TD4 : Trigonométrie et complexe

2020/2021

E3FI
Semestre 1

1 Lignes trigonométriques

(i) A l'aide du cercle trigonométrique, compléter les égalités suivantes.

$\cos(-x) =$ cos(-x)	$\sin(-x) =$ -sin(x)
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) =$ -sin(x)	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) =$ cos(x)
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) =$ sin(x)	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) =$ cos(x)
$\cos(\pi - x) =$ -cos(x)	$\sin(\pi - x) =$ sin(x)

(ii) Exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ les expressions suivantes :

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) =$ 1/sqrt(2) (cos(x) + sin(x))	$\sin(x - \frac{\pi}{6}) =$ (sqrt(3) sin(x) - cos(x)) / 2
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) =$ -sin(x)	$\cos(x - \frac{\pi}{6}) =$ (sqrt(3) cos(x) - sin(x)) / 2

(iii) Etablir les formules suivantes (appelées formules de Simpson) :
- (a) $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- (b) $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$
- (c) $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

(iv) Etablir les formules de factorisation suivantes :
- (a) $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- (b) $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$
- (c) $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$
- (d) $\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$

(v) Résoudre les equations trigonométriques suivantes :
- (a) $\sin(3x + \frac{\pi}{2}) = 1$ x in { 2k*pi/3 | k in Z }
- (b) $\cos(3x - \pi) = \sin(x)$ x in { k pi | k in Z }
- (c) $\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = 1$ = sin(pi/6 - x) ==> x in { -pi/3 + 2k*pi | k in Z }

2 Trigonométrie et complexes

(i) On rappelle la définition de l'exponentielle complexe : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$
- (a) Illustrer cette définition par un dessin.
- (b) Démontrer à l'aide de la définition de l'exponentielle complexe les formules d'Euler : $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
- (c) Démontrer par récurrence la formule de Moivre : $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$
- (d) Expliquer la méthode pour linéariser $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$. Formule d'Euler puis moivre
- (e) Quelle méthode peut-on utiliser pour développer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$.

(ii) Linéariser les expressions suivantes : $\cos^3(x) =$ $\sin^3(x) =$ $\cos^4(x) =$ $\sin^4(x) =$

(iii) Développer les expressions suivantes : $\cos(3x) =$ $\sin(3x) =$ $\cos(4x) =$ $\sin(4x) =$
Passer par Re(-) et Im(-)

3 Complexes et géométrie

Déterminer l'ensemble des points complexe du plan tels que :

(i) $|\frac{z-2}{z+5}| = 1$ z in {-1,5 + yi | y in R} = médiatrice du segment [-5;2]

(ii) $|\frac{z-3}{z-5}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ => |z-3| = 1/sqrt(2) |z-5| => 2 [(x+3)²+y²] = (x-5)²+y² => (x+11)²+y² = 128 => cercle de rayon 8sqrt(2) et de centre (-11;0)

(iii) $\arg(\frac{z_B}{z}) = \arg(\frac{z}{z_A})$ => arg(zB) - arg(z) = arg(z) - arg(zA) => z in bissectrice (OA,OB)/{O} (arg(0) n'existe pas)

(iv) $|z - 3i + 5| = |z + 1|$ => |(x + 5) + i(y-3) | = |x+1+iy| => sqrt(x²+10x+25 + y²-6y+9) = sqrt(x²+2x+1+y²)
=> 6y = 8 x + 33 => y = 4x/3 + 11/2