Nachholklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. M. Rief

Wintersemester 2009/10

7.4.2010

Musterlösung

Aufgabe 1:

Es bezeichnen x_1 bzw. x_2 die Abstände der beiden Massen von der Aufhängung (nach unten positiv) und T_1 bzw. T_2 die Spannungen der Fäden. Dann gelten für die Massen die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2 \tag{2}$$

[1]

Da der Faden nicht rutschen soll, gibt es einen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit ω der Rolle (positiv im Uhrzeigersinn) und den Geschwindigkeiten der beiden Massen:

$$R\omega = \dot{x}_2 \tag{3}$$

$$-R\omega = \dot{x}_1 \tag{4}$$

[1]

Als letzte Gleichung hat man noch die Bewegungsgleichung der Rolle:

$$I\dot{\omega} = R(T_2 - T_1) \tag{5}$$

[1]

(vorzeichenrichtig). Dies sind nun 5 Gleichungen mit 5 Unbekannten. Als erstes eliminiert man $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_2$ durch $\dot{\omega}$. Dadurch ergibt sich

$$\left| \begin{array}{rcl} -m_1 R\dot{\omega} & = & m_1 g - T_1 \\ m_2 R\dot{\omega} & = & m_2 g - T_2 \\ I\dot{\omega} & = & R(T_2 - T_1) \end{array} \right| \tag{6}$$

[1]

Dann liefert Einsetzen der beiden ersten Gleichungen in die dritte eine Gleichung für $\dot{\omega}$:

$$I\dot{\omega} = R\Big((m_2 g - m_2 R\dot{\omega}) - (m_1 g + m_1 R\dot{\omega})\Big) \tag{7}$$

[1]

also

$$\big(I + (m_1 + m_2)R^2\big)\dot{\omega} = gR(m_2 - m_1) \tag{8}$$

und

$$\dot{\omega} = \frac{gR(m_2 - m_1)}{I + (m_1 + m_2)R^2} \tag{9}$$

[1]

Aufgabe 2:

(a) Der Energiesatz lautet

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgz = 2mgR \tag{10}$$

wobei $z = R + R\sin\alpha$ die Höhe des Teilchens über dem Boden ist. **[1]**

Aufgelöst nach v ergibt sich:

$$v = \sqrt{2gR(1-\sin\alpha)} \tag{11}$$

[1]

(b) Das Teilchen löst sich von der Kugel, wenn die radiale Komponente der Gewichtskraft nicht mehr ausreicht, die zum Verbleib auf der Kreisbahn nötige Zentripetalkraft zu liefern, d.h. wenn

$$m\frac{v^2}{R} = mg\sin\alpha \tag{12}$$

[1]

ist. Zusammen mit der Gleichung aus Teil (a) hat man nun 2 Gleichungen für 2 Unbekannte:

$$v^2 = gR\sin\alpha \tag{13}$$

$$v^2 = 2gR(1-\sin\alpha) \tag{14}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\sin\alpha = 2(1-\sin\alpha) \tag{15}$$

also

$$\sin\alpha = \frac{2}{3} \tag{16}$$

bzw.

$$\alpha = 41.8^\circ \tag{17}$$

[1]

(c) Die z-Koordinate für das frei fallende Teilchen nach dem Ablösen ist durch

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{18}$$

[1]

gegeben. Dabei ist $t = 0$ der Ablösezeitpunkt. Auflösen von

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{19}$$

ergibt

$$t = \frac{v_{z0}}{g} + \sqrt{\frac{v_{z0}^2}{g^2} + \frac{2z_0}{g}} \tag{20}$$

[1]

Also folgt mit

$$z_0 = R + R\sin\alpha = \frac{5}{3}R = 1.66\,\mathrm{m} \tag{21}$$

und

$$v_{z0} = v\cos\alpha = \sqrt{2gR(1-\sin\alpha)}\cos\alpha = 1.92\,\mathrm{m/s} \tag{22}$$

die Auftreffzeit

$$t = 0.80\,\mathrm{s} \tag{23}$$

[1]

Aufgabe 3:

(a) Allgemein lauten Impuls- und Energieerhaltung beim 1dim. elastischen Stoß:

$$\begin{aligned} m_1 v_1' + m_2 v_2' &= p \qquad (24)\\ m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 &= 2E \qquad (25) \end{aligned}$$

[1]

Gemäß Aufgabenstellung ist (v sei die Geschwindigkeit von Teilchen 1, also $-v$ die von Teilchen 2)

$$\begin{aligned} p &= m_1 v - m_2 v = (m_1 - m_2)v \qquad (26)\\ E &= \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 \qquad (27) \end{aligned}$$

[1]

Da gefordert ist, dass das Teilchen 2 nach der Kollision ruht, ist $v_2' = 0$. Die beiden Erhaltungsgleichungen werden damit im Ganzen zu

$$\begin{aligned} m_1 v_1' &= (m_1 - m_2)v \qquad (28)\\ m_1 v_1'^2 &= (m_1 + m_2)v^2 \qquad (29) \end{aligned}$$

[1]

Durch Quadrieren der ersten Gleichung und Division durch die zweite erhält man dann die gesuchte Bedingung an die Massen:

$$m_1 = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} \tag{30}$$

bzw.

$$m_1(m_1 + m_2) = (m_1 - m_2)^2 \tag{31}$$

Ausmultiplizieren ergibt:

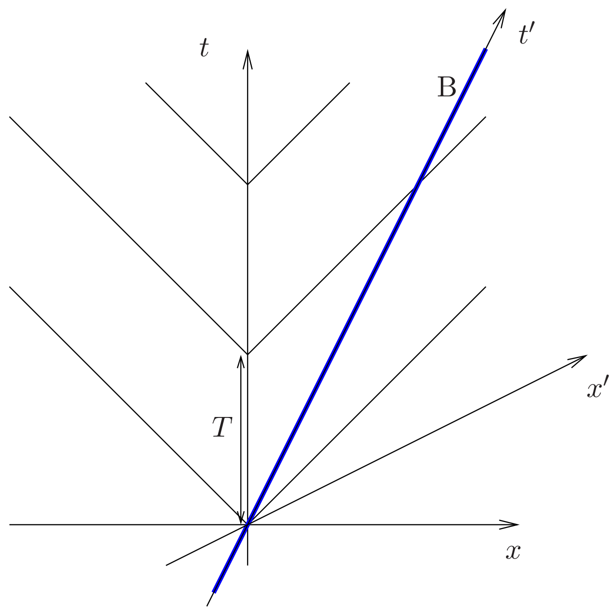
$$m_2 = 3m_1 \tag{32}$$

[1]

(b) Von einem System aus betrachtet, das sich mit $v/2$ bewegt, haben wir genau dieselbe Situation wie in Teil (a). D.h. das Teilchen 2 ruht nach dem Stoß in diesem System. Vom ursprünglichen System aus betrachtet hat es also nach dem Stoß die Geschwindigkeit $v/2$. **[2]**

Aufgabe 4:

(a+b)



[3]

(c) Die Trajektorien des betrachteten Lichtimpulses und des Beobachter lauten:

$$x = c(t - T) \tag{33}$$

$$x = vt \tag{34}$$

Gleichsetzen und Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{T}{1 - v/c} \tag{35}$$

[1]

und daraus x:

$$x = \frac{vT}{1 - v/c} \tag{36}$$

[1]

(d) Der zeitliche Abstand der eintreffenden Lichtimpulse ist gegeben durch den Zeitpunkt des in (c) berechneten Ereignisses im Bezugssystem von B. Die Lorentz-Transformation auf das Inertialsystem von B lautet

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{37}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{38}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{39}$$

Mit den Koordinaten aus (c) ergibt sich

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\left(\frac{T}{1-v/c} - \frac{v}{c^2}\frac{vT}{1-v/c}\right) \tag{40}$$

$$= \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}}{1-v/c}T \tag{41}$$

$$= \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}T \tag{42}$$

$$= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}T \tag{43}$$

[2]

Aufgabe 5:

(a) Es gelten 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten v_1, v_2, v_3 und p_2: Die Kontinuitätsgleichungen

$$v_3 = \frac{d_2^2}{d_3^2}v_2 \tag{44}$$

$$v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2}v_1 \tag{45}$$

und die Bernoulli-Gleichungen

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{46}$$

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 \tag{47}$$

$p_1 = F/A_1$ ist gegeben. Um v_1 zu bestimmen, erkennt man zunächst, dass man diese 4 Gleichungen auf 2 Gleichungen für v_1 und v_3 reduzieren kann:

$$v_3 = \frac{d_1^2}{d_3^2}v_1 \quad , \quad p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho v_3^2 \tag{48}$$

[2]

Daraus folgt die Geschwindigkeit des Kolbens:

$$v_1^2 = \frac{2p_1 d_3^4}{\rho(d_1^4 - d_3^4)} \tag{49}$$

[1]

Daraus ergibt sich per Kontinuitätsgleichung die Geschwindigkeit des austretenden Wassers:

$$v_3^2 = \frac{2p_1 d_1^4}{\rho(d_1^4 - d_3^4)} \tag{50}$$

und der Volumenstrom:

$$\Phi = A_3 v_3 = \pi\frac{d_3^2}{4}\sqrt{\frac{2p_1 d_1^4}{\rho(d_1^4 - d_3^4)}} \tag{51}$$

[1]

Der Druck am Punkt Q ergibt sich aus der dortigen Geschwindigkeit

$$v_2^2 \;=\; \frac{2p_1 d_3^4}{\rho(d_1^4 - d_3^4)} \frac{d_1^4}{d_2^4} \tag{52}$$

per $p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_3^2 - v_2^2)$:

$$p_2 \;=\; p_1 \frac{1 - d_3^4/d_2^4}{1 - d_3^4/d_1^4} \tag{53}$$

[1]

(b) Der Druck bei Q wäre ohne Loch größer. **[1]**

Aufgabe 6:

(a) Auf die Masse 1 wirken Kräfte von den beiden Federn, die sie einschließen. Die linke Feder zieht die Masse stets nach links (da die entspannte Länge null ist), die rechte nach rechts. Die Länge der linken Feder ist $a + x_1$, die der rechten $a + x_2 - x_1$. Also im Ganzen:

$$F_1 \;=\; -k(a + x_1) + k(a + x_2 - x_1) \;=\; -2kx_1 + kx_2 \tag{54}$$

Entsprechend für Masse 2:

$$F_2 \;=\; -k(a + x_2 - x_1) + k(a - x_2) \;=\; -2kx_2 + kx_1 \tag{55}$$

[3]

(b) Die Bewegungsgleichungen der beiden Massen lauten:

$$m\ddot{x}_1 \;=\; -2kx_1 + kx_2 \tag{56}$$

$$m\ddot{x}_2 \;=\; -2kx_2 + kx_1 \tag{57}$$

Der Ansatz $x_1 = y$, $x_2 = -y$ führt dann auf:

$$m\ddot{y} \;=\; -2ky + k(-y) \tag{58}$$

$$-m\ddot{y} \;=\; -2k(-y) + ky \tag{59}$$

also

$$m\ddot{y} + 3ky \;=\; 0 \tag{60}$$

Die Schwingungsfrequenz ist also

$$\omega \;=\; \sqrt{\frac{3k}{m}} \tag{61}$$

[2]

Aufgabe 7:

(a) Für $v = c$ muss sich unendliche Frequenz $\nu' = \infty$ ergeben („Schallmauer“) und für $v = -c$ die Hälfte der Senderfrequenz, also $\nu' = \nu/2$. Also:

$$\nu' = (1 - v/c)\nu \tag{62}$$

kann nicht korrekt sein, da für $v = c$ sich $\nu' = 0$ ergeben würde.

$$\nu' = (1 + v/c)\nu \tag{63}$$

kann nicht korrekt sein, da $v = c$ sich $\nu' = 2\nu$ ergeben würde.

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + v/c} \tag{64}$$

kann nicht korrekt sein, da sich für $v = -c$ sich $\nu' = \infty$ ergeben würde.

Es bleibt somit nur

$$\nu' = \frac{\nu}{1 - v/c} \tag{65}$$

Für $v = c$ ergibt sich $\nu' = \infty$ und für $v = -c$ ergibt sich $\nu' = \nu/2$. Passt. **[2]**

(b) Die hörbare Schwebungsfrequenz f ist die Differenz der Frequenzen der beiden Einzeltöne:

$$f = \nu_1' - \nu_2' \tag{66}$$

Dabei sind

$$\nu_1' = \frac{\nu}{1 - v_1/c} \tag{67}$$

$$\nu_2' = \frac{\nu}{1 - v_2/c} \tag{68}$$

die dopplerverschobenen Frequenzen. (Die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 sind hier beide als positiv zu sehen, auch wenn sich die Züge in unterschiedliche Richtungen bewegen, da sie sich beide auf den Empfänger zubewegen.) Also:

$$\frac{\nu}{1 - v_1/c} - \frac{\nu}{1 - v_2/c} = f \tag{69}$$

[1]

und dies kann man nach v_2 auflösen:

$$\frac{v_2}{c} = 1 - \frac{1 - v_1/c}{1 - \frac{f}{\nu}(1 - v_1/c)} \tag{70}$$

[1]

Zahlenwert:

$$v_2 = 22.8\,\mathrm{m/s} = 82.1\,\mathrm{km/h} \tag{71}$$

[1]

(c) Tatsächlich ist das Ergebnis nicht eindeutig, denn wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass $\nu_1' > \nu_2'$ ist (denn f ist positiv), also dass $v_1 > v_2$ ist. Man kann dieselbe Schwebungsfrequenz aber auch erhalten, wenn $v_1 < v_2$ ist. Dann ist

$$f \;=\; \nu_2' - \nu_1' \tag{72}$$

und es ergibt sich ($f \leftrightarrow -f$):

$$\frac{v_2}{c} \;=\; 1 \;-\; \frac{1 - v_1/c}{1 + \frac{f}{\nu}(1 - v_1/c)} \tag{73}$$

Zahlenwert:

$$v_2 \;=\; 27.2\,\mathrm{m/s} \;=\; 97.8\,\mathrm{km/h} \tag{74}$$

[**1**]