Cálculo IV - Fevereiro 2024

Equação Diferencial linear de 2ª ordem - 6ª Semana

Dada a eq. dif. linear de 2ª ordem não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad (L)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

solução da parte homogênea

solução particular de (L)

A equação (1) foi resolvida usando coeficientes a determinar, porém este método só pode ser "empregado" se p e q forem constantes e se $k(x)$ possuir a "cara" das funções tabeladas (Ver slides da aula anterior).

Assim, dada uma eq. diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

como resolvê-la?

Exemplo: como resolver as eq. diferenciais

1) $y'' + y = tg\, x$, $\quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $y'' + y = \operatorname{sen} x$,

3) $x y'' - (1 + x) y' + y = x^2 e^{2x}$, $\quad x > 0$

e $y_1(x) = 1 + x$, $\quad y_2(x) = e^x$

são soluções.

$$W[1 + x, e^x] = \begin{vmatrix} 1+x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} \neq 0$$

$\therefore$ y_1 e y_2 são LI e soluções.

Sendo

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

com $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I, e $a_2(x) \neq 0$ $\forall x \in I$.

$\Rightarrow$ a forma padrão da EDO de 2º ordem

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{g(x)}{a_2(x)} \qquad (2)$$

ou $y'' + p(x)y' + q(x)y = K(x)$

onde $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ e $K(x) = \dfrac{g(x)}{a_2(x)}$

$a_2(x) \neq 0$, $p(x)$, $q(x)$ e $K(x)$ são contínuas $\forall x \in I$.

Vimos que não há dificuldades em obter uma solução da parte homogênea de eq. dif. de segunda ordem quando os coef. são constantes.

$\Rightarrow y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Questionamos: O que aconteceria se os parâmetros c_1 e c_2 em $y_h(x)$ fossem substituídos por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$?

$$\Rightarrow y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$y_h(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$$

$\Rightarrow$ Como obter $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de tal forma que $y(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$ seja solução?

Se $y_h(x) = u_1(x)\, y_1(x) + u_2(x)\, y_2(x)$ é solução de $y''(x) + p(x)\, y'(x) + q(x)\, y = K(x)$ então $y_h(x)$ deve satisfazer a eq. dif. dada. Por simplicidade não usaremos x na demonstração. De fato:

$$y_h' = u_1 y_1' + u_1' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2$$

$$y_h'' = u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_1'' y_1 + u_1' y_1'$$
$$+ u_2 y_2'' + u_2' y_2' + u_2'' y_2 + u_2' y_2'$$

Substituindo na eq. diferencial

$$y_p'' + p(x) y_p' + q(x) y_p = u_1 y_1'' + u_1' y_1' + u_1'' y_1 + u_1' y_1' + u_2 y_2'' + u_2' y_2' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' + p(x)\left[u_1 y_1' + u_1' y_1 + u_2 y_2' + u_2' y_2\right] + q(x)\left[u_1 y_1 + u_2 y_2\right] = K(x)$$

Agrupando os termos:

$$(*) \quad y_p'' + p(x) y_p' + q(x) y_p = u_1\left[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1\right] + u_2\left[y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2\right] + y_1 u_1'' + u_1 y_1' + y_2 u_2'' + u_2 y_2' + p(x)\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right] + y_1' u_1' + y_2' u_2' = K(x)$$

Sendo y_1 e y_2 soluções da eq. diferencial

$$\Rightarrow \; y_1'' + p(x)\,y_1' + q(x)\,y_1 = 0$$

$$y_2'' + p(x)\,y_2' + q(x)\,y_2 = 0$$

também sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(y_1 u_1'\right) = y_1' u_1' + y_1 u_1''$$

$$\frac{d}{dx}\left(y_2 u_2'\right) = y_2' u_2' + y_2 u_2''$$

$$(*)\quad y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = u_1\left[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right] + u_2\left[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right] + y_1u_1'' + u_1y_1'$$
$$+ y_2u_2'' + u_2y_1' + p(x)\left[y_1u_1' + y_2u_2'\right] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = r(x)$$

$$(**) \Rightarrow y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = \frac{d}{dx}(y_1u_1') + \frac{d}{dx}(y_2u_2')$$
$$+ p(x)\left[y_1u_2' + y_2u_2'\right] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = r(x)$$

Como queremos determinar as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ $\Rightarrow$ precisamos de 2 equações

Assim usamos como hipóteses

$$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \text{ em } (**)$$ 1ª equação

$$\Rightarrow y_p'' + p(x) y_p' + q(x) y_p = \frac{d}{dx}\left[y_1 u_1' + y_2 u_2' \right]$$

$$+ y_1' u_1' + y_2' u_2' = r(x) \qquad (***)$$

mas, observe que $y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[y_1 u_1' + y_2 u_2' \right] = 0 \Rightarrow (***)$$

torna-se

$$\Rightarrow y_p'' + p(x)\,y_p' + q(x)\,y_p = \frac{d}{dx}\left[y_1 u_1' + y_2 u_2'\right]$$

$$+\, y_1' u_1' + y_2' u_2' = k(x) \qquad (***)$$

$$\Rightarrow \quad y_1' u_1' + y_2' u_2' = k(x) \quad (2^{a}\ \text{equação})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = k(x) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ resolvendo este sistema obtemos $u_1(x)$ e $u_2(x)$.

Resumindo: método da variação dos parâmetros

Se $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é solução da eq. característica de $y'' + p(x) y' + p(x) y = 0$, então a solução particular (ou solução não homogênea)

$y_p(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$, onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ satisfazem o sistema de equações:

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = h(x). \end{cases}$$

Esempio

Exemplo: Resolva a eq. dif.

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$ usando variação de parâmetros.

1º passo $\Rightarrow$ eq. homog. $y'' - 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow$ raízes reais e iguais

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$

$y_1(x) = e^{2x} \Rightarrow y_1' = 2e^{2x}$

$y_2(x) = x e^{2x} \Rightarrow y_2' = e^{2x} + 2x e^{2x} = (1+2x)e^{2x}$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' e^{2x} + u_2' x e^{2x} = 0 \\ 2u_1' e^{2x} + (1+2x) e^{2x} u_2' = (x+1) e^{2x} \end{cases}$$

resolvendo o sistema

$$u_1' e^{2x} + u_2' x e^{2x} = 0 \Rightarrow u_1' = -\frac{u_2' x e^{2x}}{e^{2x}} \Rightarrow u_1' = -u_2' x$$

Subst. na segunda equação

$$2u_1' e^{2x} + (1+2x) e^{2x} u_2' = (x+1) e^{2x}$$

$$\Rightarrow -2u_2' x e^{2x} + (1+2x) e^{2x} u_2' = (x+1) e^{2x}$$

integrando

$$(-2x + 1 + 2x) u_2' = x+1 \Rightarrow u_2' = x+1 \Rightarrow u_2(x) = \frac{x^2}{2} + x$$

Substituindo $u_2' = x+1$ em $u_1' = -x\,u_2'$

$\Rightarrow u_1' = -x(x+1) \Rightarrow u_1' = -x^2 - x$

integrando $\Rightarrow u_1(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2}$

$\therefore$ a solução do sistema é:

$$\begin{cases} u_1(x) = -\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} \\ u_2(x) = \dfrac{x^2}{2} + x \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + x\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^{2x}$$

$$\Downarrow$$

$$y_p(x) = \frac{x^3}{6}\cdot e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$$

i: a solução geral de eq. dif.

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

é

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \frac{x^3}{6} e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 e^{2x}.$$

Resolva o mesmo exemplo usando coeficientes a determinar, ou seja resolva:

$$y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$$

Comente sobre as soluções

coef. a determinar

variação de parâmetros

Tem como complicar!

Basta querer!!!

Exemplo: Resolva as eq. dif.

1) $y'' + y = tg\,x, \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2) $y'' + y = \operatorname{sen} x,$

3) $x y'' - (1+x) y' + y = x^2 e^{2x}, \qquad x > 0$

e $y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = e^x$

são soluções.

Exemplo: Resolva as eq. dif.

1) $y'' + y = \operatorname{tg} x \quad , \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Solução: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + y_p(x)} \Rightarrow \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = h(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1' \cos x + u_2' \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow u_1' = -u_2' \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \\ -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$\Rightarrow -u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$u_2' \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + u_2' \cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$u_2' (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow u_2' = \operatorname{sen} x$$

$$\boxed{u_2 = -\cos x}$$

$$u_1' = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}$$

$$\begin{cases} u_2' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u_2 = \int \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow u_2 = -\cos x \\ u_1' = -\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \Rightarrow u_1 = -\int \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \, dx \end{cases}$$

Como resolver está integral ?

Lembre que

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x}$$

$$u_1 = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\, dx$$

$$u_1 = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\, dx = -\int \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx$$

$$= -\int \sec x \, dx + \int \cos x \, dx$$

$$= -\ln \left| \sec x + \operatorname{tg} x \right| + \operatorname{sen} x$$

$\therefore \quad y'' + y = tg\,x$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + u_1 \cos x + u_2 \operatorname{sen} x$$

$$u_1 = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + tg\,x|$$

$$u_2 = -\cos x.$$

Exemplo ② $xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^{2x}, \quad x>0$

e $y_1(x) = 1 + x, \quad y_2(x) = e^x$

$$\Rightarrow y(x) = c_1(1+x) + c_2 e^x + y_p(x)$$

obtemos resolvendo o sistema

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1'(1+x) + u_2' e^x = 0 \\ u_1' + u_2' e^x = x e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{(1+x)}{x} y' + \frac{1}{x} y = x e^{2x}$$

$$\begin{cases} u_1'(1+x) + u_2' e^x = 0 \\ u_1' + u_2' e^x = x e^{2x} \end{cases} \Rightarrow u_2' = -u_1' \frac{(1+x)}{e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$u_1' - u_1'(1+x) = x e^{2x}$$

$$-u_1' = e^x$$

$$u_1' = e^x \Rightarrow \boxed{u_1 = e^x}$$

$$\Downarrow$$

$$u_2' = -(1+x)$$

$$\boxed{u_2 = -x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad x y'' - (1+x) y' + y = x^2 e^{2x}, \qquad x > 0$$

$$\text{e} \quad y_1(x) = 1 + x, \qquad y_2(x) = e^{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1(1+x) + c_2 e^{x} + y_p(x)$$

$\Rightarrow$ ottenuto risolvendo o sistema

$$y(x) = c_1(1+x) + c_2 e^{x} + u_1(1+x) + u_2 e^{x}$$

$$y(x) = c_1(1+x) + c_2 e^{x} + e^{x}(1+x) - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) e^{x}$$

Exercícios

Transformada de Laplace.

A transformada de Laplace é uma técnica matemática usada para transformar equações diferenciais em equações algébricas mais fáceis de resolver.

⇒ Esta técnica é útil para resolver equações diferenciais lineares com condições iniciais.

Definição de Transformada de Laplace:

Dada uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$ a Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\}$$

é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Exemplo: Se $f(t)=1$ encontre a transformada de Laplace, ou seja:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \quad \text{sendo } f(t)=1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^A = \frac{1}{s}, \quad s>0.$$

Exemplo: Se $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, encontre a transformada de Laplace, ou seja:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \quad \text{sendo } f(t) = e^{at}$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-(s-a)t}\, dt$$

$e^{0} = 1$

$$= \lim_{A \to \infty} \left[\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right]_0^{A} = \lim_{A \to \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)A} - 1}{-(s-a)} \right)$$

$$= -\frac{1}{s-a} \lim_{A \to \infty} \left(e^{-(s-a)} - 1 \right) = \frac{1}{s-a}, \quad s>0$$

$\therefore$ $$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s>0.$$

Exercício: Calcule a transformada de Laplace de:

1) $f(t) = \operatorname{sen}(at), \ t \geq 0$

2) $f(t) = \cos(at), \ t \geq 0$

Propriedades Básicas da transformada de Laplace:

Linearidade: $\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

De fato:

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[a f(t) + b g(t)\right] dt$$

$$= a\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt + b\int_0^{\infty} e^{-st} g(t)\, dt$$

$$= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.$$