Zentrum Mathematik — Technische Universität München
Marius Gritl SS 2021

Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Probeklausur

24. September 2021
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ____________________

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	19	
2	10	
3	11	
4	10	
5	11	
6	9	
7	9	
Gesamt:	79	

Bestätigung der Verhaltensregeln
Hiermit versichere ich, dass ich diese Klausur ausschließlich unter Verwendung der unten aufgeführten Hilfsmittel selbst löse und unter meinem Namen abgebe.

Unterschrift: ____________________

Bearbeitungshinweise:

- Diese Klausur enthält 14 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 7 Aufgaben.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 79 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein (1) selbsterstelltes, einseitig beschriftetes DIN A4-Blatt.
- **Es werden nur solche Ergebnisse bewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist**. Alle Antworten sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter/grüner Farbe noch mit Bleistift.

Das Blatt mit den Problemstellungen wird am Prüfungstag zur Prüfungszeit, d.h. am 24. September 2021 ab 10:00 Uhr auf der Moodle-Seite `https://www.moodle.tum.de/course/view.php?id=70594` des Kurses für Sie zur Verfügung stehen.

Die Arbeitszeit endet am 24. September 2021 um 11:30 Uhr. Letzter Abgabetermin ist Freitag, der 24. September 2021 um 12:00 Uhr.

1. (19 Punkte) **Gemischtes**

In den folgenden Teilaufgaben sind **keine** Begründungen gefordert und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen. Gewertet werden ausschließlich die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Kästen. Sollte der Platz in den besagten Kästen nicht ausreichen, so sollten Sie in eindeutiger Weise kennzeichnen, wo Sie die Aufgabe bearbeitet haben.

(a) (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^4 + xy + 2y^2$ mit ihren stationären Punkten $x_1 = (0,0)$, $x_2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right)$ und $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

- x_1 ist ein lokales Maximum. ☐ Wahr ☐ Falsch
- x_2 ist ein Sattelpunkt. ☐ Wahr ☐ Falsch
- x_3 ist ein lokales Minimum. ☐ Wahr ☐ Falsch

(b) (6 Punkte) Gegeben sei die Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 4\}$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(i) (3 Punkte) Geben Sie zwei Kurven an, die zusammen den Rand ∂B von B darstellen.

(ii) (3 Punkte) Sei L die Bogenlänge des Randes von B. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$L = a + b\int_0^\pi \sqrt{1 + c\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

$a =$	$b =$	$c =$

(c) (7 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{1+x^2} + y, x, \ln\left(1+x^2\right) - 2z\right).$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

(i) (3 Punkte) Welche der Aussagen sind für den Definitionsbereich D von v zutreffend?

- D ist einfach zusammenhängend. ☐ Wahr ☐ Falsch
- D ist konvex. ☐ Wahr ☐ Falsch
- D ist sternförmig. ☐ Wahr ☐ Falsch
- D ist kompakt. ☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) (2 Punkte) Ist v konservativ? Wenn ja, geben Sie ein Potential f an.

☐ Ja, $f(x, y, z) =$.

☐ Nein.

(iii) (2 Punkte) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_\gamma v(r) \cdot \mathrm{d}r$ mit $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\sin(\pi t), 5t^2 + t - 2, 2te^{t^2 - t}\right)$?

$\int_\gamma v(r) \cdot \mathrm{d}r =$

(d) (3 Punkte) Gegeben sei die Menge $M_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie ein $a \in \mathbb{R}$ an, so dass M_a keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

$a =$

Platz für Notizen:

Platz für Notizen:

2. (10 Punkte) **Fourierreihen**

Es sei $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. $\tilde{f}$ wird dann 2π-periodisch durch die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

☐0 ☐1 ☐2

(a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(b) (6 Punkte) Berechnen Sie nachvollziehbar die Fouriersinus- und Fourierkosinuskoeffizienten von f.

☐0 ☐1 ☐2

(c) (2 Punkte) Die Fourierreihe von f konvergiert gegen f

☐ nicht ☐ punktweise ☐ gleichmäßig

3. (11 Punkte) **Vektoranalysis**

Seien $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder.

☐0 ☐1 ☐2

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie div v und die i-te Komponente von rot v als Summe.

div $v =$	$(\text{rot } v)_i =$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Divergenz von $u \times v$ mit $u = (xz, 0, z)$ und $v = (\sinh x, \tanh(\ln y), \cosh z)$.

☐0
☐1
☐2
☐3

4. (10 Punkte) **Satz über implizite Funktionen**

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$x + 2y^2 + 3z^3 = 0$$
$$e^x + e^{2y} + e^{3z} = 3$$

(a) (1 Punkt) Geben Sie eine Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems an.

☐0 ☐1

$(x_0, y_0, z_0) =$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem in einer Umgebung der in (a) gefundenen Lösung nach x, y als Funktionen von z auflösen lässt.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

(c) (4 Punkte) Seien $z \mapsto x(z)$ und $z \mapsto y(z)$ die Lösungsfunktionen aus (b). Bestimmen Sie $x'(z_0)$ und $y'(z_0)$.

5. (11 Punkte) **Extrema unter Nebenbedingungen**

   (a) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass N abgeschlossen ist.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8

   (b) (8 Punkte) Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Maximieren Sie f auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Platz für Notizen:

6. (9 Punkte) **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{t+x(t)}$ ($\star$), $x(0) = 1$.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie ein erstes Integral der Differentialgleichung ($\star$), d.h., eine Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $V(t, x(t)) = \text{const.}$ für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von ($\star$) gilt.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems mit maximalem Definitionsbereich.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

7. (9 Punkte) **Kurze Fragen**

Im Folgenden sind einige Aussagen gegeben, deren Wahrheitsgehalt Sie überprüfen müssen. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist und geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.

Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

(a) (3 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x \cdot y^{21}}{x^2 + y^{42}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

(b) (3 Punkte) Das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = t^3 x(t), \quad x(\sqrt{2}) = -e$ besitzt die eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = e^{\frac{1}{4}t^4}$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

(c) (3 Punkte) Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$ eine Lagrangefunktion. Ist $\partial_2 L(t, x, v) = 0$, so ist $\partial_3 L(t, x, v)$ ein erstes Integral.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Platz für Notizen: