Cálculo IV - Janeiro 2024

Introdução - 1ª Semana

Vimos em Cálculo I que a derivada dy/dx de uma função $y = f(x)$ nada mais é que $f'(x)$, encontrada por uma regra apropriada.

Exemplo: A função $y = e^{x^3}$ é diferenciável no intervalo $(-\infty, \infty)$ e sua derivada é dada por

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{x^3} \qquad (1)$$

Agora, vamos supor que: Dado a equação (1), desejássemos encontrar a função $y(x)$ que a representasse, ou seja: Dado

1) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2 e^{x^3}$ encontre $y(x)$.

Ou ainda, dado as equações diferenciais

2) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ encontre $y(x)$

3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{3dy}{dx} + 2y = 0$ encontre $y(x)$

Neste momento, ainda não sabemos como resolver os problemas acima, porém, dado uma equação diferencial encontrar a função $y(x)$ que a represente

resolver problemas básicos da disciplina que vamos trabalhar este semestre.

Retornando ao problema: Dado $\frac{dy}{dx} = 3x^2 e^{x^3}$

encontre $y(x)$.

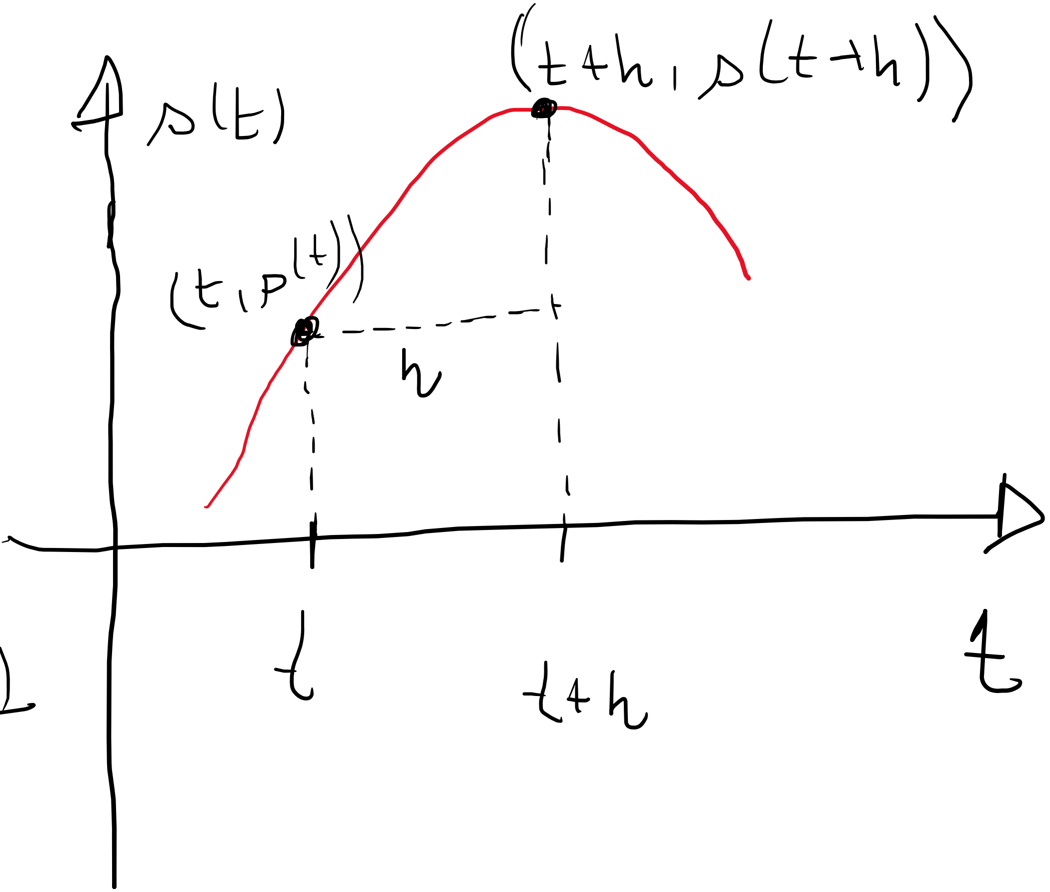
Observe que o problema é semelhante ao familiar inverso do cálculo diferencial, onde dado a derivada, encontramos uma antiderivada.

Mas qual a diferença entre a derivada e a diferencial?

A derivada tem significado físico e pode gerar novas grandezas físicas.

Ex: Sabemos que a velocidade média (v_m) é definida por:

$$v_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{s}{t}$$



$$\Rightarrow v_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

$$v_m = \frac{s(t+h) - s(t)}{(t+h) - t} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

ou se desejamos saber qual a velocidade no tempo t (por exemplo), podemos calcular

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{ds}{dt} = s'(t)$$

Sabemos também que $\frac{dv}{dt} = a$

velocidade

aceleração

$$\Rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dx^2} = a$$

Assim, vimos exemplos de duas grandezas físicas representadas por derivadas.

$\Rightarrow$ A diferencial é um operador com propriedades puramente matemáticas.

⇒ A derivada transforma uma função em outra função. Ex: a derivada de uma função de segundo grau é uma uma função de primeiro grau

$$y(x) = 2x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x.$$

Enquanto que a diferencial é uma variação infinitesimal de uma grandeza. Ex: se x é uma variável então uma mudança no valor de x é frequentemente denominada por Δx.

A esta "mudança" dá-se o nome de infinitesimal.

Por fim, a derivada é uma operação entre duas grandezas $\left(v = \frac{ds}{dt}\right)$, enquanto que a diferencial é uma operação que envolve uma grandeza (ds e dt).

Ao realizar o quociente entre duas grandezas tem-se

$$\frac{ds}{dt} \Rightarrow$$ que é semelhante a definição de derivada.

$\Rightarrow$ a derivada não é o quociente entre duas diferenciais, mas se comporta como se fosse $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow \underbrace{dy = f(x)\,dx}$$

$\Downarrow$

equação diferencial.

Definição: Equação diferencial é uma equação que relaciona uma função e suas derivadas ou diferenciais. Quando a equação possui derivadas, estas devem ser passadas para a forma diferencial.

As equações diferenciais

$$y' = f(y)$$

são chamadas de autonomas.

As equações diferenciais são classificadas de acordo com:

1) Tipo

2) ordem

3) linear ou não linear

Tipo de uma equação diferencial.

I) Uma equação que contém derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente é denominada de equação diferencial ordinária (EDO).

Ex:

$$\frac{dy}{dx} = 3x - 1$$

variável dependente é y

variável independente é x.

$\Downarrow$ $y(x)$

Tipo de uma equação diferencial.

II) Uma equação que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é denominada de equação diferencial parcial (EDP).

Ex:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial y}$$

variável dependente é z

variável independente são x e y

$\Downarrow$ $z(x, y)$

Ordem de uma equação diferencial

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparece.

Linearidade de uma equação diferencial

Dizemos que uma EDO de ordem "n"

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é linear quando:

i) a variável dependente e todas as suas derivadas são de 1º grau.

ii) os termos $a_n(x), \dots, a_2(x), a_1(x)$ e $a_0(x)$ são funções constantes ou lineares.

Exercícios: Classifique as equações diferenciais quanto ao tipo, ordem e linearidade.

1) $\frac{dy}{dx} = 3x - 1$

2) $x\,dy - y\,dx = 0$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} + 2y$

4) $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$

5) $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$

6) $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 5x + 3y$

7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y$

8) $\frac{\partial z}{\partial x} = z + x\frac{dz}{dy}$

9) $u_t + u\,u_x = 0$

Assim, dada uma equação diferencial devemos inicialmente classificá-la quanto ao tipo, ordem e linearidade. Na sequência devemos encontrar a solução (ou soluções) da equação diferencial (ED).

Definição: Qualquer função f definida em um intervalo I, que quando substituída na ED, reduz a sua identidade é chamada de solução para a equação no intervalo.

Assim, uma solução para uma EDO de ordem n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

ou na notação

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \qquad (2)$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz (2) $\forall\, x \in I$.

Exemplo: Verifique por substituição direta que a EDO de primeira ordem linear

$$\frac{dR}{dt} = -KR$$

tem a solução $R(t) = e^{-kt}$, $0 < t < \infty$ e k é uma constante qualquer.

Exemplo: Dado a EDO linear de segunda ordem

$$y'' + y = 0 \qquad (3)$$

mostre que $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ são soluções de (3).

Sendo $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \operatorname{sen} x$ soluções de (3), o que podemos afirmar sobre a solução $y(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$?

<u>Exercício</u>: Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é solução para a EDO de 1ª ordem não linear

$$\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$$ no intervalo $(-\infty, \infty)$

<u>Exercício</u>: Verifique que $y = x e^{x}$ é solução para a EDO linear de 2ª ordem

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

OBS: observe que $y(x) = 0$ também satisfaz a equação diferencial $\forall x \in \mathbb{R}$, i.é

se $y(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \Longrightarrow \underbrace{\cancel{\frac{dy}{dx}}}_{0} = x\sqrt{\underbrace{\cancel{y}}_{0}}$

se $y = 0 \begin{cases} \Rightarrow y' = 0 \\ \searrow y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\cancel{y''}}_{0} - 2\underbrace{\cancel{y'}}_{0} + \underbrace{\cancel{y}}_{0} = 0$

A solução $y(x) = 0$ é denotada como sendo a solução TRIVIAL. Procuramos, sempre que existir uma solução $\neq$ TRIVIAL.

Exemplo de EDO que não possui solução real.

1) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$

2) $(y')^2 + y^2 + 4 = 0$

3) $(y'')^2 + 10y^4 = 0$ ← Esta EDO possui uma solução real, que é a trivial.

Solução explícita

Uma solução para a EDO $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{n}) = 0$ que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de solução explícita.

Ex: Para $x \in (-\infty, \infty)$ e c uma constante qualquer

$y(x) = c e^{x}$ é uma solução explícita de

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

Solução implícita

Uma relação $g(x,y)=0$ é uma solução implícita da EDO $F(x,y,y',\ldots,y^n)=0$ em I, se define uma ou mais soluções explícitas em I.

Ex: A relação $x^2+y^2-4=0$ é uma solução implícita para a EDO $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ (MOSTRE)

OBS: qualquer relação da forma

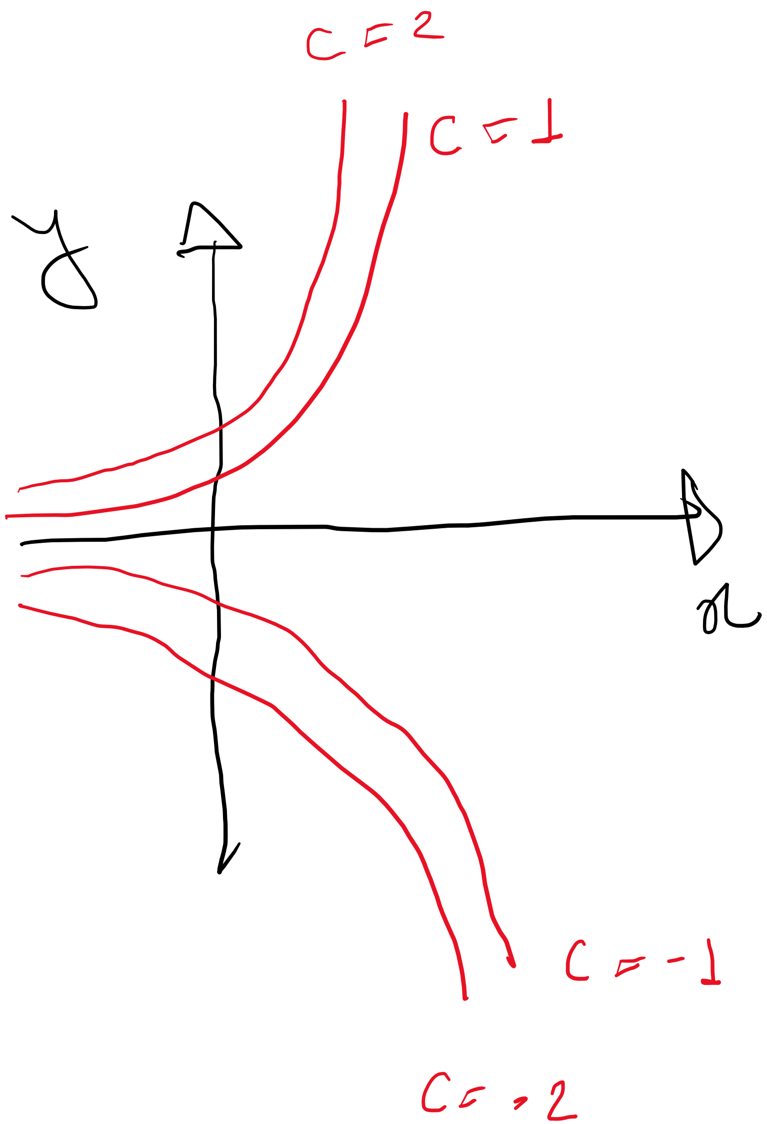
$x^2+y^2-c=0$, $c>0$ satisfaz $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

Desta forma, podemos observar que uma EDO, geralmente, possui uma infinidade de soluções.

Exemplo: $y = ce^{x}$ é solução de $\frac{dy}{dx} = y$

$\forall c \in \mathbb{R}$.

Variando o valor de c podemos gerar uma infinidade de soluções.



c = 2
c = 1
y
x
c = -1
c = -2

Exercícios: ① Verifique que para qualquer valor de c, a função $y = \frac{c}{x} + 1$ é uma solução da EDO de 1ª ordem

$$x\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad \text{em } (0, +\infty)$$

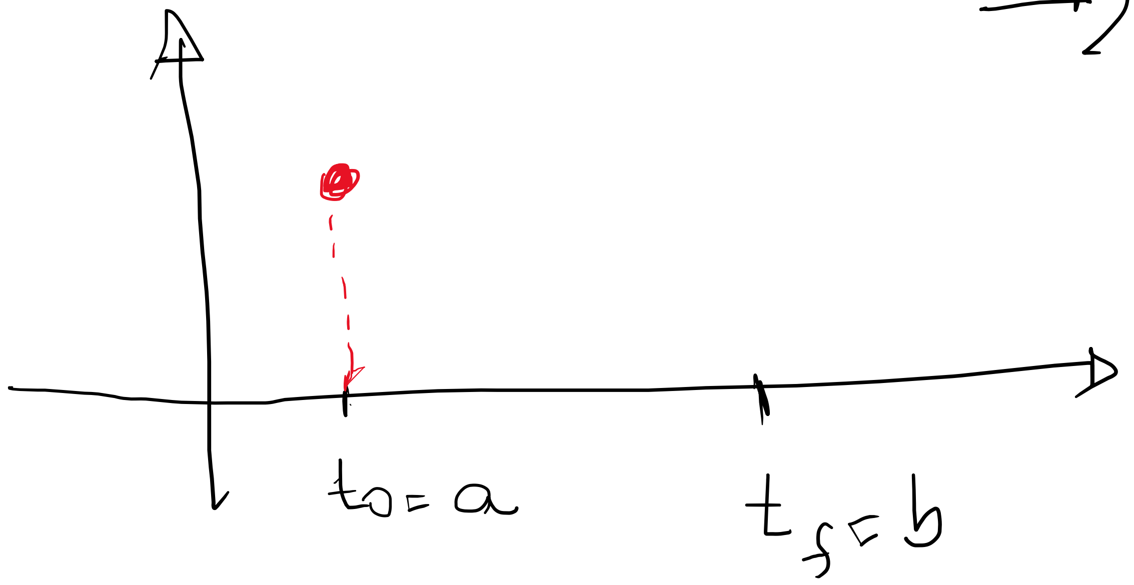
② Verifique que as funções $y = c_1 \operatorname{sen}(4x)$
$y = c_2 \cos(4x)$ são soluções para a ED $y'' + 16y = 0$.

Quanto a solução.

Vimos que quando substituída na ED, a função solução, transforma-a na identidade. Assim as soluções podem ser:

- solução geral ⇒ uma família de curvas que verifica a ED.
- solução particular ⇒ solução deduzida da solução geral, impondo condições iniciais ou de contorno.

Geralmente as condições iniciais são dadas para o instante inicial, ou seja $t = [a, b]$.



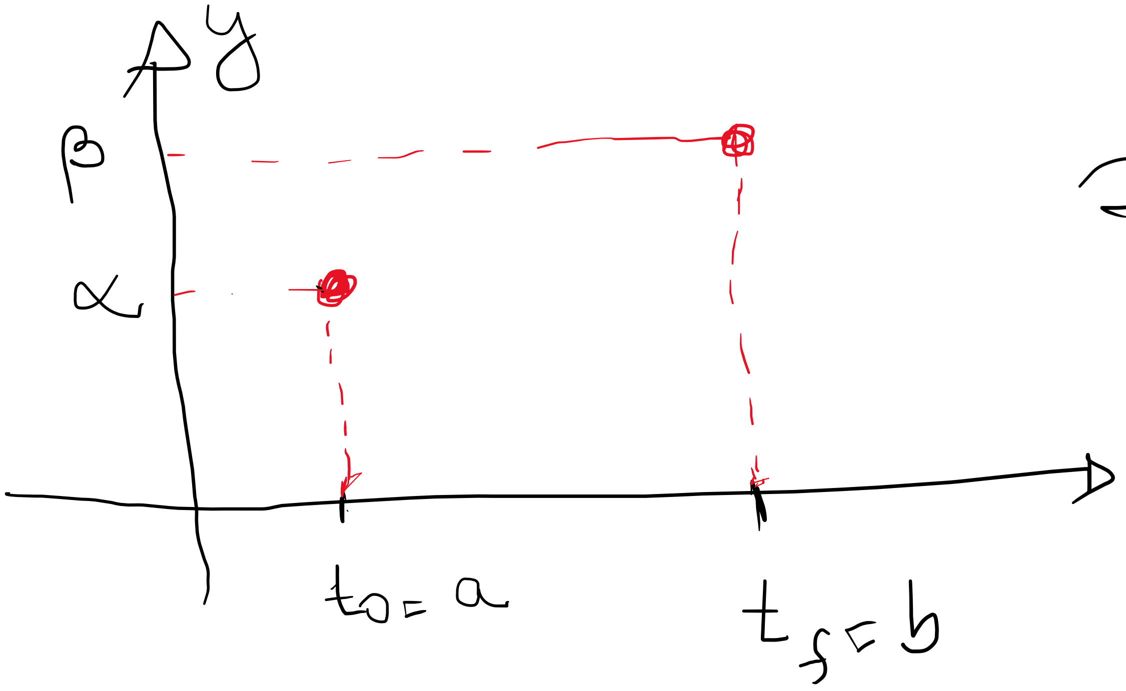
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

PVI

As condições de contorno aparecem em EDOs de segunda ordem (ou ordem superiores).

⟹ Os valores das funções ou derivadas são dados em pontos distintos.



$$\underline{PVC} \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y') \\ y(t_0) = \alpha \\ y(t_f) = \beta \end{cases}$$

Se as condições da EDO de segunda ordem forem dadas no mesmo ponto (ponto inicial), tem-se um PVI

$$\text{PVI} \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y') \\ y(t_0) = \alpha \\ y'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Problema de Valor Inicial (PVI)

Estamos interessados em resolver, inicialmente, uma ED de 1ª ordem sujeita a uma condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário.

Exemplo: Dado a ED $\frac{dy}{dx} = y$, pode-se verificar que $y(x) = c\,e^{x}$ é a solução geral.

Observe que: se $x_0 = 0$ e $y(x_0) = 3 \Rightarrow$

$$y(x_0) = c\,e^{x_0} \Rightarrow 3 = c\,e^{0} \Rightarrow c = 3$$

$\therefore$ O PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = c\,e^{x} \rightsquigarrow \text{solução geral} \\ y(x) = 3\,e^{x} \rightsquigarrow \text{solução particular} \end{cases}$$

Assim questionamos: Dado um PVI de 1º ordem sempre existirá uma solução? Se existir, está solução será única?

Para responder, vamos avaliar o seguinte exemplo:

Dado o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x y^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{16} \text{ é solução}$$

e p/ $x = 0$

$y(0) = \dfrac{0^4}{16} = 0$ ∴ a solução da ED passa por $(0,0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{x^4}{16} \text{ é solução}$$

e p/ $x = 0$

$y(0) = \frac{0^4}{16} = 0$ ∴ a solução da ED passa por $(0,0)$.

$\Downarrow$

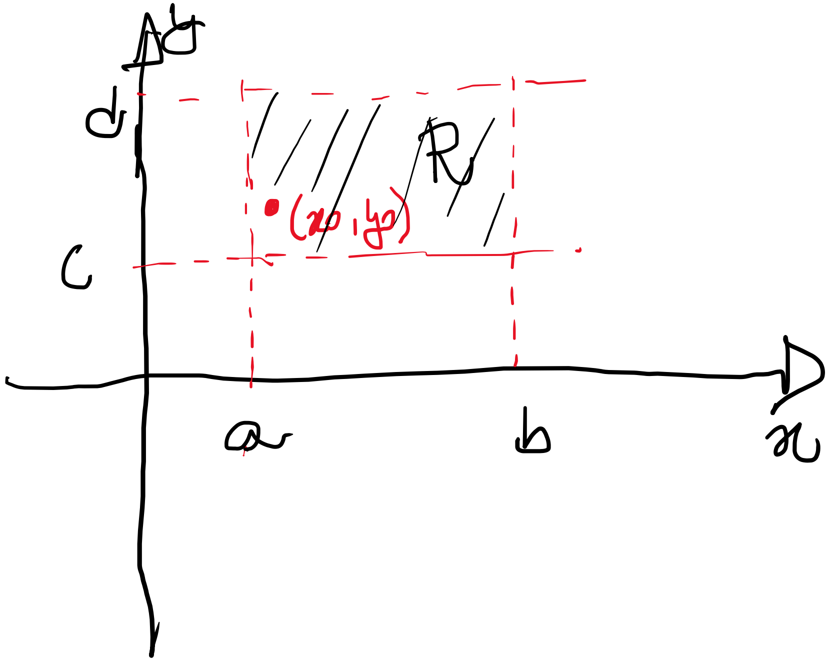
mas a solução trivial $y(x) = 0$ da ED também passa pelo ponto $(0,0)$

$$\Rightarrow \text{ o PVI } \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\,y^{\frac{1}{2}} \\ y(0) = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow y(x) = \frac{x^4}{16} \searrow \\ \searrow y(x) = 0 \nearrow \end{array} 2 \text{ soluções}$$

Logo a solução do PVI nem sempre será única.

Como garantir a unicidade de solução?

Teorema de Existência e Unicidade: Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a < x < b$ e $c < y < d$ que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior.



Se a função $f(x,y)$ e $\partial f / \partial y$ forem forem contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

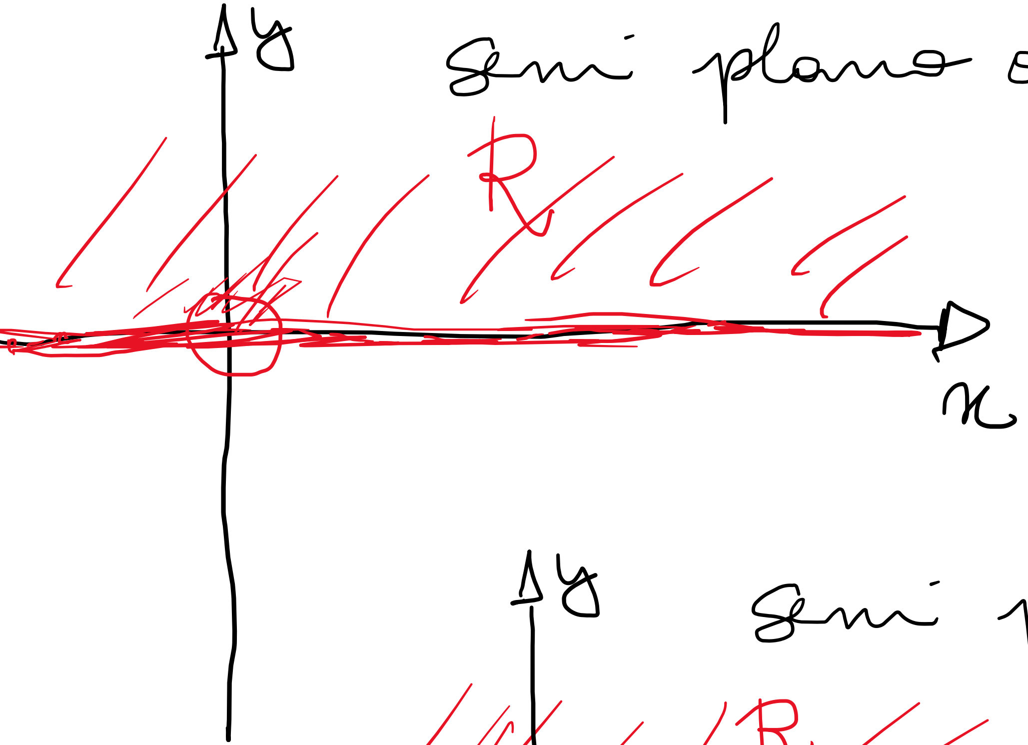
Voltamos no exemplo onde a ED é $\frac{dy}{dx} = x y^{\frac{1}{2}}$, onde vimos que para o ponto $(0,0)$ a ED possui pelo menos 2 soluções.

Analisando agora as condições do Teorema da unicidade:

$\Rightarrow f(x,y) = x y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f(x,y)$ é contínua $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\forall\, y \geq 0$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2 y^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua

$\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\forall\, y > 0$ (observe que agora $y \neq 0$).



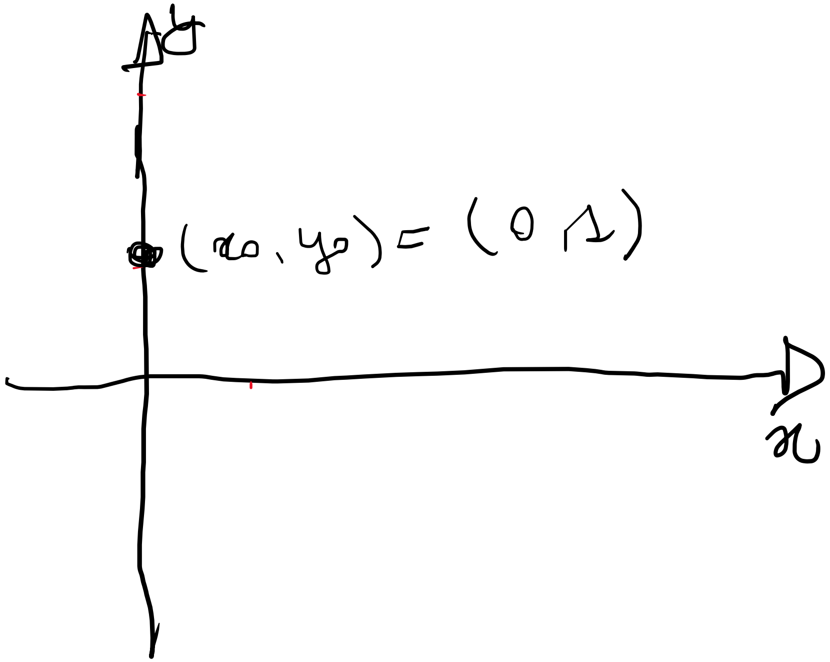
semi plano onde $f(x,y)$ é contínua
(inclui o eixo x)

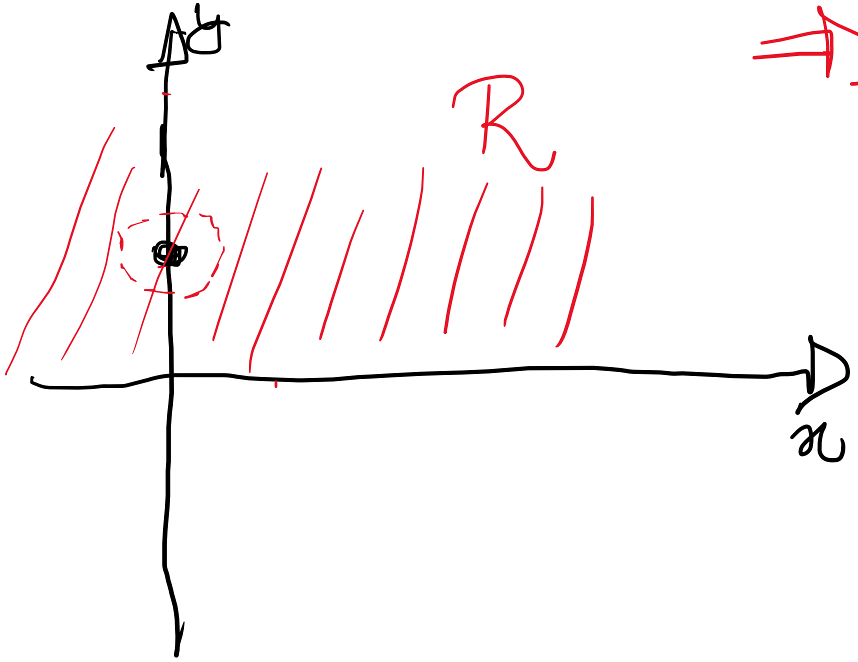
semi plano onde $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua

(não inclui o eixo x)

$\therefore$ não existe intervalo centrado
em x_0 $\in$ a região R.

Concluímos assim, que dado um ponto (x_0, y_0) com $y_0 > 0$, por exemplo o ponto $(0, 1)$ existe um intervalo em torno de $x_0 = 0$ no qual a ED possui solução única.





$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x\, y^{1/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

Teorema da existência e unicidade $\Rightarrow$ possui solução ÚNICA.

Exercícios:

① O teorema de existência e unicidade garante que existe um intervalo contendo $x_0 = 0$ no qual $y(x) = 3e^x$ é a única solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Determine este intervalo.

Exercícios:

2) Mostre que para qualquer ponto (x_0, y_0), a ED

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$ tem solução única.

OBS: Use o Teorema de existência e unicidade.

Boa Leitura a todos!!!!