TD5 : Application linéaires et matrice

2020/2021

E3FI
Semestre 2

1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient p la dimension de E et $B = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Soient n la dimension de F et $B' = (f_1, ..., f_n)$ une base de F. Soit enfin $f : E \to F$ une application linéaire.

Définition 1. *La matrice de l'application linéaire f par rapport aux bases B et B' est la matrice $(a_{i,j}) \in M_{n,p}(\mathcal{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $B' = (f_1, f_2, ..., f_n)$:*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} f(e_1) & & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow f_1 \\ \\ \leftarrow f_n \end{array} \end{array}$$

En termes plus simples : c'est la matrice dont les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ B , exprimée dans la base d'arrivée B' . On note cette matrice $Mat_{B,B'}(f)$.

Remarque 1.
- *La taille de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ dépend uniquement de la dimension de E et de celle de F*
- *Les coefficients de la matrice dépendent du choix de la base B de E et de la base B' de F.*

Exemple 1. *Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + 3x_3)$. Il est utile d'identifier les vecteurs lignes et colonnes, ainsi f peut être vue comme l'application : $f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$ Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (f_1, f_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Donnons la matrice de f dans les bases B et B'. On a $f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = f_1 + f_2$ la première colone de $Mat_{B,B'}(f)$ est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ De même on a $f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -2) = f_1 - 2f_2$ et $f(e_3) = f(0, 0, 1) = (-1, 3) = -f_1 + 3f_2$ on a donc la deuxième et la troisième colone, on en déduit :*

$$Mat_(B, B')(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

On va maintenant changer la base de l'esapce de départ et celle de l'espace d'arriver. Soient les vecteurs :

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On montre que $B_0(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et que $B'_0 = (\phi_1, \phi_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Nous allons a présent déterminer la matrice de f dans las base B_0 et B'_0. on a : $f(\epsilon_1) = f(1,1,0) = (2,-1) = 3\phi_1 - \phi_2$, $f(\epsilon_2) = f(1,0,1) = (0,4) = -4\phi_1 + 4\phi_2$ et $f(\epsilon_3) = f(0,1,1) = (0,1) = -\phi_1 + \phi_2$, on a donc :

$$Mat_{B_0,B'_0} \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate bien que la matrice dépend du choix de la base.

2 Exercices

Exercice 1. (i) *On considère l'application linéaire :*
$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ *tel que* $f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \to (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4)$.

(ii) *Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$?*

(iii) *Déterminer le noyau de f. L'application linéaire f est-elle injective ?*

(iv) *Quelle est l'image de f ? L'application f est-elle surjective ?*

(v) *Soit y_1, y_2 deux réels, préciser un vecteur $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = (y1, y2)$.*

Exercice 2. *Soit $u : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $e = (e_1, e_2, ..., e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $f = (f_1, ..., f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.*
Dans cette partie, on suppose que $p = 3$ *et* $q = 2$.
Et de plus : $u(e_1) = f_1 + 2f_2, u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$

(i) *Déterminer l'image du vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ par u*

(ii) *Déterminer la matrice u de la base e dans la base f.*

(iii) *Déterminer le noyeau et l'image de u.*

A présent, on suppose que $p = 3, q = 3$ ***et*** $e = f$***.Et de plus :*** $u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3, u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ ***et*** $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

(i) *Déterminer l'image d'un vecteur $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ par u.*

(ii) *Déterminer la matrice de u de la base e dans la e.*

(iii) *Déterminer le noyeau et l'iamge de u.*

Exercice 3. *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est* $A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$
Montrer que les vecteurs $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans les base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$

(i) *Déterminer une base du noyeau de f.*

(ii) *Déterminer une base de l'image de f. Donner le rang de A.*

Exercice 5. *On considère l'application $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$*
Soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $B' = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$

(i) *Quelle est la matrice de A dans ces bases canoniques ? Préciser* $f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4)$.

(ii) *Donner une base échelonnée de* $Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ *par rapport à la base* B'.

(iii) *En déduire la dimension de l'image de f, la surjectivité de f et la dimension du noyeau de f.*

(iv) *Déterminer une base du noyeau de f*

Exercice 6. ***Diagonalisation de matrices :*** *Soient E et F deux espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Soient $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ deux bases respectivement de E et F, où :*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On notera

$$\mathrm{Id} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(i) *Calculer* $\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(\mathrm{Id})$.

(ii) *Calculer* $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(\mathrm{Id})$ *de deux manières différentes.*

(iii) *Soit*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) *Pour tout vecteur* $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, *que vaut* $f(x, y, z)$ *?*

(b) *Inverser* $\mathrm{mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)$ *?*

(c) *Calculer* $\mathrm{mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(f)$ *de deux manières différentes.*