

Semestrale zur Experimentalphysik 4

05. August 2009
08:30 Uhr, MW2001

HINWEISE:

Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer. Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**. Um ein sehr gutes Ergebnis zu erzielen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Als Hilfsmittel sind nur ein **Stift**, ein **Lineal** und ein **nicht programmierbarer Taschenrechner** erlaubt. Die erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt **ca. 97 Punkte aus 7 Aufgaben**. Die Angabe (einschl. Formelsammlung) umfasst **7 Seiten**. Die Seite 5 ist leer. Formeln aus der Vorlesung, den Übungen und der Formelsammlung am Ende der Angabe müssen nicht hergeleitet werden, außer wo dies explizit Teil der Aufgabenstellung ist. **Bitte geben Sie alle Nebenrechnungen und die Angabe mit ab!**

Aufgabe 1 : Kastenpotential (ca. 11 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit einer Breite von $a = 1 \cdot 10^{-15}$ m, d.h. für das Potential gilt:

$$V = \begin{cases} 0 & : 0 \leq x \leq a \\ \infty & : \text{sonst} \end{cases}$$

- a. Bestimmen Sie die Nullpunktsenergie eines in diesem Potential eingeschlossenen Neutrons. Skizzieren Sie die Lösung. (ca. 9 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Die Schrödingergleichung lautet

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2\psi = 0 \quad (\bullet)$$

mit $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$. Die Lösungen sind

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (\bullet)$$

Man erhält mit Hilfe der Randbedingungen $\psi(x) = 0$ bei $x = 0$ und $x = a$: (\bullet)

$$\begin{aligned} \bullet \quad \psi(0) &= A + B \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \psi &= A(e^{ikr} - e^{-ikr}) = 2iA \sin kx \quad (\bullet) \end{aligned}$$

- $\psi(a) = Ae^{ika} + Be^{-ika} \stackrel{!}{=} 0$
 $\Rightarrow 2iA \sin ka = 0$
 $\Rightarrow ka = n\pi, n = 1, 2, 3, \dots$ (•)

Damit ergibt sich für ψ_n

$$\psi_n = 2iA \sin \frac{n\pi}{a} x \text{ (•)}$$

und für die Energie E_n

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{a^2} = E_0 \cdot n^2$$

mit der Nullpunktsenergie E_0

Für den speziellen Fall des Neutrons erhält man

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} = \frac{h^2}{8ma^2} = \text{(•)} \\ &= \frac{(6.6261 \cdot 10^{-34})^2 J^2 s^2}{8 \cdot 1.67493 \cdot 10^{-27} kg \cdot (1 \cdot 10^{-15} m)^2} = \\ &= 3.277 \cdot 10^{-11} J \hat{=} 204.4 \text{ MeV (•)} \end{aligned}$$

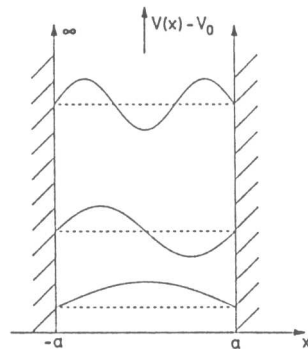


Abbildung 1: Wellenfunktion im unendlich hohen Kastenpotential für die ersten drei Energieniveaus (•)

oder alternativ:

Lösungsvorschlag: Die Lösung hat zwei Knoten (•), d.h. es passt genau eine Halbwelle in das Potential, also $a = \frac{\lambda}{2}$ (•). Mit der de-Broglie-Beziehung $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$ (•) erhält man für die Energie

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} \text{ (•)} = \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} = \text{(•)} \\ &= 3.277 \cdot 10^{-11} J \hat{=} 204.4 \text{ MeV (•)} \end{aligned}$$

(•) (•)

Hinweis: Um auf die gleiche Punktzahl wie bei der anderen Lösung zu kommen, gibt es hier noch zwei Punkte auf die Eleganz der Lösung.

- b. Nehmen Sie nun an, das Potential hätte eine endliche Höhe. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen? (ca. 2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

Die Teilchen können nun etwas in den Bereich außerhalb des Kastens eindringen (•), dadurch ändert sich die Wellenfunktion. Die Randbedingungen $\psi(0) = \psi(a) = 0$ gelten nicht mehr. Die Wellenlänge wird größer und damit die Energien kleiner (•).

Aufgabe 2 : Zeemann-Effekt (ca. 24 Punkte)

Hinweis: Im Folgenden sollen nur elektronische Zustände betrachtet werden (kein Kernspin).

- a. Erläutern Sie das Zustandekommen des normalen Zeeman-Effektes. In welchen Fällen reduziert sich der anomale auf den normalen Zeeman-Effekt und worin liegen deren Unterschiede? (ca. 6 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die Bewegung des Elektrons um den Kern erzeugt einen Kreisstrom (•). Dieser bedingt ein magnetisches Moment $\vec{\mu}_l$ das proportional zum Drehimpuls des Elektrons ist (•). In einem externen Magnetfeld B besitzt das Elektron zusätzlich zur Coulomb-Energie nun noch die potentielle Energie $E_{pot} = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B}$. Die Zustände spalten in $2l + 1$ Zustände unterschiedlicher Energie auf (•).

Der Landé-Faktor ist abhängig von den Quantenzahlen des jeweiligen Zustandes (•) und die Aufspaltung beim anomalen Zeeman-Effekt also unterschiedlich stark für verschiedene Zustände (•). Beim normalen Zeeman-Effekt ist die Aufspaltung immer gleich groß.

Wenn sich der Gesamtspin $S = \sum s_i$ zu Null addiert tritt lediglich der normale Zeeman-Effekt zu Tage. (•)

- b. Welche guten Quantenzahlen sind zusätzlich zur Hauptquantenzahl n und zur Spinquantenzahl s notwendig zur vollständigen Beschreibung der Zustände beim anomalen Zeeman-Effekt und beim Paschen-Back-Effekt? (ca. 2 Punkte)

Lösungsvorschlag: anomaler Zeeman-Effekt: l, j, m_j (•)

Paschen-Back-Effekt: l, m_l, m_s (•)

- c. Betrachten Sie zwei angeregte Zustände in Natrium ($Z = 11$) mit den spektroskopischen Symbolen $3^2D_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$. Für die Energieniveaus gilt $E(3^2D_{3/2}) > E(3^2P_{1/2})$.

- Leiten Sie *allgemein* den Landé-Faktor für LS -Kopplung her. Hinweis: Gehen Sie vom Erwartungswert des magnetischen Momentes $\langle \mu_j \rangle$ aus und nähern Sie $g_s \approx 2$ (Ergebnis: siehe Formelsammlung).
- Geben Sie den Landé-Faktor für reinen Bahn- bzw. reinen Spinmagnetismus an.
- Berechnen Sie den Landé-Faktor für die beiden gegebenen Zustände.

(ca. 10 Punkte)

Lösungsvorschlag: Der Landé-Faktor g_j für LS -Kopplung bestimmt die Größe des zeitlichen Mittelwerts des magnetischen Moments des Gesamthüllendrehimpulses \vec{J} :

$$\langle \mu_j \rangle = \mu_B g_j \sqrt{j(j+1)}.$$

Er bestimmt sich aus der Projektion von $\vec{\mu}_j$ auf \vec{J} . Das magnetische Moment $\vec{\mu}_j$ setzt sich zusammen aus den magnetischen Momenten des Bahndrehimpulses und des Spins:

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + g_s \vec{S}) \quad (\bullet)$$

Die Projektion lautet dann:

$$\langle \mu_j \rangle = \frac{|\vec{\mu}_j \cdot \vec{J}|}{|\vec{J}|} \quad (\bullet) = \frac{\mu_B}{\hbar} \left(\frac{\vec{L} \cdot \vec{J}}{\hbar \sqrt{j(j+1)}} + \underbrace{g_s}_{\approx 2} \frac{\vec{S} \cdot \vec{J}}{\hbar \sqrt{j(j+1)}} \right) \quad (\bullet)$$

Wie man leicht einsieht, gilt:

$$\vec{L} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 + \vec{L}^2 - \vec{S}^2) = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)] \quad (\bullet)$$

und

$$\vec{S} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} (\vec{J}^2 + \vec{S}^2 - \vec{L}^2) = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)] \quad (\bullet)$$

Daraus folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned} \langle \mu_j \rangle &= \mu_B \frac{3j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2\sqrt{j(j+1)}} \\ &= \mu_B \sqrt{j(j+1)} \underbrace{\left(1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right)}_{g_j} \quad (\bullet) \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

reiner Spinmagnetismus: $l = 0, j = s \Rightarrow g_j = g_s \approx 2 \quad (\bullet)$

reiner Bahnmagnetismus: $s = 0, j = l, g_j = g_l = 1 \quad (\bullet)$

Mit den Quantenzahlen der beiden angegebenen Zustände ergibt sich:

$$\begin{array}{ccccc} & j & s & l & \\ {}^2D_{3/2} & 3/2 & 1/2 & 2 & \Rightarrow g_j = 1 + \frac{15/4 + 3/4 - 6}{15/2} = 4/5 \quad (\bullet) \\ {}^2P_{1/2} & 1/2 & 1/2 & 1 & \Rightarrow g_j = 1 + \frac{3/4 + 3/4 - 2}{3/2} = 2/3 \quad (\bullet) \end{array}$$

- d. Es wird ein schwaches Magnetfeld angelegt. Zeichnen Sie das Termschema für die beiden Zustände aus Aufgabe c (schematische Skizze!). Tragen Sie in die Skizze die bei elektrischer Dipolstrahlung erlaubten Zeeman-Übergänge ein. Geben Sie explizit die relevanten Auswahlregeln an. (ca. 3 Punkte)

Lösungsvorschlag:

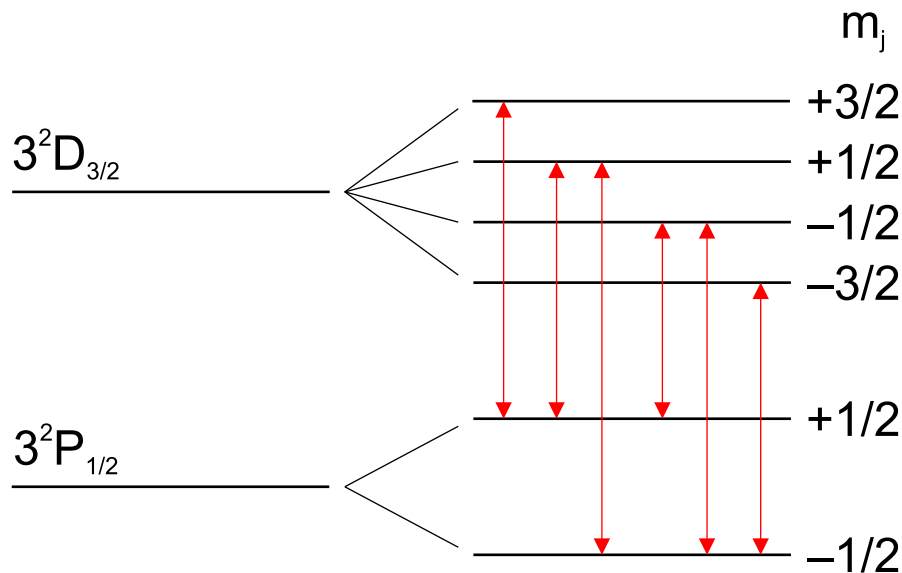


Abbildung 2: Aufspaltung der Niveaus $3^2D_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$ im schwachen Magnetfeld.

Termschema (•)

Übergänge (•)

Mit den Auswahlregeln $\Delta j = 0, \pm 1, \Delta l = \pm 1, \Delta m_j = 0, \pm 1$ (•) für elektrische Dipolstrahlung ergeben sich die eingezeichneten erlaubten Zeeman-Übergänge.

- e. Wie lautet die Formel für die Energieverschiebung der Zeeman-Niveaus mit Magnetfeld gegenüber den entarteten Energieniveaus ohne Magnetfeld? Geben Sie für $B = 0,1$ T die Energiedifferenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Zeeman-Niveau des $3^2D_{3/2}$ -Zustandes an. (ca. 3 Punkte)

Lösungsvorschlag:

$$\Delta E_{m_j} = m_j g_j \mu_B B \quad (\bullet)$$

Für den Unterschied zwischen dem höchsten und niedrigsten Niveau gilt:

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{total}} &= \Delta E_{m_j=3/2} - \Delta E_{m_j=-3/2} = (3/2 + 3/2) \cdot g_j \mu_B B = (\bullet) \\ &= 3 \cdot 4/5 \cdot 5,7884 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T} \cdot 0,1 \text{ T} = 1,39 \cdot 10^{-5} \text{ eV} = 2,23 \cdot 10^{-24} \text{ J} \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Aufgabe 3 : Lithiummoleküle (ca. 8 Punkte)

Lithium kommt als zwei Isotopen vor, ${}^6\text{Li}$ und ${}^7\text{Li}$, mit jeweils 3 Protonen und 3 bzw. 4 Neutronen. Der Gleichgewichtsabstand r_0 in den Molekülen H^6Li und H^7Li sei gleich groß. Die Frequenz ν entspreche dem Übergang zwischen den Rotationszuständen $j = 1$ und $j = 0$. Experimentell wird zwischen den beiden Molekülsorten ein Frequenzunterschied $\Delta\nu$ von $\Delta\nu = \nu(\text{H}^6\text{Li}) - \nu(\text{H}^7\text{Li}) = 1 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$ beobachtet. Die Moleküle sollen als starre Rotatoren betrachtet werden.

a. Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand r_0 .

(ca. 6 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die Energie E_j eines Rotationsniveaus mit der Drehimpulsquantenzahl j berechnet sich über

$$E_j = \frac{\hbar^2}{2 \cdot I} \cdot j(j+1) (\bullet)$$

mit $j = 0, 1, 2, \dots$ und dem Trägheitsmoment des Moleküls

$$I = \mu \cdot r_0^2 = \frac{m_H \cdot m_{\text{Li}}}{m_H + m_{\text{Li}}} \cdot r_0^2 (\bullet)$$

Die Frequenz des Übergangs zwischen den Niveaus mit den Quantenzahlen $j = 0$ und $j = 1$ beträgt somit

$$h\nu_{0,1} = \Delta E_{0,1} = \frac{\hbar^2}{I} (\bullet)$$

$$\nu_{0,1} = \frac{\hbar^2}{hI} = \frac{\hbar}{2\pi I}$$

Aus dem Frequenzunterschied zwischen den Molekülen H^6Li und H^7Li kann Gleichgewichtsabstand r_0 gerechnet werden

$$\Delta\nu = \nu_6 - \nu_7 = \frac{\hbar}{2\pi r_0^2} \left(\frac{1}{\mu_6} - \frac{1}{\mu_7} \right) (\bullet)$$

$$r_0^2 = \frac{\hbar}{2\pi \Delta\nu} \left(\frac{1}{\mu_6} - \frac{1}{\mu_7} \right)$$

mit $\mu_6 = \frac{6}{7} \text{ amu}$, $\mu_7 = \frac{7}{8} \text{ amu}$ (\bullet) folgt

$$r_0^2 = \frac{1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2\pi \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}}} \cdot \left(\frac{7}{6} - \frac{8}{7} \right) \cdot \frac{1}{1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$= 2.41 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow r_0 = 1.55 \cdot 10^{-10} \text{ m} (\bullet)$$

b. Berechnen Sie für beide Molekülsorten die Energie des Übergangs von $j = 1$ nach $j = 0$.
(ca. 2 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die Trägheitsmomente der Moleküle ergeben sich zu (\bullet)

$$I_6 = \frac{6}{7} \text{ amu} \cdot r_0^2 = \frac{6}{7} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2.41 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 = 3.429 \cdot 10^{-47} \text{ kgm}^2$$

$$I_7 = \frac{7}{8} \text{ amu} \cdot r_0^2 = \frac{7}{8} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 2.41 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 = 3.500 \cdot 10^{-47} \text{ kgm}^2$$

und damit die Übergangsenergien (•)

$$\begin{aligned} E_6 &= \frac{\hbar^2}{I_6} = 3.24 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 2.02 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \\ E_7 &= \frac{\hbar^2}{I_6} = 3.181 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 1.98 \cdot 10^{-3} \text{ eV} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 : Hochionisiertes Zirkonium (Zn) (ca. 19 Punkte)

In dieser Aufgabe wird wasserstoffartiges Zirkonium (${}^{90}_{40}\text{Zn}^{39+}$) betrachtet.

- a. Berechnen Sie nach dem Bohr'schen Atommodell den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand für

Lösungsvorschlag: Den Bahnradius im Bohr'schen Atommodell erhält man mit dem Bohr'schen Radius $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$ (in Formelsammlung gegeben):

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0, (\bullet)$$

die Gesamtenergie im Grundzustand mit der Rydberg-Energie $R_\infty = E_R = 13.6 \text{ eV}$ (Formelsammlung)

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R (\bullet)$$

-
- (i) ein Elektron (ca. 4 Punkte)

Lösungsvorschlag: Mit $n = 1$ und $Z = 40$ erhält man

$$\begin{aligned} r_1(Zn) &= 1.33 \cdot 10^{-12} \text{ m} (\bullet) \\ E_1(Zn) &= -21.8 \text{ keV} (\bullet) \end{aligned}$$

-
- (ii) ein negatives Myon μ^- (ca. 4 Punkte)

Lösungsvorschlag: Mit $n = 1$, $Z = 40$ und $m_\mu = 207 \cdot m_e$ erhält man für a_0 und E_R

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_\mu} \Rightarrow a_0^\mu = \frac{1}{207} a_0 (\bullet) \\ E_R &= \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e Z^2}{\hbar^2 n^2} \Rightarrow E_R^\mu = 207 \cdot E_R (\bullet) \end{aligned}$$

Einsetzen der Zahlen ergibt

$$\begin{aligned}r_1^\mu(Zn) &= 6.42 \cdot 10^{-15} \text{ m } (\bullet) \\E_1^\mu(Zn) &= -4.51 \text{ MeV } (\bullet)\end{aligned}$$

im Feld eines Zirkonium-Kerns.

b. Nehmen Sie nun an, ein Anti-Proton werde von einem Zirkonium-Kern eingefangen.

- (i) Welche ist die tiefste Bohr'sche Bahn, auf der das Anti-Proton den Kern noch nicht berührt? (ca. 5 Punkte)

Lösungsvorschlag: Der Bahnradius für ein Anti-Proton ergibt sich mit dem Bohr'schen Radius zu

$$r_n^{\bar{p}} = \frac{m_e}{m_{\bar{p}}} \cdot a_0 \frac{n^2}{Z} (\bullet) = \frac{a_0}{1840} \frac{n^2}{Z} = \frac{5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{1840 \cdot 40} \cdot n^2 = 7.2 \cdot 10^{-16} \text{ m} \cdot n^2 (\bullet)$$

Damit sich das Anti-Proton und der Zirkonium-Kern nicht berühren, muss gelten

$$\begin{aligned}r_n^{\bar{p}} &\stackrel{!}{>} R = R_{Zn} + R_{\bar{p}} (\bullet) \\r_n^{\bar{p}} = 7.2 \cdot 10^{-16} \text{ m} \cdot n^2 &> R = 6.3 \cdot 10^{-15} \text{ m} \\ \Rightarrow n = 3 : (\bullet) r_3^{\bar{p}} &= 6.48 \cdot 10^{-15} \text{ m } (\bullet)\end{aligned}$$

- (ii) Wie groß ist die Bindungsenergie für diese Bahn? (ca. 2 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die Bindungsenergie E_n erhält man aus

$$E_n = -\frac{m_{\bar{p}} e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot 2\hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{m_{\bar{p}}}{m_e} \cdot E_r \cdot \frac{Z^2}{n^2} (\bullet)$$

Einsetzen der Zahlen ergibt

$$E_3 = -1840 \cdot \left(\frac{40}{3}\right)^2 \cdot 13.6 \text{ eV} = -4.45 \text{ MeV } (\bullet)$$

- c. Wie groß ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons und eines Myons im 1s-Zustand innerhalb des (Volumens des) Zirkonium-Kerns? Verwenden Sie die radiale Wellenfunktion $R_{10}(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}r}$ mit $\alpha = \frac{2Z}{a_0}$. (ca. 4 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit erhält man durch Integration bis zum Kernrand

$$\begin{aligned} P_{10}(R) &= \int_0^R r^2 |R_{10}(r)|^2 dr \\ &= \frac{\alpha^3}{2} \int_0^R r^2 e^{-\alpha r} dr \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Mit $\alpha = \frac{2Z}{a_0}$ und dem Integral aus der Formelsammlung erhält man für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P_{10}(R) &= \frac{\alpha^3}{2} \left[-e^{-\alpha R} \left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3} \right] \\ &= 1 - e^{-\alpha R} \left(\frac{\alpha^2 R^2}{2} + \alpha R + 1 \right) \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Elektron

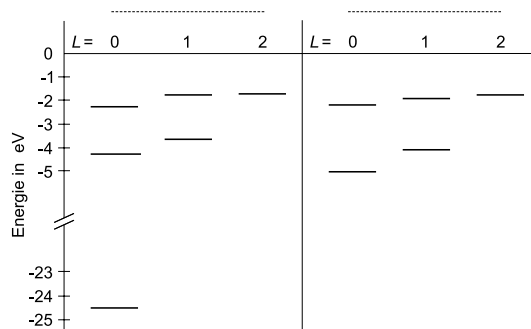
$$P_{10}(R) = 8.529 \cdot 10^{-8} \quad (\bullet)$$

und für das Myon

$$P_{10}(R) = 0.232 \quad (\bullet)$$

Aufgabe 5 : Helium–Atom (ca. 13 Punkte)

- a. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Termschema des Helium–Atoms für die niedrigsten Energieniveaus: (Hinweis: Es handelt sich beim He–Atom um ein 2–Elektronen–System mit zwei getrennten Termschemata.)



Gegeben sind die Energien der einzelnen Energieniveaus sowie der jeweilige Drehimpuls L . Mögliche Aufspaltungen der Energieniveaus durch Feinstruktur sind nicht eingezeichnet. Beschriften Sie die Energieniveaus vollständig mit den entsprechenden, spektroskopischen Symbolen. Welches der beiden Termschemata gehört zum Triplett–, welches zum Singulett–Helium? (Beschriften Sie die gestrichelten Linien.) (ca. 5 Punkte)

Lösungsvorschlag:

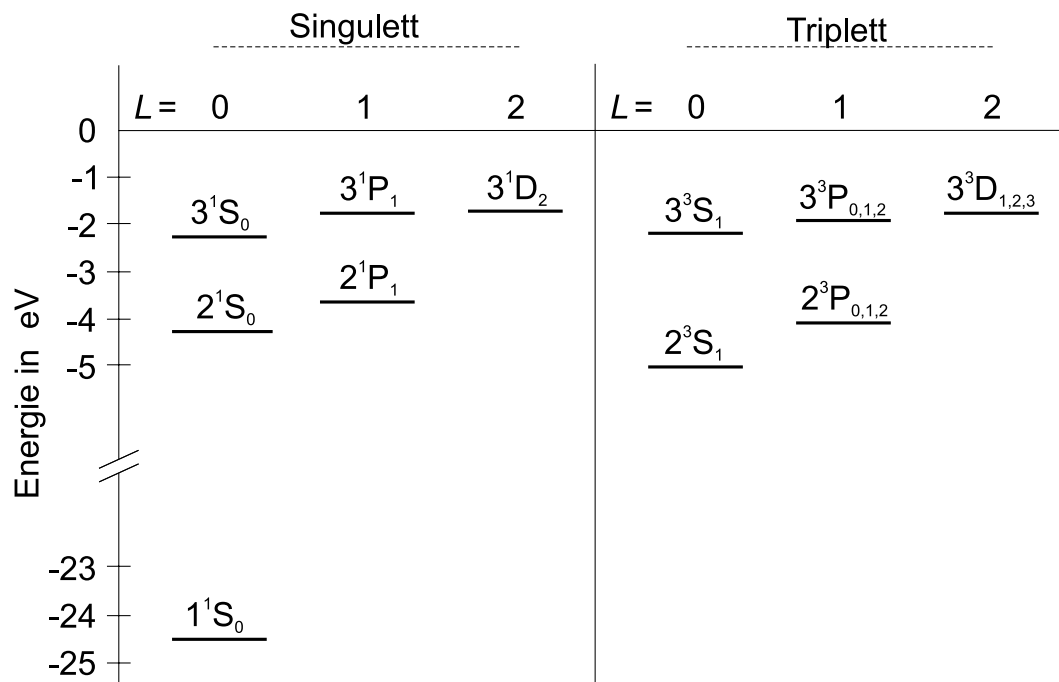


Abbildung 3: Termschema eines Helium-Atoms: links Singulett (Parahelium), rechts Triplet (Orthohelium).

Vorschlag zur Punkteverteilung: (••) auf Beschriftung von Singulett-Energieniveaus, (••) auf Beschriftung von Triplet-Energieniveaus und (•) auf Zuordnung Singulett - Triplet.

- b. Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Triplet- und Singulett-System des Helium-Atoms. Welches der beiden Systeme weist für $L \neq 0$ Feinstrukturaufspaltung auf? Begründen Sie Ihre Antwort. (ca. 3 Punkte)

Lösungsvorschlag: Singulett-System: Spins der beiden Elektronen koppeln zu $S = 0$, d.h. Spins der beiden Elektronen sind antiparallel (•). Alle Terme im Parahelium sind einfach.

Triplet-System: Spins koppeln zu $S = 1$, d.h. Spins der beiden Elektronen sind parallel (•). Durch die LS -Kopplung kommt es im Orthohelium zur Feinstrukturaufspaltung. Die Terme sind dreifach aufgespalten (•).

- c. Warum gibt es keinen 1^3S_1 -Zustand? Geben Sie für diesen (hypothetischen) Zustand für beide Elektronen alle relevanten Quantenzahlen an. (ca. 3 Punkte)

Lösungsvorschlag: Es gilt $S = 1$, also $m_{s_1} = m_{s_2} = +1/2$ (•). Die Quantenzahlen für den 1^3S_1 -Zustand wären daher:

(•)	n	l	m_l	m_s
Elektron1	1	0	0	+1/2
Elektron2	1	0	0	+1/2

Für Fermionen gilt das Pauli-Prinzip (•), welches besagt, dass zwei Fermionen (Elektronen) nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen dürfen. Nach dem Pauli-Prinzip ist der 1^3S_1 -Zustand also verboten.

- d. Warum werden die Übergänge $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ und $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ nicht beobachtet? (ca. 2 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ Übergänge mit $J = 0 \rightarrow J = 0$ sind verboten.
(elektrische Dipolstrahlung mit $\Delta J = 0$ ist nur für $J \neq 0$ erlaubt.)
und/oder
 $\Delta l = 0$ ist für elektrische Dipolstrahlung verboten. (•)
- $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ Interkombinationsverbot, Spinflips sind verboten.
(Übergänge zwischen verschiedenen Multiplizitäten sind verboten.)
und/oder
 $\Delta l = 0$ ist für elektrische Dipolstrahlung verboten. (•)

Aufgabe 6 : Hyperfeinstruktur (ca. 13 Punkte)

Das ^{12}C -Atom hat einen Kernspin $I = 0$, das ^{14}N -Atom einen von $I = 1$.

- a. Geben Sie die Elektronenkonfiguration und das spektroskopische Symbol des jeweiligen Grundzustandes der Kerne an. (ca. 4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- Kohlenstoff:
Elektronenkonfiguration: $1s^2 2s^2 2p^2$ (•)
Spektroskopisches Symbol: Beide s -Schalen abgeschlossen, daher müssen nur die p Elektronen betrachtet werden: $L = l = 1, S = s_1 + s_2 = 1, J = L - S = 0$ (Schale weniger als halb voll) $\Rightarrow {}^3P_0$ (•)
- Stickstoff
Elektronenkonfiguration: $1s^2 2s^2 2p^3$ (•)
Spektroskopisches Symbol: Beide s -Schalen abgeschlossen, daher müssen ebenfalls nur die p Elektronen betrachtet werden: $L = 0$ (Unterschale halb voll), $S = s_1 + s_2 + s_3 = 3/2, J = L + S = 3/2$ (Unterschale mindestens halb voll) $\Rightarrow {}^4S_{3/2}$ (•)

- b. In welche Hyperfeinniveaus spalten die Grundzustände dieser Atome auf? Geben Sie jeweils die relevanten Quantenzahlen an. (ca. 4 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses F beschränken sich auf $j + I, j + I - 1, \dots, |j - I|$.

¹²C: $j = 0$ und $I = 0 \Rightarrow$ keine Aufspaltung! (•)

¹⁴N: $j = 3/2$ und $I = 1 \Rightarrow F = 1/2, 3/2, 5/2$ (•) (•) (•)

- c. Die Wellenlänge des Überganges zwischen den zwei Hyperfeinniveaus des $1S_{1/2}$ Grundzustandes im Wasserstoff ist $\lambda = 21 \text{ cm}$. Berechnen Sie die Stärke des Magnetfeldes am Kern, das durch die Elektronen erzeugt wird. (ca. 5 Punkte)

Lösungsvorschlag: Die potentielle Energie eines magnetischen Dipols im Magnetfeld ist:

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\bullet) \quad (1)$$

Das magnetische Moment des Protons ist $\mu_p = 2.79 \mu_K$. Die beiden Hyperfeinzustände unterscheiden sich nur in der Stellung des Kernspins. Für die Energiedifferenz folgt also:

$$\Delta E = 2 \cdot \mu_p \cdot B \quad (\bullet) \quad (2)$$

Wir benötigen noch die Energiedifferenz ΔE .

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{hc}{\lambda} \quad (\bullet) \\ \Delta E &= 5.90 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Damit können wir das Magnetfeld berechnen:

$$B = \frac{\Delta E}{5.58 \mu_p} = 33.56 \text{ T} \quad (\bullet) \quad (3)$$

Aufgabe 7 : Thorium-Quelle (ca. 9 Punkte)

Thorium 229 ist ein α -Strahler mit einer Teilchenenergie von 4,85 MeV. Zehn Prozent der von 5 g ²²⁹Th emittierten α -Teilchen werden zu einem punktförmigen parallelen Strahl gebündelt und auf eine 4 μm dicke Goldfolie ($Z_{Au} = 79$) gelenkt. Ein Detektor mit einer kreisförmigen Öffnung ($r=15 \text{ mm}$) befindet sich in 2 m Abstand vom Auftreffpunkt des α -Strahls unter einem Winkel von 60° zur Strahlachse.

- a. Erklären Sie in ein bis zwei Sätzen den Begriff differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$. (ca. 1 Punkt)

Lösungsvorschlag: Der differentielle Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma(E,\theta)}{d\Omega}$ beschreibt die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts σ (•).

- b. Die Luminosität \mathcal{L} ist das Produkt aus Strahlfluss Φ und Anzahl der Targetteilchen im Strahlquerschnitt. Berechnen Sie die Luminosität \mathcal{L} des oben beschriebenen Aufbaus.

(ca. 5 Punkte)

Der Strahlfluss entspricht 10% der Aktivität $\mathcal{A}(t)$ der Quelle zum Zeitpunkt $t = 0$ (•). Man bestimmt diese über die negative Ableitung des Zerfallsgesetzes:

$$\mathcal{A}(t) = -\frac{d}{dt}N(t) = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t} \text{ (•)}$$

Hierbei ist N_0 die Anzahl der Thorium-Kerne in der Quelle, N_A die Avogadrokonstante, m_Q die Masse der Thoriumquelle und $m_{mol,Q}$ deren Molmasse

$$N_0 = N_A \cdot \frac{m_Q}{m_{mol,Q}} \text{ (•)} = 6.023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot \frac{5}{229} \frac{\text{g}}{\frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 1.315 \cdot 10^{22}$$

Damit ergibt sich

$$\mathcal{A}(0) = \lambda \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot N_0 \text{ (•)} = \frac{\ln 2}{7880 \text{ a}} \cdot 1.315 \cdot 10^{22} = 3.665 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}}$$

Die Anzahl N_T der Targetteilchen ergibt sich aus der Dicke d_T , Dichte ρ_T und Molmasse des Targets $m_{mol,T}$ zu

$$N_T = N_A \cdot \frac{\rho_T}{m_{mol,T}} \cdot d_T \text{ (•)} = 6.023 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot \frac{19.32 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}{229.0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 2.033 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{cm}^2}$$

Damit ergibt sich eine Luminosität von

$$\mathcal{L} = 0.1 \cdot \mathcal{A}(0) \cdot N_T = 0.1 \cdot 3.665 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{s}} \cdot 2.033 \cdot 10^{19} \frac{1}{\text{cm}^2} = 7.45 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$$

- c. Wie groß ist die Zählrate im Detektor? Verwenden Sie zur Berechnung eine Luminosität von $\mathcal{L} = 10^{30} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$. (ca. 3 Punkte)

Hinweise: Der Ausdruck für die Aktivität eines radioaktiven Stoffes kann aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz ($N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \ln 2 / t_{1/2}$) hergeleitet werden. Die Zählrate \dot{N} setzt sich aus der Luminosität \mathcal{L} , dem Wirkungsquerschnitt σ und dem abgedeckten Raumwinkel $\Delta\Omega$ zusammen: $\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta\Omega$. Der Streuquerschnitt kann auf der gesamten Detektoroberfläche als konstant angenommen werden.

Lösungsvorschlag: Die in einem Detektor (Fläche A , Abstand r) gemessene Zählrate \dot{N} hängt von der Strahlenergie E , dem Winkel θ zwischen Strahlachse und gestreutem Strahl und dem vom Detektor überdeckten Raumwinkel $\Delta\Omega$ ab:

$$\dot{N}(E, \theta, \Delta\Omega) = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (4)$$

Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion ist der Rutherford'sche Streuquerschnitt (siehe Formelsammlung) unter 60° . Mit $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Z_\alpha Z_{Au} e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \\ &= \left(1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \frac{2 \cdot 79}{4 \cdot 4.85 \text{ MeV}} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{60^\circ}{2}} \\ &= 2.2 \cdot 10^3 \text{ fm}^2 \text{ (•)} \end{aligned}$$

Der Bruchteil des Raumwinkels, der vom Detektor überdeckt wird ist

$$\Delta\Omega = \frac{r^2\pi}{4R^2\pi} (\bullet) = \frac{(0.015\text{ m})^2}{4(2.0\text{ m})^2} = 1.41 \cdot 10^{-5}$$

Zusammen ergibt sich damit eine Streurrate im Detektor von (siehe Gleichung 4)

$$\begin{aligned}\dot{N}(E, \theta, \Delta\Omega) &= \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega \\ &= 10^{30} \frac{1}{\text{s} \cdot \text{cm}^2} \cdot 2.2 \cdot 10^3 \text{ fm}^2 \cdot 1.41 \cdot 10^{-5} \\ &= 310 \frac{1}{\text{s}} (\bullet)\end{aligned}$$

Leere Seite

Hinweis

Es werden nicht alle angegebenen Formeln und Konstanten zur Lösung der Prüfungsaufgaben benötigt.

Physikalische Konstanten

Größe	Symbol, Gleichung	Wert
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$2,9979 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
Plancksche Konstante	h	$6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$
Red. Plancksche Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$1,0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Elektr. Elementarladung	e	$1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eVK}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elektronruhemasse	m_e	$9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0,5110 \text{ MeV}/c^2$
(Anti-)Protonruhemasse	$m_{\bar{p},p}$	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938,2720 \text{ MeV}/c^2$
Neutronruhemasse	m_n	$1,6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939,5653 \text{ MeV}/c^2$
Atomare Masseneinheit	amu	$1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Avogadro-Zahl	N_A	$= 6.023 \cdot 10^{23}$
Bohr'scher Radius	$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e}$	$5,29 \cdot 10^{-11} \text{ m}$
Bohr'sches Magneton	μ_B	$9,2741 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1} = 5,7884 \cdot 10^{-5} \text{ eVT}^{-1}$
Kernmagneton	μ_K	$= 5,0508 \cdot 10^{-27} \text{ J/T} = 3,152 \cdot 10^{-14} \text{ MeV/T}$
Magnetisches Moment des Protons:	μ_P	$2,79\mu_K$
Feinstrukturkonstante	$1/\alpha$	$137,036$
Rydbergsche Konstante	R_∞	$13,6057 \text{ eV}$

Material-, Teilchen- und Kerneigenschaften

Dichte von Gold: $\rho_{Au} = 19,32 \text{ g/cm}^3$

Molmasse von Gold: $M_{Au} = 197,0 \text{ g/mol}$

Halbwertszeit von Thorium 229: $t_{1/2} = 7880 \text{ a}$

Molmasse von Thorium 229: $M_{Th} = 229,0 \text{ g/mol}$

Myon: Ladung $q = -e$, $m_\mu = 207 m_e$

Anti-Proton: $q = -e$, Radius $R_{\bar{p}} = 10^{-15} \text{ m}$

Zirkonium-Kern: $Z = 40$, $R_{Zn} = 5,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, $m_{Zn} = 90 \cdot m_p$

Physikalische Formeln

Rutherfordsche Streuformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

Definition des Landé-Faktors

$$\langle \mu_j \rangle = \mu_B g_j \sqrt{j(j+1)}$$

Landé-Faktor für LS-Kopplung

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Winkel zwischen Hüllen- und Kerndrehimpuls (Hyperfeinstruktur)

$$\cos \left(\angle(\vec{I}, \vec{J}) \right) = \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{I(I+1)}}$$

Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{\exp \frac{E-E_F}{k_B T} + 1}$$

Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = - \left[\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V(\vec{r}, t) \right] \psi(\vec{r}, t)$$

Energiezustände im unendlich hohen Potentialtopf der Breite l

$$E_n = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m \cdot l^2} \cdot n^2 = E_0 \cdot n^2$$

Doppler-Verbreiterung

$$\delta\omega_D = 7.16 \times 10^{-7} \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{T/M [mol/(gK)]}$$

Matrizelement für Dipolmoment $e\vec{r}$

$$M_{ik} = \int \Psi_i^*(e\vec{r}) \Psi_k dx dy dz \quad (5)$$

Einstein-Koeffizient für spontane Emission

$$A_{ik} = \frac{2}{3} \frac{\omega_{ik}^3}{\epsilon_0 \hbar c^3} |M_{ik}|^2 \quad (6)$$

Einstein-Koeffizient für Absorption

$$B_{ik} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \pi^2}{\epsilon_0 \hbar^2} |M_{ik}|^2 \quad (7)$$

Mathematische Formeln

Integrale

$$\begin{aligned} \int_0^R r^2 e^{-\alpha r} dr &= -e^{-\alpha R} \left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right) + \frac{2}{\alpha^3} \\ \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha^2 r^2} dr &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3} \end{aligned}$$