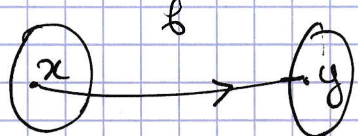
FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

I - FONCTIONS ET COURBES DE RÉFÉRENCE

A. Quelques définitions

- Fonction : Relation entre 2 ensembles qui assosie à chaque élément x de l'ensemble de départ (au plus) un UNIQUE élément y de l'ensemble d'arrivée.



$y = f(x)$

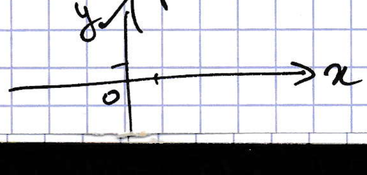
- x = variable RÉELLE $\rightarrow x \in \mathbb{R}$, avec $\mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$ = tous les nombres
- L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la relation existe est appelé le DOMAINE de DÉFINITION de la fonction f, et est noté D_f.
  - $\rightarrow D_f$ est donné dans les énoncés des exercices, sa recherche est exclue du référentiel.
- Le NOMBRE $f(x)$ associé à x par la fonction f est appelé IMAGE de x par f. x est l'ANTÉCÉDENT de $f(x)$.

/!\ $\underset{\text{fonction}}{f} \neq \underset{\text{nombre}}{f(x)}$

B. Représentation graphique

Def : Dans un plan muni d'un repère, la courbe représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que :

$$\begin{cases} \bullet \text{ l'abscisse } x \in D_f \\ \bullet \text{ l'ordonnée } y = f(x) \end{cases}$$

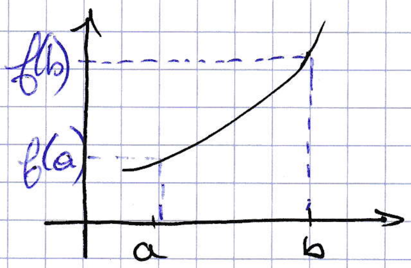


C- Variations d'une fonction

1. Fonction croissante

On dit qu'une fonction f est CROISSANTE sur un intervalle I lorsque, pour tous éléments a et b de I, on a :

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

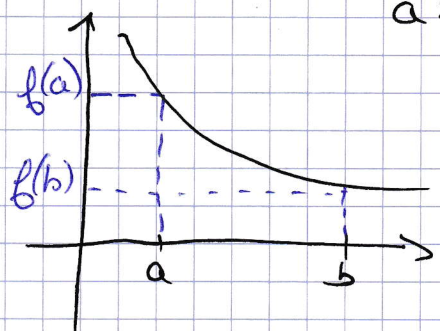


→ l'ORDRE est conservé : quand on applique une fonction croissante à une inégalité, on ne change pas le sens de cette inégalité.

2. Fonction décroissante

On dit qu'une fonction f est DÉCROISSANTE sur un intervalle I lorsque, pour tous éléments a et b de I, on a :

$$a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$$



→ l'ORDRE est inversé : quand on applique une f° décroissante à une inégalité on change le sens de cette inégalité

3. Tableau de variations

Le sens de variation d'une fonction f est résumé par ce tableau → on verra au III comment le remplir.

4. Extremum

Extremum = Minimum ou Maximum.

Déf : Soit f une fonction définie sur D_f et a un réel de D_f

- $M = f(a)$ est le MAXIMUM de la fonction f sur D_f si $\forall x \in D_f$ on a $f(x) \leq M$
- $m = f(a)$ est le MINIMUM de la fonction f sur D_f si $\forall x \in D_f$ on a $f(x) \geq m$

→ Détermination en III.

D- Quelques fonctions particulières

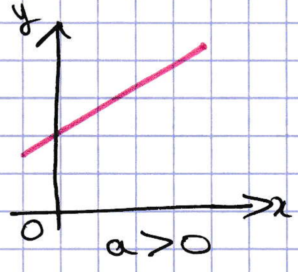
1) Fonctions Affines

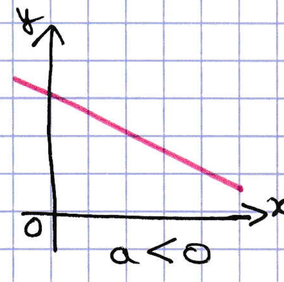
Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax+b$, où a et b sont des réels fixés ($a \neq 0$)

$y = ax+b$ est l'équation d'une droite.
↳ une fonction affine est donc représentée par une droite.

a = coefficient directeur = PENTE

b = ORDONNÉE À L'ORIGINE car $f(0) = b$





Cas particulier : Si $b=0$ alors $f(x) = ax$

↳ il s'agit d'une fonction LINÉAIRE (utilisée dans les situations de proportionnalité), représentée par une droite qui passe par l'origine.

Droites particulières

- Si $a=0 \rightarrow \boxed{y=b} \Rightarrow$ fonction CONSTANTE, représentée par une droite horizontale, et utilisée pour les résolutions graphiques d'équations
- Droite avec une équation de la forme $\boxed{x=k}$
  $\Rightarrow$ droite verticale (⚠ pas une fonction)

---

2) Fonctions puissance d'un exposant entier

Ce sont des fonctions de la forme $\boxed{f(x) = x^n}$, avec $n \in \mathbb{Z}^*$ (c'est à dire entier non nul), définies sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$.

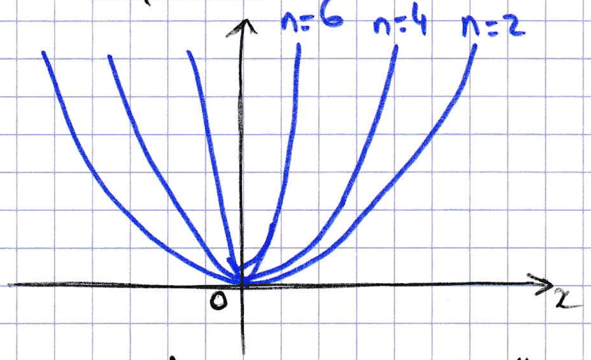
Cas particuliers (que l'on exclura) : $n=0$ car $x^0 = 1 \;\forall x \neq 0$ (0^0 non défini)

$n=1$ car $x^1 = x \rightarrow$ fonction affine.

a) Cas où $n > 1$

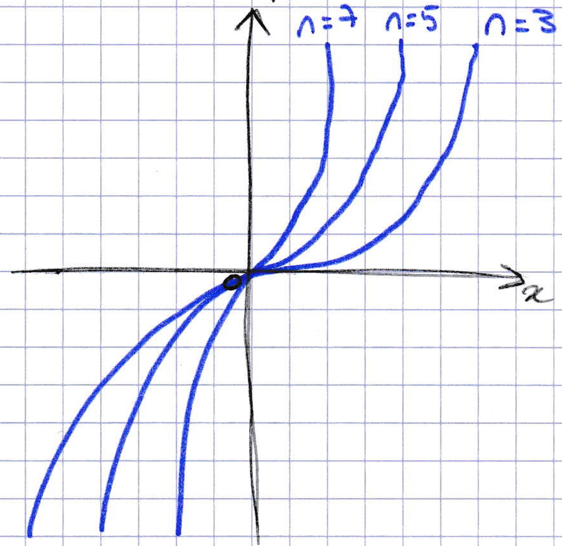
2 "sous-cas" :

n pair



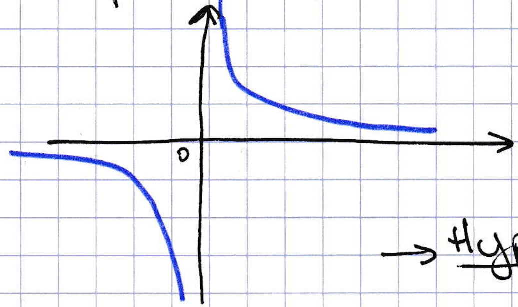
→ Cette courbe en "u" est une parabole.

n impair



b) Cas où $n < 0$

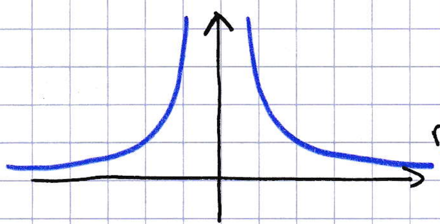
En particulier, pour $n = -1$ → fonction inverse $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$
définie sur $\mathbb{R}^*$:



n impair

→ Hyperbole

Si n pair :

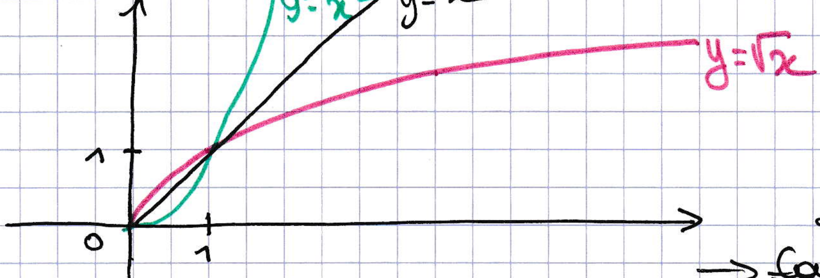


n pair

3) Fonction racine carrée

C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ (c'est à dire $x \geq 0$) par $\boxed{f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}}$

Par définition, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $\boxed{\sqrt{x} \geq 0}$



$$\boxed{y = \sqrt{x} \iff x = y^2}$$

C'est la fonction réciproque de la fonction carré.

→ Courbes symétriques par rapport à la 1ère bissectrice

4) Fonction exponentielle

Déf : La fonction exponentielle (de base e) exp est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(x) = e^x$, où e = le nombre d'EULER $\simeq 2,718$

Notation : $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$x \longmapsto \exp(x) = e^x$

Propriétés : • $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{e^x > 0}$

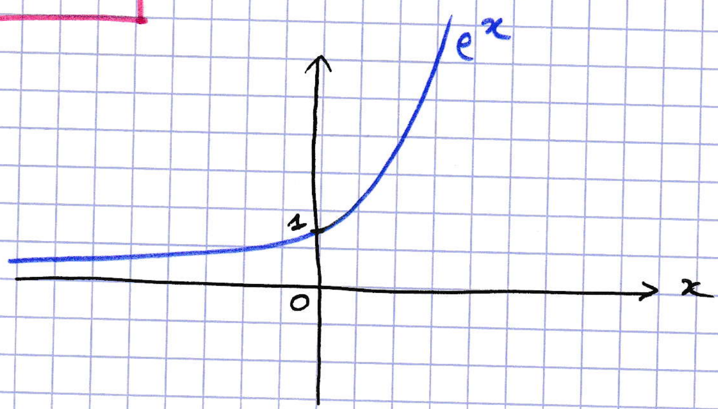
• $\boxed{e^0 = 1}$

Relations :

• $e^x e^{x'} = e^{x+x'}$
• $e^{-x} = 1/e^x$
• $\dfrac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'}$
• $(e^x)^{x'} = e^{xx'}$

⚠ Même opérations que sur les puissances. A connaître par cœur.

Représentation graphique :



↳ Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5) Fonction logarithme népérien

↳ C'est la fonction logarithme de base e. Elle prend son nom de John NEPER (1550.1617).

C'est la fonction qui, à tout x strictement positif, associe le réel $\ln x$.

Notation : $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln x$

C'est la RÉCIPROQUE de la fonction exp :

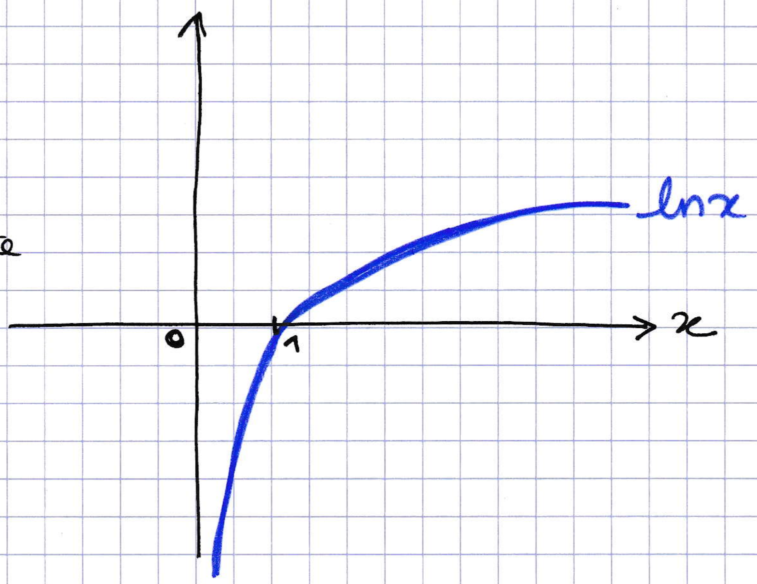
$$\boxed{\ln e^{x} = x \qquad \text{et} \qquad e^{\ln x} = x}$$

<u>Relations fonctionnelles</u> :

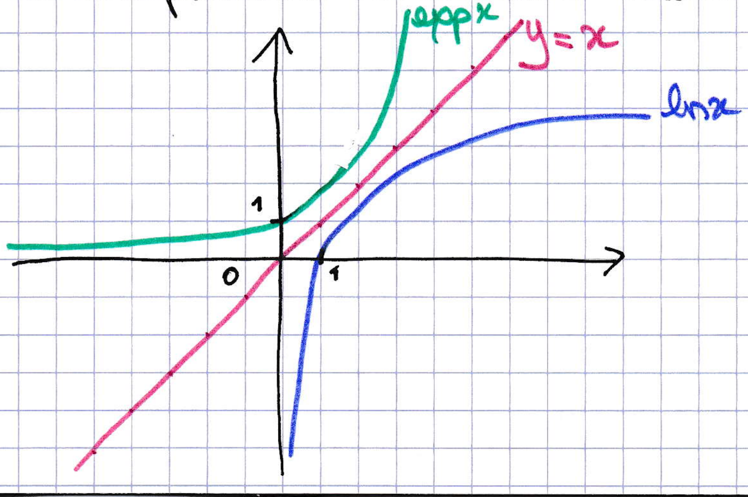
- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$
- $\ln xx' = \ln x + \ln x'$
- $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
- $\ln \frac{x}{x'} = \ln x - \ln x'$
- $\ln x^{n} = n \ln x$

<u>Représentation graphique</u> :

→ Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.



Cette courbe est symétrique à celle de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice (droite d'équation $y=x$).



Application : Résolution équations

- Equation du type $\boxed{e^x = a}$

$$e^x = a \iff \ln e^x = \ln a$$
$$\iff x = \ln a$$

- Equation du type $\boxed{\ln x = a}$

$$\ln x = a \iff e^{\ln x} = e^a$$
$$\iff x = e^a$$

- Equation du type $\boxed{a^x = b}$

$$a^x = b \iff \ln a^x = \ln b$$
$$\iff x \ln a = \ln b \qquad \text{car } \ln a^b = b \ln a$$
$$\iff x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

exemples :

- $e^x = 2 \iff \ln e^x = \ln 2$

$$\iff x = \ln 2 \approx 0{,}69$$

- $\ln x = 5 \iff e^{\ln x} = e^5$

$$\iff x = e^5$$

- $2^x = 32 \iff \ln 2^x = \ln 32$

$$\iff x \ln 2 = \ln 32$$
$$\iff x = \frac{\ln 32}{\ln 2} = 5$$

→ Dans ce chapitre, on retiendra surtout les encadrés mis en valeur (en rouge). Peu de questions sur les limites en BTS.

II – LIMITES – INTERPRETATION GEOMETRIQUE

→ Il s'agit de s'intéresser au comportement de fonctions lorsque la variable prend soit des « grandes » valeurs (positives ou négatives) soit des valeurs très proches de 0 ou d'un nombre réel fixé *a*.

A- Introduction

1) Limite finie d'une fonction en a

Si l'on prend des fonctions telles que $x \mapsto x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$; regardons les valeurs prises par ces fonctions lorsque *x* est proche de 0 :

$(x^n)^m = x^{n\times m}$

x	10	2	1	$10^{-1} = 0,1$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
x	10	2	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
x^2	100	4	1	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-12}	10^{-18}
x^3	1000	8	1	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-18}	10^{-27}
$10^{1/2} = \sqrt{x}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{2} \simeq 1,41$	1	$10^{-1/2}$	10^{-1}	$10^{-3/2}$	10^{-3}	$10^{-9/2}$

On voit (par ce tableau, ou même graphiquement) que les valeurs prises par la fonction sont très proches de 0.

⇒ La fonction *f* a pour limite 0 en 0. On note $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

On a :

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$
$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$
$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0$$
$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$$

On admet le théorème suivant :

Soit *f* une fonction polynôme, ou une fonction puissance, ou la fonction logarithme népérien ou exponentielle.
Soit *a* un réel $\in I$ sur lequel *f* est définie. Alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2) Limite infinie d'une fonction en a

- Exemple : soit f_1 la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f_1(x) = 1/x$.

Observons ce qu'il se passe lorsque x est de plus en plus proche de 0, tout en restant > 0 :

x	10	2	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
$x^{-1} =$ $1/x$	0,1	$\frac{1}{2} = 0,5$	1	10	10^2	10^3	10^6	10^9

$\Rightarrow$ La fonction f_1 a pour limite $+\infty$ en 0. On note $\lim\limits_{x \to 0^+} f_1(x) = +\infty$

Interprétation graphique :

Un point de la courbe est aussi proche que l'on veut de l'axe des ordonnées dès que son abscisse est assez petite. → L'axe des ordonnées est une **ASYMPTOTE VERTICALE** de la courbe représentative de f_1.

- Prenons maintenant la fonction f_2 la fonction définie sur $]-\infty ; 0[$ par $f_2(x) = 1/x$.

Observons ce qu'il se passe lorsque x est de plus en plus proche de 0, tout en restant < 0 :

x	- 10	- 2	- 1	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-6}	-10^{-9}
$1/x$	-0,1	-0,5	-1	-10	-10^2	-10^3	-10^6	-10^9

$\Rightarrow$ La fonction f_2 a pour limite $-\infty$ en 0. On note $\lim\limits_{x \to 0^-} f_2(x) = -\infty$

Interprétation graphique :

Un point de la courbe est aussi proche que l'on veut de l'axe des ordonnées dès que son abscisse est assez petite. → L'axe des ordonnées est une **ASYMPTOTE VERTICALE** de la courbe représentative de f_2.

Remarque : Une fonction f aura une limite en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

Ainsi, la fonction f, définie sur IR^* par $f(x) = 1/x$, n'a **pas de limite en 0 car** $\lim\limits_{x \to 0^-} 1/x \neq \lim\limits_{x \to 0^+} 1/x$

3) Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Complétons le tableau suivant :

x	1	2	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
x^2	1	4	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
x^3	1	8	1000	10^6	10^9	10^{18}	10^{27}	10^{36}
$\sqrt{x}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$	10	$10^{3/2}$	10^6	$10^{9/2}$	10^6

$\Rightarrow$ Ces fonctions ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Si on regarde ces fonctions sur $]-\infty\,;0[$, on a :

x	- 1	- 2	- 10	-10^2	-10^3	-10^6	-10^9	-10^{12}
x	-1	-2	-10	-10^2	-10^3	-10^6	-10^9	-10^{12}
x^2	1	4	100	10^4	10^6	10^{12}	10^{18}	10^{24}
x^3	-1	-8	-10^3	-10^6	-10^9	-10^{18}	-10^{27}	-10^{36}

On obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Théorème : Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \ si\ n\ est\ pair \\ -\infty \ si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

4) Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Reprenons la fonction f telle que $f(x) = 1/x$.

- Sur $]0 ; +\infty[$, on a :

x	1	2	10	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
$1/x$	1	1/2	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}

→ $\lim\limits_{x \to +\infty} 1/x = 0$

- Sur $]-\infty ; 0[$, on a :

x	- 1	- 2	- 10	- 10^2	- 10^3	- 10^6	- 10^9	- 10^{12}
$1/x$	-1	$-1/2$	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-6}	-10^{-9}	-10^{-12}

→ $\lim\limits_{x \to -\infty} 1/x = 0$

Interprétation graphique :

→ L'axe des abscisses est une **ASYMPTOTE HORIZONTALE** de la courbe représentative de f.

5) Remarques sur les limites

- Certaines fonctions n'ont pas de limite en en $+\infty$ ni en $-\infty$, comme par exemple les fonctions sinus et cosinus.

- $\lim\limits_{x \to \text{ce que l'on veut}} a = a$ pour tout a réel.

- Une fonction f aura une limite en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (a nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

6) Limites des fonctions logarithme et exponentielle

On a :

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

B. Énoncés usuels sur les limites

1. Opérations sur les limites

FI = Forme Indéterminée

Prenons :

- Deux fonctions *f* et *g* définies sur un même intervalle
- $\alpha = +\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel *a* (→la valeur de *x* vers laquelle on fait tendre les fonctions)
- *L* et *L'* = deux réels (les limites éventuelles des deux fonction).

a) Somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L			$+\infty$		$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+g(x)) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$

Ex. : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x}$? On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+\frac{1}{x} = +\infty$

b) Multiplication par un réel

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lambda > 0$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \lambda f(x) =$	λL	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lambda < 0$ $\lim\limits_{x\to\alpha} \lambda f(x) =$	λL	$-\infty$	$+\infty$

c) Produit de deux fonctions

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x) * g(x)) =$	LL'	∞	F.I.	∞

Attention !: Toujours penser à la règle des signes !

Ex. : $\lim\limits_{x\to+\infty} (-3x^2)(x^2+\frac{1}{x})$? On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2) = -\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\frac{1}{x}\right) = +\infty$ (voir a)

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(-3x^2)\left(x^2+\frac{1}{x}\right) = -\infty$

d) Inverse

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	$L\neq 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=$	$\dfrac{1}{L}$	*	0

* : **Théorème 1 :** Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ et si, au voisinage de α, on a $f(x)>0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.

Théorème 2 : Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ et si, au voisinage de α, on a $f(x)<0$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}$? on a $\lim\limits_{x\to 3^+} x-3=0$ avec $x-3>0$ car $x>3$

Ex. : $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1}{x-3}$? avec $x>3$? avec $x<3$?

Donc $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{1}{x-3}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3}$? on a $\lim\limits_{x\to 3^-} x-3=0$ avec $x-3<0$ car $x<3$

Donc $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3}=-\infty$

e) Quotient de deux fonctions

On essaie d'abord d'utiliser les formules du d) et du c)

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=$	L			0		∞		
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=$	L'	0	∞	0	∞	0	L'	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}=$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	F.I.	0	∞	∞	F.I.

2. Comparaison → peu utilisés

On admet les théorèmes suivants :

Théorème 1 : Si, pour tout x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Théorème 2 : Si, pour tout x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Théorème 3 : Si, pour tout x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, on a $|f(x) - L| \leq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Théorème 4 dit théorème « des GENDARMES » : Si, pour tout x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, on a $v(x)\geq f(x) \geq u(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

Théorème 5 (comparaison avec l'ordre): Si, pour tout x d'un intervalle $]A\ ;\ +\infty[$, on a $f(x) \leq v(x)$, et si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)=L'$, alors $L \leq L'$

3. Limite d'une fonction composée

Fonction composée : $f \circ g$
On a $f \circ g\,(x) = f\,(g(x))$

<u>**Théorème:**</u> Si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x \to \beta} f(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to \alpha} fog(x) = L$

C. Asymptotes

1. Asymptote horizontale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$
Alors la droite d'équation $\boldsymbol{y = L}$ est une **asymptote horizontale** de la représentation graphique de f.

2. Asymptote verticale

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$
Alors la droite d'équation $\boldsymbol{x = a}$ est une **asymptote verticale** de la représentation graphique de f.

III. DÉRIVATION

A - Nombre dérivé

1 - Rappel

Pente d'une droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$: $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

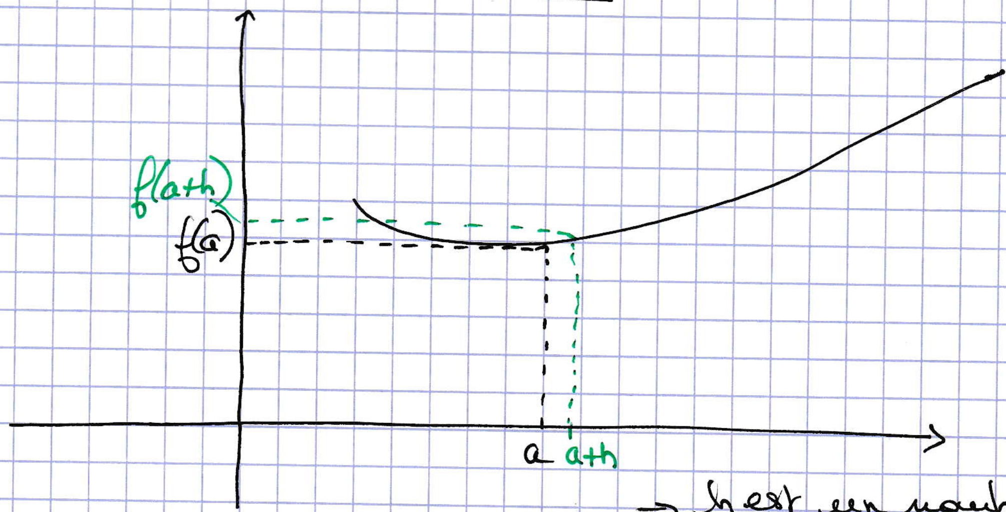
Rmq : on retrouve l'ordonnée à l'origine grâce aux coordonnées de A ou de B : $y_A = a x_A + b \Rightarrow b = y_A - a x_A$.

2 - Nombre dérivé

Idée : on cherche à approximer ce qui se passe autour d'un point d'abscisse a de la courbe représentative d'une f° f

→ on prend la tangente.

Autour de ce point d'abscisse a :



→ h est un nombre très proche de 0 → l'abscisse a+h est très proche de a.

Pente de la tangente au point a : $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Si h devient de + en + petit, on prend :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ que l'on note $f'(a)$.

$f'(a)$ est la PENTE de la tangente en a à la courbe.

On dit que c'est le NOMBRE DÉRIVÉ de f en a.

B. Dérivation sur un intervalle - Fonction dérivée

1- Définitions

- Si le nombre dérivé d'une fonction f existe au point a, on dit que f est DÉRIVABLE en a.

- Si une fonction f, définie sur un intervalle I, est dérivable en tout point de I, on dit que f est DÉRIVABLE sur I.

- La fonction qui, à tout x de I, associe l'unique nombre dérivé de f en x, s'appelle FONCTION DÉRIVÉE de f, et se note f'.

2. Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
ax	a
$ax+b$	a
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}
$1/x$	$-1/x^2$
$1/x^n = x^{-n}$	$-n/x^{n+1}$ ou $-nx^{-n-1}$
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	$1/2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x

3. Opérations sur les dérivées

Soient f et g 2 fonctions dérivables sur I.

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(kf)' = k.f'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{-f'}{f^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f^n)' = n f' f^{n-1}$$

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}$$

$$(e^f)' = f' \times e^f$$

⚠

C. Applications de la dérivée

1) Sens de variation d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et f' sa dérivée.

Théorèmes :

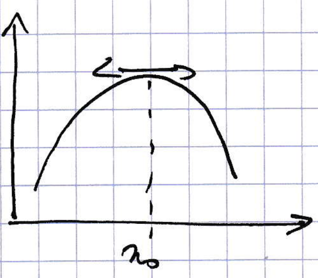
- Si f' est strictement positive sur I (càd $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$), alors f est strictement croissante sur I.
- Si f' est strictement négative sur I (càd $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$), alors f est strictement décroissante sur I.
- Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

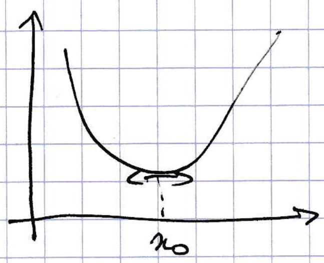
On peut résumer les variations d'une fonction sur son domaine de définition dans un TABLEAU de VARIATIONS :

x	... valeurs extrêmes de D_f ; Eventuellement valeurs qui annulent $f'(x)$
signe de $f'(x)$	+ si $f'(x) > 0$; − si $f'(x) < 0$; ou 0
variation de f	↗ en dessous de + ; ↘ en dessous de −

2) Extremum d'une fonction

Théorème : Si f est dérivable sur un intervalle $I = [a;b]$ et si f admet un extremum local en un point x_0 de $]a;b[$, alors $f'(x_0) = 0$

max : 

min : 

Le maximum/minimum est ATTEINT en x_0.

Il VAUT $f(x_0)$.

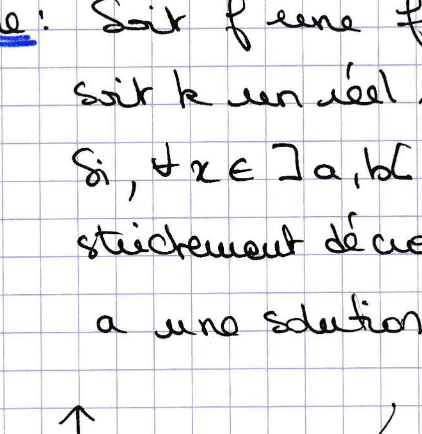
Détermination : lecture du tableau de variations

3) Résolution d'équations de la forme $f(x) = k$

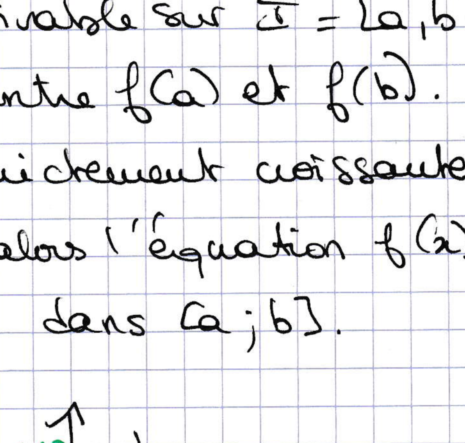
On les résout en général par lecture graphique mais on peut vous demander une preuve de l'EXISTENCE de la solution.

On utilise le théorème suivant :

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur $I = [a,b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si, $\forall x \in]a,b[$, f est strictement croissante ou strictement décroissante, alors l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a;b]$.



ou



IV - CALCUL INTÉGRAL

I – PRIMITIVES

A – Définition

Préambule : Soit les fonctions définies sur IR par $f(x) = 6x^2 - 8$ et $F(x) = 2x^3 - 8x + 5$
Pour tout x de IR, on a $F'(x) = f(x)$.

f est la dérivée de F. On dit que F est **UNE primitive** de f sur IR.

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle **PRIMITIVE** de f toute fonction dérivable sur I, notée F, telle que $F'(x) = f(x)$.

Théorème : toute fonction dérivable sur I admet des primitives sur I.

B – Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit F une primitive de f. Les primitives de f sont les fonctions définies sur I par $F(x) + c$, où c est une constante.

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Parmi les primitives de f définies sur I, il en existe UNE, et une seule, qui passe par un point particulier :

$$\exists!\, primitive\ F\ de\ f\ telle\ que\ F(a) = b\ pour\ a\ et\ b\ deux\ nombres\ fixés.$$

Exemple : $f(x) = 3x^2 - 3$. Cherchons s'il existe une fonction F parmi les primitives de f telle que $F(2) = 6$.
On a $F(x) = x^3 - 3x + c$
D'où $F(2) = 2^3 - 6 + c = 8 - 6 + c = 2 + c$
Donc => $c = 6 - 2 = 4$
⇨ $F(x) = x^3 - 3x + 4$ est la seule primitive qui vérifie cette condition.

C – Primitives usuelles

En règle générale, l'énoncé nous donne la fonction F et nous demande de montrer qu'elle est une primitive de la fonction f étudiée.
⇨ Il suffit donc de dériver F et de retrouver f pour montrer cela !!

Toutefois quelques cas particuliers peuvent être connus :

- La primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
- La primitive de e^{ax} est $\frac{e^{ax}}{a}$
- La primitive de e^{ax+b} est $\frac{e^{ax+b}}{a}$
- La primitive de $\frac{u'}{u}$ est lnu

II – DÉFINITION

A – Intégrale d'une fonction sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$.
Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.
On appelle **INTÉGRALE** de a à b (ou entre a et b, ou sur $[a, b]$), et on note comme ci-dessous, le nombre réel I tel que :

$$\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

Remarques :

- I ne dépend pas de la primitive choisie
  Ex. : si on prend G telle que $G(x) = F(x) + k$
  alors $I = G(b) - G(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$
- Cas particulier: si $a = b$, $I = 0$.

Exemples :

Calculer :

$$I = \int_0^1 (-x^2 + x + 1)dx$$

On a $F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

D'où $I = F(1) - F(0) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 - (0 + 0 + 0) = \frac{7}{6}$

$$J = \int_1^5 3dt = [3t]_1^5 = 3 * 5 - 3 * 1 = 12$$

B – Interprétation en termes d'aires, pour une fonction de signe constant

1) Fonction positive

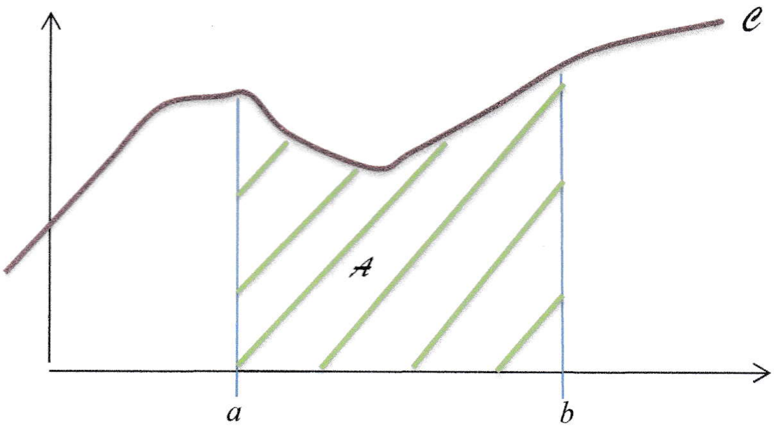
Définition : f positive sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f(x) \geq 0$.

Propriété : Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a, b]$, et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f sur $[a, b]$.

On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface délimitée par :

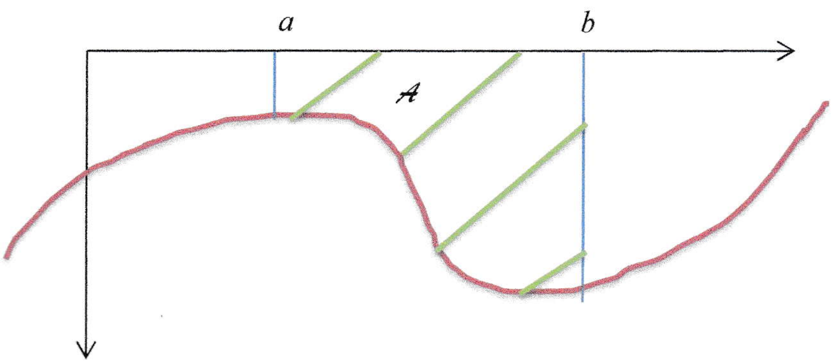
$$\begin{cases} * \; la\ droite\ d'\acute{e}quation\ x = a \\ * \; la\ droite\ d'\acute{e}quation\ x = b \\ * \; l'axe\ des\ abscisses\ d'\acute{e}quation\ y = 0 \\ * \; la\ courbe\ \mathrm{C}\ d'\acute{e}quation\ y = f(x) \end{cases}$$

Alors cette aire vaut $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$



Remarque : $\mathcal{A}$ est exprimée en unités d'aire (u.a., que l'on détermine en fonction du repère)

2) Fonction négative



$\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx$

C – Intégrale fonction de sa borne supérieure

Définition : $I = \int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$

⇨ C'est une fonction.

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit x un point donné de I. La fonction $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 au point a.

(Peu utilisé en SIO. Applications en probas)

III – PROPRIÉTÉS

(Seule la F- est importante en BTS SIO…) ⚠

A – Relation de Chasles

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit a, b, c trois réels de I. On a :

$$\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^c f(t)dt$$

Cas particulier : Si a = c on a $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = 0$; d'où : $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$

B – Linéarité

Théorème : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit a, b deux éléments de I. Soit α et β des nombres réels. On a :

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

On a donc en particulier : $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

Et, $\int_a^b \alpha f(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt$

C – Positivité de l'intégrale

Théorème : Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a,\ b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

D – Intégration d'une inégalité

Théorème : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,\ b]$.
Si, pour tout t de $[a,b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

➔ Ce théorème peut permettre de comparer des intégrales même si on ne sait pas les calculer, ou d'encadrer une inégalité.

E – Inégalité de la moyenne

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,\ b]$.
Si m et M sont deux nombres réels tels que $\forall t$ de $[a,b]$, $m \leq f(t) \leq M$ alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

F – Valeur Moyenne

Théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,\ b]$ et soit a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
On appelle **VALEUR MOYENNE** de f sur $[a,\ b]$ le nombre réel :

$$\boxed{V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt}$$