TD9

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Un peu de logique

(i) Compléter les tables suivantes :
On adoptera la notation $\bar{A} = non(A)$. Compléter par V=vrai ou F=Faux

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	A et B	$\bar{A}$ et B	$\bar{A}$ et $\bar{B}$	A et $\bar{B}$	$\overline{A \ \ et \ \ B}$
V	V							
V	F							
F	V							
F	F							

Compléter par V=vrai ou F=Faux

A	B	A ou B	$\bar{A}$ ou B	$\bar{A}$ ou $\bar{B}$	A ou $\bar{B}$	$\overline{A \ \ ou \ \ B}$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

(ii) Quelles colonnes sont identiques ? Que peut-on en conclure ?

(iii) Compléter l'énoncé si dessous des lois de Morgan :
- La négation de la conjonction de deux propositions est équivalente à la disjonction des propositions, ce qui signifie que :

$$\overline{A \cap B} =$$

De même, la négation de la . . . . *de deux propositions est équivalente à la* . . . . *des négations des deux propositions, ce qui signifie que :*

$$\overline{A \cup B} =$$

(iv) Donner un exemple de la vie de tous les jours.

(v) En considerant que le "ou" mathématique est inclusif, êtes vous un garcon ou une fille ?

(vi) Démontrer les énoncés suivants par disjonction des cas :
— "Pour tout entier n, le produit $n(n+1)$ est pair"
— La fonction cube croit sur $]-\infty;+\infty[$
Indication : on pourra utiliser, après l'avoir démontré que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

(vii) On définit l'implication $(A \Rightarrow B)$ par la table de vérité suivante :

A	V	V	F	F
B	V	F	V	F
$A \Rightarrow B$	V	F	V	V

Remarque : ce n'est pas nécessairement intuitif, mais " $Faux \Rightarrow Vrai$" et "$Faux \Rightarrow Faux$" sont toutes deux vraies.
Quelle est la négation de $A \Rightarrow B$?

(viii) Démontrer que $A \Rightarrow B$ et sa contraposée $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ ont la même table de vérité.

(ix) En définissant "$A \Leftrightarrow B$" comme $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$, donner sa table de vérité.
Commenter l'équivalence suivante : $2 < 0 \Leftrightarrow$ Paris est en Espagne.

(x) On rappelle des règles d'usage des quantificateurs :
— On peut échanger deux quantificateurs identiques (deux "il existe" ou deux "pour tous")
— On ne peut pas échanger deux quantificateurs différents
— La négation de $\forall x, P(x)$ est : $\exists x$ tel que $\overline{P(x)}$
— La négation de $\exists x, P(x)$ est : $\forall x$ tel que $\overline{P(x)}$
— La négation de $\forall x, P(x) \ \ ou \ \ Q(x)$ est : $\exists x$ tel que $\overline{P(x)} \ \ et \ \ \overline{Q(x)}$
— La négation de $\forall x, P(x) \ \ et \ \ Q(x)$ est : $\exists x$ tel que $\overline{P(x)} \ \ ou \ \ \overline{Q(x)}$

Ecrire la négation des propositions suivantes :
(a) $2 < x \leqslant y$
(b) $(x, y) = (0, 0)$
(c) $xy = 0$
(d) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
(e) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall x \in I |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$
(f) $\exists x \in \mathbb{R} : -1 < f(x) < 1$

(xi) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x < y$
(b) $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
(c) $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x < y$
(d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$

2 Dérivation partielle

Dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une d'elle revient à considérer les autres variables comme des constantes. Formellement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0}$$

On définit les dérivées partielles d'ordre deux par :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))$$

Remarques : On parle de dérivées croisées quand on dérive par deux ou plusieurs variables différentes et de dérivée seconde quaand on dérive deux fois par rapport à la même variable.

(i) On donne $f(x, y, z) = ax + bxyz + z^2$ et $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Donner les expressions des dérivées suivantes :
(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$
(b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$
(c) $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$
(d) $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$
(e) $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$

(ii) On donne $h(x, y, z) = 3x\frac{y^2}{z} + yz$. Donner les expressions des dérivées suivantes :

1) $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z)$	2) $\frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z)$	3) $\frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z)$
4) $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y, z)$	5) $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y, z)$	6) $\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}(x, y, z)$
7) $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y, z)$	8) $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z}(x, y, z)$	9) $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial z}(x, y, z)$
10) $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y, z)$	11) $\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial x}(x, y, z)$	12) $\frac{\partial^2 h}{\partial z \partial y}(x, y, z)$

Vérifier que les dérivées croisées sont égales (théorème de Schwartz).

3 Produit vectoriel

(i) Définition intuitive :
Etant donnés deux vecteurs de l'epace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, on appelle le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et } \vec{v}.$$
$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe de l'espace}$$
$$||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$$

Soit $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, l'expression analytique du produit vectorielle, que l'on admettra est la suite :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

(ii) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants :
A) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ puis $\vec{v} \wedge \vec{u}$ où $\vec{u}(2, 3, 4)$ et $\vec{v}(5, 6, 7)$
B) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ où $\vec{u}(0, 1, 5)$ et $\vec{v}(2, 8, 4)$

(iii) Démontrer que l'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $||\overline{AB} \wedge \overline{AC}||$

(iv) Démontrer les propriétés suivantes (en passant par les coordonnées) :
A) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
B) $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w}).\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$

(v) A l'aide du produit vectoriel, trouver une équation de la perpendiculaire commune aux droites sécantes dont la représentation paramétrique est donnée ci-dessous :

$$(D_1) : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 2 - 3t \quad ; \quad t \quad \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 5t \end{cases} \qquad (D_2) : \begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \quad ; \quad t \quad \in \mathbb{R} \\ z = -3 + t \end{cases}$$

(vi) On considère les points $A(0, 0, 1); B(4, 2, 3)$ et $C(-3; 1; 1)$. A l'aide du produit vectoriel, trouver un vecteur normal au plan (ABC)