Cálculo IV - 11, Abril 2024

Séries Fourier - 11.ª Semana

Definição 6. *Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2L$ (integrável, absolutamente integrável). A Série de Fourier de $f(x)$ é*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right)$$

onde

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots) \\ b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

são os coeficientes de Fourier de $f(x)$.

$\Rightarrow$ O símbolo "$\sim$" é usado pois não sabemos se a série do lado direito converge p/ $f(x)$.

Extensões Pares e Ímpares

Definição 9. *Uma função $f(x)$ é par se seu domínio é simétrico com relação à origem e $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in Dom f$.*

Definição 10. *Uma função $g(x)$ é ímpar se seu domínio é simétrico com relação à origem e $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in Dom f$.*

Exemplo 11. *As funções do tipo $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas pares, enquanto as funções do tipo $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ são todas ímpares. A única função que é par e ímpar ao mesmo tempo é a função constante nula.*

Cuidado! Há funções que não são pares nem ímpares! Por exemplo, $f(x) = x^2 + x$ não é par nem ímpar $(f(-1) = 0 \neq \pm 2 = \pm f(1))$.

Proposição 3. *Se $f(x)$ é par e $g(x)$ é ímpar, então*

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(x)\,dx &= 2\int_{0}^{L} f(x)\,dx \\
\int_{-L}^{L} g(x)\,dx &= 0
\end{aligned}$$

Proposição 4. *Se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são pares e $g_1(x)$ e $g_2(x)$ são ímpares (e c_1, c_2 são números reais quaisquer)*

$$\begin{aligned}
c_1 f_1 + c_2 f_2 \text{ é par (isto é, PAR+PAR } &= \text{PAR)} \\
c_1 g_1 + c_2 g_2 \text{ é ímpar (isto é, ÍMPAR+ÍMPAR } &= \text{ÍMPAR)} \\
f_1(x) f_2(x) \text{ é par (isto é, PAR.PAR } &= \text{PAR)} \\
f_1(x) g_1(x) \text{ é ÍMPAR (isto é, PAR.ÍMPAR } &= \text{ÍMPAR)} \\
g_1(x) g_2(x) \text{ é PAR (isto é, ÍMPAR.ÍMPAR } &= \text{PAR)}
\end{aligned}$$

Exemplo 1 Seja $f(x)$ uma função periódica, de período 2π tal que $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Assim

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx$$

$$a_0 = 2\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{x^2}{\pi}\Big|_0^{\pi} = \pi$$

$u = x$	$dv = \cos mx dx$
$du = dx$	$v = \frac{\sin mx}{m}$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(mx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos(mx)\, dx$$

par

$f(x)$ par

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(mx)\,dx$$

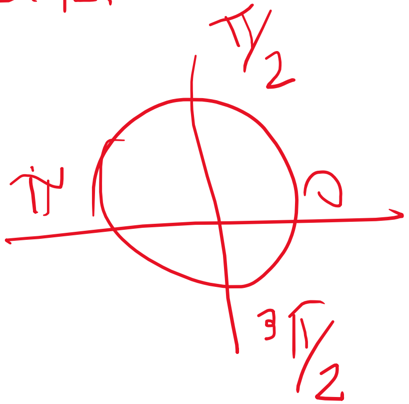
$$\begin{cases} \operatorname{sen} k\pi = 0 \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x\,\frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(mx)}{m}\,dx \right) = 0 + \frac{2}{\pi m}\left(\frac{\cos mx}{m}\Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{2}{\pi m^2}\left(\cos m\pi - 1\right) = \frac{2}{\pi m^2}\left((-1)^m - 1\right), \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$k = 0, 1, \ldots$



$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|x|}_{\text{par}}\ \underbrace{\operatorname{sen}(mx)}_{\text{impar}}\,dx = 0 \quad \text{pois}$$

par · impar = impar

$g(x)$ = impar

$$\int_{-L}^{L} g(x)\,dx = 0$$

$\therefore$ Se $f(x) = |x| \Rightarrow$

$$a_0 = \pi$$

$$a_m = \frac{2}{m^2 \pi}\left((-1)^m - 1\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{m^2\pi}, & m \text{ ímpar} \\ 0, & m \text{ par} \end{cases}$$

$$b_m = 0$$

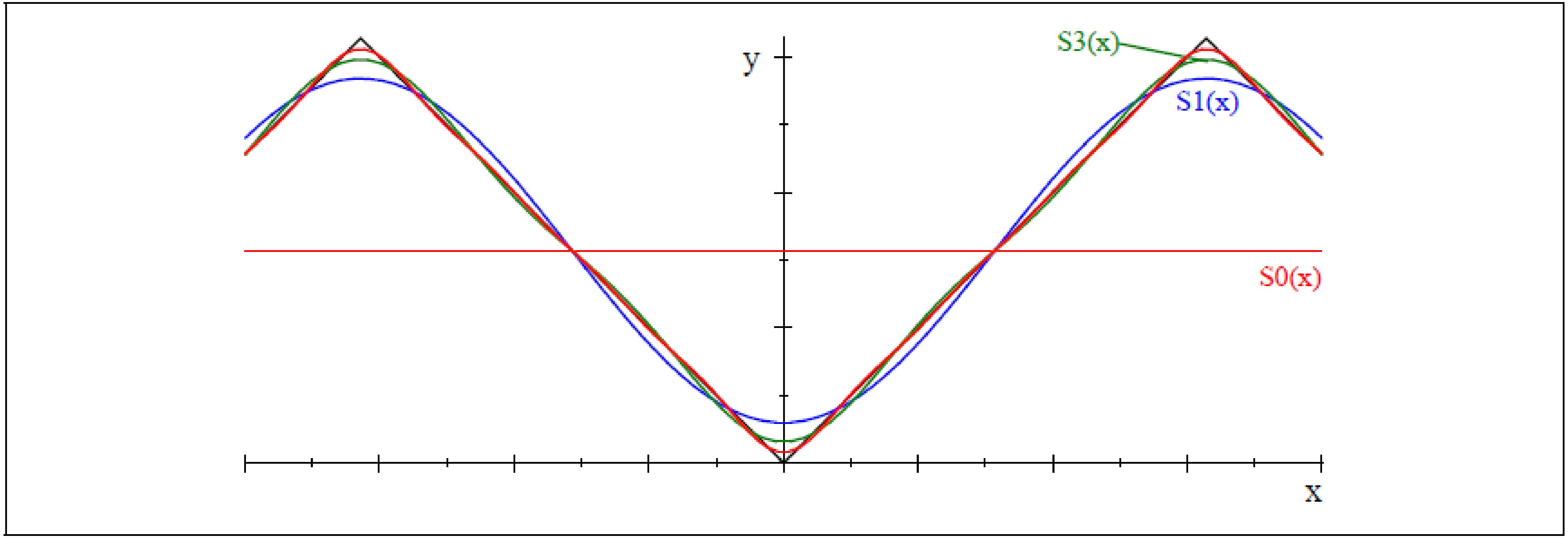
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\right)$$

$L = \pi$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2\pi}\left((-1)^m - 1\right)\cos(mx)$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos x - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{9} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 5x}{25} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 7x}{49} - \cdots$$

$$f(x) \sim \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{S_0(x)} - \overbrace{\frac{4}{\pi}\cos x}^{S_1(x)} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 3x}{9} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 5x}{25} - \frac{4}{\pi}\frac{\cos 7x}{49} - \cdots$$



```
clear all;
clc;

% Definir a funcao no intervalo
f = @(x) abs(x); % funcao |x|
L = pi;

% Calcular o termo  a0. "quad" = integral
a0 = (1/L) * quad(@(x) f(x), -L, L);

% Inicializa a soma
sum = 0;

x = linspace(-L, L, 200); % vetor dos pontos em x
% Calcular os termos da serie de Fourier
for n = 1:8
   % Calcula os coeficientes
   an = (1/L) * quad(@(x) f(x).*cos(n*x*pi/L), -L, L);
   bn = (1/L) * quad(@(x) f(x).*sin(n*x*pi/L), -L, L);

   % Atualiza a soma
   sum = sum + (an*cos(n*x*pi/L) +  bn*sin(n*x*pi/L));
end
```

```
% esboco do grafico

figure(1);
plot(x, f(x), 'b-', 'LineWidth', 2);
hold on;
plot(x, (sum + a0/2), 'r-', 'LineWidth', 2);
grid on;
legend('abs(x)', 'Serie Fourier');
xlabel('x');
ylabel('y');
title('Funcao abs(x) e sua Serie de Fourier');
```

$\boxed{\text{Exemplo 2}}$. Onda retangular

Considere a função $g(x)$ periódica de período 2 tal que

$$g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

~~Exercício~~

mostre que

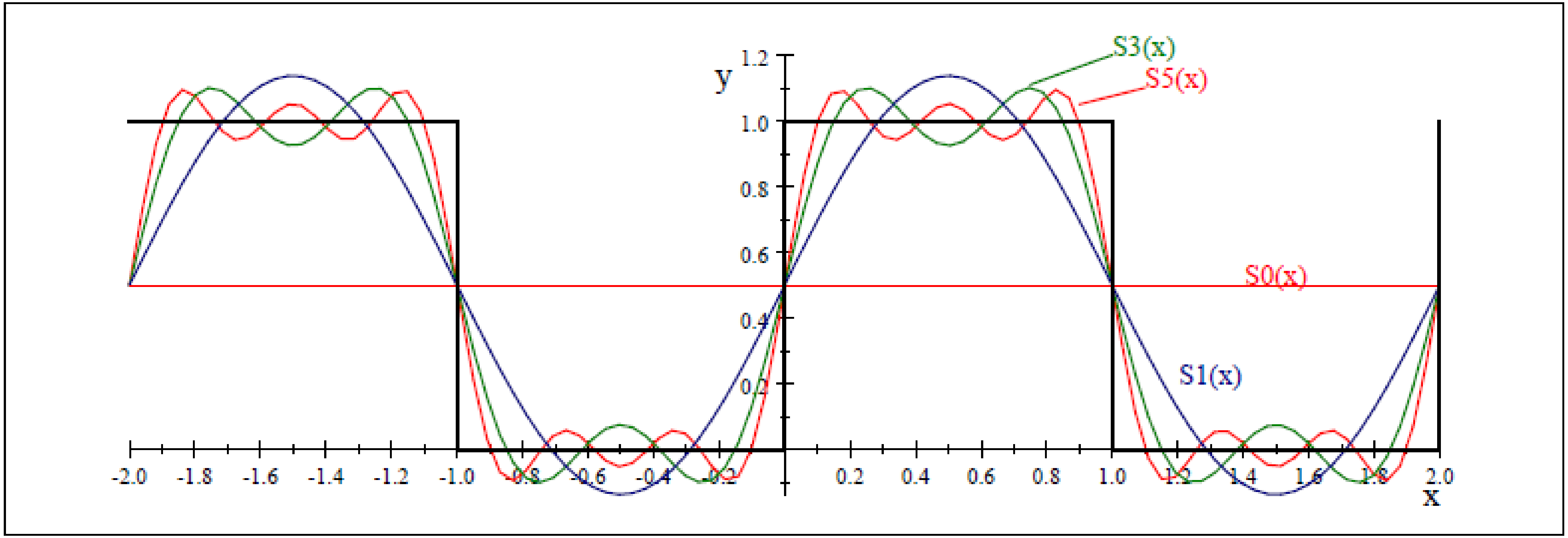
$a_0 = 1$,

$a_n = 0$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n\pi}$$

$$g(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2k-1)x\pi)}{2k-1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\operatorname{sen}\left(3\pi x\right)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5\pi x)}{5} + \cdots \right)$$

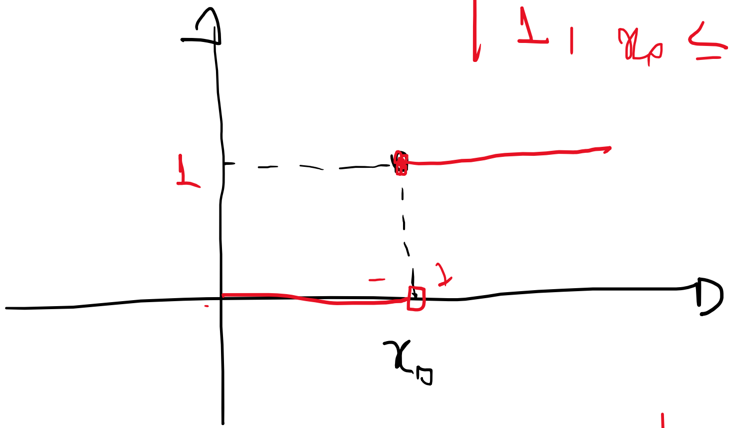


e das diferenças entre $g(x)$ *e tais somas*

Os exemplos 1 e 2 parecem indicar que a série de Fourier de f (x) converge para f (x) (pelo menos nos pontos onde f (x) é contínua).

Definição : Uma função f (x) é contínua por partes num intervalo finito (a; b) quando for contínua em (a; b) exceto possivelmente em um número finito de pontos x0 onde existem e são finitos os seus limites laterais (denotados f (x0+) e f (x0-)). Uma função f (x) é seccionalmente contínua quando é seccionalmente contínua em cada intervalo finito da reta real.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_0 \\ 1, & x_0 \leq x < \infty \end{cases}$$



$f(x_0^+) = 1$

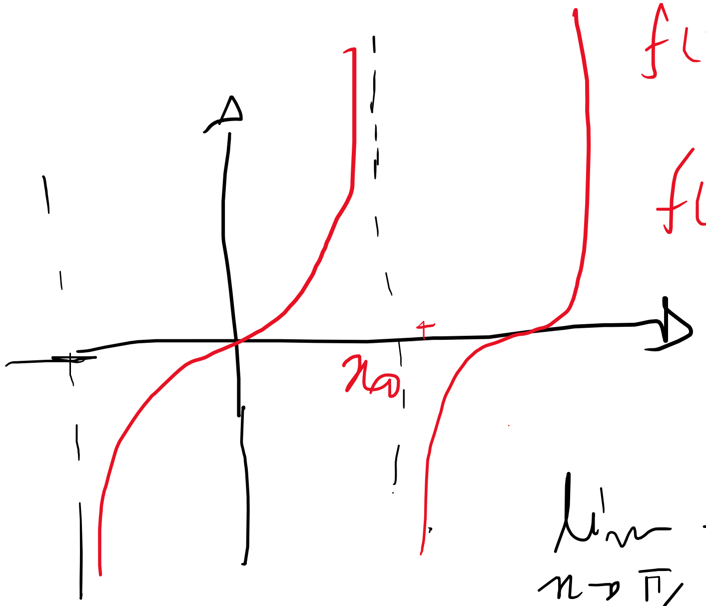
$f(x_0^-) = 0$

f é cont. por partes

$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \pi/2$

$f(x_0^+) = -\infty$

$f(x_0^-) = +\infty$



$\lim_{x \to \pi/2} \operatorname{tg} x = \infty$ ∄

f não é cont. por partes

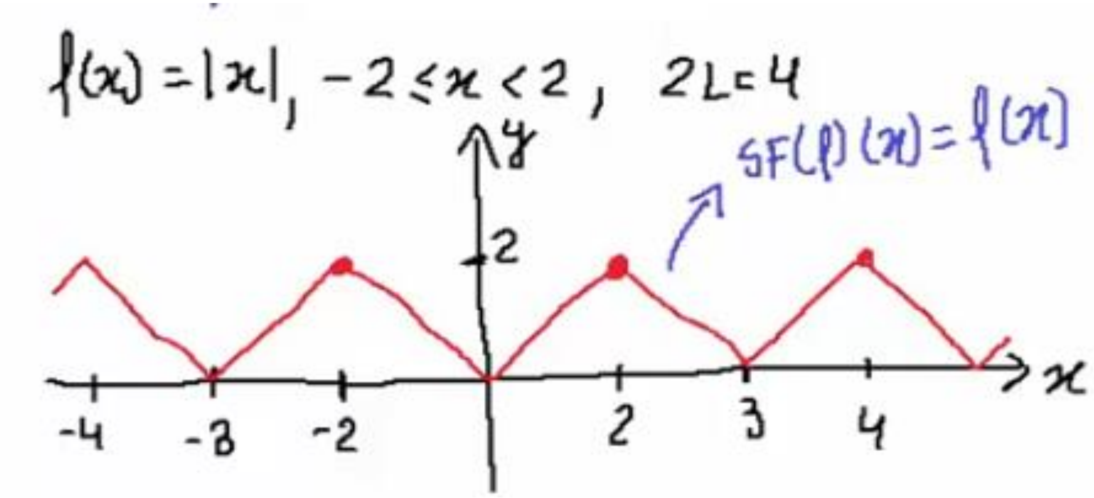
Teorema de Fourier:

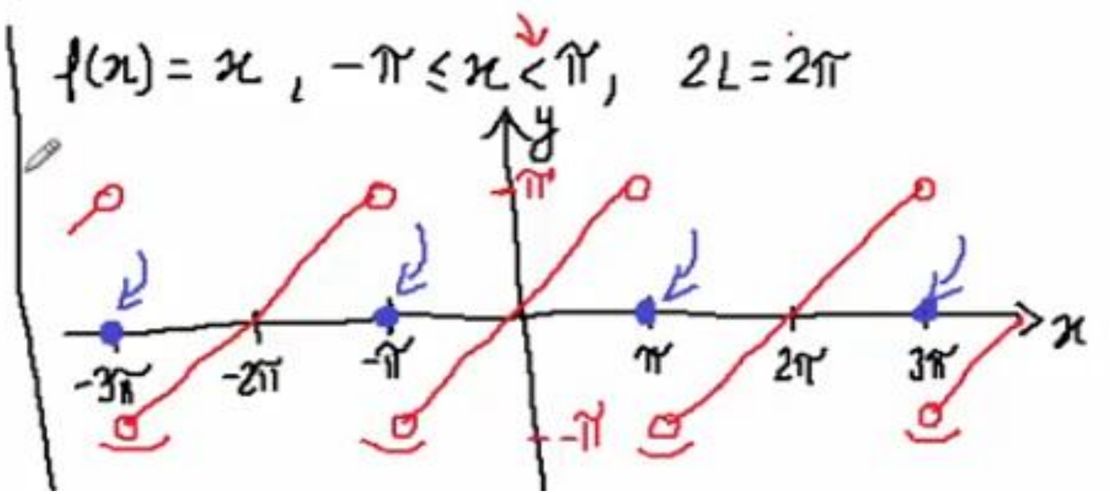
Seja f uma função periódica, com período $2L$, tal que f e f' são contínuas por partes para $-L \leq x < L$. Então soma dos termos da série

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

converge para $f(x)$ nos pontos em que f é contínua e converge para a média entre os limites laterais onde f é descontínua.

Teorema $\Rightarrow$ $$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é cont. em } x \\ \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$





OBS: Se f for contínua em $x = x_0 \Rightarrow$ a série de Fourier converge para $f(x_0)$ neste ponto

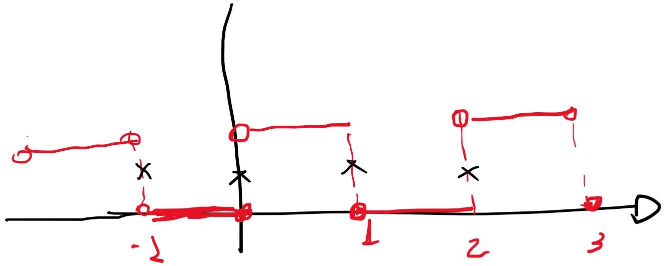
Ex: $f(x) = |x|$ Vimos que

$$\Rightarrow f(x) = \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right)$$

Como $f(x) = |x|$ é cont. $\forall x$, mesmo $f'(x) = \nexists$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\right)$$

Seja $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$



cuja série de Fourier é dada por

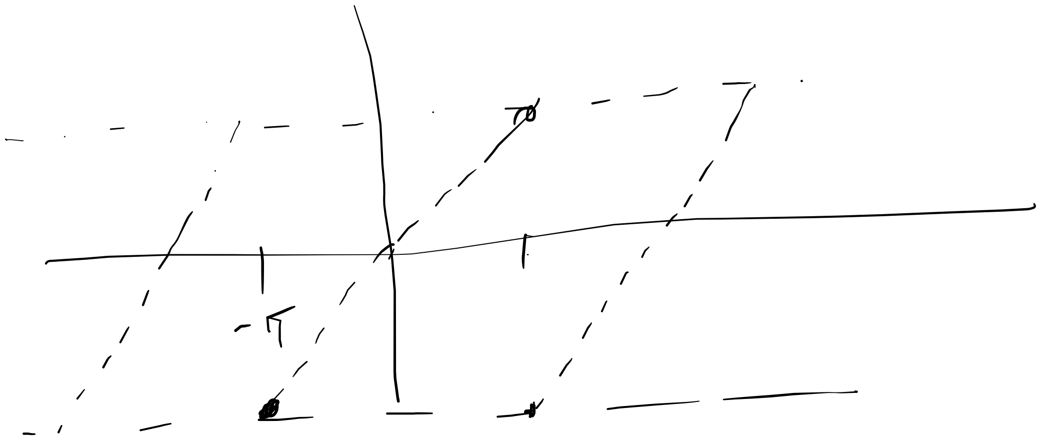
$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\operatorname{sen}(3\pi x)}{3} + \operatorname{sen}(5\pi x) + \dots\right)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\operatorname{sen}(3\pi x)}{3} + \operatorname{sen}(5\pi x) + \dots\right) & \text{se } -1<x<0 \\ 1 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}(\pi x) + \frac{\operatorname{sen}(3\pi x)}{3} + \operatorname{sen}(5\pi x) + \dots\right) & \text{se } 0<x<1 \end{cases}$$

$\therefore$ $g(x) \sim$ da série de Fourier se $x =$ nº inteiro, mas p/ qualquer outro valor de x $g(x) =$ série de Fourier.

Exercício: (4) Use um código para calcular a série de Fourier da função periódica de período 2π tq $f(x) = x$, se $-\pi \leq x < \pi$.

R: $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{6} + 2 \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$



Exercícios:

② Avalie, graficamente, a soma parcial

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2m-1)x}{2m-1}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \dots + \frac{(2N-1)x}{2N-1}\right)$$

quando $\begin{cases} N = 3 \\ N = 30 \\ N = 300 \end{cases}$

"fenômeno de Gibbs"

Ver arquivo maple.

Como usar a teoria de séries de Fourier para resolver uma EDO?

Exemplo 1. As oscilações de um sistema massa-mola amortecido são modeladas pela equação ordinária;

$$x''(t) + 0,05x'(t) + 25x(t) = F(t)$$

onde a força externa é dada por:

$$F(t) = \begin{cases} t + \dfrac{\pi}{2}, & -\pi < t < 0 \\ -t + \dfrac{\pi}{2}, & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad F(t + 2\pi) = F(t)$$

Desejamos encontrar a solução geral da equação ordinária.

OBS: F é uma função par e periódica.

Como desejamos encontrar a solução geral da equação ordinária. Para isso, sabe-se que a solução geral da equação diferencial é $x = x_h + x_p$, onde x_p, é a solução particular e x_h, é a solução geral da equação homogênea:

$$x''(t) + 0,05x'(t) + 25x(t) = 0.$$

A equação característica é $\lambda^2 + 0,05\lambda + 25 = 0$, a qual tem como raízes:

$$\lambda = -0,025 \pm \frac{\sqrt{99,997}}{2} i = -0,025 \pm \omega i, \qquad \text{onde} \qquad \omega = \frac{\sqrt{99,997}}{2}.$$

Assim a solução geral da equação homogênea é

$$x_h(t) = c_1 e^{-0,025t}\cos(\omega t) + c_2 e^{-0,025t}\operatorname{sen}(\omega t)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Desde que F é uma função par, segue do teorema de Fourier e da proposição

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) \quad \text{com} \quad a_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$$

Vamos procurar uma solução particular da forma,

$$x_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \operatorname{sen}(nt)$$

com coeficientes α_n e β_n a serem determinados.

Teoria do 1º Bimestre

Teorema. *(Teorema de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, tal que f e f', são contínuas por partes nos intervalo $[-L, L]$. Então a série de Fourier de f*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

onde

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \quad n = 1,2,3,\dots$$

converge para $f(x)$, se f é contínua em x, e para $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$, se f é descontínua em x.

Proposição . *(Séries de Fourier de funções pares e ímpares)*

(i) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função par que satisfaz as hipóteses do teorema de Fourier. Então,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n = 0,1,2,3,\dots$$

$$b_n = 0, \quad \text{para todo} \quad n$$

Logo,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

(ii) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função ímpar que satisfaz as hipóteses do teorema de Fourier. Então,

$$a_n = 0, \quad \text{para todo} \quad n,$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

Logo,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Desde que seja possível fazer a derivação termo a termo obtém-se:

$$x_p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n \operatorname{sen}(nt) + n\beta_n n \cos(nt) \Big]$$

e

$$x_p''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n^2 \cos(nt) - \beta_n n^2 \operatorname{sen}(nt) \Big]$$

Substituindo as expressões na equação diferencial $x''(t) + 0,05x'(t) + 25x(t) = F(t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n^2 \cos(nt) - \beta_n n^2 \operatorname{sen}(nt) \Big] + 0,05 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[-\alpha_n n \operatorname{sen}(nt) + n\beta_n \cos(nt) \Big]$$
$$+ 25 \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \operatorname{sen}(nt) \Big] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

Assim esta expressão pode ser escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big[(25 - n^2)\alpha_n + 0,05n\beta_n \Big] \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(25 - n^2)\beta_n - 0,05n\alpha_n \Big] \operatorname{sen}(nt)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$$

Pela unicidade dos coeficientes de Fourier devemos ter um sistema

$$(25 - n^2)\alpha_n + 0,05n\beta_n = a_n$$

$$-0,05n\alpha_n + (25 - n^2)\beta_n = 0$$

Pela unicidade dos coeficientes de Fourier devemos ter um sistema

$$(25-n^2)\alpha_n + 0,05n\beta_n = a_n$$

$$-0,05n\alpha_n + (25-n^2)\beta_n = 0$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\alpha_n = \frac{(25-n^2)a_n}{D_n} \quad \text{e} \quad \beta_n = \frac{0,05na_n}{D_n} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

onde $D_n = (25-n^2)^2 + (0,05n)^2$.
Assim uma solução da equação diferencial é

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(25-n^2)a_n}{D_n}\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,05na_n}{D_n}\operatorname{sen}(nt) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(25-n^2)}{D_n}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0,05n}{D_n}\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\operatorname{sen}(nt) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{25-n^2}{D_n}\frac{4}{\pi n^2}\cos(nt) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{0,2n}{D_n \pi n^2}\operatorname{sen}(nt) \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4(25-n^2)}{D_n \pi n^2}\cos(nt) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{0,2}{D_n \pi n}\operatorname{sen}(nt)
\end{aligned}$$

Finalmente, a solução geral da equação ordinária é da forma:

$$x(t) = c_1 e^{-0,025t}\cos(\omega t) + c_2 e^{-0,025t}\,\mathrm{sen}(\omega t) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4(25-n^2)}{D_n \pi n^2}\cos(nt) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{0,2}{D_n \pi n}\,\mathrm{sen}(nt)$$

Na tabela a seguir, tem-se alguns valores numéricos dos coeficientes α_n e β_n

Coeficientes	n=1	n=3	n=5	n=7	n=9
α_n	0,05305	0,00884	0	-0,00108	-0,00028
β_n	0,00011	0,00008	0,20371	0,00001	0

Inserindo os valores da tabela em a solução , obtém-se uma aproximação de x_p;

$$x_p(t) \approx 0,05305\cos(t) + 0,00011\,\mathrm{sen}(t) + 0,00884\cos(3t) + 0,00008\,\mathrm{sen}(3t) + 0,20371\,\mathrm{sen}(5t) + \dots$$

Exercício. Encontre a solução geral da equação ordinária :

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = F(t)$$

onde

$$F(t) = \begin{cases} t + \pi, & -\pi < t < 0 \\ -t + \pi, & 0 < t < \pi \end{cases} \qquad F(t + 2\pi) = F(t)$$

e $|\omega| \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$

Resposta:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \operatorname{sen}(nt) + \frac{\pi}{2\omega^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 - n^2)n^2} \cos(nt)$$