Musterlösung Nachholsemestrale Ex 2 2008

Aufgabe 1

(a) Es sei der Radius der inneren Kugel R_1 und auf ihr befinde sich die Ladung Q. Aus Symmetriegründen ist das Feld im Zwischenraum von der Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; E(r)\boldsymbol{e}_r \tag{1}$$

Nach dem Gaußschen Gesetz für eine Sphäre vom Radius r mit $R_1 < r < R_2$ gilt dann:

$$4\pi r^2 E(r) \;=\; \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

also

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \tag{3}$$

Die entgegengesetzte Ladung auf der äußeren Kugel hat keinen Einfluss auf das Feld im Zwischenraum der beiden Kugelschalen (Gaußscher Satz), sie sorgt lediglich dafür, dass außerhalb der gesamten Anordung kein Feld mehr existiert. Damit ist das Feld im Zwischenraum das oben angegebene $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$.

(b) Die Potentialdifferenz zwischen innerer und äußerer Kugelschale ist

$$\phi_1 - \phi_2 \;=\; \int_1^2 d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{R_1}^{R_2} dr\, E_r(r) \tag{4}$$

(Die Vorzeichen sind korrekt: Für $Q > 0$ ist die innere Kugel positive geladen und ihr Potential ist daher größer als das der äußeren Kugel, also $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Dies ergibt sich tatsächlich auch so aus dem Integral, denn für $Q > 0$ zeigt $\boldsymbol{E}$ in dieselbe Richtung wie $d\boldsymbol{x}$ bei der Integration, nämlich nach außen, das Integral ist also positiv.)

Also:

$$\phi_1 - \phi_2 \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} dr\, r^{-2} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^{-1}\right]_{R_1}^{R_2} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{5}$$

(Nochmaliger Check: Das ist offenbar größer als 0 für $Q > 0$, so wie es sein muss.)

(b) Die Kapazität ist definiert als

$$C \;=\; \frac{Q}{U} \tag{6}$$

Mit $U = \phi_1 - \phi_2$ folgt

$$C \;=\; Q\,\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\,\frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \;=\; 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{7}$$

Die Singularität für $R_1 = R_2$ ist vernünftig, denn sie besagt, dass man eine unendliche Ladung braucht um eine endliche Spannung aufzubauen, wenn die Radien der beiden Kugeln zusammenfallen.

Aufgabe 2

(a)

$$m_e \ddot{x} = eE \tag{8}$$

(b)

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_e} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{eE}{m_e} t \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{eE}{2m_e} t^2 \tag{11}$$

(c)

$$x(t) \overset{!}{=} s \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{2m_e s/eE} \tag{12}$$

Die Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt beträgt

$$v = \frac{eE}{m_e}\sqrt{2m_e s/eE} = \sqrt{2e/m_e}\sqrt{Es} \tag{13}$$

(d) Ein Elektronenvolt ist diejenige Energie, die ein Elektron (genauer: ein Teilchen mit der Ladung eines Elektrons) erhält, wenn es von einer Spannung der Größe 1 V beschleunigt wird. Also:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \cdot 1\,\mathrm{V} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{14}$$

Die Geschwindigkeit eines Elektrons mit der kinetischen Energie W ist

$$v = \sqrt{2W/m_e} \tag{15}$$

also für $W = 1\,\mathrm{eV}$:

$$v = \sqrt{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}/9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 593\,\mathrm{km/s} \tag{16}$$

Da die Masse eines Protons $m_p = 1836 m_e$ beträgt, ist die Geschwindigkeit eines 1 eV-Protons:

$$v = \sqrt{2 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}/1836 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}} = 13.8\,\mathrm{km/s} \tag{17}$$

Aufgabe 3

(a) Die Stromzunahme $\dot{J}$ an der Spule ist mit der an ihr anliegenden Spannung U_L verknüpft durch

$$L\dot{J} = U_L \tag{18}$$

Dabei ist U_L die Spannung U der Batterie, vermindert um den im Widerstand abfallenden Anteil:

$$U_L = U - RJ \tag{19}$$

Zusammen also

$$\dot{J} + \frac{R}{L}J = \frac{U}{L} \tag{20}$$

Dies ist eine linear-inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung die Summe der allgemeinen homogenen Lösung und einer speziellen inhomogenen Lösung ist:

$$J(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U}{R} \tag{21}$$

Einarbeitung der Anfangsbedingung:

$$J(0) = A + \frac{U}{R} \stackrel{!}{=} 0 \tag{22}$$

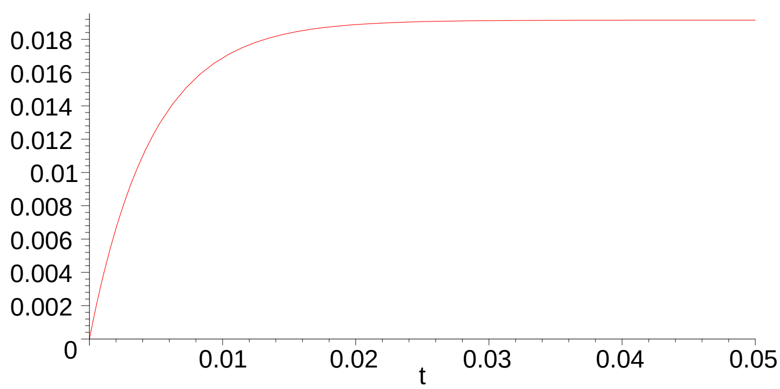
also

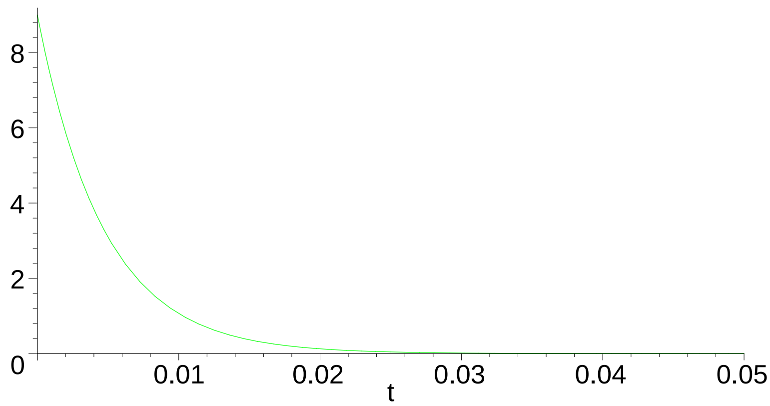
$$A = -\frac{U}{R} \tag{23}$$

und so:

$$J(t) = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \tag{24}$$

(b) In den folgenden Abbildungen ist der Strom durch die Spule in rot, die Spannung an der Spule in grün dargestellt. Die Einheiten an den Achsen sind Sekunden und Ampere bzw. Volt.





(c) Die Stromstärke erreicht 90% ihres Maximalwertes zu Zeit t mit

$$e^{-\frac{R}{L}t} = 0.1 \tag{25}$$

also

$$t = \frac{L}{R}\ln 10 =: T_{90} \tag{26}$$

Die bis dahin im Widerstand verbratene Energie ist

$$\begin{aligned}
W = R\int_0^{T_{90}} dt\, J^2(t) &= \frac{U^2}{R}\int_0^{T_{90}} dt\,\left(1 - 2e^{-\frac{R}{L}t} + e^{-\frac{2R}{L}t}\right) && (27)\\
&= \frac{U^2}{R}\left[t + \frac{2L}{R}e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{L}{2R}e^{-\frac{2R}{L}t}\right]_0^{T_{90}} && (28)\\
&= \frac{U^2}{R}\left(T_{90} + \frac{2L}{R}\cdot 0.1 - \frac{L}{2R}\cdot 0.01 - 0 - \frac{2L}{R} + \frac{L}{2R}\right) && (29)\\
&= \frac{U^2}{R}\left(T_{90} - \frac{2L}{R}\cdot 0.9 + \frac{L}{2R}\cdot 0.99\right) && (30)\\
&= \frac{U^2 L}{R^2}\big(\ln 10 - 1.8 + 0.495\big) && (31)\\
&= 0.042\,\mathrm{J} && (32)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Stromdichte am Ort $\boldsymbol{x}$ der rotierenden Kugel ist

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \tag{33}$$

wobei ρ die räumlich konstante Ladungsdichte $\rho = 3Q/4\pi R^3$ ist, und die Geschwindigkeit am Ort $\boldsymbol{x}$ gegeben ist durch

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x} \tag{34}$$

Also ist das magnetische Moment der Kugel

$$\boldsymbol{p}_m = \frac{1}{2}\rho\int d^3x\, \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\rho\int d^3x\, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\rho\int d^3x\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} \tag{35}$$

Das erste Integral ist leicht zu berechnen, da man den konstanten Vektor $\boldsymbol{\omega}$ herausziehen kann:

$$\int d^3x\, \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega}\int d^3x\, r^2 = \boldsymbol{\omega}\int_0^R dr\, 4\pi r^2\, r^2 = \frac{4\pi}{5}R^5\boldsymbol{\omega} \tag{36}$$

Um das zweite Integral zu berechnen, nehmen wir an dass ω in z-Richtung zeigt, also $\boldsymbol{\omega} = \omega\boldsymbol{e}_z$ und führen Kugelkoordinaten ein. Dann ist

$$\int d^3x\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{x} = \omega\int d^3x\, z\boldsymbol{x} \tag{37}$$

$$= \omega\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^2\sin\vartheta\, r\cos\vartheta \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} \tag{38}$$

Hier erkennt man sofort, dass die x- und y-Komponenten die Integration über φ nicht überleben, da sie linear in $\sin\varphi$ bzw. $\cos\varphi$ sind. Es bleibt also die z-Komponente des Integrals:

$$\omega\int_0^R dr\int_0^\pi d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi\, r^4\sin\vartheta\cos^2\vartheta = 2\pi\omega\int_0^R dr\, r^4 \underbrace{\left[-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^\pi}_{\frac{2}{3}} \tag{39}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\omega\underbrace{\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^R}_{\frac{1}{5}R^5} \tag{40}$$

$$= \frac{4\pi}{15}\omega R^5 \tag{41}$$

Damit also:

$$\boldsymbol{p}_m = \frac{1}{2}\rho\frac{4\pi}{5}R^5\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{2}\rho\frac{4\pi}{15}\boldsymbol{\omega}R^5 = \frac{4\pi}{15}\rho R^5\boldsymbol{\omega} \tag{42}$$

Beachtet man noch, dass

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} \tag{43}$$

ist, dann ist

$$\boldsymbol{p}_m = \frac{1}{5}QR^2\boldsymbol{\omega} \tag{44}$$

Aufgabe 5

(a) Das Amperesche Gesetz in differentieller Form lautet für zeitabhängige Felder:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} \;=\; \boldsymbol{J}+\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{45}$$

(2. Maxwell-Gleichung) Integriert man dies über eine Fläche F, dann erhält man

$$\int_F d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} \;=\; \int_F d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}+\int_F d\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{46}$$

Wendet man nun auf der linken Seite den Satz von Stokes an, dann wird dies zu

$$\int_C d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H} \;=\; \int_F d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}+\int_F d\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{47}$$

wobei C der Rand von F ist.

(b) Die Ladungserhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \;=\; 0 \tag{48}$$

ausgedrückt. Betrachtet man nun die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen mit noch unbekanntem Verschiebungsstrom $\boldsymbol{X}$, also

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} \;=\; \rho \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{X} \;=\; \boldsymbol{J} \tag{50}$$

und addiert die Zeitableitung der ersten zur Divergenz der zweiten, dann erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D})+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X} \tag{51}$$

Da die Divergenz einer Rotation verschwindet und man partielle Ableitungen vertauschen darf, bedeutet dies

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \;=\; \boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X} \stackrel{!}{=} 0 \tag{52}$$

damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Der noch unbekannte Verschiebungsstrom $\boldsymbol{X}$ darf also nicht null sein, sondern muss

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{53}$$

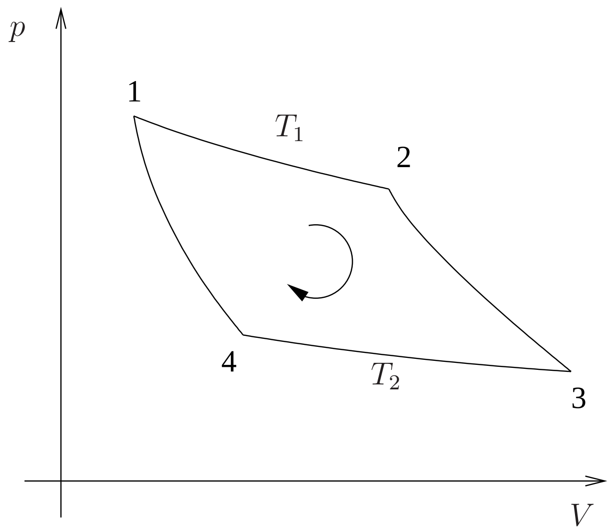
erfüllen. Dies ist durch die Wahl

$$\boldsymbol{X} = -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{54}$$

gewährleistet. (Dies Wahl ist allerdings nicht eindeutig, man kann zu $\boldsymbol{X}$ ein beliebiges divergenzfreies Vektorfeld addieren, dann ist die Ladungserhaltung immer noch gegeben.)

Aufgabe 6

(a)



(b) Der Carnot-Zyklus besteht wie dargestellt aus den vier Teilschritten

i) $1 \to 2$: isotherme Expansion

ii) $2 \to 3$: adiabatische Expansion

iii) $3 \to 4$: isotherme Kompression

iv) $4 \to 1$: adiabatische Kompression

i) Die am System verrichtete Arbeit ist

$$W_{12} \;=\; -\int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV \tag{55}$$

Wegen $T = T_1 = \text{const.}$ ist $p(V) = nRT_1/V$, also

$$W_{12} \;=\; -\int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\,dV \;=\; -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{56}$$

W_{12} ist kleiner 0, das System verrichtet während der Expansion also Arbeit. Da die Temperatur während der Expansion konstant bleibt, ist die innere Energie ebenfalls konstant und die dem System zugeführte Wärme ist das Negative der am System verrichteten Arbeit:

$$Q_{12} \;=\; nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{57}$$

ii) Wegen der Adiabatizität ist

$$Q_{23} \; = \; 0 \tag{58}$$

und die am System verrichtete Arbeit ergibt sich aus der Änderung seiner inneren Energie

$$W_{23} \; = \; U(3) - U(2) \; = \; \frac{3}{2} nR(T_2 - T_1) \; = \; -\frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \tag{59}$$

W_{23} ist ebenfalls kleiner 0.

iii) Analog zu i) gilt:

$$W_{34} \; = \; nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \tag{60}$$

(größer 0) und

$$Q_{34} \; = \; -nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) \tag{61}$$

iv) Analog zu ii) gilt:

$$Q_{41} \; = \; 0 \tag{62}$$

und

$$W_{41} \; = \; \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) \tag{63}$$

(größer 0).

(c) Der Wirkungsgrad ist definiert als Quotient aus vom System verrichteter Arbeit und dem System zugeführter Wärme, wobei die im Schritt $3 \to 4$ abgeführte Wärme nicht berücksichtigt wird. Also

$$\eta \; = \; \frac{-W_{12} - W_{23} - W_{34} - W_{41}}{Q_{12}} \tag{64}$$

Ausgeschrieben:

$$\eta \; = \; \frac{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2) - nRT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right) - \frac{3}{2} nR(T_1 - T_2)}{nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \tag{65}$$

Die beiden logarithmusfreien Terme im Zähler heben sich gegenseitig auf, also

$$\eta \; = \; \frac{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) - T_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right)}{T_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} \tag{66}$$

Aus der Adiabatengleichung

$$TV^{\gamma-1} \; = \; \text{const.} \tag{67}$$

folgen nun Zusammenhänge zwischen den Volumina, nämlich für die adiabatische

Expansion $2 \rightarrow 3$:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} \;=\; T_2 V_3^{\gamma-1} \tag{68}$$

und für die adiabatische Kompression $4 \rightarrow 1$:

$$T_2 V_4^{\gamma-1} \;=\; T_1 V_1^{\gamma-1} \tag{69}$$

Daraus erhält man

$$\frac{V_3}{V_4} \;=\; \frac{V_2}{V_1} \tag{70}$$

und der Wirkungsgrad erhält damit seine endgültige Form

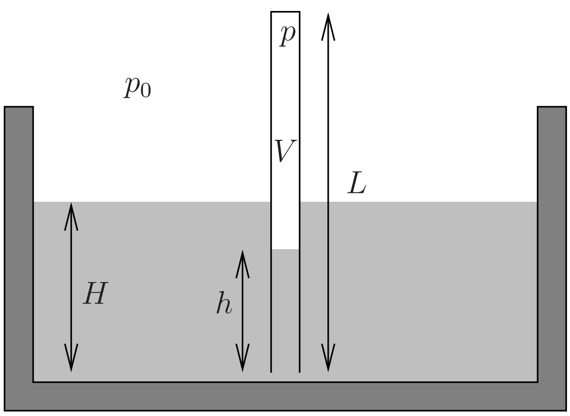
$$\eta \;=\; \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{71}$$

Halbwegs realistische Annahme über die Temperaturen sind z.B. $T_1 \approx 1000\,\mathrm{K}$ für das heiße Reservoir und $T_2 \approx 300\,\mathrm{K}$ für das kalte Reservoir. Damit ergibt sich

$$\eta \;\approx\; \frac{1000 - 300}{1000} \;=\; 0{,}7 \tag{72}$$

Allgemeine Bedeutung des Carnot-Wirkungsgrad: Der Wirkungsgrad einer Wärmekraftmaschine zwischen den Reservoirs T_1 und T_2 kann nicht größer sein als der Carnot-Wirkungsgrad.

Aufgabe 7



Die Eintauchtiefe des Rohres sei H und die Höhe der in das Rohr eindringenden Wassersäule h. Das im Rohr befindliche komprimierte Luftvolumen sei V und der äußere Luftdruck p_0. Gesucht ist nun $H(p)$.

An der Grenzfläche Wasser/Luft im Rohr stellt man nun die folgende Gleichgewichtsbedingung auf:

$$p_0 + \rho g (H - h) \;=\; p \tag{73}$$

Der Druck von unten setzt sich zusammen aus dem Druck des Beckenwassers *oberhalb* der Grenzfläche und dem Druck der Atmosphäre auf das Beckenwasser. Dieser wird ausgeglichen durch den Druck p der komprimierten Luft. Für diesen gilt wegen der idealen Gasgleichung und nach Voraussetzung konstanter Temperatur:

$$pV = p_0 V_0 \tag{74}$$

wobei V_0 das Gesmatvolumen des Rohres ist. Dividiert man auf beiden Seiten durch die Querschnittsfläche A des Rohres, dann erhält man

$$p(L - h) = p_0 L \tag{75}$$

Löst man dies nach h auf:

$$h = \frac{p - p_0}{p} L \tag{76}$$

dann kann man damit das unbekannte h in der Gleichgewichtsbedingung ersetzen:

$$p_0 + \rho g \Big(H - \frac{p - p_0}{p} L \Big) = p \tag{77}$$

die nun nach H als Funktion von p aufgelöst werden kann:

$$H = \frac{p - p_0}{\rho g} + \frac{p - p_0}{p} L \tag{78}$$

Der erste Term ist das Resultat, das man erhalten würde, wenn man die Luft als inkompressibel annehmen würde, also bei verschwindender Höhe h der Wassersäule im Rohr. Der zweite Term ist die Korrektur durch die Kompressibilität der Luft; diese ist umso größer, je länger das Rohr ist.