Cálculo IV - Março 2024

Transformada de Laplace - 7ª Semana

- Transformada de Laplace é uma técnica matemática usada para transformar equações diferenciais em equações algébricas mais fáceis de resolver.

⇒ esta técnica é útil para resolver equações diferenciais lineares com condições iniciais.

1/7ª sem.

Definição de Transformada de Laplace:

Dada uma função $f(t)$ definida para $t \geq 0$ a Transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\}$ é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

Exemplo: Se $f(t) = 1$ encontre a transformada de Laplace, ou seja

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ sendo $f(t) = 1$

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st}\,dt = \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^A = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

2/7º sem.

Exemplo: Se $f(t) = e^{at}$, $t \geq 0$, encontre a transformada de Laplace

$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\} = \int e^{-st} f(t)\,dt$ sendo $f(t) = e^{at}$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-(s-a)t}\,dt = \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a} \right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left(\frac{e^{-(s-a)A} - 1}{s-a} \right) = \frac{-1}{s-a} \lim_{A\to\infty} \left(e^{-(s-a)A} - 1 \right) = \frac{1}{s-a}, \quad s-a>0.$$

TEOREMA 7.1.1 Transformada de algumas funções básicas

(a) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

(b) $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \ldots$

(c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

(d) $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \dfrac{k}{s^2+k^2}$

(e) $\mathcal{L}\{\cos kt\} = \dfrac{s}{s^2+k^2}$

(f) $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}$

(g) $\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$

3/7º sem.

Exercício: Calcule a transformada de Laplace de:

1) $f(t) = \text{sen}(at)$, $t \geq 0$

2) $f(t) = \cos(at)$, $t \geq 0$

Propriedades Básicas da transformada de Laplace:

Linearidade: $\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$

De fato:

$$\mathcal{L}\{a f(t) + b g(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[a f(t) + b g(t)\right]dt = a\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + b\int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt$$

$$= a\,\mathcal{L}\{f(t)\} + b\,\mathcal{L}\{g(t)\}$$

4/7º sem.

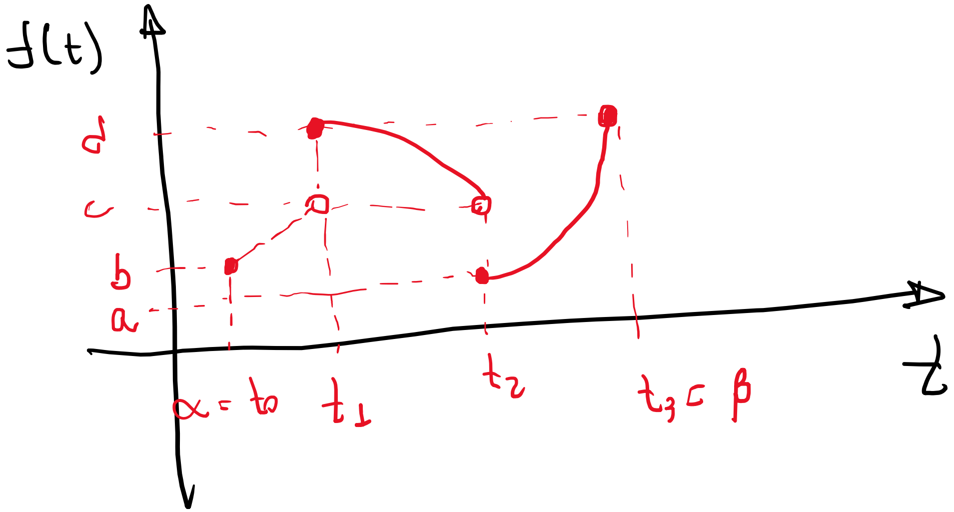
Definição: Uma função é contínua por partes em um intervalo $\alpha \le t \le \beta$ se o intervalo puder ser particionado em um número finito de pontos

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

de modo que

1) f é contínua em cada subintervalo $t_{i-1} < t < t_i$

2) f tende a um limite finito quando t tende a um dos extremos do intervalo.



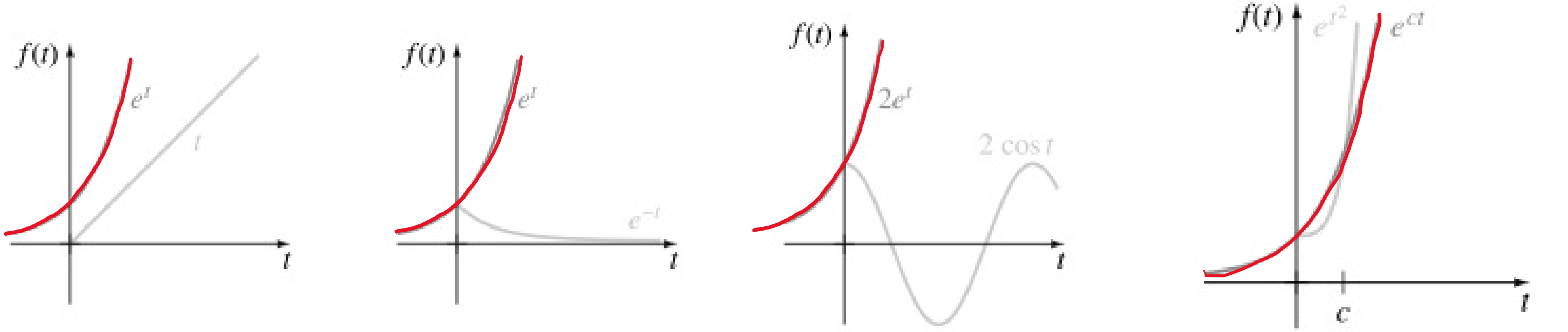
1º intervalo
$$\lim_{t \to t_0^+} f(t) = b$$
$$\lim_{t \to t_1^-} f(t) = c$$

2º intervalo
$$\lim_{t \to t_1^+} f(t) = d$$
$$\lim_{t \to t_2^-} f(t) = c$$

Similarmente pode-se avaliar os demais intervalos.

5/7º sem.

Definição: Dizemos que uma função f é de ordem exponencial c se existem constantes c, $M > 0$ e $T > 0$ tal que $|f(t)| \leq M e^{ct}$ $\forall\, t > T$.



ordem exponencial

não é ordem exponencial

Teorema: Condição suficiente para existência

Se $f(t)$ é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial c, então $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para algum $s > c$.

6/7ª sem.

Teorema: se a função é contínua por partes em $t \geq a$, se $|f(t)| \leq g(t)$ quando $t \geq M$ para alguma constante positiva M e se

$\int_M^{\infty} g(t)\,dt$ converge, então a $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ também converge.

Por outro lado, se $f(t) \geq g(t)$ para $t \geq M$ e se

$\int_M^{\infty} g(t)\,dt$ diverge, então a $\int_a^{\infty} f(t)\,dt$ também diverge.

Transformada Inversa

Se $F(s)$ representa a transformada de Laplace de uma função $f(t)$, isto é

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ e escrevemos $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Exemplos

Transformada	Transformada Inversa
$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$	$1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$
$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$
$\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3}$	$e^{-3t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

ou

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

8/7º sem.

TEOREMA 7.2.1 Algumas transformadas inversas

a) $1 = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$

b) $t^n = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}, n = 1, 2, 3, \ldots$

c) $e^{at} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}$

d) $\operatorname{sen} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}$

e) $\cos kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$

f) $\operatorname{senh} kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}$

g) $\cosh kt = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\}$

A transformada inversa de Laplace também é uma transformação linear, i.é

$$\mathscr{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\}.$$

9/7ª sem.

Exemplo: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s+6}{s^2+4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s^2+4}\right\} = -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} + \frac{6}{2}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$$

$$= -2\cos 2t + 3\,\mathrm{sen}\, 2t$$

$$\mathrm{sen}\, kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} \qquad \cos kt = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\}$$

10/7º sem.

Transformadas das derivadas

Vimos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\boxed{e^{-st} \to 0 \text{ qdo } t \to \infty}$$

então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt \overset{\text{int. por partes}}{=} e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -s\, e^{-st} f(t)\,dt$$

$u = e^{-st}$ $\qquad$ $dv = f'(t)\,dt$

$du = -s\, e^{-st}\,dt$ $\qquad$ $v = f(t)$

$$= e^{-st} f(t)\Big|_0^\infty + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\mathcal{L}\{f(t)\}}$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$= sF(s) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\} = -f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$$

Da mesma forma

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f''(t)\,dt$$

$$= e^{-st} f'(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$

$$= -f'(0) + s\mathcal{L}\{f'(t)\}$$

$$= -f'(0) + s\left[-f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}\right]$$

$$= -f'(0) + s\left[-f(0) + sF(s)\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

12/7º sem.

generalizando, temos $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}$ existe, $s>0$ e é dada por

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^{n}\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - s f^{n-1}(0)$$

Exemplo: Considere a equação diferencial

$$y'' - y' - 2y = 0, \text{ com condições } y(0)=1 \text{ e } y'(0)=0$$

determine a solução usando Transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^{2}Y(s) - sy(0) - s\,y'(0)$$

13/7º sem.

$$y'' - y' - 2y = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}}$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - s\,y'(0) - [sY(s) - y(0)] - 2Y(s) = 0$$

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) - s\cancel{y(0)}^{\,1} + \cancel{y(0)}^{\,1} - s\cancel{y'(0)}^{\,0} = 0$$

$$(s^2 - s - 2)\,Y(s) = s - 1$$

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2},$$ devemos encontrar a função $\phi(t)$

tal que $$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$= \frac{A(s+1) + B(s-2)}{(s-2)(s+1)} = \frac{(A+B)s + (A-2B)}{(s-2)(s+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \Rightarrow A = 1 - B \Rightarrow A = 1 - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{3}} \\ A - 2B = -1 \Rightarrow (1 - B) - 2B = -1 \Rightarrow -3B = -2 \Rightarrow \boxed{B = 2/3} \end{cases}$$

14/7º sem.

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

mas lembrando que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$ $\quad \mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{3} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{-t}.$$

Resolva o mesmo exemplo usando a equação caracte-rística.

15/7º sem.

Exercícios: Encontre a solução do PVI, usando Transf. de Laplace

1) $\begin{cases} y'' + y = sen(2t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

Resposta: $y(t) = 2\cos(t) + \frac{5}{3} sen(t) - \frac{1}{3} sen(2t)$

2) $\begin{cases} y^{IV} - y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$

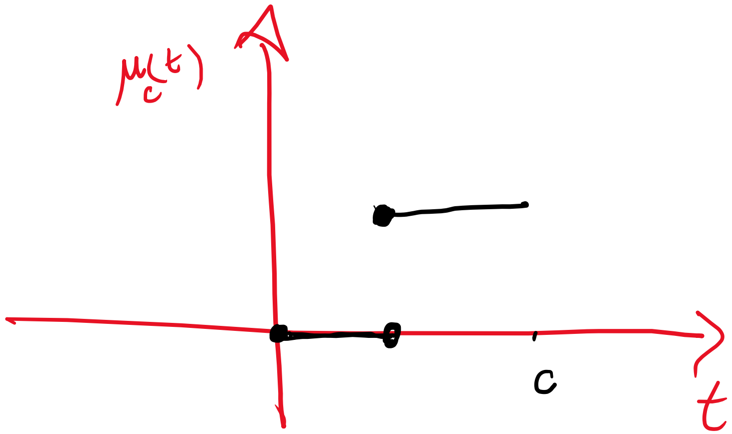
Resposta: $y(t) = \frac{1}{4} e^{t} - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} sen\,t$

15/7º sem.

Função Degrau

Para tratar de maneira efetiva funções com salto é útil definir a função degrau unitária, definida como função Heaviside. Essa função é denotada por $\mu_c(t)$ e é definida por

$$\mu_c(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < c, \quad c \geq 0 \\ 1 & \text{se } t \geq c \end{cases}$$



17/7º sem.

A transformada de Laplace de u_c é definida facilmente por

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_c(t)\,dt$$

$$= \int_0^c e^{-st} \cdot 0 \cdot dt + \int_c^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt$$

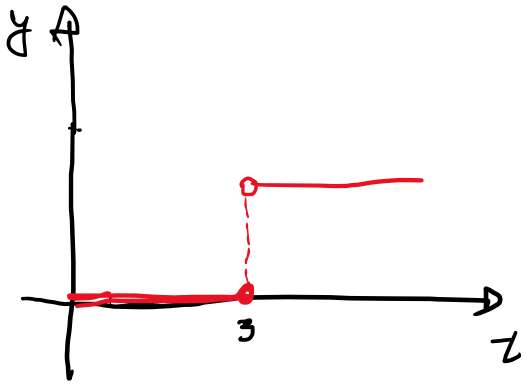
$$= \int_c^\infty e^{-st}\,dt = \frac{e^{-ct}}{s}, \quad s>0$$

18/7º sem.

Exemplo: Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t < 3 \\ 2 & \text{se } t > 3 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^3 0 \cdot e^{-st}\,dt + \int_3^\infty 2e^{-st}\,dt$$

$$= 0 + 2\int_3^\infty e^{-st}\,dt = 2\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_3^\infty = 2\frac{e^{-3s}}{s}, \quad s > 0$$



Teorema: Se f é uma função contínua por partes no intervalo $[0, +\infty)$, de ordem exponencial e $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, então $\lim\limits_{s \to \infty} F(s) = 0$

19/7ª sem.

Teorema: se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > a \geq 0$ e c = constante positiva então

$$\mathcal{L}\{u_c(t) f(t-c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s), \quad s > a$$

Reciprocamente se $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ então

$$u_c(t) f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\}.$$

Demonstração.

2º/7º sem.

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\,f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,u_c(t)\,f(t-c)\,dt$$

$$= \int_0^c e^{-st}\cdot 0\cdot f(t-c)\,dt + \int_c^\infty e^{-st}\cdot 1\cdot f(t-c)\,dt$$

$$= \int_c^\infty e^{-st} f(t-c)\,dt$$

fazendo uma mudança de variável

$$\xi = t-c \Rightarrow \frac{d\xi}{dt} = 1 \Rightarrow \boxed{d\xi = dt}$$

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\,f(t-c)\} = \int_0^\infty e^{-(\xi+c)s} f(\xi)\,d\xi$$

$$= e^{-cs}\int_0^\infty e^{-\xi s} f(\xi)\,d\xi = e^{-cs}\,F(s)$$

$$\mathcal{L}\{u_c(t)\,f(t-c)\} = e^{-cs}\,F(s)$$

$$u_c(t)\,f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}\,F(s)\}$$

21/7º sem.

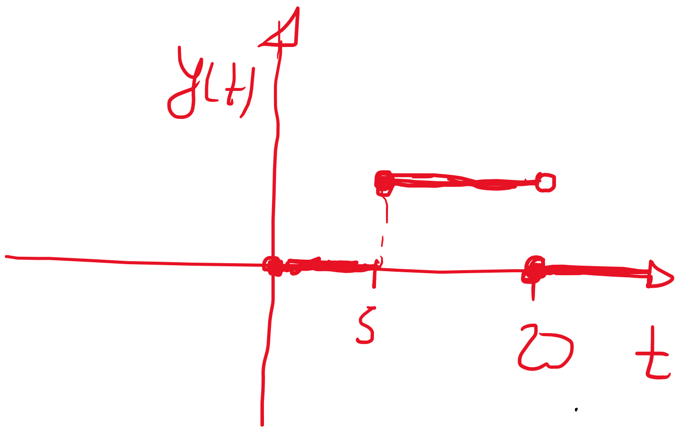
Equações diferenciais sobre a ação de funções descontínuas

Exemplo: Encontre a solução da equação diferencial $2y'' + y' + 2y = g(t)$

onde

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t < 5 \ \text{e} \ t \geq 20 \\ 1 & \text{se} \quad 5 \leq t < 20 \end{cases}$$

onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.



22/7º sem.

Este problema representa a carga em um capacitor em um circuito elétrico simples onde a voltagem é um pulso unitário para $5 \leq t < 20$. O modelo pode ainda representar a resposta de um oscilador amortecido sob a ação de uma força $g(t)$.

Mas como resolver este problema?

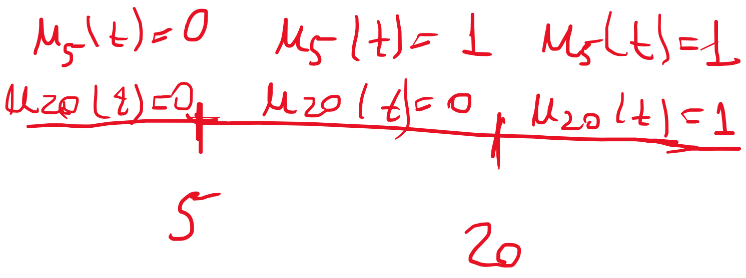
ou problemas envolvendo funções Degrau?

Como é a função de Heaviside para $c=5$ e $c=20$?

$$u_5 = \begin{cases} 0 & t < 5, \\ 1 & t \geq 5 \end{cases}$$

$$u_{20} = \begin{cases} 0 & t < 20 \\ 1 & t \geq 20 \end{cases}$$

$$u_5 - u_{20} = ?$$



$$u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \\ 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & t \geq 20 \end{cases}$$

$$u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 0, & t < 5 \text{ e } t \geq 20 \\ 1, & 5 \leq t < 20 \end{cases}$$

$\therefore\ g(t) = u_5(t) - u_{20}(t)$

24/7º sem.

Então o exemplo que vamos resolver é:

Encontre a solução da equação diferencial

$$2y'' + y' + 2y = g(t)$$

onde

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 5 \text{ e } t \geq 20 \\ 1 & \text{se } 5 \le t < 20 \end{cases}$$

onde $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.

Agora, podemos usar transformada de Laplace p/ resolver o problemas, só temos que "ver" como calcular

$$\mathcal{L}\{u_5(t)\} \quad e \quad \mathcal{L}\{u_{20}(t)\}$$

25/7º sem.

Agora, podemos usar transformada de Laplace p/ resolver o problemas, só temos que "ver" como calcular

$$\mathcal{L}\{u_5(t)\} \quad e \quad \mathcal{L}\{u_{20}(t)\} \quad \text{pois}$$

$$2y'' + y' + 2y = g(t) \Rightarrow 2y'' + y' + 2y = u_5(t) - u_{20}(t)$$

$$\Rightarrow 2\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y'(t)\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\}$$