Klausur in Experimentalphysik 3
Lösung

Prof. Dr. S. Schönert
Wintersemester 2016/17
20. Februar 2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine harmonische elektromagnetische Welle im Vakuum habe die Form

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - wt)\vec{e}_y \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie die zugehörige magnetische Flussdichte $\vec{B}$.

(b) Zeigen Sie, dass für die mittlere Intensität I der Welle gilt:

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \tag{2}$$

Hinweis: $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$

Lösung

(a) Das magnetische Feld lässt sich aus der dritten maxwellschen Gleichung berechnen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3}$$

[**1**]

Für die Rotation des elektrischen Feldes erhält man:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_0 k \sin(kx - wt) \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = E_0 k \vec{e}_z \int \sin(kx - wt)\, dt \tag{5}$$

$$= E_0 \underbrace{\frac{k}{w}}_{1/c} \cos(kx - wt)\vec{e}_z \tag{6}$$

[3]

Alternativer Weg:

$$\vec{B} = \frac{1}{w}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right) \qquad \text{mit } \vec{k} = k\vec{e}_x \tag{7}$$

$$= \frac{k}{w} E_0 \cos(kx - wt) \underbrace{(\vec{e}_x \times \vec{e}_y)}_{=\vec{e}_z} \tag{8}$$

$$= E_0 \underbrace{\frac{k}{w}}_{1/c} \cos(kx - wt)\vec{e}_z \tag{9}$$

(b) Die Intensität I ist der zeitliche Mittelwert über den Betrag des Poytingvektor $\vec{S}$. Für den Poyntingvektor gilt:

$$\vec{S} = c^2\epsilon_0 \left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{10}$$

Somit folgt:

$$I = \left\langle |\vec{S}| \right\rangle = c\epsilon_0 E_0^2 \left\langle \cos^2(kx - wt) \right\rangle \tag{11}$$

[2]

und der zeitliche Mittelwert über eine Periode T ergibt sich zu:

$$\left\langle \cos^2(kx - wt) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \cos^2(kx - w\tau) d\tau \tag{12}$$

$$= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2kx - 2w\tau)\right) d\tau \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2} \tag{14}$$

Hierbei wurde verwendet, dass der Cosinus eine T periodische Funktion ist. Somit gilt:

$$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2 \tag{15}$$

[2]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sie bekommen von einem Linsenschleifer eine Bikonvexlinse. Die beiden Oberflächen sind mit einem Krümmungsradius von 30 cm geschliffen. Der Brechungsindex des Glases beträgt $n_{\text{Linse}} = 1,53$ und der für Luft ist in guter Näherung $n_{\text{Luft}} = 1,00$.

(a) Berechnen Sie die Brennweite f der Linse und geben Sie dabei auch das richtige Vorzeichen für f an! Da der Linsenschleifer keine Angabe zur Dicke macht, nehmen Sie zunächst an, es handle sich um eine dünne Linse.

(b) Welche Brennweite hat diese Linse unter Wasser ($n_{\text{Wasser}} = 1{,}33$)?

(c) Die Brennweite der Linse wird nun experimentell gemessen. In Luft beträgt sie $f_{exp} = 0,30$m. Die Abweichung von Ihrer Rechnung in Aufgabe a) lässt Sie stutzig werden, ob die Annahme einer dünnen Linse korrekt war. Berechnen Sie aus der experimentell bestimmten Brennweite die Dicke der Linse.

Lösung

(a) Brennweite einer dünnen Linse:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{Linse}}}{n_{\text{Medium}}} - 1\right)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{16}$$

Wir haben den Fall $r_1 = 30\text{cm} > 0$ und $r_2 = -30\text{cm} < 0$. Für Luft als umgebendes Medium erhält man:

$$\frac{1}{f_{\text{Luft}}} = \left(\frac{1,53}{1,00} - 1\right)\left(\frac{1}{30\text{cm}} + \frac{1}{30\text{cm}}\right) \tag{17}$$

$$\Rightarrow f_{\text{Luft}} = +0,28\text{m} \tag{18}$$

[**3**]

(b) Für Wasser als umgebendes Medium erhält man

$$\frac{1}{f_{\text{Wasser}}} = \left(\frac{1,53}{1,33} - 1\right)\left(\frac{1}{30\text{cm}} + \frac{1}{30\text{cm}}\right) \tag{19}$$

$$\Rightarrow f_{\text{Wasser}} = +1,0\text{m} \tag{20}$$

Es gibt also einen deutlichen Unterschied für die Brennweite der Linse in Luft und Wasser!

[**1**]

(c) Für dicke Linsen gilt die Linsenschleifergleichung:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)d}{n r_1 r_2}\right) \tag{21}$$

Daraus folgt für Dicke d unserer Linse

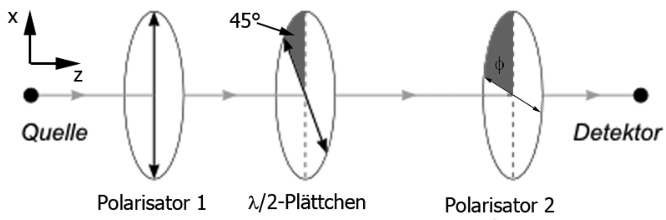
$$d = \left(\frac{1}{f_{\text{exp}}(n-1)} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{n r_1 r_2}{n-1} = 0,098\text{m} \tag{22}$$

Die Linse kann nicht als 'dünn' betrachtet werden, da d nicht viel kleiner als r_1 bzw. r_2 ist. Wichtig ist, dass $d << r_1$ bzw. r$_2$ ist und nicht kleiner als das Produkt.

[**2**]

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Unpolarisiertes Licht fällt in z-Richtung auf einen Polarisator, welcher in x-Richtung polarisiertes Licht durchlässt. Dahinter befindet sich ein $\lambda/2$-Plättchen, dessen optische Achse um 45° zur Durchlassrichtung des Polarisators gedreht ist. Hinter diese Anordnung wird nun ein weiterer Polarisator gestellt, dessen Durchlassrichtung um den Winkel φ gegen die x-Achse gedreht werden kann.



(a) Welcher Bruchteil der einfallenden Intensität I_0 (in Abhängigkeit des Winkels φ) passiert die Anordnung? Tragen Sie die durchgelassene Intensität in Abhängigkeit vom Winkel φ in einem Diagramm auf.

(b) Das $\lambda/2$-Plättchen wird nun durch ein $\lambda/4$-Plättchen mit gleicher Orientierung ersetzt. Zeigen Sie rechnerisch, dass die durchgelassene Intensität nun **unabhängig** vom Winkel φ des zweiten Polarisators ist.

Lösung

(a) Durch den ersten Polarisator wird die Hälfte der Intensität des unpolarisierten Lichtes I_0 durchgelassen, welche danach in x-Richtung polarisiert ist:

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 = E_0^2 \tag{23}$$

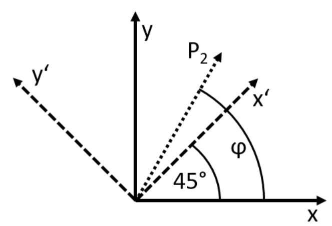
$$E_{1,x} = E_0 \tag{24}$$

$$E_{1,y} = 0 \tag{25}$$

Da das $\lambda/2$-Plättchen in einem 45°-Winkel zum ersten Polarisator steht, wird dadurch die Richtung der Polarisation um 90 Grad gedreht. Um dies zu berechnen, projiziert man $E_{1,x}$ auf das gedrehte Koordinatensystem des $\lambda/2$-Plättchen (x' und y', siehe Skizze) und ergänzt dabei einen Phasenschub von π in Richtung der optischen Achse (y'):

$$E_{x'} = \cos(45°) E_{1,x} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \tag{26}$$

$$E_{y'} = -\sin(45°) E_{1,x} \cdot e^{-i\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \tag{27}$$



[3]

Eine weitere Projektion auf den zweiten Polarisator, welcher in einem Winkel φ zur x-Achse steht, liefert:

$$E_3 = \cos(\varphi - 45°)E_{x'} + \sin(\varphi - 45°)E_{y'} \tag{28}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}E_0\sqrt{2}\sin(\varphi - 45° + 45°) = E_0 \sin(\varphi) \tag{29}$$

Durch das Betragsquadrat erhält man schließlich die transmittierte Intensität als:

$$I_3 = |E_3|^2 = E_0^2 \sin^2(\varphi) = \frac{I_0}{2}\sin^2(\varphi) \tag{30}$$

Der qualitative Verlauf der Funktion $I_3(\varphi)$ lässt sich im untenstehenden Bild erkennen:

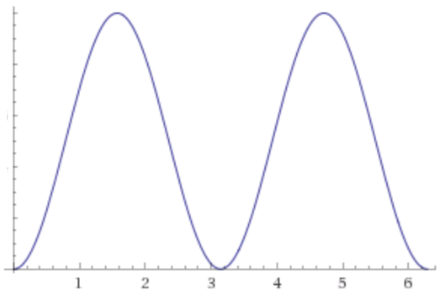


Abbildung 1: Qualitativer Verlauf der Funktion $I_3(\varphi)$

[**4**]

(b) Das $\lambda/4$-Plättchen wandelt das linear polarisierte Licht, das den ersten Polarisationsfilter durchquert, in zirkular polarisiertes Licht um. Man erwartet daher, dass dieses unabhängig vom Winkel des zweiten Polarisationsfilter transmittiert wird. Um dies rechnerisch zu zeigen, ersetzt man die Phase π in Gleichung (27) durch $\pi/2$:

$$E_{y'} = -\frac{\sqrt{2}}{2}E_0 e^{-i\frac{\pi}{2}} \tag{31}$$

[**1**]

Die Projektion auf den zweiten Polarisationsfilter liefert dann

$$E_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}E_0\left(\cos(\varphi - 45°) - \sin(\varphi - 45°)e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) \tag{32}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}E_0\left(\cos(\theta) - \sin(\theta)e^{-i\frac{\pi}{2}}\right), \tag{33}$$

[**2**]

wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit $\theta = \varphi - 45°$ substituiert wurde.

Für die transmittierte Intensität erhält man schließlich folgenden Ausdruck

$$I_3 = |E_3|^2 = \frac{1}{2} E_0^2 \left(\cos(\theta) - \sin(\theta) e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(\cos(\theta) - \sin(\theta) e^{i\frac{\pi}{2}}\right) \tag{34}$$

$$= \frac{I_0}{4} \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right) + \cos(\theta)\sin(\theta) \left(e^{-i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right] \tag{35}$$

$$= \frac{I_0}{4} \left[\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \tag{36}$$

$$= \frac{I_0}{4} [1 + 0] = \frac{I_0}{4}, \tag{37}$$

[**2**]

welcher unabhängig von θ und somit auch φ ist.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

(a) Damit zwei Punktgegenstände noch voneinander getrennt wahrgenommen werden können müssen sie mindestens auf zwei benachbarte Zäpfchen auf der Netzhaut abgebildet werden. Die Zäpchen sind in etwa 1μm von einander entfernt. Betrachten Sie das Auge als Lochkamera. Wie groß ist somit der kleinste Winkel, unter dem man zwei Punkte noch unterscheiden kann? Der Durchmesser des Auges betrage $f_{\text{Auge}} = 2,5$cm.

(b) Berechnen Sie nun das beugungslimitierte Auflösungsvermögen des Auges für einen Pupillendurchmesser $D = 2$mm und für $\lambda = 400$nm und den zugehörigen gerade noch auflösbaren Abstand der Beugungsmaxima auf der Netzhaut. Die Brennweite des Auges beträgt $f = 2,5$cm. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Abstand der Zäpfchen auf der Netzhaut $(1 - 5\mu$m).

(c) Pointillistische Gemälde (z.B. von Georges Seurat oder Paul Signac) bestehen aus Punkten reiner Farbe, deren Farben im Auge des Betrachters nicht mehr auflösbar sind (und deshalb mischen). Berechnen Sie den minimalen Abstand d zu einem Gemälde (Punktabstand $a =$ 2mm), so dass sich **alle** sichtbaren Farben im Auge mischen.

Lösung

(a) Das Auge besitze eine Brennweite $f = 2,5$cm und der Abstand eines Zäpfchen von seinem übernächsten Nachbarn betrage $d = 2\mu$m. Für kleine Winkel ϵ gilt:

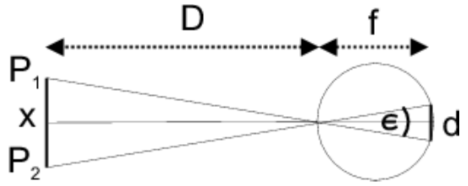
$$\tan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{d/2}{f} \approx \frac{\varepsilon}{2} \tag{38}$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx \frac{d}{f} = \frac{1\ \mu\text{m}}{2,5\ \text{cm}} = 4 \cdot 10^{-5}\,\text{rad} \equiv 0.0025° \tag{39}$$

[**2**]

(b) Das Auflösungsvermögen (zwei Punkte sind erkennbar) eines optischen Instruments (auch des Auges) mit Apertur D bei Wellenlänge λ ist gegeben durch das Rayleigh'sche Auflösungskriterium (das erste Beugungsminimum eines Punktes liegt auf Beugungsmaximum des anderen Punktes).

$$\sin\Theta = 1,22\frac{\lambda}{D} \tag{40}$$



Aus dem Auflösungsvermögen ergibt sich direkt:

$$\Theta = \arcsin\left(1,22\frac{\lambda}{D}\right) = 2,44 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \tag{41}$$

Bei bekannter Brennweite f ergibt sich der auflösbare Abstand y auf der Netzhaut:

$$\sin\Theta = \frac{y}{f} \Rightarrow y = 6,1\mu\text{m} \tag{42}$$

Dieses Auflösungsvermögen stimmt ungefähr mit dem Abstand der Sinneszellen überein. Die Evolution hat den Abstand somit auf das maximale Auflösungsvermögen eingestellt, eine höhere Dichte würde keinen weiteren Vorteil bringen.

[**3**]

(c) Es gilt wiederum das Rayleigh-Kriterium. Bei einem Abstand der Punkte $a = 2\text{mm}$ und Distanz zum Gemälde d gilt geometrisch näherungsweise

$$\sin\Theta = \frac{a}{d} \tag{43}$$

Durch Gleichsetzen folgt:

$$\frac{a}{d} = 1,22\frac{\lambda}{D} \tag{44}$$

$$\Rightarrow d = \frac{Da}{1,22\lambda} = \begin{cases} 8,2\text{m} & \text{für blaues Licht } (\lambda = 400\text{nm}) \\ 4,7\text{m} & \text{für rotes Licht } (\lambda = 700\text{nm}) \end{cases} \tag{45}$$

[**3**]

Alle Farben mischen sich erst, wenn sich auch Emitter kürzerer Wellenlängen nicht mehr auflösen lassen, also bei $8,2\text{m}$ (theoretische Mindestgröße des Ausstellungsraumes, tatsächlich verschwimmen die Punkte im Auge schon früher). Im Übergangsbereich (immerhin $3,5\text{m}$) ist eine Mischung aus kontinuierlichem Bild und Punkten möglich.

[**1**]

Aufgabe 5 (16 Punkte)

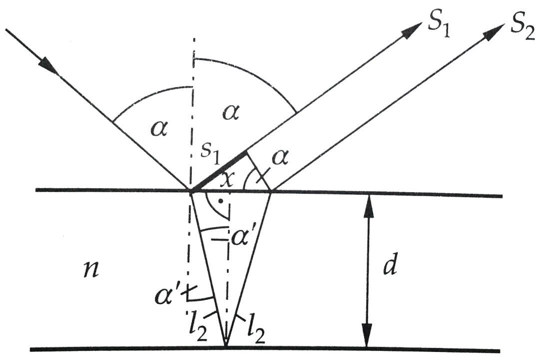
Ein dünnes Glasplättchen (Dicke $d = 1,00\mu$m, Brechzahl $n = 1,50$) an Luft (Brechzahl $n_L = 1,00$) wird mit weißem Licht unter dem Einfallswinkel α bestrahlt. Man sieht Interferenzerscheinungen im reflektierten Strahl.

(a) Erstellen und beschriften Sie eine Zeichnung (groß genug!) und zeichnen Sie den optischen Weglängenunterschied der beiden reflektierten Strahlen ein.

(b) Leiten Sie die Formel für den optischen Weglängenunterschied Δs in Abhängigkeit von d, n und α her.

(c) Welche Wellenlänge(n) des sichtbaren Bereichs ($\lambda = 400...700$nm) haben im reflektierten Strahl ein Interferenzmaximum wenn unter einem Winkel von $\alpha = 75°$ beobachtet wird?

Lösung



(a) [**3**]

(b) Zuerst muss der optische Weglängenunterschied Δs der interferierenden Strahlen berechnet werden. Die geometrischen Verhältnisse lassen sich zu diesem Zweck aus dem Bild ableiten.

Der an der vorderen Glasplatte reflektierte Strahl S_1 hat in Luft den geometrischen Weg s_1 zusätzlich zurückzulegen und erfährt außerdem bei Reflexion (am optisch dichteren Medium) eine Gangverschiebung von $\frac{\lambda}{2}$. Für s_1 gilt

$$\frac{s_1}{x} = \sin\alpha \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = x \cdot \sin\alpha \tag{46}$$

Die Strecke x ergibt sich aus dem Verlauf des gebrochenen Strahls, dessen Richtung im Glas durch den Brechungswinkel α' bestimmt ist. Es gilt

$$\frac{\frac{x}{2}}{d} = \tan\alpha' \quad \Leftrightarrow \quad x = 2d \cdot \tan\alpha' \tag{47}$$

α' folgt aus dem Brechungsgesetz:

$$\sin\alpha = n \cdot \sin\alpha' \tag{48}$$

[**3**]

Der an der unteren Glasoberfläche reflektierte Strahl S_2 hat im Glas zweimal den (geometrischen) Weg l_2 zurückzulegen. Dem entspricht die optische Weglänge

$$s_2 = 2 \cdot n \cdot l_2 \tag{49}$$

Für l_2 gilt ferner

$$\frac{d}{l_2} = \cos\alpha' \quad \Leftrightarrow \quad l_2 = \frac{d}{\cos\alpha'} \tag{50}$$

Der Gangunterschied der beiden Strahlen ist

$$\begin{aligned}
\Delta s &= s_2 - s_1 - \frac{\lambda}{2} && (51)\\
&= \frac{2nd}{\cos\alpha'} - 2d\tan\alpha'\sin\alpha - \frac{\lambda}{2} \qquad \left[\tan\alpha' = \frac{\sin\alpha'}{\cos\alpha'}\right] && (52)\\
&= \frac{2d}{\cos\alpha'} \cdot (n - \sin\alpha'\sin\alpha) - \frac{\lambda}{2} \qquad \left[\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' = 1\right] && (53)\\
&= \frac{2d}{\sqrt{1-\sin^2\alpha'}} \cdot \left(n - \frac{\sin^2\alpha}{n}\right) - \frac{\lambda}{2} && (54)\\
&= 2d \cdot \frac{n^2 - \sin^2\alpha}{n \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}}} - \frac{\lambda}{2} && (55)\\
&= 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} - \frac{\lambda}{2} && (56)
\end{aligned}$$

[**3**]

(c) Ein Interferenzmaximum tritt auf, wenn dieser Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist:

$$\Delta s = m \cdot \lambda \tag{57}$$

[**1**]

Daraus folgt

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda = 2d \cdot \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \tag{58}$$

In Abhängigkeit von m kann diese Bedingung für verschiedene Werte von λ erfüllt werden. Es interessieren jedoch nur die im sichtbaren Bereich liegenden Wellenlängen:

$$\lambda_{min} < \lambda < \lambda_{max} \tag{59}$$

Daraus findet man die Grenzwerte für m:

$$\begin{aligned}
m - \frac{1}{2} &\geq \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{\lambda_{max}} && (60)\\
2,8 &\leq m \leq 5,2 && (61)
\end{aligned}$$

[**2**]

Die Werte für λ ergeben sich aus der Formel

$$\lambda = \frac{2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{m + \frac{1}{2}} \tag{62}$$

demzufolge mit $m = 3, 4$ und 5.

Die gesuchten Wellenlängen sind $\lambda_1 = 656\text{nm}$, $\lambda_2 = 510\text{nm}$ und $\lambda_3 = 417\text{nm}$.

[**3**]

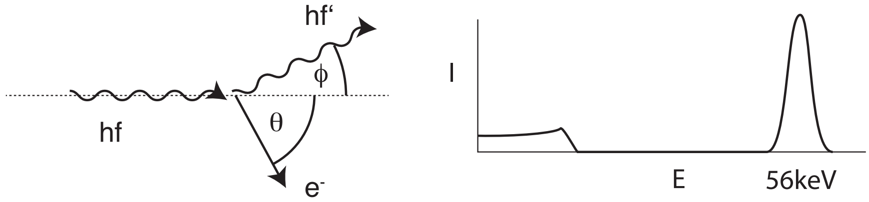
Aufgabe 6 (12 Punkte)

(a) Eine Röntgenröhre produziere Photonen mit der Energie $E_\gamma = 56\text{keV}$. Welcher Wellenlänge entspricht das?

(b) Der Strahl treffe auf ein Kohlenstofftarget (dort auf quasi freie, ruhende Elektronen). Die gestreuten Photonen werden unter einem Winkel von $\phi = 85°$ beobachtet. Welche Wellenlänge haben die gestreuten Photonen? Wird die Wellenlänge größer oder kleiner?

(c) Wieviel Prozent seiner Anfangsenergie hat das gestreute Photon?

(d) Berechen sie die maximale Energie, die ein Comptonelektron bei Photonen mit der Energie $hf = 56\text{keV}$ aufweisen kann. Erklären sie schließlich das unten rechts abgebildete, schematische Spektrum eines Halbleiterszintilationszählers (Energie der von Photonen im Halbleiter ausgelösten Elektronen).



Lösung

(a) Die Photonenenergie E_γ bei Strahlung der Wellenlänge λ ist gegeben mit $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$.

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} \tag{63}$$

$$= \frac{4,13 \cdot 10^{-15}\text{eVs} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{56\text{keV}} = 22\text{pm} \tag{64}$$

[**2**]

(b) Für die Verschiebung der Wellenlänge $\Delta\lambda$ durch Comptonstreuung erhält man:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\phi) \tag{65}$$

$$= \frac{6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}(1 - \cos(85°)) = 2,2\text{pm} \tag{66}$$

[**2**]

Da ein Teil der Photonenenergie an ein Elektronen abgeben wird, wird die Wellenlänge größer:

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 24,2\text{pm} \tag{67}$$

[1]

(c) Der Anteil ϵ an der ursprünglichen Energie berechnet sich zu:

$$\epsilon = \frac{E'}{E} = \frac{\frac{hc}{\lambda'}}{\frac{hc}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = 0,917 = 92\% \tag{68}$$

[2]

(d) Wir berechnen λ für den maximalen Energieübertrag (bei Rückstreuung $\phi = 180°$):

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos(180°)) = \frac{2 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 4,82\text{pm} \tag{69}$$

$$\epsilon = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\lambda}{\lambda + \Delta\lambda} = 0,82 = 82\% \tag{70}$$

$$\Rightarrow E_{\text{kin},e} = 0,18 \cdot 56\text{keV} = 10,1\text{keV} \tag{71}$$

Der große Peak bei $56k$eV lässt sich durch den Photoeffekt erklären: Bei diesem Prozess wird die gesamte Photonenenergie auf das Elektron abgegeben. Wird das Photon allerdings gestreut, so kann auf das Elektron nur eine Energie entsprechend des Comptonprozesses übertragen werden ($E_{\text{kin},e} = 0 - \frac{2h}{mc}$). Daher die sogenannte Comptonkante im Spektrum.

[5]

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Ein unbekleideter Mensch befindet sich in einem $20,0°$C warmen Raum. Seine Körperfläche beträgt $1,50\,\mathrm{m}^2$ und die Haut hat eine Temperatur von $33,0°$C. Wir nehmen an, dass sich die Haut und der Raum wie ein schwarzer Strahler verhält.

(a) Wie groß ist die vom Menschen in dem Raum aufgenommene Strahlungsleistung?

(b) Wie groß ist die abgegebene Strahlungsleistung?

(c) Berechnen Sie über die Differenz die abgegebene Nettoleistung des Körpers. Wie viel Energie wird in 24h abgegeben?

(d) Welche Energie haben die Photonen, die am meisten zu der Strahlung des Menschen beitragen?

(e) Wie viele solcher Photonen wären nötig um die in c) berechnete Energiemenge zu erzeugen?

(f) Wie hoch müsste die Hauttemperatur mindestens sein, damit die in d) betrachteten Photonen im sichtbaren Bereich ($\lambda = 380...780$nm) liegen?

Lösung

(a) Der Raum wird als schwarzer Strahler betrachtet. Seine spektrale Strahlungsdichte ist demnach $M_{\mathrm{Raum}} = \sigma T_{\mathrm{Raum}}^4$. Damit lässt sich die aufgenommene Strahlungsleistung P_{abs} des Körpers durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz errechnen. Für die aufgenommene Strahlungsleistung der Haut ergibt sich:

$$P_{\mathrm{abs}} = A\sigma T_{\mathrm{Raum}}^4 \tag{72}$$

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}} \cdot 1,5\mathrm{m}^2 \cdot (293\mathrm{K})^4 = 627\mathrm{W} \tag{73}$$

[**2**]

(b) Auch die Haut wird als schwarzer Strahler betrachtet. Für die emittierte Strahlungsleistung ergibt sich

$$P_{\mathrm{em}} = A\sigma T_{\mathrm{Haut}}^4 \tag{74}$$

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}} \cdot 1,5\mathrm{m}^2 \cdot (306\mathrm{K})^4 = 746\mathrm{W} \tag{75}$$

[**1**]

(c) Die Nettoleistung des Körpers entspricht der Differenz der Strahlungsleistungen:

$$P = P_{\mathrm{abs}} - P_{\mathrm{em}} = 627\mathrm{W} - 746\mathrm{W} = -119\mathrm{W} \tag{76}$$

Das negative Vorzeichen zeigt, dass die Energie abgegeben und nicht aufgenommen wird. Für die aufgenommene Energie $E = P \cdot \Delta t$ in $\Delta t = 24$h ergibt sich:

$$E = P \cdot \Delta t \tag{77}$$

$$= -119 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\mathrm{s} = -1,03 \cdot 10^7\mathrm{J} \tag{78}$$

[3]

(d) Die Position des Maximums der Strahlungsverteilung λ_{max} als Funktion der Wellenlänge lässt sich über das Wien'sche Verschiebungsgesetz ermitteln:

$$\lambda_{\text{max}} T_{\text{Haut}} = \frac{hc}{4,966 \cdot k_B} \tag{79}$$

Damit ergibt sich für die dementsprechende Energie E_{max}:

$$E_{\text{max}} = \frac{hc \cdot 4,966 \cdot k_B \cdot T_{\text{Haut}}}{hc} \tag{80}$$

$$= 4,966 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 306\text{K} = 2,10 \cdot 10^{-20}\text{J} = 0,13\text{eV} \tag{81}$$

[2]

(e) Die Anzahl N der benötigten Photonen mit Energie E_{max} ergibt sich zu:

$$N = \frac{E}{E_{max}} = \frac{1,03 \cdot 10^7\text{J}}{2,10 \cdot 10^{-20}\text{J}} = 4,90 \cdot 10^{26} \tag{82}$$

[2]

(f) Der sichtbare Bereich ist zwischen 380 nm und 780 nm. Die Temperatur T soll möglichst klein ('mindestens'!) sein, also wird als Photonenwellänge $\lambda_{\text{max}} = 780\text{nm}$ angenommen. Für die Hauttemperatur erhält man damit:

$$T = \frac{hc}{4,966 \cdot k_B \cdot \lambda_{\text{max}}} \tag{83}$$

$$= \frac{6,626 \cdot 10^{-34}\text{Js} \cdot 2,998 \cdot 10^8\text{m/s}}{4,966 \cdot 1,381 \cdot 10^{-23}\text{J/K} \cdot 780 \cdot 10^{-9}\text{m}} = 3710\text{K} \tag{84}$$

[2]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\text{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\text{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8\text{ms}^{-1}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$
Stefan Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3}\text{mK}$