TD 3 : Applications linéaires

2020/2021

E3FI
Semestre 2

1 Applications linéaires

1.1 Définitions et propriétés générales

Définition 1. *Soit $(E,+,.)$ et $(F,+.)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle dit que $f : E \longrightarrow F$ est* ***linéaire*** *(ou un morphisme d'espace vectoriel) si :*

1. $\forall x, y \in E, on a f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$ *on a :* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Proposition 1. ***Caractérisation des applications linéaires***
Soit $f : E \longrightarrow F$.
L'application f est linéaire, si et seulement si :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Proposition 2. *Soient $(E,+,.), (F,+,.), (G,+,.)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.*

1. *Si l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$*
2. *Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont linéaires alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est linéaire.*
3. *Si $e_1, \dots e_n$ sont des vecteurs de E alors $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : f(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(e_k)$*

1.2 Applications linéaires particulières

Définition 2. *On appelle forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de E, toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. On note E^* au lieu de $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.*

Définition 3. *On appelle* ***endomorphisme*** *de E, toute application linéaire de E dans lui même.*
On note $\mathcal{L}(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des endomorphisme.

Définition 4. *On appelle* ***isomorphisme*** *d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vers un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F, toute application linéaire bijective de E vers F.*
On note $Iso(E)$, au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$ l'ensemble des isomorphisme de E dans F.

Définition 5. *On appelle* ***automorphisme*** *de E, toute application linéaire bijective de E dans E.*
On note $Gl(E)$ l'ensemble des automorphisme de E.

Rappel 1. *Une application $f : E \rightarrow F$ est bijective si elle est injective ($\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$) et surjective ($\forall y \in F \ \ \exists \ \ x \in E \ \ | \ \ y = f(x)$).*

2 Noyau et image d'une application linéaire

Théorème 1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
Si V est un sous-espace vectoriel de E alors $f(V)$ est un sous-espace vectoriel de F.
Si W est un sous-espace vectoriel de F alors $f^{-1}(W)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition 6. *Soit $f : E \longrightarrow F$*

1. *On appelle image de f et on le note Imf le sous espace vectoriel $f(E)$ de F.*
   Le rang d'une application linéaire est l'entier naturel égal à la dimension de son image, on note $rg(f) = dim(Imf)$.
2. *On appelle noyau de f et on note$Kerf$ le sous espace vectoriel $f^{-1}(\vec{0})$ de E.*

Méthode

Pour **déterminer l'image** d'une application linéaire f, on détermine les valeurs prises par f, c'est à dire les $y \in F$ tels qu'il existe $x \in E$ pour lesquels $y = f(x)$.
Pour déterminer le noyau d'une application linéaire f, on résout dans E l'équation $f(x) = \vec{0}_F$.

Exemple 1. *Déterminons le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$*
Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(u) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ x = -y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Nous allons a présent déterminer l'image de f :
Soit $\vec{e_1} = (1, 0)$ et $\vec{e_2} = (0, 1)$ une base de $\mathbb{R}^2$.
Etudions leurs images : $f(\vec{e_1}) = (1, 1)$ et $f\vec{e_2} = (-1, 1)$
On a : $Im(f) = Vect((1, 1), (1, -1))$

Théorème 2. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application linéaire alors :*

1. *f est surjective, si et seulement si $Imf = F$*
2. *f est injective, si et seulement si, $Kerf = \{\vec{0}_E\}$*

Théorème 3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Soit f une application linéaire de E dans F. Alors*

$$dim(Ker(f)) + dim(Im(f)) = dim \;\; E$$

Exercice 1. *Les applications entre $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivantes sont-elles linéaires :*

1. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y, z) = x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y) = x + y + 1$
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y, z) = xy$
4. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x, y, z) = x - z$
5. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (2x + y, x - y)$
6. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (xy, x, y)$
7. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par* $f(x, y, z) = (2x + y + z, y - z, x + y)$
8. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *définie par* $f(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$

Exercice 2. *Soit* $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie pour tout* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *par* $u(x) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)$

1. *Montrer que u est linéaire.*
2. *Déterminer $Ker(u)$*

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, on définit l'application $f : E_1 \times E_2 \to E$ par $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$*

1. *Montrer que f est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de f.*
3. *Que donne le théorème du rang ?*

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$

1. *Montrer que f est une application linéaire.*
2. *Donner une base de $Ker(f)$, en déduire $dim(Im(f))$.*
3. *Donner une base de $Im(f)$*

Exercice 5. *On considère l'application* $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par :* $h(x, y) = (x - y, -3x + 3y)$

1. *Montrer que h est une application linéaire.*
2. *Montrer que h est ni injective, ni surjective.*
3. *Donner une base de son noyau et son image.*

Exercice 6. *Soit* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y, z) = (x + y + z, -x + 2y + 2z)$ *On appelle* $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^3$ *et* $\beta' = (f_1, f_2)$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^2$

1. *Montrer que f est une application linéaire*
2. *Donner une base et la dimension de $ker(f)$ et une base et la dimension de $Im(f)$'.*

Exercice 7. *Soit f l'application linéaire* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *définie par :*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 + x_2 - 3x_3, -x_2 + 2x_3)$$

Et soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer $f(e_1), f(e_2)$ et $f(e_3)$ et déterminer les coordonnées de chacun dans la base canonique.*
2. *Déterminer une base de $Ker(f)$ et une base de $Im(f)$.*

Exercice 8. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x, y) = (x + y, x - y)$. *Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer son automorphisme réciproque.*

Exercice 9. *Pour chaque cas suivant, déterminer $Kerf$ et Imf et en déduire si f est injective, surjective, bijective.*

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x, y) = (2x + y, x - y)$
2. $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *tel que* $f(x, y, z) = (2x + y + zyx - z, x + y)$
3. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *tel que* $f(x, y) = (y, 0, x - 7y, x + y)$

Exercice 10. *Soit* $J : \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *définie par* $J(f) = \int_0^1 f(t)dt$. *Montrer que J est une forme linéaire.*

Exercice 11. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $rg(u + v) \leqslant rg(u) + rg(v)$*