Klausur zur Theoretischen Physik 3: QUANTENMECHANIK

Prof. H.Friedrich, TU München

Montag, 24.07.2006 Hörsaal 1 9:00 - 10:30

---

1. (a,b)

Operator	hermitisch	unitär
$\hat{x}$	ja	nein
$\frac{\partial}{\partial p}$	nein	nein
$\hat{b}$	nein	nein
$\hat{b}^\dagger \hat{b}$	ja	nein
$e^{i\hat{x}/\beta}$	nein	ja
$\hat{\Pi}$	ja	ja

(c) (i) $[\hat{\Pi}, \hat{H}] = 0$: Alle Terme in $\hat{H}$ bleiben bei Raumspiegelung erhalten.

(ii) $[\hat{\boldsymbol{J}}, \hat{H}] = 0$: Rotationsinvarianz

(iii) $[\hat{\boldsymbol{J}}_1, \hat{H}] \neq 0$: Keine Invarianz bei Rotation der Koordinaten nur eines Teilchens.

(iv) $[\hat{H}_1, \hat{H}] \neq 0$ wg. Wechselnwirkungsterme.

2. (a)

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{A}^\dagger \hat{A} &= \hat{A}^2 \\ &= \alpha^2 \hat{\sigma}_x^2 + \beta^2 \hat{\sigma}_y^2 + \gamma^2 \hat{\sigma}_z^2 + \alpha\beta(\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x) + \\ &\quad + \beta\gamma(\hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y) + \gamma\alpha(\hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2. \end{aligned}$$

Hier haben wir folgende Identitäten benutzt:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \mathbf{1}$$

und

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = 0.$$

$\hat{A}$ ist denn unitär, wenn α, β und γ erfüllen:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

.

(b) Aus Teilaufgabe (a) folgt, dass der Operator $\hat{B}$ unitär ist. Außerdem gilt: $\hat{B}^{2n} = \mathbf{1}$ und $\hat{B}^{2n+1} = \hat{B}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Dann für jede komplexe Zahl ω folgt:

$$\begin{aligned} e^{\omega \hat{B}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n \hat{B}^n}{(n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} \times \mathbf{1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n+1} \hat{B}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2} + \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \hat{B} \\ &= \cosh \omega + \hat{B} \sinh \omega \end{aligned}$$

Insbesondere erhalten wir für $\omega = \mathrm{i}\pi$:

$$e^{\mathrm{i}\pi \hat{B}} = \cosh(\mathrm{i}\pi) + \hat{B} \sinh(\mathrm{i}\pi) = \cos \pi + \hat{B}\, \mathrm{i} \sin \pi = -\mathbf{1}.$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \langle \psi_L | \psi_L \rangle &= |A|^2 \int_{-\pi L/2}^{\pi L/2} \cos^2\left(\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x \\ &= |A|^2 L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 y \mathrm{d}y, \quad \text{mit } y = \frac{x}{L} \\ &= |A|^2 \frac{L\pi}{2} \\ \Rightarrow \qquad & |A|^2 = \frac{2}{L\pi} \quad \Rightarrow \quad |A| = \sqrt{\frac{2}{L\pi}}. \end{aligned}$$

(b) $\psi_L''(x) = -\frac{A}{L^2} \cos(x/L) = -\frac{1}{L^2} \psi_L(x) \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} H\psi_L(x) &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(-\beta^2 \psi_L''(x) + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 \psi_L(x) \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\beta^2}{L^2} \psi_L(x) + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2 \psi_L(x) \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E_L &= \langle \psi_L | \hat{H} | \psi_L \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\beta^2}{L^2} \langle \psi_L | \psi_L \rangle + \frac{1}{\beta^2} \langle \psi_L | \hat{x}^2 | \psi_L \rangle \right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{\beta^2}{L^2} + \frac{1}{\beta}^2 \langle \psi_L | \hat{x}^2 | \psi_L \rangle \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\langle\psi_L|\hat{x}^2|\psi_L\rangle &= |A|^2 \int_{-\pi L/2}^{\pi L/2} x^2 \cos^2\left(\frac{x}{L}\right) \mathrm{d}x \\
&= |A|^2 L^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y^2 \cos^2 y \mathrm{d}y, \quad \text{mit } y = \frac{x}{L} \\
&= 2|A|^2 L^3 \int_0^{\pi/2} y^2 \cos^2 y \mathrm{d}y, \\
&= |A|^2 L^3 \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right) \\
&= L^2 \left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
E_L = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\beta^2}{L^2} + \frac{L^2}{\beta^2}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right)\right).
$$

$\Rightarrow$

$$
\frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}L} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-2\frac{\beta^2}{L^3} + 2\frac{L}{\beta^2}\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{L}{\beta}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}}
$$

$\Rightarrow$

$$
E_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(2\sqrt{\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}}\right) = \frac{\hbar\omega}{2} \times 1.135.
$$

Energie des Grundzustands: $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$.

4.

$$
|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}|n\rangle \quad \text{und} \quad \hat{x} = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)
$$

$\Rightarrow$

$$
\hat{x}|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle)
$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle &= \sum_{nn'} c_n c_{n'}^* e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} e^{i\omega t(n'+\frac{1}{2})} \frac{\beta}{\sqrt{2}} \times \\
&\quad \times \Big(\sqrt{n}\langle n'|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\langle n'|n+1\rangle\Big) \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{n-1}^* \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{n} + e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n c_{n+1}^* \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1} \\
&= e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{n-1}^* \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{n} + e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} c_n^* \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{n} \\
&= \alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t},
\end{aligned}$$

mit $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} c_n c_{n-1}^* \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{n}$ und $|\alpha| < \infty$, da $\langle\hat{x}\rangle_{t=0} < \infty$ gilt.

Sei $\alpha = \frac{A}{2} e^{i\omega t_0}$. Dann

$$\langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle = A\cos\omega(t - t_0).$$