Statistique de Bose-Einstein

Statistique de Bose-Einstein	
Type	Théorie scientifique, statistique
Nommé en référence à	Satyendranath Bose, Albert Einstein
Aspect de	Distribution statistique des particules (en)
Formule	$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_B T}\right)-1}$

En mécanique quantique et en physique statistique, la **statistique de Bose-Einstein** désigne la distribution statistique de bosons indiscernables (tous similaires) sur les états d'énergie d'un système à l'équilibre thermodynamique. La distribution en question résulte d'une particularité des bosons : les particules de spin entier ne sont pas assujetties au principe d'exclusion de Pauli, à savoir que plusieurs bosons peuvent occuper simultanément un même état quantique.

Distribution de Bose-Einstein

La statistique de Bose-Einstein a été introduite par Satyendranath Bose en 1920 pour les photons et généralisée aux atomes par Albert Einstein en 1924. Statistiquement, à l'équilibre thermodynamique, le nombre n_i de particules d'énergie E_i est

$$n_i = \frac{g_i}{\exp\left(\frac{E_i-\mu}{k_\mathrm{B} T}\right)-1}$$

où :

- g_i est la dégénérescence du niveau d'énergie E_i, à savoir le nombre d'états possédant cette énergie ;
- μ est le potentiel chimique ;
- k_B est la constante de Boltzmann ;
- T est la température.

Entropie et dérivation dans l'ensemble microcanonique

L'entropie d'un système constitué par des bosons indiscernables, décrits par des fonctions d'onde symétriques (spin entier), peut être trouvée en utilisant la description statistique due à J. Willard Gibbs[1]. Elle vaut

$$S = k_\mathrm{B} \sum_j G_j \left[(1+n_j)\log(1+n_j) - n_j \log n_j\right]$$

où

k_B constante de Boltzmann,

n_j nombre d'occupation (proportion de bosons dans un état d'énergie donné),

G_j nombre d'états possibles dans le groupe *j* (dégénérescence).

Démonstration

En suivant la méthode énoncée par J.W. Gibbs en physique statistique on dénombre dans le système étudié les bosons d'énergie E_j, leur nombre dans ce groupe N_j, chacun de ces groupes pouvant comporter G_j états. Le calcul de l'entropie revient à calculer le poids statistique Ω d'un tel système, c'est-à-dire le nombre de micro-états accessibles permettant de réaliser cet état macroscopique. Chaque groupe étant supposé indépendant on a $\Omega = \Pi_j\, \Omega_j$. Le problème est donc ramené à la connaissance de Ω_j.

Le nombre de possibilités de répartir N_j particules indiscernables dans G_j états est

$$\Omega_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{(G_j - 1)!N_j!}$$

En utilisant la formule de Stirling, on retient l'approximation $\log N! \approx N \log N$ on calcule l'entropie (on supposera que 1 est négligeable devant N_j ou G_j)

$$S = k_\mathrm{B} \log \Omega = k_\mathrm{B} \sum_j \log \Omega_j = k_\mathrm{B} \sum_j \left[-G_j \log G_j - N_j \log N_j + (G_j +\right.$$

Soit, en introduisant le nombre d'occupation $n_j = \frac{N_j}{G_j}$

$$S = k_\mathrm{B} \sum_j G_j \left[(1 + n_j) \log{(1 + n_j)} - n_j \log n_j\right]$$

Dans l'ensemble microcanonique, les variables thermodynamiques à l'équilibre sont obtenus par maximisation de l'entropie sous contrainte de respecter le nombre total de bosons $N = \sum_i G_i n_i$ et l'énergie totale $E = \sum_i n_i G_i E_i$. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, α pour le nombre de particules et β pour l'énergie, la solution vérifie

$$\frac{\partial}{\partial n_j} \left(S - \alpha N - \beta E\right) = 0\,, \qquad \forall j$$

La solution de ce système d'équations indépendantes est la distribution statistique de Bose-Einstein

$$n_j = \frac{1}{\mathrm{e}^{\alpha + \beta E_j} - 1}$$

On peut retrouver les valeurs de α et β à partir du premier principe de la thermodynamique. Donc, $\alpha = -\mu\,\beta$ et $\beta = (k_B T)^{-1}$.

Limite classique et comparaison avec les fermions

À haute température, lorsque les effets quantiques ne se font plus sentir, la statistique de Bose-Einstein, comme la statistique de Fermi-Dirac qui régit les fermions, tend vers la statistique de Maxwell-Boltzmann. Aux basses températures, cependant, les deux statistiques diffèrent entre elles. Ainsi, à température nulle :

- avec la statistique de Bose-Einstein, le niveau de plus basse énergie contient tous les bosons;
- avec la statistique de Fermi-Dirac, les niveaux de plus basse énergie contiennent chacun au plus g_i fermions.

Condensat de Bose-Einstein

Comme vu précédemment, la statistique de Bose-Einstein prévoit qu'à température nulle, toutes les particules occupent le même état quantique, celui de plus basse énergie. Ce phénomène est observable à l'échelle macroscopique et constitue un condensat de Bose-Einstein.

Notes et références

- Cet article est partiellement ou en totalité issu de l'article intitulé « Entropie (bosons) (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Entropie_(bosons)&oldid=150945269) » (voir la liste des auteurs (https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Entropie_(bosons)&oldid=150945269&action=history)).

1. **(en)** Lev Landau et Evgueni Lifchits, *Statistical Physics*, Pergamon Press, 1969 (lire en ligne (https://archive.org/details/ost-physics-landaulifshitz-statisticalphysics))

Voir aussi

Sur les autres projets Wikimedia :

- *Statistique de Bose-Einstein (https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Bose-Einstein_distribution?uselang=fr)*, sur Wikimedia Commons
- *Statistique de Bose-Einstein*, sur Wikiversity

Bibliographie

- [Bose 1924] **(de)** Satyendra Nath Bose (trad. de l'anglais par Albert Einstein), « Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese » [« La loi de Planck et l'hypothèse des quanta de lumière »], *Zeitschrift für Physik*, vol. 26, déc. 1924, p. 178-181 (OCLC 4646217659 (https://worldcat.org/fr/title/4646217659), DOI 10.1007/BF01327326 (https://dx.doi.org/10.1007/BF01327326), Bibcode 1924ZPhy...26..178B (https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1924ZPhy...26..178B), résumé (https://link.s pringer.com/article/10.1007/BF01327326), lire en ligne (https://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/wise_09_10/quantum_matter/lecture/Bose1924.pdf) **[PDF]**) :

  - [Bose 2005] Satyendra Nath Bose (trad. de l'allemand par Georges Frick), *La loi de Planck et l'hypothèse des quantas de lumière*, dans José Leite-Lopes et Bruno Escoubès (éd. et av.-prop.) (préf. de Jean-Marc Lévy-Leblond), *Sources et évolution de la physique quantique : textes fondateurs*, Les Ulis, EDP Sciences, hors coll., nov. 2005, 1re éd., 1 vol., XIV-316, ill., fig., graph. et portr., 16 × 24 cm (ISBN 2-86883-815-4, EAN 9782868838155, OCLC 80146859 (https://worldcat.org/fr/title/80146859), BNF 39987077 (https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb399870773.public), SUDOC 094109842 (https://www.sudoc.fr/094109842), présentation en ligne (https://laboutique.edpsciences.fr/produit/9782868838155), lire en ligne (https://books.google.com/books?id=x4Y5L1sja4EC)), chap. 3, sect. 3.1, art. VIII [« La statistique des bosons »], p. 85-88.

- [Einstein 1924] **(de)** Albert Einstein, « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases » [« Théorie quantique du gaz parfait monoatomique »], *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1924, p. 261-267.
- [Einstein 1925a] **(de)** Albert Einstein, « Quantentheorie des einatomigen idealen Gases : zweite Abhandlung » [« Théorie quantique du gaz parfait monoatomique : deuxième mémoire »], *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1925, p. 3-14.
- [Einstein 1925b] **(de)** Albert Einstein, « Zur Quantentheorie des idealen Gases » [« Théorie quantique du gaz parfait »], *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1925, p. 18-25.

Articles connexes

- Autres distributions statistiques en physique statistique :
  - en mécanique quantique : Statistique de Fermi-Dirac et Anyon
  - en mécanique classique : Statistique de Maxwell-Boltzmann
- Fonction de Bose
- Physique quantique
- Physique statistique

-