BTS SIO

Mathématiques pour l'informatique

Épreuve UF2 - Mathématiques approfondies

Annales 2013 - 2019

2019 Métropole

Exercice 1 (10 points)

Une entreprise produit des batteries de téléphone portable. Le service qualité a effectué, au cours de 18 mois consécutifs, un relevé statistique portant sur la longévité de ces batteries. Les résultats sont présentés dans le tableau suivant.

Temps t_i écoulé en mois depuis la mise en service	3	6	9	12	18
Pourcentage p_i de batteries fonctionnant correctement après le temps t_i	83	69	57	47	32

Par exemple, la première colonne de nombres signifie qu'après le 3^e^ mois, 83 % des batteries fonctionnent correctement.

Les trois parties A, B *et* C *peuvent être traitées de manière indépendante.*

Partie A – *Dans cette partie, les résultats seront arrondis au millième*

1. On prélève au hasard une batterie dans le stock de l'entreprise. On admet que toutes les batteries ont la même probabilité d'être prélevées.
On note :
- A l'événement « *la batterie fonctionne correctement après le 9^e^ mois* » ;
- B l'événement « *la batterie ne fonctionne plus correctement après le 12^e^ mois* ».

a) Déterminer la probabilité de l'événement A, puis celle de l'événement B.

b) Déterminer la probabilité de l'événement : « la batterie fonctionne correctement après 9^e^ mois et elle ne fonctionne plus correctement après le 12^e^ mois ».

c) Calculer la probabilité que la batterie ne fonctionne plus correctement après le 12^e^ mois sachant qu'elle fonctionne correctement après le 9^e^ mois.

2. On prélève aléatoirement avec remise 8 batteries dans le stock. On considère que les batteries fonctionnent de manière indépendante.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise, dans ces 8 batteries prélevées, le nombre de celles qui fonctionnent correctement après le 9^e^ mois.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Justifier la réponse et donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer la probabilité de l'événement : « parmi les 8 batteries prélevées, 3 batteries ou moins fonctionnent correctement après le 9^e^ mois ».

3. On prélève aléatoirement avec remise 50 batteries dans le stock. On note Y la variable aléatoire qui comptabilise, parmi les 50 batteries prélevées, le nombre de celles qui fonctionnent correctement après le 6^e^ mois.
On admet que la loi de la variable Y peut être approchée par une loi normale de moyenne 35 et d'écart-type 3,2.

Déterminer $P(Y \geq 30)$.

Partie B

Cette partie étudie le lien de dépendance entre le temps t_i écoulé en mois et le pourcentage p_i tels qu'ils sont définis dans le préambule de cet exercice. Pour cela, on pose $z_i = \ln(p_i)$.

1. Recopier puis compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs au centième.

Temps t_i écoulé en mois depuis la mise en service	3	6	9	12	18
Pourcentage p_i de batteries encore en fonction après le temps t_i	83	69	57	47	32
$z_i = \ln(p_i)$	4,42				

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de z en t par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième.
Préciser une valeur du coefficient de corrélation linéaire.

3. En déduire une expression de la forme $p = c\,\mathrm{e}^{dt}$, où c et d sont des constantes que l'on déterminera, en arrondissant les valeurs au centième.

Partie C

Le temps de bon fonctionnement d'une batterie, exprimé en mois, est modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0625$.

1. Quelle est la probabilité que le temps de bon fonctionnement de la batterie dépasse 24 mois ? On arrondira le résultat au millième.

2. Déterminer le temps moyen de bon fonctionnement de la batterie.

3. Déterminer le réel t tel que $P(T \leq t) = 0,5$. On donnera la valeur de t arrondie à l'entier.
Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 (10 points)

Dans tout l'exercice, on pourra se référer aux résultats obtenus avec un logiciel de calcul formel. Ces résultats sont reproduits en annexe 1, page 4/5.

Partie A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;18]$ par : $f(x) = (x+5)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, dans lequel $f(x)$ est arrondi au dixième.

x	0	6	12	18
$f(x)$	5			

2. Déterminer une expression de $f'(x)$ (on pourra utiliser des résultats obtenus par calcul formel dans l'annexe 1, page 4/5).

3. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$.

4. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;18]$. (On pourra utiliser des résultats obtenus par calcul formel dans l'annexe 1, page 4/5).

5. **En annexe 2, à rendre avec la copie**, la courbe représentative de la fonction f a été construite dans un repère orthogonal.

   a) Hachurer, sur ce graphique, le domaine dont l'aire s'exprime, en unité d'aire, par l'intégrale : $I = \int_2^{12} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) Déterminer la valeur exacte de l'intégrale I, puis sa valeur arrondie au dixième.

   c) En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;12]$. Arrondir cette valeur au dixième.

Partie B - Interprétations des résultats de la partie A

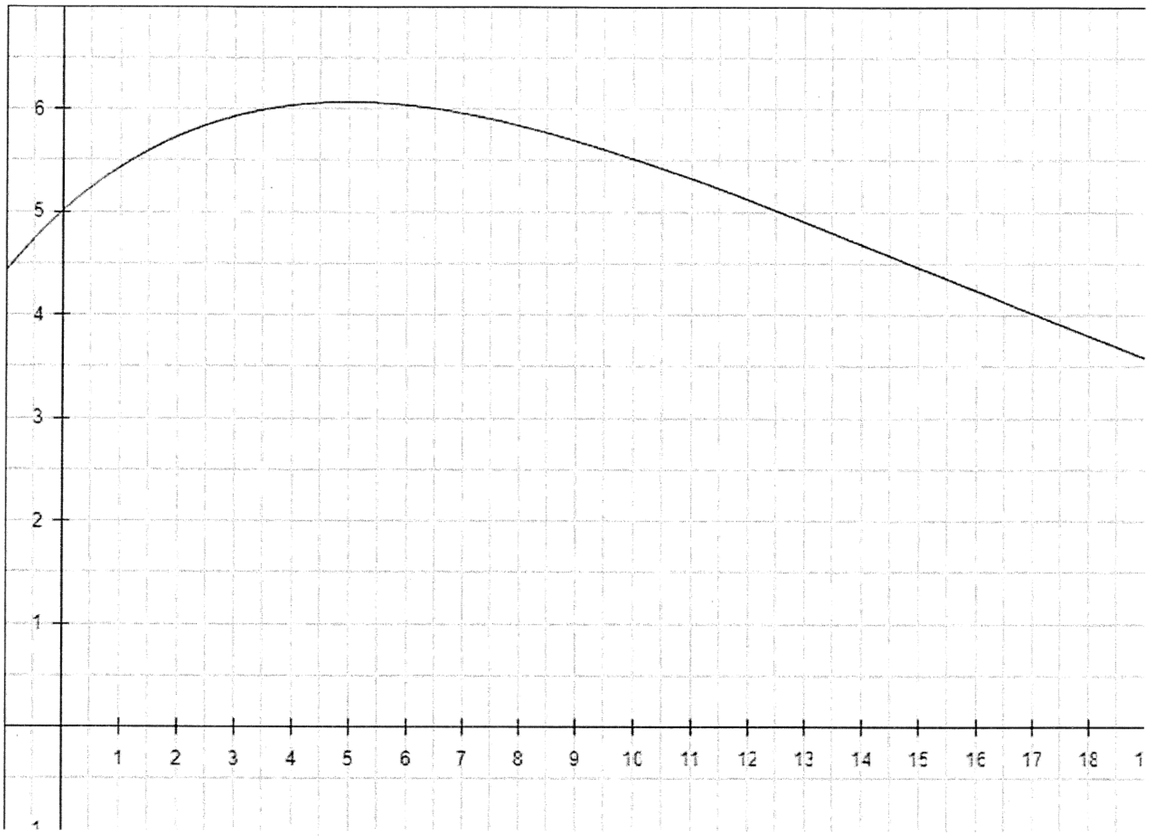
Une entreprise vend des batteries de téléphone portable depuis le mois de décembre 2018.
On note x le rang du mois écoulé depuis le mois de décembre 2018.
Ainsi $x = 0$ pour le mois de décembre 2018, $x = 1$ pour le mois de janvier 2019, etc.
On admet alors que $f(x)$ modélise, en milliers d'unité, le nombre de batteries vendues par l'entreprise durant le mois x.

1. Donner une estimation du nombre de batteries qui seront vendues lors du mois de décembre 2019.
2. Déterminer le mois durant lequel le nombre de batteries vendues sera maximal.
3. Donner une estimation du nombre mensuel moyen de batteries qui seront vendues, entre le mois de février 2019 et le mois de décembre 2019, ces deux mois étant compris.

ANNEXE 1

	Résultats obtenus avec un logiciel de calcul formel
1	Dérivée $[x+5]$ $\rightarrow 1$
2	Dérivée $[0.5*x\text{^}2+5*x]$ $\rightarrow x+5$
3	Dérivée $[\exp(-0.1*x)]$ $\rightarrow -0.1*\exp(-0.1*x)$
4	Dérivée $[-10*\exp(-0.1*x)]$ $\rightarrow \exp(-0.1*x)$
5	Dérivée $[(x+5)*\exp(-0.1*x)]$ $\rightarrow (0.5-0.1*x)*\exp(-0.1*x)$
6	Dérivée $[(-150-10*x)*\exp(-0.1*x)]$ $\rightarrow (x+5)*\exp(-0.1*x)$

ANNEXE 2
À RENDRE AVEC LA COPIE



2019 Nouvelle Calédonie

Exercice 1 **10 points**

Une usine produit en série des verres optiques photochromiques. La production comporte 2 phases : la fabrication du verre puis l'application de la couche photosensible.
Les parties A et B sont indépendantes. Elles envisagent deux aspects de cette production.

Partie A : étude des défauts des verres

Une étude statistique indique que la première phase de fabrication occasionne un défaut a dans 10 % des cas et la seconde phase un défaut b dans 8 % des cas.

On prélève au hasard un verre dans la production. On note :

A, l'événement : « le verre présente le défaut a »,

B, l'événement : « le verre présente le défaut b »,

C, l'événement : « le verre présente le défaut a et le défaut b »,

D, l'événement : « le verre présente le défaut a ou le défaut b »,

E, l'événement : « le verre ne présente qu'un seul des deux défauts ».

1. On admet que la probabilité de l'événement C est égale à : $P(C) = 0{,}006$.

   les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

2. a. Justifier que $P(D) = 0{,}174$.

   b. Calculer $P(E)$.

   c. Sachant que le verre présente au moins un défaut, calculer la probabilité qu'il ait un défaut de type a.

3. On prélève au hasard successivement n verres optiques dans le stock de l'entreprise. On suppose que le nombre de verres fabriqués est assez grand pour considérer les tirages indépendants et équiprobables. On admet que la probabilité qu'un verre, pris au hasard dans le stock, ne présente aucun défaut est égale à 0,826.

   Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque prélèvement, de n verres, le nombre de verres ne présentant aucun défaut. Justifier que la loi suivie par la variable aléatoire X est binomiale.

4. Dans cette question, on choisit $n = 10$.

   a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   b. Déterminer la probabilité de l'événement F : « au moins 9 verres prélevés dans le stock n'ont aucun défaut ».

   c. Déterminer la probabilité qu'aucun verre du lot ne présente de défaut.

5. Dans cette question, on choisit $n = 100$.

   a. Calculer l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire X. Arrondir à 0,001 près.

   b. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire X par la loi normale de la variable aléatoire Y d'espérance $m = 82{,}6$ et d'écart type $\sigma = 3{,}8$.

i. Calculer la probabilité que dans le lot de $n = 100$ verres prélevés, il y ait entre 9 et 12 verres défectueux. Autrement dit, calculer $P(87{,}5 \leqslant Y \leqslant 91{,}5)$.

ii. Calculer la probabilité que dans ce lot de 100 verres, il y ait au moins 11 verres défectueux. Autrement dit, calculer $P(Y \leqslant 89{,}5)$.

Partie B : étude du coefficient de transmission des verres

Les verres photochromiques s'assombrissent ou s'éclaircissent en fonction de la luminosité.

Dans cette partie, on étudie le coefficient de la transmission d'un verre minéral photochromique en fonction de la longueur d'onde de la lumière lors de la phase de transition entre l'état sombre et l'état clair.

Suite à une étude expérimentale, on a obtenu le tableau de valeurs ci-dessous, dans lequel x correspond à la longueur d'onde en nanomètre (nù) et y au coefficient de transmission, exprimé en pourcentage.

Longueur d'onde en nanomètre (en nm)	400	410	420	430
Coefficient de transmission (en %)	4	25	55	85

1. Donner une équation de la droite d'ajustement de y en x par la méthode des moindre carrés.

2. Estimer alors le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm (arrondir à l'unité).

Exercice 2 **10 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{85}{1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}}$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant, dans lequel $f(x)$ sera arrondi au centième :

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16
$f(x)$								82,42	82,96	83,39

2. On rappelle que $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{-X} = 0$.

   a. Déterminer la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$.

   b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. On appelle U la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ qui, à tout x de $[0\,;\,+\infty[$, associe $U(x) = 1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}$.

   a. Montrer que $U'(x) = -0{,}216\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}$

   b. En déduire que $f'(x) = \dfrac{18{,}36\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}}{\left(1+0{,}9\,\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)^2}$.

4. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   b. Construire sur **une feuille de papier millimétré, à rendre avec la copie**, la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$. On utilisera 1 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

5. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir une primitive F de la fonction f, définie par l'expression

$$F(x) = 354\ln\left(0{,}9+\mathrm{e}^{0{,}24x}\right).$$

   a. Calculer une valeur approchée de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{16} f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'unité près. Hachurer l'aire correspondante sur le graphique.

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 16]$, arrondie à l'unité.

Partie B

On s'intéresse maintenant au taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français.
À partir d'une étude menée par l'INSEE sur ce sujet entre les années 2004 et 2016 on choisit de modéliser ce taux exprimé en pourcentage par l'expression $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A de l'exercice et x est le temps exprimé en année à partir du 1er janvier 2004.
Ainsi, par exemple, $f(1)$ était le taux d'équipement au 1er janvier 2005.

1. Quel serait le taux d'équipement en micro-ordinateur exprimé en pourcentage prévu au 1er janvier 2020 ? Arrondir à l'unité.
2. Donner en pourcentage une estimation, à long terme, du taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français.
3. Donner en pourcentage une estimation du taux moyen d'équipement en micro-ordinateur des ménages français pour la période allant du 1er janvier 2004 au 1er janvier 2020 ; arrondir à l'unité.

2019 Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Une entreprise qui assemble des ordinateurs achète et stocke un certain type de composants informatiques. Le but de cet exercice est d'étudier certains aspects liés à ces composants.
Les parties A, B, C et D peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

L'entreprise achète les composants auprès de deux fournisseurs nommés A et B. Le fournisseur A lui procure 60 % de ses composants, le reste provient du fournisseur B.
Une étude statistique révèle que 0,5 % des composants provenant du fournisseur A sont défectueux, et que 1 % de ceux provenant du fournisseur B le sont également.
On prélève au hasard un composant dans le stock de l'entreprise.
On note A l'évènement « le composant provient du fournisseur A » et D l'évènement « le composant est défectueux ».

1. Traduire les données de l'énoncé dans un arbre de probabilités à l'aide des évènements A et D.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Sachant que le composant prélevé est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur B ?

Partie B

Dans cette partie, on admet que 0,7 % des composants du stock de l'entreprise sont défectueux.
Un technicien prélève au hasard 50 composants dans ce stock pour réaliser des assemblages. On considère que le stock est assez important pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement de 50 composants à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, parmi les 50 composants prélevés, comptabilise le nombre de composants défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Donner ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que le prélèvement ne comporte aucun composant défectueux.
3. Calculer la probabilité que le prélèvement comporte au plus un composant défectueux.

Partie C

Pour un certain type d'assemblage, le besoin journalier d'un technicien de l'entreprise, en nombre de composants, peut être modélisé par une variable aléatoire Y qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 100$ et $\sigma = 10$.

1. Quelle est la probabilité qu'un jour donné le technicien ait besoin de plus de 110 composants?
2. Au début d'une journée, le technicien constate qu'il n'y a plus que 90 composants en stock.
   Quelle est la probabilité que, ce jour-là, il ne puisse pas finir son travail?

Partie D

La durée de vie, en mois, d'un composant, peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Exprimer en fonction de λ la probabilité $P(T \geqslant t)$.
2. Sachant que $P(T > 24) = 0,698$, calculer λ en arrondissant la valeur au millième.
3. Dans cette question on prendra $\lambda = 0,015$.
   a. Déterminer l'espérance mathématique de la variable T, arrondie à l'unité.
   b. Calculer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 3 ans.

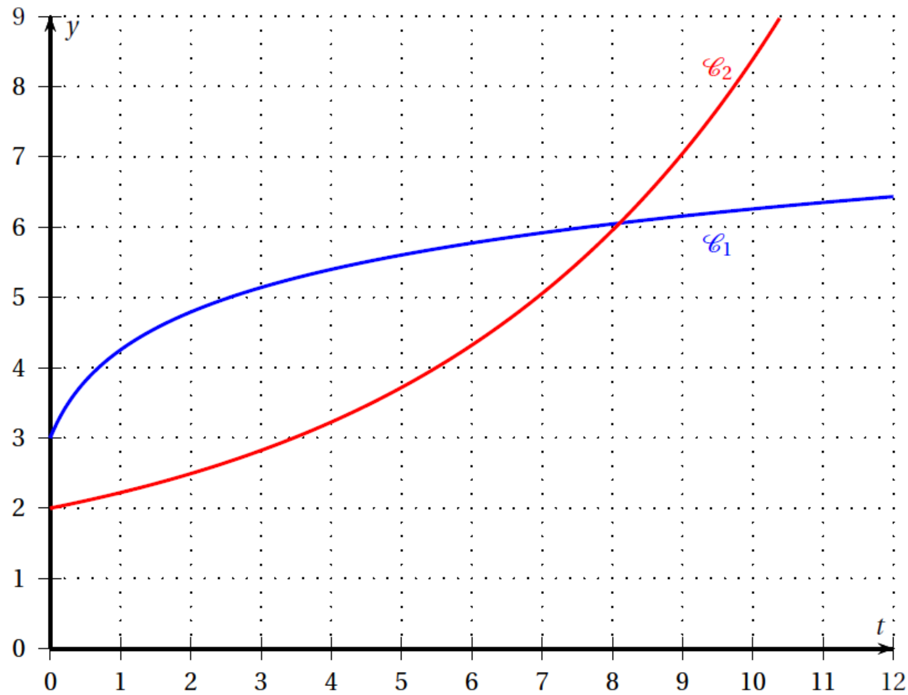
Exercice 2 **10 points**

Une entreprise vend en ligne deux types de matériel informatique, nommés A et B, pendant plusieurs années. On considère qu'une personne est un client si elle a acheté au moins une fois l'un des types de matériel au cours de l'année écoulée.
En étudiant le fichier de l'entreprise, en fonction du temps à partir du 1er janvier 2015, on modélise le nombre de clients pour le type A par une fonction f et celui des clients pour le type B par une autre fonction g. On suppose que ce modèle reste valide pendant 12 ans, jusqu'au 31 décembre 2026.

On exprime la variable t en année à partir du 1er janvier 2015, $f(t)$ et $g(t)$ en milliers de clients.
Les fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[0; 12]$ par les expressions :

$$f(t) = \ln(2,5t+1)+3 \quad \text{et} \quad g(t) = \mathrm{e}^{0,2t}+1.$$

Leurs représentations graphiques dans un repère orthogonal sont données ci-après.



Partie A

1. Tableau de valeurs et reconnaissance des courbes

   a. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant au centième.

t	0	2	5	6	7	8	12
$f(t)$							
$g(t)$							

   b. Associer chacune des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ aux deux fonctions f et g. Justifier la réponse.

2. Lectures graphiques Avec la précision permise par la lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

   a. Soit α la solution positive de l'équation $f(t) = g(t)$.
   Donner une valeur approchée à l'unité de α. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(t) \geqslant g(t)$ dans l'intervalle $[0\,;\,12]$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   c. À l'aide du graphique, estimer la valeur de t pour laquelle la différence $f(t)-g(t)$ est maximale.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   d. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur du nombre α défini en **2. a.**, en arrondissant cette valeur au centième.

Partie B

Le but de cette partie est de comparer les nombres moyens annuels de clients pour chacun des deux types de matériels, entre le 1er janvier 2015 et le 31 décembre 2026.

1. Cas du matériel A

   a. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu pour primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ la fonction F définie pour tout réel t de cet intervalle par :

$$F(t) = 2t + 0,4\ln(t + 0,4) + t\ln(2,5t + 1).$$

   En déduire la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   b. Calculer la valeur moyenne, arrondie au dixième, de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Cas du matériel B

   a. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,12]$ par $h(t) = 5\mathrm{e}^{0,2t}$. Calculer $h'(t)$.

   b. En déduire une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

   c. Démontrer que la valeur arrondie au dixième de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{12} g(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à 62,1.

   d. En déduire une valeur moyenne approchée de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,12]$.

   .

3. Comparaison

   Entre le 1er janvier 2015 et le 31 décembre 2026, pour lequel des deux types de matériel le nombre moyen annuel de clients sera-t-il le plus élevé ?

   Quel est ce nombre, arrondi à l'unité ?

2018 Métropole
Exercice 1 (10 points)

Partie A

Un grand fabricant d'ordinateurs portables analyse le nombre de commandes mensuelles d'un de ses modèles au cours de certains mois, en 2017. Les résultats sont donnés dans le tableau ci-après.

Mois (en 2017)	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août
x_i : rang du mois	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i : nombre de commandes	4650	4400	4150	3850	3450	3200	2950	2600

Le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) ayant un aspect rectiligne, on décide de procéder à un ajustement affine de ce nuage.

1. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x, sous la forme $y = ax + b$. Les coefficients a et b seront arrondis au dixième.
2. a) Déterminer, à l'aide de l'équation de la droite de régression, une estimation du nombre de commandes de ce modèle d'ordinateur pour le mois de novembre 2017.
   b) Expliquer pourquoi cette droite de régression ne peut servir de modèle que sur un intervalle de temps limité.

Partie B

Le fabricant commercialise un autre modèle d'ordinateur portable, avec lequel certains appareils présentent parfois un défaut d'alimentation.

Les systèmes d'alimentation utilisés proviennent de deux fournisseurs différents, notés A et B ; 60 % d'entre eux proviennent du fournisseur A, les autres du fournisseur B.

Le fabricant constate que 2 % des systèmes d'alimentation provenant du fournisseur A et 3 % de ceux provenant du fournisseur B présentent un défaut.

On prélève au hasard un ordinateur portable dans le stock du fabricant. On considère les événements suivants :

A : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur A » ;
B : « l'ordinateur prélevé a une alimentation provenant du fournisseur B » ; ainsi $B = \overline{A}$;
D : « l'ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation ».

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé, à l'aide des événements A, B, D et $\overline{D}$.
2. Calculer la probabilité de l'événement $A \cap D$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Prouver que la probabilité que l'ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation est égale à 0,024.
4. Un ordinateur portable prélevé présente un défaut d'alimentation. Calculer la probabilité qu'il provienne du fournisseur B.

Partie C

Dans cette partie, les probabilités seront arrondies au millième, si besoin.

On admet désormais que la probabilité qu'un ordinateur portable prélevé au hasard dans le stock présente un défaut d'alimentation est égale à 0,024.

1. On prélève au hasard 20 ordinateurs portables dans le stock pour en vérifier le bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui, parmi les 20 ordinateurs prélevés, dénombre ceux qui présentent un défaut d'alimentation.

- **a)** Justifier le fait que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
- **b)** Calculer la probabilité qu'aucun ordinateur prélevé ne présente un défaut d'alimentation.
- **c)** En déduire la probabilité qu'au moins un ordinateur prélevé présente un défaut d'alimentation.

2. On tire cette fois-ci au hasard avec remise 1000 ordinateurs portables dans le stock.
La variable aléatoire qui, parmi les 1000 ordinateurs tirés, dénombre ceux présentant un défaut d'alimentation, suit une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}024$.
On admet que la loi de cette variable aléatoire peut être approchée par celle d'une variable Y, qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 24$ et d'écart-type $\sigma = 4{,}84$.

- **a)** Justifier les paramètres de la variable aléatoire Y.
- **b)** Déterminer la probabilité que, parmi les 1000 ordinateurs prélevés, il y ait au moins 15 ordinateurs présentant un défaut d'alimentation, en calculant la probabilité $P(Y \geq 14{,}5)$.

Exercice 2 (10 points)

Un fabricant d'ordinateurs possède une unité de production qui fabrique chaque jour entre 400 et 2000 composants identiques. On admet que lorsque x centaines de composants sont fabriquées, avec $4 \leq x \leq 20$, le bénéfice correspondant, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [4 ; 20] par :

$$f(x) = -2x + 3 + 24\ln(2x).$$

Partie A - Étude de la fonction f

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 20].

1. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression suivante :

$$f'(x) = \frac{24-2x}{x}.$$

Démontrer ce résultat en détaillant le calcul.

2. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [4 ; 20], puis dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

3. a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième :

x	4	5	6	8	10	12	14	18	20
$f(x)$	44,9					55,3			

b) Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal.
En abscisses : commencer la graduation à 4 et prendre 1 cm pour une unité.
En ordonnées : commencer la graduation à 40 et prendre 1 cm pour une unité.

4. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 53$ possède deux solutions que l'on notera α et β, avec :

$$\alpha \in [4 ; 12] \text{ et } \beta \in [12 ; 20].$$

b) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée au centième de α et β.

Partie B – Applications

1. Quel est le bénéfice réalisé pour une production de 500 composants ? Arrondir à l'euro.
2. Déterminer la quantité de composants à fabriquer pour que le bénéfice soit maximal. Déterminer ce bénéfice maximal, en arrondissant le résultat à l'euro.
3. Déterminer les quantités de composants à fabriquer, à l'unité près, afin que le bénéfice soit supérieur ou égal à 53 000 euros.

2018 Nouvelle Calédonie

Exercice 1 (10 points)

L'exercice est relatif à une entreprise qui assemble des ordinateurs et qui, de ce fait, possède un stock important de barrettes mémoire.

Les parties A et B sont indépendantes.
Les résultats seront arrondis au millième, sauf indication contraire.

Partie A

Les barrettes mémoire proviennent de trois fournisseurs A, B, C.
60 % d'entre elles proviennent du fournisseur A, 20 % du fournisseur B et 20 % du fournisseur C.
Certaines barrettes mémoire présentent un défaut ; une étude statistique a révélé que ce défaut est présent dans 1 % des barrettes mémoire provenant du fournisseur A, dans 1,5 % de celles provenant du fournisseur B et dans 2 % de celles provenant du fournisseur C.

On prélève au hasard une barrette mémoire dans le stock. On considère les événements suivants :

A : « la barrette mémoire prélevée provient du fournisseur A » ;
B : « la barrette mémoire prélevée provient du fournisseur B » ;
C : « la barrette mémoire prélevée provient du fournisseur C » ;

D : « la barrette mémoire prélevée présente un défaut », $\overline{D}$ l'événement contraire de D.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.
2. Calculer les probabilités des événements $A \cap D$ et $B \cap D$.
3. Calculer la probabilité que la barrette mémoire prélevée provienne du fournisseur C et présente un défaut.
4. Montrer que la probabilité que la barrette mémoire prélevée présente un défaut est égale à 0,013.
5. Une barrette mémoire prélevée au hasard présente un défaut.
   Calculer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur C.

Partie B

1. On prélève au hasard 80 barrettes mémoire dans le stock pour vérifier leur bon fonctionnement.
   On admet que la probabilité qu'une barrette mémoire prélevée au hasard dans le stock présente un défaut est égale à 0,013. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage aléatoire avec remise de 80 barrettes mémoire.
   On note X la variable aléatoire qui, parmi les 80 barrettes mémoire prélevées, donne le nombre de barrettes mémoire défectueuses.

   a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   b) Calculer la probabilité qu'aucune barrette mémoire ne présente un défaut.
   c) En déduire la probabilité qu'au moins une barrette mémoire présente un défaut.
   d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter ce résultat.

2. On admet que la loi de la variable X peut être approchée par celle d'une variable Y, qui suit la loi de Poisson de paramètre 1,04.

   a) Justifier la valeur du paramètre de cette loi.

b) En utilisant la loi de la variable Y, déterminer la probabilité qu'un prélèvement aléatoire de 80 barrettes mémoire dans le stock contienne au maximum 4 barrettes mémoire défectueuses.

3. Dans cette question, on prélève au hasard 1000 barrettes mémoire dans le stock. À nouveau, on suppose le stock suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à 1000 tirages aléatoires avec remise.
On modélise alors le nombre de barrettes mémoire défectueuses dans ce prélèvement par une variable aléatoire Z qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 13$ et d'écart-type $\sigma = 3,58$ (valeurs arrondies au centième).

a) Justifier la valeur des paramètres de cette loi.

b) Déterminer la probabilité que, dans un prélèvement aléatoire de 1000 barrettes mémoire, il y ait au moins 17 barrettes mémoire présentant un défaut, en calculant $P(Z \geq 16,5)$.

Exercice 2 (10 points)

Une entreprise assemble un nouveau modèle d'ordinateur, dont le coût unitaire est de 560 euros.
Le responsable du marketing souhaite réaliser un bénéfice maximal avec sa vente, en déterminant le prix de vente unitaire adéquat, dans un certain intervalle de prix envisageable : entre 500 euros et 1600 euros par ordinateur.

Pour un prix de vente unitaire x, exprimé en centaines d'euro, une étude de marché a permis de modéliser le nombre d'acheteurs par l'expression $300\mathrm{e}^{-0,3x}$.

Partie A - Étude d'une fonction b

On considère les fonctions f, g, b, définies pour tout nombre x de l'intervalle [5 ; 16] par :

$$f(x) = 300x\mathrm{e}^{-0,3x}, \quad g(x) = 1680\mathrm{e}^{-0,3x} \quad \text{et} \quad b(x) = f(x) - g(x).$$

1. Montrer que, pour tout nombre x de l'intervalle [5 ; 16], on a $b(x) = (300x - 1680)\mathrm{e}^{-0,3x}$.

2. Un logiciel de calcul formel donne $b'(x) = 6 \times (134 - 15x)\mathrm{e}^{-0,3x}$. Démontrer ce résultat.

3. Étudier le signe de $b'(x)$ pour tout x de l'intervalle [5 ; 16], puis dresser le tableau de variation de la fonction b sur cet intervalle.

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les valeurs au centième.

x	5	6	7	8	$\frac{134}{15}$	10	12	14	16
$b(x)$									

5. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la représentation graphique de la fonction b dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour 1 unité en abscisses, en commençant par la valeur 5, et 1 cm pour 10 unités en ordonnées.

Partie B – Applications

On rappelle que le bénéfice réalisé dans la vente d'un produit est égal à la différence entre le chiffre d'affaire réalisé à l'issue de cette vente et le coût de production de ce produit.

1. Que représentent, dans le contexte de l'exercice, les expressions $f(x)$, $g(x)$ et $b(x)$ définies dans la partie A, en centaines d'euro ?

2. À quel prix, à l'euro près, le chef du marketing doit-il vendre les ordinateurs pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est, à l'euro près, ce bénéfice maximal ?

3. En utilisant la représentation graphique de la question **A-5.**, déterminer les prix de vente minimum et maximum à proposer, à la dizaine d'euro près, pour que le bénéfice soit au moins égal à 6 000 euros. On indiquera sur le graphique les pointillés nécessaires à la lecture.

2018 Polynésie

Exercice 1 (10 points)

On installe un nouveau logiciel dans une entreprise. Un quart du personnel suit un stage de formation à son usage. Ainsi, la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans l'entreprise ait suivi le stage vaut : $p = 0,25$.

On choisit au hasard n personnes dans l'entreprise. On suppose l'effectif suffisamment important pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

1. Dans cette question, on choisit au hasard 10 personnes. Ainsi, $n = 10$.

On note X la variable aléatoire qui, parmi les 10 personnes choisies, comptabilise les personnes ayant suivi le stage.

a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale, puis donner ses paramètres.

b) Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants, en arrondissant au centième :

A : « parmi les 10 personnes choisies, 3 personnes exactement ont suivi le stage » ;
B : « parmi les 10 personnes choisies, au moins une personne a suivi le stage ».

2. Dans cette question on prend $n = 600$.

On note Y la variable aléatoire qui, parmi 600 personnes choisies, associe le nombre de personnes ayant suivi le stage.

On admet que la variable Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 600$ et $p = 0,25$.

a) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y. En donner une interprétation.

b) Déterminer l'écart type de la variable aléatoire Y. Arrondir le résultat au dixième.

c) On décide d'approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire Y par la loi normale de moyenne 150 et d'écart type 10,6. On note Z une variable aléatoire suivant cette loi.

En utilisant cette approximation, calculer la probabilité qu'au plus 130 personnes choisies au hasard aient suivi le stage, en calculant $P(Z \leq 130,5)$. Arrondir le résultat au millième.

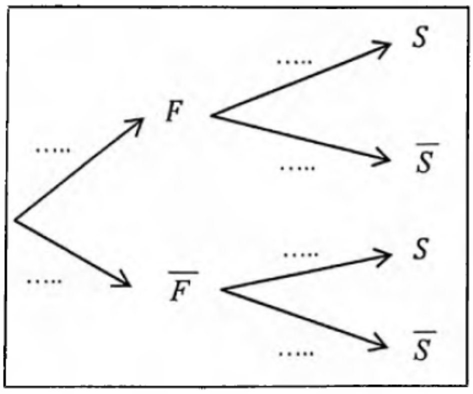
3. L'entreprise comprend 52 % de femmes. Le stage de formation a été suivi par 40 % du personnel féminin et par 15 % du personnel masculin.

On choisit une personne au hasard dans l'entreprise et on définit les événements suivants :

F : « la personne choisie est une femme » ;
S : « la personne choisie a suivi le stage ».

a) Traduire les données de l'énoncé en fonction des événements F et S.

b) Reproduire et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



c) Calculer la probabilité de l'événement : « la personne choisie est une femme et a suivi le stage ».

d) Calculer $P(S)$.

e) Calculer $P_S(F)$, en arrondissant au centième.

Interpréter cette probabilité dans le contexte de l'exercice.

4. L'entreprise décide de cesser la commercialisation du produit dès que le nombre de ventes prévues au cours d'un mois donné repasse sous le seuil des 150 unités par mois.

   À l'aide de la représentation graphique ou de la calculatrice, déterminer à partir quel mois cessera cette commercialisation.

5. On définit sur l'intervalle [0 ; 36] la fonction F par : $F(x) = (-1\,000x - 10\,000)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$.
   Un logiciel de calcul formel donne $F'(x) = 100x\mathrm{e}^{-0,1x}$.

   Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 36], en arrondissant à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Rang du mois : x_i	1	6	11	16	21	26	31	36
Nombre de logiciels vendus : z_i	60	250	340	360	320	270	220	200

Ainsi, par exemple, le 11^e mois après la mise sur le marché, 340 logiciels ont été vendus.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs au centième.

Rang du mois	1	6	11	16	21	26	31	36
$y_i = \ln\left(\dfrac{z_i}{x_i}\right)$	4,09							

2. Une étude a permis de modéliser la dépendance entre x et z par l'égalité suivante :
$$\ln\left(\frac{z}{x}\right) = -0,07x + 4.$$
   Cette relation permet d'exprimer z en fonction de x, sous la forme d'une relation de dépendance du type $z = Ax\mathrm{e}^{Bx}$.

   a) Justifier le fait que $A = 54,6$ en arrondissant la valeur au dixième.
   b) Donner la valeur de B.

Partie B – Étude d'une autre fonction modélisante

L'équipe commerciale envisage de mettre sur le marché un logiciel analogue, mais plus complet que celui des concurrents. Pour ce nouveau logiciel, les prévisions permettent de modéliser le nombre mensuel des ventes par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 36] par :
$$f(x) = 100x\mathrm{e}^{-0,1x},$$
où $f(x)$ est le nombre de logiciels vendus au cours du mois de rang x.

1. a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-0,1x}$ sur l'intervalle [0 ; 36].
   b) En déduire la dérivée de la fonction f sur cet intervalle.

2. a) Justifier le fait que le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $10 - x$.
   b) En déduire le tableau des variations de la fonction f.

3. Tracer la représentation graphique de la fonction f sur papier millimétré. On prendra 1 cm pour 2 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 unités sur l'axe des ordonnées.

4. L'entreprise décide de cesser la commercialisation du produit dès que le nombre de ventes prévues au cours d'un mois donné repasse sous le seuil des 150 unités par mois.

   À l'aide de la représentation graphique ou de la calculatrice, déterminer à partir quel mois cessera cette commercialisation.

5. On définit sur l'intervalle [0 ; 36] la fonction F par : $F(x) = (-1\,000x - 10\,000)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$.
   Un logiciel de calcul formel donne $F'(x) = 100x\mathrm{e}^{-0,1x}$.

   Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 36], en arrondissant à l'unité. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

2017 Métropole

Exercice 1 **10 points**

Cet exercice envisage plusieurs études réalisées par une société qui pratique des sondages auprès de ses clients.
Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1

La société pratique les sondages par courriel, et a recueilli les données suivantes au cours de cinq campagnes de sondage.

Nombre de clients contactés : x	200	200	250	280	370
Nombre de sondages renvoyés : y	140	135	160	185	260

1. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y, arrondi au centième.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients au centième.
3. La société souhaite recevoir davantage de sondages, en contactant un plus grand nombre de clients.
   En utilisant l'ajustement affine trouvé à la question précédente, estimer le nombre de sondages qui seront renvoyés si la société contacte 500 clients, en arrondissant ce nombre à la dizaine.

Partie 2

La société réalise un sondage auprès d'utilisateurs d'internet. On considère une personne choisie au hasard dans la population des sondés.
On définit les évènements suivants :

A : « la personne utilise internet depuis 5 ans ou plus » ;

B : « la personne répond au sondage ».

Les statistiques de la société permettent de dégager les faits suivants :

- 75 % de la population des personnes sondées utilisent internet depuis 5 ans ou plus ;
- si une personne sondée utilise internet depuis 5 ans ou plus, la probabilité qu'elle réponde au sondage est égale à 0,6 ;
- si une personne sondée utilise internet depuis strictement moins de 5 ans, la probabilité qu'elle réponde au sondage est égale à 0,3.

1. Présenter la situation de l'énoncé à l'aide un arbre pondéré, que l'on complètera.
2. Calculer $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, puis $P(B)$ en détaillant les calculs.
3. Calculer $P_B(A)$, en arrondissant au millième.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie 3

1. La société étudie le temps mis par les personnes pour renseigner le questionnaire relatif à un sondage donné. Elle modélise ce temps, exprimé en minute, par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance 12,5 et d'écart type 1,8.

   a. Donner un arrondi au dixième du nombre a tel que $P(12,5 - a \leqslant T \leqslant 12,5 + a) = 0,95$.

   b. Calculer $P(T \geqslant 15)$, en arrondissant au centième.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. La société remarque que 20 % des personnes qui répondent aux sondages renseignent le questionnaire de façon incomplète, et rendent de ce fait le sondage incomplet. De plus les personnes qui renseignent un questionnaire le font indépendamment les unes des autres.
   Pour un sondage donné, la société considère les 2 000 premières réponses reçues, et modélise le nombre de sondages incomplets par une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale.

   a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

   b. Calculer la probabilité que le nombre de sondages incomplets soit inférieur ou égal à 385, en arrondissant le résultat au centième.

Exercice 2 **10 points**

Le chiffre d'affaires d'une start-up, dès son lancement, est modélisé par la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[4\,;\,10]$ par :

$$f(x) = x - 3 + \ln(2x - 4)$$

où x est exprimé en mois et $f(x)$ en dizaines de milliers d'euro.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Partie 1 : Étude de la fonction *f*

1. Un logiciel de calcul formel permet d'établir que pour tout réel x de l'intervalle $[4\,;\,10]$:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

   a. Cette question est une question à choix multiple. Une seule des trois expressions **A**, **B**, **C**, est correcte. Recopier sur la copie l'expression correcte, sans justification.

   A : $f'(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ **B** : $f'(x) = \dfrac{2}{x-2}$ **C** : $f'(x) = \dfrac{x}{x-1}$

   b. Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[4\,;\,10]$?

   c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;\,10]$. On arrondira les valeurs de $f(4)$ et $f(10)$ au centième.

   d. Cette question est une question à choix multiple. Une seule des trois propositions **A**, **B**, **C** est correcte.
   Recopier la proposition correcte, sans justification :

   - Proposition A : « L'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $alpha$ dans l'intervalle $[4\,;\,10]$, avec $\alpha \approx 4,3$ (arrondi au dixième) ».

- Proposition B : « L'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $alpha$ dans l'intervalle$[4\,;\,10]$, avec $\alpha = 4,42$ (arrondi au centième) »,
- Proposition C : « L'équation $f(x) = 3$ admet deux solutions distinctes α et β dans l'intervalle $[4\,;\,10]$ ».

2. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au centième.

x	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	2,39				7,48		

3. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(O,\ \vec{\imath}\,,\ \vec{\jmath}\right)$. On pourra choisir 1 cm pour unité.

Placer sur cette courbe le point A d'abscisse α.

4. **a.** Sur le graphique précédent, hachurer le domaine dont l'aire s'exprime par l'intégrale :

$$I = \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{ en unité d'aire.}$$

b. Sur l'intervalle $[4\,;\,8]$, on approche la courbe $\mathscr{C}_f$ par un segment de droite, dont les extrémités sont les points de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant pour abscisses 4 et 8.

En utilisant cette approximation graphique, donner une valeur approchée à l'unité de l'intégrale I.

c. En déduire la valeur approchée à l'unité de la valeur moyenne de la fonction I sur l'intervalle $[4\,;\,8]$.

Partie 2 : Interprétations

1. Combien de mois après son lancement le chiffre d'affaires de cette start-up atteint-t-il 30 000 euros, selon le modèle adopté dans cet exercice ?

2. Donner une estimation du chiffre d'affaires moyen par mois de cette start-up entre le 4^{e} et le 8^{e} mois.

2017 Nouvelle Calédonie

Exercice 1 **10 points**

Un nouveau smartphone est mis en vente. Soit x le prix unitaire en centaines d'euro de ce smartphone.

La fonction d'offre des fournisseurs (en milliers de smartphones) est la fonction f définie sur $]0; 6]$ par

$$f(x) = 0,7\mathrm{e}^{0,5x+2}$$

où $f(x)$ modélise la quantité proposée par les fournisseurs pour un prix unitaire de x en centaines d'euro.
La fonction de demande des consommateurs (en milliers de smartphones) est la fonction g définie sur $]0; 6]$ par

$$g(x) = 10\ln\left(\frac{20}{x}\right)$$

où $g(x)$ modélise la quantité demandée par les consommateurs pour un prix unitaire de x en centaines d'euro.
Les courbes représentatives $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de f et de g sont tracées dans le repère orthogonal fourni en annexe.
Le point d'équilibre de l'offre et de la demande, noté A, est le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Partie 1

1. Identifier la courbe correspondant à f et celle correspondant à g, en justifiant la réponse.
2. À partir d'une lecture graphique, donner les coordonnées $(x_0\ ;\ y_0)$ du point A. On laissera apparents les traits de construction.

Partie 2

Pour déterminer les coordonnées du point A de façon précise, on est amené à résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
On pose, pour tout x appartenant à $]0; 6]$, $h(x) = f(x) - g(x)$.
Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

► Calcul formel

1	$0,7\exp(0,5x+2)$ Dérivée : $\frac{7}{20}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+2}$
2	$0,7\exp(0,5x+2)$ Intégrale : $\frac{7}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+2}+c_1$
3	$10\ln(20/x)$ Dérivée : $-\frac{10}{x}$
4	$10\ln(20/x)$ Intégrale : $10\left[x\ln\left(\frac{20}{x}\right)+x\right]+c_2$

1. a. À l'aide de ces résultats, déterminer les fonctions dérivées de f et de g.

   b. En déduire que la dérivée de h s'exprime, pour tout x de $]0\,;6]$, par $h'(x) = 0,35\mathrm{e}^{0,5x+2} + \dfrac{10}{x}$.

2. a. Étudier le signe de $h'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;6]$.

   b. On admet que $\lim\limits_{x \to 0_+} h(x) = -\infty$.

   Établir le tableau des variations de h sur l'intervalle $]0\,;6]$.

3. a. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur l'intervalle $[2\,;3]$.

   b. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, la valeur arrondie au centième de x_0.

4. En déduire le prix unitaire d'équilibre de ce smartphone en euro et le nombre de smartphones disponibles à ce prix (arrondir à la centaine).

Partie 3

On prendra dans cette question $x_0 = 2,7$ et $y_0 = 20$.

1. À l'aide des résultats du logiciel de calcul formel, donner une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;6]$.

2. On appelle « surplus des fournisseurs » le nombre $S = x_0 y_0 - \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,\mathrm{d}x$.

   a. Le nombre S représente l'aire d'un domaine du plan qui est la différence entre deux aires. Hachurer sur la feuille annexe le domaine d'aire S.

   b. Calculer la valeur de S (arrondir au dixième).

Exercice 2 **10 points**

Sauf indication contraire, les résultats non entiers seront arrondis au millième.
Les quatre parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie 1 - calcul de probabilités

Une entreprise fabrique en grande quantité des clés USB. Les clés USB produites peuvent présenter deux défauts : le défaut A et le défaut B.
On sait que :

- 5 % des pièces produites présentent le défaut B ;
- parmi les pièces présentant le défaut B, 20 % ont le défaut A ;
- parmi les pièces ne présentant pas le défaut B, 6 % ont le défaut A.

On appelle A l'évènement « la clé USB présente le défaut A » et B l'évènement « la clé USB présente le défaut B ».

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation.
2. Calculer la probabilité que la clé USB présente le défaut A.
3. Calculer la probabilité que la dé USB présente le défaut B sachant qu'elle a le défaut A.

Partie 2 - loi binomiale

On note E l'évènement « la clé USB prélevée au hasard dans un stock important a un défaut ».
On suppose que $P(E) = 0,107$. On prélève au hasard quatre clés USB dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre clés USB.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de quatre clés, associe le nombre de clés USB de ce prélèvement ayant un défaut.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une clé USB soit défectueuse.

Partie 3 - approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les clés USB sont commercialisées par lot de 1 000. On prélève au hasard un lot de 1 000 dans un dépôt de l'entreprise. On assimile ce prélèvement à un tirage avec remise de 1 000 clés USB.
On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 1 000 clés USB, associe le nombre de clés USB présentant un défaut parmi ces 1 000 clés USB.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,107$.
On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire discrète Y par la loi normale de moyenne 107 et d'écart-type 9,78. On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale.

1. Justifier les paramètres de la loi normale suivie par Z.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 95 clés USB présentant un défaut dans le lot de 1 000 clés USB, c'est-à-dire calculer $P(Z \leqslant 95,5)$.

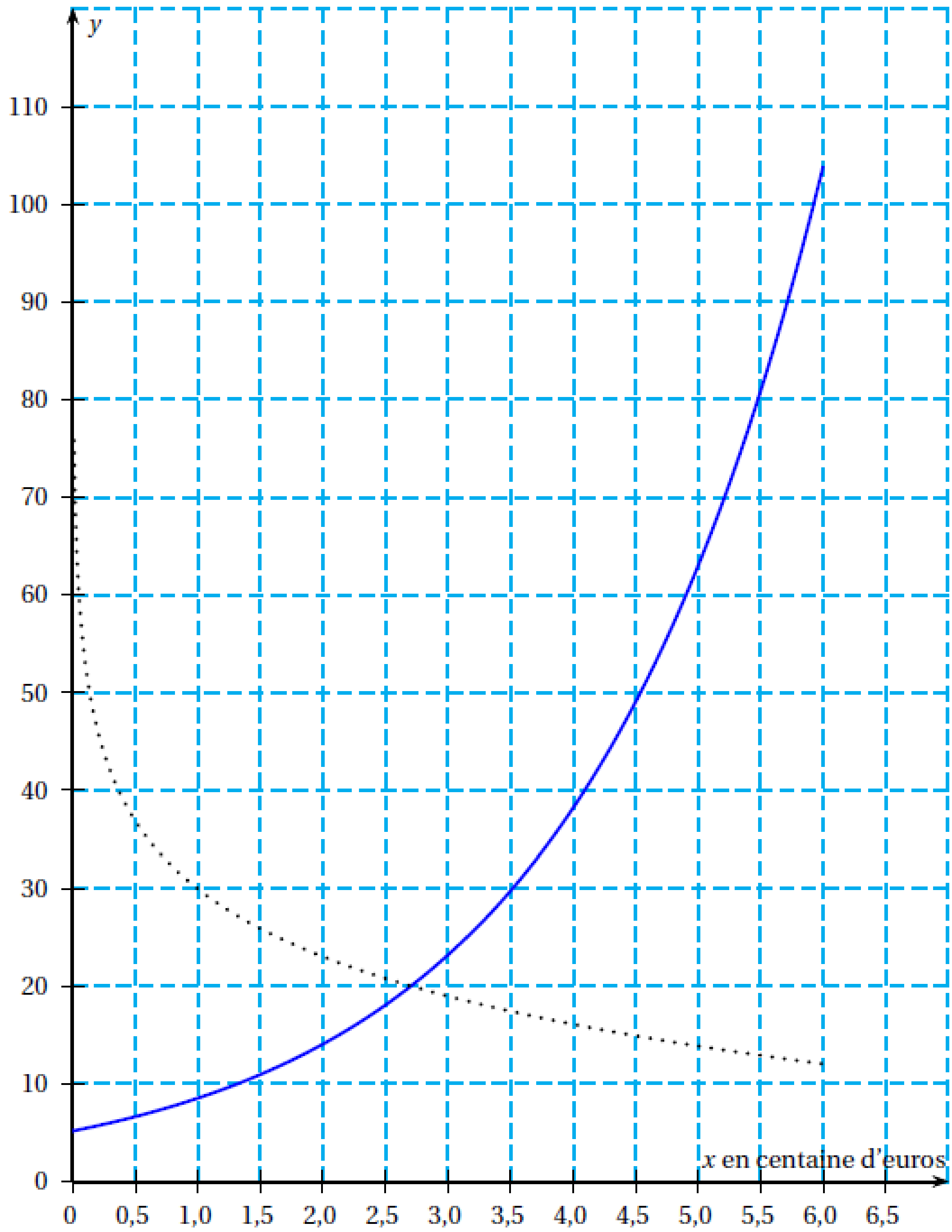
Partie 4 - loi exponentielle

Un technicien est chargé d'étudier le fonctionnement des clés USB. Après une étude statistique, il est arrivé à la conclusion que la variable aléatoire T qui, à chaque clé USB, associe sa durée de vie en jour suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,007$ jour^{-1}.

1. Quel est, à un jour près, la durée de vie moyenne d'une clé USB.
2. Calculer la probabilité pour qu'une clé USB ne soit plus en état de fonctionnement au bout de 200 jours.

ANNEXE à rendre avec la copie

Exercice 1



2017 Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Le tableau suivant donne le taux d'équipement des Français en téléphones mobiles pour les années 2011 à 2015. Les valeurs sont données en pourcentages arrondis à l'unité.

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Taux d'équipement en smartphones (%)	18	29	39	49	58
Taux d'équipement en autres mobiles (%)	67	59	50	41	34
Taux de Français non équipés (%)	15	12	11	10	8

D'après : http ://www.zdnet.fr/actualites/infographie-portrait-de-l-utilisateur-de-smartphone-francais-39796286.htm

Dans la suite, on s'intéresse à la progression du taux d'équipement en smartphones.

Partie A - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+00[$ par :

$$f(x) = \frac{75}{1+5,4\mathrm{e}^{-0,6x}}.$$

1. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, dans lequel $f(x)$ sera arrondi au dixième.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	18,9	28,6	39,6					

2. Déterminer la limite de $\mathrm{e}^{-0,6x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En déduire la limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement.

3. On a obtenu une expression de $f'(x)$ à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$f'(x) = \frac{243\mathrm{e}^{-0,6x}}{\left(1+5,4\mathrm{e}^{-0,6x}\right)^2}.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

b. Construire la représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,8]$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Une expression de $F(x)$ est :

$$F(x) = 125\ln\left(5,4+\mathrm{e}^{0,6x}\right).$$

a. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\displaystyle\int_5^{10} f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. En déduire la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,10]$, arrondie au dixième.

Partie B - Interprétations

Pour n entier naturel, on modélise le taux d'équipement (en pourcentage) en smartphones dans la population française pour l'année $2010+n$ par l'expression $f(n)$, où f est la fonction étudiée dans la partie A.
Ainsi, par exemple, $f(1)$ est le taux d'équipement pour l'année 2011.

1. Quel sera le taux d'équipement en smartphones pour l'année 2018 ? Arrondir à l'unité.
2. Donner une estimation, à long terme, du taux d'équipement des Français en smartphones.
3. Donner une estimation du taux moyen d'équipement des Français en smartphones pour la période allant de 2015 à 2020, en pourcentage arrondi à l'unité. (La population en France est supposée constante sur cette période.)

Exercice 2 **10 points**

Cet exercice envisage trois études relatives à un hôtel restaurant qui accueille des VIP (Very Important Person).

Les trois parties A, B *et* C *peuvent être traitées de manière indépendante.*
Sauf indication contraire, les probabilités calculées seront arrondies à la troisième décimale.

Partie A

L'hôtel propose deux gammes de chambres, les chambres standards et les chambres VIP.
Un client se présente à cet hôtel pour réserver une chambre. On considère cette arrivée comme une expérience aléatoire.

Les statistiques de l'hôtel conduisent aux considérations suivantes :

— la probabilité que le client choisisse une chambre VIP est égale à $0,4$;
— la probabilité que le client dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,3$;
— si le client choisit une chambre VIP, la probabilité qu'il dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,6$.

On note V l'évènement « le client choisit une chambre VIP », et R l'évènement « le client dîne au restaurant de l'hôtel ».

1. Exprimer les trois probabilités de l'énoncé à l'aide des évènements V et R.
2. Justifier que la probabilité de l'évènement « le client choisit une chambre VIP et dîne au restaurant de l'hôtel » est égale à $0,24$.
3. Les évènements V et R sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.
4. Déterminer la probabilité de l'évènement : « le client choisit une chambre standard et ne dîne pas au restaurant de l'hôtel ».

Dans la suite de la partie A, 10 clients se présentent à cet hôtel pour réserver chacun une chambre.
On considère que les choix de ces clients sont indépendants, concernant la gamme de la chambre choisie.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de chambres VIP réservées par l'ensemble de ces 10 clients.

5. Préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X, en justifiant la réponse, puis donner les paramètres de cette loi.
6. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X, puis interpréter ce nombre dans le contexte de l'exercice.
7. Calculer $P(X \geqslant 4)$.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au montant de l'addition des clients qui dînent au restaurant de l'hôtel.
On prélève au hasard l'addition d'un client ayant dîné au restaurant de l'hôtel, et l'on note Y la variable aléatoire qui modélise le montant en euro de cette addition.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 45$ et $\sigma = 10$.

1. Calculer la probabilité $P(35 \leqslant Y \leqslant 50)$. On arrondira le résultat au millième.
2. Déterminer le réel a, arrondi au dixième, tel que $p(Y > a) = 0,90$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse aux interventions par un technicien sur le poste de télévision qui équipe une chambre VIP donnée.
La durée entre deux telles interventions, exprimée en semaine, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (exprimé en semaine^{-1}).
Le temps moyen (ou MTBF) entre deux interventions est égal à 15 semaines.

1. En arrondissant au millième, justifier que $\lambda = 0,067$ (exprimé en semaine^{-1}).
2. Quelle est la probabilité que la durée entre deux interventions sur la télévision d'une chambre VIP dépasse 10 semaines ? On arrondira le résultat au millième.
3. Déterminer le réel t tel que $p(T \leqslant t) = 0,95$, en arrondissant la valeur de t à l'entier.
   Interpréter le résultat obtenu, dans le contexte de l'exercice.

2016 Métropole

Exercice 1 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.
L'administrateur d'un site web crée un forum pour que les visiteurs puissent, s'ils le désirent, poster des messages.

Partie 1

L'administrateur souhaite établir un lien entre le nombre de visiteurs du site et le nombre de visiteurs qui postent un message.

On pose n le nombre de mois écoulés depuis le lancement du forum, x_n le nombre de visiteurs du site en milliers et y_n le nombre de visiteurs en milliers ayant posté un message sur le forum depuis le lancement.
L'administrateur obtient les données statistiques suivantes :

Mois écoulés depuis le lancement du forum	n	1	2	3	4	5	6
x : Visiteurs (en milliers)	x_n	0,8	1,0	1,1	1,5	2,5	3,1
y : Visiteurs ayant posté un message (en milliers)	y_n	0,4	0,4	0,6	0,8	1,0	1,1

1. On introduit le changement de variable $z_n = \mathrm{e}^{y_n}$ pour n compris entre 1 et 6. Recopier le tableau suivant et compléter la dernière ligne. *Les valeurs seront arrondies au dixième.*

Mois	n	1	2	3	4	5	6
x	x_n	0,8	1,0	1,1	1,5	2,5	3,1
$z = \mathrm{e}^y$	$z_n = \mathrm{e}^{y_n}$	1,5					

2. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés. *Les coefficients seront arrondis au dixième.*

3. En déduire une estimation de y en fonction de x.

4. On suppose que la relation trouvée précédemment reste vraie les années suivantes. Lorsque le nombre de visiteurs sera égal à 10 000, estimer le nombre de visiteurs qui auront posté un message (arrondir à l'unité).

Partie 2

Dans cette partie, on étudie des lois de probabilité en lien avec la gestion du site web.
Sauf indication contraire, tous les résultats seront arrondis au millième.

1. Le serveur du site web limite la durée d'attente des visiteurs en les connectant le plus vite possible aux pages demandées. On note T la variable aléatoire qui, à une telle connexion prise au hasard, associe la durée d'attente en seconde. L'administrateur constate que la variable T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;5]$.

a) Calculer la probabilité que la durée d'attente soit comprise entre 2 et 4 secondes.

b) Calculer l'espérance de T et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. On note X la variable aléatoire qui, à chaque message posté au hasard, associe le temps d'attente en heure avant une réponse. L'administrateur remarque que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $a = 0{,}125$, exprimé en h^{-1}.

a) Donner le temps d'attente moyen avant qu'une réponse soit postée.

b) On admet que la variable aléatoire N qui, à chaque message posté, associe le nombre de réponses à ce message au bout d'un jour, suit la loi de Poisson de paramètre λ. En 24 heures et à raison d'une réponse en moyenne toutes les 8 heures, on a donc $\lambda = 3$. Calculer la probabilité $P(N = 5)$ et traduire ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c) Pour gérer l'espace de stockage dédié au forum, l'administrateur veut limiter le nombre de réponses possibles à un message.
Déterminer l'entier naturel n à partir duquel on a

$$P(N \leq n) > 0{,}99999.$$

L'administrateur choisira alors de limiter les discussions à n messages.

Exercice 2 (10 points)

Partie 1 – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;22]$ par :

$$f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-0{,}5x+3}$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal (O, I, J).

1. Soit f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[2\,;22]$.

a) En utilisant les résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel (annexe page 5/5), donner une expression factorisée de $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2\,;22]$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2\,;22]$. On arrondira au centième les valeurs de $f(x)$ qui y apparaissent.

2. a) D'après un logiciel de calcul formel, la limite de la fonction f en $+\infty$ en est égale à 0.
Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au centième.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
$f(x)$											

c) Tracer la courbe C_f dans le repère (O, I, J).

On pourra choisir pour unités graphiques : 0,5 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour une unité en ordonnées.

3. On pourra répondre aux questions suivantes à l'aide d'un logiciel de calcul formel (voir annexe page 5/5).

   a) Donner l'expression $F(x)$ d'une primitive F de la fonction f sur l'intervalle [2 ; 22].

   b) Donner la valeur approchée au dix-millième de l'intégrale $I = \int_3^5 f(x)\mathrm{d}x$.

   c) Hachurer la partie du graphique dont l'aire exprimée en unité d'aire est égale à I.

Partie 2 – Application économique

Une entreprise commercialise des ordinateurs portables. Le prix de revient d'un ordinateur est de 200 euros. On suppose que le nombre d'acheteurs d'un ordinateur est modélisé par $N = \mathrm{e}^{-0,5x+3}$ où x est le prix de vente d'un ordinateur, exprimé en centaines d'euro.

1. Montrer que la fonction f de la partie 1 donne le bénéfice réalisé par l'entreprise, en centaines d'euro.
2. À quel prix l'entreprise doit-elle vendre un ordinateur pour réaliser un bénéfice maximal ? Quel est ce bénéfice, à l'euro près ?
3. Durant la première année de commercialisation des ordinateurs portables, le prix de vente varie régulièrement entre 300 euros et 500 euros. Calculer, à l'euro près, le bénéfice moyen.

ANNEXE

Exercice 2 - partie 1 :

Résultats obtenus à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

1	deriver((x-2)*exp(-0.5x+3)) **(-0.5*x+2.0)*exp(-0.5*x+3.0)**
2	deriver(-2x*exp(-0.5x+3)) **(x-2.0)*exp(-0.5*x+3.0)**
3	integrer(-0.5*x+2.0)*exp(-0.5*x+3.0),x,2,22) **0.00670925256**
4	integrer((x-2)*exp(-0.5x+3),x,3,5) **10.40292172**
5	limite((x-2)*exp(-0.5x+3),x,+infinity) **0**

2016 Nouvelle Calédonie

Exercice 1 (10 points)

Une banque observe durant 4 heures la plus-value d'un portefeuille d'actions très volatiles.
Cette plus-value, exprimée en milliers d'euro, est modélisée par :

$$f(t) = 0{,}1 \times (15 - t^2)\mathrm{e}^t$$

où t est exprimé en heure, et appartient à l'intervalle $[0 ; 4]$.

On désigne par C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. a) Démontrer que pour tout t de l'intervalle $[0 ; 4]$, $f'(t) = 0{,}1 \times (-t+3)(t+5)\mathrm{e}^t$.
   b) Étudier le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
2. a) Recopier et compléter le tableau suivant, en arrondissant les valeurs au millième.

t	0	1	2	3	3,5	4
$f(t)$						

   b) Tracer la courbe C_f dans le repère sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
   (Unités graphiques : 4 cm pour une unité en abscisses, 1 cm pour une unité en ordonnées.)

Partie B

1. Déterminer la plus-value après une heure.
2. À l'aide du graphique de la question **A-2.**, déterminer l'intervalle de temps durant lequel la plus-value est supérieure à 4500 € (on laissera les traits de construction).
3. Déterminer l'instant pour lequel la plus-value est maximale, puis donner la valeur de ce maximum. Justifier les réponses.
4. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de temps la plus-value est négative.

Partie C

1. Vérifier que la fonction F définie pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 4]$ par :
$$F(t) = 0{,}1 \times (-t^2 + 2t + 13)\mathrm{e}^t$$
est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.
2. D'après le modèle, la valeur moyenne M de la plus-value pendant les trois premières heures s'exprime par : $M = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.
Calculer cette valeur moyenne, arrondie à l'euro.

Exercice 2 (10 points)

L'exercice est relatif à des jeux en ligne. Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un site web a mis en ligne un jeu début 2014. Le responsable du site étudie l'évolution du nombre d'internautes ayant joué à ce jeu chaque trimestre, durant sept trimestres consécutifs. Les nombres correspondants sont récapitulés dans le tableau suivant.

Trimestre	2e trim. 2014	3e trim. 2014	4e trim. 2014	1er trim. 2015	2e trim. 2015	3e trim. 2015	4e trim. 2015
Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de joueurs, en centaines : y_i	6	7,8	9,8	12	15,3	19,1	24
$z_i = \ln(y_i)$							

À partir de ces données, le responsable du site envisage deux modèles d'évolution.

1. Un modèle affine
Calculer le coefficient de corrélation linéaire r_1 de la série des sept valeurs (x_i, y_i).

2. Un modèle exponentiel

a) Pour tout entier i compris entre 1 et 7, on pose $z_i = \ln(y_i)$. Recopier et compléter le tableau précédent, en arrondissant les valeurs de z_i au centième.

b) Calculer le coefficient de corrélation r_2 de la série des sept valeurs (x_i, z_i), puis interpréter les deux coefficients de corrélation, relativement à la qualité des deux modèles envisagés.

3. Une estimation

a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement linéaire de z en x, en arrondissant les résultats à la troisième décimale.

b) En déduire une estimation du nombre de joueurs au premier trimestre 2017, selon le modèle exponentiel. On arrondira ce nombre à la dizaine.

Partie B

Un groupe d'amis se connecte pour jouer à un jeu en réseau. La loi de la variable aléatoire D exprimant la durée d'une partie, en minute, est modélisée par la loi normale $\mathcal{N}$ (120 ; 20).

1. Déterminer la probabilité, arrondie au centième, que la partie dure entre 90 et 180 minutes.

2. Déterminer un réel h tel que $P(120 - h \leq D \leq 120 + h) = 0,683$. Donner l'arrondi de h à l'unité.

Partie C

Dans un jeu vidéo apparaît un monstre, dont la durée de vie T est une variable aléatoire. La loi de la variable T est exponentielle de paramètre λ (en min^{-1}).
Le jeu est programmé de telle sorte que la durée de vie moyenne soit égale à 10 minutes.

1. Justifier que la valeur du paramètre λ est égale à 0,1 min^{-1}.

2. Déterminer la probabilité, arrondie au centième, des événements suivants :
- A : « le monstre est encore en vie après dix minutes de jeu » ;
- B : « le monstre périt avant vingt minutes de jeu » ;
- C : « le monstre est encore en vie à la dixième minute et périt avant la vingtième ».

3. Déterminer le nombre de minutes m tel que $P(T \leq m) = 0,5$.
Ce nombre est appelé la durée de « demi-vie » du monstre lors d'une partie.

2016 Polynésie

Exercice 1 (10 points)

Une entreprise réalise une étude en vue de la commercialisation d'une machine qu'elle a fabriquée. L'étude vise à déterminer le nombre de machines qu'elle doit fabriquer et vendre pour réaliser un bénéfice. On admet que toutes les machines fabriquées sont vendues.

Partie A : Étude du coût de production

Le coût de production (en milliers d'euro) de x machines est modélisé sur l'intervalle [0 ; 160] par :

$$f(x) = 0{,}48x^2 + 1000\ln(x + 10)$$

1. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 160] :

$$f'(x) = \frac{0{,}96x^2 + 9{,}6x + 1000}{x + 10}$$

2. Quel est le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [0 ; 160] ? Justifier.

En déduire le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (arrondir à l'unité).

x	0	20	50	70	90	110	130	160
$f(x)$			5 294		8 493		13 054	

4. Tracer la courbe C_f représentant la fonction f sur l'intervalle [0 ; 160] dans un repère orthogonal, avec les unités graphiques suivantes : 1 cm représente 10 machines en abscisses et 1 cm représente 1 millier d'euro en ordonnées.

Partie B : Étude du bénéfice

Le prix de vente d'une machine est de 100 000 €.

1. Exprimer la recette $r(x)$ (en milliers d'euro) en fonction du nombre de machines x vendues.

2. Représenter sur le graphique de la **partie A**, la droite d'équation $y = 100x$.

3. Déterminer graphiquement les quantités de machines que l'entreprise peut fabriquer pour réaliser un bénéfice.

Exercice 2 (10 points)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats sont arrondis au millième.

Un administrateur de réseaux installe des nouveaux serveurs pour ses utilisateurs répartis sur trois sites. L'installation nécessite une interruption du service pendant une période donnée. Afin de perturber le moins possible les utilisateurs, l'administrateur étudie les connections sur les trois sites dans la période considérée. On suppose que la probabilité qu'un utilisateur se connecte, dans cette période, est égale à 0,05. Les comportements des utilisateurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Partie A

Sur le site 1, il y a 60 utilisateurs. On note X_1 la variable aléatoire qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés sur ce site dans la période considérée.

1. Justifier le fait que la variable aléatoire X_1 suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.

2. Calculer la probabilité de n'avoir aucun utilisateur connecté dans la période considérée.

3. Calculer la probabilité d'avoir au moins deux utilisateurs connectés dans cette période.

Partie B

Sur le site 2, il y a 120 utilisateurs.

On décide d'approcher la loi de probabilité de la variable aléatoire X_2, qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés du site 2 dans la période considérée, par une loi de Poisson de paramètre λ.

On note Y la variable aléatoire suivant cette loi de Poisson.

1. Montrer que $\lambda = 6$.

2. Calculer la probabilité $\mathrm{P}(Y \leq 2)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie C

Sur le site 3, il y a 200 utilisateurs.

On admet que la loi de probabilité de la variable aléatoire X_3, qui comptabilise le nombre d'utilisateurs connectés du site 3 dans la période considérée, peut être approchée par une loi normale.

Soit Z la variable aléatoire suivant cette loi de normale $N(m\,;\,\sigma)$.

1. Justifier que $m = 10$ et que $\sigma \approx 3{,}1$ en arrondissant au dixième.

2. Déterminer la probabilité d'avoir au plus 14 utilisateurs du site 3 connectés dans la période d'interruption en calculant $\mathrm{P}(Z \leq 14{,}5)$.

3. Calculer la probabilité que le nombre d'utilisateurs du site 3 connectés dans cette période soit compris entre 6 et 14, c'est-à-dire calculer le nombre $\mathrm{P}(5{,}5 \leq Z \leq 14{,}5)$.

2015 Métropole

Exercice 1 (10 points)

Les trois parties **A**, **B** et **C** peuvent être traitées de manière indépendante.

Une entreprise d'envergure internationale produit des composants pour ordinateurs portables, notamment des batteries et des écrans.

Partie A

Au cours de la production, les batteries peuvent présenter, de façon indépendante, deux défauts principaux, notés a et b. On considère qu'une batterie produite est défectueuse lorsqu'elle comporte au moins l'un des défauts a ou b.

On prélève une batterie au hasard dans la production d'une journée. La probabilité que le défaut a apparaisse est égale à 0,02, celle que le défaut b apparaisse est égale à 0,01.

On note A l'événement « le défaut a apparaît », et B l'événement « le défaut b apparaît ».

1. **a)** Justifier l'égalité : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

b) Calculer la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.

2. On prélève au hasard dans la production un lot de 100 batteries. La production est suffisamment importante pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage aléatoire avec remise.
On note X la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 100 batteries, associe le nombre de batteries défectueuses détectées.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
Justifier et donner les paramètres de cette loi.

b) Calculer $P(X \geq 3)$, en arrondissant à la quatrième décimale.
Interpréter le résultat.

Partie B

On s'intéresse maintenant à la durée de charge de ces batteries.
On prélève au hasard une batterie dans la production, et l'on note Y la variable aléatoire qui modélise le temps de charge, en minute, de cette batterie.
On admet que la variable aléatoire Y suit la loi normale de paramètres $m = 80$ et $\sigma = 10$.

1. Calculer la probabilité $P(60 \leq Y \leq 100)$. On arrondira le résultat à la quatrième décimale.

2. Déterminer le réel h, arrondi à la deuxième décimale, tel que $P(Y \geq h) = 0,95$.
Formuler une interprétation de ce résultat.

Partie C

La durée de bon fonctionnement d'un écran, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Le temps moyen de bon fonctionnement des écrans est de 1900 jours.

1. En arrondissant à la quatrième décimale, justifier que λ s'exprime en jour^{-1} par : $\lambda = 0,0005$.

2. Quelle est la probabilité que l'écran fonctionne encore correctement après 4000 jours d'utilisation ? On arrondira le résultat à la quatrième décimale.

3. Déterminer le réel t tel que $P(T \leq t) = 0,7$. On donnera la valeur de t arrondie à l'entier.
Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 2 (10 points)

A. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5] par :

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln(x).$$

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5], on a : $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x}$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6,5].

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.

2. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant, en arrondissant les résultats au dixième.

x	1	2	3	4	5	6	6,5
$f(x)$							

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On pourra choisir pour unités graphiques : 1 cm pour une unité en abscisses et 1 cm pour une unité en ordonnées.

3. Soit F la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5] par :

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 10x^2 - 2x - 16x\ln(x).$$

Vérifier que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6,5].

B. Applications à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces qu'elle conditionne par paquets de cent. Sa fabrication journalière varie entre 100 pièces et 650 pièces.

Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour q centaines de pièces fabriquées ($1 \leq q \leq 6,5$), est modélisé par $f(q)$, où f est la fonction définie dans la partie **A**.

1. **a)** Justifier que l'équation $f(q)=0$ admet une solution dans l'intervalle [4 ; 6,5], et donner une valeur approchée au centième de cette solution.

b) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

2. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.

3. Avec la modélisation choisie, le bénéfice moyen B_m réalisé par l'entreprise, s'exprime, en milliers d'euro, par : $B_m = \dfrac{1}{5,5} \times \int_1^{6,5} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer ce bénéfice moyen, arrondi à la centaine d'euro.

2015 Nouvelle Calédonie

Exercice 1 (10 points)

Dans tout l'exercice, les probabilités seront arrondies au millième.

Une entreprise européenne fabrique, en grande quantité, des composants électroniques. Un contrôle de qualité consiste à vérifier que le composant est conforme aux normes en vigueur.

Partie A

Les composants sont produits en grande quantité par deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 fournit 60 % de la production totale de composants et la machine M_2 en fournit 40 %.
Lorsqu'on prélève un composant au hasard, la probabilité qu'il soit conforme est égale à 0,914 lorsqu'il provient de la machine M_1 et à 0,879 lorsqu'il provient de la machine M_2.

On prélève au hasard un composant parmi la production totale de l'entreprise.
Tous les composants ont la même probabilité d'être tirés.

On définit les événements :

A : « le composant provient de la machine M_1 » ;
B : « le composant provient de la machine M_2 » ;
C : « le composant est conforme ».

1. En utilisant l'énoncé, donner les probabilités $P(A)$, $P(B)$, $P_A(C)$ et $P_B(C)$.

2. Construire un arbre pondéré pour illustrer la situation.

3. Démontrer que $P(C) = 0,9$ et formuler une interprétation de ce résultat.

4. Le composant est conforme. Quelle est la probabilité qu'il ait été produit par la machine M_1 ?

Partie B

On prélève au hasard 10 composants dans le stock. Ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à 10 tirages avec remise. On note X la variable aléatoire indiquant, pour tout prélèvement de 10 composants, le nombre de composants conformes.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres.

2. Calculer la probabilité que, dans un prélèvement, 8 composants exactement soient conformes.

3. Calculer $P(X \leq 9)$. Interpréter le résultat trouvé par une phrase.

Partie C

L'entreprise constate que les composants sont fragiles. Elle souhaite proposer à ses clients une période supplémentaire de garantie, après remplacement d'un composant défaillant. Une étude statistique montre que la moyenne des durées de bon fonctionnement d'un composant après remplacement est de 400 jours.
On admet qu'après remplacement, la durée de bon fonctionnement d'un composant, exprimée en jour, est modélisée par une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle.

1. Montrer que le paramètre de cette loi exponentielle, exprimé en jour^{-1}, est égal à $\lambda = 0,0025$.

2. Calculer la probabilité pour qu'un composant n'ait pas de défaillance au cours de l'année qui suit le remplacement, en considérant qu'une année compte 365 jours.

3. Calculer la probabilité pour qu'un composant tombe en panne au cours des deux années suivant le remplacement.

Exercice 2 (10 points)

Pour traiter un problème informatique, on dispose de deux algorithmes A_1 et A_2, qui sont implémentés sur un même ordinateur à l'aide du même logiciel de programmation.
Les deux programmes informatiques correspondant aux algorithmes A_1 et A_2 ont des durées d'exécution respectives notés d_1 et d_2, qui sont exprimées en kc (milliers de cycles d'horloge).
Ces durées dépendent toutes deux d'un entier naturel p, compris entre 30 et 10 000, qui est une caractéristique du problème.

La durée d_1 dépend du nombre de chiffres utilisés dans l'écriture de l'entier p, et donc de son logarithme népérien, noté $\ln(p)$.
Une étude statistique a permis de modéliser cette durée d_1, exprimée en kc, par l'expression :

$$d_1 = 10\,080 \times \ln(p) + 67\,550.$$

Le but de l'exercice est d'exprimer la durée d_2 en fonction de l'entier p, puis de comparer les durées d_1 et d_2 selon les valeurs de l'entier p.

Partie A : expression de d_2 en fonction de p

Le tableau suivant rassemble les instructions de programmation de l'algorithme A_2, ainsi que les temps d'exécution correspondants du programme utilisé.

Instructions	Temps d'exécution
Variables : *p est un entier compris entre 30 et 10 000*	0 kc
Initialisation	1200 kc
Traitement	
Boucle 1 (à répéter p fois) :	
Instructions fixes de la boucle 1……………………	……………135 kc
Boucle 2 (à répéter 12 fois) :	
Instructions fixes de la boucle 2…………	……………..18 kc
Boucle 3 (à répéter 12 fois) :	
Instructions fixes de la boucle 3…	……………0,75 kc
Fin boucle 3	
Fin boucle 2	
Fin boucle 1	
Sortie	0 kc

1. Calculer, en kc, la durée de chaque passage dans la boucle 2. En déduire la durée totale de la boucle 2 (12 passages).

2. Montrer que la durée de chaque passage dans la boucle 1 est égale à 459 kc.

3. En déduire que la durée d_2 d'exécution du programme correspondant à l'algorithme A_2, exprimée en kc, s'exprime par : $d_2 = 459p + 1200$.

Partie B : étude de fonctions

On considère les fonction f, g et h définies pour tout réel x de l'intervalle [30 ; 10 000] par :

$$f(x) = 10\,080 \ln(x) + 67\,550,\quad g(x) = 459x + 1\,200 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

1. Calculer $h'(x)$ et montrer que, pour tout réel x de l'intervalle [30 ; 10 000], on a :
$$h'(x) = \frac{10\,080 - 459x}{x}.$$

2. Sur l'intervalle [30 ; 10 000], étudier le signe de $h'(x)$, et dresser le tableau de variations de la fonction h.

3. En déduire qu'il existe un unique réel r dans l'intervalle [30 ; 10 000], tel que $h(r) = 0$.
Donner un encadrement de ce nombre r par deux entiers consécutifs.

Partie C : retour au problème initial

1. Dans cette question, on pose $p = 1100$.

2. Avec cette valeur de p, calculer et comparer les durées d_1 et d_2 d'exécution de chacun des deux programmes, liés aux algorithmes A_1 et A_2.

3. En utilisant la partie **B**, comparer suivant les valeurs de l'entier p appartenant à l'intervalle [30 ; 10 000], les durées d'exécution de chacun des programmes.

4. Un utilisateur emploie régulièrement les deux programmes, uniquement avec des valeurs de l'entier p régulièrement réparties entre 1 000 et 1 200.
Pour cet utilisateur, on peut ainsi modéliser la durée moyenne d'exécution du programme lié à l'algorithme A_1 par la valeur moyenne, sur l'intervalle [1 000 ; 1 200], de la fonction f définie dans la partie **B**. On note m_1 cette valeur moyenne.

   a) En arrondissant à l'entier, une calculatrice donne la valeur : $\int_{1\,000}^{1\,200} f(x)\,\mathrm{d}x = 27\,625\,396$.
   Calculer, pour l'utilisateur, la durée moyenne m_1 du programme lié à l'algorithme A_1.
   Arrondir le résultat au kc.

   b) De même, pour l'utilisateur, on modélise la durée moyenne d'exécution du programme lié à l'algorithme A_2 par la valeur moyenne, sur l'intervalle [1 000 ; 1 200], de la fonction g définie dans la partie **B**.
   Calculer cette durée moyenne, notée m_2, en arrondissant le résultat au kc.
   Comparer la rapidité des deux programmes correspondant aux algorithmes A_1 et A_2.

2015 Polynésie

Sans objet, faute de candidat...

2014 Métropole

Exercice 1 **10 points**

Dans cet exercice. tous les résultats seront arrondis au millième.
Une société de vente par correspondance de matériel informatique a étudié le fichier clientèle pour connaître l'utilisation du modèle A100 de disque dur externe de son catalogue.
L'enquête a porté sur 1 280 personnes ayant acheté ce modèle au cours des trois, derniers mois. Les résultats concernant le sexe de l'utilisateur et l'usage personnel ou professionnel du disque dur A100 sont consignés dans le tableau ci dessous.

	Usage personnel	Usage professionnel
Homme	360	4 810
Femme	160	280

Partie A

Un opérateur de la société est chargé d'appeler des clients au téléphone dans le but de leur proposer un nouveau produit, le disque B200.
L'opérateur choisit une personne dans le fichier de ces 1 280 personnes. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.

1. **a.** Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?
   b. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme qui fasse un usage personnel du disque dur externe A100 ?
   c. La personne choisie est une femme. Quelle est la probabilité que cette femme fasse un usage professionnel du disque dur externe A100 ?
2. On admet que, pour chaque client choisi au hasard dans le fichier des 1 280 clients ayant acheté le disque A100, l'opérateur a une probabilité égale à $0,03$ d'obtenir une promesse d'achat du disque B200.
   L' opérateur appelle 25 personnes choisies au hasard dans le fichier ; Le nombre de clients est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ces choix à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de promesses d'achat parmi les 25 personnes appelées.
   a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale et en donner les paramètres.
   b. Calculer la probabilité que l'opérateur obtient exactement 2 promesses d'achat d'un disque B200 sur les 25 personnes appelées.
   c. Quelle est la probabilité que l'opérateur obtienne au moins une promesse d'achat sur les 25 personnes appelées ?

Partie B

Une enquête de satisfaction réalisée par le constructeur du disque A100, indique que 64 % des acquéreurs de ce disque en sont satisfaits.
On interroge au hasard 160 acquéreurs du disque A100.
On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de clients satisfaits par leur achat.
On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 160$ et $p = 0,64$.
On décide d'approcher la loi de la variable Y par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ de paramètres m et σ.

1. Justifier que cette loi normale a pour moyenne $102,4$ et pour écart-type $6,1$ arrondi au dixième.
2. On note Z la variable aléatoire qui suit cette loi normale.
   Calculer $p(Z \geqslant 120,5)$ c'est-à-dire la probabilité que le nombre de clients satisfaits par le disque A100 soit strictement supérieur à 120.

Partie C

La variable aléatoire T donnant la durée de fonctionnement d'un disque A100, exprimée en mois avant la première défaillance, suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Le service après-vente a pu établir que 30 % des disques A100 ont eu une défaillance avant la fin du 18$^{\text{e}}$ mois.

1. Déterminer la valeur exacte du paramètre λ et montrer que la valeur arrondie au centième de λ est égale à 0,02.

   Pour les questions suivantes, on prendra pour λ cette valeur $0,02$.
2. Calculer la probabilité qu'un disque n'ait pas de défaillance au cours des 3 premières années.
3. Calculer la Moyenne des Temps de Bo, Fonctionnement (MTBF) de ces disques durs.

Exercice 2 **10 points**

Un institut statistique conduit une étude à partir de données obtenues sur la période 2000 – 2013. Cette étude porte sur l'évolution du pourcentage d'internautes au sein de la population française.
Son objectif est de réaliser des estimations de ce pourcentage pour la période 2014–2050.
L'institut a ainsi modélisé cette situation par une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;50]$ par

$$f(t) = \frac{100}{1 + 6\mathrm{e}^{-0,25t}}$$

où t est te temps écoulé en années depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 et $f(t)$ le pourcentage d'internautes par rapport à l'ensemble de la population française à l'instant $(2000 + t)$.
Par exemple, $f(12) \approx 77,0$ signifie que la population française compte 77 % d'internautes au 1$^{\text{er}}$ janvier 2012.

1. Calculer le pourcentage d'internautes au sein de la population française le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000.
   On arrondira le résultat au dixième.

2. a. Établir que, pour tout réel t de l'intervalle $[0;50]$ on a :

$$f(t) = \frac{150\mathrm{e}^{-0,25t}}{\left(1+6\mathrm{e}^{-0,25t}\right)}.$$

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0;50]$.

3. Calculer $f(19)$. Peut-on affirmer qu'en 2019, le pourcentage d' internautes au sein de la population française sera d'au moins 95 % ?

4. a. Résoudre par le calcul sur l'intervalle $[0;50]$ l'équation : $f(t) = 99,9$.
On arrondira le résultat à l'unité.

b. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

5. Soit la fonction F définie sur l'intervalle $[0;50J$ par :

$$F(t) = 100t + 400\ln\left(1+6\mathrm{e}^{-0,25t}\right).$$

On admet que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;\ 500]$.

a. Calculer la valeur moyenne exacte de la fonction f sur l'intervalle $[0;13]$.

b. En donner une valeur arrondie au dixième.

c. Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

2014 Nouvelle Calédonie

Sans objet, faute de candidat...

2014 Polynésie

Exercice 1 (10 points)

Le centre de radiologie RadioPro souhaite confier à une entreprise la sauvegarde de fichiers de données dont la taille est comprise entre 1 Go et 4 Go.

Partie A

L'entreprise StockA propose un tarif à RadioPro modélisé par la fonction f définie pour tout x de l'intervalle $[1;4]$ par :

$$f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 6$$

où x est la taille du fichier, exprimée en Go, et $f(x)$ est le coût de stockage, exprimé en centimes d'euro.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal. La courbe C_f est représentée en annexe.

1. a) D'après le graphique, quel semble être le coût maximum de stockage d'un fichier de données ?

   b) Pour quelle taille de fichier ce maximum est-il atteint ?

2. Quel est le coût de stockage d'un fichier de données de taille 2 Go ?

Partie B

L'entreprise StockB propose un tarif à RadioPro modélisé par la fonction g définie pour tout x de l'intervalle $[1;4]$ par :

$$g(x) = -2x\ln(x) + 4x + 2$$

où x est la taille du fichier, exprimée en Go, et $g(x)$ est le coût de stockage, exprimé en centimes d'euro.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[1;4]$, la dérivée de g a pour expression :
$$g'(x) = 2\left(1 - \ln(x)\right).$$
2. Résoudre, dans l'intervalle $[1;4]$, l'inéquation : $1 - \ln(x) > 0$.
3. Établir le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[1;4]$.
   Les valeurs seront arrondies au centième.
4. Compléter le tableau de valeurs de la fonction g qui figure en **annexe, à rendre avec** la copie.
   Les résultats seront arrondis au centième.
5. Tracer sur le graphique de l'**annexe** la courbe C_g.

Partie C

Les tailles des fichiers à sauvegarder sont uniformément réparties dans l'intervalle $[1;4]$.
Pour choisir entre les deux propositions de tarif, le directeur du centre de radiologie décide de comparer les valeurs moyennes des fonctions f et g sur l'intervalle $[1;4]$.

1. Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.

a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[1;4]$ par :

$$F(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 6x$$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.

b) Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1;4]$.
Le résultat sera arrondi au dixième.

2. À l'aide d'une calculatrice, on a obtenu le résultat suivant :

$$\frac{1}{3}\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x \approx 7{,}1 .$$

Quel tarif le directeur doit-il choisir ?

Exercice 2 (10 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Une communauté d'agglomération regroupe les communes d'Atout, de Boutan et de Codin. Le site internet de cette communauté d'agglomération, créé en 2006, connaît un succès grandissant.

Partie A

Les habitants des trois communes peuvent, via le site internet, s'abonner à la lettre mensuelle de la communauté d'agglomération.

Monsieur S., directeur des services informatiques, demande à l'administrateur du site de lui donner des éléments qui permettront de répartir le coût d'envoi des lettres mensuelles entre les différentes communes.

Pour l'année 2013, l'administrateur du site a pu établir que, parmi les habitants des trois communes qui se connectent au site :

- 45 % habitent la ville d'Atout ;
- 20 % habitent Boutan ;
- tous les autres habitent Codin ;
- 10 % de ceux qui habitent Atout s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 15 % de ceux qui habitent Boutan s'abonnent à la lettre mensuelle ;
- 5 % de ceux qui habitent Codin s'abonnent à la lettre mensuelle.

On choisit au hasard un internaute d'une des trois communes qui s'est connecté en 2013.
On note :

- A l'événement : « l'internaute habite Atout » ;
- B l'événement : « l'internaute habite Boutan » ;
- C l'événement : « l'internaute habite Codin » ;
- M l'événement : « l'internaute s'abonne à la lettre mensuelle ».

On pourra s'aider d'un arbre pondéré pour répondre aux questions.

1. a) En utilisant les données de l'énoncé, donner les valeurs des probabilités $P(\mathrm{A})$, $P(\mathrm{B})$, $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$, $P_{\mathrm{B}}(\mathrm{M})$ et $P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M})$.

b) Déterminer la probabilité $P(\mathrm{C})$.

2. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi habite Atout et s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.

3. Quelle est la probabilité que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle ?
On donnera le résultat exact sous forme décimale.

4. Sachant que l'internaute choisi s'abonne à la lettre mensuelle, quelle est la probabilité qu'il habite Atout ?
Le résultat sera arrondi au centième.

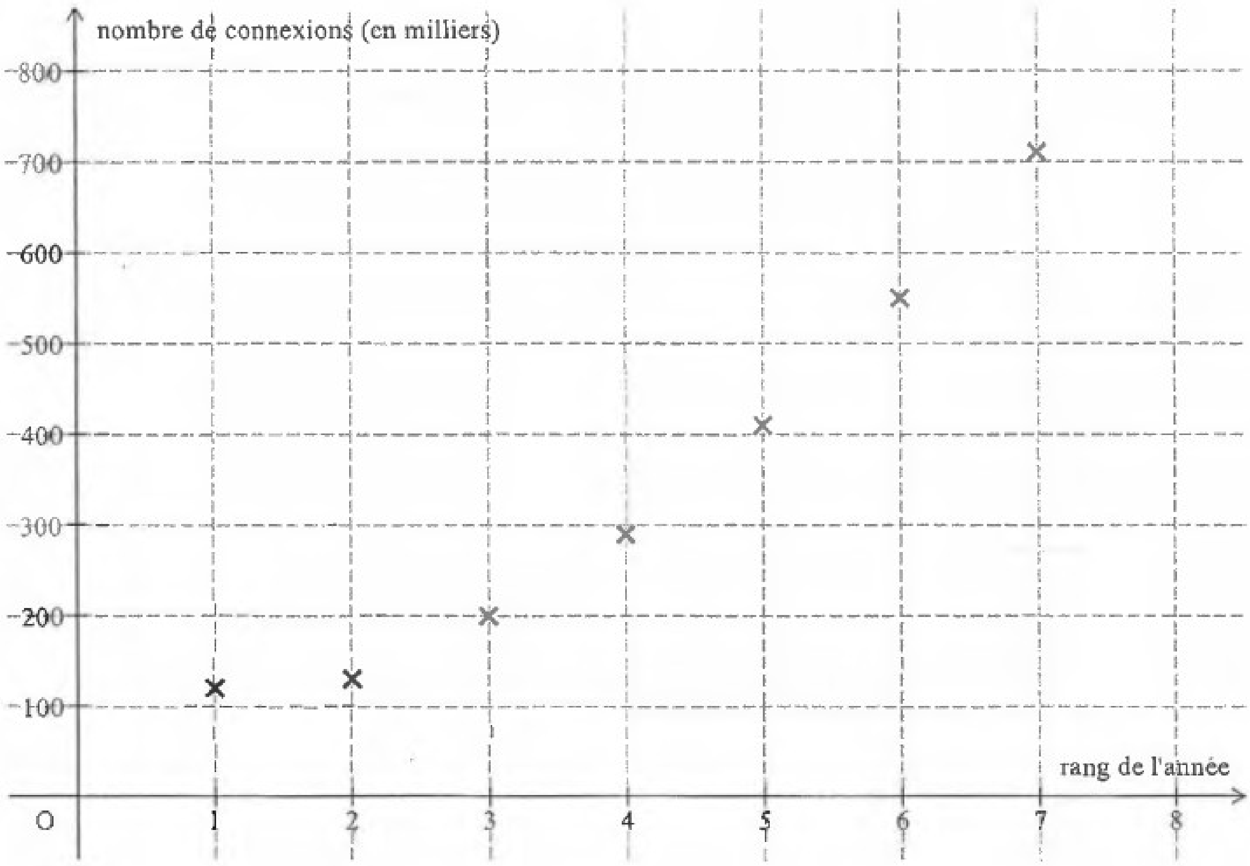
5. L'administrateur du site affirme à Monsieur S. que la commune d'Atout devra payer en 2013 plus de la moitié du coût de l'envoi des lettres mensuelles. A-t-il raison ?

Partie B

Afin d'adapter au mieux les capacités du serveur hébergeant le site internet, le directeur du service informatique, Monsieur S., a mené une étude sur la fréquentation du site. Il souhaite établir une prévision de fréquentation pour les prochaines années.
Le nombre de connexions à la page d'accueil du site pour les sept dernières années a été relevé dans le tableau ci-dessous.

Année		2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Rang de l'année	x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de connexions (en milliers)	y_i	120	130	200	290	410	550	710

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a représenté ci-après le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;y_i)$, pour i variant de 1 à 7.



D'après cette représentation graphique, il ne semble pas judicieux d'utiliser un ajustement affine pour approcher ce nuage de points.

1. On effectue le changement de variable $z_i = \ln(y_i)$, pour i compris entre 1 et 7.
Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau suivant.
Les valeurs seront arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	4,79						

2. Déterminer une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés.
Les coefficients seront arrondis au centième.

3. En déduire qu'il existe deux nombres réels a et b tels que : $y = a\,e^{bx}$.
Le nombre a sera arrondi à l'unité et le nombre b au centième.

4. Les spécificités techniques du serveur impliquent son remplacement lors de l'année au cours de laquelle le nombre de connexions dépasse deux millions.
En admettant que la tendance observée pendant les sept dernières années va se poursuivre, Monsieur S. écrit dans un rapport à destination des élus de la communauté d'agglomération qu'il faudra prévoir de changer le serveur au cours de l'année 2017. A-t-il raison ?

Annexe exercice 1

À rendre avec la copie

Courbe représentative de la fonction f :

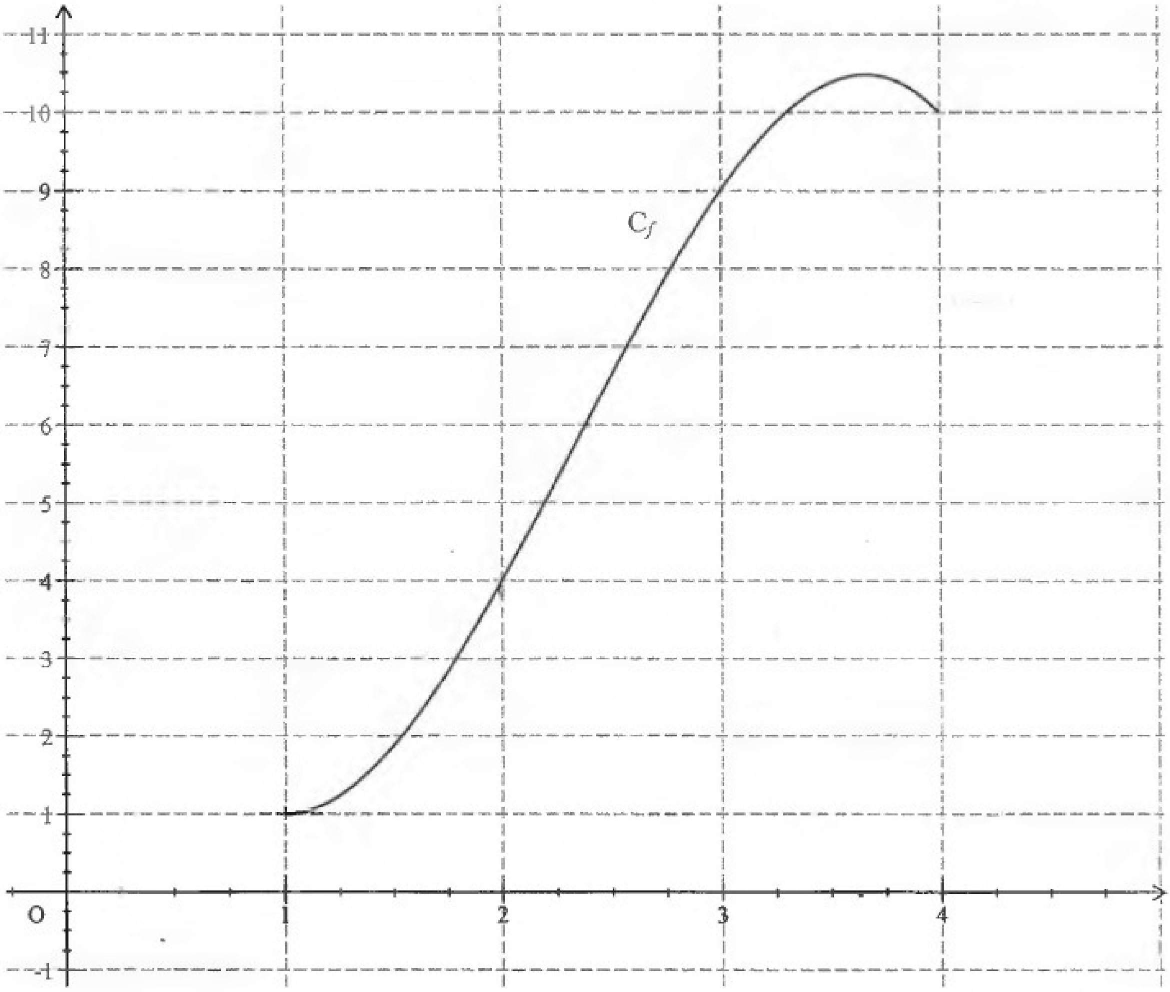


Tableau de valeurs de la fonction g :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$g(x)$							

2013 Métropole

Exercice 1 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée technologique dispose d'un parc informatique de 300 postes, tous du même type et achetés au même moment.

Partie A

Le service d'intendance de ce lycée conduit une étude sur cinq années du coût de maintenance, exprimé en milliers d'euro, de ce parc informatique. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous où i est un entier compris entre 1 et 5.

Âge du parc (en années)	n_i	1	2	3	4	5
Coût de maintenance (en milliers d'euro)	y_i	5,4	7,6	9,6	10,7	13

1. Calculer les coordonnées du point moyen du nuage de points associé à la série $(n_i\,;y_i)$.

2. **a)** Déterminer un arrondi au millième du coefficient de corrélation linéaire de la série $(n_i\,;y_i)$.

b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en n par la méthode des moindres carrés.

3. On suppose que l'évolution du coût de maintenance sur les cinq premières années se poursuit les années suivantes. Estimer le coût de maintenance du parc la huitième année.

Partie B

Au cours d'une journée, un poste du parc informatique du lycée peut fonctionner correctement ou être en panne. On admet que les 300 ordinateurs du lycée qui sont du même type fonctionnent indépendamment les uns des autres.
La probabilité qu'un poste tombe en panne au cours d'une journée est 0,065. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une journée choisie au hasard, associe le nombre de postes tombés en panne dans le parc informatique du lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et en préciser les paramètres.

2. Le gestionnaire du parc informatique affirme : « la probabilité qu'aucun poste ne tombe en panne au cours d'une journée est inférieure à 10^{-6} ».
Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

3. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par celle d'une variable aléatoire X_1 suivant une loi normale.

a) Montrer que cette loi normale a pour moyenne 19,5 et pour écart type 4,3, arrondi au dixième.

b) Le gestionnaire du parc informatique estime que le lycée peut fonctionner correctement si moins de 20 ordinateurs sont en panne dans une journée.
Déterminer la probabilité que le lycée puisse fonctionner correctement dans une journée, c'est-à-dire calculer la probabilité $P\left(X_1 \le 19{,}5\right)$.

Partie C

L'entreprise qui fournit le lycée en ordinateurs dispose de stocks suffisamment importants de cartes mère P_1 et de cartes son P_2. Pour réaliser ses ordinateurs, elle doit insérer dans un logement côte à côte suivant la longueur une carte mère P_1 et une carte son P_2.

On appelle dispositif à insérer dans le logement un assemblage d'une carte mère P_1 et d'une carte son P_2. Le cahier des charges précise que la longueur totale du dispositif à insérer dans le logement doit être comprise entre 195 mm et 207 mm.

On désigne par Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque carte mère P_1, prélevée au hasard dans le stock, associe sa longueur, exprimée en mm. Cette variable aléatoire Y_1 suit la loi normale de moyenne 150 mm et d'écart-type 4 mm.

On désigne par Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque carte son P_2, prélevée au hasard dans le stock, associe sa longueur, exprimée en mm. Cette variable aléatoire Y_2 suit la loi normale de moyenne 52 mm et d'écart-type 3 mm.

La carte mère P_1 et la carte son P_2 à insérer dans le logement pour montage sont choisies au hasard et de manière supposée indépendante. On désigne par Z la variable aléatoire qui, à tout dispositif à insérer dans le logement pris au hasard dans les assemblages, associe sa longueur, exprimée en mm. Ainsi, Z est définie par $Z = Y_1 + Y_2$. On admet que la variable Z suit une loi normale.

1. Montrer que la loi de la variable aléatoire Z a pour moyenne 202 mm et pour écart-type 5 mm.

2. Montrer que la probabilité qu'un dispositif soit conforme au cahier des charges est strictement supérieure à 0,75, c'est-à-dire que : $P(195 \leq Z \leq 207) > 0,75$.

On pourra s'aider si besoin de la table de probabilités ci-dessous.

Table de valeurs, arrondies au dix millième, pour la fonction de répartition de la loi normale de moyenne 202 et d'écart-type 5 :

a	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
$P(Z \leq a)$	0,0082	0,0139	0,0228	0,0359	0,0548	0,0808	0,1151	0,1587	0,2119	0,2743

a	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
$P(Z \leq a)$	0,3446	0,4207	0,5000	0,5793	0,6554	0,7257	0,7881	0,8413	0,8849	0,9192

Exercice 2 (10 points)

La vente d'un objet suit une loi d'offre notée f et une loi de demande notée g.
Les deux fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[0;50]$ par :

$$f(x) = 4\ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = 34 - 6\ln(x+1),$$

où x désigne le prix de vente unitaire, exprimé en dizaines d'euro, $f(x)$ le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter.

Partie A : étude de la fonction g

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée en annexe.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 50]$.

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

3. **a)** Compléter, sur l'**annexe** à rendre avec la copie, le tableau de valeurs de la fonction g. Les résultats seront arrondis au dixième.

b) Tracer sur le graphique de l'**annexe** la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.

Partie B : étude du prix d'équilibre

On appelle E le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et on note $(a;b)$ ses coordonnées.

1. Lire graphiquement les coordonnées du point E. On fera apparaître les pointillés permettant la lecture.

2. Montrer par le calcul que les valeurs exactes de a et b sont respectivement $e^{3,4} - 1$ et 13,6.

3. La valeur a correspond au prix d'équilibre du marché.
Donner la valeur du prix d'équilibre, arrondi à l'euro.

4. Au niveau économique, la rente du producteur, exprimée en milliers d'euro, est le nombre :

$$P = a \times b - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Le nombre P, exprimé en unité d'aire, est l'aire d'une zone du plan ; hachurer une telle zone sur le graphique de l'annexe.
On remarquera pour cela que le produit $a \times b$ est l'aire d'un rectangle.

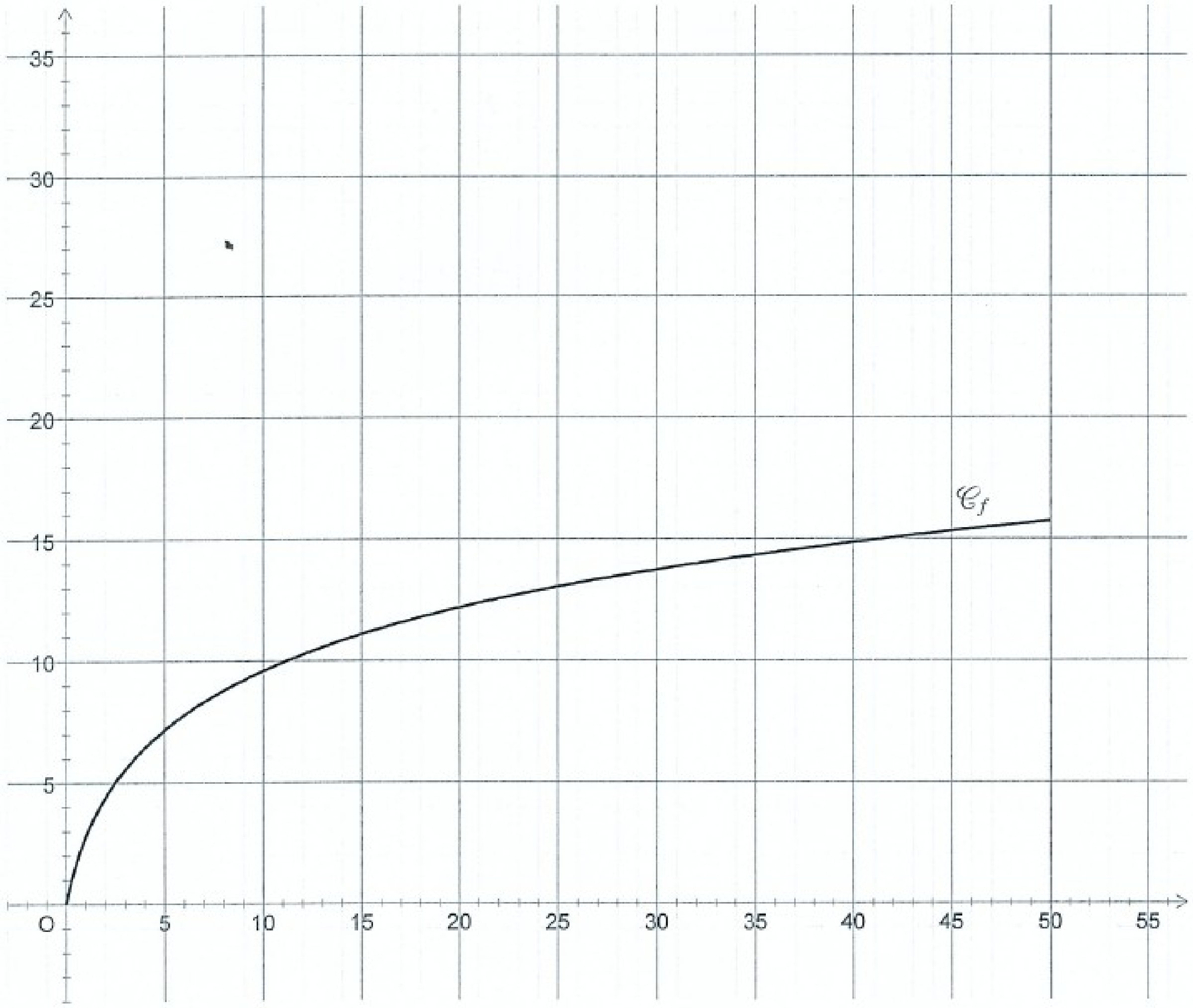
b) Montrer que la fonction H définie sur $[0;50]$ par $H(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction h définie sur $[0 ; 50]$ par $h(x) = \ln(x+1)$.
En déduire la valeur exacte de P et sa valeur arrondie à l'unité.

Annexe à rendre avec la copie

Tableau de valeurs de la fonction g :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$g(x)$	34				15,7			12,5			

Courbes représentatives :



2013 Nouvelle Calédonie

Sans objet

2013 Polynésie

Exercice 1 **10 points**

Partie A

Dans cette partie, on arrondira les résultats au centième.

Le nombre d'internautes en France est donné (en millions) dans le tableau suivant :

Année	2001	2003	2005	2007	2009	2011
x : rang de l'année	1	3	5	7	9	11
y : nombre d'internautes (en millions)	12,86	20,67	25,07	29,55	33,64	39,36

Source : d'après Médiamétrie

1. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre les séries x et y. Arrondir le résultat au centième.
2. On envisage un ajustement affine. Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Arrondir les coefficients au centième.
3. En utilisant l'équation précédente, estimer le nombre d'internautes en 2015, en arrondissant le résultat au demi-million.

Partie B

Dans cette partie, on arrondira les probabilités au millième.

Dans un lycée, le foyer des lycéens a dénombré les élèves utilisant l'internet mobile. La répartition de ces élèves est donnée dans le tableau suivant.

	Filles	Garçons	Total
Utilisent l'internet mobile	148	171	319
N'utilisent pas l'internet mobile	81	50	131
Total	229	221	450

1. On prélève au hasard une fiche dans le fichier des élèves du lycée. On admettra que toutes les fiches ont la même probabilité d'être prélevées. On note :
   — G l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un garçon » ;
   — M l'évènement : « la fiche prélevée est celle d'un élève utilisant l'internet mobile ».

   a. Calculer la probabilité de prélever la fiche d'un garçon.

   b. Montrer que la probabilité de prélever la fiche d'un garçon utilisant l'internet mobile est égale à $0,38$.

   c. Calculer la probabilité de prélever la fiche d'une fille, sachant que l'élève correspondant n'utilise pas l'internet mobile.

   d. Calculer la probabilité $P_M(G)$ et interpréter le résultat.

2. On prélève au hasard et avec remise 40 fiches dans le fichier des élèves du lycée. On admettra que toutes les fiches ont la même probabilité d'être prélevées.

   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de garçons utilisant l'internet mobile parmi les fiches prélevées.

   a. Montrer que la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,38$.

   b. Calculer la probabilité $P(8 \leqslant X \leqslant 10)$.

3. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par celle d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale.

   a. On choisit pour paramètres de la loi normale $m = 15,2$ et $\sigma = 3,1$. Justifier ce choix.

   b. En utilisant cette approximation, calculer la probabilité que, parmi les 40 fiches prélevées, le nombre de garçons utilisant l'internet mobile soit supérieur ou égal à 8 et inférieur ou égal à 10, c'est-à-dire calculer $P(7,5 \leqslant Y \leqslant 10,5)$.

   c. Calculer $P(Y \geqslant 10,5)$. Interpréter ce résultat.

On donne ci-après deux tables de valeurs.

Table de valeurs d'une variable aléatoire U qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,38$:

k	6	7	8	9	10	11	12	13
$P(U = k)$	0,001 0	0,003 0	0,007 6	0,016 6	0,031 5	0,052 6	0,077 9	0,102 8

Table de valeurs d'une variable aléatoire V qui suit la loi normale de paramètres $m = 15,2$ et $\sigma = 3,1$:

a	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	11,5
$P(V \leqslant a)$	0,0025	0,0065	0,0153	0,0330	0,0647	0,1163

Exercice 2 **10 points**

Une entreprise pharmaceutique fabrique un sirop contre la toux. Sa production journalière ne peut pas dépasser 160 litres.
Le coût total de production est modélisé par la fonction f définie pour tout x de l'intervalle $[0 ; 16]$ par :

$$f(x) = 0,4x + \mathrm{e}^{-0,4x+2},$$

où x est exprimé en dizaines de litre et $f(x)$ en centaines d'euro.

1. Quelques valeurs

   a. Recopier et compléter le tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 16]$.

   On arrondira les valeurs au centième.

   b. Quel est le coût pour une fabrication journalière de 90 litres de sirop ?

2. Étude des variations du coût total de production

   a. On a obtenu une expression de la dérivée de la fonction f à l'aide d'un logiciel de calcul formel : $f'(x) = 0,4\left(1 - \mathrm{e}^{-0,4x+2}\right)$.

   Justifier ce résultat.

   b. Résoudre l'inéquation $1 - \mathrm{e}^{-0,4x+2} > 0$ dans l'intervalle $[0 ; 16]$.

   En déduire le signe de $f'(x)$ dans l' l'intervalle $[0 ; 16]$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$.
On arrondira les valeurs au centième.

d. Combien de litres faut-il produire pour que le coût total de production soit minimal ?
Quel est alors le coût minimal de production ?

3. Représentation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$
En utilisant les résultats des questions 1 et 2, représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ dans un repère orthonormé.
On prendra 1 cm pour unité sur chacun des deux axes.

4. Étude graphique du bénéfice
Chaque litre de sirop est vendu 7,50 €. On suppose que toute la production est vendue.

a. Pour la production et la vente de x dizaines de litres, on note $g(x)$ le chiffre d'affaire réalisé, en centaines d'euro. Vérifier que $g(x) = 0,75x$.

b. Tracer dans le même repère que précédemment la représentation graphique de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;\,16]$.

c. Déterminer graphiquement à partir de quelle quantité de sirop produit et vendu, exprimée en litre, l'entreprise réalise un bénéfice journalier.