CORRIGE TD4

Trigonométrie et complexes :

Pour la loi de Moivre, passer par la forme : $cos(nx) + i\,sin(nx) = (cos\,x + i\,sin\,x)^n$ et utiliser les formules d'addition dans l'hérédité.

$cos^3x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$

$sin^3x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$

$cos^4x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$sin^4x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$cos^5x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x$

$sin^5x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$

$cos(3x) = 4\,cos^3x - 3\,cos\,x$

$sin(3x) = -4\,sin^3x + 3\,sinx$

$cos(4x) = 8\,cos^4x - 8\,cos^2x + 1$

$sin(4x) = 8\,sin\,x\,cos^3x - 4\,sinx\,cos\,x$

$cos(5x) = 16\,cos^5x - 20\,cos^3x + 5\,cos\,x$

$sin(5x) = 5cos^4x\,sinx - 10\,cos^2x\,sin^3x - sin^5x$

Complexes et géométrie :

(i) : médiatrice de [AB] où A(2) et B(-5)

(ii) : c'est un cercle : calcul délicat

(ii) : $\left|\frac{z+3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow |z+3| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(z-5)\right| \leftrightarrow |z+3|^2 = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}(z-5)\right|^2$

$$|x+iy+3|^2 = \frac{1}{2}|x+iy-5|^2 \leftrightarrow (x+3)^2 + y^2 = \frac{1}{2}[(x-5)^2 + y^2]$$

$$\leftrightarrow 2(x+3)^2 + 2y^2 = (x-5)^2 + y^2$$

$$\leftrightarrow x^2 + 22x + y^2 = 7 \leftrightarrow (x+11)^2 - 121 + y^2 = 7$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre (-11 ;0) et de rayon $\sqrt{128}$.

(iv) : On rappelle que l'argument d'un complexe M est l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$:

$$\arg\left(\frac{z_B}{z}\right) = \arg\left(\frac{z}{z_A}\right) \leftrightarrow \arg z_B - \arg z = \arg z - \arg z_A$$

$\leftrightarrow (\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{\imath}, \overrightarrow{OA}) \leftrightarrow (\vec{\imath}, \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OM}, \vec{\imath}) = (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OA}, \vec{\imath})$

$\leftrightarrow (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$d'après la relation de Chasles.

Finalement, l'ensemble des points cherchés est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

(privée du point O, pour que le quotient ne s'annule pas !)iv) :