Variations maths 1re

Livre du professeur

Sous la direction de

Paul DARTHOS
Lycée Jaufré Rudel, Blaye (33)

Christophe ROLAND
Lycée Paul Duez, Cambrai (59)

Auteurs

Laurent CHARLEMAGNE
Lycée Marguerite Yourcenar, Beuvry (62)

Stéphanie FAVERO
Cité scolaire Jean-Baptiste Say, Paris (75) ESPE de Paris

Paul FLAMBARD
Lycée Max Linder, Libourne (33)

Vincent JOLY
Collège Frédéric Joliot-Curie, Lallaing (59)

Marie-Christine LÉVI
Lycée Fustel de Coulanges, Massy (91) ESPE de Versailles

Armelle MORAND
Lycée Le Corbusier, Illkirch-Graffenstaden (67)

Didier REGHEM
Lycée Marguerite de Flandre, Gondecourt (59)

Christophe RIVIÈRE
Lycée Albert Einstein, Sainte-Geneviève-des-Bois (91)

Magali SCHAEGIS
Lycée Albert Schweitzer, Mulhouse (68)

Stéphane VOINOT
Lycée français d'Irlande, Dublin (AEFE)

Les directeurs de collection et les auteurs remercient chaleureusement Paolo Calciano et Tristan Perrine pour leur contribution à l'élaboration des corrigés des exercices.

Hatier

CHAPITRE 1

Suites

► *Les exercices* **1** *à* **8** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 16 et 17 du manuel

1 Modélisation d'un motif géométrique

1.

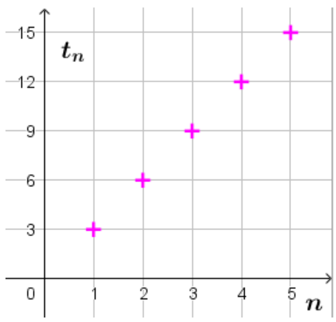
Triangle	1	2	3	4
Nombre de balles bleues	1	2	3	4
Nombre total de balles	3	6	9	12

2.Il faut 5×3 = 15 balles pour construire le triangle 5.

3. a. $t_3 = 9$, $t_4 = 12$, $t_5 = 15$.

b. $t_1 = 3 \times \mathbf{1}$, $t_2 = 3 \times \mathbf{2}$, $t_3 = 3 \times \mathbf{3}$, $t_4 = 3 \times \mathbf{4}$, $t_5 = 3 \times \mathbf{5}$.

4.



5. Pour tout nombre entier naturel non nul n, $t_n = 3 \times n$.

2 Jeu de construction

Cette activité est ouverte afin de laisser libre cours à l'imagination des élèves.
Certains élèves pourront dessiner les figures 4 et 5 afin de répondre à la question **1**.
La question **2** *incite l'élève à chercher une relation entre deux termes consécutifs de la suite* (b_n).

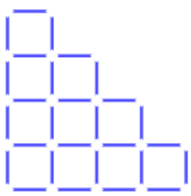
1. On a : $b_1 = 4$, $b_2 = b_1 + 2 \times 2 + 2 = 10$, $b_3 = b_2 + 3 \times 2 + 2 = 18$, $b_4 = b_3 + 4 \times 2 + 2 = 28$ et $b_5 = b_4 + 5 \times 2 + 2 = 40$.

2. Pour tout entier naturel n non nul, $b_{n+1} = b_n + (n + 1) \times 2 + 2 = b_n + (n + 2) \times 2$.

Bien faire remarquer qu'il faut connaitre b_1 *pour calculer les termes suivants.*

Version guidée

1. Figure 4.



2. Tableau complété.

Figure numéro	1	2	3	4
Nombre de bâtons	4	10	18	28

+ 6 + 8 + 10

3. Pour construire la figure 5, il faut 28 + 12 = 40 bâtons.
4.a. $b_2 = b_1 + 2 \times 3$; $b_3 = b_2 + 2 \times 4$; $b_4 = b_3 + 2 \times 5$; $b_5 = b_4 + 2 \times 6$.
b. On généralise : $b_{n+1} = b_n + 2 \times (n + 2)$.
Bien faire remarquer que la relation précédente n'est valide que pour un entier $n \geqslant 1$ et qu'il faut connaitre b_1 pour calculer les termes suivants.

3 De la suite à l'algorithme

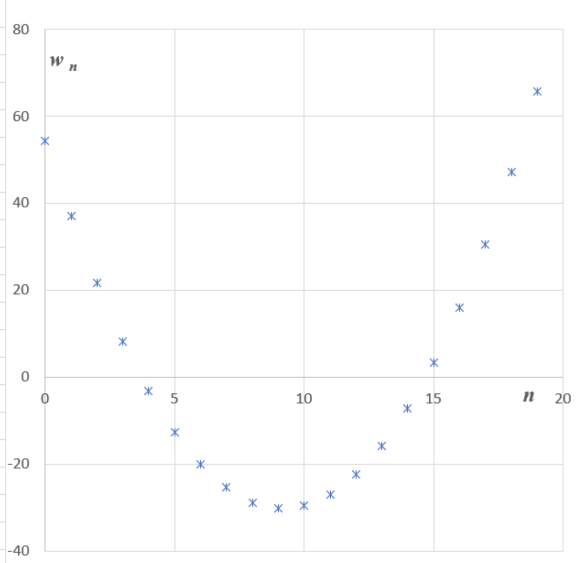
1.La suite des nombres calculés peut être modélisée par la suite (t_n) définie par :
$t_0 = 4$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = 2 \times (t_n - 3)$.
On peut également effectuer les premiers calculs pour éliminer des réponses. $t_1 = 2$ et $t_2 = -2$.
a. Faux, car $u_0 = 4$ mais $u_1 = 5 \neq t_1$.
b. Faux, car $v_0 = 4$, mais $v_1 = -2 \neq t_1$
c. Vrai.
2. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Les algorithmes 2 et 3 conviennent.
b. On obtient $t_{50} = -2\,251\,799\,813\,685\,242$ en programmant l'un des deux algorithmes corrects.

4 Suite et tableur

1. La suite (u_n) semble décroissante, (v_n) semble d'abord croissante puis constante, et (w_n) semble décroissante.
2. a. Les valeurs affichées sont arrondies par le tableur. Elles ne sont peut-être pas toutes égales.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 2 - 0{,}02^{n+1} - (2 - 0{,}02^n) \\ &= -0{,}02^{n+1} + 0{,}02^n \\ &= 0{,}02^n(1 - 0{,}02) \\ &= 0{,}98 \times 0{,}02^n. \end{aligned}$$
c. Pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = 0{,}98 \times 0{,}02^n > 0$, donc $v_{n+1} > v_n$. La conjecture est fausse ; la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
3. a. Pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -3n + 5 = f(n)$ avec $f(x) = -3x + 5$.
b. La fonction f est une fonction affine strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$ car $a = -3 < 0$.
c. La conjecture émise à la question **1** est validée.

4. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

n	w_n
0	54,4
1	37
2	21,6
3	8,2
4	-3,2
5	-12,6
6	-20
7	-25,4
8	-28,8
9	-30,2
10	-29,6
11	-27
12	-22,4
13	-15,8
14	-7,2
15	3,4
16	16
17	30,6
18	47,2
19	65,8

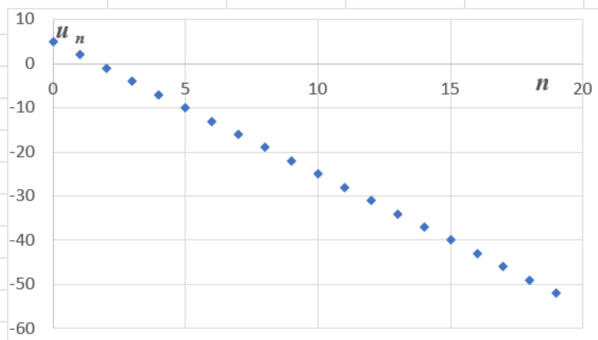


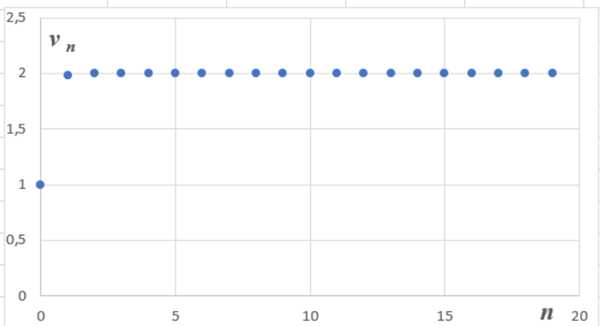
b. La conjecture faite à la question **1** est fausse. La suite (w_n) semble strictement croissante pour $n \geqslant 9$.

Questions supplémentaires

5. a.

n	u_n	v_n	w_n
0	5	1	54,4
1	2	1,98	37
2	-1	1,9996	21,6
3	-4	1,999992	8,2
4	-7	1,99999984	-3,2
5	-10	1,999999997	-12,6
6	-13	2	-20
7	-16	2	-25,4
8	-19	2	-28,8
9	-22	2	-30,2
10	-25	2	-29,6
11	-28	2	-27
12	-31	2	-22,4
13	-34	2	-15,8
14	-37	2	-7,2
15	-40	2	3,4
16	-43	2	16
17	-46	2	30,6
18	-49	2	47,2
19	-52	2	65,8





b. Quand n est de plus en plus grand, u_n semble tendre vers $-\infty$, v_n vers 2 et w_n vers $+\infty$.

Savoir-faire 1
Utiliser une formule explicite

9 **1.a.** $u_1 = -6$,

$u_2 = \dfrac{1}{4} - 14 = -13{,}25$,

$u_3 = \dfrac{1}{9} - 21 = -\dfrac{188}{9}$,

$u_4 = \dfrac{1}{16} - 28 = -\dfrac{447}{16} = -27{,}9375$

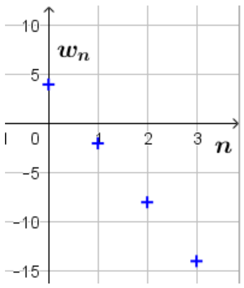
et $u_5 = \dfrac{1}{25} - 35 = -\dfrac{874}{25} = -34{,}96$.

b. $v_0 = 5 \times 2^2 - 3 = 17$, $v_1 = 5 \times 3^2 - 3 = 42$, $v_2 = 5 \times 4^2 - 3 = 77$, $v_3 = 5 \times 5^2 - 3 = 122$ et $v_4 = 5 \times 6^2 - 3 = 177$.

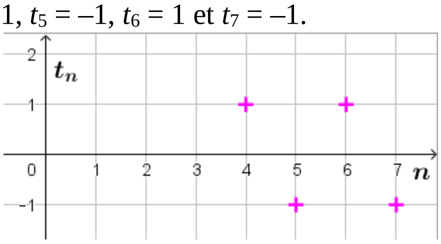
2. $u_{18} = \dfrac{1}{18^2} - 7 \times 18 = -\dfrac{40823}{324} \approx -125{,}997$ et

$v_{17} = 5 \times (17 + 2)^2 - 3 = 1\,802$.

10 **a.** $w_0 = 4$, $w_1 = -2$, $w_2 = -8$ et $w_3 = -14$.



b. $t_4 = 1$, $t_5 = -1$, $t_6 = 1$ et $t_7 = -1$.



2. $w_{n+1} = -6(n + 1) + 4 = -6n - 2$ et $t_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

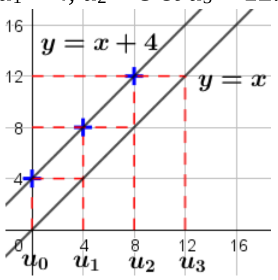
Savoir-faire 2
Utiliser une formule récurrente

11 **a.** $u_0 = 2$, $u_1 = 2u_0 + 3 = 7$, $u_2 = 2u_1 + 3 = 17$, $u_3 = 2u_2 + 3 = 37$ et $u_4 = 2u_3 + 3 = 77$.

b. $v_1 = 5$, $v_2 = v_1 + 5 \times 1 = 10$, $v_3 = v_2 + 5 \times 2 = 20$, $v_4 = v_3 + 5 \times 3 = 35$ et $v_5 = v_4 + 5 \times 4 = 55$.

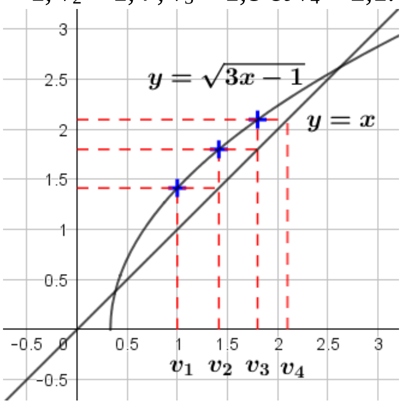
12 **a.** $f(x) = x + 4$.

On lit $u_0 = 0$, $u_1 = 4$, $u_2 = 8$ et $u_3 = 12$.



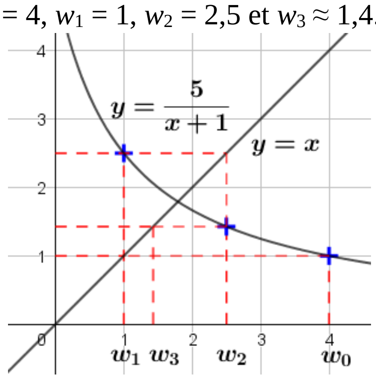
b. $f(x) = \sqrt{3x - 1}$.

On lit $v_1 = 1$, $v_2 \approx 1{,}4$, $v_3 \approx 1{,}8$ et $v_4 \approx 2{,}1$.



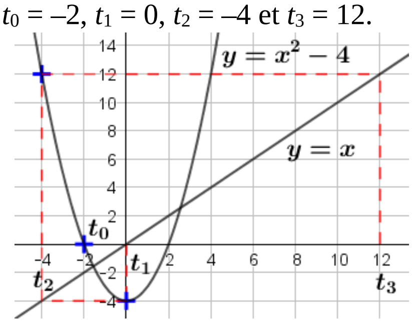
c. $f(x) = \dfrac{5}{x+1}$.

On lit $w_0 = 4$, $w_1 = 1$, $w_2 = 2{,}5$ et $w_3 \approx 1{,}4$.



d. $f(x) = x^2 - 4$.

On lit : $t_0 = -2$, $t_1 = 0$, $t_2 = -4$ et $t_3 = 12$.



Savoir-faire 3
Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

13 On note u_n, le nombre de carreaux de la figure n.
$u_1 = 1$ et pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 3$.

14 **a.** Le nombre d'abonnés en 2020 est :
$62\,000 \times 0{,}85 + 4\,500 = 57\,200$.
En 2021 : $57\,200 \times 0{,}85 + 4\,500 = 53\,120$.
b. On note a_n, le nombre d'abonnés en 2019 + n.
$a_0 = 62\,000$ et pour tout nombre entier naturel n, $a_{n+1} = 0{,}85 \times a_n + 4\,500$.

Savoir-faire 4
Déterminer les variations d'une suite en comparant des termes

15 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -3(n+1) + 8 - (-3n + 8) = -3 < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$,
$w_{n+1} - w_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 > 0$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n = 2{,}4n \geqslant 0$, donc la suite (t_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

16 **a.** Pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.
$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \dfrac{n^2 + 2n + 1}{n^2} = 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$. De plus, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. Pour tout entier naturel n, $v > 0$.
$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{4 \times 3^{n+1}}{4 \times 3^n} = 3 > 1$, donc la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
c. Pour tout entier naturel n, $w_n > 0$.
$\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{2^{n+1}}{3^{n+2}} \times \dfrac{3^{n+1}}{2^n} = \dfrac{2}{3} < 1$, donc la suite (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
d. Pour tout entier naturel n, $t_n > 0$.
$\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{3}{n+3} \times \dfrac{n+2}{3} = \dfrac{n+2}{n+3} < 1$, donc la suite (t_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

Savoir-faire 5
Déterminer les variations d'une suite à l'aide d'une fonction

17 **a.** La fonction cube est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. La fonction affine définie par $f(x) = -3x + 8$ est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
c. D'après le graphique, f est strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$, donc la suite (w_n) est strictement croissante à partir de $n = 2$.

► *Les exercices* **18** *à* **29** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 28 du manuel

30 **a.** On peut utiliser les stratégies1 (car le signe de la différence de deux termes consécutifs est facile à obtenir) ou 3 (car $u_n = f(n)$ avec f une fonction affine) :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -7(n + 1) + 3 - (7n + 3)$
$= -7 < 0$.

Ou bien prendre $f(x) = -7x + 3$ et alors f est une fonction affine strictement décroissante ($-7 < 0$).
Alors, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. On peut utiliser les stratégies 1(car le signe de la différence de deux termes consécutifs est facile à obtenir) ou 2 (car le quotient de deux termes consécutifs se simplifie facilement et il est facile de le comparer à 1).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0{,}33^{n+1} - 0{,}33^n$
$= 0{,}33^n\,(0{,}33 - 1)$
$= -0{,}67 \times 0{,}33^n < 0$

ou $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}33^n > 0$ et

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{0{,}33^{n+1}}{0{,}33^n} = 0{,}33 < 1$.

Alors, la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. On peut utiliser une autre stratégie en remarquant que la suite change alternativement de signe.

d. On peut utiliser la stratégie 1 car le signe de la différence de deux termes consécutifs est facile à obtenir : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3n^2 \geqslant 0$.

31 **a.** On peut utiliser une autre stratégie car tous les termes sont égaux à 100 > 50 et la réponse est évidente : $n = 0$.

b. On peut utiliser la stratégie 1 car l'inéquation $5N > 50$ est simple à résoudre : $N > 10$ donc $n = 11$.

c. On peut utiliser les stratégies2 ou 3 car la stratégie 1 n'est pas possible : $n = 4$ ($v_3 = 49{,}9$ et $v_4 = 197{,}1$).

d. On peut utiliser les stratégies2 ou 3 car la stratégie 1 n'est pas possible : $n = 4$ ($v_3 \approx 37{,}7$ et $v_4 = 82$).

32 Dans les trois questions, on pourra remarquer le changement alternatif de signe des trois premiers termes de la suite.

a. $u_0 = -3\,477{,}265\,875$, $u_1 \approx 52\,680{,}57801$ et $u_2 \approx -798\,110{,}7568$, donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

b. $v_0 = 0{,}75$, $v_1 = -0{,}25$ et $v_2 = 0{,}75$ donc la suite (v_n) n'est pas monotone.

c. $w_0 = 2$, $w_1 = -4$ et $w_2 = 8$ donc la suite (w_n) n'est pas monotone.

33 **a.** Pour tout entier naturel non nul n, $u_n > 0$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3{,}5 \times 2{,}4^{n+1}}{3{,}5 \times 2{,}4^n} = 2{,}4 > 1$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} - v_{n+1} = -(v_n)^2 \leqslant 0$ donc la suite (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. Pour tout entier naturel non nul n, $w_n = ((-4{,}4)^2)^n = 19{,}36^n > 0$. $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = \dfrac{19{,}36^{n+1}}{19{,}36^n} = 19{,}36 > 1$ donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

34 **a.** La fonction f semble strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. La fonction f semble strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. La fonction f semble strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. La fonction f semble strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$, donc on peut conjecturer que la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

35

```
N ← 0
u ← 15
Tant que  u ⩾ 5
        u ← f(u)
        N ← N + 1
Fin Tant que
```

36 **a. Méthode 1 :** On résout l'inéquation $u_n < 20$:

$u_n < 20 \Leftrightarrow \dfrac{400}{n+2} < 20 \Leftrightarrow 20 < n + 2 \Leftrightarrow 18 < n$.

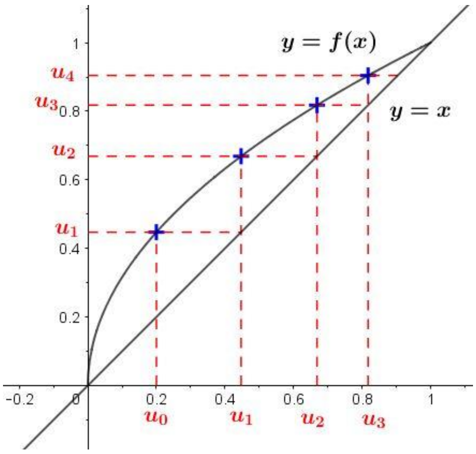
Donc $N = 19$.

Méthode 2 : On prouve que (u_n) est strictement décroissante puis on réalise un tableau de valeurs.

Pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$.

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{400}{n+3} \times \dfrac{n+2}{400} = \dfrac{n+2}{n+3} < 1$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. Avec la calculatrice, on trouve $u_{18} = 20$ et $u_{19} \approx 19$ donc $N = 19$.

b. Méthode 1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x}$.
On représente la suite avec un logiciel. On conjecture que la suite est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
On trouve la valeur de l'entier $N = 4$.



Méthode 2 : On utilise la calculatrice pour dresser un tableau de valeurs. On conjecture que la suite est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
On trouve la valeur de l'entier $N = 4$.

Méthode 3 : On utilise un algorithme à programmer, en faisant afficher la valeur de N en sortie.

```
N ← 0
U ← 0,2
Tant que  U ⩾ 0,9
        U ⟵ √U
Fin Tant que
```

► *Les exercices* **37** *à* **46** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 30 à 35 du manuel

OBJECTIF 1

Définir une suite

47 **a.** Vrai.

b. Vrai.

c. Faux, car $u_9 = 76$.

48 **a.** Vrai.

b. Faux, car $v_4 = 4$.

c. Vrai.

49 Réponses **c.** et **d**.

50 **a.** $a_1 = 3$ et $a_2 = 9$.

b. $a_5 = 3^5 = 243$.

c. $a_7 = 3^7 = 2\ 187$.

51 Réponses **b** et **d**.

52 Réponses **b** et **d**.

53 $c_0 = 1$, $c_1 = –0,5$, $c_2 = 2$ et $c_5 = 1,5$.

54 Réponse **d**.

55 **a.** $b_1 = 14$ et $b_2 = 21$.

b. $b_4 = 5 \times 7 = 35$.

c. $b_6 = 7 \times 7 = 49$.

56 **a.** $u_n = 1 + 5n$ et $u_4 = 21$.

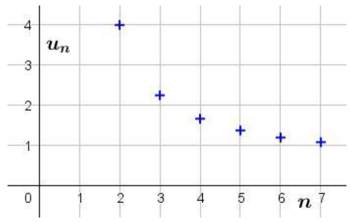
b. $v_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $v_4 = \dfrac{1}{5}$.

c. $w_n = \dfrac{n^2}{5}$ et $w_4 = \dfrac{16}{5}$.

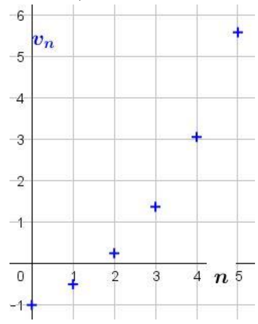
d. $t_n = (–2)^n$ et $t_4 = 16$.

57 **1.a.** $u_2 = 4$, $u_3 = 2,25$, $u_4 = \dfrac{5}{3}$, $u_5 = 1,375$,

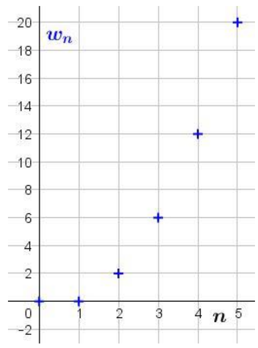
$u_6 = 1,2$ et $u_7 = \dfrac{13}{12}$.



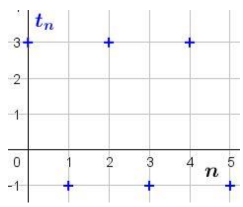
b. $v_0 = –1$, $v_1 = –0,5$, $v_2 = 0,25$, $v_3 = 1,375$, $v_4 = 3,0625$ et $v_5 = 5,593\ 75$.



c. $w_0 = 0$, $w_1 = 0$, $w_2 = 2$, $w_3 = 6$,$w_4 = 12$ et $w_5 = 20$.



d. $t_0 = 3$, $t_1 = –1$, $t_2 = 3$, $t_3 = –1$, $t_4 = 3$ et $t_5 = –1$.



2. a. $u_{n+1} = \dfrac{0,5n+3,5}{n}$.

b. $v_{n+1} = 1,5^{n+1} – 2$.

c. $w_{n+1} = (n + 1)^2 – (n + 1) = n^2 + n$.

d. $t_{n+1} = 1 + 2 \times (–1)^{n+1}$.

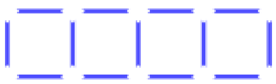
58 **a.**

n	0	1	2	3	4	5	6	7
t_n	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5

b. Les points du nuage sont alignés.
c. On conjecture que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 0{,}5n - 2$.
d. $t_n > 40 \Leftrightarrow 0{,}5n - 2 > 40 \Leftrightarrow n > 84$.
Donc $k = 85$.

59 L'erreur d'Eloyse est à la première ligne :
$u_{n+1} = (n+1)^{2} - \mathbf{2n + 1} + (-2)^{n+1}$.
Les erreurs d'Hassan sont à la deuxième ligne :
$u_{n+1} = \mathbf{n^2 + 1 -} 2n - 2 - 2 + (-2)^n$.
L'erreur de Floria est à la deuxième ligne :
$u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 \mathbf{+} (-2)^{n+1}$.
Une réponse correcte est :
$u_{n+1} = n^2 - 1 + (-2)^{n+1}$.

60 **1.a.** $b_1 = 4$, $b_2 = 7$ et $b_3 = 10$.
b. $b_4 = 13$.



c. On conjecture que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 3n + 1$.
2. a. $b_{20} = 61$.
b. $b_n \leqslant 00 \Leftrightarrow 3n \leqslant 199 \Leftrightarrow n \leqslant \dfrac{199}{3}$;
$\dfrac{199}{3} \approx 66{,}3$.
La plus grande figure que l'on puisse construire avec 200 bâtons est la figure 66.

61 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def suite(n):
    U=(n**3-5)/(5*n+3)
    return U
```

62 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def suite(n):
    U=5*n+3
    U=U-2**n
    return U
```

N	0	1	2	3
$U \leftarrow 5N + 3$	3	8	13	18
$U \leftarrow U - 2^N$	2	6	9	10

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5n + 3 - 2^n$.
c. Le 8^e^ terme est $u_7 = -90$.

63 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
On saisit en B2 : =3+B1+B1^2
b. On a $c_n = n^2 - (n+1) = n^2 - n - 1$.

64 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
$v_0 = 5$, $v_1 = 3$ et $v_2 = 2{,}25$.
b. $v_n = \dfrac{n^2+5}{2^n}$.
c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def V(n):
    t=(n*n+5)/pow(2,n)
    return t
```

65 **a.** $u_{n+1} = 3 - 0{,}5^{n+1}$.
b. $v_{n+1} = 4(n+1) + \sqrt{5+n+1} = 4n + 4 + \sqrt{6+n}$.
c. $w_{n+1} = \dfrac{2(n+1)+3}{n+1+7} = \dfrac{2n+5}{n+8}$.
d. $t_{n+1} = 1 - 5(n+1) + 2(n+1)^2 = -2 - n + 2n^2$.

66 Read the number of identical digits from left to right.
The next two terms are : 312211 et 13112221.

Objectif 2

Modéliser à l'aide d'une suite récurrente

67 **a.** Vrai.
b. Faux, car $u_2 = -20$.
c. Vrai.

68 **a.** Faux, car $v_1 = -1$.
b. Faux, car $v_2 = 2{,}5$.
c. Vrai.

69 Réponse **c.**

70 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \left(\dfrac{a_n}{2}\right)^2$.

71 $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = 3b_n - 5$.

72 **a.** Faux, car confusion entre n et c_n.

b. Vrai.
c. Vrai.
d. Faux, car $c_1 = 8$.

73 On lit : $u_0 = 0{,}5$, $u_1 = 1$, $u_2 \approx 1{,}7$ et $u_3 \approx 2{,}8$.

74 $v_1 = 0 - 2 \times 5 = -10$ et $v_2 = 1 - 2 \times (-10) = 21$.

75 $w_1 = 3$ et $w_2 = 6$.

76 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n(4 - u_n) + 2$.

b. $u_1 = 2$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 2$.
c. On conjecture que, pour $n \geqslant 2$, les termes d'indice pair sont égaux à 4, donc $u_{2020} = 4$.

77 **a.** $v_1 = 0{,}75$, $v_2 = -0{,}875$ et $v_3 = -1{,}6875$.

b. $f(x) = \dfrac{2x-5}{4}$.

78 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$ (ou $= u_n + 3^{n+1}$) et $u_4 = 121$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}5v_n + 1$ (ou $= v_n - \dfrac{4}{2^n}$) et $v_4 = 2{,}5$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = (w_n)^2 - 1$ et $w_4 = 3\,968$.

79 On note f_n, le nombre de jetons dans la figure n.$f_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} = f_n + 2$.

80 **a.** $u_0 = 2$, $u_1 = -1$, $u_2 = -4$, $u_3 = 11$ et $u_4 = 116$.

b. $v_1 = 1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -3$, $v_4 = 1$ et $v_5 = -15$.
c. $w_0 = -1$, $w_1 = 4$, $w_2 = -6$, $w_3 = -11$ et $w_4 = -51$.

81 **a.** $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$ et $a_4 = 0$.

b. $a_0 = 4$, $a_1 = -0{,}6$, $a_2 = 4$, $a_3 = -0{,}6$ et $a_4 = 4$.
c. $a_0 = -5$, $a_1 = -1{,}5$, $a_2 = -5$, $a_3 = -1{,}5$ et $a_4 = -5$.

d. $a_0 = 0{,}2$, $a_1 = \dfrac{2}{3}$, $a_2 = 0{,}2$, $a_3 = \dfrac{2}{3}$ et $a_4 = 0{,}2$.

82 **a.** $b_1 = -8$, $b_2 = 8$ et $b_3 = 0$.

b. On conjecture que, pour $n \geqslant 3$, $b_n = 0$.

83 **1.** Énoncé possible :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} - \dfrac{1}{u_n}$.

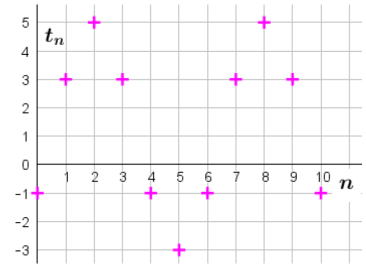
a. Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4.
b. Donner une expression de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
c. Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_0 = 0$?
2. Les valeurs données de u_3 et u_4 sont arrondies et non exactes : $u_3 = -\dfrac{17}{56}$ et $u_4 = \dfrac{5983}{1904}$.
La réponse à la question **c.** est fausse.
Si $u_0 = 0$ alors pour $n \geqslant 1$, u_n n'existe pas.

84 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. Pour $N = 1$, $U = -1$ et pour $N = 2$, $U = 3$.
b. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 + 5$.

85 **a.**

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	5	3	–1	–3	–1	3	5	3	–1

b.



c. La suite semble périodique de période 6 donc $t_{200} = t_{6 \times 33 + 2} = t_2 = 5$.

86 **(et version guidée)**

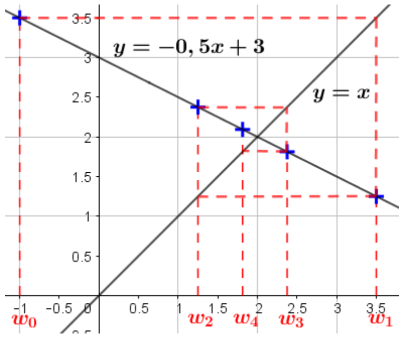
a.

```
U ← 1
Pour K allant de 1 à 10 faire
    U ← 5U / (1+U)²
Fin Pour
```

b.

```
U ← 1
Pour K allant de 1 à p faire
    U ← 5U / (1+U)²
Fin Pour
```

87



Read : $w_1 = 3.5$, $w_2 \approx 1.25$, $w_3 \approx 2.4$ and $w_4 \approx 1.8$.

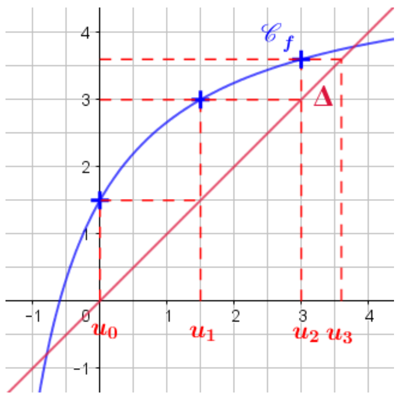
88 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1.a. Il faut saisir en B2 le nombre $b_0 = 5$.

b. Formule en B3 : = 3–A2+B2.

2. La suite (c_n) est définie par $c_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \dfrac{c_n - n}{c_n + 1}$.

89 **a.**



$u_0 = 0$, $u_1 \approx 1{,}5$, $u_2 \approx 3$, $u_3 \approx 3{,}6$.

b. Quand n devient de plus en plus grand, u_n se rapproche de l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

90 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. $v_0 = 4$.

b. $v_{n+1} = 2v_n - 5$.

c. $v_3 = -3$.

OBJECTIF 3

Déterminer le sens de variation d'une suite

91 **a.** La suite (u_n) semble décroissante.

b. La suite (v_n) n'est pas monotone.

c. La suite (w_n) semble croissante.

92 **1.** est associé à **c**. **2.** est associé à **b**.

3. est associé à **a**.

93 **1.** est associé à **b**. **2.** est associé à **c**.

3. est associé à **a**.

94 **1.** est associé à **a**.

2. est associé à **c**.

3. est associé à **d**.

4. est associé à **b**.

95 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -5 < 0$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

96 $\forall n \geqslant 4$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 7 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 4$.

97 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 6n > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ (et on vérifie $u_0 = 16$ et $u_1 = 9$).

98 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 9 \times 4^n > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

99 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3n^2 + 3n + 4 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

100 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -3n^2 + 9n - 7$$
$$= -3(n - 1{,}5)^2 - 0{,}25 < 0$$

(ou à l'aide d'un graphique). Donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

101 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -19n < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$ (et on vérifie $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$).

102 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 3n^2 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ (et on vérifie $u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $u_1 = \dfrac{2}{3}$).

103 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1}{n} < 0$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

104 $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2-1}{n^2+2n} = 1 - \frac{2n+1}{n^2+2n} < 1$, donc (u_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 2.

105 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4}{3} < 1$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

106 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0{,}24 < 1$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

107 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 3n > 1$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

108 $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n} < 1$, donc (u_n) est strictement décroissante à partir de $n = 2$.

109 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + n^2 > 1$ si $n > 0$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ (et on vérifie $u_0 = \pi$ et $u_1 = \pi$).

110 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 3x - 0{,}5$ qui est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

111 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 7 - 2{,}8x$ qui est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

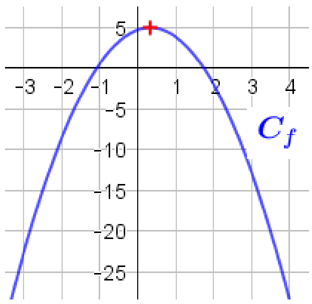
112 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2\pi + 1$ qui est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, donc (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$.

113 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 1$.
f est une fonction strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$, car : si $0 \leqslant a < b$ alors $0 \leqslant a^2 < b^2$, puis $f(a) < f(b)$; donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

114 **a.** On a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = -\sqrt{3}$ et $u_4 = 2$.
Les termes de la suite sont alternativement positifs puis négatifs donc (u_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = -v_n^2 \leqslant 0$,
donc (v_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$ et $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{7}{5} > 1$,
donc (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = 0$, donc (s_n) est constante sur $\mathbb{N}$.
e. On a : $t_0 = 3$, $t_1 = -15$, $t_2 = 75$, $t_3 = -375$ et $t_4 = 1\,875$.
Les termes de la suite sont alternativement positifs puis négatifs, donc (t_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.

115 **a.** La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_n = -2{,}5(n - \frac{1}{3})^2 + 5 = f(n)$ avec f représentée ci-dessous.



Donner une expression de $f(x)$.
Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
b. D'après le tableau de variations, la suite (u_n) est bien strictement décroissante à partir de l'indice 1.

Mais on a $u_0 = -2{,}5 \times \frac{1}{9} + 5 \approx 4{,}7$ et $u_1 = -2{,}5 \times \frac{4}{9} + 5 \approx 3{,}9$,

donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

116 $\forall n \geqslant 4$, $u_{n+1} - u_n = 2n - 7 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 4.
$\forall n \geqslant 3$, $v_{n+1} - v_n = 15 - 7n < 0$,
donc (v_n) est strictement décroissante à partir de l'indice 3.

117 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^n > 0$ et $n + 1 > 0$, donc $u_n > 0$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\dfrac{7^{n+1}}{n+2}}{\dfrac{7^n}{n+1}} - 1 = 7\frac{n+1}{n+2} - 1$$

$$= \frac{7n+7-n-2}{n+2} = \frac{6n+5}{n+2} > 0,$$

donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

c. On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

118 **a.** On a $f(x) = 0,5(x - 2,4)^2 - 0,88$.

b.

x	0	2,4	$+\infty$
Variations de f	2 ↘	–0,88	↗

c. $u_2 = -0,8$ et $u_3 = -0,7$.

d. D'après le tableau de variation de f, (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 3$. Comme $u_2 < u_3$ alors (u_n) est strictement croissante à partir de $n = 2$.

119 **a.** (u_n) semble strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. (v_n) semble strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

120 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. Formule en B2 : = 1/(A2–20,4)^2.

b. (u_n) semble strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $u_{20} = 6,25$ et $u_{21} = \frac{25}{9} \approx 2,8$donc la conjecture faite à la question **b** est fausse.

121 *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), le nom des suites a été modifié dans la question b. pour être raccord avec les graphiques. D'où le corrigé ci-dessous.*

a. (u_n) and (w_n) appear to be increasing. (v_n) appears to be decreasing.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$: (u_n) is increasing.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 0.5 < 1$: (v_n) is decreasing.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n)$ with $f(x) = 2.5x - 2$, is a linear function increasing: (w_n) is increasing.

122 **1.a.** $u_0 = 6$, $u_1 = 5$, $u_2 = 4$, $u_3 = 3$, $u_4 = 2$, $u_5 = \sqrt{5} \approx 2,2$, $u_6 = \sqrt{6} \approx 2,4$ et $u_7 = \sqrt{7} \approx 2,6$.

b. La suite semble croissante pour $n \geqslant 4$.

2. a. $f(x) = \sqrt{x}$.

b. f est strictement croissante sur $[5 ; +\infty[$ et $u_4 < u_5$, donc la suite est strictement croissante pour $n \geqslant 4$.

3. Quand n devient grand, u_n tend vers $+\infty$.

123 Démonstration de la propriété :

(u_n) est une suite telle que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à p, $\boldsymbol{u_n}$ **est strictement positif**.

- La suite (u_n) est **strictement croissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, **avec** $\boldsymbol{n \geqslant p}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
- La suite (u_n) est **strictement décroissante** à partir de l'indice p si et seulement si, pour tout nombre entier naturel n, **avec** $\boldsymbol{n \geqslant p}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

● La suite (u_n) est définie sur ℕ.

On sait que, pour tout nombre entier naturel $n \geqslant p$, $u_n > 0$.

● On raisonne par **disjonction des cas** selon la monotonie de la suite.

- La suite (u_n) **est strictement croissante à partir de l'indice** $\boldsymbol{p}$

⇔ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \boldsymbol{p}$, $u_{n+1} > u_n$

⇔ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \boldsymbol{p}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

- La suite (u_n) **est strictement décroissante à partir de l'indice** $\boldsymbol{p}$

⇔ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \boldsymbol{p}$, $u_{n+1} < u_n$

⇔ pour tout nombre entier naturel $n \geqslant \boldsymbol{p}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

124 **a.** Vrai, car $u_1 = u_2 = 0$.

b. Vrai car $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 1$ **b.** Vrai, car $\forall n \in \mathbb{N}$,

$n + 1 \geqslant 1$ et $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$ et

$v_n = \dfrac{1}{n+1} - 5 \leqslant -4 < 0$.

c. Faux car $w_{n+1} = (n+1)^2 + 7 = n^2 + 2n + 8$ et donc $w_{n+1} \neq n + 8$ si $n > 0$.

125 **a.** Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ ⍰ ℝ, $u_n = f(n) > 0$.

b. La réciproque est : « Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$ » est fausse.

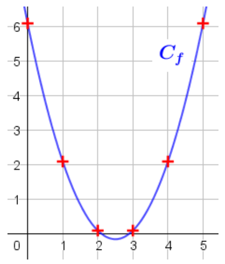
Contre-exemple : $f(x) = (x - 1)(x - 4) + 2{,}1$

$u_n = f(n) = (n - 1)(n - 4) + 2{,}1$.

$u_0 = 6{,}1$, $u_1 = 2{,}1$, $u_2 = 0{,}1$, $u_3 = 0{,}1$, $u_4 = 2{,}1$.

La suite (u_n) est croissante à partir de l'indice 3 et est donc strictement positive sur ℕ.

La fonction f n'est pas strictement positive sur ℝ car $f(2{,}5) = -0{,}15$.



126 **a.** $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 2$ et $u_5 = 0$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \dfrac{2}{v_{n+1}} = 2 \times \dfrac{v_n}{2} = v_n$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = 5 - w_{n+1} = 5 - (5 - w_n) = w_n$.
Donc tous les termes de indice pair sont égaux.

127 **1. a.** $u_0 = 2$, $u_1 = -2$, $u_2 = 2$.

b. La suite (u_n) n'est pas monotone (alternance des signes des termes).

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2 \times (-1)^{n+1}}{2 \times (-1)^n} = -1 < 1$.

b. La suite (u_n) n'est pas strictement positive donc on ne peut déterminer ses variations en comparant le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

128 **a.** • Si (u_n) est strictement croissante sur ℕ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$ et donc $u_3 < u_4$. (P_1) est vraie.

• Si (u_n) est strictement décroissante sur ℕ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$ et donc $u_3 > u_4$. (P_2) est fausse.

• Si (u_n) est strictement décroissante sur ℕ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. (P_3) est vraie.

• Si (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et donc des termes consécutifs peuvent être égaux. (P_4) est fausse.

b. • La réciproque de (P_1) « Si $u_3 > u_4$ alors (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ » est fausse.
Contre-exemple : $u_3 = 3$, $u_4 = 2$ et $u_5 = 5$.

• La réciproque de (P_2) « Si $u_3 < u_4$ alors (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ » est fausse.

• La réciproque de (P_3) « Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ alors (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$ » est fausse. Contre-exemple : $u_3 = u_4$.

• La réciproque de (P_4) « Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$ alors (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$ » est vraie.

129 **1.** La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -\dfrac{1}{n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$. Donc l'affirmation est fausse.

2. a. La réciproque est : « Si il existe un nombre entier naturel k tel que $u_k > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$ ».

b. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
$u_0 = 1 > 0$ or elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
L'affirmation réciproque est fausse.
(Autre contre-exemple possible : $u_n = -n + 1$.)

130 **1. a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ et $v_n \leqslant v_{n+1}$ donc $u_n + v_n \leqslant u_{n+1} + v_{n+1}$. La suite $(u_n + v_n)$ est croissante.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{5}{n(n+1)} > 0$, donc la suite (a_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = \dfrac{-3}{n(n+1)} < 0$, donc la suite (b_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n = \dfrac{-8}{n(n+1)} < 0$, donc la suite (c_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = \dfrac{2n-2}{n}$ et

$a_{n+1} + b_{n+1} - (a_n + b_n) = \dfrac{2}{n(n+1)} > 0$, donc la suite $(a_n + b_n)$est croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n + c_n = \dfrac{2n+3}{n}$ et

$a_{n+1} + c_{n+1} - (a_n + c_n) = \dfrac{-3}{n(n+1)} < 0$, donc la suite $(a_n + c_n)$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. D'après les résultats de la question **2**, on ne peut pas donner le sens de variation de la somme de deux suites lorsque l'une est croissante et l'autre décroissante.

131 **1. a.** $\forall n \in \mathbb{N}$,
$a_{n+1} - a_n = 2{,}8 \times u_{n+1} - 2{,}8 \times u_n$
$= 2{,}8 \times (u_{n+1} - u_n) > 0$ donc la suite (a_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b.$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - b_n = -3{,}4 \times u_{n+1} + 3{,}4 \times u_n$
$= -3{,}4 \times (u_{n+1} - u_n) < 0$
donc la suite (b_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

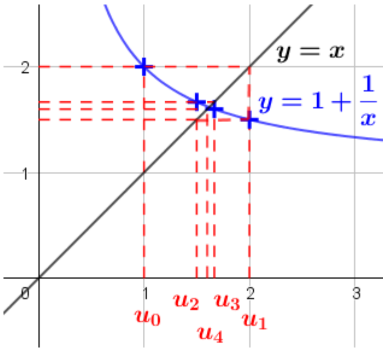
2. a. « Si k est strictement positif et (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$. ».
Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$k \times u_{n+1} - k \times u_n = k \times (u_{n+1} - u_n) > 0$, donc la suite $(k \times u_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. « Si k est strictement négatif et (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, alors la suite $(k \times u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$. ».
Preuve : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$k \times u_{n+1} - k \times u_n = k \times (u_{n+1} - u_n) < 0$, donc la suite $(k \times u_n)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

132 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n > 0$ et la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \dfrac{1}{u_{n+1}} < \dfrac{1}{u_n}$. La suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$est strictement décroissante.

133 **a.** $u_0 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 0$. Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.**b.**$u_0 = 2$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$. Donc la suite (u_n) n'est pas monotone.

134 **a.** et **b.**



$u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = 1{,}5$, $u_3 \approx 1{,}67$ et $u_4 = 1{,}6$.

c. u_n semble se rapprocher de l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.

135 **1. a.** $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 1$.

b. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 1$.

c. $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 43$ et $u_4 = 1\,807$.

2. a. (u_n) est constante égale à 1.

b. (u_n) est constante égale à 1 pour $n \geqslant 1$.

c. (u_n) semble strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

136 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = -u_{n-1}{}^2 \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante à partir de l'indice 1.

137 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + u_n$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > -1 + 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

b. On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

138 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = f(n)$ avec $f(x) = 7x$ qui est une fonction affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n > 0$ et $\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = 3 > 1$, donc (t_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$(w_{n+1} - t_{n+1}) - (w_n - t_n) = 7(n+1) - 3^{n+1} - (7n - 3^n)$$
$$= 7 - 3^n(3 - 1) = 7 - 2\times3^n.$$

Pour $n \geqslant 2$, $3^n \geqslant 9 \Leftrightarrow -2\times3^n \leqslant -18$

$\Leftrightarrow 7 - 2 \times 3^n \leqslant -11 < 0$,

donc la suite $(w_n - t_n)$ est décroissante à partir de l'indice 2.

139 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2+u_n{}^3} - \frac{u_n(2+u_n{}^3)}{2+u_n{}^3} = \frac{-u_n{}^4}{2+u_n{}^3}.$$

b. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, alors $2 + u_n{}^3 > 0$ et $-u_n{}^4 < 0$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

140 On ne peut pas calculer u_1 ni les termes suivants. La suite n'est pas définie.

141 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} = n + 1 > 1$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b.

```
def fact(n):
    W=1
    for k in range(n):
        W=(k+1)*W
    return W
```

142 **a.** $S_1 = 2$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + 2(n + 1)$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = 2(n + 1) > 0$, donc la suite (S_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

b. $S_1 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + \dfrac{1}{n+1}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$, donc la suite (S_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. $S_1 = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + (n + 1)^2$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = (n + 1)^2 > 0$, donc la suite (S_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

143 **a.** $s_1 = \dfrac{1}{2}$, $s_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{2}{3}$, $s_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} = \dfrac{3}{4}$.

b. $s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$ donc la suite (s_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{k+1}{k(k+1)} - \dfrac{k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

d. $s_n = \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$.

144 a. $f(x+1) = -2(x+1)^2 - 12(x+1) - 7$

$= -2x^2 - 4x - 2 - 12x - 19$

$= -2x^2 - 16x - 21.$

$f(x+1) - f(x) = -2x^2 - 16x - 21 - (-2x^2 - 12x - 7)$

$= -4x - 14.$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n) = -4n - 14 < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

145 1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3$

$= 3n^2 + 3n + 1 > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = 1 + \dfrac{3n^2+3n+1}{n^3}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir de l'indice 1.

c. $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

146 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(n+1) - g(n)$

$= (2n-1)(2n^2 - 2n + 1)$

$= (2n-1)(n^2 + (n-1)^2).$

b. Le signe de $f(x)$ est celui de $(2x - 1)$.

x	0		0,5		$+\infty$
Signes de $f(x)$		–	0	+	

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(n) > 0$ si $n \geq 1$.

$u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

147 a. $\forall n \geqslant 2$,

$u_{n+1} - u_n = g(n+1) - g(n)$

$= (n-2) \times \dfrac{n+1}{n(n-1)} = \dfrac{(n+1)(n-2)}{n(n-1)}$.

b.

x	1		2		$+\infty$
$x + 1$		+	|	+	
$x - 2$		–	0	+	
x		+	|	+	
$x - 1$	0	+	|	+	
Signes de $f(x)$	||	–	0	+	

c. $u_2 = 5$ et $u_3 = 5$.

d. La suite (u_n) est donc strictement croissante à partir de l'indice 3.

148 a. La suite (b_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = \dfrac{-1}{2+b_n}$.

b. $b_{n+1} - b_n = \dfrac{-1}{2+b_n} - b_n = \dfrac{-1-2b_n-b_n{}^2}{2+b_n}$

$= \dfrac{-(1+b_n)^2}{2+b_n}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n > -2$, $\dfrac{-(1+b_n)^2}{2+b_n} \leqslant 0$. Donc la suite (b_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$..

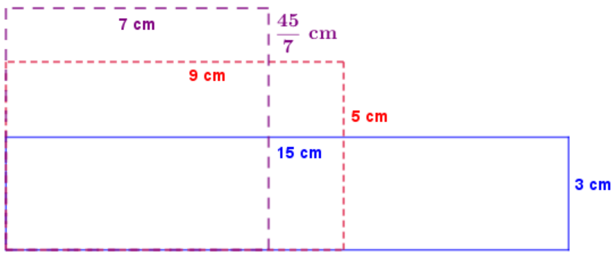
149 a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$= \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$= \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \quad \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

150 1.a. b. c. Aire commune : $15 \times 3 = 45$ cm²



b. Nouvelles dimensions :

$\dfrac{15+3}{2} = 9$ cm et $\dfrac{45}{9} = 5$ cm.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

Nouvelles dimensions : $\dfrac{9+5}{2} = 7$ cm et $\dfrac{45}{7}$ cm.

2. a. $a_0 = 15$ et $b_0 = 3$ sont les dimensions du rectangle initial.

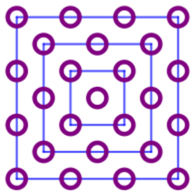
La longueur d'un rectangle est égale à la moyenne des dimensions du rectangle précédent donc $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. La largeur est telle que l'aire du rectangle soit égale à 45 cm² donc $b_{n+1} = \dfrac{45}{a_{n+1}}$.

b. $a_1 = 9$, $b_1 = 5$, $a_2 = 7$ et $b_2 = \dfrac{45}{7}$.

c. $a_6 \approx 6{,}7082$ et $b_6 \approx 6{,}7082$.

d. D'après les tracés de la question **1**, plus n est grand, plus les rectangles s'approchent d'un carré de 45 cm^2 donc $a_6 \approx b_6 \approx \sqrt{45}$.

151 **1.** Motif 4



$c_1 = 1$, $c_2 = 5$,$c_3 = 13$ et $c_4 = 25$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = c_n + 4n$.

2. a. $c_n = 1 + 4(1 + 2 + \ldots + (n-1))$

$= 1 + 4\times \dfrac{n(n-1)}{2} = 1 + 2n^2 - 2n$.

b. On recherche le plus grand entier naturel n tel que $c_n \leqslant 2\,000$. Par construction, la suite (c_n) est strictement croissante.

On trouve $c_{32} = 1\,985 \leqslant 2\,000$ et

$c_{33} = 2\,113 > 2\,000$. Le rang cherché est 32.

152 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a.

	A	B	C
1	***n***	***a n***	***b n***
2	1	3	3,464101615
3	2	3,105828541	3,215390309
4	3	3,132628613	3,159659942
5	4	3,139350203	3,146086215
6	5	3,141031951	3,142714600
7	6	3,141452472	3,141873050
8	7	3,141557608	3,141662747
9	8	3,141583892	3,141610177
10	9	3,141590463	3,141597034
11	10	3,141592106	3,141593749
12	11	3,141592517	3,141592927
13	12	3,141592619	3,141592722
14	13	3,141592645	3,141592671
15	14	3,141592651	3,141592658
16	15	3,141592653	3,141592655

b. (a_n) semble croissante et (b_n) décroissante

c. (a_n) et (b_n) semblent tendre vers π.

153 **a.** Il y a $19 + 4^2 + 3^2 = 44$ briques carrées dans la 4^e construction.

b. Le $n^{\text{ème}}$ octaèdre est constitué de deux pyramides, l'une de n étages et l'autre de $n-1$ étages donc pour tout entier naturel non nul n,

$B_n = 1 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2$

$= 2\times(1 + 2^2 + \ldots + n^2) - n^2$.

c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n^2$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1)-3n^2}{3} = \frac{2n^3+3n^2+n-3n^2}{3}$$

$$= \frac{2n^3+n}{3}.$$

d. Il y a $\dfrac{2\times 10^3+10}{3} = \dfrac{2010}{3} = 670$ briques carrées dans le 10^e octaèdre.

e. Par construction, la suite (B_n) est strictement croissante et $B_{14} = 1834$ et $B_{15} = 2235$. Avec 2 000 briques carrées, on peut construire le 14$^{\text{ème}}$ octaèdre.

154 **a** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $r_{n+1} = \sqrt{2 + r_n}$.

b. $r_1 \approx 1.41$, $r_2 \approx 1.85$, $r_3 \approx 1.96$ and $r_4 \approx 1.99$.

(r_n) appears to be increasing.

155 **1. a.** $a_1 = 13$, $b_1 = 12$,$a_2 = 12{,}5$ et $b_1 \approx 12{,}5$.

b. $a_1 = 25$, $b_1 = 15$, $a_2 = 20$ et $b_1 \approx 19{,}4$.

c. $a_1 = 6$, $b_1 = 6$, $a_2 = 6$ et $b_1 = 6$.

2. a. a_{n+1} est au milieu de a_n et b_n car $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$

On note r, le rayon du cercle :

$r = a_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore :

$$OC^2 = (a_{n+1})^2 - r^2 = \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n-b_n}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a_n+b_n}{2} + \frac{a_n-b_n}{2}\right)\left(\frac{a_n+b_n}{2} - \frac{a_n-b_n}{2}\right)$$

$$= a_n b_n$$

Or $b_{n+1} = OC$ donc $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

b. La construction géométrique des deux suites conduit à (b_n) croissante et (a_n) décroissante.

156 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1. a. b. Quel que soit le choix de l'entier a entre 1 et 25, on observe plus ou moins rapidement la suite de nombres 4 , 2 et 1.

2. a.

```
def syracuse(a):
    table=["valeur initiale",a,"valeurs suivantes"]
    for k in range(30):
        if a%2==0:
            a=a/2
        else:
            a=3*a+1
        table.append(a)
    return(table)
```

b. et **c.** Il semble que, quel que soit le choix de l'entier naturel non nul a, la suite fait apparaitre la succession 4 , 2 , 1 et devient donc périodique.

d. Cette suite fut inventée par la Mathématicien Allemand Lothar Collatz (1910-1990) et porte la nom d'une université Américaine. La « conjecture de Syracuse » consiste à penser qu'à partir du procédé décrit, on attendra toujours le nombre 1 à partir qu'un certain rang, quel que soit le choix de l'initialisation.

157 a.

	A	B	C	D
1	Rang de la planète	Planète	Distance réelle au soleil (UA)	Distance au soleil estimée par la loi de Titius-Bode (UA)
2	1	Vénus	0,723	0,700
3	2	Terre	1,000	1,000
4	3	Mars	1,524	1,600
5	5	Jupiter	5,203	5,200
6	6	Saturne	9,537	10,000
7	7	Uranus	19,218	19,600
8	8	Neptune	30,110	38,800

L'estimation pour Neptune est peu précise.

b. Uranus fut découverte en 1781 et Neptune en 1846 (comme planète) donc après 1766 ce qui explique l'estimation peu précise pour Neptune.

c. Une Unité Astronomique (1 UA) est approximativement la distance entre la Terre et le Soleil, soit environ 150 millions de kilomètres.

158 1. $\alpha^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{4}$

$= 1+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \alpha.$

$\beta^2 = \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \beta.$

2.a. $F_0 = 0$, $F_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1$, $F_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$(\alpha^2 - \beta^2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha + 1 - (\beta + 1)) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha - \beta) = 1.$

b. $\forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} = \alpha^n\alpha^2 - \beta^n\beta^2$

$= \alpha^n(\alpha + 1) - \beta^n(\beta + 1)$

$= \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^n - \beta^n.$

c. $\forall n\in\mathbb{N}$, $F_{n+2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2})$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$

$= F_{n+1} + F_n.$

3. Cette suite a été créée pour décrire la croissance d'une population de lapins.

On retrouve les premiers termes de cette suite dans des motifs naturels, comme les spirales de tournesols, de pommes de pin ou de chou romanesco (voir page 13 du manuel).

Recherches mathématiques

p. 42 du manuel

159 On pourra remarquer que :

$9 = 10 - 1$; $99 = 100 - 1$; $999 = 1\,000 - 1$; ….

$\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$u_n = 1 + \dfrac{4}{9}(9…9) \times 10^{-n} + \dfrac{7}{9}(9…9) \times 10^{-2n}$ avec n chiffres 9 dans chaque parenthèses.

$u_n = 1 + \dfrac{4}{9}(10^n - 1)\times 10^{-n} + \dfrac{7}{9}(10^n - 1) \times 10^{-2n}$

$u_n = 1 + \dfrac{4}{9}(1 - 10^{-n}) + \dfrac{7}{9}(10^{-n} - 10^{-2n})$

$= 1 + \dfrac{1}{9}(1 - 10^{-n})(4 + 7 \times 10^{-n}).$

160 $u_0 = a \neq 0$, $u_1 = \dfrac{1}{a}$, $u_2 = a$, $u_3 = \dfrac{1}{a}$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{u_n}} = u_n$

Les termes d'indice pair sont égaux à $u_0 = a$ et les termes d'indice impair sont égaux à $u_1 = \dfrac{1}{a}$.

161 $v_1 = v_0 - 3$, $v_2 = v_1 - 2$, $v_3 = v_2 - 1$, $v_4 = v_3$,

$v_5 = v_4 + 1 = v_3 + 1 = v_2$, $v_6 = v_5 + 2 = v_2 + 2 = v_1$

et $v_7 = v_6 + 3 = v_1 + 3 = v_0$.

162 1, 10, 22, 37, 53, 73, 92, 113, 128, 147, 169, 191, 215, 234, 259, … **m** est la première, la dixième, la vingt-deuxième, la trente septième, la cinquante-troisième, la soixante treizième, la quatre-vingt douzième, la cent treizième, la cent-vingt huitième, la cent quarante septième, la cent soixante neuvième, la cent quatre-vingt onzième, la deux cent quinzième, la deux cent trente quatrième, la deux cent cinquante neuvième,… lettre de cette phrase.

163 **1. a.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on intercale au milieu du nombre c_n le nombre 15 pour obtenir le nombre suivant.

b. $\frac{1}{9}(10^n - 1) = \underbrace{1...1}_{n \text{ chiffres } 1}$.

c. $\frac{1}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1$

$= \underbrace{1...1}_{2n \text{ chiffres } 1} + \underbrace{4...4}_{n \text{ chiffres } 4} + 1 = c_n$.

2. a. $\sqrt{c_1} = 4$, $\sqrt{c_2} = 34$ et $\sqrt{c_3} = 334$.

b. $x_n = \frac{1}{3}(10^n - 1) + 1 = \underbrace{3...3}_{n \text{ chiffres } 3} + 1 = \underbrace{3...34}_{n-1 \text{ chiffres } 3}$ et

$$x_n^2 = \frac{1}{9}(10^n - 1)^2 + \frac{2}{3}(10^n - 1) + 1$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n} - 2 \times 10^n + 1) + \frac{6}{9}(10^n - 1) + 1$$

$$= \frac{1}{9}10^{2n} + \frac{4}{9}10^n - \frac{5}{9} + 1$$

$$= \frac{1}{9}(10^{2n} - 1) + \frac{4}{9}(10^n - 1) + 1 = c_n.$$

c. Donc $c_n = \left(\frac{1}{3}(10^n - 1) + 1\right)^2$.

d. Pour $n = 1$, $\left(\frac{1}{3}(10^1 - 1) + 1\right)^2 = 4^2 = 16 = c_1$.

Pour $n = 2$, $\left(\frac{1}{3}(10^2 - 1) + 1\right)^2 = 34^2 = 1156 = c_2$.

164 **1. a.** $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 16$, $u_3 = 256$ et $u_4 = 65\,536$.

b. La suite (u_n) semble strictement croissante.

2. a. $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ et $u_4 = 0$.

La suite (u_n) semble constante à 0.

b. $u_0 = 0{,}5$, $u_1 = 0{,}25 = \frac{1}{4}$, $u_2 = 0{,}0625 = \frac{1}{16}$,

$u_3 = 0{,}003\,906\,25 = \frac{1}{256}$ et

$u_4 = \frac{1}{65536} \approx 0{,}000\,015$.

La suite (u_n) semble strictement décroissante.

c. $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 1$ et $u_4 = 1$.

La suite (u_n) semble constante à 1 à partir de l'indice 1.

3. • Si $u_0 < -1$ alors (u_n) strictement croissante ;

• Si $u_0 = -1$ alors (u_n) constante pour $n \geqslant 1$;

• Si $-1 < u_0 < 0$ alors (u_n) strictement décroissante pour $n \geqslant 1$;

• Si $u_0 = 0$ alors (u_n) constante ;

• Si $0 < u_0 < 1$ alors (u_n) strictement décroissante ;

• Si $u_0 = 1$ alors (u_n) constante ;

• Si $u_0 > 1$ alors (u_n) strictement croissante

CHAPITRE 2

Suites arithmétiques et géométriques

► *Les exercices* **1** *à* **8** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 46 et 47 du manuel

1 Une suite d'aires à partir d'un motif géométrique

1. $u_0 = \pi \times 0{,}5^2 = 0{,}25\pi$; $u_1 = \pi \times 1^2 - \pi \times 0{,}5^2 = 0{,}75\pi$; $u_2 = \pi \times 1{,}5^2 - \pi \times 1^2 = 1{,}25\pi$;
$u_3 = \pi \times 2^2 - \pi \times 1{,}5^2 = 1{,}75\pi$; $u_4 = \pi \times 2{,}5^2 - \pi \times 2^2 = 2{,}25\pi$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \pi \times \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \pi \times \frac{n^2+2n+1-n^2}{4} = \pi \times \frac{2n+1}{4} = n \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{4} + n \times \frac{\pi}{2} = u_0 + n \times r$, avec $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $r = \frac{\pi}{2}$.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (n+1) \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - (n \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}) = n \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - n \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2 De plus en plus longtemps

1. Comme il est question d'une augmentation du temps d'entraînement, la suite (t_n) doit être croissante, et même strictement croissante.

2. $t_1 = t_0 + \frac{15}{100} t_0 = 1{,}15 t_0 = 1{,}15 \times 2 = 2{,}3$ h = 2 h 18 min ;
$t_2 = 1{,}15 t_1 = 1{,}15 \times 2{,}3 = 2{,}645$ h = 2 h 38 min 42s .

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + \frac{15}{100} t_n = 1{,}15 t_n$.

4.a. $t_2 = 1{,}15 t_1 = 1{,}15 \times 1{,}15 t_0 = 2 \times 1{,}15^2$ et $t_3 = 1{,}15 \times t_2 = 1{,}15 \times 2 \times 1{,}15^2 = 2 \times 1{,}15^3$.
b. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2 \times 1{,}15^n$.
5. La suite (t_n) est croissante et : $t_6 = 2 \times 1{,}15^6 \approx 4{,}63 < 5$; $t_7 = 2 \times 1{,}15^7 \approx 5{,}32 > 5$.
On en déduit que, pour réaliser une séance de footing d'une durée minimale de cinq heures, Maxime doit envisager sept semaines d'entraînement.

3 Suites arithmétiques et tableur

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.
1. Formules que l'on peut saisir en B5 : **b.** =B4 + D$1 ou **c.** =B$1 + A5*D$1 .
2. Conjectures avec $u_0 = 1$:
- Si $r < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Même si on modifie la valeur de u_0, on émet les mêmes conjectures sur la monotonie de (u_n) qu'à la question **2.**

4 Suites géométriques et tableur

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

2. a. On fixe $q = 1$ et on fait varier v_0 : dans tous les cas, on conjecture que la suite (v_n) est constante égale à v_0.

b. On fixe $q = 0$ et on fait varier v_0 : dans tous les cas, on conjecture que la suite (v_n) est constante à partir de l'indice 1, égale à v_0.

3. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), les valeurs de q ont été modifiés aux questions* ***a*** *(q = 2 au lieu de – 2) et* ***c*** *(q = – 2 au lieu de $\frac{1}{2}$). D'où le corrigé ci-dessous.*

a. $v_0 = 1$ et $q = 2$: la suite (v_n) semble monotone, strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $v_0 = -1$ et $q = 2$: la suite (v_n) semble monotone, strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

c. $v_0 = -1$ et $q = -2$: la suite (v_n) ne semble pas monotone (il y a alternance des signes des termes).

d. $v_0 = -1$ et $q = \dfrac{1}{2}$:la suite (v_n) semble monotone, strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

e. $v_0 = 1$ et $q = \dfrac{1}{2}$: la suite (v_n) semble monotone, strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

f. Au choix.

5 Sommes de termes de suites

1. La suite (u_n) est arithmétique, de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 1{,}5$.
La suite (v_n) est géométrique, de premier terme $v_1 = 2$ et de raison $q = -3$.

2.

Algorithme 1
$U \leftarrow -3$
$S \leftarrow U$
Pour N allant de 1 à **5**
$\quad U \leftarrow U + 1{,}5$
$\quad S \leftarrow \boldsymbol{S + U}$
Fin Pour

Algorithme 2
$V \leftarrow 2$
$T \leftarrow V$
$K \leftarrow 1$
Tant que $K \leqslant$ **3**
$\quad V \leftarrow -3V$
$\quad T \leftarrow T + V$
$\quad K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

3. Valeurs de S et T calculées à la fin des algorithmes : $S = 4{,}5$ et $T = -40$.
Voir les fichiers ressource dans le manuel numérique enseignant :

```python
def algo1():
    U=-3
    S=U
    for N in range(1,6):
        U=U+1.5
        S=S+U
    return S
```

```python
def algo2():
    V=2
    T=V
    K=1
    while K<=3:
        V=-3*V
        T=V+T
        K=K+1
    return T
```

Version guidée

1. Algorithme 1.

a. $u_0 = -3$.

b. L'instruction « $U \leftarrow U + 1{,}5$ » calcule un terme de la suite (u_n) à partir du précédent en lui ajoutant 1,5, donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 1{,}5$.

2. Algorithme 2.

a. Le premier terme de la suite (v_n) est $v_1 = 2$.

b. L'instruction « $V \leftarrow -3 \times V$ » calcule un terme de la suite (v_n) à partir du précédent en le multipliant par –3, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -3$.

3.a. *Voir la correction à la question* **2.** *ci-dessus.*

b. *Voir la correction à la question* **3.** *ci-dessus.*

Application

p. 51à 55 du manuel

Savoir-faire 1

Reconnaître une suite arithmétique

9 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 0{,}2$ donc la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -0{,}2$ et de premier terme $u_0 = 0{,}5$. Alors son terme général est $u_n = 0{,}5 - 0{,}2n$.

b. $v_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0{,}1v_n + 5$. Alors :
$v_1 = 0{,}1v_0 + 5 = 0{,}1 \times (-1) + 5 = 4{,}9$;
$v_2 = 0{,}1 \times 4{,}9 + 5 = 5{,}49$.
$v_1 - v_0 = 4{,}9 - (-1) = 5{,}9$ et
$v_2 - v_1 = 5{,}49 - 4{,}9 = 0{,}59$;
$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$, donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.

10 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 4 - \dfrac{n}{5} = 4 - \dfrac{1}{5} \times n$, donc la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $w_0 = 4$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 2n(n+1) - 7$. Alors : $t_0 = -7$;
$t_1 = -3$; $t_2 = 5$.
$t_1 - t_0 = -3 - (-7) = 4$ et $t_2 - t_1 = 5 - (-3) = 8$;
$t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$, donc la suite (t_n) n'est pas arithmétique.

11 Seule la représentation de la suite (u_n) semble constituée de points alignés, et donc seule la suite (u_n) peut être arithmétique. Graphiquement, on lit :
$u_0 = 0{,}8$; $u_1 = 1$; $u_6 = 2$ …
On note r, la raison :
$u_6 - u_1 = (6-1)r \Leftrightarrow 1 = 5r \Leftrightarrow r = \dfrac{1}{5}$.
On aurait alors : $u_n = 0{,}2n + 0{,}8$.

Savoir-faire 2

Déterminer les variations d'une suite arithmétique

12 **a.** $u_0 = -11$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 8{,}4$. Alors :
$u_1 = u_0 + 8{,}4 = -11 + 8{,}4 = -2{,}6$; $u_2 = 5{,}8$ et $u_3 = 14{,}2$.
Comme la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8{,}4$ et de premier terme $u_0 = -11$, son terme général est $u_n = -11 + 8{,}4n$; d'où :
$u_{25} = -11 + 8{,}4 \times 25 = 199$.
$r = 8{,}4 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $v_0 = 4{,}2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 5{,}7$. Alors :
$v_1 = v_0 - 5{,}7 = 4{,}2 - 5{,}7 = -1{,}5$; $v_2 = -7{,}2$ et $v_3 = -12{,}9$.
Comme la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = -5{,}7$ et de premier terme $v_0 = 4{,}2$, son terme général est : $v_n = 4{,}2 - 5{,}7n$; d'où
$v_{25} = 4{,}2 - 5{,}7 \times 25 = -138{,}3$.
$r = -5{,}7 < 0$, donc la suite (v_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

13 La suite (w_n) est arithmétique de raison r.

a. $w_5 = -2{,}7$ et $w_{12} = 0{,}1$. Alors :
$w_{12} - w_5 = (12-5)r \Leftrightarrow 2{,}8 = 7r \Leftrightarrow r = 0{,}4$.
Alors : $w_5 - w_0 = (5-0)r \Leftrightarrow -2{,}7 - w_0 = 5 \times 0{,}4 \Leftrightarrow w_0 = -2 - 2{,}7 = -4{,}7$.
$r = 0{,}4 > 0$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

b. $w_3 = 5$ et $w_{11} = 7$. Alors :
$w_{11} - w_3 = (11-3)r \Leftrightarrow 2 = 8r \Leftrightarrow r = 0{,}25$.
Alors :
$w_3 - w_0 = (3-0)r \Leftrightarrow 5 - w_0 = 3 \times 0{,}25$
$\Leftrightarrow w_0 = 5 - 0{,}75 = 4{,}25$.
$r = 0{,}25 > 0$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

c. $w_{14} = 10{,}5$ et $w_{22} = 2{,}5$. Alors :
$w_{22} - w_{14} = (22-14)r \Leftrightarrow -8 = 8r \Leftrightarrow r = -1$.
Alors :
$w_{14} - w_0 = (14-0)r \Leftrightarrow 10{,}5 - w_0 = 14 \times (-1)$
$\Leftrightarrow w_0 = 10{,}5 + 14 = 24{,}5$.
$r = -1 < 0$, donc la suite (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

d. $w_5 = -1$ et $w_9 = 0$. Alors :
$w_9 - w_5 = (9-5)r \Leftrightarrow 1 = 4r \Leftrightarrow r = 0{,}25$.
Alors :
$w_5 - w_0 = (5-0)r \Leftrightarrow -1 - w_0 = 5 \times 0{,}25$
$\Leftrightarrow w_0 = -1 - 1{,}25 = -2{,}25$.
$r = 0{,}25 > 0$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Savoir-faire 3

Reconnaître une suite géométrique

14 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sqrt{2}v_n$, donc la suite (v_n) est géométrique de raison $q = \sqrt{2}$ et de premier terme $v_0 = 16$. Alors son terme général est :
$v_n = 16 \times (\sqrt{2})^n$.

b. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), la valeur de $w_0 = 20$ a été ajoutée. D'où le corrigé ci-dessous.*

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{0,1}{100} w_n = 0,001 w_n$, donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 0,001$ et de premier terme $w_0 = 20$. Alors son terme général est : $w_n = 20 \times 0,001^n$.

c. $t_0 = 16$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{2}{t_n}$. Alors :

$t_1 = \frac{2}{t_0} = \frac{2}{16} = 0,125$; $t_2 = \frac{2}{t_1} = \frac{2}{0,125} = 16$.

$\frac{t_1}{t_0} = \frac{0,125}{16} = \frac{1}{128}$ et $\frac{t_2}{t_1} = \frac{16}{0,125} = 128$; $\frac{t_1}{t_0} \neq \frac{t_2}{t_1}$ et donc la suite (t_n) n'est pas géométrique.

15 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 18 \times (2^n)^2 = 18 \times (2^{2n}) = 18 \times 4^n$, donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $u_0 = 18$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 15^n(n + 1)$. Alors : $v_0 = 1$; $v_1 = 30$; $v_2 = 675$.

$\frac{v_1}{v_0} = \frac{30}{1} = 30$ et $\frac{v_2}{v_1} = \frac{675}{30} = 22,5$; $\frac{v_1}{v_0} \neq \frac{v_2}{v_1}$, et donc la suite (v_n) n'est pas géométrique.

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = \frac{4^{n+1}}{5} = \frac{4}{5} \times 4^n$, donc la suite (w_n) est géométrique de raison $q = 4$ et de premier terme $w_0 = \frac{4}{5}$.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = -3,7^n = (-1) \times 3,7^n$, donc la suite (t_n) est géométrique de raison $q = 3,7$ et de premier terme $t_0 = -1$.

Savoir-faire 4

Déterminer les variations d'une suite géométrique

16 **a.** $u_0 = -5$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{140}{100} u_n = 1,4\, u_n$.

Alors : $u_1 = 1,4 u_0 = 1,4 \times (-5) = -7$; $u_2 = -9,8$ et $u_3 = -13,72$.

Comme la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,4$ et de premier terme $u_0 = -5$, son terme général est : $u_n = -5 \times 1,4^n$;

d'où $u_7 = -5 \times 1,4^7 = -52,706\,752$.

$u_0 = -5 < 0$ et $q = 1,4 > 1$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

b. $v_0 = 1,2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2,5 v_n$. Alors :

$v_1 = -2,5 v_0 = -2,5 \times 1,2 = -3$; $v_2 = 7,5$ et $v_3 = -18,75$.

Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2,5$ et de premier terme $v_0 = 1,2$, son terme général est : $v_n = 1,2 \times (-2,5)^n$;

d'où $v_7 = 1,2 \times (-2,5)^7 = -732,421\,875$.

$v_0 = 1,2 > 0$ (en fait $v_0 \neq 0$ suffit) et $q = -2,5 < 0$, donc la suite (v_n) n'est pas monotone.

17 La suite (w_n) est géométrique de raison q.

a. $w_9 = -3 \times 10^{-8}$ et $w_{11} = -3 \times 10^{-10}$.

$w_{11} = w_9 \times q^{11-9}$

$\Leftrightarrow q^2 = \frac{w_{11}}{w_9} = \frac{-3 \times 10^{-10}}{-3 \times 10^{-8}} = 10^{-2} = 0,01$.

Alors : $q = \sqrt{0,01} = 0,1$ ou $q = -\sqrt{0,01} = -0,1$.

• Cas $q = 0,1$:

$w_9 = w_0 \times 0,1^9 \Leftrightarrow w_0 = \frac{-3 \times 10^{-8}}{0,1^9} = -30$.

$w_0 = -30 < 0$ et $q = 0,1 \in]0 ; 1[$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

• Cas $q = -0,1$:

$w_9 = w_0 \times (-0,1)^9 \Leftrightarrow w_0 = \frac{-3 \times 10^{-8}}{(-0,1)^9} = 30$.

$w_0 = 30 > 0$ (en fait $w_0 \neq 0$ suffit) et $q = -0,1 < 0$, donc la suite (w_n) n'est pas monotone.

b. $w_5 = 312,5$ et $w_8 = 39\,062,5$.

$w_8 = w_5 \times q^{8-5} \Leftrightarrow q^3 = \frac{w_8}{w_5} = \frac{39062,5}{312,5} = 125$.

Alors : $q = \sqrt[3]{125} = 5$.

$w_5 = w_0 \times 5^5 \Leftrightarrow w_0 = \frac{312,5}{5^5} = 0,1$.

$w_0 = 0,1 < 0$ et $q = 5 > 1$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

Savoir-faire 5

Calculer une somme de termes

18 **a.** La suite (u_n) est arithmétique de raison 0,8 et $u_0 = -4$.

Son terme général est alors : $u_n = -4 + 0,8n$,

d'où : $u_{25} = -4 + 0,8 \times 25 = 16$.

Somme de ses vingt-six premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{k=25} u_k = 26 \times \frac{u_0 + u_{25}}{2} = 26 \times \frac{-4 + 16}{2} = 156.$$

b. La suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 19 - 3,7n$.

La suite (v_n) est alors arithmétique de raison $-3,7$ et $v_0 = 19$.

$v_{18} = 19 - 3,7 \times 18 = -47,6$ et

$$\sum_{k=0}^{k=18} v_k = 19 \times \frac{v_0 + v_{18}}{2} = 19 \times \frac{19 - 47,6}{2} = -271,7$$

$v_6 = 19 - 3,7 \times 6 = -3,2$;

$v_{19} = 19 - 3,7 \times 19 = -51,3$ et

$$\sum_{k=6}^{k=19} v_k = (19 - 6 + 1) \times \frac{v_6 + v_{19}}{2}$$

$$= 14 \times \frac{-3,2 - 51,3}{2} = -381,5.$$

c. $S = 1 + 1{,}2 + 1{,}4 + \ldots + 5$
$= 1 + (1 + 1 \times 0{,}2) + (1 + 2 \times 0{,}2) + \ldots + (1 + 20 \times 0{,}2)$
S est la somme des 21 premiers termes de la suite arithmétique de raison 0,2 et de premier terme 1.
On a donc $S = 21 \times \frac{1+5}{2} = 63$.

19 **a.** $S = 1 + 1{,}2 + 1{,}2^2 + \ldots + 1{,}2^9$
$= \frac{1 - 1{,}2^{10}}{1 - 1{,}2}$
$= \frac{1 - 1{,}2^{10}}{-0{,}2}$
$= 5(1{,}2^{10} - 1) \approx 25{,}96$.
b. $u_0 = 95$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}45u_n$.
Alors (u_n) est la suite géométrique de raison 0,45 et de premier terme $u_0 = 95$.
Alors :
$u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 95 \times \frac{1 - 0{,}45^9}{1 - 0{,}45}$
$= \frac{1\,900}{11}(1 - 0{,}45^9) \approx 172{,}6$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0{,}01 \times (-1{,}5)^n$.
Alors (v_n) est la suite géométrique de raison $-1{,}5$ et de premier terme $v_0 = 0{,}01$.
$\sum_{k=0}^{k=20} v_k = 0{,}01 \times \frac{1 - (-1{,}5)^{21}}{1 - (-1{,}5)}$
$= 0{,}004(1 + 1{,}5^{21}) \approx 19{,}96 > 0$
et $\sum_{k=0}^{k=21} v_k = 0{,}01 \times \frac{1 - (-1{,}5)^{22}}{1 - (-1{,}5)}$
$= 0{,}004(1 - 1{,}5^{22}) \approx -29{,}92 < 0$,
donc de signe contraire à $\sum_{k=0}^{k=20} v_k$.

► *Les exercices* **20** *à* **33** *de la rubrique « **Et faire le point** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 58 du manuel

34 **a.** On peut utiliser la stratégie 2car on reconnait le terme général de la suite arithmétique de raison 5 et de premier terme – 11.
b. On peut utiliser la stratégie 3 : $u_0 = 0$; $u_1 = 0{,}5$; $u_2 = 0{,}5$.
$u_1 - u_0 = 0{,}5$ et $u_2 - u_1 = 0$; $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
Il n'existe pas de nombre réel q tel que $u_1 = q \times u_0$, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
c. On peut utiliser la stratégie 3 : $u_0 = 1$; $u_1 = -1$; $u_2 = -5$.
$u_1 - u_0 = -2$ et $u_2 - u_1 = -4$; $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = -1$ et $\frac{u_2}{u_1} = 5$; $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
d. On peut utiliser la stratégie 1 car on reconnait la relation de récurrence d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
e. On peut utiliser la stratégie 3 : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = \sqrt{2}$.
$u_1 - u_0 = 1$ et $u_2 - u_1 = \sqrt{2} - 1$; $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ et donc la suite (u_n) n'est pas arithmétique.
Il n'existe pas de nombre réel q tel que $u_1 = q \times u_0$, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.
f. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{9}{7^n} = 9 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$. On peut utiliser la stratégie 2 car on reconnaît le terme général de la suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$et de premier terme 9.
g. On peut utiliser la stratégie 1 car on reconnait la relation de récurrence d'une suite arithmétique de raison $\sqrt{2}$.
h. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6^{2n} = (6^2)^n = 36^n$. On peut utiliser la stratégie 2car on reconnait le terme général de la suite géométrique de raison 36 et de premier terme 1.

35 **a.** On peut utiliser la stratégie 1 car on reconnaît le terme général de la suite arithmétique de raison –2,3 et de premier terme 7,2.
$v_{10} = -2{,}3 \times 10 + 7{,}2 = -15{,}8$.
$\sum_{k=0}^{k=10} v_k = 11 \times \frac{v_0 + v_{10}}{2} = 11 \times \frac{7{,}2 - 15{,}8}{2} = -47{,}3$.
b. On peut utiliser la stratégie 1 car on reconnait le terme général de la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 64.
$\sum_{k=0}^{k=10} v_k = 64 \times \frac{1 - 0{,}5^{11}}{1 - 0{,}5}$
$= 128 \times (1 - 0{,}5^{11}) = 127{,}9375$.

c. On peut utiliser la stratégie 3, en utilisant l'algorithme programmé par exemple en Python :

```
def somme():
    V=5
    S=V
    for K in range(10):
        V=0.2*V-1
        S=S+V
    return S
```

$v \leftarrow 5$
$S \leftarrow v$
Pour K allant de 0 à 9 :
    $v \leftarrow 0,2 \times v - 1$
    $S \leftarrow S + v$
Fin Pour

On trouve : $\sum_{k=0}^{k=10} v_k \approx -5{,}9375$.

d. On peut utiliser la stratégie 1 car on reconnait le terme général de la suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme – 2.

$\sum_{k=0}^{k=10} v_k = -2 \times \frac{1-1{,}2^{11}}{1-1{,}2} = 10 \times (1 - 1{,}2^{11}) \approx -64{,}3$.

36 **a.** La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = -3{,}4 < 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
b. La suite (v_n) est arithmétique de raison $r = 0{,}05 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
c. La suite (w_n) est arithmétique de raison $r = -1{,}5 < 0$, donc la suite (w_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

37 **a.** La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}4 \in]0 ; 1[$ et de premier terme $u_0 = -1{,}3 < 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. La suite (v_n) géométrique de raison $q = 2{,}1 > 1$et de premier terme $v_0 = 5 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
c. La suite (w_n) géométrique de raison $q = -0{,}7 < 0$ et de premier terme $w_0 = 5 \neq 0$, donc la suite (w_n) n'est pas monotone.

38 **a.**On note u_n, le nombre de morts sur les routes en $1972 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Chaque année, il y a une diminution de 2,3 % :
$u_{n+1} = u_n - \frac{2{,}3}{100}u_n = 0{,}977u_n$. Alors la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}977$ et de premier terme $u_0 = 18\,034$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 18\,034 \times 0{,}977^n$.
$2023 = 1972 + 51$.
$u_{51} = 18\,034 \times 0{,}977^{51} \approx 5\,504$. On peut estimer à 5 504 le nombre de morts en 2023.
b. On note v_n, le salaire en $2015 + n$, avec $n \in \mathbb{N}$.
Chaque année, il y a une augmentation de 2,3 % :
$v_{n+1} = v_n + \frac{2{,}3}{100}v_n = 1{,}023v_n$. Alors la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}023$ et de premier terme $v_0 = 148\,034$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1\,750 \times 1{,}023^n$.
$2023 = 2015 + 8$.
$v_8 = 1750 \times 1{,}023^8 \approx 2\,099$. On peut estimer à 2 099 € le salaire en 2023.
c. On note w_n, le nombre d'habitants en $1968 + 5n$, avec $n \in \mathbb{N}$ et n représente le nombre de périodes de 5 ans écoulées depuis 1968.
Tous les 5 ans, il y a une augmentation de 211 :
$w_{n+1} = w_n + 211$. Alors la suite (w_n) est arithmétique de raison $r = 211$ et de premier terme $w_0 = 869$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 869 + 211n$.
$2023 = 1968 + 55 = 1968 + 5 \times 11$.
$w_{11} = 869 + 211 \times 11 = 3\,190$. On peut estimer à 3 190 le nombre d'habitants en 2023.

39

$U \leftarrow 15$
$S \leftarrow U$
Pour k allant1 à **15**
    $U \leftarrow \mathbf{0{,}2U + 5}$
    $S \leftarrow \mathbf{S + U}$
Fin Pour

► *Les exercices* **40** *à* **52** *de la rubrique « **Les incontournables** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 60 à 65 du manuel

Objectif 1

Reconnaître et étudier une suite arithmétique

53 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 8 + 1{,}5n$: $u_1 = 9{,}5$;
$u_2 = 11$; $u_3 = 12{,}5$; $u_4 = 14$.
a. Vrai. **b.** Faux.
c. Vrai. **d.** Faux.

54 On note r, la raison de la suite arithmétique
(v_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr$.
$v_2 = v_1 + r \Leftrightarrow r = v_2 - v_1 = 6 - 8 = -2$.
$v_1 = v_0 + r \Leftrightarrow v_0 = v_1 - r = 8 - (-2) = 10$;
$v_3 = v_0 + 3r = 10 + 3 \times (-2) = 4$;
$v_4 = v_0 + 4r = 10 + 4 \times (-2) = 2$.
a. Faux. **b.** Vrai.
c. Vrai. **d.** Faux.

55 $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 3 - 2n$. Alors la suite (w_n) est arithmétique de raison -2.
Réponse **c**.

56 **a.** Vrai, car la suite (u_n) est arithmétique de raison -3.
b. Faux : $v_0 = -5$; $v_1 = 12$; $v_2 = -5$.
$v_1 - v_0 = 17$ et $v_2 - v_1 = -17$;
$v_1 - v_0 \neq v_2 - v_1$ et donc la suite (v_n) n'est pas arithmétique.
c. Vrai, car la suite (w_n) est arithmétique de raison 0,15.
d. Faux : $t_0 = -5{,}1$; $t_1 = -5{,}1$; $t_2 = -5{,}6$.
$t_1 - t_0 = 0$ et $t_2 - t_1 = -0{,}5$;
$t_1 - t_0 \neq t_2 - t_1$ et donc la suite (t_n) n'est pas arithmétique.
e. Vrai, car la suite (s_n) est arithmétique de raison 0 (c'est la suite constante égale à 3,9).

57 **a.** Vrai, car la suite (u_n) est arithmétique de raison 1.
b. Vrai, car la suite (v_n) est arithmétique de raison -1.
c. Faux : $w_0 = -1{,}2$; $w_1 = -1{,}05$; $w_2 = -0{,}6$.
$w_1 - w_0 = 0{,}15$ et $w_2 - w_1 = 0{,}45$;
$w_1 - w_0 \neq w_2 - w_1$ et donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.
d. Vrai, car la suite (t_n) est arithmétique de raison $-0{,}5$.
e. Faux : $s_0 = -2$; $s_1 = -0{,}5$; $s_2 = 0{,}25$.
$s_1 - s_0 = 1{,}5$ et $s_2 - s_1 = 0{,}75$; $s_1 - s_0 \neq s_2 - s_1$ et donc la suite (w_n) n'est pas arithmétique.

58 On note r, la raison de la suite arithmétique
(u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
$u_3 - u_1 = (3 - 1)r \Leftrightarrow 8{,}8 - 6{,}6 = 2r \Leftrightarrow r = 1{,}1$.
$u_0 = u_1 - r = 6{,}6 - 1{,}1 = 5{,}5$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5{,}5 + 1{,}1n$: $u_5 = 11$.
$r = 1{,}1 > 0$.
a. Faux. **b.** Vrai.
c. Vrai. **d.** Faux.

59 On note r, la raison des suites arithmétiques considérées.
a. $r = 1 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
b. $r = 1 > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
c. $r = 7{,}5 > 0$, donc la suite (w_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.
d. $r = -0{,}25 < 0$, donc la suite (t_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.
e. $r = 0$, donc la suite (s_n) est constante, égale à $-9{,}2$, sur $\mathbb{N}$.

60 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 7 + 0{,}4n$.
a. $a_1 = 7{,}4$; $a_2 = 7{,}8$; $a_3 = 8{,}2$.
b. $a_{20} = 15$; $a_{35} = 21$.

61 **a.** Pour passer d'un multiple de 4 au suivant, on ajoute 4, donc la suite (b_n) est arithmétique de raison 4.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = (n + 1) \times 4 = 4n + 4$.
c. $b_{10} = 44$; $b_{17} = 72$.
d. $b_n = 444 \Leftrightarrow 4n + 4 = 444$
$\Leftrightarrow n + 1 = 111$
$\Leftrightarrow n = 110$.

62 On note r, la raison de la suite arithmétique (c_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = c_0 + nr$.

a. $c_7 - c_4 = (7-4)r \Leftrightarrow 5{,}4 - 6 = 3r$

$\Leftrightarrow -0{,}6 = 3r$

$\Leftrightarrow r = -0{,}2.$

$c_0 = c_4 - 4r = 6 + 0{,}8 = 6{,}8$

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 6{,}8 - 0{,}2n$.

$c_5 = 5{,}8$; $c_{10} = 4{,}8$; $c_{50} = -3{,}2$.

c. $c_n = 0 \Leftrightarrow 6{,}8 - 0{,}2n = 0$

$\Leftrightarrow -0{,}2n = -6{,}8$

$\Leftrightarrow n = 34.$

63 Seules (v_n) et (w_n) sont susceptibles d'être arithmétiques car leurs représentations graphiques semblent être des nuages de points alignés.

64 **a.** Par lecture graphique : $d_0 = -2$.

b. Par lecture graphique : $d_1 = -1{,}5$.

On note r, la raison de la suite arithmétique (d_n) :

$d_1 = d_0 + r \Leftrightarrow d_1 - d_0 = r$

$\Leftrightarrow -1{,}5 + 2 = r \Leftrightarrow r = 0{,}5$

c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = -2 + 0{,}5n$.

d. $d_{15} = 5{,}5$.

e. Lorsque n devient grand, d_n devient grand aussi.

65 D'une semaine à l'autre, le nombre de stylos diminue de 24. Alors la suite (u_n) est arithmétique de raison $-24 < 0$, et donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

66 *Jérémy* :un exemple (et même plusieurs) ne constitue(nt) pas une démonstration.

Kristina a oublié des parenthèses :

$w_{n+1} - w_n = 5 + 2{,}9(n+1) - 7 + 3{,}4(n+1) - 5 - 2{,}9n + 7 - 3{,}4n$.

Lola : sa réponse est juste, mais on pourrait améliorer la rédaction en ajoutant « $\forall n \in \mathbb{N}$ » devant « $w_{n+1} - w_n$ ».

67 **a.** Chaque semaine, Ivan dépose 4 € dans sa tirelire, donc la suite (S_n) est arithmétique de raison 4 et de premier terme $S_0 = 357$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + 4$.

b. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 357 + 4n$.

Après un an, c'est-à-dire après 52 semaines, Ivan aura dans sa tirelire : $S_{52} = 357 + 4 \times 52 = 565$ €.

c. $S_n \geqslant 649 \Leftrightarrow 357 + 4n \geqslant 649$

$\Leftrightarrow 4n \geqslant 292 \Leftrightarrow n \geqslant 73$. Ivan devra attendre 73 semaines pour pouvoir s'offrir un scooter.

68 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
def sequence(k):
    A=-15
    for i in range(1,k+1):
        A=A+7
    return A
```

a. $k = 3$ and A = –15.

i	1	2	3
A	– 8	– 1	6

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + 7$.

(A_n) is an arithmetic sequence. 7 is the common difference and $A_0 = -15$ the first term:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n = -15 + 7n$.

c. $A_{49} = -15 + 7 \times 49 = 328$.

69 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. L'exécution de la fonction Python « **suite**(5,6,7,8)» renvoie :[1.0,1.0].

b. L'exécution de la fonction Python « **suite**(15,7,9,5)» renvoie : [0.3333333333,2.0].

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
def suite(p,a,q,b):
    if p==q:
        return "erreur"
    else:
        r=(b-a)/(q-p)
        v0=a-p*r
        return[r,v0]
```

70 À l'aide du mode Suites de la calculatrice, on peut faire afficher un tableau de valeurs.

n	**a.** $u_n = 2 - 0{,}3n$	**b.** $v_n = 4n - 1{,}5$
0	2	–1,5
1	1,7	2,5
2	1,4	6,5
3	1,1	10,5
4	0,8	14,5
5	0,5	18,5
6	0,2	22,5
7	–0,1	26,5
8	–0,4	30,5
9	–0 ,7	34,5

n	c. $w_n = 42 - 5{,}3n$	d. $t_n = -97 + 11n$
0	42	–97
1	36,7	–86
2	31,4	–75
3	26,1	–64
4	20,8	–53
5	15,5	–42
6	10,2	–31
7	4,9	–20
8	–0,4	–9
9	–5,7	2

71 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = n^2$.

$c_0 = 0$; $c_1 = 1$; $c_2 = 4$.

$c_1 - c_0 = 1$ et $c_2 - c_1 = 3$; $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$ et donc la suite (c_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$

$= (n + 1)^2 - n^2$

$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Alors, la suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $d_0 = 1$.

Version guidée

1. a. $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_1 - c_0 = 1$ et $c_2 - c_1 = 3$.

b. $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$ et donc la suite (c_n) n'est pas arithmétique.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n = n^2 + 2n + 1 - n^2$

$= 2n + 1$.

Alors, la suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $d_0 = 1$.

72 **a.** $c_1 = 1$; $c_2 = 5$; $c_3 = 9$.

b. $c_4 = 13$.

Figure 4 :

c. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $c_{n+1} = c_n + 4$.

d. La suite (c_n) serait alors arithmétique de raison 4 et de premier terme $c_1 = 1$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1 + 4(n - 1) = 4n - 3$.

$c_n = 6\,789 \Leftrightarrow 4n - 3 = 6\,789$

$\Leftrightarrow 4n = 6\,792$

$\Leftrightarrow n = 1\,698$.

Il est donc bien possible de réaliser une figure avec exactement 6 789 carrés : la figure 1 698.

OBJECTIF 2

Reconnaître et étudier une suite géométrique

73 **a.** Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison – 3,14.

b. Faux.

• Si $u_0 = 0$, alors : $u_1 = 3{,}14$; $u_2 = 6{,}28$; $u_3 = 9{,}42$.

$\frac{u_2}{u_1} = 2$ et $\frac{u_3}{u_2} = 1{,}5$; $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

• Si $u_0 \neq 0$, alors : $u_1 = 3{,}14 + u_0$; $u_2 = 3{,}14 + u_1$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3{,}14}{u_0} + 1$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3{,}14}{u_1} + 1$; si $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$, alors $u_1 = u_0$, et il y a contradiction, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

(En fait, la suite (u_n) est arithmétique de raison 3,14.)

c. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison π.

d. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison π^2.

e. Faux (en général, si pas de précision sur u_0).

• Si $u_0 = 0$, alors : $u_1 = \pi$. Mais s'il existe un réel q tel que $u_1 = qu_0$, alors il y a contradiction car $u_1 \neq 0$ et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

• Si $u_0 \neq 0$, alors : $u_1 = \pi - u_0$; $u_2 = u_0$. Si (u_n) est une suite géométrique alors il existe un réel q tel que $u_2 = q^2u_0$, et donc dans notre cas : $q^2 = 1$, puis $q = 1$ ou -1. Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ et donc géométrique.

Si $q = -1$, alors on aurait $u_1 = -u_0$, ce qui est contradictoire avec $u_1 = \pi - u_0$ (car $\pi \neq 0$) et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

f. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3{,}14}$.

74 On note q, la raison de la suite géométrique (u_n).

a. $q = -\frac{1}{3{,}14}$ **b.** $q = 6$

c. $q = -1$ **d.** $q = 1$

75 On note q, la raison de la suite géométrique (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.

$\frac{u_4}{u_2} = q^{4-2} \Leftrightarrow \frac{6}{54} = q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{1}{9}$.

Alors $q = \frac{1}{3}$ ou $q = -\frac{1}{3}$.

$u_2 = u_0 \times q^2 \Leftrightarrow 54 = \frac{1}{9}u_0 \Leftrightarrow u_0 = 486$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 486 \times q^n$.
$u_3 = u_2 \times q$ donc $u_3 = 18$ ou $u_3 = -18$.
$u_5 = u_4 \times q$ donc $u_5 = 2$ ou $u_3 = -2$.
a. Faux. **b.** Vrai.
c. Faux. **d.** Faux.

76 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times 1{,}5^n$.
$v_1 = 12$; $v_2 = 18$; $v_4 = 40{,}5$.
a. Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux.

77 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times (-0{,}5)^n$.
$v_1 = -4$;$v_2 = 2$; $v_3 = -1$.
a. Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai.

78 **1.d.** ; **2.a.** ; **3.c.** ; **4.b.**

79 $u_0 = 4{,}21 > 0$.
1.b. , car $q = 5 > 1$; **2.a.** , car $q = -5 < 0$;
3.c. , car $q = 0{,}5 \in]0 ; 1[$.

80 $u_0 = -4{,}21 < 0$.
1.c. , car $q = 5 > 1$.
2.a. , car $q = -5 < 0$
3.a. , car $q = 0{,}5 \in]0 ; 1[$.

81 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1{,}4$ et de premier $a_0 = 5$.
a. $a_1 = 1{,}4 \times a_0 = 1{,}4 \times 5 = 7$;
$a_2 = 1{,}4 \times a_1 = 1{,}4 \times 7 = 9{,}8$;
$a_3 = 1{,}4 \times a_2 = 1{,}4 \times 9{,}8 = 13{,}72$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5 \times 1{,}4^n$.
c. $a_{12} = 5 \times 1{,}4^{12} \approx 283{,}47$ et
$a_{30} = 5 \times 1{,}4^{30} \approx 121\,007{,}16$.

82 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier $a_0 = -7$.
a. $a_1 = 0{,}2 \times a_0 = 0{,}2 \times (-7) = -1{,}4$;
$a_2 = 0{,}2 \times a_1 = 0{,}2 \times (-1{,}4) = -0{,}28$;
$a_3 = 0{,}2 \times a_2 = 0{,}2 \times (-0{,}28) = -0{,}056$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -7 \times 0{,}2^n$.
c. $a_{12} = -7 \times 0{,}2^{12} \approx -2{,}87 \times 10^{-8}$ et
$a_{30} = -7 \times 0{,}2^{30} \approx -7{,}52 \times 10^{-21}$.

83 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = -10$ et de premier $a_0 = -2$.
a. $a_1 = -10 \times a_0 = -10 \times (-2) = 20$;
$a_2 = -10 \times a_1 = -10 \times 20 = -200$;
$a_3 = -10 \times a_2 = -10 \times (-200) = 2\,000$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -2 \times (-10)^n$.
c. $a_{12} = -2 \times (-10)^{12} = -2 \times 10^{12}$ et
$a_{30} = -2 \times (-10)^{30} = -2 \times 10^{30}$.

84 • Pour la suite de l'exercice **81** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}4a_n$.
b. $q = 1{,}4 > 1$ et $a_0 = 5 > 0$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **81**.

• Pour la suite de l'exercice **82** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}2a_n$.
b. $q = 0{,}2 \in]0 ; 1[$ et $a_0 = -7 < 0$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **82**.

• Pour la suite de l'exercice **83** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -10a_n$.
b. $q = -10 < 0$ et $a_0 = -2 \neq 0$, donc la suite (a_n) n'est pas monotone.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **83**.

85 On note q, la raison de la suite géométrique (b_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n$.
$\frac{b_5}{b_2} = q^{5-2} \Leftrightarrow \frac{-0{,}135}{5} = q^3 \Leftrightarrow q^3 = -0{,}027$.
Alors $q = \sqrt[3]{-0{,}027} = -0{,}3$.
$b_2 = q \times b_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{5}{-0{,}3} = -\frac{50}{3}$.
$b_6 = q \times b_5 = -0{,}3 \times (-0{,}135) = 0{,}0405$.

86 **1.** $\frac{23\,000\,000}{53700} \approx 428 > 365$.
En 2017, la maire est déçue, car les habitants de sa commune ont produit en moyenne plus de déchet que la moyenne française.
2.a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n - \frac{1{,}5}{100}d_n = 0{,}985d_n$.
Alors la suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0{,}985$ et de premier terme $d_0 = 400$.
b. $q = 0{,}985 \in]0 ; 1[$ et $d_0 = 400 > 0$, donc la suite (d_n) est bien strictement décroissante.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 400 \times 0{,}985^n$.
d. $2022 = 2018 + 4$.
$d_4 = 400 \times 0{,}985^4 \approx 376{,}53$.
À ce rythme, en 2022, la production de déchets par habitant sera environ de 376 kg.

87 **1.** Énoncé proposé :

Le prix d'un billet d'avion est de 150 €, et il augmente chaque année de 5,3 %.
On note u_n, le prix du billet au bout de n années, où n est un nombre entier naturel.
a. Calculer u_1.
b. Pour tout nombre entier naturel, exprimer u_{n+1} en fonction u_n.
c. Déterminer le terme général de (u_n).
d. Déterminer le prix du billet d'avion au bout de 6 ans.
2. On pourrait détailler la réponse à la question **b.** et la rédiger rigoureusement :
« $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{5,3}{100}u_n = 1,053u_n$ ».
À la question **c.**, il y a une erreur d'arrondi :
$u_6 \approx 204,49$.

88 **1.** Une diminution de 12 % revient à multiplier par $1 - \frac{12}{100} = 0,88$ alors, seule la suite (w_n) peut modéliser la situation ; réponse **c.**
2.

Algorithme 1

```
M ← 4
Pour k allant de 1 à 10
    M ← 0,88 × M
Fin Pour
```

Algorithme 2

```
M ← 4
N ← 0
Tant que N <10
    M ← M – 0,12 × M
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

3. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
def evaporation1(J):
    M=4
    for k in range(1,J+1):
        M=0.88*M
    return M
```

```python
def evaporation2(J):
    M=4
    N=0
    while N<J:
        M=M-0.12*M
        N=N+1
    return M
```

b. Lorsque j devient grand, le volume se rapproche de 0.
4.

```
M ← 4
N ← 0
Tant que M ⩾ 0,5
    M ← 0,88 × M
    N ← N + 1
Fin Tant que
```

89 **a.** The amount that Antoine has after n years since he was 10.
$c_0 = 750$£ and a compound interest at a rate of 2% : $1 + \frac{2}{100} = 1.02$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1.02c_n$. (c_n) is a geometric sequence. 1,02 is a common ratio and $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 750 \times 1.02^n$.
On reaching 18, that is 8 years later for $n = 8$, Antoine will get in his savings account :
$c_8 = 750 \times 1.02^8 \approx 878,74$ £.
b. Determine n, such that
$c_n \geqslant 1000 \Leftrightarrow 750 \times 1.02^n \geqslant 1000$.
With your calculator, we find :
$c_{14} \approx 989.61 < 1000$ and $c_{15} \approx 1009.4 > 1000$.
15 = 8 + 7 : Antoine will have to wait 7 years after his 18 years old to begin his driving lessons.

90 **1.** $F_0 = \frac{1}{\varphi^2}$, $F_1 = \frac{1}{\varphi}$, $F_2 = 1$, $F_3 = \varphi$ et $F_4 = \varphi^2$.

$\frac{F_1}{F_0} = \frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi^2}} = \varphi$; $\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$; $\frac{F_3}{F_2} = \frac{\varphi}{1} = \varphi$;
$\frac{F_4}{F_3} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$. Alors F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont les cinq premiers termes d'une suite (F_n) géométrique de raison φ.
2. $\varphi^2 = \varphi + 1$.
a. $F_0 + F_1 = \frac{1}{\varphi^2} + \frac{1}{\varphi} = \frac{1+\varphi}{\varphi^2} = \frac{\varphi^2}{\varphi^2} = 1 = F_2$.
$F_1 + F_2 = \frac{1}{\varphi} + 1 = \frac{1+\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi = F_3$.
$F_2 + F_3 = 1 + \varphi = \varphi^2 = F_4$.
b. On reconnait la relation de récurrence qui définit la Suite de Fibonacci (voir chapitre 1, exercice 158).

91 *Voir le fichier tableur ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. Formule à saisir en B3 : = B2*0,75
b. Instruction conditionnelle en C2 :
= SI(B2<1;" < 1";"") .

	A	B	C
1	n	L_n	test
2	1	10	
3	2	7,5	
4	3	5,625	
5	4	4,21875	
6	5	3,1640625	
7	6	2,3730469	
8	7	1,7797852	
9	8	1,3348389	
10	9	1,0011292	
11	10	0,7508469	<1
12	11	0,5631351	<1
13	12	0,4223514	<1
14	13	0,3167635	<1
15	14	0,2375726	<1

La longueur L_n se strictement inférieure à 1 cm à partir de la 10e série.

c. L_n semble se rapprocher de 0.

OBJECTIF 3

Calculer une somme de termes d'une suite particulière

92 Somme des 10 premiers entiers naturels non nuls : $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$.

Réponse **a.**

93 $u_0 + u_1 + \ldots + u_7 = 8 \times \frac{u_0 + u_7}{2}$

$= 8 \times \frac{5 + 26}{2} = 8 \times \frac{31}{2}$

$= 4 \times 31 = 8 \times 15{,}5$.

Réponses **a.** et **d.**

94 $u_8 + u_9 + \ldots + u_{19} = (19 - 8 + 1) \times \frac{10 + (-22)}{2}$

$= 12 \times \frac{10 - 22}{2} = 6 \times (-12)$.

Réponses **a.** et **d.**

95 $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 64 = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^6$

$= \frac{1 - 2^7}{1 - 2}$

$= 2^7 - 1 = 127$.

Réponses **b.** et **d.**

96 $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 - 0{,}1^3 + 0{,}1^4 - 0{,}1^5$

$= 1 + (-0{,}1) + (-0{,}1)^2 + (-0{,}1)^3 + (-0{,}1)^4 + (-0{,}1)^5$

$= \frac{1 - (-0{,}1)^6}{1 - (-0{,}1)} = \frac{1 - 0{,}1^6}{1 + 0{,}1}$.

Réponse **c.**

97 $v_0 + v_1 + \ldots + v_6 = v_0 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{1 - 0{,}5}$

$= 100 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{0{,}5}$

$= 200 \times (1 - 0{,}5^7)$

Réponse **c.**

98 $v_3 + v_4 + \ldots + v_9 = v_3 \times \frac{1 - 0{,}5^{9-3+1}}{1 - 0{,}5}$

$= 16 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{1 - 0{,}5}$

Réponse **c.**

99 **a.** $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$.

b. $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$.

c. On en déduit :

$21 + 22 + \ldots + 50$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 19)$

$= 1275 - 190 = 1085$.

100 Méthode 1 s'inspirant de l'exercice **99** :

$31 + 32 + 33 + \ldots + 79$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 79) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 30)$

$= \frac{79 \times 80}{2} - \frac{30 \times 31}{2} = 3\,160 - 465 = 2\,695$.

Méthode 2 :

$31 + 32 + 33 + \ldots + 79 = (79 - 31 + 1) \times \frac{31 + 79}{2}$

$= 49 \times 55 = 2\,695$.

101 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 9 + 4n$.

a. $u_{13} = 9 + 4 \times 13 = 61$.

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{13} = 14 \times \frac{u_0 + u_{13}}{2}$

$= 7 \times (9 + 61) = 490$.

102 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 5 - 7n$.

a. $u_{16} = 5 - 7 \times 16 = -107$.

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{16} = 17 \times \frac{u_0 + u_{16}}{2}$

$= \frac{17}{2} \times (5 - 107) = -867$.

103 **a.**

```
U ← 3,2
S ← U
Pour n allant de 1 à 19
    U ← U + 2,3
    S ← S + U
Fin Pour
```

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def somme():
    U=3.2
    S=U
    for n in range(1,20):
        U=U+2.3
        S=U+S
    return S
```

La fonction renvoie : $S = 501$.

104 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -15{,}8 + 3{,}7n$.

$u_5 = 2{,}7$ et $u_{17} = 47{,}1$.

$$u_5 + u_6 + \ldots + u_{17} = (17 - 5 + 1) \times \frac{u_5 + u_{17}}{2}$$
$$= \frac{13}{2} \times (2{,}7 + 47{,}1) = 323{,}7.$$

105 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-0{,}6)^n \times 25$.

$$\sum_{k=0}^{k=7} v_k = v_0 \times \frac{1-(-0{,}6)^8}{1-(-0{,}6)}$$
$$= 25 \times \frac{1-0{,}6^8}{1+0{,}6} = 15{,}625(1 - 0{,}6^8)$$
$$= 15{,}362\ 56.$$

106 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1{,}2^n \times 0{,}125$.

$v_3 = 0{,}216$.

$$\sum_{k=3}^{k=18} v_k = v_3 \times \frac{1-1{,}2^{18-3+1}}{1-1{,}2} = 0{,}216 \times \frac{1-1{,}2^{16}}{-0{,}2}$$
$$= -1{,}08(1 - 1{,}2^{16}) = 1{,}08(1{,}2^{16} - 1)$$
$$\approx 18{,}89.$$

107 **a.** On note u_n, le nombre de carreaux utilisés au $n^{\text{ème}}$ tour, avec $n \in \mathbb{N}$: $u_1 = 6$, $u_2 = 12$, $u_3 = 18$.
À chaque tour, il y a six carreaux de plus :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$. Il s'agit de la suite arithmétique de raison 6 et de premier terme $u_1 = 6$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n$.
b. $u_{27} = 6 \times 27 = 162$

$$\sum_{k=1}^{k=27} u_k = 27 \times \frac{u_1 + u_{27}}{2}$$
$$= 27 \times \frac{6 + 162}{2} = 27 \times 84$$
$$= 2\ 268.$$

En n'oubliant pas de compter le carreau central, le carreleur a donc utilisé 2 269 carreaux.

108 **a.** On note u_n, le nombre de points violets et v_n, le nombre de points verts, avec n un nombre entier naturel compris entre 1 et 7.
Alors, d'après ce qu'a écrit Camille :
$u_{n+1} = u_n + 4$ et $v_{n+1} = v_n + 4$.
b. Alors (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de même raison 4, **mais n'ont pas le même premier terme** : $u_1 = 1$ et $v_1 = 3$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 4(n - 1)$ et $v_n = 3 + 4(n - 1)$.
$u_7 = 25$ et $v_7 = 27$.
Nombre total de points violets :

$$\sum_{k=1}^{k=7} u_k = 7 \times \frac{u_1 + u_7}{2} = 3{,}5(1 + 25) = 91.$$

Nombre total de points verts :

$$\sum_{k=1}^{k=7} v_k = 7 \times \frac{v_1 + v_7}{2} = 3{,}5(3 + 27) = 105.$$

Il y a donc plus de points verts que de points violets.

109 **1.** $D = 10 + 13 + 16 + \ldots + 145$.

a.

$D \leftarrow 0$
$U \leftarrow 10$
Tant que $U \leqslant$ **145** faire
    $D \leftarrow \boldsymbol{D + U}$
    $U \leftarrow \boldsymbol{U} + 3$
Fin Tant que

b. *Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def sommeD():
    D=0
    U=10
    while U<=145:
        D=D+U
        U=U+3
    return D
```

La fonction renvoie : $D = 3\ 565$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 10$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 + 3n$.
a. $u_k = 145 \Leftrightarrow 10 + 3k = 145$

$$\Leftrightarrow k = \frac{145 - 10}{3} = 45.$$

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=45} u_i$

$$= 46 \times \frac{u_0 + u_{45}}{2}$$
$$= 46 \times \frac{10 + 145}{2} = 3\ 565.$$

c. On retrouve le résultat de la question **1** ; en effet :
$D = 10 + 13 + 16 + \ldots + 145$
$\quad = 10 + (10 + 3) + (10 + 3 \times 2) + \ldots + (10 + 3 \times 45)$

3.a. $E = 500 + 495 + 490 + \ldots + 100$
$= 500 + (500 - 5) + (500 - 5 \times 2) + \ldots + (500 - 5 \times 80)$.
On reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique de raison –5 et de premier terme 500.
$E = 24\,300$.
Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def sommeE():
    E=0
    U=500
    while U>=100:
        E=E+U
        U=U-5
    return E
```

b. $F = 6\,400 + 3\,200 + 1\,600 + \ldots + 25$
$= 6\,400 + 6\,400 \times 0{,}5 + (6\,400 \times 0{,}5^2) + \ldots + (6\,400 \times 0{,}5^2)$.
On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 6 400. $F = 12\,775$.
Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def sommeF():
    F=0
    U=6400
    while U>=25:
        F=F+U
        U=U/2
    return F
```

110

a. $S = 320 + 160 + 80 + \ldots + 0.3125 = 320 \times 0.5^0 + 320 \times 0.5^1 + 320 \times 0.5^2 + \ldots + 320 \times 0.5^{10}$.
The common ratio is 0.5.
b. For $V_0 = 320$, $V_n = 0.3125$ with $n = 10$.
c.
$S = \sum_{k=0}^{k=10} V_k = V_0 \times \frac{1-0.5^{11}}{1-0.5} = 320 \times \frac{1-0.5^{11}}{0.5} = 640 \times (1 - 0.5^{11}) = 639.6875$

111 **a.** La variable i prend les valeurs entières de 1 à 20.
b. À l'étape i, où $i \in \mathbb{N}^*$, le nombre de pixels parcourus est $5i$. On note u_i, ce nombre de pixels. Alors (u_i) est une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme $u_1 = 5$.
c. $\sum_{i=1}^{i=20} u_i = \sum_{i=1}^{i=20} 5i = 5\sum_{i=1}^{i=20} i = 5 \times \frac{20 \times 21}{2} = 1\,050$.
La tortue s'est déplacée de 1 050 pixels pour tracer la spirale.

112 **1.a.** $\frac{0{,}8}{4} = \frac{0{,}16}{0{,}8} = \ldots = 0{,}2$. La raison de la suite (u_n) est 0,2 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}2u_n$.
b. Formule possible en B3 : = 0,2*B2.
c. Lorsque n devient grand, u_n semble se rapprocher de 0.
2. a. Formules possible en C3 :
=C2 + B3 ou = SOMME(B$2:B3) .
b. $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \times \frac{1-0{,}2^{n+1}}{1-0{,}2}$
$= 4 \times \frac{1-0{,}2^{n+1}}{0{,}8}$
$= 5 \times (1 - 0{,}2^{n+1})$.
c. Lorsque n devient grand, S_n semble se rapprocher de 5.

113 Démonstration des propriétés :

- La somme des n premiers entiers naturels non nuls est égale à :

$$\sum_{k=1}^{k=n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Une suite (u_n) est arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$ et de premier terme u_0.

La somme des $n + 1$ premiers termes de la suite (u_n) est égale à :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}.$$

- La somme S des n premiers entiers naturels non nuls est :

$$S = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n = \sum_{k=1}^{k=n} k.$$

Elle s'écrit aussi $S = \sum_{k=1}^{k=n}(n-k+1) = \mathbf{n + (n-1) + \ldots + 2 + 1}$.

Pour tout nombre entier naturel k compris entre 1 et n, on a :

$$k + (n-k+1) = \mathbf{k + n - k + 1 = n + 1}.$$

Le résultat ne dépend pas de k. D'où :

$$S + S = \mathbf{(n+1) + \ldots + (n+1) = n(n+1)}.$$

On en déduit que $S = \frac{1}{2} \times \mathbf{n(n+1)}$.

- On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0.

Pour tout nombre entier naturel k, $u_k = \mathbf{u_0 + k \times r}$.

- Alors : $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + (u_0 + r) + \mathbf{(u_0 + 2r)} + \ldots + \mathbf{(u_0 + nr)}$

$$= \mathbf{(n+1)} \times u_0 + (\mathbf{1 + 2 + \ldots + n}) \times r = \mathbf{(n+1)} \times u_0 + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \times \mathbf{n(n+1)} \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times (n+1) \times (\mathbf{2} \times u_0 + \mathbf{n} \times r) = \frac{1}{2} \times (n+1) \times (u_0 + \mathbf{u_n})$$

.

114 On considère une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 et la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_0 + r \times n$.

1.a. $v_0 = u_0 + r \times 0 = u_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$v_{n+1} = u_0 + r \times (n+1) = u_0 + r \times n + r = v_n + r$.

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est arithmétique de raison r, comme (u_n) ; et comme de plus leurs premiers termes sont égaux, les deux suites sont égales :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = u_0 + r \times n$.

2. Pour tous entiers naturels n et p :

$u_n = u_0 + r \times n$ et $u_p = u_0 + r \times p$.

On soustrait les deux expressions :

$u_n - u_p = u_0 + r \times n - (u_0 + r \times p)$

$= u_0 + r \times n - u_0 - r \times p$

$= (n - p)r \Leftrightarrow u_n = u_p + (n - p)r$.

115 **a.** Une suite (u_n) est arithmétique de raison r.

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = r$.

b. • Si $r < 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ autrement dit la suite (u_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

• Si $r = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$, autrement dit la suite (u_n) est constante sur $\mathbb{N}$.

• Si $r > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, autrement dit la suite (u_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$.

116 On considère une suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 et la suite (v_n), définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_0 \times q^n$.

1.a. $v_0 = u_0 \times q^0 = u_0$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_0 \times q^{n+1} = u_0 \times q^n \times q = v_n \times q$.

b. D'après la question précédente, la suite (v_n) est géométrique de raison q, comme (u_n) ; et comme de plus leurs premiers termes sont égaux, les deux suites sont égales :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n = u_0 \times q^n$.
2. Pour tous nombres entiers naturels n et p, avec $n > p$:
$u_n = u_0 \times q^n = u_0 \times q^p \times q^{n-p} = u_p \times q^{n-p}$.

117 (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 non nul :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$.
1. On suppose : $q < 0$.
a. $u_1 = u_0 \times q$, donc u_0 et u_1 sont de signes contraires.
$u_2 = u_0 \times q^2$, donc u_0 et u_1 sont de même signe.
b. Si $u_0 < 0$, alors : $u_1 > u_0$ et $u_2 < u_1$.
Si $u_0 > 0$, alors : $u_1 < u_0$ et $u_2 > u_1$.
Dans les deux cas, la suite (u_n) n'est pas monotone.
2. On suppose : $q = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n = u_0$.
Alors la suite (u_n) est constante égale à u_0.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n$
$= u_0 \times q^n (q - 1)$.
a. On suppose : $0 < q < 1$. Alors : $q - 1 < 0$.
De plus : $q^n > 0$. Alors, d'après **3.a.**, $u_{n+1} - u_n$ est du signe contraire à celui de u_0. On en déduit que, si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante et si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
b. On suppose : $q > 1$. Alors : $q - 1 > 0$.
De plus : $q^n > 0$. Alors, d'après **3.a.**, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de u_0. On en déduit que, si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante et si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.

118 On considère une suite géométrique (u_n) de raison $q \neq 1$.
n et p sont des nombres entiers naturels, tels que $n \geqslant p$. Le cas $p = 0$ est traité dans la *démonstration rédigée page 66*.
On suppose alors : $p \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{k=n} u_k &= \sum_{k=0}^{k=n} u_k - \sum_{k=0}^{k=p-1} u_k \\
&= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - u_0 \times \frac{1-q^p}{1-q} \\
&= u_0 \times \frac{1-q^{n+1}-1+q^p}{1-q} \\
&= u_0 \times \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q} \\
&= u_0 \times \frac{q^p(1-q^{n-p+1})}{1-q} \\
&= u_0 \times q^p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \\
&= u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.
\end{aligned}$$

119 **1. a.** Dans les deux algorithmes, on reconnaît la suite arithmétique de premier terme 2 d'indice 0 et de raison –0,5 : dans l'algorithme 1 par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ et dans l'algorithme 2 par le terme général $v_n = 2 - 0{,}5n$.

Algorithme 1
$U \leftarrow 2$
Pour N allant de 1 à 6
$\quad U \leftarrow U - 0{,}5$
Fin Pour

Algorithme 2
$K \leftarrow 0$
Tant que K ⩽ 6
$V \leftarrow 2 - 0{,}5 \times K$
$K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

b. Les deux algorithmes calculent le 7ᵉ terme :
$u_6 = v_6 = 2 - 0{,}5 \times 6 = -1$.
Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def algo1_1():
    U=2
    for N in range(1,7):
        U=U-0.5
    return U
```

```
def algo1_2():
    K=0
    while K<=6:
        V=2-0.5*K
        K=K+1
    return V
```

2. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), l'algorithme 1 est modifié : N démarre à 1 au lieu de 0. D'où le corrigé ci-dessous.*

Algorithme 1
Pour N allant de 1 à 5
$U \leftarrow -3 \times 2$^N
Fin Pour

Algorithme 2
$V \leftarrow -3$
$K \leftarrow 1$
Tant que $K \leqslant 5$
$\quad V \leftarrow 2V$
$\quad K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

a. Dans les deux algorithmes, on reconnait une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $-3 \times 2 = -6$ d'indice 1.
b. Les deux algorithmes calculent :
$u_5 = v_5 = -3 \times 2^5 = 96$.
Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def algo2_1():
    for N in range(1,6):
        U=-3*(2**N)
    return U
```

```
def algo2_2():
    V=-3
    K=1
    while K<=5:
        V=2*V
        K=K+1
    return V
```

120 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + 70$ et
$B_{n+1} = 1{,}06 \times B_n$.
Alors, la suite (A_n) est arithmétique de raison 70 et de premier terme $A_0 = 1\,600$ et la suite (B_n) est géométrique de raison 1,06 et de premier terme $B_0 = 1\,300$.
2. a. À l'aide d'un tableur, on compare l'évolution des salaires. On peut ajouter une colonne de test avec l'instruction SI.
Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

D3 =SI(C3>B3;"contrat B";"contrat A")

	A	B	C	D
2	n	A_n	B_n	Test
3	0	1 600,00	1 300,00	contrat A
4	1	1 670,00	1 378,00	contrat A
5	2	1 740,00	1 460,68	contrat A
6	3	1 810,00	1 548,32	contrat A
7	4	1 880,00	1 641,22	contrat A
8	5	1 950,00	1 739,69	contrat A
9	6	2 020,00	1 844,07	contrat A
10	7	2 090,00	1 954,72	contrat A
11	8	2 160,00	2 072,00	contrat A
12	9	2 230,00	2 196,32	contrat A
13	10	2 300,00	2 328,10	contrat B
14	11	2 370,00	2 467,79	contrat B
15	12	2 440,00	2 615,86	contrat B
16	13	2 510,00	2 772,81	contrat B
17	14	2 580,00	2 939,18	contrat B
18	15	2 650,00	3 115,53	contrat B
19	16	2 720,00	3 302,46	contrat B
20	17	2 790,00	3 500,60	contrat B
21	18	2 860,00	3 710,64	contrat B
22	19	2 930,00	3 933,28	contrat B
23	20	3 000,00	4 169,28	contrat B

D'après ce tableau de valeurs, le salaire du contrat B dépasse celui du contrat A au bout de 10 ans.

b. À l'aide d'un tableur, on compare les sommes cumulées tout au long des années.

Voir le fichier Tableur, feuille « comparaison cumuls annuels » dans le manuel numérique enseignant.

- en C3 : = B3*12 ;
- en E3 : = D3*12.

À recopier vers le bas :

- en C4 : =C3 + B4*12
- en E4 : = =E3 + D4*12
- en F3 : =SI(E3>C3;"contrat B";"contrat A") .

	A	B	C	D	E	F
1		Contrat A		Contrat B		
2	*n*	A_n	Cumul annuel A	B_n	Cumul annuel B	Test
3	0	1 600,00	19 200,00	1 300,00	15 600,00	contrat A
4	1	1 670,00	39 240,00	1 378,00	32 136,00	contrat A
5	2	1 740,00	60 120,00	1 460,68	49 664,16	contrat A
6	3	1 810,00	81 840,00	1 548,32	68 244,01	contrat A
7	4	1 880,00	104 400,00	1 641,22	87 938,65	contrat A
8	5	1 950,00	127 800,00	1 739,69	108 814,97	contrat A
9	6	2 020,00	152 040,00	1 844,07	130 943,87	contrat A
10	7	2 090,00	177 120,00	1 954,72	154 400,50	contrat A
11	8	2 160,00	203 040,00	2 072,00	179 264,53	contrat A
12	9	2 230,00	229 800,00	2 196,32	205 620,40	contrat A
13	10	2 300,00	257 400,00	2 328,10	233 557,63	contrat A
14	11	2 370,00	285 840,00	2 467,79	263 171,08	contrat A
15	12	2 440,00	315 120,00	2 615,86	294 561,35	contrat A
16	13	2 510,00	345 240,00	2 772,81	327 835,03	contrat A
17	14	2 580,00	376 200,00	2 939,18	363 105,13	contrat A
18	15	2 650,00	408 000,00	3 115,53	400 491,44	contrat A
19	16	2 720,00	440 640,00	3 302,46	440 120,92	contrat A
20	17	2 790,00	474 120,00	3 500,60	482 128,18	contrat B
21	18	2 860,00	508 440,00	3 710,64	526 655,87	contrat B
22	19	2 930,00	543 600,00	3 933,28	573 855,22	contrat B
23	20	3 000,00	579 600,00	4 169,28	623 886,54	contrat B

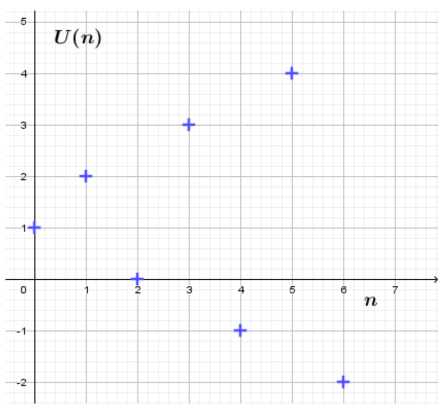
D'après ce tableau de valeurs, on peut remarquer que le contrat B, par cumul, devient plus intéressant que le contrat A au bout de 17 ans.

121 $U(0) = 1$ and $U(n) = U(n-1) + n \times (-1)^{n+1}$.

a. The first seven terms are: $U(0) = 1$; $U(1) = 2$; $U(2) = 0$; $U(3) = 3$; $U(4) = -1$; $U(5) = 4$; $U(6) = -2$.

b. $U(1) - U(0) = 1$ and $U(2) - U(1) = -2$.
$U(1) - U(0) \neq U(2) - U(1)$: this is not a arithmetic sequence.
$\frac{U(1)}{U(0)} = 2$ and $\frac{U(2)}{U(1)} = 0$. $\frac{U(1)}{U(0)} \neq \frac{U(2)}{U(1)}$: this is not a geometric sequence.

c.



d. We can deduce a formula for the term of even and odd rank:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $U(2n) = 1 - n$ and $U(2n + 1) = 2 + n$.

122 **a.** Proportion de filles en 2016 :

$\frac{1}{4} \times 1{,}12 = 0{,}28$, soit 28 %.

b. 2021 = 2015 + 6

Proportion de filles en 2021 : $\frac{1}{4} \times 1{,}12^6 \approx 0{,}493$,

soit 49,3 %.

c. Pour tout nombre entier naturel n**,** on note p_n , la proportion de filles l'année 2015 + n.
Pour $n < 10$: $p_{n+1} = 1{,}12p_n$.

d. On en déduit que la suite (p_n) est géométrique de raison 1,12 et de premier terme $p_0 = \frac{1}{4}$.

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
On fournit la fonction en Python suivante :

```
def proportionfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2015
```

Alors : `proportion(0.5)`renvoie : `2022`.
En 2022, la proportion de filles sera d'au moins 50 %.

123 **1.a.** La concentration en bactéries augmente de 15 % toutes les 10 minutes, donc :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1{,}15 \times c_n$.
La suite (c_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}15$ et de premier terme$c_0 = 5$.

b. D'après **a.** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1{,}15^n \times 5$.
1 h 30 min = 90 min = 9 × 10 min.
$c_9 = 1{,}15^9 \times 5 \approx 17{,}6$.

c. Plusieurs méthodes possibles pour déterminer au bout de combien de minutes la concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL : à l'aide d'un algorithme, à l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice ou avec un logiciel tableur, à l'aide d'une résolution d'inéquation par logiciel de calcul formel.
On cherche à trouver le plus petit nombre entier n, tel que : $c_n > 20 \Leftrightarrow 1{,}15^n \times 5 > 20$.

Avec *Xcas* :

```
1 float(solve(5*1.15^x>20)
[x>9.91896890928 ]
```

On trouve : $n = 10$.
La concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL au bout de $10 \times 10 = 100$ min, soit encore 1 h 40 min.
2. Il y a des mauvaises bactéries qui rendent malades, mais il y a aussi de « bonnes » bactéries qui servent, par exemple, au traitement des eaux usées ou à la fabrication de produits fromages. Les facteurs pouvant influer sur leur prolifération sont, par exemple, le pH, la température ou la présence de certains gaz (O_2, CO_2).

124 **1.a.** Pour créer un nouvel hexagone, il faut 21 losanges supplémentaires.
b. Pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant 2$, on note h_n, le nombre de losanges qu'on ajoute à l'hexagone $n-1$ pour créer un nouvel hexagone.
On remarque qu'on ajoute un losange de plus à chaque sommet de l'hexagone pour créer le suivant : $h_2 = 9$; $h_3 = 15$; $h_4 = 21$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, h_{n+1} = h_n + 6$.
La suite (h_n) est arithmétique de raison 6 et de premier terme $h_2 = 9$.
2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Fonction en Python qui compte le nombre de losanges nécessaires pour réaliser l'« hexagone 20 » :

```python
def vasarely():
    h=3
    S=3
    for i in range(2,21):
        h=h+6
        S=S+h
    return S
```

La fonction renvoie : S = 1200.
Remarque :
$h_n = h_2 + 6(n-2) = 9 + 6n - 12 = 6n - 3$.
Donc $h_{20} = 117$.

$$S = 3 + \sum_{i=2}^{i=20} h_i = 3 + \frac{20-2+1}{2}(h_2 + h_{20})$$

$$= 3 + \frac{19}{2} \times 126 = 1\,200.$$

125 **1.a.** On considère la suite (o_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $o_1 = \frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, o_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \sum_{k=1}^{k=6} o_k$$

$$= o_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^6} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

b. $1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$. La fraction manquante nécessaire pour recréer l'*unité* de l'œil est $\frac{1}{64}$.

2.a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{k=n} o_k$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

b. Quand n est de plus en plus grand, S_n semble se rapprocher de 1, c'est-à-dire l'*unité* de l'œil.
3. Dans la mythologie égyptienne, Osiris est le dieu de la mort, aux attributs de pharaon, Isis est son épouse et leur fils est Horus le dieu à tête de faucon. Thot est le dieu des hiéroglyphes, patron des scribes. Seth est le dieu des ténèbres, frère d'Osiris qu'il a tué et qui a son tour a été tué par Horus. La déesse égyptienne des Mathématiques est Seshat ; elle est aussi associée à l'astronomie et à l'architecture.

126 **Version guidée** pour les questions **2. c.** et **e.**
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n, la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014 + n$.
a. La quantité d'énergie produite en 2014 est :
$20 \times 95 = 1\,900$ kW·h.
La quantité d'énergie diminue de 3 % par an, donc en 2015 elle sera de :
$1\,900 \times 0{,}97 = 1\,843$ kW·h.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{3}{100} u_n = 0{,}97\, u_n$.

c. D'après **b.**, la suite (u_n) géométrique de raison $q = 0{,}97$et de premier terme $u_0 = 1\,900$.
Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = 0{,}97^n \times 1\,900$.
$2034 = 2014 + 20$. $u_{20} = 0{,}97^{20} \times 1\,900 \approx 1033$.
On peut estimer à 1 030 kW·h la quantité d'énergie produite en 2034.
d. On cherche le plus petit nombre entier naturel n, tel que $u_n < \frac{1}{2}u_0 \Leftrightarrow u_n < 950$.
$q \in]0 ; 1[$ et $u_0 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Et, à l'aide d'une table de valeurs obtenue à la calculatrice ou avec un tableur, on obtient : $u_{22} \approx 972 > 950$ et $u_{23} \approx 943 < 950$. $2014 + 23 = 2037$.
(On peut aussi remarquer : $u_n < \frac{1}{2}$; $u_0 \Leftrightarrow 0{,}97^n \times 1\,900 < \frac{1}{2} \times 1\,900 \Leftrightarrow 0{,}97^n<\frac{1}{2}$)
L'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement en 2037.
e. L'installation est garantie pendant 25 ans, donc on va calculer la quantité totale d'énergie produite de 2014 à 2038 et comparer le résultat à 20 000 kW.h, qui est le seuil de rentabilité financière.

$$\sum_{k=0}^{k=24} u_k = u_0 \times \frac{1-0{,}97^{25}}{1-0{,}97} = 1\,900 \times \frac{1-0{,}97^{25}}{0{,}03}$$
$$\approx 33\,758 > 20\,000 .$$

On en déduit que l'installation est rentable.

127 **1.** *Voir le fichier tableur ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. Formule possible en B3 : = B2 + A3 .
b. Formule possible en C3 : = C2 + A3^3 .
2. a. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n^2$.
Or, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$,
donc $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
b. Alors : $T_1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1} - T_n = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2((n+2)^2 - n^2)$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(4n+4)$$
$$= (n+1)^2(n+1)$$
$$= (n+1)^3.$$

c. $T_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$ donc

$$T_{n+1} - T_n = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$$
$$= 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 - 1^3 - 2^3 - \ldots - n^3$$

$= (n+1)^3$, ce qui en accord avec le résultat de la question précédente.

128 Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note u_n le nombre d'étapes pour déplacer n disques.
1. $u_1 = 1$, car pour déplacer un disque une seule étape suffit.
2. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a déplacé $n - 1$ disques en u_{n-1} étapes, puis on déplace le $n^{\text{ème}}$ disque en une étape et ensuite on déplace les $n - 1$ disques sur le $n^{\text{ème}}$ disque en en u_{n-1} étapes, donc le nombre d'étapes minimal pour déplacer n disques est :
$u_n = u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + 1$.
a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1$
$= 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$.
$v_1 = u_1 + 1 = 2$. Alors la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 2$.
b. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.
c. $u_8 = 2^8 - 1 = 255$. Pour déplacer un lot de huit disques, il faut au minimum 255 étapes.

129 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.
Alors, la suite (C_n) est définie par : $C_1 = 1^2 = 1$ et $C_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2$
$= C_n + (n+1)^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
a. $u_1 = \frac{1\times 2\times 3}{6} = 1$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$
$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)((n+2)(2n+3) - n(2n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6 - 2n^2 - n)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(6n+6)}{6} = (n+1)^2.$$

d. Les suites (C_n) et (u_n) sont définies par la même relation de récurrence et le même premier terme 1, donc elles sont égales.

3. $1^2+2^2+\ldots+195^2 = C_{195} = u_{195}$

$$= \frac{195\times(195+1)\times(2\times195+1)}{6}$$

$= 2\ 490\ 670$.

130 $f_0 = 1$, la longueur de L_0.

1. On découpe L_1 en trois morceaux de longueur $\frac{1}{3}$ et on remplace le morceau du milieu par deux morceaux de longueur $\frac{1}{3}$, donc

$$f_1 = 4\times\frac{f_0}{3} = 4\times\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

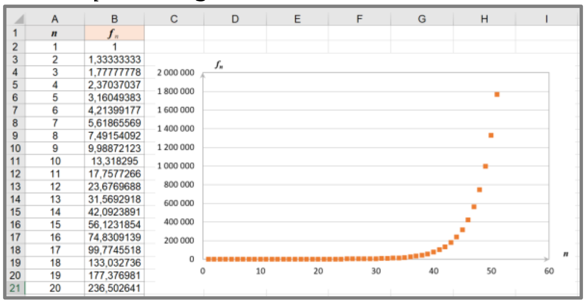
2. De même : $f_2 = 4\times\dfrac{f_1}{4}\times\dfrac{4}{3} = \dfrac{4}{3}\times\dfrac{4}{3} = \dfrac{16}{9}$.

3. a. De même : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1} = \frac{4}{3}f_n$.

b. On en déduit que (f_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{3}$ et de premier terme $f_0 = 1$.

D'où : $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n = 1\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n = \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



	A	B
1	n	f_n
2	1	1
3	2	1,33333333
4	3	1,77777778
5	4	2,37037037
6	5	3,16049383
7	6	4,21399177
8	7	5,61865569
9	8	7,49154092
10	9	9,98872123
11	10	13,318295
12	11	17,7577266
13	12	23,6769688
14	13	31,5692918
15	14	42,0923891
16	15	56,1231854
17	16	74,8309139
18	17	99,7745518
19	18	133,032736
20	19	177,376981
21	20	236,502641

D'après le nuage de points, on peut conjecturer que (f_n) a une limite infinie : quand n devient de plus en plus grand, f_n aussi.

131 **1. a.** On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n = t\times C_{n-1}$ et

$M = I_n + R_n = I_{n+1} + R_{n+1}$.

Alors : $R_{n+1} = I_n + R_n - I_{n+1}$

$= t\times C_{n-1} + R_n - t\times C_n$

$= R_n + t\times(C_{n-1} - C_n)$.

b. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $R_{n+1} = R_n + t\times(C_{n-1} - C_n)$

$= R_n + t\times R_n$

$= (1+t)\times R_n$.

Alors (R_n) est la suite géométrique de raison $(1+t)$ et de premier terme R_1.

c.

$$C_0 = \sum_{i=1}^{i=k} R_i = R_1\times\frac{1-(1+t)^k}{1-(1+t)} = R_1\times\frac{1-(1+t)^k}{-t}$$

$$= R_1\times\frac{(1+t)^k-1}{t}.$$

d. D'où : $R_1 = \dfrac{t}{(1+t)^k-1}\times C_0$.

$M = I_1 + R_1$, donc :

$$M = t\times C_0 + \frac{t}{(1+t)^k-1}\times C_0$$

$$= t\times C_0\left(1+\frac{1}{(1+t)^k-1}\right)$$

$$= t\times C_0\times\frac{(1+t)^k-1+1}{(1+t)^k-1}$$

$$= t\times C_0\times\frac{(1+t)^k}{(1+t)^k-1}.$$

2. a. $C_0 = 15\ 000$; $t = 0{,}2\ \% = 0{,}002$;
$k = 12\times5 = 60$. D'où :

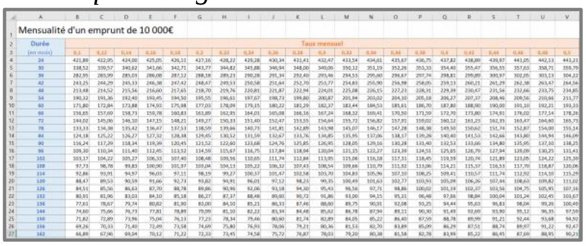
$$M = 0{,}002\times15\ 000\times\frac{(1+0{,}002)^{60}}{(1+0{,}002)^{60}-1}\approx 265{,}55$$

b. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), la formule du coût de l' emprunt a été modifiée : remboursements – capital emprunté (différence et non somme).*

Coût total du crédit :

$k\times M - C_0 \approx 60\times265{,}55 - 15\ 000 \approx 633$ €.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



d. On lit la mensualité 177,03 € pour 10 000 € empruntés donc pour 15 000 € empruntés, $M = 1{,}5\times177{,}03 = 265{,}545$ € qui est la valeur trouvée au **2.a.**

132 **1. a.** $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n$.

b. On en déduit que la suite (P_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $P_0 = 1 = 100\ \%$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

2. a. $\frac{600000}{5600} \approx 107$. On en déduit qu'environ 107 périodes se sont écoulées depuis la fossilisation de la fougère.
La proportion restante de carbone 14 est alors :
$P_{107} = \frac{1}{2^{107}} \approx 6{,}16 \times 10^{-33}$.

Remarque (source CEA) : cette proportion très faible est quasi inexploitable ; en fait on utilise la datation au carbone 14 pour les objets jusqu'à environ 50 000 ans.

b. $P_n = 0{,}2\ \% = 0{,}002 \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} = 0{,}002$

$q \in]0\ ;1[$ et $P_0 > 0$, donc la suite (P_n) est strictement décroissante sur $\mathbb{N}$.

À l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice ou avec un tableur, on a :
$P_8 \approx 0{,}0039$ et $P_9 \approx 0{,}0019 \approx 0{,}002$.
On en déduit que 9 périodes se sont écoulées depuis la mort du mammouth, c'est-à-dire $9 \times 5\,600 = 50\,400$ ans environ.

3. Autres éléments radioactifs :
- Césium 137 qui à forte dose peut entraîner de lourdes pathologies mais bien utilisé à un usage médical en radiothérapie pour le traitement du cancer ou un usage industriel pour la stérilisation des aliments.
- Fluor 18 qui est un traceur en imagerie médicale.

Recherches mathématiques

p. 72 du manuel

133 On note u_n le nombre de grains de riz que l'on doit mettre sur la $n^{\text{ème}}$ case, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n$.
La suite (u_n)est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_1 = 1$.
Le nombre de grains de riz à mettre sur l'échiquier est donc :

$$\sum_{k=1}^{k=64} u_k = u_1 \times \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1\ .$$

Un grain de riz pèse $0{,}02$ g $= 2 \times 10^{-8}$t.
La masse de tous les grains de riz est donc :
$(2^{64} - 1) \times 2 \times 10^{-8} \approx 3{,}689 \times 10^{11}$ t.
Alors, le nombre de camions nécessaires est environ : $\frac{3{,}689 \times 10^{11}}{40} \approx 9{,}22 \times 10^{19}$
Si on met les camions bout à bout, cela fait :
$9{,}22 \times 10^{19} \times 15 \approx 1{,}4 \times 10^{11}$ m.
Or, la circonférence de la Terre fait environ 40 000 km, c'est-à-dire 4×10^7m.
Cela représente donc environ
$\frac{1{,}4 \times 10^{11}}{4 \times 10^7} = 3\,500$ fois la circonférence de la Terre.

134 **a.** On note u_n le nombre de triangles qui sont supprimés lors du $n^{\text{ème}}$ processus, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$. La suite (u_n)est alors géométrique de raison q =3 et de premier terme $u_1 = 1$.

$$\sum_{k=1}^{k=20} u_k = u_1 \times \frac{1-3^{20}}{1-3} = \frac{1}{2} \times (3^{20} - 1)$$
$$= 1\,743\,392\,200.$$

On en déduit qu'à la fin du 20$^{\text{e}}$ processus, 1 743 392 200 triangles auront été supprimés.

b. On note v_n, la part d'aire bleue restante à la fin du $n^{\text{ème}}$ processus, avec $n \in \mathbb{N}^*$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = \frac{3}{4} v_n$. La suite (v_n)est alors géométrique de raison $q' = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_1 = \frac{3}{4}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

D'où : $v_{20} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \approx 0{,}003$

On en déduit qu'à la fin du 20$^{\text{e}}$ processus, la part d'aire bleue restante est environ 0,3 %.

135 Les suites (v_n) et (w_n) sont définies par :

$v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$;
$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{n+1} - v_n$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_n + 2n + 2 - v_n = 2n + 2$.
On en déduit que la suite (w_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $w_0 = 2$.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n$.

a. $S_n = (n+1) \times \dfrac{w_0 + w_n}{2} = (n+1) \times \dfrac{2+2n+2}{2}$

$= (n+1) \times \dfrac{2n+4}{2} = (n+1) \times (n+2)$.

b. Par phénomène de télescopage :
$\forall n \in \mathbb{N}$,
$S_n = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \ldots + (v_{n+1} - v_n) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + \ldots + v_{n+1} - v_n = v_{n+1} - v_0$.

c. On en déduit :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = S_{n-1} + v_0 = n \times (n+1) + 0$
$= n \times (n+1)$.
Or $v_0 = 0 = 0 \times 1$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$v_n = n \times (n+1)$.

136 On considère (u_n) une suite, de premier terme u_0 qui est à la fois arithmétique de raison r et géométrique de raison q :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr = u_0 \times q^n$.
Si $u_0 = 0$, alors la suite (u_n) est constante nulle.
Supposons désormais : $u_0 \neq 0$.
On a : $u_1 = u_0 + r = u_0 \times q$, donc :

$q = 1 + \dfrac{r}{u_0} \Leftrightarrow q - 1 = \dfrac{r}{u_0}$

et $u_2 = u_0 + 2r = u_0 \times q^2$, donc : $q^2 = 1 + \dfrac{2r}{u_0}$.

D'où : $q^2 = 1 + 2 \times \dfrac{r}{u_0} = 1 + 2 \times (q-1) = 2q - 1$

$\Leftrightarrow q^2 - 2q + 1 = 0 \Leftrightarrow (q-1)^2 = 0 \Leftrightarrow q = 1$.

De plus : $\dfrac{r}{u_0} = q - 1 = 0$ et donc $r = 0$.

Alors la suite (u_n) est constante, et donc, dans tous les cas, la suite (u_n) est nécessairement constante.

Autre méthode :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r = q \times u_n$ donc
$r = (q-1)u_n$.
Si $q = 1$ alors $r = 0$ et la suite (u_n) est constante.

Si $q \neq 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{r}{q-1}$ et la suite (u_n) est constante, ce qui n'est possible que si $u_0 = 0$.
Dans tous les cas, la suite (u_n) est nécessairement constante.
Réciproquement, toute suite constante est à la fois géométrique et arithmétique.
On en conclut que les suites qui sont à la fois arithmétiques et géométriques sont les suites constantes.

137 La suite (k_n) est définie par : $k_1 = 2^{2020}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k_{n+1} = 0{,}5k_n$. Alors la suite (k_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $k_1 = 2^{2020}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $k_n = k_1 \times 0{,}5^{n-1} = 2^{2020} \times \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$= 2^{2021-n}$.

D'où : $k_{2018} = 2^{2021-2018} = 2^3 = 8$.

138 La suite (t_n) vérifie :

$t_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = n - t_n$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2(n+1)} = t_{2n+2} = t_{2n+1+1} = 2n + 1 - t_{2n+1}$
$= 2n + 1 - (2n - t_{2n}) = 1 + t_{2n}$.
La suite des termes d'indice pair est donc arithmétique de premier terme $t_0 = 4$ et de raison 1.
$t_1 = 0 - t_0 = -4$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{2(n+1)+1} = t_{2n+2+1} = 2n + 2 - t_{2n+2}$
$= 2n + 2 - t_{2n+1+1}$
$= 2n + 2 - (2n + 1 - t_{2n+1})$
$= 1 + t_{2n+1}$.
La suite des termes d'indice impair est donc arithmétique de premier terme $t_1 = -4$ et de raison 1.

CHAPITRE 3

Second degré

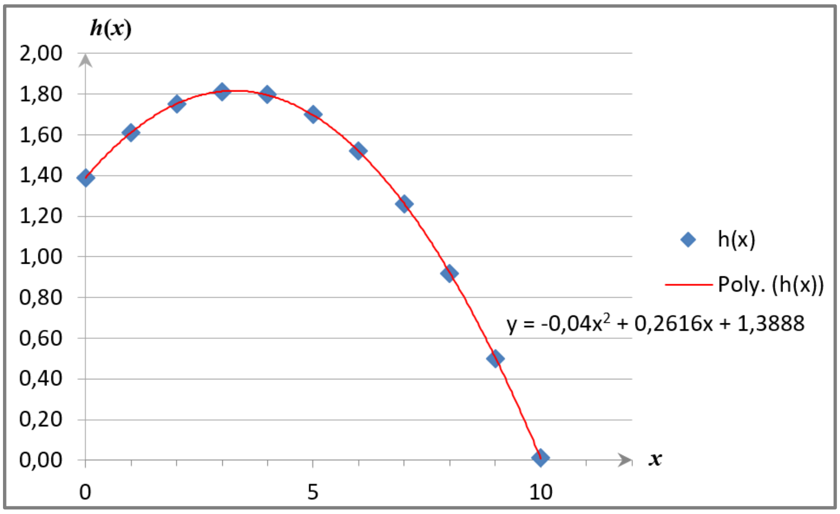
► *Les exercices* **1** *à* **11** *de la rubrique « **Réactivation** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 76 et 77 du manuel

1 Pétanque et fonction polynôme du second degré

1. 2. et **3.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



3.b. Pour $x = 3{,}25$ m, la hauteur de la boule est $-0{,}04 \times 3{,}25^2 + 0{,}26 \times 3{,}25 + 1{,}39 = 1{,}812\,5$ m.

2 Un problème d'aire

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Conjecture : Pour AM $=$ 1 cm, on trouve une aire égale à 9 cm^2.

2. a. $\mathcal{A}_{\text{AMQ}} = \mathcal{A}_{\text{CPN}} = \frac{x(3-x)}{2}$ et $\mathcal{A}_{\text{BNM}} = \mathcal{A}_{\text{DQP}} = \frac{x(5-x)}{2}$.

b. $\mathcal{A}_{\text{MNQP}} = 5 \times 3 - 2 \times \frac{x(3-x)}{2} - 2 \times \frac{x(5-x)}{2} = 15 - x(3-x) - x(5-x) = 2x^2 - 8x + 15$.

c. $\mathcal{A}_{\text{MNQP}} = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 15 = 9 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0$.

d. $2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2 \times (x^2 - 2 \times 2x + 4 - 4 + 3) = 2 \times [(x-2)^2 - 1]$
$= 2(x-2-1)(x-2+1) = 2(x-3)(x-1)$.

e. $\mathcal{A}_{\text{MNQP}} = 9 \Leftrightarrow 2(x-3)(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$

La conjecture est donc correcte, mais incomplète : il y a deux solutions 3 et 1.

3. Pour une aire de 7 cm², il y a une seule solution : 2.
Pour une aire de 5 cm², il n'y a pas de solution.

3 Un problème historique

1. L'équation proposé par Al-Khwarizmi est $x^2 + 10x = 39$.
2. $3^2 + 10 \times 3 = 39$ donc 3 est bien solution de l'équation.
3.a. L'aire du polygone AEFCHI est égale à $x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$.
b. $\mathcal{A}_{\text{AEGI}} = \mathcal{A}_{\text{AEFCHI}} + \mathcal{A}_{\text{CHGF}} = x^2 + 10x + 25$ et $\mathcal{A}_{\text{AEGI}} = (x + 5)^2$.
On a donc $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, ou encore $x^2 + 10x = (x + 5)^2 - 25$.
c. $x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 25 = 39 \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 64 = 0$
d. $x^2 + 10x = 39 \Leftrightarrow (x + 5)^2 - 8^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x + 5 + 8)(x + 5 - 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 13 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -13 \text{ ou } x = 3$$

On a donc $S = \{-13\,;\, 3\}$.
e. Il y a deux solutions, et non une, mais la méthode d'Al-Khwarizmi, qui considère x comme une distance, ne donne que les solutions positives.
4. $x^2 + 8x = 20 \Leftrightarrow (x + 4)^2 - 16 = 20$

$$\Leftrightarrow (x + 4)^2 - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 4 + 6)(x + 4 - 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 10)(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + 10 = 0 \text{ ou } x - 2 = 0$$

On a donc $S = \{-10\,;\, 2\}$. Al-Khwarizmi aurait obtenu seulement la solution positive égale à 2.

4 Une histoire de signe

1.

- p_1 est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1{,}25]$ et croissante sur $[-1{,}25\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 2 fois l'axe des abscisses.
- p_2 est croissante sur $]-\infty\,;\,0{,}125]$ et décroissante sur $[0{,}125\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 2 fois l'axe des abscisses.
- p_3 est décroissante sur $]-\infty\,;\,1]$ et croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 0 fois l'axe des abscisses.
- p_4 est croissante sur $]-\infty\,;\,5]$ et décroissante sur $[5\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 1 fois l'axe des abscisses.
- p_5 est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 0 fois l'axe des abscisses.
- p_6 est décroissante sur $]-\infty\,;\,2]$ et croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 1 fois l'axe des abscisses.
- p_7 est croissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et décroissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 2 fois l'axe des abscisses.
- p_8 est croissante sur $]-\infty\,;\,2{,}5]$ et décroissante sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 0 fois l'axe des abscisses.
- p_9 est croissante sur $]-\infty\,;\,-0{,}5]$ et décroissante sur $[-0{,}5\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 1 fois l'axe des abscisses.
- p_{10} est décroissante sur $]-\infty\,;\,2{,}5]$ et croissante sur $[2{,}5\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 2 fois l'axe des abscisses.
- p_{11} est décroissante sur $]-\infty\,;\,-0{,}5]$ et croissante sur $[-0{,}5\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 0 fois l'axe des abscisses.
- p_{12} est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et croissante sur $[-1\,;\,+\infty[$.
Sa courbe représentative coupe 1 fois l'axe des abscisses.

2. Conjecture : Si une fonction polynôme a des racines, alors elle est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle de ses racines. Si elle n'a pas de racines, alors elle est du signe de a.

Application

p. 115 à 117 du manuel

Savoir-faire 1

Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré

12 **a.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$f(x) = x^2 - 8x + 9 = (x-4)^2 - 16 + 9$
$= (x-4)^2 - 7$

$a = 1 > 0$, $\alpha = 4$, $\beta = -7$, d'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	4	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	-7	$\nearrow$

b. $a = -2$; $b = 6$ et $c = 1$.

On a donc $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2\times(-2)} = \frac{3}{2}$ et

$\beta = g(\alpha) = -2\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 6 \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$.

Le tableau de variations est :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de g	$\nearrow$	$\frac{11}{2}$	$\searrow$

c. La fonction est déjà sous forme canonique

$a = 16$; $\alpha = 0$ et $\beta = -1$.

Le tableau de variations est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de h	$\searrow$	-1	$\nearrow$

Savoir-faire 2

Résoudre une équation du second degré

13 **1.a.** $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25 > 0$,

donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-1-\sqrt{25}}{-2} = \frac{-1-5}{-2} = 3$ et

$x_2 = \frac{-1+\sqrt{25}}{-2} = \frac{-1+5}{-2} = -2$.

On a donc $S = \{-2\ ;\ 3\}$.

b. $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 8^2 - 4 \times (-3) \times \left(-\frac{16}{3}\right) = 0$

donc il y a une solution :

$x_0 = \frac{-8}{2\times(-3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

On a donc $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$.

2.a. $-x^2 + x + 6 = -(x+2)(x-3)$.

b. $-3x^2 + 8x - \frac{16}{3} = -3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2$.

14 **1.a.** $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$= -31 < 0$,

donc il n'y a pas de solutions : $S = \emptyset$.

b. $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times (-5) \times 7 = 141 > 0$,

donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{1-\sqrt{141}}{-10} = \frac{-1+\sqrt{141}}{10}$ et

$x_2 = \frac{1+\sqrt{141}}{-10} = \frac{-1-\sqrt{141}}{10}$.

On a donc $S = \left\{\frac{-1+\sqrt{141}}{10}\ ;\ \frac{-1-\sqrt{141}}{10}\right\}$.

c. $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 3^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 29 > 0$,

donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$.

On a donc $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{29}}{2}\ ;\ \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

d. $\Delta = 10^2 - 4 \times (-25) \times (-1) = 0$, donc il y a une solution : $x_0 = \frac{-10}{-50} = 0{,}2$.

On a donc $S = \{0{,}2\}$.

15 **a.** $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 > 0$,

donc il y a deux racines :

$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{6} = -2$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{6} = \frac{1}{3}$.

Pour tout réel x, on a donc :

$3x^2 + 5x - 2 = 3(x+2)\left(x - \frac{1}{3}\right)$.

b. $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 9 \times \frac{1}{9} = 0$,

donc il y a une racine $x_0 = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.

Pour tout réel x, on a donc :

$9x^2 - 2x + \frac{1}{9} = 9\left(x - \frac{1}{9}\right)^2$.

Savoir-faire 3

Utiliser l'expression de la somme et du produit des racines

16 **a.** On remarque que :

$f(-1) = (-1)^2 - 6 \times (-1) - 7 = 0$. Ainsi -1 est une racine évidente de f.

On note $x_1 = -1$. Le produit des racines vaut $p = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$. Ici on a $x_1 = -1$, $a = 1$, $b = -6$ et $c = -7$. On obtient en remplaçant $-1 \times x_2 = \frac{-7}{1}$.

Donc $x_2 = 7$.

Ainsi la fonction f admet deux racines –1 et 7. On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \times (x + 1)(x - 7) = (x + 1)(x - 7)$.

b. On remarque que $g(-1) = 0$. Ainsi –1 est une racine évidente de g.

On note $x_1 = -1$. Le produit des racines vaut $p = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$. Ici on a $x_1 = -1$, $a = 1$, $b = -5$ et $c = -6$.

On obtient en remplaçant $-1 \times x_2 = \frac{-6}{1}$. Donc $x_2 = 6$. Ainsi la fonction g admet deux racines –1 et 6. On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 1 \times (x + 1)(x - 6) = (x + 1)(x - 6)$.

c. On remarque que $h(1) = 10 + 5 - 15 = 0$. Ainsi, 1 est une racine évidente de h. On note $x_1 = 1$.

La somme des racines vaut $s = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Ici on a $x_1 = 1$, $a = 10$, $b = 5$ et $c = -18$. On obtient $1 + x_2 = -\frac{5}{10}$. Donc $x_2 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$. Donc la fonction h admet deux racines 1 et $-\frac{3}{2}$.

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 10 \times (x - 1)(x - 6) = 10(x + 1)(x + \frac{3}{2})$.

17 On cherche deux nombres réels x_1 et x_2 dont la somme s vaut 6 et le produit p vaut 1.

x_1 et x_2 sont donc les solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$ c'est-à-dire $x^2 - 6x + 1 = 0$. On calcule le discriminant de l'équation : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = \frac{6-\sqrt{32}}{2 \times 1} = \frac{6-4\sqrt{2}}{2} = 3 - 2\sqrt{2}$ et

$x_2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{3 - 2\sqrt{2}\ ;\ 3 + 2\sqrt{2}\}$.

Donc les nombres réels cherchés sont $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

18 Soient x et y la longueur et la largeur du rectangle. On a $2x + 2y = 34$ et $xy = 60$. Donc $x + y = 17$ et $xy = 60$. Donc x et y sont donc les solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 - sx + p = 0$, c'est-à-dire $x^2 - 17x + 60 = 0$.

On calcule le discriminant de l'équation :

$\Delta = (-17)^2 - 4 \times 1 \times 60 = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = \frac{17-\sqrt{49}}{2 \times 1} = 5$ et $x_2 = \frac{17+\sqrt{49}}{2 \times 1} = 12$.

L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{5\ ;\ 12\}$. Donc les dimensions du rectangle sont 5 cm et 12 cm.

Savoir-faire 4

Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

19 **1. a.** $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 21 = 288$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$x_1 = \frac{6-\sqrt{288}}{-6} = \frac{6-6\sqrt{8}}{-6} = -1 + \sqrt{8}$ et

$x_2 = \frac{6+\sqrt{288}}{-6} = \frac{6+6\sqrt{8}}{-6} = -1 - \sqrt{8}$.

De plus, $a = -3 < 0$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{8}$		$-1+\sqrt{8}$		$+\infty$
Signe de f		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. $\Delta = b^2 - 4ac$

$= 2^2 - 4 \times 2 \times 5 = -36 < 0$,

donc il n'y a pas de racine.

De plus, $a = 2 > 0$, d'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de g		$+$	

2.a. $S =]-\infty\ ;\ -1-\sqrt{8}[\cup]-1+\sqrt{8}\ ;\ +\infty[$.

b. $S =]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Savoir-faire 5

Choisir la forme adaptée d'une fonction polynôme du second degré

20 **1.** $f(x) = 2(x^2 + 10x + 25) - 16$

$= 2x^2 + 20x + 34$.

2. Pour tout réel x,

$f(x) = 2(x + 5)^2 - 16 = 2((x + 5)^2 - 8)$

$= 2(x + 5 - \sqrt{8})(x + 5 + \sqrt{8})$

$= 2(x + 5 - 2\sqrt{2})(x + 5 + 2\sqrt{2})$

3.a. $f(0) = 34$ en utilisant la forme développée.

b. f admet un minimum de -16 en $x = -5$, en utilisant la forme canonique.

c. En utilisant la forme canonique et le signe de $a = 2$:

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	-16	$\nearrow$

d. En utilisant la forme factorisée. $f(x) = 0$ équivaut à $2(x + 5 - 2\sqrt{2})(x + 5 + 2\sqrt{2}) = 0$.

Il y a deux solutions $x_1 = -5 - \sqrt{2}$ et $x_2 = -5 + \sqrt{2}$. Ce sont les antécédents de 0 par f.

► *Les exercices* **21** *à* **31** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 88 du manue

32 **a.** $f(x) = 2(x+2)(x-1)$

$= 2x^2 + 2x - 4.$

Stratégie 1.

b. $g(x) = -(x-1)^2 = -x^2 + 2x - 1.$

Stratégies 2 et 3.

c. $h(x) = 2(x-1)^2 - 4 = 2x^2 - 4x - 2.$

Stratégies 2 et 3.

d. $k(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$

$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1.$

Stratégies 1 et 2.

33

a.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
Signe de p_1		$-$	0	$+$	0	$-$	

b.

x	$-\infty$		$-0{,}5$		0		$+\infty$
Signe de p_2		$+$	0	$-$	0	$+$	

c.

x	$-\infty$		16		$+\infty$
Signe de p_3		$-$	0	$-$	

d.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Signe de p_4		$-$	0	$+$	0	$-$	

e.

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de p_5		$+$	0	$-$	0	$+$	

f.

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de p_6		$+$	0	$-$	0	$+$	

g.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de p_7		$+$	0	$+$	

h.

x	$-\infty$		$-0{,}6$		0		$+\infty$
Signe de p_8		$-$	0	$+$	0	$-$	

i.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de p_9		$-$	0	$+$	0	$-$	

j.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de p_{10}		$+$	0	$-$	0	$+$	

k.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de p_{11}		$+$	0	$+$	

l.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de p_{12}		$+$	0	$-$	0	$+$	

34

a.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de p_1		$\searrow$	1	$\nearrow$	

b.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de p_2		$\searrow$	-7	$\nearrow$	

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de p_3		$\nearrow$	$\frac{4}{13}$	$\searrow$	

d.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de p_4		$\nearrow$	14	$\searrow$	

35

a.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de p_1		$+$	

b.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de p_2		$-$	

c.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de p_3	+

d.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
Signe de p_4	–

36 **a.** $x^2 + 2019x = 0 \Leftrightarrow x(x + 2019) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -2\,019$

On a donc $S = \{-2\,019\,;\,0\}$.

b. On reconnait une identité remarquable

$25x^2 + 20x + 4 = 0 \Leftrightarrow (5x + 2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$.

On a donc $S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

c. $x^2 + 2x + 1 = 49 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 49$

$\Leftrightarrow x + 1 = 7$ ou $x + 1 = -7$

$\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = -8$.

On a donc $S = \{-4\,;\,2\}$.

d. $\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$

donc il y a deux solutions :

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

e. On remarque que 1 est une solution évidente. Le produit des deux solutions est égal à :

$p = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$. Ici on a $x_1 = 1$, $a = 5$, $b = -8$ et $c = 3$. On obtient en remplaçant $1 \times x_2 = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

On a donc $S = \{0{,}6\,;\,1\}$.

► *Les exercices* **37** *à* **50** *de la rubrique « **Les incontournables** » sont corrigés en fin de manuel* *(p. 368).*

Entraînement

p. 90 à 95 du manuel

Objectif 1

Étudier une fonction polynôme du second degré

51 f_1, f_3, f_4

52 **1.a.** avec $\alpha = 1$.

2.c. avec $\beta = 2$.

3.b. avec $a = 2$.

53 **1.** c. et **2.** b.

54 La fonction f avec le tableau **c.**

La fonction g avec le tableau **a.**

La fonction h avec le tableau **b.**

55 g et h

56 **a.** Oui : $a = 3$, $b = 1$ et $c = 0$.

b. Non.

c. Non.

d. Oui : $a = 5$, $b = 0$ et $c = -15$.

57 **a.** Oui : $a = -2$, $b = 0$ et $c = 8$.

b. Non.

c. Oui : $a = \frac{2}{3}$, $b = 6$ et $c = -14$.

d. Oui : $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{15}{4}$ et $c = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$.

58 **a.** $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2$

b. $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$

c. $x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$

59 **a.** $3x^2 - 6x + 1 = 3(x - 1)^2 - 2$

b. $3x^2 + 6x + 1 = 3(x + 1)^2 - 2$

c. $3x^2 + 6x - 1 = 3(x + 1)^2 - 4$

60

a. $f_1(x) = (x + 2)^2 - 3$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
Variations de f_1	↘	-3	↗

b. $f_2(x) = -(x - 1)^2 + 3$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f_2	↗	3	↘

c. $f_3(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{9}{2}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de f_3	↘	$-\frac{9}{2}$	↗

d. $f_4(x) = \frac{5}{2}(x+4)^2 - 5$

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Variations de f_4	↘	-5	↗

61

a. $f_1(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{2}$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Variations de f_1	↘	$-\frac{7}{2}$	↗

b. $f_2(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f_2	↗	$-\frac{3}{4}$	↘

c. $f_3(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f_3	↘	0	↗

d. $f_4(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f_4	↘	0	↗

62

a. $f_1(x) = 4\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{81}{4}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
Variations de f_1	↘	$-\frac{81}{4}$	↗

b. $f_2(x) = -(x-1)^2 + 9$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f_2	↗	9	↘

c. $f_3(x) = -5(x-1)^2 + 6$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
Variations de f_3	↗	6	↘

d. $f_4(x) = -7\left(x + \frac{3}{7}\right)^2 + \frac{16}{7}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{7}$	$+\infty$
Variations de f_4	↗	$\frac{16}{7}$	↘

63

a. $f_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
Variations de f_1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

b. $f_2(x) = 289\left(x - \frac{1}{34}\right)^2 - \frac{25}{4}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{34}$	$+\infty$
Variations de f_2	↘	$-\frac{25}{4}$	↗

c. $f_3(x) = -10\left(x - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{841}{40}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{20}$	$+\infty$
Variations de f_3	↗	$\frac{841}{40}$	↘

d. $f_4(x) = \sqrt{2}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{4\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}}$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Variations de f_4	↘	$\frac{4\sqrt{2}-6}{4\sqrt{2}}$	↗

64 **a.** Pour tout réel x,

$$4(x-1{,}5)^2 - 9 = 4(x^2 - 3x + 2{,}25) - 9$$
$$= 4x^2 - 12x = g(x).$$

b.

x	$-\infty$	$-1{,}5$	$+\infty$
Variations de g	↘	9	↗

65 **a** Pour tout réel x,

$$-2\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{7}{9}$$
$$= -2\left(x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}\right) + \frac{7}{9}$$
$$= -2x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{25}{9} = f(x).$$

b.

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
Variations de f	↗	$\frac{7}{9}$	↘

66 La réponse d'Aloys est incorrecte, celle d'Alyson est correcte.
Aloys a fait trois erreurs de signe.

67 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
$f(x) = -1{,}3(x+4)^2+5$.
b.

x	$-\infty$	-4	$+\infty$
Variations de f	↗	5	↘

68 $f(x) = -2(x-2)^2+3$

69 **a.** $(x+1)^2+1=0$. On a $S=\emptyset$.

b. $-\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{177}{4}=0$.

$S=\left\{\frac{13-\sqrt{177}}{2} ; \frac{13+\sqrt{177}}{2}\right\}$

c. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0$.

On a $S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

d. $-5\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{1}{20}=0$. On a $S=\emptyset$.

e. $\left(x-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{2\sqrt{6}-5}{4}=0$.

$S=\{\sqrt{2} ; \sqrt{3}\}$.

f. $-3\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{1}{3}=0$. On a $S=\left\{1 ; \frac{5}{3}\right\}$.

70 **a.** BC = 5 – x.

b. Pour tout $x \in [0 ; 5]$,
$S(x)=x(5-x)=-x^2+5x$
$= -(x-2{,}5)^2+6{,}25$.
c.

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
Variations de f	↗	6,25	↘

Lorsque l'aire de ABCD est maximale, on remarque que ABCD est un carré.

71 **a.** Pour tout $x \in [60 ; 180]$,
$q(x) = -0{,}004(x^2-250x+10\,000)$
$= -0{,}004[(x-125)^2-5\,625]$
$= -0{,}004(x-125)^2+22{,}5$.
b.

x	$-\infty$	125	$+\infty$
Variations de f	↗	22,5	↘

Pour que la quantité de sucre soit maximale, la masse d'engrais répandue à l'hectare doit être de 125 kg.

72 **a.** $A(x)=x(20-x)=-x^2+20x$.
b. $-\frac{b}{2a}=-\frac{20}{-2}=10$
and $A\left(-\frac{b}{2a}\right)=-10^2+20\times 10=100$.
The maximum area the farmer can enclose is 100 m². The lengths of the fencing for this area are 10 m and 10 m.

73 **a.** $f(t)=-\frac{900}{121}(t-11)^2+8\,500$.
b. L'avion atteindra son altitude maximale au bout de 11 s. Celle-ci sera alors de 8500 m.

Objectif 2
Déterminer les racines d'une fonction polynôme du second degré

74 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai.
d. Vrai. **e.** Faux. **f.** Faux.

75 **a.** $3x^2+4x=0 \Leftrightarrow x(3x+4)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $3x+4=0$.
On a donc $S=\left\{-\frac{4}{3} ; 0\right\}$.
b. $4x^2+7=0 \Leftrightarrow x^2=-\frac{7}{4}$.
On a donc $S=\emptyset$.
c. $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2=0$.
On a donc $S=\{-1\}$.
d. $2x^2=x \Leftrightarrow 2x^2-x=0$
$\Leftrightarrow x(2x-1)=0$
$\Leftrightarrow x=0$ ou $2x-1=0$.
On a donc $S=\left\{0 ; \frac{1}{2}\right\}$.
e. $7x^2-14=0 \Leftrightarrow x^2=2$.
On a donc $S=\{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.
f. $2(5x+7)(-3x+2)=0$
$\Leftrightarrow 5x+7=0$ ou $-3x+2=0$.
On a donc $S=\left\{-\frac{7}{5} ; \frac{2}{3}\right\}$.

76 **1.b.** **2.c.** **3.d.** **4.a.**

77 **a.**, **c.**, **d.**

78 Vrai, car $\Delta=0$.

79 **a.** $(x+1)(x-4)=0$
b. $(x+5)^2=0$

80 **a.** 1 **b.** -1 **c.** 2
d. 2 **e.** -1 **f.** -1

81 **a.** $S = \left\{-3 ; \frac{1}{2}\right\}$. **b.** $S = \{-7 ; 0\}$.
c. $S = \emptyset$. **d.** $S = \emptyset$.

82 **a.** $S = \left\{0 ; \frac{1}{4}\right\}$.
b. $S = \left\{\frac{1-\sqrt{17}}{8} ; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right\}$.
c. $S = \left\{-\frac{1}{2} ; \frac{3}{80}\right\}$.
d. $S = \{-6\}$.

83 **a.** $S = \{-7 ; 5\}$.
b. $S = \emptyset$.
c. $S = \left\{\frac{1}{5}\right\}$.
d. $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} ; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

84 **a.** $S = \{-3-\sqrt{14} ; -3+\sqrt{14}\}$.
b. $S = \left\{\frac{7-\sqrt{113}}{16} ; \frac{7+\sqrt{113}}{16}\right\}$.
c. $S = \left\{-\frac{1}{9} ; \frac{1}{9}\right\}$.
d. $S = \left\{-\frac{2}{7} ; \frac{1}{2}\right\}$

85 **a.** $S = \left\{-3 ; \frac{1}{2}\right\}$.
$f(x) = -4(x+3)(x-\frac{1}{2})$.
b. $S = \{4\}$. $g(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2$.

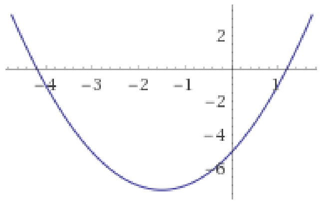
86 **a.** $S = \emptyset$.
b. $S = \left\{-\frac{9}{4} ; -1\right\}$.
$f(x) = 4(x+1)(x+\frac{9}{4})$.

87 **a.** $S = \{1\}$. $f(x) = (x-1)^2$
b. $S = \emptyset$.

88 **a.** $S = \{-6 ; 9\}$.
$f(x) = -5(x+6)(x-9)$
b. $S = \{-6\}$. $f(x) = -5(x+6)^2$.

89 **a.** 1 est une racine évidente et
$f(x) = -6\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)$.
b. –2 est une racine évidente et
$g(x) = 6\left(x-\frac{5}{3}\right)(x+2)$.
c. 2 est une racine évidente et
$$h(x) = 4(x-1{,}5)(x-2)$$
2. À l'aide d'une identité remarquable :
$k(x) = 2(x-2)^2$.

90 **1.a.**



b. Conjecture : L'équation $f(x) = 0$ a deux solutions, dont les valeurs approchées sont $-4{,}2$ et 1,2
c. $f(x) = 0 \iff x^2 + 3x - 5 = 0$
$\Delta = 29 > 0$ donc l'équation admet pour ensemble des solutions : $S = \left\{\frac{-3-\sqrt{29}}{2} ; \frac{-3+\sqrt{29}}{2}\right\}$
2.a. $f(x) = g(x)$
$\iff x^2 + 3x - 5 = 2x^2 + 3$
$\iff -x^2 + 3x - 8 = 0$
$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = -23 < 0$
donc on a $S = \emptyset$.
b. Les deux courbes ne se rencontrent pas.

91 **a.** Pour tout réel x,
$(2x-3)(7x^2+6x+3)$
$= 14x^3 + 12x^2 + 6x - 21x^2 - 18x - 9$
$= 14x^3 - 9x^2 - 12x - 9$
b. $7x^2 + 6x + 3 = 0$ a un discriminant égal à $-48 < 0$ donc n'a pas de solution.
Ainsi l'équation $f(x) = g(x)$ a pour ensemble des solutions $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
Le logiciel n'a pas pu factoriser davantage parce qu'il n'y a qu'une racine.

92 **a.** « Résoudre sur $\mathbb{R}^*$ l'équation
$\frac{4}{x} + 3 = x$. »
b. Laura transforme cette équation en une équation du second degré équivalente, puis elle calcule $\Delta = 0$ et résout.
c. Améliorations :
$\Delta = b^2 - 4ac$
$= (-3)^2 - 4 \times (-3) \times (-4) = 25 > 0$.

Donc il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2} = -1$
et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{25}}{2} = 4$.
On a donc $S = \{-1\,;\,4\}$.

93 **a.** $(3x^2 + 5x - 8)(9x^2 - 6x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0$ ou $9x^2 - 6x + 1 = 0$
On résout chacune des équations.
$\Delta = 121 > 0$ puis $\Delta = 72 > 0$.
L'ensemble des solutions est la réunion des ensembles des solutions des deux équations.
On trouve $S = \left\{-\frac{8}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,1\right\}$.
b. Pour tout réel x,
$5x^3 + 4x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)(5x^2 - x) = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)x(5x - 1) = 0$.
On a donc $S = \left\{-1\,;\,0\,;\,\frac{1}{5}\right\}$.

94 **a.** Pour tout réel $x \neq 0$,
$x - 3 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 - 3x = 2$
$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$.
On a $\Delta = 17 > 0$ et $S = \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}\,;\,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$.
b. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\,;\,2\}$,
$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-2)+1(x-1)}{(x-1)(x-2)} = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$
On a $\Delta = 5$ et donc $S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
c. Pour tout réel $x \neq 2$,
$\frac{5x^2-11x+2}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 11x + 2 = 0$.
On a $\Delta = 81$ et donc $S = \{0{,}2\,;\,10\}$.

95 **a.** En calculant le discriminant, on obtient :
$2x^2 - 10x + 12 = 2(x-2)(x-3)$
$3x^2 - 3x + 6 = 3(x^2 - x + 2)$
b. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\,;\,3\}$,
$$\frac{2x}{2x^2-10x+12} + \frac{3}{3x^2-3x-6}$$
$$= \frac{2x(3x^2-3x-6)+3(2x^2-10x+12)}{(2x^2-10x+12)(3x^2-3x-6)}$$
$$= \frac{6x^3-42x+36}{(2x^2-10x+12)(3x^2-3x-6)}$$
$$= \frac{6(x-1)(x^2+x-6)}{(2x^2-10x+12)(3x^2-3x-6)}$$
Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\,;\,3\}$,
(E) $\Leftrightarrow 6(x-1)(x^2 + x - 6) = 0$.
On résout $x^2 + x - 6 = 0$. On a $\Delta = 25 > 0$.
On obtient deux solutions 2 et -3.
En retirant la valeur interdite, on trouve :
$S = \{1\,;\,-3\}$.

96 **a.** $f(0) = -3$
$f(x) = 0$ for $x = 2$ and $x = -3$.
b. $y = \dfrac{1}{2}(x-2)(x+3)$

97 **a.** $D(p) = F(p)$
$\Leftrightarrow 0{,}4p^2 - 4p + 11{,}5 = -0{,}3p^2 + 4{,}05p - 6{,}35$
$\Leftrightarrow 0{,}7p^2 - 8{,}05p + 17{,}85 = 0$
On a $\Delta = 14{,}8225 = 3{,}85^2 > 0$
$S = \{3\ ;\ 8{,}05\}$.
Seule la première est comprise entre 2 et 5.
Le prix d'équilibre est donc de 3 €.
b. On pourrait conseiller au gestionnaire de fixer le prix d'une clé à 3 €.

98 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Lorsqu'on appelle `equation(2,5,1)`, cela renvoie le nombre de solutions de l'équation $2x^2 + 5x + 1 = 0$. Elle renvoie 2.
b.

```
def solution(a,b,c):
    n=equation(a,b,c)
    if n==0:
        return 'Pas de solution réelle.'
    elif n==1:
        return 'Une solution réelle :',-b/(2*a)
    else:
        delta=b**2-4*a*c
        x_1=(-b+sqrt(delta))/(2*a)
        x_2=(-b-sqrt(delta))/(2*a)
        return 'Deux solutions réelles :',x_1,x_2
```

99 **a.** Les fonctions polynômes du second degré s'annulant en –3 et en 4 sont :
$f : x \longmapsto a(x + 3)(x - 4)$, avec $a \in \mathbb{R}$.
b. $f(1) = 2 \Leftrightarrow a(1 + 3)(1 - 4) = 2$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{6}$
On a donc, pour tout réel x,
$f(x) = -\frac{1}{6}(x + 3)(x - 4)$.

100 **a.** $\begin{cases} x + y = 35 \\ x \times y = 306 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 - x \\ x(35 - x) = 306 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 35 - x \\ -x^2 + 35x - 306 = 0 \end{cases}$
$\Delta = 1 > 0$, l'équation $-x^2 + 35x - 306 = 0$ a deux solutions 17 et 18.

En remplaçant dans $y = 35 - x$, on obtient $y = 18$ et $y = 17$.
$S = \{(17\,;\,18)\,;\,(18\,;\,17)\}$.
b. Par la même méthode,
$S = \{(-22\,;\,-32)\,;\,(32\,;\,22)\}$.

101 On cherche deux nombres réels x_1 et x_2 dont la somme s vaut 5 et le produit p vaut 2.
x_1 et x_2 sont donc les solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 - 5x + 2 = 0$. On calcule le discriminant de l'équation $\Delta = 17 > 0$.
$\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$.
Donc les nombres réels cherchés sont $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

102 Soient x et y la longueur et la largeur du rectangle. On a $2x + 2y = 50$ et $xy = 144$.
Donc $x + y = 25$ et $xy = 114$. Donc x et y sont donc les solutions réelles de l'équation du second degré $x^2 - 25x + 114 = 0$. On a calculé le discriminant de l'équation : $\Delta = 169 > 0$.
$x_1 = \frac{25-\sqrt{169}}{2\times 1} = 6$ et $x_2 = \frac{25+\sqrt{169}}{2\times 1} = 19$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S = \{6\,;\,12\}$. Pour $x = 6$, on a $y = 19$. Pour $x = 19$, on a $y = 6$. Donc les dimensions du rectangle sont 19 cm et 6 cm.

OBJECTIF 3
Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

103 **a.** Vrai. **b.** Faux.
c. Faux. **d.** Vrai.

104 La fonction f est associée à $\mathscr{C}_2$.
La fonction g est associée à $\mathscr{C}_1$.
La fonction h est associée à $\mathscr{C}_4$.
La fonction i est associée à $\mathscr{C}_3$.

105 **a.** $a > 0$ et $\Delta > 0$.
b. $a > 0$ et $\Delta > 0$.
c. $a > 0$ et $\Delta < 0$.
d. $a < 0$ et $\Delta > 0$.

106 Le premier oui, les deux autres (**b.** et **c.**) non.

107

a.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de f_1		+	0	−	0	+	

b.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de f_2		+	0	−	0	+	

c.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		5		$+\infty$
Signe de f_3		−	0	+	0	−	

d.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
Signe de f_4		+	0	−	0	+	

108

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de f		+	0	−	0	+	

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de g		−	

$S_f = \left]-\infty\,;\,-3\right] \cup \left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$ et $S_g = \mathbb{R}$.

109

x	$-\infty$		6		$+\infty$
Signe de f		+	0	+	

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de g		−	0	+	0	−	

$S_f = \mathbb{R}$ et $S_g = \left]-\infty\,;\,1\right[\cup\left]3\,;\,+\infty\right[$.

110

x	$-\infty$		$\frac{7-\sqrt{97}}{6}$		$\frac{7+\sqrt{97}}{6}$		$+\infty$
Signe de f		−	0	+	0	−	

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de g		+	

$S_f = \left[\frac{7-\sqrt{97}}{6}\,;\,\frac{7+\sqrt{97}}{6}\right]$ et $S_g = \emptyset$.

111

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de f		$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{2\sqrt{7}}{7}$		$\frac{2\sqrt{7}}{7}$		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_f = \mathbb{R}$ et

$S_g = \left]-\infty\,;\ -\frac{2\sqrt{7}}{7}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{7}}{7}\,;\ +\infty\right[$.

112 **a.** $S = \left[-3\,;\ \frac{1}{4}\right]$.

b. $S = \mathbb{R}$.

113 **a.** $S = \mathbb{R}$.

b. $S = \left]-\infty\,;\ \frac{3-\sqrt{29}}{10}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{29}}{10}\,;\ +\infty\right[$.

114 **a.** $S = \left[-\frac{\sqrt{7}}{2}\,;\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$.

b. $S = \left]\frac{3-\sqrt{\frac{47}{3}}}{2}\,;\ \frac{3+\sqrt{\frac{47}{3}}}{2}\right[$.

115 **a.** $S = \emptyset$.

b. $S = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$.

116 $10x^2 + 26x + 6 < 8x + 42$

$\Leftrightarrow 10x^2 + 18x - 36 < 0$

On calcule $\Delta = 1\,764 = 42^2$.

L'équation $10x^2 + 18x - 36 = 0$ a pour solutions –3 et $\frac{6}{5}$.

Donc $10x^2 + 18x - 36 < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-3\,;\ \frac{6}{5}\right[$

La courbe $\mathscr{C}_h$ est en-dessous de (d) sur $\left]-3\,;\ \frac{6}{5}\right[$, elles se coupent en -3 et en $\frac{6}{5}$, et elle est au dessus de (d) sur $\left]-\infty\,;\ -3\right[\cup \left]\frac{6}{5}\,;\ +\infty\right[$.

117 **a.** Au dénominateur, le polynôme de degré 2 a un discriminant $\Delta = -12 < 0$. Donc il ne s'annule jamais, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Conjecture : $f \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\ 0]$ et $f \geqslant 0$ sur $[0\,;\ +\infty[$.

c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$10x$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 2x + 4$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

La conjecture est donc validée.

118 **1.a.** Conjecture : $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

b.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	0	$+$	

La conjecture est donc invalidée : $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{2}{3}\,;\ 1\right]$.

2.a. $f(x) - g(x) = 4x^2 - 6x + 1$.

On calcule le discriminant et on cherche le signe du polynôme du 2nd degré $4x^2 - 6x + 1$

On en déduit que :

$f - g > 0$ sur $\left]-\infty\,;\ \frac{3-\sqrt{5}}{5}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{5}\,;\ +\infty\right[$

$f - g < 0$ sur $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{5}\,;\ \frac{3+\sqrt{5}}{5}\right[$.

b. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $\left]-\infty\,;\ \frac{3-\sqrt{5}}{5}\right[\cup \left]\frac{3+\sqrt{5}}{5}\,;\ +\infty\right[$ et en dessous sur $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{5}\,;\ \frac{3+\sqrt{5}}{5}\right[$.

c. Vérifié à la calculatrice.

119 **1.** La courbe de la fonction carrée est au-dessus de celle de la fonction inverse sur $]-\infty\,;\ 0[$ et sur $]1\,;\ +\infty[$, et en dessous sur $]0\,;\ 1[$.

2.a. Pour tout réel x, $(x-1)(x^2 + x + 1)$
$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$.

b. Pour tout réel $x > 0$,

$x^2 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 1 < 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) < 0$.

Pour tout réel $x < 0$,

$x^2 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 - 1 > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) > 0$.

On étudie le signe de $x - 1$ puis de $x^2 + x + 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x^2 + x +$		$+$		$+$		$+$	
$x^3 - 1$		$-$		$-$	0	$+$	

On a donc $S =]0\,;\ 1[$.

c. La conjecture est donc vérifiée.

120 **1.a.** Vrai.

b. Non : si $a > 0$ alors c'est faux.
c. Vrai.
d. Faux : la bonne condition est $a - b + c = 0$.
e. Vrai : dans ce cas, $\Delta > 0$.
2. a. « S'il existe au moins un nombre réel x tel que $f(x) > 0$ alors $\Delta > 0$. » : faux.
b. « Si $f(x) < 0$ pour tout nombre réel x alors $\Delta < 0$. » : vrai.
c. « Si 0 est une racine de f alors $c = 0$. » : vrai.
d. « Si -1 est une racine de f alors $-a - b + c = 0$. » : faux.
e. « Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes alors $ac < 0$. » : faux.

121 **a.** $S =]-3\,;\,2[\cup]3\,;\,+\infty[$.

b. $S =]-\infty\,;\,-\sqrt{3}] \cup \left[\frac{1}{6}\,;\,1\right] \cup [\sqrt{3}\,;\,+\infty[$.

122

a. $S =]-\infty\,;\,-\frac{5}{3}[\cup]0\,;\,1[$.

b. $S =]\frac{1}{2}\,;\,3[$.

123

a. $S =]-\infty\,;\,-\frac{3}{4}[\cup]2\,;\,+\infty[$.

b. $S =]-\infty\,;\,-2[\cup]\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{5}[\cup]1\,;\,+\infty[$.

124 **a.** $f(t) - 110 = -0{,}01t^2 + 2t - 84$

t	$-\infty$		60		140		$+\infty$
$f(t) - 110$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b. Il faut 60 min pour atteindre cette température.

125 **1.** Il y a deux solutions : $x_1 \approx -0{,}7379$ et $x_2 \approx 10{,}5053$.
Donc le ballon touche le sol à 10,5 m de la joueuse.
2. $a < 0$ donc la fonction h admet un maximum atteint en $-\frac{b}{2a} = -\frac{1{,}26}{-0{,}258} \approx 4{,}884$ et égal à $h(-\frac{b}{2a}) \approx 4{,}1$ donc le ballon ne peut pas dépasser 5 m.
3.a. $S =]\frac{630-10\sqrt{1389}}{129}\,;\,\frac{630+10\sqrt{1389}}{129}[$.
b. La hauteur du ballon dépasse donc 3 m entre 1,99 et 7,77.
4.a. $S = \emptyset$.
b. Le ballon ne dépasse pas 4,1 m.

126 **1.** $25 \times N(25) = 3\,875$ €
2. $C(x) = xN(x) = -18x^2 + 605x$
3. a. et **b.**

```
x ← 23,90
C ← −18x² + 605x
Tant que C > 1400
        x ← x + 0,01
        C ← −18x² + 605x
Fin Tant que
Afficher x
```

$C(x) > 1400 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{280}{9}$.
Le plus grand prix est donc d'environ 31,11 €.

127 Démonstration de la propriété :

Si une fonction polynôme du second degré f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a \times (x - \alpha)^2 + \beta$$

Avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

f est une fonction polynôme polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, b et c trois nombres réels fixés.

- Pour tout nombre réel x, $f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$

$$= \boldsymbol{a}\left(x^2 + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}x\right) + \boldsymbol{c}$$

- Le premier terme correspond à u^2 donc on pose $u = x$.

Le second terme correspond à $2 \times u \times v$ donc on pose $v = \frac{b}{2a}$

On a alors $u^2 + 2 \times u \times v + v^2 = \boldsymbol{x^2} + 2 \times \boldsymbol{x} \times \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2$.

Pour tout nombre réel x, $f(x) = a \times \left(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{x} \times \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + \boldsymbol{c}$

$$= a \times \left(\boldsymbol{x^2} + \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{x} \times \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}} + \left(\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2\right) - \frac{\boldsymbol{b^2}}{\boldsymbol{4a}} + \frac{\boldsymbol{4ac}}{\boldsymbol{4a}}$$

$$= a \times \left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{2a}}\right)^2 + \frac{\boldsymbol{-b^2 + 4ac}}{4a}$$

$$= a \times \left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

- Pour tout nombre réel x, $f(x) = a \times (x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.

128 **1.** $a > 0$. **a.** Pour tout réel x,

$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \geqslant \beta$ et $f(\alpha) = \beta$, donc f admet β pour minimum, atteint en $x_m = \alpha$.

b. $f(u) - f(v) = a(u - \alpha)^2 - a(v - \alpha)^2$

c. $f(u) - f(v)$

$= a(u - \alpha - v + \alpha)(u - \alpha + v - \alpha)$

$= a(u - v)(u - \alpha + v - \alpha)$

Or, $u < v \leqslant \alpha$ donc $u - v < 0$ et $u - \alpha + v - \alpha \leqslant 0$.

On en déduit que $f(u) - f(v) \geqslant 0$, ce qui prouve que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$.

De même, f est croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

2. En raisonnant de la même manière, on trouve que f est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$, et croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

129 **a.** $a(x - x_1)(x - x_2)$

$= a\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}\right)$

$= ax^2 + bx + c$

L'expression $a(x - x_1)(x - x_2)$ est donc une forme factorisée de $ax^2 + bx + c$.

b. De même l'expression $a(x - x_0)^2$ est donc une forme factorisée de $ax^2 + bx + c$.

130 **a.**

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$\boldsymbol{x - x_1}$		$-$	0	$+$		$+$	
$\boldsymbol{x - x_2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\boldsymbol{a(x-x_1)(x - x_2)}$		Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

b.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$(x-x_0)^2$		$+$	0	$+$	
$a(x-x_0)^2$		Signe de a	0	Signe de a	

c. $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

$\beta = \frac{-b^2+4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ donc a et β sont de même signe.

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

131 **a.** $x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

b. $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

c. $x_1 \times x_2 = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a\text{^}2} = \frac{c}{a}$.

132 **a.** $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-s}{1} = s$ et

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{p}{1} = p$.

b. Pour tout réel x,

$(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - (x_1+x_2)x + x_1x_2 = x^2 - sx + p$.

Problèmes

p. 98 à 103 du manuel

133 **a.** Conjecture : les coordonnées des points d'intersections entre les deux courbes sont $(-1\,;\ -2)$ et $(4\,;\ 0{,}5)$.

b. Pour tout $x \neq 0$,

$\frac{2}{x} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0.$

c. L'équation a pour ensemble des solutions $S = \{-1\,;\ 4\}$, donc la conjecture est validée.

134 **1. a.** $-\frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}$

$= -\frac{1}{3}(-3x^2 - 12x - 11) + \frac{1}{3}$

$= x^2 + 4x + 4$

$= (x + 2)^2.$

b. On a donc $-\frac{1}{3}f(x) = (x + 2)^2 - \frac{1}{3}$, ou encore $f(x) = -3(x + 2)^2 + 1.$

2. a. $\frac{1}{a}f(x) - \frac{1}{a}f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

$= \frac{1}{a}(ax^2 + bx + c) - \frac{1}{a} \times \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$

$= x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$= x^2 + 2 \times \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$

b. On a donc :

$\frac{1}{a}f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}f\left(\frac{-b}{2a}\right)$, ou encore $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

On retrouve la forme canonique avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.

135 **a.** Conjecture : 3 est une solution entière de l'équation $f(x) = 0$.

b. Pour tout réel x,

$(x - 3)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + (b - 3a)x^2 + (c - 3b)x - 3c\,.$

Par identification, on trouve $a = 15$, $b = -34 + 3a = 11$, et $c = \frac{42}{-3} = -14$.

c. On résout l'équation $15x^2 + 11x - 14 = 0$ et on trouve deux solutions :

$x_1 = \frac{2}{3}$ et $x_2 = -\frac{7}{5}$.

On obtient $S = \left\{3\,;\ \frac{2}{3}\,;\ -\frac{7}{5}\right\}$.

d. Recherches à faire sur internet.

Par exemples :

●https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_cubique

●http://www.galois.ihp.fr/ressources/vie-et-oeuvre-de-galois/les-mathematiques-de-galois/resolution-des-equations-algebriques-de-degre-3-et-4/

136 **a.** Pour tout réel x,

$(x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^4 + bx^3 + (c - a)x^2 - bx - c\,.$

b. Par identification, on trouve $a = -2$, $b = 5, c = 12$.

c. $P(x) = (x^2 - 1)(-2x^2 + 5x + 12)$

On résout l'équation $-2x^2 + 5x + 12 = 0$ et on trouve deux solutions :

$x_1 = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = 4$.

On résout l'équation $x^2 - 1 = 0$ et on trouve deux solutions : $x_3 = -1$ et $x_4 = 1$.

Cela donne bien $S = \left\{-1\,;\ 1\,;\ -\frac{3}{2}\,;\ 4\right\}$

d. Pour tout réel x,

$P(x) = -2(x + 1)(x - 1)\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 4)$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		-1		1		4		$+\infty$
$x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x + \frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x - 4$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau, on a :

$S = \left]-\infty\,;\ -\frac{3}{2}\right] \cup [-1\,;\ 1] \cup [4\,;\ +\infty[$.

137 **a.** Conjecture : -3 est une solution entière de l'équation.

b. Pour tout réel x,

$(x + 3)(ax^2 + bx + c)$

$= ax^3 + (b + 3a)x^2 + (c + 3b)x + 3c\,.$

Par identification, on trouve $a = 1$, $b = -2$, et $c = -7$.

c. On résout l'équation $x^2 - 2x - 7 = 0$ et on trouve deux solutions :

$x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$.

Cela donne $S = \{-3\,;\ 1 - 2\sqrt{2}\,;\ 1 + 2\sqrt{2}\}$.

138 **1.** $C(1) = 556 \Leftrightarrow a - 3\,520 + 2\,476 = 556$

$\Leftrightarrow a = 1\,600$

2. a. Pour tout $\lambda \in [0{,}9 \,;\, 1{,}2]$:

$C(\lambda) = 1\,600\lambda^2 - 3\,250\lambda + 2\,476$

$= 600(\lambda - 1{,}1)^2 + 540$

On obtient ainsi la forme canonique de $C(\lambda)$.

C admet un minimum en $\lambda = 1{,}1$ ($a = 1\,600 > 0$). La valeur de λ pour laquelle le moteur est bien réglé est $\lambda = 1{,}1$.

b. Dans la situation d'un moteur correctement réglé, le mélange est pauvre : $\lambda > 1{,}1$.

139 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. $f(x) = 3x^2 - x - 2$.

b. $3x^2 - x - 2 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} - 2$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - 2$

$= -\frac{4}{3} \neq -\frac{23}{9} = y$

La fonction renvoie « False ».

c. $f(-1) = 2$ donc la fonction renvoie « oui ».

d. Cette fonction en Python permet de déterminer si un point identifié par ses coordonnées $(x \,;\, y)$ appartient ou non à la courbe représentative de la fonction f.

e. Pour tout nombre réel x,

$f(x) = (3x + 2)(x - 1)$.

f. On résout $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (3x + 2)(x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = 0$ ou $x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 1$

L'utilisateur a pu choisir les valeurs :

$x = -\dfrac{2}{3}$ ou $x = 1$.

g. On résout $f(x) = -2$:

$f(x) = -2 \Leftrightarrow 3x^2 - x - 2 = -2$

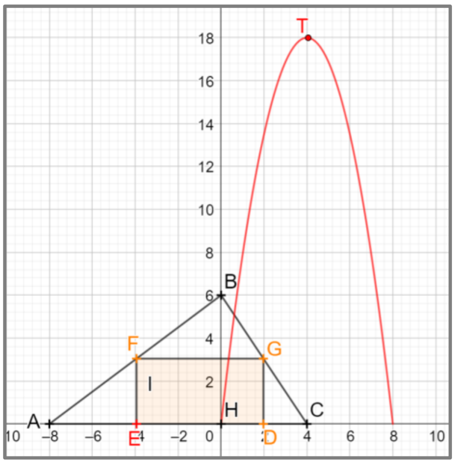
$\Leftrightarrow 3x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{3}$

L'utilisateur a pu choisir les valeurs :

$x = \dfrac{1}{3}$ ou $x = 0$.

140 **1.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



Conjecture : l'aire maximale est de 18 unités d'aire pour $x = 4$.

2. a. $x \in [0 \,;\, 8]$.

b. D'après le théorème de Thalès dans les triangles AHB et HBC,

$\frac{AE}{AH} = \frac{EF}{HB} = \frac{GD}{HB} = \frac{DC}{HC}$

Donc $EF = HB \times \frac{AE}{AH} = 6 \times \frac{x}{8} = \frac{3x}{4}$

et $DC = HC \times \frac{GD}{HB} = 4 \times \frac{\frac{3x}{4}}{6} = \frac{x}{2}$.

On en déduit que :

$ED = AC - AE - DC$

$= 12 - x - \frac{x}{2} = 12 - \frac{3x}{2}$.

On a donc :

$\mathcal{A}_{DEFG} = FE \times ED$

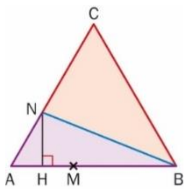
$= \frac{3x}{4} \times \left(12 - \frac{3x}{2}\right) = -\frac{9x^2}{8} + 9x$.

c. S est une fonction polynôme du second degré, son tableau de variations est :

x	0	4	8
Variations de l'aire	0 ↗	18	↘ 0

La conjecture est donc validée.

141 **a.**



b. $AM = AN = x$, donc AMN est isocèle en A. De plus, l'angle en $\widehat{CAB}$ mesure 60° puisque ABC est équilatéral. Le triangle AMN isocèle en A est donc bien équilatéral.

c. H est le pied de la hauteur issue du sommet N dans le triangle équilatéral AMN. Cette hauteur (HN) est donc aussi une médiane du triangle

AMN. Par conséquent, H est le milieu du segment [AM].

d. Le triangle ANH est rectangle en H, donc, d'après le théorème de Pythagore :
$\text{AH}^2 + \text{HN}^2 = \text{AN}^2$, ce qui prouve que
$\text{HN}^2 = \text{AN}^2 - \text{AH}^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{3x^2}{4}$.
On a donc $\text{HN} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

e. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BNH, on a pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$,
$\text{BN}^2 = \text{HN}^2 + \text{BH}^2$
$= \frac{3x^2}{4} + \left(10 - \frac{x}{2}\right)^2$
$= \frac{3x^2}{4} + 100 - 10x + \frac{x^2}{4}$
$= x^2 - 10x + 100$.
BN est minimale lorsque BN^2 l'est, c'est-à-dire lorsque $x = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{2} = 5$.
La position de M qui minimise BN est donc le milieu de [AB].

142 **a.** C'est possible.
L'équation $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, par exemple, a trois solutions.
b. $(x-4)(x-5)(x-6) = 0$.
c. $(x-4)(x-5)^2 = 0$.

143 Une telle fonction est de la forme
$f : x \longmapsto a(x-\alpha)(x-\beta)$.
$f(0) = 1 \Leftrightarrow a\alpha\beta = 1 \Leftrightarrow$
$a = \frac{1}{\alpha\beta}$ et $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$.
Une telle fonction existe si, et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. Dans ce cas, on a pour tout réel x,
$f(x) = \frac{1}{\alpha\beta}(x-\alpha)(x-\beta)$.

144 **1.** On résout l'équation :
$-x^2 + 4x - 1 = 0$
et on trouve $S = \{2-\sqrt{3}\ ;\ 2+\sqrt{3}\}$.
2. a. $\Delta = 0 \Leftrightarrow (2m)^2 - 4(m-2)(-1) = 0$
$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 8 = 0$
$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$
Cette équation a pour solutions $m_1 = -2$ et $m_2 = 1$.
b. $\Delta > 0 \Leftrightarrow (2m)^2 - 4(m-2)(-1) > 0$
$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m - 8 > 0$
$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 > 0$
Cette inéquation a pour ensemble de solutions $]-\infty\ ;\ -2[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

145 For all $x \in \mathbb{R}$,
$f(x) = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) - 1$
$= 2\left(x^2 - 2 \times \frac{7}{4} \times x + \frac{49}{16}\right) - \frac{49}{8} - 1$
$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{57}{8}$.
So the minimum point of f is $-\frac{57}{8}$ for $x = \frac{7}{4}$.

146 **1. a.** $\mathcal{A}_1 = (30-2x)(16-2x)$
$= 4x^2 - 92x + 480$
$\mathcal{A}_2 = 30 \times 16 - 30y - 16y + y^2$
$= y^2 - 46x + 480$
b. $\mathcal{A}_1 = 240 \Leftrightarrow 4x^2 - 92x + 240 = 0$
On trouve $S_1 = \{3\ ;\ 20\}$.
Comme $x \in [0\ ;\ 8]$, on trouve $x = 3$.
$\mathcal{A}_2 = 240 \Leftrightarrow y^2 - 46x + 240 = 0$
On trouve $S_2 = \{6\ ;\ 40\}$.
Comme $y \in [0\ ;\ 16]$, on trouve $y = 6$.
2. Le projet choisi sera le second.

147 **a.** We apply the theorem of Pythagoras :
$(5x-9)^2 = (4x)^2 + (x-1)^2$
$\Leftrightarrow 8x^2 - 88x + 80 = 0$
We find $S = \{1\ ;\ 10\}$.
However, the solution $x = 1$ is impossible, so te value of x is 10.
b. $5x - 9 = 41$, $4x = 40$ and $x - 1 = 9$.
$40^2 + 9^2 = 1981 = 41^2$.

148 **1.a.** $\Delta = (2b')^2 - 4ac$
$= 4b'^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta'$.
b. Si $\Delta' > 0$ alors $\Delta > 0$ donc il y a deux solutions réelles :
$x_1 = \frac{-2b'-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a}$
$= \frac{-2b'-2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et, de même,
$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$.
c. Lorsque $\Delta' < 0$, on a $\Delta < 0$ donc il n'y a pas de solution réelle.
d. Lorsque $\Delta' = 0$, on a $\Delta = 0$ donc il n'y a pas une solution réelle unique : $x_0 = -\frac{b}{a}$.
2. a. $\Delta' = b'^2 - ac$
$= 2^2 - (-3) \times 1 = 7 > 0$,
donc il y a deux solutions réelles :
$x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{-2+\sqrt{7}}{-3} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$ et, de même, $x_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}$.

b. $\Delta' = b'^2 - ac$
$= (-3)^2 - 1 \times 5 = 4 > 0$ donc il y a deux solutions réelles :
$x_2 = \frac{-b\prime + \sqrt{\Delta\prime}}{a} = \frac{3+\sqrt{4}}{1} = 5$ et, de même, $x_2 = 1$.

3. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def equation_reduit(a,b,c):
    delta_r=b**2-a*c
    if delta_r>0:
        x_1=(-b-sqrt(delta_r))/a
        x_2=(-b+sqrt(delta_r))/a
        return 'Deux solutions réelles :',x_1,x_2
    else:
        if delta_r==0:
            return 'Une solution réelle :',-b/a
        else:
            return 'Pas de solution réelle.'
```

149 **a.** Résoudre l'inéquation suivante en précisant les valeurs interdites le cas échéant :
$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} \leqslant \frac{3x^2-1}{x^2-x}$.

b. Pour tout réel x tel que $x \neq 0$ et $x \neq 1$,
$\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x} \leqslant \frac{3x^2-1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{2x+3(x-1)}{x^2-x} \leqslant \frac{3x^2-1}{x^2-x}$
$\Leftrightarrow \frac{5x-3}{x^2-x} - \frac{3x^2-1}{x^2-x} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-3x^2+5x-2}{x^2-x} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-3(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x(x-1)} \leqslant 0$
$\Leftrightarrow \frac{-3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x} \leqslant 0$

On fait un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x - \frac{2}{3}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-\frac{3\left(x-\frac{2}{3}\right)}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	

On a donc :
$S =]-\infty\,;0[\cup [-\frac{2}{3}\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

150 **a.** On résout l'équation $x^2 + 3x + 6 = 0$.
Il n'y a pas de solution réelle, donc $D_f = \mathbb{R}$.
b. Conjecture : $m = -2$ et $M = 1$.
c. On résout successivement les inéquations
$-2 \leqslant \frac{-x^2+2x+5}{x^2+3x+6}$ et $\frac{-x^2+2x+5}{x^2+3x+6} \leqslant 1$:
$-2 \leqslant \frac{-x^2+2x+5}{x^2+3x+6}$
$\Leftrightarrow -2(x^2+3x+6) \leqslant -x^2+2x+5$
$\Leftrightarrow -x^2 - 8x - 17 \leqslant 0$

$\Delta < 0$ et $a < 0$ donc l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.
De même, l'inéquation $\frac{-x^2+2x+5}{x^2+3x+6} \leqslant 1$ a pour solution $\mathbb{R}$.
On en conclut que, pour tout réel x,
$-2 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

151 **a.** $f(x) = a(x-3)(x+1)$, avec $a \neq 0$.
b. $f(x) = a(x-0{,}75)^2$, avec $a \neq 0$.
c. f est de la forme $f(x) = a(x-3)(x+1)$ avec $a < 0$, puisqu'elle a un maximum.
Celui-ci est atteint en $\frac{3-1}{2} = 1$. On a donc :
$f(1) = 4 \Leftrightarrow a(1-3)(1+1) = 4$
$\Leftrightarrow -4a = 4 \Leftrightarrow a = -1$.
La seule fonction qui vérifie les conditions est la fonction définie par :
$f(x) = -(x-3)(x+1)$.
a. **d.** f est de la forme
$f(x) = a(x+2)(x+4)$ avec $a > 0$, puisqu'elle a un minimum.
Celui-ci est atteint en $\frac{-2-4}{2} = -3$. On a donc :
$f(-3) = -1$
$\Leftrightarrow a(-3+2)(-3+4) = -1$
$\Leftrightarrow -a = -1 \Leftrightarrow a = 1$.
La seule fonction qui vérifie les conditions est la fonction définie par $f(x) = (x+2)(x+4)$.

152 **1.a.** $S = \left\{-\frac{7}{3}\,;1\right\}$.
b. $3x^4 + 4x^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 3X^2 + 4X - 7$
$\Leftrightarrow X = -\frac{7}{3}$ ou $X = 1$
$\Leftrightarrow x^2 = -\frac{7}{3}$ ou $x^2 = 1$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
On a donc $S = \{-1\,;1\}$.
2. On applique la méthode précédente et on trouve $S = \left\{-\frac{\sqrt{7+\sqrt{89}}}{2}\,;\frac{\sqrt{7+\sqrt{89}}}{2}\right\}$.

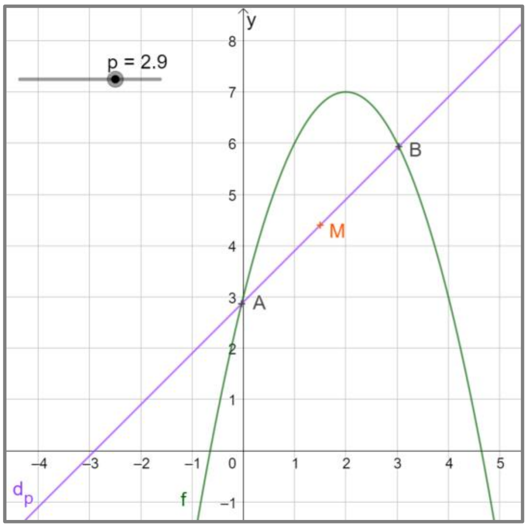
153 $25 \times \left(1 - \frac{t}{100}\right)\left(1 - \frac{0{,}5t}{100}\right) = 18$
$\Leftrightarrow \frac{1}{800}t^2 - \frac{3}{8}t + 7 = 0$
On trouve $S = \{20\,;280\}$.
Comme $t \in [0\,;100]$, on trouve que la remise initiale était de 20 %.

154 **a.** $S = \left\{-\frac{9}{2} ; \frac{3}{2}\right\}$
b. $S = \{1\}$
c. $S = \emptyset$
d. $S = \emptyset$
e. $S = \left\{\frac{5-\sqrt{73}}{6} ; \frac{5+\sqrt{73}}{6}\right\}$
f. $S =]-\infty ; -3[\cup]-2 ; \frac{1}{3}[\cup]2 ; +\infty[$
g. $S =]-2\sqrt{2} ; -\frac{8}{3}] \cup]2\sqrt{2} ; 3]$
h. $3x + 8\sqrt{x} - 3 = 0$
$\Leftrightarrow 3X^2 + 8X - 3 = 0$
$\Leftrightarrow X = -3$ ou $X = \frac{1}{3}$
Comme $X = \sqrt{x}$, on trouve $S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$.

155 **1.a.** On trouve $S = \left\{-\frac{7}{5} ; \frac{2}{3}\right\}$.
b. On pose $X = \frac{1}{x-2}$.
$$\frac{15}{(x-2)^2} + \frac{11}{x-2} - 14 = 0$$
$\Leftrightarrow 15X^2 + 11X - 14 = 0$
$\Leftrightarrow X = -\frac{7}{5}$ ou $X = \frac{2}{3}$
Ainsi $\frac{1}{x-2} = -\frac{7}{5} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7} + 2 = \frac{9}{7}$
et $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$
On a donc $S = \left\{\frac{9}{7} ; \frac{7}{2}\right\}$.
2. On pose $X = \sqrt{x}$.
$-7x + 2\sqrt{x} + 9 = 0$
$\Leftrightarrow -7X^2 + 2X + 9 = 0$
$\Leftrightarrow X = -1$ ou $X = \frac{9}{7}$
On ne garde que la solution positive et on trouve : $S = \left\{\sqrt{\frac{9}{7}}\right\}$.

156 Soit $n \in \mathbb{N}$.
$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 1085$
$\Leftrightarrow 3n^2 + 6n - 1080 = 0.$
$\Delta = 12996 = 114^2 > 0.$
L'équation admet deux solutions 18 et -20.
On trouve $n = 18$ (car $0 \leqslant n$).
Ainsi, les 3 entiers sont 18, 19 et 20.

157 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. $-x^2 + 4x + 3 = x + p$
$\Leftrightarrow -x^2 + 3x + 3 - p = 0.$
On a :
$\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times (3-p) = 21 - 4p.$
Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $p < \frac{21}{4}$, alors il y a deux points d'intersection.
Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $p = \frac{21}{4}$, alors il y a un seul point d'intersection.
Si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $p > \frac{21}{4}$, alors il n'y a pas de point d'intersection.
c. Si $p < \frac{21}{4}$ alors les coordonnées des points d'intersection sont :
$x_1 = \frac{3+\sqrt{21-4p}}{2}$
et $y_1 = \frac{3+\sqrt{21-4p}}{2} + p = \frac{3+2p+\sqrt{21-4p}}{2}$
$x_2 = \frac{3-\sqrt{21-4p}}{2}$
et $y_2 = \frac{3-\sqrt{21-4p}}{2} + p = \frac{3+2p-\sqrt{21-4p}}{2}$.
Le point M a donc pour coordonnées
$x = \frac{x_1+x_2}{2} = 3$ et $y = \frac{y_1+y_2}{2} = 3 + 2p.$
Lorsque p décrit $]-\infty ; \frac{21}{4}[$, M décrit une demi-droite verticale d'origine le point $A(3 ; \frac{27}{2})$.

158 **1.** $\Delta > 0$
$\Leftrightarrow (-0{,}5)^2 - 4 \times 0{,}5 \times c > 0$
$\Leftrightarrow 0{,}25 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}125.$
Si $c < 0{,}125$ alors il y a deux solutions réelles.
Si $c = 0{,}125$ alors il y a une seule solution réelle.
Si $c > 0{,}125$ alors il n'y a pas de solution réelle.

2. a. Ensemble des solutions de l'équation :
$S = \{-1\,;\,2\}$.
Ensemble des solutions de l'inéquation :
$S =]-1\,;\,2[$.
b. $P(x) = 0{,}5(x-0{,}5)^2 - 1{,}125$

x	$-\infty$	$0{,}5$	$+\infty$
Variations de P	↘	$-1{,}125$	↗

3.a. Pour tout réel x,
$P(x+1) - P(x) = 0{,}5(x+1)^2 - 0{,}5(x+1) - c - 0{,}5x^2 + 0{,}5x + c = x$.
b. Pour tout entier naturel non nul n,
$P(n+1) - P(1) = P(n+1) - P(n) + P(n) - P(n-1) + \cdots + P(2) - P(1)$
$= n + (n-1) + \cdots + 1$
$= 1 + 2 + \ldots + n.$
c. $P(n+1) - P(1)$
$= 0{,}5(n+1)^2 - 0{,}5(n+1) + c - c$
$= (n+1)[0{,}5(n+1) - 0{,}5n]$
$= \frac{n(n+1)}{2}$
On a donc $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

159 **a.** Pour tout réel $x \neq 0$,
$\frac{1}{x} + x = c \Leftrightarrow 1 + x^2 = cx$
$\Leftrightarrow x^2 - cx + 1 = 0$
Cette équation a pour discriminant
$\Delta = (-c)^2 - 4 = c^2 - 4$.
Si $c \in]-\infty\,;\,-2[\cup]2\,;\,+\infty[$ alors $\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles.
Si $c \in \{-2\,;\,2\}$ alors $\Delta = 0$ donc l'équation a une seule solution réelle.
Si $c \in]-2\,;\,2[$ alors $\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution réelle.
b. On trouve $S = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
c. $\frac{34}{15} > 2$ donc l'équation a deux solutions réelles. On trouve $S = \left\{\frac{3}{5}\,;\,\frac{5}{3}\right\}$.

160 **a.** Pour $m = 1$, on trouve $S = \{-1\,;\,-5\}$.
Pour $m = 2$, on trouve $S = \emptyset$
b. On calcule le discriminant : $\Delta = 36 - 20m$.
c. $\Delta < 0 \Leftrightarrow 36 - 20m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{9}{5}$.
L'ensemble cherché est donc $]\frac{9}{5}\,;\,+\infty[$.

161 **a.** Pour tout réel $x \in [40\,;\,130]$,
$f(v) < 1\,000$
$\Leftrightarrow -0{,}024v^2 + 6{,}4v - 400 < 0$
On calcule les racines : 100 et $\frac{500}{3}$, d'où le tableau de signes :

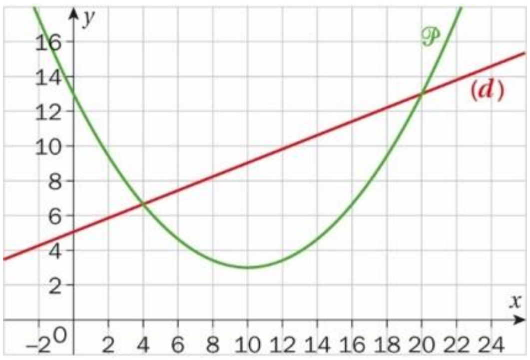
v	40		100		130
$f(v)$		$-$	0	$+$	

L'intervalle décrit par v permettant un bon fonctionnement de la pale est [40 ; 100].
b. $v_{max} = 100$ km·h^{-1} ; cela correspond à un vent de force 10 qui souffle en tempête.

162 **1. a.** B(0 ; 13) $\in \mathcal{P}$,
donc $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 13$, ce qui prouve que $c = 13$.
b. A(15 ; 5,5) $\in \mathcal{P}$,
donc $a \times 15^2 + b \times 15 + 13 = 5{,}5$, c'est-à-dire $225a + 15b = -7{,}5$.
C(8 ; 3,4) $\in \mathcal{P}$,
donc $a \times 8^2 + b \times 8 + 13 = 3{,}4$, c'est-à-dire $64a + 8b = -9{,}6$.
Les réels a et b sont donc solutions du système :
$\begin{cases} 225a + 15b = -7{,}5 \\ 64a + 8b = -9{,}6 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 225a + 15b = -7{,}5 \\ 64a + 8b = -9{,}6 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a + b = -0{,}5 \\ 8a + b = -1{,}2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a + b = -0{,}5 \\ 7a = 0{,}7 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 0{,}1 \end{cases}$.
Finalement, $f(x) = 0{,}1x^2 - 2x + 13$.
d. Pour tout nombre réel x,
$0{,}1(x-10)^2 + 3 = 0{,}1x^2 - 2x + 10 + 3$
$= 0{,}1x^2 - 2x + 13 = f(x)$.
e.

x	$-\infty$	10	$+\infty$
Variations de f	↘	3	↗

2. a.b.


c. Conjecture : la parabole $\mathcal{P}$ est au-dessus de la droite (d) sur la réunion d'intervalles]–∞ ; 4[∪]20 ; +∞[et en dessous de la droite (d) sur l'intervalle]4 ; 20[.
La parabole $\mathcal{P}$ et la droite (d) semblent se couper pour $x = 4$ et $x = 20$.
d. Pour tout nombre réel x,
$f(x) - (0{,}4x + 5) = 0{,}1x^2 - 2{,}4x + 8$.
On calcule le discriminant, les racines, on fait le tableau de signes. La conjecture est validée :

x	$-\infty$		4		20		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

163 • Si $x = 1$, alors l'égalité est vraie de manière évidente.
• Si $x \neq 1$,
$(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$
$= (x-1)\frac{1-x^n}{1-x}$
$= (x-1)\frac{x^n-1}{x-1} = x^n - 1$.

164 Pour tout $x \in [0 ; 20]$,
$\mathcal{A}_{\text{logo}}$ = aire du triangle + aire du rectangle
$= \frac{60 \times 2x}{2} + (40 - 2x)(60 - 2x)$
$= 60x + 2\,400 - 80x - 120x + 4x^2$
$= 4x^2 - 140x + 2\,400 = f(x)$
Le minimum de cette fonction est atteint en $x = -\frac{b}{2a} = 17{,}5$.
La valeur de x permettant de minimiser l'aire du logo est donc $x = 17{,}5$ cm.

165 **1.** D'après l'exercice **163**,
$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1)$
Si $x^n - 1$ est premier alors, comme il est divisible par $x - 1$, on a $x - 1 = 1$ ou $x - 1 = -1$, c'est-à-dire $x = 2$ (car $x \neq 0$).
2.a. $1 + 2^d + \left(2^d\right)^2 + \ldots + \left(2^d\right)^{k-1}$
$= \frac{1-\left(2^d\right)^k}{1-2^d} = \frac{1-2^{dk}}{1-2^d} = \frac{2^n-1}{2^d-1}$.
b. $\frac{M_n}{M_d} \in \mathbb{N}$ donc M_d divise M_n.
c. M_d n'étant ni égal à 1, ni à M_n, M_n n'est donc pas un nombre premier.
3. Pour que $2^n - 1$ soit premier, il est nécessaire que n soit premier.
4. $M_{11} = 2047 = 23 \times 89$ donc il n'est pas premier. La condition n'est donc pas suffisante.

166 **1. a.** $R(x) = 8x$.
b. Pour tout réel $x \in [0 ; 100]$,
$B(x) = R(x) - C(x)$
$= 8x - (0{,}25x^2 - 12x + 200)$
$= -0{,}25x^2 + 20x - 200$.
2.a.

x	0		40		100
Variations de B	–200	↗	200	↘	–700

b. Le bénéfice est maximal pour $x = 40$, et il est égal à 200 €.
c. On calcule une valeur approchée des racines : 11,7 et 68,3. D'après le tableau de variations, le bénéfice est donc positif pour un nombre de formules compris entre 12 et 68.

167 **a.** $x^n - a^n = (au)^n - a^n$
$= a^n u^n - a^n$
$= a^n(u^n - 1)$.
b. $x^n - a^n = a^n(u^n - 1) = a^n(u-1)(u^{n-1} + u^{n-2} + \cdots + u + 1)$
$= a^n(\frac{x}{a} - 1)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{x}{a} + 1\right)$
$= a \times a^{n-1}(\frac{x}{a} - 1)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{x}{a} + 1\right)$
$= a(\frac{x}{a} - 1)\left(\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} \times a^{n-1} + \left(\frac{x}{a}\right)^{n-2} \times a^{n-1} + \cdots + \frac{x}{a} \times a^{n-1} + 1 \times a^{n-1}\right)$
$= (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$.

c. $\sum_{k=0}^{n-1} a^k x^{n-1-k}$
$= a^0 x^{n-1} + a^1 x^{n-2} + \ldots + a^{n-2}x^1 + a^{n-1}x^0$
d'où le résultat.

168 **1.** Vérifié à la calculatrice.
2.a. $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow 2(x_1 - 3)^2 - 5$
$\Leftrightarrow 2(e_1 + a_1 - 3)^2 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 2(e_1^2 + 2e_1(a_1 - 3) + (a_1 - 3)^2) - 5 = 0$
$\Leftrightarrow 2e_1^2 + 4e_1(a_1 - 3) + 2(a_1 - 3)^2 - 5 = 0$
b. Si on peut négliger e_1^2, cela donne :
$4e_1(a_1 - 3) + 2(a_1 - 3)^2 - 5 \approx 0$,
c'est-à-dire :
$e_1 \approx \frac{-2(a_1-3)^2 + 5}{4(a_1-3)}$, ou encore $e_1 \approx \frac{-f(a_1)}{4(a_1-3)}$
c. On a donc $x_1 = a_1 + e_1 \approx a_1 - \frac{f(a_1)}{4(a_1-3)}$, ce qui donne une nouvelle valeur approchée a_2.
3.a. a_1 permet de stocker l'ancienne valeur de a et e est la distance entre deux approximations successives de x_1.
b. Vérifié à la calculatrice.

169 **1.** Bénéfice du mois de mai :

$4 \times 7 - C(4) = 28 - 25{,}36 = 2{,}64$ (en milliers d'euros)

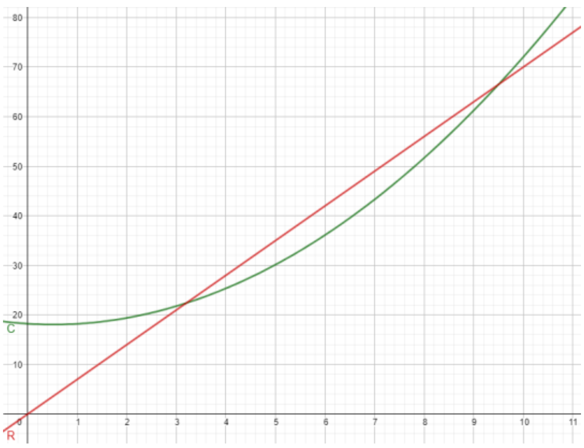
Bénéfice du mois de juin :

$6{,}5 \times 7 - C(6{,}5) = 45{,}5 - 39{,}56 = 5{,}94$

Le bénéfice du mois de juin est donc supérieur à celui du mois de mai.

2. $R(x) = 7x$.

3.



a. Par lecture graphique, $x \in [3{,}2\ ;\ 9{,}5]$.

b. $x \approx 6$.

4. a. Pour tout $x \in [0\ ;\ 12]$,

$B(x) = R(x) - C(x)$

$= 7x - (0{,}6x^2 - 0{,}62x + 18{,}24)$

$= -0{,}6x^2 + 7{,}62x - 18{,}24$.

b. On calcule les racines : 3,2 et 9,5, et l'abscisse du sommet : 6,35.

c. On obtient les tableaux suivants :

x	0		3,2		9,5		12
$B(x)$		−	0	+	0	−	

x	0		6,35		12
Variations de B	−18,24	↗	5,9535	↘	−13,2

5.a. Il faut produire entre 3 200 et 9 500 articles pour réaliser un bénéfice mensuel positif.

b. Il faut produire 6 350 articles pour réaliser un bénéfice mensuel maximal.

170 **a.** Le format du rectangle ABCD est $\frac{AB}{AD} = \frac{L}{l} > 1$ car $l < L$. Donc $x < 1$.

Le format du rectangle EBFC est :

$\frac{BC}{EB} = \frac{BC}{AB-AE} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}-\frac{AE}{BC}} = \frac{1}{x-1}$.

b. Pour tout réel $x \neq 1$,

$x = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$.

c. Le discriminant est $\Delta = 5 > 0$. Ainsi les solutions de cette équation sont $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais seule la deuxième solution est positive, donc $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

d. $\Phi^2 - \Phi = 1$ donc $(\Phi^2 - \Phi)^2 = 1$, c'est-à-dire $\Phi^4 - 2\Phi^3 + \Phi^2 = 1$.

On a donc :

$\Phi^4 = 2\Phi^3 - \Phi^2 + 1 = \Phi^2(2\Phi - 1) + 1$

$= (\Phi + 1)(2\Phi - 1) + 1$

$= 2\Phi^2 + \Phi - 1 + 1$

$= 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2$.

e. D'après ce qui précède, un rectangle d'or est un rectangle de format Φ.

Si ABCD est un rectangle d'or alors il a le même format que EBCF et il a pour format Φ, donc EBCF a pour format Φ, ce qui en fait un rectangle d'or.

Réciproquement, supposons que EBCF est un rectangle d'or.

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE + EB}{BC} = 1 + \frac{EB}{BC} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

$$= \frac{\Phi + 1}{\Phi} = \frac{\Phi^2}{\Phi} = \Phi$$

donc ABCD est un rectangle d'or.

f. Recherche à faire par les élèves.

Recherches mathématiques

p. 104 du manuel

171 Soit $\mathcal{A}(x)$ la somme des aires des deux triangles.

Un triangle équilatéral de côté x a une hauteur de $\frac{\sqrt{3}}{2}x$ (on peut le prouver avec le théorème de Pythagore).

On a donc :

$\mathcal{A}(x) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x^2}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}(12-x)^2}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}[x^2 + (12 - x)^2]$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 24x + 144)$.

La valeur de x qui minimise cette fonction est l'abscisse du sommet :
$x_{\min} = -\frac{b}{2a} = \frac{24}{4} = 6$.
Le point M doit donc être au milieu de $[AB]$.

172 Soit a un nombre impair et b et c tels que :
$\begin{cases} c - b = 1 \\ c + b = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a^2-1}{2} \\ c = \frac{a^2+1}{2} \end{cases}$
$c^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \frac{a^4+2a^2+1}{4}$
et $b = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \frac{a^4-2a^2+1}{4}$
et $a^2 + b^2 = a^2 + \frac{a^4-2a^2+1}{4} = \frac{a^4+2a^2+1}{2}$.
Lana a donc raison, on trouve bien avec cette méthode un triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que
$a^2 + b^2 = c^2$.

173 Soit x le nombre de jours mis pour descendre. La distance parcourue étant de 120 km, le batelier est descendu à une vitesse de $v = \frac{120}{x}$ km par jour.
Pour remonter, le batelier a mis $x + 1$ jours, donc il est remonté à la vitesse de $v' = \frac{120}{x+1}$ km par jour.
Or, $v' = v - 6$ donc $\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$.

$$\frac{120}{x+1} = \frac{120}{x} - 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{120x}{x(x+1)} = \frac{120(x+1)}{x(x+1)} - \frac{6x(x+1)}{x(x+1)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6x^2 + 6x - 120}{x(x+1)} = 0$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 120 = 0$$

On cherche les solutions de cette équation du second degré : -5 et 4.
Il a donc fallu 4 jours au batelier pour descendre.

174 $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 5x + 1 = 0$ notée (E).
0 n'est pas solution de l'équation.
On pose pour $x \neq 0$, $X = x + \frac{1}{x}$.
Alors $X^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ et $X^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.
(E) $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
$\Leftrightarrow X^2 - 2 + 5X + 6 = 0$
$\Leftrightarrow X^2 + 5X + 4 = 0$
On calcule $\Delta = 9$. L'équation admet deux solutions -1 et -4.
Soit $x + \frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$.
Ici $\Delta = -2 < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions.
Soit $x + \frac{1}{x} = -4 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$.
Ici $\Delta = 12 > 0$ donc l'équation admet pour solutions $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$.
Ainsi $S = \{-2-\sqrt{3}\,;\,-2+\sqrt{3}\}$.

175 On cherche h sous la forme
$h(x) = ax^2 + bx + c$, et on traduit l'énoncé :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 20 \\ 25a + 5b + c = 128 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + b = 20 \\ 24a + 4b = 128 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + b = 20 \\ -4b = -32 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + b = 20 \\ -4b = -32 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -12 \\ a = 4 \\ b = 8 \end{cases}$$
On trouve $(a\,;\,b\,;\,c) = (4\,;\,8\,;\,-12)$.
La fonction h est donc définie par :
$h(x) = 4x^2 + 8x - 12$.

176 On applique le théorème de Pythagore dans les triangles AEP, IBP (où I est le milieu de [AB]) et CDP :
pour tout $x \in [0\,;\,7]$,
$f(x) = x^2 + 2^2 + (x-5)^2 + 2^2 + (x-7)^2 + 2^2$
$\quad = 3x^2 - 24x + 86$.
f est une fonction polynôme du second degré deux avec $a = 3 > 0$. Donc elle admet un minimum en $x = -\frac{b}{2a} = \frac{24}{6} = 4 \in [0\,;\,7]$ et de valeur $f(4) = 38$.

177 Soient x et y la longueur des deux côtés du triangle, autres que son hypoténuse.
$\mathcal{A} = \frac{xy}{2}$ donc $y = \frac{2\mathcal{A}}{x} = \frac{4\,680}{x}$.
D'après le théorème de Pythagore, on :
$x^2 + y^2 = h^2$,
c'est-à-dire $x^2 + \left(\frac{4\,680}{x}\right)^2 = 9\,409$.

Or, pour tout réel $x \neq 0$,
$x^2 + \left(\frac{4\,680}{x}\right)^2 = 9\,409$
$\Leftrightarrow x^4 - 9\,409x^2 + 21\,902\,400 = 0.$
Posons $X = x^2$, l'équation devient :
$X^2 - 9\,409X + 21\,902\,400 = 0.$
On trouve deux solutions : 4 225 et 5 184.

Ainsi $x^2 = 4\,225$ donne $x = 65$ (car $x > 0$) et $x^2 = 5\,184$ donne $x = 72$ (car $x > 0$).
On obtient ainsi les longueurs des deux côtés du triangle : 65 et 72.
Le périmètre vaut donc $65 + 72 + 97 = 234$.

CHAPITRE 4

Dérivation

► *Les exercices* 1 *à* 6 de la *rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel* (*p. 368*).

Activités

p. 110 et 111 du manuel

1 Vitesse instantanée

1. La vitesse moyenne de la voiture entre les instants $t = 3$ et $t = 5$ est égale à :

$\frac{d(5)-d(3)}{5-3} = \frac{1{,}265\times 5^2 - 1{,}265\times 3^2}{2} = 10{,}12\ \text{m.s}^{-1}$. Cette vitesse est la pente de la droite (AB).

2.a. $h \in \,]0\,;2]$, la vitesse moyenne $V(h)$ entre les instants $t = 3$ et $t = 3 + h$ vaut :

$V(h) = \frac{d(3+h)-d(3)}{h} = \frac{1{,}265(3+h)^2 - 1{,}265\times 3^2}{h} = \frac{1{,}265h^2 + 7{,}59h}{h} = 1{,}265h + 7{,}59.$

b.

h	0,5	0,1	0,01	0,001	0,0001
***V*(*h*)**	8,222 5	7,716 5	7,602 65	7,591 265	7,590 1265

c. Quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, $V(h)$ se rapproche de 7,59. La vitesse instantanée du véhicule après 3 secondes est de $7{,}59\ \text{m.s}^{-1} = (7{,}59 \times 3{,}6)\ \text{km.h}^{-1} = 27{,}324\ \text{km.h}^{-1}$.

2 Vers la tangente

1.a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

b. Lorsque h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, on remarque que la droite (AM) se rapproche d'une « position limite » qui correspond à une droite passant par A et dont la pente se rapproche de 4.

2.a. Soit $h \in \mathbb{R}^*$, $t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{(1+h)^2+2(1+h)-1-2}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h + 4.$

b. Quand h prend des valeurs de plus en plus proches de 0, la pente $t(h)$ se rapproche de $\ell = 4$.

c. La tangente est la « position limite des sécantes (AM) ».

3 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

1.a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

b.

a	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
***f'*(*a*)**	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8

c. On conjecture que pour tout nombre réel a, $f'(a) = 2a$.

2.a. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$, $t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a + h.$

b. Lorsque h tend vers 0, $(2a + h)$ tend vers le nombre réel $2a$. Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a.$

Donc f est dérivable en a et le nombre dérivé de f en a vaut $f'(a) = 2a$.

4 Conjecturer une formule

1.a. • $f_1 : x \longmapsto (x^2 + 3)(x^2 - 5x + 2)$.

On a $u : x \longmapsto x^2 + 3$ et $v : x \longmapsto x^2 - 5x + 2$.

Ainsi $u' : x \longmapsto 2x$ et $v' : x \longmapsto 2x - 5$.

• $f_2 : x \longmapsto (3x + 2)(x^3 - 5)$.

On a $u : x \longmapsto 3x + 2$ et $v : x \longmapsto x^3 - 5$.

Ainsi u' : $x \longmapsto 3$ et v' : $x \longmapsto 3x^2$.

• $f_3 : x \longmapsto 3x\sqrt{x}$.

On a $u : x \longmapsto 3x$ et $v : x \longmapsto \sqrt{x}$.

Ainsi u' : $x \longmapsto 3$ et v' : $x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

• $f_4 : x \longmapsto (-4x + 101)(-7x - 99)$.

On a $u : x \longmapsto -4x + 101$ et $v : x \longmapsto -7x - 99$.

Ainsi u' : $x \longmapsto -4$ et v' : $x \longmapsto -7$

• $f_5 : x \longmapsto \frac{1}{x} \times (3x + 1)$.

On a $u : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $v : x \longmapsto 3x + 1$.

Ainsi u' : $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ et v' : $x \longmapsto 3$.

• $f_6 : x \longmapsto (x^2 - 4)(x + 17)$.

On a $u : x \longmapsto x^2 - 4$ et $v : x \longmapsto x + 17$.

Ainsi u' : $x \longmapsto 2x$ et v' : $x \longmapsto 1$.

deriver(x^2+3)(x^2-5x+2) 2x(x^2-5*x+2)
deriver((x^2+3)(x^2-5x+2)) $2x(x^2-5x+2)+(x^2+3)(2x-5)$
deriver((3x+2)(x^3-5)) $3(x^3-5)+(3x+2)*3x^2$
deriver((3x*sqrt(x)) $3\sqrt{x}+\frac{3x}{2}*(\sqrt{x})^{-1}$
deriver((-4x+101)(-7x-99)) $-4(-7x-99)-7(-4x+101)$
deriver(1/x*(3x+1)) $(-\frac{1}{x^2})(3x+1)+\frac{1}{x}*3$
deriver((x^2-4)(x+17)) $2x(x+17)+x^2-4$

c. On conjecture que $u \times v = u' \times v + u \times v'$.

2. On peut reprendre le même procédé qu'à la question **1**, en considérant les fonctions :

$g_1 : x \longmapsto \frac{x^2+3}{x^2-5x+2}$, $g_2 : x \longmapsto \frac{3x+2}{x^3-5}$, $g_3 : x \longmapsto \frac{-4x+101}{-7x-99}$.

On conjecture que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.

Application

p. 115 à 117 du manuel

Savoir-faire 1

Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point

7 a. Le taux de variation de f entre -1 et $(-1 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ est :

$t(h) = \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{2(-1+h)^2+(-1+h)-1-0}{h}$

$= \frac{2h^2-3h}{h} = 2h - 3$.

Ainsi, $\lim_{h \to 0} t(h) = -3$.

Donc f est dérivable en -1 et le nombre dérivé de f en -1 vaut $f'(-1) = -3$.

b. Le taux de variation de g entre 3 et $3 + h$, avec $h \in \mathbb{R}_+^*$ est :

$t(h) = \frac{g(3+h)-g(3)}{h} = \frac{\sqrt{3+h-3}-0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}$

$= \frac{1}{\sqrt{h}}$.

Lorsque h tend vers 0 avec $h > 0$, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en conservant des valeurs positives. Ainsi, $\lim_{h\to 0} \frac{g(-2+h)-g(-2)}{h} = +\infty$.
La limite du taux de variation n'est pas un nombre réel, donc g n'est pas dérivable en 3.

SAVOIR-FAIRE 2

Déterminer une équation d'une tangente

8 **a.** Le taux de variation de f entre 2 et $(2 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ est :
$t(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2-3-1}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h + 4$.
Ainsi, $\lim_{h\to 0} t(h) = 4$. Donc f est dérivable en 2 et le nombre dérivé de f en 2 vaut $f'(2) = 4$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est :
$y = f(2) + f'(2) \times (x - 2)$. Or $f'(2) = 4$ et $f(2) = 1$.
On obtient pour équation $y = 4x - 7$.
b. $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ en $a = 1$.
Le taux de variation de f entre 1 et $(1 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}^*$ est :
$t(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h} = \frac{\frac{1-(1+h)^2}{(1+h)^2}}{h}$
$= \frac{-2h-h^2}{h(1+h)^2} = \frac{-2-h}{(1+h)^2}$
Ainsi, $\lim_{h\to 0} t(h) = -2$. Donc f est dérivable en 1 et le nombre dérivé de f en 1 vaut $f'(1) = -2$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :
$y = f(1) + f'(1) \times (x - 1)$. Or $f'(1) = -2$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.
On obtient pour équation $y = -2x + \frac{9}{4}$.

SAVOIR-FAIRE 3

Calculer la dérivée d'une fonction polynôme

9 **a.** $f = 6u$ avec $u : x \longmapsto x^5$. Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction puissance et $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 5x^4$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6 \times u'(x) = 6 \times 5x^4 = 30x^4$.
b. $\boldsymbol{g} = u + v$ avec $u : x \longmapsto -8x^2$ et $v : x \longmapsto 4x - 21$.
Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction carré par un nombre réel. De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine. On en conclut que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -8 \times 2x = -16x$ et $v'(x) = 4$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) + v'(x) = -16x + 4$.

c. $h = u + v + w$ avec $u : x \longmapsto 2x^3$, $v : x \longmapsto 5x^2$ et $w : x \longmapsto \frac{-7}{2}x + 5$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que produit d'une fonction puissance par un nombre réel, et w est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$u'(x) = 2 \times 3x^2 = 6x^2$, $v'(x) = 10x$ et $w'(x) = \frac{-7}{2}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,
$h'(x) = u'(x) + v'(x) + w'(x) = 6x^2 + 10x - \frac{7}{2}$.
d. $k = u + v$ avec $u : x \longmapsto -3x^2$ et $v : x \longmapsto 8x - \frac{16}{3}$.
Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de la fonction carré par un nombre réel. De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine. On en conclut que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -3 \times 2x = -6x$ et $v'(x) = 8$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) + v'(x) = -6x + 8$.
e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $l(x) = \frac{1}{5} \times (-5x^2 - x + 7)$. Ainsi $l = \frac{1}{5} \times u$ avec $u : x \longmapsto -5x^2 - x + 7$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles, dérivables sur $\mathbb{R}$.
Donc l est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -10x - 1$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $l'(x) = \frac{1}{5} \times u'(x) = \frac{1}{4} \times (-10x - 1)$
$= \frac{-10x-1.}{4}$.
f. $\forall x \in \mathbb{R}$, $m(x) = x^2 - 6x + 9$. la fonction m est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $m'(x) = 2x - 6$.

10 Soit les fonctions $f : x \longmapsto 7x^2 + 7{,}5x + 13$, $g : x \longmapsto 8x^3 - 5x^2 + 15x - 7{,}5$ et $h : x \longmapsto \frac{-5x^2+3x+3}{2}$.
Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 14x + 7{,}5$ et $g'(x) = 24x^2 - 10x + 15$ et $h'(x) = \frac{-10x+3}{2}$.

SAVOIR-FAIRE 4

Calculer la dérivée d'un produit

11 **a.** $f = u \times v$ avec $u : x \longmapsto 3x$ et $v : x \longmapsto 2x^2 + x - 1$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4x + 1$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$= 3(2x^2 + x - 1) + 3x(4x + 1)$
$= 18x^2 + 6x - 3$.
b. $f = u \times v$ avec $u : x \longmapsto -4x + 7$ et
$v : x \longmapsto -x^2 + 1$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -4$ et $v'(x) = -2x$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$= -4(-x^2 + 1) + (-4x + 7)(-2x) = 12x^2 - 14x - 4$.

SAVOIR-FAIRE 5

Calculer la dérivée d'un quotient

12 **a.** $f = \frac{1}{v}$ avec $v : x \longmapsto x^2 - 3$, fonction usuelle dérivable sur $\mathbb{R}$. Comme v ne s'annule qu'en -3 et 3, f est dérivable sur $\mathrm{I} = \mathbb{R}\backslash\{-3 ; 3\}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathrm{I}$, $v'(x) = 2x$; ainsi :
$f'(x) = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2} = -\frac{2x}{(x^2-3)^2}$
b. $g = \frac{u}{v}$ avec $u : x \longmapsto 3x + 6$ et $v : x \longmapsto x^2 + 2$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2 \geqslant 2$, v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2}$
$= \frac{3\times(x^2+2)-(3x+6)\times 2x}{(x^2+2)^2}$
$= \frac{-3x^2-12x+6}{(x^2+2)^2}$.

► *Les exercices* **13** *à* **23** *de* la *rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel* (*p. 368*).

Développer ses stratégies et méthodes

p. 120 du manuel

24 **a.** On utilise la formule :
$(g(ax + b))' = a \times g'(ax + b)$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 3\times3(3x + 2)^2 = 9(3x + 2)^2$.
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$.
On utilise $(u + v)' = u' + v'$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 18x + 12$.
c. On utilise la formule $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.
d. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \frac{x}{x^2+1}$.
On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = \frac{x^2+1-2x\times x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.
e. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{1}{7}(3x + 2)$.
On utilise $(ku)' = ku'$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{3}{7}$.

25 **a. Stratégie 1 :** p_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_1(x) = -6x^2 - x + 1$ et $p_1'(x) = -12x - 1$.
b. Stratégie 1 : p_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_2(x) = 25x^2 + 10x + 1$ et $p_2'(x) = 50x + 10$.
c. Stratégie 2 : $p_3 = u \times v$ avec :
$u : x \longmapsto x^2 + 7x + 1$ et $v : x \longmapsto 8x - 5$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes, donc p_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = 2x + 7$ et $v'(x) = 8$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$p_3'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$= (2x + 7)(8x - 5) + 8(x^2 + 7x + 1)$
$= 24x^2 + 102x - 27$.
d. Stratégie 1 : p_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_4(x) = 25x^2 - 30x + 9$ et $p_4'(x) = 50x - 30$.
e. Stratégie 1 : p_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $p_5(x) = 64x^2 - 1$ et $p_5'(x) = 128x$.
f. Stratégie 2 : $p_6 = u \times v$ avec $u : x \longmapsto 1 - 11x$ et $v : x \longmapsto x^3 - 9$.
u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions polynômes, donc p_6 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = -11$ et $v'(x) = 3x^2$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$p_6'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$= -44x^3 + 3x^2 + 99$.

26 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1} + (x-5)(1-x)$
$= x^2 - 1 + x - x^2 - 5 + 5x$
$= 6x - 6$
et $f\,'(x) = 6$.
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}$
$= \sqrt{(x^2+1)^2}$
$= x^2 + 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$.
c. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$h(x) = \left(x^2 - \sqrt{2}\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{5}x}{3} + 7{,}5\sqrt{11}$
$= x^4 - 2 + \frac{\sqrt{5}x}{3} + 7{,}5\sqrt{11}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $h\,'(x) = 4x^3 + \frac{\sqrt{5}}{3}$.

27 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 15x^2 + 14x - 5$.
b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = 3\times7(3x-5)^6 = 21(3x-5)^6$.
c. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = \frac{-8x}{(4x^2+1)^2}$.
d. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = 2x$.

28 $f\,'(0) = 3$, $f\,'(-2) = 1$, $f\,'(1) = \frac{-1}{2}$.

29 **a.** f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$.
d. f_4 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-6\}$.
e. f_5 est dérivable sur $\mathbb{R}$.
f. f_6 est dérivable sur $]\frac{8}{3}\,;+\infty[$.

30 Christophe remarque que les 4 fonctions sont de la forme $q : x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.
$q = \frac{u}{v}$ avec $u : x \longmapsto ax + b$ et $v : x \longmapsto cx + d$. Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ en tant que fonctions affines. Et v ne s'annule qu'en $x = -\frac{d}{c}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = a$ et $v'(x) = b$.
Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$,
$g'(x) = \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{(v(x))^2}$
$= \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$.
Ainsi :
q_1 est dérivable sur I = $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $\forall x \in$ I,
$q_1'(x) = \frac{1\times3-(-7)\times1}{(x+3)^2} = \frac{10}{(x+3)^2}$.
q_2 est dérivable sur I = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{4}\}$ et $\forall x \in$ I,
$q_2'(x) = \frac{6\times(-1)-7\times4}{(4x-1)^2} = \frac{-34}{(4x-1)^2}$.
q_3 est dérivable sur I = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-7}{11}\}$ et $\forall x \in$ I,
$q_3'(x) = \frac{-4\times7-3\times11}{(11x+7)^2} = \frac{-61}{(11x+7)^2}$.
q_4 est dérivable sur I = $\mathbb{R} \setminus \{\frac{9}{8}\}$ et $\forall x \in$ I,
$q_4'(x) = \frac{5\times9-3\times(-8)}{(-8x+9)^2} = \frac{69}{(-8x+9)^2}$.

► *Les exercices* **31** *à* **41** *de* la *rubrique* « **Les incontournables** » *sont corrigés en fin de manuel* (*p. 368*).

Entraînement

p. 122 à 127 du manuel

Objectif 1

Déterminer un nombre dérivé d'une fonction

42 **a.** Faux, $x \to |x|$ est définie et continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
b. Vrai, car $\lim\limits_{h \to 0} \frac{2}{h} = +\infty$, avec $h > 0$.
c. Faux, $\lim\limits_{h \to 0}(-3h + 4) = 4$ donc $f\,'(3) = 4$
d. Vrai, $y = f(a) + f\,'(a)\,(x - a)$
$y = f\,'(a)\,x + f(a) - a\,f\,'(a)$
e. Vrai, $y = f(-2) + f\,'(-2)(x + 2)$ donc $f\,'(-2) = 4$.

43 **a.** $f\,'(-2) = 2$; $f\,'(1) = -1$; $f\,'(3) = 0$.
b. En A : $y = 3 + 2(x + 2) = 2x + 7$
En B : $y = 0 + (-1)(x - 1) = -x + 1$
En C : $y = -1$

44 **a.** $y = f\,'(5)\,(x - 5) + f(5) = 121$
b. Elles ont le même coefficient directeur, donc elles sont parallèles.
c. $f\,'(5) = -3$, donc $y = f\,'(5)\,(x - 5) + f(5)$
$y = -3(x - 5) + f(5)$
$y = -3x + 15 + f(5)$
donc $15 + f(5) = 2$ et $f(5) = -13$.

45 **a.** $f(1) = -2$

et $f(1 + h) = -3(1 + h) + 1 = -3h - 2$.

Donc $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-3h-2+2}{h} = -3$.

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = -3$.

b. $g(2) = 8$

et $g(2 + h) = 3(2 + h)^2 - 4$

$= 3(4 + 4h + h^2) - 4$

$= 3h^2 + 12h + 8$

$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{3h^2+12h+8-8}{h} = 3h + 12$.

$\lim_{h\to 0}(3h+12) = 12$ donc g est dérivable en 2 et $g'(2) = 12$.

c. Appelons la fonction h_1 au lieu de h.

$h_1(3) = 27$

et $h_1(3 + h) = (3 + h)^2 + 7(3 + h) - 3$

$= 9 + 6h + h^2 + 21 + 7h - 3$

$= h^2 + 13h + 27$

Donc $\frac{h_1(3+h)-h_1(3)}{h} = \frac{h^2+13h+27-27}{h} = h + 13$.

$\lim_{h\to 0}(h+13) = 13$ donc h_1 est dérivable en 3 et $h_1'(3) = 13$

d. $k(2) = 0$ et $k(2 + h) = \sqrt{2+h-2} = \sqrt{h}$

Donc $\frac{k(2+h)-k(2)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ a une limite infinie en 0, donc k est non dérivable en 2.

46 **a.** $f(0) = -1$ et $f(0 + h) = -2h^2 + 3h - 1$

Donc $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-2h^2+3h-1+1}{h} = -2h + 3$

$\lim_{h\to 0}(-2h+3) = 3$ donc f est dérivable en O et $f'(0) = 3$

b. $g(0) = -5$ et $g(0 + h) = -2h^2 - 5$

Donc $\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{-2h^2-5+5}{h} = -2h$.

$\lim_{h\to 0}(-2h) = 0$ donc g dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

c. Appelons la fonction h_1 au lieu de h.

$h_1(3) = 0$ et $h_1(3 + h) = h^2$.

Donc $\frac{h_1(3+h)-h_1(3)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$.

$\lim_{h\to 0}(h) = 0$ donc h_1 est dérivable en 0 et $h_1'(3) = 0$.

d. $k(0) = 0$ et $k(0 + h) = \frac{h}{h+1}$

$\frac{k(0+h)-k(0)}{h} = \frac{\frac{h}{h+1}-0}{h} = \frac{1}{h+1}$.

On a $\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h+1}\right) = 1$ donc k est dérivable en 0 et $k'(0) = 1$

47 **a.** $f(2) = 0$ et $f(2 + h) = (2 + h)^2 - 4 = 4h$.

Donc $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4h}{h} = 4$, donc $f'(2) = 4$.

$y = f(2) + f'(2)(x - 2) = 4x - 8$

b. $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f(1 + h) = \frac{1}{2+2h}$

$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{1}{2+2h}-\frac{1}{2}}{h} = \frac{\frac{1}{2+2h}-\frac{1+h}{2+2h}}{h}$

$= \frac{1-1-h}{h(2+2h)} = \frac{-1}{2+2h}$.

Or $\lim_{h\to 0}\left(\frac{-1}{2+2h}\right) = -\frac{1}{2}$ et $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$

$= -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}$

$= -\frac{1}{2}x + 1$.

48 **a.** $f(-1) = 9$ et

$f(-1 + h) = (-1 + h)^2 - 2(-1 + h) + 6$

$= h^2 - 4h + 9$

Donc $\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{h^2-4h}{h} = h - 4$.

$\lim_{h\to 0}(h-4) = -4$ donc $f'(-1) = -4$.

$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = -4x + 5$.

b. $f(1) = 1$ et

$f(1 + h) = (1 + h)^3$

$= 1^3 + 3\times1^2\times h + 3\times1\times h^2 + h^3$

$= h^3 + 3h^2 + 3h + 1$

Donc $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{h^3+3h^2+3h}{h}$

$= h^2 + 3h + 3$

$\lim_{h\to 0}(h^2+3h+3) = 3$, donc $f'(1) = 3$.

$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.

49 **a.** et **b.** $f(2) = 8$ et

$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 2(2 + h) = h^2 + 6h + 8$

Donc $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+6h}{h} = h + 6$.

$\lim_{h\to 0}(h+6) = 6$, donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 6$

c. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^2 + 2\sqrt{2} = 2 + 2\sqrt{2}$

et $f(\sqrt{2} + h) = (\sqrt{2} + h)^2 + 2(\sqrt{2} + h)$

$= 2 + 2\sqrt{2}\,h + h^2 + 2\sqrt{2} + 2h$

$= h^2 + (2\sqrt{2} + 2)h + 2\sqrt{2} + 2$

Donc $\frac{f(\sqrt{2}+h)-f(\sqrt{2})}{h} = h + 2\sqrt{2} + 2$

$\lim_{h\to 0}(h+2\sqrt{2}+2) = 2\sqrt{2} + 2$,

donc $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$.

50 **a.**

1	Entrer x_A, y_A, x_B, y_B
2	Afficher $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def nombre_derive(x_a,y_a,x_b,y_b):
    return (y_b-y_a)/(x_b-x_a)
```

51 **a.** Si le point où est mené la tangente a une abscisse positive (respectivement négative), alors la pente est positive (respectivement négative).
b. Appelons f la fonction carrée. Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$= \frac{h^2+2\,a\,h}{h} = h + 2a$$

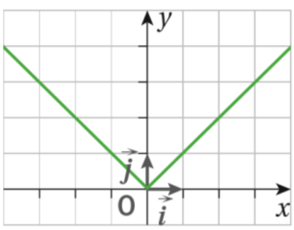
$\lim\limits_{h \to 0} (h + 2\,a) = 2a.$
Donc le nombre dérivé est $f'(a) = 2a$, il est du signe de a. Donc la pente de la tangente issue du point d'abscisse a est du signe de a.

52 **a.** la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A(–4 ; 2), B(–2 ; –1), C(0 ; 3,5) et D(2 ; 5).
b. La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par A et de pente égale à –1.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B est la droite horizontale passant par B.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point C est la droite passant par C et de pente égale à 1.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D est la droite passant par D et de pente égale à 0,5.

53 **a.** $f'(-5) = 4$; $f'(-3) = 0$; $f'(0) = -1$; $f'(3) = 3$
b. En A : $y = 4(x + 5) + (-4) = 4x + 16$
En B : $y = 3 + 0(x + 3) = 3$
En C : $y = -2 + (-1) \times (x + 0) = -x - 2$
En D : $y = 1 + 3(x - 3) + 1 = 3x - 8$.

54 • $f'(-3) = 5$; $f'(-1) = \frac{-1}{3}$; $f'(2) = 0$.
• En M : $y = (-2) + 5(x + 3) = 5x + 13$.
En N : $y = 2 - \frac{1}{3}(x + 1) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{6}{3}$
$= -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
En P : $y = (-1) + 0\,(x - 2) = -1$.

55 **a.**



b. $t(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$
$= \begin{cases} 1 \; si \; h > 0 \\ -1 \; si \; h < 0 \end{cases}$
donc $t(h)$ n'admet pas de limite finie lorsque h tend vers 0. Ainsi f n'est pas dérivable en 0.
c. On a un point anguleux en 0.

56 La courbe présente un point anguleux en 2 (voir exercice 55). La fonction semble ne pas être dérivable en 2.

57 **a.** There is a corner point at 1. The function appears to be not differentiable at $x = 1$.
b. $f'(1) = 4$.
c. $f'(1) = 0$.

58 **a.** $f'(2) = 5$ et une équation de la tangente est :
$y = f(2) + f'(2)\times(x - 2) = f(2) + 5(x - 2)$
$= 5x - 10 + f(2)$
Donc $-10 + f(2) = 6$ et $f(2) = 16$
b. $f'(0) = -3$ et $y = f(0) + f'(0)\times(x - 0)$
$= -3x + f(0)$.
Donc $f(0) = 5$.
c. $y = f(6) + f'(-6)\times(x + 6)$
donc $f'(-6) = 0$ et $f(-6) = 7$.

59 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. La fonction renvoie en Python la liste de n taux de variation de la fonction g en a.
b. On peut conjecturer que :
$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7$ et que la fonction f est dérivable en 2 avec $f'(2) = 7$.
c. $f(2) = 4 + 6 - 6 = 4$.
$f(2 + h) = (2 + h)^2 + 3(2 + h) - 6$
$= 4 + \; h + h^2 + 6 + 3\,h - 6$
$= h^2 + 7\,h + 4$
Ainsi $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{h^2+7\,h}{h} = h + 7$
Et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 7$.
Donc f est dérivable en 2 et $f'(2) = 7$.

60 Étude de la dérivabilité en 1 : le taux de variation de f en $a = 1$ est, pour h non nul :
$t(h) = \frac{|(1+h)^2-1|-0}{h} = \frac{|h^2+2h|}{h} = \frac{|h|\times|h+2|}{h}$
$= \begin{cases} h + 2 \;\; si \; h > 0 \\ -h - 2 \; si \; h < 0 \end{cases}$.

La limite de $t(h)$ lorsque h tend vers 0 avec $h > 0$ est égale à 2 et la limite de $t(h)$ lorsque h tend vers 0 avec $h < 0$ est égale à –2. Ces deux limites sont distinctes, donc la fonction f n'est pas dérivable en 1.
On démontre de la même manière que f n'est pas dérivable en –1.

OBJECTIF 2

Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

61 **1.d. 2.e. 3.b. 4.a. 5.c.**

62 $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = x^3$.
a. Vrai, $f'(x) = 2x$ donc $f'(-5) = -10$.
b. Faux, $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $g'(2) = \frac{-1}{4}$.
c. Faux, $h'(x) = 3x^2 \geqslant 0$.
d. Vrai, $y = f(0) + f'(0)\,x = 0$.
$y = h(0) + h'(0)\,x = 0$. Les deux tangentes sont confondues.
e. Faux, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x^2} = 0$. Pas de solution.
f. Vrai, $h'(-3) = 3\times(-3)^2 = 27$ et $h'(3) = 3 \times 3^2 = 27$. Donc $h'(-3) = h'(3)$.

63 $f : x \longmapsto x^5$ a pour dérivée $f' : x \longmapsto 5x^4$.
$g : x \longmapsto x^2 + \frac{1}{x}$ a pour dérivée $g' : x \longmapsto 2x - \frac{1}{x^2}$.
$h : x \longmapsto \sqrt{x} - \sqrt{2}$ a pour dérivée $h' : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
$k : x \longmapsto x^{1000}$ a pour dérivée $k' : x \longmapsto 1000\,x^{999}$.

64 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$.
Donc $f'(x) = 2x + 2$ et $g'(x) = 2\,x$.

65 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ et $g(x) = x^2 + 2x + 12$ et $h(x) = x^2 + 2x - 18$
Les trois fonctions ne diffèrent qu'au niveau de leurs termes constants, donc elles ont les mêmes dérivées.

66 **a.** $f(x) = \sqrt{x}$.
b. $g(x) = \sqrt{x+1}$.
c. $h(x) = |x|$.

67 En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a. $f'(x) = 5\,x^4$. **b.** $g'(x) = -4$.
c. $h'(x) = 0$. **d.** $k'(x) = 8\,x - 3$.

68 En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, chaque fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a. $f'(x) = -16\,x^3$.
b. $g'(x) = -7$.
c. $h'(x) = -2x$.
d. $k'(x) = -10\,x + 7$.

69 **a.** $f'(x) = \frac{-6}{2\sqrt{x}} = \frac{-3}{\sqrt{x}}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
b. $g'(x) = \frac{7}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
c. $h'(t) = \frac{2\,t}{3} - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
d. $k'(s) = -6s + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

70 **a.** $f'(x) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = \frac{2x+2}{4} = \frac{x+1}{2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. $h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 6$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
d. $k'(x) = -16\,x - 6$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

71 **a.** $f'(t) = t$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(u) = 4$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. $h'(x) = -6x^2 - 10\,x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
d. $k'(t) = 8t - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

72 **a.** $f'(x) = 7{,}5$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. $g'(x) = 9\,x^2 - 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
c. $h'(x) = -9 + \frac{1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
d. $k'(x) = -\frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

73 **a.** $f(x) = x^2$ et $f'(x) = 2x$ ainsi $f(1) = 1$et $f'(1) = 2$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f(1) + f'(1)\,(x - 1)$.
Donc $y = 1 + 2(x - 1) = 2x - 1$.
b. On cherche $b \in \mathbb{R}$ tel que $f'(b) = -2$.
$f'(x) = 2\,x$ donc $2b = -2$ et $b = -1$.
La tangente en –1 est parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$.

74 **a.** $f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2$, ainsi $f(-3) = -27$ et $f'(-3) = 27$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse –3 a pour équation $y = f(-3) + f'(-3)\,(x + 3)$.
D'où $y = -27 + 27(x + 3) = 27x + 54$.
b. On cherche b tel que $f'(b) = -3$ donc :
$3x^2 = -3x^2 = -1$. Cette équation n'a pas de solution.

75 a. $f(x) = \frac{1}{x}$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a pour équation $y = f(2) + f'(2)(x-2)$.
$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) = -\frac{1}{4}x + 1$.
b. En – 2, on a $f'(-2) = -\frac{1}{4}$. Les deux tangentes sont parallèles.
c. On cherche b tel que $f'(b) = 2$ soit $-\frac{1}{b^2} = 2$.
Pas de solution.

76 a. $f(x) = \sqrt{x}$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
b. La tangente à la courbe au point d'abscisse 4 a pour équation $y = f(4) + f'(4)(x-4)$.
$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = \frac{1}{4}x + 1$.
b. On cherche b tel que $f'(b) = 2$, soit $\frac{1}{2\sqrt{b}} = -2$.
Pas de solution.

77 1. Conjecture : $\mathscr{C}_f$ admet deux points en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Leurs abscisses ont pour valeur approchée : –2 et 1.
2.a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
b. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$.
$f'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + x - 2 = 0$.
$\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9 > 0$. L'équation a deux solutions $x_1 = -2$ ou $x_2 = 1$.
c. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de la courbe en lesquels la tangente est parallèle à l'axe des abscisses. Cela confirme la conjecture.

78 a. $x^2 - 5x + 2 = -x^2 + 3x - 6 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = 2$
and $2^2 - 5\times 2 + 2 = -4$
There is a unique intersection point A(2, – 4).
b. $f(x) = x^2 - 5x + 2$ with $f'(x) = 2x - 5$.
An equation of the tangent line at point A is:
$y = f(2) + f'(2)(x-2) = -(x-2) - 4 = -x - 2$.
$g(x) = -x^2 + 3x - 6$, with $g'(x) = -2x + 3$.
An equation of the tangent line at point A is:
$y = -(x-2) - 4 = -x - 2$.
These two parabolas have the same tangent line at point A.

79 a. En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 2x - 2$.
b. $f(2) = 4 - 4 + 5 = 5$ et $f'(2) = 2$. La tangente à la courbe au point A d'abscisse 2 a pour équation $y = 5 + 2(x-2) = 2x + 1$.
c. $f(x) - (2x+1) = x^2 - 2x + 5 - 2x - 1$
$= x^2 - 4x + 4$
$= (x-2)^2 \geqslant 0$.
d. Donc $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}$ sur $\mathbb{R}$.

80 a. $C'(q) = q + 2$.
b. $C_{\text{m}}(30) = C(31) - C(30)$.
$C(31) = 722{,}5$; $C(30) = 690$ d'où $C_m(30) = 32{,}5$.
On peut approcher $C_{\text{m}}(30)$ Par $C'(30) = 32$.

81 a. On doit résoudre : $4{,}9\,t^2 = 343$,
soit $t^2 = \frac{343}{4{,}9}$ donc $t = \sqrt{\frac{343}{4{,}9}}$. (La solution négative n'a aucun sens.) La pierre touche le sol au bout de $t \approx 8{,}34$ s.
b. On doit calculer $v\left(\sqrt{\frac{343}{4{,}9}}\right)$. Or $d'(t) = 9{,}8t$ donc
$v\left(\sqrt{\frac{343}{4{,}9}}\right) = 9{,}8 \times \sqrt{\frac{343}{4{,}9}} \approx 82$ m.s^{-1}.

82 1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
La fonction renvoie dans une liste toutes les heures (jusque 6 h) durant lesquelles le médicament est efficace. La réponse est [1, 2, 3, 4, 5], donc 1 fait partie des solutions et 6 n'en fait pas partie. Le médicament est actif au bout d'une heure et il faut l'administrer à nouveau au bout de 6 h.
2.a. En tant que somme de fonctions puissances dérivables sur $\mathbb{R}$, C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$C'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.
b. $C(4) = 16$ et $C'(4) = -12$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse 4 a pour équation :
$y = C(4) + C'(4)(x-4) = 16 - 12(x-4)$
$y = -12x + 48 + 16 = -12x + 64$.
c.
$C(x) - (-12x + 64) = x^3 - 12x^2 + 36x - (-12x + 64)$
$= x^3 - 12x^2 + 36x + 12x - 64$
$= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
Or $(x-4)^3 = x^3 - 3\times x^2\times 4 + 3\times x\times 4^{2} - 4^3$
$= x^3 - 12x^2 + 48x - 64$.
Donc $C(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

d. Le signe de $C(x) - (-12x + 64)$ est donc celui de $(x - 4)^3$.

x	$+\infty$		4		$+\infty$
Signe de $(x-4)^3$		$-$	0	$+$	

e. La courbe représentative de C est au-dessus de la droite $\mathcal{T}$ sur $[4 ; +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty ; 4]$.

f. $\frac{C(4) - C(2)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$ et $\frac{C(6) - C(4)}{2} = -8$

L'affirmation du pharmacien est *fausse*.

OBJECTIF 3

Calculer la dérivée d'une fonction

83 **a.** Faux.

$f(x) = 49x^2 + 14x + 1$ donc $f'(x) = 98x + 14$.

b. Vrai, $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$.

c. Faux. $f'(x) = \frac{2(3x+2) - 3(2x+1)}{(3x+2)^2} = \frac{1}{(3x+2)^2}$.

d. Faux, si $f = uv$ avec u et v dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $f' = u'v + uv'$.

e. Vrai, si $f = u^2$ alors $f' = 2uu'$ et en général $(u')^2 \neq 2u\,u'$.

84 **1.c. 2.e. 3.d. 4.b. 5.a.**

85 $f(x) = (x^2 + 1)(-3x + 2)$

$g(x) = \frac{1}{(5x+3)}$

$h(x) = \frac{(x+7)}{6x+2}$

86 **1.** Comme $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, par la règle sur le produit : réponse **c.**

2. $f'(x) = 1\times\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$, donc réponse **b.**

3. Par la règle sur le quotient, f est dérivable lorsque $-3x + 2 \neq 0$, donc réponse **b.**

4. $\frac{4\times(-3x+2) - (-3)\times(4x+2)}{(-3x+2)^2} = \frac{-12x + 8 + 12x + 6}{(3x-2)^2}$

$= \frac{14}{(3x-2)^2}$

car $(3x - 2)^2 = (-3x + 2)^2$. Donc réponse **a.**

87 On applique la formule du produit.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 5(-2x + 1) + (-2)(5x + 3)$

$= -10x + 5 - 10x - 6$

• g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$g'(x) = -4\sqrt{x} + (-4x)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = -4\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = -6\sqrt{x}$

88 • f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x(2x - 4) + 2\times(3x^2 - 5)$

$= 12x^2 - 24x + 6x^2 - 10 = 18x^2 - 24x - 10$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$g'(x) = 5\times\frac{1}{x} + (5x - 7)\times\frac{-1}{x^2}$

$= \frac{5}{x} - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2} = \frac{7}{x^2}$.

89 • f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f'(x) = \frac{2}{(-2x+4)^2}$

• g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$,

$g'(x) = \frac{1}{3}\times\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{6x\sqrt{x}}$

90 • $3x^2 + 2x + 4 = 0$. $\Delta = -44 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{-6x - 2}{(3x^2 + 2x + 4)^2}$

• g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$

91 • f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$,

$f'(x) = \frac{5(-3x+2)-(5x+7)\times(-3)}{(-3x+2)^2}$

$= \frac{-15x+10+15x+21}{(-3x+2)^2} = \frac{31}{(-3x+2)^2}$

• g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$,

$g'(x) = \frac{5(2x-1)-5x\times2}{(2x-1)^2} = \frac{10x-5-10x}{(2x-1)^2} = \frac{-5}{(2x-1)^2}$

92 • f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$,

$f'(x) = \frac{3x^2\times(4x+1)-x^3\times4}{(4x+1)^2}$

$= \frac{12x^3+3x-4x^3}{(4x+1)^2} = \frac{8x^3+3x}{(4x+1)^2}$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\}$,

$g'(x) = \frac{(6x-2)(x^2-1)-(3x^2-2x+1)\times2x}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{6x^3-6x-2x^2+2-6x^3+4x^2-2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^2-8x+2}{(x^2-1)^2}$

93 • f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$f'(t) = \frac{-2(4t-8)-(-2t+3)\times4}{(4t-8)^2}$

$= \frac{-8t+16+8t-12}{(4t-8)^2} = \frac{4}{(4t-8)^2}$.

• g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$g'(s) = \frac{-2s(3s-6)-(-s^2+2)\times3}{(3s-6)^2}$

$= \frac{-6s^2+12s+3s^2-6}{(3s-6)^2}$

$= \frac{-3s^2+12s-6}{(3s-6)^2}$.

94 a. f est un quotient, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

$f'(x) = \frac{3(2x-7)-(3x+1)\times 2}{(2x-7)^2}$

$= \frac{6x-21-6x-2}{(2x-7)^2} = \frac{-23}{(2x-7)^2}$.

b. g est un produit dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = -12x(4x-1) + (-6x^2)\times 4$

$= -48x^2 + 12x - 24x^2$

$= -72x^2 + 12x$.

c. h est un produit dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(6x-1) + \sqrt{x} \times 6$

$= \frac{6x}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + 6\sqrt{x} = 3\sqrt{x} + 6\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= 9\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d. k est un quotient dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$,

$k'(x) = \frac{5}{(-5x+10)^2}$.

95 a. f est un quotient dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

$f'(x) = \frac{-3}{(3x+2)^2}$.

b. g est un produit, dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 16x(-6x+2) + 8x^2\times(-6)$

$= -96x^2 + 32x - 48x^2$

$= -144x^2 + 32x$

c. h est un produit dérivable sur $\mathbb{R}$.

$h'(x) = 5(5x-2) + (5x+3)\times 5$

$= 25x - 10 + 25x + 15$

$= 50x + 5$

d. k est un quotient dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$k'(x) = -\frac{2x \times 4x - (x^2+1) \times 4}{(4x)^2}$

$= -\frac{8x^2 - 4x^2 - 4}{16x^2}$

$= -\frac{4x^2 - 4}{16x^2}$

$= -\frac{4 - 4x^2}{16x^2}$

96 f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et g sur $]0 ; +\infty[$

$f'(x) = \frac{-1}{(2x-4)^2} + 10x$

$g'(x) = \frac{x^2+1-(x+3)\times 2x}{(x^2+1)^2} + 5\left(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{x^2+1-2x^2-6x}{(x^2+1)^2} + 5\sqrt{x} + \frac{5x}{2\sqrt{x}}$

$= \frac{-x^2-6x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{15}{2}\sqrt{x}$

97 a. $2x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.

Donc f est dérivable sur $]3 ; +\infty[$.

b. $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-6}} = \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

98 a. $-3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$.

Donc f est dérivable sur $]-\infty ; \frac{1}{3}[$.

b. $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x+1}}$.

99 a. $f(x) = x^2(-x+2)$.

b. et **c.** Oui, les réponses sont correctes. Enzo utilise la forme factorisée (produit) et Amel la forme développée (somme).

100 a. Faux.

$f'(x) = 6x(-2x+3) + (3x^2+5) \times (-2)$

$= -12x^2 + 18x - 6x^2 - 10$

$= -18x^2 + 18x - 10$

$\Delta = 18^2 - 4 \times (-18) \times (-10) < 0$.

Donc $f'(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

b. Vrai, f' est une fonction polynôme du second degré sans racine, donc f' est du signe de -18, donc strictement négatif sur $\mathbb{R}$.

c. Vrai, $g'(x) = -18x^2 + 18x - 10 = f'(x)$.

d. Faux, on résout l'équation $f'(x) = 1$.

$-18x^2 + 18x - 10 = 1 \Leftrightarrow -18x^2 + 8x - 11 = 0$.

$\Delta = 8^2 - 4 \times (-18) \times (-11) = -728 < 0$.

Donc il n'y a pas de solution.

101 a. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

$f'(x) = \frac{2x(4x-1)-(x^2-1)\times 4}{(4x-1)^2} = \frac{4x^2-2x+4}{(4x-1)^2}$.

b. $f'(1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ et $f(1) = 0$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :

$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

102 a. f is differentiable on $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, and

$f'(x) = \frac{-2}{(2x-6)^2}$.

b. $f'(1) = \frac{-2}{(-4)^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$ and $f(1) = \frac{1}{-4}$.

An equation of the tangent line at 1 is:

$y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{8}(x-1) = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$.

103 a. f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$f'(x) = \frac{(2x+6)(x-1)-(x^2+6x+2)\times 1}{(x-1)^2}$

$= \frac{2x^2-2x+6x-6-x^2-6x-2}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$.

On résout l'équation $f'(x) = 0$ soit $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = 4 - 4 \times (-8) = 36 > 0$.

Deux solutions :

$x_1 = \frac{2-\sqrt{36}}{2} = \frac{2-6}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{2+6}{2} = 4$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses aux points d'abscisse –2 et 4.

b. On résout l'équation $\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = 1$.

$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1$. Il n'y a pas de solution.

c. On résout l'équation $\frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2} = -3$.

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -3(x^2 - 2x + 1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = -3x^2 + 6x - 3$

$\Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 5 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 64 + 80 = 144 > 0$.

Deux solutions :

$x_1 = \frac{8-\sqrt{144}}{8} = \frac{8-12}{8} = -\frac{1}{2}$ et

$x_2 = \frac{8+12}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{4}$.

La tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = -3x + 1$ aux points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{4}$.

104 **1.** Conjecture : la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à l'axe des abscisses en trois points d'abscisses respectives : 1 ; ≈ 0,33 et ≈ 0,66.

2. a. f est de la forme u^2 avec $u : x \longmapsto 3x^2 - 4x + 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = (3x^2 - 4x + 1)(3x^2 - 4x + 1)$

$f'(x) = (6x - 4)(3x^2 - 4x + 1) + (3x^2 - 4x + 1)(6x - 4)$

En développant, $f'(x) = 36x^3 - 72x^2 + 44x - 8$.

b. $f'(1) = 36 - 72 + 44 - 8 = 0$ et $f(1) = 0$, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1 a donc pour équation $y = 0$.

c. $f'(x) = 36x^3 - 72x^2 + 44x - 8$.

$4(x - 1)(9x^2 - 9x + 2)$

$= 4(9x^3 - 9x^2 + 2x - 9x^2 + 9x - 2)$

$= 4(9x^3 - 18x^2 + 11x - 2)$

$= 36x^3 - 72x^2 + 44x - 8$

Donc $f'(x) = 4(x - 1)(9x^2 - 9x + 2)$

d. On résout $f'(x) = 0$,

donc $(x - 1)(9x^2 - 9x + 2) = 0$

$x - 1 = 0$ ou $9x^2 - 9x + 2 = 0$

$x = 1$ ou $\Delta = 81 - 72 = 9$

$x_1 = \frac{9-3}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{9+3}{18} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Ainsi la courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes parallèles à l'axe des abscisses en trois points d'abscisses respectives : 1 ; $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

105 **1.** $C(30) = \frac{44}{3} \approx 14,66$ L pour 100 km.

2.a. C est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$C'(x) = \frac{(16x-800)x^2-(8x^2-800x+30000)\times 2x}{x^4}$

$= \frac{16x^3-800x^2-16x^3+1600x^2-60000x}{x^4}$

$= \frac{800x^2-60000x}{x^4} = \frac{800x-60000}{x^3}$

b. $C'(x) = 0 \Leftrightarrow 800x - 60\,000 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{60000}{800} = 75$

La tangente à la courbe représentative de C est est horizontale au point d'abscisse 75.

c. Il semble que la valeur minimale de la consommation cela soit pour $x \approx 75$ km/h. Cela correspond à la solution de l'équation $C'(x) = 0$.

d. L'algorithme affiche la première valeur pour laquelle $C(x)$ passe sous le seuil 5. La première fois que la consommation est inférieure à 5 L pour 100 km est pour une vitesse de 46 km/h.

Démontrer les propriétés

p. 128 et 129 du manuel

106 Démonstration permettant de montrer que **la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable sur]0 ; +∞[**, et de déterminer l'expression de sa fonction dérivée sur cet intervalle.

f est la fonction racine carrée définie sur [0 ; +∞[Par $f(x) = \sqrt{x}$.

● Pour tout a appartenant à [0 ; +∞[et pour tout h appartenant à $\mathbb{R}^*$ tel que $a + h > 0$, le taux de variation de f entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 ; on ne peut alors pas déterminer la limite de ce quotient.

● $t(h) = \dfrac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

$= \dfrac{(a+h-a)}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

$= \dfrac{h}{h \times (\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$

● ***Si a* = 0**, $t(h) = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Donc lorsque h tend vers 0, $t(h)$ prend des valeurs de plus en plus **grandes**, qui tendent vers +∞ ; ainsi $t(h)$ ne tend pas vers un nombre réel et f n'est donc pas dérivable en 0.

Si *a* > 0, lorsque h tend vers 0, $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ tend vers $2\sqrt{a}$. Donc $t(h)$ tend vers $\frac{1}{2\sqrt{a}}$, qui est un nombre réel. Ainsi, f est **dérivable** en a et $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

● Donc la fonction racine carrée est dérivable sur]**0 ; +∞[** et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

107 **1.** La fonction f est dérivable en a donc par définition, la droite $\mathcal{T}$ a pour coefficient directeur $f'(a)$. Donc cette droite admet une équation de la forme $y = f'(a) \times x + p$ où $p \in \mathbb{R}$.

2. Le point A(a ; $f(a)$) $\in \mathcal{T}$ donc ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Ainsi $f(a) = f'(a) \times a + p$.
D'où $p = f(a) - f'(a) \times a$.
Une équation de $\mathcal{T}$ est :
$y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$ autrement dit
$y = f(a) + f'(a)\times(x - a)$.

108 **a.** $\forall a \in \mathbb{R}$, le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$ vaut :

$t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{k-k}{h} = 0$.

Lorsque h tend vers 0 alors $t(h)$ tend vers 0.
On en conclut que $\forall a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = 0$. Donc la fonction constante est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction nulle.

b. $\forall a \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$vaut

$t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{m(a+h)+p-ma-p}{h}$

$= \dfrac{mh}{h} = m$.

Lorsque h tend vers 0 alors $t(h)$ tend vers m.
On en conclut que $\forall a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = m$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f : x \mapsto m$.

c. $\forall a \in \mathbb{R}$, le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$ vaut :

$t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h}$

$= \dfrac{h(2a+h)}{h}$

$= 2a + h$.

Lorsque h tend vers 0 alors $t(h)$ tend vers $2a$.
On en conclut que $\forall a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.
Donc la fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f : x \mapsto 2x$.

d. $\forall a \in \mathbb{R}$, le taux d'accroissement de la fonction f entre a et $a + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$ vaut

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^3-a^3}{h}$$
$$= \frac{3a^2h+3ah^2}{h} = \frac{h(3a^2+3ah)}{h}$$
$$= 3a^2 + 3ah.$$

Lorsque h tend vers 0 alors $t(h)$ tend vers $3a^2$.
On en conclut que $\forall a \in \mathbb{R}$, f est dérivable en a et $f'(a) = 3a^2$.
Donc la fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f : x \mapsto 3x^2$.

e. $\forall a \in \mathbb{R}^*$, le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ où $h \in \mathbb{R}^*$, tel que $a + h \neq 0$, vaut :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{h}}{h}$$
$$= \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h}$$
$$= -\frac{1}{a(a+h)}$$

Lorsque h tend vers 0 alors $t(h)$ tend vers $-\frac{1}{a^2}$.
On en conclut que $\forall a \in \mathbb{R}^*$, f est dérivable en a et $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
Donc la fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $f : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

109 **1.a.** $\forall a \in \mathrm{I}$ et $\forall h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathrm{I}$, le taux de variation $t(h)$ de la fonction $u + v$ entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}$$
$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} - \frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

b. Les fonctions u et v étant dérivables en a, on en déduit que :

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a) + v'(a)$.

Donc $u \times v$ est dérivable en a et
$(u \times v)'(a) = u'(a) \times v(a) + u(a) \times v'(a)$.
Donc la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et
$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

110 $\forall a \in \mathrm{I}$ et $\forall h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in \mathrm{I}$, le taux de variation $t(h)$ de la fonction ku entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{ku(a+h)-ku(a)}{h} = k \times \frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

La fonction u étant dérivable en a, on en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.

Donc : $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = ku'(a)$.

Donc ku est dérivable en a et $(ku)'(a) = ku'(a)$.
Donc la fonction ku est dérivable sur I et
$(ku)' = ku'$.

111 **1.** $\forall a \in \mathrm{I}$ et $\forall h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in$, le taux de variation $t(h)$ de la fonction $\frac{1}{v}$ entre a et $a + h$ vaut :

$$t(h) = \frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = \frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)}$$
$$= -\frac{v(a+h)-v(a)}{h} \times \frac{1}{v(a)v(a+h)} \text{ car}$$

$v(a + h) \neq 0$ et $v(a) \neq 0$. La fonction v étant dérivable en a, on en déduit que :
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

Donc $\lim\limits_{h\to 0} t(h) = -v'(a) \times \frac{1}{v^2(a)}$.

Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{v}\right)'(a) = -\frac{v'(a)}{v^2(a)}$.

La fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

2. $\frac{u}{v} = u \times \frac{1}{v}$. À l'aide de la formule de la dérivée d'un produit, comme u et $\frac{1}{v}$ sont dérivables sur I (v ne s'annulant pas sur I), alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = u' \times \frac{1}{v} + \left(-\frac{v'}{v^2}\right) \times u = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}.$$

112 ● En 1666, Isaac Newton (1642–1727) écrit *Le Calcul des fluxions*. Cet ouvrage amorce le développement du calcul différentiel. En se plaçant dans un contexte de sciences physiques, Newton y définit le concept de fluente (grandeur qui varie avec le temps) et décrit le parcours d'une particule sur une courbe. Il utilise pour cela deux quantités : la vitesse horizontale x' et la vitesse verticale y' qu'il appelle fluxions des fluentes x et y qui varient en fonction du temps. L'étude du rapport $\frac{y'}{x'}$ permet de définir la tangente à une courbe d'équation $f(x, y) = 0$.

● Alors que Newton introduit les fluxions, le mathématicien Leibniz étudie les quantités infinitésimales en lien avec l'étude des tangentes. Il publie en 1684 des articles détaillant le calcul différentiel où il introduit les notations utilisées aujourd'hui. En faisant tendre Δx vers 0 dans le taux de variation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, il obtient $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'(x)$ où les quantités dy et dx sont appelées des différentielles. Le rapport $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ est alors égal à la dérivée de y par rapport à x.

● Plusieurs mathématiciens ont introduit la notion de tangente à une courbe :
- Archimède environ 287–212 av. J.-C. ;
- Descartes en 1637 ;
- Pierre de Fermat en 1638 ;
- Gilles Personne de Roberval en 1693.

Sources :
(1) https://www.universalis.fr/encyclopedie/le-calcul-des-fluxions/#i_33556
(2) « Nouvel Abrégé d'histoire des mathématiques », Jean Baudet, éditions Vuibert.
(3) https://www.lozedion.com/wp-content/uploads/2013/09/Tangente01.pdf

113 **1.a.** La tangente à la courbe au point A a pour équation $y = f\left(\frac{3}{2}\right) + f'\left(\frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

Or $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ donc $f'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{9}$.

Ainsi $y = \frac{2}{3} - \frac{4}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{9}x + \frac{24}{18}$

$= -\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$.

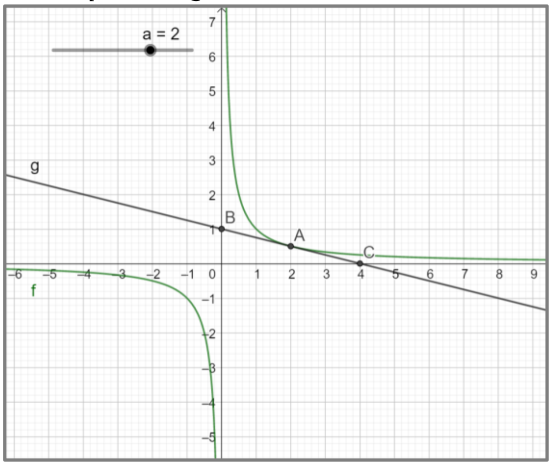
b. $y = 0$ pour $-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3} = 0$ soit $-\frac{4}{9}x = -\frac{4}{3}$.

Donc $x = \frac{4}{3} \times \frac{9}{4} = 3$ donc B(3 ; 0).

$x = 0$ donne $y = \frac{4}{3}$, donc $C\left(0\ ,\ \frac{4}{3}\right)$.

c. Le milieu de [BC] a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{6}\right)$, c'est-à-dire $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, donc A milieu de [BC].

2.a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. On conjecture que le résultat peut être généralisé.

3.a. $f'(a) = \frac{-1}{a^2}$ et $f(a) = \frac{1}{a}$. Une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a est :

$y = \frac{1}{a} + \frac{-1}{a^2}(x - a) = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}$.

b. $y = 0$ pour $-\frac{1}{a^2}x = \frac{-2}{a}$; ainsi $x = \frac{2}{a} \times a^2 = 2a$.

Pour $x = 0$, on obtient $y = \frac{2}{a}$.

Donc la courbe coupe les axes aux points de coordonnées $(2a\ ;\ 0)$ et $\left(0\ ,\ \frac{2}{a}\right)$.

c. Le milieu du segment formé par ces deux points a pour coordonnées $\left(a\ ,\ \frac{1}{a}\right)$ donc A.

114 **a.** $C(100) = 302{,}5$ et $C(101) = 306{,}51$

$C(101) - C(100) = 4{,}01$. Le coût engendré par la fabrication du 101e composant est de 401 €.

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def cout(q):
    return 0.01*q**2+2*q+2.5


def cout_marginal(q):
    return cout(q+1)-cout(q)
```

c. C est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $C'(q) = 0{,}02q + 2$, donc $C'(100) = 4$.
d. $C'(100) = 4$ tandis que $C_m(100) = 4{,}01$, d'où une erreur de 0,01 lorsqu'on approxime $C_m(100)$ par $C'(100)$.

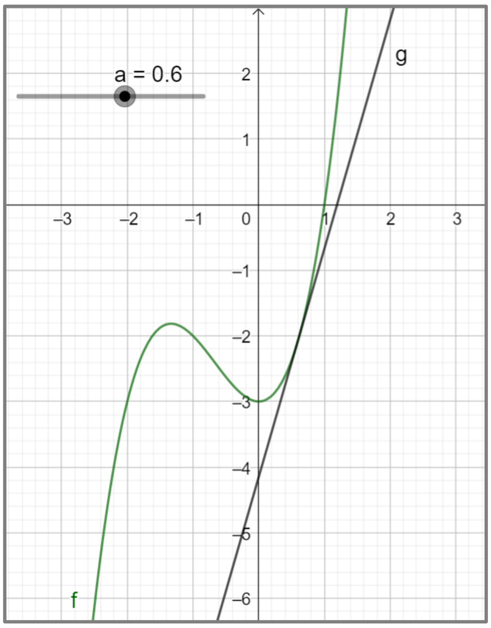
115 **a.** $f'(x) = 2x$ d'où $f'(a) = 2a$ et $f(a) = a^2$.

La tangente à la courbe au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a) = a^2 + 2a(x - a)$, soit $y = 2ax - a^2$.
b. On cherche a tel que :
$3 = 2a \times 2 - a^2 \Leftrightarrow 3 = -a^2 + 4a$
$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$
$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4 > 0$.
Il y a deux solutions :
$a_1 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2}{2} = 1$ et $a_2 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$.
Il y a donc deux tangentes passant par le point B(2 ; 3) ; elles ont pour équation :
$y = 2x - 1$ et $y = 6x - 9$.

116 $f(x) = \frac{a}{x} + b\sqrt{x}$, on a $f'(x) = -\frac{a}{x^2} + \frac{b}{2\sqrt{x}}$.
La courbe passe en A(1 ;5) et la tangente $\mathcal{T}$ coupe l'axe des abscisse en B(0 ;7).
$f'(1) = -a + \frac{b}{2}$ et $f(1) = a + b$.
Or $f(1) = 5$ donc $a + b = 5$.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de (AB) d'où :
$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-5}{0-1} = -2$; ainsi $-a + \frac{b}{2} = -2$.
En utilisant $a = -b + 5$, on obtient :
$b - 5 + \frac{b}{2} = -2$; d'où $\frac{3}{2}b = 3$. Donc $b = 2$; $a = 3$.

117 **a.** f est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. $f'(x) = 2ax + b$.
La courbe admet une tangente horizontale en 1, donc $f'(1) = 0$ ainsi $2a + b = 0$.
La tangente à la courbe en A(–1 ; 1) a une pente égale à 3, donc $f'(-1) = 2$, d'où : $-2a + b = 2$.
$2a + b = 0$ et $-2a + b = 2$, d'où $b = 1$ et $2a = -1$. Ainsi $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.

118 **1.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



On conjecture que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
2.a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 4x$.
La tangente à la courbe au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
$y = (a^3 + 2a^2 - 3) + (3a^2 + 4a)(x - a)$
$= (3a^2 + 4a)x - 3a^3 - 4a^2 + a^3 + 2a^2 - 3$
$= (3a^2 + 4a)x - 2a^3 - 2a^2 - 3$
b. On cherche a tel que $3a^2 + 4a = 0$.
$a(3a + 4) = 0$ donc $a = 0$ ou $a = -\frac{4}{3}$.
La conjecture est confirmée.

119 **a.** Le dénominateur s'annule seulement pour $x = 2$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
$f'(x) = \frac{a(x-2)-(ax+b)}{(x-2)^2} = \frac{ax-2a-ax-b}{(x-2)^2}$
$= \frac{-2a-b}{(x-2)^2}$.
b. La courbe coupe l'axe des ordonnées en A(0 ;1), donc $f(0) = 1$, ainsi $f(0) = \frac{b}{-2} = 1$.
Donc $b = -2$.
La courbe admet une tangente horizontale en A, donc $f'(0) = 0$, or $f'(0) = \frac{-2a-b}{4} = 0$.
Ainsi $2a = 2$ et donc $a = 1$.

120 **2.a.** Le dénominateur s'annule seulement pour $x = \frac{3}{2}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$.
$f'(x) = \frac{-2}{(2x-3)^2}$
b. $f'(1) = -2$ et $f(1) = -1$; d'où une équation de la tangente $\mathcal{T}$ est :
$y = -1 - 2(x - 1) = -2x + 1$.

c. $f(x) - (-2x + 1) = \frac{1}{2x-3} - (-2x + 1)$

$= \frac{1-(-2x+1)(2x-3)}{2x-3}$

$= \frac{1-(-4x^2+6x+2x-3)}{2x-3}$

$= \frac{1+4x^2-8x+3}{2x-3}$

$= \frac{4x^2-8x+4}{2x-3} = \frac{4(x-1)^2}{2x-3}$

d. $f(x) - (-2x + 1)$ est du signe de $\frac{4(x-1)^2}{2x-3}$ donc du signe de $2x - 3$.

x	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
Signe de $(2x - 3)$	$-$	0	$+$

e. $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{T}$ sur $\left]\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$ et en dessous de $\mathscr{T}$ sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right]$.

3. La droite $\mathscr{T}$ a pour coefficient directeur -2.
On cherche a tel que $f'(a) = -2$.

$\frac{-2}{(2a-3)^2} = -2 \Leftrightarrow (2a - 3)^2 = 1$
$\Leftrightarrow 2a - 3 = 1$ ou $2a - 3 = -1$
$\Leftrightarrow a = 2$ ou $a = 1$

Ainsi $\mathscr{T}$ est parallèle à la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

121 a. $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 6$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc sa courbe admet une tangente en chacun de ses points.

b. $f'(x) = 3x^2 - 3$.
On cherche x tel que $f'(x) = 4$.
$3x^2 - 3 = 4 \Leftrightarrow 3x^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{3}$.

On trouve $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ ou $-\sqrt{\frac{7}{3}}$.

c. On résout :
$f'(x) = \alpha \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = \alpha \Leftrightarrow x^2 = \frac{\alpha+3}{3}$.
Si $\alpha + 3 > 0$, alors il y a deux solutions, donc deux points.
Si $\alpha + 3 = 0$, alors il y a une seule solution, donc un seul point.
Si $\alpha + 3 < 0$, alors il n'y a aucune solution, donc aucun point.

122 1. a. $f(6) = 864$ malades le 6e jour.

b. On résout $f(t) > 0$ soit $t^2(-t + 30) > 0$.
Comme $t^2 > 0$, on a $-t + 30 > 0$ d'où $t < 30$.
Ainsi l'épidémie dure 29 jours.
2.a. En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = -3t^2 + 60t$.

b. Une équation de la droite $\mathscr{T}$ est :
$y = f(10) + f'(10)(x - 10)$.
Or $f'(10) = -300 + 600 = 300$
et $f(10) = -1\,000 + 3\,000 = 2\,000$.
Ainsi une équation est :
$y = 2\,000 + 300(x - 10)$ soit $y = 300x - 1\,000$.
3.a. $f(t) - (300t - 1\,000) = -t^3 + 30t^2 - 300t + 1\,000$
Or $-(t - 10)^3 = -(t^3 - 3t^2\times 10 + 3t \times 10^2 - 1\,000)$
$= -t^3 + 30t^2 - 300t + 1\,000$
Donc $f(t) - (300t - 1\,000) = -(t - 10)^3$.
b. $-(t - 10)^3$ est négatif sur $]10\ ;+\infty[$ et positif sur $]-\infty\ ;-10[$. La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{T}$ sur $]-\infty\ ;-10[$ et en dessous de $\mathscr{T}$ sur $]10\ ;+\infty[$.
c. L'augmentation du nombre de nouveaux malades s'accroit jusqu'au 10e jour, puis diminue jusqu'au 20e jour. Enfin, le nombre de cas diminue du 21e au 30e jour.

123 1.a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x + 7$.

Or f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 2$.

b. $g(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$
g' est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g''(x) = -\frac{-2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$.

c. h est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

h' est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et

$h''(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$.

2.a. L'affirmation est vraie.
Soit $k : x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme du second degré, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
$k'(x) = 2ax + b$, k' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$k''(x) = 2a$ est une fonction constante.
b. ● Soit $\ell : x \longmapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$ une fonction polynôme de degré 3.
$\ell'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, dérivable sur $\mathbb{R}$.
$\ell''(x) = 6ax + 2b$, donc la dérivée seconde est une fonction affine.
● On généralise avec une fonction polynôme de degré n :
$m : x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
avec $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ dans $\mathbb{R}$.

$m'(x) = n \times a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$

$m''(x) = n \times (n-1)\, a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)\, a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + 2\, a_2$
C'est une fonction polynôme de degré $n - 2$.

124 **1.** $g = u \times v$. En tant que produit de fonctions dérivables sur I, g est dérivable sur I, et $g' = u'v + uv'$.
De même, $f = g \times w$ est dérivable sur I en tant que produit de fonctions dérivables sur I.
De plus $f' = g'w + gw'$.
b. Ainsi $f = u \times v \times w$ est dérivable sur I.
$g' = u'v + u v'$
donc $f' = [u'v + uv']\, w + u\, v\, w'$
Ainsi $f' = u'v\, w + u\, v'\, w + u\, v\, w'$.
2. ● $x \longmapsto \frac{1}{x-3}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$,
$x \longmapsto \frac{1}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$.
De plus, $\left(\frac{1}{x-3}\right)' = \frac{-1}{(x-3)^2}$ et $\left(\frac{1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2}$
et $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.
Donc :
$f'(x) = \frac{-1}{(x-3)^2} \times \frac{1}{x-2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \times \frac{1}{(x-2)^2} \times \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)(x-2)(x-1)^2}$
$f'(x) = -\frac{(x-2)(x-1)+(x-3)(x-1)+(x-3)(x-2)}{(x-3)^2(x-2)^2(x-1)^2}$
● $x \longmapsto \frac{1}{x-7}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{7\}$.
$x \longmapsto x^2 + 5$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+} \setminus \{7\}$.
Or $\left(\frac{1}{x-7}\right)' = \frac{-1}{(x-7)^2}$ et $(x^2+5)' = 2x$
et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Donc :
$f'(x) = \frac{-1}{(x-7)^2} \times (x^2+5) \times \sqrt{x} + \frac{1}{x-7} \times 2x \times \sqrt{x} + \frac{1}{x-7} \times (x^2+5) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

125 **1.** La tangente $\mathcal{T}$ a pour équation :
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
Pour $x = a + h$, on a :
$y = f(a) + f'(a)(a + h - a) = f'(a) \times h + f(a)$.
Donc $N(a + h ; f'(a) \times h + f(a))$.
Lorsque h tend vers 0, l'ordonnée du point N tend vers $f(a)$.
2. On part de l'approximation :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \approx f'(a)$,
on obtient que $f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$
3.a. Pour $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$, on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
L'approximation affine obtenue est :
$\sqrt{4+h} \approx \sqrt{4} + \frac{h}{4}$ soit $\sqrt{4+h} \approx 2 + \frac{h}{4}$.
b. $\sqrt{4{,}01} \approx \sqrt{4+0{,}01} \approx 2 + \frac{0{,}01}{4}$ donc 2,0025.
$\sqrt{3{,}996} \approx \sqrt{4-0{,}004} \approx 2 - \frac{0{,}004}{4}$ donc 1,999.
4. Pour $f(x) = \frac{1}{x}$ on a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
D'où, $\frac{1}{3{,}01} \approx \frac{1}{3} + 0{,}01 \times \frac{-1}{3^2}$ donc $\frac{1}{3{,}01} \approx \frac{2{,}99}{9}$.
De même, $\frac{1}{2{,}993} \approx \frac{1}{3} - 0{,}007 \times \frac{-1}{3^2}$,
donc $\frac{1}{2{,}993} \approx \frac{3{,}007}{9}$
5. Le coefficient multiplicateur correspondant à cette augmentation est égal à $1 + \frac{0{,}5}{100}$.
Pour deux journées consécutives, le coefficient multiplicateur est égal à $\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^2$.
En reprenant les approximations précédentes :
$\left(1 + \frac{0{,}5}{100}\right)^2 \approx 1^2 + \frac{0{,}5}{100} \times 2$, d'où 1,01. Ce qui donne approximativement une augmentation de 1%.

126 **1.a.** Pour chacune des courbes, les équations des tangentes au point d'abscisse a sont :
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$ et $y = g(a) + g'(a)(x - a)$.
Par identification, les deux tangentes sont confondues si et seulement si $f(a) = g(a)$ et $f'(a) = g'(a)$.
b. Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 4x + 1$ et $g'(x) = -2x + 6$.
On cherche a tel que $2a^2 + 1 = -a^2 + 6a - 2$ et $4a = -2a + 6$. La 2e équation donne $a = 1$, solution vérifiée par la 1re équation, donc $a = 1$.
Ainsi les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune au point d'abscisse 1.
2.a. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en a et la tangente à $\mathcal{C}_g$ en b ont pour équations respectives :
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$ et $y = g(b) + g'(b)(x - b)$.
Les deux équations sont des équations d'une même droite si et seulement si le couple $(a ; b)$ est un couple solution du système :
$\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ f(a) - af'(a) = g(b) - bg'(b) \end{cases}$.
On a identifié les pentes et les ordonnées à l'origine.
D'où $\begin{cases} f'(a) = g'(b) \\ g(b) - f(a) = f'(a)(b - a) \end{cases}$.

b. Les fonctions f et g sont dérivables sur ℝ et on a $f'(x) = 4x$ et $g'(x) = -2x + 6$.
On cherche donc un couple $(a ; b)$ tel que :

$$\begin{cases} 4a = -2b + 6 \\ 4a(b-a) = -b^2 + 6b - 2 - 2a^2 - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 - 2a \\ 12a - 12a^2 = -6a^2 + 6 \end{cases}.$$

La 2^e équation est équivalente à :
$6a^2 - 12a + 6 = 0$ c'est-à-dire $a^2 - 2a + 1 = 0$,
d'où $(a - 1)^2 = 0$ et ainsi $a = 1$.
Avec la 1re équation, on obtient $b = 3 - 2 = 1$.
3. On a $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = = -\frac{1}{x^2}$.
On cherche donc un couple $(a ; b)$ tel que :

$$\begin{cases} 2a = -\frac{1}{b^2} \\ 2a(b-a) = \frac{1}{b} - a^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2b^2} \\ -\frac{1}{b^2}\left(b + \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{b} - \frac{1}{4b^4} \end{cases}$$

La 2^e équation est équivalente à :

$$b + \frac{1}{2b^2} = -b + \frac{1}{4b^2}$$

$\Leftrightarrow 2b = -\frac{1}{4b^2}$ soit $b^3 = -\frac{1}{8}$.
Ainsi $b = -\frac{1}{2}$. Et donc $a = -2$.
Les deux courbes admettent une tangente commune. Son équation est :
$y = 4 - 4(x + 2)$ c'est-à-dire $y = -4x - 4$.
$y = -2 - 4(x + \frac{1}{2})$ c'est-à-dire $y = -4x - 4$.
Les deux tangentes ont bien la même équation.

127 **1.** $C(0) = 100$, il y a des coûts fixes quelque soit la quantité produite.
2. Le coût moyen pour 8 tonnes de sucre produit est $\frac{C(8)}{8} = \frac{420}{8} = 52{,}5$ €.
3. $C_m(9) = C'(9)$. Or C est dérivable sur $[0 ; 10]$ et $C'(q) = 3q^2 - 12q + 24$.
Ainsi $C_m(9) = 159$. Le coût marginal pour 9 tonnes produites est de 159 €.
4.a. $\frac{C(q)}{q} = C'(q)$

$$\Leftrightarrow \frac{q^3 - 6q^2 + 24q + 100}{q} = 3q^2 - 12q + 24$$

$$\Leftrightarrow 2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$$

b. On développe :
$2(q-5)(q^2 + 2q + 10) = 2q^3 - 6q^2 - 100$.
Donc $2q^3 - 6q^2 - 100 = 0$ est équivalente à $2(q-5)(q^2 + 2q + 10) = 0$.
$q - 5 = 0$ ou $q^2 + 2q + 10 = 0$.
$q = 5$ ou $\Delta = -36 < 0$; pas de solution.
Donc l'équation admet une unique solution $q = 5$.
c. Ainsi le coût moyen est égal au coût marginal pour 5 tonnes de sucre produit.

128 **1.** On a $d(3) = 96$ m et $d(0{,}5) = 19{,}2$ m. La distance parcourue est $d(3) - d(0{,}5) = 76{,}8$ m.
La vitesse moyenne est $\frac{76{,}8}{2{,}5} = 30{,}72$ m/s.
2.a. $V(h) = \frac{d(0{,}5+h) - d(0{,}5)}{h}$.
Or $d(0{,}5 + h) = \frac{480(0{,}5+h)}{(0{,}5+h)+12} = \frac{480h+240}{12{,}5+h}$.

Ainsi $V(h) = \frac{\frac{480h+240}{12{,}5+h} - 19{,}2}{h} = \frac{460{,}8}{12{,}5+h}$
b. $V(h)$ est la vitesse moyenne de la voiture entre 0,5 et $0{,}5 + h$.
c. En faisant tendre h vers 0 dans l'expression de $V(h)$, on obtient : $\frac{460{,}8}{12{,}5} = 36{,}864$ m·s^{-1}.
Ainsi la fonction d est dérivable en 0,5 et le nombre dérivé de d en 0, 5 est égal à 36,864. Donc la vitesse instantanée à l'instant 0,5 est 36,864 ms^{-1} = 132,7104 km/h.
3. La vitesse est supérieure à 132 km/h, il y a bien excès de vitesse.

129 **1.a.** L'augmentation est de 10 €, donc il y a une perte de 200 couverts. Il peut espérer servir 200 couverts, la recette est :
$60 \times 200 = 12\ 000$ €.
b. et **c.** Pour une augmentation de $(p - 50)$ €, il y a une perte de $20(p - 50)$ couverts.
Le nombre de couverts :
$400 - 20(p - 50) = 1400 - 20p$.
La recette est égale à $p(1\ 400 - 20p)$.
Ainsi $f(p) = 1\ 400 - 20p$.

2. f est dérivable sur ℝ, donc f est dérivable en p. Ainsi le taux de variation de f entre p et $p + h$ est : $\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \approx f'(p)$ lorsque h tend vers 0.
On a alors :

$$e(p) = \frac{\frac{f(p+h) - f(p)}{f(p)}}{\frac{(p+h) - p}{p}} = \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \times \frac{p}{f(p)}$$

$$\approx f'(p) \times \frac{p}{f(p)} = \frac{p \times f'(p)}{f(p)}.$$

b. $f(p) = 1\ 400 - 20p$ donc $f'(p) = -20$
donc $e(p) = \frac{-20p}{1\ 400 - 20p} = \frac{20p}{20p - 1\ 400}$

c. On sait que e(p) = –6, donc $\frac{20p}{20p-1400} = -6$,
donc $20p = -6(20p - 1\,400)$,
soit $140p = 8\,400$ d'où $p = \frac{8\,400}{140} = 60$.
Donc l'élasticité est égale à –6 lorsque le prix est de 60 €.

Donc lorsque le prix du menu passe de 60 € à 60,60 € (augmentation de 1%), il y aura une baisse de 6 % du nombre de couverts, soit $400 \times 0{,}94 = 376$ couverts.

Recherches mathématiques

p. 134 du manuel

130 **a.** On a $f'(x) = \frac{3(x-2)-(3x-1)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$ et $g'(x) = \frac{-5}{(x-1)^2}$. On constate que $f'(x) = g'(x)$

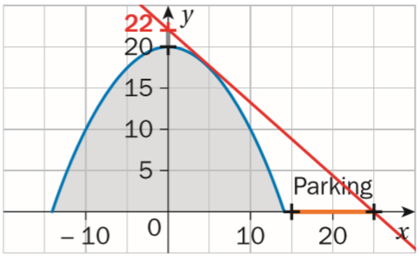
b. Toutes les fonctions $h : x \longmapsto f(x) + a$ avec a nombre réel quelconque ont pour dérivée f'.
En effet, $f'(x) = g'(x)$.
On peut écrire :
$h(x) = \frac{3x-1}{x-2} + \frac{a(x-2)}{(x-2)} = \frac{(3+a)x-(2a+1)}{x-2}$.
Réciproquement, si h est une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ vérifiant $f' = h'$. Alors $(h - f)' = 0$, donc $h - f$ est une fonction constante.
Ainsi $h : x \longmapsto f(x) + a$ avec a nombre réel.

131 On pose $f(x) = \frac{2x}{1-x}$, le dénominateur s'annule seulement pour $x = 1$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Et $f'(x) = 2\frac{(1-x)-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse a est : $y = \frac{2a}{1-a} + \frac{2}{(1-a)^2}(x - a)$.
On cherche a différent de 1 tel que :
$\frac{2a}{1-a} + \frac{2}{(1-a)^2}(-2 - a) = -1$.

$$\frac{2a(1-a) + 2(-2-a) + (1-a)^2}{1-a} = 0$$

$\frac{-a^2-2a-3}{1-a} = 0$ soit $a^2 + 2a + 3 = 0$.
L'équation a un discriminant strictement négatif donc elle n'a pas de solution.
Ainsi, il n'existe pas de tangente à C passant le point de coordonnées (–2 ; –1).

132 Soit A le point où est installée la webcam.
On a A(0 ; 22).
B et C les extrémités du parking. On a B(15 ; 0) et C(25 ; 0).
Cherchons l'équation de la tangente à la parabole passant par le point A.
$f(x) = -0{,}1x^2 + 20$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -0{,}2x$.
La tangente $\mathcal{T}$ à la parabole au point d'abscisse a a pour équation : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$,
soit $y = -0{,}2a(x - a) - 0{,}1a^2 + 20$.
A appartient à $\mathcal{T}$ donc : $22 = 0{,}2a^2 - 0{,}1a^2 + 20$.
$0{,}1a^2 = 2$ donc, en choisissant la solution positive, on obtient $a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Cette tangente à la parabole passant par A a pour équation :
$y = -0{,}2 \times 2\sqrt{5}(x - 2\sqrt{5}) - 0{,}1 \times 20 + 20$
$y = -0{,}4 \times \sqrt{5}\, x + 22$
Cette droite coupe-t-elle le segment [BC] ?
Pour $y = 0$, on obtient $x = \frac{22}{0{,}4\sqrt{5}} \approx 24{,}6$.
L'abscisse de B est 15 et l'abscisse de C est 25.
Ainsi la webcam ne pourra attendre que la partie du parking comprise entre les abscisses 24,6 et 25. Elle ne pourra donc pas assurer la surveillance du parking en entier.



133 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
#Le paramètre p est une liste des coefficients
#du polynome rangés
#selon les puissances décroissantes
#Par exemple pour P(x) = 4x^3+3x²+7x-5,
#on rentre p=[4,3,7,-5]

def derive_polynome(p):

#n représente le degré du polynome
    n=len(p)-1
#La liste derive contiendra la liste des
#coefficients du polynome
#dérivé rangés selon les puissances décroissantes
    derive=[]
    for i in range(0,n):
        derive.append((n-i)*p[i])
#La fonction ressort la liste derive,
#ainsi que le degré du polynôme dérivé
    return derive,n-1
```

134 On a $f(x) = ax^2 + bx + c$,
$f'(x) = 2ax + b$
Toute tangente à une parabole a un unique point commun à cette parabole.
Donc l'équation $4x - 4 = ax^2 + bx + c$ admet une unique solution.
Elle est équivalente à l'équation :
$ax^2 + (b-4)x + c + 4 = 0$.
Pour avoir une unique solution, le discriminant doit être égal à 0 :
$\Delta = (b-4)^2 - 4a(c+4) = 0$.
De même, en utilisant les deux autres équations de tangente, on obtient les équations :
$(b-2)^2 - 4a(c+3) = 0$
et $(b+2)^2 - 4a(c+7) = 0$.
On est donc ramené à résoudre le système :
$$\begin{cases} b^2 - 8b + 16 - 4ac - 16a = 0 \\ b^2 - 4b + 4 - 4ac - 12a = 0 \\ b^2 + 4b + 4 - 4ac - 28a = 0 \end{cases}$$
En désignant respectivement chacune des équations de ce système par E_1, E_2 et E_3 :
$E_2 - E_3$ donne : $-8b + 16a = 0$
$E_1 - E_2$ donne : $-4b + 12 - 4a = 0$
$E_1 - E_3$ donne : $-12b + 12 + 12a = 0$
On obtient: $\begin{cases} -b + 2a = 0 \\ b + a = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$
D'où $a = 1, b = 2$ et $c = -3$.
On peut vérifier que réciproquement ces valeurs pour *a*, *b* et *c* conviennent.
Ainsi, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

135 Pour $\mathscr{P}_1$: $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ et
$f_1'(x) = 2ax + b$.
On sait que f_1 (1) = 0,5 et f_1'(0) = 0, donc :
$\begin{cases} a + b + c = 0{,}5 \\ b = 0 \end{cases}$
d'où l'on tire : $a + c = 0{,}5$.
De $f_1(0) = 1$, on tire $c = 1$, donc :
$a = 0{,}5 - c = -0{,}5$.
Ainsi, $\boldsymbol{f_1(x) = -0{,}5x^2 + 1}$.

Pour $\mathscr{P}_2$: $f_2(x) = dx^2 + ex + f$ et
$f_2'(x) = 2dx + e$.
On sait que f_2 (1) = 0,5 et f_2' (2) = 0.
On obtient : $\begin{cases} d + e + f = 0{,}5 \\ 4d + e = 0 \end{cases}$.
De $f_2(2) = 0$, on a $4d + 2e + f = 0$,
or $4d + e = 0$, donc $e + f = 0$, et $d = 0{,}5$.
On remplace dans la 3^e^ équation du système, on obtient : $e = -2$.
De plus : $f = -e = 2$.
Ainsi, $\boldsymbol{f_2(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2}$.

On peut vérifier que la contrainte est respectée : comme $f_1'(x) = -x$ et $f_2'(x) = x - 2$ on a :
$f_1'(1) = -1 = f_2'(1)$.
La tangente aux deux sections de parabole au point R est bien commune.

CHAPITRE 5

Dérivation : applications à l'étude de fonctions

► *Les exercices* **1** *à* **7** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel* (*p. 368*).

Activités

p. 138 et 139 du manuel

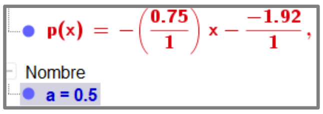
1 Du signe du nombre dérivé au sens de variation

1. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

b.

x	-3		-1		1		3
Variations de f		↗		↘		↗	

2. a.



b.

a	-2	-1	0	$0{,}5$	2
$f'(a)$	3	0	-1	$-\frac{3}{4}$	3

3. Conjectures :

Si $f'(x) \geqslant 0$ sur un intervalle I alors la fonction f est croissante sur I.

Si $f'(x) \leqslant 0$ sur un intervalle I alors la fonction f est décroissante sur I.

2 Lien entre courbes représentatives de f et de f'

1.a.et b.

x	0		1		3		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘		↗	

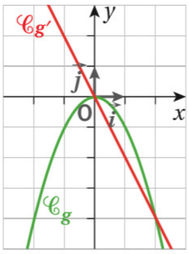
c. Conjectures :

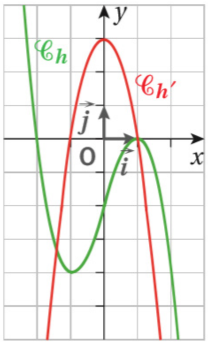
Si pour tout réel x de [0 ;1], $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est croissante sur [0 ;1].

Si pour tout réel x de [1 ;3], $f'(x) \leqslant 0$ alors la fonction f est décroissante sur [1 ;3].

Si pour tout réel x de [3 ;4], $f'(x) \geqslant 0$ alors la fonction f est croissante sur [3 ;4].

2. a.



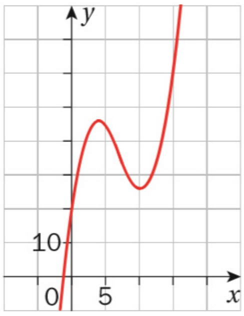


b. Oui, la conjecture précédente semble confirmée.

3 Optimisations

Situation 1 : Tempérage du chocolat noir

1.



Le maximum de cette fonction sur [0 ; 12,5] semble être environ égal à 50 °C.

2. a. et **b.** $\forall t \in [0\,;12{,}5], f'(t) = 0{,}42t^2 - 6{,}3t + 18{,}48 = 0{,}42(t-4)(t-11)$.
Or *f'* est une fonction polynôme de degré 2 avec $a = 0{,}42$, $a > 0$, on peut donc en déduire le signe de $f'(t)$.

t	0		4		11		12,5
Signe de *f'*(*t*)		+	0	−	0	+	
Variations de *f*	18	↗	50,48	↘	26,47	↗	30,25

c. La température maximale lors du tempérage est de 50,48 °C, atteinte à l'instant $t = 4$ minutes. Ces résultats sont cohérents avec les précédents.
d. Conjecture : Selon ce modèle, il semblerait que si la dérivée s'annule pour une valeur de t en changeant de signe, on obtienne un maximum ou un minimum sur un intervalle donné.

Situation 2 : L'enclos

1. $xy = 1\,250$; $g(x) = 2x + y = 2x + \frac{1250}{x} = \frac{2x^2+1250}{x}$.

a. $g(x) - 100 = \frac{2x^2+1250-100x}{x} = \frac{2(x-25)^2}{x}$.

Or, $(x-25)^2 \geqslant 0$ car un carré est toujours positif et $x > 0$ car $x \in [0\,;1\,250]$.

Donc $g(x) - 100 \geqslant 0$. Donc la longueur minimale de grillage nécessaire est de 100 m.

b. À l'aide de la calculatrice on obtient : $x = 25$ m et $y = 50$ m pour $g(x) = 100$.

2.a. $\forall x \in [0; 1250]\,, g'(x) = \frac{2x^2-1250}{x^2} = \frac{2(x^2-625)}{x^2} = \frac{2(x-25)(x+25)}{x^2}$.

x	1		25		1 250
Signe de $g'(x)$		−	0	+	

b. La dérivée de g s'annule sur $[0\,;1\,250]$en changeant de signe pour $x = 25$.

Conjecture : Lorsque la dérivée de g s'annule sur $[0\,;1\,250]$ en changeant de signe pour $x = 25$, il s'agit d'un minimum pour la fonction g car celle-ci est décroissante sur [1 ; 25] puis croissante sur [25 ; 1 250].

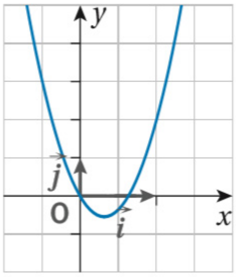
SAVOIR-FAIRE 1

Étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée

8 **a.** $f(x) = 5x^2 - 3x$ et

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 10x - 3$; la dérivée est une fonction affine qui s'annule pour $x = 0{,}3$.

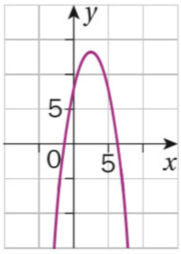
x	$-\infty$		0,3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘	$-0{,}45$	↗	



b. $g(x) = -x^2 + 5x + 7$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x + 5$; la dérivée est une fonction affine qui s'annule pour $x = 2{,}5$.

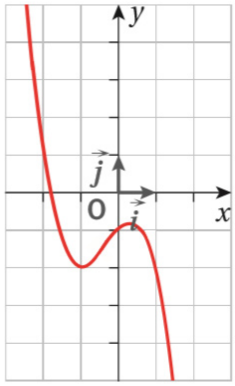
x	$-\infty$		2,5		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		↗	13,25	↘	



c. $h(x) = -x^3 - x^2 + x - 1$ et

$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = -3x^2 - 2x + 1$; la dérivée est une fonction polynôme de degré 2 avec $\Delta = 16$ et $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de h		↘	-2	↗	$-0{,}815$	↘	



9 $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$;

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $(x-1)^2 > 0$,

étudions le signe du polynôme de degré 2 :

$x^2 - 2x - 3$.

$\Delta = 16$ et $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	-2	↘	‖	↘	6	↗	

SAVOIR-FAIRE 2

Rechercher un extremum

10 Le périmètre du rectangle est égal à 26 cm, soit $2(x + y) = 26$, d'où $y = 13 - x$.

On peut modéliser l'aire de ce rectangle par la fonction f définie sur $]0 ; 13[$ par $f : x \longmapsto x(13 - x)$. Ainsi : $f(x) = -x^2 + 13x$ et $\forall x \in]0 ; 13[, f'(x) = -2x + 13$.

La dérivée est une fonction affine qui s'annule pour $x = 6{,}5$.

x	0		6,5		13
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖	↗	42,25	↘	

L'aire maximale de ce rectangle de périmètre 26 cm est 42,25 cm², obtenue pour $x = 6{,}5$ cm.

11 $f(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 28t$, f est définie sur [1 ;20] et $\forall t \in [1\,;20]$, $f'(x) = -0{,}5t^2 + 5t + 28$.
La dérivée est une fonction polynôme de degré 2 avec $\Delta = 81$ et $t_1 = -4$, $t_2 = 14$.

t	1		14		20
Signe de $f'(t)$		+	0	−	
Variations de f	↗		424,67		↘

Le maximum de cette fonction qui modélise l'épidémie est atteint vaut 424,67 pour $t = 14$.
On peut donc en déduire que le pic de l'épidémie est atteint au bout de 14 jours et le nombre de cas correspondant est d'environ 425.

► *Les exercices* **12** *à* **17** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 146 du manuel

18 **Stratégie 1** : D'après les courbes représentatives des fonctions, on observe que sont représentées en **a.** et **c.** deux fonctions croissantes sur [–1 ; 1].
Stratégie 3 : On observe les valeurs qui annulent la dérivée de f, g et h :
$\forall x \in [-1\,;1]$, $f'(x) = 6x^2 + 1$.
Or, $\forall x \in [-1\,;1]$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur [–1 ; 1].
$\forall x \in [-1\,;1]$,
$g'(x) = 12x^2 - 1 = (\sqrt{12}x - 1)(\sqrt{12}x + 1)$
$=(2\sqrt{3}x - 1)(2\sqrt{3}x + 1)$.
$g'(x)$ s'annule pour $x_1 = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$ et $x_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le signe de $g'(x)$ est celui d'un polynôme de degré 2 :
$\forall x \in [-1\,;-\frac{1}{2\sqrt{3}}]$, $g'(x) > 0$, donc f est croissante sur $[-1\,;-\frac{1}{2\sqrt{3}}]$;
$\forall x \in [-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}}]$, $g'(x) < 0$, donc f est décroissante sur $[-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}}]$;
$\forall x \in [\frac{1}{2\sqrt{3}};1]$, $g'(x) > 0$, donc g est croissante sur $[\frac{1}{2\sqrt{3}};1]$.
Ainsi, on peut associer la courbe **b.** à la fonction g.
$\forall x \in [-1\,;1]$, $h'(x) = 9x^2$.
Or, $\forall x \in [-1\,;1]$, $h'(x) \geqslant 0$, donc h est croissante sur [–1 ; 1].
Donc les fonctions f et h correspondent aux courbes **a.** ou **c.**
Stratégie 2 : En calculant des valeurs particulières on obtient $f(0{,}5) = 1{,}75$ et $h(0{,}5) = 1{,}375$.
À l'aide de ces valeurs et en observant les courbes **a.** et **c.**, on peut en déduire que la courbe **a.** est associée à la fonction h et la courbe **c.** à la fonction f.

19 **a.** En utilisant la stratégie 1 puis la stratégie 2 on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
$= 4x(x-1)(x+1)$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		–1		0		1		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

b. En utilisant la stratégie 1 et la stratégie 2 on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$.
Or $(x^2+1)^2 > 0$ donc le signe de $f_2'(x)$ ne dépend que du signe de $-x^2 + 4x + 1$, polynôme de degré 2 avec $\Delta = 12$ et $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$2-\sqrt{3}$		$2+\sqrt{3}$		$+\infty$
Signe de $f_2'(x)$		−	0	+	0	−	

c. En utilisant la stratégie 2 on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3'(x) = x^2 - 3x + 2$. Le signe de $f_3'(x)$ est celui d'un polynôme de degré 2 avec $\Delta = 1$ et $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
Signe de $f_3'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d. En utilisant la stratégie 3 on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_4'(x) = -10x + 1{,}5$. Le signe de $f_4'(x)$ est celui d'une fonction affine qui s'annule pour $x = 0{,}15$ avec $a < 0$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$0{,}15$		$+\infty$
Signe de $f_4'(x)$		$+$	0	$-$	

e. En utilisant la stratégie 1 et la stratégie 3 on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_5'(x) = \frac{\sqrt{x}(1-3x)}{2x}$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $2x > 0$, donc le signe de $f_5'(x)$ est celui de la fonction affine : $x \longmapsto (1-3x)$ qui s'annule pour $x = \frac{1}{3}$ avec $a < 0$.
D'où le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f_5'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

f. En utilisant la stratégie 1 et la stratégie 2 ou la stratégie 3 on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_6'(x) = \frac{x^2-16}{x^2} = \frac{(x-4)(x+4)}{x^2}$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$ donc le signe de $f_6'(x)$ est celui d'un polynôme de degré 2 avec $x_1 = -4$, $x_2 = 4$.
D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-4		0		$0{,}4$		$+\infty$
Signe de $f_6'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

20 a. f étant impaire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O du repère. On peut donc en déduire ses variations sur I, puis le signe de $f'(x)$.

x	-4		$-0{,}5$		0		$0{,}5$		4
Variations de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	
Signe de $f_6'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

b. g étant paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy) du repère. On peut donc en déduire ses variations sur I, puis le signe de $g'(x)$.

x	-4		$-0{,}7$		0		$0{,}7$		1
Variations de g	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\approx \frac{3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\approx \frac{3}{4}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

21 a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 3x^2 + 1$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) > 0$, donc f_1 est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_2'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_2'(x) > 0$, donc f_2 est croissante sur $\mathbb{R}^*$.

c. $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f_3'(x) = \frac{-(2+3\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.
$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f_3'(x) < 0$, donc f_3 est décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

d. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_4'(x) = \frac{-(3x^4+1)}{x^2}$.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_4'(x) < 0$, donc f_4 est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

22 a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 4x^2(x-1)$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $4x^2 \geqslant 0$, donc le signe de $f_1'(x)$ est celui de la fonction affine : $x \longmapsto (x-1)$ qui s'annule pour $x = 1$ avec $a > 0$.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_1		$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	

b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)^2 > 0$, donc le signe de $f_2'(x)$ est celui du polynôme de degré 2 :
$(1-x)(1+x)$.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f_2		$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

c. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}, f_3'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.
Or, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $(x+1)^2 > 0$, donc le signe de $f_3'(x)$ est celui du polynôme de degré 2 : $x(x+2)$.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
Signe de $f_3'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
Variations de f_3		↗	-3	↘	‖	↘	1	↗	

d. $\forall x \in]0;+\infty[, f_4'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$.
Or, $\forall x \in]0;+\infty[$, $(1+\sqrt{x})^2 > 0$ et $-\frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ donc le signe de $f_4'(x)$ est négatif. Donc f_4 est décroissante sur $]0;+\infty[$.

e. $\forall x \in \mathbb{R}, f_5'(x) = 3x^2 - 2x - 8$.
La dérivée est une fonction polynôme de degré 2 avec $\Delta = 100$ et $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = 2$.
D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
Signe de $f_5'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f_5		↗	18,519	↘	0	↗	

► *Les exercices* **23** *à* **30** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 148 à 151 du manuel

OBJECTIF 1

Étudier le comportement d'une fonction à l'aide de sa dérivée

31

x	-3		-1		3		4
Variations de f	-24	↗	8	↘	-24	↗	-17

32 **a.** Faux par exemple $f(-4) = -7$.

b. Vrai.
c. Faux, f est croissante sur cet intervalle donc $f'(x) \geqslant 0$.
d. Vrai, car f est décroissante sur cet intervalle.

33 **1. b.**

2. a. $x \in [-2,5 ; 4]$.
b. $x \in [-5 ; -2,5] \cup [4 ;8]$.

34 **a.** La courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à une parabole et $\mathscr{C}_2$ une droite, donc $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentant f et $\mathscr{C}_2$ celle de sa dérivée.

b. $\mathscr{C}_1$ est celle de f' car lorsque $\mathscr{C}_1$ est sous l'axe des abscisses, on voit que $\mathscr{C}_2$ correspond à une fonction décroissante.
c. $\mathscr{C}_1$ est celle de la dérivée car $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de l'axe des abscisses et $\mathscr{C}_2$ correspond à une fonction croissante.

35 **a.** $\forall x \in$ I, $f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)$. La dérivée est une fonction polynôme de degré 2 avec $\Delta = 16$ et $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. D'où :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗		↘	0	↗	

b. $\forall x \in$ I, $g'(x) = \frac{3(x+2)-(3x-1)}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$.
D'où :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Variations de g		↗	‖	↗	

c. $\forall x \in$ I, $h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de h		↗	‖	↗	

d. $\forall x \in$ I, $k'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}} < 0$, donc k est décroissante sur $]0\,;+\infty[$.

e. $\forall x \in$ I, $l'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1{,}5\sqrt{x} > 0$, donc l est croissante sur $]0\,;+\infty[$.

36 **a.** $\forall x \in$ I, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$. La dérivée est une fonction polynôme de degré 2 avec $\Delta = -12$ donc $f'(x)$ conserve un signe constant positif, et f croissante sur $\mathbb{R}$.

b. $\forall x \in$ I, $g'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$. D'où :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
Variations de g		↗	‖	↗	

c. $\forall x \in$ I, $h'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$. Or, $4x^2 \geqslant 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $x - 1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h		↘		↗	

d. On calcule $k'(x) = \frac{-10x}{(x^2+1)^2}$ dont le signe dépend de celui de $-10x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $k'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de k		↗		↘	

e. On calcule $l'(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
On calcule le discriminant qui est égale à 24, les solutions sont : $\frac{6-2\sqrt{6}}{6}$ et $\frac{6+2\sqrt{6}}{6}$.

x	$-\infty$		$\frac{6-2\sqrt{6}}{6}$		$\frac{6+2\sqrt{6}}{6}$		$+\infty$
Signe de $l'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de l		↗		↘		↗	

37 **a.** Vrai.
b. Faux, car $f(0) > f(2)$.
c. On ne peut pas comparer.
d. Vrai, par lecture.
e. Vrai.
f. Faux, car $f(-1) = 5$.
g. Faux, $f'(x) \geqslant 0$.
h. Faux, $f'(x) \geqslant 0$.

38 **a.** On calcule :

$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-x+2)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4x = x(x-4)$.

b. et c.

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘	‖	↘		↗	

39 On a :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Variations de f		↗		↘		↗	
Signe de $f_6'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc cela correspond au signe de la courbe $\mathscr{C}_2$.

40 **a.** On calcule $f'(x) = 2ax + b$.

On sait que $f'(x) = 0$ pour $x = -\frac{b}{2a}$.

- Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	

- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

b. Ainsi, si $a < 0$ retourner « f croissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$ et décroissante sur $[\frac{-b}{2a}; \infty[$»

si $a > 0$ retourner « f décroissante sur $]-\infty; \frac{-b}{2a}]$ et croissante sur $[\frac{-b}{2a}; \infty[$»

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def monotonie(a,b):
    if a>0:
        return "f est décroissante sur ]-inf;",-b/(2*a),"] et croissante sur [",-b/(2*a),";inf[."
    else:
        return "f est croissante sur ]-inf;",-b/(2*a),"] et décroissante sur [",-b/(2*a),";inf[."
```

41 **1. a.** Oui, car f est croissante.

b. Cette proposition est fausse car f peut ne pas être monotone.

2. a. Faux. **b.** Vrai.

42 **a.** C' is negative in [20;50], positive in [50;60] and equal to zero at 35.

b. C is increasing in [50; 60], decreasing in [20;50].

c. The cost of production reaches its minimum for 35 helmets.

43 **a.** On a $f(10) = 62{,}5$, donc objectif non atteint.

b. On détermine $f'(x) = 75 \times \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{150}{(x+2)^2}$.

On vérifie que $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $[0 ; 30]$.

c. Comme $f(15) \approx 66{,}17$ et comme f est croissante, et $f(30) \approx 70{,}31$, alors nécessairement l'objectif sera atteint (on utilise la « continuité » de la fonction).

d. Avec la calculatrice : $f(23) \approx 69$, $f(24) \approx 69{,}23$ et $f(28) \approx 70$, il faudra donc 13 semaines supplémentaires.

Objectif 2

Modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation

44 **1.** Tableau complété :

x	-2		0		4		6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-2	↗	30	↘	-2	↗	30

2. b. On a $x = 0$

3. a. Vrai. **b.** Faux, car $f(-2) = -2$.

4. $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$.

45 **1.** Pour le **d.**, $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

2. On étudie le signe de $3x^2 + 2x - 5$.

Le discriminant est égal à 64, les deux racines sont : $\frac{-5}{3}$ et 1.

x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		6
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘	0	↗	30

Donc **a.** et **b.**

3. On calcule $f(-3) = 0$ donc **c.**

46 Les variations :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘		↗		↘	

Le minimum est en $x = 10$ et le maximum en $x = 60$.

47 **1.** Par lecture graphique : $x \approx -0{,}125$.

2. a. et **b.** On calcule $f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

On résout $4\sqrt{x} - 1 = 0$, et $x = \frac{1}{16}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{16}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

On calcule $f\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{8}$, ce qui confirme la conjecture du **1.**

48 **1.** Il semble que :

x	-2		$-0{,}2$		$0{,}5$		$0{,}8$		2
Variations de f		↘		↗		↘		↗	

Et le minimum pour $x \approx 0{,}8$.

2. a., **b.** et **c.**

On calcule $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = x^2(4x - 3)$ dont le signe est celui de $4x - 3$.

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

Finalement, les variations sont à revoir, et le minimum est précisé : il est atteint pour $x = \frac{3}{4}$.

49 **1.** Il semble que le minimum soit atteint en -1, le maximum en 1 et leurs valeurs respectives sont $-0{,}6$ et $0{,}6$.

2. a. et **b.** On calcule $f'(x) = \frac{(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f		↘		↗		↘	

On calcule $f(-1) = -0{,}5$ et $f(1) = 0{,}5$.
On a pu préciser les conjectures du **1.**

50 **a.** Oui, la valeur absolue en 0.

b. Oui, la racine carrée a son minimum en 0, et sa dérivée ne s'annule pas en 0.

51 **a.** Faux, car $B(6) = -254$ donc non rentable.

b. Vrai car $B'(x) = 120x^2 - 1\,122x + 1\,917$.
c. Vrai, B' est un trinôme du second degré avec des coefficients non nuls, donc au maximum $B'(x)$ s'annule deux fois.
d. Faux, le discriminant correspondant à $B'(x)$ est 338 724 et les deux solutions sont 2,25 et 7,1.
Le maximum correspond à $x = 2{,}25$, c'est-à-dire 225 montres.

52 **a.** Il faut **b.** Il suffit

53 **a.** $B'(x) = -3x^2 + 60x - 153$.

Le discriminant est 1 764 ; les deux solutions sont : 3 et 17.
b.

x	0		3		17		25
Signe de $B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de B	-100	↘	-316	↗	1 056	↘	-800

c. Il faut donc produire 17 vélos électriques chaque jour pour un bénéfice de 1 056€.

54 **a.** Environ 40 000 bactéries.

Comme $f(t) = -0{,}9t^2 + 6t - 5{,}95$, alors :
$f'(t) = -1{,}8t + 6$.

x	$-\infty$		$3+\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	

b. Le maximum atteint est d'environ 4,05 pour $x = 3 + \frac{1}{3}$, c'est-à-dire 40 500 au bout de 3 h 20.

55 $R(x) = -0{,}6x^2 + 219x$, et $R'(x) = -1{,}2x + 219$.

x	100		182,5		300
Sign of $R'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations of R		↗		↘	

$R(182{,}5) = 19\,983{,}75$.

56 $N(t) = -0{,}5t^3 + 6{,}75t^2 - 21t + 35$,

donc $N'(t) = -1{,}5t^2 + 13{,}5t - 21$.
On calcule le discriminant : 56,25 et les deux solutions : 6 et 21.
Le maximum est atteint pour $t = 6$, donc le maximum est atteint à 15 h et correspond à 44 clients.

57 Soit x la longueur KC a priori : $0 < x < 8$, alors

AG $= 4 - x$ et finalement $0 < x < 4$.
$S = (4-x)^2 + x^2 = 2x^2 - 8x + 16$
$S'(x) = 4x - 8$

x	0		2		4
Signe de $S'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de S		↘		↗	

S sera minimale pour $x = 2$ donc G milieu de [AD].

58 Démonstration permettant de déterminer **une condition nécessaire pour l'existence d'un extremum local d'une fonction** dérivable sur un intervalle I.

● f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. a est un nombre réel appartenant à I.
Supposons que f admet un maximum local en a, a n'étant pas une borne de I.

● f est dérivable en a donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

● Comme $f(a)$ est **un maximum local de la fonction f sur I**, alors il existe un **intervalle** J inclus dans I tel que $f(a)$ soit **un maximum de f sur J**.
Donc pour tout nombre réel x de J, $f(x) \leqslant f(a) \Leftrightarrow f(x) - f(a) \leqslant 0$
Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $a + h \in$ J, en prenant $x = a + h$, $f(a + h) - f(a) \leqslant 0$.

● On raisonne par **disjonction des cas** selon le signe de h.
- **Si $h > 0$**, alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leqslant 0$. Donc $f'(a) \leqslant 0$.
- **Si $h < 0$**, alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geqslant 0$. Donc $f'(a) \geqslant 0$.

● Ainsi, pour $h > 0$, $f'(a) \leqslant 0$, et pour $h < 0$, $f'(a) \geqslant 0$.
Le seul nombre à la fois positif et négatif est zéro. Donc si f admet un maximum en a sur I, alors $f'(a) = $ **0**.

59 a. On a $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

• 1er cas
Si $h > 0$, alors $x + h > x$; or f est décroissante donc $f(x + h) < f(x)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0$.
D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$.

• 2e cas
Si $h < 0$, alors $x + h < x$; or f est décroissante donc $f(x + h) > f(x)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} < 0$.
D'où : $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$.

b. Si f est constante, pour tout x de l'intervalle, $f(x + h) = f(x)$, donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$ et $f'(x) = 0$.

60 La fonction $g : x \mapsto x^5$ est un contre-exemple permettant de montrer que la réciproque de la propriété énoncée est fausse.
$g'(x) = 5x^4$ pour tout x réel, donc $g'(x)$ s'annule en 0 ; mais la fonction g, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, n'admet pas d'extremum local en 0.

61 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx = x(3ax + 2b)$ est du signe du produit de x et de $3ax + 2b$, et qu'elle s'annule en 0 et $\frac{-2b}{3a}$.

• 1er cas : $a > 0$ et $b > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-2b}{3a}$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗		↘		↗	

D'où un maximum et un minimum.

• 2e cas : $a < 0$ et $b > 0$.

x	$-\infty$		0		$\frac{-2b}{3a}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		−	0	+	0	−	
Variations de f		↘		↗		↘	

D'où un maximum et un minimum.
• Les cas $a > 0$ et $b < 0$, et $a < 0$ et $b < 0$ se traitent de la même façon et donnent également un maximum et un minimum.
• Il reste enfin deux cas : $a > 0$ et $b = 0$, $a < 0$ et $b = 0$.
Alors $f(x) = ax^3 + c$ et $f'(x) = 3ax^2$.
Si $a > 0$ alors $f'(x) > 0$ et si $a < 0$ alors $f'(x) < 0$, donc f est monotone et ne possède pas d'extrema locaux.

62 **1. a.** On calcule $f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2}$.

b. Pour $a = 1$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$ donc f est croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Pour $a = -1$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ dont le signe est celui de $x^2 - 1$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘		↗	

c. $f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2} = \frac{x^2+a}{x^2}$ dont le signe est celui de $x^2 + a$.

Si $a \geqslant 0$, alors $f'(x) > 0$ et la fonction f est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$.

Si $a < 0$:

x	0		$\sqrt{\lvert a\rvert}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖	↘		↗	

2. a.

Si $a \geqslant 0$

alors retourner « f est strictement croissante sur $]0\ ;+\infty[$. »

sinon retourner « f est décroissante sur $]0;\sqrt{\lvert a\rvert}]$ et croissante sur $[\sqrt{\lvert a\rvert}\ ;+\infty[$. »

Fin Si

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
from math import*

def monotonie(a):
    if a>=0:
        return "f est strictement croissante sur ]0;+inf[."
    else:
        return "f est décroissante sur ]0;",sqrt(-a),"] et croissante sur [",sqrt(-a),";inf[."
```

63 **a.**

x	1		2		3
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	

b. On a $f(1) = a + b + c$, $f(2) = 2a + b + \frac{c}{2} = -4$, $f(3) = 3a + b + \frac{c}{3} = 2$.

De plus, $f'(x) = a - \frac{c}{x^2}$; comme $f'(2) = 0$, on en déduit que $c = 4a$.

Et : $\begin{cases} 2a + b + 2a = -4 \\ 3a + b + \frac{4a}{3} = 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 4a + b = -4 \\ 13a + 3b = 6 \end{cases}$.

On obtient : $a = 18$ et $b = -76$.

Finalement $f(1) = 5 \times 18 - 76 = 14$.

64 **a.** On utilise la propriété de Thalès dans le triangle SOA :

$$\frac{\text{SO}}{\text{SO'}} = \frac{\text{OA}}{\text{OB}} \Leftrightarrow \frac{h}{h-5} = \frac{R}{3} \Leftrightarrow h = \frac{5R}{R-3}.$$

Volume : $V(R) = \frac{1}{3}\pi \times R^2 \times h = \frac{5\pi}{3} \times \frac{R^3}{R-3}$.

b. Il est évident que $R > 3$. $V'(R) = \frac{5\pi}{3} \times \frac{R^2(2R-9)}{(R-3)^2}$, son signe dépend donc de celui de $2R - 9$.

x	0		$4,5$		$+\infty$
Signe de $V'(R)$		$-$	0	$+$	
Variations de V		↘		↗	

Le minimum est pour $R = 4,5$ et $h = 15$; ce volume minimal vaut environ 318,1 cm^3.

65 **a.** $f'(x) = 2ax + b$

$x_e \leftarrow -b \div 2a$

$y_e \leftarrow a \times x_e^2 + b \times x_e + c$

Si $a > 0$

alors retourner « La fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$: il est atteint en x_e et a pour valeur y_e. »

sinon retourner « La fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$: il est atteint en x_e et a pour valeur y_e. »

Fin Si

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def extremum(a,b,c):
    xe=-b/(2*a)
    ye=a*xe**2+b*xe+c
    if a>0:
        return "La fonction f admet un minimum sur R : ",["atteint en :",xe,"valeur :",ye]
    else:
        return "La fonction f admet un maximum sur R : ",["atteint en :",xe,"valeur :",ye]
```

66 **1. a.** $R(x) = xP(x) = 12x - 0,5x^2$.

b. $R'(x) = 12 - x$.

x	2		12		14
Signe de $R'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de R		↗		↘	

La recette est maximale pour $x = 12$ trottinettes.

$P(12) = 6$; le prix d'une trottinette est alors 600 €.

2. a. $B(x) = R(x) - C(x)$

$= \frac{-1}{3}x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 24x + 50.$

b. $B'(x) = -x^2 + 11x - 24$; on calcule le discriminant : 25, et les deux solutions : 3 et 8.

x	2		3		8		14
Signe de $B'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de B		↘		↗		↘	

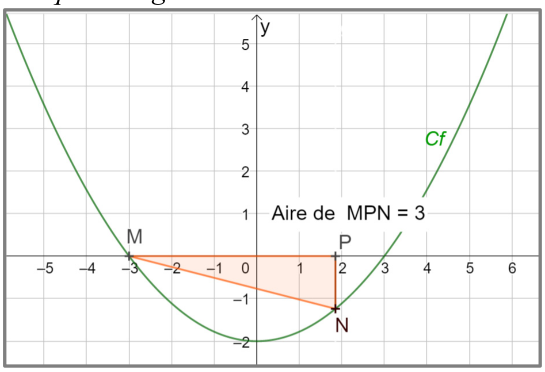
Le bénéfice est maximal pour $x = 8$ trottinettes.

$P(8) = 8$; le prix d'une trottinette est alors 800 €.

c. $B(x) > 0$ pour $2 \leqslant x < 11$ ($B(12)$, $B(13)$ et $B(14)$ sont négatifs).

d. et **e.** Pour $x = 12$, on a la recette maximale, mais le bénéfice est négatif.

67 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. Aire de MNP :

$A_{\text{MNP}} = \frac{\text{MP} \times \text{PN}}{2}$ avec MP $= 3 + a$ et PN $= -f(a)$.

$A_{\text{MNP}} = (3 + a)\left(-\frac{a^2}{9} + 1\right)$

$A_{\text{MNP}} = \frac{-a^3}{9} - \frac{a^2}{3} + a + 3$

c. Soit $g(x) = \frac{-x^3}{9} - \frac{x^2}{3} + x + 3$.

On a $g'(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}x + 1$. C'est un polynôme du second degré ; le discriminant est égal à $\frac{16}{9}$; les deux solutions sont -3 et 1.

x	$-\infty$		-3		1		3
Signe de $g'(x)$		–	0	+	0	–	
Variations de g		↘		↗		↘	

Il faut comparer $g(-3)$ et $g(3)$, $g(-3) = g(3) = 0$.

Et $g(1) = \frac{32}{9}$. Donc l'aire du triangle MNP est maximale pour $x = 1$ et vaut $\frac{32}{9}$.

68 **a.** Cette courbe a été présentée par Maria Gaetana Agnesi en 1748 dans son ouvrage *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (*Institutions analytiques à l'usage de la jeunesse italienne*). Cet ouvrage, très bien accueilli en Europe, avait pour objectif de rendre accessibles les mathématiques les plus avancées de son époque tant en algèbre qu'en analyse et a permis à Maria Gaetana Agnesi d'être nommée à l'Académie et à l'université de Bologne.

Cette courbe a aussi été appelée « sorcière d'Agnesi », à la suite d'une erreur de traduction depuis l'italien : *la versiera* confondu avec *l'avversiera* qui signifie la sorcière.

Elle a pour équation $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ avec a un nombre réel strictement positif.

b. Soit $f(x) = \frac{a^3}{x^2+a^2}$; $f'(x) = \frac{-2a^3x}{(x^2+a^2)^2}$ qui est du signe de $-2a^3x$.

Si $a > 0$, alors f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

69 **a.** BC $= \sqrt{1 - x^2}$.

Aire = Aire(ABCD) + Aire(BCM)

$= \frac{4\sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}}{2}$

$= 0{,}5(x + 4)\sqrt{1 - x^2}$ (avec $-1 < x < 1$)

b. Avec le logiciel, Elena a déterminé une expression de la dérivée de la fonction g correspondant à l'expression de l'aire du trapèze, puis chercher les valeurs en lesquelles cette dérivée s'annule.

En dérivant l'expression ci-dessus, on obtient :

$$g'(x) = 0{,}5\left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{x(x + 4)}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

En réduisant au même dénominateur :

$$g'(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-2x^2 - 4x + 1$.

Le discriminant est 24 et les racines : $\frac{-\sqrt{6}-2}{2}$ et $\frac{\sqrt{6}-2}{2}$.

c. On en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{6}-2}{2}$		-1		$\frac{\sqrt{6}-2}{2}$		1		3
Signe de $g'(x)$		–	0	+	‖	+	0	–	‖	–	
Variations de g		↘		↗	‖	↗		↘	‖	↘	

Donc l'aire est maximale pour $x = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$.

70 Pour tout x de l'intervalle $]0\,;6]$,

$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-10}{x^2}$ dont le signe est celui de $x^2 - 10$.

Les deux racines sont $-\sqrt{10}$ et $\sqrt{10}$.

x	0		$\sqrt{10}$		6
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

Ainsi, sur l'intervalle $]0\,;6]$, $f(x) \geqslant f(\sqrt{10})$.

Or $f(\sqrt{10}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10} + \frac{10}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}$.

Finalement, sur l'intervalle $]0\,;6]$, $f(x) \geqslant \sqrt{10}$.

71 • Calcul du rayon r de la base du cône

Par proportionnalité, le cercle de base aura pour longueur $20\pi - 10\alpha$.

Donc $2\pi r = 20\pi - 10\alpha$, d'où $r = 10 - \frac{5\alpha}{\pi}$.

• Calcul de la hauteur h du cône

En appliquant le théorème de Pythagore,

$h = \sqrt{100 - r^2}$.

• D'où $V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\left(10 - \frac{5\alpha}{\pi}\right)^2 \sqrt{100 - \left(10 - \frac{5\alpha}{\pi}\right)^2}$

$= \frac{5}{3}\left(10 - \frac{5\alpha}{\pi}\right)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$.

À l'aide d'un logiciel, on obtient : $\alpha \approx 1{,}153$, soit $\alpha \approx 132°$.

72 On calcule $f'(x) = 6x^2 - 0{,}4x = x(6x - 0{,}4)$.

x	-3		0		$\frac{0{,}4}{6}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘		↗	

Adel a tort : la fonction f est décroissante entre 0 et $\frac{0{,}4}{6} = \frac{1}{15}$.

73 **1. a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

b. On conjecture que l'aire du rectangle ABCD est maximale pour x environ égal à 6,66.

2. Aire(ABCD) = AB $\times$ AD

$= f(x)(10 - x) = -x^3 + 10x^2$.

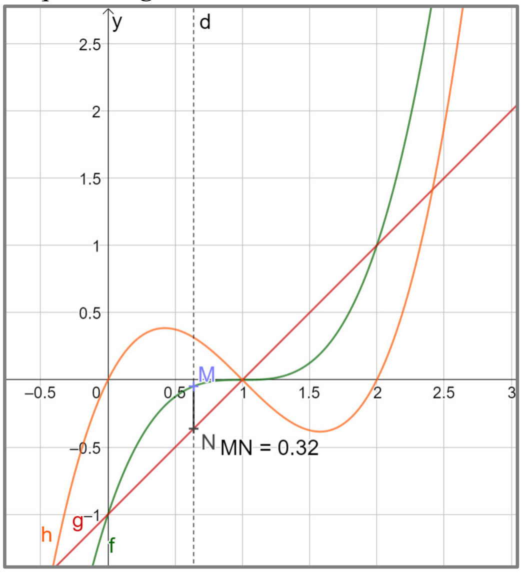
En posant $g(x) = -x^3 + 10x^2$,

$g'(x) = -3x^2 + 20x = x(20 - 3x)$.

x	0		$\frac{20}{3}$		10
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		↗		↘	

L'aire de ABCD est maximale pour $x = \frac{20}{3}$.

74 **1. a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. Il semble que $\mathscr{C}_f$ soit au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;1] \cup [2\,;+\infty[$.

c. On a $h(x) = (x-1)^3 - (x-1) = x(x-1)(x-2)$.

Donc $h(x) = 0$ a pour solutions 0 ; 1 et 2.

Les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont donc $(0\,;-1)$, $(1\,;0)$ et $(2\,;1)$.

d.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;1] \cup [2\,;+\infty[$.

2. a. Il semble que la distance MN augmente pour $x \in [0\,;0{,}4]$, soit maximale pour $x \approx 0{,}4$, puis diminue pour $x \in [0{,}4\,;1]$.

b. Les points M et N ayant la même abscisse, on a MN $= |f(x) - g(x)|$.

Or sur l'intervalle $[0\,;1]$, $h(x)$ est positive donc $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x) = h(x)$.

c. On a $h(x) = (x^2 - x)(x - 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

On dérive : $h'(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Le discriminant est égal à 12 ; on a deux solutions : $1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	0		$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de h		↗		↘	

h admet donc un maximum pour $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$; la conjecture du **2a** est ainsi confirmée et précisée.

75 **1. a.** Il semble que f soit croissante sur $[-2 ; -0{,}5]$ et sur $[0{,}5 ; 2]$ et décroissante sur $[-0{,}5 ; 0{,}5]$.
Il semble que g soit croissante sur $[-2 ; 2]$.
b. et **c.** On calcule $f'(x) = 3x^2 - 1$ et $g'(x) = 3x^2 + 1$.

x	-2		$\frac{-1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		2
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗		↘		↗	

x	-2		2
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g		↗	

Les conjectures sont confirmées et précisées.

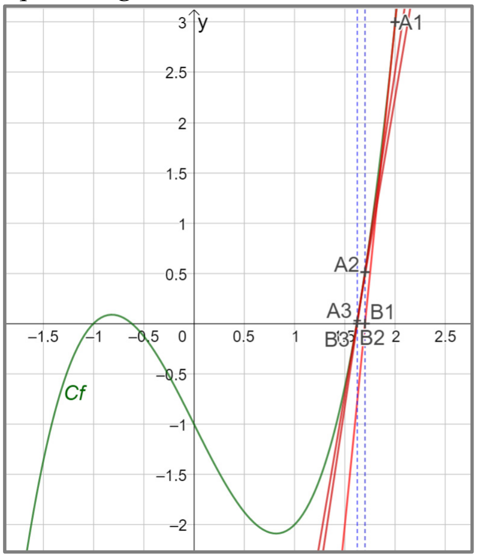
2. a. On a $h(x) = x^3 - ax$ et $k(x) = x^3 + ax$.
On calcule $h'(x) = 3x^2 - a$ et $k'(x) = 3x^2 + a$.

x	$-\infty$		$\frac{-\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$		$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h		↗		↘		↗	

x	-2		2
Signe de $k'(x)$		$+$	
Variations de k		↗	

b. Les variations sont les mêmes : f et g sont des cas particuliers de h et k avec $a = 1$.

76 **1. a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. Une solution évidente : -1, une solution entre -1 et 0, et une solution entre 1 et 2.
d. On constate que les points se rapprochent de la solution positive de l'équation ; une valeur approchée de cette solution est comprise entre 1,6 et 1,7.
2. On a $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, d'où
$y = 0 \Leftrightarrow x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.
On a ainsi le point : $\left(a - \frac{f(a)}{f'(a)} ; 0\right)$.
3. *Voir les fichiers ressources dans le manuel numérique enseignant.*
a.

$x \leftarrow 2$
$f \leftarrow x^3 - 2x - 1$
$f' \leftarrow 3x^2 - 2$
Pour I allant de 1 à 10
  $x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$
  $f \leftarrow x^3 - 2x - 1$
  $f' \leftarrow 3x^2 - 2$
Fin Pour

```
def newton():
    x=2
    f=x**3-2*x-1
    g=3*x**2-2
    for i in range(1,10):
        x=x-f/g
        f=x**3-2*x-1
        g=3*x**2-2
    return x
```

b. et **c.**

```
def newton(precision):
    x=2
    f=x**3-2*x-1
    g=3*x**2-2
    b=x-f/g
    k=1
    while(abs(b-x)>=precision):
        x=b
        f=b**3-2*b-1
        g=3*b**2-2
        b=x-f/g
        k=k+1
    return [x,k]
```

On obtient 1,618.

77 **1. a.** Il s'agit d'une fonction du second degré dont la représentation graphique est une parabole.

b. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}5$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

On a donc $f(x) = -0{,}5g \times \frac{x^2}{95^2 \times 0{,}25} + \sqrt{3}x$.

D'où $f(x) = \frac{-2gx^2}{9025} + \sqrt{3}x$ et $f'(x) = \frac{-4gx}{9025} + \sqrt{3}$.

On résout $f'(x) = 0$; d'où $x = \frac{9025\sqrt{3}}{4g}$.

x	0		$\frac{9025\sqrt{3}}{4g}$		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	

Et $f\left(\frac{9025\sqrt{3}}{4g}\right) \approx 345$.

L'altitude maximale est donc de 345 m.

2. a. On a $f(x) = \frac{-g}{2v^2\cos^2(a)}x^2 + \tan(a)x$ et

$f'(x) = \frac{-g}{v^2\cos^2(a)}x + \tan(a)$.

b. $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{v^2\cos^2(a)\tan(a)}{g}$.

Avec les données de l'énoncé, on détermine l'abscisse de la fusée au moment de son explosion : environ 111,57 m, et son altitude : environ 316,36 m.

78 **1. a.** Il y a saturation pour $x = 4$ h.

b. Il y a envie pour $x \in [0\,;4]$.

c. Il y a rejet pour $x \in [4\,;8]$.

d. On a $v(4) = 0$.

2. $f(x) = a\frac{x^2}{2} + bx + c$ et $f(0) = 0$ donc $c = 0$.

$f'(x) = ax + b$ avec $f'(4) = 0$ soit : $4a + b = 0$.

De $f(4) = 100$, on déduit que : $8a + 4b = 100$.

La résolution du système donne : $a = -\frac{25}{2}$ et $b = 50$.

Finalement, $f(x) = -\frac{25}{2} \times \frac{x^2}{2} + 50x$

et $f'(x) = v(x) = -\frac{25}{2}x + 50$.

Recherches mathématiques

p. 186 du manuel

79 On note x le côté d'un petit carré dans un coin.

Le volume de la boîte est donné par :
$V(x) = (25 - 2x)(15 - 2x)x = 4x^3 - 80x^2 + 375x$
et $V'(x) = 12x^2 - 160x + 375$.
Le discriminant de la dérivée est 7 600, on obtient les deux racines : $\frac{40-5\sqrt{19}}{6}$ et $\frac{40+5\sqrt{19}}{6}$.

Cependant $\frac{40+5\sqrt{19}}{6} > 7{,}5$ or $15 - 2x > 0$ donc le volume de la boîte est maximum pour $x = \frac{40-5\sqrt{19}}{6}$.

80 On note x le rayon de $\mathcal{C}_1$ et y celui de $\mathcal{C}_2$ (avec x et y compris entre 0 et 0,5). On a :
$AE = \sqrt{2}x$, $CF = \sqrt{2}y$, $EF = x + y$ et
$AE + EF + FC = \sqrt{2}$.
D'où $(1 + \sqrt{2})y = \sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})x$.

On en déduit $y = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - x$.

La somme des aires des deux disques vaut :

$f(x) = \pi(x^2 + y^2) = 2\pi x^2 - \frac{2\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}x + \frac{2\pi}{3+2\sqrt{2}}$.

$f'(x) = 4\pi x - \frac{2\pi\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$.

On a $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$; mais l'aire est alors minimale (et $y = x$).
L'aire est maximale quand x est maximal et y minimal (ou inversement), c'est-à-dire quand $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ (ou inversement).

81 Soit $f(x) = x - x^2$; $f'(x) = 1 - 2x$.

$f'(x)$ s'annule en $x = \frac{1}{2}$ et cet extremum correspond à un maximum.

La valeur maximale obtenue est $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

82 Soit $g(x) = x + \frac{1}{x}$; $g'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $x^2 - 1$.
Sur $]0\,;+\infty[$, $g'(x)$ s'annule en $x = 1$ et cet extremum correspond à un minimum.
La valeur minimale obtenue est donc $g(1) = 2$.

83 $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x - 1)(x^2 + x + 1)$.

Pour $x^2 + x + 1$, le discriminant est négatif ; il conserve donc un signe constant positif.
Le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe de $x - 1$.
Donc f possède un unique minimum en $x = 1$.

84 Soit O le point d'intersection des diagonales.
En notant x la longueur de la diagonale [BD] ($x > 0$) et en appliquant le théorème de Pythagore, on a

AO = $\sqrt{\frac{p^2}{16} - \frac{x^2}{4}}$

De plus, $\mathcal{A}_{\text{ABCD}} = 2 \times \frac{x}{2} \times \sqrt{\frac{p^2}{16} - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$.

Soit $f(x) = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{p^2}{4} - x^2}$; on calcule $f'(x) = \frac{p^2 - 8x^2}{4\sqrt{p^2 - 4x^2}}$ dont le signe dépend de celui de $p^2 - 8x^2$.
Les racines sont $-\frac{p}{2\sqrt{2}}$ et $\frac{p}{2\sqrt{2}}$.
Pour x positif, on obtient :

x	0		$\frac{p}{2\sqrt{2}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	

L'aire du losange est maximale pour $x = \frac{p}{2\sqrt{2}}$.
On a alors AC = 2AO = BD : les diagonales sont de même longueur d'où ABCD est un carré.

85 $V_{\text{boîte}} = \pi r^2 h = 1$ donc $h = \frac{1}{\pi r^2}$.
$\mathcal{A}_{\text{boîte}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$.
Soit $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$.
On a $f'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}$ dont le signe dépend du signe de $2\pi r^3 - 1$.
On résout : $2\pi r^3 - 1 = 0$, soit $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$.

r	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$		$+\infty$
Signe de $f'(r)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

L'aire de la boîte est minimale pour $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ et $h = \frac{1}{\pi r^2}$.

CHAPITRE **6**

Fonction exponentielle

► *Les exercices* **1** *à* **8** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 162 et 163 du manuel

1 En prenant la tangente

1. $f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a) \approx f(a)(h+1)$ car $f'(a) = f(a)$.

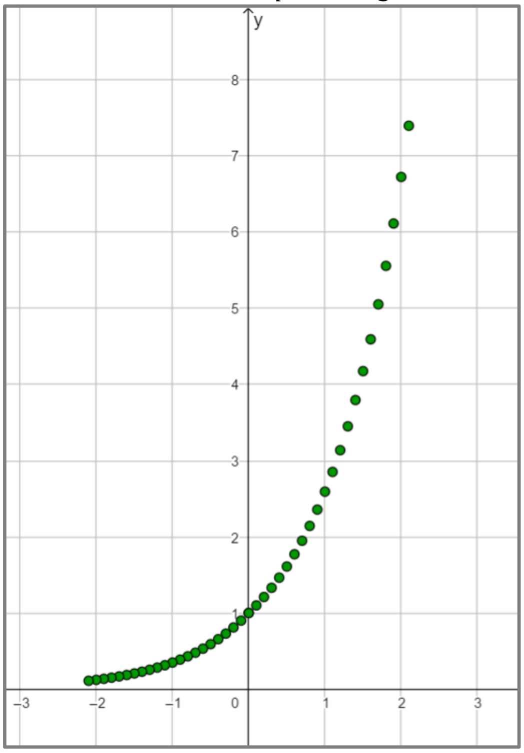
2. a. $f(0+0{,}1) \approx f(0)(1+0{,}1) \approx 1{,}1$.

b. $f(0-0{,}1) \approx f(0)(1-0{,}1) \approx 0{,}9$.

3. En B3 : = B2*(1 + 0,1) et en E3 : =E2*(1 – 0,1).

4. $h = 0{,}1$.

5. *Voir les fichiers ressources dans le manuel numérique enseignant.*



2 À la découverte d'une relation fonctionnelle

1. $f(0+x) = f(0) \times f(x) = 0$.

2. a. $f(0+0) = f(0)^2$ donc $f(0)^2 - f(0) = 0$ ou encore $f(0)(f(0)-1) = 0$ soit $f(0) = 1$ car $f(0) \neq 0$.

b. $f(x) = f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 > 0$.

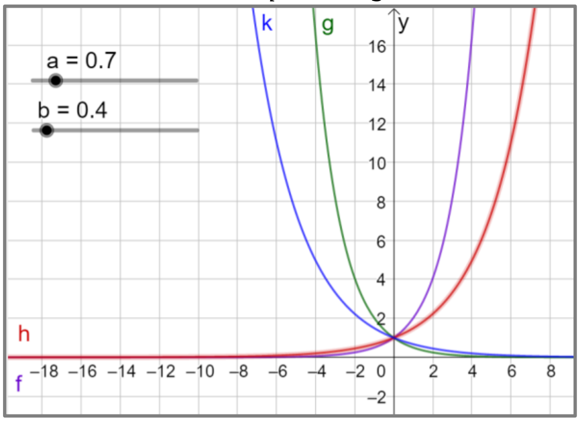
3. a. $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a)\times f(h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a)(f(h)-1)}{h} = f(a) \times \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-1}{h}$

$= f(a) \times \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = f(a) \times f'(0)$.

4. $f'(x) = f(x) \times f'(0) = f(x)$.

3 Découvrir les fonctions composées

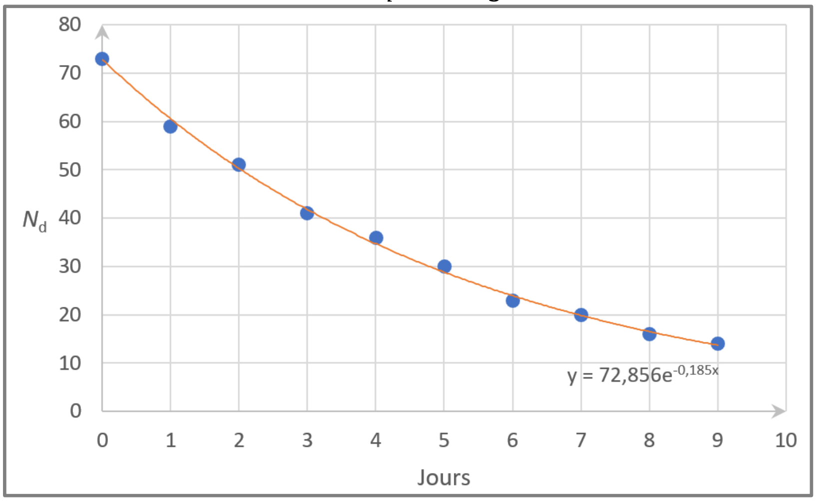
1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



2. Les fonctions f_k sont croissantes et les fonctions g_k sont décroissantes, elles passent toutes par le point (0 ; 1). On conjecture également que :
- plus la valeur de k est élevée, plus la croissance de la fonction f_k est lente avant 0 et rapide après 0 ;
- plus la valeur de k est élevée, plus la décroissance de la fonction g_k est rapide avant 0 et lente avant 0.

4 Un problème de santé publique

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



2. b. $N_0 \approx 73$ et $\lambda \approx 0{,}19$.
3. La demi-vie du radon est de 3,65 jours environ.
4. a. 1,03 jours environ.
b. 5,84 jours environ.

Application

p. 167 à 169 du manuel

SAVOIR-FAIRE 1

Dériver un produit, un quotient

9 a. $f'(x) = 5 \times e^x + (5x - 15) \times e^x = (5x - 10) \times e^x$ est du signe de $5x - 10$ car $e^x > 0$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

b. Une équation de la tangente au point d'abscisse (-1) :

$y = f(-1) + f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = \frac{-20}{e} + \frac{-15}{e}(x + 1)$

$\Leftrightarrow y = \frac{-15}{e}x + \frac{-35}{e}$.

10 $g'(x) = \frac{e^x \times (2x-3) - e^x \times 2}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-5)e^x}{(2x-3)^2}$ est du signe de $2x - 5$ car $e^x > 0$ et $(2x-3)^2 > 0$.

x	$-\infty$		2,5		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		↘		↗	

SAVOIR-FAIRE 2

Utiliser les relations fonctionnelles

11 $e^{-5x}\left(\frac{e^x}{e^{-2x}} - e^{3x}\right) = \frac{e^{-5x+x}}{e^{-2x}} - e^{-5x+3x}$

$= e^{-4x+2x} - e^{-2x}$

$= e^{-2x} - e^{-2x} = 0$.

12 $\frac{e^{1,5}}{e \times e^{-0,5}} = \frac{e^{1,5}}{e^{1+(-0,5)}} = \frac{e^{1,5}}{e^{0,5}} = e^1 = e$.

SAVOIR-FAIRE 3

Résoudre des équations ou des inéquations

13 a. $e^x > e \Leftrightarrow x > 1 \Leftrightarrow x \in]1 ; +\infty[$.

b. $e^{x^2-x} = e^{x+3} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S} = \{-1 ; 3\}$.

SAVOIR-FAIRE 4

Étudier les variations d'une fonction

14 Domaine de définition : $\mathbb{R}$.

Dérivée :

$f'(x) = (2x + 3)e^{-2x+5} - 2(x^2 + 3x + 3)e^{-2x+5}$

$= (-2x^2 - 4x - 3)e^{-2x+5}$.

Étude du signe de la dérivée :

Comme $e^{-2x+5} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-2x^2 - 4x - 3$. Calcul de :

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = -8 < 0$.

Tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $-2x^2 - 4x - 3$		$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	
Variations de f		↘	

15 Domaine de définition : g est définie pour tout réel x tels que $5x - 2 \neq 0$.

Donc g est définie sur $]-\infty ; 0,4[\cup]0,4 ; +\infty[$.

Dérivée :

$g'(x) = \frac{-e^{-x+1}(5x-2) - 5e^{-x+1}}{(5x-2)^2} = \frac{e^{-x+1}(-5x-3)}{(5x-2)^2}$.

Étude du signe de la dérivée :

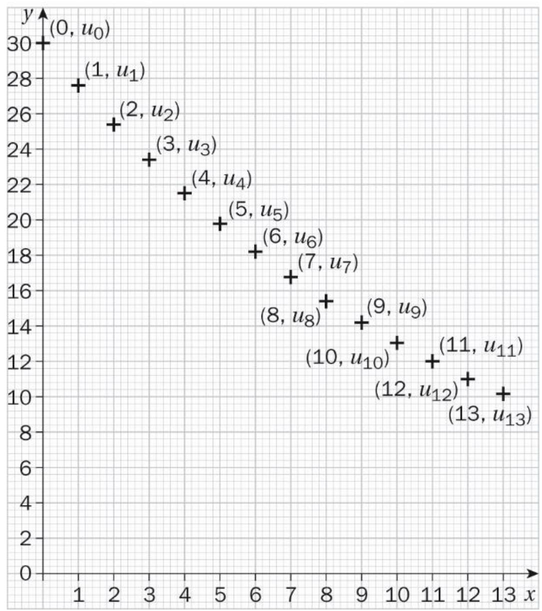
Comme $e^{-x+1} > 0$ et $(5x-2)^2 > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-5x - 3$.

x	$-\infty$		$-0,6$		$0,4$		$+\infty$
Signe de $-5x - 3$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe de $g'(x)$		$+$		$-$	||	$-$	
Variations de g		↗		↘	||	↘	

SAVOIR-FAIRE 5

Modéliser par une croissance exponentielle

16 a. $u_n = 30 \times \left(1 - \frac{8}{100}\right)^n = 30 \times 0,92^n$.



b. $f(t) = 30 \times e^{-0.08t}$.

c. Graphiquement, on lit l'antécédent de 15 sur la courbe représentative de f et on trouve environ 8,7 ; soit en 2015 + 8 et au mois d'août (0,7 × 12), donc au mois d'août 2023 aux erreurs d'approximation près.

► *Les exercices* **17** *à* **30** *de la rubrique « **Et faire le point** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 172 du manuel

31 a. Stratégie 2 : $e^x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S} = \{0\}$.

b. Stratégie 3 :

$e^{(2x-1)^2} = e^0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \mathcal{S} = \{0{,}5\}$.

c. Stratégie 1 : $e^{6x} = e \Leftrightarrow \mathcal{S} = \{\frac{1}{6}\}$.

d. $2x = -3 \Leftrightarrow \mathcal{S} = \{-1{,}5\}$.

32 a. Stratégie 3 : $f_1(x) = e^x(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de e^x		$+$		$+$		$+$	
Signe de $f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Stratégie 1 :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f_2(x)$		$+$	0	$-$	

c. Stratégie 2 :

x	$-\infty$		-1		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $3x + 2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\frac{e^{3x}}{(x+1)^2}$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
Signe de $f_3(x)$		$-$	$\Vert$	$-$		$+$	

d.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f_4(x)$		$-$	0	$+$	

e. Stratégie 3 :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $(3x-1)^2$		$+$	0	$+$	
Signe de e^{-x}		$+$		$+$	
Signe de $f_5(x)$		$+$		$+$	

33 a. $f_1'(x) = e^x(3x^2 + 5x - 1)$.

b. $f_2'(x) = -5e^{-5x+1}$.

c. $f_3'(x) = \frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

d. $f_4'(x) = \frac{1}{4}e^x$.

e. $f_5'(x) = e^x - 1$.

34 a. croissante ;

b. croissante ;

c. décroissante ;

d. croissante.

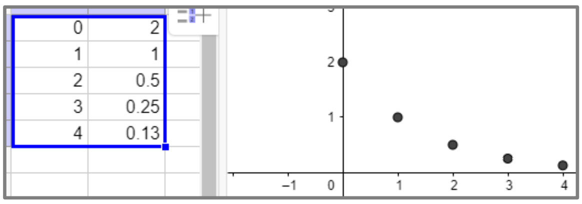
35 a. positive ;

b. négative sur $]-\infty ; 0]$ et positive sur $[0 ; +\infty[$;

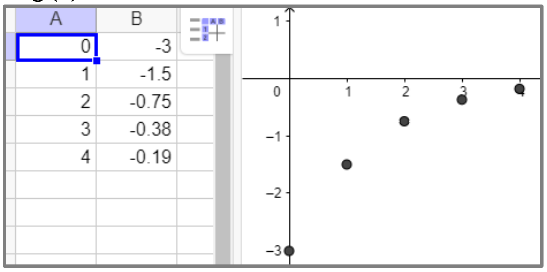
c. positive ;

d. négative sur $]-\infty ; 0[$ et positive sur $]0 ; +\infty[$.

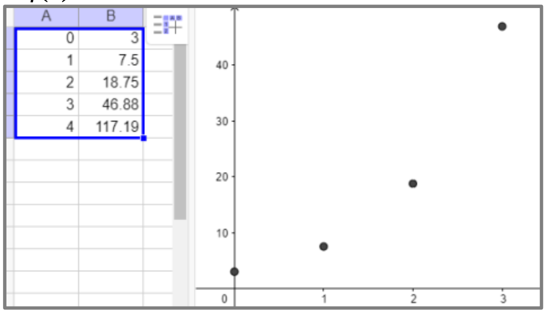
36 a. $g(x) = 2e^{-0{,}7x}$.



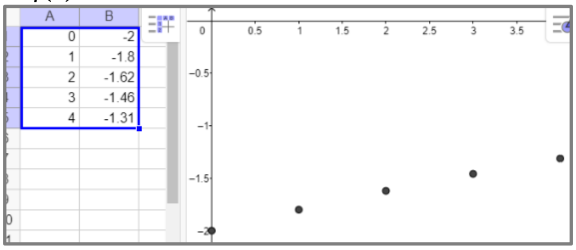
b. $g(x) = -3e^{-0,7x}$.



c. $f(x) = 3e^{0,9x}$.



d. $f(x) = -2e^{-0,1x}$.



► *Les exercices* **37** *à* **46** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 174 à 179 du manuel

Objectif 1

Étudier et utiliser la fonction exponentielle

47 **1.** $(e^3)^2 \times e^9 = (e^6) \times e^9 = e^{15}$ donc **d.**

2. $\frac{e^{-5}}{e^5} = e^{-10}$ donc **c.**

3. $\frac{e^{-3}}{e^{-7}} \times e = e^5$ donc **b.**

4. $\frac{(e^{-3})^2 \times e^{-1}}{e^{-3} \times e} = e^{-6-1+3-1} = e^{-5}$ donc **a.**

48 **1. b.**

2. d. car $e^{-5} \times e^{4,5} = e^{-0,5}$.

49 **1. c.** car la solution de $-4x + 3 = 1$ est $x = \frac{1}{2}$.

2. a. et **d.** car $5x^2 = 45$ a pour solution –3 et 3.

50 **a.** Faux, car : $\frac{e^{1,01} \times (e^{0,3})^2}{e^2} = e^{-0,39}$ et $\frac{e^{-0,8} \times e^{1,8}}{e} = \frac{e}{e} = 1$.

b. Faux, car $\frac{x + e^x}{e^{-x}} = (x + e^x)e^x = xe^x + e^{2x}$.

51 **1.** On résout $2x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$ donc **d.**

2. On résout $\frac{x}{2} + 7 > 1 \Leftrightarrow x > -12$ donc **c.**

3. On résout $-5x + 4 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}$ donc **b.**

4. On résout $-4x + 3 < -1 \Leftrightarrow 1 < x$ donc **a.**

52 On détermine :

$f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$, donc vrai.

53 **a.** e^{-3} ; **b.** $e^{-0,8}$; **c.** e^5 ; **d.** $(e^{-0,5})^3$.

54 **a.** L'équation revient à résoudre :

$-5x + 8 = -x + 3$.

D'où $x = \frac{5}{4}$.

b. L'équation revient à résoudre $3x - 1 = -5x + 4$.

D'où $x = \frac{5}{8}$.

c. L'équation revient à résoudre $x^2 + 6x + 5 = 0$.
Le discriminant est égal à 16, et on obtient deux solutions : –5 et –1.

d. L'équation revient à résoudre $2x^2 + x - 1 = 0$.
Le discriminant est égal à 9, et on obtient deux solutions : 0,5 et –1.

55 **a.** e^{-1} ; **b.** e^{2x} ; **c.** $e^0 = 1$.

56 **a.** L'équation revient à résoudre :
$x^2 + 6x + 5 \geqslant 0$.
Le discriminant est égal à 16, d'où deux solutions $x = -5$ et $x = -1$.
On en déduit le signe du trinôme :

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
Signe du trinôme		+	0	–	0	+	

Donc $\mathcal{S} =]-\infty\,;-5] \cup [-1\,;+\infty[$.

b. L'inéquation revient à résoudre :
$x^2 + 3x - 4 < 0$. Le discriminant est égal à 25, les solutions sont –4 et 1.

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
Signe du trinôme		+	0	–	0	+	

Donc $\mathcal{S} =]-4\,;1[$.

c. L'inéquation revient à résoudre :
$2x^2 - 3x - 9 \leqslant 0$.
Le discriminant est égal à 81, les solutions sont –1,5 et 3.

x	$-\infty$		$-1{,}5$		3		$+\infty$
Signe du trinôme		+	0	–	0	+	

Donc $\mathcal{S} = [-1{,}5\,;3]$.

d. L'inéquation revient à résoudre :
$x^2 + 2x - 15 \leqslant 0$
Le discriminant est 64, les solutions sont –5 et 3.

x	$-\infty$		-5		3		$+\infty$
Signe du trinôme		+	0	–	0	+	

Donc $\mathcal{S} = [-5\,;3]$.

57 **a.** L'équation $e^x = 1$ a pour solution $x = 0$.
b. L'équation $e^x = -8$ n'a aucune solution, car $-8 < 0$ et $e^x - e = 0$ a pour solution $x = 1$.
Donc le produit a une solution $x = 1$.
c. Le produit $x(e^{2x+1} - 1) = 0$ pour $x = 0$ ou pour $e^{2x+1} - 1 = 0$, soit :
$x = 0$ ou $2x + 1 = 0$.
$x = 0$ ou $x = -\frac{1}{2}$.
d. $e^{-3x+6} = e$ est équivalent à $-3x + 6 = 1$ et $x = \frac{5}{3}$.
$e^{x^2} = 1$ a pour solution $x = 0$.

58 **a.** Le discriminant est égal à 16, on a donc deux solutions –3 et 1.
b. On pose $X = e^x$, l'équation revient à résoudre $X^2 + 2X - 3 = 0$, équation du **a.**, donc $e^x = -3$, ce qui est impossible ou $e^x = 1$ qui a pour solution $x = 0$. Finalement $\mathcal{S} = \{0\}$.

59 On identifie les coefficients $a = 1$, $b = 1 - e$ et $c = -e$. On calcule le discriminant :
$(1 - e)^2 - 4(-e) = 1 - 2e + e^2 + 4e = (e + 1)^2$.
Les solutions sont donc $x = -1$ et $x = e$.

60 $e^{2x} > 0$ et $e^{x-2} > 0$, donc $e^{2x} + e^{x-2} > 0$, et il n'y a aucune solution.

61 **a.** $(e^x + 3)(e^{-x} - 1) = 3e^{-x} - e^x - 2$.
b. $e^x + 3 > 0$, le signe de f est donc celui de $e^{-x} - 1$.
$e^{-x} - 1 = 0$ pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de f		+	0	–	

62 **a. b.** $f'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$.
c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	+	
Variations de f		↗	‖	↗	

63 **a.** $e^x > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f(x) > 0$.
b. $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ est positive sur $[0\,;+\infty[$ et négative sur $]-1\,;0]$, donc f est décroissante sur $]-1\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

64 Iliès pense que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ et Margaux oublie le fait que dans la dérivée d'un quotient, le dénominateur est au carré. Gabriel quant à lui se trompe entre u et v.

65 **a. b.** On calcule $f'(x) = e^x - 1$.
c.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		–	0	+	
Variations de f		↘		↗	

d. $y = f'(0)(x-0) + f(0)$
$y = 2$.

66 **a.** $g'(x) = x(x+2)e^{x}$.

b. et **c.**

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

d. $y = g'(-2)(x+2) + g(-2)$.
$y = \frac{4}{e^2}$.

67 **1. a.** $f'(x) = \frac{e^{x}(x-1)}{x^2}$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $x - 1$.

b. et **c.**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. Pour A = 10, M = 4 ; pour A = 100, M = 7 ; pour A = 1 000, M = 10.
b. Cette fonction renvoie le plus petit entier M tel que $f(x) \geqslant$ A.
c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

68 **a.** As $f(0) = 1$, S(0, 1).

b. As $g(0) = b$ and $g(0) = 1$, then $b = 1$.

$g(2) = 0$ therefore $2a + 1 = 0$ and $a = -\frac{1}{2}$.

$g(x) = -0.5x+1$.

c. $e^{x} = 0.1$ hence $x \approx -2.3$.

69 On calcule $f'(x) = \frac{-6xe^{x}+16e^{x}}{9x^2-30x+25}$, $f'(0) = \frac{16}{25}$ et $f(0) = \frac{2}{5}$.

D'où l'équation, $y = \frac{16}{25}x + \frac{2}{5}$ ce qui correspond aux résultats obtenus.

OBJECTIF 2
Étudier une composée affine de la fonction exponentielle

70 **a.** Faux, car $f'(x) = -7e^{-7x+3} < 0$.

b. Faux, car $g'(x) = -10e^{2x-1} < 0$.
c. Vrai, car $x \to e^{-6x+8}$ décroissante strictement.
d. Faux, car $k'(x) = 0{,}3e^{3x-10}$.

71 **1. c.** **2. d.** **3. b.** **4. a.**

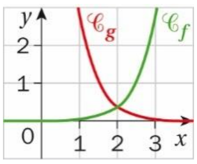
72 Réponse **a.** car $f'(x) = 10e^{-2x+3}$.

73 $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ correspondent à des fonctions croissantes, donc elles correspondent aux fonctions g et k. Or $g(1) < k(1)$, donc $\mathscr{C}_2$ correspond à k et $\mathscr{C}_3$ à g.
Pour $\mathscr{C}_4$, la valeur en 0,5 donne 1, donc on reconnaît f ; et par éliminations, $\mathscr{C}_1$ correspond à h.

74 **a.** Vrai, car :
$f'(x) = e^{-4x+1} + x(-4e^{-4x+1})$
$= (1-4x)\,e^{-4x+1}$
D'où $f'(0) = e$ et $f(0) = 0$, soit : $y = ex$
b. Faux, car :
$g'(x) = \frac{3e^{3x-2}(2x-1)-2e^{3x-2}}{(2x-1)^2} = \frac{(6x-5)e^{3x-2}}{(2x-1)^2}$.
D'où, $g(0) = -e^{-2}$ et $g'(0) = -5e^{-2}$ et donc
$y = -\frac{5}{e^2}x - e^{-2}$.

75 **1. a.** $f'(x) = 2e^{2x-5}$ et $g'(x) = -2e^{-2x+3}$.

b. On constate que $f'(x)$ est toujours positive, et $g'(x)$ toujours négative.
c. Donc f est croissante et g décroissante.
2. a.



b. Il semble que les deux courbes se coupent au point d'abscisse 2.
c. L'équation est équivalente à résoudre :
$2x - 5 = -2x + 3$ et $x = 2$
d. L'inéquation $g(x) > f(x)$ est équivalente à :
$-2x + 3 > 2x - 5$, d'où : $2 > x$.
$\mathscr{S} =]-\infty\,;+2[$.

76 **a.** Après calculs :

$f'(x) = (x^2 - 3x + 1 - 2x + 3)e^{-x}$
$\quad = (x^2 - 5x + 4)\,e^{-x}$.

b. et **c.** $x^2 - 5x + 4 = 0$.

On calcule le discriminant : 9, et les solutions sont $x = 1$ et $x = 4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗		↘		↗	

d. On a : $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$ avec $f'(-2) = 18e^2$ et $f(2) = -11e^2$.

D'où $y = 18e^2x + 25e^2$.

77 **a.** On calcule :

$g'(x) = \frac{12e^{12x+5}x^3 - 3x^2e^{12x+5}}{x^6} = \frac{(12x-3)e^{12x+5}}{x^4}$.

b. Le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $12x - 3$, donc g' est négative sur $]-\infty\,;0[$, négative sur $]0\,;0{,}25]$ et positive sur $[0{,}25\,;+\infty[$.

c. g est décroissante sur $]-\infty\,;0[$, décroissante sur $]0\,;0{,}25]$ et croissante sur $[0{,}25\,;+\infty[$.

d. On a $g'(-1) = -15e^{-7}$ et $g(-1) = -e^{-7}$ d'où : $y = 15e^{-7}x - 16e^{-7}$.

78 Déterminons la forme générale de $f'(x)$,

$f'(x) = abe^c$, donc $f'(0) = 3b$.

L'équation de la tangente est : $y = 3bx + 3$, or le coefficient directeur est $\frac{1}{4}$, donc $3b = \frac{1}{4}$, ce qui donne : $b = \frac{1}{12}$.

Nous avons aussi $f(6) = 5$, ainsi $ae^{0,5+c} = 5$, d'où $ae^c = 3$.

Ainsi $b = \frac{1}{12}$, et le choix de a et de c doit vérifier : $ae^c = 3$. Donc $a = 3$ et $c = 0$ conviennent.

79 On a $f(x) = -3e^{ax+b}$ et $f'(x) = -3ae^{ax+b}$, ce qui donne $f'(0) = -6e$, et $f(0) = -3ae^b$ donc $a = 2$ et $b = 1$.

L'équation est : $y = -6ex - 3e$.

80 **1. a.**

$n \leftarrow 0$
Tant que $e^{0,8n} \leqslant A$
$\quad n \leftarrow n + 1$
$\quad$Retourner n

b. L'algorithme tourne car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$,

Pour toutes les valeurs prises par A, à partir d'un certain rang, u_n dépassera le seuil A.

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
import math

def suite(A):
    n=0
    u=1
    while u<A:
        n=n+1
        u=math.exp(0.8*n)
    return n
```

```
>>> suite(100)
6
>>> suite(1000)
9
>>>
```

81 **a.** Expression of the derivative function:

$h'(x) = \frac{-4e^{-4x-3}(-3x+1) - e^{-4x-3}(-3)}{(-3x+1)^2}$
$\quad = \frac{(12x-1)e^{-4x-3}}{(-3x+1)^2}$.

b. and **c.** $12x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 12x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{12}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Sign of $h'(x)$		−	0	+	‖	+	
Variations of h		↘		↗	‖	↗	

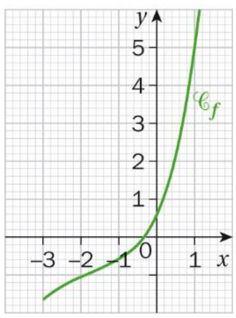
d. $h(1) = \frac{e^{-7}}{-2}$ and $h'(1) = \frac{11e^{-7}}{4}$, an equation of the tangent line is $y = \frac{11e^{-7}}{4}x - \frac{13e^{-7}}{4}$.

82 Soit $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}} + 1$, et

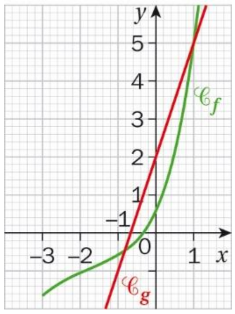
$h'(x) = (e^{\frac{x}{2}} - 1)^2 \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout x, $h(x) \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant g(x)$, la courbe représentative de f est toujours au-dessus de celle de g, et les deux courbes se coupent au point d'abscisse 0.

83 **1.**



b. $x \approx -0{,}33$.
c. pas de solution sur $[-3 ; 2]$.
2.a.



b. On lit $x \approx -0{,}83$ et $x \approx 1{,}01$.

x	-3		$\approx -0{,}83$		$\approx 1{,}01$		2
Signe de $f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

84 **1. a.** $g'(x) = (-2x + 5)e^{-2x+6}$.
b. On constate que le signe de $g'(x)$ dépend de celui de $-2x + 5$.

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

Graphiquement, $g(1{,}75) \approx 0$.
2. a. Donc l'entreprise doit vendre au moins 1,75 tonnes pour réaliser un bénéfice.
b. Le bénéfice maximal est atteint pour 2,5 tonnes et vaut environ 4,36 millions d'euros.

85 **a.** $e^{2x}(2x^2 - 2x - 18) = 2x^2e^{2x} - 2xe^{2x} - 18e^{2x}$
b. D'après le logiciel,
$f'(x) = \frac{-2xe^{2x}+2x^2e^{2x}-18e^{2x}}{(x^2-9)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2-x-9)}{(x^2-9)^2}$.
Le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $x^2 - x - 9$.
On calcule le discriminant : 37, on obtient deux racines : $\frac{1-\sqrt{37}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$.
c.

x	-3		$\frac{1-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{37}}{2}$		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

86 On calcule les deux dérivées : $f'(x) = 12e^{-12x}$ et $g'(x) = 12e^{3x}$.
Pour $a = 0$, $f'(0) = g'(0) = 12$ et $f(0) = g(0) = -1$, donc une tangente commune en $(0 ; -1)$.
Au point d'abscisse 0, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$ est $y = 12x - 1$.

OBJECTIF 3
Modéliser par une croissance ou une décroissance exponentielle

87 Réponse **d.**

88 **a.** décroissance ;
b. décroissance ;
c. ni l'un ni l'autre ;
d. décroissance.

89 **a.** Faux, il s'agit d'une suite arithmétique.
b. Faux, car $v_n = 0{,}2^n v_0$, donc il s'agit d'une décroissance exponentielle.
c. Faux, car w_n change de signe et n'a pas de monotonie.
d. Vrai, car $a_n = -5\times3^n$.

90 Réponse **d.**

91 **a.** $u_0 = 3$; $u_1 = 2{,}4$; $u_2 = 1{,}92$ et $u_3 = 1{,}536$.
b. $k \approx -0{,}223$.

92 **a.** $v_0 = 0{,}4$; $v_1 = 2{,}04$; $v_2 = 10{,}404$; $v_3 = 53{,}0604$.
b. $k \approx 1{,}629$.

93 Leur placement peut être modélisé par la suite arithmétique dont le nuage de points se trouvent sur une droite.
On peut leur proposer un placement à intérêts composés, il faut établir le taux d'intérêts et le capital initial en fonction de la durée du placement et de la somme souhaitée à la fin du placement.
Exemple pour un capital initial de 706 euros avec un taux de 2 %, Gaetan aura sur son compte 1050,56 euros à son 2e anniversaire avec ce placement à croissance exponentiel. Avec le modèle initial, Gaetan aurait 1 050 euros.

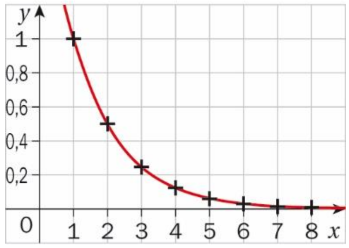
94 **1.** $u_0 = 35$ car il y a 35 000 ouvrages ;

$u_{n+1} = 0{,}95u_n$;
$u_1 = 33{,}25$ et $u_2 \approx 31{,}59$.
2. $u_n = 35 \times 0{,}95^n$.
3. a. = 0,95*B2
b. $f(13) \approx 18{,}27$, donc environ la moitié du stock central.

95 Énoncé : Dans un laboratoire, on observe l'évolution d'une population de bactéries.
À l'instant $t = 0$ où démarre l'expérience, il y a 4 bactéries. On observe que la population augmente de 15% par heure.
On modélise cette situation par une suite u_n, où u_n représente le nombre de bactéries au bout de n heures.
a. Déterminer u_0, u_1 et u_2.
b. Quelle est la nature de cette suite ?
c. Exprimer u_n en fonction de n.
d. Représenter graphiquement les six premiers termes de la suite.
e. Le nuage de points obtenu se situe sur la représentation graphique d'une fonction de la forme $f(t) = a \times e^{kt}$. Déterminer une expression de la fonction f.
f. Quel sera le nombre de bactéries au bout de 6 h 15 min ?

96 **a.** $\ell_1 = 1$ et $\ell_{n+1} = \ell_n \times 0{,}5$.

b. $\ell_0 = 2$, $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = \frac{1}{2}$ et $\ell_3 = \frac{1}{4}$.



c. On a : $a = f(0) = 2$.
$k \approx -0{,}69$. On a $f(t) = 2e^{-0{,}69t}$.
d. 2 > 0 et l'exponentielle étant toujours strictement positive, on a donc $f(t) > 0$.
e. On a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, donc elle reste sur la table.

97 **a.** $f(t) = \underline{N}_0 e^{-\lambda t}$, $f'(t) = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda f(t)$
and $f(0) = N_0$.
b. $-\lambda < 0$ the rate of decay of a radioactive substance is decreasing exponentially.

98 **a.** $f'(t) + \frac{1}{5} f(t) = 4$
$\Leftrightarrow \left(\frac{-a}{5} + \frac{a}{5}\right) e^{-\frac{t}{5}} + \frac{b}{5} = 4$
$\Leftrightarrow b = 20$.
$f(0) = 1\,000 \Leftrightarrow a + 20 = 1\,000 \Leftrightarrow a = 980$.
b. Par lecture graphique, on trouve $t \approx 5$ h.

99 Démonstration permettant de montrer que **la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur ℝ**.

- On considère la fonction g définie pour tout réel x par :

$$g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$$

On admet que g est dérivable sur ℝ ; pour tout nombre réel x :

$$g'(x) = \mathbf{\exp(x)\exp(-x) - \exp(x)\exp(-x)} = 0.$$

On en déduit que g est une fonction **constante**.
Donc, pour tout nombre réel x, $g(x) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.
Ainsi, pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = \mathbf{1}$.
Or un produit est nul si seulement si **l'un des facteurs est nul**.
Donc, pour tout nombre réel x, on a $\exp(x) \neq 0$.

- Pour tout nombre réel x, $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \mathbf{e^x}$.

Or un carré est toujours **positif**, donc $\mathbf{e^x \geqslant 0}$.

- Pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \mathbf{\exp(x)}$.

La dérivée de exp est donc de signe **positif** sur ℝ.
Et la fonction exponentielle est donc **croissante** sur ℝ.

100 **a.** On calcule :

$f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0.$

Donc f est constante, en particulier pour tout y réel, $f(y) = f(0)$. Ainsi, pour tout x réel, on a $f(x) = f(y)$.

D'où : $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$.

b. Comme $f(x) = e^y$ on a donc $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$;

d'où $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

c. En particulier pour $y = -x$, on a :
$\exp(x - x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.
Ce qui donne : $\exp(0) = \exp(x) \times \exp(-x)$,
soit $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

101 **a.** et **b.** D'après le cours sur la dérivation, pour toute fonction g définie et dérivable sur ℝ et, pour tous nombres réels a et b, la dérivée de la fonction $t \mapsto g(at + b)$ est la fonction $t \mapsto a \times g'(at + b)$.
La fonction f_k est de la forme $g(at + b)$ avec $a = k$, $b = 0$ et où g est la fonction définie et dérivable sur ℝ par $g : t \longmapsto e^t$ de dérivée la fonction $g' : t \longmapsto e^t$.
En appliquant la formule du cours, $f_k : t \longmapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur ℝ et, pour tout nombre réel t, on a : $f_k'(t) = k \times e^{kt}$.

c. Le nombre réel k est strictement positif et pour tout nombre réel t, $e^{kt} > 0$ donc pour tout nombre réel t le produit $k \times e^{kt}$ est strictement positif. Ainsi pour tout nombre réel t, $f_k'(t) > 0$ et la fonction f_k est strictement croissante sur ℝ.

102 **a.** et **b.** D'après le cours sur la dérivation, pour toute fonction h définie et dérivable sur ℝ et, pour tous nombres réels a et b, la dérivée de la fonction $t \mapsto h(at + b)$ est la fonction $t \mapsto a \times h'(at + b)$.
La fonction g_k est de la forme $h(at + b)$ avec $a = -k$, $b = 0$ et où h est la fonction définie et dérivable sur R par $h: t \longmapsto e^t$ de dérivée la fonction $h' : t \longmapsto e^t$.
En appliquant la formule du cours, $g_k : t \longmapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur ℝ et, pour tout nombre réel t, on a : $g_k'(t) = (-k) \times e^{-kt}$.

c. Le nombre réel $-k$ est strictement négatif et pour tout nombre réel t, $e^{-kt} > 0$ donc pour tout nombre réel t le produit $(-k) \times e^{kt}$ est strictement négatif. Ainsi pour tout nombre réel t, $g_k'(t) < 0$ et la fonction g_k est strictement décroissante sur ℝ.

103 **1. a.** pour $n = 0$ l'égalité est vérifiée puisque $e^{0\times b} = e^0 = 1$ et $(e^b)^0 = 1$

b. Supposons que pour un entier N l'égalité est vérifiée, c'est-à-dire $e^{Nb} = \left(e^b\right)^N$.

Alors $e^{(N+1)b} = e^{Nb+b} = e^{Nb}e^b = \left(e^b\right)^N e^b$

$= \left(e^b\right)^{N+1}$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : L'égalité est initialisée au rang $n = 0$ et héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. La suite est donc géométrique de raison e^b et de premier terme égal à 1.

3. a. Si $b > 0$, alors $e^b > 1$, donc la suite géométrique est strictement croissante.

b. Si $b < 0$, alors $0 < e^b < 1$, donc la suite géométrique est strictement décroissante.

104 **a.** $f(x) = 5e^{\frac{x}{5}} - 4$, $f'(x) = e^{\frac{x}{5}}$ donc $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$, on obtient l'équation : $y = x + 1$.

b. $g'(x) = e^{\frac{x}{5}} - 1$; $g'(0) = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		–	0	+	
Variations de g		↘	0	↗	

c. Soit : $f(x) - (x+1) = 5e^{\frac{x}{5}} - 5 - x$, donc $g(x) = 5e^{\frac{x}{5}} - 5 - x$, or d'après le tableau de variations $g(x) \geqslant 0$.
Donc $f(x) \geqslant x + 1$, et la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente.

105 **a.** $f'(t) = (4t - 2t^2)e^{-t+0,5}$.

t	0		2		$+\infty$
Sign of $f'(t)$		+	0	–	
Variations of f		↗		↘	

b. The maximum is reached for $t = 2$,
$f(2) \approx 1.785 < 2$ therefore the medicine is not dangerous.
c. This medicine is effective during 4.6 hours.

106 Soit $g(x) = \frac{ax+b}{e^x}$, on a $g'(x) = \frac{-ax+(a-b)}{e^x}$.
Par identification avec f, $-a = 1$ et $a - b = 2$, donc $a = -1$ et $b = -3$.
On vérifie bien que $g(x) = \frac{-x-3}{e^x}$ a pour dérivée $f(x)$.

107 **1.** $ch(-x) = \frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2} = ch(x)$, donc ch est paire.
$sh(-x) = \frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{2} = -sh(x)$, donc sh est impaire.

2. $ch^2(x) - sh^2(x) = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}}{4}$
$= 1$.

3. a. $sh'(x) = \frac{e^x+e^{(-x)}}{2} = ch(x)$.
b. $sh'(x)$ est donc strictement positive et sh est croissante sur $\mathbb{R}$.
$sh(0) = 0$.

x	$-\infty$	0	∞
Variations de sh	↗	0	↗

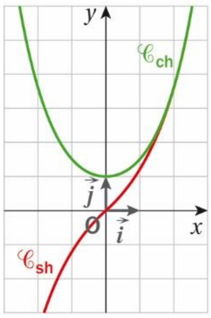
c. On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $sh'(x)$		–	0	+	

4. a. $ch'(x) = \frac{e^x - e^{(-x)}}{2} = sh(x)$.
b.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $sh(x)$		–	0	+	
Variations de ch		↘	1	↗	

c. Le minimum est $ch(0) = 1$.
5.a.



b. L'origine du repère semble être un centre de symétrie. Soit A(a ; $sh(a)$) et B($-a$; $sh(-a)$) sur la courbe représentative de sh. On montre que O est le milieu de [AB] par calcul de l'abscisse et de l'ordonnée du milieu.
c. L'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe représentative de ch. Soit A(a ; $ch(a)$) et B($-a$; $ch(-a)$) sur la courbe représentative de ch. Comme $ch(-a) = ch(a)$ les points A et B ont la même ordonnée.

108 **a.** On a $f'(x) = e^x - x$. **b.** $f''(x) = e^x - 1$.
c. et **d.**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		–	0	+	
Variations de f'		↘	1	↗	

e. On constate que pour tout x, $f'(x)$ est strictement supérieure à 0 (car supérieure à 1). Donc f est croissante.

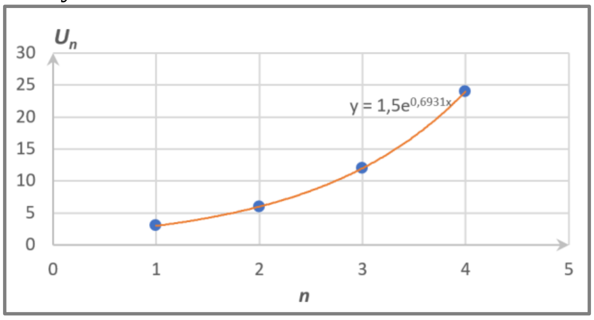
109 Comme $f(x) = 2(x+1)\mathrm{e}^{1-x}$, $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{1-x}$, $f''(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{1-x}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗		↘	

Quant à $f''(x)$, elle est du signe de $x-1$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		−	0	+	
Convexité de f		concave		convexe	

110 **1.** $u(n) = 2u(n-1)$ and $u(1) = 3$, so:
$u(n) = 3 \times 2^{n-1}$.
2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
2. a. et **b.** $u_n = 3\times 2^{n-1}$, using the graph: $a = 3$, $k \approx 0{,}69$, $b \approx -0{,}69$.
$f(x) = 1{,}5\mathrm{e}^{0{,}69x}$.
19 days and 10 hours



111 **1. a.** $g'(x) = (x^2+2x)\mathrm{e}^x$
b. et **c.**

x	$-\infty$		-2		0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	0	+		+	
Variations de g		↗	$-0{,}45$	↘	-1	↗	0	↗	

d. $\alpha \approx 0{,}7$.
e.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		−	0	+	

2. a. f n'est pas définie en 0, car $\frac{1}{x}$ est non définie en 0.
b. On a $f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.
c. et **d.** On constate que $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.

x	$-\infty$		0		$\alpha\approx 0{,}7$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		−	‖	−		+	
Variations de f		↘	‖	↘		↗	

112 **1.** Soit $f(x) = ax$, on vérifie bien que
$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.
Donc tout fonction linéaire vérifie l'équation fonctionnelle.
2. a. $f(0) = f(0) + f(0)$,
donc $2f(0) = f(0) et f(0) = 0$.
b. On a $f(a+h) = f(a) + f(h)$.
Donc :
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h}$
car $f(0) = 0$.
c. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0)$.
Donc pour tout a réel, $f'(a) = f'(0)$, et
$f(x) = f'(0)x + b$ où b est une constante.
Or $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
donc $f'(0)(x+y) + b = f'(0)(x+y) + 2b$.
D'où $b = 2b$ et $b = 0$.
Finalement, $f(x) = f'(0)x$ et f est linéaire.

113 **1. a.** et **b.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
On obtient $y = 4\mathrm{e}^{-0{,}1x}$, donc $f(t) = 4\mathrm{e}^{-0{,}1t}$.
c. On a $f(0) = 4$, la tension initiale est 4 V.
d. On a : $a = 4$ et $\lambda = 0{,}1$.

2. a. $U(t) = E \times \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ on a $\tau = 10$ et $E = 4$.
b. $f'(t) = -0{,}4\mathrm{e}^{-0{,}1t}$, on a donc $f(0) = 4$ et $f'(0) = -0{,}4$. Ainsi une équation de la tangente au point $t = 0$ est $y = -0{,}4t + 4$. Cette tangente coupe l'axe des abscisses lorsque $y = 0$.
On résout l'équation $-0{,}4t + 4 = 0$, soit :
$t = \frac{-4}{-0{,}4} = 10 = RC$.
c. $R = \frac{10}{C} = \frac{10}{0{,}2} = 50$.
$I = \frac{U}{R}$ avec $U = 1{,}47$ V à $t = 10$ s (voir tableau)
donc $I = \frac{1{,}47}{50} \approx 0{,}3$.

114 **1. a.** Pour $x = 0$, le dénominateur s'annule.

b. On calcule $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-e^x e^x}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$.

c. On constate donc que $f'(x)$ est négative :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$-$
Variations de f	↘	‖	↘

2. a. On cherche x tel que $f'(x) = -1$ donc :

$-\frac{e^x}{(e^x-1)^2} = -1$ et $e^x = (e^x - 1)^2$.

En développant, on obtient : $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$.

b. On pose $X = e^x$, et on doit résoudre :

$X^2 - 3X + 1 = 0$. Le discriminant est égal à 5. Donc $X = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Donc $e^x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ ou $e^x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, avec la calculatrice : $x \approx -0{,}96$ ou $x \approx 0{,}96$.

c. Il y a deux points possibles d'abscisses $-0{,}97$ et $0{,}96$.

115 **a.** On a $y = f'(a)(x-a) + f(a)$,

donc $y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$

Pour $x = a + h, y = f'(a)h + f(a)$

b. On a $f(a+h) \approx f'(a)h + f(a)$

et $e^{a+h} \approx e^a(1+h)$.

c. On a $f(a+nh)) \approx f(a)(1+h)^n$

Pour $a = 0, f(0 + n \times \frac{1}{n}) \approx f(0)(1+\frac{1}{n})n$

Donc $f(1) \approx f(0)(1+\frac{1}{n})n$. Or $f(1) = e$ et $f(0) = 1$ donc $e \approx (1+\frac{1}{n})n$.

d.

```
Def valeur_approchee(n)
Return (1 + 1/n)**n
```

116 **1. a.** Hauteur du trapèze : OC = 1.

Longueur de sa grande base : BC = e.

Longueur de sa petite base : OA = 1.

b. aire(ABCO) = $\frac{1+e}{2}$

2. a. aire(AEDO) = $\frac{(1+e^{0,5})}{2} \times 0{,}5 = \frac{1+\sqrt{e}}{4}$ et

aire(EBCD) = $\frac{(e+e^{0,5})}{2} \times 0{,}5 = \frac{e+\sqrt{e}}{4}$

b. aire = $\frac{1+\sqrt{e}}{4} + \frac{e+\sqrt{e}}{4} = (\frac{1+\sqrt{e}}{2})^2$

3. a. aire($A_0A_1B_1B_0$) = $\frac{1+e^{\frac{1}{n}}}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1+e^{\frac{1}{n}}}{2n}$

b. aire = $\frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{k}{n}}+e^{\frac{k+1}{n}}}{2}$

c.

$A \leftarrow 0$
Pour k allant de 0 à $n-1$:
$\quad A \leftarrow A + \frac{1}{n} \times \frac{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{k+1}{n}}}{2}$
Fin Pour
Afficher A

d. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math

def somme_aires_n_trapezes():
    n=int(input("Entrer un nombre entier naturel n différent de zéro : "))
    A=0
    for k in range(0,n):
        p=float(k)
        A=A+math.exp(p/n)/n*(1+math.exp(1.0/n))/2
    return A
```

```
>>> aire(10)
1.7197134913893146
```

117 **1. a.** $c'(x) = 2e^{1-0,5x} - 0{,}5(2x-9)\,e^{1-0,5x}$.

$c'(x) = (6{,}5-x)\,e^{1-0,5x}$, son signe dépend donc de celui de $6{,}5 - x$.

b. et **c.**

x	$-\infty$	6,5	$+\infty$
Signe de $c'(x)$	+	0	$-$
Variations de c	↗		↘

Le coût est ainsi maximal pour $x = 6{,}5$, et $C(6{,}5) \approx 0{,}422$. Le coût total mensuel maximum est de 4 200 euros pour 6,5 tonnes produites.

2. a. Résolvons $2x^2 - 9x - 18 = 0$.

Le discriminant est égal à 225, les deux solutions sont $\frac{9-\sqrt{225}}{4}$ et $\frac{9+\sqrt{225}}{4}$, c'est-à-dire respectivement, $-1{,}5$ et 6.

On a $g(x) = -0{,}5\,e^{1-0,5x}(-2x^2 + 9x + 18)$.

x	$-\infty$	$-1{,}5$		6		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	$-$	0	$-$	
Variations de f	↗		↘		↗	

b. Le coût moyen minimum est donc $f(6) \approx 0{,}068$.

Le coût moyen maximum est atteint pour 6 tonnes de production et vaut 68 euros environ.

118 **a.** 0,1 donc 10 %.

b. 6 000 ans environ.

c. On lit $f(6) = 0{,}5$ et $e^{-6k} = 0{,}5$, donc $k \approx 0{,}12$.

d. Parce qu'au départ l'échantillon a 100 % de son carbone.

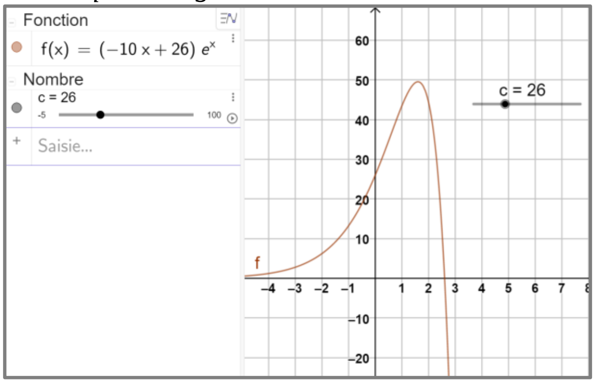
119 On calcule $f'_k(x) = 1 - k\mathrm{e}^{-x}$, $f'_k(x) = 0$ équivaut à $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{k}$, donc il existe une unique solution : α_k.

x	$-\infty$	α_k	$+\infty$
Signe de $f'_k(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f_k	↘		↗

De plus, $f_k(\alpha_k) = \alpha_k + k\mathrm{e}^{-\alpha_k} = 1 + \alpha_k$.
Les minima sont donc les couples : $(\alpha_k, 1 + \alpha_k)$ avec $\mathrm{e}^{-\alpha_k} = \frac{1}{k}$, ils sont donc clairement tous alignés sur la droite d'équation $y = 1 + x$.

120 **Méthode expérimentale :**

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.



$c_1 \approx 26$; $c_2 \approx 30{,}8$.

Raisonnement :
On a $f'(t) = (-10t + c - 10)$.

x	0	$\frac{c}{10} - 1$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
Variations de f	↗	$10\mathrm{e}^{\frac{c}{10}-1}$	↘

On cherche la valeur c_1 qui vérifie $10\mathrm{e}^{\frac{c}{10}-1} = 50$ et c_2 qui vérifie $10\mathrm{e}^{\frac{c}{10}-1} = 80$.
Les élèves peuvent déterminer graphiquement les valeurs de c en traçant la fonction $g(c) = \mathrm{e}^{\frac{c}{10}-1}$ et en cherchant les solutions sur le graphique de $g(c) = 5$ puis $g(c) = 8$.
Les valeurs exactes sont $c_1 = 10\ln(5) + 10$ et $c_2 = 10\ln(8) + 10$.

121 Si $f(x) = a\mathrm{e}^{kx+r}$, alors $f'(x) = ak\mathrm{e}^{kx+r}$.
Et $f(-1) = a\mathrm{e}^{-k+r}$, $f'(-1) = ak\mathrm{e}^{-k+r}$.
On a comme équation de la tangente :
$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$
$\quad = f'(-1)x + f'(-1) + f(-1)$
Par identification :
$f'(-1) = -8\mathrm{e}$ et $f'(-1) + f(-1) = -4\mathrm{e}$
soit $f(-1) = -4\mathrm{e} + 8\mathrm{e} = 4\mathrm{e}$.
Donc $ak\mathrm{e}^{-k+r} = -8\mathrm{e}$ et $a\mathrm{e}^{-k+r} = 4\mathrm{e}$.
Ainsi $a = 4$, $k = -2$ et $r = -1$.

CHAPITRE 7

Fonctions trigonométriques

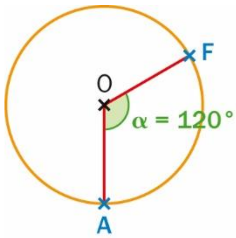
► *Les exercices* 1 *à* 7 *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 190 et 191 du manuel

1 La grande roue de Lyon

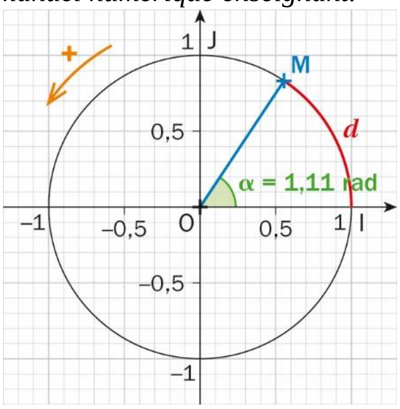
1. Périmètre = Diamètre × π.
Donc $P = D \times \pi = 60 \times \pi = 60\pi \approx 188{,}5$ m.
La longueur de la guirlande en environ de 188,5 mètres.
2. a. $\frac{3}{4} \times P = \frac{3}{4} \times 60\pi = 45\pi \approx 141{,}37$ m. Mila aura parcouru environ 141,37 mètres.
b. $\frac{1}{8} \times P = \frac{1}{8} \times 60\pi = 7{,}5\pi \approx 23{,}56$ m. Mila aura parcouru environ 23,56 mètres.
c. $\frac{5}{8} \times P = \frac{5}{8} \times 60\pi = 37{,}5\pi \approx 117{,}81$ m. Mila aura parcouru environ 117,81 mètres.
3. a. $\frac{1}{42} \times P = \frac{1}{42} \times 60\pi = \frac{10}{7}\pi \approx 4{,}49$ m.
La distance sur la roue entre deux nacelles consécutives est environ de 4,49 mètres.
b. $\frac{360}{42} = \frac{60}{7} \approx 8{,}57°$.
La mesure d'angle de sommet le centre de la roue et associé à l'arc de cercle entre deux nacelles consécutives est environ de 8,57°.
4. a. Voir la figure ci-contre. (Le schéma n'est à l'échelle ; $r = 3$ cm.)



b. $20\pi = \frac{1}{3} \times 60\pi = \frac{1}{3} \times P$. Mila a parcouru le tiers du tour.
$\widehat{AOF} = \frac{1}{3} \times 360 = 120°$.

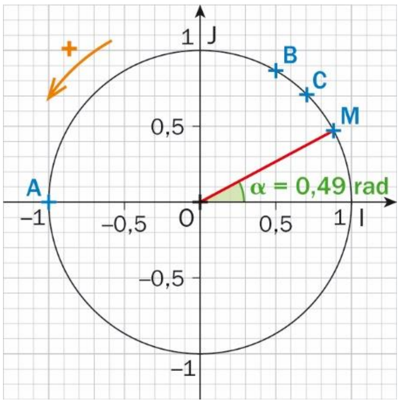
2 Avec un logiciel de géométrie dynamique

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



2. c. On observe que quel que soit la position du point M sur le cercle trigonométrique, la longueur de l'arc IM est égale à la mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$.

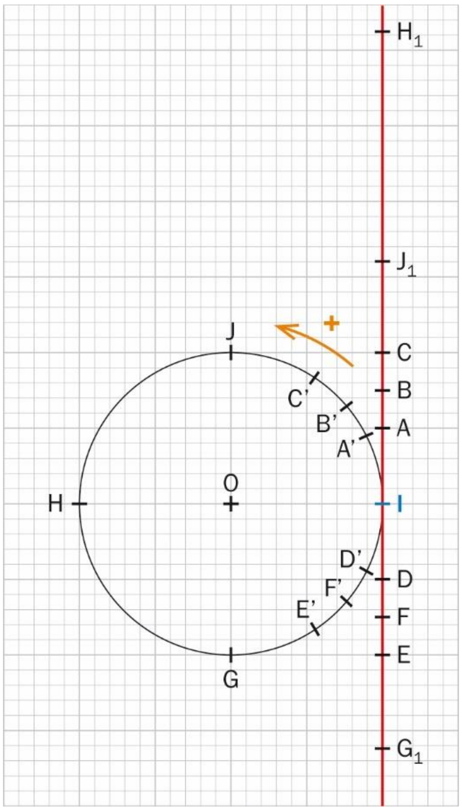
3.



Longueur de l'arc IM	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Position du point M	A	I	J	C	B

3 Avec une bobine et du fil

1. ; 2.a. ; 2.b. et 3.



Il y a une infinité de possibilités pour les points J_1, H_1 et G_1 sur le fil déroulé, car on peut enrouler le fil autant de fois que l'on veut autour de la bobine.

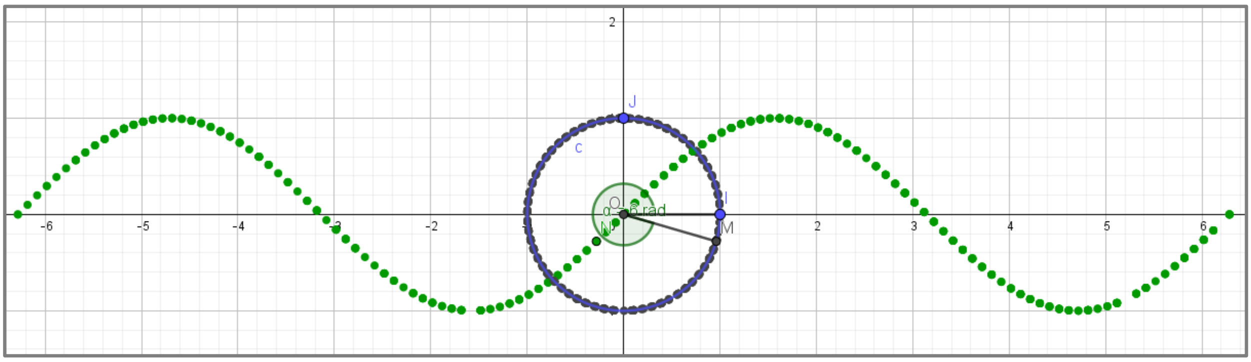
4. a. Le point M viendrait se placer sur le point G, car $\frac{11\pi}{2} = \frac{12\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 3 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$.

b. Le point N viendrait se placer sur le point J, car $\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{2}$.

4 Courbe point par point d'une fonction trigonométrique

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

2. a. Trace de la courbe représentative de la fonction sinus sur $[-2\pi ; 2\pi]$:

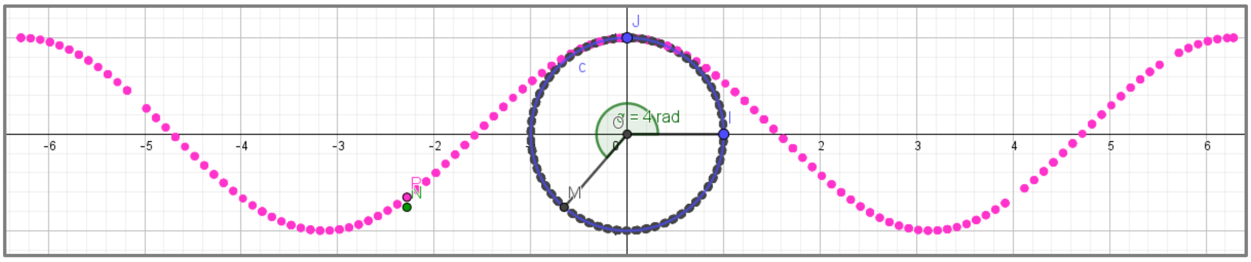


Cette courbe semble symétrique par rapport à O, origine du repère (O, I, J).

b.

t	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Variations de sin	0 ↗	1 ↘	-1 ↗	1 ↘	-1 ↗	0

3. Trace de la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[-2\pi ; 2\pi]$:



Cette courbe semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

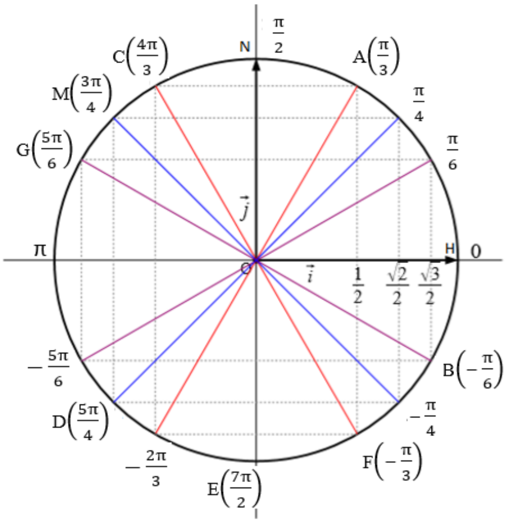
t	-2π	$-\pi$	0	π	2π
Variations de cos	1 ↘	-1 ↗	1 ↘	-1 ↗	1

Application

p. 195 à 197 du manuel

Savoir-faire 1
Se repérer sur le cercle trigonométrique

9



10 **a.** Non.

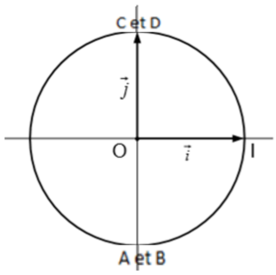
b. Oui, car $21\frac{\pi}{4} = 4\pi + 5\frac{\pi}{4}$.

11 **a.** $\frac{8\pi}{3}$ et $-\frac{4\pi}{3}$. **b.** $\frac{14\pi}{5}$ et $-\frac{6\pi}{5}$.

c. $\frac{7\pi}{4}$ et $-\frac{9\pi}{4}$. **d.** $-\frac{13\pi}{6}$ et $\frac{11\pi}{6}$.

Savoir-faire 2
Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel

12 **a.**



b. • $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -1$.

• $\cos\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right) = 1$.

13 **a.** $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $\cos(-5\pi)=\cos(-\pi) = -1$

c. $\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

d. $\cos\left(-\frac{4\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

14 **a.** $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b. $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c. $\sin(-3\pi) = \sin(-\pi) = 0$

d. $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15 **a.** Les cosinus sont égaux et les sinus sont opposés.

b. Les sinus sont égaux et les cosinus sont opposés.

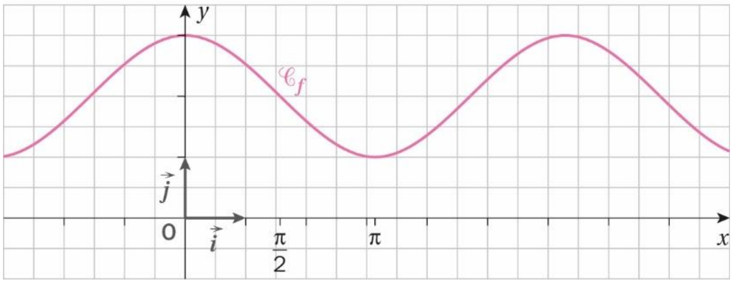
c. Les sinus et les cosinus sont opposés.

d. Ces deux réels correspondent au même point sur le cercle trigonométrique, donc leurs sinus et cosinus sont égaux.

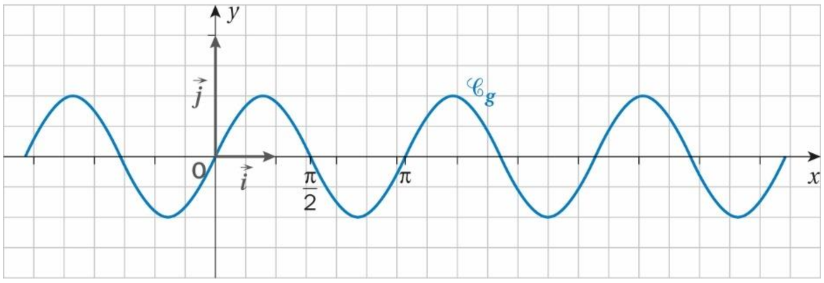
SAVOIR – FAIRE 3

Traduire graphiquement la parité et la périodicité

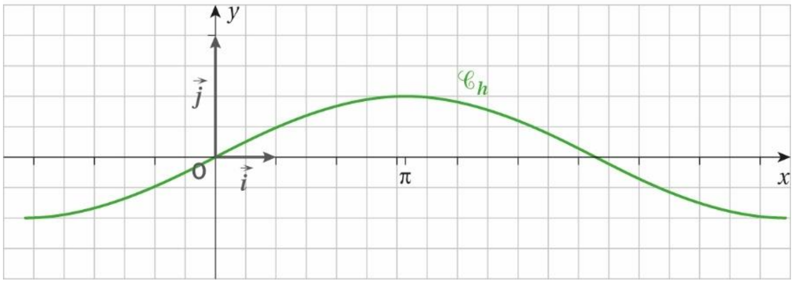
16 **a.** *f* est paire et périodique de période 2 π, donc voici sa courbe sur [−π ; 3π] :



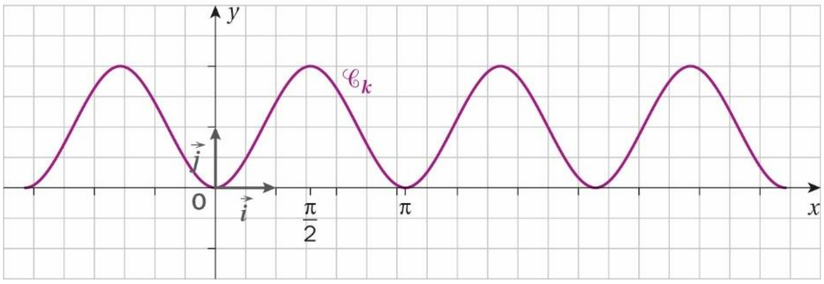
b. *g* est impaire et périodique de période π, donc voici sa courbe sur [−π ; 3π] :



c. *h* est impaire et périodique de période 3 π, donc voici sa courbe sur [−π ; 3π] :



d. *k* est paire et périodique de période π, donc voici sa courbe sur [−π ; 3π] :



► *Les exercices* **17** *à* **29** *de la rubrique « ... **Et faire le point** » sont corrigés en fin de manuel* (*p. 368*).

Développer ses stratégies et méthodes

p. 200 du manuel

30 **a. Stratégie 2** : $x - x' = \frac{22\pi}{5} = 4\pi + \frac{2\pi}{5}$.

Stratégie 3 : $\frac{2\pi}{5} \neq \text{k} \times 2\pi,\ k \in Z$ donc x et x' ne sont pas associés au même point du cercle trigonométrique.

b. Stratégie 2 : $x - x' = \frac{14\pi}{7} = 2\pi$.

Stratégie 3 : $2\pi = 1 \times 2\pi$, donc x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique.

c. Stratégie 2 : $x - x' = \frac{12\pi}{6} = 2\pi$.

Stratégie 3 : $2\pi = 1 \times 2\pi$, donc x et x' sont associés au même point du cercle trigonométrique.

d. Stratégie 2 : $x - x' = \frac{7\pi}{6}$.

Stratégie 3 : $\frac{7\pi}{6} \neq k \times 2\pi,\ k \in Z$ donc x et x' ne sont pas associés au même point du cercle trigonométrique.

31 **a. Stratégie 1 :** $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

b. Stratégie 2 : $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

c. Stratégie 1 : $-\frac{5\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d. Stratégie 2 : $-\frac{3\pi}{4} = -\pi + \frac{\pi}{4}$ donc :

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

e. Stratégie 1 : $\frac{17\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

f. Stratégie 1 : $\frac{13\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(\frac{13\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

g. Stratégie 1 : $\frac{-7\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

h. Stratégie 1 et stratégie 2 : $\frac{29\pi}{3}$ et $\frac{-\pi}{3}$ sont associés au même point du cercle trigonométrique donc : $\cos\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

et $\sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

i. Stratégie 1 : $\frac{-42\pi}{6}$ et π sont associés au même point du cercle trigonométrique, donc :

$\cos\left(-\frac{42\pi}{6}\right) = \cos(\pi) = -1$

et $\sin\left(-\frac{42\pi}{6}\right) = \sin(\pi) = 0$.

32 **a.** $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{11\pi}{3}$; $\frac{-7\pi}{3}$

b. $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{-3\pi}{4}$

c. $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$; $\frac{-\pi}{2}$

d. $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{19\pi}{6}$

e. $\frac{12\pi}{7}$; $\frac{26\pi}{7}$; $-\frac{16\pi}{7}$

33 **a.** $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.

b. $\cos\left(-\frac{29\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

et $\sin\left(-\frac{29\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. $\cos\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1$

et $\sin\left(\frac{18\pi}{2}\right) = \sin(\pi) = 0$.

d. $\cos\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$

et $\sin\left(\frac{22\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

e. $\cos\left(-\frac{33\pi}{3}\right) = \cos(\pi) = -1$

et $\sin\left(-\frac{33\pi}{3}\right) = \sin(\pi) = 0$.

f. $\cos\left(\frac{45\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

et $\sin\left(\frac{45\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

34 **a.** $x = \frac{\pi}{3}$
b. $x = \frac{3\pi}{4}$
c. $x = \frac{5\pi}{6}$
d. $x = -\pi$ ou $x = -3\pi$
e. $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{-\pi}{6}$
f. $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$
g. $\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{11\pi}{6}$

► *Les exercices* **35** *à* **44** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel* (*p. 374*).

Entraînement

p. 202 à 207 du manuel

Objectif 1

Exploiter le cercle trigonométrique

45 **1. a.** Il faut multiplier par 8 : $8 \times \frac{\pi}{4} = 2\pi$.

Il faut multiplier par 12 : $12 \times \frac{\pi}{4} = 3\pi$.

b. Il faut multiplier par 6 : $6 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi$.

Il faut multiplier par 9 : $9 \times \frac{\pi}{3} = 3\pi$.

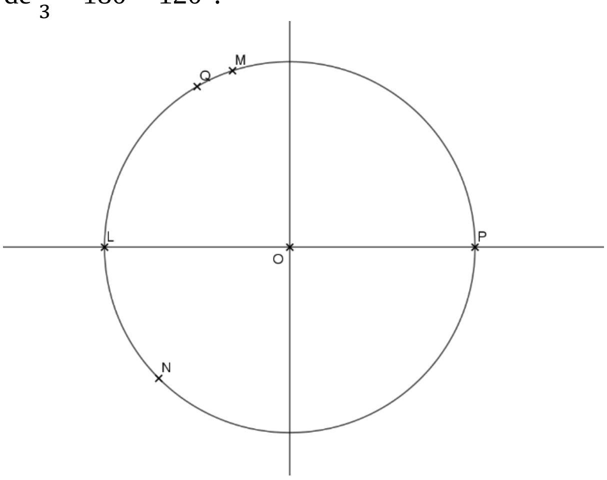
2. a. $5\pi = \pi + \mathbf{2} \times 2\pi$
b. $27\pi = \pi + \mathbf{13} \times 2\pi$
c. $59\pi = -\pi + \mathbf{30} \times 2\pi$
d. $2\,019\pi = -\pi + \mathbf{1010} \times 2\pi$

46 **1. a.** Le point C est associé au nombre $\frac{\pi}{3}$.
b. Le point Q est associé au nombre $-\frac{\pi}{2}$.
c. Le point I est associé au nombre 4π.
d. Le point P est associé au nombre $-\pi$.
e. Le point M est associé au nombre $-\frac{\pi}{4}$.
f. Le point A est associé au nombre $\frac{13\pi}{6}$.
2. Le point B est associé au nombre $\frac{\pi}{4}$.
Le point D est associé au nombre $\frac{2\pi}{3}$.
Le point E est associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$.
Le point F est associé au nombre $\frac{5\pi}{6}$.
Le point G est associé au nombre $\frac{7\pi}{6}$.
Le point H est associé au nombre $\frac{5\pi}{4}$.
Le point L est associé au nombre $\frac{5\pi}{3}$.
Le point N est associé au nombre $\frac{11\pi}{6}$.

47 **a.** Faux : le point du cercle trigonométrique associé au nombre 0 est associé à tous les réels de forme $2k\pi$ avec k un nombre entier relatif. Donc 0 et π ne sont pas associés au même point.

b. Vrai : $\widehat{IOM} = \frac{360 \times \frac{2\pi}{5}}{2\pi} = \frac{360 \times 2}{10} = 72°$.
c. Vrai :
$-\frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = -\frac{12\pi}{6} = -2\pi = -1 \times 2\pi = k \times 2\pi$
avec $k = -1$.
d. Faux : $\frac{11\pi}{6} \notin [2\pi\,;4\pi[$.
e. Vrai : le point du cercle trigonométrique associé au nombre $\frac{\pi}{4}$ est associé à tous les réels de forme $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec k un entier relatif.
f. Faux : le réel $\frac{7\pi}{12}$ correspond à un angle de 105°.

48 **1. a.** $13\pi = \pi + 12\pi$ donc L correspond à un angle de 180°.
b. M correspond à un angle de $\frac{3}{5} \times 180 = 108°$.
c. $-\frac{11\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - 4\pi$ donc N correspond à un angle de $\frac{5}{4} \times 180 = 225°$.
d. P correspond à un angle de 0°.
e. $-\frac{16\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} - 6\pi$ donc Q correspond à un angle de $\frac{2}{3} \times 180 = 120°$.



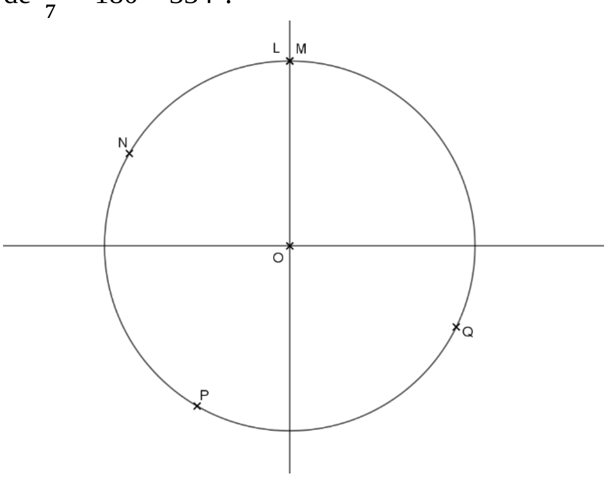
2. a. $\frac{101\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 50\,\pi$ donc L correspond à un angle de $\frac{1}{2} \times 180 = 90°$.

b. $\frac{37\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 18\,\pi$ donc M correspond à un angle de $\frac{1}{2} \times 180 = 90°$.

c. $-\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 2\,\pi$ donc N correspond à un angle de $\frac{5}{6} \times 180 = 150°$.

d. $\frac{28\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 8\,\pi$ donc P correspond à un angle de $\frac{4}{3} \times 180 = 240°$.

e. $-\frac{15\pi}{7} = \frac{13\pi}{7} - 4\,\pi$ donc Q correspond à un angle de $\frac{13}{7} \times 180 \approx 334°$.

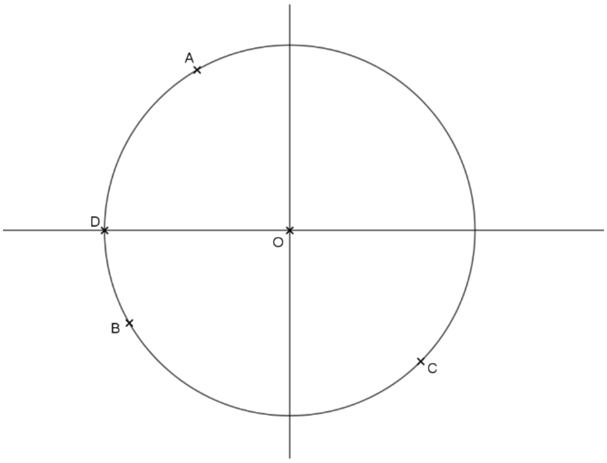


49 **1. a.** $\frac{50\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 16\,\pi$ donc A correspond à un angle de $\frac{2}{3} \times 180 = 120°$.

b. $\frac{19\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + 2\,\pi$ donc B correspond à un angle de $\frac{7}{6} \times 180 = 210°$.

c. $-\frac{25\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} - 8\,\pi$ donc C correspond à un angle de $\frac{7}{4} \times 180 = 315°$.

d. $151\,\pi = \pi + 150\,\pi$ donc D correspond à un angle de 180°.

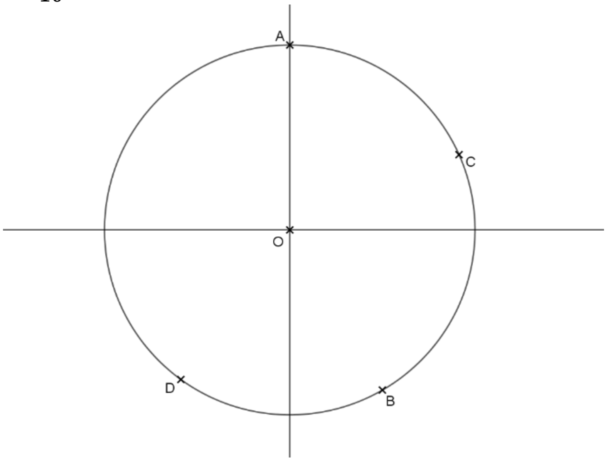


2. a. $\frac{25\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 12\,\pi$ donc A correspond à un angle de $\frac{1}{2} \times 180 = 90°$.

b. $-\frac{43\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} - 8\,\pi$ donc B correspond à un angle de $\frac{5}{3} \times 180 = 300°$.

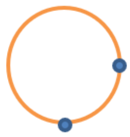
c. C correspond à un angle de $\frac{2}{15} \times 180 = 24°$.

d. $-\frac{7\pi}{10} = \frac{13\pi}{10} - 2\,\pi$ donc D correspond à un angle de $\frac{13}{10} \times 180 = 234°$.



50 **a.** $\frac{2019\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 504 \times 2\pi$, on fait 504 tours entiers.

b. En plaçant la première extrémité à droite (angle de 0°) sur le schéma ci-dessous, puis en enroulant le fil, l'autre extrémité se trouvera en bas (angle de 270°).



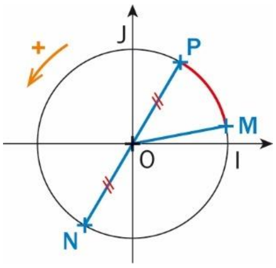
51 **a.** Les nombres 0 ; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{4}$; π ; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{4}$ sont respectivement associés aux points I ; A ; J ; B ; C ; D ; E et F du cercle trigonométrique.

b. Les nombres 0 ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; π ; $\frac{4\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sont respectivement associés aux points I ; G ; H ; K ; L et M du cercle trigonométrique.

52 **a.** Faux : chaque point du cercle trigonométrique est associé à une infinité de nombres réels de la forme $a + k \times 2\pi$ où k est un entier relatif.

b. Faux : les nombres $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont des réels opposés mais $\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\ (\neq 2k\pi)$, donc les nombres $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ne sont pas associés au même point sur le cercle trigonométrique.

53 **a.** , **b.** et **c.** Voir la figure ci-dessous.



b. Mesure de l'angle $\widehat{MON}$:

$\widehat{MON} = \frac{360 \times L}{2\pi R}$ où L est la longueur de l'arc MN et R le rayon du cercle.

$\widehat{MON} = \frac{360 \times 20}{2\pi \times 5} \Leftrightarrow \widehat{MON} = \frac{720}{\pi}$,

donc $\widehat{MON} \approx 229°$.

c. • Mesure de l'angle $\widehat{MOP}$:

$\widehat{MOP} \approx 229° - 180° \approx 49°$.

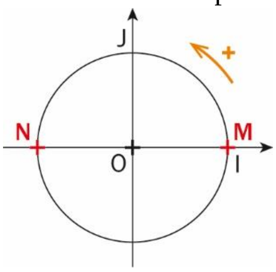
• Longueur de l'arc MP :

$L = 2\pi R \times \frac{x}{360}$ où R est le rayon et x la mesure en degré de l'angle $\widehat{MON}$.

$L \approx 2\pi \times 5 \times \frac{49}{360}$, d'où $L \approx \frac{49\pi}{36}$ et $L \approx 4{,}3$ cm.

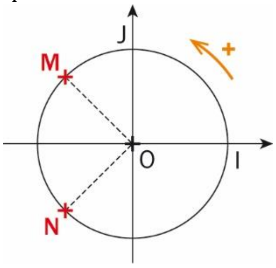
54 **a.** • Les nombres -4π, 0 et 6π sont associés au même point M sur le cercle trigonométrique.

• Le nombre -7π est associé au point N.



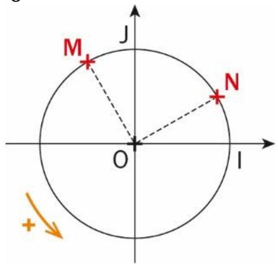
b. • Les nombres $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{13\pi}{4}$ et $\frac{11\pi}{4}$ sont associés au même point M sur le cercle trigonométrique.

• Le nombre $\frac{13\pi}{4}$ est associé au point N.



c. • Les nombres $-\frac{8\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{6}$ et $\frac{2\pi}{3}$ sont associés au même point M sur le cercle trigonométrique.

• Le nombre $\frac{13\pi}{6}$ est associé au point N.



55 • Perimeter of a slice:

$P = R + R + L$ where R is the radius and L the length of the arc.

$P = R + R + 2\pi R \times \frac{x}{360}$ where x is the angle, in degrees, of a slice.

$P = 15 + 15 + 2\pi \times 15 \times \frac{45}{360}$

$\Leftrightarrow P = 30 + 30\pi \times \frac{1}{8} \Leftrightarrow P = 30 + \frac{15\pi}{4}$

$P \approx 41{,}8$ cm.

The perimeter of a slice is approximately 41,8 cm.

• Area of a slice:

$\mathcal{A} = \frac{2\pi R}{8}$ where R is the radius.

$\mathcal{A} = \frac{15\pi}{4}$, so $\mathcal{A} \approx 11{,}8$ cm^2.

The area of a slice is approximately 11,8 cm^2.

56 **1. a.** $\frac{11\pi}{4}$

b. $-\frac{5\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$

2. Donner la mesure principale d'un angle.

3. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math
def nombre(x):
    if x>=0:
        while x>math.pi:
            x=x-2*math.pi
    else:
        while x<=-math.pi:
            x=x+2*math.pi
    return x
```

a. $-\frac{21\pi}{5} = -\frac{21\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} = -\frac{11\pi}{5}$

et $-\frac{11\pi}{5} = -\frac{11\pi}{5} + \frac{10\pi}{5} = -\frac{\pi}{5}$.

b. $\frac{36\pi}{7} = \frac{36\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = \frac{22\pi}{7}$

et $\frac{22\pi}{7} = \frac{22\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = \frac{8\pi}{7}$

et $\frac{8\pi}{7} = \frac{8\pi}{7} - \frac{14\pi}{7} = -\frac{6\pi}{7}$.

57 **a.** La longueur cherchée :

$2\pi \times 6\,371 \approx 40\,030$ km.
D'où le méridien mesure : 20 015 km.

b. Par proportionnalité : $\widehat{\text{LOA}}$ mesure $\frac{5\pi}{18}$.

c. Par proportionnalité, la distance mesure : $\frac{50 \times 20\,018}{180} \approx 5\,561$ km.

58 **1. a.** $\widehat{\text{ASB}} = \frac{360°}{8} = 45°$.
La mesure de l'angle $\widehat{\text{ASB}}$ est de 45°.

b. $\mathscr{A}_1 = \frac{\pi \times r^2}{8} = \frac{\pi \times 10^2}{8} = \frac{100\pi}{8} = 12{,}5\pi$.
L'aire du secteur circulaire ASB est de $12{,}5\pi$ cm^2.

2. L'aire du secteur circulaire ASB de rayon R du gâteau pour 10 personnes est $\mathscr{A}_2 = \frac{\pi \times R^2}{10}$.
Les gâteaux pour 8 et pour 10 personnes ont la même forme et la même hauteur.
Donc pour que les parts du gâteau pour 10 personnes aient le même volume que les parts du gâteau pour 8 personnes, il faut que $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2$.

$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}_2 \Leftrightarrow 12{,}5\pi = \frac{\pi \times R^2}{10} \Leftrightarrow 125\pi = \pi \times R^2$
$\Leftrightarrow 125 = R^2 \Leftrightarrow R = \sqrt{125}$
$\Leftrightarrow R = 5\sqrt{5}$. D'où $R \approx 11{,}2$ cm.

OBJECTIF 2

Définir le cosinus et le sinus d'un nombre réel

59 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

b. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$;

c. $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

d. $\cos(-\pi) = -1$ et $\sin(-\pi) = 0$;

e. $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

f. $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$;

g. $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$;

h. $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

i. $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

j. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$;

k. $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$;

l. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

60 **a.** Secteur 4. **b.** Secteur 2.
c. Secteur 3.

61 **1. a.** Les points C et L ont pour abscisse $\frac{1}{2}$.
Le point C du cercle trigonométrique est associé au réel $\frac{\pi}{3}$; on a $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le point L du cercle trigonométrique est associé au réel $-\frac{\pi}{3}$; on a $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Les points E et H ont pour abscisse $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Le point E du cercle trigonométrique est associé au réel $\frac{3\pi}{4}$; on a $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Le point H du cercle trigonométrique est associé au réel $-\frac{3\pi}{4}$; on a $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. a. Les points A et F ont pour ordonnée $\frac{1}{2}$.
Le point A du cercle trigonométrique est associé au réel $\frac{\pi}{6}$; on a $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le point F du cercle trigonométrique est associé au réel $\frac{5\pi}{6}$; on a $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. Les points K et L ont pour ordonnée $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Le point K du cercle trigonométrique est associé au réel $-\frac{2\pi}{3}$; on a $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.
Le point L du cercle trigonométrique est associé au réel $-\frac{\pi}{3}$; on a $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

62 **a.** Pour tout nombre réel a :
$(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$.
Donc $(0{,}1)^2 + (\sin(a))^2 = 1$
$\Leftrightarrow (\sin(a))^2 = 1 - (0{,}1)^2$
$\Leftrightarrow (\sin(a))^2 = 0{,}99$.
Or $a \in]0\,;\pi[$, donc $\sin(a) > 0$, d'où :
$\sin(a) = \sqrt{0{,}99} \Leftrightarrow \sin(a) = \sqrt{\frac{99}{100}}$
$\Leftrightarrow \sin(a) = \frac{\sqrt{99}}{10}$
$\Leftrightarrow \sin(a) = \frac{3\sqrt{11}}{10}$.

b. Pour tout nombre réel b :
$(\cos(b))^2 + (\sin(b))^2 = 1$.
Donc $(\cos(b))^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$
$\Leftrightarrow (\cos(b))^2 = 1 - \frac{8}{9}$
$\Leftrightarrow (\cos(b))^2 = \frac{1}{9}$.
Or $b \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(b) > 0$, d'où :
$\cos(b) = \sqrt{\frac{1}{9}} \Leftrightarrow \cos(b) = \frac{1}{3}$.

63 **1. b.** **2. a.** **3. c.**
4. b. et c. **5. b.**

64 • $\cos\left(\frac{15\pi}{3}\right) = \cos(5\pi) = \cos(\pi) = -1$
et $\sin\left(\frac{15\pi}{3}\right) = \sin(\pi) = 0$.
• $\cos\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
et $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
• $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
• $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
et $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
• $\cos\left(-\frac{28\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
et $\sin\left(-\frac{28\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
• $\cos\left(\frac{2018\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
et $\sin\left(\frac{2018\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

65 • $\cos\left(\frac{101\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $\sin\left(\frac{101\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
• $\cos\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
et $\sin\left(\frac{70\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
• $\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
et $\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
• $\cos\left(-\frac{15\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
et $\sin\left(-\frac{15\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
• $\cos\left(\frac{43\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
et $\sin\left(\frac{43\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
• $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
et $\sin\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
• $\cos\left(-\frac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
et $\sin\left(-\frac{21\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
• $\cos\left(\frac{1981\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$
et $\sin\left(\frac{1981\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

66 **a.** $C = 1 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$
et $S = \frac{3+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$.
b. $C = S$ car quand on additionne deux angles complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

67 **a.** $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
b. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.
c. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.
d. $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = \frac{1}{2} + 1 - 1 = \frac{1}{2}$.

68 **a.** Énoncé : Déterminer la valeur de $\sin(x)$ sachant que x est dans l'intervalle $]0\,;\frac{\pi}{2}[$ et que $\cos(x) = 0{,}6$.
b. Comme x est dans $]0\,;\frac{\pi}{2}[$, alors $\sin(x) > 0$, donc $\sin(x) = 0{,}8$ et $x \approx 0{,}927$.

69 **a.** $\sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$.
b. $\sin(a) > 0$, et $\sin(a) = \sqrt{1-0{,}2^2} = \sqrt{0{,}96}$.
c. On a $a \approx 1{,}369$.

70 **a.** Le cosinus étant alors positif,
$\cos(a) = \sqrt{1-\sin^2(a)}$
b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

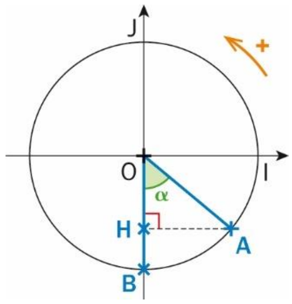
```
from math import*

def nombre(x):
    y=sqrt(1-(x)**2)
    return y
```

c. Lors de l'exécution dans la console, on obtient : 0,8660254037844386.

71 **a.** Right result: $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$.
b. Wrong result: Irina's calculator has remained in degree mode. It needs to be put in radian mode : $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

72 **1. a.** $\sin(x) = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.
b. On a $x \approx 1{,}318$.
c. $\sin(1{,}318) \approx 0{,}968$ et $\frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0{,}968$.
2. On a $x \approx -0{,}411$ et :
$\cos(x) = \sqrt{1-(-0{,}4)^2} = \sqrt{0{,}84}$.

73 **a.**



• Le diamètre est de 26 pouces (R = 13).
Le triangle OAH est rectangle en H. Donc $\cos\widehat{\mathrm{HOA}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}$.

$\cos(\alpha) = \frac{13-8}{13} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5}{13}$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)$.

D'où $\alpha \approx 67{,}4°$.

• Le diamètre est de 27,5 pouces (R = 13,75).
Le triangle OAH est rectangle en H.
Donc $\cos\widehat{\mathrm{HOA}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}$.

$\cos(\alpha) = \frac{13{,}75-8}{13{,}75} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{5{,}75}{13{,}75}$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5{,}75}{13{,}75}\right)$.

D'où $\alpha \approx 65{,}3°$.

• Le diamètre est de 29 pouces (R = 14,5).
Le triangle OAH est rectangle en H.
Donc $\cos\widehat{\mathrm{HOA}} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OA}}$.

$\cos(\alpha) = \frac{14{,}5-8}{14{,}5} \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{6{,}5}{14{,}5}$
$\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6{,}5}{14{,}5}\right)$.

D'où $\alpha \approx 63{,}4°$.

b. Avec des roues de 27,5 ou 29 pouces, l'effort à fournir lorsqu'on rencontre un obstacle est moins important qu'avec des roues de 26 pouces car plus le diamètre est grand, plus l'angle α est petit. C'est avec des roues de 29 pouces que l'effort à fournir est le moins important.

74 **a.** $x = \frac{\pi}{6}$

b. $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

c. $x = -\frac{2\pi}{3}$

d. $x = \frac{3\pi}{4}$

e. $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

f. $x = -\pi$

75 **a.** $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$

b. $\sin(2x) = 1$ et $x = \frac{\pi}{4}$

c. $x = \frac{5\pi}{4} - \frac{8\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$

d. $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

e. $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$

76 **a.** Faux, il peut être égal à 1.

b. Vrai.

c. $\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^2 = \frac{1}{4}$ et $\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)^2 = \frac{3}{4}$;
$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, donc l'affirmation est vraie.

d. Vrai.

Objectif 3

Étudier les fonctions trigonométriques

77 **a.** Paire.

b. Impaire.

c. Ni paire, ni impaire.

d. Paire.

78 **a.** Impaire, et de période 2 π.

b. Paire et de période π.

c. Paire et de période 3 π.

d. Paire et de période 2 π.

79 Variations de la fonction sinus sur [−π ; 2π] :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
Variations de sin	0	↘	−1	↗	1	↘	−1	↗	0

Variations de la fonction cosinus sur [−π ; 2π] :

x	$-\pi$		0		π		2π
Variations de cos	−1	↗	1	↘	−1	↗	1

80 **a.** Il semble que f soit paire et de période π.

On a $f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x)$
et $f(x + \pi) = \cos(2x + 2\pi) = \cos(2x) = f(x)$.

b. Il semble que g soit impaire et de période $\frac{2\pi}{3}$.

On a $g(-x) = -g(x)$
et $g(x + \frac{2\pi}{3}) = \sin(3x + 2\pi) = g(x)$

c. Il semble que h soit sans parité et de période 2π.
On a $h(-x) = -2\sin(x) - 1$ différent de $h(x)$ ou de $-h(x)$ et $h(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) - 1 = h(x)$.
d. Il semble que k soit sans parité ni périodicité et $k(-x) = -x - \cos(x)$ différent de $k(x)$ et de $-k(x)$, et clairement le terme « x » fait que la fonction n'est pas périodique.

81 **a.** Il semble que f soit impaire et de période π.

On a $f(-x) = \cos(-x)\sin(-x)$
$= -\cos(x)\sin(x) = -f(x)$
et $f(x + \pi) = \cos(x + \pi)\sin(x + \pi)$
$= \cos(x)\sin(x) = f(x)$.
b. Il semble que g soit paire et de période π.
On a $g(-x) = g(x)$
et $g(x + \pi) = (-\cos(x))^2 = (\cos(x))^2 = g(x)$.
c. Il semble que h soit paire et de période π.
On a $h(-x) = h(x)$
et $h(x + \pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(2x) = h(x)$.
d. Il semble que k soit impaire et sans périodicité
On a $k(-x) = -k(x)$.

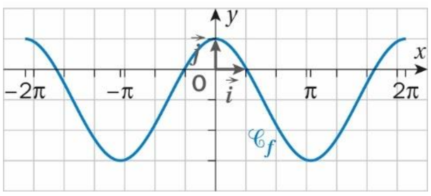
82 **a.** $\mathscr{C}_1$ a une symétrie axiale et correspond à f qui est paire.
b. $\mathscr{C}_3$ a une période de π et correspond donc à h.
c. $\mathscr{C}_2$ correspond à g.

83 **1. a.** Vrai.

b. Faux, elle peut être de période 4π.
2. Vrai, $f(x + 2\pi) = \cos(x\pi + 5 + 2\pi))$
$= \cos(x\pi + 5) = f(x)$

84 **a.** On a $f(-x) = f(x)$ donc f est paire

b. On a $f(x + 2\pi) = f(x)$ donc f admet une période de 2π.
c. $\cos(x) = \frac{1}{2}$ donc $x = \frac{\pi}{3}$.
d. Courbe de f sur $[-2\pi\,;2\pi]$:



85 **1. b.** impaire.

2. a. paire.

86 **a.** L'équation de la tangente est :

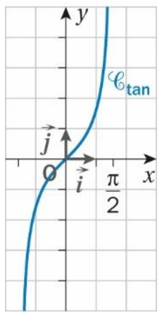
$y = w'(0)t + w(0)$.
Donc $\begin{cases} w'(0) = 2 \\ w(0) = 1 \end{cases}$.
Or $w(t) = \sqrt{2}\sin(at + b)$ d'après la capture d'écran $w'(t) = -a\sqrt{2}\cos(at + b)$.
Donc $\begin{cases} -a\sqrt{2}\cos(b) = 2 \\ \sqrt{2}\sin(b) = 1 \end{cases}$.
Ainsi $a \neq 0$, $(\frac{-2}{a\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 1$donc $\frac{4 + a^2}{2a^2} = 1$ et $a = 2$ ou -2
Mais $-a\sqrt{2}\cos(b) = 2$, donc a est négatif, ce qui implique que $a = -2$.
De plus, $\sin(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $b = \frac{\pi}{4}$.
b. On en déduit que $w(t) = \sqrt{2}\sin(-2t + \frac{\pi}{4})$, et donc $w(t)$ est π-périodique.

87 M(x, $f(x)$) and M'($-x$, $f(-x)$); is the point A the middle point of the line segment [MM'] ?
$x\text{A} = \frac{x + (-x)}{2} = 0$ and
$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = \frac{2\sin(2x) - 1 - 2\sin(2x) - 1}{2} = -1 = y_{\text{A}}$
Then the point A is a center of symmetry of the function.

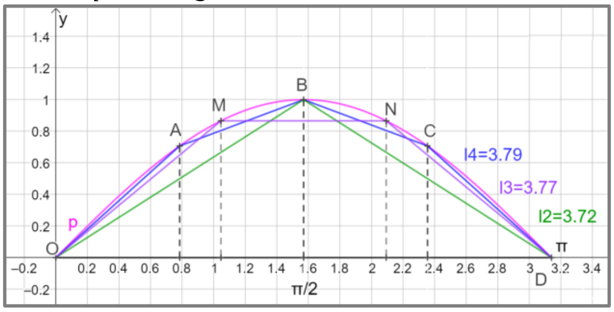
88 **a.** Il semble que g soit de période 6,2 environ et que $1 \leqslant g(x) \leqslant 7$.
b. Or, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, d'où :
$1 \leqslant 4 + 3\cos(x) \leqslant 7$,
donc $1 \leqslant g(x) \leqslant 7$
c. On peut préciser par calcul que g est de période 2π.

89 **a.** On a : $1 + \tan^2(x) > 0$ donc la fonction est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

b. Courbe sur $]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}[$:



90 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. On a : $l_2 = 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 1^2} = 2\sqrt{\frac{\pi^2+4}{4}} = \sqrt{\pi^2+4}$.

On a : $l_3 = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2} + \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{9} + \frac{3}{4}} + \frac{\pi}{3}$.

On a : $l_4 = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{4}} + \sqrt{\frac{\pi^2 + (2-\sqrt{2})^2}{4}}$.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

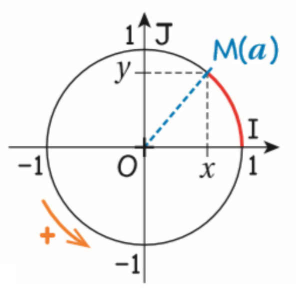
```python
import math

def d(A,B):
    return math.sqrt((A[0]-B[0])**2+(A[1]-B[1])**2)

def ligne_brisee(n):
    delta=math.pi/n
    longueur=0
    A=[0,0]
    for i in range(n):
        B=[A[0]+delta,math.sin(A[0]+delta)]
        longueur=longueur+d(A,B)
        A=B.copy()
    return longueur
```

d.

```
>>> longueur(3)
3.7650074865910144
>>> longueur(10)
3.8152827260883835
>>> longueur(100)
3.820148518695351
>>> longueur(1000)
3.8201972963124105
```

91 Démonstrations de la propriété permettant de :

a. déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$



- Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), on considère le point M du cercle trigonométrique tel que $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ radians.
H est le point du segment [OI] tel que le triangle est **rectangle** en H.
- Comme O**M** = OI = **1** unité, le triangle MOI est isocèle en O.
De plus, $\widehat{IOM}$ mesurant $\frac{\pi}{3}$ radians, le triangle MOI est **équilatéral**.
- On en déduit que la hauteur (HM) est aussi la **médiatrice** issue du sommet M ; H est ainsi le **milieu** du segment **[OI]**. Donc OH = $\frac{1}{2}$
- Or, OH = **cos**$\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

b. déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

- Pour tout nombre réel a, $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$,
Donc $\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1$.
- Or $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1$.
D'où $\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
Or $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0$ d'où $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

92 **a.** OMH est rectangle en H. De plus, $\widehat{HOM} = \frac{\pi}{4}$
donc $\widehat{OMH} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.
Donc OMH est rectangle isocèle.

b. On applique le théorème de Pythagore : $OH^2 + MH^2 = OM^2$ avec OM = 1 et MO = MH.
$2OH^2 = 1$, soit OH = $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
c. OK = MH or MH = OH, donc OH = OK.
d. OK = $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

93 **a.** ONN' est isocèle en O par symétrie, $\widehat{N'ON} = 2\,\widehat{ION} = \frac{\pi}{3}$. Donc NON' est équilatéral.
b. Dans NON', la hauteur (OH) est aussi la médiatrice de [NN'].
En appliquant le théorème de Pythagore, $ON^2 = OH^2 + IN^2$, d'où OH = $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
c. $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Comme $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0$, on a $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

94 **a.** BO = 1 et OH = cos(x).

Donc $l_1 = 1 + \cos(x)$.

b. L'arc BI mesure x, l'arc IH mesure $1 - \cos(x)$.

$l_2 = x + 1 - \cos(x)$.

c. $1 + \cos(x) = x + 1 - \cos(x)$, soit $2\cos(x) = x$.

Donc $x \approx 1{,}03$.

95 **a.** Faux, $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$.

b. Vrai, car pour tout x réel, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$.

96 **1re méthode : avec le théorème de Pythagore**

1. a. En appliquant le théorème de Pythagore, $BD^2 = OB^2 + OD^2$

D'où $c_1{}^2 = 2R^2$, et $c_1 = R\sqrt{2}$.

b. $p_1 = 4c_1 = 4R\sqrt{2}$.

c. $4R\sqrt{2} = \pi$ et $R = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

2. EI = EO – IO = R – IO.

$OB^2 = OI^2 + IB^2$.

D'où $OI = \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$ et $EI = R - \sqrt{R^2 - \frac{AB^2}{4}}$.

$EB^2 = EI^2 + IB^2$.

Après calculs, $c_2{}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - c_1^2}$.

Donc $c_2 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Et $p_2 = 8c_2 = 8R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

3. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

Pour un rayon égal à 1 :

```
from math import *

def polygone(n):
    c=sqrt(2)
    i=1
    while i<n:
        c=sqrt(2-sqrt(4-c**2))
        i=i+1
    return 2**(n+1)*c
```

```
>>> polygone(2)
6.122934917841437
>>> polygone(3)
6.242890304516106
>>> polygone(18)
6.283188250390382
```

On modifie le programme pour obtenir une approximation de π.

```
def polygone2(n):
    c=sqrt(2)
    i=1
    while i<n:
        c=sqrt(2-sqrt(4-c**2))
        i=i+1
    return 2**(n+1)*c/2
```

```
>>> polygone2(5)
3.140331156954739
>>> polygone2(50)
0.0
>>> polygone2(20)
3.1415965537048196
```

$3 + \frac{10}{71} \approx 3{,}1408$;

$3 + \frac{1}{7} \approx 3{,}1428$.

L'approximation obtenue pour $n = 20$, est encore plus précise…

2e méthode : avec la trigonométrie

a. Pour un hexagone $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Dans le triangle AHO, $\sin(\widehat{AOH}) = \frac{AH}{AO}$ donc $\sin(\alpha) = AH$ (car AO = 1).

Comme AOB est équilatéral, on a H milieu de [AB], ainsi $AB = 2\sin(\alpha)$.

Dans le triangle OA'H', $\tan(A'OH') = \frac{A'H'}{OH'}$ or OH' = 1 donc $A'B' = 2\tan(\alpha)$.

On a $p_6 = 6AB = 12\sin(\alpha)$ et $P_6 = 12\tan(\alpha)$

b. Pour n côtés : $\alpha = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\pi}{n}$.

On a $AB = 2\sin(\alpha)$ et $A'B' = 2\tan(\alpha)$;

et $p_n = 2n\sin(\alpha)$ et $P_n = 2n\tan(\alpha)$.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

On constate que la différence entre les deux périmètres tend vers 0, et on obtient une approximation de 2π de plus en plus précise.

La colonne A contient le nombre de côtés, B les valeurs de p_n, C contient les valeurs de P_n, et D contient la différence $P_n - p_n$.

	A	B	C	D
22	44	6,27784812	6,293884217	0,016036096
23	46	6,27830203	6,292972401	0,014670371
24	48	6,27870041	6,29217243	0,013472024
25	50	6,27905195	6,291466725	0,012414772
26	52	6,27936373	6,29084103	0,011477298
27	54	6,27964152	6,290283687	0,010642164
28	56	6,27989009	6,289785086	0,009894995
29	58	6,2801134	6,289337251	0,009223855
30	60	6,28031475	6,288933514	0,008618765
31	62	6,28049694	6,288568268	0,008071332
32	64	6,28066231	6,28823677	0,007574457
33	66	6,28081289	6,287934986	0,007122098
34	68	6,28095038	6,287659467	0,006709091
35	70	6,28107625	6,28740725	0,006331001
36	72	6,28119178	6,287175779	0,005983998
37	74	6,28129807	6,286962839	0,005664766
38	76	6,28139609	6,286766503	0,005370418
39	78	6,28148666	6,286585089	0,005098432
40	80	6,28157052	6,286417121	0,0048466
41	82	6,28164833	6,286261303	0,004612978
42	84	6,28172064	6,28611649	0,004395851
43	86	6,28178797	6,285981669	0,004193703
44	88	6,28185076	6,285855942	0,004005186
45	90	6,28190941	6,285738509	0,003829102
46	92	6,28196427	6,285628655	0,003664381
47	94	6,28201568	6,285525743	0,003510066
48	96	6,2820639	6,285429199	0,003365298

97 Les deux nombres étant positifs, il suffit de comparer leurs carrés.

$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6+2-2\sqrt{12}}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

Les résultats sont égaux !

98 **a.** $A_8 = 8 \times$ aire(IOM), avec :

aire(IOM) $= \frac{\text{IM}\times\text{OH}}{2}$

Calculons IM et OH :

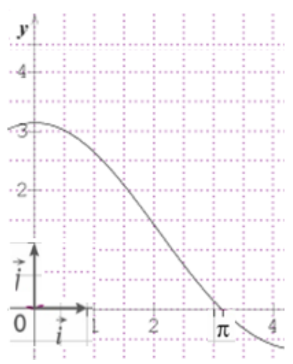
IM = 2MH = $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et OH = $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$A_8 = 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$

b. $A_n = n \times$ aire(IOM), aire (IOM) $= \frac{1}{2}\sin(\alpha)$

$A_n = \frac{n}{2}\sin(\alpha)$ or $\frac{n}{2} = \frac{\pi}{\alpha}$ donc $A_n = \pi\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}$

c.



d. Il semble que $f(x)$ tende vers π quand x tend vers 0. L'aire des polygones semble tendre vers π.

99 La longueur de l'escalator : $L = \frac{4,5}{\sin(\alpha)}$.

Les contraintes sur la pente entraînent que : $0 \leqslant L \leqslant 0,8\times 60 = 48$.

Donc $\frac{4,5}{\sin(\alpha)} \leqslant 48$ et $4,5/48 \leqslant \sin(\alpha)$

Finalement : $0,094 \leqslant \alpha$.

De plus comme la pente est inférieure à 10 %, ce qui donne $\alpha \leqslant 0,099$

$0,094 \leqslant \alpha \leqslant 0,099$

$0,094 \leqslant \alpha \leqslant 0,0994$

$45,27 \leqslant L \leqslant 47,88$, la longueur est entre 45,27 m et 47,88 m.

100 **a.** Vrai : si $a = b$ alors $\cos(a) = \cos(b)$.

La réciproque : si $\cos(a) = \cos(b)$ alors $a = b$ est fausse, par exemple $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ ont le même cosinus.

b. D'après le cercle trigonométrique, Si $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant 0$, alors $\sin(a) < \cos(a)$. En effet $\sin(a) \leqslant 0$ et $\cos(a) \geqslant 0$, donc $\sin(a) \leqslant \cos(a)$

Or $\sin(a) \neq \cos(a)$ pour $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant 0$.

L'affirmation est vraie.

Réciproquement si $\sin(a) < \cos(a)$ alors $-\frac{\pi}{2} \leqslant a \leqslant 0$ est fausse, car pour $\frac{\pi}{6}$, $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) < \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

101 **1. a.** Hipparque de Nicée dans ses tables a établi la correspondance entre la mesure des angles et celle des arcs et des cordes d'un cercle. Ses tables font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

Hipparque de Nicée découvrit aussi que l'axe de la Terre n'était pas fixe, qu'il se déplaçait le long d'un cercle pour revenir à la même place tous les 26 000 ans environ. Les tables de cordes furent également utiles pour calculer l'excentricité des orbites lunaires et solaires, ou dans les calculs des grandeurs et distances du Soleil et de la Lune.

b. Ptolémée expose toute la trigonométrie de l'antiquité dans l'*Almageste*. Il explique comment calculer des longueurs de cordes et publie une table très complète. Ces travaux ont permis de calculer des longueurs et des angles et ont fait avancer l'astronomie.

On peut consulter les sites suivants :

(1) https://www.maths–et–tiques.fr/index.php/histoire–des–maths/mathematiciens–celebres/hipparque

(2) https://www.universalis.fr/encyclopedie/hipparque–de–nicee/
(3) http://serge.mehl.free.fr/chrono/Hipparque.html

2. AOB est isocèle en O. Ainsi (OH) hauteur est aussi médiatrice de [AB].

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{BH}}{\text{OB}}$, d'où $\text{AB} = 2 \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

102 **1.** A(500 cos(102,5) ; 500 sin(102,5)) et B(410 cos(47,5) ; 410 sin(47,5))
D'où A(–108,22 ; 488,15) et B(277 ; 302,28).
La distance AB ≈ 427,71, donc la distance minimale de 500 mètres n'est pas respectée.
2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math
# Un avion est repéré par une liste [distance,angle]

def altitude(avion):
    a=math.radians(avion[1])
    return avion[0]*math.sin(a)

def abscisse(avion):
    a=math.radians(avion[1])
    return avion[0]*math.cos(a)

def verification(avion1,avion2):
    if altitude(avion1)<300:
        return False
    if altitude(avion2)<300:
        return False
    if abs(abscisse(avion1)-abscisse(avion2))<500:
        return False
    return True

avion1=[410,47.5]
avion2=[500,102.5]
print(verification(avion1,avion2))
```

103 **a.** (AS) est tangente au cercle de centre O et de rayon OA donc OAS rectangle en A.
b. (AK) est la médiane issue de A dans le triangle OAS rectangle en A, donc KA = KS = KO = 3.
c. OK = KA donc OKA isocèle en K. Or OA = 3, donc OA = OK = KA.
Donc OAK équilatéral.
d. En appliquant le théorème de Pythagore dans AKH, $\text{AK}^2 = \text{HA}^2 + \text{HK}^2$
$\tan(\widehat{\text{OSA}}) = \frac{\text{OA}}{\text{OS}} = \frac{1}{2}$.
On obtient $\widehat{\text{OSA}} \approx 26{,}6°$ et l'angle au sommet mesure donc environ 53,2°, donc la condition est respectée.
e. Comme OAK est équilatéral, H milieu de [OK]
On a $y_\text{A} = \frac{3}{2}$, donc $\text{A}(x\ ;\frac{3}{2})$.
$\text{OA}^2 + \text{AS}^2 = \text{OS}^2$ d'où : $x^2 + \frac{9}{4} + x^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 36$,

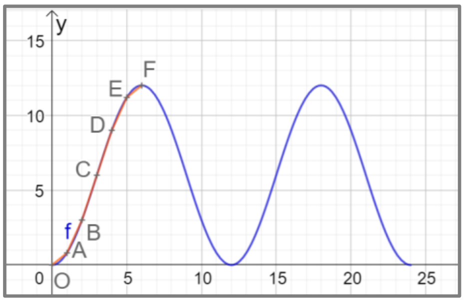
Soit $2x^2 = \frac{27}{2}$ et $x^2 = \frac{27}{4}$, soit $x = \pm\sqrt{\frac{27}{4}}$.
Or $x > 0$, il reste $x = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

104 **a.** $2\pi R' = 15\,993$ soit $R' = \frac{15\,993}{2\pi}$
Le cercle polaire a rayon R' et $\sin(\alpha) = \frac{R'}{R}$, on obtient : $\alpha \approx 23{,}55°$.
b. Par proportionnalité : la distance est : $\frac{6\,371\pi\times 46{,}5}{180} \approx 5\,171{,}12$ km.

105 **a.** Par lecture $\theta_m = 0{,}2$ et $T_0 = 1$.
b. $\theta(t) = 0{,}2\cos(2\pi t)$.
c. $1 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ soit $\ell = \frac{g}{4\pi^2} \approx 0{,}248$ m.

106 **a.** Par proportionnalité :
$x = \frac{106\times 360}{687} \approx 55{,}5°$.
b. De même, $x = \frac{106\times 360}{365} \approx 104{,}5°$,
et : $\widehat{\text{M}_2\text{ST}} = \widehat{\text{T}_1\text{ST}_2} - \widehat{\text{M}_1\text{SM}_2} = 104{,}5 – 55{,}5$
$\widehat{\text{M}_2\text{ST}} \approx 49°$.
c. $\cos(\widehat{\text{M}_2\text{ST}_2}) = \frac{\text{T}_2\text{S}}{\text{M}_2\text{S}}$, d'où $\text{SM}_2 = \frac{\text{ST}_2}{\cos(49°)}$.

107 **1.** On calcule : $y(3) = 6$, $y(4) = 9$ et $y(6) = 12$.
On a $y(1) = 6 – 3\sqrt{3}$ et $y(0) = 0$.
On compare $\frac{6}{12} = 0{,}5$ contre $6 – 3\sqrt{3} \approx 0{,}8$, il ne s'agit donc que d'une approximation.
2. On distingue 3 marées basses et 2 marées hautes.



3. On construit f :
Pour x dans [0 ; 1], $y = (6 – 3\sqrt{3})x$.
Pour x dans [1 ; 2], $y = (3\sqrt{3} - 3)x + (9 – 6\sqrt{3})$.
Pour x dans [2 ; 4], $y = 3x – 3$.
Pour x dans [4 ; 5], $y = (3\sqrt{3} - 3)x + 12 – 3\sqrt{3}$.
Pour x dans [5 ; 6], $y = (6 – 3\sqrt{3})x + 27\sqrt{3} – 27$.

108 Dans le repère (O, I, J) : I(1 ; 0), K(–1 ; 0),

$E(0; \sqrt{3})$, $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

109 Soit H le projeté orthogonal de E sur la droite (BC).

On a $\widehat{ECH} = 90° - \widehat{ECD} = 90° - 60° = 30°$.

• Calculons les longueurs HC et HE :

Le triangle EHC est rectangle en H, donc :

$\cos\widehat{ECH} = \frac{HC}{EC}$ et $\sin\widehat{ECH} = \frac{HE}{EC}$

$\cos(30°) = \frac{HC}{1}$ et $\sin(30°) = \frac{HE}{1}$

$HC = \cos(30°)$ et $HE = \sin(30°)$

$HC = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $HE = \frac{1}{2}$.

• Calculons la longueur BH :

$BH = BC - HC \Leftrightarrow BH = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow BH = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

• Calculons la mesure de l'angle $\widehat{EBF}$:

Le triangle EBF est rectangle en F, donc :

$\tan\widehat{EBF} = \frac{EF}{FB}$.

$\tan\widehat{EBF} = \frac{BH}{HE} \Leftrightarrow \tan\widehat{EBF} = \frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow \tan\widehat{EBF} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \times 2$

$\Leftrightarrow \tan\widehat{EBF} = 2 - \sqrt{3}$.

D'où $\widehat{EBF} = 15°$.

• Déterminons la valeur exacte de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

Un nombre réel associé à un angle de 15° est $\frac{\pi}{12}$.

Comme $\widehat{EBF} = 15°$ et $\tan\widehat{EBF} = 2 - \sqrt{3}$, on en déduit que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.

110 Le disque a pour périmètre 2π. Pour aller du point K au point L, le disque fera donc 4 tours et demi. Il se retrouvera par conséquent dans la situation de la réponse **e**.

111 Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB). Soit a la longueur d'une arête du cube ABCDEFGH.

• Déterminons la longueur AC :

Le triangle ABC est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = a^2 + a^2$

$\Leftrightarrow AC^2 = 2a^2 \Leftrightarrow AC = \sqrt{2}a$.

• Déterminons la longueur AG :

Le triangle ACG est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : $AG^2 = AC^2 + CG^2$.

$AG^2 = \left(\sqrt{2}a\right)^2 + a^2 \Leftrightarrow AG^2 = 2a^2 + a^2$

$\Leftrightarrow AG^2 = 3a^2$

$\Leftrightarrow AG = \sqrt{3}a$.

• Déterminons la longueur AO :

$AO = \frac{AG}{2}$, $AO = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

• Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{AOH}$:

Le triangle AOH est rectangle en H, donc :

$\sin\widehat{AOH} = \frac{AH}{AO} \Leftrightarrow \sin\widehat{AOH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}}$

$\Leftrightarrow \sin\widehat{AOH} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}a}$

$\Leftrightarrow \sin\widehat{AOH} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \sin\widehat{AOH} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \widehat{AOH} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

• Déterminons la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$:

$\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AOH} \Leftrightarrow \widehat{AOB} = 2 \times \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

D'où $\widehat{AOB} \approx 70{,}5°$.

112

$A = (\cos(x) + 3\sin(x))^2 + (3\cos(x) - \sin(x))^2$

$= (\cos(x))^2 + 6\cos(x)\sin(x) + 9(\sin(x))^2$

$+9(\cos(x))^2 - 6\cos(x)\sin(x) + (\sin(x))^2$

$A = 10(\cos(x))^2 + 10(\sin(x))^2$

$A = 10((\cos(x))^2 + (\sin(x))^2)$

$A = 10 \times 1$

$A = 10$

D'où :

$(\cos(x) + 3\sin(x))^2 + (3\cos(x) - \sin(x))^2 = 10$

113 Pour un temps de 1 minute, les 8 seaux sont passés. Donc il faudra un temps de $\frac{1\,000}{8} = 125$ minutes.

CHAPITRE **8**

Produit scalaire

► *Les exercices* **1** *à* **8** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

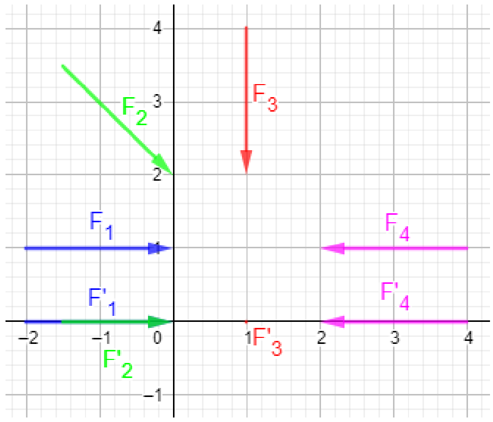
Activités

p. 220 et 221 du manuel

1 La voiture en panne

1. Sam, Evan, Max, Luc.
Sam pousse dans le sens du déplacement, donc il est très efficace.
Evan perd une partie de son énergie parce qu'il pousse de travers.
Le travail de Max est totalement inefficace parce qu'il pousse perpendiculairement au déplacement.
Celui de Luc est contre-productif car il pousse dans le sens contraire au déplacement.

2.a.

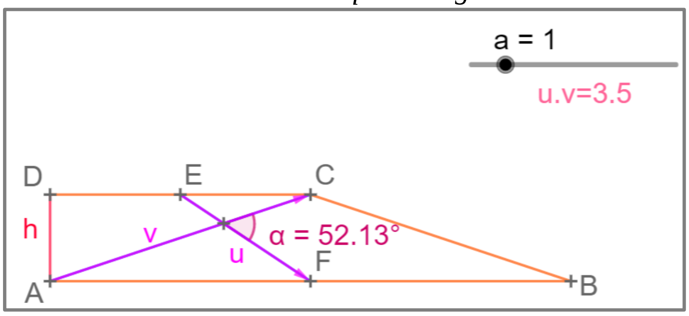


b. $\vec{F_1} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 4 = 8.$ $\vec{F_2} \cdot \overrightarrow{AB} = 1{,}5 \times 4 = 6$
$\vec{F_3} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \times 4 = 0.$ $\vec{F_4} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \times 4 = -8$

c. Plus le travail est efficace, plus le produit scalaire est grand. Cela correspond au résultat de la question **1**.

2 La hauteur du trapèze

1. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. Conjecture : $x \approx 2{,}1$.

c. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$

Lorsque les droites (EF) et (AD) sont perpendiculaires, le produit scalaire est nul.

2.a. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

b. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right)$

$= \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DC}$

$= 0 + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} + 0 + 0 + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DC}$.

c. $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -AD^2 - 1{,}5 \times 3 + 3 \times 3 = 0 \Leftrightarrow AD^2 = 4{,}5$.

On en conclut que $AD = \sqrt{4{,}5}$.

3 Les câbles du poulailler

1.a. $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = AB^2 - 2AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + AC^2$.

b. $BC^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos(60°) + 10^2 = 84$ donc $BC = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$.

2.a. $AI^2 + AK^2 = \overrightarrow{AI}^2 + \overrightarrow{AK}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK}\right)^2$

$= AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CI} + CI^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CK} + CK^2$

$= 2AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CK}\right) + 2\left(\frac{IK}{2}\right)^2$

$= 2AC^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \vec{0} + 2 \times \frac{1}{4} \times IK^2 = 2AC^2 + \frac{IK^2}{2}$

b. On procède de la même façon.

c. On en déduit que $AI^2 + AK^2 = AJ^2 + AL^2$, et donc que :

$AJ^2 = AI^2 + AK^2 - AL^2 = 8^2 + 6{,}5^2 - 7^2 = 57{,}25$.

On a donc $AJ = \sqrt{57{,}25} \approx 7{,}6$.

4 La droite cachée

1. Soit M un point du plan. $M \in \mathscr{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} \cdot \vec{u} = 0$

2.a. $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3^2}\overrightarrow{AB}^2 = \frac{2}{3^2} \times 3^2 = 2$ donc $P \in \mathcal{D}$.

b. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$

$\Leftrightarrow 2 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\mathscr{E}$ est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

3.a. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{6}{3^2}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$

$\Leftrightarrow 6 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\mathscr{E}$ est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

b. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3^2}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$

$\Leftrightarrow -2 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = -2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\mathscr{E}$ est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

c. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = -\frac{10}{3^2}\overrightarrow{AB} = -\frac{10}{9}\overrightarrow{AB}$.

$\mathscr{E}$ est la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

d. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = -\frac{12}{3^2}\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\mathscr{E}$ est la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

5 Étude d'un ensemble de points

1. $\mathrm{MC}^2 + \mathrm{MD}^2 = 16 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MD}}^2 = 16$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}})^2 + (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}})^2 = 16$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \mathrm{IC}^2 + \mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}} + \mathrm{ID}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}}) + 2^2 + 2^2 = 16$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \vec{0} + 8 = 16$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2 = 4$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI} = 2$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est donc le cercle de centre I et de rayon 2.

2. $\mathrm{MC}^2 + \mathrm{MD}^2 \leqslant 10 \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MC}}^2 + \overrightarrow{\mathrm{MD}}^2 \leqslant 10$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IC}})^2 + (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}})^2 \leqslant 10$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IC}} + \mathrm{IC}^2 + \mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{ID}} + \mathrm{ID}^2 \leqslant 10$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{IC}} + \overrightarrow{\mathrm{ID}}) + 2^2 + 2^2 \leqslant 10$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{MI}^2 + 2\overrightarrow{\mathrm{MI}}.\vec{0} + 8 \leqslant 10$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2 \leqslant 1$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI} \leqslant 1$

Cet ensemble est donc le disque de centre I et de rayon 1.

Application

p. 226 à 229 du manuel

SAVOIR-FAIRE 1

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

9 **a.** $\overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 4 \times 6 = 24.$ **b.** $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = 6 \times (-1) = -6.$

c. $\overrightarrow{\mathrm{EG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} = 5 \times 5 = 25.$ **d.** $\overrightarrow{\mathrm{IH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{JK}} = 1 \times 3 = 3.$

10 **a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}) \cdot (-\vec{\jmath}) = -3\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} + 5\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = -3 \times 0 + 5 \times 1 = 5.$

b. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 7 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 7.$

c. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(5^2 - 3^2 - 4^2) = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$

SAVOIR-FAIRE 2

Démontrer l'orthogonalité

11 $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})(x_\mathrm{D} - x_C) + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})(y_\mathrm{D} - y_\mathrm{C})$

$= (-1 - 3)(-5 - 0) + (3 - 8)(5 - 7) = 30.$

12 **Méthode 1 :**

$\overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \left(\overrightarrow{\mathrm{IA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DJ}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DJ}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DJ}}$

$= -\mathrm{IA} \times \mathrm{AD} + 0 + 0 + \mathrm{AB} \times \mathrm{DJ} = -\frac{1}{2}\mathrm{AD}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{AB}^2 = 0$

Méthode 2 :

Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{D}\,;\overrightarrow{\mathrm{DC}},\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right)$, on a A(0 ; 1), B(1 ; 1), I $\left(0\,;\,\frac{1}{2}\right)$ et J $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{IB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AJ}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{I})(x_\mathrm{J} - x_\mathrm{A}) + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{I})(y_\mathrm{J} - y_\mathrm{A}) = (1 - 0)\left(\frac{1}{2} - 0\right) + (1 - 0)(0 - 1) = 0.$

Dans tous les cas, on peut en conclure que (IB) $\perp$ (AJ).

SAVOIR-FAIRE 3

Calculer des longueurs et des mesures d'angles

13 **a.** On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle DEF :

$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos(\widehat{D})$.

Ainsi, $\cos(\widehat{D}) = \frac{DE^2 + DF^2 - EF^2}{2 \times DE \times DF} = \frac{4^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 4 \times 7} = \frac{1}{56}$ et donc $\widehat{D} \approx 89°$.

b. On applique une formule de la médiane dans le triangle DEF :

$ED^2 + EF^2 = 2EE'^2 + \frac{DF^2}{2}$.

Ainsi, $2EE'^2 = ED^2 + EF^2 - \frac{DF^2}{2} = 4^2 + 8^2 - \frac{7^2}{2} = 55{,}5$

donc $EE' = \sqrt{\frac{55{,}5}{2}}$.

14 On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle SRT :

$ST^2 = RS^2 + RT^2 - 2 \times RS \times RT \times \cos(\widehat{SRT}) = 4^2 + 10^2 - 2 \times 4 \times 10 \times \cos(60°) = 76$.

On a donc $ST = \sqrt{76}$.

15 **a.** On applique une formule de la médiane dans le triangle ABD :

$AB^2 + AD^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2}$.

Ainsi, $\frac{BD^2}{2} = 5^2 + 6^2 - 2 \times 4^2 = 29$ donc $BD = \sqrt{2 \times 29} = \sqrt{58} \approx 7{,}6$.

b. On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{CBA})$.

Ainsi, $\cos(\widehat{CBA}) = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\times AB\times BC} = \frac{5^2+6^2-8^2}{2\times5\times6} = -\frac{1}{20}$ et donc $\widehat{CBA} \approx 93°$.

SAVOIR-FAIRE 4

Étudier un ensemble de points

16 **a.** Soit P le point défini par $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{6^2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{18}\overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PM}).\overrightarrow{CD} = 2\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\\ &\Leftrightarrow \frac{2}{6^2}\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\\ &\Leftrightarrow 2 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 2\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0\end{aligned}$$

C'est la droite passant par P et perpendiculaire à (CD).

b. Soit P le point défini par :

$\overrightarrow{DP} = -\frac{4}{6^2}\overrightarrow{DC} = -\frac{1}{9}\overrightarrow{DC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CD} = 4 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PM}).\overrightarrow{CD} = 4\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{CD} = 4\\ &\Leftrightarrow \frac{4}{6^2}\overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 4\\ &\Leftrightarrow 4 + \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 4\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0\end{aligned}$$

C'est la droite passant par P et perpendiculaire à (CD).

c. $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=5 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)=5$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}=5$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\right)-\mathrm{IC}^2=5$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}-3^2=5$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2=14$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}=\sqrt{14}$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{14}$.

d. $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{DM}=1 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=-1$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{ID}=-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IC}\right)-\mathrm{IC}^2=-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}-3^2=-1$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}^2=8$

$\Leftrightarrow \mathrm{MI}=\sqrt{8}$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{8}$.

► *Les exercices* **17** *à* **27** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 232 du manuel

28 **a.** On note H le pied de la hauteur issue de A.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\mathrm{AH}^2+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4^2+0+0+2\times3=22$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}(\mathrm{CD}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{DA}^2)=-\frac{1}{2}(c^2+a^2-b^2)=\frac{b^2-c^2-a^2}{2}$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\mathrm{AB}\times\mathrm{AH}=-5\times3=-15$.

d. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=5\times3\times\cos(120°)=5\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-7{,}5$.

29 **1.a.** On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=5^2+7^2-5\times7\times\cos(120°)=91{,}5$.

On a donc $\mathrm{BC}=\sqrt{91{,}5}\approx9{,}6$.

b. On applique une formule la médiane dans le triangle ABC :

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2\mathrm{AI}^2+\frac{\mathrm{BC}^2}{2}$.

Ainsi, $2\mathrm{AI}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-\frac{\mathrm{BC}^2}{2}=5^2+7^2-\frac{91{,}5}{2}=28{,}25$ et donc $\mathrm{AI}=\sqrt{\frac{28{,}25}{2}}\approx3{,}8$.

2.a. Dans le plan muni du repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\,,\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)$, on a $\mathrm{A}(0\,;0)$, $\mathrm{B}(0\,;4)$, $\mathrm{C}(3\,;4)$ et $\mathrm{D}(5\,;0)$.

$\mathrm{CD}=\sqrt{(x_\mathrm{D}-x_\mathrm{C})^2+(y_\mathrm{D}-y_\mathrm{C})^2}=\sqrt{(5-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$.

b. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}=(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{C})(x_\mathrm{D}-x_\mathrm{C})+(y_\mathrm{A}-y_\mathrm{C})(y_\mathrm{D}-y_\mathrm{C})=(0-3)(5-3)+(0-4)(0-4)=10$.

On a aussi $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=\mathrm{CA}\times\mathrm{CH}=5\mathrm{CH}$.

On en déduit que $\mathrm{CH}=\frac{10}{5}=2$.

On applique le théorème de Pythagore dans le triangle DHC : $\mathrm{CD}^2=\mathrm{CH}^2+\mathrm{HD}^2$

donc $\mathrm{HD}^2=\mathrm{CD}^2-\mathrm{CH}^2=20-4=16$, et donc $\mathrm{HD}=4$.

30 **1.a.** $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3)\times(-12)+(-4)\times 9=0$ donc (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v}=(-3)\times 3+5\times 2=1$ donc (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires.

2.a. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$. **b.** $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$.

31 **a.** $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=3 \Leftrightarrow (x-x_A)\times x_{\vec{u}}+(y-y_A)\times y_{\vec{u}}=3(x-x_A)$
$\Leftrightarrow (x-2)\times(-3)+(y+1)\times 1=3$
$\Leftrightarrow -3x+6+y+1=3$
$\Leftrightarrow y=3x-4$
C'est la droite d'équation $y=3x-4$.
b. Soit I le milieu de [AB].
On a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(-3-2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{26}$ et $AI=\frac{\sqrt{26}}{2}$.

$$\begin{aligned}MA^2+MB^2=5 &\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=5\\
&\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=5\\
&\Leftrightarrow MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+IA^2+MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+IB^2=5\\
&\Leftrightarrow 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})+2IA^2=5\\
&\Leftrightarrow 2MI^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}+2\times\frac{26}{4}=5\\
&\Leftrightarrow MI^2=-4\end{aligned}$$

C'est donc l'ensemble vide.

c.
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-2 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=-2\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-2\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)-\overrightarrow{IA}^2=-2\\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{MI}\cdot\vec{0}-\frac{26}{4}=-2\\
&\Leftrightarrow MI^2=4{,}5\\
&\Leftrightarrow MI=\sqrt{4{,}5}\end{aligned}$$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{4{,}5}$.

32 **a.** $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{8}$ et, de même, $AC=\sqrt{2}$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(x_B-x_A)(x_C-x_A)+(y_B-y_A)(y_C-y_A)$
$=(0-2)(1-2)+(1+1)(-2+1)=0.$

c. $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=90°$.

33 **a.** On applique le théorème de Pythagore dans le triangle AEF :

$EF^2=AE^2+AF^2=6^2+5^2=61$ donc $EF=\sqrt{61}$.
On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle AEF :
$AE^2=AF^2+EF^2-2\times AF\times EF\times\cos\left(\widehat{AFE}\right)$
Ainsi, $\cos\left(\widehat{AFE}\right)=\frac{AF^2+EF^2-AE^2}{2\times AF\times EF}=\frac{5^2+61-6^2}{2\times5\times\sqrt{61}}=\frac{5}{\sqrt{61}}$, et donc $x=\widehat{AFE}\approx 50{,}2°$.

b. On se place dans le plan muni du repère orthonormé $\left(A\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$.

$\cos\left(\widehat{EFB}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CB}}{AE\times CB}$
$=\frac{(x_E-x_A)(x_B-x_C)+(y_E-y_A)(y_B-y_C)}{\sqrt{(x_E-x_A)^2+(y_E-y_A)^2}\times\sqrt{(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2}}$
$=\frac{(5-0)(5-0)+(1-0)(0-2)}{\sqrt{(5-0)^2+(1-0)^2}\times\sqrt{(5-0)^2+(0+2)^2}}=\frac{23}{\sqrt{26\times29}}$
donc $x=\widehat{EFB}\approx 33{,}1°$.

► *Les exercices* **34** *à* **43** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 234 à 241 du manuel

Objectif 1

Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

44 **a.** $\overrightarrow{AO}$ **b.** $\overrightarrow{OD}$ **c.** $\overrightarrow{EC}$

d. $\overrightarrow{OD}$ **e.** $\overrightarrow{OE}$ **f.** $\overrightarrow{FE}$

45 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = AB \times DC = 1 \times 1 = 1$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -AB \times DC = -1 \times 1 = -1$.

c. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD} = -OB \times OD = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

d. $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} = DC \times DC = 1 \times 1 = 1$.

e. $\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{DC} = DO \times DO = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

f. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}BC \times BC = -\frac{1}{2} \times 1^2 = -\frac{1}{2}$.

46 **a.** $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\widehat{E} = 6 \times 4 \times \cos(45°) = 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$.

b. $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EG} = EF \times EG \times \cos\widehat{E} = 5 \times 3 \times \cos(150°) = 15 \times \frac{-\sqrt{3}}{2} = -7{,}5\sqrt{3}$.

47 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}(8^2 - 4^2 - 12^2) = -48$.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(12^2 - 7^2) = 23{,}75$.

48 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 2 \times 4 + (-1) \times 5 = 3$.

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + (-3) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$.

c. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})\cdot(3\vec{\imath} + \vec{\jmath}) = 9\vec{\imath}^2 + 3\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} + 6\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}^2 = 9 + 2 = 11$.

49 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Faux. **d.** Vrai.

50 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3 \times 3 = -9$. **b.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -4 \times 3 = -12$.

c. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4 \times 2 = 8$. **d.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -2 \times 5 = -10$.

51 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \times 3 = 12$. **b.** $\vec{t}\cdot\vec{w} = -3 \times 4 = -12$.

c. $\vec{m}\cdot\vec{h} = 2 \times 1 = 2$. **d.** $\vec{w}\cdot\vec{u} = 4 \times 4 = 16$.

e. $\vec{v}\cdot\vec{w} = 3 \times 4 = 12$. **f.** $\vec{m}\cdot\vec{u} = 3 \times 4 = 12$.

52 Figure 1 :

1.a. $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 3\sqrt{2}$. **b.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 4 \times 3 = 12$.

2. $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{12}{4\times3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\alpha = 45°$.

Figure ② :

1.a. $\|\vec{u}\| = 2\sqrt{2}$ et $\|\vec{v}\| = 4$ **b.** $\vec{u}.\vec{v} = -2 \times 4 = -8$

2. $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{-8}{2\sqrt{2}\times 4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\alpha = 135°$.

Figure ③ :

1.a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = 3$ **b.** $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 3 = 3$

2. $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{5}\times 3} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ donc $\alpha \approx 63{,}4°$.

Figure ④ :

1.a. $\|\vec{u}\| = \sqrt{8}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$ **b.** $\vec{u}.\vec{v} = 2 \times (-1) + 2 \times 3 = 4$

2. $\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{8}\times\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ donc $\alpha \approx 63{,}4°$.

53 **1.a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ donc $AC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times \cos(\widehat{BAC})} = -\frac{6}{3\cos(60°)} = -\frac{6}{1{,}5} = -4$.

La réponse n'est pas cohérente, puisque AC est une distance, donc il n'y a pas de réponse.

b. $AC = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB \times \cos(\widehat{BAC})} = \frac{-10}{5\cos(135°)} = \frac{-10}{5\times\frac{-\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

2.a. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{-2}{2\times\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\widehat{BAC} = 135°$.

b. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{15}{5\times 2} = 1{,}5$: c'est impossible car un cosinus est compris entre -1 et 1.

c. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{12}{3\times 4} = 1$ donc $\widehat{BAC} = 0°$.

54 **a.** $(\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} - \vec{v}) = 5\vec{u}^2 + 9\vec{u}\cdot\vec{v} - 2\vec{v}^2 = 5 \times 4^2 + 9 \times 5 - 2 \times 2^2 = 117$.

b. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 = 4^2 + 2 \times 5 + 2^2 = 30$.

55 **a.** Victor a projeté les deux vecteurs sur une 3e direction. Cela ne correspond pas à la définition du produit scalaire.

b. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF} = AD \times AO - AB \times OF$
$= 8 \times 4 - 4 \times 4 = 16$.

56 $\frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2) = \frac{1}{4}(\vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2 - \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} - \vec{v}^2) = \frac{1}{4}\times 4\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}$.

57 **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 7^2 - 5^2) = 20$.

b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 4^2 - 3^2) = 8$.

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(6^2 + 10^2 - (10^2 - 6^2)) = 36$.

En effet, $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 10^2 - 6^2$ d'après le théorème de Pythagore.

d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}(BA^2 + BD^2 - AD^2) = -\frac{1}{2}(5^2 + 4^2 - 7^2) = 4$.

58 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times 1 + (-3) \times (-1) = 4$.

b. $\vec{u}\cdot(-4\vec{v}) = -4\vec{u}\cdot\vec{v} = -4 \times 4 = -16$.

c. $-\vec{u}\cdot(2\vec{v}) = -2\vec{u}\cdot\vec{v} = -2 \times 4 = -8$.

d. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = (1^2 + (-3)^2) - (1^2 + (-1)^2) = 8$.

59 **1.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A)$
$= (7-3)(4-3) + (-5+3)(-2+3) = 2$.

2.a. $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(7-3)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{20}$

$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{2}$

b. $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC} = \frac{2}{\sqrt{20}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ then $\widehat{BAC} \approx 71{,}6°$.

60 **a.** Non, mais ① ⇒ ②.

b. Non, mais ② ⇒ ①

c. Non, mais ① ⇒ ②.

d. Oui.

61 **a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 4 \times 5 \times \cos(40°) \approx 15{,}32$.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(4^2 + 6^2 - 3^2) = 21{,}5$.

c. En notant a = AB, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a \times \frac{6}{2} = 3a$.

d. AD = DC, donc $2AD^2 = 3$ d'où AD = $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = 0 + 5 \times \sqrt{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$.

e. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = AB \times AH + AB^2 = 5 \times 1 + 5^2 = 30$.

f. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = 7 \times 1 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = 7 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3{,}5$.

62 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a.

```
def carre_scalaire(a,b):
    return a**2+b**2
```

b.

```
def produitscalaire(a,b,c,d):
    u=a**2+b**2
    v=c**2+d**2
    z=(a+c)**2+(b+d)**2
    w=0.5*(z-u-v)
    return w
```

63 **a.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(C\,;\frac{1}{6}\overrightarrow{CD},\frac{1}{4}\overrightarrow{CA})$, on a C(0 ; 0), E(1,5 ; 4) et D(6 ; 0).

$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED} = (x_C - x_E)(x_D - x_E) + (y_C - y_E)(y_D - y_E)$
$= (0 - 1{,}5)(6 - 4) + (0 - 4)(0 - 4) = 13$

$\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{ED} = EC \times ED \times \cos(\overrightarrow{EC}\,;\overrightarrow{ED}) = \sqrt{18{,}25} \times \sqrt{36{,}25} \times \cos(x)$

On a donc $\cos x = \frac{13}{\sqrt{18{,}25}\times\sqrt{36{,}25}}$ donc $x \approx 59{,}6°$.

b. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(C\,;\frac{1}{6}\overrightarrow{CD},\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}\right)$, on a B(6 ; 4).

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = (x_B - x_D)(x_E - x_D) + (y_B - y_D)(y_E - y_D)$
$= (6-6)(1{,}5-6) + (4-0)(4-0) = 16$

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DE} = DF \times DE$

On a donc $DF = \frac{\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE}}{DE} = \frac{16}{\sqrt{4{,}5^2+4^2}} = \frac{16}{\sqrt{36{,}25}}$.

D'après le théorème de Pythagore,

$BF = \sqrt{DB^2 - FD^2} = \sqrt{4^2 - \frac{16^2}{36{,}25}} \approx 3$.

OBJECTIF 2

Exploiter la relation d'orthogonalité

64 $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

65 **a.** Faux. **b.** Vrai.

c. Faux. **d.** Vrai.

66 **a.** $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ **b.** $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ **c.** $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

d. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ **e.** $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$

67 $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{n_4}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

68 **a.** Faux. **b.** Vrai.

c. Vrai. **d.** Vrai.

69 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (x_A - x_B)(x_C - x_B) + (y_A - y_B)(y_C - y_B)$

$= (0-2)(4-2) + (2-3)(0-3) = -1 \neq 0.$

Le triangle ABC n'est donc pas rectangle en B.

De même, il ne l'est ni en A, ni en C.

70 **a.** $\vec{u}\cdot\vec{v} = (5-m)\times 3 + m\times 4 = m - 15.$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow m - 15 = 0$

$\Leftrightarrow m = 15$

b. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (m-2)\times(3-m) + m\times m = 5m - 6.$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow 5m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6}{5}$

c. $\vec{u}\cdot\vec{v} = (-m)\times m + 2\times 4 = -m^2 + 8.$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 8 = 0$

$\Leftrightarrow m^2 = 8$

$\Leftrightarrow m = \sqrt{8}$ ou $m = -\sqrt{8}$

d. $\vec{u}\cdot\vec{v} = m\times 2 + (-2)\times m = 0$

Les vecteurs étant toujours orthogonaux, m peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

71 **1.a.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (4{,}4-5)(4{,}4-5) + (-5{,}2+6)(-6{,}8+6) = -0{,}28 \neq 0.$

Le repère n'est donc pas orthonormé.

b. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (2-1)(0{,}5-1) + (2{,}5-2)(1-2) = -1 \neq 0.$

Le repère n'est donc pas orthonormé.

2.a. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (1-2)(3-2) + (-5+7)(-4+7) = -1 + 6 = 5 \neq 0.$

Le repère n'est donc pas orthonormé.

b. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = (2-1)(3-1) + (-7+5)(-4+5) = 0.$

BA $= \sqrt{(2-1)^2 + (-7+5)^2} = \sqrt{5}$ et, de même, BC $= \sqrt{5}$.

Le repère $\left(B ; \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{BA}, \frac{1}{\sqrt{5}}\overrightarrow{BC}\right)$ est donc orthonormé.

72 **a.** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-1-2)(1-2) + (2-1)(-2-1) = 0$.

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (2+1)(-3+1) + (1-2)(-4-2) = 0$.

b. Les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont droits, donc le quadrilatère ABCD est un trapèze.

73 **a.** Faux. **b.** Vrai. **c.** Vrai.

74 Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(A ; \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD})$, on a $\overrightarrow{AG}(-2 ; 4)$ et $\overrightarrow{AH}(6 ; 4)$.

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AH} = -2 \times 6 + 4 \times 4 = 4 \neq 0$, donc les droites (AG) et (AH) ne sont pas perpendiculaires.

75

$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = -8 \times 2 + 1 \times 16 = 0$.
$\overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{HG} = -2 \times (-8) + (-16) \times 1 = 0$.
$\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FG} = 8 \times 2 + (-1) \times 16 = 0$.
EFGH est un quadrilatère avec trois angles droits, c'est donc un rectangle.

76 **a.** Énoncé : Les droites (AI) et (KL) sont-elles perpendiculaires ?

b. Julie a fait deux erreurs : d'abord, son repère est orthogonal, mais pas orthonormé, ce qui fausse tout le reste de son raisonnement. Ensuite, elle a fait une erreur de calcul dans le dernier produit scalaire. Elle aurait dû trouver $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{KL} = 0{,}5$.
Corrigé :
On pose $c = AB$ et $b = AC$.
Dans le repère orthonormé $(A ; \frac{1}{c}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{b}\overrightarrow{AC})$, on a :
$A(0 ; 0)$, $B(c ; 0)$, $C(0 ; b)$ et $I(\frac{c}{2} ; \frac{b}{2})$.
On a donc $\overrightarrow{BC}(-c ; b)$ et $\overrightarrow{AH}(x_H ; y_H)$.
Comme $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$, on a $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = 0$, donc $-cx_H + by_H = 0$, c'est-à-dire $cx_H = by_H$.
L'équation de la droite (BC) est $y = -\frac{c}{b}x + c$.
Or $H \in (BC)$, donc $y_H = -\frac{c}{b}x_H + c = -\frac{b}{b}y_H + c = -y_H + c$, et donc $y_H = \frac{c}{2}$.
On en déduit que $x_H = \frac{b}{c}y_H = \frac{b}{c} \times \frac{c}{2} = \frac{b}{2}$.
On a donc $H\left(\frac{b}{2} ; \frac{c}{2}\right)$, $K\left(\frac{b}{2} ; 0\right)$ et $L\left(0 ; \frac{c}{2}\right)$.
On obtient alors $\overrightarrow{AI}\left(\frac{c}{2} ; \frac{b}{2}\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(-\frac{b}{2} ; \frac{c}{2}\right)$.
On a donc $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{KL} = -\frac{cb}{4} + \frac{bc}{4} = 0$: c'est vrai.

77 First way :

$$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}\right).\left(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HB}\right) = \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CH}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{HB}$$
$$= CH^2 + 0 + 0 - HA \times HB = 4^2 - 2 \times 3 = 10.$$

Second way :
According to Pythagora's theorem :
$BC = \sqrt{CH^2 + HB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ and $AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.
So, $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(CA^2 + CB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(20 + 25 - 25) = 10$.

78 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1.

```
#Fonction avec deux erreurs
def orthogonaux(a,b,c,d):
    p=a*b-c*d
    if p==0:
        return True
    else:
        return False

#Fonction corrigée
def orthogonaux_ok(a,b,c,d):
    p=a*c+b*d
    if p==0:
        return True
    else:
        return False
```

2.a. True.
b. False.

79 **1.a.** $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = 0$ car (AH) $\perp$ (CB).

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = (x_H - x_A)(x_B - x_C) + (y_H - y_A)(y_B - y_C) = (x - 0)(2 + 2) + (y - 3)(-1 - 3)$
$= 4x - 4y + 12.$

b. On a donc $4x - 4y + 12 = 0$, c'est-à-dire $y = x + 3$.

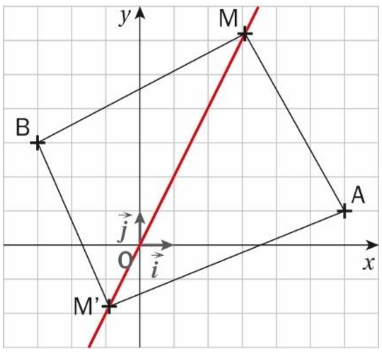
2. $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ car (BH) $\perp$ (AC).

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = (x_H - x_B)(x_C - x_A) + (y_H - y_B)(y_C - y_A) = (x - 2)(-2 - 0) + (y + 1)(3 - 3)$
$= -2x + 4.$

On a donc $-2x + 4 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$.

3. $x = 2$ donc $y = 2 + 3 = 5$. Les coordonnées de H sont donc $(2; 5)$.

80 **1.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



On trouve deux solutions, de coordonnées $(-0{,}9\,; -1{,}8)$ et $(3{,}1; 6{,}2)$.

2.a. $y = 2x$

b. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 6 - x \\ 1 - y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix} -3 - x \\ 3 - y \end{pmatrix}$

c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (6 - x)(-3 - x) + (1 - y)(3 - y) = x^2 - 3x - 18 + y^2 - 4y + 3$
$= x^2 - 3x - 18 + (2x)^2 - 4 \times 2x + 3 = 5x^2 - 11x - 15.$

d. On résout l'équation $5x^2 - 11x - 15 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \times 5 \times (-15) = 421 > 0$ donc il y a deux racines réelles :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11-\sqrt{421}}{10}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{11+\sqrt{421}}{10}$.

Il y a donc bien deux points qui répondent au problème : $\mathrm{M}_1(\frac{11-\sqrt{421}}{10}; \frac{11-\sqrt{421}}{5})$ et $\mathrm{M}_2(\frac{11+\sqrt{421}}{10}; \frac{11+\sqrt{421}}{5})$.

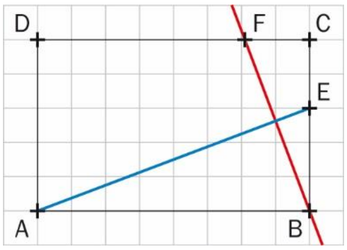
81 **a.** $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EA} = CD \times EA = ax$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{AD} = -DF \times AD = -ax$.

b. $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}\right).\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}.\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{DF}.\overrightarrow{AD}$

$= ax + 0 + 0 - ax = 0$

Les droites (CF) et (ED) sont donc perpendiculaires.

82 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



Le point F est à environ 2 unités de C.

b. On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,; \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}\right)$.

On pose $x = DF$. On a $A(0;0)$, $B(8;0)$, $E(8;3)$ et $F(x;5)$.

$\overrightarrow{FB}.\overrightarrow{EA} = 0 \Leftrightarrow (x_B - x_F)(x_A - x_E) + (y_B - y_F)(y_A - y_E) = 0$

$\Leftrightarrow (8-x)(0-8) + (0-5)(0-3) = 0$

$\Leftrightarrow 8x - 49 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{49}{8}$

Le point cherché a donc pour coordonnées $\left(\frac{49}{8}; 5\right)$. La conjecture est validée.

83 La droite (RS) a pour équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$, donc $y_U = \frac{1}{3}x_U + \frac{11}{3}$.

$(TU) \perp (RS) \Leftrightarrow \overrightarrow{TU}.\overrightarrow{RS} = 0$

$\Leftrightarrow (x_U - x_T)(x_S - x_R) + (y_U - y_T)(y_S - y_R) = 0$

$\Leftrightarrow (x_U - 3)(4+2) + \left(\frac{1}{3}x_U + \frac{11}{3} + 2\right)(5-3) = 0$

$\Leftrightarrow 6x_U - 18 + \frac{2}{3}x_U + \frac{34}{3} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{20}{3}x_U - \frac{20}{3} = 0$

$\Leftrightarrow x_U = 1$

De plus, $y_U = \frac{1}{3}x_U + \frac{11}{3} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{11}{3} = 4$, donc on a $U(1\,;4)$.

OBJECTIF 3

Calculer des longueurs et des mesures d'angles

84 **a.** On applique une formule de la médiane dans le triangle RST : $RS^2 + RT^2 = 2HR^2 + \frac{1}{2}ST^2$.

On a donc : $HR^2 = \frac{1}{2}\left(RS^2 + RT^2 - \frac{1}{2}ST^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 + 4^2 - \frac{1}{2} \times 48\right) = 4$ donc $HR = 2$.

b. On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle RST :

$ST^2 = SR^2 + RT^2 - 2 \times SR \times RT \times \cos(\widehat{R}) = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos(120°) = 48$.

On a donc $ST = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

85 On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle ABC :

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{B}) = 7^2 + 9^2 - 2 \times 7 \times 9 \times \cos(30°) = 130 - 63\sqrt{3}$.

On a donc $AC = \sqrt{130 - 6\sqrt{3}}$.

86 On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle DEF :

$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 \times DE \times DF \times \cos(\widehat{D}) = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(45°) = 34 - 15\sqrt{2}$

On a donc $EF = \sqrt{34 - 15\sqrt{2}}$.

87 **a.** $IJ^2 + JK^2 = 8^2 + 7^2 = 113 = JK^2$ donc, d'après le théorème de Pythagore, IJK est rectangle en I.

b. $\cos(\widehat{J}) = \frac{IJ}{JK} = \frac{8}{\sqrt{113}}$ donc $\widehat{J} \approx 41{,}2°$ et $\widehat{K} = 90° - \widehat{J} \approx 48{,}8°$.

88 **a.** Soit A′ le milieu du segment [BC].

On applique une formule de la médiane dans le triangle ABC : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $AA'^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(15^2 + 9^2 - \frac{1}{2}12^2\right) = 117$,

et donc $AA' = \sqrt{117}$.

b. De même, on a $BB'^2 = \frac{1}{2}\left(BA^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2\right) = \frac{1}{2}\left(15^2 + 12^2 - \frac{1}{2}9^2\right) = 164{,}25$,

et donc $BB' = \sqrt{164{,}25}$.

89 **a.** On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle GHL :

$HL^2 = GH^2 + GL^2 - 2 \times GH \times GL \times \cos(\widehat{G})$

On a donc $\cos(\widehat{G}) = \frac{GH^2+GL^2-HL^2}{2\times GH\times GL} = \frac{6^2+11^2-8^2}{2\times6\times11} = \frac{31}{44}$.

De même, $\cos(\widehat{H}) = \frac{HG^2+HL^2-GL^2}{2\times HG\times HL} = \frac{6^2+8^2-11^2}{2\times6\times8} = -\frac{7}{32}$.

b. $\widehat{G} \approx 45{,}2°$ et $\widehat{H} \approx 102{,}6°$ donc $\widehat{L} = 180° - \widehat{G} - \widehat{H} \approx 32{,}2°$.

90 On applique une formule de la médiane dans le triangle MJK :

$MJ^2 + MK^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}JK^2$.

On a donc $MI^2 = \frac{1}{2}\left(MJ^2 + MK^2 - \frac{1}{2}JK^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 8^2 - \frac{1}{2}10^2\right) = 25$, et donc $MI = 5$.

91 On applique la formule d'Al-Kashi dans le triangle NQR :

$RQ^2 = NR^2 + NQ^2 - 2 \times NR \times NQ \times \cos(\widehat{N}) = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 60° = 76$,

Et donc $RQ = \sqrt{76}$.

92 Soit O le centre du rectangle RSNL.

On applique une formule de la médiane dans les triangles RNP et LPS :

$PR^2 + PN^2 = 2PO^2 + \frac{1}{2}RN^2$ et $PL^2 + PS^2 = 2PO^2 + \frac{1}{2}LS^2$.

Or, dans un rectangle, les diagonales ont la même longueur, donc $RN = LS$.

On en déduit que $PR^2 + PN^2 = PL^2 + PS^2$, c'est-à-dire :

$LP^2 = PR^2 + PN^2 - PS^2 = 3^2 + 15^2 - 7^2 = 185$. On a donc $LP = \sqrt{185}$.

93 **a.** En appliquant la formule d'Al-Kashi, on trouve :

$\cos(\widehat{A}) = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC} = \frac{6^2+15^2-10^2}{2\times6\times15} = \frac{161}{180}$ donc $\widehat{A} \approx 26{,}6°$.

$\cos(\widehat{B}) = \frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2\times BA\times BC} = \frac{6^2+10^2-15^2}{2\times6\times10} = -\frac{89}{120}$ donc $\widehat{B} \approx 137{,}9°$.

$\cos(\widehat{C}) = \frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2\times CA\times CB} = \frac{15^2+10^2-6^2}{2\times15\times10} = \frac{289}{300}$ donc $\widehat{C} \approx 15{,}6°$.

b. $EF^2 = ED^2 + FD^2 - 2 \times ED \times FD \times \cos(\widehat{D}) = 10^2 + 7^2 - 2 \times 10 \times 7 \times \cos(60°) = 79.$
On a donc $EF = \sqrt{79}$.
c. $JK^2 = JI^2 + IK^2 - 2 \times JI \times IK \times \cos(\widehat{I}) = 32^2 + 20^2 - 2 \times 32 \times 20 \times \cos(30°)$
$= 1424 - 640\sqrt{3}.$
On a donc $JK = \sqrt{1424 - 640\sqrt{3}}$.
d. $\cos(\widehat{H}) = \frac{GH^2+HL^2-GL^2}{2\times GH\times HL} = \frac{22^2+21^2-25^2}{2\times22\times21} = \frac{25}{77}$ donc $\widehat{H} \approx 71°$.

94 **a.** Impossible, car $AB = 9$ et $AM + MB = 4 + 3 = 7 < 9$.
b. On applique une formule de la médiane dans le triangle DEF :
$ED^2 + EF^2 = 2EE'^2 + \frac{1}{2}DF^2.$
On a donc $EF^2 = 2EE'^2 + \frac{1}{2}DF^2 - ED^2 = 2 \times 10^2 + \frac{21^2}{2} - 15^2 = 195{,}5.$
Et donc $EF = \sqrt{195{,}5}$.
c. Soient H′ et L′ les milieux respectifs de [GL] et [GH].
On applique une formule de la médiane dans le triangle GHL :
$HG^2 + HL^2 = 2HH'^2 + \frac{1}{2}GL^2.$
On a donc $HH'^2 = \frac{1}{2}\left(HG^2 + HL^2 - \frac{1}{2}GL^2\right) = \frac{1}{2}\left(7^2 + \sqrt{60}^2 - \frac{12^2}{2}\right) = 18{,}5$
et donc $HH' = \sqrt{18{,}5}$.
De même, $LL'^2 = \frac{1}{2}\left(LG^2 + LH^2 - \frac{GH^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(12^2 + \sqrt{60}^2 - \frac{7^2}{2}\right) = 89{,}75$
Et donc $LL' = \sqrt{89{,}75}$.

95 $MM'^2 = \frac{1}{2}\left(MN^2 + MP^2 - \frac{NP^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(9^2 + 5^2 - \frac{7{,}5^2}{2}\right) = \frac{623}{16}$ donc $MM' = \sqrt{\frac{623}{16}}$.
$NN'^2 = \frac{1}{2}\left(NM^2 + NP^2 + \frac{MP^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(9^2 + 7{,}5^2 - \frac{5^2}{2}\right) = \frac{499}{8}$ donc $MM' = \sqrt{\frac{499}{8}}$.
$PP'^2 = \frac{1}{2}\left(PM^2 + PN^2 - \frac{MN^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 + 7{,}5^2 - \frac{9^2}{2}\right) = \frac{163}{8}$ donc $MM' = \sqrt{\frac{163}{8}}$.

96 **a.** $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{B}) = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos(60°) = 19$
Donc $AC = \sqrt{19}$.
b. $\cos(\widehat{A}) = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\times AB\times AC} = \frac{5^2+\sqrt{19}^2-3^2}{2\times5\times\sqrt{19}} = \frac{35}{10\sqrt{19}}$ donc $\widehat{A} \approx 36{,}6°$.
$\widehat{C} = 180 - \widehat{A} - \widehat{B} \approx 180 - 36{,}6 - 60 \approx 83{,}4°$.

97 **a.** $MJ^2 = MI^2 + IJ^2 - 2 \times MI \times IJ \times \cos(\widehat{MIJ}) = 2^2 + 5^2 - 2 \times 2 \times 5 \times \cos(30°) = 29 - 10\sqrt{3}.$
Donc $MJ = \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$.
Par ailleurs, $\widehat{MIL} = \widehat{MIJ} + \widehat{JIL} = 30° + 90° = 120°$.
$ML^2 = MI^2 + IL^2 - 2 \times MI \times IL \times \cos(\widehat{MIL}) = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos(120°) = 28.$
Donc $ML = \sqrt{28}$.
b. En appliquant une formule de la médiane dans les triangles MIK et MJL, on trouve :
$ML^2 + MJ^2 = MI^2 + MK^2,$
ce qui donne $MK^2 = ML^2 + MJ^2 - MI^2 = 28 + 29 - 10\sqrt{3} - 2^2 = 53 - 10\sqrt{3}.$
On a donc $MK = \sqrt{53 - 10\sqrt{3}}$.

98 $EG = \sqrt{EF^2 + FG^2 - 2 \times EF \times FG \times \cos \hat{F}} = \sqrt{10{,}5^2 + 16^2 - 2 \times 10{,}5 \times 16 \times \cos 45}$

$= \sqrt{366{,}25 - 168\sqrt{2}}$

On a donc $EF + FG + GE = 10{,}5 + 16 + \sqrt{366{,}25 - 168\sqrt{2}} = 26{,}5 + \sqrt{366{,}25 - 168\sqrt{2}} \approx 37{,}4$.

99 $EB = AE\sin\left(\widehat{EAB}\right) = \frac{14}{\sqrt{3}}\sin(30°) = \frac{14}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

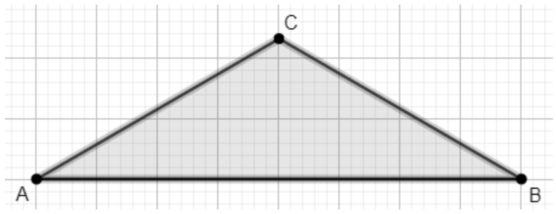
$AB = AE\cos\left(\widehat{EAB}\right) = \frac{14}{\sqrt{3}}\cos(30°) = \frac{14}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7$.

$DB^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos\left(\widehat{BAD}\right) = 5{,}5^2 + 7^2 - 2 \times 5{,}5 \times 7 \times \cos(30°)$

$= 79{,}25 - 38{,}5\sqrt{3}$ donc $DB = \sqrt{79{,}25 - 38{,}5\sqrt{3}}$.

On a donc $EB + BD = \frac{7}{\sqrt{3}} + \sqrt{79{,}25 - 38{,}5\sqrt{3}}$.

100 **a.**



Conjecture : ABC est isocèle en C.

b. $IC = \sqrt{IA^2 + AC^2 - 2 \times IA \times AC \times \cos(\hat{A})} = \sqrt{4^2 + \frac{64}{3} - 2 \times 4 \times \sqrt{\frac{64}{3}} \times \cos(30°)} = \sqrt{\frac{16}{3}}$.

On a $IC^2 + IA^2 = \frac{16}{3} + 16 = \frac{64}{3} = AC^2$ donc, d'après le théorème de Pythagore, le triangle AIC est rectangle en I.

c. La médiane (CI) étant aussi une hauteur, on en conclut que le triangle est isocèle en C.

101 Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ de deux manières différentes :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2}(8^2 + 6^2 - 5^2) = 37{,}5$.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 8AH$.

On a donc $AH = \frac{37{,}5}{8}$.

On en déduit que $HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{37{,}5}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{3591}{256}}$.

On a donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AH}{2} = \frac{8 \times \sqrt{\frac{3591}{256}}}{2} = \frac{8 \times \sqrt{3591}}{2 \times 16} = \frac{\sqrt{3591}}{4}$.

102 $CH = AC\sin\left(\hat{A}\right) = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

On a donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AH}{2} = \frac{10 \times 3\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$.

103 $CH = AC\sin\left(\hat{A}\right) = 6 \times \sin(180 - 45 - 30) = 6\sin(105°) \approx 5{,}8$.

$AB = AH + HB = AC\cos\hat{A} + \frac{CH}{\tan\hat{B}} = 7\cos(105°) + \frac{CH}{\tan(30°)} \approx 8{,}2$.

On a donc $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \times AH}{2} \approx \frac{5{,}8 \times 8{,}2}{2} \approx 23{,}8$.

104 $DC = 7 + 12\cos(60°) = 13$ et $AD = 12\sin(60°) = 6\sqrt{3}$

On a donc $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \times AD = \frac{7+13}{2} \times 6\sqrt{3} = 60\sqrt{3}$.

D'après le théorème de Pythagore, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{7^2 + (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{157}$.

105 $BC = \sqrt{BA^2 + AC^2 - 2 \times BA \times AC \times \cos(\widehat{A})} = \sqrt{9^2 + 17^2 - 2 \times 9 \times 17 \times \cos(40°)}$

$= \sqrt{370 - 306\cos(40°)}$.

106 $DE = \sqrt{DF^2 + FE^2 - 2 \times DF \times FE \times \sin(\widehat{F})} = \sqrt{3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos(50\,°)}$

$= \sqrt{34 - 30\cos(50°)}$.

107 D'après la formule des sinus,

$\frac{\sin(\widehat{K})}{IJ} = \frac{\sin(\widehat{J})}{IK}$ donc $IK = \frac{\sin(\widehat{J})}{\sin(\widehat{K})} \times IJ = \frac{\sin(30)}{\sin(40)} \times 5 \approx 3{,}9$.

108 Soit R′ le milieu de [ST].

$ST = \sqrt{SR^2 + RT^2 - 2 \times SR \times RT \times \cos(\widehat{R})} = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos(45°)}$

$= \sqrt{41 - 40\cos(45°)}$

On applique une formule de la médiane :

$RR'^2 = \frac{1}{2}\left(RS^2 + RT^2 - \frac{ST^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 + 4^2 - \frac{41-40\cos 45°}{2}\right) = \frac{41+40\cos(45°)}{4}$

donc $RR' = \frac{\sqrt{41+40\cos(45°)}}{2}$.

109 **a.** Calculons d'abord l'angle $\widehat{BAP}$:

$\widehat{BAP} = \widehat{BAC} + \widehat{CAP} = \tan^{-1}\frac{BC}{AB} + 15° = \tan^{-1}\frac{4}{10} + 15° \approx 36{,}8°$.

On a alors

$BP = \sqrt{PA^2 + AB^2 - 2 \times PA \times AB \times \cos(\widehat{BAP})} \approx \sqrt{3^2 + 10^2 - 2 \times 3 \times 10 \times \cos(36{,}8°)}$

$\approx 7{,}8$

Par ailleurs, $\widehat{BAD} = 90 - \widehat{BAP} \approx 53{,}2°$ donc :

$DP = \sqrt{DA^2 + AP^2 - 2 \times DA \times AP \times \cos(\widehat{BAP})} \approx \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos(53{,}2°)}$

$\approx 3{,}26$.

b. $CP^2 = DP^2 + BP^2 - AP^2 \approx 62{,}5$ donc $CP \approx 7{,}9$.

110 $\widehat{A} = 88°$, $\widehat{B} = 46°$, $\widehat{C} = 46°$, $AB = 7$, $AC = 7$, $BC = \sqrt{98 - 98\cos 88°}$.

111 $\widehat{F} = 25°$, $FD = 11$, $FE = 19$, $DE = \sqrt{482 - 418\cos(25°)}$,

$\cos\widehat{D} \approx -0{,}61$ donc $\widehat{D} \approx 127{,}8°$

$\widehat{F} \approx 27{,}2°$.

112 $IJ = 14$, $IK = 3$, $\widehat{I} = 120°$, $JK = \sqrt{247} \approx 15{,}7$, $\widehat{J} \approx 9{,}5°$, $\widehat{K} \approx 50{,}5°$.

113 $\widehat{P} = 101°$, $\widehat{M} \approx 50{,}7°$, $\widehat{N} \approx 28{,}3°$, $MN = 16{,}5$, $PN = 13$, $MP \approx 8$.

114 **a.** On applique une formule de la médiane :

$RR'^2 = \frac{1}{2}\left(PR^2 + RQ^2 - \frac{PQ^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(5^2 + 97 - \frac{12^2}{2}\right) = 25$ donc $RR' = 5$.

Le triangle PRR′ est donc isocèle en R.

b. $QP' = \frac{\sqrt{97}}{2} \neq 12$, donc la réponse est non.

115 **1.** $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})}$

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C})-b^2}{2a\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C})}} = \frac{a-b\cos(\widehat{C})}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{C})}}$$

2.a. et **b.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math

def A_K_long(a,b,C):
    C=math.radians(C)
    c=math.sqrt(a**2+b**2-2*a*b*math.cos(C))
    return c

def A_K_angle(a,b,C):
    c=A_K_long(a,b,C)
    A=math.degrees(math.acos((-a**2+b**2+c**2)/(2*b*c)))
    B=180-(A+C)
    return A,B
```

116 **a.** $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{AC^2+CB^2-AB^2}{2\times AC\times CB} = \frac{7^2+6{,}5^2-10^2}{2\times 7\times 6{,}5}$ donc $\widehat{ACB} \approx 95{,}5°$.

b. Le triangle BEC est rectangle en E, donc $BE = BC \times \sin\left(\frac{\widehat{ACB}}{4}\right)$,

et donc $BD = 13\sin\left(\frac{\widehat{ACB}}{4}\right) \approx 5{,}2$.

Objectif 4
Étudier un ensemble de points

117 **a.** $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

b. $\overrightarrow{AP} = -\frac{4}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

c. $\overrightarrow{AP} = -\frac{2{,}5}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

d. $\overrightarrow{AP} = \frac{\sqrt{2}}{AB^2}\overrightarrow{AB}$

e. $\overrightarrow{BP} = \frac{10}{AB^2}\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{AP} = (1 - \frac{10}{AB^2})\overrightarrow{AB}$.

118 **a.** Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5^2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{25}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 1 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 1\\ &\Leftrightarrow 1 + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 1\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0\end{aligned}$$

C’est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

b. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{-4}{5^2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -4 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -4\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = -4\\ &\Leftrightarrow -4 + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = -4\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0\end{aligned}$$

C'est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

c. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{-2,5}{5^2}\overrightarrow{AB} = -\frac{2,5}{25}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BA} = 2,5 &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -2,5\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = -2,5\\ &\Leftrightarrow -2,5 + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = -2,5\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0\end{aligned}$$

C'est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

d. Soit P le point défini par $\overrightarrow{AP} = \frac{\sqrt{2}}{5^2}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{AB} = 0\end{aligned}$$

C'est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

e. Soit P le point défini par $\overrightarrow{BP} = \frac{10}{5^2}\overrightarrow{BA}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AB} = -10 &\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BA} = 10\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{BA} = 10\\ &\Leftrightarrow 10 + \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{BA} = 10\\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\overrightarrow{BA} = 0\end{aligned}$$

C'est donc la droite passant par P et perpendiculaire à (AB).

119 **a.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ donc $MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = 3 + \frac{3^2}{4} = 5,25$.

b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ donc $MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = (-3) + \frac{3^2}{4} = -0,75$.

c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ donc $MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = 10 + \frac{8^2}{4} = 26$.

d. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ donc $MI^2 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} = 1 + \frac{1^2}{4} = 1,25$.

120 **a.** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -4 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -4 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 4 = 0$

C'est l'ensemble {I}.

b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = -1 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = -1 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} - 1 = 3 \Leftrightarrow MI = \sqrt{3}$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

c. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} + 2 = 6 \Leftrightarrow MI = \sqrt{6}$

C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{6}$.

121 **1.a.** $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = 3 > 0$ donc $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DE}$ ont le même sens.

On a donc $\overrightarrow{DA} = \lambda\overrightarrow{DE}$, avec $\lambda > 0$.

$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = 3$ donc $\lambda\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DE} = 3$, donc $\lambda DE^2 = 3$, et donc $\lambda = \frac{3}{DE^2} = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$.

On a donc $\overrightarrow{DA} = \frac{3}{25}\overrightarrow{DE}$.

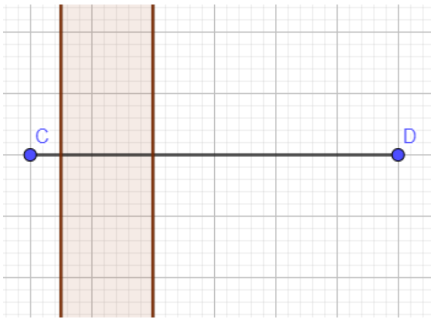
b. $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DE} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 3 \Leftrightarrow\ 3 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 3 \Leftrightarrow\ \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{DE} = 0$
c. C'est la droite passante par A et perpendiculaire à (DE).
2. Soit B le point défini par $\overrightarrow{DB} = \frac{10}{5^2}\overrightarrow{DE}$.
$\overrightarrow{DP}.\overrightarrow{DE} = 10 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DE} = 10 \Leftrightarrow\ 10 + \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DE} = 10 \Leftrightarrow\ \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{DE} = 0$
C'est la droite passante par B et perpendiculaire à (DE).

122 **1.a.** $\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{UM} = 3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TM}\right).\left(\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TM}\right) = 3$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{TM} + \overrightarrow{TM}.\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TM}.\overrightarrow{TM} = 3$
$\Leftrightarrow\ -ST^2 + TM^2 = 3 \Leftrightarrow\ TM^2 = 3 + ST^2 = 3 + 4^2 = 19$
b. C'est le cercle de centre T et de rayon $\sqrt{19}$.
2. $\overrightarrow{SP}.\overrightarrow{UP} = -3 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TP}\right).\left(\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TP}\right) = -3$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{TP} + \overrightarrow{TP}.\overrightarrow{UT} + \overrightarrow{TP}.\overrightarrow{TP} = -3$
$\Leftrightarrow\ -ST^2 + TP^2 = -3 \Leftrightarrow\ TP^2 = -3 + ST^2 = -3 + 4^2 = 13$
C'est le cercle de centre T et de rayon $\sqrt{13}$.

123 **a.** Soit I le milieu de [GH].
$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MH} = 5 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IH}\right) = 5$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{IG}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IG}.\overrightarrow{IH} = 5$
$\Leftrightarrow\ MI^2 - IG^2 = 5$
$\Leftrightarrow\ MI^2 = 5 + IG^2 = 5 + 5^2 = 30$
C'est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{30}$.
b. C'est le disque fermé de centre I et de rayon $\sqrt{30}$.

124 $\overrightarrow{EP}.\overrightarrow{EF} = k \Leftrightarrow -7 \times 3 = k \Leftrightarrow k = -21$.

125 **a.** Soit A le point défini par $\overrightarrow{CA} = \frac{12}{6^2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{CP}.\overrightarrow{CD} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CD} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 36 + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CD} = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{CD} = 0$
L'ensemble $\mathscr{D}_1$ est donc la droite passant par A et perpendiculaire à (CD).
Soit B le point défini par $\overrightarrow{CB} = \frac{3}{6^2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{12}\overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{CQ}.\overrightarrow{CD} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CD} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{12} \times 36 + \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CD} = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{BP}.\overrightarrow{CD} = 0$
L'ensemble $\mathscr{D}_2$ est donc la droite passant par B et perpendiculaire à (CD).
b. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points du plan qui sont compris entre $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$.
c.



126 **1.a.** $\overrightarrow{KP}.\overrightarrow{LP} \leqslant 20 \Leftrightarrow (\overrightarrow{KJ}+\overrightarrow{JP}).(\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{JP}) \leqslant 20$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{KJ}.\overrightarrow{JP}+\overrightarrow{JP}.\overrightarrow{LJ}+\overrightarrow{JP}.\overrightarrow{JP} \leqslant 20$$
$$\Leftrightarrow -KJ^2+JP^2 \leqslant 20$$
$$\Leftrightarrow JP^2 \leqslant 20+KJ^2 = 20+3^2 = 29$$

b. C'est le disque fermé de centre J et de rayon $\sqrt{29}$.

2. C'est le cercle de centre J et de rayon $\sqrt{14}$.

127 Soit I le milieu de [RT].

a. $\overrightarrow{RP}.\overrightarrow{TP} = 15 \Leftrightarrow (\overrightarrow{RI}+\overrightarrow{IP}).(\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{IP}) = 15$

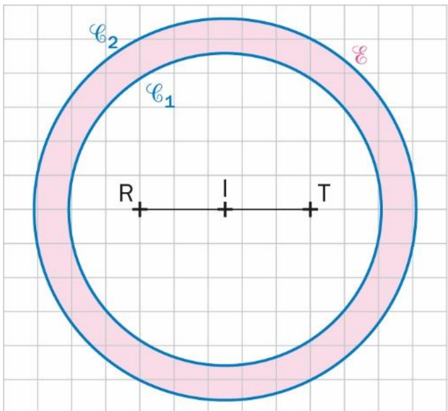
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{RI}.\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{RI}.\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{TI}+\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IP} = 15$$
$$\Leftrightarrow -RI^2+IP^2 = 15$$
$$\Leftrightarrow IP^2 = 15+RI^2 = 15+2{,}5^2 = 21{,}25$$

L'ensemble $\mathscr{C}_1$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{21{,}25}$.

De même l'ensemble $\mathscr{C}_2$ est un cercle de centre I et de rayon $\sqrt{31{,}25}$.

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est une couronne fermée, délimitée par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

c.



128 **1.a.** $GM^2+HM^2 = 56 \Leftrightarrow (\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IM})^2+(\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IM})^2 = 56$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GI}^2+2\overrightarrow{GI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2+\overrightarrow{HI}^2+2\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}^2 = 56$$
$$\Leftrightarrow 5^2+IM^2+5^2+IM^2 = 56$$
$$\Leftrightarrow 2IM^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow IM = \sqrt{3}$$

b. L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{3}$.

2. Si on reproduit le raisonnement ci-dessus en remplaçant 56 par k, on arrive à $2IM^2 = k-50$. L'ensemble cherché est l'ensemble des $k < 50$.

129 Les formules de Gilles et Ginette sont fausses : c'est $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 15 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 15 \Leftrightarrow MI^2 = 15+\frac{6^2}{4} = 24$

L'ensemble cherché est donc le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{24}$.

130 **a.** $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3$

$$\Leftrightarrow MA = 3MB$$
$$\Leftrightarrow MA^2 = 9MB^2$$
$$\Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$$

b. $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AP} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

De même, $\overrightarrow{AQ} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

c. $\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP} = \vec{0}$ donc $(\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP})(\overrightarrow{AP} + 3\overrightarrow{BP}) = 0$, et donc $AP^2 - 9BP^2 = 0$, ce qui prouve que $P \in \mathcal{F}$. De même, $Q \in \mathcal{F}$.

d. $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{MP} + 3\overrightarrow{PB} = 4\overrightarrow{MP} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QA} - 3\overrightarrow{MQ} - 3\overrightarrow{QB} = -2\overrightarrow{MQ} + \vec{0} = -2\overrightarrow{MQ}$

e. $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow MA^2 - 9MB^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MP}.\left(-2\overrightarrow{MQ}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = 0$

f. C'est le cercle de diamètre [PQ].

131 **1.a.** $M \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow MI^2 - MJ^2 = -10$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AM} = -10$ (d'après une formule de la médiane)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AM} = -5$

b. Soit B le point défini par $\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{5^2}\overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AM} = -5 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BM} = -5 \Leftrightarrow -5 + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BM} = -5 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BM} = 0$

C'est donc la droite passant par B et perpendiculaire à (IJ).

2.a. $N \in \mathcal{D} \Leftrightarrow NI^2 - NJ^2 = 25 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AN} = 25$ (d'après une formule de la médiane)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AN} = 12{,}5$

b. Soit C le point défini par $\overrightarrow{AC} = \frac{12{,}5}{5^2}\overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AN} = 12{,}5 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CN} = 12{,}5 \Leftrightarrow 12{,}5 + \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CN} = 12{,}5 \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{CN} = 0$

C'est donc la droite passant par C et perpendiculaire à (IJ).

132 Soit I le milieu de [KL].

$\overrightarrow{MK}.\overrightarrow{ML} = k^2 + 2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IL}\right) = k^2 + 2 \Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{IL} = k^2 + 2$

$\Leftrightarrow MI^2 - 1^2 = k^2 + 2 \Leftrightarrow MI^2 = k^2 + 3$

Quel que soit le réel k l'ensemble des solutions est un cercle, donc il n'est pas vide.

133 **a.** $\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GF} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{EF} = \vec{0} \Leftrightarrow 6\overrightarrow{GE} = -5\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{EF}$

b. $GE = \frac{5}{6} \times EF = \frac{5}{6} \times 4 = \frac{10}{3}$ et $GF = EF - EG = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$.

c. $ME^2 + 5MF^2 = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GE}\right)^2 + 5\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GF}\right)^2$

$= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GE}^2 + 5\left(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GF}^2\right)$

$= 6MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GE} + 5\overrightarrow{GF}\right) + GE^2 + 5GF^2$

$= 6MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\vec{0} + \left(\frac{10}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$= 6MG^2 + \frac{40}{3}$

d. $ME^2 + 5MF^2 = 400 \Leftrightarrow 6MG^2 + \frac{40}{3} = 400 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{580}{9} \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{580}{9}}$.

C'est le cercle de centre G et de rayon $\frac{\sqrt{580}}{3}$.

134 **1.** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (6-3)^2} = 5.$

2. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4} = \frac{4k+25}{4}$

3.a. $\frac{4k+25}{4} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{25}{4}$

b. Le point I a pour coordonnées $(4; 4{,}5)$ et $OI^2 = 4^2 + 4{,}5^2 = 36{,}25$.

$\frac{4k+25}{4} = 36{,}25 \Leftrightarrow k = 30$

c. $\frac{4k+25}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{25}{4}$.

135 **a.** $\|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB}\| = \|2\overrightarrow{PI}\| = 2PI.$

b. $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow 2PI = PA \Leftrightarrow 4PI^2 = PA^2 \Leftrightarrow PA^2 - 4PI^2 = 0$

c. $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ donc $\left(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{IC}\right).\left(\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{IC}\right) = 0$, ce qui prouve que $AC^2 - 4IC^2 = 0$.

On a donc $C \in \mathcal{F}$.

$\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID} = \vec{0}$ donc $\left(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{ID}\right) = 0$, ce qui prouve que $AD^2 - 4ID^2 = 0$.

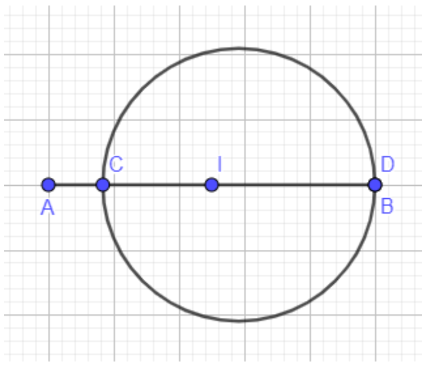
On a donc $D \in \mathcal{F}$.

d. $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{CI} = 3\overrightarrow{PC} + \vec{0} = 3\overrightarrow{PC}.$

$\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{PD} - 2\overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{PD} + \vec{0} = -\overrightarrow{PD}.$

e. $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow PA^2 - 4PI^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PI}\right).\left(\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PI}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(3\overrightarrow{PC}\right).\left(-\overrightarrow{PD}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} = 0$

f. C'est le cercle de diamètre [CD].



136 **1.a.** $\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{BG} + 3\overrightarrow{GK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{GK} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GH} + \frac{3}{2}\overrightarrow{GK}$

b. $MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG}\right)^2 - 2\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BH}\right)^2 + 3\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BK}\right)^2$

$= 2MB^2 + 2\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{BG} - 2\overrightarrow{BH} + 3\overrightarrow{BK}\right) + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2$

$= 2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2$

c. $MG^2 - 2MH^2 + 3MK^2 = 50 \Leftrightarrow 2MB^2 + BG^2 - 2BH^2 + 3BK^2 = 50$

$\Leftrightarrow 2MB^2 = 50 - BG^2 + 2BH^2 - 3BK^2$

$\Leftrightarrow 2MB^2 = 50 - 32{,}5 + 2 \times 154 - 3 \times 41{,}5$

$\Leftrightarrow MB^2 = 100{,}5$

$\Leftrightarrow MB = \sqrt{100{,}5}$

C'est le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{100{,}5}$.

2. $k - 32{,}5 + 2 \times 154 - 3 \times 41{,}5 > 0 \Leftrightarrow k > -151.$

Démonstrations

p. 242 et 243 du manuel

137 Démonstration de la propriété permettant d'étudier l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ où a et B sont deux points distincts.

- On note I le milieu du segment [AB].

On a $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$

- D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) = \text{MI}^2 - \text{AI}^2$
- Soit $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \text{MI}^2 - \left(\frac{\text{AB}}{2}\right)^2 = \text{MI}^2 - \frac{\text{AB}^2}{2}$.

D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \text{MI}^2 - \frac{\text{AB}^2}{2} = 0 \Leftrightarrow \text{MI}^2 = \frac{\text{AB}^2}{2} \Leftrightarrow \text{MI} = \frac{\text{AB}}{2}$.

- L'ensemble des points M est donc le cercle de centre I, milieu de [AB], et de rayon $\frac{\text{AB}}{2}$. En outre, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux : ce cercle est l'ensemble des points M tels que le triangle MAB est rectangle en M.

138 **1.** Soit M un point du plan et $\mathcal{D}$ la droite passant par P, de vecteur normal $\vec{u}$.

$\text{M} \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}.\vec{u} = 0$

2.a. $\text{MA}^2 = \text{MB}^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{IM}$

b. $\text{MA}^2 = \text{MB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IM} = 0$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux et que l'ensemble $\mathcal{M}$ est la droite passant par I et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

139 **a.** $\overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$.

b. $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BC}^2 - 2 \times \text{AC} \times \text{BC} \times \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}\right)$ donc $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos(\hat{\text{C}})$.

140 On pose $\vec{u}\binom{x}{y}$, $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ et $\vec{w}\binom{x''}{y''}$.

a. $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = x'x + y'y = \vec{v}.\vec{u}$.
b. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + yy' + xx'' + yy'' = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
c. $(a\vec{u}).(b\vec{v}) = axbx' + ayby' = ab(xx' + yy') = (a \times b)(\vec{u}.\vec{v})$.

141 **1.** $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u};\vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v};\vec{u}) = \vec{v}.\vec{u}$.

2.a. L'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est aigu et F est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\vec{u}.\vec{v} = \text{AB} \times \text{AF}$.

L'angle $(\vec{u};\vec{w})$ est aigu, $\vec{u} = \overrightarrow{CE}$ et H est le projeté orthogonal de D sur (CE), donc :
$\vec{u}.\vec{w} = \text{CE} \times \text{CH} = \text{AB} \times \text{CH}$.

b. $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{AD}$ et G est le projeté orthogonal de D sur (AB) donc $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \text{AB} \times \text{AG}$.
c. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \text{AB} \times \text{AG} = \text{AB} \times (\text{AF} + \text{FG}) = \text{AB} \times (\text{AF} + \text{CH}) = \text{AB} \times \text{AF} + \text{AB} \times \text{CH}$
$= \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3.a. $\vec{u}.k\vec{v} = \text{AB} \times k\text{AF} = k \times \text{AB} \times \text{AF}$.
b. $k \times \text{AB} \times \text{AF} = k \times \vec{u}.\vec{v}$.
4. $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ et $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$.

Problèmes

p. 244 à 248 du manuel

142 **1.** D'après Al-Kashi,

$\mathrm{NZ} = \sqrt{\mathrm{NQ}^2 + \mathrm{QZ}^2 - 2 \times \mathrm{NQ} \times \mathrm{QZ} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{ZQN}}\right)} = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos(30°)}$

$= \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

2.a. Le triangle QNZ est isocèle de Q, donc la droite (QH) est à la fois une hauteur, une médiane, une bissectrice et une médiatrice.

C'est une médiane donc H est le milieu de [NZ].

C'est une bissectrice donc $\widehat{\mathrm{ZQH}} = \frac{1}{2}\widehat{\mathrm{ZQN}} = \frac{1}{2} \times 30 = 15°$.

b. $\sin(15°) = \frac{\mathrm{ZH}}{\mathrm{QZ}} = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{NZ}}{1} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

c. D'après le théorème de Pythagore,

$\mathrm{HQ} = \sqrt{\mathrm{QZ}^2 - \mathrm{HZ}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

$\cos(15°) = \frac{\mathrm{QH}}{\mathrm{QZ}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

143 **a.** $\mathcal{S} = \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{CH_C}}{2} = \frac{\mathrm{AC} \times \mathrm{BH_B}}{2} = \frac{\mathrm{BC} \times \mathrm{AH_A}}{2}$.

b. $\sin\left(\widehat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\mathrm{CH_C}}{\mathrm{AC}} = \frac{\frac{2\mathcal{S}}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AC}} = \frac{2\mathcal{S}}{\mathrm{AB} \times \mathrm{AC}} = \frac{2\mathcal{S}}{cb}$. De même, $\sin\left(\widehat{\mathrm{B}}\right) = \frac{2\mathcal{S}}{ac}$ et $\sin\left(\widehat{\mathrm{C}}\right) = \frac{2\mathcal{S}}{ab}$.

c. On en déduit que $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{A}})}{a} = \frac{2\mathcal{S}}{abc}$.

De même, $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{b} = \frac{2\mathcal{S}}{abc}$ et $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{c} = \frac{2\mathcal{S}}{abc}$.

Cela prouve que $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{A}})}{a} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{b} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{c} = \frac{2\mathcal{S}}{abc}$.

144 **a.** $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{D}})}{\mathrm{EF}} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{E}})}{\mathrm{FD}} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{F}})}{\mathrm{DE}}$,

donc $\mathrm{DF} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{E}})}{\sin(\widehat{\mathrm{F}})} \times \mathrm{DE} = \frac{\sin(48°)}{\sin(180°-35°-48°)} \times 4 \approx 3$

et $\mathrm{FE} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{D}})}{\sin(\widehat{\mathrm{F}})} \times \mathrm{DE} = \frac{\sin(35°)}{\sin(180°-35°-48°)} \times 4 \approx 2{,}3$.

b. De même, on trouve $\mathrm{GH} \approx 7{,}32$ et $\mathrm{GK} \approx 5{,}18$.

145 **a.** $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{S}})}{\mathrm{RT}} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{R}})}{\mathrm{TS}}$ donc $\mathrm{RT} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{S}})}{\sin(\widehat{\mathrm{R}})} \times \mathrm{TS} = \frac{\sin(32°)}{\sin(180°-75°-32°)} \times 10 \approx 5{,}54$.

b. $\sin\left(\widehat{\mathrm{T}}\right) = \frac{h}{\mathrm{RT}}$ donc $h = \mathrm{RT}\sin(75°)$.

c. $\mathcal{A}_{\mathrm{RST}} = \frac{\mathrm{TS} \times h}{2} = \frac{\mathrm{TS} \times \mathrm{RT}\sin(75°)}{2} \approx \frac{10 \times 5{,}54\sin(75°)}{2} \approx 26{,}76$ dam².

$26{,}75$ dam² $= 2675$ m² $= 0{,}2675$ ha.

Le terrain n'a donc pas une superficie d'au moins 0,5 ha.

146 $\frac{\sin(\widehat{\mathrm{A}})}{\mathrm{BR}} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{\mathrm{AR}} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{R}})}{\mathrm{AB}}$

donc $\mathrm{AR} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{\sin(\widehat{\mathrm{R}})} \times \mathrm{AB} = \frac{\sin(45°)}{\sin(180°-30°-45°)} \times 5 \approx 3{,}66$

et $\mathrm{BR} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{A}})}{\sin(\widehat{\mathrm{R}})} \times \mathrm{AB} = \frac{\sin(30°)}{\sin(180°-30°-45°)} \times 5 \approx 2{,}59$.

147 a. $\widehat{NMA} = 180° - 14{,}6° = 165{,}4°$ et $\widehat{NAM} = 180° - 12° - 165{,}4° = 2{,}6°$.
$\frac{\sin(\widehat{NAM})}{MN} = \frac{\sin(\widehat{NMA})}{AN}$ donc $AN = \frac{\sin(\widehat{NMA})}{\sin(\widehat{NAM})} \times MN = \frac{\sin(165{,}4)}{\sin(2{,}6)} \times 100 \approx 555{,}67$.
$\frac{\sin(\widehat{NCA})}{AN} = \frac{\sin(\widehat{CNA})}{AC}$ donc $AC = \frac{\sin(\widehat{CNA})}{\sin(\widehat{NCA})} \times AN \approx \frac{\sin(12)}{\sin(90)} \times 555{,}67 \approx 115{,}53$.
La cité administrative fait donc environ 116 m de haut.
b. $\widehat{MAC} = 90° - 14{,}6° = 75{,}4°$ et $\widehat{NAC} = 2{,}6° + 75{,}4° = 78°$.
$\frac{\sin(\widehat{MAC})}{MC} = \frac{\sin(\widehat{AMC})}{AC}$ donc $MC = \frac{\sin(\widehat{MAC})}{\sin(\widehat{AMC})} \times AC \approx \frac{\sin(75{,}4°)}{\sin(14{,}6°)} \times 115{,}53 \approx 443{,}7$.
Au moment du premier relevé, Linh se trouvait à environ 444 mètres de la Cité.

148 Avec la formule des sinus, on trouve $JP \approx 11{,}54$.
On a donc $PT = JP\sin(\hat{J}) \approx 11{,}54\sin(67°) \approx 10{,}62$.

149 1.a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
b. A' est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AA'}$.
On a donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.
2. En reprenant le raisonnement de la question précédente, on trouve $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.
3. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ donc A, A' et G sont alignés.
De même, B, B' et G sont alignés et C, C' et G sont alignés.
Le point G est donc le point de concours des médianes.

150 a. Ω appartient à la médiatrice de [AB] donc $\Omega A = \Omega B$.
Ω appartient à la médiatrice de [AC] donc $\Omega A = \Omega C$.
On a $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ donc Ω appartient à la médiatrice de [BC].
b. $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ donc A, B et C appartiennent à un même cercle de centre Ω.
c. Supposons qu'un point U est le centre d'un cercle passant par A, B et C.
On a $UA = UB = UC$ donc U appartient aux médiatrices de [AB] et [AC].
Les point U et Ω sont donc confondus.

151 a. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = 2\overrightarrow{\Omega A'}$.
b. (AH) et $(\Omega A')$ sont parallèles. Or, $(\Omega A')$ est la médiatrice de [BC] donc $(\Omega A')$ et (BC) sont perpendiculaires. On en déduit que (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
De plus, (AH) passe par A, donc elle est la hauteur issue de A.
H appartient donc à cette hauteur.
c. En raisonnant de la même manière avec B et C, on montre que H appartient aux hauteurs issues de B et de C.
H est donc le point de concours des trois hauteurs.

152 1.a. $\overrightarrow{\Omega H} = \overrightarrow{\Omega A} + \overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{\Omega C} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$
$= 3\overrightarrow{\Omega C}$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$ sont colinéaires, donc les points Ω, H et C sont alignés.
2. Recherche à faire sur internet : tout triangle possède un cercle appartenant à la droite d'Euler et passant par les trois milieux des côtés du triangle, les trois pieds des hauteurs et par les milieux des segments reliant l'orthocentre au sommet.

153 **a.** Le triangle ADB est rectangle en B.

On a donc $\sin(\widehat{ADB}) = \frac{AB}{AD}$, ce qui prouve que $AD = \frac{AB}{\sin(\widehat{ADB})} = \frac{AB}{\sin(\widehat{ACB})}$.
b. $r = \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2\sin(\widehat{ACB})} = \frac{1}{2\frac{\sin(\widehat{ACB})}{AB}} = \frac{1}{2\frac{2S}{abc}} = \frac{abc}{4S}$.

154 **a.** $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow MR^2 + MS^2 + MT^2 = 360$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KR}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KS}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KT}\right)^2 = 360$$
$$\Leftrightarrow 3MK^2 + 2\overrightarrow{MK}.\left(\overrightarrow{KR} + \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{KT}\right) + KR^2 + KS^2 + KT^2 = 360$$
$$\Leftrightarrow 3MK^2 + KR^2 + KS^2 + KT^2 = 360$$

b. $RK^2 + SK^2 + TK^2 = \left(\frac{2}{3}RC\right)^2 + \left(\frac{2}{3}TB\right)^2 + \left(\frac{2}{3}SA\right)^2 = \frac{4}{9}RC^2 + \frac{4}{9}TB^2 + \frac{4}{9}SA^2$
$= \frac{4}{9}(SA^2 + TB^2 + RC^2)$
$= \frac{4}{9}\left(\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{SR}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS}\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RS}\right)\right)^2\right)$
$= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{SR}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{TR} + \overrightarrow{TS}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{RT} + \overrightarrow{RS}\right)^2\right)$
$= \frac{1}{9}\left(2ST^2 + 2SR^2 + 2TR^2 + 2(\overrightarrow{ST}.\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{SR} + \overrightarrow{ST}.\overrightarrow{SR})\right)$
$= \frac{1}{9}(2ST^2 + 2SR^2 + 2TR^2 + ST^2 + SR^2 - RT^2 + ST^2 + SR^2 - TR^2 + ST^2 + SR^2 - TR^2)$
$= \frac{1}{9}(3ST^2 + 3SR^2 + 3TR^2)$
$= \frac{1}{3}(ST^2 + SR^2 + TR^2)$
c. $M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow 3MK^2 + \frac{1}{3}(ST^2 + SR^2 + TR^2) = 360$

$$\Leftrightarrow 3MK^2 + \frac{1}{3}(8^2 + 15^2 + 9^2) = 360$$
$$\Leftrightarrow MK^2 = \frac{710}{9}$$

C'est donc le cercle de centre K et de rayon $\frac{\sqrt{710}}{3}$.

155 **1.a.** D'après une formule de la médiane dans le triangle APC, $AP^2 + CP^2 = 2PK^2 + \frac{AC^2}{2}$.
b. D'après une formule de la médiane dans le triangle DPB, $BP^2 + DP^2 = 2PK^2 + \frac{BD^2}{2}$.
c. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur, donc $AC = BD$, ce qui prouve que : $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.
2. $MR^2 + MN^2 = MS^2 + ML^2$ donc $LM^2 = MR^2 + MN^2 - MS^2 = 3^2 + 15^2 - 7^2 = 185$.
On a donc $LM = \sqrt{185}$.

156 **1.a.** $[AA']$ étant le diamètre du cercle passant par B, le triangle $AA'B$ est rectangle en B.
On a donc (KB), c'est-à-dire (AB), perpendiculaire à (BA').
b. $KI^2 - AI^2 = \left(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{AI}\right).\left(\overrightarrow{KI} - \overrightarrow{AI}\right) = \left(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IA'}\right).\left(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IA}\right) = \overrightarrow{KA'}.\overrightarrow{KA} = \left(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BA'}\right).\overrightarrow{KA}$

$$= \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KA} + 0 = \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB}.$$

c. De même, $KI^2 - CI^2 = \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$.

d. Comme AI = CI, on a $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$.

2.a. En reproduisant le raisonnement de la question **1** avec les droites (AB) et (EC), on trouve que $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE}$.

Or, $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD}$, donc $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE}$.

b. On en déduit que $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KC}.\overrightarrow{KD} = 0$, donc $\overrightarrow{KC}.\left(\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{DK}\right) = 0$, c'est-à-dire $\overrightarrow{KC}.\overrightarrow{DE} = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont donc orthogonaux.

Or, K, C, D et E sont alignés, donc $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$.

c. Les points D et E étant confondus, les points , B, C et D sont donc cocycliques.

157 **1.a.** $1 + \cos(\widehat{A}) = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$

et $\frac{2p(p-a)}{bc} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$ donc $1 + \cos(\widehat{A}) = \frac{2p(p-a)}{bc}$.

$1 - \cos(\widehat{A}) = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

et $\frac{2(p-b)(p-c)}{bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} = \frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$

donc $1 - \cos(\widehat{A}) = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$.

b. On a $\left(1 - \cos(\widehat{A})\right)\left(1 + \cos(\widehat{A})\right) = 1 - \cos^2(\widehat{A}) = \sin^2(\widehat{A})$

et $\left(1 - \cos(\widehat{A})\right)\left(1 + \cos(\widehat{A})\right) = \frac{2(p-b)(p-c)}{bc} \times \frac{2p(p-a)}{bc} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$.

On a donc $\sin(\widehat{A}) = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$

c. D'après la formule des sinus,

$\mathcal{S} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} \times \frac{abc}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}}{a} \times \frac{abc}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math

def heron(a,b,c):
    p=(a+b+c)/2
    S=math.sqrt(p*(p-a)*(p-b)*(p-c))
    return S
```

3.a. Le triangle 1.

b. Le triangle 1.

158 **a.** $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 0\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

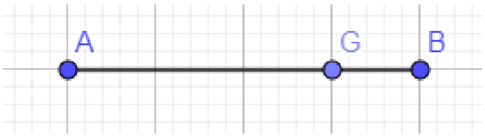
On en conclut que A et B sont confondus, ce qui est exclu. On a donc $\alpha + \beta \neq 0$.

b. $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} = -\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{GB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont donc colinéaires, ce qui prouve que G, A et B sont alignés.

c. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc G est le milieu de [AB].

d. $\alpha\overrightarrow{GA} + 3\alpha\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$



e. $\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (1+\beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{1+\beta}\overrightarrow{AB}$

$G \in [AB] \Leftrightarrow 0 < \frac{\beta}{1+\beta} < 1 \Leftrightarrow \frac{1+\beta}{\beta} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} + 1 > 1 \Leftrightarrow \beta > 0$

159 **1.a.** $\text{MA}^2+\text{MB}^2=k \Leftrightarrow 2\text{MI}^2+\frac{\text{AB}^2}{2}=k \Leftrightarrow \text{MI}^2=\frac{1}{2}\left(k-\frac{\text{AB}^2}{2}\right)$

b. Si $k-\frac{\text{AB}^2}{2}>0$ alors cet ensemble est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{1}{2}\left(k-\frac{\text{AB}^2}{2}\right)}$.

Si $k-\frac{\text{AB}^2}{2}=0$ alors cet ensemble est réduit au point I.

Si $k-\frac{\text{AB}^2}{2}<0$ alors cet ensemble est l'ensemble vide.

2.a. $\overrightarrow{\text{MA}}.\overrightarrow{\text{MB}}=k \Leftrightarrow \text{MI}^2-\frac{\text{AB}^2}{4}=k \Leftrightarrow \text{MI}^2=k+\frac{\text{AB}^2}{4}$

b. Si $k+\frac{\text{AB}^2}{4}>0$ alors cet ensemble est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k+\frac{\text{AB}^2}{4}}$.

Si $k+\frac{\text{AB}^2}{4}=0$ alors cet ensemble est réduit au point I.

Si $k+\frac{\text{AB}^2}{4}<0$ alors cet ensemble est l'ensemble vide.

160 $\text{AB}=\frac{\sin(\widehat{\text{ACB}})}{\sin(\widehat{\text{CAB}})}\times\text{BC}=\frac{\sin(57°)}{\sin(83°)}\times 16\approx 13{,}52.$

$\text{AD}=\frac{\sin(\widehat{\text{ABD}})}{\sin(\widehat{\text{ADB}})}\times\text{AB}\approx\frac{\sin(40°)}{\sin(104{,}5°)}\times 13{,}52\approx 8{,}98.$

$\text{BD}=\frac{\sin(\widehat{\text{BAD}})}{\sin(\widehat{\text{ADB}})}\times\text{AB}\approx\frac{\sin(35{,}5°)}{\sin(104{,}5°)}\times 13{,}52\approx 8{,}11.$

$\text{DG}=\frac{\sin(\widehat{\text{DBG}})}{\sin(\widehat{\text{DGB}})}\times\text{DB}\approx\frac{\sin(33°)}{\sin(71{,}5°)}\times 8{,}11\approx 4{,}66.$

On a donc $\text{AG}=\text{AD}+\text{DG}\approx 13{,}64.$

161 **1.a.** $\text{NK}=\frac{\sin(\widehat{\text{NVK}})}{\sin(\widehat{\text{NKV}})}\times\text{NV}=\frac{\sin(49°)}{\sin(81°)}\times\ell$ et $\text{KV}=\frac{\sin(\widehat{\text{KNV}})}{\sin(\widehat{\text{NKV}})}\times\text{NV}=\frac{\sin(50°)}{\sin(81°)}\times\ell.$

b. $\text{NC}=\frac{\sin(\widehat{\text{NVC}})}{\sin(\widehat{\text{NCV}})}\times\text{NV}=\frac{\sin(63°)}{\sin(67°)}\times\ell$ donc $\text{CK}=\text{NC}-\text{NK}=\left(\frac{\sin(63°)}{\sin(67°)}-\frac{\sin(49°)}{\sin(81°)}\right)\times\ell.$

$\text{RV}=\frac{\sin(\widehat{\text{RNV}})}{\sin(\widehat{\text{NRV}})}\times\text{NV}=\frac{\sin(74°)}{\sin(57°)}\times\ell$ donc $\text{RK}=\text{RV}-\text{KV}=\left(\frac{\sin(74°)}{\sin(57°)}-\frac{\sin(50°)}{\sin(81°)}\right)\times\ell.$

c. $\widehat{\text{CKR}}=\widehat{\text{CKR}}=180-49-50=81°$

$\text{RC}=\sqrt{\text{RK}^2+\text{KC}^2-2\times\text{RK}\times\text{KC}\times\cos(\widehat{\text{CKR}})}=$

$$\ell\sqrt{\left(\frac{\sin(74°)}{\sin(57°)}-\frac{\sin(50°)}{\sin(81°)}\right)^2+\left(\frac{\sin(63°)}{\sin(67°)}-\frac{\sin(49°)}{\sin(81°)}\right)^2-2\times\left(\frac{\sin(74°)}{\sin(57°)}-\frac{\sin(50°)}{\sin(81°)}\right)\times\left(\frac{\sin(63°)}{\sin(67°)}-\frac{\sin(49°)}{\sin(81°)}\right)\times\cos(81°)}$$

2. 30 nœuds = 55 560 $\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$ = 55,56 k $\text{m}\cdot\text{h}^{-1}$.

$\text{NV}=55{,}56\times\frac{8}{60}=7{,}408$ km. On a donc $\text{RC}\approx 7{,}408\times 0{,}394\approx 2{,}9$ km.

162 **1.a.** $50\overrightarrow{\text{GA}}+75\overrightarrow{\text{GB}}=\vec{0}\Leftrightarrow 125\overrightarrow{\text{GA}}+25\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{AG}}=\frac{25}{125}\overrightarrow{\text{AB}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\text{AB}}$

b. $m_A\overrightarrow{\text{GA}}+4m_A\overrightarrow{\text{GB}}=\vec{0}\Leftrightarrow 5m_A\overrightarrow{\text{GA}}+4m_A\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{\text{GA}}+4\overrightarrow{\text{AB}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{AG}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\text{AB}}$

2.a. $2\times 10^{30}\overrightarrow{\text{GS}}+6\times 10^{24}\overrightarrow{\text{GT}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\text{SG}}=\frac{6\times 10^{24}}{2\times 10^{30}+6\times 10^{24}}\overrightarrow{\text{ST}}$

On a donc $\text{SG}=\frac{6.10^{24}}{2\times 10^{30}+6\times 10^{24}}\times\text{ST}=\frac{6.10^{24}}{2\times 10^{30}+6\times 10^{24}}\times 1{,}5\times 10^8\approx 450$

15 555 fois moins que le rayon du Soleil.

b. $\text{SH}=\frac{2\times 10^{27}}{2\times 10^{30}+2\times 10^{27}}\times 800\times 10^6\approx 8\times 10^5$

Cela reste beaucoup moins que le rayon du Soleil.

c. $\text{PE}=\frac{1{,}5\times 10^{21}}{1{,}3\times 10^{22}+1{,}5\times 10^{21}}\times 19\,000\approx 1\,966.$ C'est un peu plus que le rayon de Pluton.

163 Modélisons la situation par un triangle ABC isocèle en B tel que $\widehat{B} = 0{,}518°$ et $AC = 3\,657$ km, qui correspondent au diamètre de la Lune.
La distance Terre-Lune peut être approchée par la distance AB.
$AC^2 = AB^2 + AB^2 - 2 \times AB \times AB \times \cos(\widehat{B}) = 2AB^2 - 2AB^2\cos(\widehat{B}) = AB^2(2 - 2\cos(\widehat{B}))$.
On a donc $AB = \sqrt{\frac{AC^2}{2-2\cos(\widehat{B})}} = \frac{AC}{\sqrt{2-2\cos(\widehat{B})}} = \frac{3657}{\sqrt{2-2\cos(0{,}518°)}} \approx 404\,500$ km.

164 Soit H le milieu de [IJ]. On pose $\ell = KJ$ et $x = RJ$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RK}.\overrightarrow{LJ} = 0 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{JK}).(\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IJ}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{RJ}.\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{RJ}.\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK}.\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{JK}.\overrightarrow{IJ} = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 + 2{,}13x - \ell^2 + 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ell^2 = 2{,}13x \end{aligned}$$

Les angles $\widehat{JRK}$ et $\widehat{BRH}$ étant égaux, leurs tangentes sont égales :

$$\begin{aligned} \frac{JK}{JR} = \frac{BH}{BR} &\Leftrightarrow \frac{\ell}{x} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\frac{2{,}13}{2} - x} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2{,}13 - 2x} \\ &\Leftrightarrow 3x = 2{,}13 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2{,}13}{3} \end{aligned}$$

On en déduit que $\ell = \sqrt{2{,}13x} = \frac{2{,}13}{\sqrt{3}}$.

165 On a $\widehat{BDA} = 60°$, $\widehat{DBA} = 180 - 105 = 75°$, et $\widehat{DAB} = 180 - 60 - 75 = 45°$.
D'autre part, $DB = \frac{21}{3} = 7$ km.
On a donc $BA = \frac{\sin(\widehat{BDA})}{\sin(\widehat{DAB})} \times DB = \frac{\sin(60°)}{\sin(45°)} \times 7 \approx 8{,}57$ km.
Cela correspond à une durée de $8{,}57 \times \frac{60}{21} \approx 24{,}48$ min.
Le bateau arrivera donc vers 10 h 44.

166 Calculons d'abord tous les côtés :

$ED = \sqrt{28{,}25^2 + 1{,}35^2} \approx 28{,}28$
$EC = \sqrt{37{,}67^2 + 0{,}45^2} \approx 37{,}67$
$CD = \sqrt{28{,}25^2 + 37{,}67^2 + 1{,}8^2} \approx 47{,}12$
$DB = 56{,}5$
$BC = \sqrt{18{,}83^2 + 28{,}25^2 + 1{,}8^2} \approx 34$
$AC = \sqrt{28{,}25^2 + 18{,}83^2 + 1{,}8^2} \approx 34$
$AE = \sqrt{28{,}25^2 + 56{,}5^2 + 1{,}35^2} \approx 63{,}18$
$AB = 56{,}5$
Avec la formule de Héron, on obtient :
$\mathcal{A}_{ACE} \approx 533{,}54$; $\mathcal{A}_{ABC} \approx 534{,}47$; $\mathcal{A}_{EDC} \approx 532{,}65$; $\mathcal{A}_{BCD} \approx 799{,}72$.
L'aire total du toit est donc de : $533{,}54 + 534{,}47 + 532{,}65 + 799{,}72 \approx 2\,400{,}38$.
Le toit fait donc environ 2 400 m².

CHAPITRE **9**

Géométrie repérée

► *Les exercices* **1** à **9** *de la rubrique « **Réactivation** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 252 et 253 du manuel

1 Le bateau en détresse

Un vecteur directeur de la droite (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ sont orthogonaux, donc $5x + 7y = 0$.

Ainsi les coordonnées du point A vérifient le système :

$$\begin{cases}5x + 7y = 0\\7x - 5y - 50 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}35x + 49y = 0\\35x - 25y = 250\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x + 7y = 0\\74y = -250\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{-250}{74} = -\dfrac{125}{37}\\5x = -7 \times \dfrac{-125}{37}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{-125}{37}\\x = \dfrac{875}{185} = \dfrac{175}{37}\end{cases}\text{ ; donc A }\left(\frac{175}{37}\ ;-\frac{125}{37}\right).$$

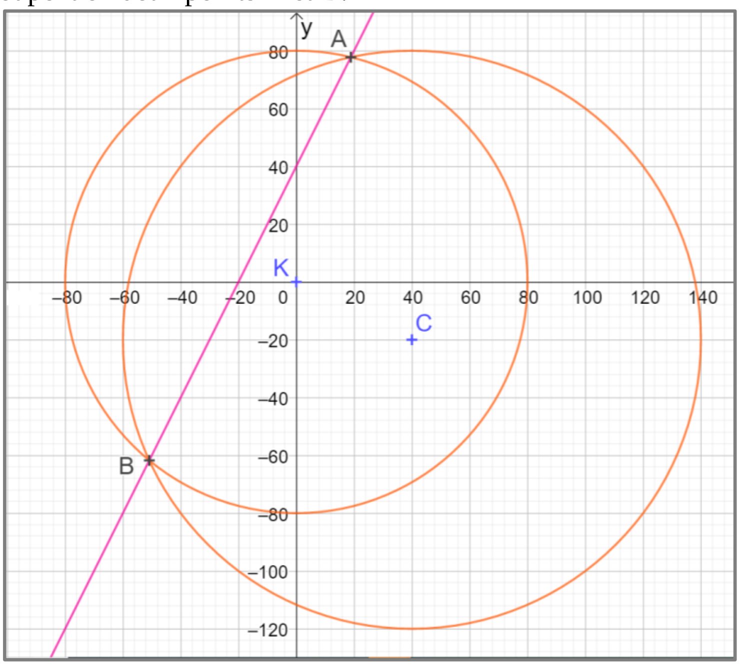
$$\text{AB} = \sqrt{\left(\frac{175}{37}\right)^2 + \left(-\frac{125}{37}\right)^2} = \frac{\sqrt{46\,250}}{37} = \frac{25\sqrt{74}}{37} \approx 5{,}81 \text{ km.}$$

2 Épicentre d'un séisme

1. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

On trace le cercle de centre K de rayon 80 km et le cercle de centre C de rayon 100 km.

Les deux cercles se coupent en deux points A et B.



2. Dans le repère donné : K(0 ; 0) ; C(40 ; –20).

a. On a EK = 80 $\Leftrightarrow$ EK^2 = 80 $\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 = 6\,400$.

b. On a EC = 100 $\Leftrightarrow$ EC^2 = 10 000 $\Leftrightarrow$ $(x-40)^2 + (y+20)^2 = 10\,000$.

3. Les coordonnées de E vérifient :

$$\begin{cases} x^2+y^2=6400 \\ x^2-80x+y^2+40y=8\,000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6\,400 \\ -80x+40y=1\,600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6\,400 \\ -2x+y=40 \end{cases}.$$

4. On obtient :

$$\begin{cases} x^2+y^2=6\,400 \\ -2x+y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(2x+40)^2=6\,400 \\ -2x+y=40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+160x-4\,800=0 \\ -2x+y=40 \end{cases}.$$

On résout l'équation $5x^2+160x-4\,800=0$.

$\Delta = 121\,600 = 19 \times 64 \times 100$.

Les racines du trinôme sont : $\frac{-160+80\sqrt{19}}{10} = -16+8\sqrt{19}$ et $-16-8\sqrt{19}$.

Les positions possibles de l'épicentre sont les points de coordonnées :

$(-16+8\sqrt{19};\ 8+16\sqrt{19})$ et $(-16-8\sqrt{19}\,;8-16\sqrt{19})$.

3 Introduction des coordonnées cartésiennes

1. M(0 ; y) et P(0 ; v).

2. PMC est un triangle rectangle en M, donc d'après le théorème de Pythagore :

PM^2 + MC^2 = PC^2 $\Leftrightarrow$ $(v-y)^2 + x^2 = s^2 \Leftrightarrow s^2 = x^2+v^2-2vy+y^2$.

3. a. s est le rayon du cercle.

b. PC^2 = $x^2+(y-v)^2$.

c. Il s'agit du cercle de centre P(0 ; v) et de rayon PC = s.

4. $x^2+(y-v)^2=s^2 \;\Leftrightarrow\; x^2=s^2-(y-v)^2$.

Or $s \geqslant y - v$ car PC $\geqslant$ PM pour tout point C sur le cercle, donc $s^2-(y-v)^2 \geqslant 0$.

$\sqrt{x^2}=\sqrt{s^2-(y-v)^2}$

Si $x \geqslant 0$: $x=\sqrt{s^2-(y-v)^2}$: c'est vrai.

Si $x < 0$: $-x=\sqrt{s^2-(y-v)^2}$: c'est faux.

De même, on a $(y-v)^2=s^2-x_2$ avec $x < s$.

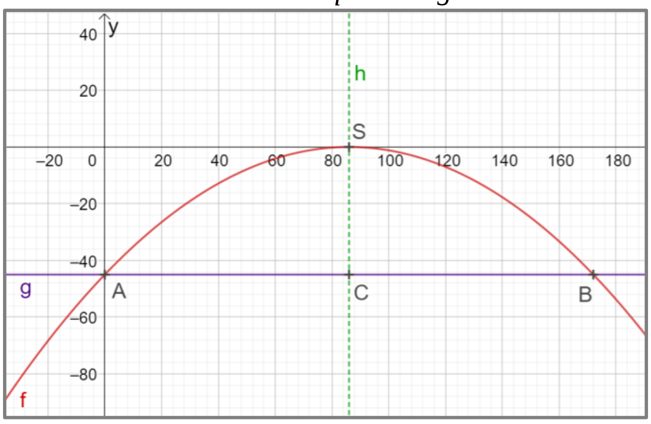
Donc $\sqrt{(y-v)2}=\sqrt{s^2-x_2} \Leftrightarrow |y-v|=\sqrt{s^2-x_2}$.

Si $y \geqslant v$ alors $y-v=\sqrt{s^2-x_2} \;\Leftrightarrow y=v+\sqrt{s^2-x_2}$: c'est vrai.

Si $y < v$ alors $v-y=\sqrt{s^2-x_2} \;\Leftrightarrow y=v-\sqrt{s^2-x_2}$: c'est faux.

4 Symétrie d'une parabole

1. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



On conjecture que la droite d'équation $x = 86$ est un axe de symétrie de la courbe.

b. $f(x) = -45 \Leftrightarrow -\frac{45}{7396}x^2 + \frac{45}{43}x - 45 = -45 \Leftrightarrow -\frac{45}{7396}x^2 + \frac{45}{43}x = 0$

$\Leftrightarrow 45x(\frac{-x}{7396} + \frac{1}{43}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $(\frac{-x}{7\,396} + \frac{1}{43}) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $\left(\frac{-x}{7396} + \frac{1}{43}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 172$

c. L'axe de symétrie de la parabole passe par le point de coordonnées $\left(\frac{0+172}{2}\,;\,-45\right)$, donc par (86 ; –45)

d. L'axe est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation de l'axe est donc $x = 86$.

e. Le sommet se trouve sur l'axe de symétrie de la parabole donc S(86 ; f(86)) donc S(86 ; 0).

2. Généralisation

a. On résout $f(x) = c \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = c \Leftrightarrow ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0$.

$x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$, donc l'abscisse du sommet est $\left(\frac{0 + \left(-\frac{b}{a}\right)}{2}\right) = -\frac{b}{2a}$.

b. On calcule $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ donc $S\left(-\frac{b}{2a}\,;\,-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Application

p. 257 à 261 du manuel

SAVOIR-FAIRE 1

Déterminer une équation de droite perpendiculaire à une droite donnée

10 a. Un vecteur directeur de la droite (TU) est le vecteur $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$. Comme (TU) et ($d'$) sont perpendiculaires, $\overrightarrow{TU}$ est un vecteur normal à (d').
En notant $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (d'), on peut en déduire que $a = -5$ et $b = 5$.
Donc (d') a pour équation : $-5x + 5y + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
Comme S(2 ; 3) appartient à (d') :
$-5 \times x_S + 5 \times y_S + c = 0 \Leftrightarrow -5 \times 2 + 5 \times 3 + c = 0$.
D'où $c = 10 - 15 = -5$, donc :
(d') : $-5x + 5y - 5 = 0$.
Une autre équation de (d') est : $x - y + 1 = 0$.

b. La hauteur (h) issue du point T a pour vecteur normal $\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Son équation est ainsi de la forme $-3x + y + e = 0$ où e est un nombre réel à déterminer. Comme T $\in$ (h) :
$-3 \times 4 + (-1) + e = 0$ d'où $e = 13$.
Ainsi (h) : $-3x + y + 13 = 0$.

c. La médiatrice (m) de [SU] a également pour vecteur normal $\overrightarrow{SU}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Son équation est de la forme : $-3x + y + f = 0$ où f est un nombre réel à déterminer. Le milieu I de [SU] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{7}{2}\right)$. Comme la droite ($m$) passe par I on a : $(-3) \times \frac{1}{2} + \frac{7}{2} + f = 0$; d'où $f = -2$.
Ainsi (m) : $-3x + y - 2 = 0$.

SAVOIR-FAIRE 2

Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

11 a. On détermine une équation de la droite (d) perpendiculaire à (BC) passant par A.
Un vecteur directeur de (BC) est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal à (d).
Une équation cartésienne de (d) est ainsi :
$-2x + 3y + c = 0$ où c est un nombre réel.
Comme A $\in$ (d), ses coordonnées vérifient cette équation : $-2 \times 9 + 3 \times (-3) + c = 0$,
donc $c = 27$ et (d) : $-2x + 3y + 27 = 0$.
Les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (BC) vérifient donc le système d'équations de ces droites. On résout donc :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 8 = 0 \\ -2x + 3y + 27 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ -6x + 9y = -81 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 4y = 16 \\ 13y = -65 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ 6x = 36 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -5 \\ x = 6 \end{cases}.$$

Donc $H(6\,;\,-5)$.

b. On détermine une équation de la droite (d) perpendiculaire à (BC) passant par A. Un vecteur directeur de (BC) est $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ qui est donc un vecteur normal à (d). Une équation cartésienne de (d) est ainsi : $x - y + e = 0$ où e est un nombre réel.
Comme A $\in$ (d), ses coordonnées vérifient cette équation : $-3 - (-1) + e = 0$,
donc $e = 2$ et (d) : $x - y + 2 = 0$.

Les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (BC) vérifient donc le système d'équations de ces droites. On résout donc :

$$\begin{cases} y=-x+2 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ x-y=-2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}.$$

Donc H(0 ; 2).

c. On détermine une équation de la droite (BC) et de la droite (*d*) perpendiculaire à (BC) passant par A. Un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}$, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ est aussi un vecteur directeur de (BC). Une équation cartésienne de (BC) est ainsi : $-x+y+f=0$ où f est un nombre réel. Comme B ∈ (BC), ses coordonnées vérifient cette équation :
$-4+4+f=0$, donc $f=0$ et (BC) : $-x+y=0$.
$\vec{u}$ est un vecteur normal à (*d*). Une équation cartésienne de (*d*) est ainsi : $x+y+g=0$ où g est un nombre réel.
Comme A ∈ (*d*), ses coordonnées vérifient cette équation : $-2+(-1)+g=0$, donc $g=3$ et
(*d*) : $x+y+3=0$.
Les coordonnées du point H projeté orthogonal de A sur (BC) vérifient donc le système d'équations de ces droites. On résout donc :

$$\begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=-3 \\ 2x=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{-3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Donc H$\left(\frac{-3}{2} ; \frac{-3}{2}\right)$.

12 **a**. On détermine une équation de la droite (TU) et de la droite (*d*) perpendiculaire à (TU) passant par S. Un vecteur directeur de (TU) est $\overrightarrow{TU}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$, donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ colinéaire à $\overrightarrow{TU}$ est aussi un vecteur directeur de (TU).
Une équation cartésienne de (TU) est ainsi :
$x+2y+c=0$ où c est un nombre réel.
Comme T ∈ (TU), ses coordonnées vérifient cette équation : $0+2\times 1+c=0$, donc $c=-2$ et
(TU) : $x+2y-2=0$.
$\vec{u}$ est un vecteur normal à (*d*). Une équation cartésienne de (*d*) est ainsi : $-2x+y+e=0$ où e est un nombre réel.
Comme S ∈ (*d*), ses coordonnées vérifient cette équation : $-2\times 4+4+e=0$, donc $e=4$ et
(*d*) : $-2x+y+4=0$.

Les coordonnées du point H projeté orthogonal de S sur (TU) vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x+2y-2=0 \\ -2x+y+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=2 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=4 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=2 \\ 5y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}.$$

Donc H(2 ; 0).

b. $SH^2=(2-4)^2+(0-4)^2=4+16=20$ donc $SH=\sqrt{20}$.
$TU^2=6^2+(-3)^2=36+9=45$ donc $TU=\sqrt{45}$.

c. Aire (STU) $=\frac{SH\times TU}{2}=\frac{\sqrt{20}\times\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{900}}{2}=\frac{30}{2}$
$=15$.

SAVOIR-FAIRE 3

Déterminer une équation de cercle

13 **a.** Une équation du cercle $\mathscr{C}_1$ est :
$(x-x_A)^2+(y+y_A)^2=4^2 \Leftrightarrow (x-5)^2+(y+1)^2=16$

b. On détermine le rayon du cercle $\mathscr{C}_2$ qui est AB :
$AB=\sqrt{(2-5)^2+(0+1)^2}=\sqrt{10}$.
Une équation de $\mathscr{C}_2$ est donc :
$(x-5)^2+(y+1)^2=10$.

c. Une équation du cercle $\mathscr{C}_3$ est :
$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$
$\Leftrightarrow (x-5)(x-2)+(y+1)y=0$
En développant, on obtient :
$x^2+y^2-7x+y+10=0$.

d. $BC^2=2^2+2^2=8$; $BD^2=2^2=4$ et $DC^2=2^2=4$ donc $BC^2=BD^2+DC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle BCD est rectangle en D.
Le centre du cercle circonscrit est le milieu de [BC] qui a pour coordonnées (1 ; 1).
Son rayon est égal à $\frac{BC}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.
Une équation de $\mathscr{C}_4$ est donc :
$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

14 O est le centre du cercle $\mathscr{C}_4$: intersection des médiatrices du triangle BCD.
Étape 1 : La médiatrice (*d'*) du segment [BD] a pour vecteur normal $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
Une équation de (*d'*) est ainsi : $x+2y+c=0$ où c est un nombre réel à déterminer.
On note M le milieu de [BD], on obtient M(1 ; 3) par le calcul.

En remplaçant les coordonnées de M dans l'équation, on a : $1 + 2 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -7$.
Une équation de (d') est : $x + 2y - 7 = 0$.
Étape 2 : On détermine, de la même façon, une équation de la droite (d) médiatrice du segment [CD]. On obtient : $(d) : 2x - y - 4 = 0$
Étape 3 : Comme $O \in (d') \cap (d)$, ses coordonnées vérifient le système :
$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y = 14 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5y = 10 \\ 2x = y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$
Donc O(3 ; 2).
Étape 4 : On déterminer le rayon du cercle $\mathscr{C}_4$: OB. Donc $OB^2 = (3-2)^2 + (2-5)^2 = 10$.
Ainsi, une équation de $\mathscr{C}_4$ est :
$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

SAVOIR-FAIRE 4

Déterminer les caractéristiques d'un cercle

15 **a.** $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$
Il s'agit d'une équation du cercle centre (2 ; –3) et de rayon $\sqrt{5}$.
b. $x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 - 9 + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y + 3)^2 = 4 = 2^2$
Il s'agit d'une équation du cercle de centre (0 ; –3) et son rayon est 2.
c. $x^2 + y^2 + 4x - 5y + 30 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 - 4 + (y - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 30 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = -\frac{79}{4} < 0$
Il s'agit de l'ensemble vide.
d. $x^2 + y^2 + 3x + 2y + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (y + 1)^2 - 1 + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x + \frac{3}{2})^2 + (y + 1)^2 = -\frac{3}{4} < 0$
Il s'agit de l'ensemble vide.
e. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 10 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 3)^2 - 9 + (y + 1)^2 - 1 + 10 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 3) + (y + 1)^2 = 0$
Il s'agit du point de coordonnées (–3 ; –1).
f. $2x^2 - 5x + 2y^2 + 6y = 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + y^2 + 3y = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow (x - \frac{5}{4})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 = \frac{69}{16}$
Il s'agit du point du cercle de centre $\left(\frac{5}{4} ; -\frac{3}{2}\right)$ de rayon $\frac{\sqrt{69}}{4}$.

16 $x^2 + y^2 - 4x + 8y + m = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y - 4)^2 - 16 + m = 0$
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 20 - m$
Il s'agit d'une équation de cercle si et seulement si $20 - m > 0 \Leftrightarrow m < 20$.

SAVOIR-FAIRE 5

Déterminer les caractéristiques d'une parabole

17 **a.** $y = -5x^2 - 6x - 8 = ax^2 + bx + c = f(x)$ avec $a = -5$, $b = -6$ et $c = -8$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_1$ dont l'axe de symétrie a pour équation :
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{-10} = -\frac{3}{5}$.
Les coordonnées de son sommet sont :
$\left(-\frac{b}{2a} ; f(-\frac{b}{2a})\right)$.
avec $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{3}{5}\right)$
$= -5 \times \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 6 \times \left(-\frac{3}{5}\right) - 8$
$= -\frac{31}{5}$
Le sommet de $\mathscr{P}_1$ est donc le point de coordonnées $\left(-\frac{3}{5} ; -\frac{31}{5}\right)$.
b. $y = -3(x - 2)^2 + 4 = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $a = -3$, $\alpha = 2$ et $\beta = 4$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_2$ dont l'axe de symétrie a pour équation :
$x = \alpha = 2$.
Les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}_2$ sont $(\alpha ; \beta)$, soit (2 ; 4).
c. $y = 4(x + 3)(x - 8) = a(x - x_1)(x - x_2) = f(x)$ avec $a = 4$, $x_1 = -3$ et $x_2 = 8$.
C'est donc une équation d'une parabole $\mathscr{P}_3$.
Les racines de f sont –3 et 8 donc la parabole passe par les points A (–3 ; 0) et B (8 ; 0).
L'axe de symétrie (d) de $\mathscr{P}_3$ passe par le milieu C du segment [AB] de coordonnées (2,5 ; 0). Son équation est donc $x = 2,5$.
Le sommet S de la parabole est sur l'axe (d) donc $x_S = 2,5$.
$y_S = f(x_S) = f(2,5) = 4 \times (2,5 - 3)(2,5 - 8) = -121$.
Les coordonnées du sommet S de $\mathscr{P}_3$ sont :
(2,5 ; –121).
d. $12x^2 + 4y + 8x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow y = -3x^2 - 2x - \frac{1}{4} = ax^2 + bx + c = f(x)$
avec $a = -3$, $b = -2$ et $c = -\frac{1}{4}$.

C'est l'équation d'une parabole $\mathcal{P}_4$ dont l'axe de symétrie a pour équation :
$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{-6} = -\frac{1}{3}$.
Les coordonnées de son sommet sont :
$\left(-\frac{b}{2a} \,;\, f(-\frac{b}{2a})\right)$

avec :
$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
Donc le sommet de $\mathcal{P}_4$ est le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3} \,;\, \frac{1}{12}\right)$.

► *Les exercices* **18** *à* **29** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p.264 du manuel

30 **a. Stratégie 1 :** $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (*d'*). Donc une équation de (*d'*) est :
$2x + 5y + c = 0$ avec c un nombre réel.
A ∈ (*d'*) donc $2 \times 1 + 5 \times (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = 8$
D'où (*d'*) : $2x + 5y + 8 = 0$
b. Stratégie 1 : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-3-4\\3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (*d*), il est donc normal à (*d'*).
Donc une équation de (*d'*) est : $-7x + 2y + c = 0$ avec c un nombre réel.
A ∈ (*d'*) donc $-7 \times 1 + 2 \times (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = 11$
D'où (*d'*) : $-7x + 2y + 11 = 0$
c. Stratégie 2 : $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (*d'*). Donc une équation de (*d'*) est :
$-x - 5y + c = 0$ avec c un nombre réel.
A ∈ (*d'*) donc $-1 - 5 \times (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$
D'où (*d'*) : $-x - 5y - 9 = 0$ ou (*d'*) : $x + 5y + 9 = 0$
d. Stratégie 3 : Une équation d'une droite perpendiculaire à (*d*) est $-5x + 3y + c = 0$ avec c un nombre réel.
A ∈ (*d'*) donc $-5 \times 1 + 3 \times (-2) + c = 0 \Leftrightarrow c = 11$
D'où (*d'*) : $-5x + 3y + 11 = 0$

31 **a.** $y = -x^2 + 9$ de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$: c'est une parabole.
b. $y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - 4x + 5$: c'est une parabole.
c. $y^2 + x^2 + 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + 2)^2 - 4 - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 3^2$: c'est un cercle.
d. $y - 4 = -3x \Leftrightarrow y + 3x - 4 = 0$: c'est une droite.
e. $x^2 + y^2 + 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 - 1 + y^2 + 6 = 0$
$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = -5 < 0$: c'est un ensemble vide.
f. $3x^2 - 4x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x^2 - 2x$: c'est une parabole.
g. $2x^2 + 2y^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{9}{2} > 0$: c'est un cercle.
h. $y^2 = -x^2 + 4y - 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 - 4 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 0$: c'est le point (0 ; 2).

32 **1. a.** $3x - y - 4 = 0$.
b. $-4x + 8 = 0$ ou $x = 2$.
2. a. $-3x + y + 9 = 0$
b. $y + 2 = 0$ ou $y = -2$.

33 **a.** M(x ; y) est sur le cercle $\Leftrightarrow$ MI^2 = IH^2
$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = (1 - 2)^2 + (-1 - 5)^2$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 37}$
b. $(x - 2)(x - 3) + (y + 3)(y - 5) = 0$
$\boldsymbol{\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5x - 2y - 9 = 0}$
c. MN$^2 = 4^2 + 5^2 = 41$; MP$^2 = 14^2 + 3^2 = 205$ et NP$^2 = 10^2 + 8^2 = 164$, donc MP^2 = MN^2 + NP^2.
Le triangle MNP est rectangle en N.
Le cercle circonscrit à MNP a pour diamètre [MP].
Son équation est :
$(x - 4)(x + 10) + (y - 1)(y + 2) = 0$.

34 **a.** $y = 8x^2 - 5x$: c'est une parabole.
b. $y = -3x - 5$: c'est une droite.
c. $(x - 7)^2 + y^2 = 9$: c'est le cercle de centre (7 ; 0) et de rayon 3.
d. $(x + 3)^2 - 9 + y^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 0$: c'est le point (–3 ; 0).

35 **a.** On utilise la forme canonique du trinôme.
Une équation de la parabole est $y = a(x + 4)^2 - 2$ où a est un nombre réel.

R appartient à la parabole, donc :
$1 = a(-3 + 4)^2 - 2 \Leftrightarrow a = 3$.
Donc une équation de la parabole est :
$y = 3(x + 4)^2 - 2$.
b. On utilise la forme développée du trinôme.
Une équation de la parabole est :
$y = ax^2 + bx + c = 0$.
J appartient à la parabole donc : $3 = c$. Une équation de la parabole est $y = ax^2 + bx + 3$.
K et L sont sur la parabole donc :
$\begin{cases} 4,5 = 9a + 3b + 3 \\ 7 = 4a - 2b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 1,5 \\ 4a - 2b = 4 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 1,5 \\ 2a - 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a + 6a - 6 = 1,5 \\ b = 2a - 2 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a = 7,5 \\ b = 2a - 2 \end{cases} \begin{cases} a = 0,5 \\ b = -1 \end{cases}$
Une équation de la parabole est $y = 0,5x^2 - x + 3$.

c. On utilise la forme factorisée du trinôme.
Une équation de la parabole est :
$y = a(x + 2)(x - 0,5)$ où a est un nombre réel.
M appartient à la parabole donc :
$-2 = a(0 + 2)(0 - 0,5) \Leftrightarrow a = 2$.
Donc une équation de la parabole est :
$y = 2(x + 2)(x - 0,5)$.

► *Les exercices* **36** *à* **48** *de la rubrique «* **Les incontournables** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 266 à 271 du manuel

OBJECTIF 1

Déterminer et utiliser un vecteur normal à une droite

49 **b. c. d.**

50 **a.** Faux. **b.** Faux.
c. Vrai. **d.** Vrai.

51 • Un vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.
Un vecteur normal à (d_1) est $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}_1$.
• Un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{u}_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.
Un vecteur normal à (d_2) est $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}_2$.
• Un vecteur directeur de (d_3) est $\vec{u}_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.
Un vecteur normal à (d_3) est $\vec{n}_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}_3$.
• Un vecteur directeur de (d_4) est $\vec{u}_4\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
Un vecteur normal à (d_4) est $\vec{n}_4\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ ou tout vecteur colinéaire à $\vec{n}_4$.

52 **1. b. 2. a.**

53 **a.** Faux. En effet : $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
Or $-2 \times (-3) + (-4) \times 2 = -2 \neq 0$.
b. Vrai. En effet : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.
Or $-4 \times (-3) + (-6) \times 2 = 0$.

54 **a.** $2x + 3y - 8 = 0$
b. $y - 1 = 0$
c. $x + 5 = 0$
d. $4x - y + 4 = 0$

55 **a.** Vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$. Vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$.
b. $\vec{u}$ est un vecteur normal à (d'). Une équation de (d') est : $-5x - 2y + 1 = 0$.
c. On résout :
$\begin{cases} -2x + 5y + 12 = 0 \\ -5x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 10y = -24 \\ -25x - 10y = -5 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} -29x = -29 \\ 2y = 1 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y = -4 \end{cases}$.
Les coordonnées du point d'intersection sont :
$(1 ; -2)$.

56 **a.** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à (BC) est un vecteur colinéaire à $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

b. La perpendiculaire à (BC) admet $\overrightarrow{BC}$ comme vecteur normal.
Une équation de cette droite est : $3x + y - 11 = 0$.
c. Une équation de (BC) est $-x + 3y + 4 = 0$.
On résout le système :
$\begin{cases}3x + y - 11 = 0\\-x + 3y + 4 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 3{,}7\\y = -0{,}1\end{cases}$.
d. $AH^2 = (3{,}7 - 3)^2 + (-0{,}1 - 2)^2 = 4{,}9$ donc
$AH = \sqrt{4{,}9} = \sqrt{\frac{49}{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}$.

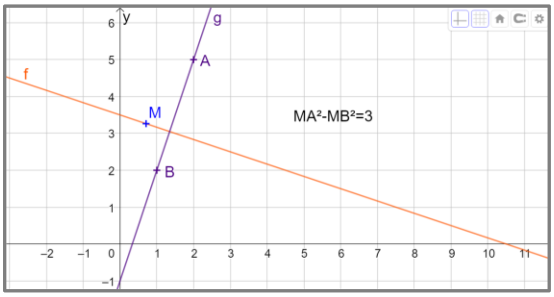
57 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$. Un vecteur normal à la médiatrice est $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Une équation de la médiatrice est
$x + 2y + c = 0$ avec c un nombre réel.
Le milieu de [AB] est sur cette médiatrice, ses coordonnées sont (4 ; 4).
Donc $4 + 8 + c = 0 \Leftrightarrow c = -12$.
La médiatrice a pour équation : $x + 2y - 12 = 0$.

58 **a.** $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de A.
Une équation de la hauteur issue de A est :
$5x - 4y - 1 = 0$.
$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$ est normal à la hauteur issue de B.
Une équation de la hauteur issue de B est :
$3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
b. Les coordonnées de l'orthocentre vérifient :
$\begin{cases}5x - 4y - 1 = 0\\x = -1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\y = -1{,}5\end{cases}$.

59 **a.** Énoncé : Une équation de la droite (d) est $3x + 4y + 1 = 0$ et A(2 ; –1) est un point du plan.
Déterminer une équation de la droite (d') perpendiculaire à la droite (d) passant par A.
Remarque : toute équation de (d) de la forme 3x + 4y + c où c est un nombre réel convient.
b. • Erreur 1 : « **Le** vecteur directeur » à corriger en « **Un** vecteur directeur ».
• Erreur 2 : dans l'énoncé, on ne sait pas ce que sont a et b.
Ajouter la phrase « si (d) a pour équation : $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des nombres réels ».
• Erreur 3 : « **Le** vecteur normal » à corriger en « **Un** vecteur normal ».
• Erreur 4 : « **L'équation** de la droite (d') » à corriger en « **Une équation** de la droite (d') ».
• Erreur 5 : erreur de calcul à corriger « $c = 8 + 3 = 11$ ».
• Erreur 6 : conclusion « **une** équation de (d') est $\mathbf{-4x + 3y + 11 = 0}$ ».

60 $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la tangente (d).
Une équation de (d) est $2x + y + c = 0$.
De plus $2 \times 3 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -9$.
Une équation de (d) est : $2x + y - 9 = 0$.

61 **a.** $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB).
Donc un vecteur normal à (AB) est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.
b. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+4\\y-2\end{pmatrix}$.
c. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 5 \Leftrightarrow 3(x + 4) + 1(y - 2) = 0$
$\Leftrightarrow 3x + y + 10 = 0$: il s'agit de l'équation d'une droite (d).
Un vecteur normal à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ donc cette droite est perpendiculaire à (AB).

62 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
1. $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\5-y\end{pmatrix}$ then $MA^2 = (2 - x)^2 + (5 - y)^2$
$= 4 - 4x + x^2 + 25 - 10y + y^2$
$= -4x + x^2 + 29 - 10y + y^2$
$\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ then $MB^2 = (1 - x)^2 + (2 - y)^2$
$= 1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2$
$= -2x + x^2 + 5 - 4y + y^2$
$MA^2 - MB^2 = 3 \Leftrightarrow -4x + x^2 + 29 - 10y + y^2 - (-2x + x^2 + 5 - 4y + y^2) = 3$
$\Leftrightarrow -2x + 24 - 6y = 3$
$\Leftrightarrow -2x - 6y + 21 = 0$: equation of a line (d).
2.


We notice using the graph that (d) and (AB) are perpendicular.

A vector of a line (AB) is $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$.

A vector of a line (d) is $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$.

As (–1) × 6 + (–2) × (–3) = 0; the two lines are perpendicular.

63 **a.** Dans le repère orthonormé où $\vec{i}$ et $\vec{j}$ représentent respectivement un carreau en horizontal et en vertical : A(1 ; 1) ; B(–2 ; 0,5) et C(0,5 ; –1).

b. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-0,5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (AB), donc une équation de (AB) est :

$-0,5x + 3y + c = 0$ avec $-0,5 + 3 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = -2,5$.

Une équation de (AB) est :

$-0,5x + 3y - 2,5 = 0 \Leftrightarrow -x + 6y - 5 = 0$.

c. Une équation de la droite perpendiculaire à (AB) passant par C est : $6x + y - 2 = 0$.

Les coordonnées du projeté orthogonal vérifient :

$$\begin{cases}-x+6y-5=0\\6x+y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6y-5\\6x+y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=6y-5\\36y-30+y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=6\times\frac{32}{37}-5\\37y=32\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7}{37}\\y=\frac{32}{37}\end{cases}$$

d. $AB^2 = 9 + 0,25 = 9,25$

et $CH^2 = (\frac{7}{37}-\frac{1}{2})2 + (\frac{32}{37}+1)2 = \frac{19573}{5476}$.

Donc Aire ABC $= \frac{\sqrt{9,25\times19573}}{2\sqrt{5476}} = \frac{\sqrt{181050,25}}{148}$

$\approx \frac{425,5}{148} = 2,875$ unités

Une unité = 1 carreau = 95 × 95 km^2 = 9 025 km^2

Donc la superficie de la Sicile est d'environ 9 025 × 2,875 ≈ 25 947 km^2.

64 **1.** Algorithme :

```
Entrer les coefficients a, b, d, e  (c , f)
Si ae – bd = 0
    Alors les droites sont parallèles
Sinon
Si ad + be = 0
    Alors les droites sont
perpendiculaires
Sinon les droites sont sécantes
```

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

Avec Python :

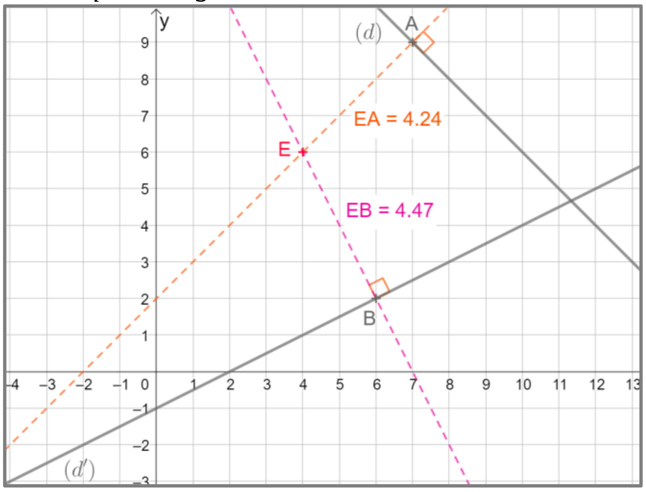
```python
#sans listes
def position(a,b,c,d,e,f):
  if a*e==b*d:
    return "Les droites sont parallèles."
  elif a*d+b*e==0:
    return "Les droites sont perpendiculaires."
  else:
    return "Les droites sont sécantes."

#avec des listes : U=[a,b,c] et V=[d,e,f]
def position2(U,V):
  if U[0]*V[1]==U[1]*V[0]:
    return "Les droites sont parallèles."
  elif U[0]*V[0]+U[1]*V[1]==0:
    return "Les droites sont perpendiculaires."
  else:
    return "Les droites sont sécantes."
```

3.a. sécantes

b. parallèles

c. perpendiculaires

65 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



On conjecture qu'Ewen est plus proche de (d) que de (d').

b. Un vecteur normal à la droite (d) est $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Une équation de la droite perpendiculaire à la droite (d) passant par le point E est $x - y + 2 = 0$.

Les coordonnées du point B projeté orthogonal du point E sur la droite (d) vérifient :

$$\begin{cases}x+y-16=0\\x-y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=14\\2y=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=9\\x=7\end{cases}$$

D'où B(9 ; 7).

De même, un vecteur normal à la droite (d') est $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. Une équation de la droite perpendiculaire à la droite (d') passant par le point E est :

$2x + y - 14 = 0$.

Les coordonnées du point C projeté orthogonal du point E sur la droite (*d'*) vérifient :

$\begin{cases}-x+2y+2=0\\2x+y-14=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+4y=-4\\2x+y=14\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}5y=10\\x=2y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2\\x=6\end{cases}.$

D'où C(6 ; 2). On obtient alors :

$\overrightarrow{\mathrm{EB}}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{EB}^2 = 3^2 + 32 = 18$;

donc EB $= \sqrt{18} \approx 4{,}24$.

$\overrightarrow{\mathrm{EC}}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{EC}^2 = 2^2 + (-4)^2 = 20$,

donc EC $= \sqrt{20} \approx 4{,}47$.

Ewen est plus éloigné de (*d'*) que de (*d*).

OBJECTIF 2

Déterminer et reconnaitre une équation de cercle

66 **d.**

67 Vrai.

68 **b.**

69 $\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$

$\mathscr{C}_2 : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 16$

$\mathscr{C}_3 : (x-1)^2 + (y-4)^2 = 5$ car le cercle passe par le point (0 ; 2).

70 Les coordonnées de Ω sont (4 ; 1).

Une équation du cercle est donc :

$(x-0)(x-4) + (y-0)(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - y = 0.$

71 Le rayon de $\mathscr{C}_1$ est égal à 4 et son centre a pour coordonnées (6 ; 0).

Les coordonnées de A sont (6 – 4 ; 0) soit (2 ; 0).

Le cercle $\mathscr{C}_2$ est donc de rayon 2, son centre est le point (1 ; 0).

Une équation du cercle est donc $(x-1)^2 + y^2 = 4$.

72 **a.** $x(x-3) + y(y-7) = 0$.

b. Si le point M(x ; y) est situé sur l'axe des abscisses, alors $y = 0$.

On résout $x(x-3) = 0$. Le cercle passe donc par (0 ; 0) et par (3 ; 0).

73 **a.** $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 8$

C'est le cercle de centre A(2 ; –3) et de rayon $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + k = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 13 - k$.

Cet ensemble est un cercle si et seulement si $13 - k > 0 \Leftrightarrow k < 13$.

74 **a.** Le centre Ω du cercle a pour coordonnées (1 ; –2) et le rayon est 5.

b. $(4-1)^2 + (2+2)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ donc A est sur le cercle.

c. La tangente admet $\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}\begin{pmatrix}4-1\\2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Une équation de la tangente qui passe par A est :

$3x + 4y - 20 = 0$.

75 **a.** $(x+3)^2 + (y+2) = R^2$ avec

$r^2 = \mathrm{AC}^2 = (6+3)^2 + (-5+2)^2$

$= 9^2 + (-3)^2 = 81 + 9 = 90.$

b. Les points d'intersection du cercle et de l'axe des ordonnées vérifient :

$\begin{cases}x=0\\(x+3)^2+(y+2)^2=90\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\9+(y+2)^2=90\end{cases}$

Or $(y+2)^2 = 81 = 92 \Leftrightarrow y+2=9$ ou $y+2=-9 \Leftrightarrow y=7$ ou $y=-11$.

Les points d'intersection du cercle avec l'axe des ordonnées ont comme coordonnées :

(0 ; 7) et (0 ; –11)

76 **a.** M appartient à (E) $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}} = 2$

$\Leftrightarrow \mathrm{MB} = 2\mathrm{MA}$

$\Leftrightarrow \mathrm{MB}^2 = 4\mathrm{MA}^2$ car MA et MB sont positives

$\Leftrightarrow \mathrm{MB}^2 - 4\mathrm{MA}^2 = 0$

b. $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\begin{pmatrix}1-x\\2-y\end{pmatrix}$ donc :

$\mathrm{A}^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 = 1 - 2x + x^2 + 4 - 4y + y^2$

$= x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

$\overrightarrow{\mathrm{MB}}\begin{pmatrix}2-x\\-1-y\end{pmatrix}$

donc $\mathrm{MB}^2 = (2-x)^2 + (-1-y)^2$

$= 4 - 4x + x^2 + 1 + 2y + y^2$

$= x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$

Donc $MB^2 - 4MA^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5) - 4(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) = 0$

$\Leftrightarrow -3x^2 - 3y^2 + 4x + 18y - 15 = 0$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 4x - 18y + 15 = 0$

c. $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - 6y + 15 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9} + (y - 3)^2 - 9 + 5 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})^2 + (y - 3)^2 = \frac{40}{9}$. Il s'agit du cercle de centre $(\frac{2}{3}\ ;3)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

77 a. $x = y$ n'est pas équivalent à $x^2 = y^2$.

L'implication directe est toujours vraie : « si deux nombres sont égaux, leur carré sont égaux ».
En revanche, la réciproque de cette propriété « si le carré de deux nombres sont égaux, alors ces deux nombres sont égaux » est fausse. Par exemple $9 = 3^2 = (-3)^2$ mais $3 \neq -3$.
L'équivalence est vraie par contre si x et y sont de même signe. Ici $3 > 0$ et $(x - 5)^2 + (y + 1)^2 \geqslant 0$ comme somme de deux carrés. Donc l'équivalence est correcte.

b. $\sqrt{x}^2 = x$ si seulement si $x \geqslant 0$ (sinon $\sqrt{x}$ n'est pas défini).

Attention : *$\sqrt{x^2} \neq x$ car par exemple : $\sqrt{(-3)^2} = 3$; $\sqrt{x^2} = |x|$.*

78 a. Le rayon du cercle vaut 1 325 et son centre a pour coordonnées (0 ; 0) donc une équation du cercle est $x^2 + y^2 = 1\,325^2$.

b. Les coordonnées des points A et B vérifient le système : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1\,325^2 \\ x = -480 \end{cases}$.

Ainsi $y^2 = 1\,325^2 - 480^2 = 1\,525\,225$ et $y = \sqrt{1\,525\,225} = 1\,235$ ou $y = -1\,235$.

Donc A(–480 ; 1 235) et B (–480 ; –1 235).

c. AB = 2 470 m.

79 a. $CA^2 + CB^2 = 2^2 + 9^2 + 0^2 + 3^2 = 94 \neq 92$

donc C n'est pas dans (E).

b. $MA^2 + MB^2 = 92$

$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 92$

$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 + y^2 - 8y + 16 = 92$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y - 62 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y - 31 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 31 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 36$

Il s'agit du cercle de centre (2 ; 1) et de rayon 6.

80 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1.

```
import math

def ensemble(a,b,c):
    d=a**2+b**2-4*c
    if d>0:
        return "(E) est un cercle."
    if d==0:
        return "(E) est un point."
    if d<0:
        return "(E) est l'ensemble vide."
```

2. a. C'est un cercle.
b. C'est un point.
c. L'ensemble est vide.

3.

```
import math

def ensemble(a,b,c):
    d=a**2+b**2-4*c
    if d>0:
        return ["(E) est le cercle de centre",-a/2,-b/2,"et de rayon",math.sqrt(d/4)]
    if d==0:
        return ["(E) est le point de coordonnées",-a/2,-b/2]
    if d<0:
        return ["(E) est l'ensemble vide."]
```

81 a. Le cercle a pour équation $x^2 + y^2 = 25$.

b. On cherche l'ordonnée du point du cercle qui a pour abscisse 4 et –4.
On cherche donc y tel que $16 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 9$ donc $y = 3$.
La hauteur du tunnel à la limite de chaque voie est de 3 mètres.

82 Equation of the perpendicular bisector of [AB]: $-x + 2y - 9 = 0$.
The center is on the line (d) and on the perpendicular bisector:
$\begin{cases} -x + 2y - 9 = 0 \\ x - 4y + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5.5 \end{cases}$
An equation of the circle is $(x - 2)^2 + (y - 5.5)^2 = c$ with $c \in \mathbb{R}$.
As A is on the circle:
$(4 - 2)^2 + (9 - 5.5)^2 = c \Leftrightarrow c = 16.25$.
An equation of the circle is
$(x - 2)^2 + (y - 5.5)^2 = 16.25$.

OBJECTIF 3

Étudier les propriétés des paraboles

83 a. $\frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{4} = 1$ et $f(1) = 3$, donc S(1 ; 3).
b. S(6 ; 7)

84 Seules les équations **a.** et **b.**

a. Sommet (2 ; 3) et axe $x = 2$.
b. Sommet (–3 ; –10) et axe $x = -3$.

85 **a.** Les racines de f sont –1 et 4.

b. L'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2}$.

86 On remarque que $f(-1,3) = f(0,7)$ donc une équation de l'axe est : $x = \frac{-1,3+0,7}{2} = -0,3$.

87 **a.** $x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{4} = \frac{3}{2}$
b. $x = 2$ car S(2 ; 4)
c. $x = \frac{1-3}{2} = -1$.

88 **a.** Vrai.

b. Faux : tout dépend si 4 est un minimum ou un maximum de la fonction.
c. Vrai, car $f(2-3) = f(2+3)$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$.
d. Faux : $f(x) = a(x-2)^2 + 4$.
e. Faux : une équation de l'axe est $x = 2$.

89 **a.** $f(-2) = f(\mathbf{-4})$ donc l'axe a pour équation $x = \frac{-2+(-4)}{2} = -3$.
b. $f(50) = f(-3+53) = f(-3-53) = f(\mathbf{-56})$.
c. $g(-3) = g(\mathbf{1})$ donc l'axe a pour équation $x = \frac{-3+1}{2} = -1$.
d. $g(50) = g(-1+51) = g(-1-51) = g(\mathbf{-52})$.

90 **a.** $\frac{-b}{2a} = -\frac{19}{-8} = -\frac{19}{8}$
et $f\left(-\frac{19}{8}\right) = -\frac{19^2}{2\times 8} + \frac{19^2}{8} + 5 = \frac{441}{16}$,
donc S $\left(-\frac{19}{8} ; \frac{441}{16}\right)$.
b. On résout :
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^2 - 19x + 5 = 0$.
$\Delta = 19^2 - 4 \times (-4) \times 5 = 441 = 21^2$,
donc $x_1 = \frac{19+21}{-8} = -5$ et $x_2 = \frac{19-21}{-8} = 0,25$.
Donc A(–5 ; 0) et B(0,25 ; 0).
Si $x = 0$ alors $y = 5$, donc C(0 ; 5).

91 $\mathscr{P}_1$: $y = 2(x-1)^2 - 3$

$\mathscr{P}_2$: $y = -3(x+2)^2 + 4$

92 **a.** $f(x) = a(x-2)^2 - 3$ avec a un réel. De plus $f(1) = 2$, donc $2 = a(1-2)^2 - 3 \Leftrightarrow a = 5$,
donc $f(x) = 5(x-2)^2 - 3$.

b. On résout :
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 5(x-2)^2 - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)^2 = \frac{3}{5}$
$\Leftrightarrow x_1 = 2 + \sqrt{\frac{3}{5}}$ ou $x_2 = 2 - \sqrt{\frac{3}{5}}$.
Il s'agit des points B$\left(2 + \sqrt{\frac{3}{5}} ; 0\right)$ et C$\left(2 - \sqrt{\frac{3}{5}} ; 0\right)$.

93 **a.** L'extremum est un nombre, pas un point.
L'extremum de f est donc 3.
b. L'axe de symétrie de la parabole $x = -1$.
Si 1 est une racine, $f(1) = 0$.
Par symétrie $f(1) = f(-1+2) = f(-1-2) = f(-3) = 0$ donc –3 est la seconde racine.

94 • Use the coordinate system where the axis of the abscissa represents the ground and where the parabola admits $x = 0$ as axis of symmetry.
An equation of the parabola is:
$y = a(x-0)^2 + 1.4 = ax^2 + 1.4$ with $a \in \mathbb{R}$
for $-2.5 \leqslant x \leqslant 2.5$,
but $0 = a \times 2.5^2 + 1.4 \Leftrightarrow a = \frac{-1.4}{2.5^2} = -0.224$. An equation of $\mathscr{P}$ is $y = -0.224x^2 + 1.4$.
• The points of the parabola of abscissa 0.4 and –0.4 are A(0.4, 1.36416) and B(– 0.4, 1.36416).
1.364 16 > 1.3 so the horse can jump such an obstacle.

95 **a.** On sait que $f(0) = -150$ et que $f(450) = -150$.
L'axe de symétrie de la parabole a pour équation :
$x = \frac{450}{2} = 225$.
Le sommet de la parabole a pour coordonnées : (225 ; 120).
Une équation de la parabole est :
$y = a(x-225)^2 + 120$. Comme :
$-150 = a(0-225)^2 + 120 \Leftrightarrow a = \frac{-270}{2252} = -\frac{2}{375}$,
la parabole a pour équation :
$y = -\frac{2}{375}(x-225)^2 + 120$.
b. Si $y = 0$, on a $-\frac{2}{375}$
$(x-225)^2 + 120 = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{375}(x-225)^2 = -120$.
$\Leftrightarrow (x-225)^2 = 120 \times \frac{375}{2} = 22\,500$
$\Leftrightarrow x - 225 = \sqrt{22\,500} = 150$ ou
$x - 225 = -\sqrt{22\,500} = -150$
$\Leftrightarrow x = 225 + 150 = 375$ ou $x = 225 - 150 = 75$
Donc A(75 ; 0) et B (375 ; 0).
c. AB = 300 m.

96 **a.** Si $m^2 + 4m + 1 = 0$ alors $\mathscr{C}$ est la droite d'équation $y = (2 + m)x - 5$.

On résout $m^2 + 4m + 1 = 0$.

$\Delta = 16 - 4 = 12$, donc $m_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2} = -2 + \sqrt{3}$ ou $m_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2} = -2 - \sqrt{3}$.

Si $m \neq -2 + \sqrt{3}$ et $m \neq -2 - \sqrt{3}$, $\mathscr{C}$ est une parabole.

b. Si $m^2 + 4m + 1 \neq 0$, l'équation de l'axe de la parabole est :

$x = -1 \Leftrightarrow -\frac{2+m}{2(m^2+4m+1)} = -1$

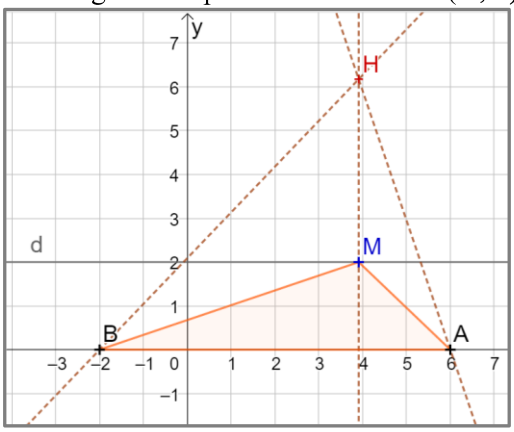
$\Leftrightarrow -2 - m = -2m^2 - 8m - 2$

$\Leftrightarrow m(2m + 7) = 0$.

C'est le cas lorsque $m = 0$ ou $m = -3{,}5$.

97 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1. Il s'agit d'une parabole de sommet (2 ; 8).



2.a. Hauteur issue de A :

$(m + 2)x + 2y - 6(m + 2) = 0$.

Hauteur issue de B : $(m - 6)x + 2y + 2(m - 6) = 0$.

Les coordonnées de H vérifient le système :

$$\begin{cases} (m+2)x + 2y - 6(m+2) = 0 \\ (m-6)x + 2y + 2(m-6) = 0 \end{cases}.$$

On obtient $H\left(m ; \frac{-m^2+4m+12}{2}\right)$.

c. $-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6 = \frac{-m^2+4m+12}{2} = y_H$.

d. Le point H décrit donc la parabole d'équation :

$y = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$.

$\frac{-b}{2a} = -\frac{-2}{-1} = 2$.

Son sommet est (2 ; 8) et son axe : $x = 2$.

98 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import matplotlib.pyplot as plt
Lx=[]
Ly=[]
for x in range(-2,8):
    for y in range(-4,8):
        if 2*x*(x-5)<5*(y+1):
            Lx.append(x)
            Ly.append(y)
plt.plot(Lx,Ly,"o")
plt.grid()
plt.show()
```

Le programme teste des nombres entiers x compris entre –2 et 8.

Pour chacun d'eux il fait varier y entre –4 et 8.

Si $2x(x - 5) < 5(y + 1)$ il marque un point sinon il ne marque rien.

$2x(x - 5) < 5(y + 1) \Leftrightarrow 2x^2 - 10x < 5y + 5$

$\Leftrightarrow 5y > 2x^2 - 10x - 5$

$\Leftrightarrow y > \frac{2}{5}x^2 - 2x - 1$.

Il construit donc un point de coordonnées $(x ; y)$ lorsque les points sont au–dessus de la parabole d'équation : $y = \frac{2}{5}x^2 - 2x - 1$.

b. On a donc obtenu la parabole définie précédemment.

$\frac{-b}{2a} = -\frac{-10}{4} = 2{,}5$. Son sommet est (2,5 ; –3,5).

c.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import math
Lx=[]
Ly=[]
for x in range(0,11):
    for y in range(0,11):
        if y>math.sqrt(100-x**2):
            Lx.append(x)
            Ly.append(y)
plt.plot(Lx,Ly,"o")
#plt.axis('equal')
plt.grid()
plt.show()
```

For x in range (0 , 11)

For y in range (0 , 11)

If y >sqrt(100 –x**2) ….

Démontrer les propriétés

p. 272 et 273 du manuel

99 Démonstration permettant de montrer que, dans le plan muni d'un repère orthonormé, une droite (d) admet un vecteur normal non nul de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ si et seulement si une équation cartésienne de (d) est de la forme $ax + by + c = 0$; a, b et c étant trois nombres réels avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.

- On suppose que le vecteur non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à la droite (d).

On considère $A(x_A\,;y_A)$ un point de (d).

$M(x\,;y)$ est un point de la droite (d) si et seulement si les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont **orthogonaux**.

Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x - x_A} \\ \boldsymbol{y - y_A} \end{pmatrix}$.

On doit donc avoir : $(\boldsymbol{x - x_A}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{y - y_A}) \times \boldsymbol{b} = 0$.

En développant, cela équivaut à $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{by} - \boldsymbol{ax_A} - \boldsymbol{by_A} = 0$.

En posant $c = \boldsymbol{-ax_A - by_A}$, une équation de la droite (d) est $ax + by + c = 0$.

- On suppose que la droite (d) admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

On sait que $(a\,;b) \neq (\boldsymbol{0}\,;\boldsymbol{0})$.

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{u}\begin{pmatrix} \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\vec{n}.\vec{u} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{-b}) + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

On en conclut que $\vec{n}$ est **un vecteur normal à (d)**.

100 **1. a.** $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d) et $\vec{n}'\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (d')

b. et c. Si $aa' + bb' = 0$ alors les droites (d) et (d') sont perpendiculaires.
Si les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux alors les droites (d) et (d') soient perpendiculaires.

d. La réciproque s'énonce : « si les droites (d) et (d') sont perpendiculaires alors $aa' + bb' = 0$ » ; elle est vraie, car si (d) et (d') sont perpendiculaires, les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}$' sont orthogonaux et $aa' + bb' = 0$.

2. $y = mx + p \Leftrightarrow mx - y + p = 0$ donc un vecteur normal de (d_1) est $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, un vecteur normal de (d_2) est $\begin{pmatrix} m' \\ 1 \end{pmatrix}$

(d_1) et (d_2) sont perpendiculaires si et seulement si $mm' + 1 = 0 \Leftrightarrow mm' = -1$.

101 **a. Méthode 1 :** Comme MA et MB sont deux longueurs, $MA \geqslant 0$ et $MB \geqslant 0$. Ainsi,
M est sur la médiatrice de [AB] $\Leftrightarrow$ MA = MB
$\Leftrightarrow MA^2 = MB^2$
$\Leftrightarrow (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (x - x_B)^2 + (y - y_B)^2$
En développant, cette équation est équivalente à :
$-2xx_A + x_A^2 - 2yy_A + y_A^2 = -2xx_B + x_B^2 - 2yy_B + y_B^2$
$\Leftrightarrow 2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) - x_B^2 - y_B^2 + x_A^2 + y_A^2 = 0$
Cette équation est de la forme $ax + by + c = 0$; c'est l'équation d'une droite si $(a\,;b) \neq (0\,;0)$ avec $a = 2(x_B - x_A)$ et $b = 2(y_B - y_A)$.
Or $(a\,;b) = (0\,;0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Leftrightarrow$ A = B : exclu d'après l'énoncé.
Donc une équation de la médiatrice de [AB] est :
$2x(x_B - x_A) + 2y(y_B - y_A) - x_B^2 - y_B^2 + x_A^2 + y_A^2 = 0$.

b. Méthode 2 :

Les coordonnées du milieu I de [AB] sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ et les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

La médiatrice de [AB] admet $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal, donc son équation est de la forme :

$\Leftrightarrow (x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y + c = 0$ où c est un réel.

Comme la médiatrice passe par I :

$(x_B - x_A)\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) + (y_B - y_A)\frac{y_A+y_B}{2} + c = 0.$

Donc $c = -(x_B - x_A)\left(\frac{x_A+x_B}{2}\right) - (y_B - y_A)\frac{y_A+y_B}{2}$

$= -\frac{1}{2}\left((x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)\right)$

L'équation de la médiatrice est :

$(x_B - x_A)x + (y_B - y_A)y - \frac{1}{2}\left((x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)\right)$

Remarque : en multipliant par 2, on retrouve l'équation obtenue dans la méthode 1.

102 On note O le milieu de [AB] qui est aussi le centre du cercle $\mathscr{C}$. On note R le rayon du cercle : R = OA = OB.

a. Soit M(x ; y) un point du cercle et N le symétrique de M par rapport à O.

R = OM = ON par les propriétés de symétrie, donc N est sur le cercle $\mathscr{C}$.

Le quadrilatère AMBN a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et qui ont même longueur, donc c'est un rectangle, et par conséquent le triangle MAB est rectangle en M.

Ainsi $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont des vecteurs orthogonaux.

b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B)$

c. Comme $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, leur produit scalaire est nul.

On obtient ainsi :

$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$: qui est l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

103 f est une fonction dont la représentation graphique est la parabole d'équation $y=ax^2 + bx + c$.

a. $f\left(-\frac{b}{2a} - x\right) = a\left(-\frac{b}{2a} - x\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} - x\right) + c$

$= a\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}x + x^2\right) - \frac{b^2}{2a} - bx + c$

$= \frac{b^2}{4a} + bx + ax^2 - \frac{b^2}{2a} - bx + c$

$= ax^2 - \frac{b^2}{4a} + c = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$

$f\left(-\frac{b}{2a} + x\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + x\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + x\right) + c$

$= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b}{a}x + x^2\right) - \frac{b^2}{2a} + bx + c$

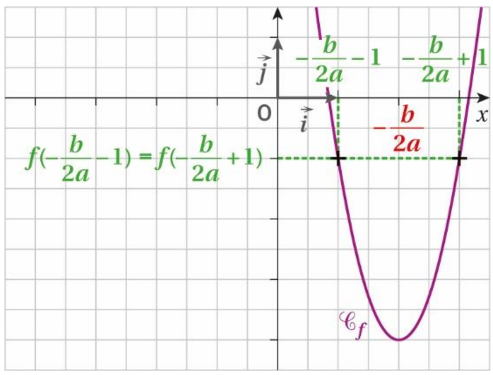
$= \frac{b^2}{4a} - bx + ax^2 - \frac{b^2}{2a} + bx + c$

$= ax^2 - \frac{b^2}{4a} + c = ax^2 - \frac{\Delta}{4a}$

Donc $f\left(-\frac{b}{2a} - x\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + x\right)$.

b. « Pour tout nombre réel x, les nombres $-\frac{b}{2a} - x$ et $-\frac{b}{2a} + x$ ont même **image** par la fonction f. »

c.



d. La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

Le sommet de la parabole a donc pour abscisse $-\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée :

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{b}{2a} + 0\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

104 On se place dans le repère orthonormé (I, $\vec{i}$; $\vec{j}$) d'unité 1 cm dans lequel A(0 ;4) ; B(–3 ;0) et C(3 ; 0).
En effet, I étant milieu de [BC] : BI = IC = 3 et par Pythagore : $AI^2 = 5^2 - 3^2$.
On obtient (AC) : $4x + 3y - 12 = 0$ puis $H\left(\frac{48}{25};\frac{36}{25}\right)$
puis $J\left(\frac{24}{25};\frac{18}{25}\right)$.
$\overrightarrow{AJ}\left(\frac{24}{25};\frac{-82}{25}\right)$ et $\overrightarrow{BH}\left(\frac{123}{25};\frac{36}{25}\right)$.
Alors $\frac{24}{25}\times\frac{123}{25}+\frac{-82}{25}\times\frac{36}{25}=0$,
donc les vecteurs sont orthogonaux et les droites perpendiculaires.

105 **1.a.** Un vecteur normal à (*d*) est (–3 ; 1) ou (3 ; 1).
Une équation de (*d*)' est $3x + y + c = 0$ avec
$3 \times 9 + 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -29$.
Donc (*d'*) : $3x + y - 29 = 0$.
b. Les coordonnées du projeté vérifient :
$\begin{cases} 3x + y - 29 = 0 \\ -x + 3y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -1 \end{cases}$.
Donc H(10 ; –1).
c. $AH^2 = (10 - 9)^2 + (-1 - 2)^2 = 1 + 9 = 10$.
Donc $AH = \sqrt{10}$.
On note A(*u* ; *v*) et (*d*) : $ax + by + c = 0$.
Dans le cas général : soit M(*x* ; *y*) un point de (*d*) et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à (*d*).
On a :
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - u) + b(y - v) = 0$
$\Leftrightarrow ax - au + by - bv = 0$
$\Leftrightarrow au + bv = ax + by = -c$
$\Leftrightarrow au + bv + c = 0$
Soit H le projeté orthogonal de A sur (*d*) alors
$|\overrightarrow{AM}.\vec{n}| = AH.\|\vec{n}\|$
Donc $AH = \frac{|au+bv+c|}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

2. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Avec Python :

```
import math

def projete(a,b,c,u,v):
    return abs(a*u+b*v+c)/math.sqrt(a**2+b**2)
```

b. En testant le programme, on trouve 3,162277660168379.

106 Soit A le point d'abscisse 5 de la droite (*d*) alors l'ordonnée de A vérifie :
$-18 \times 5 - 15y - 210 = 0 \Leftrightarrow y = -20$ donc le point A(5 ; –20) appartient à (*d*).
On cherche une équation de la droite (*h*) perpendiculaire à (*d*) passant par A.
Un vecteur directeur de (*d*) est (15 ; –18) ou (5 ; –6).
Un vecteur normal à (*h*) est (5 ; –6), donc une équation de (*h*) est :
$5x - 6y + c = 0$
avec $5 \times 5 - 6 \times (-20) + c = 0 \Leftrightarrow c = -145$.
Donc (*h*) : $5x - 6y - 145 = 0$.
Soit B le point d'intersection entre (*h*) et (*d'*).
Les coordonnées de B vérifient :
$\begin{cases} 5x - 6y - 145 = 0 \\ 6x + 5y - 1\,089 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 36y = 870 \\ 30x + 25y = 5\,445 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x = 36y + 870 \\ 61y = 4\,575 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 119 \\ y = 75 \end{cases}$
Ainsi la distance à parcourir est :
$AB = \sqrt{(119 - 5)^2 + (75 + 20)^2}$
$= \sqrt{12\,996 + 9\,025} = \sqrt{22\,021}$
≈ 148 m.

107 **1.** (AC) : $y = 0$ et (BD) : $y = x$.
2. Comme le cercle est tangent aux deux segments en A et B, on peut dire que $(\Omega A) \perp (AC)$ et $(\Omega B) \perp (BD)$.
3. a. Les coordonnées du milieu de [AB] sont :
$\left(\frac{a+1}{2};\frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-a\\1\end{pmatrix}$, donc une équation de la médiatrice de [AB] est : $(1 - a)x + y + c = 0$.
De plus :
$(1-a)\frac{a+1}{2}+\frac{1}{2}+c=0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2+1}{2}+c=0$
$\Leftrightarrow c = \frac{a^2}{2} - 1$.
Donc (*m*) : $(1-a)x + y + \frac{a^2}{2} - 1 = 0$.
b. Ω est sur la médiatrice de [AB], ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.
4. a $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, donc une équation de la perpendiculaire à (BD) passant par B est :
$x + y + c = 0$ avec $1 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$.
Une équation est $x + y - 2 = 0$.

b Les coordonnées de Ω vérifient le système :

$$\begin{cases}(1-a)x+y+\frac{a^2}{2}-1=0\\ x+y-2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\ (1-a)x+2-x+\frac{a^2}{2}-1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\ -ax+\frac{a^2}{2}+1=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\ x=\frac{a^2+2}{2a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{4a-a^2-2}{2a}\\ x=\frac{a^2+2}{2a}\end{cases}$$ (a étant différent de 0).

5. a. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-a\\0\end{pmatrix}$; l'équation de la perpendiculaire à (AC) passant par A est $x = a$.

b. Ω est aussi sur cette droite donc ses coordonnées vérifient son équation.
Ainsi les coordonnées de ce point vérifient :

$$\begin{cases}y=2-a\\ a=\frac{a^2+2}{2a}\end{cases}.$$

On résout l'équation :

$a=\frac{a^2+2}{2a} \Leftrightarrow 2a^2=a^2+2$ pour a non nul

$\Leftrightarrow a^2=2$. Comme $a \leqslant -1$ alors $a=\sqrt{2}$.

108 **a.** Un vecteur directeur de (d) est (–1 ; 1). Une équation de la droite (d') perpendiculaire à (d) passant par A est : $-x + y + c = 0$
avec $-2 + 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$,
donc (d') : $-x + y - 1 = 0$.

b. On résout : $\begin{cases}-x+y-1=0\\ x+y+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$

donc H(–1 ; 0).
Le cercle a pour rayon AH avec :
$AH^2 = (2+1)^2 + (3-0)^2 = 18$.
Une équation du cercle est $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 18$.

109 **a.** $AB^2 = 2^2 + 1^2 = 5$; $AC^2 = 16 + 9 = 25$ et $BC^2 = 4 + 16 = 20$, donc $AC^2 = BC^2 + AB^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore : ABC est rectangle en B.

b. Le centre I du cercle est le milieu de l'hypoténuse [AC] donc I(1 ; 0,5) et le rayon du cercle vaut $\frac{AC}{2} = 2{,}5$. Une équation est :
$(x-1)^2 + (y-0{,}5)^2 = 2{,}5^2$.

c. La tangente au cercle en A est perpendiculaire au rayon (AI). Or $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}2\\-1{,}5\end{pmatrix}$ donc une équation de la tangente est : $2x - 1{,}5y + c = 0$
avec $2 \times (-1) - 1{,}5 \times 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = 5$.
Équation de la tangente : $2x - 1{,}5y + 5 = 0$.

d. Une équation de la perpendiculaire à (AC) passant par B est :
$2x - 1{,}5y + c = 0$
avec $2 \times 1 - 1{,}5 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 2{,}5$.
Une équation est donc $4x - 3y + 5 = 0$.
Une équation de (AC) est $3x + 4y - 5 = 0$.
Donc les coordonnées de H vérifient :

$$\begin{cases}4x-3y+5=0\\ 3x+4y-5=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}12x-9y=-15\\ 12x+16y=20\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}25y=35\\ 4x=3y-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{7}{5}\\ x=-\frac{1}{5}\end{cases}.$$

Donc H(–0,2 ; 1,4).
Ainsi $AH^2 = 0{,}8^2 + 0{,}6^2 = 1$, donc AH = 1.

e. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = 5 \Leftrightarrow 4(x+1) - 3(y-2) = 5$
$\Leftrightarrow 4x - 3y + 5 = 0$.
On retrouve l'équation de la hauteur issue de B dans le triangle.

110 Le disque délimité par le cercle d'équation :
$(x+6)^2 + (y+2)^2 = 10^2$ est éclairé par le phare.
On cherche d'abord la distance AB éclairée sur la trajectoire du bateau où A et B sont les points d'intersection du cercle et de la droite d'équation $x = 0$.
On résout :

$$\begin{cases}(x+6)2+(y+2)2=102\\ x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}((y+2)2=100-36=64\\ x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y+2=8\\ x=0\end{cases} \text{ ou } \begin{cases}y+2=-8\\ x=0\end{cases}$$

donc A(0 ; 6) et B(0 ; –10).
Ainsi la distance éclairée est AB = 16 km.
$v = \frac{d}{t}$ donc $t = \frac{d}{v} = \frac{16}{25} = 0{,}64$ h = 38,4 min
= 38 min 24 s.

111 **a.** $(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 + 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$.
C'est le cercle de centre I(3 ; –2) et de rayon 3.

b. On résout :

$\begin{cases} x - y - 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 8 \\ (y+8)^2 + y^2 - 6(y+8) + 4y + 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 8 \\ 2y^2 + 14y + 20 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 8 \\ y^2 + 7y + 10 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 8 \\ y = -2 \ ou \ y = -5 \end{cases}$

A(3 ; –5) et B(6 ; –2).

c. La tangente en A est admet $\overrightarrow{\text{IA}}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Une équation est $0x - 3y + c = 0$

avec $-3 \times (-5) + c = 0 \Leftrightarrow c = 15$

Une équation de cette tangente est :

$-3y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = -5$.

De même une équation de la tangente en B est $x = 6$.

d. Un vecteur directeur de la première est (0 ; 1) et de la seconde (1 ; 0).

Comme $1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, ces droites sont perpendiculaires.

Le point E a pour coordonnées (6 ; –5).

e. $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le milieu de [AB] a pour coordonnées (4,5 ; –3,5).

Une équation de la médiatrice est $x + y - 1 = 0$.

On a bien : $6 + (-5) - 1 = 0$, donc E est sur la droite.

112 **1. a.** La médiatrice de [AC] a pour équation $-3x + y + 7 = 0$.

La médiatrice de [AB] a pour équation $x + y - 5 = 0$.

b. Les coordonnées du point I sont donc (3 ; 2).

Son rayon est égal à AI, donc :

$AI^2 = (3-3)^2 + (2+3)^2 = 25$.

Une équation du cercle est :

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

2. a. Comme I est sur la médiatrice de [AB], IA = IB et le triangle IAB est isocèle en I.

De plus, $IA^2 = 0^2 + 5^2 = 25$; $IB^2 = 5^2 + 0^2 = 25$ et $AB^2 = 5^2 + 5^2 = 50$.

Donc le triangle est aussi rectangle en I.

b. Le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de [AB] : (5,5 ; –0,5) et son rayon est égal à $\frac{AB}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ donc une équation du cercle est :

$(x - 5,5)^2 + (y + 0,5)^2 = 12,5$.

113 On note V le village, M le moulin, C le château et (r) la rivière.

La médiatrice de [MC] a pour équation : $-3x + y - 1 = 0$.

La médiatrice de [MV] a pour équation :

$x + 3y - 3 = 0$.

Le centre du cercle circonscrit est le point (0 ; 1).

Le rayon est IM avec $IM^2 = 5$.

Une équation du cercle circonscrit à VCM est :

$x^2 + (y-1)^2 = 5$.

Il se trouve à 2 km du moulin, donc il se trouve sur le cercle d'équation $(x+2)^2 + y^2 = 4$.

On cherche les coordonnées des points d'intersection des deux cercles.

Avec un logiciel de calcul formel, ou on résout :

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ 2y + 4 + 4x = 0 \end{cases}$

On cherche l'intersection du cercle et de la droite :

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (-2-2x)^2 + 4x = 0 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4 + 8x + 4x2 + 4x = 0 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 12x + 4 = 0 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,4 \text{ ou } x = -2 \\ y = -2 - 2x \end{cases}$

Les points d'intersection sont A(–0,4 ; –1,2) et B(–2 ; 2).

On calcule ensuite de A et de B à la droite (r).

Une équation de (r) est : $-x + 2y - 4 = 0$.

Les deux points ont même projeté orthogonal sur (r) : H(–1,6 ; 1,2).

$AH^2 = 1,2^2 + 2,4^2 = 7,2$ et $BH^2 = 0,4^2 + 0,8^2 = 0,8$.

$AH = \sqrt{7,2} \approx 2,7 > 1$ et $BH = \sqrt{0,8} \approx 0,9 < 1$.

Le trésor est donc sous le point A(–0,4 ; –1,2).

114 **1.** $(x-2)^2 - 4 + (y-5)^2 - 25 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$.

$\mathscr{C}_1$ est le cercle de centre (2 ; 5) de rayon 5.

$(x+3)^2 - 9 + (y-2,5)^2 - 6,25 + 9 = 0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-2,5)^2 = 6,25$

$\mathscr{C}_2$ est le cercle de centre (–3 ; 2,5) de rayon 2,5.

2. On cherche l'intersection de ces cercles avec l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

Pour $\mathscr{C}_1$: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Le cercle coupe la droite en un unique point (2 ; 0), il est donc tangent à la droite.

De même pour $\mathscr{C}_2$ qui coupe la droite en (–3 ; 0).

3. On résout :

$$\begin{cases} x^2+y^2=4x+10y-4 \\ x^2+y^2=-6x+5y-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4x+10y-4 \\ 4x+10y-4=-6x+5y-9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4x+10y-4 \\ 10x+5y+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4x+10y-4 \\ 2x+y+1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4x+10y-4 \\ y=-2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x^2+4x+1=4x-20x-10-4 \\ y=-2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+20x+15=0 \\ y=-2x-1 \end{cases}$$

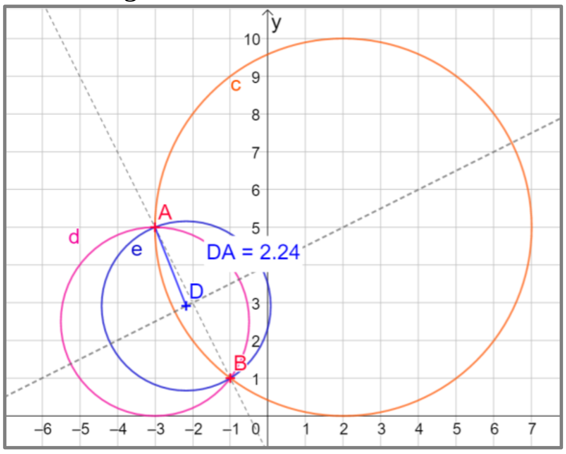
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+3=0 \\ y=-2x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ ou } x=-3 \\ y=1 \text{ ou } y=5 \end{cases}$$

Les points d'intersection sont A(–1 ; 1) et B(–3 ; 5).

4. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

Avec le logiciel



5. a. Le centre du cercle est sur la médiatrice de [AB] dont une équation est $x - 2y + 8 = 0$.

On a donc $a - 2b + 8 = 0$, donc $2b = a + 8$

b. $\Omega A^2 = (a + 1)^2 + (b - 1)^2$

$= a^2 + 2a + 1 + b^2 - 2b + 1$

$= a^2 + 2a + 2 + \frac{1}{4}$

$(a + 8)^2 - (a + 8) = \frac{5}{4}a^2 + 5a + 10.$

Une équation de ce cercle est :

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \frac{5}{4}a^2 + 5a + 10$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - 4 - \frac{a}{2})^2 = \frac{5}{4}a^2 + 5a + 10$

c. Le système

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-4-\frac{a}{2})^2 = \frac{5}{4}a^2+5a+10 \\ y=0 \end{cases}$$

doit avoir des solutions.

On cherche a tel que l'équation

$(x - a)^2 + (0 - 4 - \frac{a}{2})^2 = \frac{5}{4}a^2 + 5a + 10$ admet au moins une solution

$\Leftrightarrow (x - a)^2 = -16 - 4a - \frac{a^2}{4} + \frac{5}{4}a^2 + 5a + 10$

$\Leftrightarrow (x - a)^2 = a^2 + a - 6$

Cette équation a des solutions si et seulement si $a^2 + a + 6 \geqslant 0$.

Le discriminant du trinôme $x^2 + x + 6$ est $\Delta = 25$.

Les racines du trinôme sont 2 et –3.

Sur $]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$ le trinôme est positif.

Donc $a \in]-\infty ; -3] \cup [2 ; +\infty[$.

d. Avec un logiciel

115 **a.** • Si $2m + 1 \neq 0$, si m est différent de –0,5 : c'est une parabole.

• Si $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -0,5$, c'est la droite d'équation $y = 3x - 1$.

b. • Si $m = 0,5$: $y = 3x - 1$.

On résout : $\begin{cases} y=3x-1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=0 \end{cases}$: c'est le seul point d'intersection.

• Si $m \neq 0,5$, on calcule le discriminant pour déterminer les racines du trinôme :

$\Delta = 4(m + 2)^2 - 4 \times (-1) \times 2m + 1)$

$= 4m^2 + 24m + 20.$

On détermine le signe de $4m^2 + 24m + 20$.

$\Delta' = 24^2 - 4 x 4 x 20 = 256 = 16^2$

Les racines de ce nouveau trinôme sont –1 et –5.

• Si $m \in [-5 ; -1]$ alors $4m^2 + 24m + 20 < 0$, il n'y a pas de racine donc pas de point d'intersection.

• Si $m = -5$ ou $m = -1$, il y a un unique point d'intersection.

Sinon il y a deux points d'intersection.

116 **a.** The coordinates of P are (3, 9):

$x_P = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$ and $y_P = 18 - 9 = 9$.

$$\begin{cases} y=6x-x^2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6x-x^2 \\ y=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-5)=0 \\ y=x \end{cases}$$

The coordinates of the intersection points are O(0, 0) and Q(5, 5).

b. An equation of the perpendicular line to (d) passing through P is $x + y - 12 = 0$. We get H(6, 6).

c. $OQ^2 = 5^2 + 5^2 = 50$ then $|OQ| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

$PH^2 = 3^2 + 3^2 = 18$ then $|PH| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

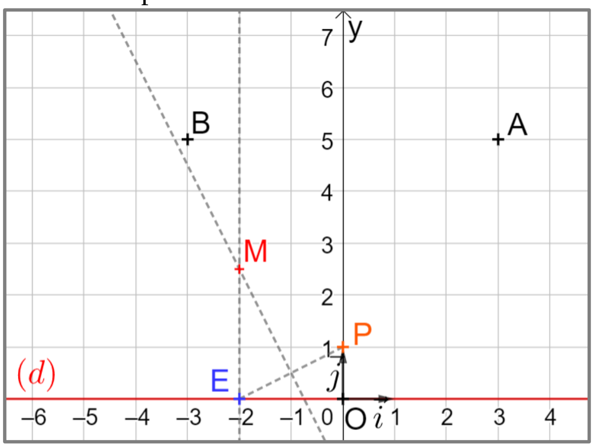
d. Area of the triangle OPQ: $\frac{5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 15$.

117 Elle est de la forme $y = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3 \neq 0$.
On résout pour $m \neq n$.
$3x^2 - 5mx + 10m = 3x^2 - 5nx + 10n$
$\Leftrightarrow 10(m - n) = 5x(m - n)$
$\Leftrightarrow x = 2$
Si $x = 2$ alors $y = 3 \times 4 - 10m + 10m = 12$.
Donc les droites passent par le point (2 ; 12).

118 **a.** Une équation de l'axe de symétrie de la parabole est $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{-0,04} = -125$
Or $\frac{140}{2} = 70$.
Une équation de (AB) est : $x = -125 - 70 = -195$.
Une équation de (CD) est $x = -125 + 70 = -55$.
b. On calcule $f(-125) = 22,5$.
Le sol peut être assimilé à une droite d'équation $22,5 - 250 = -227,5$.
On calcule les coordonnées des points de la paraboles et des droites (BA) et (CD).
Si $x = -55$ alors $y = -75,5$ donc C(–55 ; –75,5) et D(–55,–227,5).
Donc la hauteur AB = –75,5 – (–227,5)
= 152 cm = 1,52 m.

119 On cherche les coordonnées des deux points d'intersection :
$\begin{cases} y = 1,5x^2 \\ y = 2x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,5x^2 = 2x + b \\ \quad y = 1,5x^2 \end{cases}$.
On résout l'équation $1,5x^2 - 2x - b = 0$ qui a des solutions si et seulement si
$4 + 6b \geqslant 0 \Leftrightarrow b \geqslant \frac{-2}{3}$, d'où $y \geqslant 2x - \frac{2}{3}$.
On obtient alors :
$x_1 = \frac{2+\sqrt{4+6b}}{3}$; $y_1 = 1,5 \times {x_1}^2$ et
$x_2 = \frac{2-\sqrt{4+6b}}{3}$; $y_2 = 1,5 \times {x_2}^2$.
En calculant l'abscisse du milieu, on obtient :
$x = \frac{2}{3}$ et $y = 0,75({x_1}^2 + {x_2}^2) \geqslant 2\times\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$.
Donc les milieux appartiennent à la demi-droite d'équation $x = \frac{2}{3}$ avec $y \geqslant \frac{2}{3}$.
Réciproquement, si $x = \frac{2}{3}$, on peut écrire x comme somme de x_1 et x_2 choisis comme abscisses de deux points de la parabole si :
$b \geqslant \frac{-2}{3} \Leftrightarrow y - 2x \geqslant \frac{-2}{3} \Leftrightarrow y \geqslant \frac{-2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.
Donc le lieu des milieux est la demi–droite d'origine $\left(\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ passant par $\left(\frac{2}{3} ; 1\right)$.

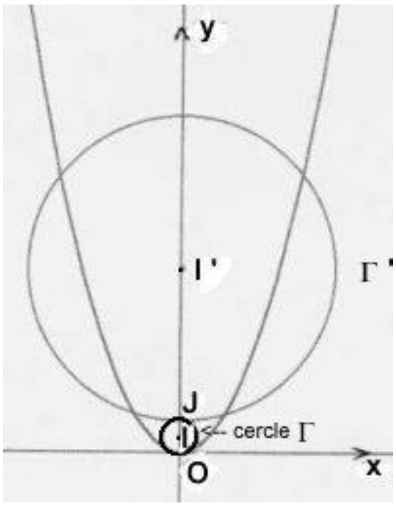
120 **1.** On trace la perpendiculaire à la droite (d) passant par le point $M(x_M ; y_M)$ indiquant la position.
On note H le projeté orthogonal de M sur (d), la distance cherchée est MH.
Comme une équation de (d) est $y = 0$ alors $MH = y_M$.
2. On détermine les coordonnées du projeté orthogonal de C sur (d) : (–1,5 ; 0).
La distance de C à la droite (d) est égale à 1,5.
De plus $PC = \sqrt{(-1,5 - 0)^2 + (1,5 - 1)^2}$
$= \sqrt{2,25 + 0,25} = \sqrt{2,5} \neq 1,5$.
Donc C n'est pas situé sur la route du bateau.
3. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Avec le logiciel : on construit le point d'intersection entre la perpendiculaire à la droite (d) passant par E et la médiatrice de [EP]. La trace affiche une parabole.



4. a. On doit avoir :
$MH = MP \Leftrightarrow MH^2 = MP^2$
$\Leftrightarrow y^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2$
$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + (y - 1)^2$
b. On en déduit :
$y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1 \Leftrightarrow 2y = x^2 + 1$
Le point M décrit donc la parabole d'équation :
$y = \frac{x^2+1}{2}$.

121 **a.** La bille B va toucher le fond de l'urne si et seulement si le cercle de centre I(0 ; 0,1) et de rayon 0,1 est à l'intérieur (au sens large) de la parabole d'équation $y = x^2$.
Une équation du cercle est :
$x^2 + (y - 0,1)^2 = 0,01 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 0,2y = 0$.
Le point du cercle d'abscisse 0,1 a pour ordonnée y tel que :
$0,01 + y^2 - 0,2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{0,2}{2} = 0,1 > f(0,1) = 0,01$

Donc la bille est à l'intérieur de l'urne.



On peut aussi déterminer les points d'intersection du cercle et de la parabole :

$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 - 0{,}2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 + 0{,}8y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y(y + 0{,}8) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 > 0 \\ y = 0 \text{ ou } y = -0{,}8 \end{cases}$

Donc le seul point d'intersection est (0 ; 0).

Donc la bille ne touche le paraboloïde qu'en son fond qui est le point O.

b. • La bille B étant au fond de l'urne, la bille B' touchera la bille B si et seulement si elle peut la toucher en son point J(0 ; 0,2) le plus haut, c'est-à-dire que le centre de bille se situera au point de coordonnées (0 ; 1,2).

Soit M(x ; y) sur le nouveau cercle d'équation :

$x^2 + (y - 1{,}2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2{,}4y + 0{,}44 = 0$.

Le point du 2e cercle d'abscisse 1 a pour ordonnée y tel que :

$1 + y^2 - 2{,}4\,y + 0{,}44 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2{,}4y + 1{,}44 = 0$

$\Leftrightarrow y = \frac{2{,}4}{2} = 1{,}2 < 1{,}2^2 = 1{,}44$.

Ainsi B' ne peut pas toucher B.

• **Autre méthode :** déterminer les points d'intersection du cercle et de la parabole :

$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 - 2{,}4y + 0{,}44 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - 1{,}4y + 0{,}44 = 0 \end{cases}$

$\Delta \approx 0{,}2 > 0$ et les solutions sont $\frac{1{,}4+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$ et $\frac{1{,}4-\sqrt{\Delta}}{2} > 0$: deux solutions sont possibles, donc le cercle coupe la parabole.

122 **1.** Les équations des axes sont $y = x$ et $y = -x$.

On peut donc faire l'étude de la figure sur le quart de plan positif et retrouver les autres parties par symétrie axiale et/ou centrale.

2. a. a est dans [0 ; 5].

b. Le rayon est égal à $5 - a$.

c. $(x - a)^2 + y^2 = (5 - a)^2$

3. a. C(x ; y) est sur la droite (d) d'équation $y = x$.

De plus $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x-a \\ y-0 \end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ directeur de (d).

Donc $(x - a) + y = 0 \Leftrightarrow y = a - x$.

Ainsi $a - x = x \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$ et $y = x = \frac{a}{2}$, donc $C\left(\frac{a}{2}\ ;\ \frac{a}{2}\right)$.

b. CA est un rayon du petit cercle, donc

$CA^2 = (5 - a)^2$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + 0\right)^2 = (5 - a)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 20a + 50 = 0$

c. On résout cette équation ; $\Delta = \sqrt{200}$.

Les deux solutions sont :

$a_1 = \frac{20+\sqrt{200}}{2} = 10 + 5\sqrt{2} > 5$

et $a_2 = \frac{20-\sqrt{200}}{2} = 10 - 5\sqrt{2} < 5$.

Donc on pose $A(10 - 5\sqrt{2}\ ;\ 0)$ puis on trace le cercle de rayon $5 - a = 5\sqrt{2} - 5$.

Par symétrie, on obtient la figure demandée.

123 **1. a.** On résout le système :

$\begin{cases} y = 0{,}5x2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ donc A(2 ; 2).

b. $f(x) = 0{,}5\,x^2$ donc $f'(x) = x$.

La tangente au point A à la parabole a pour équation :

$y = f'(2)(x - 2) + f(2) \Leftrightarrow y = 2(x - 2) + 2$

$\Leftrightarrow y = 2x - 2$

$\Leftrightarrow 2x - y - 2 = 0$

Un vecteur directeur de la tangente est (1 ; 2).

La normale a pour équation $x + 2y + c = 0$ avec $2 + 4 + c = 0 \Leftrightarrow c = -6$.

La normale a pour équation $x + 2y - 6 = 0$.

c. On considère le point B(2 ; 4) qui se trouve sur (d).

On cherche le symétrique de ce point par rapport à la normale.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (d), on obtient H(1,2 ; 2,4).

On cherche J sur le rayon réfléchi tel que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HJ}$.

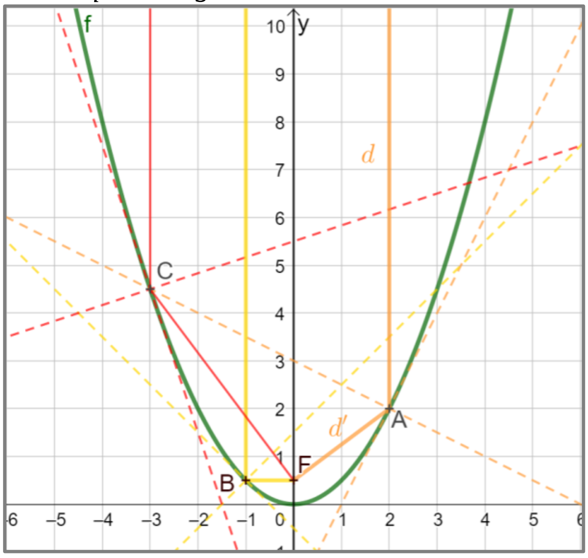
On obtient J(0,4 ; 0,8).

Ainsi le rayon réfléchi passe par les points A et J. Son équation est donc $3x - 4y + 2 = 0$.

d. On résout $\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

donc $F(0 ; -\frac{1}{2})$.

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



Conjecture : Tous les rayons réfléchis passent par ce point F.

3. On fait le même raisonnement dans le cas général. On résout le système :

$\begin{cases} y = 0{,}5x^2 \\ x = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = 0{,}5a^2 \end{cases}$

donc $A(a ; 0{,}5a^2)$.

$f(x) = 0{,}5x^2$ donc $f'(x) = x$.

La tangente au point A à la parabole a pour équation :

$y = f'(a)(x - a) + f(a) \Leftrightarrow y = a(x - a) + 0{,}5a^2$

$\Leftrightarrow y = ax - 0{,}5a^2$

$\Leftrightarrow ax - y - 0{,}5a^2 = 0$.

Un vecteur directeur est $(1 ; a)$.

La normale a pour équation $x + ay + c = 0$

avec $a + 0{,}5a^3 + c = 0 \Leftrightarrow c = -a - 0{,}5a^3$.

La normale a pour équation $x + ay - a - 0{,}5a^3 = 0$.

Un vecteur directeur de la normale est $\vec{u}\,(-a ; 1)$.

Soit H $(x_H ; y_H)$ le projeté orthogonal d'un point $B(a ; 1)$ du rayon de soleil (d) sur la normale.

Alors $\vec{u}\,.\overrightarrow{BH} = 0 \Leftrightarrow -a(x_H - a) + (y_H - 1) = 0$

donc $y_H = ax_H + 1 - a^2$.

Or H est sur la normale donc ses coordonnées vérifient le système :

$\begin{cases} y_H = ax_H + 1 - a^2 \\ x_H + ay_H - a - 0{,}5a^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{1.5a^3}{1+a^2} \\ y_H = \frac{1+0.5a^4}{1+a^2} \end{cases}$

Soit J le symétrique de B par rapport à la normale : on a $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{HJ}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_J = 2x_H - x_B = \frac{a^3-2a}{1+a^2} \\ y_J = 2y_H - y_B = \frac{1-a^2+a^4}{1+a^2} \end{cases}$

On détermine une équation du rayon réfléchi [AJ] :

M $(x ; y)$ un point de la droite (AJ)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a & \frac{-2a+a^3}{1+a2} \\ y - 0{,}5a^2 & \frac{1-1.5a^2+0.5a^4}{1+a2} \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (x - a)(1 - 1.5a^2 + 0.5a^4) - (y - 0{,}5a^2)(-2a + a^3) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - 1{,}5a^2 + 0{,}5a^4)x + (2a - a^3)y - a + 0{,}5a^3 = 0$

On cherche les coordonnées du point d'intersection avec la droite d'équation $x = 0$.

On obtient : $y = \frac{a-0.5a^3}{2a^2-a^3} = \frac{1}{2}$, donc chaque rayon passe par $F(0 ; \frac{1}{2})$.

Recherches mathématiques

p. 278 du manuel

124 Les coordonnées de S_m sont :

$\left(\frac{m+2}{m-3} ; \frac{-12m+11}{m-3}\right)$ pour $m \neq 3$.

On fait une conjecture avec un logiciel de géométrie dynamique. On fait apparaitre la trace du sommet de la parabole à l'aide du curseur m.

On conjecture que le lieu est une droite d'équation $y = -5x - 7$.

On calcule : $-5 \times \frac{m+2}{m-3} - 7 = \frac{-12m+11}{m-3}$, donc les points S_m appartiennent à cette droite.

Mais toute la droite est-elle le lieu des points S_m ?

Réciproquement, on cherche si, pour tout point de coordonnées $(x ; y)$ de cette droite, on peut trouver un réel m tel que : $x = \frac{m+2}{m-3}$ (et $y = \frac{-12m+11}{m-3}$).

Supposons que ce nombre m existe alors :

$x(m - 3) = m + 2 \Leftrightarrow m(x - 1) = 3x + 2$.

Donc $m = \frac{3x+2}{x-1}$ si $x \neq 1$. Ainsi pour tout $x \neq 1$, il existe $m = \frac{3x+2}{x-1}$ tel que $\left(\frac{m+2}{m-3} ; \frac{-12m+11}{m-3}\right)$ décrive la droite. Le lieu des points S_m est donc la droite d'équation $y = -5x - 7$ privé du point $A(-1 ; -2)$.

125 Une équation de la parabole est :
$y = a(x - 0)^2 + 0$.
Elle passe par le point (2,5 ; 2) donc :
$2 = a \times 2{,}5^2 = 6{,}25a$, donc $a = \frac{2}{6{,}25} = 0{,}32$.
$\mathscr{P} : y = 0{,}32x^2$
Lorsque $x = 5$, $y = 0{,}32 \times 5^2 = 8$ donc $h' = 8$ cm.

126 $A(a ; 2a^2)$. Une équation de la tangente $\mathscr{T}$ est
$y = f(a) + f'(a)(x - a)$.
Donc $y = 2a^2 + 4a(x - a) \Leftrightarrow 4ax - y - 2a^2 = 0$.
Cette droite est perpendiculaire à $\mathscr{T}$ donc admet pour vecteur normal $(1 ; 4a)$.
Son équation est $x + 4ay + c = 0$ avec c réel.
Comme A est sur cette droite : $a + 8a^3 + c = 0$, donc $c = -a - 8a^3$.
Donc l'équation de cette droite est :
$x + 4ay - a - 8a^3 = 0$.
Cette droite coupe l'axe des ordonnées lorsque $x = 0 \Leftrightarrow 4ay - a - 8a^3 = 0$.
Comme a est non nul $\Leftrightarrow 4y = 1 + 8a^2$
$\Leftrightarrow y = 2a^2 + \frac{1}{4}$
Donc $\Omega\left(0 ;\ 2a^2 + \frac{1}{4}\right)$.
$\Omega A^2 = a^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$ donc $\Omega A = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16}}$.
Or Ω $(0 ; 6r)$ donc $6r = 2a^2 + \frac{1}{4}$ (*)
Et $\Omega B^2 = (4r)^2 = a^2 + \frac{1}{16}$ donc :
$32r^2 = 2a^2 + \frac{1}{8} \Leftrightarrow 32r^2 - 6r + \frac{1}{8} = 0$
$\Leftrightarrow r = \frac{6-\sqrt{20}}{64} \approx 0{,}02$ ou $r = \frac{6+\sqrt{20}}{64} \approx 0{,}16$
Or d'après (*) $6r = 2a^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$ donc $r > \frac{1}{24} \approx 0{,}04$
donc $r = \frac{6+\sqrt{20}}{64}$

127 On cherche les coordonnées des points A, B et C : A(0 ; 0) ; C(0 ; –500) et pour B on résout :
$3x + 5(-0{,}0008x^2) + 2\,500 = 0$
$\Leftrightarrow -0{,}004x^2 + 3x + 2\,500 = 0$
$\Delta = 49$, donc les solutions sont –500 et 1 250.
Deux choix pour B : soit B(–500 ; –200) ou (1 250 ; –1 250) : par symétrie cela n'a pas de conséquence.
On prend ici B(–500 ; –200).
On calcule alors l'aire de ABC.
Aire ABC = BH $\times \frac{AC}{2}$ où H le projeté de B sur (AC)
H(0 ; –200).
Donc Aire ABC = BH $\times \frac{AC}{2} = \frac{500^2}{2} = 125\,000$ m^2
1ha = 100 a = 100 × 100 m^2 = 10 000 m^2
Donc 20 ha = 200 000 m^2 > 125 000 m^2
L'espace semble donc insuffisant ; cela reste cependant une approximation de l'aire du terrain.

CHAPITRE **10**

Probabilités conditionnelles

► *Les exercices* 1 *à* 6 *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 284 et 285 du manuel

1 Probabilités au pays des merveilles

1. a. Les évènements A et N sont des évènements contraires : $N = \overline{A}$.

b.

	A	N	TOTAL
L	**7**	**38 = 45 − 7**	45
$\overline{\mathbf{L}}$	**5 = 12 − 7**	**100 = 138 − 38**	**105 = 150 − 45**
TOTAL	**12**	**138 = 150 − 12**	150

2.a. $N \cap L$ est l'évènement : « La personne choisie n'a pas son anniversaire en janvier et a lu le livre. »
$N \cup L$ est l'évènement : « La personne choisie n'a pas son anniversaire en janvier ou a lu le livre. »

b. $P(N \cap L) = \frac{38}{150} = \frac{19}{75}$

et $P(N \cup L) = P(N) + P(L) - P(N \cap L) = \frac{138}{150} + \frac{45}{150} - \frac{38}{150} = \frac{145}{150} = \frac{29}{30}$.

3. a. On sait que Marianne est née en novembre, donc l'ensemble de personnes de référence est désormais les 138 personnes non nées en janvier.
La probabilité que Marianne ait lu le livre est alors : $\frac{38}{138} = \frac{19}{69}$.

b. $P_N(L) = \frac{P(N \cap L)}{P(N)} = \frac{\frac{38}{150}}{\frac{138}{150}} = \frac{38}{150} \times \frac{150}{138} = \frac{38}{138} = \frac{19}{69}$.

On remarque que l'on retrouve le résultat de la question précédente.

c. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), le mois de naissance de Renée a été modifié : c'est janvier et non novembre. D'où le corrigé ci-dessous.*

On sait que Renée a lu le livre, donc l'ensemble de personnes de référence est désormais les 45 personnes qui ont lu le livre. La probabilité que Renée soit née en janvier est alors :

$P_L(A) = \frac{P(A \cap L)}{P(L)} = \frac{\frac{7}{150}}{\frac{45}{150}} = \frac{7}{150} \times \frac{150}{45} = \frac{7}{45}$.

4. Lewis Carroll (1832-1898), de son vrai nom Charles Lutwidge Dodgson était un romancier et professeur de mathématiques britannique. Son livre le plus célèbre est *Les Aventures d'Alice au Pays des merveilles*, écrit en 1865, suivi de *L'autre côté du miroir* en 1871. En mathématiques, il a travaillé sur la géométrie, l'algèbre et la logique, et a écrit des recueils d'énigmes comme *Pillow Problems* (problème sur l'oreiller) en 1893.
Le diagramme de Carroll est un tableau qui classe de manière binaire des éléments suivant qu'ils possèdent ou non une propriété : le tableau de la question **1.b.** en est un exemple à l'ordre 2.

2 Partition et danse

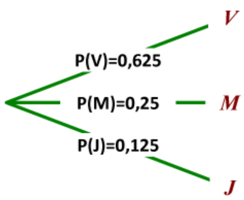
1.a. Puisqu'un élève ne suit pas de cours de niveaux différents pour le même style de danse, les évènements D, I et A sont disjoints (ou incompatibles) deux à deux.

b. On suppose qu'il y a des élèves inscrits dans tous les cours, donc il y a au moins un élève qui suit un cours de chaque niveau et donc les événements D, I et A ne sont pas vides.
Les seuls niveaux possibles sont « débutant », « intermédiaire » et « avancé », donc avec les évènements D, I, et A balayant l'ensemble des évènements possibles, autrement dit : $D \cup I \cup A = \Omega$.

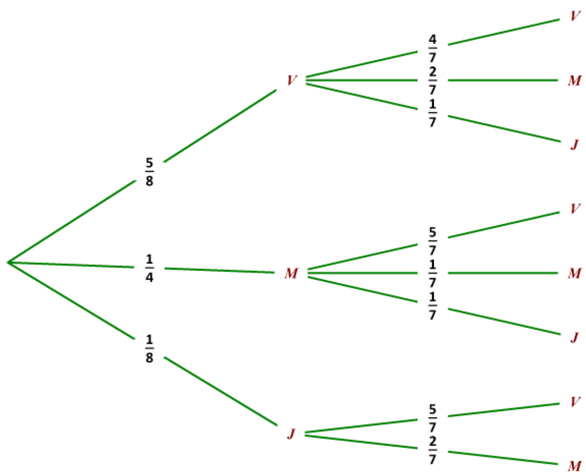
2. a. C ∩ D est l'évènement : « l'élève suit un cours de classique de niveau débutant ».
C ∩ I est l'évènement : « l'élève suit un cours de classique de niveau intermédiaire ».
C ∩ A est l'évènement : « l'élève suit un cours de classique de niveau avancé ».
Comme on suppose qu'un élève ne suit pas de cours de niveaux différents pour le même style de danse, les évènements C ∩ D, C ∩ I et C ∩ A sont disjoints (ou incompatibles) deux à deux.
b. L'ensemble des élèves qui suivent un cours de classique est la réunion des élèves suivant un cours de classique selon leur niveau débutant, intermédiaire ou avancé (car il n'y a que ces trois niveaux) ; cela se traduit en notation mathématique par : $(C \cap D) \cup (C \cap I) \cup (C \cap A) = C$.
c. Alors : $P(C) = P((C \cap D) \cup (C \cap I) \cup (C \cap A)) = P(C \cap D) + P(C \cap I) + P(C \cap A)$ car les évènements C ∩ D, C ∩ I et C ∩ A sont disjoints.

3 Des arbres à choux-fleurs

1. $P(V) = \frac{5}{8} = 0{,}625$; $P(M) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $P(V) = \frac{1}{8} = 0{,}125$.
2.



3.a. Si un prend un chou-fleur sans le remettre dans le cageot, il n'est reste plus que quatre sur un nouveau total de sept : $P_V(V) = \frac{4}{7}$. De même : $P_V(M) = \frac{2}{7}$ et $P_V(J) = \frac{1}{7}$.
b. On remarque que si on prend un chou-fleur sans le remettre dans le cageot, il n'y en aura plus : au lieu de tracer une branche pondérée par 0, on peut ne pas la tracer.



4 Jouons à « pile » ou « face »

a. Comme la pièce est parfaitement équilibrée, il y a équiprobabilité et donc la probabilité d'avoir "pile " est $\frac{1}{2}$ et la probabilité d'avoir "face" est $\frac{1}{2}$.
Les lancers sont indépendants, donc la probabilité d'avoir n fois "pile" est égale au produit de n facteurs $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2^n}$; de même la probabilité d'avoir n fois "face" est aussi $\frac{1}{2^n}$.
L'évènement $\overline{A}$ contraire de A est : « obtenir n fois "pile" ou obtenir n fois "face" ».
Les événements « obtenir n fois "pile"» et « obtenir n fois "face "» sont disjoints et alors :
$P(\overline{A}) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. D'où : $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.

Autre méthode : Le nombre d'issues total est 2^n, les évènements « obtenir n fois "pile" » et « obtenir n fois "face"» sont des évènements élémentaires et donc ont pour probabilité $\frac{1}{2^n}$.

• Le nombre d'issues total est 2^n.

L'évènement « ne pas obtenir "pile" » équivaut à « n'obtenir que "face" » ; c'est un évènement élémentaire de probabilité $\frac{1}{2^n}$. L'évènement « obtenir exactement une fois "pile"» contient n issues, car il y a n choix possibles pour le seul lancer qui donne "pile", et donc sa probabilité est $\frac{n}{2^n}$.

Alors, comme l'événement B est la réunion disjointe des évènements « ne pas obtenir "pile" » et « obtenir exactement une fois "pile"», on obtient : $P(B) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}$.

• L'évènement $A \cap B$ est « obtenir n fois "pile" ou obtenir n fois "face" ou obtenir "pile" une fois au maximum » équivaut à « obtenir exactement une fois "pile" », dont la probabilité a été calculée précédemment : $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$.

b. *Remarque :* il n'est pas possible de déterminer, par résolution d'équation, n tel que :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Leftrightarrow \frac{n}{2^n} = (1 - \frac{1}{2^{n-1}}) \times \frac{n+1}{2^n}$.

C'est pour cette raison qu'on va créer une feuille de calcul sur tableur pour calculer $P(A \cap B)$ et $P(A) \times P(B)$ pour différentes valeurs de n et conjecturer pour lesquelles on a égalité.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

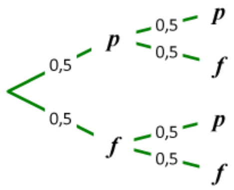
	A	B	C	D	E	F
1	***n***	**P(A)**	**P(B)**	**P(A∩B)**	**P(A)×P(B)**	**Test**
2	2	0,5	0,75	0,5	0,375	non
3	3	0,75	0,5	0,375	0,375	oui
4	4	0,875	0,3125	0,25	0,2734375	non
5	5	0,9375	0,1875	0,15625	0,17578125	non
6	6	0,96875	0,109375	0,09375	0,105957031	non
7	7	0,984375	0,0625	0,0546875	0,061523438	non
8	8	0,9921875	0,03515625	0,03125	0,034881592	non
9	9	0,99609375	0,01953125	0,017578125	0,019454956	non
10	10	0,998046875	0,010742188	0,009765625	0,010721207	non
11	11	0,999023438	0,005859375	0,005371094	0,005853653	non
12	12	0,999511719	0,003173828	0,002929688	0,003172278	non
13	13	0,999755859	0,001708984	0,001586914	0,001708567	non
14	14	0,99987793	0,000915527	0,000854492	0,000915416	non
15	15	0,999938965	0,000488281	0,000457764	0,000488251	non
16	16	0,999969482	0,000259399	0,000244141	0,000259391	non
17	17	0,999984741	0,000137329	0,0001297	0,000137327	non
18	18	0,999992371	7,24792E-05	6,86646E-05	7,24787E-05	non
19	19	0,999996185	3,8147E-05	3,62396E-05	3,81468E-05	non
20	20	0,999998093	2,00272E-05	1,90735E-05	2,00271E-05	non
21	21	0,999999046	1,04904E-05	1,00136E-05	1,04904E-05	non
22	22	0,999999523	5,48363E-06	5,24521E-06	5,48362E-06	non
23	23	0,999999762	2,86102E-06	2,74181E-06	2,86102E-06	non
24	24	0,999999881	1,49012E-06	1,43051E-06	1,49012E-06	non
25	25	0,99999994	7,7486E-07	7,45058E-07	7,7486E-07	non
26	26	0,99999997	4,02331E-07	3,8743E-07	4,02331E-07	non
27	27	0,999999985	2,08616E-07	2,01166E-07	2,08616E-07	non
28	28	0,999999993	1,08033E-07	1,04308E-07	1,08033E-07	non
29	29	0,999999996	5,58794E-08	5,40167E-08	5,58794E-08	non
30	30	0,999999998	2,8871E-08	2,79397E-08	2,8871E-08	non

D'après le tableau précédent, il semble que la seule valeur de n pour laquelle on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ est 3.

Différenciation : Version guidée

1. a. On suppose : $n = 2$.

On note p, l'évènement « obtenir "pile" » et f, l'évènement « obtenir "face" ».



Nombre total d'issues : $2^2 = 4$.

A = {(p, f) ; (f, p)} donc $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. B = {($p$, f) ; (f, p) ; (f, f) } donc $P(B) = \frac{3}{4}$.

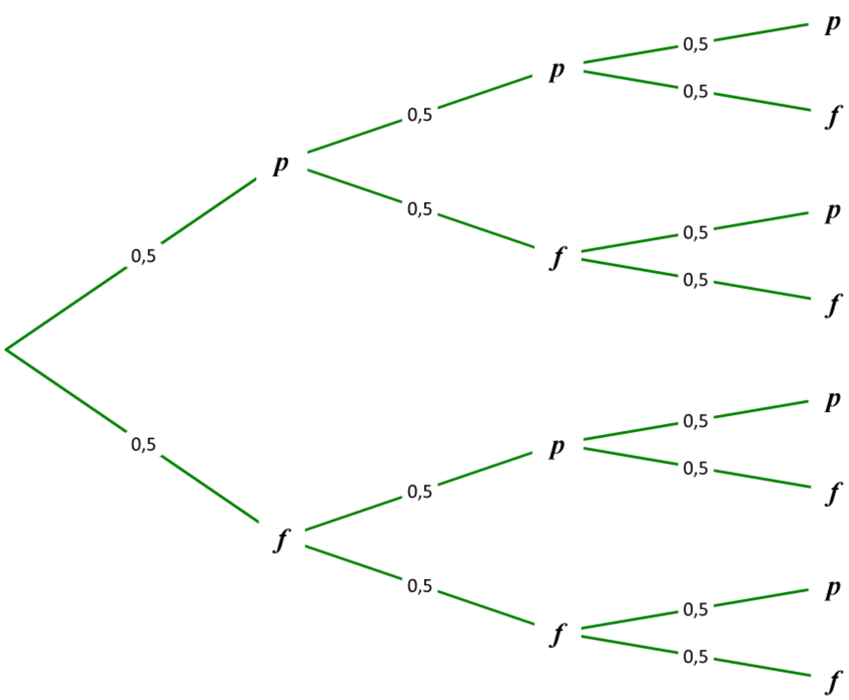
$A \cap B = A$ donc $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

b. $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \neq P(A \cap B)$.

c. $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, donc les évènements A et B ne sont pas indépendants et donc $P_A(B) \neq P(B)$.

2. On suppose : $n = 3$.

a.



b. Nombre total d'issues : $2^3 = 8$.

A = {(p, f, p) ; (p, f, f) ; (f, p, f) ; (f, p, p) ; (f, f, p) ; (p, p, f) } donc $P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

B = {(p, f, f) ; (f, f, p) ; (f, p, f) ; (f, f, f) } donc $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

$A \cap B$ = {(p, f, f) ; (f, f, p) ; (f, p, f)} donc $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$.

c. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$.

d. $P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$, donc les évènements A et B sont indépendants et donc $P_A(B) = P(B)$.

3. On fixe n, un nombre entier quelconque, supérieur ou égal à 2.

a. Le nombre total d'issues est 2^n.

b. $P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$, $P(B) = \frac{n+1}{2^n}$ et $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$. *Voir correction de la version non guidée.*

c. Conjecture à l'aide d'un tableur : *voir correction de la version non guidée*.

Application

p. 289 à 293 du manuel

Savoir-faire 1

Calculer une probabilité conditionnelle

7 **1.**

	Électrifié	Non électrifié	Total
« Cabe »	**7**	31 – 7 = **24**	**31**
« Race »	**9**	44 – 9 = **35**	75 – 31 = **44**
Total	9 + 7 = **16**	75 – 16 = **59**	**75**

2.a. La probabilité qu'elle concerne un vélo « Cabe » non électrifié est égale à $\dfrac{24}{75}$.

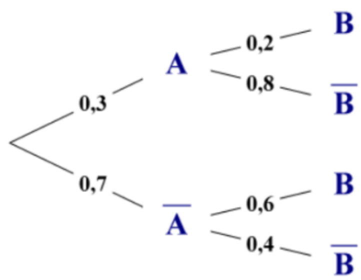
b. On sait que la facture concerne un vélo « Race ».
La probabilité qu'il soit électrifié est égale à $\dfrac{35}{44}$.

c. On sait que la facture concerne un vélo non électrifié. La probabilité que ce soit un « Race » est égale à $\dfrac{35}{59}$.

Savoir-faire 2

Illustrer une situation à l'aide d'un arbre pondéré

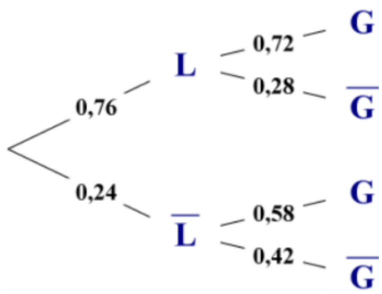
8 **a.**



b. $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}7 \times 0{,}6 = 0{,}42$.

9 **a.** $P(L) = 0{,}76$, $P_L(G) = 0{,}72$ et $P_{\overline{L}}(G) = 0{,}58$.

b.



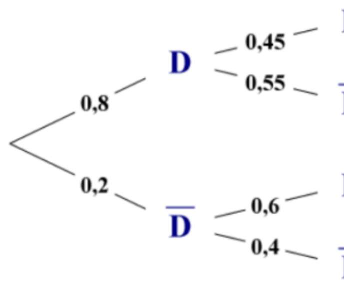
c. $G \cap L$ signifie « le client utilise une pompe en libre-service et achète du gazole ».
$P(G \cap L) = P(L) \times P_L(G) = 0{,}76 \times 0{,}72 = 0{,}5472$.

d. $P(\overline{L} \cap \overline{G}) = P(\overline{L}) \times P_{\overline{L}}(\overline{G})$
$= 0{,}24 \times 0{,}42 = 0{,}1008$.
La probabilité que le client ne se serve pas à une pompe en libre-service et ne prenne pas du gazole est 0,1008.

Savoir-faire 3

Utiliser la formule des probabilités totales

10 **1.a.**



b. $P(D \cap F) = 0{,}8 \times 0{,}45 = 0{,}36$
et $P(\overline{D} \cap F) = 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}12$.
D et $\overline{D}$ forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :
$P(F) = P(D \cap F) + P(\overline{D} \cap F)$
$= 0{,}36 + 0{,}12 = 0{,}48$.

2. $P_F(\overline{D}) = \dfrac{P(\overline{D} \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}48} = \dfrac{1}{6}$.

Sachant que l'élève choisi est une fille, la probabilité qu'elle ne déjeune pas à la cantine est $\dfrac{1}{6}$.

Savoir-faire 4

Étudier l'indépendance de deux évènements

11 **a.** A = {2,4,6,8,10,12} ; B = {5,10} ;
C = {3,6,9,12}.
$A \cap B$ signifie « obtenir un nombre pair et un multiple de 5 » ; $A \cap B = \{10\}$.
$A \cap C$ signifie « obtenir un nombre pair et un multiple de 3 » ; $A \cap C = \{6 ; 12\}$.

b. $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{6}$ et :

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{12} = P(A) \times P(B)$, donc A et B sont indépendants.

$P(A) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$ et :

$P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(C)$, donc A et C sont indépendants.

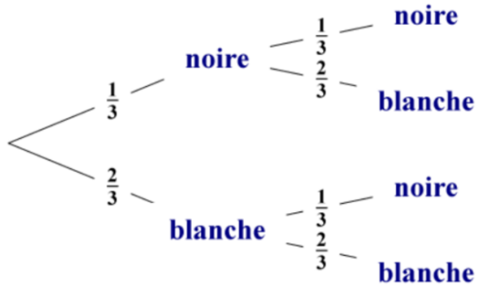
c. $B \cap C = \varnothing$ et $P(B \cap C) = 0 \neq P(B) \times P(C)$ donc B et C ne sont pas indépendants (mais on peut remarquer qu'ils sont disjoints).

SAVOIR-FAIRE 5

Étudier une répétition de deux épreuves indépendantes

12 a. Le résultat du premier lancer n'influe pas sur le résultat du deuxième lancer, donc les deux lancers sont indépendants.

b.



c. P(« obtenir deux faces noires ») = $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

d. P(« obtenir au moins une face blanche »)
= 1 – P(« obtenir deux faces noires »)
$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$.

► *Les exercices* **13** *à* **23** *de la rubrique «* **Et faire le point** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 296 du manuel

24 a. Stratégie 1 : Je pense à la définition d'une probabilité conditionnelle :

$P_A(C) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$.

b. Stratégie 2 : Je pense à une propriété d'une probabilité conditionnelle :
$P(B \cap A) = P_A(B) \times P(A) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

c. Stratégie 2 : Je pense à une propriété d'une probabilité conditionnelle :
$P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0,6 = 0,4$.

d. Stratégie 2 : Je pense à une propriété d'une probabilité conditionnelle ;
$P_A(\overline{C}) = 1 - P_A(C) = 1 - 0,75 = 0,25$.

25 a. Stratégie 1 : J'utilise la règle du produit :
$P(A_1 \cap T) = 0,25 \times 0,2 = 0,05$.

b. Stratégie 2 : J'utilise la règle de la somme :
$P(A_2) = 1 - (0,25 + 0,2) = 0,55$.

c. Stratégie 2 : J'utilise la règle de la somme :
$P_{A_3}(T) = 1 - 0,2 = 0,8$.

d. Stratégie 3 : J'utilise la formule des probabilités totale, $\{A_1, A_2, A_3\}$ étant une partition de l'univers :
$P(T) = P(T \cap A_1) + P(T \cap A_2) + P(T \cap A_3)$
$P(T) = 0,25 \times 0,2 + 0,55 \times 0,4 + 0,2 \times 0,8 = 0,43$.

e. Stratégie 2 : J'utilise la règle de la somme ;
$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,43 = 0,57$.

f. Stratégie 1 : J'utilise la règle du produit ;
$P(A_2 \cap \overline{T}) = 0,55 \times 0,6 = 0,33$.

26 On complète le tableau.

	A	$\overline{A}$	TOTAL
B	**0,18**	**0,42**	0,18 + 0,42 = **0,6**
$\overline{\mathbf{B}}$	0,4 – 0,18 = **0,22**	0,6 – 0,42 = **0,18**	1 – 0,6 = **0,4**
TOTAL	**0,4**	1 – 0,4 = **0,6**	**1**

a. $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0,6$.

b. $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,22$.

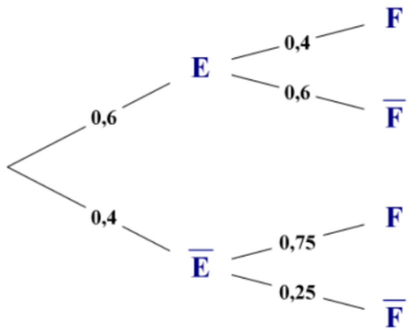
c. $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$
$= 1 - (P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}))$
$= 1 - (0,18 + 0,42) = 1 - 0,6 = 0,4$.

d. $P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,18}{0,4} = 0,45$.

e. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,6} = 0,3$.

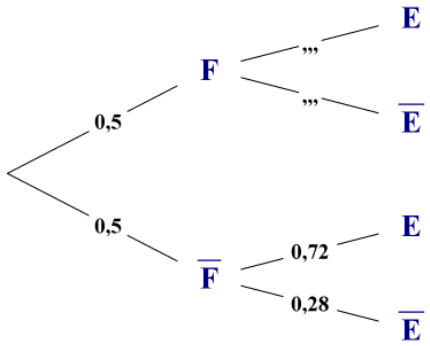
f. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= 0,4 + 0,6 - 0,18 = 0,82$.

27 **a.**



Avec la règle du produit :
$P(E \cap F) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

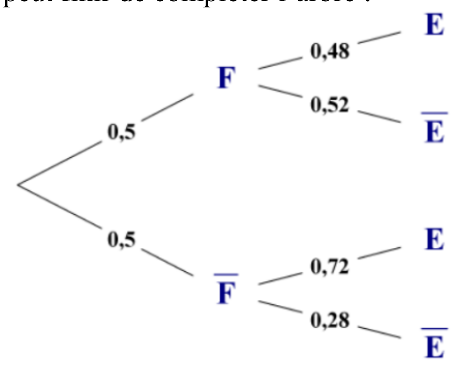
b. Dans un premier temps, on peut compléter partiellement l'arbre :



D'après la formule des probabilités totales :
$P(E \cap F) = P(E) - P(E \cap \overline{F})$.
Or, d'après la règle du produit :
$P(E \cap \overline{F}) = 0,5 \times 0,72 = 0,36$.
D'où : $P(E \cap F) = 0,6 - 0,36 = 0,24$.

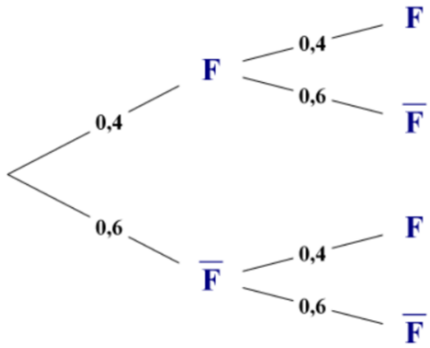
Et alors : $P_F(E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0,24}{0,5} = 0,48$.

Et on peut finir de compléter l'arbre :



28 On pourra d'abord remarquer qu'il y a indépendance entre les deux lancers.

a.



b.

		1^{er} lancer		
		F	$\overline{F}$	Total
2^e lancer	F	0,4 × 0,4 = **0,16**	0,6 × 0,4 = **0,24**	**0,4**
	$\overline{F}$	0,4 × 0,6 = **0,24**	0,6 × 0,6 = **0,36**	**0,6**
	Total	**0,4**	**0,6**	**1**

► *Les exercices* **29** *à* **36** *de la rubrique « **Les incontournables** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 298 à 303 du manuel

Objectif 1

Définir une probabilité conditionnelle

37 $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,15}{0,4} = 0,375 = \dfrac{3}{8}$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,15}{0,25} = 0,6$.

a. Faux. **b.** Vrai.
c. Vrai. **d.** Faux.

38 **a.** Faux. **b.** Vrai.
c. Faux (sauf si A et B indépendants).
d. Vrai.

39 $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$
$= 0,18 \times 0,22$
$= 0,0396 = \dfrac{99}{2500}$;

Réponse **c**.

40 Réponse **b** car $P_A(B) = \dfrac{0,12}{0,22} \approx 0,55$.

41 Réponse **c** car $P_B(A) = \dfrac{0,12}{0,4} = 0,3$.

42 Réponse **c**.

43 Réponse **c**.

44 **a.** $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$= 0,3 + 0,4 - 0,6 = 0,1.$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(B \cap A) = 0,4 - 0,1 = 0,3.$

b. $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0,1}{0,3} = \dfrac{1}{3}$.

$P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,1}{0,4} = \dfrac{1}{4}$.

$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

$P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \dfrac{0,3}{1-0,3} = \dfrac{3}{7}$.

45 **a.** $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

$= 0,2 \times 0,64 = 0,128$

	A	$\overline{\mathbf{A}}$	**TOTAL**
B	**0,128**	0,192	**0,32**
$\overline{\mathbf{B}}$	0,512	0,168	0,68
TOTAL	**0,64**	0,36	**1**

b. $P_B(A) = \dfrac{0,128}{0,32} = 0,4$ et

$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 0,6.$

46 **a.** $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$

donc $P(A) = \dfrac{0,74}{0,47} \approx 1,57 > 1$, ce qui est impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1.

b. et **c.** $P(A)$ existe si $0 \leqslant P(A \cap B) \leqslant P_A(B) \leqslant 1$.

On peut modifier l'énoncé en choisissant pour $P(A \cap B)$ n'importe quelle valeur entre 0 et 0,47, ou en choisissant pour $P_A(B)$ n'importe quelle valeur entre 0,74 et 1.

47 **1.** $P_A(B) = \dfrac{0,4}{0,7} = \dfrac{4}{7}$ et $P_B(A) = \dfrac{0,4}{0,8} = 0,5$.

2. a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 1,1 > 1$, ce qui est impossible car une probabilité est comprise entre 0 et 1.

b. Comme il faut :

$0 \leqslant P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant 1$,

on peut choisir $1 \geqslant P(A \cap B) \geqslant 0,5$ ou bien

$0 \leqslant P(A) \leqslant 0,6$ ou bien $0 \leqslant P(B) \leqslant 0,7$.

48 **a.** $P(I \cap U)$ est la probabilité que la fille ait participé à l'initiation et soit inscrite à l'UNSS rugby. $P_I(U)$ est la probabilité que la fille soit inscrite à l'UNSS rugby sachant qu'elle a participé à l'initiation. $P_{\overline{U}}(\overline{I})$ est la probabilité que la fille n'ait pas participé à l'initiation sachant qu'elle n'est pas inscrite à l'UNSS rugby.

b. « La fille est inscrite à l'UNSS rugby et n'a pas participé à l'initiation » se note $U \cap \overline{I}$.

49 Dans les deux cas, Lorelei calcule $P(B_1)$, confond « B_2 sachant B_1» et « $B_2 \cap B_1$ », puis confond « B_2 sachant $\overline{B_1}$ » et « $B_2 \cap \overline{B_1}$ »,

Susana calcule correctement $P_{B_1}(B_2)$ mais l'interprète mal. Le calcul de $P_{\overline{B_1}}(B_2)$ est faux mais son interprétation est correcte.

Correction : $P_{B_1}(B_2) = \dfrac{1}{2}$ est la probabilité que la 2e boule tirée soit blanche sachant que la 1re est blanche. $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \dfrac{3}{4}$ est la probabilité que la 2e boule tirée soit blanche sachant que la 1re n'est pas blanche.

50 **a.** $P(E) = 73\ \%$, $P(T) = 66\ \%$ et $P_T(E) = 75\ \%$.

b. $P(E \cap T) = P_T(E) \times P(T) = 49,5\ \%$

	E	$\overline{\mathbf{E}}$	**TOTAL**
T	**49,5**	16,5	**66**
$\overline{\mathbf{T}}$	23,5	10,5	34
TOTAL	**73**	27	**100**

c. $P_E(\overline{T}) = \dfrac{23,5}{73} = \dfrac{47}{146}$. La probabilité que Jeanne ne fasse pas du tir à l'arc, sachant qu'elle est inscrite à l'équitation est $\dfrac{47}{146}$.

d. $P_{\overline{E}}(T) = \dfrac{16,5}{27} = \dfrac{11}{18}$. La probabilité que Riadh fasse du tir à l'arc, sachant qu'il n'est pas inscrit à l'équitation est $\dfrac{11}{18}$.

51 **1.**

	L	$\overline{\text{L}}$	TOTAL
F	**0,75 × 52= 39**	40 – 39= 1	80 – 40= 40
$\overline{\text{F}}$	52 – 39= 13	40 – 13= 27	$\frac{80}{2}$ **= 40**
TOTAL	**0,65 × 80= 52**	80 – 52= 28	**80**

2. a. $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 0{,}5$. La probabilité que ce chapeau soit orné de fleurs est 0,5.

$P_L(F) = \dfrac{39}{52} = 0{,}75$.

La probabilité que ce chapeau soit orné de fleurs, sachant qu'il est en paille, est 0,75.

b. $P(\overline{L} \cap \overline{F}) = \dfrac{27}{80} = 0{,}3375$.

La probabilité que ce chapeau ne soit pas en paille et ne comporte pas de fleur est 0,3375.

c. $P_F(L) = \dfrac{39}{40} = 0{,}975$.

La probabilité que ce chapeau soit en paille sachant qu'il est orné de fleurs est 0,975.

52 **a.** $P(S) = \dfrac{1}{3}$, $P_S(R) = \dfrac{2}{5}$ et $P_{\overline{S}}(R) = \dfrac{1}{3}$.

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
D ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 6
Si D ⩽ 2 alors
    U ← un nombre entieraléatoire entre 1 et 5
    Si U ⩽ 2 alors Afficher"gagné"
    Sinon Afficher "perdu"
    Fin Si
Sinon
    U ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 3
    Si  U ⩽ 1 alors Afficher "gagné"
    Sinon Afficher"perdu"
    Fin Si
Fin Si
```

c.

```
C ← 0
Saisir le nombre de parties, n
Pour I allant de 1 à n faire
    D ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 6
    Si D ⩽ 2 alors
        U ← un nombre entier aléatoire entre1 et 5
        Si U ⩽ 2 alors C ← C + 1
        Fin Si
    Sinon
        U ← un nombre entier aléatoire entre 1 et 3
        Si U ⩽ 1 alors C ← C + 1
        Fin Si
    Fin Si
Fin Pour
```

OBJECTIF 2

Utiliser la formule des probabilités totales, un arbre pondéré

53 {B, V, R} est une partition de l'univers.

a. Faux.
b. Vrai.
c. Vrai.
d. Vrai.

54 On remarque que $P(A) + P(B) = 1$.

a. Vrai.
b. Vrai.
c. Vrai.
d. Vrai.

55 $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$

$= P_A(B) \times P(A) + P(\overline{A} \cap B)$

$= 0{,}4 \times 0{,}7 + 0{,}5 = 0{,}78$.

Réponse **c**.

56 Réponses **a** et **c**.

57 Réponses **b** et **c**.

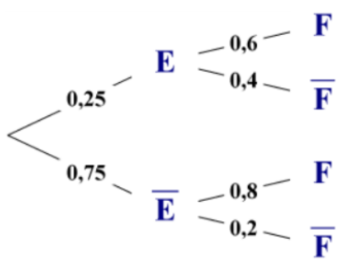
58 Réponses **b**, **c et d**.

59 Réponses **b** et **c**, car

$P(S) = P(S \cap R) + P(S \cap \overline{R})$

$= P_R(S) \times P(R) + P_{\overline{R}}(S) \times P(\overline{R})$

60 **a.**



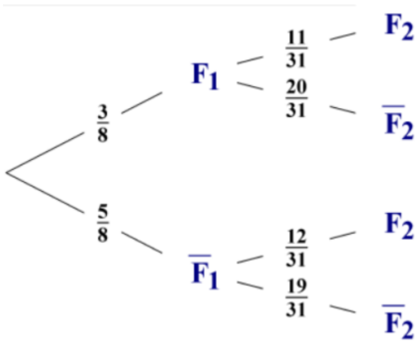
b. $P(F \cap E) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$ et $P(F \cap \overline{E})$

$= 0{,}75 \times 0{,}8 = 0{,}6$.

c. E et $\overline{E}$ forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :
$P(F) = P(F \cap E) + P(F \cap \overline{E}) = 0{,}75$.

d. $P_F(E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(F)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}75} = 0{,}2$.

61 **a.**



b. $P(F_1 \cap F_2) = \dfrac{3}{8} \times \dfrac{11}{31} = \dfrac{33}{248}$.

La probabilité que les deux cartes extraites soient des figures est $\dfrac{33}{248}$.

c. F_1 et $\overline{F_1}$ forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :

$P(F_2) = P(F_2 \cap F_1) + P(F_2 \cap \overline{F_1})$

$= \dfrac{33}{248} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{12}{31} = 0{,}375.$

La probabilité que la deuxième carte extraite soit une figure est bien égale à 0,375.

d. $P_{F_2}(F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap F_2)}{P(F_2)} = \dfrac{\frac{33}{248}}{0{,}375} = \dfrac{11}{31}$.

La probabilité que la première carte extraite soit une figure, sachant que la seconde est une figure, est $\dfrac{11}{31}$.

62 **a.** La probabilité que l'élève soit une fille est égale à $1 - 0{,}46 = 0{,}54$.

b. La probabilité que l'élève soit une fille et déjeune à la cantine est égale à :

$0{,}74 \times 0{,}54 = 0{,}3996$.

c. La probabilité que l'élève déjeune à la cantine est égale à $0{,}3996 + 0{,}46 \times 0{,}82 = 0{,}7768$.

d. Sachant que l'élève déjeune à la cantine, la probabilité que ce soit une fille est égale à :

$\dfrac{0{,}3996}{0{,}7768} = \dfrac{999}{1942} \approx 0{,}51$.

63 Les événements A, B et C forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(S \cap A) + P(S \cap B) + P(S \cap C)$

$= 0{,}25 \times 0{,}6 + 0{,}35 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}63.$

64 **1.** Un énoncé possible est :

« Un artisan produit des galettes. 40 % des galettes sont à la pomme et un quart d'entre elles contiennent une fève. 20 % des autres galettes contiennent une fève. On prend au hasard une galette dans la production.

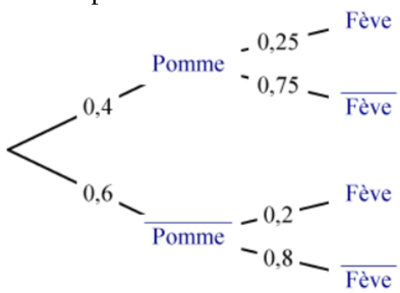
a. Représenter la situation par un arbre pondéré.

b. Déterminer la probabilité que la galette soit à la pomme et contienne une fève.

c. Calculer la probabilité que la galette contienne une fève.

d. Sachant que la galette contient une fève, quelle est la probabilité que la galette soit à la pomme ? »

2. On peut compléter l'arbre :



Les réponses peuvent être détaillées :

P(« Pomme » et « Fève ») $= 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1$.

Pour calculer P(« Fève »), on utilise la formule des probabilités totales :

P(« Fève ») $= 0{,}4 \times 0{,}25 + 0{,}6 \times 0{,}2$

$= 0{,}1 + 0{,}12 = 0{,}22$.

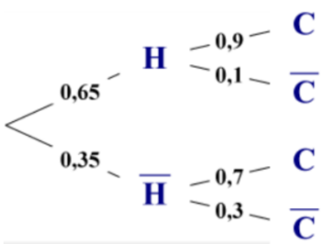
$P_{\text{« Fève »}}$(« Pomme »)

$= \dfrac{P(\text{"Pomme" et "Fève"})}{P(\text{"Fève"})} = \dfrac{0{,}1}{0{,}22} = \dfrac{5}{11}$.

65 **a.** $C \cap H$ est l'évènement « le salarié travaille à temps complet et est un homme » ;

$P(C \cap H) = 0{,}9 \times 0{,}65 = 0{,}585$.

b.



c. H et $\overline{H}$ forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales :

$P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \overline{H})$

$= 0{,}585 + 0{,}35 \times 0{,}7 = 0{,}83$.

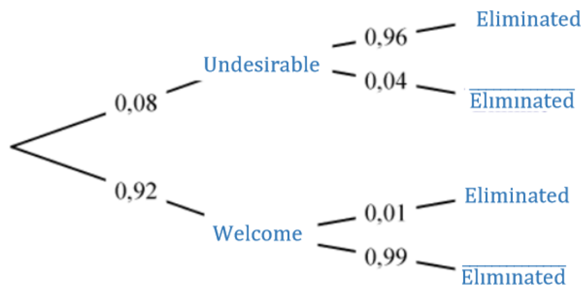
d. $P_C(\overline{H}) = \dfrac{P(\overline{H} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}245}{0{,}83} = \dfrac{49}{166} \approx 0{,}295$.

e. $P_{\overline{C}}(H) = \dfrac{P(\overline{C} \cap H)}{P(\overline{C})} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}65}{1 - 0{,}83} = \dfrac{0{,}065}{0{,}17}$

$= \dfrac{13}{34} \approx 0{,}382.$

Sachant que le nom choisi est celui d'un salarié à temps partiel, la probabilité que ce soit celui d'un homme est environ 0,382.

66 a.



b. P("Welcome" and "Eliminated") = 0.92×0.01
= 0.0092

The probability of the message being accepted and being eliminated is 0.0092.

c. P("Eliminated") = 0.08 × 0.96 + 0.0092
= 0.086.

The probability of the message being eliminated is 0.086.

d. $P_{\text{"Eliminated"}}(\text{"Welcome"}) = \dfrac{0{,}0092}{0{,}086} = \dfrac{23}{215}$

$\approx 0.107.$

If the message is eliminated, the probability that it is welcome is 0.107.

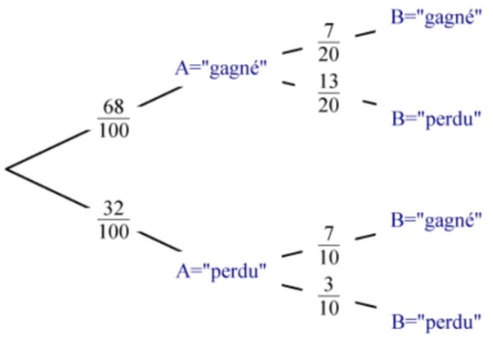
67 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1.a. P(A = "gagné") = 0,68.

b. P(A = "gagné" et B = "gagné") = $0{,}68 \times \dfrac{7}{20}$

= 0,68 × 0,35 = 0,238.

2. a.

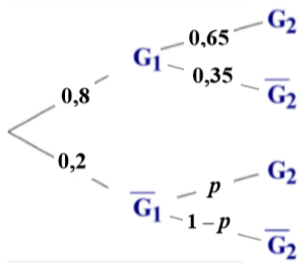


b. D'après la formule des probabilités totales,
P(B = "gagné") = 0,238 + 0,32 × 0,7 = 0,462.

3. $P_{B = \text{"gagné"}}(A = \text{"gagné"}) = \dfrac{0{,}238}{0{,}462} = \dfrac{17}{33}$

$\approx 0{,}515.$

68 a

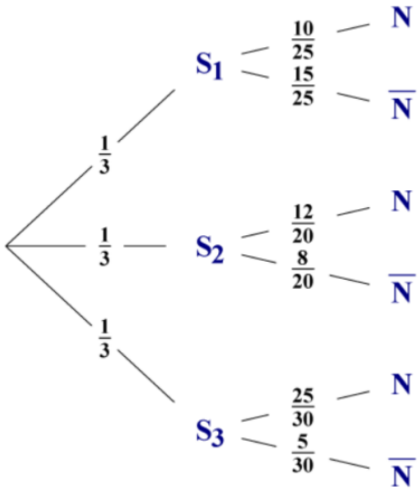


b. P(G_2) = 0,8 × 0,65 + 0,2p = 0,52 + 0,2p.
Comme P(G_2) = 0,6 , 0,2p = 0,08 et donc p = 0,4.

c. $P(G_1 \cap \overline{G_2}) + P(\overline{G_1} \cap G_2)$
= 0,8 × 0,35 + 0,2 × 0,4 = 0,36.

La probabilité que Paula ne réussisse qu'un seul des deux combats est 0,36.

69 a. On note N l'événement : la balle est neuve.



b. $P(N \cap S_2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{12}{20} = 0{,}2.$

La probabilité que la balle soit neuve et prise dans le seau S_2 est 0,2.

c. On applique la formule des probabilités totales :
$P(N) = P(N \cap S_1) + P(N \cap S_2) + P(N \cap S_3)$

$= \dfrac{1}{3} \times \dfrac{10}{25} + 0{,}2 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{25}{30} = \dfrac{11}{18}.$

La probabilité que la balle soit neuve est bien égale à $\dfrac{11}{18}$.

d. $P_N(S_3) = \dfrac{P(S_3 \cap N)}{P(N)} = \dfrac{25}{90} \times \dfrac{18}{11} = \dfrac{5}{11} \approx 0{,}455$.

Sachant que la balle prélevée est neuve, la probabilité qu'elle provienne du seau S_3 est environ 0,455.

OBJECTIF 3
Caractériser l'indépendance

70 **a.** Vrai, car :

$P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1 = P(A \cap B)$.

b. Faux, car $P(A) \times P(C) = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125 \neq P(A \cap B)$

c. Vrai,
car $P(B) \times P(C) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2 = P(B \cap C)$.

71 Aet B sont indépendants, donc :

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}08$.
Réponses **b** et **d**.

72 $P(A) = P_B(A)$, donc A et B sont indépendants et alors : $P(B) = P_A(B)$ et
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$.

a. Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.

73 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
$= 0{,}2 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}1$.
Alors $P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1 = P(A \cap B)$, et donc A et B sont indépendants : $P_A(B) = P(B)$.

a. Vrai. **b.** Faux.
c. Vrai. **d.** Faux.

74 $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$; $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;
$B = \{3, 6, 9\}$. $A \cap B = \{6\}$

$P(A) = \dfrac{5}{10} = 0{,}5$. $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$.

$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}15 \neq P(A \cap B)$.

a. Vrai. **b.** Vrai. **c.** Faux.

75 Le résultat du premier lancer n'influe pas celui du deuxième, donc les deux lancers sont indépendants et la probabilité d'obtenir deux fois de suite le même résultat est alors $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$.

a. Vrai. **b.** Faux. **c.** Faux.

76 **a.** $P(A) = \dfrac{6}{13}$, $P(B) = \dfrac{2}{13}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{13}$.

$P(A) \times P(B) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{2}{13} = \dfrac{12}{169} \neq P(A \cap B)$,

donc A et B ne sont pas indépendants.

b. $P(A) = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$,

$P(A \cap B) = \dfrac{1}{12}$.

$P(A) \times P(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12} = P(A \cap B)$, donc A et B sont indépendants.

77 **a.** $P(T) = \dfrac{1}{4}$, $P(A) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$, $P(F) = \dfrac{3}{8}$.

b. $T \cap A$ signifie « obtenir l'as de trèfle » ;
$A \cap F$ signifie « obtenir un as et une figure », ce qui est impossible donc $A \cap F = \emptyset$ et $T \cap F$ signifie « obtenir une figure en trèfle ».

c. $P(T \cap A) = \dfrac{1}{32} = P(T) \times P(A)$, donc T et A sont indépendants.

d. $P(A \cap F) = 0 \neq P(A) \times P(F)$, donc A et F ne sont pas indépendants.

e. $P(T \cap F) = \dfrac{3}{32} = P(T) \times P(F)$, donc T et F sont indépendants.

78 $P(B_1) = \dfrac{25}{60} = \dfrac{5}{12}$.

a. Pour calculer $P(B_2)$, on réalise un arbre et on utilise la formule des probabilités totales :

$P(B_2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{24}{59} + \dfrac{7}{12} \times \dfrac{25}{59} = \dfrac{295}{708} = \dfrac{5}{12}$.

$P(B_1) \times P(B_2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12} = \dfrac{25}{144}$.

$P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{24}{59} = \dfrac{10}{59} \neq P(B_1) \times P(B_2)$,

donc B_1 et B_2 ne sont pas indépendants.

b. Comme on remet la balle dans le seau avant de prendre la seconde balle, les deux épreuves sont indépendantes et $P(B_2) = P_{B_1}(B_2) = \dfrac{5}{12}$ et

$P(B_1 \cap B_2) = \dfrac{5}{12} \times \dfrac{5}{12}$, donc B_1 et B_2 sont indépendants.

79 **a.** 0,26 = $P(A \cap \bar{B})$; 0,35 = P(B). De plus :
0,6 = $P(\bar{A})$ et 1 = P(« Univers »).

b.

	A	$\bar{A}$	TOTAL
B	**0,14**	**0,21**	0,35
$\bar{B}$	0,26	**0,39**	**0,65**
TOTAL	**0,4**	0,6	1

c. $P(A \cap B) = 0{,}14 = 0{,}4 \times 0{,}35 = P(A)\times P(B)$,
donc A et B sont indépendants.

d. $P(A \cap \bar{B}) = 0{,}26 = 0{,}4\times 0{,}65 = P(A) \times P(\bar{B})$,
donc A et $\bar{B}$ sont indépendants.

80 **a.** A et B sont indépendants.

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$
$$\Leftrightarrow 0{,}87 = 0{,}35 + P(B) - 0{,}35 \times P(B)$$
$$\Leftrightarrow 0{,}52 = 0{,}65 \times P(B)$$
$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}8$$

b. A et B sont incompatibles.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Leftrightarrow 0{,}87 = 0{,}35 + P(B)$$
$$\Leftrightarrow P(B) = 0{,}52$$

81 **a.** Énoncé possible : « Dans un lycée, 55% des élèves sont des filles dont 11% sont gauchères. On sait également que 12% des élèves de ce lycée sont gauchers. On choisit au hasard un élève. Les événements « être une fille » et « être droitier » sont-ils indépendants ? »

b. Katell calcule la probabilité de l'intersection des événements « être une fille » et « être droitier » puis la compare au produit des probabilités de chaque événement.

c. Le premier calcul est imprécis :
55 % × 11 % = 0,0605 ≈ 6% de filles gauchères.
55 % – 6,05 % = 48,95 %.
P(« être une fille gauchère ») = 0,4895.
Il y a 12 % de gauchers donc 88 % sont droitiers.
P(« être une fille ») × P(« être droitier »)
= 0,55 × 0,88 = 0,484 ≠ 0,4895.
Donc les événements « être une fille » et « être droitier » ne sont pas indépendants.

82 **a.** $P(I) = \dfrac{32+8}{200} = 0{,}2$,

$P(A) = \dfrac{32+72+40}{200} = 0{,}72$

et $P(I \cap A) = \dfrac{32}{200} = 0{,}16$.

$P(I) \times P(A) = 0{,}2 \times 0{,}72 = 0{,}144 \neq P(I \cap A)$,
donc I et A ne sont pas indépendants.

b. $P(E) = \dfrac{72+28}{200} = 0{,}5$,

$P(B) = \dfrac{8+28+20}{200} = 0{,}28$ et $P(E \cap B) = 0{,}14$.

$P(E) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}28 = 0{,}14 = P(E \cap B)$,
donc E et B sont indépendants.

83 $P(A) = \dfrac{105}{140}$, $P(E) = \dfrac{92}{140}$

and $P(A \cup E) = \dfrac{140}{140} = 1$.

$P(A \cap E) = P(A) + P(E) - P(A \cup E) = \dfrac{57}{140}$.

$P(A) \times P(E) = \dfrac{69}{140} \neq \dfrac{57}{140}$ then A and E are not independent of one another.

84 **a.** Sachant que les lancers constituent des épreuves indépendantes :

P(« la face cachée n'est jamais la n°4 » = $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

$= \dfrac{27}{64}$.

b. P(« la face cachée est au moins une fois la n°4 » = $1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^3$

$= 1 - \dfrac{27}{64} = \dfrac{37}{64}$ (il s'agit de la probabilité de l'évènement contraire à celui étudié à la question **a.**).

85 $P(A) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$, $P(B) = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$ et

$P(A \cap B) = \dfrac{5}{12} \neq P(A) \times P(B) = 0{,}5$, donc A et B ne sont pas indépendants.

86 P(« l'apprenti a un ordinateur ») = 0,8 et
P(« l'apprenti a le permis de conduire ») = 0,7.
P(« l'apprenti a un ordinateur et le permis de conduire ») = 0,8 × 0,75 = 0,6 ≠ 0,8 × 0,7, donc les deux événements ne sont pas indépendants.

87 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. Formule en B3 : =65–A3.

b. Formule en C3 : =(A3+C$1)/100 ;
formule en D3 : =(B3+C$1)/100 ;
formule en E3 : =C3*D3.

c. Formule en F3: =SI(E3=0,15 ;"OUI" ;"NON").

d. La seule valeur de n qui convienne est $n = 5$.

	A	B	C	D	E	F
1	**nombre de jetons blancs et noirs**		**15**	**nombre de jetons verts**		**20**
2	nombre de jetons blancs	nombre de jetons noirs	P(A)	P(B)	P(A)xP(B)	A et B indépendants
3	1	64	0,16	0,79	0,1264	NON
4	2	63	0,17	0,78	0,1326	NON
5	3	62	0,18	0,77	0,1386	NON
6	4	61	0,19	0,76	0,1444	NON
7	5	60	0,2	0,75	0,15	OUI
8	6	59	0,21	0,74	0,1554	NON
9	7	58	0,22	0,73	0,1606	NON
10	8	57	0,23	0,72	0,1656	NON

88 $P(R) = \frac{4}{8} = 0,5$,

$P(B) = \frac{4}{8} = 0,5$,

et $P(R \cap B) = \frac{2}{8} = 0,25 = P(R) \times P(B)$,

donc R et B sont indépendants.

89 Démonstration permettant d'établir la **formule des probabilités totales**.

- $A_1, A_2, \dots, A_k$ forment une partition de l'univers Ω, donc ces événements sont deux à deux **disjoints** et $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = \Omega$.

Alors $B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = B \cap \Omega = B$.

De plus, $(B \cap A_1) \subset A_1$, $(B \cap A_2) \subset A_2$, … , $(B \cap A_k) \subset A_k$.

Or $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont deux à deux disjoints,

donc $B \cap A_1, B \cap A_2, \dots, B \cap A_k$ sont également **deux à deux disjoints**.

- $B = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)$.

- Alors $P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_k)) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_k)$.

90 **1. a.** $B \cap \overline{B} = \varnothing$.

b. $B \cup \overline{B} = \Omega$.

c. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ donc

$$P_A(\overline{B}) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= 1 - P_A(B).$$

2. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$,

donc $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$.

3. $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$,

donc $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

91 **1. a.** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

b. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B)$.

2. a. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ donc

$P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

b. D'après la question précédente si $P_A(B) = P(B)$, alors les évènements A et B sont indépendants. Avec le résultat de la question **1**, on a ainsi démontré que : A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

92 **1. a.** $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$ donc

$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(B) \times P(A)$.

b. $P(B \cap \overline{A}) = P(B)(1 - P(A)) = P(B) \times P(\overline{A})$.

c. $\overline{A}$ et B sont donc indépendants.

2. En intervertissant les rôles de A et B, on obtient : $\overline{B}$ et A sont donc indépendants.
En appliquant la propriété démontrée à A et $\overline{B}$, on obtient : $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

93 **1. a.** $A \subset B$, donc $A \cap B = A$.

b. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.

2. $P_A(B) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1$ et donc

$P(A \cap B) = P(A)$ et alors, comme $A \cap B \subset A$, on a $A \cap B = A$. D'où : $A \subset B$.

94 **a.** Si $P(A) = P(B)$ alors :

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$.

b. La proposition réciproque est :
« Si $P_A(B) = P_B(A)$ alors $P(A) = P(B)$. »

c. Si $P_A(B) = P_B(A)$

alors $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ et donc

$P(A) = P(B)$ seulement si $P(A \cap B) \neq 0$, c'est-à-dire à condition que A et B soient non disjoints.
On en déduit que la proposition réciproque est fausse en général.

95 **a.** $P_A(\overline{A}) = \dfrac{P(A \cap \overline{A})}{P(A)} = 0$.

b. $P_{\overline{A}}(B) = \dfrac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})}$

$= \dfrac{P(B) - P(B \cap A)}{1 - P(A)}$

$= \dfrac{P(B) - P_B(A) \times P(B)}{1 - P(A)}$

96 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

$= P(A)(1 - P(B)) + P(B)$

$= P(A) \times P(\overline{B}) + P(B)$.

97 **a.** On a $P(A \cap B) = 0$.

$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$

$= \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$.

b. $P(A) \times P(B) \neq 0$ et $P(A \cap B) = 0$, donc A et B ne sont pas indépendants.

98 $P(A) \times P(B) = P(A \cap B) = 0$.

Comme $P(A) \neq 0$ alors $P(B) = 0$.

99

	A	$\overline{\mathbf{A}}$	**TOTAL**
B	$a \times b$	$b(1 - a)$	b
$\overline{\mathbf{B}}$	$a(1 - b)$	$(1 - a)(1 - b)$	$1 - b$
TOTAL	a	$1 - a$	1

100 **a.** $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

$= 0{,}5 \times 0{,}3 + 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}45$.

b. Proposition réciproque :

« Si $P(B) = 0{,}45$ alors $p = 0{,}5$. »

c. $0{,}45 = P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

$= p \times 0{,}3 + (1 - p) \times 0{,}6 = 0{,}6 - 0{,}3p$.

Donc $0{,}3p = 0{,}15$ d'où $p = 0{,}5$.

La réciproque est vraie.

101 **a.** $V \cap T = \varnothing$ si et seulement si $k \leqslant 2$.

b. Si $k \leqslant 2$, alors $P(V \cap T) = 0$ et $P(V) \neq 0$.

V et T ne sont pas indépendants.

Si $k \geqslant 3$, alors $P(V \cap T) = \dfrac{1}{5+k}$, $P(V) = \dfrac{k}{5+k}$

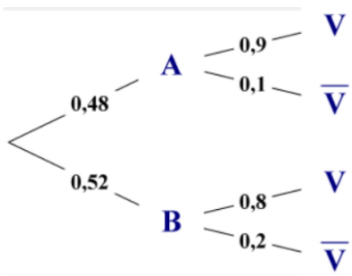
et $P(T) = \dfrac{2}{5+k}$.

$P(V \cap T) = P(V) \times P(T) \Leftrightarrow \dfrac{1}{5+k} = \dfrac{k}{5+k} \times \dfrac{2}{5+k}$

$\Leftrightarrow 5 + k = 2k \Leftrightarrow k = 5$.

V et T sont indépendants lorsque $k = 5$.

102 **1.**



2. a. $P(V) = P(V \cap A) + P(V \cap B)$

$= 0{,}48 \times 0{,}9 + 0{,}52 \times 0{,}8$

$= 0{,}848$.

La probabilité que la personne interrogée dise la vérité est 0,848.

b. $P_V(A) = \dfrac{P(A \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}432}{0{,}848} = \dfrac{27}{53} \approx 0{,}51$.

Sachant que la personne interrogée dit la vérité, la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A est environ 0,51.

3. P(« La personne vote pour A »)

$= P(A \cap V) + P(B \cap \overline{V})$

$= 0{,}432 + 0{,}104$

$= 0{,}536$

La probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est bien 0,536.

103 **1.a.** P(« le coureur utilise la marque M »)

$= 0{,}15 + 0{,}28 + 0{,}22$

$= 0{,}65$.

b. $P_{\text{« Utilise la marque M »}}$(« court en moins de 3h »)

$= \dfrac{0{,}02}{0{,}65} = \dfrac{2}{65} \approx$-0,031

2. Alan Turing (1912-1954) est un mathématicien britannique. Il a travaillé en cryptanalyse, notamment pendant la seconde Guerre mondiale pour contrer le système de cryptographie allemand de la machine Enigma (travail top secret qui ne sera dévoilé que dans les années 1970). Ses travaux, avec ce qu'on appelle « la machine de Turing », posent les bases du premier ordinateur et l'intelligence artificielle. En 1952, il est poursuivi par la justice en raison de son homosexualité (condamnée par la loi à l'époque) et subit une castration chimique ; il se suicide en 1954. En 2013, la Reine Élisabeth II le gracie et le reconnaît comme héros de guerre.
Alan Turing était adepte du marathon et a même terminer quatrième au AAA Marathon (association des athlètes amateurs qui fournit des coureurs pour les Jeux Olympiques) en 2 h 46 min 3 s, un très bon temps, car en 1958 le record était de 2 h 15 min (en 2018, il était de 2 h 01 min) .

104 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1. a. Formule : =1/COMBIN(49;5)

P(« 5 bons numéros) = $\dfrac{1}{1\,906\,884} \approx 5{,}2\times10^{-7}$.

b. Formule : =1/10

P(« numéro chance ») = 0,1.

c. Formule : =1/(10*COMBIN(49;5))

P(« grille gagnante ») = $\dfrac{1}{19\,068\,840}$

$\approx 5{,}2 \times 10^{-8}$.

2. a. Formule : =1/COMBIN(50;5)

P(« 5 bons numéros) = $\dfrac{1}{2\,118\,760} \approx 4{,}7 \times 10^{-7}$.

b. Formule : =1/COMBIN(12;2)

P(« deux numéros étoiles ») = $\dfrac{1}{66} \approx 0{,}015$.

c. Formule :

=1/(COMBIN(12;2)*COMBIN(49;5))

P(« grille gagnante ») = $\dfrac{1}{139\,838\,160}$

$\approx 7{,}2 \times 0^{-9}$.

105 **1. a.** 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,29 et 31 sont premiers ; P(« nombre premier ») = $\dfrac{11}{37}$.

b.P(« nombre impair ») = $\dfrac{18}{37}$.

P(« nombre impair premier ») = $\dfrac{10}{37}$

$\neq \dfrac{11}{37} \times \dfrac{18}{37}$ donc les deux événements ne sont pas indépendants.

2. a. $P_{\text{« nombre impair »}}$(« nombre premier ») = $\dfrac{10}{18}$

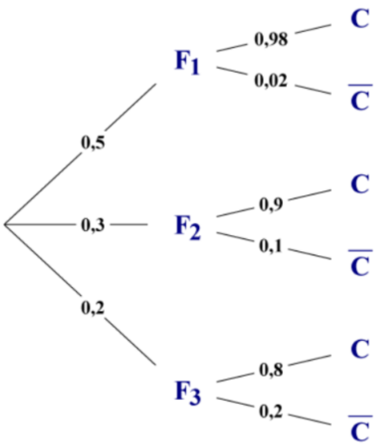
$= \dfrac{5}{9}$.

b. $P_{\text{« nombre premier »}}$(« nombre impair ») = $\dfrac{10}{11}$.

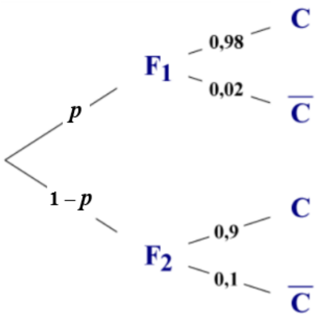
106 a. $P(C) = 0{,}5 \times 0{,}98 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}8$
$= 0{,}92.$

$P_C(F_1) = \dfrac{P(F_1 \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}98}{0{,}92} \approx 0{,}53.$

La probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme, est environ 0,53.

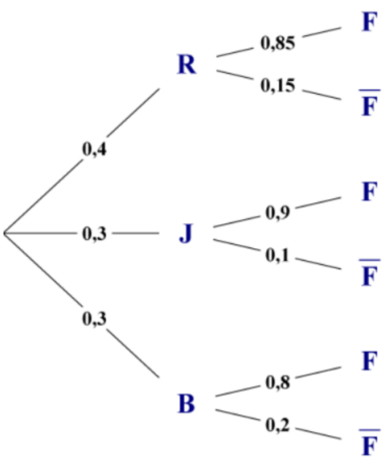


b.



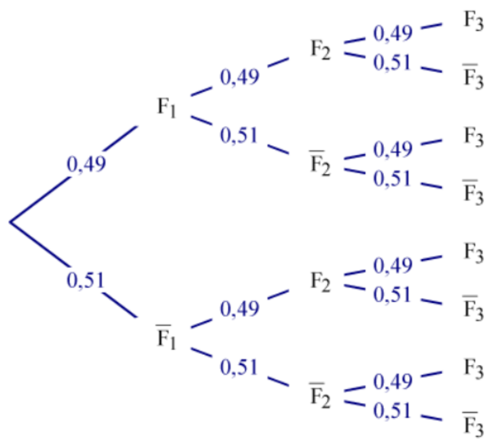
$P(C) = 0{,}98p + 0{,}9(1 - p) = 0{,}08p + 0{,}9.$
$P(C) \geqslant 0{,}92 \Leftrightarrow 0{,}08p \geqslant 0{,}02 \Leftrightarrow p \geqslant 0{,}25.$
Pour avoir au moins 92 % de fèves conformes, il faut que p soit au moins de 25 %.

107 1.a. On note B, l'évènement « le bulbe est à fleur blanche ».



b. $P(F) = 0{,}4 \times 0{,}85 + 0{,}3 \times 0{,}9 + 0{,}3 \times 0{,}8$
$= 0{,}85.$
La probabilité que le bulbe fleurisse est bien égale à 0,85.
2. a. On a $P_R(F) = 0{,}85 = P(F)$, donc R et F sont indépendants.
b. On a $P(J \cap R) = 0 \neq P(J) \times P(R)$, donc J et R ne sont pas indépendants.

108 1.



2. $P(\text{« trois garçons »}) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$
$= 0{,}51^3$
$\approx 0{,}1327.$
$P(\text{« au moins une fille »}) = 1 - P(\text{« aucune fille »})$
$= 1 - 0{,}51^3$
$\approx 0{,}8673.$

3. a. $P(\text{« le benjamin est un garçon »}) = P(\overline{F_3})$
$= 0{,}51.$

b. $P_{\overline{F_3}}(F_1) = \dfrac{P(\overline{F_3} \cap F_1)}{P(\overline{F_3})}$

$= \dfrac{P(\overline{F_3} \cap F_2 \cap F_1) + P(\overline{F_3} \cap \overline{F_2} \cap F_1)}{P(\overline{F_3})}$

$= \dfrac{0{,}51 \times 0{,}49 \times 0{,}49 + 0{,}51 \times 0{,}51 \times 0{,}49}{0{,}51}$

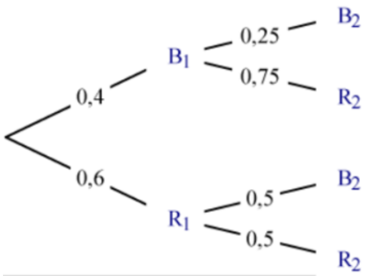
$= 0{,}49^2 + 0{,}51 \times 0{,}49$
$= 0{,}49$

Autre méthode possible : Les trois naissances sont indépendantes, donc $P_{\overline{F_3}}(F_1) = P(F_1) = 0{,}49.$

La probabilité que l'ainée soit une fille, sachant que le benjamin est un garçon, est 0,49.

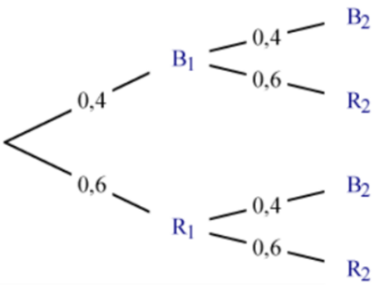
109 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

1. a.



P(« 2 jetons de la même couleur »)
$= 0,4 \times 0,25 + 0,6 \times 0,5 = 0,4$.

b.



P(« 2 jetons de la même couleur »)
$= 0,4^2 + 0,6^2 = 0,52$.

2. La fonction `f1` correspond à la situation 1 et `f2` à la situation 2.

110 **1.a.** $x \in [0 ; 1]$ et $y \in [0 ; 1]$.

b. Il faut que $y < x^2$.

2. a.

$C \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à 1 000
  $x \leftarrow$ un nombre réel compris entre 0 et 1
  $y \leftarrow$ un nombre réel compris entre 0 et 1
  Si $y < x^2$ alors $C \leftarrow C + 1$
  Fin Si
Fin Pour
$P \leftarrow C/1\,000$

b. L'estimation de l'aire hachurée fluctue autour de $\frac{1}{3}$, soit environ 0,333.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
from random import *

def aire():
    C=0
    for k in range(1000):
        x=random()
        y=random()
        if y<x*x :
            C=C+1
    P=C/1000
    return P
```

c. Pour obtenir une meilleure estimation, il faut prendre au hasard un plus grand nombre n de points.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
from random import *

def aire(n):
    C=0
    for k in range(n):
        x=random()
        y=random()
        if y<x*x :
            C=C+1
    P=C/n
    return P
```

3. a. L'aire est égale à $\frac{1}{4}\pi$.

b. « Un point $M(x\,;\,y)$ appartient au quart de disque D si et seulement si $x^2 + y^2 \leqslant 1$ » (toujours en considérant : $x, y \in [0 ; 1]$).

c.

$C \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à n
  $x \leftarrow$ un nombre réel compris entre 0 et 1
  $y \leftarrow$ un nombre réel compris entre 0 et 1
  Si $x^2 + y^2 \leqslant 1$ alors $C \leftarrow C + 1$
  Fin Si
Fin Pour
$P \leftarrow 4 \times C/n$

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
from random import *

def monte_carlo(n):
    c=0
    for k in range(n):
        if random()**2+random()**2<=1:
            c=c+1
    return 4*c/n
```

111 On note a, la valeur de P(A), b celle de P(B) et i celle de P(A ∩ B).

Algorithme possible :

Si $a \times b = i$ alors
    Afficher « indépendants »
Sinon
    Afficher « pas indépendants »
Fin Si

112 **1. a.** Il faut trois pas vers le haut.

b. Il faut trois pas vers la droite.

2. a.

```
C ← 0
Pour n allant de 1 à 10 000
    Droite ← 0
    Pour k allant de 1 à 6
        A ← un nombre aléatoire entre 0 et 1
        Si A = 1  alors Droite ← Droite + 1
        Fin Si
    Fin Pour
    Si Droite = 3 alors  C ← C + 1
    Fin Si
Fin Pour
E ← C/10 000
```

b. La valeur de E fluctue autour de la probabilité d'aller de A en B = $\dfrac{20}{2^6}$ = 0,3125.

(20 étant le nombre de choix possibles pour les 3 pas, vers le haut ou vers la droite, parmi les 6 ; et 2^6 étant le nombre total de déplacements possibles en 6 pas).

113 **1.a.** Un sonnet est composé de deux quatrains et deux tercets et donc compte quatorze vers.

b. Il y a 10^{14} poèmes possibles donc chaque poème a une probabilité égale à 10^{-14} d'être obtenu.

10^{14} = 100 000 000 000 000 se lit « cent mille milliards ».

2. Raymond Queneau (1903-1976) est un écrivain français, auteur de roman, poèmes et essais, dont le roman le plus célèbre est *Zazie dans le métro* (1959). En tant que mathématicien amateur, il a écrit en 1972 un article *Sur les suites S-additives*.

L'Ouvroir de Littérature Potentielle (*OuLiPo*) est un groupe d'écrivains et de mathématiciens a été fondé en 1960 par Queneau et le mathématicien François le Lionnais. Il imagine des « contraintes » (sémantiques ou formelles) pour des créations littéraires. Queneau définit un auteur oulipien comme « un rat qui construit lui-même le labyrinthe dont il se propose de sortir ».

114 **1. a.** Comme les génotypes des parents sont indépendants, la probabilité que les deux parents soient porteurs sains est égale à 3%×3% = 0,0009.

b.

	N/	*m/*
N/	*N//N*	*N//m*
m/	*N//m*	*m//m*

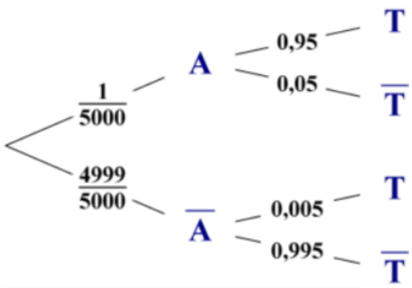
i. P(« non porteur de la maladie ») = 0,25.

ii. P(« porteur sain ») = 0,5.

iii. P(« malade ») = 0,25.

c. La probabilité demandée est égale à $0{,}0009 \times 0{,}25 = 0{,}000\,225 \approx \frac{1}{5\,000}$.

2. a.



b. P(« Faux positif ») = $P(\overline{A} \cap T)$ = 0,004 999.

P(« Faux négatif ») = $P(A \cap \overline{T})$ = 0,000 01

c. $P(\overline{T}) = \dfrac{1}{5000} \times 0{,}05 + \dfrac{4999}{5000} \times 0{,}995$

$= 0{,}994811.$

La probabilité que le test soit négatif est 0,994 811.

$$P_{\overline{T}}(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{\frac{4999}{5000} \times 0{,}995}{0{,}994811}$$

$\approx 0{,}99999.$

La probabilité qu'un nouveau-né dont le test est négatif ne soit effectivement pas atteint de la mucoviscidose est environ 99,999 %.

115 **a.** P(« circuit A défaillant »)

$= P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P(D_2)$

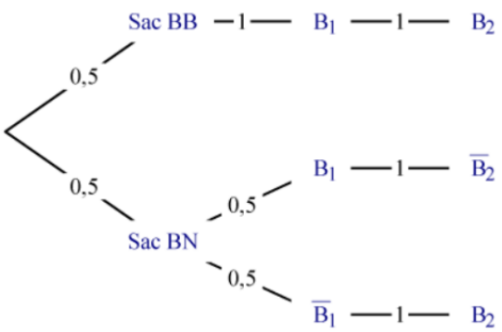
$= 0{,}39^2 = 0{,}1521.$

b.P(« circuit B défaillant »)

$= P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)$

$= 2 \times 0{,}39 - 0{,}39^2 = 0{,}6279.$

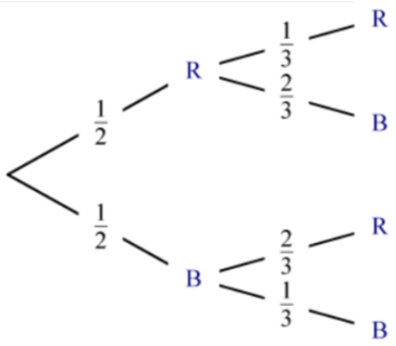
116 On note B_1 l'événement « le 1er jeton est blanc » et B_2 « le 2e jeton est blanc ».



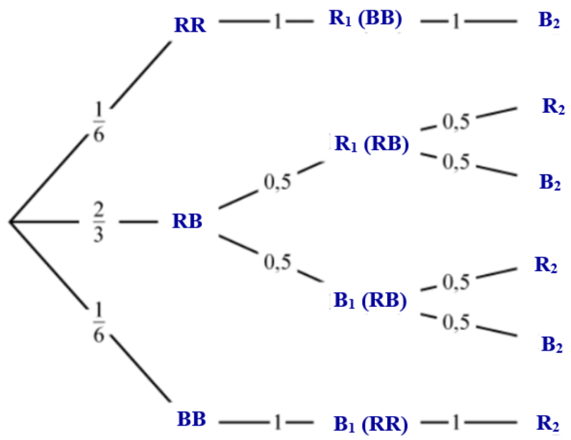
$$P_{B_1}(B_2) = \frac{P(B_2 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}5}{0{,}75} = \frac{2}{3} \text{ car}$$

$P(B_2 \cap B_1) = 0{,}5$ et $P(B_1) = 0{,}5 + 0{,}5^5 = 0{,}75$.

117 La poche droite peut contenir deux crayons rouges avec une probabilité de $\frac{1}{6}$ ou bien un rouge et un bleu avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ ou bien deux bleus avec une probabilité de $\frac{1}{6}$.



On note R_1 l'événement « le 1er crayon, pris dans la poche droite, est rouge » et R_2 l'événement « le 2e crayon, pris dans la poche gauche, est rouge ». On note B_1 l'événement « le 1er crayon, pris dans la poche droite, est bleu » et B_2 l'événement « le 2e crayon, pris dans la poche gauche, est bleu ».



Remarque : Le contenu de la poche gauche est indiqué, entre parenthèses, à côté du premier crayon pris.

$P(R_2 \cap R_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

et $P(R_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$.

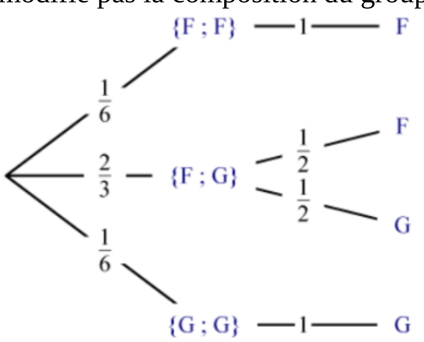
donc $\frac{P(R_2 \cap R_1)}{P(R_1)} = \frac{1}{3}$.

La probabilité de prendre un crayon rouge dans la poche gauche, sachant qu'un rouge a été pris dans la poche droite, est $\frac{1}{3}$.

118 Comme à l'exercice précédent, la composition du groupe des deux personnes allant au sauna est définie par : $P(\{F ; F\}) = \frac{1}{6}$,

$P(\{F ; G\}) = \frac{2}{3}$ et $P(\{G ; G\}) = \frac{1}{6}$.

Le groupe trouve une femme au sauna mais une femme aussi en sort pour aller nager donc cela ne modifie pas la composition du groupe.



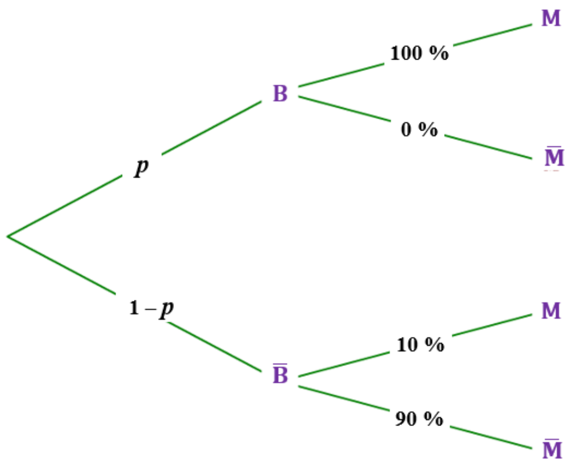
La probabilité que la personne sortante du sauna soit une femme est égale à $1\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$.

119 On note B, l'électeur a voté pour le parti « Brocoliste » et M, l'électeur a déjà mangé du brocoli. On résume les données de l'énoncé dans le tableau suivant.

	B	**$\overline{\text{B}}$**	**TOTAL**
M	**100%** × 40% = 40%	6% = 60% − 54%	**46%**
$\overline{\text{M}}$	**0%**	**54%** = 54% − 0%	**54%** = 100%−46%
TOTAL	**40 % = 100% – 40%**	**60% = 54%/90%**	**100 %**

Donc 40 % des électeurs ont voté pour le parti « Brocoliste ».

Autre méthode avec un arbre :



La formule des probabilités totales donne :

$P(M) = P(B \cap M) + P(\overline{B} \cap M)$

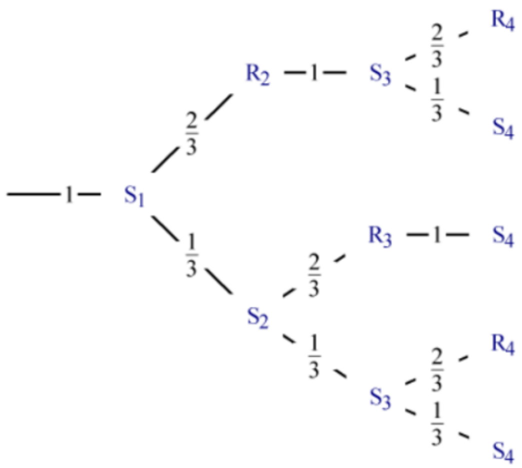
$= p\times1 + (1 - p)\times0{,}1 = 0{,}9p + 0{,}1$

or $P(M) = 0{,}46$, donc :

$0{,}9p + 0{,}1 = 0{,}46 \Leftrightarrow p = 0{,}4$.

120 On note R_0 , l'évènement « la mule refuse de sortir un jour donné », R_n « la mule refuse de sortir le n-ième jour suivant » et S_n « la mule accepte de sortir le n-ième jour suivant », où $n \in \mathbb{N}^*$.

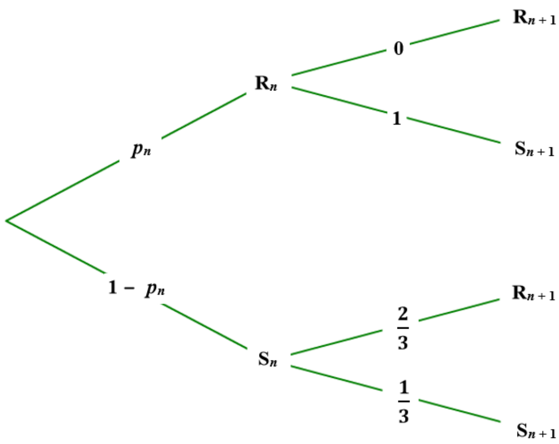
On peut traduire la situation des quatre premiers jours suivants par un arbre.



On note $p_n = P(R_n)$.

On a $p_0 = 1$ et $P(S_n) = 1 - p_n$.

Arbre pour le passage du $n^{\text{ème}}$ au $(n + 1)^{\text{ième}}$ jour :



$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P((R_{n+1} \cap R_n) \cup (R_{n+1} \cap S_n))$

$= 0 + P_{S_n}(R_{n+1}) \times P(S_n) = \frac{2}{3}(1 - p_n)$.

On peut saisir cette suite dans une calculatrice ou un tableur et observer qu'elle semble converger vers 0,4. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = p_n - 0{,}4$.

On démontre que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{2}{3}$:

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}4 = \frac{2}{3}(1 - p_n) - 0{,}4$

$= \frac{2}{3}(1 - (v_n + 0{,}4)) - 0{,}4 = \frac{2}{3}\times0{,}6 - \frac{2}{3}v_n - 0{,}4$

$= -\frac{2}{3}v_n$.

Donc $v_n = 0{,}6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ et $p_n = 0{,}4 + 0{,}6 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

On obtient $p_{50} \approx 0{,}4$.

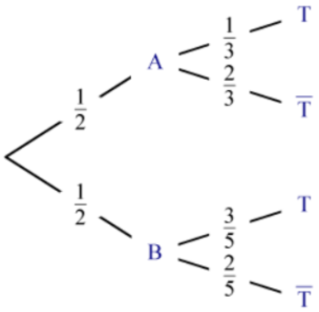
La probabilité que la mule refuse de sortir 50 jours plus tard est donc environ 0,4.

121 La probabilité de faire « pile » (ou de faire « face ») dépend de la pièce. Cette probabilité est indépendante du lancer dans les **trois premières façons**.

Avec la pièce A, $P_A(T) = \dfrac{1}{3}$ et $P_A(D) = \dfrac{1}{3}$.

Avec la pièce B, $P_B(T) = \dfrac{3}{5}$ et $P_B(D) = \dfrac{3}{5}$.

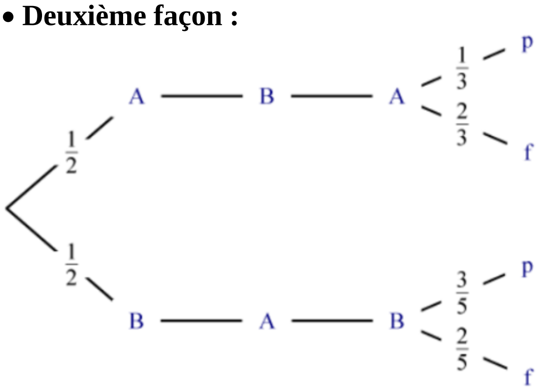
• Première façon :



Donc, $P(T) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$.

De même, $P(D) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$.

• Deuxième façon :



Donc, $P(T) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$

De même, $P(D) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{15}$.

• Troisième façon :

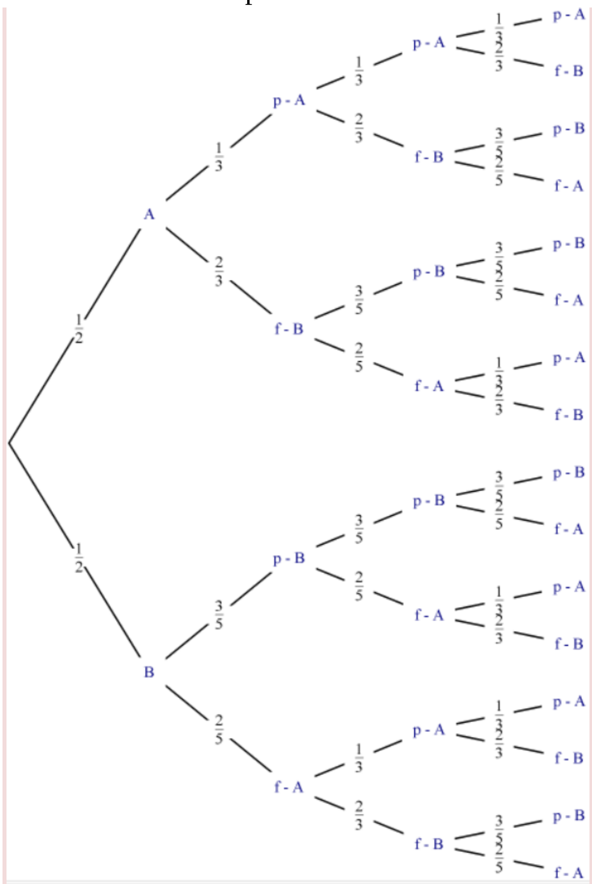
On ne s'intéresse qu'au troisième (ou dixième) lancer.

$P(T) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$ et

$P(D) = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{7}{15}$.

• Quatrième façon :

Le choix de la pièce à lancer est conditionné par le résultat du lancer précédent.



P(« utiliser la pièce A au 2^e lancer)

$= \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{11}{30}$.

et P(« utiliser la pièce B au 2^e lancer) $=\dfrac{19}{30}$.

P(« utiliser la pièce A au 3^e lancer)

$= \dfrac{11}{30}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{19}{30}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{169}{450}$.

et P(« utiliser la pièce B au 3^e lancer) $=\dfrac{281}{450}$.

P(T) = P(« utiliser la pièce A au 3^e lancer) × P_A(« pile ») + P(« utiliser la pièce B au 3^e lancer)×P_B(« pile »)

$= \dfrac{169}{450}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{281}{450}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{1687}{3375}\approx 0{,}5$.

On peut réaliser un arbre pour déterminer P(T).

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note :

u_n = P(« utiliser la pièce A au n-ième lancer »).

On a $u_2 = \frac{11}{30}$.

$u_{n+1} = u_n \times P_A(\text{« pile »}) + (1 - u_n) \times P_B(\text{« face »})$

$= \frac{1}{3} \times u_n + \frac{2}{5}(1 - u_n) = -\frac{1}{15} \times u_n + \frac{2}{5}$.

On peut saisir cette suite dans une calculatrice ou un tableur et observer qu'elle semble converger vers $0{,}375 = \frac{3}{8}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on pose $v_n = u_n - \frac{3}{8}$.

On démontre que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{15}$ et $v_2 = u_2 - \frac{3}{8} = -\frac{1}{120}$:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{15} \times u_n + \frac{2}{5} - \frac{3}{8}$

$= -\frac{1}{15} \times (v_n + \frac{3}{8}) + \frac{1}{40}$

$= -\frac{1}{15} v_n - \frac{1}{40} + \frac{1}{40} = -\frac{1}{15} v_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $v_n = -\frac{1}{120}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-2}$ et

$u_n = \frac{3}{8} - \frac{1}{120}\left(-\frac{1}{15}\right)^{n-2}$.

P(« obtenir pile au n-ième lancer »)

$= \frac{1}{3} u_n + \frac{3}{5}(1 - u_n) = -\frac{4}{15} u_n + \frac{3}{5}$.

Avec $n = 3$, on peut vérifier que :

$P(T) = \frac{1687}{3375}$.

Avec $n = 10$, on obtient :

$P(D) = -\frac{4}{15} \times \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{120}\left(-\frac{1}{15}\right)^{8}\right) + \frac{3}{5}$

$\approx -\frac{1}{10} + \frac{3}{5} \approx 0{,}5$.

CHAPITRE **11**

Variables aléatoires

► *Les exercices* **1** *à* **5** *de la rubrique «* **Réactivation** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Activités

p. 314 et 315 du manuel

1 Gains au jeu de dé

1. $\Omega = [\![1;12]\!]$.

$A = \{2;4;6;8;10;12\}$

$B = \{1;3;5\}$

$C = \{7;11\}$

$D = \{9\}$

2.

Évènement	A	B	C	D
Probabilité	$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

3. a. $G(\Omega) = \{0;1;3;9\}$.

b. $\{G = 0\} = A$ donc $P(G = 0) = P(A) = \frac{1}{2}$.

c.$\{G = 1\} = B$ donc $P(G = 1) = P(B) = \frac{1}{4}$.

$\{G = 3\} = C$ donc $P(G = 3) = P(C) = \frac{1}{6}$.

$\{G = 9\} = D$ donc $P(G = 9) = P(D) = \frac{1}{12}$.

d. $P(G > 0) = 1 - P(G = 0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Il y a une chance sur deux pour que le gain soit strictement positif.

2 Roulette et gain moyen

Soit G le gain de Joachim.

• Stratégie 1 :

$P(G = -10) = \frac{36}{37}$ et $P(G = 350) = \frac{1}{37}$.

Le gain moyen est de $\frac{36}{37} \times (-10) + 350 \times \frac{1}{37} \approx -0{,}27$ €.

• Stratégie 2 :

$P(G = -10) = \frac{35}{37}$ et $P(G = 170) = \frac{2}{37}$.

Le gain moyen est de $\frac{35}{37} \times (-10) + 170 \times \frac{2}{37} \approx -0{,}27$ €.

• Stratégie 3 :

$P(G = -10) = \frac{34}{37}$ et $P(G = 110) = \frac{3}{37}$.

Le gain moyen est de $\frac{34}{37} \times (-10) + 110 \times \frac{3}{37} \approx -0{,}27$ €.

Dans tous les cas, le gain de Joachim est négatif, donc il n'a pas intérêt à jouer.

Les trois stratégies sont équivalentes.

3 Des souris et des probabilités

1. $\mathrm{E}(T) = 0{,}11 \times 12 + \cdots + 0{,}08 \times 28 = 19{,}2$.
Une souris met en moyenne 19,2 secondes pour traverser le parcours.
2.a. $\mathrm{E}(U) = 0{,}11 \times 10 + \cdots + 0{,}08 \times 26 = 17{,}2$.
On a $\mathrm{E}(U) = \mathrm{E}(T) - 2$.
b. $\sigma(U) \approx 4{,}49$.
c. On remarque que $\sigma(T) = \sigma(U)$.

4 Différentes modélisations

1.

	1	**1**	**2**	**2**	**3**
1	2	2	3	3	4
1	2	2	3	3	4
2	3	3	4	4	5
2	3	3	4	4	5
3	4	4	5	5	6

On a $X(\Omega) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

x	2	3	4	5	6
P(X = x)	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{25}$

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Ce programme simule une série de 100 000 expériences consistant à effectuer deux fois de suite l'expérience proposée dans l'énoncé, et il compte le nombre de fois où l'événement T se réalise.
En l'exécutant plusieurs fois, on a trouvé 10 100 et 10 346.
3. $\mathrm{P}(S) = \frac{8}{25}$.
4.a. $\mathrm{Y}(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
b.

y	0	1	2
P(Y = y)	$\left(\frac{17}{25}\right)^2 = \frac{289}{625}$	$2 \times \frac{8}{25} \times \frac{17}{25} = \frac{272}{625}$	$\left(\frac{8}{25}\right)^2 = \frac{64}{625}$

$\mathrm{P}(Y = 2) = 0{,}1024$ et $\frac{10\,100}{100\,000} = 0{,}101$, donc le résultat est cohérent avec la simulation.

Savoir-faire 1
Déterminer une loi de probabilité

6 **a.** Par lecture graphique, on obtient :

x	4	6	12	16	24	30
$P(X = x)$	0,05	0,15	0,2	0,3	0,2	0,1

b. $P(X \geqslant 12) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}8$.
$P(\overline{X > 10}) = P(X \leqslant 10) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2$.
$P(12 \leqslant X \leqslant 24) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}7$.
c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random

def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.05:
        return 4
    if alea<0.2:
        return 6
    if alea<0.4:
        return 12
    if alea<0.7:
        return 16
    if alea<0.9:
        return 24
    return 30
```

7

x	10	5	-5	-10
$P(G = x)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{9}{20}$

Savoir-faire 2
Simuler une variable aléatoire

8 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
import math

def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.08:
        return 0
    if alea<0.30:
        return 1
    if alea<0.69:
        return 2
    if alea<0.90:
        return 4
    return 5
```

b. $E(X) = 2{,}34$ et $\sigma(X) \approx 1{,}47$.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
m=0
for simu in range(10000):
    m=m+simu_X()
m=m/10000
print(m)

s=0
for simu in range(10000):
    s=s+(simu_X()-m)**2
s=math.sqrt(s/10000)
print(s)
```

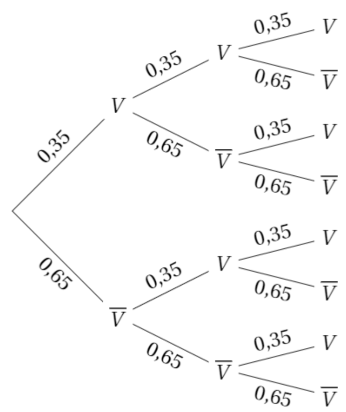
Savoir-faire 3
Calculer des indicateurs

9 $E(X) = 14$ et $\sigma(X) \approx 12{,}4$.

$E(Y) = 0{,}8E(X) + 5 = 0{,}8 \times 14 + 5 = 16{,}2$
et $\sigma(Y) = |0{,}8|\sigma(X) \approx 9{,}92$.
$E(Z) = E(X) - 15 = 14 - 15 = -1$
et $\sigma(Z) = \sigma(X) \approx 12{,}4$.

Savoir-faire 4
Étudier une variable aléatoire définie par répétition

10 **1.**



x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$0{,}65^3$	$3 \times 0{,}35^2 \times 0{,}65^2$	$3 \times 0{,}35^2 \times 0{,}65^2$	$0{,}35^3$

2. $P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) \approx 0{,}28$.

► *Les exercices* **11** *à* **21** *de la rubrique « **Et faire le point** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Développer ses stratégies et méthodes

p. 326 du manuel

22 **a.** $P(X \leqslant 2) = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}8$.

b. Le tableau ci-dessous donne toutes les issues :

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On a $P(Y = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

c. $P(Z \geqslant 0) = 0{,}3 + 0{,}5 = 0{,}8$.

d. $P(T = 1) = 0{,}23 \times 0{,}77 + 0{,}77 \times 0{,}23$
$= 0{,}3542$.

23 **a.** $E(X) = 3{,}9$ et $\sigma(X) \approx 1{,}87$.

b. $E(Y) = 1{,}1E(V) - 1 = 1{,}1 \times 20 - 1 = 21$ et $\sigma(Y) = |1{,}1|\sigma(V) = 1{,}1 \times 2 = 2{,}2$.

c. $E(Z) \approx 1{,}8$.

24 **a.** $E(Y) = 2{,}38$ et $\sigma(Y) \approx 0{,}82$.

b. $E(Y) = 1{,}4$ et $\sigma(Y) \approx 0{,}65$.

c. $E(Y) = 11$ et $\sigma(Y) = 0{,}8$.

► *Les exercices* **25** *à* **32** *de la rubrique « **Les incontournables** » sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Entraînement

p. 328 à 333 du manuel

OBJECTIF 1

Déterminer et exploiter la loi de probabilité

33 **a.** $p + 0{,}17 + 0{,}26 + 0{,}34 + 0{,}12 = 1$
$\Leftrightarrow p = 0{,}11$.

b. $0{,}04 + 0{,}13 + 0{,}26 + 0{,}24 + p + 0{,}14 = 1$
$\Leftrightarrow p = 0{,}19$.

34 **a.** $P(X \geqslant 3) = 0{,}07 + 0{,}02 = 0{,}09$.

b. $P(X \geqslant 3) = 0{,}18 + 0{,}23 + 0{,}23 = 0{,}64$.

35 **a.**

x	−1	0	1	3	4	5	6	8
P(X = x)	0,05	0,1	0,1	0,15	0,25	0,2	0,1	0,05

b. $P(1 \leqslant X \leqslant 5) = 0{,}1 + 0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}7$.
$P(X \geqslant 4) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}6$.

36 **a.**

x	−4	0	2
P(G = x)	$\frac{3}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

x	−4	0	2
P(G = x)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

37 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
def simu():
    alea=random.random()
    if alea<0.15:
        return -4
    if alea<0.55:
        return 0
    if alea<0.81:
        return 3
    return 6
```

38 **a.** $p + 3p + 0{,}35 + 0{,}41 = 1 \Leftrightarrow p = 0{,}06$.

b. $P(T \leqslant 2) = 0{,}06 + 0{,}18 = 0{,}24$.
$P(T > 4) = 0$.
$P(2 \leqslant T \leqslant 4) = 0{,}18 + 0{,}35 + 0{,}41 = 0{,}94$.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
def simu_T():
    alea=random.random()
    if alea<0.06:
        return 1
    if alea<0.24:
        return 2
    if alea<0.59:
        return 3
    return 4
```

39 • $0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}32 + 0{,}13 + p = 1$
$\Leftrightarrow p = 0{,}08$.
• $P(U \leqslant 13) = P(V \leqslant 13)$
$\Leftrightarrow 0{,}12 + 0{,}14 + 0{,}21 + 0{,}32 = 0{,}27 + 0{,}23 + q + 0{,}14$
$\Leftrightarrow 0{,}79 = q + 0{,}64$
$\Leftrightarrow q = 0{,}15$
• $0{,}27 + 0{,}23 + q + 0{,}14 + r + 0{,}1 = 1$
$\Leftrightarrow r = 1 - 0{,}74 - q$
$\Leftrightarrow r = 0{,}11$

40 **a.** Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai.

41 **1. Énoncé :** Une entreprise produit des verres à pied qu'elle emballe en lots de 360 unités. Le nombre C de verres cassés par lot est modélisé par la loi de probabilités ci-dessous :

c	0	1	2	3	4	5
$P(C = c)$	0,62	0,17	0,1	0,06	0,03	0,02

On choisit au hasard un lot de 360 verres à pied.
a. Calculer la probabilité pour que le lot comporte au moins un verre cassé, au moins deux verres cassés.
c. L'entreprise affirme qu'un carton de 360 verres à pied comporte moins de deux verres cassés 90 % du temps. Que penser de cette affirmation ?
2. Zoé calcule la probabilité de chaque événement en sommant les probabilités des issues qui le constituent.

42 Soit $p = P(X = 1)$. On a :
$P(X = 0) = 2P(X = 1) = 2p$
et $P(X = 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$= 1 - p - 2p = 1 - 3p$.
De plus,
$P(X = 0) = P(X \geqslant 1)$
$\Leftrightarrow P(X = 0) = P(X = 1) + P(X = 2)$
$\Leftrightarrow 2p = p + 1 - 3p$
$\Leftrightarrow p = \frac{1}{4}$
D'où le tableau :

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

43 Soit X le numéro de la boule tirée.
Soit n le nombre de boules 2.
Nombre de boules 1 : $1{,}3n$.
Nombre de boules 3 : $1{,}5 \times 1{,}3n = 1{,}95n$.
Nombre de boules 4 : $0{,}8 \times 1{,}95n = 1{,}56n$.
Nombre total de boules :
$1{,}3n + n + 1{,}95n + 1{,}56n = 5{,}81n$.
La loi de X est donc :

x	1	2	3	4
$P(X = x)$	$\frac{1{,}3n}{5{,}81n} = \frac{130}{581}$	$\frac{n}{5{,}81n} = \frac{100}{581}$	$\frac{1{,}95n}{5{,}81n} = \frac{195}{581}$	$\frac{1{,}56n}{5{,}81n} = \frac{156}{581}$

44 **a.**

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

Loi de M :

m	1	2	3	4
$P(M = m)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

b. $P(M \leqslant 2) = \frac{7}{16} + \frac{5}{16} = \frac{3}{4}$
et $P(M \geqslant 3) = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.
c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random

def simu_M():
    de1=random.randint(1,4)
    de2=random.randint(1,4)
    return min(de1,de2)
```

45

x	0	1	2	4
$P(X = x)$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

46 **a.** $P(X \geqslant 1) = 0{,}48 + 0{,}17 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0{,}01$
$= 0{,}81$.
Il y a 81 % de chance pour que le serveur ait au moins une panne par an.
$P(X \leqslant 1) = 0{,}19 + 0{,}48 = 0{,}67$. Il y a 67 % de chance pour que le serveur ait au plus une panne par an.
b. Le serveur a au plus 5 jours de pannes dans l'année, ce qui représente 1,4 % de l'année. L'entreprise peut donc affirmer que le serveur ne connaît pas de panne au moins 98,6 % de l'année. Elle ne peut pas le dire pour 99 %.

47 **a.** $P(50 \leqslant V \leqslant 150) = 0{,}34 + 0{,}21 + 0{,}03 = 0{,}58$
$P(V < 100) = 0{,}12 + 0{,}19 + 0{,}34 = 0{,}65$
b. $t = 50$.

48 **a.** Faux : prenons la variable aléatoire X qui ne peut prendre que la valeur 3,5.
$P(X > 3) = P(X = 3) = 1$ et $P(X \geqslant 4) = 0$.
b. Vrai : $P(X \leqslant 5) - P(X \leqslant 2) = P(2 < X \leqslant 5) \geqslant 0$, donc $P(X \geqslant 5) \geqslant P(X \leqslant 2)$.
c. Faux : prenons la variable aléatoire X qui ne peut prendre que la valeur 3,5.
$P(X = -1) = 0$ et $1 - P(X = 1) = 1 - 0 = 1$.
d. Faux : prenons la variable aléatoire X qui ne peut prendre que la valeur 2,5.
$P(2 \leqslant X \leqslant 3) = P(X = 2{,}5) = 1$
et $P(X = 2) + P(X = 3) = 0$.

49 **a.**

y	0	2	3	4	6
$P(Y = y)$	0,05	0,23	0,22	0,36	0,14

b. $P(Y \geqslant 3) = 0{,}22 + 0{,}36 + 0{,}14 = 0{,}72$.
c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def echant(n):
    L=[]
    for simu in range(n):
        L.append(simu_Y())
    return L
```

Objectif 2

Déterminer l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire

50 **a.** $E(X) = 1{,}2$ et $\sigma(X) \approx 1{,}21$.
b. $E(Y) = 1{,}1$ et $\sigma(Y) \approx 0{,}14$.
c. $E(Z) = 1{,}01$ et $\sigma(Z) \approx 1{,}43$.

51 **1.** $E(X) = 4{,}9$ et $\sigma(X) \approx 1{,}35$.
2. a.

y	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

z	2,4	3,6	4,8	6	7,2	8,4
$P(Z = z)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

t	2,8	3,7	4,6	5,5	6,4	7,3
$P(T = t)$	0,05	0,12	0,18	0,3	0,23	0,12

b. $E(Y) = E(X) - 2 = 2{,}9$
et $\sigma(Y) = \sigma(X) \approx 1{,}35$
$E(Z) = 1{,}2E(X) = 5{,}88$
et $\sigma(Z) = 1{,}2\sigma(X) \approx 1{,}62$
$E(T) = 0{,}9E(X) + 1 = 5{,}41$
et $\sigma(T) = 0{,}9\sigma(X) \approx 1{,}22$

52 **a.** $E(X) = 1{,}99$.
b. $E(Y) = 2{,}13$.
c. En moyenne, un candidat du premier centre fait 1,99 faute, contre 2,13 dans l'autre.
d. $\sigma(X) \approx 1{,}24$ et $\sigma(X) \approx 1{,}76$.
Le second centre a des résultats plus dispersés que le premier.

53 $E(G) = 6{,}05$ donc pour faire une marge moyenne de 45 centimes par ticket, il faut vendre un ticket $6{,}05 + 0{,}45 = 6{,}50$ €.

54 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import math

def empirique(simu,n):
    exp=[]
    for i in range(n):
        exp.append(simu())
    m=0
    s=0
    for e in exp:
        m=m+e
    m=m/n
    for e in exp:
        s=s+(e-m)**2
    s=math.sqrt(s/n)
    return m,s
```

b.

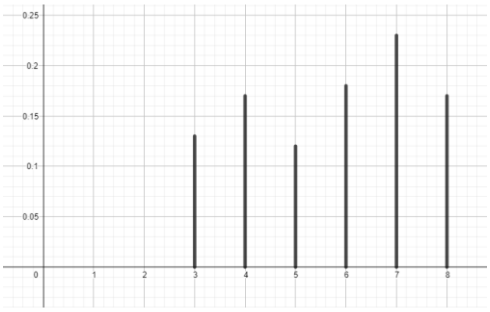
```
import math

def simu_X():
    alea=random.random()
    if alea<0.36:
        return 0
    if alea<0.67:
        return 1
    if alea<0.83:
        return 2
    if alea<0.94:
        return 3
    return 4
```

```
def simu_Y():
    alea=random.random()
    if alea<0.18:
        return 0.9
    if alea<0.38:
        return 1.0
    if alea<0.62:
        return 1.1
    if alea<0.82:
        return 1.2
    return 1.3
```

```python
def simu_Z():
    alea=random.random()
    if alea<0.03:
        return -3
    if alea<0.09:
        return -2
    if alea<0.21:
        return -1
    if alea<0.45:
        return 1
    return 2
```

c. En prenant $n = 100$, on peut trouver :
$\mathrm{E}(X) \approx 1{,}19$ et $\sigma(X) \approx 1{,}17$.
$\mathrm{E}(Y) \approx 1{,}09$ et $\sigma(Y) \approx 0{,}13$.
$\mathrm{E}(Z) \approx 1{,}05$ et $\sigma(Z) \approx 1{,}34$.

55 **a.** Variable aléatoire X :



Variable aléatoire Y :

b. $\mathrm{E}(X) = 5{,}72$ et $\sigma(X) \approx 1{,}67$.
$\mathrm{E}(Y) = 4{,}85$ et $\sigma(Y) \approx 1{,}26$.
On a $\mathrm{E}(X) > \mathrm{E}(Y)$ et $\sigma(X) > \sigma(Y)$.

56 **a.** Les trois graphiques ont un axe de symétrie d'équation $x = 25$.
On a donc $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(Z) = 25$.
b. $\sigma(Y) \leqslant \sigma(Z) \leqslant \sigma(X)$.

57 Priscilla a presque tout réussi, mais elle s'est trompée dans le calcul de l'écart entre -3 et 0,5.
Mohamed a bien calculé l'espérance, mais son calcul de variance est complètement faux : d'abord il oublie de calculer la différence entre la valeur et l'espérance, ensuite, il néglige la valeur 0, et enfin il oublie les parenthèses, qui sont nécessaires quand on met un nombre négatif au carré.

58 **a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
def Esp(Lx,Lp):
    E=0
    for i in range(len(Lx)):
        E=E+Lx[i]*Lp[i]
    return E

Lx=[-2,-1,0,1,2,5,10]
Lp=[0.3,0.2,0.2,0.1,0.1,0.05,0.05]
print(Esp(Lx,Lp))
```

b. $\mathrm{E}(X) = 0{,}25$.
c. $m = -0{,}25$.

59 $\mathrm{E}(Y) = 12{,}67$.
$\mathrm{E}(kY) = 1 \Leftrightarrow k\mathrm{E}(Y) = 1$
$\Leftrightarrow k = \frac{1}{\mathrm{E}(Y)} = \frac{1}{12{,}67} = \frac{100}{1267}$

60 $\mathrm{E}(E_1) = -0{,}21$ et $\sigma(E_1) \approx 1{,}49$.
$\mathrm{E}(E_2) = -0{,}21$ et $\sigma(E_2) \approx 1{,}36$.
Il vaut mieux choisir la marque modélisée par E_2 : elles ont la même espérance, mais il y a plus de dispersion dans les boulons de marque E_1.

61 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai.

62 $\mathrm{E}(X) = 3{,}105$ et $\sigma(X) \approx 0{,}72$; $\mathrm{E}(Y) = 3{,}045$ et $\sigma(Y) \approx 0{,}62$; $\mathrm{E}(Z) = 3{,}28$ et $\sigma(Z) \approx 0{,}82$.
a. Z **b.** Z **c.** Y

63 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Le nombre 1.0 est la somme des probabilités des issues. Il sert à voir s'il y a des erreurs de saisie.
Le nombre 2.12 est l'espérance.
Le nombre 1.4656 est la variance.

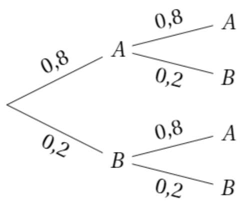
Objectif 3

Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire

64 **a.** Vrai. **b.** Faux. **c.** Vrai.

65 **a.** $6^3 = 216$.
b. $\mathrm{P(A)} = \frac{1}{216}$; $\mathrm{P(B)} = 1 - \frac{5^3}{216} = \frac{91}{216}$;
$\mathrm{P(C)} = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$.

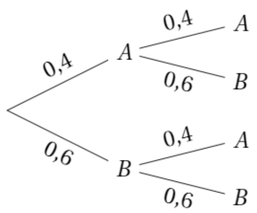
66 **1.**



2. a. $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$.
b. $\mathrm{P}(X = 0) = 0{,}2^2 = 0{,}04$
et $\mathrm{P}(X = 2) = 0{,}8^2 = 0{,}64$.
c. $\mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - 0{,}04 = 0{,}96$
$\mathrm{P}(X \leqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 2) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$.

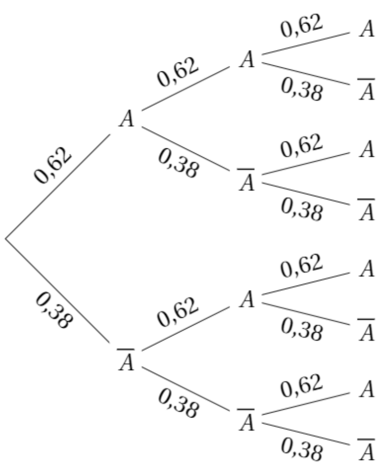
67 **a.** Victor se trompe : les expériences étant indépendantes, le fait de lancer le dé en premier ou en deuxième ne change pas la probabilité d'obtenir un 6, qui reste de $\frac{1}{6}$.
b. La probabilité que l'un des deux commence au premier tour de jeu est de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}3$.
Ce résultat n'est pas négligeable, contrairement à ce que semble croire Valentine.

68 **a.**



b. $\Omega = \{(\mathrm{A}\,;\mathrm{A})\,;(\mathrm{A}\,;\mathrm{B})\,;(\mathrm{B}\,;\mathrm{A})\,;(\mathrm{B}\,;\mathrm{B})\}$.
c. Deux personnes s'apprêtent à passer un portique de sécurité. On suppose que pour chaque personne la probabilité que le portique sonne est égale à 0,4.

69 **a.**

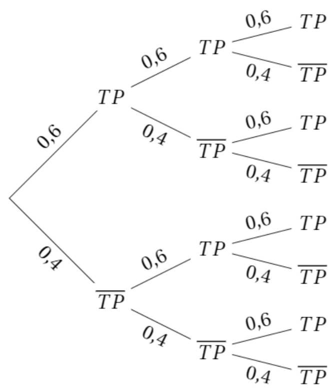


b. Soit X le nombre d'usagers abonnés.
$\mathrm{P}(X = 2) = 3 \times 0{,}62^2 \times 0{,}38 \approx 0{,}44$.
$\mathrm{P}(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3)$
$= 3 \times 0{,}62^2 \times 0{,}38 + 0{,}62^3 \approx 0{,}68$.
$\mathrm{P}(X \leqslant 2) = 1 - P(X = 3) = 1 - 0{,}62^3 \approx 0{,}76$.
c.

```
import random
def s_abonnes():
    X=0
    for ind in range(10):
        if random.random()<0.62:
            X=X+1
    return X

cpt=0
for exp in range(1000):
    if s_abonnes()==7:
        cpt=cpt+1
print(cpt/1000)
```

En exécutant ce programme, on peut trouver $\mathrm{E}(X) \approx 2{,}38$.

70 **a.**



b. Soit X le nombre de tirs primés.
$\mathrm{P(A)} = \mathrm{P}(X = 3) = 0{,}6^3 = 0{,}216$
$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0)$
$= 1 - 0{,}4^3 = 0{,}936$
$\mathrm{P(C)} = \mathrm{P}(X \leqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(X = 3)$
$= 1 - 0{,}6^3 = 0{,}784$.

71 **a.**

	1	**2**	**3**	**4**
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

$S(\Omega) = [\![2; 8]\!]$.
b.

x	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{P}(S = x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

c. P(A) = P(S = 2)+P(S = 4)+P(S = 6)+P(S = 8)

$= \frac{1+3+3+1}{16} = \frac{1}{2}$.

$P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$.

P(C) = P(S = 2) + P(S = 4) + P(S = 5) + P(S = 7) + P(S = 8)

$= \frac{1+3+4+2+1}{16} = \frac{11}{16}$

$P(D) = 1 - P(C) = \frac{5}{16}$.

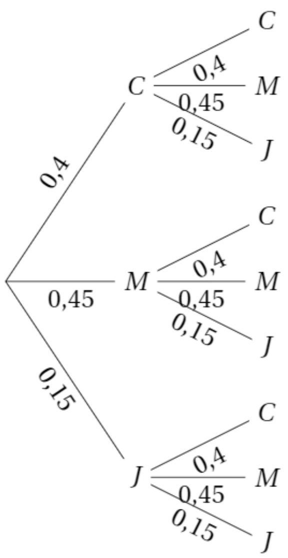
d. $P(E) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$P(F) = \left(\frac{11}{16}\right)^2 = \frac{121}{256}$.

72 **a.**

Issue	Cyan	Magenta	Jaune
Probabilité	$\frac{8}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$

b.



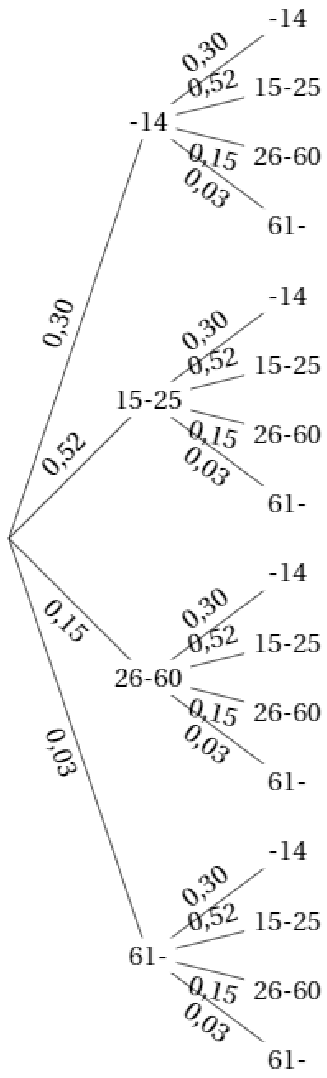
c.

g	−5	2	10
P(G = g)	0,36	0,255	0,385

d. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random

def simu_G():
    boules=[]
    for tirage in range(2):
        alea=random.randint(1,20)
        if alea<=8:
            boules.append('cyan')
        if 9<=alea<=17:
            boules.append('magenta')
        else:
            boules.append('jaune')
    if boules[0]==boules[1]:
        return 10
    else:
        if boules[0]=='jaune' or boules[1]=='jaune':
            return 2
        else:
            return -5
```

73 **1.**



2. $P(A) = 0{,}3^2 = 0{,}09$

$P(B) = 1 - 0{,}97^2 = 0{,}0591$.

3. a. $0{,}3^{10}$

b. $1 - 0{,}03^{10}$

74

	1	**2**	**3**	**4**
1	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{4}{1} = 4$
2	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{4}{2} = 2$
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3} = 1$	$\frac{4}{3}$
4	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{2}{4} = 0{,}5$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{4}{4} = 1$

a. $\frac{8}{16} = 0{,}5$ **b.** $\frac{13}{16}$.

75 **a.**

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	0,092	0,299	0,368	0,200	0,041

b. $E(X) = 1{,}8$.
Sur 4 femmes résidant en France, il y en a en moyenne 1,8 qui pratique intensivement une ou plusieurs activités physiques.

76 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. $X(\Omega) = [\![0; 10]\!]$.
b. Une expérience consiste à choisir 10 fois de suite un nombre parmi les 4 suivants :
0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4.
On appelle X le nombre de fois où le nombre 0,2 est choisi.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random

def Simu():
    l=[0.1,0.2,0.4,0.3]
    X=0
    for i in range(10):
        if l[random.randint(0,3)]==0.2:
            X=X+1
    return X

for k in range(11):
  p=0
  for m in range (10000):
    if Simu()==k:
      p=p+1
  p=p/10000
  print("P(X =",k,") = ",p)
```

Démontrer les propriétés

p. 334 et 335 du manuel

77 Démonstration de la **formule de König-Huygens** :

Pour une variable aléatoire X, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$, ainsi $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 p_i - \mathrm{E}(X)^2$.

- Pour une variable aléatoire X, $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{r} \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 p_i$
- Or $\left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 = x_i^2 - 2x_i\mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2$.
- Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \sum_{i=1}^{r} x_i^2 p_i - \sum_{i=1}^{r} 2x_i\mathrm{E}(X)p_i + \sum_{i=1}^{r} \mathrm{E}(X)^2 p_i \\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)\sum_{i=1}^{r} x_i p_i + \mathrm{E}(X)^2 \sum_{i=1}^{r} p_i \\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X) \times \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X)^2 \times 1 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - 2\mathrm{E}(X)^2 + \mathrm{E}(X)^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2.\end{aligned}$$
- Pour une variable aléatoire X, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.

78 **1. a.** $a^2 \geqslant 0$ et $a^2 = -b^2 - c^2 \leqslant 0$, donc $a^2 = 0$, c'est-à-dire $a = 0$.
b. $b^2 \geqslant 0$ et $b^2 = -c^2 \leqslant 0$, donc $b^2 = 0$, c'est-à-dire $b = 0$.
On en déduit que $c^2 = -b^2 = 0$, donc $c = 0$.
2. $\mathrm{E}(X) = x\mathrm{P}(X = x) = x \times 1 = x$ et
$$\begin{aligned}\mathrm{V}(x) &= \left(x - \mathrm{E}(X)\right)^2 \mathrm{P}(X = x) \\ &= (x - x)^2 \times 1 = 0.\end{aligned}$$
3.a. $\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{r} \left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 p_i$ et,
pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$, $\left(x_i - \mathrm{E}(X)\right)^2 p_i \geqslant 0$.
La variance de X est donc une somme de termes positifs.
b. Comme $\mathrm{V}(X) = 0$, tous ces termes sont nuls.
Or, pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, $p_i > 0$, donc :
$x_i - \mathrm{E}(X) = 0$, c'est-à-dire $x_i = \mathrm{E}(X)$.
c. On en déduit que la variable aléatoire X ne prend qu'une valeur x, égale à son espérance.

79 **1.** $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \leqslant k) - \mathrm{P}(X \leqslant k - 1)$.
2.a. $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \geqslant k) - \mathrm{P}(X \geqslant k + 1)$.
b.
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= 0\mathrm{P}(X = 0) + 1\mathrm{P}(X = 1) + 2\mathrm{P}(X = 2) + 3\mathrm{P}(X = 3) \\ &= \left(\mathrm{P}(X = 1) + \mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3)\right) + \left(\mathrm{P}(X = 2) + \mathrm{P}(X = 3)\right) + \mathrm{P}(X = 3) \\ &= \mathrm{P}(X \geqslant 1) + \mathrm{P}(X \geqslant 2) + \mathrm{P}(X \geqslant 3).\end{aligned}$$

80 **a.** $\mathrm{E}(Z) = \frac{\mathrm{E}(X)-\mu}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$.
b. $\mathrm{V}(Z) = \frac{\mathrm{V}(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$.

Problèmes

p. 336 à 339 du manuel

81 a. $\mathrm{E}(U) = \frac{36}{37}p + \frac{1}{37}(p - 36p) = \frac{p}{37}$.

b. $\frac{p}{37} = \frac{33}{37}p + \frac{4}{37}(p - xp) \Leftrightarrow \frac{p}{37} = p - \frac{4}{37}px$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{37} = 1 - \frac{4}{37}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{37}x = \frac{36}{37}$$

$$\Leftrightarrow x = 9$$

Le casino doit donc multiplier la mise du joueur par 9.

c. Voici les lois de probabilité de U dans chacun des deux cas :

$\boldsymbol{u}$	p	$-35p$
P($\boldsymbol{U = u}$)	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$\boldsymbol{u}$	p	$-8p$
P($\boldsymbol{U = u}$)	$\frac{33}{37}$	$\frac{4}{37}$

Dans le premier cas, on a :

$$\sigma(U) = \sqrt{\left(p - \frac{p}{37}\right)^2 \times \frac{36}{37} + \left(-35p - \frac{p}{37}\right)^2 \times \frac{1}{37}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{36p}{37}\right)^2 \times \frac{36}{37} + \left(\frac{-1296p}{37}\right)^2 \times \frac{1}{37}}$$

$$= \sqrt{\frac{46\,656}{1\,369}}p = \frac{216}{37}p$$

Dans le deuxième cas, on a :

$$\sigma(U) = \sqrt{\left(p - \frac{p}{37}\right)^2 \times \frac{33}{37} + \left(-8p - \frac{p}{37}\right)^2 \times \frac{4}{37}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{36p}{37}\right)^2 \times \frac{33}{37} + \left(\frac{-297p}{37}\right)^2 \times \frac{4}{37}}$$

$$= \sqrt{\frac{10\,692}{1\,369}}p \approx \frac{103{,}4}{37}p$$

Les écarts types ne sont donc pas égaux.

82 a.

```
X ← 0
Pour j allant de 1 à 3
    a nombre entier aléatoire entre 1 et 6
    Si a = 4
        X ← X + 1
    Fin Si
Fin Pour
```

b.

```
p ← 0
Pour k allant de 1 à 1 000
    X ← 0
    Pour j allant de 1 à 3
        a nombre entier aléatoire entre 1 et 6
        Si a = 4
            X ← X + 1
        Fin Si
    Fin Pour
    Si X ⩾ 2
        p ← p + 1
    Fin Si
Fin Pour
p ← p / 1 000
Afficher p
```

83 L'algorithme simule 2 000 fois l'expérience, et compte le nombre de fois où au moins 3 boules cyan ont été tirées.

84 Le nombre total de pièces étant très important, le tirage des pièces peut être assimilé à un tirage avec remise.

a. Soit X le nombre de pièces avec défaut dans un lot de 3 pièces.

$$\mathrm{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathrm{P}(X = 0) = 1 - \left(\frac{1\,950}{2\,000}\right)^3$$

$$\approx 0{,}07.$$

Jawad a donc raison.

b. Soit Y le nombre de pièces avec défaut dans un lot de 4 pièces.

$$\mathrm{P}(Y \geqslant 2) = 1 - \mathrm{P}(Y = 0) - \mathrm{P}(Y = 1)$$

$$= 1 - \left(\frac{1\,950}{2\,000}\right)^4 - 4 \times \left(\frac{1\,950}{2\,000}\right)^3 \times \frac{50}{2\,000}$$

$$\approx 0{,}003$$

Amélia a donc tort.

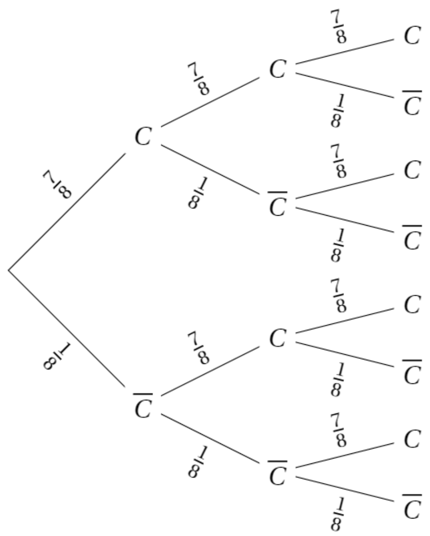
85 a. $\frac{1}{20} \times \frac{7}{20} = \frac{7}{400}$.

b. $\frac{2}{20} \times \frac{5}{20} = \frac{10}{200} > \frac{7}{400}$ donc le personnage a plus de chances de faire un coup critique.

86 a. $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$.

b. $1 - \left(\frac{215}{216}\right)^n < 0{,}9$.

87 **1. a.**



x	0	1	2	3
P(*X* = *x*)	$\left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$	$3\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\times\frac{7}{8} = \frac{21}{512}$	$3\times\frac{1}{8}\times\left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{147}{512}$	$\left(\frac{7}{8}\right)^3 = \frac{343}{512}$

b. $\mathrm{E}(X) = \frac{21}{8}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{21}{64}}$.

2. a. et **b.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
def simu():
    s=0
    for tirage in range(20):
        if random.randint(1,8)<=7:
            s=s+1
    return s

Liste=[]
for k in range(1000):
    Liste.append(simu())

def estim1():
    #Estimation de P(S=16)
    cpt=0
    for valeur in Liste:
        if valeur==16:
            cpt=cpt+1
    return cpt/1000

def estim2():
    #estimation de P(S<10)
    cpt=0
    for valeur in Liste:
        if valeur<10:
            cpt=cpt+1
    return cpt/1000

def estim3():
    #estimation de E[S]
    mu=0
    for valeur in Liste:
        mu=mu+valeur
    return mu/1000
```

On peut trouver $\mathrm{P}(S = 16) \approx 0{,}1418$; $\mathrm{P}(S < 10) \approx 0$ et $\mathrm{E}(S) \approx 17.5122$.

88 Soit X le nombre de Pile.

a. $P(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. $P(X < n) = 1 - P(X = n) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c. Tant que $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0{,}999$.

89 **1. a.**

x	0	1	2	3
P(*X* = *x*)	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{4}{25}$	$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{16}{125}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$

b. $\mathrm{P}(\mathrm{V};\mathrm{J}) + \mathrm{P}(\mathrm{V};\mathrm{V};\mathrm{J}) = \frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5} = \frac{36}{125}$.

c. $\mathrm{E}(X) \approx 2{,}632$ et $\sigma(X) \approx 0{,}976$.

2. a.

x	0	1	2	3
P(*X* = *x*)	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{10}{49}$	$\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{50}{343}$	$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343}$

b. $\mathrm{P}(\mathrm{V};\mathrm{J}) + \mathrm{P}(\mathrm{V};\mathrm{V};\mathrm{J}) = \frac{5}{7}\times\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\times\frac{5}{7}\times\frac{2}{7} = \frac{60}{343}$.

c. $\mathrm{E}(X) \approx 2{,}487$ et $\sigma(X) \approx 1{,}109$.

90 Soit $x = \mathrm{P}(X = 1)$.

La loi de X est donnée par le tableau suivant :

x	1	2	3	4	5
P(*X* = *x*)	x	$0{,}6x$	$0{,}6^2x$	$0{,}6^3x$	$0{,}6^4x$

$x + 0{,}6x + 0{,}6^2x + 0{,}6^3x + 0{,}6^4x = 1$

$\Leftrightarrow x(1 + 0{,}6 + \cdots + 0{,}6^4) = 1$

$\Leftrightarrow x\frac{1-0{,}6^5}{1-0{,}6} = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1-0{,}6}{1-0{,}6^5} = \frac{625}{1441}$

91 **a.** $\frac{d}{dx}(x_i - x)^2 = 2\times(x_i - x)\times(-1)$

$= 2(x - x_i)$.

b. $\Phi'(x) = p_1\times 2(x - x_1) + \cdots + p_r\times 2(x - x_r)$

$= 2x(p_1 + \cdots + p_r) - 2(p_1x_1 + \cdots + p_rx_r)$

$= 2x\times 1 - 2\mathrm{E}(X) = 2x - 2\mathrm{E}(X)$.

c. $\Phi'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x - 2\mathrm{E}(X) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \mathrm{E}(X)$

La fonction Φ est donc décroissante sur $]-\infty\,;\mathrm{E}(X)]$ puis croissante sur $[\mathrm{E}(X);+\infty[$.

Elle est minimale est $\mathrm{E}(X)$ et son minimum est $\Phi\big(\mathrm{E}(X)\big) = \mathrm{V}(X)$.

92 **a.** $\mathrm{E}(X) = 3{,}43$.

b. $\mathrm{E}(X^2) = 13{,}77$

donc $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 13{,}77 - 3{,}43^2$
$= 2{,}0051$

et donc $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)} \approx 1{,}416$.

93 **a.**

x	-2	0	10	100
P(X = x)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} - 5p$	$4p$	p

b. $\mathrm{E}(X) = -2 \times \frac{3}{4} + 0 \times \left(\frac{1}{4} - 5p\right) + 10 \times 4p + 100 \times p$
$= -\frac{3}{2} + 140p$.

c. $\mathrm{E}(X) = 0{,}2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} + 140p = 0{,}2$
$\Leftrightarrow p = \frac{17}{1400}$

94 **a.** Soit X le nombre de tickets gagnants.

$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$
$= 1 - 0{,}8^3 = 0{,}488 \approx 0{,}5$.

Les professeurs ont donc raison.

b. Soit Y le nombre de tickets gagnants.

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$0{,}8^4$	$4 \times 0{,}2 \times 0{,}8^3$	$6 \times 0{,}2^2 \times 0{,}8^2$	$4 \times 0{,}2^3 \times 0{,}8$	$0{,}2^4$

c. Soit x le prix d'un billet.

$1\,000x = 700 + 400 \Leftrightarrow x = 1{,}1$

Le prix à proposer pour l'achat d'un billet est donc de 1,1 €.

95 **a.** $E(C) = 0 \Leftrightarrow (x-1) \times \frac{5}{20} + (-1) \times \frac{15}{20} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{5}{20}x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$E(M) = 0 \Leftrightarrow (z-1) \times \frac{1}{10} + (-1) \times \frac{9}{10} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 10$

b. $\sigma(C) = \sqrt{(4-1)^2 \times \frac{5}{20} + (-1)^2 \times \frac{15}{20}} = \sqrt{3}$

$\sigma(M) = \sqrt{(10-1)^2 \times \frac{1}{10} + (-1)^2 \times \frac{9}{10}}$
$= \sqrt{9} = 3$

Les écarts types sont donc différents.

96 **a.**

x_i	0	1	2	3	4	5
P($X \geqslant x_i$)	1	0,85	0,64	0,38	0,20	0,06
P($X = x_i$)	0,15	0,21	0,26	0,18	0,14	0,06

b. $\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(X \geqslant x_k) - \mathrm{P}(X \geqslant x_{k+1})$.

97 **1.**

x	0	1	2	3	4
P(X = x)	$\frac{43}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{12}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{11}{86}$

2. a. $Y_1 = 4{,}5|X - 1| + 1{,}5$

y	6	1,5	6	10,5	15
P(Y_1 = y)	$\frac{43}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{12}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{11}{86}$

b. $E(Y_1) \approx 7{,}2$ secondes.

3. Soit Y_4 le temps d'attente de l'ascenseur pour un résident du quatrième étage.

$Y_4 = 4{,}5|X - 4| + 1{,}5$

y	19,5	15	10,5	6	1,5
P(Y_4 = y)	$\frac{43}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{12}{86}$	$\frac{10}{86}$	$\frac{11}{86}$

$E(Y_4) \approx 13{,}8$ secondes.

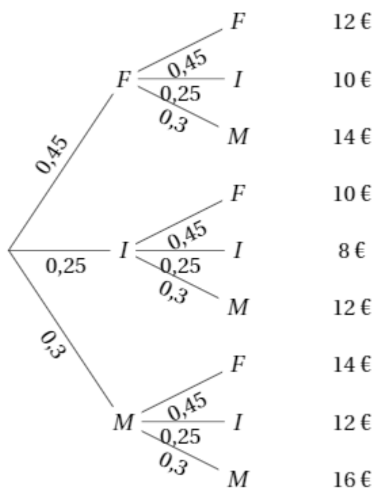
Le résident du quatrième étage attend plus en moyenne que celui du premier.

98 **1. a.**

x	4	6	8
P(X = x)	0,25	0,45	0,3

b. $\mathrm{E}(X) = 6{,}1$. En moyenne, le prix payé pour un dessert est de 6,10 €.

2. a.



b.

y	8	10	12	14	16
P(Y = y)	0,0625	0,225	0,3525	0,27	0,09

c. $E(Y) = 12{,}2$.

Le montant total moyen pour deux desserts est donc de 12,2 €.

3. a. $30 \times 6{,}1 = 183$.

Le chiffre d'affaires moyen pour la vente de desserts est donc de 183 €.

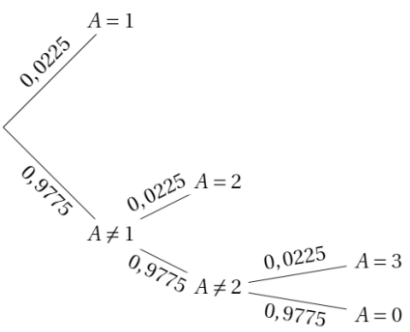
b. Augmenter chaque dessert de 1 € augmente le prix moyen d'un dessert de 1 €, et le montant total des ventes de 30 €, puisqu'il y a 30 couverts.
Multiplier le prix de chaque dessert par 1,16 permet de multiplier le prix moyen d'un dessert par 1,16, ainsi que le montant total des ventes.
Or, $183 \times 1{,}16 - 183 = 29{,}28$, donc le montant total des ventes n'est augmenté que de 29,28 €.
Seule la première proposition est satisfaisante.

99 Pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$, $0 < y_i < \sum_{j=1}^{r} y_j$ donc $0 < \frac{y_i}{\sum_{j=1}^{r} y_j} < 1$, c'est-à-dire $0 < p_i < 1$.

De plus, $\sum_{k=1}^{r} p_i = \sum_{k=1}^{r} \frac{y_k}{\sum_{j=1}^{r} y_j} = \frac{\sum_{k=1}^{r} y_k}{\sum_{j=1}^{r} y_j} = 1$.

Le tableau définit donc bien une loi de probabilité.

100 **1.**



$\mathrm{P}(A = 1) = 0{,}025$
$\mathrm{P}(A = 2) = 0{,}9775 \times 0{,}0225 \approx 0{,}022$
$\mathrm{P}(1 \leqslant A \leqslant 2) = \mathrm{P}(A = 1) + \mathrm{P}(A = 2) \approx 0{,}047$

2. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random

def simu_137Cs():
    A=1
    while random.random()>0.0225 and A<=120:
        A=A+1
    if A>120:
        return 0
    return A

def estimation(n):
    s=0
    for exp in range(n):
        if 1<=simu_137Cs()<=30:    #remplacer 30 par 60 pour la question 2b
            s=s+1
    return s/n
```

En exécutant l'instruction `estimation(10000)`, on peut trouver $\mathrm{P}(1 \leqslant A \leqslant 30) \approx 0{,}4944$.
La demi-vie est la période au bout de laquelle la moitié des atomes de césium sont désintégrés.
En remplaçant 30 par 60 dans le programme ci-dessus, on peut trouver $\mathrm{P}(1 \leqslant A \leqslant 60) \approx 0{,}7499$.

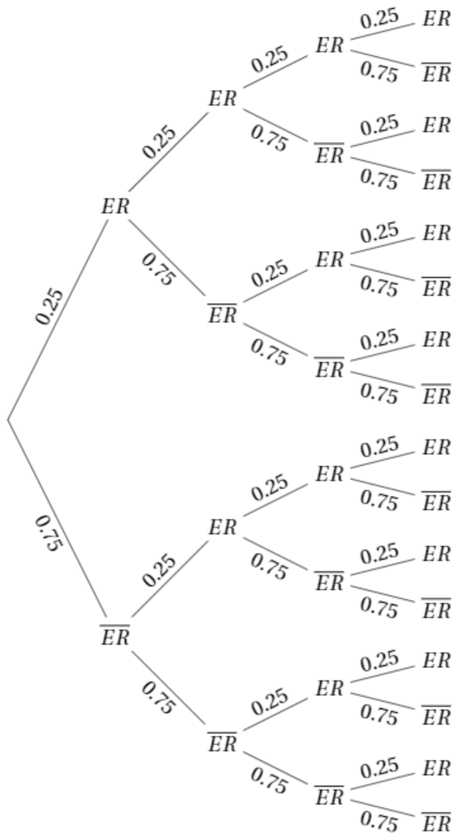
c.

```
def esperance(n):
  e=0
  for exp in range(n):
    e=e+simu_137Cs()
  return e/n
```

En exécutant l'instruction `esperance(10000)`, on peut trouver $E(X) \approx 33{,}67292$.
La durée de vie moyenne d'un atome de césium 137 est donc d'environ 34 ans.

101 **1.a.** $\frac{3}{4}$. **b.** $\frac{1}{4}$.

2. a.



b. $P(R \geqslant 1) = 1 - P(R = 0)$
$= 1 - 0{,}75^4 \approx 0{,}68$.
Il y a donc plus d'une chance sur deux qu'au moins un des enfants présente l'expression récessive.
c. $\mathrm{E}(R) = 1$.
En moyenne, les deux individus auront un descendant (sur les quatre) qui présentera l'expression récessive.

102 Commençons avec une série comprenant au plus n lancers :
$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2}(1-m) + \frac{1}{4}(2-m) + \cdots + \frac{1}{2^n}(2^{n-1} - m) + \frac{1}{2^n}(-m)$
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}m + \cdots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}m - \frac{1}{2^n}m$
$= \frac{n}{2} - m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2} - m.$
Pour que le jeu soit équilibré, il faut que $m = \frac{n}{2}$.
Si on joue sans limite pour le nombre de lancers, alors on fait tendre n vers l'infini, et la mise doit aussi être infinie.

103 Soit x le nombre de jetons « 1 ». On a $3x$ jetons « 3 », $6x$ jetons « 2 », et $2x$ jetons « 4 ».
$\mathrm{P}(G = g) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(3)$
$= \frac{x}{12x} + \frac{3x}{12x} = \frac{1}{3}$
et $\mathrm{P}(G = -h) = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(4)$
$= \frac{6x}{12x} + \frac{2x}{12x} = \frac{2}{3}.$
On a donc $\mathrm{E}(G) = g \times \frac{1}{3} - h \times \frac{2}{3} = \frac{g-2h}{3}$ et
$\mathrm{V}(G) = \mathrm{E}(G^2) - \mathrm{E}(G)^2$
$= \frac{g^2-2h^2}{3} - \left(\frac{g-2h}{3}\right)^2$
$= \frac{3g^2-6h^2}{9} - \frac{g^2-4gh+4h^2}{9}$
$= \frac{2g^2-10h^2+4gh}{9}$

$$\begin{cases}\mathrm{E}(G) = -1 \\ \mathrm{V}(G) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{g-2h}{3} = -1 \\ \frac{2g^2-10h^2+4gh}{9} = 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = 2h-3 \\ 2(2h-3)^2 - 10h^2 + 4(2h-3)h = 9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = 2h-3 \\ 6h^2 - 36h + 9 = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} g = 2h-3 \\ 2h^2 - 12h + 3 = 0\end{cases}$$
Résolvons l'équation $2h^2 + 12h + 3 = 0$:
$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4 \times 2 \times 3 = 120 > 0.$
Donc il y a deux racines :
$h_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-\sqrt{120}}{4} \approx 0{,}26$
et $h_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+\sqrt{120}}{4} \approx 5{,}74.$
On trouve alors :
$g_1 = 2h_1 - 3 \approx -2{,}48$ et $g_2 = 2h_2 - 3 \approx 8{,}48.$
Comme $g \geqslant 0$, on ne retient que la deuxième solution : on doit donc avoir $g = 8{,}48$ € et $h = 5{,}74$ €.

104 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
def completer(n):
    collection=[]
    jour=0
    for i in range(n):
        collection.append(0)
    while 0 in collection:
        alea=random.randint(0,n-1)
        collection[alea]=collection[alea]+1
        jour=jour+1
    return jour
```

Pour calculer l'espérance, on ajoute :

```
def esperance(n):
    #permet d'estimer le nombre de jours nécessaires
    #pour compléter la collection de n objets
    mu=0
    for k in range(1000):
        mu=mu+completer(n)
    return mu/1000
```

Avec $n = 10$, on peut trouver 29,3606.

105 À chacune des deux étapes, la probabilité de s'arrêter en A est de $\frac{1}{3}$.

x	0	1	2
P(*X* = *x*)	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

106 **1. a.** Si la particule se déplace uniquement vers la gauche, elle arrive en -4, et si elle se déplace uniquement vers la droite, elle arrive en 4. X est donc compris entre -4 et 4.
D'autre part, au premier pas elle arrive sur un nombre impair, au deuxième un nombre pair, au troisième un nombre impair, et au quatrième un nombre pair. X est donc un nombre pair.
b. On pose $q = 1 - p$. En comptant le nombre de chemins menant à une valeur x, on trouve :

x	-4	-2	0	2	4
P(*X* = *x*)	q^4	$4 \times q^3 \times p$	$6 \times q^2 \times p^2$	$4 \times q \times p^3$	p^4

c.

p	0,1	0,25	0,4	0,5	0,6	0,75	0,9
E(*X*)	$-3{,}2$	-2	$-0{,}8$	0	0,8	2	3,2
σ(*X*)	1,2	$\approx 1{,}73$	$\approx 1{,}96$	≈ 2	$\approx 1{,}96$	$\approx 1{,}73$	1,2

Algorithmique et programmation

Test diagnostique

p. 344 du manuel

Lire

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

a. L'instruction de la ligne 1 permet d'importer le module Turtle.
b. Ce programme comporte deux variables : *n* et *d*.
c. *n* est un nombre entier ; *d* est un nombre décimal (ou flottant).
d. La ligne 2 invite l'utilisateur à saisir une valeur qui sera affectée à la variable *n* ; la valeur saisie doit être un nombre entier.
e. La tortue va se déplacer *n* fois.
f. Si *n* prend la valeur 8, alors la valeur finale de *d* est $10,5 + 5 \times 8 = 50,5$.

Comprendre

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

1. Le programme c. correspond à la situation 1.
Le programme a. correspond à la situation 2.
2. Situation pouvant être modélisée par le programme b. :

On lance un premier dé. On lance un second dé autant de fois qu'indiqué par le résultat du premier dé. On compte le nombre de résultats strictement inférieurs à 4 obtenus avec le second dé.

Compléter

1.

```
Fonction hypo(AB, AC, BC)
  h ← AB
  Si AC > AB et AC > BC
     alors h ← AC
  Fin Si
  Si BC > AB et BC > AC
     alors h ← BC
  Fin Si
  Renvoyer h
Fin Fonction
```

```
Fonction aire(AB, AC, BC)
  a ← AB × AC ÷ 2
  h ← hypo(AB, AC, BC)
  Si AB = h
     alors a ← AC × BC ÷ 2
  Fin Si
  Si AC = h
     alors a ← AB × BC ÷ 2
  Fin Si
  Renvoyer a
Fin Fonction
```

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a. `prima(8)` vaut False ; `prima(11)` vaut True ; `prima(17)` vaut True.
`prima(1)` vaut True du fait de la construction du programme, mais devrait valoir False car 1 n'est pas un nombre premier (il possède un unique diviseur : lui-même).
b. La **fonction** `prima` prend en **paramètre** *n*, un nombre entier ($n > 1$), et renvoie un **booléen** indiquant si *n* est **premier** ou non.

Unité A

Variables et instructions conditionnelles

p. 345 du manuel

Réactivation

p. 345 du manuel

► *Les exercices* **1**, **3** *et* **4** *sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

2 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
print("Dans a/b et c/d,")
a=int(input("Entrer a : "))
b=int(input("Entrer b non nul: "))
c=int(input("Entrer c : "))
d=int(input("Entrer d non nul : "))
print(a,"/",b,"+",c,"/",d,"=",a*d+b*c,"/",b*d)
```

5 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
# On se contentera ici de longueurs entières.
print("Dans ce triangle :")
a=int(input("Entrer a : "))
b=int(input("Entrer b : "))
c=int(input("Entrer c : "))
if a<=b+c and c<=a+b and b<=a+c:
    print("Ce triangle est constructible.")
else:
    print("Ce triangle n'est pas constructible.")
```

6 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
T=float(input("Taille (en cm) ? "))
A=int(input("Âge (en années)? "))
M=str(input("Morphologie (normale,large,gracile)? "))

if M=="normale":
    k=1
if M=="large":
    k=1.1
if M=="gracile":
    k=0.9
P=0.9*k*(T-100+A/10)
print("Poids selon la formule de Creff :",P,"kg")
```

Unité B
Boucles bornées et non bornées
p. 346 du manuel

Réactivation
p. 346 du manuel

► *Les exercices **7**, **8** et **10** sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

9 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
V=0
f=0.05
t=0
while V<500000:
    t=t+1
    V=V+f
    if t%60==0:
        f=f*1.2
print("Baignoire remplie en",t,"s.")
```

11 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
import random
cpt=0
for simu in range(10000):
   piece=random.randint(0,1)
   if piece==0:
      de=random.randint(1,6)
   else:
      de=random.randint(1,10)
   if de==5:
      cpt=cpt+1
print("Probabilité :",cpt/10000)
```

Unité C
Les fonctions
p. 347 du manuel

Réactivation
p. 347 du manuel

► *Les exercices **12**, **13** et **15** sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

14 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a.

```
def droite(x1,y1,x2,y2):
   a=y2-y1
   b=x1-x2
   c=-a*x1-b*y1
   return [a,b,c]
```

b.

```
def alignement(x1,y1,x2,y2,x3,y3):
   a,b,c=droite(x1,y1,x2,y2)
   if a*x3+b*y3+c==0:
      return True
   return False
```

16 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def inter(a,b,c,d):
   if a>b or c>d or b<c:
      return "Vide"
   if a<c:
      if b==c:
         return "{"+str(b)+"}"
      if b>c and b<=d:
         return "["+str(c)+";"+str(b)+"]"
      if b>d:
         return "["+str(c)+";"+str(d)+"]"
   else:
      if a<d:
         if b<=d:
            return "["+str(a)+";"+str(b)+"]"
         if b>d:
            return "["+str(a)+";"+str(d)+"]"
      if a==d:
            return "{"+str(a)+"}"
      return "Vide"
```

Unité D
Les listes

p. 348 à 354 du manuel

Activités

p. 348 et 349 du manuel

1 Liste et géométrie

Voir les fichiers ressources dans le manuel numérique enseignant.

1. a.

```
import turtle

def triangle(x1,y1,x2,y2,x3,y3) :
  turtle.up()
  turtle.goto(x1,y1)
  turtle.down()
  turtle.goto(x2,y2)
  turtle.goto(x3,y3)
  turtle.goto(x1,y1)
  turtle.up()

triangle(250,200,-250,200,0,-150)
```

b., c. et d.

```
import turtle

def triangle(A,B,C) :
  turtle.up()
  turtle.goto(A[0],A[1])
  turtle.down()
  turtle.goto(B[0],B[1])
  turtle.goto(C[0],C[1])
  turtle.goto(A[0],A[1])
  turtle.up()

M=[250,200]
N=[-250,200]
P=[0,-150]

triangle(M,N,P)
```

2. a. et b.

```
import turtle

def triangle(A,B,C):
  turtle.up()
  turtle.goto(A[0],A[1])
  turtle.down()
  turtle.goto(B[0],B[1])
  turtle.goto(C[0],C[1])
  turtle.goto(A[0],A[1])
  turtle.up()

def milieu(A,B):
    xM=(A[0]+B[0])/2
    yM=(A[1]+B[1])/2
    return [xM,yM]

M=[250,200]
N=[-250,200]
P=[0,-150]

triangle(M,N,P)
M1=milieu(M,N)
M2=milieu(N,P)
M3=milieu(M,P)
triangle(M1,M2,M3)
turtle.hideturtle()
```

c.

```
triangle(M,N,P)
for t in range(5):
    M1=milieu(M,N)
    M2=milieu(N,P)
    M3=milieu(M,P)
    triangle(M1,M2,M3)
    M=M1
    N=M2
    P=M3
turtle.hideturtle()
```

2 Liste et série statistique

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

1.

```
def MAX(L):
    m=L[0]
    for e in L:
        if e>m:
            m=e
    return m
```

2.

```
def MIN(L):
    m=L[0]
    for e in L:
        if e<m:
            m=e
    return m

def Etendue(L):
    return MAX(L)-MIN(L)
```

3 Liste et simulation

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

1. a. Liste [1,1,2,5,6] : 1 victoire.
Liste [1,3,3,2,2] : 2 victoires.
Liste [2,1,2,1,5] : 0 victoire.
Liste [1,2,2,2,6] : 2 victoires.
Liste [1,1,1,2,2] : 3 victoires.

b.

```
import random

def jet():
    resultat=[]
    for i in range(5):
        resultat.append(random.randint(1,6))
    return resultat
```

2.

```
def victoire(L):
    n_victoire=0
    for i in range(0,4):
      if L[i]==L[i+1]:
         n_victoire=n_victoire+1
    return n_victoire
```

► *Les exercices* **17** *à* **19** *de la rubrique «* **Application** *» sont corrigés en fin de manuel (p. 368).*

Exercices

p. 353 et 354 du manuel

Voir les fichiers ressources dans le manuel numérique enseignant.

20 **a.** et **b.**

```
def losange(M,N,P,Q):
    c1=(N[0]-M[0])**2+(N[1]-M[1])**2
    c2=(P[0]-N[0])**2+(P[1]-N[1])**2
    c3=(Q[0]-P[0])**2+(Q[1]-P[1])**2
    c4=(M[0]-Q[0])**2+(M[1]-Q[1])**2
    if c1==c2 and c2==c3 and c3==c4 and c4==c1:
        return True
    else:
        return False

A=[3,4]
B=[0,3]
C=[-1,0]
D=[2,1]

print(losange(A,B,C,D))
```

En exécutant ce programme, on obtient True.

21 **a.** et **b.**

```
def parallelogramme(A,B,C):
    D=[0,0]
    D[0]=C[0]+(B[0]-A[0])
    D[1]=C[1]+(B[1]-A[1])
    return D

A=[12,1]
B=[-5,6]
C=[7,5]

print(parallelogramme(A,B,C))
print(parallelogramme(C,B,A))
print(parallelogramme(B,A,C))
```

En exécutant ce programme, on obtient :

```
[-10, 10]
[0, 2]
[24, 0]
```

22 **a.** La fonction *mystere* range dans l'ordre croissant les nombres de la liste.

b.

```
def mystere(L):
    for i in range(len(L)-1,0,-1):
        for j in range(0,i,1):
            if L[j]>L[j+1]:
                temp=L[j]
                L[j]=L[j+1]
                L[j+1]=temp
    return(L)
```

23 **a.**

```
def div(n,L):
    for e in L:
        if e%n!=0 or e<n:
            return False
    return True
```

b.

```
def div_commun(L):
    diviseurs=[]
    d=1
    #Aucun diviseur commun n'est supérieur à un élément de L
    #En particulier, supérieur au premier élément L[0].
    while d<=L[0]:
        if div(d,L):
            diviseurs.append(d)
        d=d+1
    return diviseurs
```

c.

```
>>> div_commun([4200,2940,3432])
[1, 2, 3, 4, 6, 12]
>>> 4200*2940*3432/(12**3)
24524500.0
```

24 **1. a.** La valeur de la médiane de la liste L vaut 5.

1. b. Une valeur de la médiane de la liste S vaut 4,5.

2.

```
def mediane(L):
    L.sort()
    n=len(L)
    if n%2==0:
        return(L[n//2-1]+L[n//2])/2
    else:
        return L[n//2]
```

3.

```
def quartiles(L):
    L.sort()
    n=len(L)
    if n%4==0:
        q1=L[n//4-1]
        q3=L[3*n//4-1]
    else:
        q1=L[n//4]
        q3=L[3*n//4]
    return [q1,q3]
```

25 a.

```
def compter(L,n,p):
    total=0
    for e in L:
        if abs(n-e)<=p:
            total=total+1
    return total
```

b.

```
>>> L=[1,5,3,10,12,15,11,8,7,6,4,7]
>>> compter(L,9,3)
7
```

26 a. On applique le théorème de Thalès :

$$\frac{EM}{EF} = \frac{MN}{FG}$$

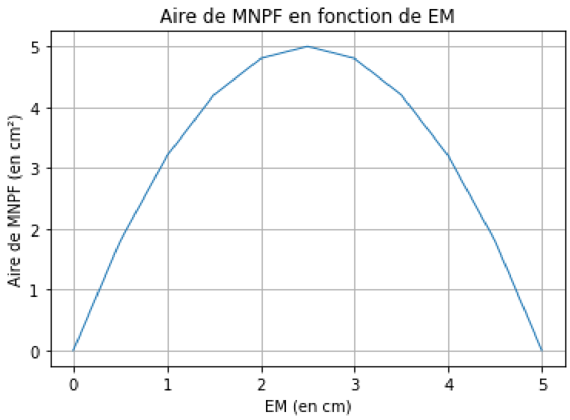
Avec x = EM, on obtient MN = $0{,}8x$.

D'où $\mathcal{A}(x) = 0{,}8x(5 - x)$.

b.

```
import matplotlib.pyplot as graph

def Aire(a,b,p):
    x=a
    EM=[]
    Aire=[]
    while x<b+p:
        EM.append(x)
        Aire.append(0.8*x*(5-x))
        x=x+p
    graph.plot(EM,Aire,linewidth=1)
    graph.title("Aire de MNPF en fonction de EM")
    graph.xlabel("EM (en cm)")
    graph.ylabel("Aire de MNPF (en cm²)")
    graph.grid()
    graph.show()
```

c. En appelant `Aire(0,5,0.5)` dans la console :



L'aire du rectangle semble maximale pour $x = 2{,}5$ cm.

27 a. Factoriser(468) renvoie la décomposition de 468 en produit de facteurs premiers sous la forme d'une liste : [2, 2, 3, 3, 13].

b.

```
def Factoriser1(n):
    div=2
    L=[]
    while n>1:
        while n%div==0:
            L.append(div)
            n=n/div
        div=div+1
    return L
```

c.

```
def Factoriser2(n):
    div=2
    L=[]
    while n>1:
        e=0
        while n%div==0:
            e=e+1
            n=n/div
        if e==1:
            L.append(str(div))
        if e>1:
            L.append(str(div)+"^"+str(e))
        div=div+1
    return L
```

28 a.

```
def ranger(L,R):
    m=max(L)
    L.remove(m)
    R.append(m)
    if len(L)>0:
        return ranger(L,R)
    else:
        return R
```

b.

```
def ranger2(L,R):
    while len(L)>0:
        m=max(L)
        L.remove(m)
        R.append(m)
    return R
```

29 **1.** La liste L contient [0.0, 0.3, 0.6, 0.9].

2.a. et b.

```
A=[i for i in range(1000) if i%2==1]
B=[i for i in range(-200,201) if i%5==0]
```

3.a. H est la liste des nombres entre –100 et 100 dont la valeur absolue est strictement supérieure à 95.

b. M est la liste des multiples de 3 divisibles par 2 entre 90 et 117.

c. R est la liste des nombres entre 0 et 100 divisibles par 5 et divisés par 100.

d. N correspond aux nombres de la liste H divisés par 2.

e. P correspond à l'intersection des listes M et H.

4. H : [-100, -99, -98, -97, -96, 96, 97, 98, 99, 100]

M : [90, 96, 102, 108, 114]

R : [0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.0]

N : [-50.0, -49.5, -49.0, -48.5, -48.0, 48.0, 48.5, 49.0, 49.5, 50.0]

P : [96]

5.

```
#H=[i for i in range(-100,101) if abs(i)>95]
H=[]
for i in range(-100,101):
    if abs(i)>95:
        H.append(i)

#M=[3*i for i in range(30,40) if i%2==0]
M=[]
for i in range(30,40):
    if i%2==0:
        M.append(3*i)

#R=[i/100 for i in range(0,101) if i%5==0]
R=[]
for i in range(0,101):
    if i%5==0:
        R.append(i/100)

#N=[i/2 for i in H ]
N=[]
for i in H:
    N.append(i/2)

#P=[i for i in M if i in H]
P=[]
for i in M:
    if i in H:
        P.append(i)
```

30 **a.** *Remarque : il faut modifier le nom du fichier "montexte.txt" pour charger votre propre fichier. Ce fichier doit être dans le même répertoire que le fichier Python*

```
fichier=open("montexte.txt", "r")
ch=fichier.read()
ch=ch.lower()
L=list(ch)

def frequence(L):
    alphabet=["a","b","c","d","e","f","g","h",
              "i","j","k","l","m","n","o","p",
              "q","r","s","t","u","v","w","x",
              "y","z"]
    freq=[]
    total=0
    for lettre in alphabet:
        freq.append(L.count(lettre))
    total=0
    for n in freq:
        total=total+n
    for i in range(0,len(freq)):
        freq[i]=100*freq[i]/total
    return freq
```

b.

```
def analyse(f):
    f=frequence(L)
    #f[0] est la fréquence d'apparition de "a"
    if abs(f[0]-7.5)>abs(f[0]-14.5):
        return "portugais"
    #f[7] est la fréquence d'apparition de "h"
    if abs(f[7]-0.7)<abs(f[7]-2.3):
        return "français"
    return "néerlandais"


print("Il est probable que ce texte soit en ",analyse(L))
```

Projet 1 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a.

```
import random

def transfert(urnes):
    total=urnes[0]+urnes[1]
    if random.randint(1,total)<=urnes[0]:
        urnes[0]=urnes[0]-1
        urnes[1]=urnes[1]+1
    else:
        urnes[0]=urnes[0]+1
        urnes[1]=urnes[1]-1
```

b.

```
def temps_retour(urnes):
    temps=1
    n=urnes[0]
    transfert(urnes)
    while urnes[0]!=n:
        transfert(urnes)
        temps=temps+1
    return(temps)
```

c.

```
def temps_moyen(n):
    temps=0
    for i in range(10000):
        temps=temps+temps_retour([n,0])
    return temps/10000
```

d.

```
for p in range(1,9):
    print("Calcul pour ",p," particules en cours...")
    print(temps_moyen(p))
```

On obtient :

```
Calcul pour  1  particules en cours...
2.0
Calcul pour  2  particules en cours...
4.0372
Calcul pour  3  particules en cours...
8.0284
Calcul pour  4  particules en cours...
15.8382
Calcul pour  5  particules en cours...
31.8204
Calcul pour  6  particules en cours...
63.157
Calcul pour  7  particules en cours...
127.9526
Calcul pour  8  particules en cours...
255.7446
```

Projet 2 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

a.

```
import random

def nouveau_sommet(position, interdit):
    if position=="A":
        choix=["E","B","D"]
    if position=="B":
        choix=["A","C","F"]
    if position=="C":
        choix=["G","D","B"]
    if position=="D":
        choix=["A","C","H"]
    if position=="E":
        choix=["A","F","H"]
    if position=="F":
        choix=["E","G","B"]
    if position=="G":
        choix=["H","C","F"]
    if position=="H":
        choix=["E","G","D"]
    if interdit == "aucun":
        alea=random.randint(0,2)
    else:
        choix.remove(interdit)
        alea=random.randint(0,1)
    return choix[alea]
```

b.

```
def creer_chemin(L):
    som_actuel="A"
    som_ancien="aucun"
    chemin=["A"]
    for i in range(L):
        som_actuel=nouveau_sommet(som_actuel,som_ancien)
        som_ancien=chemin[len(chemin)-1]
        chemin.append(som_actuel)
    return chemin
```

c.

```
def frequence(L):
    total=0
    for i in range(100000):
        if "G" in creer_chemin(L):
            total=total+1
    return(total/100000)
```

d.

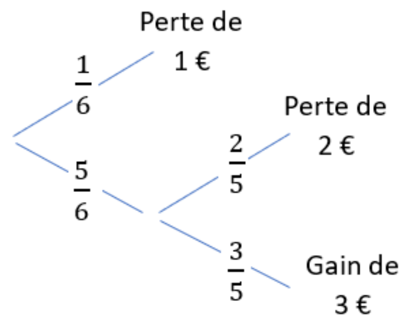
```
longueur=3
freq=frequence(3)
while freq<0.95:
    print("longueur :",longueur," probabilité :",freq)
    longueur=longueur+2
    freq=frequence(longueur)

print("longueur :",longueur," probabilité :",freq)
```

On conjecture que la longueur minimale du chemin que la fourmi doit parcourir pour passer par le sommet G avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95 est de 15.

Problèmes interchapitres

1 Partie A

1. a.



X prend pour valeurs : -2 ; -1 et $+3$.

$P(X = -1) = \frac{1}{6}$.

$P(X = -2) = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$.

$P(X = 3) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$.

b. À la main ou avec la calculatrice :

$E(X) = -1 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

$V(X) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^2 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3} + 2\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - 3\right)^2 = \frac{50}{9}$.

Ou

$V(X) = (-1)^2 \times \frac{1}{6} + (-2)^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{50}{9}$.

D'où $\sigma(X) = \sqrt{\frac{50}{9}} = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

2. Les points ont pour coordonnées : A(–1 ; 0), B(–2 ; 0) et C(3 ; 0).

a. Donc $\overrightarrow{OG}$ a pour abscisse : $-\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = E(X)$ et pour ordonnée 0.

b. $\frac{1}{6} \times GA^2 + \frac{1}{3} \times GB^2 + \frac{1}{2} \times GC^2$

$= \frac{1}{6}((-1) - E(X))^2 + \frac{1}{3}(-2 - E(X))^2 + \frac{1}{2}(3 - E(X))^2$

$= \frac{36 - 8E(X) + 6E(X)^2}{6}$

$= 6 - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{9} = 6 - \frac{8}{9} + \frac{4}{9}$

$= 6 - \frac{4}{9} = \frac{50}{9}$

$= V(X)$.

Partie B

En reprenant le point info :

$\overrightarrow{OU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OR} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OS} + \frac{5}{12}\overrightarrow{OT}$, on cherche ainsi un jeu dont l'espérance est : –1,5. On lance un dé parfaitement équilibré, si on obtient un 6, on gagne 6 € dans les autres cas, on perd 3 €.

2 a. On calcule le discriminant :

$1 - 4 \times 2 \times (-1) = 9$.

On obtient deux racines réelles distinctes : $\frac{-1-3}{4}$ et $\frac{-1+3}{4}$, après simplification : –1 et 0,5.

b. En posant $x = \cos(t)$, et en constatant que $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t) = 1 - x^2$, on obtient :

$(-1 + x^2) + x + x^2 = 0$, soit $2x^2 + x - 1 = 0$.

Ainsi : $\cos(t) = -1$ ou $\cos(t) = \frac{1}{2}$.

$x = \pi\ [2\pi]$ ou $x = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

c. D'après **a.** et **b.**, on peut factoriser l'expression en : $2(1 + \cos(t))(\cos(t) - \frac{1}{2})$.

Le facteur $1 + \cos(t)$ étant toujours positif, le signe de $-\sin^2(t) + \cos(t) + \cos^2(t)$ est celui de $\cos(t) - \frac{1}{2}$.

Donc cette expression est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{3}\right[$.

3 Ici $\lambda = 10$, donc $P(X = 5) = e^{-10}\frac{10^5}{5!} \approx 0{,}038$.

4 a. $P(X = 0) = \frac{109}{200}$; $P(X = 1) = \frac{65}{200}$;

$P(X = 2) = \frac{22}{200}$; $P(X = 3) = \frac{3}{200}$ et $P(X = 4) = \frac{1}{200}$.

$E(X) = \frac{65 + 44 + 9 + 4}{200} = \frac{61}{100}$.

$V(X) = \frac{65 + 88 + 27 + 16}{200} - \frac{61^2}{100^2} = \frac{6\,079}{10\,000}$.

b. Donc $\lambda = \frac{61}{100}$.

$P(X = 0) = e^{-0{,}61}\frac{0{,}61^0}{0!} \approx 0{,}54$.

$P(X = 1) = e^{-0{,}61}\frac{0{,}61^1}{1\,!} \approx 0{,}33$.

$P(X = 2) = e^{-0{,}61}\frac{0{,}61^2}{2\,!} \approx 0{,}10$.

$P(X = 3) = e^{-0,61}\frac{0,61^3}{3\,!} \approx 0,021$.

$P(X = 4) = e^{-0,61}\frac{0,61^4}{4!} \approx 0,003$.

Les valeurs obtenues sont très proches de celles du **a.** ; la modélisation semble justifiée.

5 a. $u_{n+1} - u_n = \frac{-(n+1)^2}{n} + \frac{n^2}{n-1}$

$= \frac{-(n+1)^2(n-1)+n^2n}{n(n-1)}$

$= \frac{-n^2+n+1}{n(n-1)}$

b. Comme $n(n-1) > 0$, le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend uniquement de celui de $-n^2 + n + 1$.

Étudions le signe de $-x^2 + x + 1$, le discriminant est égal à 5, d'où deux racines réelles distinctes :

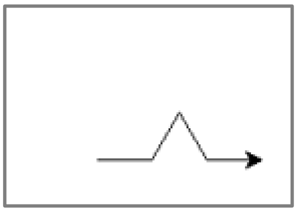
soit $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ soit $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Mais ici n ne prend que des valeurs entières supérieures à 2, donc $n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et donc $-n^2 + n + 1$ est strictement négatif (il est du signe du coefficient du x^2 en dehors des racines). Ainsi la suite est décroissante.

6 **1. a.** La ligne brisée mesure $\frac{4}{3} \times$ AB $= \frac{4}{3}$ cm.

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

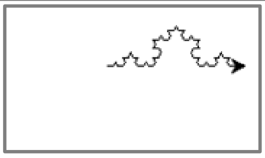
```
import turtle

def vonkoch_1(longueur):
    turtle.forward(longueur/3)
    turtle.left(60)
    turtle.forward(longueur/3)
    turtle.right(120)
    turtle.forward(longueur/3)
    turtle.left(60)
    turtle.forward(longueur/3)
```



c. La longueur de la ligne brisée dans ce cas est : $\left(\frac{4}{3}\right)^2 \times$ AB.

d. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def vonkoch(n,longueur):
    if n==1:
        vonkoch_1(longueur)
    else:
        longueur=longueur/3
        vonkoch(n-1,longueur)
        turtle.left(60)
        vonkoch(n-1,longueur)
        turtle.right(120)
        vonkoch(n-1,longueur)
        turtle.left(60)
        vonkoch(n-1,longueur)
```



2. a. $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{4}{3}$ et $u_2 = \frac{16}{9}$.

b. On a $u_n = \frac{4}{3}\,u_{n-1}$: la suite est géométrique de raison $\frac{4}{3}$.

c. $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

7 **1. a.** Le sommet a pour abscisse : $x = \frac{1,5}{0,5} = 3$ et pour ordonnée $f(3) = 4$. Donc S(3 ; 4).

Il reste à résoudre : $-0,25x^2 + 1,5x + 1,75 = 0$.

Le discriminant est égal à 4. On obtient deux racines réelles distinctes : $x = -1$ ou $x = 7$.

On ne conserve que la solution réelle positive : $x = 7$. Donc A(7 ; 0).

b. On a $y = mx + p$.

On calcule $m = \frac{4-0}{3-7} = -1$. À ce stade, $y = -x + p$, de plus les coordonnées de S vérifient l'équation ; d'où : $p = 4 + 1 \times 3 = 7$, soit : $y = -x + 7$.

2. À partir des coordonnées de A et de S, on obtient les coordonnées de $\overrightarrow{AS}(-4\,;4)$, et

$AS = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

M(4 ; 3,75) ; H(x, $-x + 7$). De plus $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AS} = 0$.

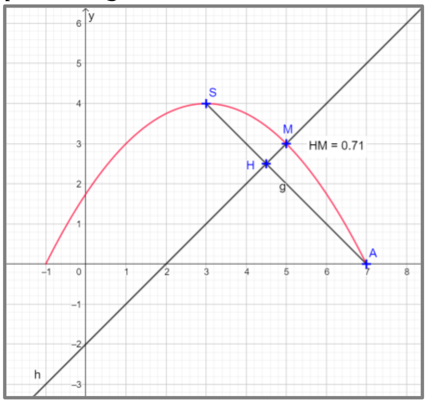
D'où : $-8x + 29 = 0$, ce qui donne :

$x = \frac{29}{8} = 3,625$.

Donc H(3,625 ; 3,375), $\overrightarrow{MH}(-0,375\,; -0,375)$, et

$MH = \sqrt{0,28125} \approx 0,53$.

3. a. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

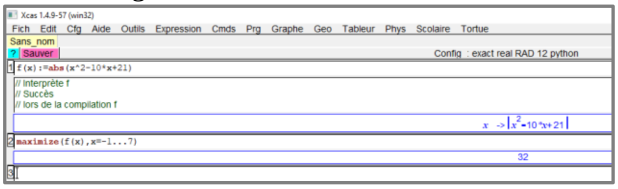


b. On a M(x ; $-0{,}25x^2 + 1{,}5x + 1{,}75$) et H($a$; $-a + 7$).

De plus $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{AS} = 0$, d'où : $x^2 - 2x + 21 - 8a = 0$ et $a = \frac{x^2-2x+21}{8}$.

Donc $MH = \frac{|x^2-10x+21|}{8}\sqrt{2}$ (distance en fonction de la variable réelle x).

Avec un logiciel de calcul formel :



D'où une valeur de MH maximale égale à :

$\frac{32}{8}\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \approx 5{,}66$ pour $x = -1$, si on accepte que le renfort peut se faire par le dessous. Si le renfort ne se fait que par le dessus, alors on s'intéresse au maximum entre 3 et 7, on obtient alors :

$MH = \frac{4}{8}\sqrt{2} \approx 0{,}71$ pour $x_M = 5$.

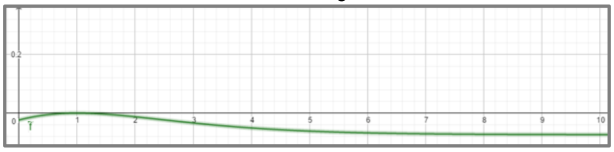
8 Partie A

a. On calcule $f'(x) = 0{,}05(x + 1)e^{-x}(2 - (x + 1))$
$= 0{,}05e^{-x}(1 - x^2)$.

b. Ainsi $f'(x)$ est positive sur [0 ; 1], et négative ailleurs.

c. On rappelle l'équation générale d'une tangente : $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$ et $y = \frac{0{,}2}{e} + 0{,}05$.

À l'aide de Geogebra, et en construisant la courbe représentative de $x \to f(x) - (\frac{0{,}2}{e} + 0{,}05)$, on obtient :



Il semble donc que la courbe de f soit en dessous de sa tangente sur $\mathbb{R}^+$.

d. Il semble que la limite de f en l'infini est 0,05.

e. Voici le tableau

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f	0,1	↗	≈ 0,124	↘	0,05

f. Comme la limite de f en l'infini est 0,5, on en déduit que l'asymptote horizontale a pour équation $y = 0{,}05$.

On a $f(x) - 0{,}05 = 0{,}05(x + 1)^2e^{-x} \geqslant 0$. Donc la courbe de f est au-dessus de (Δ).

Partie B

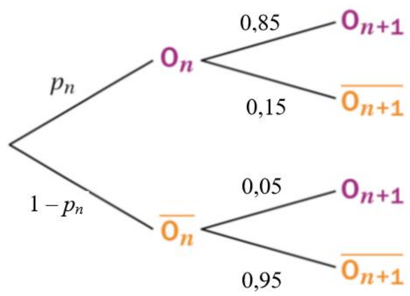
Oui, car au départ le taux est de 0,1 et tend vers 0,05 pour un temps infiniment long, du coup le taux restera longtemps au-dessus de 0,05. Il sera d'ailleurs tout particulièrement dangereux d'utiliser l'eau une heure après la rupture du barrage.

Par contre, comme le taux se stabilisera à 0,05 sur un temps long, cela permet de prédire que le taux passera sous la barre de 0,07 et redeviendra potable au regard de l'OMS.

9 a. $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}05$ et

$p_3 = 0{,}05 \times 0{,}85 + 0{,}95 \times 0{,}05 = 0{,}09$.

b.



c. $p_{n+1} = 0{,}85p_n + 0{,}05(1 - p_n) = 0{,}8p_n + 0{,}05$.

d. $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}25$
$= 0{,}8p_n + 0{,}05 - 0{,}25$
$= 0{,}8(p_n - 0{,}25) = 0{,}8u_n$.

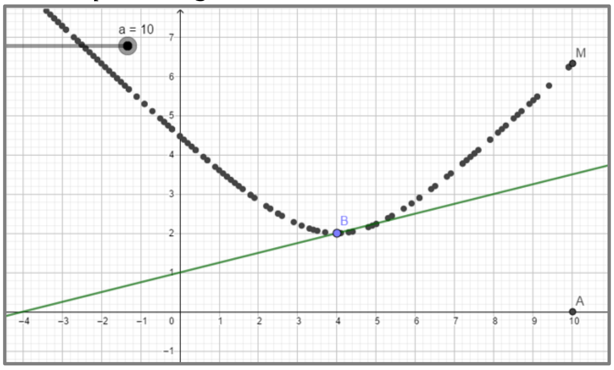
On reconnaît une suite géométrique de raison 0,8 et de premier terme $u_1 = -0{,}25$.

e. Donc $u_n = -0{,}25 \times 0{,}8^{n-1}$ et

$p_n = 0{,}25(1 - 0{,}8^{n-1})$

f. On obtient pour limite 0,25, ce qui revient bien à tirer un trèfle dans un jeu de 32 cartes, la réponse est donc oui (mais sur un temps infini).

10 **1. a.** *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



b. Le point M semble se déplacer sur une hyperbole.

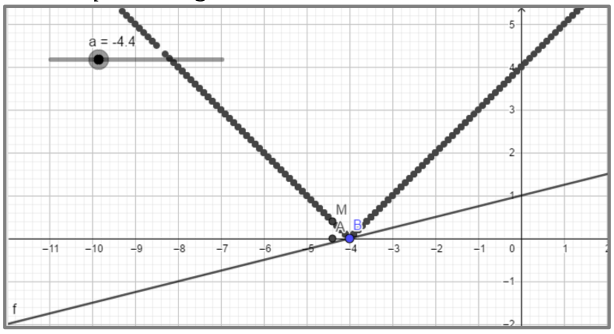
A(a ; 0) et B(4 ; 2) d'où :

$m = \sqrt{(4-a)^2 + (-2)^2} = \sqrt{a^2 - 8a + 20}$

Ainsi : $x_M = a$ et $y_M = \sqrt{a^2 - 8a + 20}$

D'où $y^2 = (x-4)^2 + 4$.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.



2. La courbe suivant laquelle se déplace le point M semble être associée à une fonction affine définie par morceaux.

A(a ; 0) et B(-4 ; 0) et $m = |4 + a|$.

Ainsi : $x_M = a$ et $y_M = |4 + a|$.

D'où $y = |4 + x|$.

3. En généralisant, on obtient :

$y^2 = (x_B - x)^2 + (\frac{1}{4}x_B + 1)^2$.

Si $x_B = -4$, alors $y = |x_B - x| = |-4 - x| = |4 + x|$: ligne polygonale, voir question **2.**

Si $x_B \neq -4$, alors $y^2 = (x_B - x)^2 + (\frac{1}{4}x_B + 1)^2$ (aucune simplification possible) : hyperbole.

11 **1.** $E_1 = (1 ; 1)$.

$E_2 = (1 ; 2 ; 1)$.

$E_3 = (1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 1)$.

$E_4 = (1 ; 4 ; 3 ; 5 ; 2 ; 5 ; 3 ; 4 ; 1)$.

$E_5 = (1 ; 5 ; 4 ; 7 ; 3 ; 8 ; 5 ; 7 ; 2 ; 7 ; 5 ; 8 ; 3 ; 7 ; 4 ; 5 ; 1)$.

2. a. $N_{n+1} = 2N_n - 1$ (principe d'intercaler) et $N_1 = 2$.

b. $N_n = 2^{n-1} + 1$.

c. $N_{15} = 2^{14} + 1$.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def suite(n):
    N=2
    for i in range(n-1):
        N=2*N-1
    return N
```

```
>>> suite(1), suite(2), suite(3)
(2, 3, 5)
>>> suite(15)
16385
>>> 2**14-1
16383
>>> 2**14+1
16385
```

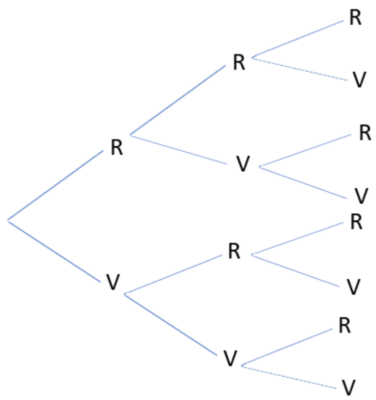
3. a. $S_1 = 2$, $S_2 = 4$, $S_3 = 10$ et $S_4 = 28$, il semble que $S_{n+1} = 3S_n - 2$.

```
def somme(n):
    s=2
    for i in range(n-1):
        s=3*s-2
    return s
```

```
>>> somme(2), somme(3),somme(4)
(4, 10, 28)
>>> somme(15)
4782970
```

12 **1.** On doit avoir n entier et $1 \leqslant n \leqslant 37$.

2. a.



2. b. $P(R \cap R) = \frac{n^2}{38^2}$.

c. $p_2 = P(R \cap R) + P(V \cap V)$

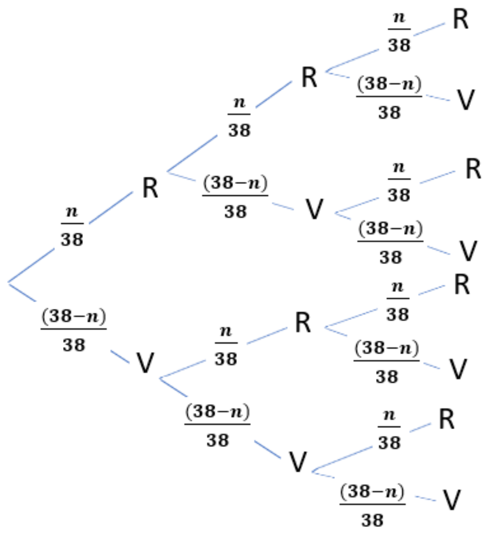
$= \frac{n^2}{38^2} + \frac{(38-n)^2}{38^2}$

$= \frac{2n^2 - 76n + 1444}{1444}$

d. $p_2 = 0{,}5 \Leftrightarrow 2n^2 - 76n + 1\,444 = 722$, soit : $n^2 - 38n + 361 = 0$.

Le discriminant est égal à $38^2 - 4 \times 361 = 0$, d'où $n = 19$.

3. a.



b. $p_3 = \left(\frac{n}{38}\right)^3 + \left(\frac{38-n}{38}\right)^3$

$= \frac{38(3n^2 - 114n + 1444)}{38^3}$

$= \frac{3n^2 - 114n + 1444}{1444}$

c. Pour l'étude de la fonction, il s'agit d'une fonction polynôme du second degré dont le coefficient dominant $a = \frac{3}{1444} > 0$ donc cette fonction est d'abord décroissante puis croissante.

d. L'abscisse du minimum est atteint en $\frac{114}{6} = 24$, il s'agit du nombre de jetons rouges minimisant la probabilité d'obtenir 2 jetons de la même couleur.

e. On doit résoudre $\frac{3n^2 - 114n + 1444}{1444} = 0{,}5$ soit :

$3n^2 - 114n + 722 = 0$.

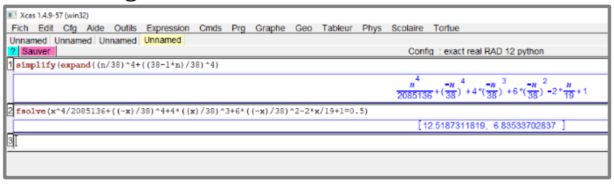
Le discriminant est de 4 332.

On obtient $n = \frac{57 + 19\sqrt{3}}{3} \approx 29{,}96$

ou $n = \frac{57 - 19\sqrt{3}}{3} \approx 8{,}03$ or n doit être entier, si on accepte une réponse proche de 0,5, ce sera pour 30 ou 8, sinon le problème n'a pas de solution.

4. $p_4 = \left(\frac{n}{38}\right)^4 + \left(\frac{38-n}{38}\right)^4$.

Avec le logiciel XCAS :



Soit un nombre de boules d'environ 7.

13 Soit I(1 ;0), on obtient :

IM² = 4cos²(πt) + 4sin²(πt) = 4.

Donc M est sur le cercle de centre I(1 ;0) et de rayon 2.

14 *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```python
import random
def essai(n):
    somme=0
    for i in range(1000000):
        B=random.randint(-n,n)
        C=random.randint(-n,n)
        if B**2-4*C<0:
            somme=somme+1
    return somme/1000000
```

```
>>> essai(10)
0.19458
>>> essai(100)
0.066176
>>> essai(1000)
0.020754
>>> essai(10000)
0.006679
>>> essai(100000)
0.002067
>>> |
```

Plus n est grand, plus la probabilité que l'équation (E) n'ait pas de solution réelle semble réduite.

Édition et mise en page : Nathalie Legros
Infographie : Domino