1. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

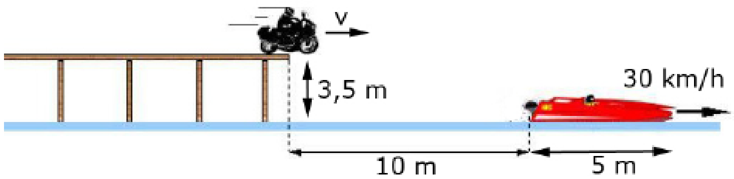
Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2017/18
5. Dezember 2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)



Die Gegenspieler von James Bond versuchen mit einem Schnellboot zu entkommen. 007 rast mit seinem Motorrad mit der Geschwindigkeit v über den Landungssteg, der 3,5 m über der Wasseroberfläche verläuft. Seine Absicht ist es, nach einem freien Flug auf dem feindlichen 5 m langen Boot zu landen.

Die Abbildung zeigt den Moment des Absprungs. Das Boot bewegt sich mit 30 km/h nach rechts.

Berechne, in welchem Geschwindigkeitsbereich sich James Bond beim Absprung seines Motorrads bewegen muss, damit er (mit der Mitte seines Motorrads) auf das Boot trifft.

Lösung

Die Entfernung des Bootes vom Landungssteg zur Absprungzeit $t = 0$ s beträgt $e = 10$ m, die Länge des Bootes $l = 5$ m.

Zunächst wird die Flugzeit t_0 mit der Gleichung für die Vertikalbewegung (Fall) ermittelt:

$$y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}$$

[**2**]

Für den Weg s_B, den das Boot während dieser Zeit zurücklegt, gilt:

$$s_b = v_B \cdot t_0$$

Somit gilt für den minimalen horizontalen Flugweg:

$$s_{min} = e + v_B \cdot t_0$$

In diesem Fall trifft der Mittelpunkt des Motorrads gerade noch am Heck des Bootes auf. Für den maximalen horizontalen Flugweg gilt:

$$s_{max} = e + l + v_B \cdot t_0$$

[**2**]

In diesem Fall landet 007 auf der vorderen Spitze des Bootes. Für die konstante horizontale Geschwindigkeit gilt damit, wenn man die Geschwindigkeit des Bootes $v_B = 30$ km/h $= 8,33$ m/s verwendet:

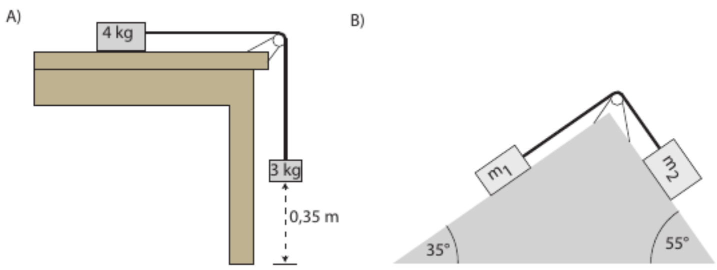
$$v_{max} = \frac{s_{max}}{t_0} = \frac{e + l + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e+l}{t_0} + v_B = \frac{e+l}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 26,11 \text{ m/s} = 94 \text{ km/h}$$

$$v_{min} = \frac{s_{min}}{t_0} = \frac{e + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e}{t_0} + v_B = \frac{e}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 20,28 \text{ m/s} = 73 \text{ km/h}$$

Die Geschwindigkeit von James Bond muss zwischen 73 km/h und 94 km/h liegen.

[**3**]

Aufgabe 2 (13 Punkte)



(a) Ein Quader mit der Masse 4 kg liege auf einer waagerechten Tischplatte und sei über ein Seil (das über eine Rolle läuft) mit einem 3-kg-Massestück verbunden (siehe Abbildung A). Wie groß muss die Reibungszahl μ mindestens sein, damit der Quader ruht?

(b) Die Reibungszahl zwischen Tisch und Quader betrage nun $\mu = 0{,}35$. Der Quader werde nun losgelassen. Wie lange braucht das 3-kg-Massestück für den 0,35 m tiefen Fall auf den Boden?

(c) Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 seien über ein Seil miteinander verbunden und gleiten jeweils auf einer schiefen Ebene (siehe Abbildung B); die Reibungszahl für beide Körper sei dabei
$\mu_G = 0{,}3$. Das Seil laufe über eine reibungsfreie Rolle. In welchem Bereich der Massenverhältnisse sind die Körper in Ruhe?

Lösung

(a) Gesucht ist der Reibungskoeffizient μ_H. Gegeben: $m_Q = 4$ kg, $m_S = 3$ kg und $h = 0{,}35$ m.

$$F_H = F_g \Rightarrow \mu_H \cdot m_Q \cdot g = m_S \cdot g$$
$$\Rightarrow \mu_H = \frac{m_S \cdot g}{m_q \cdot g} = \frac{m_S}{m_Q} = \frac{3\ \text{kg}}{4\ \text{kg}} = 0,75$$

[3]

(b) Die Reibungszahl ist nun $\mu_G = 0{,}35$. Es ergibt sich eine effektive Zugkraft F_e aus der Gewichtskraft des 3-kg-Massestücks F_g und der Reibungskraft des Quaders F_R:

$$F_e = m_S \cdot g - \mu_G \cdot m_Q \cdot g = g \cdot (m_S - \mu_G \cdot m_Q)$$

[2]

Da nun das hängende Massenstück durch F_e beschleunigt wird, gilt somit $F_e = m_S \cdot a_e$:

$$(m_S + m_Q) \cdot a_e = (m_S - \mu_G \cdot m_Q) \cdot g$$
$$a_e = g \cdot \frac{m_S - \mu_G \cdot m_Q}{m_S + m_Q}$$

Es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsbeschleunigung vor:

$$s = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,35\ \text{m}}{2,24\ \text{m/s}^2}} = 0,56\ \text{s}$$

[3]

(c) Die beiden Massen sollen nun in Ruhe sein. Es gilt:

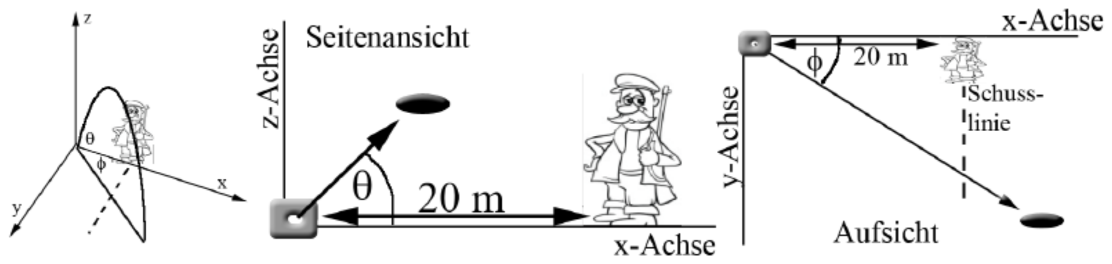
$$F_1 = F_2$$
$$F_1 = m_1 \cdot g \cdot (\sin \alpha_1 \pm \mu_G \cdot \cos \alpha_1)$$
$$F_2 = m_2 \cdot g \cdot (\sin \alpha_2 \mp \mu_G \cdot \cos \alpha_2)$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\alpha_2 \mp \mu_G \cdot \cos\alpha_2}{\sin\alpha_1 \pm \mu_G \cdot \cos\alpha_1}$$
$$\Rightarrow \frac{m_{1,max}}{m_{2,max}} \approx 3,02 \quad \text{und} \quad \frac{m_{1,min}}{m_{2,min}} \approx 0,79$$

[5]

Aufgabe 3 (17 Punkte)

Ein Jäger ist an einem Schießstand, bei dem kleine Scheiben aus Ton aus einer Wurfmaschine geworfen werden. Die Wurfmaschine steht auf der gleichen Höhe wie der Jäger 20 m zu seiner Rechten. Die Tonscheiben werden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 50 m/s in einem $\theta = 60°$ Winkel zum Boden weggeworfen. Die Wurföffnung ist um $\phi = 45°$ von ihm nach vorne ins Feld geneigt.



(a) Beschreiben Sie die Bahngleichung $\vec{r}(t)$ von einer Tonscheibe in Abhängigkeit der beiden Winkel und der Zeit.

(b) Wie weit ist die Tonscheibe unter den Bedingungen ($\phi = 45°$, $\theta = 60°$) geflogen, bis sie am höchsten Punkt ankommt?
Hinweis: Gemeint ist der Abstand zum Nullpunkt in der x-y-Ebene am Boden entlang.

(c) Jetzt will der Jäger parallel zur y-Achse schiessen. Er kann den Abwurfwinkel der Wurfmaschine zum Boden, θ, zwischen 15° und 90° einstellen. Er will den höchsten Punkt der Flugbahn genau in Schusslinie vor sich haben. Auf wieviel Grad muss er den Winkel einstellen?
Hinweis: $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, hat zwei Lösungen im Bereich von $\theta \in [0°, 90°]$

(d) Jetzt wo er den Mittelpunkt der Flugparabel genau vor sich hat, will er sein Gewehr so positionieren, dass er die Tonscheiben genau trifft. Welchen Winkel zwischen Boden und Gewehr muss er wählen? (Nehmen Sie an, dass die Kugel auf geradem Weg zum Ziel fliegt und vernachlässigen Sie deren Gravitation).

Lösung

(a) Am Besten sieht man sich erst die Projektion von $\vec{v}_0$ auf die x-y-Ebene an und dann die Projekton auf die x-z- und die y-z-Ebene.

$$\begin{pmatrix} x(\phi,\theta,t) \\ y(\phi,\theta,t) \\ z(\theta,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ v_y \cdot t \\ v_z \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot t \\ v_0 \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \cdot t \\ v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

[3]

(b) Die Wurfbahn von der Tonscheibe ist eine Parabel. Damit ist der höchste Punkt genau bei der Hälfte der Wurfzeit erreicht. Für die z-Komponente gilt:

$$z(t_{Wurf}) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t_{Wurf} - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0 \Rightarrow t_{Wurf} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$t_{max} = \frac{t_{Wurf}}{2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

[2]

Auf der x-y-Ebene kann man eine neue Variable r einführen:

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x^2+y^2} &= \sqrt{(v_0 \cos\phi \cos\theta \cdot t)^2 + (v_0 \sin\phi \cos\theta \cdot t)^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos\theta \cdot t)^2 \cdot (\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\ &= v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die halbe Wurfweite zu:

$$r_{z,max} = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_{z,max} = \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = 110 \text{ m}$$

[2]

(c) $\theta \in [15°, 90°]$. Die Schusslinie vom Jäger ist durch die Ebene $\begin{pmatrix} x_J = 20 \text{ m} \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gegeben. Wenn die Tonscheibe dise Ebene trifft, gilt:

$$\begin{aligned} x_{Tonscheibe}(t_{z,max}) &= x_J = 20 \text{ m} \\ x_{Tonscheibe}(t_{z,max}) &= v_0 \cos\phi \cos\theta \cdot t_{z,max} = \frac{v_0^2 \cos\phi \cos\theta \sin\theta}{g} \\ \cos\theta \sin\theta &= \frac{x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi} \end{aligned}$$

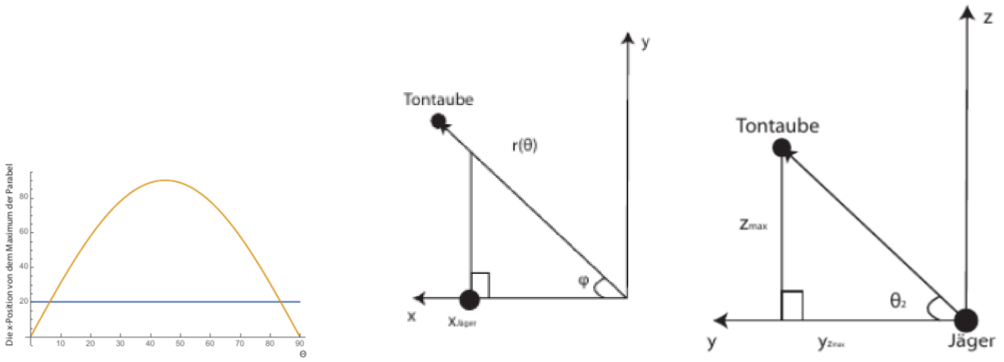
[2]

Hinweis: $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$.
Achtung: $y = \sin 2\theta$ hat zwei Lösungen zwischen 0° und 90°.

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \cdot x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi} = \begin{cases} 86,3° \\ 6,41° \end{cases}$$

Der Schütze muss den Wurfwinkel somit um 23,6° vergrößern. Beide Werte sind somit symmetrisch um $\theta = 45°$ verteilt (siehe Abb. (b)).



(a) (b) (c)

[3]

(d) In der z-y-Ebene kann man ein einfaches Dreieck zeichnen (siehe Abb. (c)). Dabei sind die Kantenlängen gegeben durch:

$$z_{max} = v_0 \sin\theta \cdot t_{z,max} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{z,max}^2$$
$$y_{z,max} = v_0 \cos\theta \sin\phi \cdot t_{z,max}$$

[2]

Aus b)

$$t_{z,max} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$
$$\tan\theta_2 = \frac{z,max}{y_{max}} = \frac{\tan\theta}{2\sin\phi}$$
$$\theta_2 = 81,0°$$

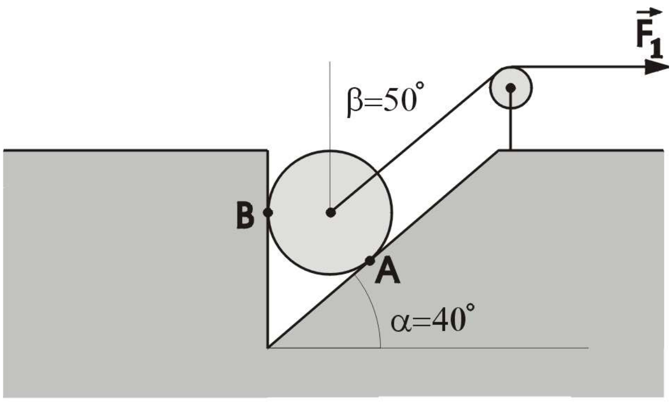
[3]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Eine Walze mit der Masse 500 kg liegt in einem Graben zwischen einer senkrechten Wand und einer schrägen Böschung. An der Walze ist ein Seil befestigt, über das über eine Führungsrolle die Zugkraft $\vec{F}_1$ angreift.

(a) Machen Sie eine Zeichnung mit den wirkenden Kräften. Zeichnen Sie groß genug. Beachten Sie die Länge der Vektoren und beschriften Sie ihre Zeichnung.

(b) Berechnen Sie, wie groß die Normalkräfte an den Punkten A und B sind, wenn $F_1 = 1000$ N ist? ($\alpha = 40°$, $\beta = 50°$)



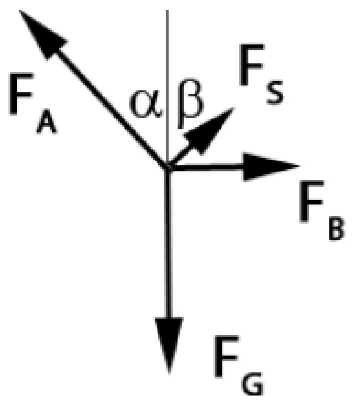
Lösung

Da die Walze sich nicht bewegt, muss die Summe aller Kräfte null sein.

$$\sum F_x = 0 \quad \text{und} \quad \sum F_y = 0$$

[**1**]

Die wirkenden Kräfte sind die Gravitation $\vec{F}_G$, die zwei Normalkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$, sowie die Seilkraft $\vec{F}_S$.



[**2**]

$$\sum F_x = F_S \sin\beta - F_A \sin\alpha + F_B = 0$$
$$\sum F_y = F_S \cos\beta + F_A \cos\alpha - F_G = 0$$

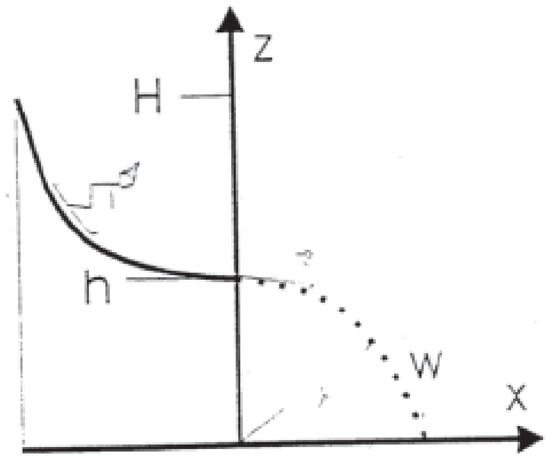
[**2**]

Es ergibt sich

$$F_A = \frac{F_G - F_S \cos\beta}{\cos\alpha} \quad \text{und} \quad F_B = F_A \sin\alpha - F_S \sin\beta = 2810\ N$$

[**2**]

Aufgabe 5 (10 Punkte)



Bei einer Sprungschanze der festen Gesamthöhe H erfolgt der waagerechte Absprung bei einer (variablen) Höhe h (siehe Skizze).

(a) Zeigen Sie, dass die waagerechte Absprunggeschwindigkeit vom Schanzentisch bei vernachlässigter Reibung durch $v = \sqrt{2g(H-h)}$ gegeben ist.

(b) Wie muss man die Höhe $0 \leq h \leq H$ des Schanzentischs gewählt werden, damit die Sprungweite w möglichst groß wird. Wie groß ist w_{max}?

Lösung

(a) Es ist zu zeigen, dass $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$mgH = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh \Rightarrow v = v_x = \sqrt{2g(H-h)}$$

[**2**]

(b) Sei z die Höhe. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&x = v_x t, z = \frac{1}{2} g t_1^2 \\
\Rightarrow &h = \frac{1}{2} g t_1^2 \\
\Rightarrow &t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\
\Rightarrow &w = v_x t_1 = \sqrt{2g((H-h))}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)}
\end{aligned}$$

[4]

Diese Formel liefert also die Weite eines Sprunges in Abhängigkeit von den Werten H und h.

Für das Optimum:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\sqrt{4h(H-h)}\right) = \frac{4H - 8h}{2\sqrt{4h(H-h)}} \stackrel{!}{=} 0 \\
\Leftrightarrow &4H - 8h = 0 \\
\Leftrightarrow &4H = 8h \\
\Leftrightarrow &h = \frac{1}{2} H
\end{aligned}$$

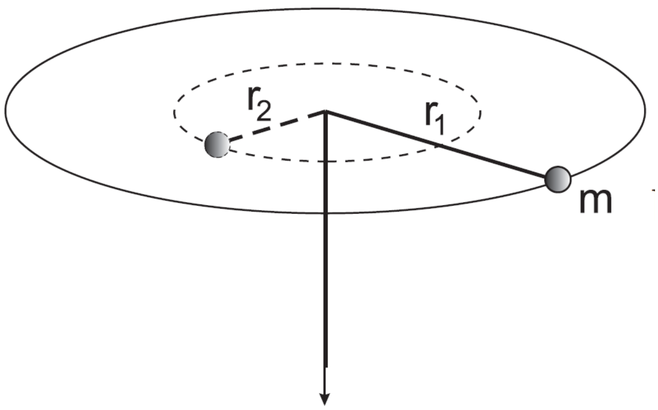
[2]

Für die optimale Weite ergibt sich damit

$$w = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} H \left(H - \frac{1}{2} H\right)} = 2 \cdot \frac{H}{2} = H$$

[2]

Aufgabe 6 (6 Punkte)



Ein Stein der Masse $m = 0,3$ kg befindet sich auf einem horizontalen Tisch und wird an einer Schnur auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius r_1 reibungsfrei mit zunächst konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 herumgeschleudert. Die Schnur wird durch ein dünnes Loch in der Tischplatte geführt und dort durch eine Hand gehalten.

(a) Berechnen Sie den Drehimpuls L_1 in Bezug auf die Rotationsachse, den die Masse m auf der Kreisbahn mit dem Radius $r_1 = 50$ cm bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2\pi\text{s}^{-1}$ besitzt.

(b) Durch Absenken der Hand wird der Radius auf $r_2 = 30$ cm verkürzt. Wie groß ist dann der Drehimpuls L_2 in Bezug auf die Rotationsachse? Begründen Sie kurz.

(c) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 auf der Kreisbahn mit dem Radius r_2.

Lösung

(a)

$$L_1 = r_1^2 m\omega_1 = 0,471 \text{ kgm}^2/\text{s}$$

[2]

(b) Es gilt Drehimpulserhaltung:

$$L_1 = L_2$$

Da in einem Zentralkraftfeld Drehimulserhaltung gilt. Oder weil die Kraft (anti-)parallel zu r_1 wirkt, wirkt kein Drehmoment.

[2]

(c)

$$L_2 = r_2^2 m\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{L_1}{r_2^2 m} = 17,44 \text{ s}^{-1}$$

[2]

Aufgabe 7 (13 Punkte)

Betrachten Sie zwei Fadenpendel (Massen m, Länge l) im Abstand a.

(a) Begründen Sie, warum für kleine Auslenkungen x_i aus der Ruhelage die Kraft auf die Masse jeweils $F_i \approx -\frac{mg}{l} x_i$ ist.

(b) Die beiden Massen seien nun durch eine Feder mit Ruhelänge a und Federkonstanten k gekoppelt. Wie lauten die Kräfte F_i jetzt?

(c) Für die gekoppelten Pendel kann der Vektor, dessen zwei Komponenten die Kräfte auf die beiden Teilchen sind, wie folgt geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrix A an und bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren.

Lösung:

(a) Die Kraft ist

$$F_i = -mg\sin\varphi \approx -mg\varphi + \mathcal{O}(\varphi^2) \approx -mg\frac{x_i}{l}$$

[2]

(b) Die Kraft der Feder ist gegeben durch die Längenänderung gegenüber der Ruhelage. Eine Auslenkung links mit x_1 verkürzt, eine rechts mit x_2 verlängert die Feder.

$$\Delta F = k(x_2 - x_1)$$

Die Kraft greift an der linken Masse rechts (in positiver Richtung) und an der rechten Masse links (in negativer Richtung) an.

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{mg}{l}x_1 + k(x_2 - x_1) \\ F_2 &= -\frac{mg}{l}x_2 - k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

[3]

(c) Daraus liest man ab (mit $K = \frac{gm}{l}$)

$$A = \begin{pmatrix} -K-k & k \\ k & -K-k \end{pmatrix}$$

Eigenwerte ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda\mathbb{I}) &= (K + k + \lambda)^2 - k^2 \\ K + k + \lambda_\pm &= \pm k \\ \lambda_\pm &= \begin{cases} -\frac{gm}{l} \\ -\frac{gm}{l} - 2k \end{cases} \end{aligned}$$

[4]

Die zugehörigen Eigenvektoren sind

$$\begin{aligned} \vec{0} &= (A - \lambda_p m\mathbb{I})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ (-K - k - \lambda_\pm)x_1 + kx_2 &= 0 \\ \mp kx_1 + kx_2 &= 0 \\ x_1 &= \pm x_2 \end{aligned}$$

Ein Eigenvektoren sind also

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bei gleichphasiger Auslenkung („+“) wird die Feder überhaupt nicht gedehnt und die Kraft entspricht der des ungekoppelten Fadenpendels.

[4]