Cálculo IV - Abril 2024

Séries - 1ª Semana

<u>Exemplo</u>: Obtenha a solução em série da equação diferencial $4y'' + y = 0$

<u>Solução</u>:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$\Rightarrow$

$n=2 \Rightarrow x^0$ $\quad$ $n=1 \Rightarrow x^0$

$$4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

fazendo

$k = n-2$ na 1ª série

$k = n$ na 2ª série

$$4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

fazendo

$k = n-2$ na 1ª série $\Rightarrow$ $n = k+2$

$k = n$ na 2ª série $\Rightarrow$ $n = n$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{\substack{n-2=0\\k=0}}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$4\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[4(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow 4(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{4(n+2)(n+1)a_{n+2}}$$

p/ $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow$ fórmula de recorrência.

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{4(n+2)(n+1)a_{n+2}}$$

p/ $n = 0, 1, 2, \dots$

$$a_2 = \frac{-a_0}{4 \cdot 2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 2!}$$

$$a_3 = \frac{-a_1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{-a_1}{2^2 \cdot 3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2}{4 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{a_0}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 4!}$$

$$a_5 = \frac{-a_3}{4 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{c_1}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{c_1}{2^4 \cdot 5!}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{4 \cdot 6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 6!}$$

$$a_7 = \frac{-a_5}{4 \cdot 7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{2^6 \cdot 7!}$$

$\vdots$

p/ n par $\quad n = 2k,\ k = 0, 1, \dots$

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(2k)!}$$

p/ n ímpar $\quad n = 2k+1,\ k = 0, 1, 2, \dots$

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!\, 2^{2k}} = \frac{2(-1)^k a_1}{(2k+1)!\, 2^{2k+1}}$$

Lembrando que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$= a_0 x^0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{2k} x^{2k}$$
$$+ a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \dots + a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} x^{2k+1}$$

$$= \sum \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k a_1}{2^{2k+1}(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$= \underbrace{a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}_{y_1} + \underbrace{2a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}}_{y_2}$$

O teste da razão pode ser aplicado para mostrar que ambas as séries convergem.

Também, podemos ver que as séries obtidas referem-se as séries de $\cos(x/2)$ e $\operatorname{sen}(x/2)$ $\Rightarrow$

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + 2a_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1}$$

$$y(x) = a_0 \underbrace{\cos(x/2)}_{y_1} + 2c_1 \underbrace{\operatorname{sen}(x/2)}_{y_2}$$

EDO de 2ª ordem, linear e homogênea

$$4y'' + y = 0$$

eq. característica

$$4\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 = -\frac{1}{4}$$

$$\lambda = \pm -\frac{1}{2} i$$

$$\Rightarrow y(x) = e^{0x}\left(c_1 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$$

$$y(x) = c_1 \cos\left(\frac{x}{2}\right) + c_2 \operatorname{sen}(x/2)$$

Observe que o exemplo resolvido a EDO de 2ª ordem é linear com coeficientes constantes.

Se a EDO fosse

$$(x^2+1)\,y'' + x\,y' - y = 0$$

o procedimento seria similar, porém um pouco mais trabalhoso ... mas a solução via séries é

$$y(x) = c_0\, y_1(x) + c_1\, y_2(x)$$

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n\, n!}\, x^{2n}, \qquad |x|<1$$

$$y_2(x) = x$$

OBS: a EDO $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$ é contínua p/ todo x

porém se fosse a EDO

$$(x^2-1)y'' + xy' - y = 0$$

$$y'' + \frac{x}{x^2-1}y' - \frac{y}{x^2-1} = 0 \quad \forall \; x \neq \pm 1$$

Dizemos, então que a EDO apresenta 2 pontos de singularidade (ponto que zera o denominador).

Para estes casos a solução em série tem a forma $y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\Rightarrow$ método de Frobenius

Outra forma de resolver uma equação diferencial do tipo

$$P(x)\,y'' + Q(x)\,y' + R(x)\,y = 0$$

$P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ funções polinomiais

com $P(x) \neq 0$

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}\,y' + \frac{R(x)}{P(x)}\,y = 0$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ → solução em séries

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$ → método de Frobenius

$$y(x) = \frac{a_0}{2} + \sum \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

↳ solução em série de Fourier.

Séries de Fourier

A série de Fourier de uma função definida no intervalo $-L < x < L$ é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right]$$

onde

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \qquad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

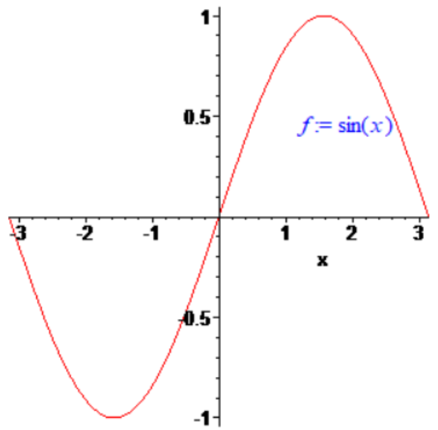
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

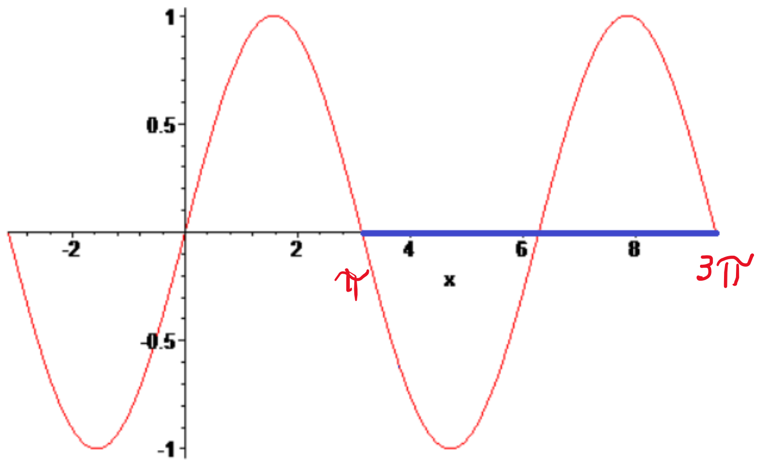
Para resolver os exercícios de séries de Fourier é necessário resolver integrais trigonométricas.

- funções senos e co-senos são funções periódicas com período $T>0$, i.e.

$$f(x+T) = f(x) \quad , \quad T = \text{período fundamental.}$$

Ex: $f(x) = \operatorname{sen} x \quad , \quad x \in [-\pi, \pi]$





$$f(x+2\pi) \begin{cases} f(-\pi+2\pi) = f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) \\ \vdots \\ f(\pi+2\pi) = f(3\pi) = \operatorname{sen}(3\pi) \end{cases}$$

Se f e g são duas funções periódicas com período T comum, então,

$$F_1(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$F_2(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

também são periódicas.

De fato:

$$F_1(x+T) = f(x+T) \cdot g(x+T) = f(x) \cdot g(x) = F_1(x)$$

$$F_2(x+T) = c_1 f(x+T) + c_2 g(x+T) = c_1 f(x) + c_2 g(x) = F_2(x)$$

Funções senos e co-senos são ortogonais $\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot g(x)\,dx = 0$

$\Rightarrow$ $sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ formam um conjunto ortogonal de funções no intervalo $-L \leq x \leq L$.

Tabela : Integrais trigonométricas

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\,sen\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

funções ortogonais se $m \neq n$

mostre o resultado

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

como parte da avaliação

Resolver em sala, em dupla com letra melhor do que a da professora !!!

Entregar em até 20 minutos !!!!

Valendo !!!

04/04/24

1º Exercício Valendo nota de Prova.

Lembrem que

$\text{sen}(\theta) = -\text{sen}(-\theta) \rightarrow f$ ímpar

$\cos(\theta) = \cos(-\theta) \rightarrow f$ par

De fato:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L} \cdot \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases}, \quad m = 1, 2, 3\ldots$$

<u>Demonstração</u>:

para demonstrar usaremos $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right)\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)\right] dx \quad (*)$$

fazendo $u = \left(\frac{m+n}{L}\right)\pi x$ $\qquad w = \left(\frac{m-n}{L}\right)\pi x$

$du = \left(\frac{m+n}{L}\right)\pi\,dx$ $\qquad dw = \left(\frac{m-n}{L}\right)\pi\,dx$

$$\int \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) dx = \int \cos u \cdot \frac{L}{(m+n)\pi}\,du = \frac{L}{(m+n)\pi}\int \cos u\,du = \frac{L}{(m+n)\pi}\,\text{sen}\,u = \frac{L}{(m+n)\pi}\,\text{sen}\left(\frac{m+n}{L}\right)\pi x$$

$$\int \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) dx = \int \cos w \cdot \frac{L}{(m-n)\pi}\,dw = \frac{L}{(m-n)\pi}\int \cos w\,dw = \frac{L}{(m-n)\pi}\,\text{sen}\,w = \frac{L}{(m-n)\pi}\,\text{sen}\left(\frac{m-n}{L}\right)\pi x$$

Voltando em (*)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\,\operatorname{sen}\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} + \frac{L}{(m-n)\pi}\,\operatorname{sen}\left(\frac{(m-n)}{L}\pi x\right)\Bigg|_{-L}^{L}\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\Big(\operatorname{sen}((m+n)\pi) - \operatorname{sen}(-(m+n)\pi)\Big) + \frac{L}{(m-n)\pi}\Big(\operatorname{sen}((m-n)\pi) - \operatorname{sen}(-(m-n)\pi)\Big)\right] \quad (**)$$

mas $\operatorname{sen}(\theta) = -\operatorname{sen}(-\theta) \rightarrow$ função ímpar

$\Rightarrow \operatorname{sen}((m+n)\pi) = -\operatorname{sen}(-(m+n)\pi) \Rightarrow \operatorname{sen}((m+n)\pi) + \operatorname{sen}((m+n)\pi) = 2\operatorname{sen}((m+n)\pi)$

$\Rightarrow \operatorname{sen}((m-n)\pi) = -\operatorname{sen}(-(m-n)\pi) \Rightarrow \operatorname{sen}((m-n)\pi) + \operatorname{sen}((m-n)\pi) = 2\operatorname{sen}((m-n)\pi)$

$\Rightarrow$ Voltando em (**)

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m+n)\pi}\cdot 2\,\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}((m+n)\pi)}}_{\to 0} + \frac{L}{(m-n)\pi}\cdot 2\,\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}((m-n)\pi)}}_{\to 0}\right] =$$

mas $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}((m+n)\pi) = 0 \\ \operatorname{sen}((m-n)\pi) = 0\end{array}\right\}$ desde que $m+n \neq 0$ e $m-n \neq 0$.

como $m>0$ e $n>0 \Rightarrow m+n \neq 0$ pois se $m+n=0 \Rightarrow m=-n$

Por outro lado, se $m-n=0 \Rightarrow m=n \Rightarrow \displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cdot\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{m\pi x}{L}\,dx$

Logo p/ $m=n$

$$\boxed{\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left[1 + \cos\left(\frac{2m\pi}{L}\right)x\right] dx = L$$

pois $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{2m\pi}{L}\right)x\, dx = 0$ (Ver exercício do slide 13).

Fórmulas de Fourier

Suponha agora que a série de Fourier converge, isto é

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

como consequência das condições de ortogonalidade, podemos encontrar a relação entre os coeficientes a_m, b_m e $f(x)$

Assim, multiplicando (1) por $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, n é um inteiro positivo, $n>0$ fixo,

$\Rightarrow$

$$f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (2)$$

Integrando (2) em relação a x de $-L$ a L

$$\int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (3)$$

mantendo n fixo e variando m segue da relação de ortogonalidade (Ver tabela) que o único termo não nulo à direita na equação

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx \qquad (3)$$

é o termo onde $m=n$ no 1º somatório

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{a_0}{2}*0 + a_n * \overset{m=n}{L} + b_n*0, \quad n=1,2,3$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = a_n L$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \quad n=1,2,3,\dots$$

Tabela : Integrais trigonométricas

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ L, & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ L, & m=n\end{cases}$$

p/ obter a_0, integramos a equação (1) de $-L$ a L

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right] \quad (1)$$

$$\Rightarrow \int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^{L} \cancel{\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}^{\,0} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^{L} \cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}^{\,0}$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx$$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\left(L - (-L)\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

Tabela : Integrais trigonométricas

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\,dx = 0$$

$$\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}\, sen\frac{m\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases}$$

Uma expressão semelhante para b_n pode ser obtida multiplicando a equação (1)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (1)$$

por $\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$. Depois integra termo a termo de $-L$ a L e usa as propriedades de ortogonalidade, resultando em

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

04/04/24

2º Exercício Valendo nota de Prova.

Obtenha b_n seguindo as informações do slide. !!!

Exemplo: Suponha que existe uma série de Fourier convergindo para a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, \quad \text{onde} \quad f(x+4) = f(x)$$

Determine os coeficientes da série de Fourier.

Solução:

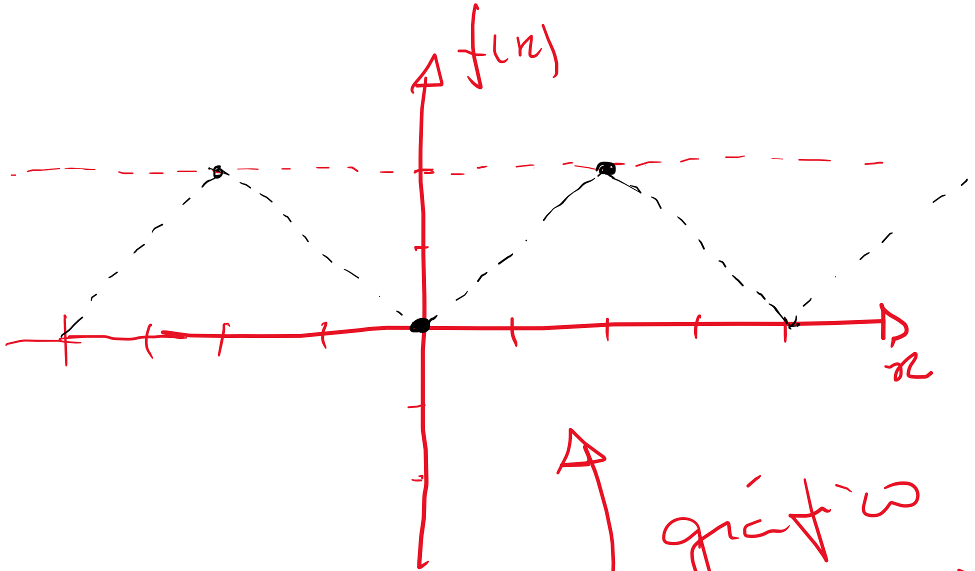


gráfico que representa uma onda triangular.

$$f(x+4) = \begin{cases} -x+4 & -2+4 \leq x < 4 \\ x+4 & 0+4 \leq x < 4+4 \end{cases}$$

$$f(x+4) = \begin{cases} -x+4 & 2 \leq x < 4 \\ x+4 & 4 < x < 8 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(0^2-(-2)^2\right) + \frac{1}{4}\left(2^2-0^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4}(-4) + \frac{1}{4}\cdot 4 = 2$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx,$$

$\boxed{n>0}$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \qquad (\text{eq } (1))$$

Integrando por partes cada integral

int. por partes

$u = x \quad du = dx$

$dv = \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$v = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2x}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \int \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{2x}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\int_{-2}^{0} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2x}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{2\cdot 0}{n\pi}\,\underbrace{\text{sen}\left(\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)}_{\to 0} - \frac{2(-2)}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi(-2)}{2}\right)$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi^2}\underbrace{\cos\left(\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)}_{\to 1} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi(-2)}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\,\underbrace{\text{sen}(-n\pi)}_{\to 0} + \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos(-n\pi)$$

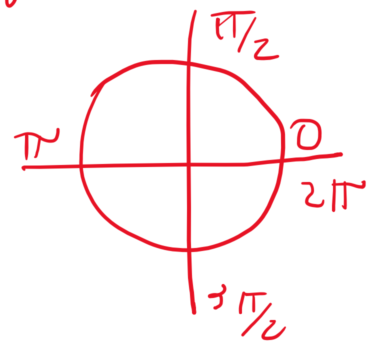
$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(1 - \cos(\pi n)\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen}(n\pi) = -\text{sen}(-n\pi) \\ \cos(n\pi) = \cos(-n\pi) \end{array}\right.$$

mas

$\text{sen}(n\pi) = 0$

$\forall n$



$$\int_0^2 x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \frac{2x}{n\pi}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$= \frac{2\cdot 2}{n\pi}\,\cancelto{0}{\text{sen}\left(\frac{n\pi\cdot 2}{2}\right)} - \frac{2(0)}{n\pi}\,\cancelto{0}{\text{sen}\left(\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)}$$

$$+ \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi\cdot 2}{2}\right) - \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi\cdot 0}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos(n\pi) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$

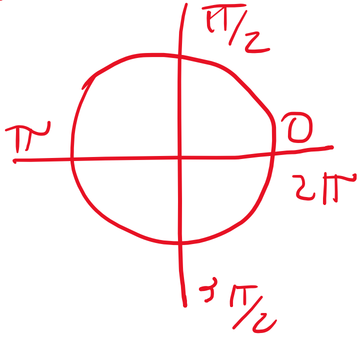
$\text{sen}(n\pi) = -\text{sen}(-n\pi)$

$\cos(n\pi) = \cos(-n\pi)$

mas

$\text{sen}(n\pi) = 0$

$\forall n$



Subst. as integrais em an

$\boxed{n>0}$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} -x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

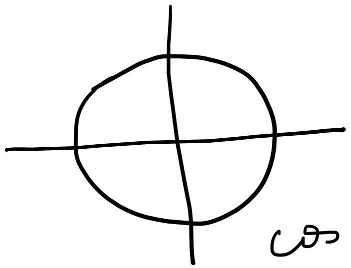
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(1-\cos(n\pi)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left(\cos(n\pi)-1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos n\pi + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos(n\pi) - \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos(n\pi)\right]$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\left[\cos(n\pi) - 1\right] \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-8}{(n\pi)^2} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$



$\cos 0 = 1$

$\cos \pi = -1$

$\cos 2\pi = 1$

$\vdots$

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 1 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

$$\cos(n\pi) - 1 = \begin{cases} -2 & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

De maneira análoga mostra-se que

$b_n = 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $L = 2$

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = \begin{cases} \frac{-8}{(n\pi)^2} & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases} \\ b_n = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cancel{a_2} \cos\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \cancel{a_4} \cos\left(\frac{4\pi x}{2}\right) + a_5 \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots$$

with $a_0 = 2$, $a_1 = -8/\pi^2$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{-8}{(3\pi)^2}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{-8}{(5\pi)^2}$

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{8}{(3\pi)^2} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) - \frac{8}{(5\pi)^2} \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots$$

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \quad \#$$

Sim

Exercício

Implementar a série de Fourier

Resolver o exemplo

Esboçar gráfico

Implementar a solução obtida p/ conferir se errou algo.

04/04/24

Exercício Valendo nota de Prova.