td5

March 27, 2020

1 PBS - TD5

1.1 Réception d'un signal BPSK: canal gaussien et probabilité d'erreur

1.2 Objectifs

- Maitriser la relation fondamentale $p(t) = \frac{dF}{dt}(t)$.
- Connaître et savoir manipuler la loi normale.
- Appliquer les probabilités à un problème de communication basique.
- Comprendre le lien entre taux d'erreur binaire et SNR.

2 1. Ajout d'une constante

Soit X une variable aléatoire *quelconque*. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante:

$$Y = X + 2.$$

2.0.1 (b) Supposons que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2 = 0.25)$.

(i) Quelle est l'expression de p_Y ?

2.1 #### (ii) Donner l'allure des deux densités, identifier leur maximum et les valeurs à $\{1, 2, 3\}\sigma$ de la moyenne

2.1.1 (a) Densité de probabilité

Exprimer la densité de probabilité p_Y de Y en fonction de p_X.

Rappel: une densité est reliée à sa fonction de répartition par

$$p(t) = \frac{dF}{dt}(t)$$

2.1.2 (a) Densité de probabilité (solution)

$$
\begin{aligned}
p_Y(t) = \frac{dF_Y(t)}{dt} &= \frac{d\mathbb{P}(Y < t)}{dt} && (1)\\
&= \frac{d\mathbb{P}(X + 2 < t)}{dt} && (2)\\
&= \frac{d\mathbb{P}(X < t - 2)}{dt} && (3)\\
&= \frac{dF_X(t-2)}{dt} && (4)\\
&= 1 \times F'_X(t-2) \quad \text{on utilise ici } (u \circ v)' = v' \times (u' \circ v) && (5)\\
&= 1 \times p_X(t-2) && (6)\\
p_Y(t) &= p_X(t-2) && (7)
\end{aligned}
$$

La densité de Y est simplement un décalage de 2 vers la droite de la densité de X.

2.1.3 (b) Loi normale

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2 = 0.25)$. On a donc

$$p_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_X^2}\right).$$

(i) Quelle est l'expression de p_Y ?

$$p_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(t-2)^2}{2\sigma_X^2}\right).$$

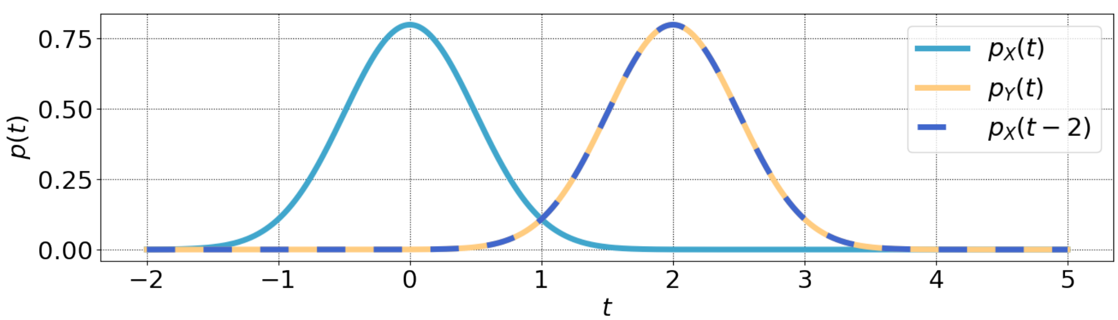
(ii) Donner l'allure des deux densités, identifier leur maximum et les valeurs à $\{1, 2, 3\}\sigma$ de la moyenne.

[1]:
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètre des figures
plt.rcParams.update(
    {
        'font.size': 22,
        'grid.linestyle': ':',
        'grid.color': 'k',
        'lines.linewidth': 5,
    }
)

# Pdf de la loi normale
def normpdf(x, mu=0, sigma=1):
    "Densité de probabilité d'une loi normale de paramètre (mu,sigma)."
```

```
    return 1/np.sqrt(2*np.pi*sigma**2) * np.exp(-((x - mu)/(np.
 ↪sqrt(2)*sigma))**2)

# Paramètre des lois
mu_X, mu_Y = 0, 2
sigma_X, sigma_Y = np.sqrt(.25), np.sqrt(.25)

# Abscisse
t = np.linspace(-2,5,1000)

# Densités
pdf_X = normpdf(t, mu_X, sigma_X) # densité de X
pdf_Y = normpdf(t, mu_Y, sigma_Y) # densité de Y
pdf_Y_bis = normpdf(t - 2, mu_X, sigma_X) # densité de Y (obtenue par␣
 ↪translation de celle de X)
```

[2]:

```
# Tracés des courbes
fig = plt.figure(figsize=(16,4), dpi=100);
ax = plt.axes();
ax.grid();
ax.set_xlabel("$t$");
ax.set_ylabel("$p(t)$");
ax.plot(t, pdf_X, label="$p_X(t)$", color=(.25, 0.65, 0.8))
ax.plot(t, pdf_Y, label="$p_Y(t)$", color=(1, 0.8, 0.5))
ax.plot(t, pdf_Y_bis, "--", label="$p_X(t-2)$", color=(0.25, 0.4, .8),␣
 ↪dashes=(5, 5))
ax.legend();
```



3 2. Fonctions $\mathrm{erfc}(x)$ et $\mathrm{Q}(x)$

Soit $U \sim \mathcal{N}(0,1)$. La densité de U est donnée par

$$p_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

3.1 ### (b) Idem avec $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$.

3.1.1 (a) Probabilité d'erreur $\mathbb{P}(U > \alpha)$

Les fonctions Q et erfc sont les suivantes:

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \tag{8}$$

Commencer par écrire

$$\mathbb{P}(U > \alpha) = \int_\alpha^{+\infty} p_U(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \tag{9}$$

3.1.2 (a) Probabilité d'erreur $\mathbb{P}(U > \alpha)$ (solution)

- **Avec** Q **-** Le résultat est immédiat puisque c'est la définition:

$$P(U > \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t = \mathrm{Q}(\alpha) \tag{10}$$

3.1.3 (a) Probabilité d'erreur $\mathbb{P}(U > \alpha)$ (solution)

- **Avec** erfc **-** On va faire le changement de variable suivant:

$$v = \frac{t}{\sqrt{2}} \Rightarrow v^2 = \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

  On obtient alors:

$$P(U > \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} \sqrt{2}\mathrm{d}v \tag{12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} \mathrm{d}v \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-v^2} \mathrm{d}v \tag{14}$$

$$P(U > \alpha) = \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right) \tag{15}$$

3.1.4 (b) Probabilité d'erreur $\mathbb{P}(X > \alpha)$

Cette fois-ci, on considère $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_X^2)$.

Les fonctions Q et erfc sont les suivantes:

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} \mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \tag{16}$$

On peut commencer comme avec U, ou **être un peu plus malin**.

Essayons de nous ramener au cas précédent.

Comment relier les fonctions de répartition de X et U ?

$$\mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}(U > \beta(\alpha)) \tag{17}$$

3.1.5 (b) Probabilité d'erreur $\mathbb{P}(U > \alpha)$ (solution)

On posera $U = \frac{X}{\sigma_X}$ qui a bien une variance de 1:

$$\mathbb{V}[U] = \mathbb{V}\left[\frac{X}{\sigma_X}\right] = \frac{\mathbb{V}[X]}{\sigma_X^2} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2} = 1 \tag{18}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X > \alpha) = \mathbb{P}\left(U > \frac{\alpha}{\sigma_X}\right) \tag{19}$$

-

  ### 3.2 Avec Q - $\mathbb{P}\left(U > \frac{\alpha}{\sigma_X}\right) = \mathrm{Q}\left(\frac{\alpha}{\sigma_X}\right)$.

- **Avec** erfc **-** $\mathbb{P}\left(U > \frac{\alpha}{\sigma_X}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}\sigma_X}\right)$.

4 3. Application

On considère une transmission de type BPSK:

Bit $-B$	Amplitude émise $-E$
1	$2V$
0	$0V$

Le canal de communication est bruité.

Il **ajoute** au signal transmis E une VAR $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

On reçoit donc la variable aléatoire Y définit par:

$$Y = E + N \tag{20}$$

4.0.1 (a) Loi de Y

Rappelons que

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[E + N] = \mathbb{E}[E] + \mathbb{E}[N] = E + \mathbb{E}[N]$$

et (E et N étant indépendents)

$$\mathbb{V}[Y] = \mathbb{V}[E + N] = \mathbb{V}[E] + \mathbb{V}[N] = \mathbb{V}[N]$$

Quelle est la loi de Y selon le bit émis ?

Réponse:

B	E	Y
1	$2V$	$\mathcal{N}(2,\sigma^2)$
0	$0V$	$\mathcal{N}(0,\sigma^2)$

[3]:
```
from ipywidgets import *
import ipywidgets as widgets

def pdf_plot(mu_0, mu_1):
    # Calcules les densités de probabilité pour chaque variable
    x = np.linspace(-3.0, 6.0, num=1000);
    y_0 = normpdf(x, mu_0, 1); # densité de probabilité de X
    y_1 = normpdf(x, mu_1, 1); # densité de probabilité de X + 2

    # Trace les courbes
    fig = plt.figure(figsize=(12,6), dpi=100);
    ax=plt.axes();
    ax.grid();
    ax.plot(x, y_0, label="$p_{Y|B}(t|0)$");
    ax.plot(x, y_1, label="$p_{Y|B}(t|1)$");

    # Trace les zones d'erreurs
    ax.fill_between(x[y_0 >= y_1], y_1[y_0 >= y_1], facecolor="orange", alpha=.
↪5, label="$\hat{B}=1 \mid  B=0$")
    ax.fill_between(x[y_0 < y_1], y_0[y_0 < y_1], facecolor="blue", alpha=.5,␣
↪label="$\hat{B}=0 \mid  B=1$")

    # Paramètrage de la figure
    ax.set_xlabel("$y$");
    ax.set_ylabel("$p_{Y|B}(t\mid b)$");
    ax.legend();
    plt.show();
```

4.0.2 (b) Probabilité d'erreur

[4]:
```
interact(pdf_plot,
    mu_0=widgets.FloatSlider(value=0,min=-1.0,max=1.0,step=0.1),
    mu_1=widgets.FloatSlider(value=2,min=1.0,max=3.0,step=0.1),
);
```

```
interactive(children=(FloatSlider(value=0.0, description='mu_0', max=1.0, min=-1.0), FloatSlide
```

4.0.3 (c) Valeurs de bruit causant une erreur

D'après la figure précédente, on voit qu'il y a une erreur lorsque: - Si $B = 0$: $e_0 + N > \lambda \Rightarrow N > \lambda - e_0$ - Si $B = 1$: $e_1 + N < \lambda \Rightarrow N < \lambda - e_1$

4.0.4 (d) Probabilité d'erreur binaire

Pour calculer la probabilité d'erreur binaire, on effectuera les étapes suivantes:

- **Proba. totales et Bayes**
- **Faire apparaître** N
- **Utiliser les propriétés de la gaussienne**

4.0.5 (d) Probabilité d'erreur binaire

Pour calculer la probabilité d'erreur binaire, on effectuera les étapes suivantes:

- **Proba. totales et Bayes**

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(B = 0 \cap Y > \lambda) + \mathbb{P}(B = 1 \cap Y < \lambda) && \text{(formule des probabilités totales)} \quad (21)\\
&= \mathbb{P}(Y > \lambda \mid B = 0)\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(Y < \lambda \mid B = 1)\mathrm{P}(B = 1) && \text{(formule de Bayes)} \quad (22)\\
&= \mathbb{P}(Y > \lambda \mid E = e_0)\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(Y < \lambda \mid E = e_1)\mathrm{P}(B = 1) && (23)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(Y > \lambda \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(Y < \lambda \mid E = e_1\right)\right) && (24)
\end{aligned}$$

- *Faire apparaître N*
- *Utiliser les propriétés de la gaussienne*

4.0.6 (d) Probabilité d'erreur binaire

Pour calculer la probabilité d'erreur binaire, on effectuera les étapes suivantes:

- *Proba. totales et Bayes*

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(Y > \lambda \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(Y < \lambda \mid E = e_1\right)\right) \quad (25)$$

- **Faire apparaître** N

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(e_0 + N > \lambda \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(e_1 + N < \lambda \mid E = e_1\right)\right) && (26)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \lambda - e_0 \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N < \lambda - e_1 \mid E = e_1\right)\right) && (27)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N < \frac{e_0 - e_1}{2} \mid E = e_1\right)\right) && (28)
\end{aligned}$$

- *Utiliser les propriétés de la gaussienne*

4.0.7 (d) Probabilité d'erreur binaire

Pour calculer la probabilité d'erreur binaire, on effectuera les étapes suivantes:

- *Proba. totales et Bayes*

$$P_e = \mathbb{P}(Y > \lambda \mid E = e_0)\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(Y < \lambda \mid E = e_1)\mathrm{P}(B = 1) \tag{29}$$

- *Faire apparaître N*

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N < \frac{e_0 - e_1}{2} \mid E = e_1\right)\right) \tag{30}$$

- **Utiliser les propriétés de la gaussienne**

$$\begin{aligned}
P_e &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N < -\frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_1\right)\right) && (31)\\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_1\right)\right) && \text{(la gaussienne est symétrique)}\\
& && (32)\\
&= \mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) && (33)\\
&= \mathrm{Q}\left(\frac{e_1 - e_0}{2\sigma}\right) && \text{(d'après la question 2.(b))}\\
& && (34)
\end{aligned}$$

4.0.8 (d) Probabilité d'erreur binaire

Pour calculer la probabilité d'erreur binaire, on effectuera les étapes suivantes:

- *Proba. totales et Bayes*

$$P_e = \mathbb{P}(Y > \lambda \mid E = e_0)\mathbb{P}(B = 0) + \mathbb{P}(Y < \lambda \mid E = e_1)\mathrm{P}(B = 1) \tag{35}$$

- *Faire apparaître N*

$$P_e = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(N > \frac{e_1 - e_0}{2} \mid E = e_0\right) + \mathbb{P}\left(N < \frac{e_0 - e_1}{2} \mid E = e_1\right)\right) \tag{36}$$

- *Utiliser les propriétés de la gaussienne*

$$P_e = \mathrm{Q}\left(\frac{e_1 - e_0}{2\sigma}\right) \tag{37}$$

On obtient un résultat simple qui dépend directement de l'écart $e_1 - e_0$!

4.0.9 (e) Bit Error Rate (BER) et SNR

On admet que la puissance du signal et celle du bruit sont égales à

$$P_S = \frac{e_0^2 + e_1^2}{2} \quad \text{et} \quad P_N = \sigma^2 \tag{38}$$

Le SNR vaut donc

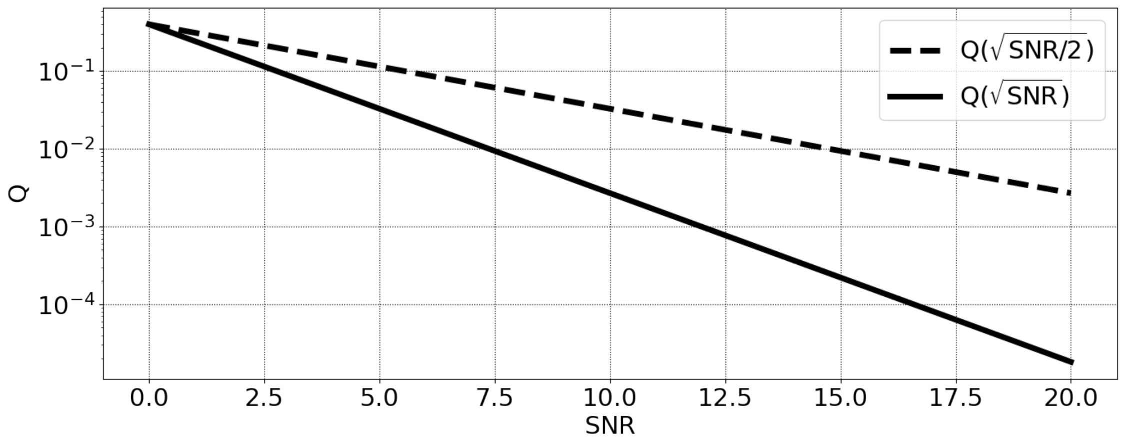
$$\mathsf{SNR} = \frac{P_S}{\sigma^2} \tag{39}$$

- **Si** $e_0 = 0$**:** $P_S = \frac{e_1^2}{2}$ et $\mathsf{SNR} = \frac{e_1^2}{2\sigma^2} \Rightarrow P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{SNR}}{2}}\right)$
- **Si** $e_0 = -e_1$**:** $P_S = e_1^2$ et $\mathsf{SNR} = \frac{e_1^2}{\sigma^2} \Rightarrow P_e = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\mathrm{SNR}}\right)$

5 Bonus - tracé de P_e

[5]:
```python
from scipy.stats import norm
def plot_BER(snr):
    # Generate a normal random variable
    rv = norm()

    # Trace les courbes
    fig = plt.figure(figsize=(16,6), dpi=100);
    ax=plt.axes();
    ax.grid();
    ax.semilogy(snr, rv.pdf(np.sqrt(snr/2)), 'k--',␣
 ↪label="$\mathrm{Q}(\sqrt{\mathsf{SNR}/2})$")
    ax.semilogy(snr, rv.pdf(np.sqrt(snr)), 'k-',␣
 ↪label="$\mathrm{Q}(\sqrt{\mathsf{SNR}})$")

    # Paramètrage de la figure
    ax.set_xlabel("$\mathsf{SNR}$");
    ax.set_ylabel("$\mathrm{Q}$");
    ax.legend();
    plt.show();
```

[6]:
```python
plot_BER(np.linspace(0,20,1000))
```



Q
SNR
$Q(\sqrt{SNR/2})$
$Q(\sqrt{SNR})$
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0
12.5
15.0
17.5
20.0