2. Klausur zur Quantenmechanik I

SS 2007, Prof. W. Weise

Mittwoch, 18. Juli 2007, 10:00 - 11:45, HS 1, Physik Department, TU München

Name: Gruppe:

Matrikelnummer: ID:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte	11	14	15	40

Die Klausur besteht aus **3 Aufgaben**.
Bitte bearbeiten Sie **jede Aufgabe** auf einem **separaten** Blatt!
Bitte geben Sie auf **allen** Blättern **Ihren Namen** und **Ihre Übungsgruppe** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe K1 (11 Punkte)

Es seien $|l,m\rangle$ die Eigenzustände der Drehimpulsoperatoren $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$:

$$\hat{\vec{L}}^2|l,m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle \qquad \hat{L}_z|l,m\rangle = m\hbar|l,m\rangle.$$

a) (2 P.) Wie lautet die Kommutatorrelation für die Drehimpulsoperatoren $\hat{L}_x$ und $\hat{L}_y$? Bilden Sie die Kombinationen $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ und zeigen Sie, daß $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z$.

b) (4 P.) Mit Hilfe der Drehimpulsalgebra und der Normierung der Zustände $|l,m\rangle$ kann man zeigen, daß

$$\hat{L}_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l,m\pm 1\rangle.$$

Benutzen Sie die Operatoren $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$, um für den Fall $l=1$ die Ausdrücke $\hat{L}_x|l,m\rangle$ für alle zulässigen Werte von m zu berechen (wieviele mögliche Werte gibt es?).

c) (5 P.) Geben Sie mit dem Ergebnis von b) die Matrixdarstellung von $\hat{L}_x$ bezüglich der $|l,m\rangle$ mit $l=1$ an und bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren. Geben Sie die normierten Eigenvektoren als Linearkombination der Zustände $|l,m\rangle$ mit $l=1$ an.

Aufgabe K2 (14 Punkte)

Gegeben ist ein Hamiltonoperator der Form $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$ mit kinetischem Term $\hat{T} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m}$ und einem Potential $\hat{V} = V(\vec{r})$.

a) (2 P.) Berechnen Sie für einen beliebigen zeitunabhängigen Operator $\hat{A}$ den Erwartungswert $\langle\psi_0|[\hat{H},\hat{A}]|\psi_0\rangle$ des Kommutators von $\hat{H}$ und $\hat{A}$ im Energieeigenzustand $|\psi_0\rangle$ und zeigen Sie, daß dieser verschwindet.

b) (6 P.) Berechnen Sie den Kommutator $[\hat{H}, \hat{\vec{p}} \cdot \hat{\vec{r}}]$. Zeigen Sie mit dem Ergebnis von a), daß für die Erwartungswerte in einem Energieeigenzustand $|\psi_0\rangle$ gilt: $2\langle \hat{T} \rangle = \langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \rangle$.

c) (2 P.) Berechnen Sie $\langle \vec{r} \cdot (\vec{\nabla} V) \rangle$ für den Spezialfall eines Coulomb-Potentials $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Zeigen Sie, daß in diesem Fall $2\langle \hat{T} \rangle = -\langle \hat{V} \rangle$.

d) (4 P.) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \frac{1}{r} \rangle$ im Grundzustand des Wasserstoffatoms. Bestimmen Sie mit diesem Ergebnis und dem Ergebnis aus c) den Erwartungswert für die kinetische Energie im Grundzustand. Vergleichen Sie den Erwartungswert $\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{T} \rangle + \langle \hat{V} \rangle$ mit der Grundzustandsenergie.

Hinweise: a) Die Wellenfunktion des H-Atoms im Grundzustand ist $\psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \exp(-r/a_0)$ mit $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$; b) $\int_0^\infty dx\, x^n \exp(-\alpha x) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Aufgabe K3 (15 Punkte)

Die normierte Grundzustandswellenfunktion eines wasserstoffartigen Atoms (z.B. H, He^+, Li^{++}) mit Kernladungszahl Ze hat die Form

$$\psi_{1s}(\vec{r}) = Y_{00}(\theta, \phi) R_{10}(r)\, \chi_{\frac{1}{2}, m_s} \quad \text{mit} \quad R_{10}(r) = 2\sqrt{\beta^3} \exp(-\beta r) \quad \text{und} \quad Y_{00}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

wobei $\chi_{\frac{1}{2}, m_s}$ Eigenzustand der Spinoperatoren $\hat{\vec{s}}^2, \hat{s}_z$ ist mit $m_s = \pm\frac{1}{2}$.

a) (4 P.) Stellen Sie die Schrödingergleichung mit dem Coulomb-Potential $V = -Ze^2/r$ auf und zeigen Sie, daß $\beta = \frac{Zme^2}{\hbar^2}$.

b) (2 P.) Zeigen Sie, daß die Grundzustandsenergie $E_0 = -\frac{Z^2 me^4}{2\hbar^2}$ ist.

c) (4 P.) Das Atom befinde sich nun in einem konstanten Magnetfeld in z-Richtung, $\vec{B} = (0, 0, B)^T$. Die Wechselwirkung mit dem Feld wird beschrieben durch einen Zusatzterm $\hat{H}_1$ im Hamiltonoperator:

$$\hat{H}_1 = \frac{e}{2mc} \vec{B} \cdot (\hat{\vec{L}} + 2\,\hat{\vec{s}}) \qquad (e > 0).$$

Bestimmen Sie die neue Grundzustandsenergie für den Fall $B > 0$ und geben Sie die zugehörige Grundzustands-Wellenfunktion an.

d) (5 P.) Unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung beschreibt man die Energieeigenfunktionen mittels der Spin-Kugelfunktionen
$\mathcal{Y}_{ljm_j}(\theta, \phi) = \sum_{m_l, m_s} \langle l\, m_l\, \frac{1}{2}\, m_s | j\, m_j \rangle\, Y_{lm_l}(\theta, \phi)\, \chi_{\frac{1}{2}, m_s}$.
Für den Fall $j = l - \frac{1}{2}$ gilt:

$$\mathcal{Y}_{ljm_j}(\theta, \phi) = -\left(\frac{l - m_j + 1/2}{2l + 1} \right)^{1/2} Y_{l, m_j - \frac{1}{2}}(\theta, \phi)\, \chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \left(\frac{l + m_j + 1/2}{2l + 1} \right)^{1/2} Y_{l, m_j + \frac{1}{2}}(\theta, \phi)\, \chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}$$

Bestimmen Sie in Störungstheorie erster Ordnung die Energieaufspaltung durch $\hat{H}_1$ zwischen den beiden möglichen Werten für m_j für den ersten angeregten Zustand mit $l = 1$, $j = \frac{1}{2}$. Die Wellenfunktion dieses 2p-Zustands ist gegeben durch

$$\psi_{2p, j=\frac{1}{2}, m_j} = R_{21}(r)\, \mathcal{Y}_{l=1, j=\frac{1}{2}, m_j}(\theta, \phi) \quad \text{mit} \quad R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\beta}{2} \right)^{3/2} (\beta r) \exp(-\beta r/2).$$

Hinweis: Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2 \hbar^2} \hat{\vec{L}}^2$$