Soluções em série das eq. diferenciais

Vimos soluções de eq. dif. lineares com coef. constantes

$$y' = f(x, y(x)) \Rightarrow y' + p(x)\,y = q(x)\,; \quad p(x) = \text{função constante}$$

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)) \Rightarrow y'' + \underbrace{p(x)}\,y' + \underbrace{q(x)}\,y = k(x)$$

funções constantes

coef. a determinar

variação de parâmetros

Vimos que se $p(x)$ e $q(x)$ não são funções constantes a EDO linear de 2ª ordem pode ser resolvida por variação de parâmetros. Porém, a eq. $y'' + xy = 0$ não possui soluções elementares. Assim, p/ encontrar soluções linearmente independentes de $y'' + xy = 0$

introduzimos a teoria de soluções em série das eq. diferenciais.

Revisão de séries de Potências

Def: Uma série de potências em $(x-a)$ é uma série infinita dada por

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n}_{\text{série de Taylor}} = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$$

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n \rightarrow$ série de potência centrada em $a=-1$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \rightarrow$ série de potências centrada em $x=0$. série de McLaurin

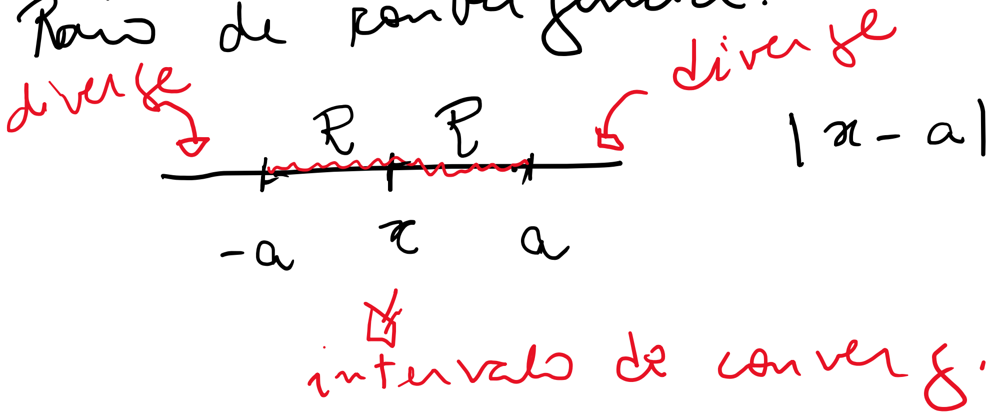
convergência:

$$\lim_{N\to\infty} \underbrace{S_N(x)}_{\text{Soma parciais da série.}} = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} c_n (x-a)^n}_{S_N(x)}$$

Se limite de S_N existir $\Rightarrow$ a série é convergente. Caso contrário a série diverge.

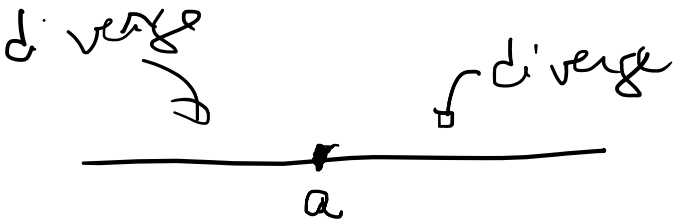
Intervalo de convergência: conj. de todos os números x p/ os quais a série converge.

Raio de convergência:



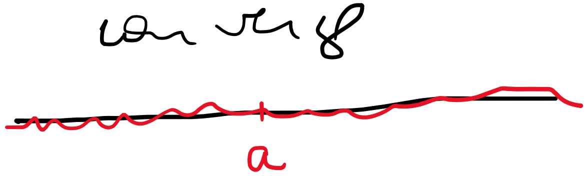
$|x-a| < R, \quad R > 0$

OBS: Uma série de potências pode ou não convergir nos extremos do intervalo.



a série converge somente no centro a.

$\Rightarrow$ R é zero



a série converge p/ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{R}_{\text{raio}} = \infty$

convergência absoluta: dentro do intervalo de convergência a série de potências converge absolutamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (x-a)|^n \text{ converge.}$$

<u>Teste da razão</u> , $c_n \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n (x-a)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)\cancel{(x-a)^n}}{c_n \cancel{(x-a)^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n (x-a)}{c_{n+1}} \right|$$

$$= |x-a| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = L$$

Se $L < 1 \Rightarrow$ série de potências converge absolutamente

se $L > 1 \Rightarrow$ " " " diverge

Se $L = 1 \Rightarrow$ o teste ñ é conclusivo.

Exemplos: Calcule o intervalo de convergência das séries

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ exercício

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ exercício

Exemplos: Calcule o intervalo de convergência das séries

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{n^n x^n}_{a_n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n x^n}{(n+1)^{n+1} x^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n^n \cancel{x^n}}{(n+1)^n (n+1) \cancel{x^n} \cdot x}\right|$$

$$= \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)} = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

(Ver livro de cálculo I)

mas

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\therefore \quad R = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{1}{e} \cdot 0 = 0.$$

Exemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n\, n}$$

T. Razão

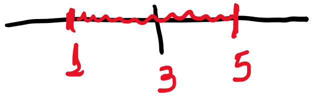
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{2^n\, n}{(x-3)^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-3)\cancel{(x-3)^n}\,\cancel{2^n}\cdot n}{2\cdot\cancel{2^n}(n+1)\cancel{(x-3)^n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(x-3)\cdot n}{2(n+1)}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|x-3| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{1}{2}|x-3| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n(1+1/n)}\right| = \frac{1}{2}|x-3| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{1+\cancel{1/n}}\right|$$

$$\frac{1}{n}\to 0, \quad n\to\infty$$

Raio de converg. $R=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{2}|x-3| \Rightarrow$$



$$\frac{1}{2}|x-3| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-3}{2} < 1 \Rightarrow -2 < x-3 < 2$$

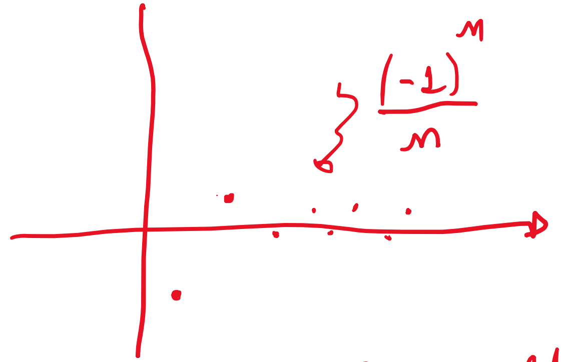
$$1 < x < 5$$

Observa-se que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n}$$

$x = 1 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge p/ zero $\downarrow$ T. séries alternadas

$x = 5 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que é a série harmônica divergente



$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n}$ converge $1 \leq x < 5$

ou seja intervalo de convergência é $[1,5)$ com $R=2$.

Teste das série alternadas

- $a_n > a_{n+1}$
- $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

no nosso exemplo

$a_n = \frac{1}{n}$ (ñ envolve o sinal)

$a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, $\Rightarrow \frac{1}{1} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} \ldots\ldots$

Observe agora que se: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \underline{c_0} + \underbrace{c_1 (x-a)} + \underbrace{c_2 (x-a)^2} + c_3 (x-a)^3 + \cdots$

quem é $f'(x)$? ou $\int f(x)dx = ?$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \underline{c_0} + \underbrace{c_1 (x-a)} + \underbrace{c_2 (x-a)^2} + c_3 (x-a)^3 + \cdots$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 (x-a) + 3c_3 (x-a)^2 + 4c_4 (x-a)^3 + \cdots$$
$$+ \cdots + n c_n (x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{n} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n dx$$
$$= \sum c_n \int (x-a)^n dx$$
$$= \sum \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n \\ f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx} (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1} \end{aligned}}$$

Uma série de potência define uma função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série.

$a-R \qquad a \qquad a+R$

Se $R > 0 \Rightarrow$, f será contínua, diferenciável e integrável em $(a-R, a+R)$

- ainda $f'(x)$ e $\int f(x)\,dx$ podem ser encontradas por diferenciação e integração termo a termo.

Série de potências identicamente nula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = 0 \quad \forall x \in (a-R, a+R),\ R > 0 \Rightarrow c_n = 0 \ \forall n.$$

Analiticidade em um ponto: uma função f é analítica em um ponto a, se pode ser representada por uma série de potências em $x-a$ com raio de potência positivo ou infinito.

Ex. (Séries de MacLaurin)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (-\infty, \infty)$$

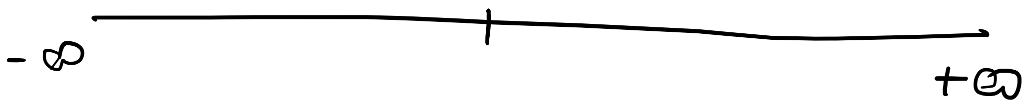
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}, \quad (-1, 1]$$

exercício

mostre que a série converge $(-1,1]$

$\vdots$



$x_0 = 0$

$$\underbrace{f(x) = e^x}_{\text{analiticamente}} \quad \forall x \quad \forall\, x = x_0$$

Solução em séries de Potências.

Dado a eq. diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)\,y''(x) + a_1(x)\,y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0$$

ou por simplicidade

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \underbrace{\frac{a_1(x)}{a_2(x)}}_{P(x)}y' + \underbrace{\frac{a_0(x)}{a_2(x)}}_{Q(x)}y = 0, \qquad a_0(x) \neq 0.$$

$\Rightarrow \underbrace{y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0}$ $\rightsquigarrow$ forma padrão da EDO linear de 2.º ordem.

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

12

Def: x_0 é um ponto ordinário de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se $P(x)$ e $Q(x)$ forem analíticas em x_0. Se x_0 ñ for um ponto ordinário $\Rightarrow$ x_0 será um ponto singular.

Ex: • $y'' + e^{x} y' + (\operatorname{sen} x) y = 0 \Rightarrow$ a eq. dif. ñ possui ponto singular

e^{x} e $\operatorname{sen} x$ são analíticas $\forall x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow$ Ver slide Série Maclaurin.

$\therefore$ podemos afirmar que $x=0$ é um ponto ordinário.

• $y'' + e^{x} y' + (\ln x) y = 0$

observe que $Q(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

$\Rightarrow$ a função $\ln x$ ñ é definida em $x=0$

$\therefore$ ñ pode ser representada por uma série de potência em $x=0$

logo $x=0$ é um ponto singular da EDO

$$y'' + e^x y' + (\operatorname{sen} x)\, y = 0$$

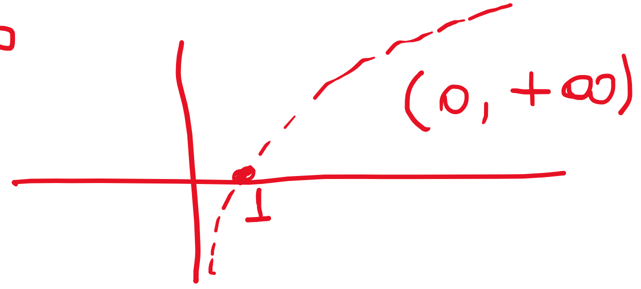
$$P(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow (-\infty, \infty)$$

$$Q(x) = \operatorname{sen} x = \sum_{n=} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \rightarrow (-\infty, \infty)$$

$$y'' + \underbrace{e^x}\, y' + \underbrace{\ln(x)}_{x_0=0}\, y = 0 \Longrightarrow x_0 = 0 \text{ é ponto singular}$$

$$P(x) = e^x$$

$$Q(x) = \ln x$$



Estudaremos apenas casos onde

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0$$

tem $P(x)$ e $Q(x)$ possuem coeficientes polinomiais.

$a_2(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ é p. ordinário

$a_2(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ é p. singular

Sendo $a_2(x)$, $a_1(x)$ e $a_0(x)$ polinômios sem fatores em comum as funções $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$ e $Q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$

serão analíticas se $a_2(x) \neq 0$.

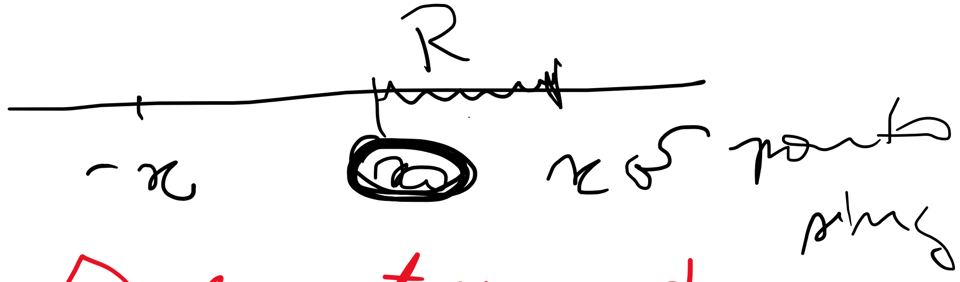
Assim, $x = x_0$ é ponto ordinário de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ se $a_2(x_0) \neq 0$ e um ponto singular se $a_2(x_0) = 0$.

Ex: $(x^2-1)y'' + 2xy' + 6 = 0 \Rightarrow y'' + \dfrac{2x}{x^2-1}y' + \dfrac{6}{x^2-1}y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ são os pontos singular os demais são ponto ordinários.

Teorema: Existência de soluções em séries de potências.

Se $x = x_0$ for um ponto ordinário de $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ podemos encontrar duas soluções LI na forma de séries de potências centradas em $x = x_0$.

Assim $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$, y converge pelo menos em algum intervalo $|x - x_0| < R$, R é a distância de x_0 ao ponto singular mais próximo.



$$\Rightarrow \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \Rightarrow$$ y é a solução em torno do ponto ordinário x_0.

Resolva a EDO usando séries de potências $y' = 2xy$

Solução $y' = 2xy \Rightarrow y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots$$

$$y' = 2xy \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$c_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) c_{n+2} x^{n+1} = 2 \sum_{m=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n c_n x^{n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+2) c_{m+2} x^{m+1}$$

$n = 2$

$n - 2 = 0$

$m = 0$

$\Rightarrow m = n - 2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) c_{n+2} x^{n+1}$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots = 2c_0 x + 2c_1 x^2 + 2c_2 x^3 + \ldots$$

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \dots = 2c_0 x + 2c_1 x^2 + 2c_2 x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ 2c_2 = 2c_0 \Rightarrow c_2 = c_0 \\ 3c_3 = 2c_1 \Rightarrow c_3 = \frac{2}{3} c_1 \Rightarrow c_3 = 0 \\ 4c_4 = 2c_2 \Rightarrow c_4 = \frac{2}{4} c_2 \Rightarrow c_4 = \frac{2}{4} c_0 \Rightarrow c_4 = \frac{1}{2} c_0 \\ 5c_5 = 2c_3 \Rightarrow c_5 = 0 \\ 6c_6 = 2c_4 \Rightarrow c_6 = \frac{2}{6} c_4 \Rightarrow c_6 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} c_0 \Rightarrow c_6 = \frac{1}{6} c_0 \\ 7c_7 = 2c_5 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{c_{2n} = \frac{c_0}{n!}}$$

18

Lembrando que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\left.\begin{aligned} c_{2n+1} &= 0 \ \forall n \\ c_{2n} &= \frac{c_0}{n!} \ \forall n \end{aligned}\right\}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(c_{2n} x^{2n} + \underbrace{c_{2n+1}}_{0} x^{2n+1} \right)$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} x^{2n}$$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_0}{n!} x^{2n} \Rightarrow y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_0 e^{x^2}$$

Observe que:

$$\sum \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \simeq e^x$$

$$\sum \frac{x^{2n}}{n!} = \sum \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots \simeq e^{x^2}$$

Resolvendo o mesmo exemplo usando a teoria de 1ª prova.

$y' = 2xy \rightarrow$ EDO de 1ª ordem linear

$$\boxed{y(x) = c_0 y_1}$$

$y_1(x) =$ usando séries de potências.

Variáveis separáveis

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \quad y > 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln y = x^2 + C$$

$$e^{\ln y} = e^{x^2 + C}$$

$$y = c_0 e^{x^2}, \quad \boxed{c_0 = e^{C}}$$

x^0, $(x^2)^0 = x^{2 \cdot 0}$
$= x^0 = 1$

$$\boxed{0! = 1}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Exercício: Entregar!!!

Resolva

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\boxed{y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x}$$

~~Resolvendo~~ usando a teoria dada no 1º bimestre

Resolva agora usando séries de potências.

Lembre que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$