Misure di Tendenza Centrale, Dispersione e Forma

Contents

La statistica descrittiva si occupa di descrivere, rappresentare e sintetizzare un campione di dati relativo ad una popolazione. Gli strumenti della statistica descrittiva possono essere sia numerici che grafici. I dati analizzati possono essere descritti secondo diversi aspetti. Esistono pertanto diversi "indicatori" oggettivi:

- **numerosità** del campione;
- **indicatori centrali**: media, mediana, moda;
- **Indicatori di dispersione**: estremi, range, quantili, percentili, quartili, distanza inter-quartile, varianza;

Per esaminare questi strumenti, iniziamo considerando un semplice campione univariato:

```
0    3.0
1    4.0
2    NaN
3    4.0
4    4.0
5    1.0
6    2.0
7    2.0
8    NaN
9    4.0
dtype: float64
```

Il campione contiene dei valori `NaN`. Si tratta di valori mancanti che per qualche motivo non sono stati rilevati e andranno gestiti opportunamente.

11.1. Numerosità

La numerosità di un campione univariato $\{x^{(i)}\}_i^N$ è data dal numero di valori in esso contenuto: $|\{x^{(i)}\}_i^N| = N$. La numerosità di ciascuna colonna può anche essere diversa in quanto possono essistere dei valori mancanti, indicati in genere con `NA` o `NaN`. Nel nostro caso:

```
<class 'pandas.core.series.Series'>
RangeIndex: 10 entries, 0 to 9
Series name: None
Non-Null Count  Dtype
--------------  -----
8 non-null      float64
dtypes: float64(1)
memory usage: 208.0 bytes
```

Il sommario sopra indica che, sebbene abbiamo 10 valori, solo 8 di questi sono non nulli.

11.2. Indicatori di tendenza centrale

Gli indicatori centrali danno un'idea approssimata dell'ordine di grandezza dei valori del campione.

11.2.1. Media

La media di un campione è definita come la somma dei suoi valori diviso la sua numerosità:

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} x^{(i)}$$

La media del nostro campione sarà:

```
3.0
```

11.2.2. Mediana

Quando gli elementi di un campione possono essere ordinati (ad esempio se sono valori numerici), la mediana di un campione (o l'elemento mediano) è l'elemento che divide in due parti uguali l'insieme ordinato dei valori del campione.

L'elemento mediano si può ottenere ordinando i valori del campione e procedendo come segue:

- Se il numero di elementi è dispari, si prende l'elemento centrale. Ad esempio $[1, 2, \mathbf{2}, 3, 5] \rightarrow 2$.
- Se il numero di elementi è pari, si prende la media tra i due centrali. Ad esempio $[1, 2, \mathbf{2}, \mathbf{3}, 3, 5] \rightarrow \frac{2+3}{2} = 2.5$.

Nel caso del nostro campione:

```
5    1.0
6    2.0
7    2.0
0    3.0
1    4.0
3    4.0
4    4.0
9    4.0
2    NaN
8    NaN
dtype: float64
Valore mediano: 3.5
```

Da un punto di vista formale, se abbiamo n osservazioni $x^{(1)}, \ldots, x^{(1)}$, che possono essere ordinate come $x^{(i_i)}, \ldots, x^{(i_n)}$, il calcolo della mediana può essere espresso come segue:

$$\tilde{x}_{0.5} = \begin{cases} x_{(n+1)/2} & \text{if } n \; is \; odd \\ \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

11.2.3. Quantili, Percentili e Quartili

Quantili, percentili e quartili generalizzano il concetto di mediana.

11.2.3.1. Quantili

Un quantile di ordine α è un valore q_α che divide un campione in due parti di dimensioni proprozionali a α e $1 - \alpha$. Valori più piccoli o uguali a q_α appartengono alla prima parte della suddivisione, mentre valori maggiori a q_α appartengono alla seconda parte.

Ad esempio, dato il campione già ordinato `[1,2,3,3,4,5,6,6,7,8,8,9]`, un quantile $q_{0.25}$ dividerà il campione in due parti di dimensione proporzionale a 0.25 e $1 - 0.25 = 0.75$. In questo caso $q_{0.25} = 3$ e le due parti saranno `[1,2,3,3]` e `[4,5,6,6,7,8,8,9]`.

Anche in questo caso, come nel caso della mediana, si effettuano medie di valori

adiacenti ove opportuno.

I quantili vanno interpretati così:

> Se un quantile di ordine α è pari al numero x, allora vuole dire che $\alpha \times n$ elementi hanno un valore inferiore o uguale a x, dove n è il numero di elementi nel campione.

Va notato che:

- Il minimo è un quantile di ordine 0;
- Il massimo è un quantile di ordine 1;
- La mediana è un quantile di ordine 0.5.

Vediamo alcuni esempi sul nostro piccolo campione:

```
Quantile di ordine 0 (minimo): 1.0
Quantile di ordine 0.5 (mediana): 3.5
Quantile di ordine 1 (massimo): 4.0
Quantile di ordine 0.15: 2.0
```

Dai dati sopra deduciamo che:

- Il 50% dei valori sono inferiori o uguali a 3;
- Il 15% dei valori sono minori o ugualei a 2.

11.2.3.2. Percentili

I percentili sono semplicemente quantili espressi in precentuale. Un quantile di ordine 0.25 è un percentile di ordine 25%.

11.2.3.3. Quartili

I quartili sono degli specifici quantili che suddividono il campione in quattro parti. In particolare:

- Il quartile di ordine 0 è un quantile di ordine 0;
- Il quartile di ordine 1 è un quantile di ordine $1/4 = 0.25$;
- Il quartile di ordine 2 è un quantile di ordine $2/4 = 0.5$;
- Il quartile di ordine 3 è un quantile di ordine $3/4 = 0.75$;
- Il quartile di ordine 4 è un qauntile di ordine $4/4 = 1$.

Vediamo qualche esempio sul nostro piccolo campione:

```
Quartile di ordine 0 (minimo): 1.0
Quartile di ordine 1: 2.0
Quartile di ordine 2 (mediana): 3.5
Quartile di ordine 3: 4.0
Quartile di ordine 4 (massimo): 4.0
```

11.2.4. Moda

La moda di un campione è l'elemento che si ripete più spesso. Ad esempio, consideriamo il seguente campione:

```
0     1
1     2
2     3
3     4
4     2
5     5
6     4
7     2
8     6
9     5
10    8
11    4
12    3
13    2
14    3
dtype: int64
```

Consideriamo dunque le frequenze assolute:

```
2    4
3    3
4    3
5    2
1    1
6    1
8    1
dtype: int64
```

La moda sarà pari a 4.

In termini formali, la moda $\overline{x}_M$ del campione visto prima sarà data da:

$$\overline{x}_M = a_j \Leftrightarrow n_j = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$$

Dove a_j sono i valori univoci del campione e n_j sono le relative frequenze.

11.3. Indicatori di dispersione

Gli indici di dispersione hanno il compito di quantificare in quale misura i valori di una distribuzione sono “dispersi”, ovvero “lontani tra loro”.

11.3.1. Minimo, Massimo e Range

Semplici indici di dispersione sono il minimo ($min\{x^{(i)}\}_i^N$), il massimo ($max\{x^{(i)}\}_i^N$) e il range ($max\{x^{(i)}\}_i^N$ - $min\{x^{(i)}\}_i^N$). Tornando al ultimo esempio:

```
0     1
1     2
2     3
3     4
4     2
5     5
6     4
7     2
8     6
9     5
10    8
11    4
12    3
13    2
14    3
dtype: int64
```

Avremo che:

```
Minimo: 1
Massimo: 8
Range: 7
```

11.3.2. Distanza interquartile

Il range non è un indice di dispersione molto robusto, in quanto non tiene conto della presenza di evenutali outliers. Si considerino ad esempio i seguenti campioni "artificiali":

```
          s1         s2
0  3.000000  -5.000000
1  3.444444   3.444444
2  3.888889   3.888889
3  4.333333   4.333333
4  4.777778   4.777778
5  5.222222   5.222222
6  5.666667   5.666667
7  6.111111   6.111111
8  6.555556   6.555556
9  7.000000  15.000000
Range sample 1: 4.0
Range sample 2: 20.0
```

I campioni sono simili, ma la presenza di due outliers (-5 e 15) nel secondo campione rende i range molto diversi (4 e 20).

Confrontando i due boxplot mostrati sopra, notiamo che le posizioni del terzo e del primo quartile sono più "robuste" agli outliers. Una misura di dispersione un po' più espressiva è dunque lo **scarto interquartile** (o **distanza interquartile**), che si misura come la differenza tra il terzo e il primo quartile:

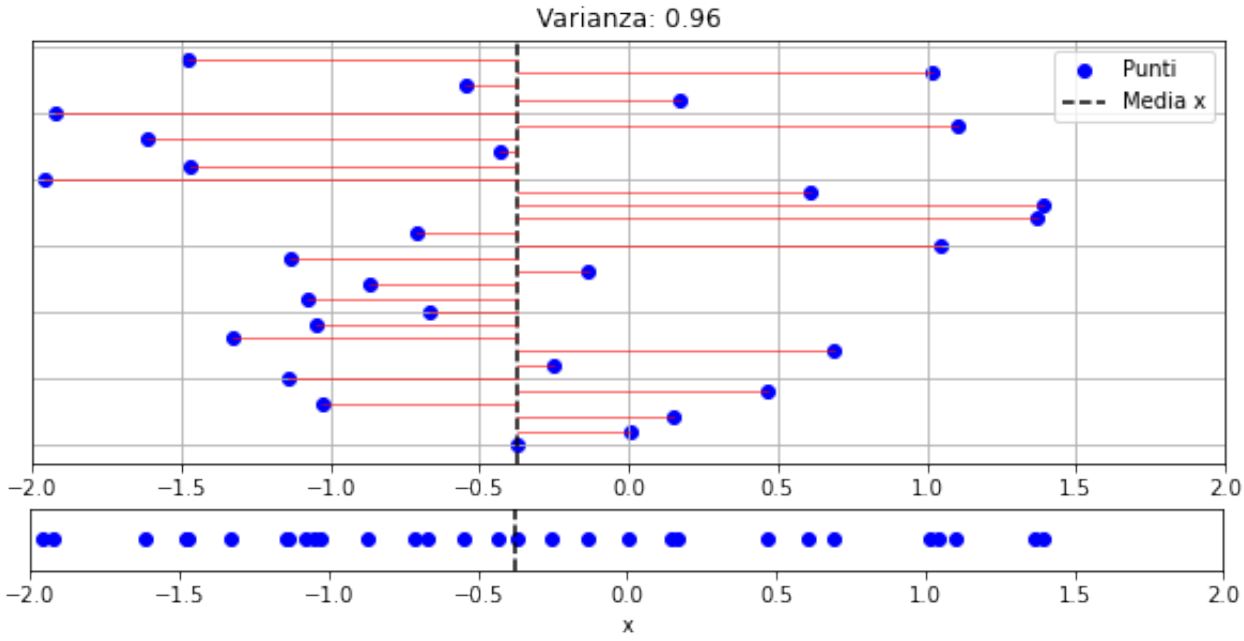
```
Lo scarto interquartile di sample 1 è: 2.0
Lo scarto interquartile di sample 2 è: 2.0
```

11.3.3. Varianza e Deviazione Standard

La varianza (detto anche scarto quadratico medio) fornisce una stima di quanto i dati osservati si allontanano dalla media. La varianza calcola la media dei quadrati degli scarti dei valori rispetto alla media, penalizzando i grandi scostamenti dal valore medio (dovuti agli outliers) maggiormente rispetto ai piccoli scostamenti:

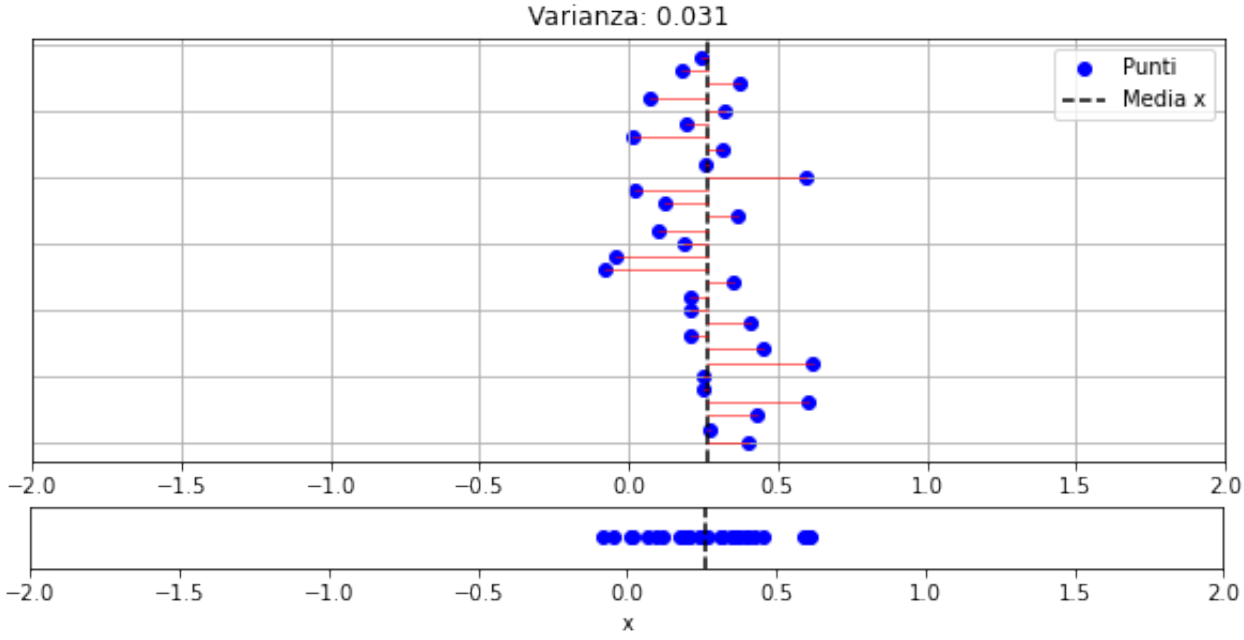
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Possiamo attribuire un significato geometrico alla varianza, come mostrato nel grafico sotto:



Nel grafico, il plot in basso mostra un campione univariato $\{x_i\}_i^N$. Il plot in alto, mostra lo stesso campione "esploso" sull'asse y per questioni di visualizzazione. Nel plot in alto, la linea nera tratteggiata indica la media di del campione, mentre le linee rosse sono i termini $(x_i - \overline{x})$ che appaiono nella formula della varianza. La varianza calcola la media delle lunghezze di questi segmenti.

Il grafico che segue mostra un campione meno "disperso":



La varianza del nostro piccolo campione sarà:

```
3.3999999999999995
```

Gli indici di dispersione visti fino ad ora (esclusa la varianza) hanno come unità di misura la stessa dei dati di input. Nel caso dei pesi, i dati vengono misurati in libbre. E' pertanto corretto dire che **minimo**, **massimo**, **range**, **scarto interquartile** e **scarto medio assoluto** calcolati sui pesi si misurano in libbre.

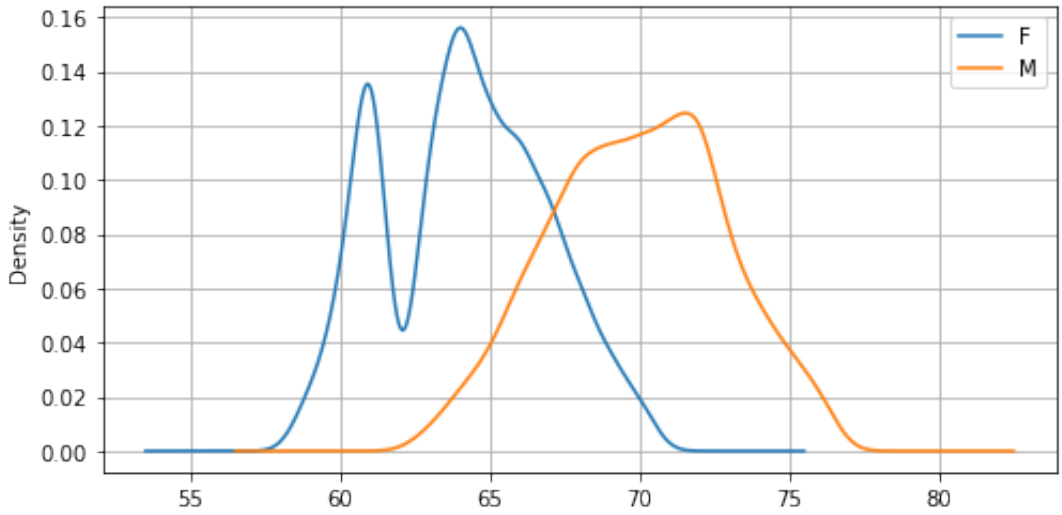
Lo stesso discorso non vale per la varianza, che si misurerà in **libbre al quadrato**. Se vogliamo ottenere una misura di dispersione **commensurabile**, possiamo calcolare la radice quadrata della varianza, ottenendo così la **deviazione standard** (o **scarto quadratico medio**), che si definisce come segue:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1} n(x_i - x^2)}{n}}$$

Consideriamo nuovamente il nostro dataset di pesi e altezze. Le medie e deviazioni standard delle della variabile peso per i due sessi sono:

sex	F	M
mean	64.179431	69.933710
std	2.686187	2.911766

Dal confronto notiamo che le altezze degli uomini sono "più disperse" (hanno cioè una deviazione standard più alta). Confrontiamo le stime di densità dei due campioni:



Notiamo che in effetti la stima di densità per gli uomini ha individuato una curva più "spanciata", che si correla bene con la più alta devizione standard.

11.3.4. Normalizzazioni dei Dati

Gli indicatori di dispersione dei dati visti dipendono fortemente dalla natura dei dati e dalla loro unità di misura. Ad esempio, le età si misurano in anni, mentre i pesi in Kg o libbre. Pertanto, esistono delle tecniche di normalizzazione dei dati che permettono di rendere dati basati su unità di misura diverse comparabili tra di loro.

11.3.4.1. Normalizzazione tra 0 e 1

Questa normalizzazione scala i dati in modo che i valori minimo e massimo risultino esattamente pari a 0 e 1, usando la seguente formula:

$$x_{norm} = (x - x_{min})/(x_{max} - x_{min})$$

Nel caso del nostro campione, otterremmo:

```
0     0.000000
1     0.142857
2     0.285714
3     0.428571
4     0.142857
5     0.571429
6     0.428571
7     0.142857
8     0.714286
9     0.571429
10    1.000000
11    0.428571
12    0.285714
13    0.142857
14    0.285714
dtype: float64
```

11.3.4.2. Normalizzazione tra -1 e 1

In questo caso, i dati vengono riscalati in modo che i nuovi minimo e massimo siano -1 e 1, usando la seguente formula:

$$x_{norm} = (x_{max} + x_{min} - 2 \cdot x)/(x_{max} - x_{min})$$

Possiamo effettuare questa trasformazione in Pandas come segue:

```
0     1.000000
1     0.714286
2     0.428571
3     0.142857
4     0.714286
5    -0.142857
6     0.142857
7     0.714286
8    -0.428571
9    -0.142857
10   -1.000000
11    0.142857
12    0.428571
13    0.714286
14    0.428571
dtype: float64
```

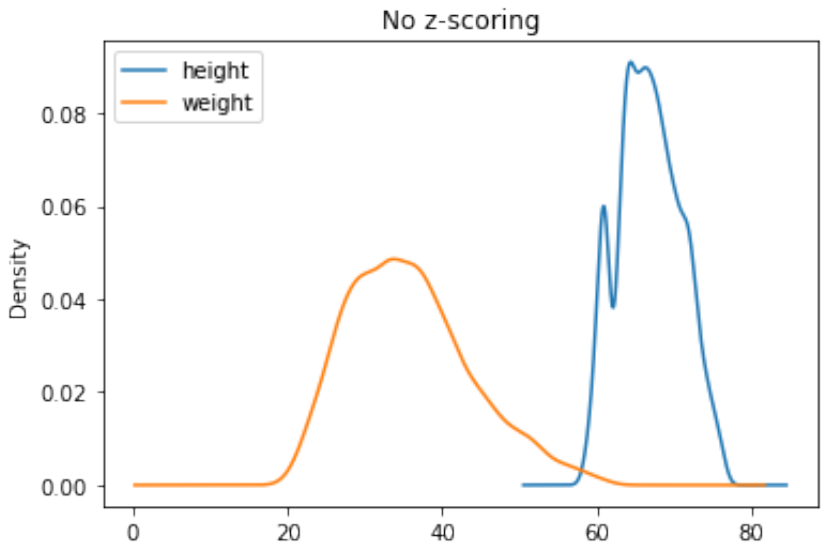
11.3.4.3. Standardizzazione (z-scoring)

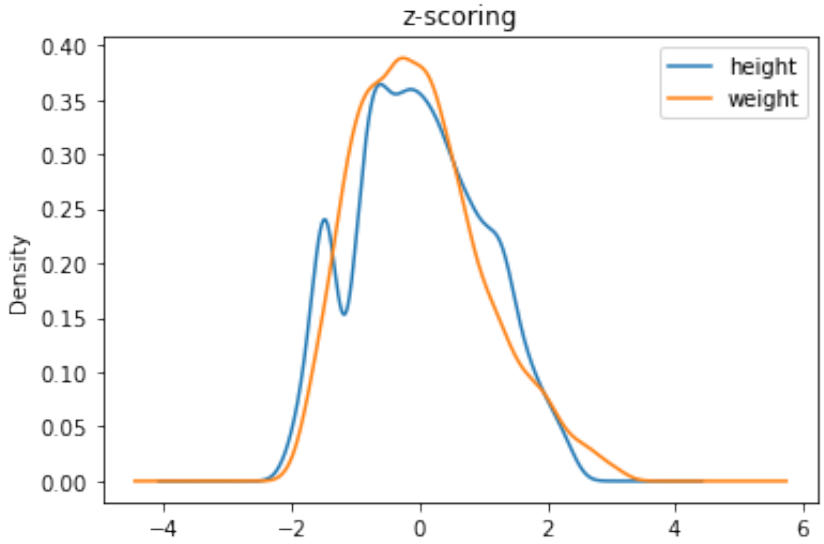
In molti casi è utile normalizzare i dati in modo che essi presentino media nulla e deviazione standard unitaria. Questo tipo di normalizzazione viene detta "z-scoring" e viene effettuata sottraendo ai dati la media e dividendo per la deviazione standard.

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x}}{s_x}$$

dove s_x è la deviazione standard della popolazione alla quale appartiene X. Si noti che gli zeta scores sono **adimensionali** (ovvero, non hanno unità di misura).

Per capire qual è l'effetto di questa normalizzazione, osserviamo le stime di densità dei campioni prima e dopo la normalizzazione:





11.3.5. Indicatori di Forma

Vediamo adesso alcuni indicatori che permettono di farsi un'idea su determinati aspetti della "forma" della distribuzione dei dati.

11.3.5.1. Asimmetria (skewness)

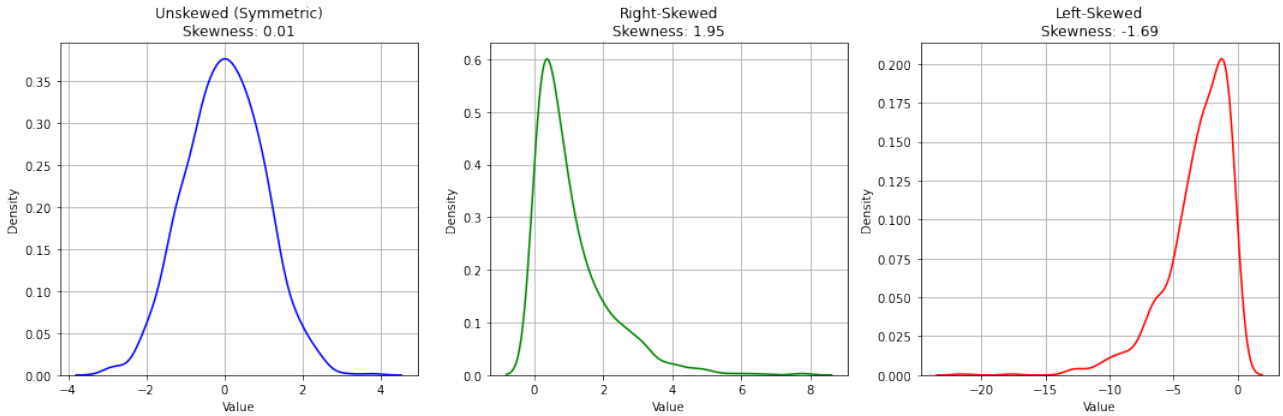
La skewness è indice dello "sbilanciamento" a sinistra (valore negativo) o a destra (valore positivo) di un campione di dati rispetto al valore centrale. La formula della skewness è la seguente:

$$\sum_{i}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^3}{n \cdot s_x^3}$$

I valori della skeweness saranno:

- **Negativi** se la distribuzione è sbilanciata a sinistra;
- **Positivi** se la distribuzione è sbilanciata a destra;
- **Prossimi allo zero** in caso di distribuzioni non sbilanciate.

Vediamo degli esempi:



I valori di skewness di pesi e altezze sarnno:

```
Skweness pesi: 0.57
Skweness altezza: 0.14
```

11.3.5.2. Curtosi (kurtosis)

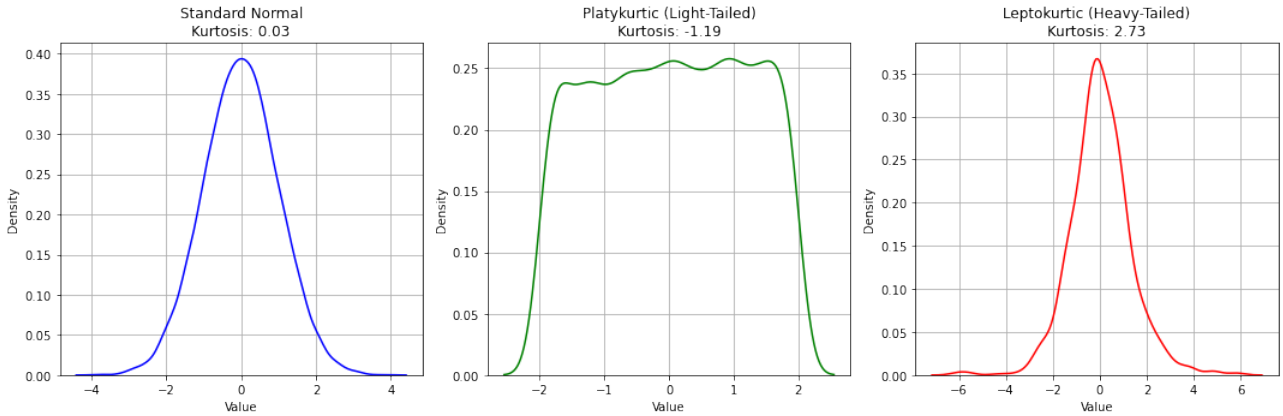
L'indice di curtosi misura lo "spessore" delle code di una misura di densità. Esso è definito come segue:

$$K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \bar{X}}{s} \right)^4 - 3$$

L'indice va interpretato così:

- Se è maggiore di zero, la distribuzione è *leptocurtica*, ovvero più "appuntita" di una distribuzione Normale;
- Se è minore di zero, la distribuzione è *platicurtica*, ovvero più "piatta" di una distribuzione Normale;
- Se è uguale a zero, la distribuzione è *normocurtica*, ovvero le code sono simili a quelle di una normale.

Vedremo meglio cosa è una funzione normale più in là nel corso. Vediamo degli esempi di valori di Kurtosi:

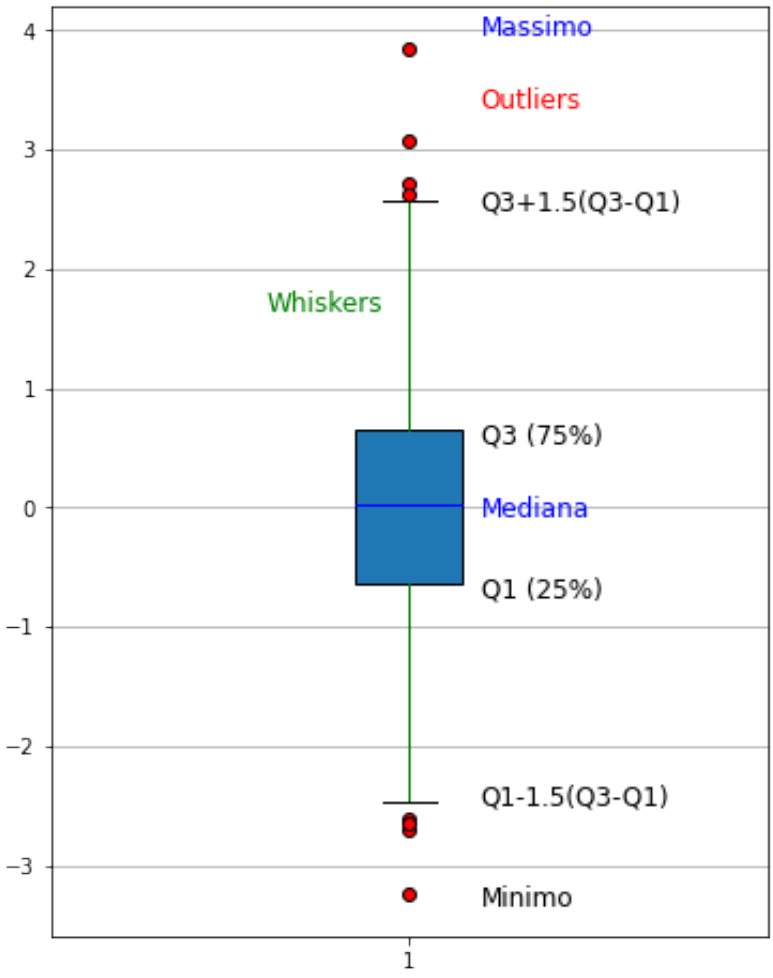


11.4. Boxplot

I boxplot costituiscono un metodo di visualizzazione compatto per rappresentare alcune caratteristiche descrittive dei dati sotto analisi. In particolare, dato un campione, un boxplot riesce a rappresentarne efficacemente le seguenti quantità:

- Valore mediano;
- Primo e terzo quartile;
- Minimo e massimo (a seconda della “versione” del boxplot, come discusso di seguito).

Un boxplot si presenta come segue:



Il boxplot si mostra come una “scatola” con dei “baffi” in cui:

- l’estremo inferiore della scatola indica il primo quartile;
- l’estremo superiore della scatola indica il terzo quartile;
- la linea orizzontale in mezzo alla scatola rappresenta il valore mediano del campione;
- il baffo inferiore rappresenta il primo valore nel campione che risulta essere maggiore o uguale al primo quartile meno una volta e mezza la distanza tra i il terzo e il primo quartile;
- il baffo superiore rappresenta il primo valore nel campione che risulta essere minore o uguale al terzo quartile più una volta e mezza la distanza tra i il terzo e il primo quartile;
- i tondini rappresentano i valori “fuori limite” che ricadono fuori dall’intervallo contrassegnato dai baffi. Vengono in genere considerati come “outliers”.

Per illustrare l’utilità dei boxplot, considereremo il dataset di pesi e altezze visto in

precedenza:

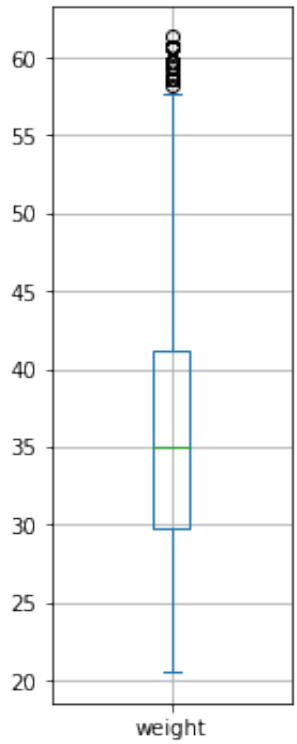
	sex	height	weight
0	M	74	53.484771
1	M	70	38.056472
2	F	61	34.970812
3	M	68	35.999365
4	F	66	34.559390
...	...	...	...
4226	F	69	23.862436
4227	M	69	38.262182
4228	F	64	34.970812
4229	F	64	28.388071
4230	F	61	22.628172

4231 rows × 3 columns

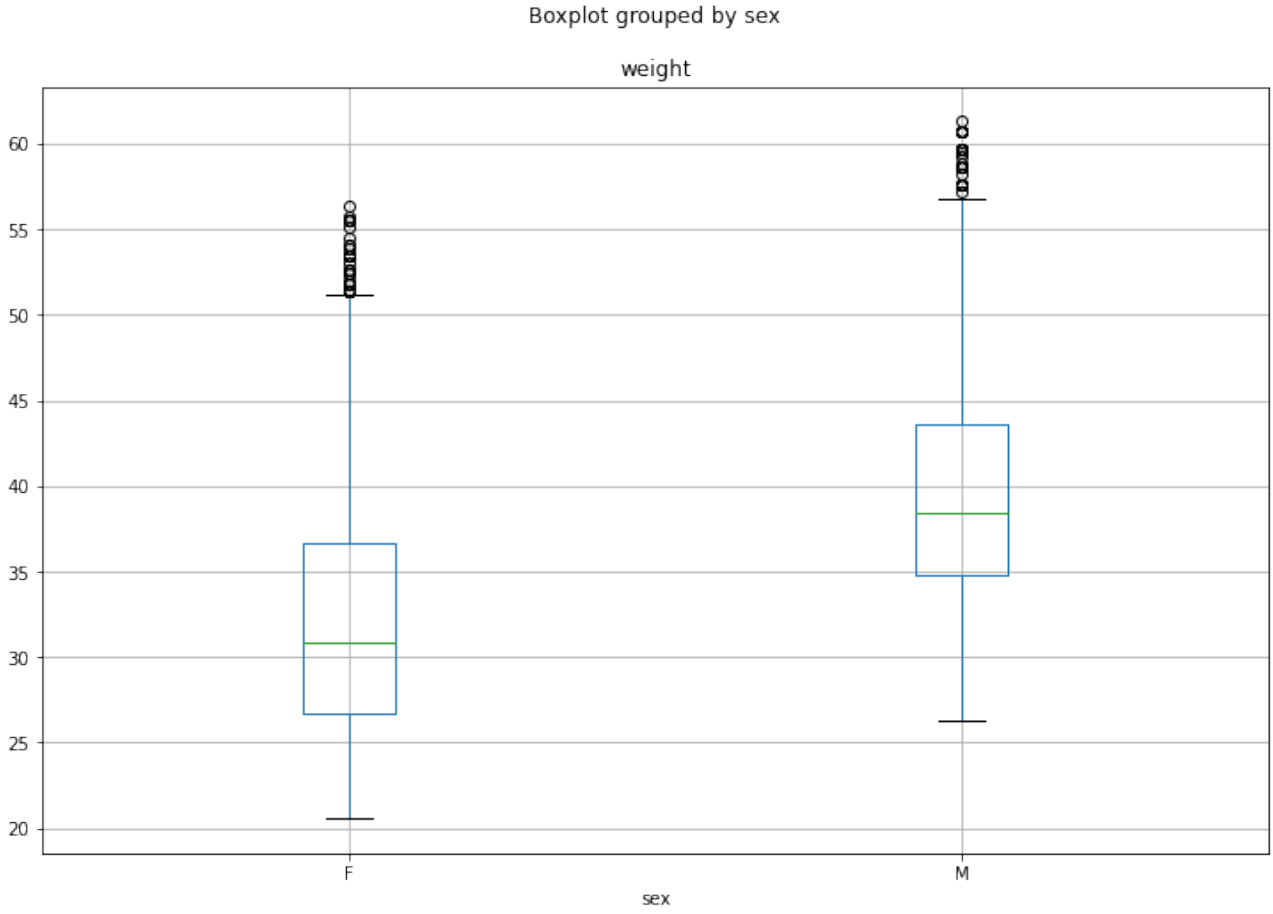
Mostriamo un il **sommario statistico**, ovvero la lista di tutti gli indicatori di statistica descrittiva discussi finora:

```
count    4231.000000
mean       35.818062
std         7.987908
min        20.571066
25%        29.828045
50%        34.970812
75%        41.142132
max        61.301776
Name: weight, dtype: float64
```

Il boxplot delle altezze si presenta come segue:



I boxplot possono essere utili a comparare campioni. Ad esempio, i seguenti boxplot comparano le distribuzioni dei pesi tra uomini e donne:



Dal grafico sopra possiamo notare che, mentre weight contiene degli outliers nella parte alta, height non li contiene. Questo non è particolarmente sorprendente, perché è più facile trovare un certo numero di persone sovrappeso che persone molto più alte della norma.

11.5. Referenze

- Capitolo 3 di: Heumann, Christian, and Michael Schomaker Shalabh. Introduction to statistics and data analysis. Springer International Publishing Switzerland, 2016.

Previous
10. Misure di Frequenze e Rappresentazione Grafica dei Dati

Next
12. Associazione tra Variabili