Propriétés de la matrice A

Dans le tableau 1 se trouvent les observations faites sur la matrice A dans les différents régimes.

	Réelle	Complexe	Symétrique	Hermitienne	Creuse	Bande	Définie Positive	Unitaire	Invertible
Statique	Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Vrai
Harmonique	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai
Stationnaire	Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai
Dynamique	Faux	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Faux	Faux	Faux	Vrai

Table 1: Observations sur les matrices des différents régimes

L'équation de l'élément A_{ik} de la matrice est la suivante :

$$A_{ik} = \int_\Omega \nu \mathbf{grad}(w_k)\mathbf{grad}(w_i) d\Omega + \int_\Omega j\omega\sigma w_k w_i d\Omega + \int_\Omega \mathbf{v}\mathbf{grad}(w_k) w_i d\Omega \tag{1}$$

Interprétation des observations:

- On a observé que les régimes Statiques et Stationnaires sont réels. En effet, quand $f = 0$, $\omega = 2\pi f = 0$, la seconde intégrale est nulle et plus aucun terme n'est multiplié par j (unité imaginaire). Comme tous les paramètres et fonctions de forme sont réels, A_{ik} est réel. Dans les cas où $f \neq 0$, A_{ik} est complexe.
- On voit également que la matrice est symétrique quand $v = 0$. En effet, dans ce cas, la troisième intégrale s'annule. On voit immédiatement que la première et seconde intégrales sont symétriques.
- On sait que la première intégrale est réelle et symétrique. La seconde est purement imaginaire et symétrique et la dernière est réelle et non-symétrique. Pour qu'une matrice soit hermitienne, il faut que ses parties réelles soient symétriques et ses parties imaginaires anti-symétriques. Pour cela, il faut que la 2e et 3e intégrales s'annulent. Ceci n'est vrai qu'en régime statique.
- Les 4 matrices sont creuses. Ceci vient du fait que les fonctions de poids w_i sont nulles en tous les noeuds $k \neq i$: $w_i(N_k) = \delta_{ik}$. Ceci implique que les 3 intégrales de la matrice sont nulles lorsque le noeud i et le noeud k ne se trouvent pas sur le même élément. Remarque : toutes les matrices ont 98.14% de zéros.
- Aucune des 4 matrices n'est à bandes. En effet, bien que pour qu'une entrée de la matrice ne soit pas nulle, il faut que les noeuds i et k soient adjacents (reliés par une arrête d'un élément). Cependant une adjacence au niveau physique ne signifie pas que les indices des noeuds sont également adjacents.
- Seule la matrice statique est définie positive. En effet, une matrice hermitienne (resp. symétrique) a toujours des valeurs propres réelles. Comme la matrice du régime statique vérifie cette condition, ses valeurs sont réelles. Elles sont également positives car les valeurs signulières représentent des amplitudes (et donc des normes) des actions maximales et minimales. Or, une norme est toujours positive. Elles sont également non-nulles (voir justification de invertible)
- Si une matrice est unitaire, toutes ses valeurs singulières sont de module 1. Ici, les valeurs singulières représentent l'amplitude du champ vectoriel magnétique lorsqu'on applique un vecteur de courants nodaux de norme unitaire au système. Si toutes ces valeurs étaient de module unitaire, cela signifierait que peu importe où on apporte un courant dans le système, celui-ci réagirait toujours avec la même amplitude, ce qui n'a pas de sens vu les propriétés physiques du système (i.e. noyau magnétique et plaque conductrice)
- Pour que la matrice ne soit pas invertible il faut qu'une de ses valeurs singulières soit nulle. Ceci n'a pas de sens dans notre problème car cela signifierait qu'il serait possible de générer un potentiel vecteur magnétique non-nul sans introduire de courant dans le système. Une telle situation est physiquement inenvisageable pour le système étudié.

Paramètres influençant le conditionnement de A

Cette section présente l'effet de la largeur de l'entrefer (Fig 1), de la perméabilité relative du noyau magnétique (Fig 2) et du raffinement du maillage (Fig 3) sur les valeurs singulières maximales (σ_n) et

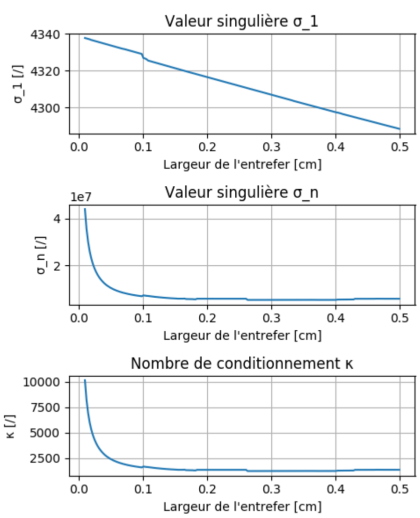

Figure 1: Variation des valeurs singulières et du nombre de conditionnement en fonction de la largeur de l'entrefer

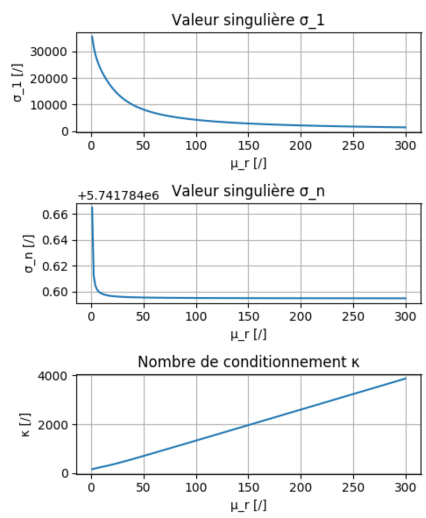

Figure 2: Variation des valeurs singulières et du nombre de conditionnement en fonction de la perméabilité relative

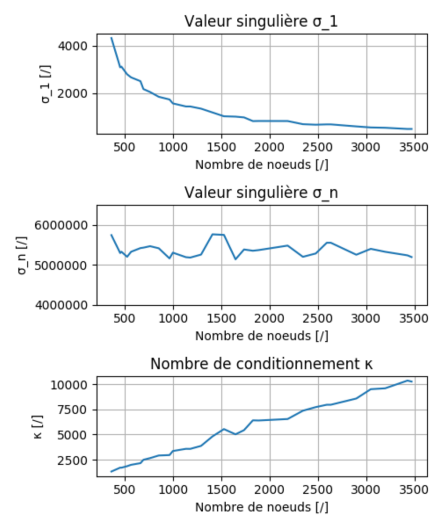

Figure 3: Variation des valeurs singulières et du nombre de conditionnement en fonction de la précision du maillage

minimales (σ_1) et sur le nombre de conditionnement κ de la matrice A. Les intervalles des 3 paramètres ont été choisis de la manière suivante. Pour l'enterfer, on commence l'intervalle très près de la plaque : $0.1mm$ (au plus un entrefer est petit, au plus son effet est marqué, mais il faut qu'il reste des éléments entre le noyau et la plaque) et on le termine à $0.5cm$ (après cette valeur, les graphes des valeurs singulières sont tous les deux très proches de 0 et donc moins intéressants). Pour la perméabilité relative, on commence à $\mu_r = 1$ (même perméabilité relative que l'air) et on termine l'intervalle à $\mu_r = 300$ (de nouveau les graphes sont très proches de 0 après cette valeur). Pour le maillage on a calculé 30 valeurs entre 1 ($\approx$ 400 noeuds), un maillage plus petit serait trop grossier, et 4 ($\approx$ 3600 neouds), car un maillage plus précis prendrait trop de temps.

Interprétation

En faisant l'analogie avec le problème de la poutre encastrée, on remarque que dans notre problème, ce qui correspond au vecteur des déplacements nodaux est en fait la composante selon z de $\mathbf{a}$ (en régime statique, $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}$), le potentiel vecteur magnétique. Et ce qui correspond au vecteur de forces nodales, est le vecteur des courants nodaux $b_i = \int_\Omega J w_i d\Omega$. On a donc : $\mathbf{A}\mathbf{a}_z = \mathbf{b}$

Dans le cas normal, où on met la même quantité de courant dans tous les noeuds qui composent la région "bobine" (dans un sens ou dans l'autre en fonction de quelle partie de la bobine on considère), on observe que le potentiel vecteur magnétique est le plus grand dans la zone proche de la partie supérieure du noyau magnétique (tout en restant dans la zone bobine). Ceci est dû au fait que le potentiel vecteur magnétique va être plus important à proximité d'un matériau magnétique (plus grande perméabilité que l'air).

Si on venait maintenant imposer un courant non-nul dans un seul noeud du maillage (dans un sens et dans l'autre de l'autre coté de la bobine evidemment) et d'amplitude unitaire dans le but de créer le plus grand potentiel vecteur magnétique, c'est en appliquant ce courant en un noeud à l'intérieur du creux du noyau magnétique de manière à ce que le potentiel vecteur magnétique "profite" de la grande perméabilité relative du noyau magnétique ansi que de l'effet du potentiel vecteur magnétique engendré par le courant induit dans la plaque inférieure.

A l'inverse, si on doit imposer un courant nodal non-nul dans un seul noeud et d'amplitude unitaire pour créer le plus petit potentiel vecteur magnétique, il serait intéressant de le placer à un endroit loin du noyau de manière a ce que le potentiel vecteur magnétique n'ait une perméabilité relative que de 1 (ou la plus petite possible). Il faut aussi le placer proche de la plaque de manière à ce que la plaque subisse un courant induit dont le potentiel vecteur magnétique induit s'opposera à la variation de potentiel vecteur magnétique.

Bonus : Allure des graphes

On sait que pour chaque valeur singulière σ_i, on a : $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \implies \mathbf{A}(\mathbf{v}_i/\sigma_i) = \mathbf{u}_i$

On voit que la valeur singulière minimale (σ_1) varie très peu en fonction de la largeur de l'entrefer, ceci vient du fait que pour σ_1 le potentiel vecteur magnétique créé par le courant induit dans la plaque est négligeable par rapport à celui dans l'entrefer (mais comme il s'y oppose, plus on s'éloigne, plus le potentiel sera grand). Donc peu importe où se trouve le noyau, on aura un grand potentiel vecteur magnétique. Pour σ_n en revanche, un grand entrefer signifie un plus grand écart entre la plaque et le noyau, ce qui signifie qu'on peut "profiter" du potentiel vecteur magnétique induit par la plaque qui s'oppose à celui créé par le fil sans avoir une amplification par le noyau.

Pour le noyau magnétique, le raisonnement est inverse, σ_n varie peu car le courant nodal lié à cette valeur singulière est un pic au plus loin possible du noyau (donc peu influencé par la perméabilité de celui-ci). σ_1 en revanche est lié à un vecteur de courants nodaux au centre du noyau. Au plus la perméabilité de celui-ci est grande, au plus le potentiel vecteur magnétique sera grand (inversément proportionel à σ_1).