Klausur zu Theor. Physik 3 (Quantenmechanik)

Prof. Walter Schirmacher, Dr. Anatoly Zharikov, SS 2008

DVP08

Besprechung: September 2008

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a\ b\ c)$

1. Elementare Quantenmechanik

(a) In einem dreidimensionalen Hilbertraum sind folgende Vektorzustände gegeben:

$$|\alpha\rangle = i\,|1\rangle - 2\,|2\rangle - i\,|3\rangle, \quad |\beta\rangle = i\,|1\rangle + 2\,|3\rangle.$$

Dabei sind $|1\rangle$, $|2\rangle$ und $|3\rangle$ die orthonormierten Basiszustände.

- Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle\alpha|\beta\rangle$ und $\langle\beta|\alpha\rangle$ und zeigen Sie, dass $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$.
- Finden Sie alle Matrixelemente des Operators $\hat{A} = |\alpha\rangle\langle\beta|$ und geben Sie die Matrixdarstellung von $\hat{A}$ an.
- Ist der Operator $\hat{A}$ Hermitesch? (Begründung)

(b) Ein Teilchen mit dem Spin $S = \frac{1}{2}$ befindet sich in dem Spinzustand

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Quantisierungsachse ist die z-achse.

- Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man bei Messungen der z-Komponente des Teilchenspins die Werte $\frac{1}{2}\hbar$ bzw. $-\frac{1}{2}\hbar$ bekommt.?
- Wie gross sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass man bei Messungen der x-Komponente des Teilchenspins die Werte $\frac{1}{2}\hbar$ bzw. $-\frac{1}{2}\hbar$ bekommt.?

(c) Ein Elektron befindet sich in dem Spinzustand

$$\chi = A \begin{pmatrix} 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A und berechnen Sie die Erwartungswerte von S_x, S_y und S_z in diesem Zustand.

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveaus-Systems lautet:

$$\hat{H} = \epsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right).$$

Dabei sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ die orthonormierte Basiszusände. Das Parameter ϵ hat Energieeinheiten.

(d)
- Wie lautet die Matrixdarstellung des Operators $\hat{H}$ in dieser Basis.
- Finden Sie die Energie eigenwerte und die zugehörigen Eigenzustände des Operators $\hat{H}$.

2. Rotator

Zwei Teilchen der Masse m sind mit einem festen massenlosen Stab der Länge a verbunden. Das Zentrum des Stabes ist im Koordinatenursprung fixiert, so dass das System nur freie Drehungen im 3-dimensionalen Raum machen kann.

(a) Zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte eines solchen quantenmechanischen Rotators durch

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{ma^2}, \quad l = 0, 1, 2, ...$$

beschrieben werden können.
Hinweis: Drücken Sie die klassische kinetische Energie dieses System als Funktion des Drehmoments aus.

(b) Wie groß ist die Entartung des l-ten Energieniveaus.

3. Variationsmethode

Betrachten Sie ein Teilchen in einem Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden

$$V(x) = 0 \quad \text{für } |x| < L, \quad V(x) = \infty \quad \text{für } |x| \geq L.$$

Wählen Sie die Versuchswellenfunktion für den Grundzustand in diesem Potential in der Form

$$\psi^{(var)}(x) = A(L - |x|) \quad \text{für } |x| < L, \quad \psi^{(var)}(x) = 0 \quad \text{für } |x| \geq L.$$

Bestimmen Sie die Normierungskonstante A und berechnen Sie den Erwartungswert des Hamiltonoperators.

4. Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator des zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators hat die Form

$$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2)}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2).$$

(a) Berechnen Sie durch Separation der x und y-Bewegung das Energiespektrum und die Entartung der Zustände.

(b) Betrachten Sie das Zusatzpotential

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m\omega^2 \cdot 2\lambda xy \quad , \qquad \lambda \ll 1$$

als eine Störung. Berechnen Sie die durch Störung hervorgerufene(n) Energieänderung in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie

- für den Grundzustand
- für das zweifach entartete niedrigste angeregte Niveau. (nur 1. Ordnung)

Hinweis: Benutzen Sie Aufsteig- und Absteigoperatoren.

(c) Die Störung durch das Potential $V(x, y)$ kann auch exakt behandelt werden. Zeigen Sie, dass bei einer Koordinatendrehung um 45° auf neue Koordinaten $\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ das Problem wiederum separabel ist. Berechnen Sie die Energieniveaus und vergleichen Sie das Resultat mit dem aus Aufgabenteil b).

Hinweis: Beachten Sie, dass der Operator der kinetischen Energie invariant unter Drehungen in der x-y-Ebene ist, d.h. $\frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) = \frac{1}{2m}(\hat{p}_{\bar{x}}^2 + \hat{p}_{\bar{y}}^2)$.