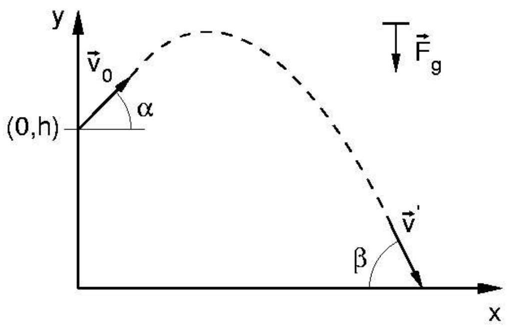
Experimentalphysik 1 Prof. Andreas Meyer, Florian Kargl
Musterlösung Probeklausur WS 2005/06

Aufgabe 1:



$\boxed{1}$

a) $\vec{F} = m\,\vec{a} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ $\boxed{2}$

Reduktion des Problems auf 2 Dimensionen.

b) Lösen der Bewegungsgleichung in x und y - Richtung.

$\ddot{x}(t) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = v_{ox} \overset{\boxed{1}}{=} |\vec{v}_0| \cdot \cos\,\alpha$ und $x(t) \overset{\boxed{1}}{=} |\vec{v}_0| \cdot \cos\,\alpha \cdot t$

mit der Anfangsbedingung $\dot{x}(t=0) = v_x(t=0) = v_{0x}$ $\boxed{1/2}$ in x Richtung.

$\ddot{y}(t) = -g \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = -g\,t + v_{0y} = -g\,t + |\vec{v}_0|\,\sin\,\alpha$ $\boxed{1}$

und folglich $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + |\vec{v}_0|\,\sin\,\alpha \cdot t + h$ $\boxed{1}$

mit den Anfangsbedingungen: $\dot{y}(t=0) = v_1(t=0) = v_{0y}$ und $x(t=0) = h$. $\boxed{1/2}$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) \overset{\boxed{1/2}}{=} \begin{pmatrix} |\vec{v}_0|\,\cos\,\alpha \\ -g\,t + |\vec{v}_0|\,\sin\,\alpha \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r}(t) \overset{\boxed{1/2}}{=} \begin{pmatrix} |\vec{v}_0|\,\cos\,\alpha \cdot t \\ -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + |\vec{v}_0|\,\sin\,\alpha \cdot t + h \end{pmatrix}$$

c) Für $h = 0$ gilt:

$x = |\vec{v}_0|\,\cos\,\alpha\,t$

$\Rightarrow t = \dfrac{x}{|\vec{v}_0|\,\cos\,\alpha}$ $\boxed{1/2}$

$y \overset{\boxed{1/2}}{=} -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + |\vec{v}_0|\,\sin\,\alpha\,t$

Einsetzen von t in y

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{|\vec{v}_0|^2\,\cos^2\,\alpha} + x \cdot \tan\,\alpha \quad \boxed{1}$$

Auftreffen auf den Boden:

$$y(x) = 0 = x\left(-\frac{1}{2}\,g\,\frac{x}{|\vec{v}_0|^2\,\cos^2\,\alpha} + \tan\,\alpha\right) \quad \boxed{1}$$

Lösung 1: $x = 0$ (Abschusspunkt) $\boxed{1/2}$

Lösung 2: $\left(-\frac{1}{2}\,g\,\frac{x}{|\vec{v}_0|^2\,\cos^2\,\alpha}+\tan\,\alpha\right)=0 \quad \boxed{1/2}$

$\Rightarrow\; x=\frac{2\,|\vec{v}_0|^2}{g}\,\sin\,\alpha\cdot\cos\,\alpha \quad \boxed{1}$

x wird maximal, falls $\frac{dx}{d\alpha}=0 \quad \boxed{1}$

also $\frac{dx}{d\alpha}=\frac{2\,|\vec{v}_0|^2}{g}\,(2\,\cos^2\,\alpha-1)=0 \quad \boxed{1}$

$\Leftrightarrow\; \cos\,\alpha=+\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \boxed{1/2}$

$\Rightarrow\; \alpha=45^\circ \quad \boxed{1/2}$

d) $\alpha=45^\circ\,,\;h=3\;\text{m}$

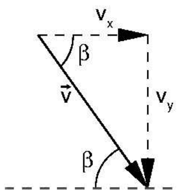
i) $y=0=-\frac{1}{2}\,g\,t^2+\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}\,t+3 \quad \boxed{1}$

$$t_{1/2}\overset{\boxed{1}}{=}\frac{-\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}+6\,\text{m}\,g}}{-g}\overset{\boxed{1/2}}{=}\frac{\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}\pm\sqrt{\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}+6\,\text{m}\,g}}{g}$$

$$v_x=|\vec{v}_0|\,\cos\,\alpha=\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}$$

$$v_y\overset{\boxed{1}}{=}-\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}+6\,\text{m}\,g}+\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}\overset{\boxed{1/2}}{=}-\sqrt{\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}+6\,\text{m}\,g}$$

$\Rightarrow$



$$\tan\,\beta\overset{\boxed{1}}{=}\frac{v_y}{v_x}=\frac{\left|-\sqrt{\frac{\vec{v}_0^2}{2}+6\,\text{m}\,g}\right|}{\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}}\overset{\boxed{1/2}}{=}\sqrt{1+\frac{12\,\text{m}\,g}{|\vec{v}_0|^2}}$$

$$\beta\overset{\boxed{1/2}}{=}\arctan\sqrt{1+\frac{12\,\text{m}\,g}{|\vec{v}_0|^2}}$$

ii) Zweite Möglichkeit der Berechnung

$y(x)=-\frac{g\,x^2}{2\,|\vec{v}_0|^2\cos^2\alpha}+x\,\tan\alpha+h=0 \quad \boxed{1/2}$

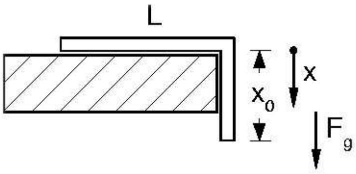
$$x_{1/2}=\frac{|\vec{v}_0^2|\,\sin\alpha\,\cos\alpha\overset{(-)}{+}\sqrt{|\vec{v}_0|^4\,\sin^2\,\alpha\,\cos^2\alpha+2\,g\,h\,|\vec{v}_0|^2\,\cos^2\alpha}}{g} \quad \boxed{1}$$

Mit $x=|\vec{v}_0|\,\cos\alpha\,t=\frac{|\vec{v}_0|}{\sqrt{2}}\,t$ folgt

$$t\overset{\boxed{1/2}}{=}\frac{\sqrt{2}}{|\vec{v}_0|}\frac{|\vec{v}_0|^2\,1/2+\sqrt{|\vec{v}_0|^2\,1/4+6\,\text{m}\,g\,1/2}}{g}\overset{\boxed{1/2}}{=}\frac{|v_0|}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{|\vec{v}_0|^2}{2}+6\,\text{m}\,g}\right)$$

Die Berechnung erfolgt ab hier analog zu i).

Aufgabe 2



$L = 1.5\,\mathrm{m}$
$\mu_H = 0.2$ $\boxed{1/2}$

a) Damit das Seil zu rutschen beginnt, muss gelten

$F_H \leq F_g$ $\boxed{1}$

d.h. $\mu_H m' \, g \leq m'' \, g$ $\boxed{1}$

mit $m' = \rho \cdot (L - x)$ $\boxed{1}$

und $m'' = \rho \, x$ $\boxed{1}$

folgt: $\mu_H \, \rho (L - x) \, g \leq \rho \, g \, x$

$\Rightarrow \quad \mu_H \, L \leq x \, (1 + \mu_H)$ $\boxed{1/2}$

$$x \geq \frac{\mu_H \, L}{1 + \mu_H} \quad \boxed{1/2}$$
$$= \frac{0.2 \cdot 0.5}{1.2} = 0.25\,\mathrm{m} \quad \boxed{1/2}$$

Das Seilstück, welches über den Tisch hängt, muss mindestens $x_0 = 0.25\,\mathrm{m}$ lang sein, damit das Seil zu rutschen beginnt.

b) Kraftansatz über Impulsänderung.

$\frac{dp_s}{dt} = F$ $\boxed{1}$

$p_s = m \cdot v$ $\boxed{1}$

mit der Gesamtmasse des Seils $m = \rho \, L$ $\boxed{1}$

Folglich gilt mit $v = \dot{x}$

$$\frac{d(m \, \dot{x})}{dt} = m' \cdot g = \rho \cdot x \cdot g \quad \boxed{1}$$

$\ddot{x} = \frac{g}{L} \, x$ $\boxed{1}$

mit Anfangsbedingungen $x(t = 0) = x_0$ $\boxed{1/2}$

und $\dot{x}(t = 0) = v(t = 0) = 0$ $\boxed{1/2}$

c) Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bewegungsgleichung zu lösen:

i) geschickte Trennung der Variablen

$\ddot{x} \, \dot{x} = \frac{g}{L} \, x \, \dot{x}$ $\boxed{1}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2(t)}{2}\right) = \frac{g}{L} \, \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2(t)}{2}\right) \quad \boxed{2}$$

ii) Ansatz mit Exponentialfunktion

$x = A \, e^{\gamma \, t}$ $\boxed{2}$

$$\gamma^2 \, A \, e^{\gamma \, t} = \frac{g}{L} \, A \, e^{\gamma \, t} \quad \boxed{2}$$

Integration unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen

$\dot{x}^2(t) = \frac{g}{L}\,(x^2(t) - x_0^2) \quad \boxed{1}$

$\dot{x}(t) = \sqrt{\frac{g}{L}}\,\sqrt{x^2 - x_0^2} \quad \boxed{1}$

Trennung der Variablen

$$\int\limits_{\tilde{x}=x_0}^{x} \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 - x_0^2}} = \int\limits_{t'=0}^{t} \sqrt{\frac{g}{L}}\,dt' \quad \boxed{1}$$

$$\ln \frac{\left|x + \sqrt{x^2 - x_0^2}\right|}{x_0} = \sqrt{\frac{g}{L}}\,t \quad \text{(I)} \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} x\,\sqrt{x^2 - x_0^2} &= x_0\,e^{\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} && \boxed{1/2} \\ x^2 - x_0^2 &= x_0^2\,e^{2\,\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} + x^2 - 2\,x_0\,x\,e^{\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} \\ 2\,x_0\,x\,e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} &\overset{\boxed{1/2}}{=} x_0\,e^{2\,\sqrt{\frac{g}{L}}t} + x_0^2 \\ x(t) &\overset{\boxed{1}}{=} \frac{x_0}{2}\left[e^{\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}\,t}\right] \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ \gamma^2 \overset{\boxed{1/2}}{=} \frac{g}{L}$ und somit $\gamma \overset{\boxed{1/2}}{=} \pm\sqrt{\frac{g}{L}}$

Folglich lautet die allgemeine Lösung:

$$x(t) = A \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} + A\,e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}\,t} \quad \boxed{2}$$

mit den Anfangsbedingungen.

$x(t=0) = x_0$ und $\dot{x}(t=0) = 0$

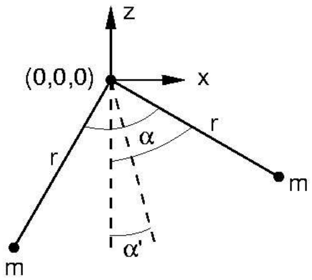
folgt:

$x_0 = A + A = 2\,A$

$\Rightarrow\ A = \frac{x_0}{2}$ und $\boxed{1}$

$$\dot{x}(t=0) = \frac{x_0}{2}\left[\sqrt{\frac{g}{L}}\,e^{\sqrt{\frac{g}{L}}\,0} - \sqrt{\frac{g}{L}}\,e^{-\sqrt{\frac{g}{L}}\,0}\right] = 0 \quad \boxed{1}$$

Aufgabe 3:



$\boxed{1/2}$

a) Gesamtdrehmoment $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ $\boxed{1}$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\,\alpha \\ 0 \\ -r \cdot \cos\,\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1/2} \\ \\ \boxed{1/2} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} \boxed{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ mg\,r\,\sin\,\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1/2}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} r \cdot \sin\,(\alpha - 90°) \\ 0 \\ -r \cdot \cos\,(\alpha - 90°) \end{pmatrix} \begin{matrix} \boxed{1/2} \\ \\ \boxed{1/2} \end{matrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{pmatrix} \boxed{1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ m\,g\,r\,\sin\,(\alpha - 90°) \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1/2}$$

$$\Rightarrow\ \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ m\,g\,r\,(\sin\,\alpha - \cos\,\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \boxed{1/2}$$

b) Die Bewegungsgleichung ergibt sich über die Beziehung von Drehimpuls und Drehmoment:

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \boxed{1}$$

Im Fall des Winkeleisens Drehung um die y Achse, Drehmoment $\vec{M}$ hat nur y Komponente. Es handelt sich um Punktmassen.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\Theta\,\dot{\omega} = mg\,r\,(\sin\,\alpha - \cos\,\alpha) \quad \boxed{2}$$

Transformation auf $\alpha^{'} = \alpha - 45°$

mit $\omega^{'} = \dot{\alpha}' = \dot{\alpha}$ $\boxed{1}$

$-\Theta\,\ddot{\alpha}^{'} = m\,g\,r\,(\sin\,(\alpha^{'} + 45°) - \cos\,(\alpha^{'} + 45°))$ $\boxed{1}$

und $\Theta = 2\,m\,g\,r^2$ $\boxed{1}$

folgt:

$$-\ddot{\alpha}^{'} = \frac{g}{2r}\,(\sin\,\alpha^{'}\,\cos\,45° + \sin\,45°\,\cos\,\alpha^{'} - \cos\,\alpha^{'}\,\cos\,45° + \sin\,\alpha^{'}\,\sin\,45°) \quad \boxed{2}$$

mit $\sin\,45° = \cos\,45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\boxed{1}$

folgt $\ddot{\alpha}^{'} = -\dfrac{g}{r\,\sqrt{2}}\,\sin\,\alpha$ $\boxed{1}$

c) Analog zum mathematischen Pendel betrachten wir kleine Auslenkungen $\alpha^{'}$ des Winkeleisens.

$\Rightarrow\ \sin\,\alpha^{'} \approx \alpha^{'}$ $\boxed{1}$

Folglich gilt für die Bewegungsgleichung

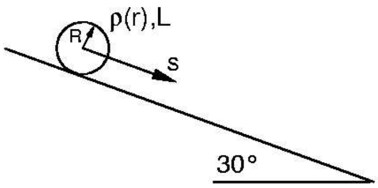
$$\ddot{\alpha}^{'} = -\frac{g}{\sqrt{2}\,r}\,\alpha^{'}$$

Ansatz: $\alpha^{'} = \alpha_0^{'} \cdot \sin{(\omega t + \varphi_0)}$ $\boxed{1}$

$$-\omega^2\,\alpha_0\,\sin{(\omega t + \varphi_0)} = -\frac{g}{\sqrt{2}\,r}\,\sin{(\omega t + \varphi_0)} \quad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow\ \omega = \pm\sqrt{\frac{g}{\sqrt{2}\,r}} \quad \boxed{1}$$

Aufgabe 4:



$\boxed{1}$

a) $\Theta = \displaystyle\int a^2\, dm$ $\boxed{1}$

mit $dm = \rho\, dV = \rho(r)\, r\, dr\, d\varphi\, dz$ $\boxed{1}$ und $a = r$ $\boxed{1}$

Für die linear zunehmende Dichte verwendet man als Ansatz
$\rho(r) = c + b \cdot r.$ $\boxed{1/2}$

Mit den Anfangsbedingungen $\rho(r=0) = c = \rho_0$ $\boxed{1/2}$

und $\rho(r=R) = c + b\, R = 4\, \rho_0$

$$\Rightarrow\ b = \frac{3\,\rho_0}{R} \quad \boxed{1/2}$$

folgt $\rho(r) = \rho_0 + \dfrac{3\,\rho_0}{R} \cdot r = \rho_0 \left(1 + \dfrac{3}{R}\, r\right)$ $\boxed{1/2}$

Somit gilt

$$\Theta = \rho_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(1 + \frac{3}{R}\, r\right) r^3\, dr\, d\varphi\, dz$$

$$\overset{\boxed{2}}{=} 2\pi\, L\, \rho_0 \left[\int_0^R r^3\, dr + \int_0^R \frac{3\, r^4}{R}\, dr\right]$$

$$\overset{\boxed{1}}{=} 2\pi\, L\, \rho_0 \left[\frac{1}{4}\, R^4 + \frac{3}{5}\, R^4\right]$$

$$\overset{\boxed{1/2}}{=} \frac{17}{10}\, \pi\, L\, \rho_0\, R^4$$

$\Rightarrow\ \Theta = 0.0334\, \mathrm{kg\, m^2}$ $\boxed{1/2}$

b) 2 Lösungsmöglichkeiten

i) Es gilt mit Energieerhaltung:

$E_{pot} = E_{rot} + E_{kin}$ $\boxed{1}$

$m\, g\, \Delta h = \dfrac{1}{2}\, \Theta\, \omega^2 + \dfrac{1}{2}\, m\, v^2\,.$ $\boxed{1}$

Mit $v \overset{\boxed{1}}{=} R\, \omega$ und

$v \overset{\boxed{1}}{=} \dot{s}$ folgt

$m\, g\, \Delta h = \dfrac{1}{2}\, \Theta\, \dfrac{\dot{s}^2}{R^2} + \dfrac{1}{2}\, m\, \dot{s}^2$ $\boxed{1/2}$

$$\Rightarrow \ \dot{s} = \sqrt{\frac{2\,mg\,\Delta h}{\frac{\Theta}{R^2} + m}} \quad \boxed{1/2}$$

Mit $m \overset{\boxed{1}}{=} \int dm = 2\pi\, L\, \rho_0 \int\limits_0^R \left(1 + \frac{3}{R}\, r\right)\, r\, dr$

$$= 2\pi\, L\, \rho_0 \left[\frac{1}{2}\, R^2 + R^2\right] = 3\pi\, L\, \rho_0\, R^2 \quad \boxed{1/2}$$

folgt: $\dot{s} = \sqrt{\dfrac{2\,mg\,\Delta h}{m\left(\dfrac{17}{30} + 1\right)}} = \sqrt{\dfrac{2\,g\,\Delta h}{\dfrac{47}{30}}} \quad \boxed{1/2}$

$$\dot{s} = 5.00\, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad \boxed{1/2}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}\, \Theta\, \frac{\dot{s}^2}{R^2} = \frac{1}{2}\, \pi\, \rho_0\, L\, \frac{17}{30}\, R^2 \cdot \frac{2\,g\,\Delta h}{\frac{47}{30}} = \frac{51}{47}\, \pi\, \rho_0\, L\, R^2\, g\, \Delta h = 167.2\,\mathrm{Nm} \quad \boxed{1/2}$$

ii) Betrachtung der Drehbewegung um den Auflagepunkt des Zylinders auf der Ebene:

Es gilt

$$\dot{\omega} \overset{\boxed{1/2}}{=} \frac{|\vec{M}_A|}{\Theta_A} \overset{\boxed{1}}{=} \frac{m\, g\, R\, \sin\alpha}{\Theta + m\, R^2}$$

(Θ_A ergibt sich mit dem Satz von Steiner)
Die Rollbedingung lautet: $\dot{s} = R\,\omega$ $\boxed{1/2}$ und folglich $\ddot{s} = R\,\dot{\omega}$

s ist die Strecke, die der Zylinder auf der schiefen Ebene zurücklegt. Die Masse wird analog zu i) berechnet (s. Herleitung und Bepunktung)

Es folgt für $\dot{\omega}$

$$\dot{\omega} = \frac{\ddot{s}}{R} = \frac{m\, g\, R\, \sin\alpha}{\frac{17}{30}\, m\, R^2 + m\, R^2}\,. \quad \boxed{1/2}$$

Somit gilt $\ddot{s} = \dfrac{30\, g\, \sin\alpha}{47}\,. \quad \boxed{1/2}$

Integration über die Zeit t unter Verwendung der Anfangsbedingungen $s(t = 0) = 0$ und $\dot{s}(t = 0) = 0$ liefert

$$\dot{s} = \int \ddot{s}\, dt = \frac{30}{47}\, g\, \sin\alpha\, t \quad \boxed{1/2}$$

$$s = \int \dot{s}\, dt = \frac{30}{94}\, g\, \sin\alpha\, t^2 \quad \boxed{1/2}$$

Mit $s(t) \overset{\boxed{1/2}}{=} \dfrac{\Delta h}{\sin\alpha}$ folgt $t \overset{\boxed{1/2}}{=} \sqrt{\dfrac{94\, \Delta h}{30\, g\, \sin\alpha}}\,.$

Folglich gilt

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\frac{60\, g\, \Delta h}{47}} \quad \boxed{1/2}$$

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = 5.00\ \mathrm{m\, s^{-1}} \quad \boxed{1/2}$$

Die Rotationsenergie berechnet sich analog zum Lösungsweg i) bei gleicher Bepunktung.

c) Mit den Anfangsbedingungen

$$s(t = 0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{s}(t = 0) = 0 \quad \boxed{1/2}$$

folgt

$$s(t) = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,\Delta h}{m\,\left(\frac{17}{30}+1\right)}}\,t \quad \boxed{1}$$

$$= \sqrt{\frac{60\,g\,\Delta h}{47}}t \text{ Mit } s(t) = \frac{\Delta h}{\sin\alpha} \quad \boxed{1} \text{ folgt}$$

$$t = \frac{\Delta h}{\sin\alpha\,\sqrt{\frac{60\,g\,\Delta h}{47}}} = 0.80\,\mathrm{s}\,. \quad \boxed{1/2}$$

Die Bepunktung der Klausur lautet wie folgt:

Aufgabe	1 a)	1 b)	1 c)	1 d)	2 a)	2 b)	2 c)	3 a)	3 b)	3 c)	4 a)	4 b)	4 c)
Punkte	3	6	8	6	6	6	9	6	10	4	10	9	3

Die Gesamtpunktzahl beträgt somit 86.
Die Noten verteilen sich wie folgt auf die Punktzahl.

Punktzahl	Note	Punktzahl	Note	Punktzahl	Note
76-	1.0	60-	2.3	44-	3.7
72-	1.3	56-	2.7	40-	4.0
68-	1.7	52-	3.0	$<$ **40**	n. B.
64-	2.0	48-	3.3		