TD6 : Valeurs propres - Vecteurs propres

2020/2021

E3FI
Semestre 2

1 Cours

Définition 1. *Un vecteur propre d'une application linéaire g est un vecteur $\vec{x}$ dont l'image $g(\vec{x})$ $(g(\vec{x}) \neq 0)$ reste colinéaire à $\vec{x}$.*

Définition 2. *Etant donnée une application linéaire g de E dans E, un vecteur $\vec{x}$ de E est un vecteur propre de g si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $g(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.*
Le nombre λ est appelé valeur propre associée au vecteur propre $\vec{x}$ pour g.

Remarque 1. *Si A est la représentation matricielle de l'application linéaire L, un vecteur propre (resp. valeur propre) de A sera par définition un vecteur propre (resp. valeur propre) de l'application linéaire L.*

Définition 3. *Si λ est une valeur propre de l'application linéaire L, on note V_λ le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres associé à la valeur propre λ.*

Rappel 1. *Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A est $det(A - \lambda Id)$ (c'est un polynôme en λ).*

Théorème 1. *Les valeurs propre d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme caractéristique.*

Exemple 1. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(i) *Montrons que le vecteur* $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé à la la valeur propre 2.*

(ii) *Montrons que le vecteur* $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre dont on déterminera la valeur propre associée.*

(iii) *Montrons que $\lambda = -1$ est une valeur propre dont on déterminera un vecteur propre associé.*

(i) $A \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.\vec{v}$

(ii) $A \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3.\vec{w}$

(iii) *On cherche (x, y, z) tel que :* $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ *ssi* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$

ssi $\begin{cases} 2x + z = -x \\ y + 2z = -y \\ 2y + z = -z \end{cases}$ *ssi* $\begin{cases} 3x = -z \\ z = -y \\ 2y = -2z \end{cases}$ *ssi* $\begin{cases} 3x = -z \\ y = -z \end{cases}$ *On a donc* $(x, y, z) = (3, 1, -1)$

2 Exercices

Exercice 1. *Calculer les valeurs propres des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -4 \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix};$$

Exercice 2. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *l'application linéaire définie par :* $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3x+4y \\ 4x-3y \end{pmatrix}$

(i) *Ecrire la matrice de* f *dans la base canonique de* $\mathbb{R}^2$*. On la notera* A*.*

(ii) *Montrer que le vecteur* $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est vecteur propre de* f*. Quelle est la valeur propre associée ?*

(iii) *Montrer que le vecteur* $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *est également vecteur propre de* f*. Quelle est la valeur propre associé ?*

(iv) *Montrer que la famille* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *forme une base de* $\mathbb{R}^2$*.*

(v) *Quelle est la matrice de* f *dans la base* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *? On la notera* D*.*

(vi) *Soit* P *la matrice dont la première colonne est le vecteur* $\vec{v}_1$ *et dont la deuxième colonne est le vecteur* $\vec{v}_2$*. Calculer* P^{-1}*.*

(vii) *Quelle relation y-a-t-il entre* A*,* P*,* P^{-1} *et* D *?*

(viii) *Calculer* A^n*, pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

Exercice 3. *Soit* M *la matrice réelle* 3×3 *suivante :*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Déterminer les valeurs propres de* M*.*

(ii) *Montrer que* M *est diagonalisable.*

(iii) *Déterminer une base de vecteurs propres et* P *la matrice de passage.*

(iv) *On a* $D = P^{-1}MP$*, pour* $k \in \mathbb{N}$ *exprimer* M^k *en fonction de* D^k*, puis calculer* M^k*.*

Exercice 4. *Soit* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^4$ *dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -3 & -3 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \\ 26 & 7 & 10 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) *Démontrer que* 1 *et* 2 *sont des valeurs propres de* f*. On admet que ce sont les seules.*

(ii) *Déterminer les vecteurs propres de* f *associés aux valeurs propres..*

(iii) *Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de f pour la valeur propre 2. Trouver des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que*

$$f(\vec{v}) = 2\vec{v} + \vec{u} \text{ et } f(\vec{w}) = 2\vec{w} + \vec{v}.$$

Exercice 5. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) *Calculer les valeurs propres de A.*

(ii) (a) *Donner une base et la dimension de chaque sous-espace propre de A.*

(b) *A est diagonalisable ; justifier cette affirmation et diagonaliser A.*