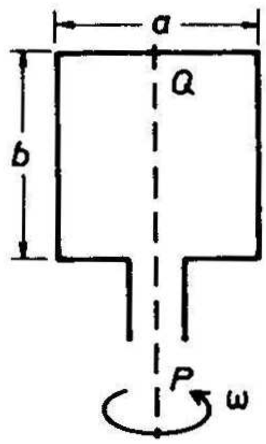
Diplomvorprüfung zur Experimentalphysik 2

29. Februar 2008

Aufgabe 1 (6 Punkte) Eine metallische Hohlkugel mit Ladung Q wird in der Mitte mit einem infinitesimal schmalen Schnitt in zwei Hälften getrennt, ohne dass sich die Ladungsverteilung dabei ändert. Geben Sie die Kraft $\vec{F}$ an mit der die Kugelhälften zusammengehalten werden müssen. Hinweis: die Kraft $d\vec{F}$ auf das Flächenelement $d\vec{A}$ ist gegeben durch $d\vec{F} = \sigma^2 d\vec{A}/2\epsilon_0$, wobei σ die Flächenladungsdichte ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie eines Teilchens, dass sich in einem zeitunabhängigen elektrischen Feld $\vec{E} = -\nabla\Phi(x, y, z)$ und einem beliebigen magnetischen Feld bewegt, konstant ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Die unten gezeigte rechteckige Drahtschleife der Breite a und Länge b dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse PQ. Sie befindet sich in einem homogenen, zeitabhängigen Magnetfeld $B = B_0 \sin(\omega t + \varphi)$, das senkrecht zu PQ steht. Berechnen Sie die in der Leiterschleife induzierte Spannung $U(t)$ und zeigen Sie, dass diese mit der doppelten Frequenz der Drehung bzw. des B-Feldes variiert.
Hinweis: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.



Aufgabe 4 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Kapazität eines quadratischen Plattenkondensators mit Platten der Kantenlänge L und Abstand d. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

(b) Nun wird der geladene Kondensator über einen Widerstand R entladen. Zeigen Sie, dass die gesamte elektrische Feldenergie im Widerstand dissipiert wird.

Aufgabe 5 (6 Punkte) Zwei Raumschiffe A und B starten zur gleichen Zeit auf der Erde und fliegen in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit v zu Punkten in der gleichen Entfernung L. Sobald die Raumschiffe ihre jeweiligen Zielpunkte erreicht haben, senden sie ein Funksignal zu Erde, das dort zur Zeit T nach dem Start der Raumschiffe empfangen wird.

(a) Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-1} \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie für $L = 1\,\text{Lichttag}$ und $T = 8/3\,\text{Tage}$ mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ankunftszeiten der beiden Raumschiffe an ihren Zielpunkten betrachtet vom Inertialsystem von A.

Vernachlässigen Sie die Effekte der Beschleunigung der Raumschiffe.

Aufgabe 6 (6 Punkte)
Im folgenden soll der Carnot-Zyklus diskutiert werden.

(a) Zeichnen Sie das p-V Diagramm.

(b) Benennen Sie die einzelnen Zustandsänderungen und berechnen Sie jeweils (i) die dem System zugeführte Wärme ΔQ, und (ii) die am System geleistete Arbeit ΔW.

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad. Denken Sie sich halbwegs realistische Werte für T_1 und T_2 aus, und schätzen Sie damit ab, in welchem Bereich der Wirkungsgrad typischerweise liegt. Welche allgemeine Bedeutung hat der Carnot-Wirkungsgrad in Bezug auf die Umwandelbarkeit von Wärme in Arbeit?

Aufgabe 7 (6 Punkte) Betrachten Sie ein thermisch isoliertes System des Gesamtvolumens $3V_0$, in dem eine thermisch leitfähige Wand zwei mit einem einatomigen idealen Gas gefüllte Teilvolumina V_0 und $2V_0$ voneinander trennt. Im größeren Volumen herrsche der Druck $3p_0$, im kleineren Volumen der Druck p_0. Die Temperatur T_0 sei in beiden Teilvolumina gleich. Die Trennwand sei nun frei verschiebbar. Berechnen Sie die gesamte innere Energie, die Temperatur und den Druck des Gases als Funktion der gegebenen Größen V_0, p_0 und T_0, nachdem sich das Gleichgewicht eingestellt hat.

Musterlösung DVP-Nachklausur Ex 2 2008

Aufgabe 1

Wir wählen Kugelkoordinaten so dass der Schnitt, der die beiden Halbkugeln voneinander trennt in der xy-Ebene liegt. Dann berechnen wir die Kraft auf die obere Halbkugel durch Integration des angegebenen Ausdrucks

$$d\boldsymbol{F} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} d\boldsymbol{A} \tag{1}$$

über die obere Halbkugel. Da die Kugel metallisch, also leitend ist, verteilt sich die Ladung Q vor dem Schnitt gleichmäßig über die Oberfläche, σ ist also eine Konstante. Da sich durch den Schnitt die Ladungsverteilung nicht ändern soll, ist dies nach dem Schnitt immer noch so.

Das Flächenelement auf der Sphäre lautet in Kugelkoordinaten

$$d\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r R^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \tag{2}$$

mit dem Normalenvektor

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\vartheta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\vartheta\cos\varphi\boldsymbol{e}_y + \cos\vartheta\boldsymbol{e}_z \tag{3}$$

Damit ergibt sich die Gesamtkraft zu

$$\boldsymbol{F} = \frac{\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\sin^2\vartheta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin^2\vartheta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y + \sin\vartheta\cos\vartheta\boldsymbol{e}_z\right] \tag{4}$$

Durch die φ-Integration verschwinden die Komponenten in x- und y-Richtung (wie aus Symmetriegründen zu erwarten) und es verbleibt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{e}_z\, 2\pi \frac{\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} \int_0^{\pi/2} d\vartheta\, \sin\vartheta\cos\vartheta \\ &= \boldsymbol{e}_z\, 2\pi \frac{\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0} \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\pi/2}}_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi\sigma^2 R^2}{2\varepsilon_0}\,\boldsymbol{e}_z \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen $\sigma = Q/4\pi R^2$ ergibt sich schließlich

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \frac{Q^2}{32\varepsilon_0\pi R^2}\,\boldsymbol{e}_z} \tag{6}$$

Aufgabe 2

Die Gesamtenergie des Teilchens ist die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie im E-Feld:

$$W = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2 + q\phi(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

Ableitung nach der Zeit unter Berücksichtigung der Kettenregel ergibt

$$\dot{W} = m\dot{\boldsymbol{x}}\ddot{\boldsymbol{x}} + q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \tag{8}$$

Auf der anderen Seite lautet die Bewegungsgleichung des Teilchens im EB-Feld

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) + q\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

Setzt man diese in den Ausdruck für $\dot{W}$ ein, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= \dot{\boldsymbol{x}}\cdot\Big(-q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) + q\dot{\boldsymbol{x}}\times\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x})\Big) + q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= -q\dot{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}) + q\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x})\cdot\dot{\boldsymbol{x}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

Also ist die Gesamtenergie zeitlich konstant, q.e.d.

Aufgabe 3

Es liege die Leiterschleife z.Z. $t = 0$ in der xy-Ebene und das veränderliche B-Feld sei entlang der z-Achse gerichtet. Dann gilt für den Fluss durch die Schleife

$$\Phi(t) = B(t)A_\perp(t) \tag{11}$$

mit

$$B(t) = B_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{12}$$

und

$$A_\perp(t) = ab\cos\omega t \tag{13}$$

Also

$$\Phi(t) = abB_0 \sin(\omega t + \varphi)\cos\omega t \tag{14}$$

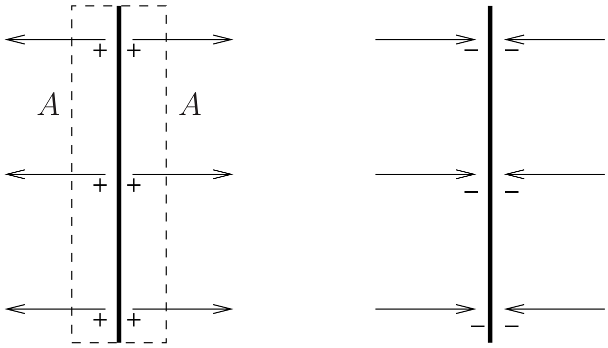
Daraus ergibt sich die induzierte Spannung

$$\begin{aligned} U(t) = -\dot{\Phi}(t) &= -abB_0\big(\omega\cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t - \omega\sin(\omega t+\varphi)\sin\omega t\big) \\ &= -abB_0\omega\big(\cos(\omega t+\varphi)\cos\omega t - \sin(\omega t+\varphi)\sin\omega t\big) \end{aligned} \tag{15}$$

Mit dem angegebenen Additionstheorem erkennt man, dass dies dasselbe ist wie

$$\boxed{U(t) = -abB_0\omega\cos(2\omega t + \varphi)} \tag{16}$$

Aufgabe 4



$Q > 0$ $-Q < 0$

(a) Ein geladenes Quadrat der Fläche $A = L^2$ mit der Ladung Q erzeugt bei Vernachlässigung der Randeffekte ein Feld E, dessen Wert durch das Gaußsche Gesetz

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{17}$$

gegeben ist: Man schließt die Ladungen in das dargestellte Volumen mit den Deckflächen A ein und erhält

$$2AE = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{18}$$

also

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 A} \tag{19}$$

Baut man aus zwei solchen entgegengesetzt geladenen Platten einen Kondensator auf, dann annihilieren sich die beiden Felder im Außenbereich und verstärken sich im Innenbereich, so dass für das Feld im Kondensator

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \tag{20}$$

gilt. Daraus folgt die Spannung zwischen den Kondensatorplatten

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A} \tag{21}$$

Die Kapazität C ist definiert durch $U = Q/C$, also

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}} \tag{22}$$

(b) Für die Entladung eines Kondensators C über einen Widerstand R gilt

$$RJ = -\frac{Q}{C} \tag{23}$$

bzw. wegen $J = \dot{Q}$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC}Q \tag{24}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \tag{25}$$

Daraus ergibt sich der Strom durch den Widerstand

$$J(t) = \dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC} \tag{26}$$

und damit kann man nun die während des Entladungsvorgangs im Widerstand verbratenen Energie berechnen:

$$\begin{aligned} W = \int_0^\infty dt\, RJ^2(t) &= R\frac{Q_0^2}{(RC)^2}\int_0^\infty dt\, e^{-2t/RC} \\ &= \frac{Q_0^2}{RC^2}\left[-\frac{RC}{2}e^{-2t/RC}\right]_0^\infty \\ &= \frac{Q_0^2}{RC^2}\frac{RC}{2} \\ &= \frac{1}{2C}Q_0^2 \end{aligned} \tag{27}$$

und dies ist bekanntermaßen die Formel für die im Kondensator anfänglich gespeicherte Feldenergie, q.e.d.

Aufgabe 5

(a) Um den gewünschten Zusammenhang zu zeigen, gehen wir so vor, dass wir v, L und c als gegeben betrachten und die (irdische) Ankunftszeit des Lichtsignals berechnen: Die Bewegung des Raumschiffs A wird beschrieben durch

$$x = vt \tag{28}$$

Also kommt es zur Zeit $t_0 = L/v$ an seinem Ziel an. Zu diesem Zeitpunkt wird ein Lichtstrahl zur Erde zurückgeschickt, der dort also zur Zeit

$$T = t_0 + \frac{L}{c} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = L\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) \tag{29}$$

ankommt. Löst man dies nun nach v auf, dann erhält man

$$\frac{1}{v} = \frac{T}{L} - \frac{1}{c} \tag{30}$$

also

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{cT}{L} - 1} \tag{31}$$

q.e.d. Für Raumschiff B gilt natürlich dasselbe, da es dieselbe Entfernung zurücklegt.

(b) Als erstes berechnen wir mit Hilfe von Teil (a) die Geschwindigkeit von A. L ist dabei 1 Lichttag und cT ist 8/3 Lichttage, also

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{8/3\,\mathrm{LT}}{1\,\mathrm{LT}} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5} \tag{32}$$

Und den zugehörigen γ-Faktor rechnen wir auch schon mal vorsichtshalber aus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4} \tag{33}$$

Dann kommt die Lorentz-Transformation: Das erste Ereignis, um das es geht (nämlich die Ankunft von A bei L) hat im Erdsystem die Raumzeit-Koordinaten

$$t_A = \frac{L}{v} \quad , \quad x_A = L \tag{34}$$

Die Lorentz-Transformation für die Zeitkoordinate lautet

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{35}$$

also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_A = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c}\frac{L}{c}\right) \tag{36}$$

Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_A = \gamma\left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c}\right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{37}$$

also

$$\boxed{t'_A = \frac{4}{3}\,\text{Tage}} \tag{38}$$

Das andere Ereignis ist die Ankunft von B bei $-L$ mit den Koordinaten im Erdsystem

$$t_B = \frac{L}{v} \quad , \quad x_B = -L \tag{39}$$

Also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_B = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c}\frac{(-L)}{c}\right) \tag{40}$$

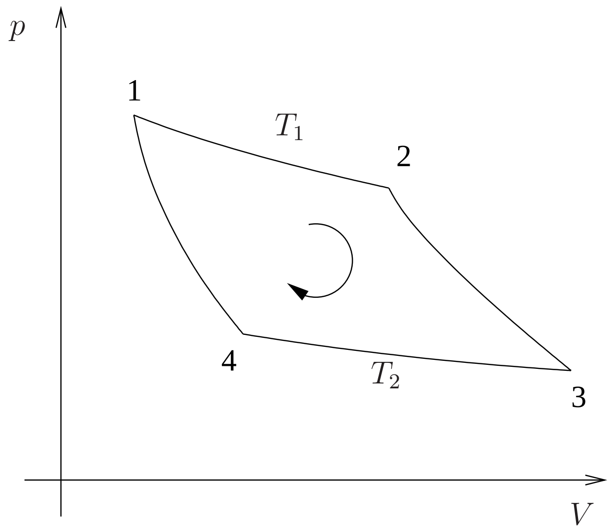
Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_B = \gamma\left(\frac{c}{v} + \frac{v}{c}\right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{41}$$

$$\boxed{t'_B = \frac{17}{6}\,\text{Tage}} \tag{42}$$

Aufgabe 6

(a)



(b) Der Carnot-Zyklus besteht wie dargestellt aus den vier Teilschritten

i) $1 \rightarrow 2$: isotherme Expansion

ii) $2 \rightarrow 3$: adiabatische Expansion

iii) $3 \rightarrow 4$: isotherme Kompression

iv) $4 \rightarrow 1$: adiabatische Kompression

i) Die am System verrichtete Arbeit ist

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV \tag{43}$$

Wegen $T = T_1 = \text{const.}$ ist $p(V) = nRT_1/V$, also

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\, dV = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{44}$$

W_{12} ist kleiner 0, das System verrichtet während der Expansion also Arbeit. Da die Temperatur während der Expansion konstant bleibt, ist die innere Energie ebenfalls konstant und die dem System zugeführte Wärme ist das Negative der am System verrichteten Arbeit:

$$Q_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{45}$$

ii) Wegen der Adiabatizität ist

$$Q_{23} \;=\; 0 \tag{46}$$

und die am System verrichtete Arbeit ergibt sich aus der Änderung seiner inneren Energie

$$W_{23} \;=\; U(3) - U(2) \;=\; \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) \;=\; -\frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \tag{47}$$

W_{23} ist ebenfalls kleiner 0.

iii) Analog zu i) gilt:

$$W_{34} \;=\; nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \tag{48}$$

(größer 0) und

$$Q_{34} \;=\; -nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \tag{49}$$

iv) Analog zu ii) gilt:

$$Q_{41} \;=\; 0 \tag{50}$$

und

$$W_{41} \;=\; \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \tag{51}$$

(größer 0).

(c) Der Wirkungsgrad ist definiert als Quotient aus vom System verrichteter Arbeit und dem System zugeführter Wärme, wobei die im Schritt $3 \to 4$ abgeführte Wärme nicht berücksichtigt wird. Also

$$\eta \;=\; \frac{-W_{12} - W_{23} - W_{34} - W_{41}}{Q_{12}} \tag{52}$$

Ausgeschrieben:

$$\eta \;=\; \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) - nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) - \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2)}{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \tag{53}$$

Die beiden logarithmusfreien Terme im Zähler heben sich gegenseitig auf, also

$$\eta \;=\; \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \tag{54}$$

Aus der Adiabatengleichung

$$TV^{\gamma-1} \;=\; \text{const.} \tag{55}$$

folgen nun Zusammenhänge zwischen den Volumina, nämlich für die adiabatische

Expansion $2 \to 3$:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \tag{56}$$

und für die adiabatische Kompression $4 \to 1$:

$$T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \tag{57}$$

Daraus erhält man

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{V_2}{V_1} \tag{58}$$

und der Wirkungsgrad erhält damit seine endgültige Form

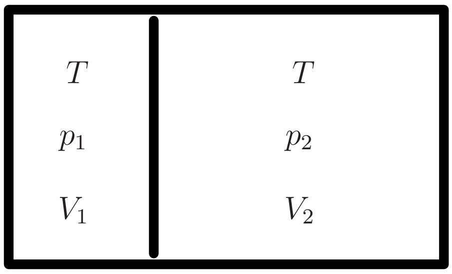
$$\boxed{\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}} \tag{59}$$

Halbwegs realistische Annahme über die Temperaturen sind z.B. $T_1 \approx 1000\,\mathrm{K}$ für das heiße Reservoir und $T_2 \approx 300\,\mathrm{K}$ für das kalte Reservoir. Damit ergibt sich

$$\eta \approx \frac{1000 - 300}{1000} = 0{,}7 \tag{60}$$

Allgemeine Bedeutung des Carnot-Wirkungsgrad: Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine zwischen den Reservoirs T_1 und T_2 kann nicht größer sein als der Carnot-Wirkungsgrad.

Aufgabe 7



Wir betrachten die Anfangswerte der in der Abbildung dargestellten thermodynamischen Größen als gegeben und fragen nach ihren Gleichgewichtswerten, also $T_1', p_1', V_1', T_2', p_2', V_2' = ?$

Das Gleichgewicht ist wegen der Leitfähigkeit und der Verschiebbarkeit der Wand charakterisiert durch

$$T_1' \;=\; T_2' \;=:\; T' \tag{61}$$
$$p_1' \;=\; p_2' \;=:\; p' \tag{62}$$

Außerdem gilt Erhaltung des Gesamtvolumens

$$V_1' + V_2' \;=\; V_1 + V_2 \;=:\; V \tag{63}$$

und der Gesamtenergie

$$\frac{3}{2}nRT' \;=\; \frac{3}{2}nRT \tag{64}$$

woraus

$$T' \;=\; T \tag{65}$$

folgt. $n = n_1 + n_2$ ist die gesamte Molzahl des Gases, wobei sich die Teilmolaritäten mit Hilfe der idealen Gasgleichung aus den Anfangsdaten ergeben:

$$n_1 \;=\; \frac{RT}{p_1V_1} \quad , \quad n_2 \;=\; \frac{RT}{p_2V_2} \tag{66}$$

Schließlich muss in den beiden Teilvolumina nach Erreichen des Gleichgewichts wieder die ideale Gasgleichung gelten, also

$$p'V_1' \;=\; n_1RT \quad , \quad p'V_2' \;=\; n_2RT \tag{67}$$

Zusammen mit der Erhaltungsgleichung des Gesamtvolumens $V_1'+V_2' = V$ haben wir nun drei Gleichungen für die drei Unbekannten p', V_1', V_2'. Wir berechnen zunächst

V_1' und V_2' durch Elimination von p':

$$\left| \begin{array}{rcl} \frac{V_1'}{V_2'} & = & \frac{n_1}{n_2} \\ V_1' + V_2' & = & V \end{array} \right| \tag{68}$$

Die Lösung davon ist:

$$V_1' = \frac{n_1}{n} V \quad , \quad V_2' = \frac{n_2}{n} V \tag{69}$$

Damit erhält man p':

$$\begin{aligned} p' &= \frac{n_1}{V_1'} RT = \frac{n}{V} RT = (n_1 + n_2) \frac{RT}{V} = \left(\frac{p_1 V_1}{RT} + \frac{p_2 V_2}{RT} \right) \frac{RT}{V} \\ &= p_1 \frac{V_1}{V} + p_2 \frac{V_2}{V} \end{aligned} \tag{70}$$

Nun können wir die Anfangswerte

$$p_1 = p_0 \quad , \quad p_2 = 3p_0 \quad , \quad V_1 = V_0 \quad , \quad V_2 = 2V_0 \tag{71}$$

einsetzen:

$$p' = p_0 \frac{V_0}{3V_0} + 3p_0 \frac{2V_0}{3V_0} = \frac{7}{3} p_0 \tag{72}$$

Für die innere Energie ergibt sich

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1 V_1}{RT} + \frac{p_2 V_2}{RT} \right) RT = \frac{3}{2} (p_0 V_0 + 3p_0 2V_0) = \frac{21}{2} p_0 V_0 \tag{73}$$