

TD4 : Trigonométrie et complexe

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Lignes trigonométriques

- (i) A l'aide du cercle trigonométrique, compléter les égalités suivantes.

$\cos(-x) =$	$\sin(-x) =$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) =$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) =$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$
$\cos(\pi - x) =$	$\sin(\pi - x) =$

- (ii) Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes :

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) =$	$\sin(x - \frac{\pi}{6}) =$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$	$\cos(x - \frac{\pi}{6}) =$

- (iii) Etablir les formules suivantes (appelées formules de Simpson) :

(a) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

(b) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

(c) $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

- (iv) Etablir les formules de factorisation suivantes :

(a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$

(b) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

(c) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$

(d) $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

- (v) Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

(a) $\sin(3x + \frac{\pi}{2}) = 1$

(b) $\cos(3x - \pi) = \sin(x)$

(c) $\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = 1$

2 Trigonométrie et complexes

- (i) On rappelle la définition de l'exponentielle complexe : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

- (a) Illustrer cette définition par un dessin.

- (b) Démontrer à l'aide de la définition de l'exponentielle complexe les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

- (c) Démontrer par récurrence la formule de Moivre : $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$

- (d) Expliquer la méthode pour linéariser $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$.

- (e) Quelle méthode peut-on utiliser pour développer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$.

- (ii) Linéariser les expressions suivantes :
- | | |
|---------------|---------------|
| $\cos^3(x) =$ | $\sin^3(x) =$ |
| $\cos^4(x) =$ | $\sin^4(x) =$ |

- (iii) Développer les expressions suivantes :
- | | |
|--------------|--------------|
| $\cos(3x) =$ | $\sin(3x) =$ |
| $\cos(4x) =$ | $\sin(4x) =$ |

3 Complexes et géométrie

Déterminer l'ensemble des points complexe du plan tels que :

(i) $|\frac{z-2}{z+5}| = 1$

(ii) $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(iii) $\arg(\frac{z_B}{z_A}) = \arg(\frac{z}{z_A})$

(iv) $|z - 3i + 5| = |z + 1|$