I - ~~MATRICES~~ CALCUL MATRICIEL

Définition : Une matrice est un tableau de nombres.

Dans une matrice A, on note A_{ij} le nombre situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$A_{13} = 3 \qquad A_{24} = 8 \qquad A_{32} = 10$

$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 1 colonne

$\rightarrow$ c'est une matrice colonne = vecteur colonne

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice à 1 ligne et 4 colonnes $\rightarrow$ c'est une matrice ligne = vecteur ligne

$D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est une matrice à 3 lignes et 3 colonnes $\Rightarrow$ c'est une matrice carrée

Déf (hors programme) : Pour désigner la "taille" d'une matrice, on parle de son FORMAT.

$$\boxed{\text{Format} = (\text{nombre de lignes}, \text{nombre de colonnes})}$$

ex : Dans l'exemple précédent,

A est de format $(3,4)$

B est de format $(3,1)$

C est de format $(1,4)$

D est de format $(3,3)$ = d'ordre 3.

—

Plus généralement, si A est une matrice à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

→ On peut écrire, symboliquement, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$

↳ a_{ij} est le terme général de la matrice

II - CALCUL MATRICIEL ÉLÉMENTAIRE

A - Egalité de deux matrices

Def : Deux matrices sont égales ssi ces matrices sont de même format et si leurs coefficients de mêmes indices sont égaux 2 à 2.

$A = B$ ssi $a_{ij} = b_{ij}$ $\forall i \in \{1, \dots n\}$
$\forall j \in \{1, \dots p\}$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 2+3 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

B - Addition

1) Définition

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices à n lignes et p colonnes.
La matrice somme de A et B est la matrice $A + B = (c_{ij})$ à n lignes et p colonnes, telles que, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ et $\forall j \in \{1, \dots p\}$, on a

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$$

→ ⚠ A et B doivent être de même format

ex :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$-A \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

2) Propriétés (admises)

Soit A, B et C des matrices de format (n, p).

- $A + B = B + A$ (commutativité)
- $(A+B)+C = A + (B+C) = A+B+C$ (associativité)
- $A + 0 = A$ où 0 est une matrice NULLE (dont tous les coefs sont nuls)
- $A + (-A) = 0$ où $-A$ est la matrice opposée de A
  $-A = (-a_{ij})$

→ On définit la soustraction de 2 matrices par $A - B = A + (-B)$ où $-B$ est la matrice opposée de B.

ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

C - Multiplication d'une matrice par un nombre réel α