Klausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. T. Hugel

Wintersemester 2012/2013

14. Februar 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Nennen Sie **alle** Erhaltungssätze, die in den folgenden Behauptungen verletzt werden:

(a) Zwei Teilchen gleicher Masse und Geschwindigkeit stoßen im freien Raum frontal zusammen. Nach dem Zusammenstoß fliegen die Teilchen mit gleicher Geschwindigkeit unter einem rechten Winkel wieder auseinander.

(b) Ein rollendes Rad kann ohne Krafteinwirkung von außen seine Bewegungsrichtung ändern.

(c) Eine durch ein Rohr fließende Flüssigkeit ändert seine Fließgeschwindigkeit bei Querschnittsänderung des Rohrs nicht.

Lösung

(a) Es wird die Impulserhaltung verletzt.

[**1**]

(b) Es werden Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung verletzt.

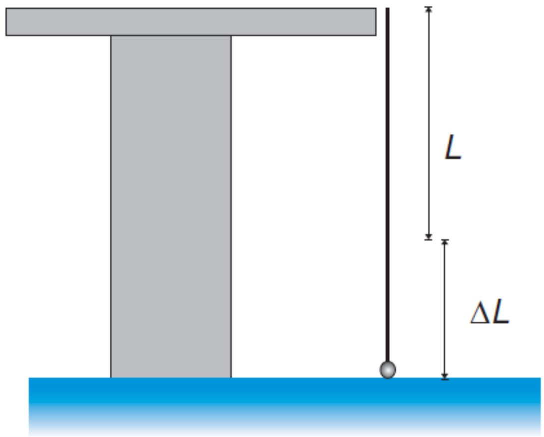
[**2**]

(c) Es wird Energieerhaltung und Impulserhaltung verletzt. (Masseerhaltung ist auch möglich)

[**2**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Bungee-Jumper möchte von einer Brücke springen. Da er Physik studiert, versucht er vorher auszurechnen, ob er vor dem Eintauchen ins Wasser den Umkehrpunkt seiner Bewegung erreicht. Im entspannten Zustand hat das Bungee-Seil eine Länge $L = 25\text{m}$. Das Seil gehorche dem Hook'schen Gesetz ($D = 160\text{N/m}$) und am Zentrum (Schwerpunkt) des Bungee-Jumpers festgemacht. Der Schwerpunkt befindet sich beim Absprung 45m über dem Wasser. Die Körpergröße der Springers sein vernachlässigbar.



(a) Welche Masse darf der Springer maximal haben, damit er gerade nicht ins Wasser taucht?

(b) Welche Kräfte wirken an diesem Punkt auf ihn und wie groß sind sie?

(c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Springers nach 25 m.

(d) Der Springer führt seinen Bungeesprung am Äquator durch. Wie groß ist die Corioliskraft, die nach 25 m auf ihn wirkt im Verhältnis zur Gewichtskraft und in welche Richtung zeigt sie?

Lösung

(a) Im tiefsten Punkt über dem Wasser hat der Springer seine potenzielle Energie um den Betrag $\Delta E_{\text{pot}} = -mg(L+\Delta L)$ geändert, wobei $\Delta L = 20\text{m}$. Die kinetische Energie ist beim Absprung und beim Tiefpunkt Null und die Energie im Bungee-Seil beträgt im Tiefpunkt $\Delta E_{\text{Spann}} = \frac{1}{2}D\Delta L^2$. Die Energiebilanz sieht damit wie folgt aus:

$$0 = \Delta E_{\text{kin}} + \Delta E_{\text{Feder}} + \Delta E_{\text{pot}}$$
$$0 = 0 + \frac{1}{2}D\Delta L^2 - mg(L+\Delta L)$$
$$\Rightarrow m = \frac{D\Delta L^2}{2g(L+\Delta L)} = 72,49\text{kg}$$

[2]

(b) Die Gewichtskraft wirkt nach unten mit $F = mg = 711\text{N}$. Des weiteren zieht das gespannte Seil nach oben mit der Kraft $F_{\text{Spann}} = -D\Delta L = 3200\text{N}$.

[1]

(c) 25 Meter erreicht der Springer nach

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{5}\text{s} \tag{1}$$

Zu diesem Zeitpunkt hat er die Geschwindigkeit

$$v(\sqrt{5}\mathrm{s}) = g \cdot t = 22,36\mathrm{m/s} \tag{2}$$

[**1**]

(d) Die Corioliskraft

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega} \tag{3}$$

[**1**]

wird mit $v = 22,36\mathrm{m/s}$ und $\omega = \frac{2\pi}{24\times60\times60}\mathrm{s}^{-1}$ zu $F_C = 0,24\mathrm{N}$ und ist damit um einen Faktor 3016 kleiner als die Gewichtskraft. Die Corioliskraft wirkt nach Osten.

[**1**]

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Ein Stein der Masse $m = 0,2\mathrm{kg}$ wird an einer $0,5\mathrm{m}$ langen Schnur mit 2 Umdrehungen pro Sekunde in $h = 2\mathrm{m}$ Höhe (Aufhängungspunkt) in einer horizontalen Kreisbahn herumgeschleudert. Die **Schwerkraft** ist zu vernachlässigen.

(a) Wie groß ist die kinetische Energie des Steins?

(b) Welche Kraft muss man aufbringen, um den Stein an der Schnur zu halten?

(c) Bei welcher Umdrehungsfrequenz würde die Schnur reißen, wenn sie 100N aushält bevor sie reißt?

(d) Wie weit würde er dann fliegen?

(e) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten vier Teilaufgaben bei Berücksichtigung der Schwerkraft? (5 Punkte)

Hinweis zu (e): Bestimmen Sie die Änderung des Radius der Kreisbahn.

Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 && (4)\\
&= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 && (5)\\
&= \frac{1}{2}mr^2\frac{4\pi^2}{T^2} && (6)\\
&= \frac{2}{5}\pi^2\frac{\mathrm{m}^2\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2} && (7)\\
&= 3,9\mathrm{J} && (8)
\end{aligned}$$

[**1**]

(b) Es gilt für F_z die Kraft, die aufgebracht werden muss

$$F_z = mr\omega^2 \tag{9}$$
$$= \frac{8}{5}\pi^2 \frac{\text{mkg}}{\text{s}^2} \tag{10}$$
$$= 15,8\text{N} \tag{11}$$

[**1**]

(c) Es gilt für ν die Umdrehungsfrequenz, bei der die Schnur reißt

$$100\text{N} = mr\omega^2 = 4\pi mr\nu^2 \tag{12}$$
$$\Leftrightarrow \nu = \sqrt{\frac{100\text{N}}{0,2\text{kg}\pi^2 0,5\text{m}}} = 5\text{Hz} \tag{13}$$

[**1**]

(d) Da die Schwerkraft vernachlässigt ist, fliegt der Stein tangential weg und landet nicht auf dem Boden.

[**1**]

(e) Die Kreisbahn ist immer noch in der Horizontalen, nur der Radius verringert sich, da die Schwerkraft $\vec{F}_g$ den Stein nach unten zieht: Die Schnur bildet einen Winkel α mit der Horizontalen. Der neue Radius der Kreisbahn r' ergibt sich aus den beiden Beziehungen im rechtwinkligen Kräftedreieck, denn damit gilt $\tan\alpha = F_g/F_z$ und $\cos\alpha = r'/r$. Es kann eingesetzt werden

$$\tan\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r'} = \frac{mg}{m\omega^2 r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{14}$$

was $\sin\alpha = g/(\omega^2 r)$ liefert. Damit gilt

$$\alpha = \arcsin\frac{g}{\omega^2 r} \tag{15}$$
$$= 7,1^\circ \tag{16}$$

[**1**]

Was ergibt, dass $r' = r\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{F_{Ges}^2}} = 0,49\text{m}$. Damit ist die kinetische Energie

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mr'^2\omega^2 \tag{17}$$
$$= \frac{1}{2}mr'^2\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{18}$$
$$= \frac{8}{5}(0,49)^2\pi^2\text{J} \tag{19}$$
$$= 3,8\text{J} \tag{20}$$

[**1**]

Für (b) bestimmt man die resultierende Kraft $\vec{F}$ als

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_g + \vec{F}_z \quad (21)\\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 r \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)\\ &= m \begin{pmatrix} \omega^2 r \\ g \end{pmatrix} \quad (23)\end{aligned}$$

Der Betrag der resultierenden Kraft liefert das Ergebnis

$$|\vec{F}| = m\sqrt{\omega^2 r^2 + g^2} = 15,8\text{N} \quad (24)$$

[**1**]

Die Umdrehungsfrequenz, bei der die Sehne reißt, kann man sich geometrisch überlegen

$$\frac{r'}{r} = \frac{F_Z}{F_{Ges}} = \frac{mr'\omega^2}{F_{Ges}} \Longrightarrow \omega_{mitSchwerkraft} = \sqrt{\frac{F_{Ges}}{mr}} = \omega_{ohneSchwerkraft} \quad (25)$$

[**1**]

Bei Reißen der Schnur wird der Stein tangential, das heißt horizontal, mit der Bahngeschwindigkeit v aus der Kreisbahn geworfen. Die Flugweite s ergibt sich hier einfach aus der horizontalen Bewegung mit v während der Fallzeit aus der Höhe h' (horizontaler Wurf):

$$\begin{aligned}h' &= h - \delta h \quad (26)\\ &= h - r\sin\alpha \quad (27)\end{aligned}$$

Des weiteren gilt $h' = {}^1\!/_2 g t^2$, also

$$t = \sqrt{\frac{2(h - r\sin\alpha)}{g}} = 0,63\text{s} \quad (28)$$

Es gilt auch

$$s = v't = \omega r' t = \omega r \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 g^2}{F_{Ges}^2}\right) \frac{2}{g} \left(h - r\frac{mg}{F_{Ges}}\right)} = 9,91\text{m} \quad (29)$$

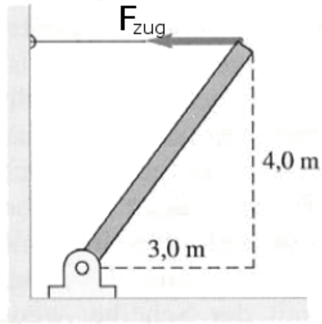
[**1**]

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein dünner Schlagbaum besitze bei einer homogenen Masseverteilung die Masse 150kg und die Länge 5m. Er sei am Boden mit einem Scharnier verbunden und werde durch ein horizontales Seil gehalten.

(a) Wie groß ist die Zugkraft auf dem Seil?

(b) Das Seil werde nun durchtrennt. Wie groß ist die potenzielle Energie der Lage in diesem Moment, wenn die Höhe des Scharniers als Bezugspunkt gewählt wird?



(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Schlagbaums bezüglich der Scharnierachse durch explizite Integration in kartesischen Koordinaten (Sie dürfen hierbei den Schlagbaum als quaderförmig annehmen und eine geeignete Orientierung des Koordinatensystems wählen). (Zwischenergebnis: $I = 1250\mathrm{kgm}^2$)

(d) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit, wenn der Schlagbaum die Horizontale erreicht?

Lösung

(a) Es kann angenommen werden, dass die Drehmomente durch Schwerpunkt und durch das Seil sich kompensieren. Dann gilt

$$|D_{\mathrm{SP}}| = |\vec{r} \times \vec{F}_G| = \frac{l}{2} mg \cos\alpha \tag{30}$$
$$|D_{\mathrm{Seil}}| = |\vec{r} \times \vec{F}_Z| = lF_Z \sin\alpha \tag{31}$$
$$\tag{32}$$

[**1**]

Auflösen nach F_Z liefert

$$F_Z = \frac{mg}{2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 562,5\mathrm{N} \tag{33}$$

[**1**]

(b) Die potenzielle Energie im Schwerpunkt ist

$$U = mgh = 150\mathrm{kg} \cdot 10\mathrm{m/s}^2 \cdot 2\mathrm{m} = 3000\mathrm{J} \tag{34}$$

[**1**]

(c) Das Trägheitsmoment berechnet sich nach folgender Formel

$$I = \int r_\perp^2 \rho(r) \mathrm{d}V = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_0^L z'^2 \frac{m}{LA} \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \mathrm{d}z' \tag{35}$$

[**1**]

wobei wir eine homogene Massenverteilung angenommen haben mit $\rho = {}^{m}/_{LA}$. Damit gilt

$$I = \frac{m}{LA} a^2 \int_0^L z'^2 \mathrm{d}z' = \frac{m}{L} \int_0^L z'^2 \mathrm{d}z' = \frac{mL^2}{3} = 1250\mathrm{kgm}^2 \tag{36}$$

[**1**]

(d) Hier kann $U_{\text{pot}} = E_{\text{rot}} = {}^1\!/\!_2 I\omega^2$ benutzt werden. Daraus ergibt sich die gesuchte Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \sqrt{\frac{2U_{\text{pot}}}{I}} = 2,2\text{s}^{-1} = 125°/\text{s} \tag{37}$$

[**1**]

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass bei einem elastischen, nicht-zentralen Stoß zwischen zwei Teilchen *gleicher* Masse, von denen eines anfangs ruht, die Energie $(\sin^2\theta)E_0$ auf das ursprünglich ruhende Teilchen übertragen wird. Dabei ist E_0 die Energie des einlaufenden Teilchens und θ der Winkel, um den es aus seiner Richtung abgelenkt wird.

Lösung

Der Stoß ist elastisch und die Massen entsprechen sich. Daher gilt $v_0^2 = v_1^2 + v_2^2$. Darin sind v_0 und v_1 die Anfangs- und Endgeschwindigkeit des einlaufenden Teilchens, v_2 ist die Endgeschwindigkeit des zu Beginn ruhenden Teilchens. Die drei Geschwindigkeiten bilden also ein rechtwinkliges Dreieck. In diesem Fall gilt $\sin\theta = {}^{v_2}\!/\!_{v_0}$, und daher

[**2**]

$$E_{\text{kin},2} = \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\sin^2\theta = (\sin^2\theta)E_0 \tag{38}$$

[**1**]

was zu zeigen war.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein mit Schrot beschwertes Becherglas mit konstantem Querschnitt $A = 2\text{cm}^2$ und einer Gesamtmasse von Glas und Schrot von $m = 25\text{g}$ schwimmt aufrecht im Wasser.

Das Becherglas wird mit dem Daumen etwas tiefer gedrückt und dann losgelassen. Anschließend führt es Schwingungen in vertikaler Richtung aus.

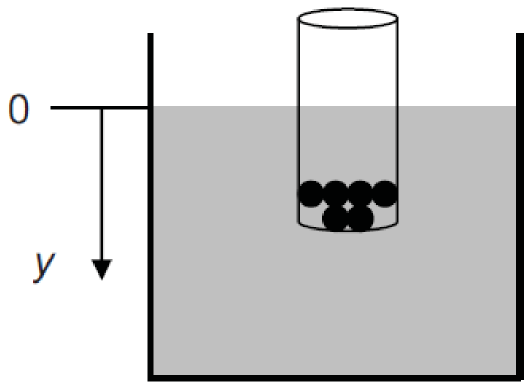
(a) Zeigen Sie, dass diese Schwingungen harmonisch sind. Dabei sei sowohl die Reibung als auch die Bewegung der Flüssigkeit zu vernachlässigen.

(b) Berechnen Sie die Schwingungsdauer des beschriebenen Systems?

(c) Wie hängt die Schwingungsdauer T vom Querschnitt A des Becherglases ab?

(d) Angenommen, der Querschnitt des Becherglases werde nun verdoppelt. Welche zusätzliche Masse an Schrot ist hinzuzufügen, wenn die Schwingungsdauer der der Aufgabe (b) entsprechen soll (Dabei bleibt die Masse des Becherglases dieselbe)?

(e) Begründen Sie, warum entsprechende Schwingungen eines kugelförmigen Glasses – im Vergleich zu einem Becherglas – keine harmonischen Schwingungen ergeben.



Lösung

Im Ruhezustand schwimmt das Becherglas. Die Ruhelage ist gekennzeichnet durch die Koordinate $y = 0$. Auslenkungen aus der Ruhelage seien durch y beschrieben. Als positive y-Richtung sei die Eintauchrichtung gewählt. Es sei ρ die Dichte der Flüssigkeit, g die Fallbeschleunigung, V das zusätzlich verdrängte Volumen und A der Querschnitt des Becherglases.

(a) Nach dem Tiefertauchen um die Auslenkung y wirkt eine zusätzliche Auftriebskraft F_A nach oben. Die Auftriebskraft ist gegeben durch

$$F_A = -(\rho V)g \tag{39}$$

[**1**]

Das verdrängte Volumen ist dabei $V = Ay$, damit ergibt sich also $F_A = -(\rho A g)y$. Die Auftriebskraft ist damit proportional zur Eintauchtiefe y bezüglich der Ruhelage und in die Ruhelage rücktreibend. Der Vergleich mit einem linearen Kraftgesetz $F_{\text{rück}} = -cy$ liefert die „Federkonstante“ $c = \rho A g$.

[**1**]

Die Federkonstante wird repräsentiert durch den Ausdruck $\rho A g$. Ein lineares Kraftgesetz führt stets zu harmonischen Schwingungen.

[**1**]

Eine andere Möglichkeit wäre das Aufstellen der Bewegungsgleichung für einen harmonische Oszillator.

$$m\ddot{y} = -pA = -\rho g A y \Rightarrow \ddot{y} = -\frac{\rho g A}{m} \cdot y \tag{40}$$

(b) Sämtliche für ein Feder-Masse-System aufgestellten und abgeleiteten Beziehungen können übernommen werden. Es ist nur überall die Federkonstante $c = \rho A g$ des vorliegenden Problems einzusetzen. Damit gilt

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}} \tag{41}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 \cdot 10^{-3}\text{kg}}{10^3\text{kgm}^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2 \cdot 9,81\text{m/s}^2}} = 0,71\text{s} \tag{42}$$

[1]

(c) Nach der Beziehung für die Schwingungsdauer gilt

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho A g}} \tag{43}$$

Für eine konstante Dichte ρ der Flüssigkeit und eine konstante Fallbeschleunigung g folgt für die Schwingungsdauer

$$T_0 = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{m}{A}} \tag{44}$$

[1]

(d) Wenn der Querschnitt A des Becherglases verdoppelt wird, muss auch die Masse verdoppelt werden, wenn die Schwingungsdauer unverändert bleiben soll.

[1]

(e) Für das Becherglas gilt

$$F_A = -(\rho A g)y, \quad A = \text{const.} \tag{45}$$

Für eine Kugel ist aber der Querschnitt von der Eintauchtiefe abhängig. Damit wird das Kraftgesetz nichtlinear und die Voraussetzung für umgedämpfte harmonische Schwingung ist nicht mehr erfüllt.

[1]

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Eine Gitarrensaite aus Stahl (Dichte $\rho = 8\text{gcm}^{-3}$) soll auf den Kammerton ($f = 440\text{Hz}$) abstimmbar sein. Welchen Durchmesser d darf die Saite höchstens haben, damit beim Stimmen die Zugkraft $F = 100\text{N}$ nicht überschritten wird? Der Abstand der beiden Stege der Gitarre sei 60cm.

Hinweis: $\frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $u(t,x) = u_0 \cos\left(2\pi(\nu t - \frac{x}{\lambda})\right)$ wobei μ die Linienmassendichte und ν die Frequenz ist.

Lösung

Eine beidseitig eingespannte Saite liefert bei der Grundfrequenz $f = 440\text{Hz}$ mit $\lambda/2 = L$, das $\lambda = 2L = 1{,}2\text{m}$ ist. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt einerseits

$$c = f\lambda = f2L = 528\text{m/s} \tag{46}$$

[1]

andererseits gilt

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{FL}{\rho V}} = \sqrt{\frac{FL}{\rho A L}} = \sqrt{\frac{FL}{\rho\pi d^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} \tag{47}$$

[1]

Gleichsetzen liefert

$$f2L = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} \tag{48}$$

Dies liefert

$$d = \frac{1}{fL}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} = 0,24\text{mm} \tag{49}$$

[**1**]