DVP-Klausur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. F. v. Feilitzsch

4.9.2008

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Was versteht man unter Luminosität, und was ist ihre Einheit? Geben Sie ein möglichst einfaches Beispiel an, aus dem klar wird, dass in einem Streuexperiment der Teilchenstrom des Strahls (Einheit 1/s) allein die Streurate nicht eindeutig festlegt (bei feststehender Art der Streuzentren und feststehendem Detektor).

b) Was versteht man unter differentiellem Streuquerschnitt?

c) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Ablenkungsfunktion $\vartheta(b)$ und dem differentiellen Streuquerschnitt für ein rotationssymmetrisches Wechselwirkungspotential her.

d) Beschreiben Sie kurz die Logik die man benutzt, um mit Hilfe von Streuexperimenten Aussagen über mikroskopische Modelle oder Parameter zu machen.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

a) Welche Bedeutung hat die (zeitabhängige) Schrödinger-Gleichung für die Quantenmechanik? Welche Bedeutung hat die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung?

b) Nennen Sie mindestens zwei Gründe, weshalb stationäre Zustände in der Quantenmechanik eine so wichtige Rolle spielen.

c) Was ist die Bedeutung der Wellenfunktion in der Quantenmechanik?

d) Angenommen, ein spinloses Teilchen befindet sich in einem Zustand mit Drehimpulsquadrat $6\hbar^2$. Wie berechnet man dann aus seiner Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{x})$ die Wahrscheinlichkeit, bei einer Drehimpulsmessung um die z-Achse den Wert $\hbar$ zu finden? Wie bei einer Drehimpulsmessung um die x-Achse?

Aufgabe 3: (10 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse m und kinetischer Energie $E < U$ trifft von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) \;=\; \begin{cases} U > 0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > a \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Situation durch eine Wellenfunktion der Form

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + \rho e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & \text{für } 0 < x < a \\ \tau e^{ik(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases}$$

dargestellt werden kann (mit konstanten $A, B, \rho, \tau, k, \kappa$) und bestimmen Sie k und κ als Funktionen von m, E und U.

b) Zeigen Sie, dass

$$\tau = \frac{4ik\kappa}{(k+i\kappa)^2 e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2 e^{-\kappa a}}$$

c) Wie nennt man den sich hier andeutenden Effekt? Nennen Sie zwei Beispiele, wo dieser Effekt in der Natur oder Technik auftritt.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Gegeben sei das folgende Linienspektrum eines Ein-Elektron-Systems, also eines Atoms, das durch Ionisation alle bis auf ein Elektron verloren hat. Dabei sind die kleinste und die drei größten Wellenlängen einer Serie gemessen worden.

$$568.84\,\text{nm} \quad , \quad 933.47\,\text{nm} \quad , \quad 1161.37\,\text{nm} \quad , \quad 1861.65\,\text{nm}$$

Um welches Atom handelt es sich dabei? Zwischen welchen Energieniveaus finden die beobachteten Übergänge statt? (Hinweis: Vernachlässigen Sie alle Komplikationen durch Feinstruktur etc. Die Energien der stationären Zustände im Coulomb-Potential der Ladung Ze ergeben sich aus denen des Wasserstoffs durch Multiplikation mit Z^2.)

Aufgabe 5: (9 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom gemäß der Schrödinger-Theorie, dessen Elektron sich in einem $3d$-Zustand befindet.

a) Geben Sie an, in welche Niveaus nl_j das $3d$-Niveau aufspaltet, wenn man eine Spin-Bahn-Wechselwirkung der Form $H_{LS} = a\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ berücksichtigt. Berechnen Sie die Energieverschiebungen ΔE dieser Niveaus bezüglich des ungestörten $3d$-Niveaus, und skizzieren Sie die neuen Niveaus relativ zur Lage des alten. Überzeugen Sie sich davon, dass die Summe der Dimensionen der neuen Niveaus mit der Dimension des ursprünglichen Niveaus übereinstimmt. (Hinweis: $\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ lässt sich durch l, s, j ausdrücken.)

b) Nun werde ein Magnetfeld B eingeschaltet. Die Feinstrukturniveaus aus Teil a) spalten dadurch in weitere Unterniveaus auf. Wie nennt man diesen Effekt? Berechnen Sie den Landé-Faktor für die Feinstrukturniveaus aus Teil a) und verwenden Sie das Ergebnis, um deren Aufspaltung durch das B-Feld zu skizzieren. Geben Sie dabei für jedes Unterniveau die magnetische Quantenzahl und die Dimension an.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Betrachten Sie die allgemeine Elektronenkonfiguration eines Atoms: $n_1 {l_1}^{z_1}\, n_2 {l_2}^{z_2} \ldots n_\nu {l_\nu}^{z_\nu}$. Zeigen Sie, dass die Dimension des zugehörigen Zustandsraums im Rahmen des Zentralfeldmodells gegeben ist durch

$$d \;=\; \binom{2(2l_1+1)}{z_1} \cdot \binom{2(2l_2+1)}{z_2} \cdot \ldots \cdot \binom{2(2l_\nu+1)}{z_\nu}$$

(Hinweis: Berücksichtigen Sie das Pauli-Prinzip und die Identität der Elektronen.) Warum braucht man vollständig gefüllte Unterschalen bei der Berechnung der Dimension einer konkreten Konfiguration nicht zu berücksichtigen?

Aufgabe 7: (11 Punkte)

Gegeben sei eine ebene Fläche aus pyrolytischem Graphit, die mit einer monoatomaren Schicht aus flüssigem Helium-3 bedeckt ist. Bei hinreichend kleiner Temperatur und Bedeckungsdichte kann man dieses System als ein 2dimensionales ideales Gas aus Spin$\frac{1}{2}$-Fermionen betrachten.

a) Zeigen Sie, dass die Fermi-Energie bei $T = 0$ für ein solches 2dimensionales Fermi-Gas gegeben ist durch

$$\varepsilon_{F0} = \frac{\pi\hbar^2}{m}\frac{N}{A}$$

wobei A die Fläche, N die Teilchenzahl und m ihre Masse ist.

b) Wie groß ist die Fermi-Temperatur T_F bei einer Bedeckungsdichte von 1 ^{3}He-Atom pro nm^2?

c) Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie des Gases aus a) für $T \ll T_F$ gegeben ist durch

$$E \;=\; \frac{1}{2}N\varepsilon_{F0} \;+\; \frac{\pi^2}{6}\frac{Nk^2T^2}{\varepsilon_{F0}}$$

und dass in diesem Fall die spezifische Wärme pro Flächeneinheit unabhängig von der Bedeckungsdichte ist.
Hinweis: Im Niedertemperaturlimes gilt für eine beliebige Funktion $F(\varepsilon)$:

$$\int_0^\infty d\varepsilon\, \frac{F(\varepsilon)}{e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/kT}+1} \;\approx\; \int_0^{\varepsilon_{F0}} d\varepsilon\, F(\varepsilon) \;+\; \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 F'(\varepsilon_{F0})$$

Formeln und Konstanten:

Plancksche Konstante: $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

Rydberg-Energie: $R_y = 13.6\,\mathrm{eV}$

$\hbar c = 197\,\mathrm{eVnm}$

Masse des ^{3}He-Atoms: $m = 2809\,\mathrm{MeV}/c^2$

Boltzmann-Konstante: $1.381 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J/K}$

Lichtgeschwindigkeit: $c = 299.8 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s}$

Elementarladung: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

Landé-Faktor:

$$g_J \;=\; 1 \;+\; \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$