....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

21. Februar 2019, 10:30 – 12:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Volumenberechnung** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie das Volumen der Menge

$$M := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^4 \leq 4\big\} \subseteq \mathbb{R}^3 .$$

2. **Flächeninhalt und Kurvenintegral** **[14 Punkte]**

Gegeben sei die Fläche

$$A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [0,1],\, z = 1 - x^2 - y^2\right\},$$

mit einem Normalenfeld, das in die negative z-Richtung zeigt.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von A.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfelds

$$v(x,y,z) = (2-y, x-1, 1)$$

entlang der Randkurve ∂A.

3. **Fragen zur Funktionentheorie** **[13 Punkte]**

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)\sin(z)}$ besitzt eine konvergente Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 auf den Kreisringen

☐ $K_{0,1}(0)$, ☐ $K_{0,\pi}(0)$, ☐ $K_{1,\pi}(0)$, ☐ $K_{\pi,\infty}(0)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $f(z) = \frac{1}{\sin(z)^n}$ mit der Laurentreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ auf $K_{0,\pi}(0)$. Dann gilt

☐ $c_{-2n^2} = 0$, ☐ $c_{-n} \neq 0$, ☐ $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ☐ $c_{-k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(c) Sei $g : B_2(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(\frac{1}{n}) = \frac{2+n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, warum $g(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ ist.

(d) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|g(z)| \leq |z|$ und $g(1) = \mathrm{i}$. Begründen Sie, warum $g(\mathrm{i}) = -1$ ist.

4. **Komplexe Kurvenintegrale** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 2,\ \big(\mathrm{Re}(z-1)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z-1)\big)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge G

(b) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂G durch zwei Kurvenstücke an.

$\gamma_1(t) =$

$\gamma_2(t) =$

(c) Berechnen Sie (mit kurzer Begründung) den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{z^3}{(2z-1-\mathrm{i})(2z-3-3\mathrm{i})}\mathrm{d}z$.

5. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + a^2}$ mit $a > 0$.

(a) Wo in der komplexen Ebene verläuft der Hilfsweg zur Berechnung des Integrals $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k > 0$?

☐ In der rechten Halbebene. ☐ In der oberen Halbebene.

☐ In der linken Halbebene. ☐ In der unteren Halbebene.

(b) Welchen Wert hat $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k > 0$?

(c) Welchen Wert hat $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$ für $k < 0$?

6. **Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$** **[7 Punkte]**

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und damit auch $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie elementar, dass $\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\widehat{h}$ für $h(x) = xf'(x)$.
HINWEIS: Für $g(x) = xf(x)$ ist bekannterweise $\widehat{g}(k) = \mathrm{i}(\widehat{f})'(k)$.

7. **Hilbertraum** **[14 Punkte]**

Die Funktionen $\chi_{[a,b]} \in L^2(\mathbb{R})$ sind für $a < b$ gegeben durch $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass $(\chi_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine orthonormale Familie aber keine ONB von $L^2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\left| \int_{[a,b]} \psi(x)\mathrm{d}x \right| \leq \sqrt{b-a} \Big(\int_{[a,b]} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}$ ist.
HINWEIS: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[n,n+1]} \psi(x)\mathrm{d}x = 0$.