Cálculo IV - Janeiro 2024

Equações Diferenciais de 1º ordem - 2º Semana

Inicialmente, vamos considerar apenas EDO's de 1º ordem, descritas por

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

EDO's de ordem superiores podem ser reduzidas em sistemas de EDO's de 1º ordem (abordaremos estes casos em um outro momento).

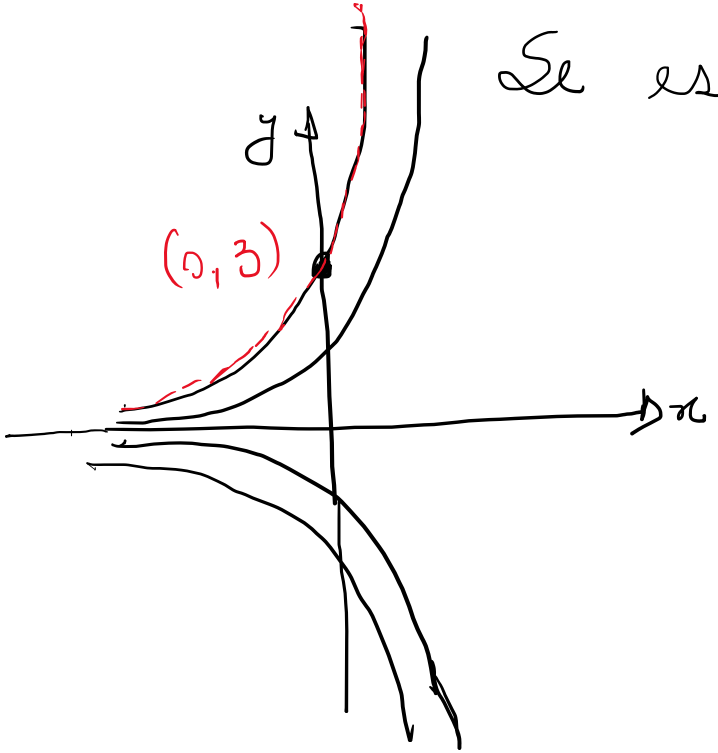
Teoria preliminar: Problema de Valor Inicial (PVI)

Estamos interessados em resolver um PVI da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0, \quad y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (1)$$

Vimos que a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ gera uma família de soluções (ou solução geral), caso exista. Ao substituir a condição inicial na solução geral, obtem-se a solução particular do PVI.

Exemplo: A ED $\frac{dy}{dx} = y$, $x \in (-\infty, \infty)$ tem como solução geral $y(x) = C e^{x}$.



Se especificarmos que $x_0 = 0$ e $y(x_0) = y_0$

$$\Rightarrow y(x_0) = C e^{x_0}$$

$$3 = C e^{0}$$

$$\therefore \boxed{C = 3}$$

$$y_0 = 3$$

$$\Downarrow$$

$$y(x_0) = 3$$

$\Rightarrow$ solução particular $y(x) = 3 e^{x_0}$

Logo, o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 3 \end{cases} \Longrightarrow \text{tem solução particular } y(x) = 3e^{x}$$

Agora, qual seria a solução se a condição fosse $y(1) = 3$? Calculem!!!!

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y \\ y(1) = 3 \end{cases} \Longrightarrow y(x) = ??$$

Na aula anterior vimos que um PVI da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possui solução única em uma região R,

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contém o ponto (x_0, y_0), se $f(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em R.

Exemplo: Verifique se existe algum intervalo que contém $(0,1)$ tal que o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x y^{1/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

possua solução única.

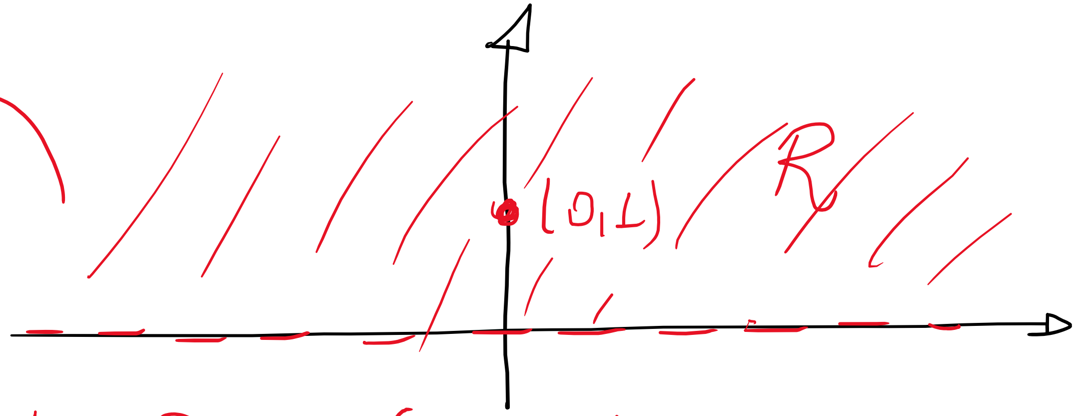
Solução

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x y^{1/2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x,y) = x y^{1/2}$ é definida no plano xy $\forall x \in \mathbb{R}$ e $y \geq 0$.

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x}{2 y^{1/2}}$ é definida no plano xy $\forall x \in \mathbb{R}$ e $y > 0$.

existe uma região que contém $(0,1)$



$\Rightarrow$ Teorema de existência e unicidade que o PVI possui solução e é única.

Exercício: Verifique se o PVI abaixo possui solução única.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

OBS: muitas vezes, só conseguimos garantir a existência de solução, mas nem sempre conseguimos encontrar tal solução, como é o caso do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Neste caso podemos obter uma solução aproximada, usando métodos numéricos.

Por fim, as condições do Teorema de existência e unicidade são suficientes, mas não necessárias para garantir a existência e unicidade

Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ forem contínuas $\Rightarrow$ existe solução única.

Variáveis separáveis.

Dado a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = g(x)$ ou $dy = g(x)\,dx$ podemos obter uma solução geral integrando ambos os lados da igualdade, i.é:

$$dy = g(x)\,dx \Rightarrow \int dy = \int g(x)\,dx \Rightarrow y = \int g(x)\,dx + C$$

∴ para resolver equações diferenciais, faz-se necessário um BOM conhecimento das técnicas de integração, como integração por partes, frações parciais, substituições trigonométricas, etc.

Exercícios: Resolva

1) $\frac{dy}{dx} = 1 - e^{2x}$ R: $y(x) = x - \frac{1}{2} e^{2x} + C$

2) $\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$ R: $y(x) = -\cos x$

Além da equação diferencial separável $\frac{dy}{dx} = g(x)$, temos a forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ que também tem variáveis separáveis

$$\Rightarrow h(y)\,dy = g(x)\,dx \Rightarrow \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Exercícios: Resolva

(1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{1+x}$ R: $y(x) = k(1+x)$, $k = \pm e^{c}$

(2) $x e^{-y} \operatorname{sen} x \, dx - y \, dy = 0$ R: $e^{y}(y-1) = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c$

(3) $x y^4 \, dx + (y^2+2) e^{-3x} \, dy = 0$ R: $\dfrac{9}{y} + \dfrac{6}{y^3} = e^{3x}(3x-1) + c$

(4) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y} \\ y(4) = 3 \end{cases}$ R: $y(x) = \pm\sqrt{25 - x^2}$

OBS: muitas vezes a solução da ED fica escrita na forma implícita como em (2) e (3)

Exercícios: Resolva

1) $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x$

5) $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x + 6$

11) $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2 y^2}{1+x}$

43) $\begin{cases} y\,dy = 4x(y^2+1)^{1/2}\,dx \\ y(0) = 1 \end{cases}$

47) $\begin{cases} x^2 y' = y - xy \\ y(-1) = -1 \end{cases}$

49) $\dfrac{dy}{dx} - y^2 = -9$

Respostas: Livro Zill
páginas 50 e 51.