DVP in HM II (Analysis 1) für Physik

10.09.2007

Prüfer: Prof. Dr. P. Rentrop

16:30 – 18:00 Uhr

Übersicht der Klausuraufgaben zum Abtrennen

Aufgabe 1 (ca. 13 P)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(x + 2 - \dfrac{1}{x}\right) \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$.

a) Man zeige: Die Ableitung von f lautet $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}\,(x+1)\,(x-1)^2 \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Man berechne $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x<0\,,\,x \uparrow 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x>0\,,\,x \downarrow 0^+} f(x)$.

c) Man bestimme von f

- die Asymptoten für $x \to \pm\infty$,
- die Nullstellen und die Vorzeichenverteilung,
- die Monotoniebereiche und stationäre Punkte (mit Klassifizierung).

Aufgabe 2 (ca. 10 P)

Gegeben seien

$$p(x) := x^4 - 2\,x^3 + 2\,x - 3\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
$$\psi(x) := x - \frac{p(x)}{x^3+2} = 2 - \frac{1}{x^3+2}\,, \quad x \geq 0$$

und die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch $x_{k+1} = \psi(x_k)$, $x_0 = 1$.

Man zeige:

a) Es gibt genau ein $\alpha \in \,]\,1, 2\,[$ mit $p(\alpha) = 0$.

b) Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist streng monoton wachsend mit $x_k \in \,]\,1\,,\,2\,[\ \ \forall k \in \mathbb{N}$.

c) $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gegen α.

d) $\left|\dfrac{x_{k+1} - \alpha}{x_k - \alpha}\right| < \dfrac{\alpha^2}{2 + \alpha^3}$.

<u>Hinweis:</u> Man betrachte $x_{k+1} - \alpha = \psi(x_k) - \psi(\alpha)$.

Aufgabe 3 (ca. 10 P)

Man löse mittels Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$y''(x) + x\,y'(x) + y(x) = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$$

und bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 4 (ca. 10 P)

Es sind nur die Ergebnisse in die jeweiligen Kästchen einzutragen!

a) Man gebe die folgenden Grenzwerte an:

a1) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-3\,x-10}{x^2-4\,x-5}\right)$,

a2) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(\dfrac{\sin(\pi-2\,x)}{\pi-2\,x+\cos x}\right)$,

a3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1+x^2}{1+x}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

b) Man gebe die Koeffizienten von x^0, x^1, x^2 der Potenzreihe von

$$f(x) = (1+x)\,\ln(1-x)\,, \quad |\,x\,| < 1$$

mit Entwicklungspunkt (Aufpunkt) $x_0 = 0$ an.

c) Man gebe die Konvergenzradien an von

c1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{2\,n-1}\,x^n$,

c2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{n}\right)^n x^{4n}$.

d) Man gebe an

d1) Real- und Imaginärteil von $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^{11}$,

d2) Betrag und Phase von allen Wurzeln/Nullstellen der Gleichung $z^3+2-2\,\mathrm{i}=0$.