]-\infty; \frac{3}{2}[\cup[2; +\infty[$

(ii) $]-2; -9/5$

(iii) $]-1; -2/3[\cup]2/3; 1[$

Exercice 2. *Résoudre les équations suivantes :*

A) $x^2 = -2$ *B)*$y^2 = 6$

C)$(x+1)^2 = 0$ *D)* $(x+1)^2 = (2x-3)^2$

E) $(x+1)^2 = -(2x-3)^2$ *F)* $4x^2 - 8x + 4 = 0$

Correction 2. *A)* $\varnothing$, *B)* $x = \sqrt{6}$ *ou* $x = -\sqrt{6}$, *C)* $x = -1$, *D)*$x = \frac{4}{3}$ *ou* $x = 4$, *E)* $x = -1$ *et* $x = 3/2$ *donc impossible, F)* $x = 1$

Exercice 3. *Calculer ou réduire au maximum les expressions suivantes :*

A) $\frac{(10^2)^2 \times (0{,}01)^2}{((0{,}001)^-3)^6}$ *B)* $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{-x}{y}-\frac{1}{x}}$

C) $\frac{1+(2x-(-y))-(x-(-x-y))}{4x-((x+1)^2-(x-1)^2)}$ *D)* $\frac{10^{-3} \times 0{,}001}{(\frac{1}{10^2})^{-3} \times \frac{\frac{1}{10}}{0{,}01}}$

E) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}$ *F)* $\frac{\frac{x}{y^2}-(\frac{x}{y})^2}{\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{y^2}}$

Correction 3. *A)* 10^{-36} , *B)* -1 , *C)*$1/0$ *donc n'existe pas.* , *D)* 10^{-13}, *E)*$\frac{4x^2+1}{4x}$, *F)*$\frac{1-x}{x(y+1)}$

Exercice 4. (i) *Démontrer que, pour tout entier* n, $n^3 - n$ *est un multiple de* 6.

(ii) *Montrer que* $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ *pour* a *et* b *positifs*

(iii) *Montrer que pour* a *et* b *positifs on a :* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$

Correction 4. (i) $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1)$
Pair car deux entier consécutifs donc l'un est pair.
multiple de 3 *car trois entiers consécutifs.*
Multiple de 2 *et de* 3 *donc de* 6.

(ii) *on a* $\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ *or* $\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$ *on a donc le résultat voulu.*

(iii) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab}$ *or* $(a-b)^2 \geq 0$ *donc* $a^2 + b^2 \geq 2ab$ *donc* $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ *donc* $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

2 Second degré

Proposition 1. *Rappeler l'ensemble des solutions de l'équation* $ax^2 + bx + c = 0$ *suivant de signe du discriminant* ($\Delta = b^2 - 4ac$) *:*

(i) *si* $\Delta > 0$ *il y a deux solutions distinctes :*
$x_1 =$
$x_2 =$

(ii) *Si* $\Delta = 0$ *il y a une unique solution :* $x_0 =$

(iii) *Si* $\Delta < 0$ *l'equation n'a pas de solution réelles.*

Rappeler dans le cas où le discriminant est positif ou nul, l'expression de la forme factorisée du trinôme :

Exercice 5. *Résoudre les equations suivantes :*
(i) $2x^2 - 2x - 12 = 0$
(ii) $-x^2 - x + 12 = 0$
(iii) $x^2 + x - 12 = 0$
(iv) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
(v) $-2x^2 + 7x = -15$
(vi) $7x^2 = 7$

Correction 5. (i) $2x^2 - 2x - 12 = 0$ *a pour solutions :* $x_1 = -2$ *et* $x_2 = 3$
(ii) $-x^2 - x + 12 = 0$ *a pour solutions :* $x_1 = -4$ *et* $x_2 = 3$
(iii) $x^2 + x - 12 = 0$ *a pour solutions :* $x_1 = -4$ *et* $x_2 = 3$
(iv) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ *a pour solution :* $x_0 = \frac{1}{2}$
(v) $-2x^2 + 7x = -15$ *a pour solutions :* $x_1 = 5$ *et* $x_2 = \frac{-3}{2}$
(vi) $7x^2 = 7$ *a pour solutions :* $x_1 = -1$ *et* $x_2 = 1$

Exercice 6. *Donner le tableau de signe des six trinômes étudiés ci-dessus.*

Exercice 7. (i) *Démontrer que, pour tout entier naturel* $(5t, 12t, 13t)$ *est un triplet de Pythagore.*
(ii) *Démontrer les résultats de la proposition.*
(iii) *Démontrer que la somme s des racines d'un trinôme est égale à* $\frac{-b}{a}$ *et que le produit des récines vaut* $\frac{c}{a}$

Correction 6.
$(5t)^2 + (12t)^2 = 25t^2 + 144t^2 = 169t^2 = (13t)^2$
On factorise et le résultats en découle directement
$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$
$x_1 \times x_2 = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$

3 Systèmes d'équations

Exercice 8. *Résoudre par subsitution les systèmes* 2×2 *suivants :*

A) $\begin{cases} y - x = -2 \\ 7x + y = 22 \end{cases}$ *B)* $\begin{cases} x + 8y = 2 \\ 2y - x = 18 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x - 5y = 8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ *D)* $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Correction 7. *A)* $x = 3, y = 1$ *, B)* $x = -14, y = 2$ *C)*$x = \frac{49}{16}, y = 3$ *, D)* $x = 15/7, y = 10/7$

Exercice 9.

A) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ *B)* $\begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 5 = 6 \end{cases}$ *D)* $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 6y - 8 + 2x = 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} 3 + 2y + x = 0 \\ 2x + 4y = -6 \end{cases}$ *F)* $\begin{cases} 3x + \frac{1}{2} - 1 = 0 \\ -2x - 3y = 26 \end{cases}$

Correction 8. *A)* $x = 5/2, y = 1/2$ *B)* $x = 1/4, y = 1/2$ *C)* $x = -2/3, y = -1$ *D) impossible E) les deux variables sont liées F)* $x = 2, y = -10$

Exercice 10. *Résoudre les systèmes suivants :*

(i) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + z = 2 \end{cases}$

(ii) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+2y+z & = & 0 \\ 3x+3y+z & = & 2 \end{array}\right.$

(iii) $\left\{\begin{array}{lcl} x+y & = & 1 \\ y+z & = & 1 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$

Correction 9. (i) $x = 0, y = -1/2, z = 1/2$

(ii) *ensemble vide*

(iii) $x = 1, y = 1/2, z = 1/2$