OBS: 4ª semana foi atividades extra

Cálculo IV - Fevereiro 2024

Equação Diferencial linear de 2ª ordem - 5ª Semana

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + f_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + f_{n-1}\, y' + f_n\, y = k(x)$$

onde $f_1, f_2, \dots, f_n$ e k são funções de uma variável com o mesmo domínio.

OBS: $k(x) = 0 \ \forall x \Rightarrow$ Eq. diferencial é homogênea

$k(x) \neq 0 \ \forall x \Rightarrow$ Eq. diferencial ñ é homogênea

Exemplos: Classifique as ED quanto a ordem, linearidade e se são homogêneas.

1) $2x y'' + x^2 y' - y \operatorname{sen} x = 2$

2) $y'' - y = 0$

3) $y y''' + x y' + y = x^2$

4) $3 y' + x y'' = e^{-x}$

Se $y = y_1(x)$ é uma solução da eq. homogênea de ordem n

$$y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + f_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + f_{n-1}\, y' + f_n\, y = h(x)$$

então $y = c_1\, y_1(x)$ também é uma solução, onde c_1 é uma constante qualquer.

Se $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, ..., $y = y_n(x)$ são soluções da eq. homogênea de ordem n, então $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ também é uma solução, onde c_i, $i = 1, 2, \dots n$ são constantes.

Mas como identificar se o conjunto de soluções $\nRightarrow$ em uma soma de soluções?

Ex: Dado a eq. diferencial $y'' - 3y' - 10y = 0$

verifique se

$y_1(x) = e^{5x}$

$y_2(x) = e^{-2x}$

$y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$

são soluções.

$$25 e^{5x} - 3 * 5 e^{5x} - 10 * e^{5x} = 0$$

$$25 e^{5x} - 15 e^{5x} - 10 e^{5x} = 0$$

$$\boxed{0 = 0} \Rightarrow y_1(x) \text{ é solução.}$$

Similarmente, mostra-se que $y_2(x)$ e $y(x)$ também são soluções.

Observa-se que a forma de verificar se $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é uma solução acaba ficando "trabalhosa".

Uma outra forma de verificar é avaliando se as soluções são LI ou LD.

Um conjunto de soluções

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \quad y = y_3(x), \ldots, \quad y = y_n(x)$$

da equação homogênea é LI se

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_n \neq 0$$

Ou ainda

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Se $\sum_{i=}^{n} c_i \cdot y_i = 0$ quando pelo menos um $c_i \neq 0 \Rightarrow$ o conjunto de soluções é LD.

Exemplos: Verifique se as soluções são LI ou LD.

a) $y_1(x) = e^{x}$

$y_2(x) = e^{-x}$ $\Big\}$ LI

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

como e^{x} e e^{-x} são funções $\neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = 0 \iff C_1 = C_2 = 0$

b) $y_1(x) = e^{x}$, $y_2(x) = 2e^{x}$

$y_3(x) = e^{-x}$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{x} + 2C_2 e^{x} + C_3 e^{-x}$$

$\Rightarrow$ Se $C_1 = 2$, $C_2 = -1$ e

$C_3 = 0$

$$y(x) = 2e^{x} - 2e^{x} + 0e^{-x} = 0$$

$\Rightarrow$ o conjunto de soluções é LD.

Podemos ainda usar a seguinte definição (não queria lá-lá).

Definição: Uma condição necessária e suficiente para que um conjunto de n soluções seja LI é que Wronskiano das funções $y_1, y_2, \ldots y_n$ seja diferente de zero, isto é,

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ou

$$\Rightarrow \quad W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$$

Teorema: Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ forem soluções da equação diferencial homogênea

$$a y'' + b y' + c y = 0$$

no intervalo $\alpha < x < \beta$ com $y_1(x)\, y_2' - y_1'(x)\, y_2(x) \neq 0$ neste intervalo $\Rightarrow$ $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é a solução geral da eq. diferencial homogênea para todo c_1 e c_2.

OBS: $W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_1'(x)\, y_2(x)$

Exemplo: Mostre que $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-2x}$ é solução da eq. diferencial $y'' - 3y' - 10y = 0$

$$W[e^{5x}, e^{-2x}] = \begin{vmatrix} e^{5x} & e^{-2x} \\ 5e^{5x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = e^{5x}(-2e^{-2x}) - e^{-2x}\, 5e^{5x} = -7e^{3x}$$

$$\neq 0$$

$\therefore$ o conj. de soluções é LI e é de fato solução da eq. dif.

Enunciado: Dada a eq. dif. $y'' - 3y' - 10y = 0$ e as soluções $y = e^{5x}$ e $y = e^{-2x}$, mostre que

$$y(x) = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$ é solução.

Método de resolução para a equação diferencial homogênea linear de 2ª ordem.

Encontrar duas soluções cujo Wronskiano seja diferente de zero $\Rightarrow$ encontrar a solução geral $\Rightarrow$ que as funções $y''(x)$, $y'(x)$ e $y(x)$ devem ter o mesmo "aspecto".

$\Rightarrow$ $y(x) \neq$ polinômio, pois senão os termos $ay''(x)$, $by'(x)$ e $cy(x)$ seriam polinômios de graus diferentes e a soma não seria nula.

Assim, se $y(x) = e^{\lambda x}$, λ é um parâmetro a ser determinado $\Rightarrow$

$$y(x) = e^{\lambda x}, \quad y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{e} \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad a y'' + b y' + c y = 0$$

$$\Rightarrow \quad a \lambda^2 e^{\lambda x} + b \lambda e^{\lambda x} + c e^{\lambda x} = 0$$

$$e^{\lambda x} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0 \Rightarrow e^{\lambda x} \neq 0 \;\; \forall x \text{ e } \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{a \lambda^2 + b \lambda + c}_{\text{equação característica da eq. diferencial}} = 0$$

Definição: As soluções da equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ podem ser

$$\lambda_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad \lambda_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sendo

i) se $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow$ raízes reais e distintas

ii) se $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ raízes reais e duplas

iii) se $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow$ raízes complexas.

Soluções em termos das raízes características

Caso 1: λ_1 e λ_2 são raízes reais e distintas

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Caso 2: λ_1 e λ_2 são reais e duplas $\Rightarrow \lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Caso 3: $\lambda_1 = \underbrace{s}_{\text{parte real}} + \underbrace{t}_{\text{parte complexa}} i$ e $\lambda_2 = s - ti$ são raízes complexas

$$\Rightarrow y(x) = e^{sx}(c_1 \cos tx + c_2 \operatorname{sen} tx)$$

Exercício 1: Determine as soluções gerais das equações diferenciais homogêneas:

a) $y'' - y' - 2y = 0$

b) $y'' - 7y' = 0$

c) $y'' + 4y' + 5y = 0$

Exercício 2: Duas soluções de $y'' + 2y' + y = 0$ são e^{-x} e $5e^{-x}$. Pergunta-se $y(x) = c_1 e^{-x} + 5c_2 e^{-x}$ é a solução geral?

Exercício 3: Resolva as equações diferenciais homogêneas de segunda ordem:

a) $y'' - y = 0$

b) $y'' - y' - 30y = 0$

c) $y'' - 2y' + y = 0$

d) $y'' + y = 0$

e) $y'' + 2y' + 2y = 0$

Exercício 4: Ache a solução do problema de valor inicial proposto, desenhe as curvas de soluções (use por exemplo um software qualquer)

a) $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$ e $y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

c) $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(\pi/2) = 0$ e $y'(\pi/2) = 2$

d) $y'' - y' + 0.25y = 0$, $y(0) = 2$ e $y'(0) = 1/3$

Solução 4a) $\Rightarrow 16\lambda^2 - 8\lambda + 145 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4} \pm 3i$

$\Rightarrow y(x) = e^{\frac{x}{4}}\left(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x\right)$ (*)

fazendo $x = 0$ e $y(0) = -2 \Rightarrow y(0) = e^{\frac{0}{4}}\left(c_1 \overbrace{\cos 0}^{1} + c_2 \overbrace{\operatorname{sen} 0}^{0}\right)$

$y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = -2$

derivando (*) $\Rightarrow$

$$y'(x) = \frac{1}{4} e^{x/4} \left(c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x \right) + e^{x/4} \left(-3c_1 \operatorname{sen} 3x + 3c_2 \cos 3x \right)$$

sendo $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{4} e^{0/4} \left(c_1 \overbrace{\cos 0}^{1} + c_2 \overbrace{\operatorname{sen} 0}^{0} \right) + e^{0/4} \left(-3c_1 \overbrace{\operatorname{sen} 0}^{0} + 3c_2 \overbrace{\cos 0}^{1} \right)$$

$$1 = \frac{c_1}{4} + 3c_2 \,, \quad \text{mas} \quad c_1 = -2$$

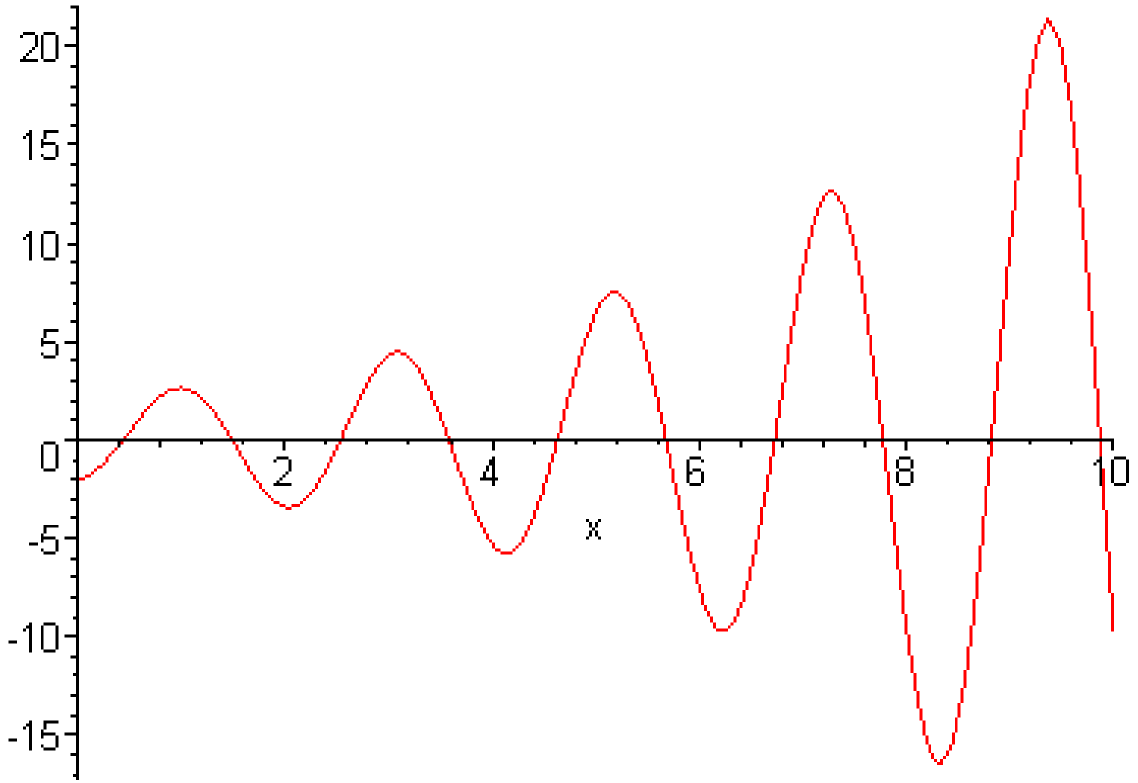
$$\Rightarrow 3c_2 = 1 - \frac{c_1}{4} \Rightarrow 3c_2 = 1 + \frac{2}{4}$$

$$3c_2 = \frac{6}{4} \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{1}{2}}$$

a solução do PVI

$$\begin{cases} 16y'' - 8y' + 15y = 0 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$



$$y(x) = -2e^{x/4}\cos 3x + \frac{1}{2}e^{x/4}\,\text{sen}\, 3x$$

Equação diferencial linear não HOMOGÊNEA de segunda ordem.

$$a y''(x) + b y'(x) + c y(x) = K(x) \quad , \quad K(x) \neq 0$$

Para obter a solução da eq. diferencial não homogênea deve-se somar a solução geral da equação homogênea $(y_h(x))$ a uma solução particular da equação não homogênea $y_p(x)$ $\Longrightarrow$ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$.

Exemplo: Ache a solução geral de $y'' + y = x^2$, se $y_p(x) = x^2 - 2$ e se duas soluções de $y'' + y(x) = 0$ são $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Solução: Primeiro devemos verificar se as soluções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são LI.

$$W[\operatorname{sen} x, \cos x] = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

$\therefore$ $y'' + y = x^2$ tem a solução $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + x^2 - 2$.

método de resolução para a equação diferencial não homogênea linear de segunda ordem.

Estudaremos 2 métodos p/ resolver uma equação não homogênea

1) método dos coeficientes indetermi-
nados (ou coeficientes à determinar)

2) método da variação dos parâme-
tros.

Método dos coeficientes indeterminados.

O método dos coeficientes indeterminados exige que façamos uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $y_p(x)$, porém com coeficientes envolvidos indeterminados.

Depois substitui a expressão hipotética na equação diferencial não homogênea e tenta-se determinar os coeficientes, de modo que satisfaça a equação.

Exemplo: Ache a solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2x}$$

Procuramos uma solução $y_p(x)$ tal que

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x) = 3e^{2x}$$

$\Rightarrow$ $y_p(x) = Ae^{2x}$ onde A é um coeficiente a determinar

$\Rightarrow$ $y_p'(x) = 2Ae^{2x}$ e $y_p''(x) = 4Ae^{2x}$

$$y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x) = 3e^{2x}$$

$$4Ae^{2x} - 3(2Ae^{2x}) - 4Ae^{2x} = 3e^{2x}$$

$$(4A - 6A - 4A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y_p(x) = -\frac{1}{2}e^{2x}$$

Exercícios: Ache a solução particular de:

1) $y'' - 3y' - 4y = 2\,\text{sen}\,x$

2) $y'' - 3y' - 4y = 4x^2$

TABELA PARA AUXILAR A ENCONTRAR ALGUMAS SOLUÇÕES PARTICULARES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Tabela: Solução particular de $ay'' + by' + cy = k(x)$

$k(x)$	$y_p(x)$
$3x^2$	$Ax^2 + Bx + C$
$7e^{3x}$	Ae^{3x}
$17\cos(3x)$	$A\cos(3x) + Bsen(3x)$
$7sen(2x)$	$A\cos(2x) + Bsen(2x)$
$7sen(2x) + 8\cos(2x)$	$A\cos(2x) + Bsen(2x)$
$3e^{5x} + (x^2 + 7x + 3)$	$Ae^{5x} + (Bx^2 + Cx + D)$
$3e^{5x}(x^2 + 7x + 3)$	$e^{5x}(Ax^2 + Bx + C)$
$3e^{5x}sen(2x)$	$e^{5x}\left[A\cos(2x) + Bsen(2x)\right]$

Exercício 1: Ache a solução geral da equação diferencial dada, utilize a tabela acima, se necessário:

a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$

b) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

c) $2y'' + 3y' + y = x^2 + 3senx$

Exercício 2: Ache a solução do PVI dado:

a) $y'' + y' - 2y = 2x$; $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y = 3sen2x$; $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$