

信号与系统大作业实验报告

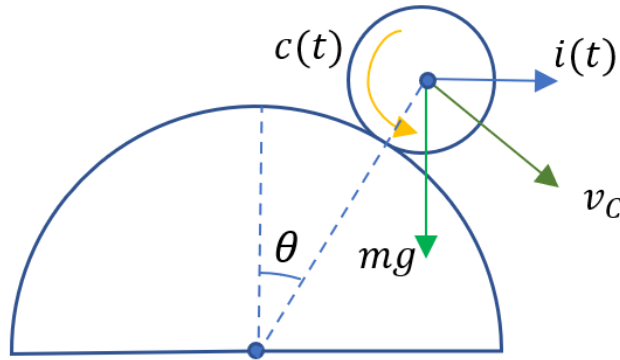
项目背景：

利用反馈控制，可以使滚筒稳定在圆柱形表面的顶端。本项目要求对立于圆柱形表面的滚筒的反馈控制问题进行建模分析，并通过MATLAB软件Simulink平台搭建仿真环境，通过仿真进行测试、验证。

基本内容：

1. 对反馈控制下的滚筒进行数学建模（可考虑小信号线性近似）进行理论分析，并用 MATLAB 软件的 Simulink 搭建仿真平台(仿真应采用是真实模型而不是近似模型)。

1.1 理论分析



设滚筒角速度为 ω 质心速度为 v_c 则由无滑滚动条件

$$v_c = \omega r = \dot{\theta}(r + R) \quad (1)$$

以滚筒与圆柱接触点为参考点，由动量矩定理与平行轴定理可列出

$$mgr \sin \theta + i(t) r \cos \theta - c(t) = \left(\frac{1}{2} m r^2 + m r^2 \right) \frac{d\omega}{dt} \quad (2)$$

将(1)代入(2)则有

$$mgr \sin \theta + i(t) r \cos \theta - c(t) = \frac{3}{2} m r (r + R) \ddot{\theta} \quad (3)$$

在不考虑 $c(t)$ 的情况下，则有

$$mgr \sin \theta + i(t) r \cos \theta = \frac{3}{2} m r (r + R) \ddot{\theta} \quad (4)$$

在小信号近似模型下 $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ ，代入(3)

$$mgr \theta + i(t) r - c(t) = \frac{3}{2} m r (r + R) \ddot{\theta} \quad (5)$$

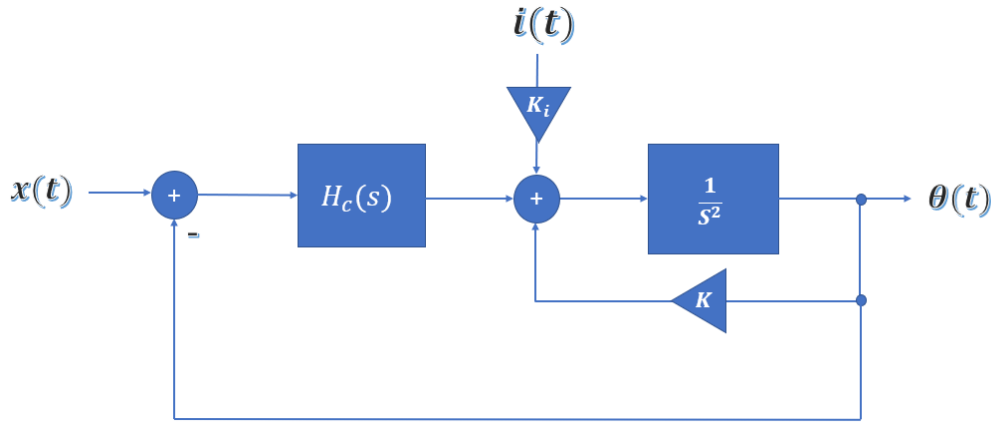
此时系统变为线性的，因为 $c(t)$ 是我们产生的力矩，所以可以暂时不将 $c(t)$ 代入我们的运算过程中。忽略 $c(t)$ ，利用拉普拉斯变换可将(5)式写为

$$k \Theta(s) + k_i I(s) = s^2 \Theta(s) \quad (6)$$

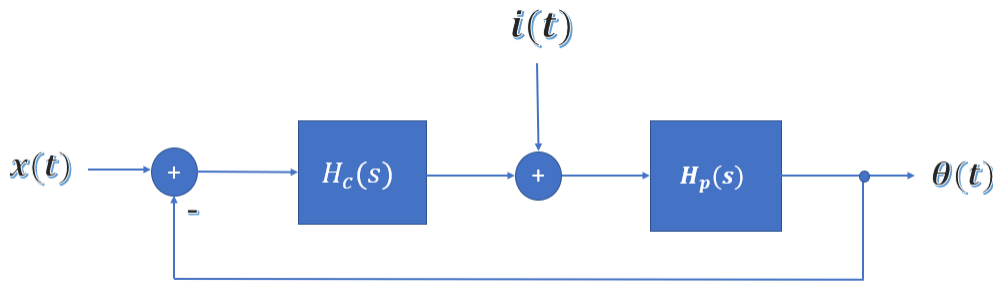
$$\Theta(s) = \frac{k_i}{s^2 - k} I(s) \quad (7)$$

这显然是一个发散的系统，因此我们需要引入反馈来控制其保持稳定。由(7)式我们可

以将框图 1 等效为框图 2，即 $H_p(s) = \frac{1}{s^2 - k}$ 。框图中 $k = \frac{2g}{3(r+R)}, k_i = \frac{2}{3m(r+R)}$ 。我们可以将 $x(t)$ 看作我们需要跟踪的信号，在我们的模型中因为要保持稳定，即 $x(t) \approx 0$ 。



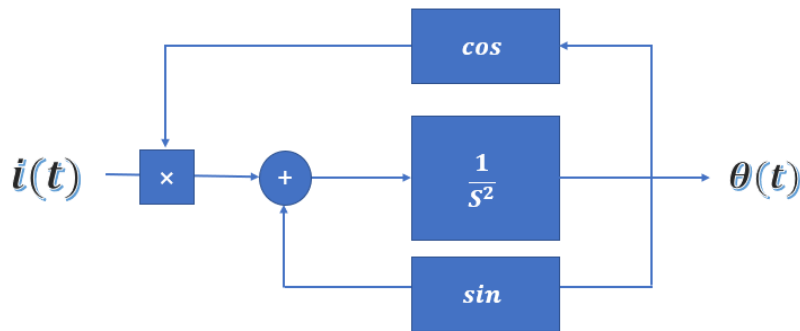
框图 1



框图 2

1.2 Simulink 仿真

在不考虑 $c(t)$ 的情况下有如下框图（图中未画出系数）



我们假设 $m = 0.1\text{kg}, r = 0.1\text{m}, R = 1\text{m}, g = 9.81\text{m/s}^2$ ，此时 $k \approx 5.95, k_i \approx 6.06$ 。使用 simulink 进行仿真框图如下， $i(t)$ 为阶跃信号，在 $t = 1\text{s}$ 跳变，我们看到其呈无阻尼振荡的形式，但仔细观察，其与正弦振荡还是有一些区别。这是因为此时没有引入反馈控制， $\theta(t)$ 的大小早已不满足小信号的假设条件。让我们回到微分方程(3)在 $c(t) = 0$ 时

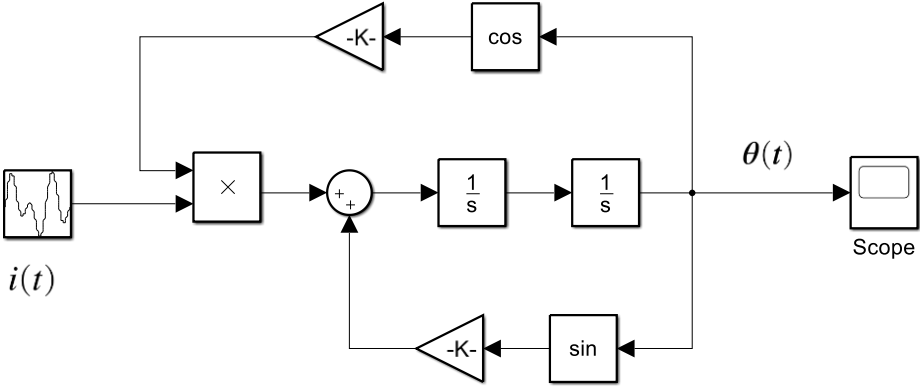
$$mgr\sin\theta + i(t)r\cos\theta = \frac{3}{2}mr(r+R)\ddot{\theta}$$

由级数的知识我们知道

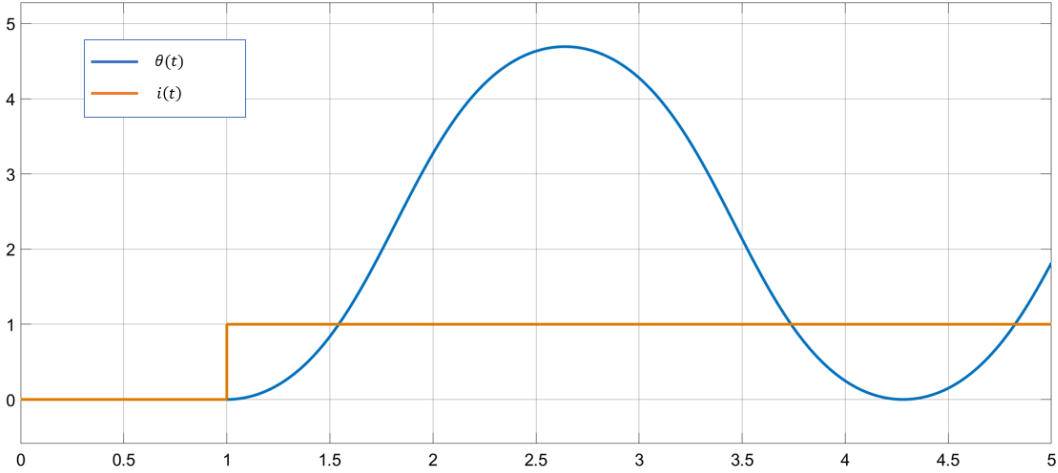
$$\sin\theta = \sum \frac{(-1)^{n-1}\theta^{2n-1}}{(2n-1)!}, \cos\theta = \sum \frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}$$

所以可以将(3)展开成关于 θ 的线性形式，如果展开阶数越高，也就相应地仿真结果越精确。

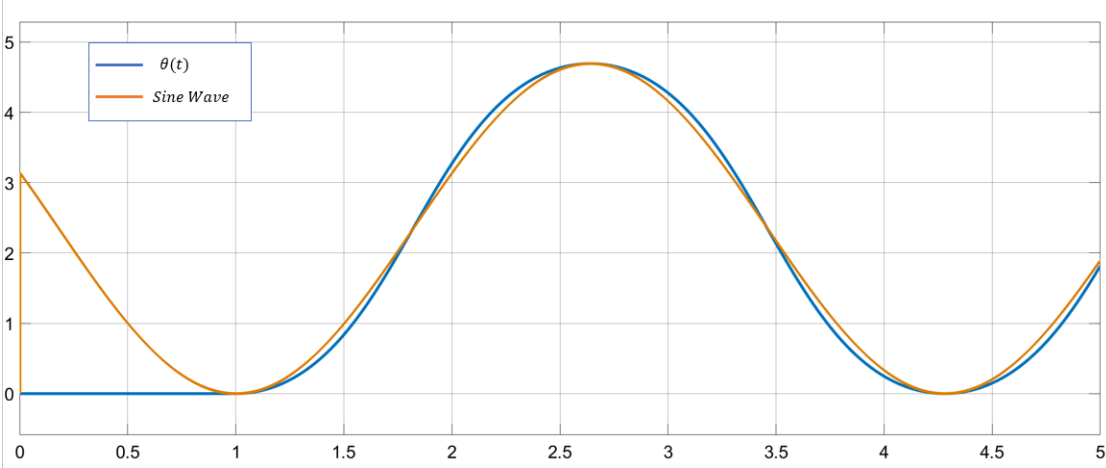
我们看到 $\theta(t)_{\max} \approx 4.693$ ，对于我们的模型来说 θ 只是在 $(0, \pi/2)$ 有意义的。实际上，在我们的模型中 $0 < \theta < \theta_0$ ， θ_0 是滚筒脱离圆柱面的临界角。我们可以预先假设一个小的阈值，认为在这个阈值内，滚筒并不会脱离圆柱体。这里我们认为在 $\theta \approx 0.1$ 以内滚筒均不会脱离而且小信号模型仍然精确。



Simulink 框图



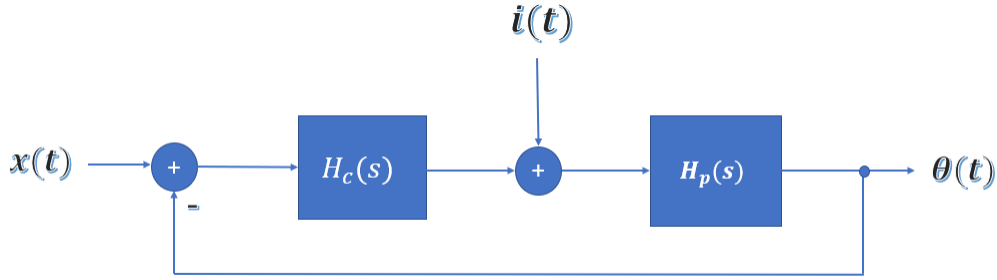
$\theta(t)$ 仿真结果



与正弦波的对比

2. 针对干扰信号 $i(t)$ 为多项式信号条件，研究不同控制器的控制效果。要求有理论分析，并用 MATLAB 仿真结果加以验证。验证时，要改变干扰信号大小以观察小信号近似模型的准确性。

由第一部分的理论分析我们可知在小信号模型的近似情况下，我们可以将模型视为一个线性系统，针对 $i(t)$ 是多项式信号的条件，我们可以使用 PID 控制器来使滚筒尽可能地稳定在 $\theta \approx 0$ 附近，我们将分别将对比例控制器、PI 控制器、PD 控制器、PID 控制器进行实验验证。



2.1 比例控制器

1) S 域分析

在使用比例控制器的情况下， $H_c(s) = P$ ，根据(7)式有

$$H_p(s) = \frac{1}{s^2 - k}$$

很自然地可以得到这是一个0类跟踪系统，0类干扰抑制系统。由于在我们的模型中， $x(t)$ 为零输入信号，对于稳态误差我们可以不考虑跟踪系统，去关注 $i(t)$ 即可。在比例控制器情况下，由于是0类干扰抑制系统，因此选择 $i(t)$ 为阶跃信号，其拉普拉斯变换为 $1/s$ 。此时稳态误差有

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_i H_p(s)}{1 + H_p(s)H_c(s)} = \frac{k_i}{P - k}$$

由上式可知随着 P 增大，稳态误差会越来越小。但实际上根据分析，此时得到的闭环系统并不是一个稳定系统，此时 $H_c(s) = P$ ，可以写出

$$\Theta(s) = \frac{k_i}{s^2 + P - k} I(s)$$

此时两个极点无法同时保证位于左半平面，因此不稳定。为了有较好的稳定效果， P 应尽可能地大，满足 $P > k$ ，否则系统将会发散。

2) 时域分析

回到时域的微分方程

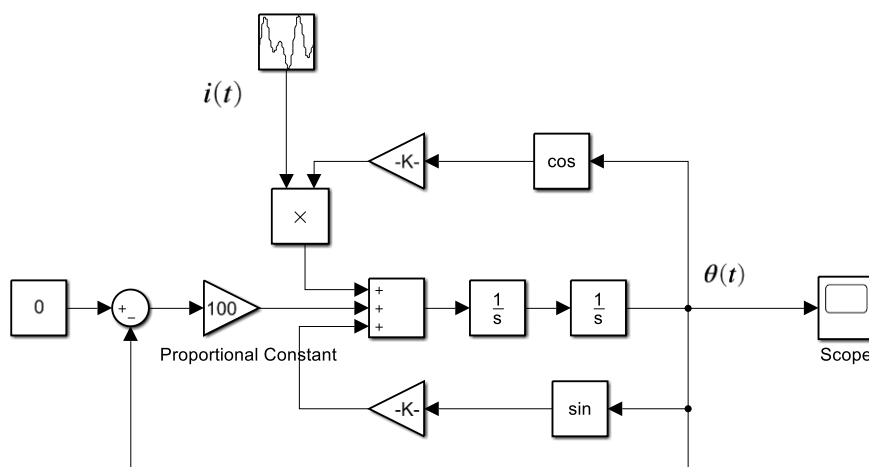
$$\ddot{\theta} + (P - k)\theta = k_i u(t)$$

这是一个常系数二阶非齐次方程，对于其齐次解显然有三角函数的形式，其频率为 $\sqrt{P - k}$ ，如果 P 越大，时间常数也会越小，即振荡地越快。同时容易找到其有一个为常数的特解，可得该常数为 $k_i/(P - k)$ ，可见这个常数与稳态误差的大小是相同的，也就是说此时 $\theta(t)$ 是围绕这个常数做正弦振荡的。

对于更高阶的多项式输入，如 k 次的多项式，那么其特解同样具有 k 次多项式的形式，这也就意味着 $\theta(t)$ 是围绕这个多项式做正弦振荡的，在仿真结果中我们将更直观地去体会这一点。

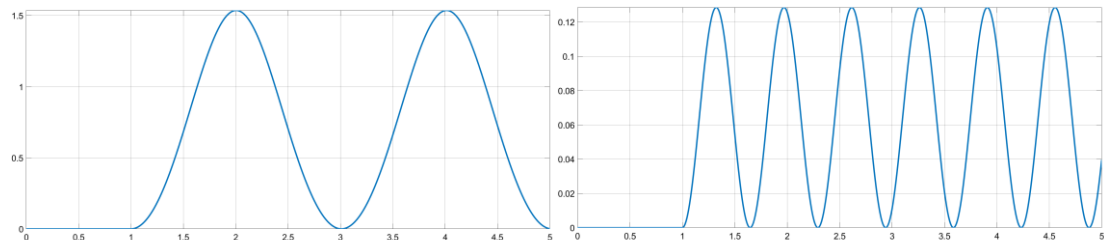
3) 仿真情况

下图为比例控制器的框图，这里的比例常数取为100。我们可以从 P 的变化来验证我们以上的分析，而且仿真结果应为无阻尼振荡。



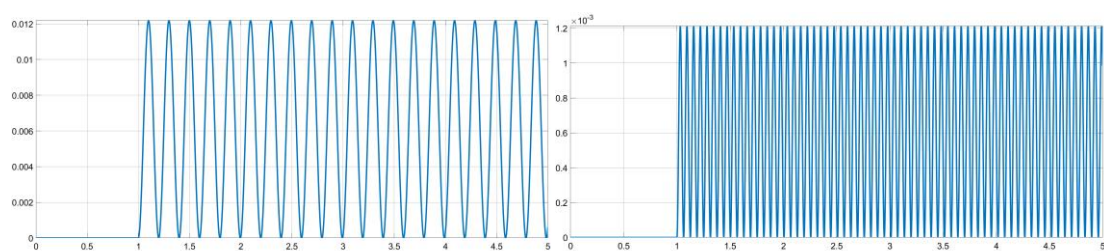
比例控制器框图

以下是 P 为10,100,1k,10k的 $\theta(t)$ 在 $i(t) = u(t)$ 情况下5s内的仿真结果，我们可以看到随着 P 的增大，振荡速度加快，振荡幅度减小。同时根据我们以上的分析，无阻尼振荡应该是以 $k_i/(P-k)$ 为中心振荡的，这里同样可以得到验证。在 $P \gg k$ 时， $\frac{k_i}{P-k} \approx \frac{k_i}{P} \approx \frac{6}{P}$ ，即其振幅大概在 $\frac{1.2}{P}$ 左右，与仿真结果相符。



$P = 10$

$P = 100$



$P = 1000$

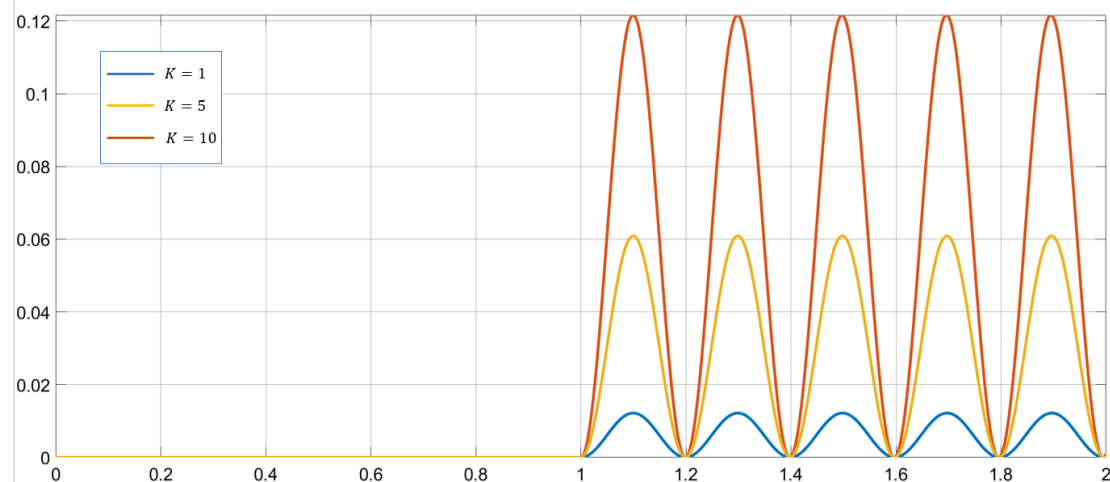
$P = 10000$

另外，我们使用的线性模型在 $\theta(t)$ 越小的时候越精确，所以当 P 越大时，信号越接近一个正弦信号的形式。

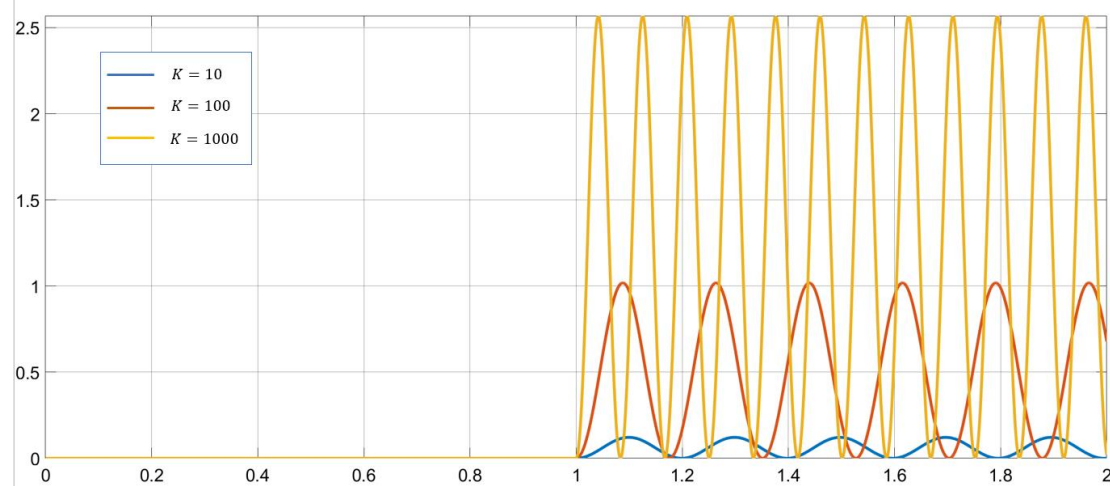
我们看到，单纯地使用比例控制器，无法使系统趋于稳定，尽管是在做无阻尼振荡。而且振荡幅度与 P 大致成反比例关系，这就意味着如果我们想让滚筒尽量稳定地小范围内振动，就需要一个很大的 P 。

当我们增大信号幅度时（这里的 K 是指干扰信号 $i(t)$ 的附加增益，下列仿真 P 均设为

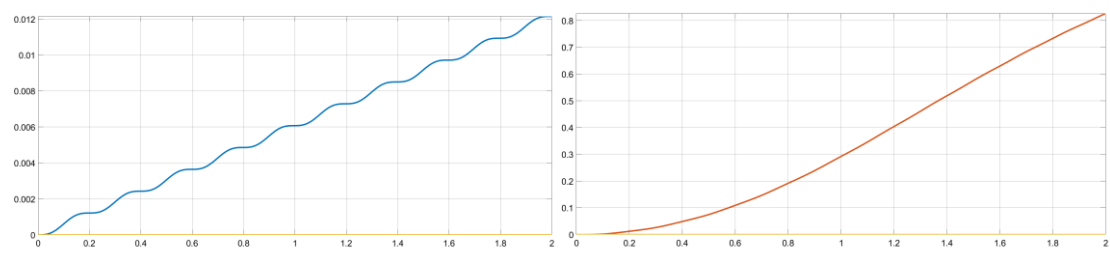
1000)，我们看到其振荡速度并没有明显地变化，而其振荡幅度随着干扰信号的大小成线性变化。



实际上，增大信号幅度同样会影响信号的频率。在上面的例子中 K 之间差别不大，其频率变化并不明显。如果我们增大 K 之间的差距，可以看到其频率之间的差距，如下图。但实际上这只具备理论上的意义，因为此时我们看到 θ 已经来到1以上，小信号近似模型已不再精确，而且很可能此时滚筒已经脱离圆柱体（对于 $K = 1000$ 显然已经脱离）。



对于更高阶的多项式干扰信号比例控制器同样无法起到很好的抑制效果。如下图为 $i(t)$ 为1次及2次多项式时的仿真结果。



$$i(t) = tu(t)$$

$$i(t) = \frac{t^2}{2}u(t)$$

但值得注意的是，当仿真时间足够长，此时都呈现了一种趋于稳定的趋势，个人认为这是因为此时 $\theta(t)$ 已经增长得很大，小信号近似模型早已不精确。在这里就不再进一步分析。

2.2 PI 控制器

1) S 域分析

在使用 PI 控制器的情况下

$$H_c(s) = P + \frac{I}{s}, H_p(s) = \frac{1}{s^2 - k}$$

则这是一个 1 类的干扰抑制系统，也就是最多能抑制 $i(t) = u(t)$ 的干扰信号。

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H_p(s)}{s(1 + H_c(s) + H_p(s))} = -\frac{1}{kI}$$

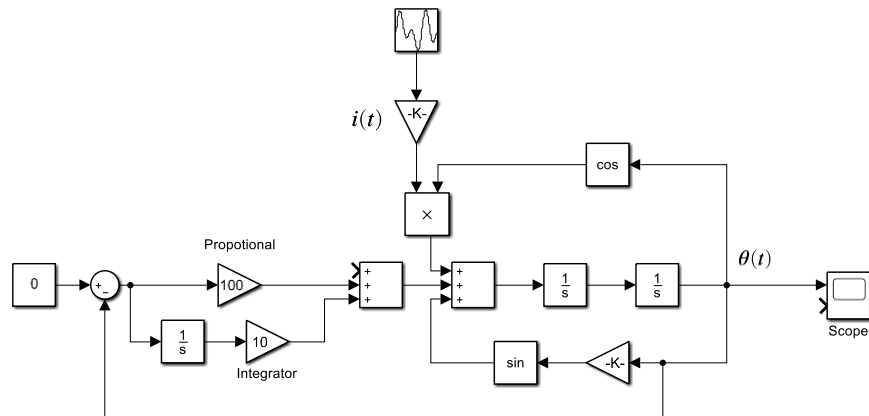
稳态误差随着积分常数 I 的增加而减小。此时对于 $i(t)$ 的系统函数为

$$H_s = \frac{H_p(s)}{1 + H_c(s)H_p(s)} = \frac{s}{s^3 + (P - k)s + I}$$

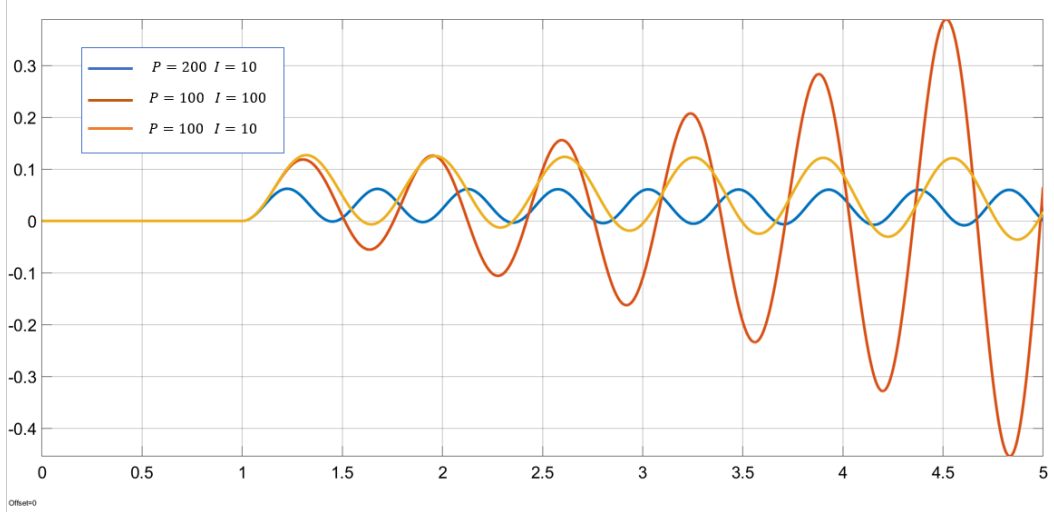
问题在于此时系统一定是发散的，考虑这个系统的极点，其分母是一个一元三次多项式，设其三个解为 s_1, s_2, s_3 ，由于其二次项系数为 0，由韦达定理我们知道 $s_1 + s_2 + s_3 = 0$ ，又因为有两个解共轭，则 s_1, s_2, s_3 无法同时满足实部小于 0，则证明此时系统一定将会发散。这就说明此时我们上面所讨论的干扰抑制系统与稳态误差也就失去了价值。不过我们可以通过调整 P, I 让其增长得足够缓慢，在有限的时间范围内仍然可以使其近似在平衡位置。

2) 仿真结果

下图为 PI 控制器的 Simulink 系统框图，此处比例常数为 100，积分常数为 10



根据我们之前的分析得出，此时系统总是不稳定的，让我们比较几组不同 P 与 I 效果下的仿真结果。根据我们对 PID 系统的认识，积分常数 I 越大，那么其响应速度将越慢，同时其振荡的冲激将会越大；比例常数 P 越大，其振荡频率会增大，而幅度则会减小。我们可以看到仿真结果与我们的直观认识是相符合的。



PI 控制器仿真结果

实际上，PI 控制器的表现并不如单纯地使用比例控制器，因为其最终一定会发散，如果一定要使用的话，我们可以通过调整 P, I 来实现响应速度尽量慢，振荡幅度尽量小的效果。

因为使用 PI 控制器的情况下，系统最终将趋于发散，因此对于高阶多项式或改变信号幅度来说并没有太大的实际意义，因此便不再进行相关仿真。

2.3 PD 控制器

1) S 域分析

在使用 PD 控制器的情况下，我们首先来看其关于 $i(t)$ 的系统函数，此时 $H_c(s) = P + Ds$

$$H_s = \frac{H_p(s)}{1 + H_c(s)H_p(s)} = \frac{1}{s^2 + Ds + P - k}$$

可以求出此时极点为

$$s = \frac{-D \pm \sqrt{D^2 - 4(P - k)}}{2}$$

则只需要 $P - k > 0$ 就可以满足系统总是稳定的。此时这是一个0类干扰抑制系统，也就是说对于更高阶（阶数 > 1 ）的多项式信号，最终无法达到稳定的效果。在 $i(t) = u(t)$ 的情况下，由初值定理与终值定理我们得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = H_s(0) = \frac{1}{P - k} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \theta(t) = H(\infty) = 0$$

此时稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{H_p(s)}{1 + H_p(s)H_c(s)} = \frac{1}{P - k}$$

同样由比例控制器的分析可知此时 $e_{ss} \approx \frac{k_i}{P} \approx \frac{6}{P}$ 。

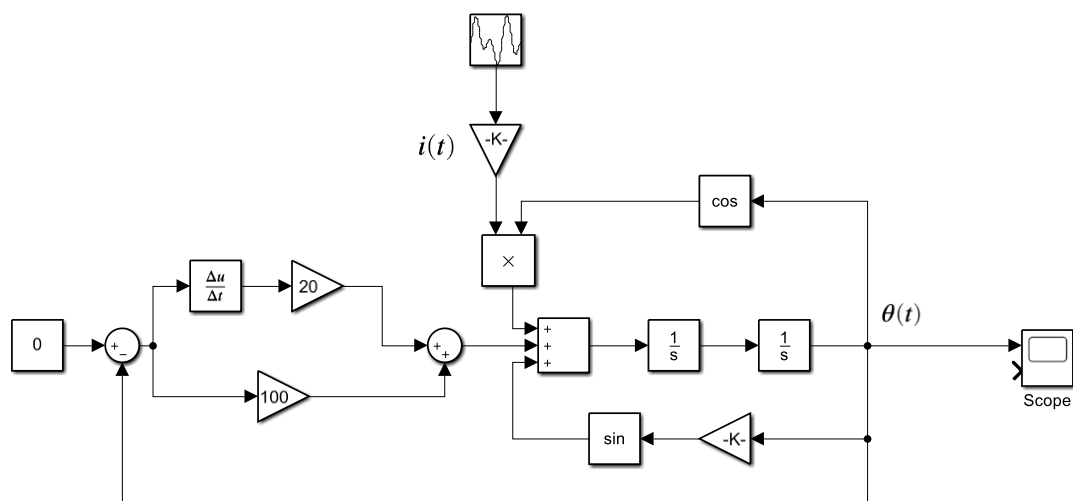
对于这样一个二阶系统而言， $P - k = \omega_n^2, D = 2\zeta\omega_n$ 。我们的目标是尽可能地让系统有一个小的稳态误差，时间短的暂态过程。而我们知道在临界阻尼状态时，系统将会得到最快的响应。此时应满足关系式

$$D = 2\omega_n \rightarrow 4(P - k) = D^2$$

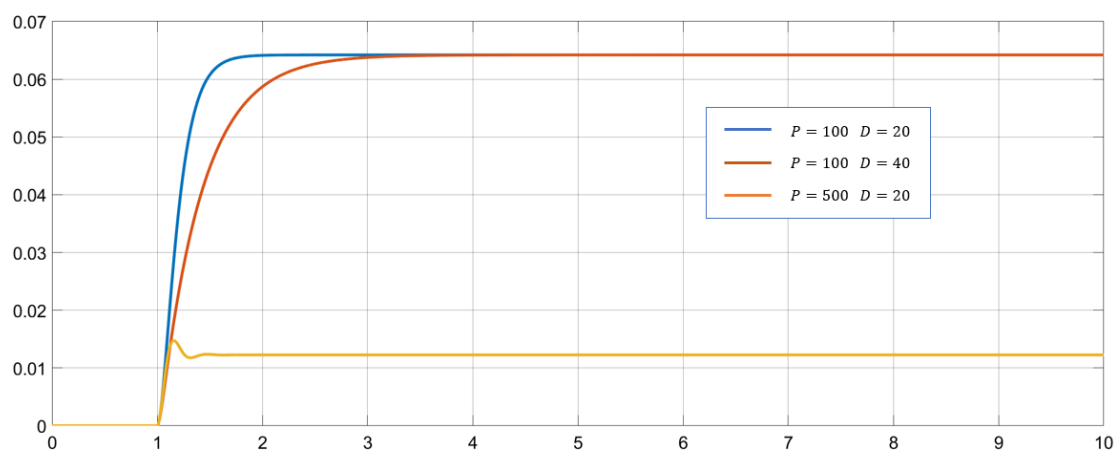
也就是说对于 P, D 我们应大致满足 $D^2 \approx 4P$ 的关系（在 $P \gg k$ 的情况下将会符合得很好）。

2) 仿真结果

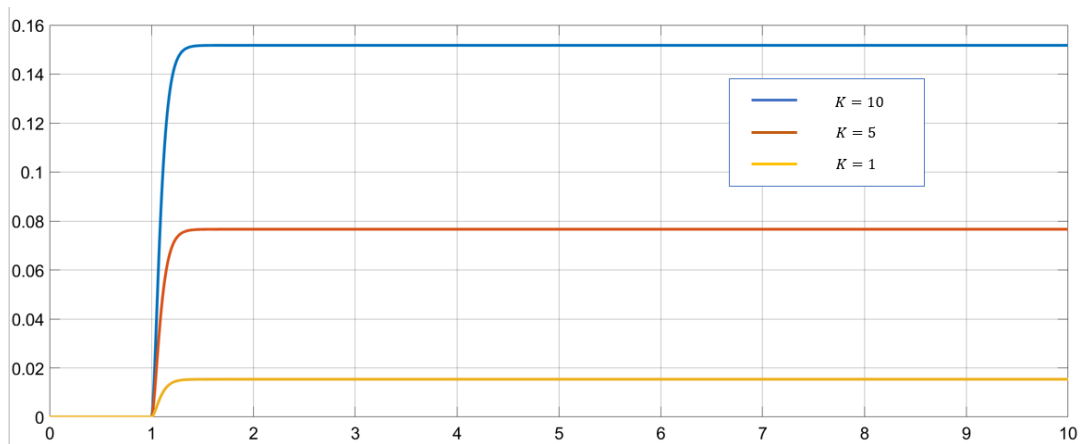
下图为 PD 控制器的仿真框图。



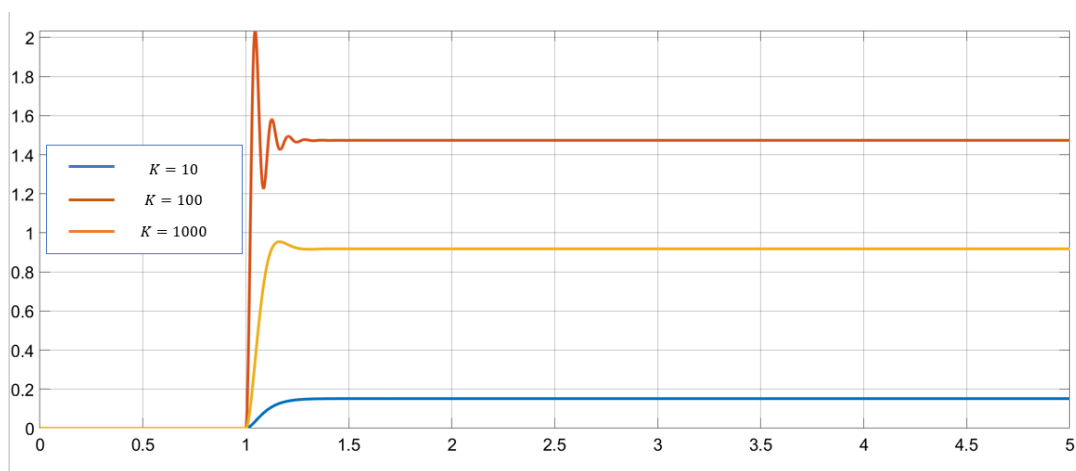
首先我们来观察对于不同的 P, K 的单位阶跃响应。我们看到蓝线即为临界阻尼的情况，红线则为过阻尼，而黄线为欠阻尼，我们应该尽可能地维持系统处于临界阻尼的状态，因为此时建立起稳态所需时间最短，而且 P 越大，稳态误差就越小，也会使响应速度加快。



此时，我们选择 $P = 400$ ，相应地 $D = 20$ ，观察干扰信号的大小不同时对仿真结果的影响。我们看到稳态误差是与干扰信号的大小近似成正比的。同时在干扰信号增大 10 倍以后，我们的小信号模型仍然成立。继续放大干扰信号，小信号模型将逐渐不成立，出现此模型无法解释的现象，如下图。

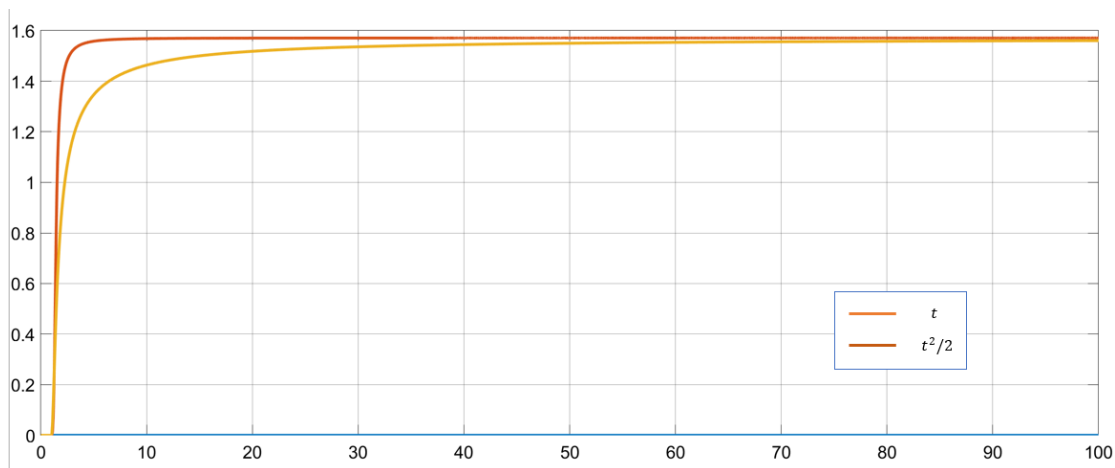


小信号模型成立



小信号模型失效

对于更高阶的多项式干扰信号，PD 控制器无法起到良好的抑制效果，并且随着 θ 的增大，最终小信号模型都将失效，如下图。



2.4 PID 控制器

1) S 域分析

在使用 PID 控制器的情况下，此时 $H_c(s) = P + Ds + I/s$ ，关于 $i(t)$ 的系统函数为

$$H_s = \frac{s}{s^3 + Ds^2 + (P - k)s + I}$$

此时设三个极点为 s_1, s_2, s_3 ，设 s_1, s_2 为一对共轭根， s_3 则必为实根。利用韦达定理我们可以得到

$$s_1 + s_2 + s_3 = -D < 0 \quad s_1 s_2 s_3 = -I < 0$$

又因为 $s_1 s_2 > 0$ ，由以上条件可以得到 $s_3 < 0$ ，但同时我们仍然需要保证 $Re\{s_1\} < 0, Re\{s_2\} < 0$ ，但这个边界条件并不容易求得。但如若我们固定某个参数，按照一定的限制去调节另外两个参数则依然可以保证整个系统保持稳定。

这是一个1类干扰抑制系统，在 $i(t) = tu(t)$ 时，其稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{I}$$

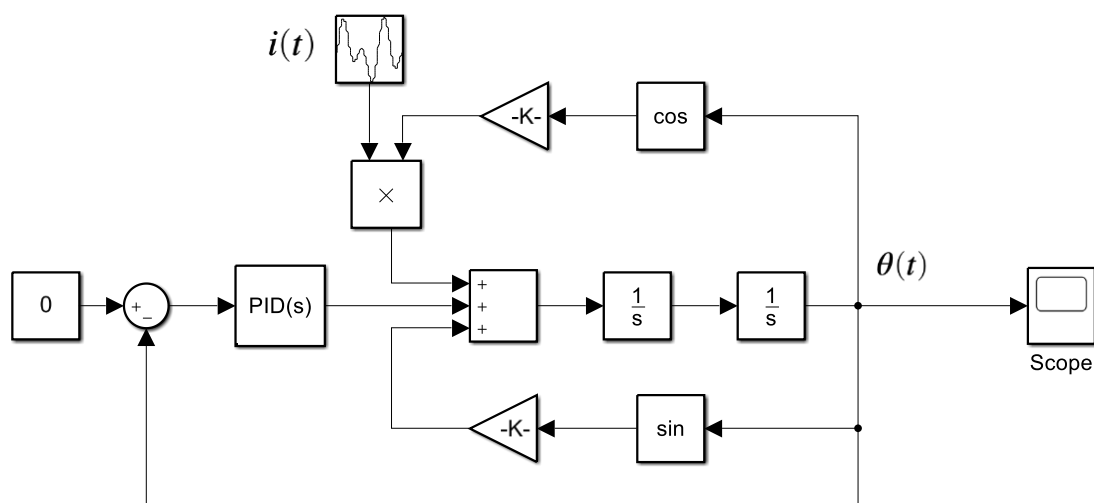
也就是积分常数越大，最终的稳态误差越小，同时我们可以增大比例常数或微分常数来加快响应速度以及缩短暂态过程的时间。

2) 仿真结果

因为根据我们上面的分析，并没有给出一个明确的使系统稳定的 P, I, D 参数关系，所以如若参数不合适仍有可能出现发散的情况。下图为 Simulink 仿真框图。这里使用的PID是 Simulink 封装好的模块，其区别在于传递函数为

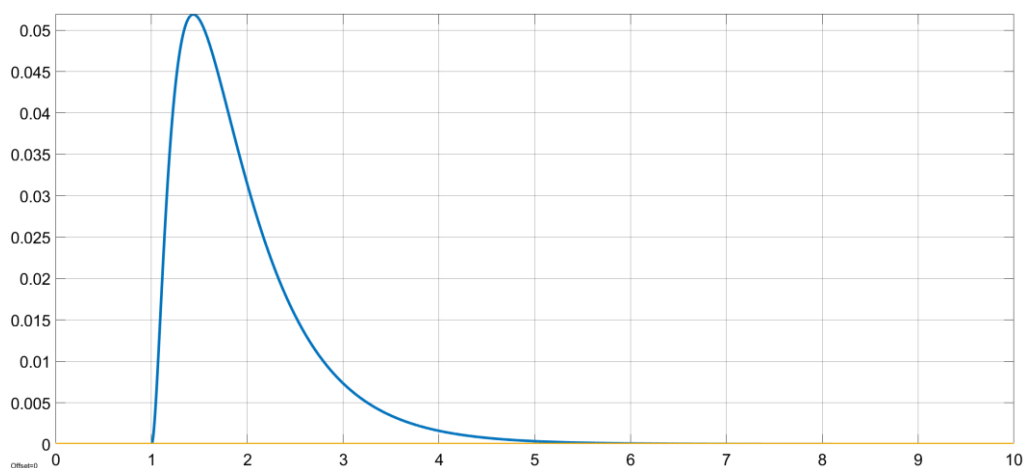
$$P + \frac{I}{s} + D \frac{N}{1 + \frac{N}{s}}$$

N 叫做滤波常数，默认为 100，通常很大，所以近似是与 PID 控制器传递函数相同的。



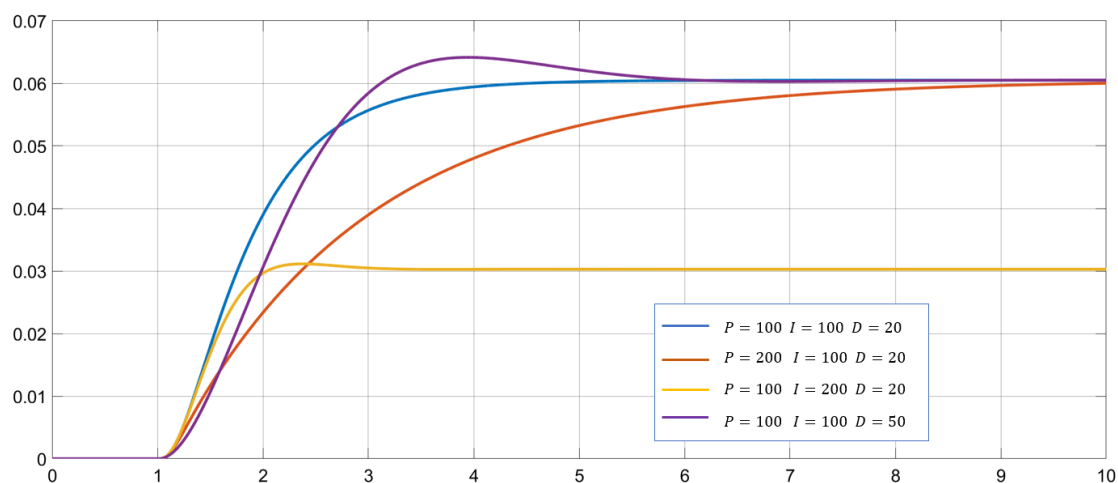
比例控制器

下面我们来看各个参数的不同对仿真结果的影响。首先还是看对于 $i(t)$ 为阶跃信号时的情况。在这里我预设 $P = 100 \quad I = 100 \quad D = 20$ ，我们看到此时已经有很好的稳定效果， θ 最大值大概为0.05，经过一个大约4s的暂态过程达到稳定。



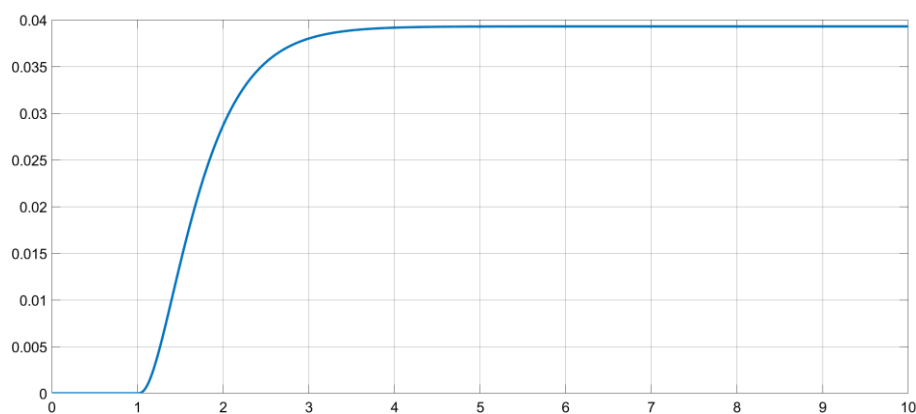
PID 系统的阶跃响应

对于更高阶的多项式信号 $i(t) = tu(t)$ ，根据我们的分析最后将有一个不为 0 的稳态误差为 $\frac{k_i}{I} \approx \frac{6}{I}$ ，下图为参数不同的情况下的响应，我们看到呈现出一种类似于二阶系统的过阻尼、临界阻尼、欠阻尼的现象，积分常数最后稳态误差的大小，合适的 P, D 则能达到一个短的暂态时间以及小的振荡，综合来看 PID 系统确实起到了很好的效果。

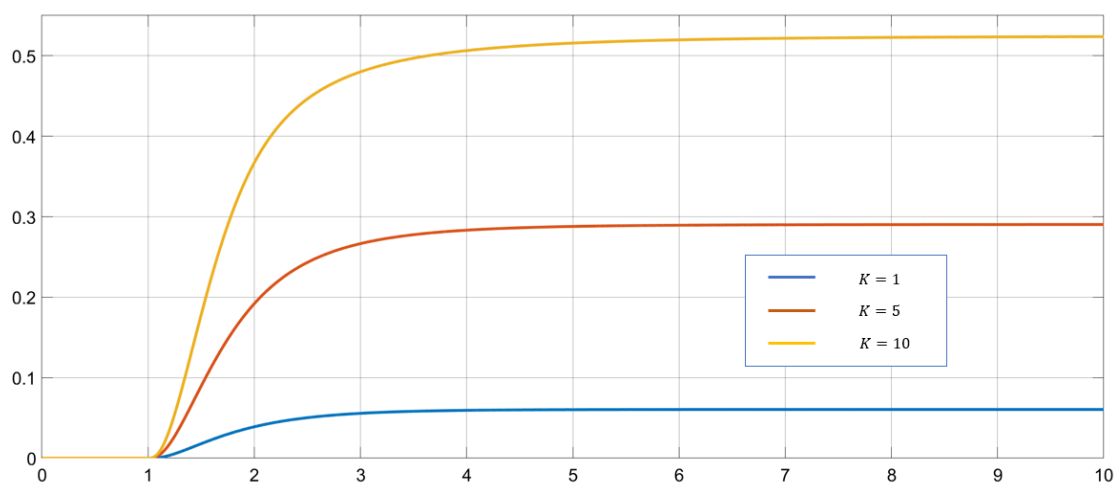


不同参数下 PID 对于一阶信号的响应

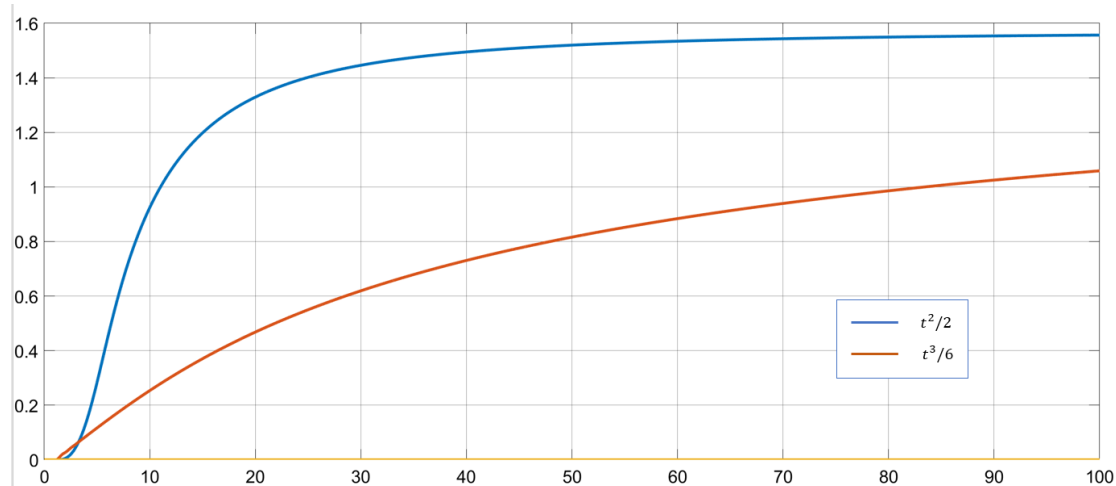
同时借助 Simulink 中 PID Tuner 工具可以自动调整一个较为合适的参数，下图为在 Tuner 调整下对于一阶多项式信号的响应。



当我们改变干扰信号的大小，我们看到和之前的情况类似，在 10 倍放大以后小信号模型的准确性仍然是可以接受的（ K 为干扰信号的附加增益）。



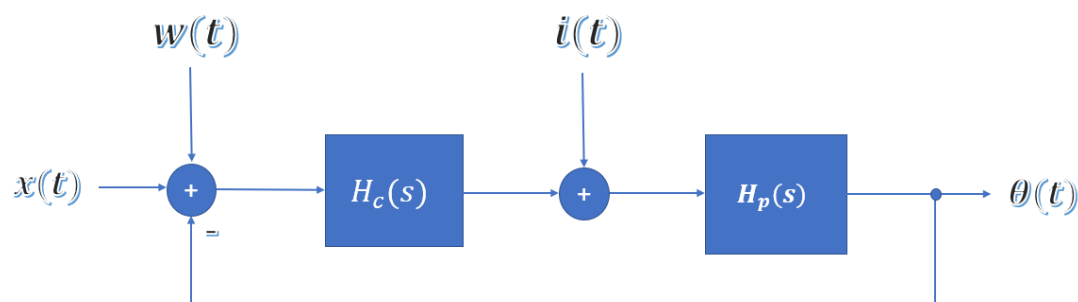
对于更高阶的多项式信号，PID 系统则无法有效实现对干扰信号的抑制，无法最终达到一个稳定状态，但仍然会对干扰信号起到一定的削弱作用，如下图，同样随着 θ 的增大，小信号模型逐渐失效。我们需要增加更高阶的反馈控制例如 $1/s^2, 1/s^3$ 等进行更好地抑制。



3. 针对测量噪声 $w(t)$ 白噪声的影响，进行理论分析和仿真实验验证。

3.1 PID 系统

在有测量噪声 $w(t)$ 的情况下，控制系统继续使用 PID，我们的框图就变成



此时 $\theta(t)$ 关于 $w(t)$ 的系统函数为

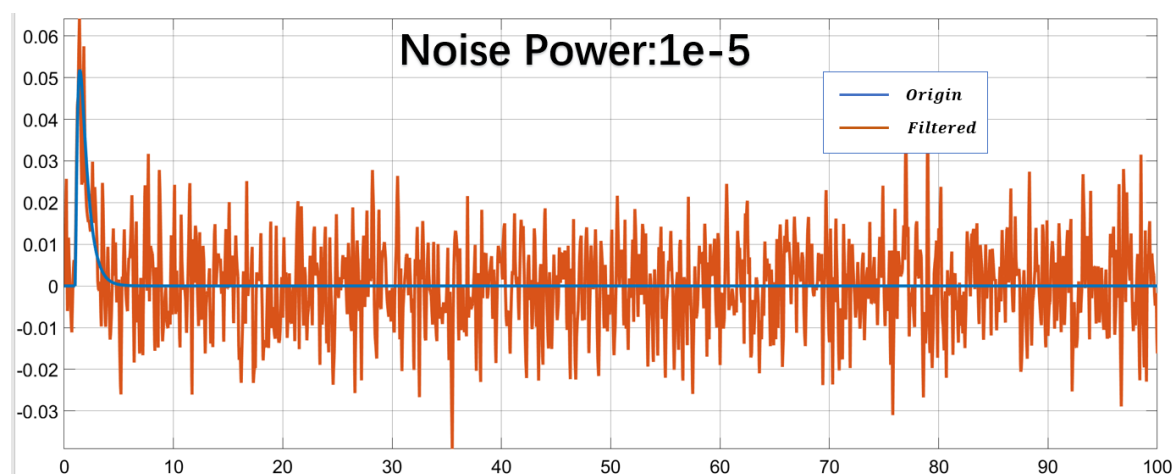
$$H(s) = \frac{H_c(s)H_p(s)}{1 + H_c(s)H_p(s)} = \frac{Ds^2 + Ps + I}{s^3 + Ds^2 + (P - k)s + I}$$

其等效噪声带宽为

$$BW_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |H(j\omega)|^2 d\omega$$

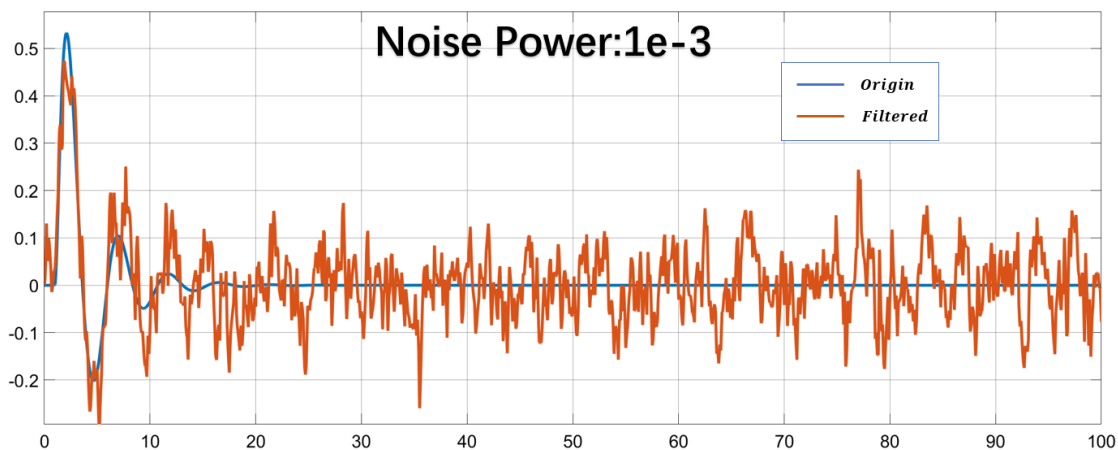
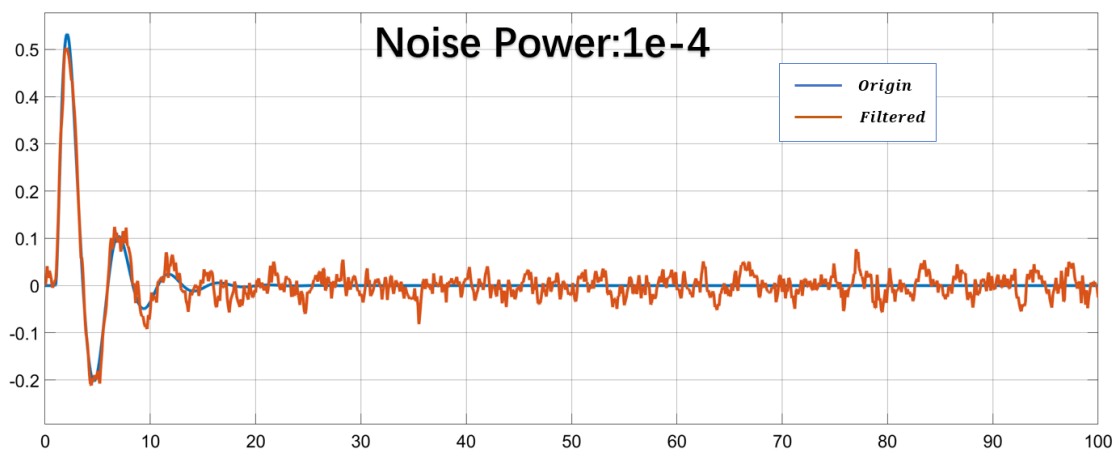
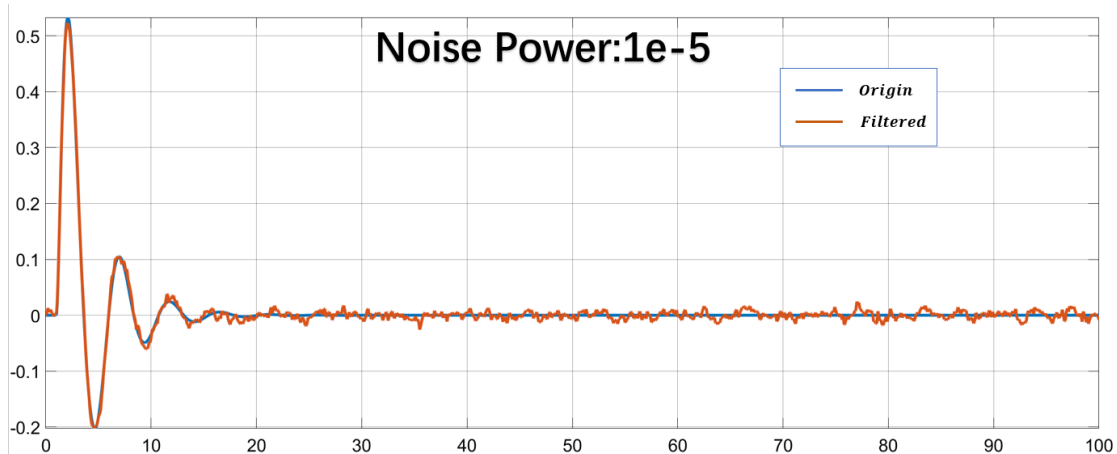
这并不是一个容易求得极值的含参反常积分，我们在保证 BW_n 有一个比较小的值的同时，系统也需要保持稳定。在尝试使用 Wolfram 与 MATLAB 直接求值后，发现求解效果并不好，需要多次尝试才能找到一组使 BW_n 较小同时系统也稳定的PID参数。最后采取了使用**蒙特卡罗法**对此积分值进行大致的估计，在给定的参数范围内进行搜索最小的 BW_n 值。所谓蒙特卡罗法求积分值则是用一种在指定区域内均匀投点的方法对积分区域的面积进行估计，也就是积分值的估计。在这里由于是反常积分，上限是无穷，但是对于 $H(j\omega)$ ，在 ω 很大的时候， $H(j\omega) \approx 0$ ，在这里取积分上限为10000，生成的点数为 10^7 ， $\omega > 10000$ 后的积分相对很小，这样通过将反常积分转化为定积分，再通过蒙特卡罗法给了我们一个关于等效噪声带宽的估计值，可以大致衡量其大小。

对于以上在无噪声情况下的分析我们的理想情况下参数值取得都比较大，然而这样计算发现它们的噪声带宽都比较宽，大概在40Hz左右，此时噪声的影响是很大的，尽管此时 θ 大小仍然比较小。（注：以下的仿真均是以阶跃信号作为激励）



因此我们要尽量降低参数值的大小以减小等效噪声带宽，经过尝试，将三个量限制在20以内，通过**蒙特卡罗法**的估计，可以得到一个10~20的等效噪声带宽，但是系统有可能会发散。经过尝试选取 $P = 11, I = 10, D = 6$ 有一个约为18.9Hz的带宽¹，起到了一定的滤去噪声的效果，同时由于此时参数值较小，振荡将会变得剧烈，如果继续减小，超量和振荡会更加明显。下图为不同强度下的带限高斯白噪声的实验现象。在这里自己并没有找到一组参数使得反馈性能与降噪效果都比较好，因此需要做一些权衡与取舍。

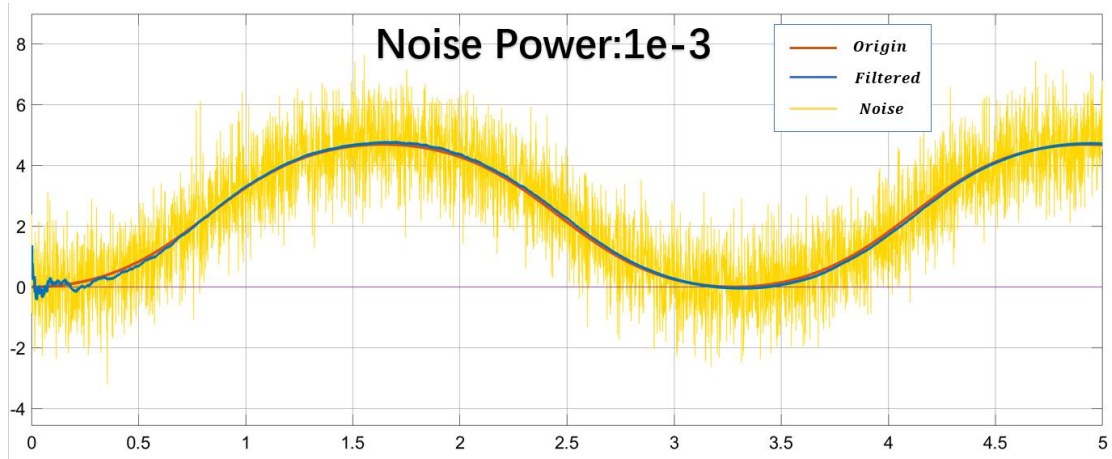
¹ 18.9Hz 为通过蒙特卡罗法筛选出来后再通过 Wolfram 数值计算，二者结果相差并不大。实际上，在此组 PID 参数附近的参数都会起到不错的滤波效果，此处只是以此组参数为例，因其带宽是通过蒙特卡罗法得到的最小值。



3.2 状态空间分析——卡尔曼滤波

在此基础上，自己也尝试了使用状态空间的分析方法去降噪，学习了一下卡尔曼滤波，首先自己并没有引入反馈，在这种情况下线性卡尔曼滤波就无法很好地进行滤波，因为 θ 的变化范围早已超过了小信号模型仍然成立的情况下。于是使用了扩展卡尔曼滤波来处理非线性情况，Simulink 将卡尔曼滤波模块已经封装好，所以使用起来比较方便，我们看到使用扩展卡尔曼滤波的效果还是不错的。

但是自己并没有想到如何将卡尔曼滤波与反馈系统结合起来的办法，如果直接以滤波后的信号作为反馈这样的效果非常不好，并没有想到很好的解决方案。



扩展内容：

1) 研究 $i(t)$ 为简谐信号时，不同控制器下的控制效果。

对于 $i(t)$ 为简谐信号的情况下，我们知道简谐信号的频谱是在其频率上有一个冲激，如果我们能利用控制器的设计将这个冲激消灭掉，那么相应地 $i(t)$ 信号将会得到很好的抑制。我们知道对于 $i(t)$ 的传递函数为

$$H_s = \frac{H_p(s)}{1 + H_c(s)H_p(s)}$$

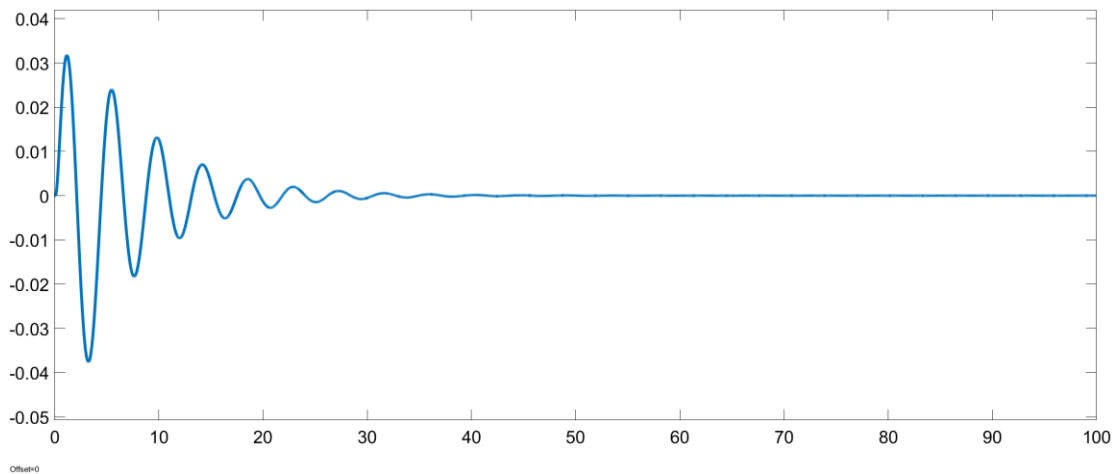
而简谐信号的拉普拉斯变换为（以 $\sin \omega_0 t$ 为例）

$$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

此时 $\theta(s)$ 为以上二者的乘积，由于简谐信号在频域上除 ω_0 以外均为 0，那么只考虑 $j\omega = j\omega_0$ 时，简谐信号的拉式变换在分母上趋于 0 从而形成一个冲激，那么如果 H_s 在分子上有一个与之对应的项，在相乘的时候就能约去这一项从而有效地抑制简谐信号。易得 $H_c(s)$ 中如果包含 $1/(s^2 + \omega_0^2)$ 这样一项，就可以满足上述分析的条件。我们令

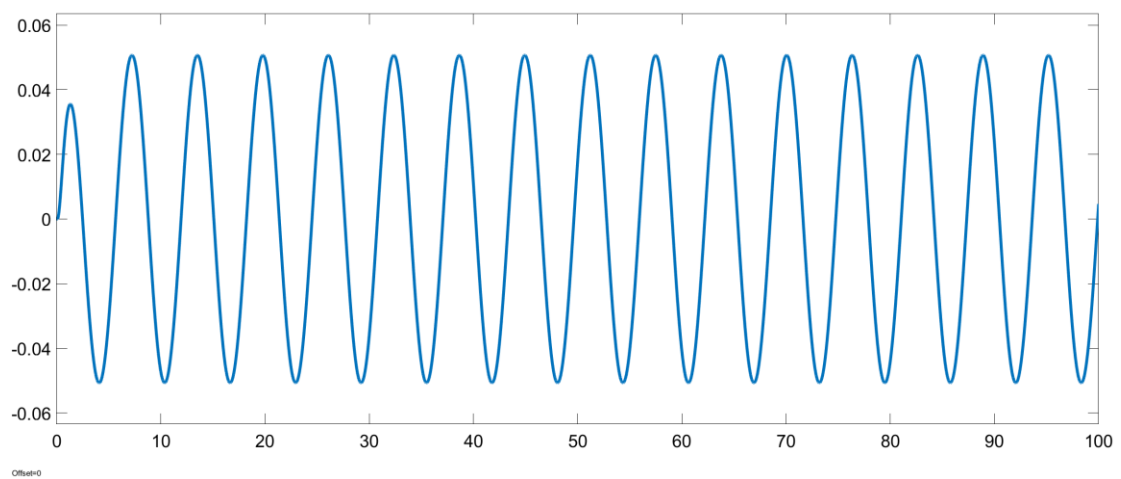
$$H_{add} = \frac{K}{s^2 + \omega_0^2}$$

则只需要在 $H_c(s)$ 中加上这一补充项即可，同时如果 K 越小，那么抑制效果也就相对越好。下面我们进行仿真结果的验证。这里使用幅度与频率均为 1 的正弦信号，相应地 $\omega_0 = 1$ ，这里 K 取 0.01。

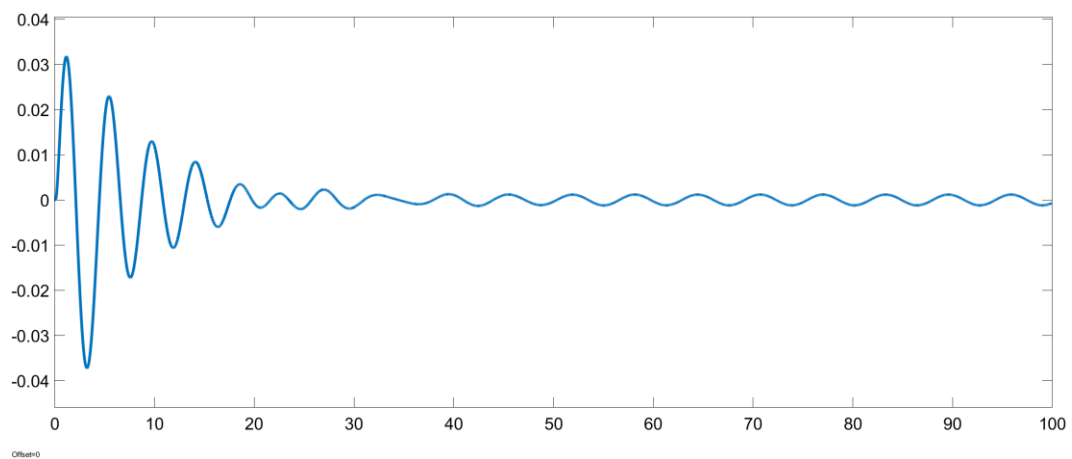


在 $H_c(s)$ 未加入 H_{add} 之前，响应如下图，可见这一项的补充对抑制干扰信号还是起到了

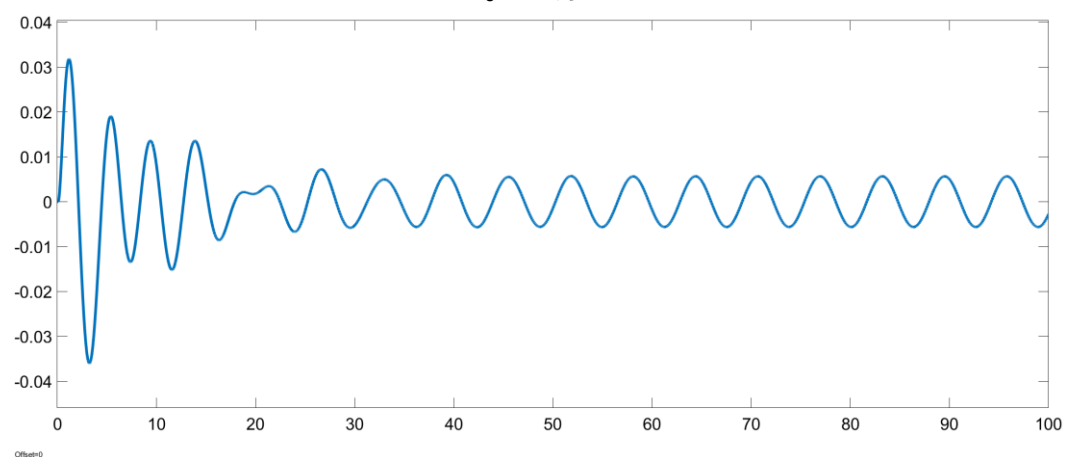
很好的效果。



问题在于这就要求我们需要预先精确知道简谐信号的频率，通常情况下其是未知的。不过我们可以通过一些方法粗略地估计其值，比如先通过PID通过测量其振荡的一个周期作为简谐信号周期的近似从而得到频率，我们再给 $H_c(s)$ 加上补充项，在对于 ω_0 有一定误差的情况下，仍然起到了一定的抑制效果，下图为实验结果。



ω_0 误差为 1%



ω_0 误差为 5%

2) 研究测量时延(即 $\tilde{\theta}(t) = \theta(t - t_0) + w(t)$)对控制结果的影响。

当测量信号加入了时延，对于PID控制系统的传递函数

$$H_c(s) = \left(P + Ds + \frac{I}{s} \right) e^{-st_0}$$

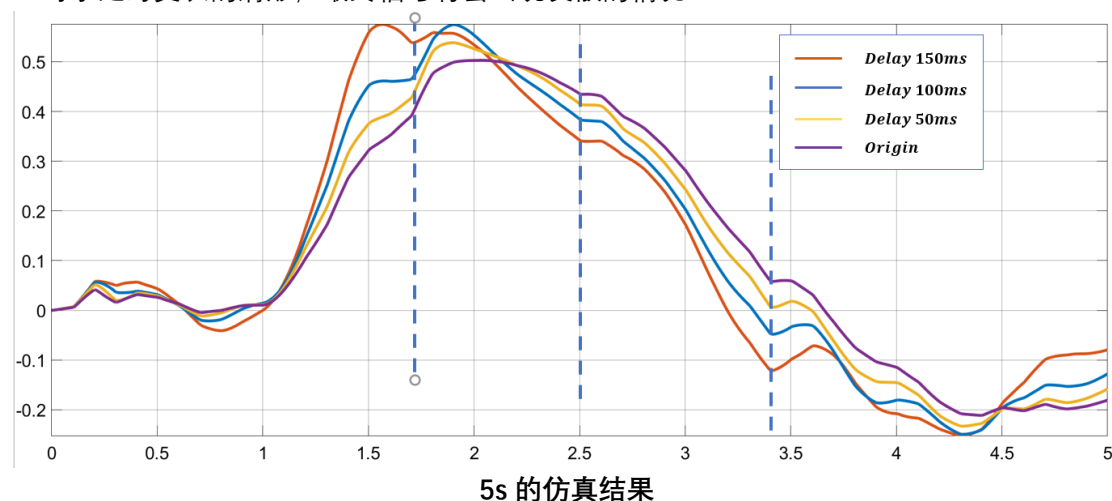
此时关于 $i(t)$ 的传递函数为

$$H_s = \frac{s}{s^3 - ks + (Ds^2 + Ps + I)e^{-st_0}}$$

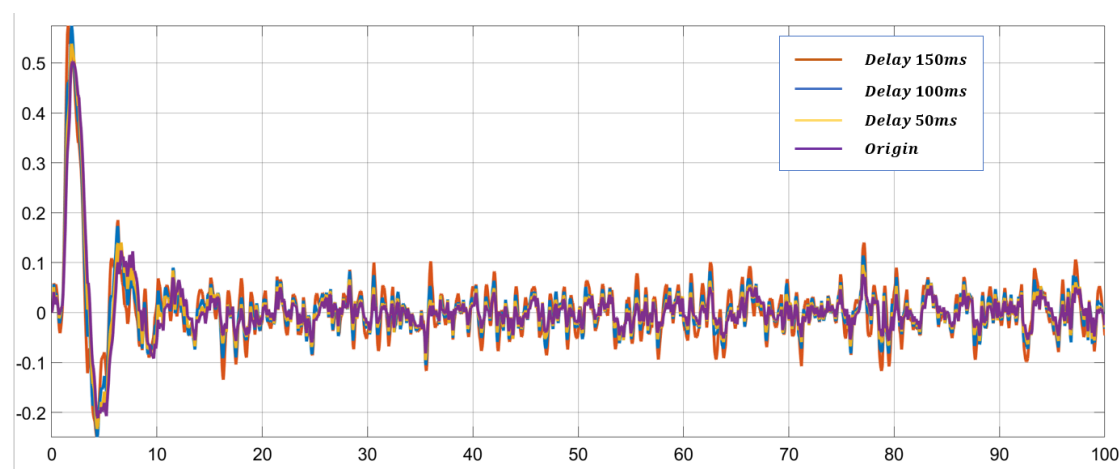
$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{-j\omega^3 - kj\omega + (-D\omega^2 + Pj\omega + I)e^{-j\omega t_0}}$$

这相当于对于复数 $(-D\omega^2 + I + Pj\omega)$ 旋转了 $(-\omega t_0)$ ，即对于加入延时后的 H_s 的不同频率对应的增益相比于原 H_s 是不变的，只是在相位上有区别，而相位上的区别与该频率 ω 与延时 t_0 的乘积 ωt_0 的大小有关。对于整体而言，显然时延越小，就与原信号越接近，这也符合我们的直观认识。但是由于频域上不同频率对应的相位改变是与其自身频率有关的，这就导致整体的相位并没有统一的变化规律。

这里采用在基础内容第三部分中加入噪声后的 PID 系统，通过仿真，**观察到加入延时后，信号中的拐点，在时域上似乎并没有移动**，但自己暂时没有想到一个合理的解释方法。对于延时更长的清形，最终信号将会出现发散的情况



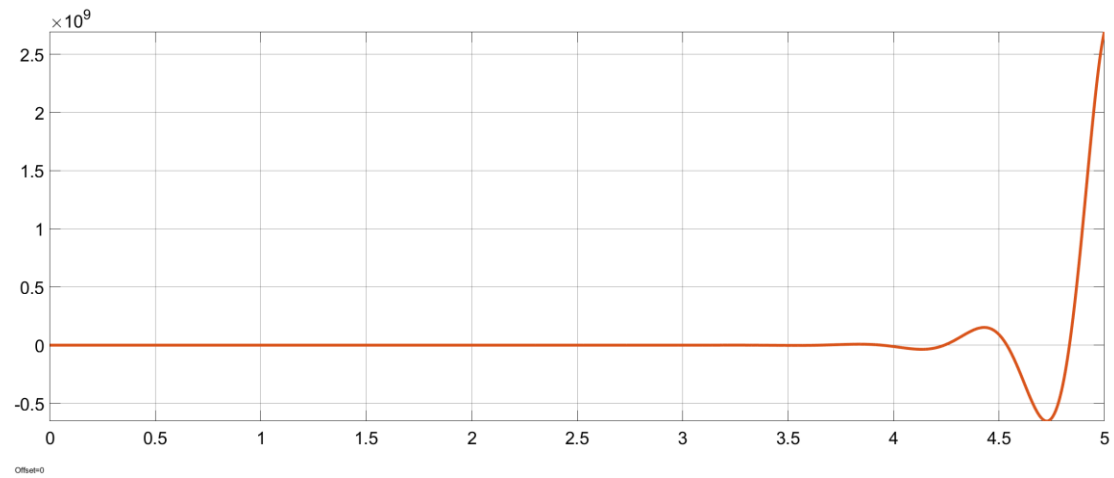
5s 的仿真结果



100s 的仿真结果

我们可以进一步地对于延时做一些相对直观而定性的分析，在没有加入延时的情况下，我们总是期望一个暂态过程很短的系统，即稍稍有偏离平衡点，通过反馈很快就能将

其拉回平衡点，但对于加入延时后，这样的系统承受延时的能力也会相对差，如下即为实验结果，对于同样 $150ms$ 的延时，当我们使用刚刚的 PID 系统时，其暂态过程较长，仍然可以实现比较好的抑制效果。而对于之前讨论过的未考虑噪声情况下的 PID 系统($P = 100$ $I = 100$ $D = 20$)，其暂态过程较短，对于高延时已经发散。



附录：

关于状态空间的分析

$$\theta''(t) = \frac{2g}{3(r+R)} \sin\theta + \frac{2}{3m(r+R)} i(t) \cos\theta$$

$$\mathbf{q}(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} + \mathbf{B} i(t)$$

$$y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{q}(t)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2g}{3(r+R)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3m(r+R)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (0 \quad 1) \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

以上状态空间的描述是为了适用于 MATLAB 中的卡尔曼滤波模块，对于扩展卡尔曼滤波则需要定义传递函数与测量函数，此处参考的是关于 MATLAB 关于卡尔曼滤波的官方教程视频

(链接: <https://www.bilibili.com/video/BV1CA411b75L>)