Cálculo IV - 18, Abril 2024

EDPs - 12º Semana

Muitos problemas físicos dependem de duas ou mais variáveis, geralmente do tempo t e de uma ou diversas variáveis espaciais. $\longrightarrow$ Modelos matemáticos que envolvem **equações diferencias parciais**.

Discutiremos uma equação parcial importante da matemática aplicada, a saber, a equação da onda regulando a corda vibrante. Para isso, abordaremos o método da separação de variáveis para resolver EDPS, onde a característica é a substituição da EDP por um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs).

A solução da EDP será do tipo: Uma soma/uma série infinita, em geral formada por soluções de EDOs.

Em muitos casos teremos séries envolvendo as funções senos e co-senos, o que nos leva a trabalhar com as séries de Fourier.

Antes de iniciarmos a teoria de EDPS, abordaremos Problemas de Valor de Contorno

Vimos

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (PVI)$$

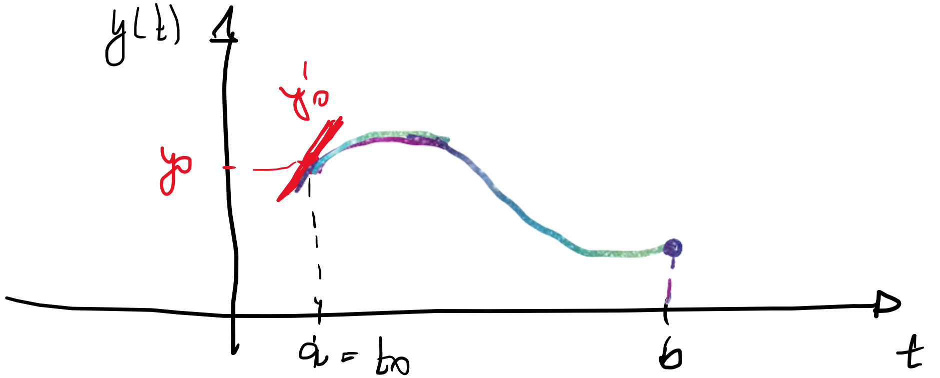
$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(a) = \alpha \\ y'(b) = \beta \end{cases} \quad (PVC)$$

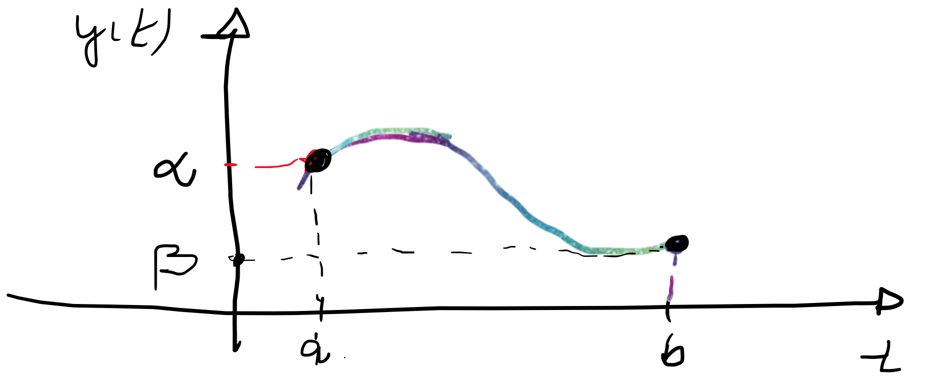
$\Downarrow$ Problema de valor inicial

$\Downarrow$ valores especificados em um único ponto "t_0"

$\Downarrow$ Problema de valor de contorno

$\Downarrow$ valores especificados nas duas fronteiras.





Embora o PVI e PVC possam parecer semelhantes suas soluções diferem sob aspectos importantes:

- PVI sob certas condições possuiu solução única.
- PVC sob condições semelhantes podem ter única, nenhuma ou infinitas soluções.

PVC, onde a EDO é linear $\Rightarrow$ tem as mesmas características de sistemas de equações lineares, i.e.

$Ax = b$ tem solução única se A for inversível ($\det A \neq 0$).

Se A for singular $\Rightarrow$ $Ax = b$ não tem solução

Exemplos:

① Resolva o PVC.

$$\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solução:

$$y'' + 2y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2 = 0$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2}\, i$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}\, t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t)$$

↳ solução geral

Se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overset{=1}{y(0)} = c_1 \overset{=1}{\cos(\sqrt{2} \cdot 0)} + c_2 \overset{=0}{\operatorname{sen}(\sqrt{2} \cdot 0)} \\ \overset{=0}{y(\pi)} = c_1 \cos(\sqrt{2}\, \pi) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2} \cdot \pi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 \cos(\sqrt{2}\, \pi) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, \pi) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_2 = -\frac{\cos(\sqrt{2}\, \pi)}{\operatorname{sen} \sqrt{2}\, \pi} = -\operatorname{cotg}(\sqrt{2}\, \pi)$$

$$\Rightarrow c_2 \cong -0.2762$$

$$\therefore y(t) = \cos(\sqrt{2}\, t) - 0.276 \operatorname{sen}(\sqrt{2}\, t) \quad \#$$

↳ única solução.

Exemplos:

(2) Resolva o PVC.

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y(\pi) = a, \end{cases} \qquad a = \text{constante}$$

Solução:

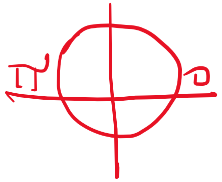
$$y'' + y = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm i$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \operatorname{sen}(t)$$

↳ solução geral



Se $y(0) = 1$ e $y(\pi) = a$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(0) = c_1 \underbrace{\cos(0)}_{1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0} \\ y(\pi) = c_1 \underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + c_2 \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ -c_1 = a \end{cases} \quad c_1 = 1 \text{ e } c_1 = -a$$

Se $a = -1$ para qualquer c_2

$$y(t) = \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$$

Se $a \neq -1 \Rightarrow$ o PVC não possui solução, ou pode ter infinitas soluções.

Exercícios $\Rightarrow$ entregar!!!

Resolva o PVC (comente o resultado obtido)

① $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

② $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$

EDPs e método de separação de variáveis

Abordaremos duas equações clássicas:

1) Equação da onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \text{ e } t > 0$$

2) Equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L \quad \text{e} \quad t > 0$$

Equação da onda: Vibrações de uma corda

Sabe-se que o deslocamento vertical, $\mathcal{U}(x,t)$, de uma corda elástica de comprimento L presa nas extremidades é governado pelo problema de valor inicial e de fronteira [5] [6]

$$\mathcal{U}_{tt} = c^2\mathcal{U}_{xx}, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0 \tag{4.1}$$

$$\mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(L,t) = 0, \quad t > 0 \tag{4.2}$$

$$\mathcal{U}(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L \tag{4.3}$$

$$\mathcal{U}_t(x,0) = g(x), \qquad 0 < x < L \tag{4.4}$$

A equação (4.1) é chamada de equação da onda.

A constante c^2 que aparece em (4.1) é estritamente positiva e depende da densidade linear e da tensão da corda. As condições de fronteira em (4.2) estabelecem que os extremos da corda são mantidos fixos para todo tempo t; enquanto as condições iniciais (4.3) e (4.4) especificam, nessa ordem, o deslocamento inicial e a velocidade inicial de cada ponto da corda.

Para resolver o problema (4.1)-(4.4) usaremos o método de separação de variáveis que consiste nos seguintes passos.

Passo 1 Fazendo $\mathcal{U}(x,t) = X(x)T(t)$, obtemos de (4.1) duas equações ordinárias: uma para X e outra para T.

Passo 2 Achamos soluções dessas equações ordinárias que satisfazem as condições de fronteira (4.2).

Passo 3 Finalmente, usando **séries de Fourier**, faremos uma composição das soluções obtidas no passo Passo 2 para obtermos a solução de (4.1) que satisfaz (4.2)-(4.4), ou seja, a solução de nosso modelo da corda vibrante.

Passo 1. Encontrando duas equações ordinárias da equação da onda (4.1).

Devemos procurar soluções não nulas da forma:

$$\mathcal{U}(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.5}$$

onde $X(x)$ é uma função de x e $T(t)$ é uma função de t. Diferenciando (4.5) com respeito a t e x, obtemos

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} = XT'' \qquad \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} = X''T \tag{4.6}$$

Substituindo essas expressões na equação da onda (4.1), chegamos em

$$XT'' = c^2 X''T$$

Agora com o intuito de separar as variáveis, dividimos tudo por c^2XT, sendo assim

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{X''}{X} \tag{4.7}$$

Observe que no lado esquerdo de (4.7) é função apenas de t, enquanto que o lado direito é função apenas de x. Logo, o lado esquerdo e o lado direito devem independer de t e de x, respectivamente. Dessa maneira ambos os lados devem ser constantes, isto posto, igualaremos ambos os lados a uma constante k, isto é

$$\frac{T''}{c^2T} = k \quad \text{e} \quad \frac{X''}{X} = k \tag{4.8}$$

onde k é um parâmetro independente de t e de x.

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$

$u_x(x,t) = X'(x)\,T(t)$

$u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$

$u_t(x,t) = X(x)\,T'(t)$

$u_{tt}(x,t) = X(x)\,T''(t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Reescrevemos (4.8) como duas equações ordinárias separadas

$$X''-kX=0 \tag{4.9}$$

$$\frac{X''}{X}=k$$

e

$$T''-kc^2T=0 \tag{4.10}$$

$$\frac{T''}{c^2T}=k$$

Agora devemos separar as variáveis nas condições de fronteira (4.2). Após substituir (4.5) em as condições (4.2), temos

$$X(0)T(t)=0 \quad \text{e} \quad X(L)T(t)=0 \qquad \forall t>0$$

Se $X(0)\neq 0$ ou $X(L)\neq 0$, então T deve ser zero para todo t e assim, de (4.5), $\mathcal{U}$ é identicamente zero. Para evitar soluções triviais, devemos ter:

$$X(0)=0 \quad \text{e} \quad X(L)=0$$

Assim, chegamos ao problema de valor de fronteira em X:

PVC

$$\begin{cases} X''-kX=0, \\ X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases} \tag{4.11}$$

Passo 2. Nesta etapa serão resolvidas as equações separadas.

Devemos determinar X e k resolvendo o problema (4.11). Consideraremos separadamente os casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

Suponha, primeiro, que $k > 0$. Para evitar o aparecimento frequente de raízes quadradas, é conveniente fazer $k = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, e escreve-se a equação (4.11), como

$$X'' - \mu^2 X = 0$$

$\lambda^2 - \mu^2 = 0$

$\lambda = \pm \mu$

$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

mas

$\cosh(\mu x) = \frac{e^{\mu x} + e^{-\mu x}}{2}$

$\operatorname{senh}(\mu x) = \frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2}$

cuja solução geral é:

$$X(x) = c_1 \cosh(\mu x) + c_2 \operatorname{senh}(\mu x)$$

A condição $X(0) = 0$ em (4.11) implica que

$$0 = c_1 \cosh(0) + c_2 \underbrace{\cancel{\operatorname{senh}(0)}}_{\to 0} = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

e então, a segunda condição, $X(L) = 0$, resulta em $\boxed{c_2 \operatorname{senh}(\mu L) = 0.}$ Como $L\mu \neq 0$, segue que $\operatorname{senh}(\mu L) \neq 0$ e, portanto, $c_2 = 0$. Logo $X \equiv 0$ e não existem soluções não triviais quando $k > 0$.

$L \neq 0$

$\mu = k^2$

$k > 0$

$$X(L) = \underbrace{\cancel{c_1 \cosh(\mu L)}}_{\to 0} + c_2 \operatorname{senh}(\mu L) = 0$$

$\cosh(\mu \cdot 0) = \frac{e^{\mu \cdot 0} + e^{-\mu \cdot 0}}{2} = 1$

$\operatorname{senh}(\mu \cdot 0) = \frac{e^{\mu \cdot 0} - e^{-\mu \cdot 0}}{2} = 0$

Passo 2. Nesta etapa serão resolvidas as equações separadas.

Devemos determinar X e k resolvendo o problema (4.11). Consideraremos separadamente os casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

Suponha, primeiro, que $k > 0$. Para evitar o aparecimento frequente de raízes quadradas, é conveniente fazer $k = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{R}$, e escreve-se a equação (4.11), como

$$X'' - \mu^2 X = 0$$

$\lambda^2 - \mu^2 = 0$

$\lambda = \pm \mu$

$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ 0 = c_1 e^{\mu L} + c_2 e^{-\mu L} \end{cases}$

$-c_2 e^{\mu L} + c_2 e^{-\mu L} = 0$

$c_2 \underbrace{(-e^{\mu L} + e^{-\mu L})}_{\neq 0} = 0$

Solução trivial $\Leftrightarrow$ $\boxed{c_2 = 0}$ $\boxed{c_1 = 0}$

Finalmente, consideraremos o caso $k < 0$, fazendo $k = -\mu^2$, a equação (4.11) fica:

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

cuja solução geral é

$$X(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \,\text{sen}(\mu x)$$

A primeira condição em (4.11), $X(0) = 0$, requer que $c_1 = 0$ e então, da segunda condição chegamos em

$$c_2 \,\text{sen}(\mu L) = 0$$

Para evitar a solução trivial $X \equiv 0$, toma-se $c_2 = 1$. Em decorrência,

$$\text{sen}(\mu L) = 0$$

De onde

$$\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

e assim,

$$X = X_n = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Note que para valores negativos de n, obtemos as mesmas soluções com ressalva de uma mudança de sinal, portanto soluções correspondentes a valores negativos de n podem ser descartadas.

$$\lambda^2 + \mu^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\mu^2$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\mu^2}$$

$$\lambda = \pm i\mu$$

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \,\text{sen}(\mu x)$$

$$X(0) = 0$$

$$X(0) = C_1 \overset{1}{\cancel{\cos 0}} + C_2 \overset{0}{\cancel{\text{sen}\, 0}}$$

$$\Rightarrow C_1 = 0$$

$$X(L) = 0$$

$$X(L) = \overset{0}{\cancel{C_1}} \cos(\mu L) + C_2 \,\text{sen}(\mu L)$$

$$\Rightarrow C_2 \,\text{sen}(\mu L) = 0$$

Agora Substituindo $k = -\mu^2 = -(n\pi/L)^2$, na equação (4.10), obtemos

$$T'' + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T = 0$$

e a solução geral desta equação é dada por

$$T = T_n = b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \operatorname{sen}(\lambda_n t)$$

onde

$$\lambda_n = \left(\frac{cn\pi}{L}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.12}$$

Portanto, multiplicando as soluções para X e T, concluímos que as funções

$$\mathcal{U}_n(x,t) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big[b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \operatorname{sen}(\lambda_n t)\Big], \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

satisfazem a equação diferencial parcial (4.1) e as condições de contorno (4.2). As funções $\mathcal{U}_n$ são chamadas, as vezes de soluções fundamentais do problema. Combinações lineares das soluções fundamentais

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \mathcal{U}_n(x,t)$$

são também soluções de (4.1) e (4.2). Mas uma solução deste tipo não necessariamente satisfaz a condição inicial $\mathcal{U}(x,0) = f(x)$, para uma função $f(x)$ mais geral. Assim vamos supor que a solução do problema de valor inicial e de fronteira (4.1)-(4.4) seja

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)[b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \operatorname{sen}(\lambda_n t)] \tag{4.13}$$

b_n ?

b_n^* ?

Passo 3. Solução do problema inteiro. Séries de Fourier.
Para resolver o problema completamente, devemos determinar os coeficientes b_n e b_n^* de modo que a função $\mathcal{U}(x,t)$ em (4.13) satisfaça (4.3) e (4.4).

Assim para satisfazer a condição inicial $\mathcal{U}(x,0) = f(x)$, devemos ter:

$$f(x) = \mathcal{U}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \qquad 0 < x < L \tag{4.14}$$

Reconhecemos nessa última expressão a extensão periódica ímpar da função f. Logo, devemos escolher os coeficientes $b_n' s$ de modo que $\mathcal{U}(x,0)$ se torne a série de Fourier de senos de $f(x)$; de acordo com a proposição (2.7) seus coeficientes são dados por

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{4.15}$$

Similarmente, derivando (4.13) em relação a t e usando a condição inicial $\mathcal{U}_t(x,0) = g(x)$, chegamos em

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* \lambda_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Sendo assim, a série acima é a série de Fourier senoidal de $g(x)$. Novamente da proposição (2.7), vem

$$b_n^* \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.16}$$

Como $\lambda_n = (cn\pi/L)$, obtemos por divisão:

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.17}$$

Assim, determinamos todas os coeficientes desconhecidos em (4.13) em série da solução $\mathcal{U}(x,t)$.

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} & 0 \le x \le L \quad (4.1) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & t > 0 \quad (4.2) \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \quad (4.3) \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < L \quad (4.4) \end{cases}$$

$\Downarrow$ solução

$$u(x,t) = \sum \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left[b_n \cos(\lambda_n t) + b_n^* \operatorname{sen}(\lambda_n t)\right] \quad (4.13)$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Exercício: Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cm que satisfaz a equação da onda

$$u_{tt} = u_{xx} \quad 0 < x < 10, \; t > 0.$$

Suponha que as extremidades da corda estão fixas e que a corda é colocada em movimento sem velocidade inicial, $g(x)=0$ e posição inicial dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8}, & 0 \leq x \leq 8 \\ \dfrac{10-x}{2}, & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

Encontre o deslocamento $u(x,t)$ da corda que descreve seu movimento durante um período.

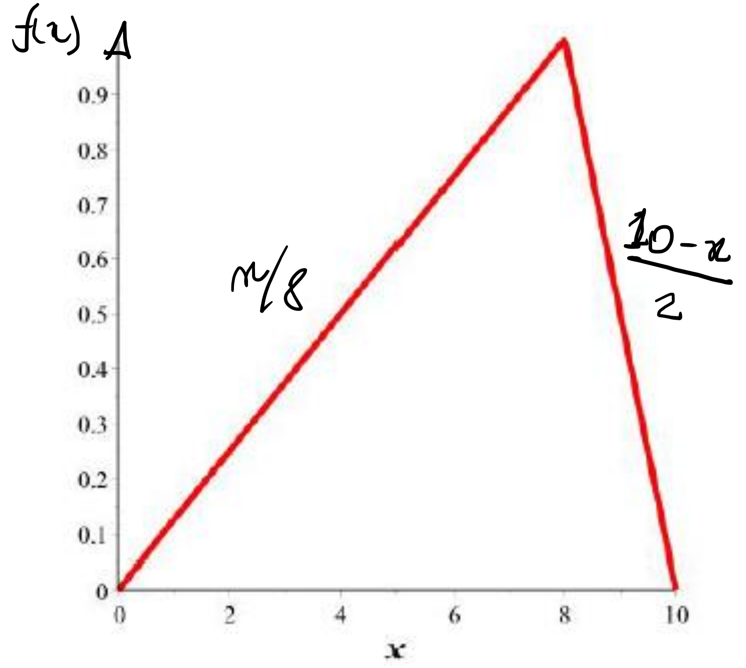


Figura 4.1: Posição inicial da corda.

Solução:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(10,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Sendo $g(x) = 0 \Rightarrow b_n^* = 0$ (Ver eq. (4.16))

De (4.15) temos que

$$b_n = \frac{2}{10}\int_0^{10} f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)dx$$

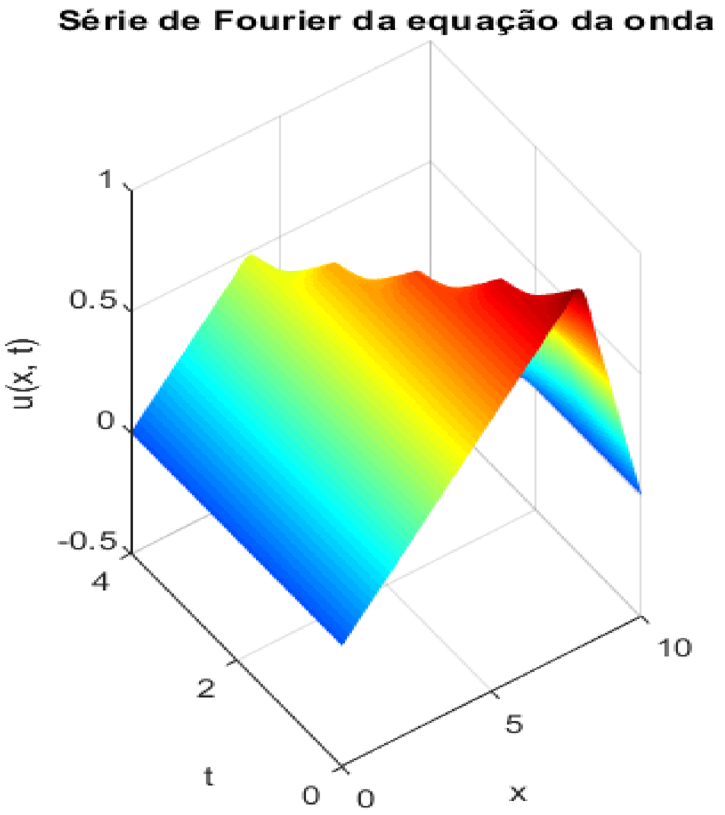
$$= \frac{1}{5}\int_0^{8} \frac{x}{8}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)dx + \frac{1}{5}\int_8^{10}\left(\frac{10-x}{10}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)dx$$

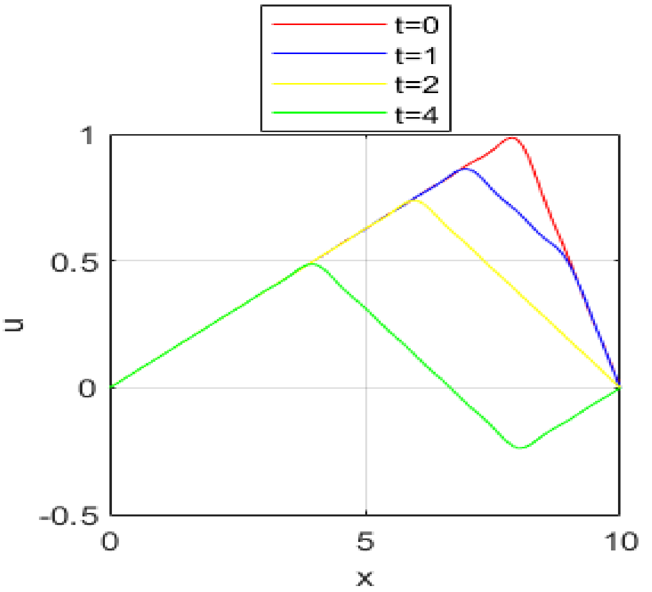
$$= \frac{25}{2n^2\pi^2}\,\text{sen}\left(\frac{4n\pi}{5}\right)$$

Apresente os cálculos

De (4.12) temos $\lambda_n = \frac{n\pi}{10}$. Assim a solução em série é dada por:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{25}{2n^2\pi^2} \, \text{sen}\left(\frac{4n\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{10}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)$$





```matlab
clear all, clc


% Parâmetros
L = 10; % Comprimento do domínio
T = 4; % Tempo total de simulação
c = 1; % Velocidade da onda
dx = 0.1; % Passo espacial
dt = 1; % Passo temporal
nx = L/dx + 1; % Número de pontos no espaço
nt = T/dt + 1; % Número de pontos no tempo

% Inicialização da matriz para a solução
u = zeros(nx, nt);

% Definição da série de Fourier
n_terms = 25;
x = 0:dx:L;
t = 0:dt:T;
[X, T] = meshgrid(x, t);
u_sum = zeros(size(X));
for n = 1:n_terms
    u_sum = u_sum +
(25/(2*n^2*pi^2))*sin(4*n*pi/5)*cos(n*pi*T/10).*
sin(n*pi*X/10);
end
```

```matlab
% Plot da série de Fourier (opcional)
figure(1),clf
subplot(1,2,1)
colormap(jet);
surf(X, T, u_sum);
shading interp
xlabel('x');
ylabel('t');
zlabel('u(x, t)');
title('Série de Fourier da equação da onda');

subplot(1,2,2)
plot(x,u_sum(1,:), 'r-')
hold on
plot(x,u_sum(2,:), 'b-')
hold on
plot(x,u_sum(3,:), 'y-')
hold on
plot(x,u_sum(5,:), 'g-')
legend('t=0','t=1','t=2','t=4')
xlabel('x')
ylabel('u')
```

Exercício 1: Considere uma corda elástica de comprimento $L = 10$ cm, pressa nas extremidades, com coeficientes $c = 1$, sem deslocamento inicial, porém com velocidade inicial dada por

$$g(x) = \frac{4x}{500}(10 - x)^2, \qquad 0 \leq x \leq 10$$

Aqui, temos que resolver o problema de valor de inicial de fronteira

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{tt} &= \mathcal{U}_{xx} \\ \mathcal{U}(0,t) &= \mathcal{U}(10,t) = 0 \\ \mathcal{U}(x,0) &= 0, \\ \mathcal{U}_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

Mostre que a solução é dado por

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{320}{n^4\pi^4}(2 + \cos(n\pi)) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{10}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{10}\right)$$

Apresente o resultado gráfico da solução.

Exercício 2:

Fazer uma pesquisa da solução da equação do calor (similar ao apresentado da equação da onda, porém sem as demonstrações. Apresente como relatório, incluindo fórmulas, exemplos, códigos e resultados. Todos os grupos vão apresentar na aula do dia 25/04.

Equação do calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$\Rightarrow$ $u(x,t)$ é a solução procurada.

α^2 é conhecida como a difusividade térmica, depende do material e é definido por $\alpha^2 = \frac{k}{\rho s}$

k = condutividade térmica

ρ = densidade

s = calor específico do material

TABELA 10.5.1 Valores de Difusividade Térmica para Alguns Materiais Comuns

Material	α^2 (cm^2/s)
Prata	1,71
Cobre	1,14
Alumínio	0,86
Ferro fundido	0,12
Granito	0,011
Tijolo	0,0038
Água	0,00144

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolha o eixo dos *x* de modo a formar o eixo da barra e suponha que x=0 e x =*L* correspondem as extremidades da barra (veja a Figura 10.5.1). Suponha, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não há transmissão de calor. Podemos supor, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura a pode ser considerada constante em qualquer seção reta. Então, *u* só depende da coordenada axial *x* e do instante *t*.

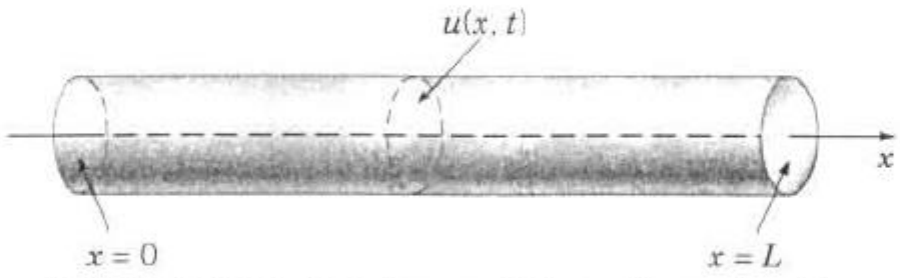


FIGURA 10.5.1 Uma barra sólida condutora de calor.

Podemos considerar o problema como sendo um problema de valores de contorno no plano *xt*

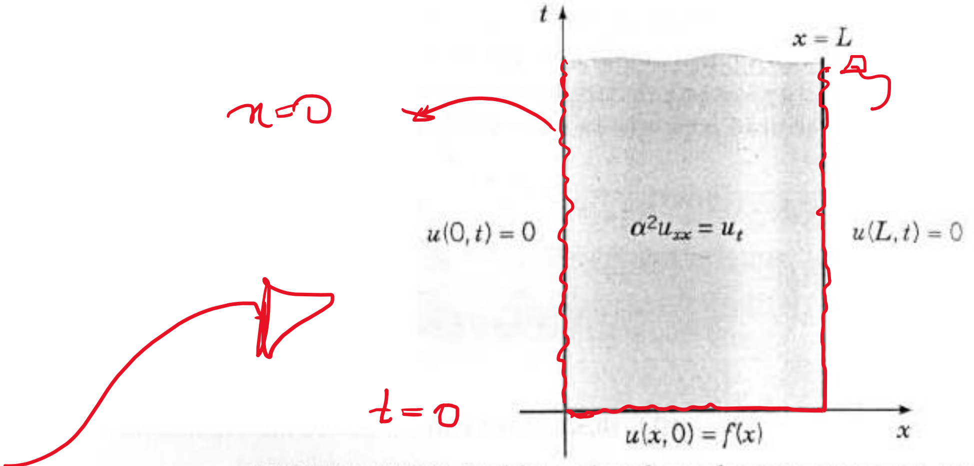


FIGURA 10.5.2 Problema de valores de contorno para a equação do calor.

$x=0$ e $x=L$ ⇒ contornos

$t=0$ ⇒ início

Supondo que a distribuição inicial de temperatura na barra é dada por

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le L \, , \quad f \text{ é uma função dada.}$$

Supondo que nas extremidades da barra a temperatura é fixa $\Rightarrow$ $u(0,t) = T_1$ e $u(L,t) = T_2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad , \quad 0 \le x \le L \, , \; t > 0 \\ \left.\begin{aligned} u(0,t) &= T_1 \\ u(L,t) &= T_2 \end{aligned}\right\} \text{ condições na fronteira} \\ u(x,0) = f(x) \rightarrow \text{ condição inicial} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & (1) \\ u(0,t) = T_1 & (2) \\ u(L,t) = T_2 & (3) \\ u(x,0) = f(x) & (4) \end{cases}$$

Para resolver o problema (1)-(4) usaremos o método de separação de variáveis que consiste nos seguintes passos.

Passo 1: Fazendo $u(x, t) = X(x)T(t)$, obtemos de (1) duas equações ordinárias: uma para X e outra para T.

Passo 2: Achamos soluções dessas equações ordinárias que satisfazem as condições de fronteira (2)-(3).

Passo 3: Finalmente, usando séries de Fourier, faremos uma composição das soluções obtidas no passo Passo 2 para obtermos a solução de (1) que satisfaz (2)-(4), ou seja, a solução de nosso modelo.

Considerando $T_1 = T_2 = 0$ e $f(x) = 0$, resolveremos o modelo

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & (1) \\ u(0,t) = 0 & (2) \\ u(L,t) = 0 & (3) \\ u(x,0) = 0 & (4) \end{cases}$$

Hipótese: $u(x,t) = X(x)\,T(t) \Rightarrow u_x(x,t) = \underbrace{X'(x)}_{\text{só depende de } x}\underbrace{T(t)}_{\text{só depende de } t}$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x)\,T(t)$$

$$u_t(x,t) = X(x)\,T'(t)$$

$$\Rightarrow u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$$X(x)\,T'(t) = \alpha^2 X''(x)\,T(t) \Rightarrow \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{\text{só depende de } x} = \underbrace{\frac{T'(t)}{\alpha^2\,T(t)}}_{\text{só depende de } t} \qquad (5)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \qquad (5)$$

$\longrightarrow$ no qual as variáveis estão separadas.

Para que a equação (5) seja válida para $0 \leq x \leq L$ e $t > 0$ é preciso que ambos os lados sejam iguais a mesma constante k

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = k \Rightarrow X''(x) - kX(x) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = k \Rightarrow T'(t) = k\alpha^2 T(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 \\ T'(t) = k\alpha^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

2 EDOs independentes

: $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ com a hipótese $u(x,t) = X(x)T(t) \Rightarrow$

na resolução do sistema de EDOs

$$\begin{cases} X'' + kX = 0 \\ T' + k\alpha^2 T = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ resolvendo este sistema, obtemos as soluções $X(x)$ e $T(t)$

cujo produto é a solução da EDP.

Até aqui tudo parece SIMPLES.....

note que estamos interessados em soluções de $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ que satisfazem as condições de contorno $u(0,t) = u(L,t) = 0$, o que pode restringir bastante os valores de $\underline{\underline{k}}$.

Assim, analisaremos primeiro a EDO de segunda ordem $X''(x) + kX(x) = 0$. Para encontrar as condições no contorno, avaliaremos a solução

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

para $x = 0$ e $x = L$. Logo:

$$x=0 \Rightarrow u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(0) = 0 \text{ e } T(t) \neq 0 \\ X(0) \neq 0 \text{ e } T(t) = 0 \end{cases}$$

Se $X(0) \neq 0 \Rightarrow T(t) = 0$ para todo $t \Rightarrow$ solução trivial e não nos interessa a solução trivial $\Rightarrow X(0) = 0$

Similarmente

$$x=L \Rightarrow u(L,t) = X(L)T(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} X(L) = 0 \text{ e } T(t) \neq 0 \\ X(L) \neq 0 \text{ e } T(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(L) = 0$$

Logo, a EDO de 2ª ordem e condições de contorno (PVC)

$$\Rightarrow \begin{cases} X'' + kX = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

$X'' + kX = 0 \Rightarrow$ por simplicidade fazemos $k = \mu^2$

$X'' + \mu^2 X = 0$

$\lambda^2 + \mu^2 = 0$

$\lambda^2 = -\mu^2$

$\boxed{\lambda = \pm \mu i}$

solução geral

$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(\mu \pi) + C_2 \operatorname{sen}(\mu \pi) = 0$

$\Rightarrow C_2 \operatorname{sen}(\mu \pi) = 0$

Se $C_2 = 0 \Rightarrow$ solução é trivial e não nos interessa.

$\Rightarrow \operatorname{sen}(\mu \pi) = 0 \Leftrightarrow$

Sabemos que $\operatorname{sen}(\mu \pi) = 0$ em todos os múltiplos inteiros de π

$\Rightarrow$ os valores correspondentes de

$k = \mu^2 \Rightarrow k_1 = 1, \; k_2 = 4, \; k_3 = 9 \; \ldots \; k_n = n^2$

são autovalores de

$X'' + kx = 0$

As autofunções são dadas por

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \operatorname{sen}(\mu x)$$

sendo $C_1 = 0$ e $\mu = k^2$

$$X(x) = C_2 \operatorname{sen}(k^2 x)$$

$$X_1(x) = C_2 \operatorname{sen}(x)$$

$$X_2(x) = C_2 \operatorname{sen}(4x)$$

$$X_3(x) = C_2 \operatorname{sen}(9x)$$

$$\vdots$$

$$X_n(x) = C_2 \operatorname{sen}(n^2 x)$$