TD 2 : Bases et dimensions

2020/2021

E3FI
Semestre 2

1 Bases

Définition 1. *On dit qu'une famille $F = (\vec{e_i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est génératrice de E, si tout vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille F, c'est à dire :*

$$\forall \vec{x} \in E, \exists(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}_n \quad | \ \vec{x} = \lambda_1\vec{e_1} + ... + \lambda_n\vec{e_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\vec{e_i} \tag{1}$$

Définition 2.

(i) *On dit que la famille $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de E est **libre** si elle vérifie $\forall\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \lambda_1e_1 + ... + \lambda_ne_n = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = ...\lambda_n = \vec{0}$. On dit que les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont linéairement indépendants.*

(ii) *On dit que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est **liée** si elle n'est pas libre ce qui signifie $\exists\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$,tel que $\lambda_1 e1 + ...\lambda_n en = 0$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \neq (0, ..., 0)$. Une égalité $\lambda_1e_1 + \ldots + \lambda_ne_n = 0$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ non tous nuls est appelée relation linéaire sur les vecteurs $e_1, ..., e_n$.*

Proposition 1. *Soient $n \geq 2$ et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :*

(i) *$(e_1, ...e_n)$ est liée*

(ii) *L'un des vecteurs $e_1, ..., e_n$ est combinaisson linéaire des autres.*

Définition 3. *On dit qu'une famille $\mathbb{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n} = (e_1, ..., e_n)$ de vecteurs de E est une base de E si celle-ci est libre et génératrice.*

2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition 1. *Soit un espace vectoriel engendré par n vecteurs.
Alors toutes les bases de E possèdent le même nombre d'éléments. Cet entier s'appelle la **dimension** de E.
On a $dim(E) \leq n$*

Par convention, on pose $dim(\vec{0}) = 0$.

Lemme 1. *Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs. Alors toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n .*

Théorème 1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors :*
- *Toute famille libre $\mathcal{F}$ de E vérifie $card(\mathcal{F}) \leq dim(E)$ et $card(\mathcal{F}) = dim(E)$ mplique que $\mathcal{F}$ est une base de E.*
- *Toute famille génératrice de E a au moins $dim(E)$ éléments. Si une famille génératrice de E a exactement $dim(E)$ éléments, alors c'est une base de E.*

Corollaire 1. *Pour vérifier qu'une famille $\mathcal{F}$ de est une base, il faut et il suffit que :*

$$card(\mathcal{F}) = dim(E) \text{ et } \mathcal{F} \text{ soit une famille libre ou génératrice de } E$$

Proposition 2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous espace vectoriel de E alors :*

(i) *F est de dimension finie et $dim(F) \leq dim(E)$*

(ii) *si $dim(F) = dim(E)$ alors $F = E$*

3 Exercices

Exercice 1. *Soient dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $v_1 = (1,1,0)$,$v_2 = (4,1,4)$ *et* $v_3 = (2,-1,4)$.
La famille (v_1, v_2, v_3) *est-elle libre ?*

Exercice 2. ***Familles libres et Familles liées :***

(i) *On considère dans* $\mathbb{R}^3$ *les vecteurs* $v_1 = (2,-1,0)$ *et* $v_2 = (-4,2,0)$. *Peut-on trouver un vecteur* w *tel que* (v_1, v_2, w) *soit libre ? Si oui, construisez-en un.*

(ii) *On suppose que* v_1, v_2, v_3, v_4 *sont des vecteurs linéairement indépendant de* $\mathbb{R}^4$.

   (a) *Les vecteurs* $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, v_4 - v_1$ *sont-ils linéairement indépendant ?*

   (b) *Les vecteurs* $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4 + v_1$ *sont-ils linéairement indépendant ?*

   (c) *Les vecteurs* $v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ *sont-ils linéairement indépendant ?*

Exercice 3. ***Familles liées et bases :*** *Soient* $u = (1,-1,1)$, $v = (0,-1,2)$, $w = (1,-2,3)$. *Montrer que* (u, v, w) *est liée et donner une base de* $F = \mathrm{Vect}(u, v, w)$,

Exercice 4. ***Bases de sous-espaces vectoriels :*** *Soient* $e_1 = (0,1,-1)$, $e_2 = (-1,2,1)$, $e_3 = (1,1,-4)$, $e_4 = (1,-3,0)$ *et* $e_5 = (-1,4,-1)$.
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ *et* $G = \mathrm{Vect}(e_4, e_5)$.

(i) *La famille* (e_1, e_2, e_3) *est-elle libre ?*
En déduire une base de F,

(ii) *Donner une base de* G,

(iii) *Donner une équation cartésienne de* G.

Exercice 5. *Les familles suivantes sont-elles libres ? Justifier.*

(i) $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,2,2), v_3 = (3,7,1)$ *dans* $\mathbb{R}^3$

(ii) $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,1), v_3 = (1,1,1)$

(iii) $v_1 = (1,2,1,2,1), v_2 = (2,1,2,1,2), v_3 = (1,0,1,1,0), v_4 = (0,1,0,0,1)$ *dans* $\mathbb{R}^5$.

(iv) $v_1 = (2,4,3,-1,-2,1), v_2 = (1,1,2,1,3,1), v_3 = (0,-1,0,3,6,2)$ *dans* $\mathbb{R}^6$

(v) $v_1 = (2,1,3,-1,-4,-2), v_2 = (-1,1,-2,2,-3,3), v_3 = (1,5,0,4,-1,7)$ *dans* $\mathbb{R}^6$

Exercice 6. *Soient dans* $\mathbb{R}^4$ *les vecteurs* $u_1 = (1,2,3,4)$ *et* $u_2 = (1,-2,3,-4)$. *Peut-on déterminer* x *et* y *pour que* $(x,1,y,1) \in Vect(u_1, u_2)$ *? De même, pour que* $(x,1,1,y) \in Vect(u_1, u_2)$

Exercice 7. *Dans* $\mathbb{R}^4$ *on considère l'ensemble des vecteurs* (x_1, x_2, x_3, x_4) *vérifiant* $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. *L'ensemble* E *est-il un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *? Si tel est le cas, en déterminer une base.*

Exercice 8. *Soient* $u_1 = (2,3,-1), u_2 = (1,-1,-2), u_3 = (3,7,0), u_4 = (5,0,-7)$. *On considère les sous-espaces vectoriels* $E = Vect(u_1, u_2)$ *et* $F = Vect(u_3, u_4)$. *Montrer que* $E = F$.

Exercice 9. *On considère les vecteurs de* $\mathbb{R}^4$ *suivant,* $u_1 = (0, 1-2, 1), u_2 = (1,0,2,-2), u_3 = (3,2,2,-1), u_4 = (0,0,1,0)$,.
Les propositions sont-elles vraies ou fausses (justifier).

(i) $Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect((1,1,0,0), (-1,1,-4,2))$

(ii) $(1,1,0,0) \in Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)$

(iii) $dim(Vect(u_1, u_2) \cap Vect(u_2, u_3, u_4)) = 1$

(iv) $Vect(u_1, u_2) + Vect(u_2, u_3, u_4) = \mathbb{R}^4$

Exercice 10. *Soient* $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (2, -2, -1), u_3 = (1, 1, -1)$ *et* $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ *et* $F = Vect(u_1, u_2)$.

(i) *Montrer que* E *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^3$ *et en déterminer une base.*

(ii) *La famille* (u_1, u_2, u_3) *est-elle libre ?*

(iii) *A t-on* $u_3 \in F$ *? et* $u_3 \in E$ *?*

(iv) *Donner une base de* $E \cap F$.

(v) *Soit* $u_4 = (-1, 7, 5)$. *A t-on* $u_4 \in F$ *? Et* $u_4 \in E$ *?*

Exercice 11. *Soit* E *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *obtenu par les combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs* e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 *où* $e_1(x) = 1, e_2(x) = \sin 2x, e_3(x) = \cos 2x, e_4(x) = \sin 4x e_5(x) = \cos 4x$

(i) *Montrer que* $(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)\}$ *est une base de* E.

(ii) *Montrer que les fonctions de la forme* $\alpha_1 + \alpha_2 \sin 2x + \alpha_3 \cos 2x + \alpha_4 \sin^2 2x + \alpha_5 \cos^2 2x$ *forment un sous espace vectoriel* F *de* E. *Trouver une base de* F.