TD4 : Calculs matriciel

2020/2021

E3FI
Semestre 2

Nous verrons dans le prochain TD qu'il existe un lien étroit entre les matrices et les applications linéaires.
A une matrice on associe naturellement une application linéaire. Et réciproquement, étant donné une application linéaire, et des bases pour les espaces vectoriels de départ et d'arrivée, on associe une matrice.

1 Exercices

Exercice 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Calculer si c'est possible : $A \times B, B \times A, C \times D, D \times C, A \times E, C \times E$

Exercice 2. *Déterminer le rang des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -2 \\ -7 & -7 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & -6 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

Exercice 3. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;
1) Calculer $A^3 - A$. *2) En déduire que* A *est inversible.* *3) Déterminer* A^{-1}

Exercice 4. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$;

(i) *Vérifier que* $A^2 - 5A + 4I_2 = 0$

(ii) *En déduire que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.*

On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

(iii) *Montrer que* $B^2 - 5B = 0$

(iv) *En déduire que la matrice B n'est pas inversible.*

Exercice 5. *Soit M la matrice de $M_3(\mathcal{R})$ définie par :* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(i) *Calculer par la méthode de votre choix la matrice inverse de M.*

(ii) *Résoudre à l'aide de l'inverse de M le système suivant où m est un réel fixé.* $\begin{cases} x_1 & & & -x_3 & = 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & +4x_3 & = 1 \\ & & +x_2 & +x_3 & = 2m \end{cases}$

Exercice 6. ***Inversion de matrices :*** *Inverser les matrices suivantes (Ne pas oublier de vérifier les résultats trouvés) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. *Calculer les déterminants des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. *Soit la matrice carrée A de taille 2 définit ainsi :* $A = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 25 & 30 \end{pmatrix}$; .

(i) *Vérifier la relation :* $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$

(ii) *En déduire que la matrice A est inversible si et seulement si* $(ad - bc) \neq 0$

(iii) *Donner sa matrice inverse lorsqu'elle est inversible.*

Exercice 9. *Soient A et B deux matrices non nulles.*
Montrer que si $A \times B = B \times A = 0$ alors A et B ne sont pas inversibles.
Indication : *supposez que A est inversible et montrer une contradiction.*