TD7 : Paramétrage dans l'espace

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Comment repérer un plan dans l'esapce

Rappels

(i) Un plan peut être défini par la donnée de 3 points, ou de deux droits sécantes, ou de deux droites parallèles non confondues, ou enfin d'un point et d'un vecteur normal.

(ii) **Définition vectorielle d'un plan :**
Le plan P de l'espace passant par le point A et devecteur noraml $\vec{n}(a,b,c)$ est l'ensemble des points de l'espace tels que : $\vec{n}.\vec{AM} = 0$

(iii) **Théorème :** Soit P un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ (avec $(a,b,c) \neq 0$. Alors il admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.

(iv) **Théorème :** La distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace à un plan P est donnée par la formule $d(A,P) = \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

(v) Deux plans de l'espace sont soit parallèles, soit sécants suivant une droite.

(vi) **Corollaire :** Si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels, une droite est caractérisé par le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+cz+d & = & 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' & = & 0 \end{array}\right.$ Il est appelé **système d'équations cartésiennes** de cette droite.

(vii) **Propriété :** deux plan P_1 et P_2 de l'espace sont orthogonaus si et seulement si leurs vecteurs normaux $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont orthogonaux.

(viii) **Propriété :** Un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est normal à deux vecteurs non colinaires de ce plan.

Exercice 1. (i) *Tracer la représentation graphique du plan d'équation* $4x + 2y + z - 4 = 0$

(ii) *On donne P passant par $A(2;1;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(3;2;1)$. Donner une équation cartésienne de P.*

(iii) *On donne P d'équation cartésienne $2x+y-3z+7=0$. Donner l'équation de Q, le plan parallèle à P et passant par $A(3;-2;5)$.*

(iv) *On considère $A(0;0;1), B(4;2;3)$ et $C(-3;1;1)$. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).*

(v) *On considère (ABC) : $x-2y+z-9=0$ et $P : x-2y+z-5=0$. Déterminer la position relative des deux plans.*

(vi) *On considère les points suivants : $A(3;-2;2), B(6;-2;-1), C(4;0;1)$. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire son aire. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1;-2;1)$ est normal au plan (ABC). Calculer la distance du point D au plan (ABC). Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.*

(vii) *Démontrer les résultats des propriétés (iii) et (iv)*

2 Comment repérer une droite dans l'espace.

2.1 Par un système d'équations paramétriques (ou "représentation paramétrique")

(i) **Théorème :** Deux droites de l'espace peuvent être non coplanaires ou coplanaires. Dans le second cas, elles sont soit sécantes, soit parallèles.

(ii) **Définition :** Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsqu'elles possèdent des vecteurs directeurs orthogonaux. On rappelle que pour $\vec{u}(x,y,z)$ et $\vec{u'}(x';y';z')$ on a : $\vec{u}.\vec{u'} = 0 \leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$

(iii) **Théorème :** Soit D une droite passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a,b,c)$. Alors un point $M(x,y,z)$ appartient à D si et seulement si, il existe un réel t tel que : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + at \\ y & = & y_A + bt \\ z & = & z_A + ct \end{array}\right.$ Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite.

Exercice 2. (i) *Donner, dans l'espace qui vous entoure, un exemple de deux droites orthogonales non perpendiculaires.*

(ii) *Donner une représentation paramétrique de la droite* (Δ) *passant par l'origine et de vecteur directeur* $\vec{u}(1;-1;2)$.

(iii) *Donner une représentation paramétrique de la droite* (AB) *avec* $A(1;2;-1)$ *et* $B(-2;4;0)$. *Les points suivants appartiennent-ils à* (AB) : $M_1(-4;\frac{16}{3};\frac{2}{3})$, $M_2(\frac{11}{5};2;\frac{-8}{5})$ *et* $M_3(-\frac{3}{2};\frac{11}{3};-\frac{1}{6})$?

(iv) *Démontrer la propriété (iii).*

(v) *On donne* $C(-2;0;1)$. *Donner une représentation paramétrique de la parallèle à* (AB) *(définie à la question précedente) et passant par* C.

(vi) *On donne* $(d) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & 3-t \\ z & = & -1+t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$ *et* $(d') : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t' \\ y & = & 2-2t' \\ z & = & m+2t' \end{array}\right. \quad (t' \in \mathbb{R})$ *Etudier suivant la valeur du réel* m *l'intersection de* (d) *et* (d').

2.2 Par l'intersection de deux plans sécants

Exercice 3. (i) *Donner une représentation paramétrique de la droite* (d) *définie par :* $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+1 & = & 0 \\ -x+2y+3z & = & 0 \end{array}\right.$

3 Comment repérer une sphère de l'espace.

Exercice 4. (i) *Rappeler la définition d'une sphère. Quelle est la différence entre une sphère et une boule ?*

(ii) *Montrer que l'équation cartésienne de la sphère de centre* $O(a,b,c)$ *et de rayon* R *est :*

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

(iii) *Donner une équation cartésienne de la sphère de centre* $A(2;3;-1)$ *et de rayon* 5.

(iv) *Etudier l'intersection suivante :* $\left\{\begin{array}{rcl} (x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 & = & 10 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$

Exercice 5. *Quelle sont les parties de l'espace définies par les équations ou systèmes d'équations suivants ?*

(i) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-3t \\ y & = & -3+5t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z & = & 4+3t \end{array}\right.$

(ii) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x-y+1 & = & 0 \end{array}\right.$

(iii) $y=3$

(iv) $(x+2)^2+(y-3)^2+2(z-5)^2=-3$

(v) $(x+2)^2+(3-y)^2+(z-5)^2=9$

(vi) $x^2-2x+y^2-8z=-17$