Zentrum Mathematik
Technische Universität
München
Prof. Dr. H. Spohn

Mathematik für Physiker II (Analysis 1)

Probeklausur am 22. Dezember 2000

Aufgabe 1 :
a.) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$, für

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Dazu zeige man:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} < 1 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} > \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}.$$

b.) Stellen Sie fest, ob die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2-(-1)^n}{2^n}$$

konvergiert oder nicht.
c.) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}.$$

Mit dem Teleskop betrachten.
d.) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n.$$

Aufgabe 2 :
Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}$ den Konvergenzradius der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+3)^n}{(n+1)2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{3n}}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)2^n}.$$

bitte wenden

Aufgabe 3:
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x} \quad \text{für } |x| < 1$$

in eine Potenzreihe. Es genügt, wenn Sie die ersten 3 Koeffizienten angeben.

Aufgabe 4 :
a.) Untersuchen Sie die folgende Funktion auf ihre Stetigkeit für $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x - [x]},$$

Die Funktion $[x]$ ist gleich der größten ganzen Zahl kleiner gleich x.
b.) Wo hat die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\log|x|}$$

für reelle x Unstetigkeiten?

Aufgabe 5 :
a.) Sei die Funktionenfolge $f_n(x)$ auf dem Intervall $[0, 1]$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{falls } 0 \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{falls } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge und stellen Sie fest, ob die Folge f_n auf $[0, 1]$ gleichmäßig konvergiert.
b.) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.

Bearbeitungszeit 90 min