Cálculo IV - Fevereiro 2024

Equação Diferencial linear de 1º ordem - 3º Semana

Uma equação diferencial linear de 1º ordem é uma equação da forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x),$$ onde p e Q são funções contínuas.

Se $Q(x) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ cuja solução seria por variáveis separáveis.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -p(x)\,y \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \Rightarrow \text{integrando}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)\,dx + \overbrace{\ln|C|}^{\text{ou } k = \ln|C|}$$

$$\Rightarrow \ln|y| - \ln|c| = -\int p(x)\,dx$$

$$\ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int p(x)\,dx \Rightarrow \left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)\,dx$$

Como a função exponencial tem imagem positiva

$\Rightarrow$ podemos tirar o módulo

$$\Rightarrow \quad y(x) = C e^{-\int p(x)\,dx}$$

ou ainda

$$C = y(x) \underbrace{e^{\int p(x)\,dx}}$$

Definiremos aqui $e^{\int p(x)\,dx}$ como sendo o fator de integração (FI), assim

$$FI = e^{\int p(x)\,dx}$$

Podemos ainda observar, pela regra do produto, que

$$\frac{d}{dx}\left[y e^{\int p(x)\,dx} \right] = \frac{d}{dx}(y) \cdot e^{\int p(x)\,dx} + \frac{d}{dx}\left(e^{\int p(x)\,dx}\right) y$$

$$= \frac{dy}{dx} e^{\int p(x)\,dx} + y e^{\int p(x)\,dx} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\int p(x)\,dx\right)}_{=p(x)}$$

$$= \frac{dy}{dx} e^{\int p(x)\,dx} + y\, p(x)\, e^{\int p(x)\,dx}$$

$$= \left(\frac{dy}{dx} + y\, p(x)\right) e^{\int p(x)\,dx}$$

Portanto $\frac{dy}{dx} + y\,p(x) = 0 \quad * \; FI$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right] e^{\int p(x)\,dx} = \frac{d}{dx}\left(y\, e^{\int p(x)\,dx}\right)$$

Logo, resolver a eq. diferencial linear de 1ª ordem $\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\,dx = Q(x)$, seria equivalente a resolver:

$$\left[\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right] * FI = Q(x) * FI \quad \text{ou}$$

$$\left[\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right] * FI = Q(x) * FI \quad \text{ou}$$

$$\underbrace{\left[\frac{dy}{dx} + y\,p(x)\right] e^{\int p(x)}}_{\|} = Q(x)\, e^{\int p(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y\, e^{\int p(x)}\right] = Q(x)\, e^{\int p(x)}$$

integrando ambos os lados $\Rightarrow$

$$y\, e^{\int p(x)\,dx} = \int Q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} + C$$

Resolvendo está equação em relação a y, obtemos a a solução explícita de y.

Exemplo: Encontre a solução da equação diferencial linear de 1º ordem

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

→ observe que aqui não conseguimos separar variáveis mas sabemos que

$$FI = \int e^{p(x)dx} = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx} + 2y\right)e^{2x} = e^{2x}\cdot e^{2x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{2x}\right] = e^{4x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[ye^{x}\right] = \frac{dy}{dx} + ye^{x}$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = \int e^{4x}dx + C$$

$$\int e^{4x}dx = \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

$$\Rightarrow ye^{2x} = \frac{1}{4}e^{4x} + C \Rightarrow y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + Ce^{-2x}$$

Exercícios: Resolva, usando FI, as equações diferenciais de 1ª ordem.

① $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$

② $\frac{dy}{dx} + 3y = x + e^{-2x}$

③ $\frac{dy}{dx} + y + x = e^{x}$

④ $y' + y = \operatorname{sen} x$

Lembrem que

$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = Q(x)$

é a forma da eq. dif. linear de 1ª ordem

OBS: EDO's de 1ª ordem mais fáceis de serem "lidadas" são as que podem ser escritas na forma explícita

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Ainda, EDO's de 1ª ordem podem ser escritas como o quociente de duas outras funções, sendo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \Rightarrow M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

que é a forma diferencial de uma EDO.

Ex: $\frac{dy}{dx} = \cos(x+y)$ está na forma explícita

$\Rightarrow$ sendo $N(x,y) = 1$ e $M(x,y) = -\cos(x+y)$

$\Rightarrow$ $\cos(x+y)\,dx + dy = 0$ forma diferencial

Vimos, casos particulares da forma diferencial da EDO:

① Variáveis separáveis

$M(x,y) = M(x)$ e $N(x,y) = N(y)$

$\Rightarrow$ $N(y)\,dy + N(x)\,dx = 0$ $\rightsquigarrow$ variáveis separáveis

② Equações homogêneas de 1ª ordem

Def: Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

é homogênea se os coeficientes de $M(x,y)$ e $N(x,y)$ forem homogêneos e de mesma ordem, i.é

se $M(tx,ty) = t^n M(x,y)$

$N(tx,ty) = t^n N(x,y)$

Exercícios: Verifique se as ED são homogêneas, se forem determine o grau de homogeneidade.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + x^2}{x^3}$

3) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

4) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$

5) $y' = \dfrac{x + 3y}{x - y}$

6) $(2x - y)\,dy - (4y - 3y)\,dx = 0$

método de solução de uma equação diferencial homogênea $\Rightarrow$ substituição algébrica.

Pode-se resolver uma ED homogênea, transformando-a em uma equação de variáveis separáveis com a substituição

$\to$ função incógnita

$$y(x) = x\,v(x) \quad \text{ou} \quad y = xv, \quad v = v(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \quad \Rightarrow \quad dy = x\,dv + v\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = f(x, xv)$$

$\hookrightarrow$ após simplificações obtém-se uma eq. com variáveis separáveis

Exemplo: Resolva a ED homogênea

$$(x^2+y^2)\,dx + (x^2-xy)\,dy = 0$$

Solução: $y = xv \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dv}{dx} + v$

$$(x^2 + x^2v^2)\,dx + (x^2 - x.x\,v)(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$x^2(1+v^2)\,dx + x^2(1-v)(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$(1+v^2)\,dx + (1-v)(x\,dv + v\,dx) = 0$$

$$(1+v^2)\,dx + (1-v)v\,dx + (1-v)x\,dv = 0$$

$$\left(1+v^2 + (1-v)v\right)dx + (1-v)x\,dv = 0$$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2+y^2}{x^2+xy}$

$f(xt, yt) = -\dfrac{t^2(x^2+y^2)}{t^2(x^2+xy)}$

$= f(x,y)$

$\Downarrow$

homogênea de grau zero

$$\left(1+v^2+(1-v)v\right)dx+(1-v)x\,dv=0$$

$$\left(1+v^2+v-v^2\right)dx+(1-v)x\,dv=0$$

$$(1+v)\,dx+(1-v)x\,dv=0 \quad \div\; x(1+v)$$

$$\frac{(1+v)}{x(1+v)}\,dx+\frac{(1-v)x\,dv}{x(1+v)}=0$$

$$\frac{1}{x}dx+\frac{1-v}{1+v}dv=0 \Rightarrow \frac{1-v}{1+v}dv=-\frac{1}{x}dx$$

Integrando

$$\int\frac{1-v}{1+v}dv=-\int\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1-v}{1+v}\,dv = \int \frac{1-\overset{\Rightarrow u-1}{v}}{\underbrace{1+v}_{u}}\,\overset{=du}{dv} = \int \frac{1-(u-1)}{u}\,du$$

$$\Downarrow$$

$u = 1+v$

$du = dv$

mas $v = u-1$

$$= \int \frac{2-u}{u}\,du$$

$$= \int \left(\frac{2}{u} - 1\right) du$$

$$= 2\ln|u| - u + C$$

$$= 2\ln|1+v| - (1+v) + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1-v}{1+v}\,dv = -\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$2\ln|1+v| - (1+v) = -\ln|x| + C$$

Lembrando que $y = xv \Rightarrow v = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow 2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right| - \left(1+\frac{y}{x}\right) = -\ln|x| + C$$

$$-\frac{y}{x} + 2\ln\left|1+\frac{y}{x}\right| + \ln|x| - 1 = C$$

Exemplo: Resolva a ED homogênea

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy} \implies \text{solução é } y^2 = x^2[2\ln x + C]$$

Exercício: Resolva, se a ED for homogênea.

1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x}$

2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $2x + y^2 + 2xyy' = 0$

4) $(x-y)dx + xdy = 0$

OBS: Se tiver dificuldades, sugiro que resolva os exemplos do livro do Zill p/ TREINAR!!!

Equação EXATA de 1ª ordem

Uma eq. dif. escrita na forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

será exata, se existir uma função $f = f(x,y)$

cuja diferencial exata

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Regra da Cadeia

coincide com $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

Observe ainda que

$\frac{\partial f}{\partial x} = M \Rightarrow M = \frac{\partial f}{\partial x} \longleftarrow$ derivando M em $y \Rightarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{N}\Big) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ A equação diferencial

$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ é uma ED EXATA

$\Leftrightarrow$ $M_y = N_x$ ou $\left(\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}\right)$

Exemplo: $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3y^3$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$df = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy \Rightarrow$ Será ED exata se

$M(x,y) = x^2y^3$ e $N(x,y) = x^3y^2 \Rightarrow M_y = N_x$

De fato:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2y^2$$

$=$ ∴ é exata #

Exemplo: Verifique se as EDs são exactas

1) $3x^2 y\,dx + (y + x^3)\,dy = 0$

2) $xy\,dx + y^2\,dy = 0$

Método de Resolução de EDO EXATA

Para resolver EDO da forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

deve-se verificar se existe $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

na sequência toma-se a relação

$f_x = M(x,y)$ e integra em relação à variável $x \Rightarrow \int f_x\,dx = \int M(x,y)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \qquad (*)$$

derivando este resultado em y

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f_y(x,y)}_{\substack{\shortparallel \\ N(x,y)}} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y)$$

$$\Rightarrow \quad g'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial}{\partial y}\big(M(x,y)\big)\,dx$$

integrando este resultado em y

resulta em

tem-se $g(y)$, que substituido em $(*) \Rightarrow f(x,y)$

Exemplo: Dada a eq. Diferencial

$$(2xy + x)\,dx + (x^2 + y)\,dy = 0$$

a) mostre que é exacta

b) determine a solução geral.