Cours 1 : Espaces vectoriels

2020/2021

E3FI
Semestre 2

1 Généralités sur les espaces vectoriels

Dans la suite, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. *Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée "$+$", et une loi de composition externe notée "$\cdot$".*
E est un espace vectoriel *sur $\mathbb{K}$ (on dit aussi que E est un $\mathbb{K}$ e.v.) si il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) *Pour la loi de composition interne :*
   (a) *si $(a,b) \in E^2$, alors $a+b \in E$ (loi de composition interne),*
   (b) *pour tous $(a,b,c) \in E^3$, on a $(a+b)+c = a+(b+c)$ (associativité),*
   (c) *il existe $0_E \in E$ tel que, pour tout $a \in E$, on a $0_E + a = a + 0_E = a$ (0_E est l'* "élément neutre" *pour $+$),*
   (d) *pour tout $a \in E$, il existe $b \in E$ tel que $a+b = b+a = 0_E$, où 0_E est l'élément neutre (b est appelé* "symétrique de a"*),*
   (e) *pour tous $(a,b) \in E^2$, on a $a+b = b+a$ (commutativité).*

(ii) *Pour la loi de composition externe :*
   (a) *pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $a \in E$, on a $\lambda \cdot a \in E$,*
   (b) *pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tous $(a,b) \in E^2$, on a $\lambda \cdot (a+b) = (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot b)$ (distributivité de la loi externe par rapport à la loi interne),*
   (c) *pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, pour tout $a \in E$, on a $(\lambda + \mu) \cdot a = (\lambda \cdot a) + (\mu \cdot a)$ (associativité mixte),*
   (d) *il existe $1 \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $a \in E$, $1 \cdot a = a$ (1 est* "l'élément neutre" *pour $\cdot$).*

Les éléments de E sont appelés vecteurs, et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.

Remarque 1. *Certains axiomes peuvent être vérifiés en même temps. Par exemple :*
— *(i)(a) et (ii)(a) en vérifiant directement que pour $(u,v) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda u + v \in E$.*

Remarque 2. *Si $a \in E$, alors on dit que $-a$ est son opposé.*

Proposition 1. *Si E et F sont deux espaces vectoriels, l'ensemble produit $E \times F$ défini par les couples (u,v) où $u \in E$ et $v \in E$ peut être muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel avec les opérations suivantes :*

(i) $(u,v) + (u',v') = (u+u', v+v')$
(ii) $\lambda(u,v) = (\lambda u, \lambda v)$ *avec* $\lambda \in \mathbb{R}$

2 Sous espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 1. *On dit que F est un sous espace vectoriel de E (noté s.e.v) si $F \subset E$ et si $(F, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

Proposition 2. *Soit $F \subset E$. F est un sous espace vectoriel de E si et seulement si :*

(i) $F \neq \emptyset$
(ii) $\forall (x,y) \in F^2 \quad x+y \in F$
(iii) $\forall x \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x \in F$

Corollaire 1. *Soit F un sous-ensemble de E. F est un sous-espace vectoriel de E si :*

(i) $0 \in F$
(ii) $\forall (x,y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$

Définition 2. *Soit E un e.v., et A une partie de E. On appelle e.v. engendré par A le plus petit s.e.v. (au sens de l'inclusion) de E qui contient A. Il est noté* $\mathrm{Vect}(A)$. *On a :*

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ a \in E\,;\, \exists n \in \mathbb{N},\, \exists (a_1, \ldots, a_n) \in E^n,\, \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ a = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i a_i \right\}$$

$Vect(A)$ est l'ensemble des sommes finies d'éléments du type $\lambda_i a_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $a_i \in A$.

3 Exercices

La correction du TD vous sera donnée à la fin du cours. Celle-ci vous permettra de vérifier vos réponses pour les exercices non corrigés en cours et vous entrainer pour le partiel.

Exercice 1. *Parmi les ensembles décrits ci-dessous, déterminer ceux qui sont des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$.

(i) *Les suites réelles qui tendent vers plus l'infini,*

(ii) *Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui satisfont la récurrence* $u_{n+1} = 3u_n - 2$,

(iii) *Les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui satisfont la récurrence* $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$,

(iv) *L'ensemble des points du plan,*

Exercice 2. ***Sous-espaces vectoriels :*** *Soit* A *et* B *deux sous-espaces vectoriels d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*. Les sous ensembles suivants (munis des lois induites par celles de* E*) sont-ils des sous-espaces vectoriels de* E *?*

(i) $A \cap B$

(ii) $A \cup B$

(iii) $A + B$ *(cf rappel ci dessous)*

Rappel : *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels.*
La somme $F + G$ *est l'ensemble des vecteurs de* E *qui s'écrivent sous la forme* $v = f + g$*, avec* $f \in F$ *et* $g \in G$.

Exercice 3. *Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$

(i) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } 3x - 7y = z\}$

(ii) $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 - z^2 = 0\}$

(iii) $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y - z = x + y + z = 0\}$

(iv) $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x^2 + y^2)z = 0\}$

Exercice 4. ***Sous-espaces engendrés :***

(i) *Soit* F *un sous-espace vectoriel de* E *et* $u_1, u_2, \ldots, u_p$, $p \in \mathbb{N}$, *des vecteurs de* F.
Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_p) \subset F$.

(ii) *Dans* $\mathbb{R}^3$, *on donne* $u_1 = (1, 1, 3)$, $u_2 = (1, -1, -1)$, $v_1 = (1, 0, 1)$ *et* $v_2 = (2, -1, 0)$.
Démontrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

(iii) *Caractériser à l'aide de paramètres les éléments des espaces vectoriels engendrés par les vecteurs suivants :*

  (a) $u_1 = (1, 2, 3)$,

  (b) $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 0, 1)$.

Exercice 5. ***Exemples de sous-espaces vectoriels engendrés de*** $\mathbb{R}^3$ ***:*** *Parmi les ensembles définis par les équations suivantes, préciser ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *et en donner une partie génératrice :*

(i) $x = 0$,

(ii) $x + y = 0$,

(iii) $x = y = z$,

(iv) *(A faire pour s'entrainer à la maison ou a la fin du TD)* $x + y + z = 0$ *et* $x - y + z = 0$,

(v) *(A faire pour s'entrainer à la maison ou a la fin du TD)* $x = 2t + u$, $y = 3t - 2u$, $z = t + 4u$, $t, u \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Soit* E *un espace vectoriel.*

(i) *Soient* F *et* G *deux sous-espaces de* E. *Montrer que :*

$$F \cup G \ \text{ est un sous espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

(ii) *Soit* H *un troisième sous-espace de* E. *Montrer que :*

$$G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = G + (F \cap H)$$

4 Pour aller plus loin

Exercices en plus pour s'entrainer quand les précédents ont été fait.

Exercice 7. ***Exemples d'espaces vectoriels :*** *Parmi les ensembles décrits ci-dessous, déterminer ceux qui sont des ev (si c'est le cas, on demande une vérification rigoureuse) :*

(i) *Dans le plan, la droite d'équation* $y = 3x$,

(ii) *L'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur l'intervalle* $[2, 3]$,

(iii) *Les suites réelles qui ont une limite finie,*

(iv) *Les polynômes de degré inférieur ou égal à* 4.

(v) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid 3x - 7y = z\}$

Exercice 8. ***Exemples de sous-espaces vectoriels engendrés de*** $\mathbb{R}^3$ ***:*** *Parmi les ensembles définis par les équations suivantes, préciser ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$ *et en donner une partie génératrice :*

(i) *(A faire pour s'entrainer à la maison ou a la fin du TD)* $x + y + z = 0$ *et* $x - y + z = 0$,

(ii) *(A faire pour s'entrainer à la maison ou a la fin du TD)* $x = 2t + u$, $y = 3t - 2u$, $z = t + 4u$, $t, u \in \mathbb{R}$.

Exercice 9.

(i) *Décrire les sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}$, *de* $\mathbb{R}^2$ *et de* $\mathbb{R}^3$.

(ii) *Dans* $\mathbb{R}^3$ *donner un exemple de deux sous-espaces dont l'union n'est pas un sous-espace vectoriel.*

Exercice 10. ***Somme de deux sous espaces vectoriels :*** *On dit que* F *et* G *sont en* somme directe *si et seulement si pour tout élément* v *de* $F + G$, *il existe un unique couple* (f, g) *de* $F \times G$ *tel que* $v = f + g$. *On notera alors* $F \oplus G$.

On a alors équivalence entre les assertions suivantes :

— F *et* G *sont en somme directe,*

— $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$,

— $F \cap G = \{0\}$.

(i) *Montrer que* $F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* E,

(ii) *Dans* $\mathbb{R}^3$, *montrer que* $F = \text{Vect}\big((1, 2, 0)\big)$ *et* $G = \text{Vect}\big((-1, 1, 3)\big)$ *sont en somme directe.*

Exercice 11. *Parmi les ensembles suivants, reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.*

(i) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + a = 0 \quad et \quad x + 3az = 0\}$

(ii) $E_2 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$

(iii) $E_3 = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 1\}$

(iv) $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + \alpha y + 1 \geqslant 0\}$

Exercice 12. ***Sous-espaces vectoriels supplémentaires :*** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels.*

Si $E = F \oplus G$, *alors on dit que* F *et* G *sont supplémentaires dans* E.

Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $F + G = E$ *et* $F \cap G = \{0\}$,

(ii) *tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique sous la forme* $f + g$ *avec* $f \in F$ *et* $g \in G$, *i.e. si* $f + g = f' + g'$ *alors* $f = f'$ *et* $g = g'$,

(iii) $F + G = E$ *et les hypothèses* $f \in F$, $g \in G$, $f + g = 0$ *entrainent que* $f = g = 0$.

Dans ce cas, F *et* G *sont supplémentaires.*

Exercice 13. ***Espaces supplémentaires et projections :*** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, et soient* F *et* G *deux sous-espaces vectoriels.*

Dans le cas où F *et* G *sont supplémentaires dans* E, *tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique sous la forme* $v = p_F(v) + p_G(v)$ *avec* $p_F(v) \in F$ *et* $p_G(v) \in G$.

On dit que p_F *et* p_G *sont les projecteurs sur les sous-espaces* F *et* G.

(i) *Montrer que* p_F *et* p_G *sont des applications linéaires, i.e. que* $\forall v, w \in E \times E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} p_F(\lambda v + \mu w) = \lambda p_F(v) + \mu p_F(w) \\ p_G(\lambda v + \mu w) = \lambda p_G(v) + \mu p_G(w), \end{cases}$$

(ii) *Montrer que pour* $f \in F$ *et* $g \in G$, $p_F(g) = 0$ *et* $p_G(f) = 0$.

(iii) *En déduire que* $p_F(v) = p_F(p_F(v))$ *et* $p_G(v) = p_G(p_G(v))$,

(iv) *Dans* $\mathbb{R}^3$, *on considère les sous-espaces* $F = \mathrm{Vect}(1,2,3)$ *et* $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\, x+y+z=0\}$.
Montrer qu'ils sont supplémentaires.
Exprimer $p_F(x,y,z)$ *et* $p_G(x,y,z)$ *pour tout* $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.