Zentrum Mathematik | Technische Universität München
Marius Gritl | SS 2021

Ferienkurs Analysis 2 für Physik (MA9203)

Probeklausur

24. September 2021
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ____________________

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	19	
2	10	
3	11	
4	10	
5	11	
6	9	
7	9	
Gesamt:	79	

Bestätigung der Verhaltensregeln
Hiermit versichere ich, dass ich diese Klausur ausschließlich unter Verwendung der unten aufgeführten Hilfsmittel selbst löse und unter meinem Namen abgebe.

Unterschrift: ______________________________

Bearbeitungshinweise:

- Diese Klausur enthält 14 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 7 Aufgaben.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 79 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein (1) selbsterstelltes, einseitig beschriftetes DIN A4-Blatt.
- **Es werden nur solche Ergebnisse bewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist**. Alle Antworten sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter/grüner Farbe noch mit Bleistift.

Das Blatt mit den Problemstellungen wird am Prüfungstag zur Prüfungszeit, d.h. am 24. September 2021 ab 10:00 Uhr auf der Moodle-Seite `https://www.moodle.tum.de/course/view.php?id=70594` des Kurses für Sie zur Verfügung stehen.

Die Arbeitszeit endet am 24. September 2021 um 11:30 Uhr. Letzter Abgabetermin ist Freitag, der 24. September 2021 um 12:00 Uhr.

1. (19 Punkte) **Gemischtes**

In den folgenden Teilaufgaben sind **keine** Begründungen gefordert und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen. Gewertet werden ausschließlich die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Kästen. Sollte der Platz in den besagten Kästen nicht ausreichen, so sollten Sie in eindeutiger Weise kennzeichnen, wo Sie die Aufgabe bearbeitet haben.

(a) (3 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^4 + xy + 2y^2$ mit ihren stationären Punkten $x_1 = (0,0)$, $x_2 = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right)$ und $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

- x_1 ist ein lokales Maximum. ☐ Wahr [1] ☒ Falsch
- x_2 ist ein Sattelpunkt. ☐ Wahr [1] ☒ Falsch
- x_3 ist ein lokales Minimum. [1] ☒ Wahr ☐ Falsch

Zur Lösung: Die Hesse-Matrix von f ist $\mathrm{H}_f(x.y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Damit ist $\mathrm{H}_f(x_1) = -1 < 0$, also ein Sattelpunkt.

Dagegen ist $\mathrm{H} := \mathrm{H}_f(x_2) = \mathrm{H}_f(x_3) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat zwei Eigenwerte λ_1 und λ_2. Für die gilt (lineare Algebra): $\operatorname{tr} \mathrm{H} = \frac{19}{4} = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\det \mathrm{H} = 3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$. Daraus folgt unmittelbar $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, also liegen bei x_2 und x_3 jeweils lokale Minima vor.

(b) (6 Punkte) Gegeben sei die Menge $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 4\}$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(i) (3 Punkte) Geben Sie zwei Kurven an, die zusammen den Rand ∂B von B darstellen.

$\gamma_1 : [-2,2] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ [2]	$\gamma_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 4\sin t \end{pmatrix}$ [2]

(ii) (3 Punkte) Sei L die Bogenlänge des Randes von B. Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$L = a + b \int_0^\pi \sqrt{1 + c\cos^2 t}\, \mathrm{d}t.$$

$a \overset{[1]}{=} 4$	$b \overset{[1]}{=} 2$	$c \overset{[1]}{=} 3$

Zur Lösung:

(i) s.o.

(ii) Für die Bogenlänge gilt

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} \|\dot\gamma(t)\|\mathrm{d}t &= \int_{-2}^{2} \|\dot\gamma_1\|\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} \|\dot\gamma_2\|\mathrm{d}t \\ &= \int_{-2}^{2} |t|\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (4\cos t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 4 + 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathbf{4} + \mathbf{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \mathbf{3}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(c) (7 Punkte) Gegeben sei das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, v(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{1+x^2} + y, x, \ln\left(1+x^2\right) - 2z\right).$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

(i) (3 Punkte) Welche der Aussagen sind für den Definitionsbereich D von v zutreffend?

- D ist einfach zusammenhängend. ☒ Wahr ☐ Falsch
- D ist konvex. ☒ Wahr ☐ Falsch
- D ist sternförmig. ☒ Wahr ☐ Falsch
- D ist kompakt. ☐ Wahr ☒ Falsch

Zur Bewertung: Volle Punktzahl, wenn alles richtig ist. Pro falsches/fehlendes Kreuz ein Punkt Abzug.

(ii) (2 Punkte) Ist v konservativ? Wenn ja, geben Sie ein Potential f an.

[1] ☒ Ja, $\boxed{f(x,y,z) \overset{[1]}{=} z\ln(1+x^2) - z^2 + xy}$.

☐ Nein.

(iii) (2 Punkte) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\int_\gamma v(r)\cdot \mathrm{d}r$ mit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \left(\sin(\pi t), 5t^2 + t - 2, 2te^{t^2-t}\right)$?

$$\boxed{\int_\gamma v(r)\cdot \mathrm{d}r \overset{[2]}{=} -4}$$

Zur Lösung:

(i) s.o.

(ii) s.o.

(iii) Da v konservativ ist, hängt das Kurvenintegral nur vom Anfangs- bzw. Endpunkt ab. D.h.

$$\int_\gamma v(r) \cdot \mathrm{d}r = v(\gamma(1)) - v(\gamma(0)) = v(0,4,2) - v(0,-2,0) = -4 - 0 = -4.$$

(d) (3 Punkte) Gegeben sei die Menge $M_a := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = a\}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie ein $a \in \mathbb{R}$ an, so dass M_a keine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist.

□0
□1
□2
□3

$a \overset{[3]}{=} 0$

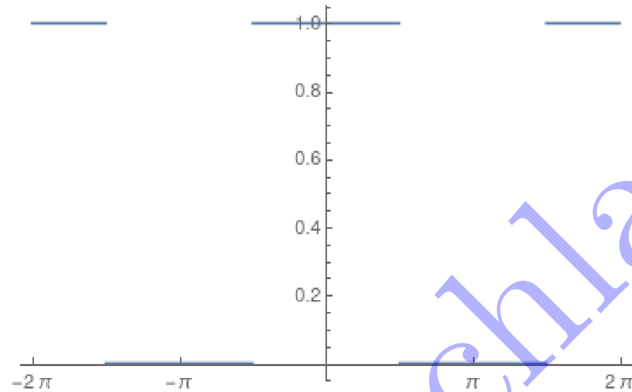
Zur Lösung:
Mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 - y^2 - a$ ist M_a die Nullstellenmenge von f. Nun ist aber wegen $\nabla f(x,y) = 2x - 2y = 0 \Rightarrow y = x$ das Bild jedes Punktes (x,y) für den $y = x$ gilt, kein regulärer Wert von f. Die Bedingung $y = x$ ist dann erfüllt, wenn $a = 0$ ist.

2. (10 Punkte) **Fourierreihen**

Es sei $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. $\tilde{f}$ wird dann 2π-periodisch durch die Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt.

(a) (2 Punkte) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

□0 □1 □2



(b) (6 Punkte) Berechnen Sie nachvollziehbar die Fouriersinus- und Fourierkosinuskoeffizienten von f.

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6

Da f gerade ist, ist offenbar $b_k \overset{[1]}{=} 0$. Für den Fourierkosinuskoeffizienten a_k berechnen wir zunächst $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x \overset{[1]}{=} 1$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} a_k &\overset{[1]}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(kx)\mathrm{d}x \\ &\overset{[1]}{=} \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(kx)}{k}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &\overset{[1]}{=} \frac{2}{\pi k}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \overset{[1]}{=} \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi k}(-1)^{\frac{k-1}{2}}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) (2 Punkte) Die Fourierreihe von f konvergiert gegen f

□0 □1 □2

☒ nicht ☐ punktweise ☐ gleichmäßig

3. (11 Punkte) **Vektoranalysis**

Seien $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbare Vektorfelder.

(a) (2 Punkte) Formulieren Sie div v und die i-te Komponente von rot v als Summe.

☐0 ☐1 ☐2

$\text{div } v \overset{[1]}{=} \sum_{i=1}^{3} \partial_i v_i$	$(\text{rot } v)_i \overset{[1]}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$

(b) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass $\nabla \cdot (u \times v) = v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Es ist

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (u \times v) = \sum_i \partial_i \left(\sum_{jk} \epsilon_{ijk} u_j v_k \right) &\overset{[1]}{=} \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} ((\partial_i u_j) v_k + u_j (\partial_i v_k)) \\
&\overset{[2]}{=} \sum_{ijk} v_k \epsilon_{kij} (\partial_i u_j) - \sum_{ijk} u_j \epsilon_{jik} (\partial_i v_k) \\
&\overset{[1]}{=} \sum_k v_k (\nabla \times u)_k - \sum_j u_j (\nabla \times v)_j \\
&\overset{[1]}{=} v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)
\end{aligned}$$

.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Divergenz von $u \times v$ mit $u = (xz, 0, z)$ und $v = (\operatorname{arsinh} x, \sqrt{\tanh(\ln y)}, \cosh\sqrt{z})$.

☐0
☐1
☐2
☐3

Offenbar gilt $\nabla \times u = (0, x, 0)$ [1] und $\nabla \times v = 0$[1]. Zusammen mit der in (b) bewiesenen Formel folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u \times v) &= v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot (\nabla \times v)\\ &= v \cdot (\nabla \times u) - u \cdot 0\\ &\overset{[1]}{=} x\sqrt{\tanh(\ln y)}.\end{aligned}$$

4. (10 Punkte) **Satz über implizite Funktionen**

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y^2 + 3z^3 &= 0 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} &= 3 \end{aligned}$$

(a) (1 Punkt) Geben Sie eine Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems an.

□0 □1

$(x_0, y_0, z_0) \overset{[1]}{=} (0, 0, 0)$

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem in einer Umgebung der in (a) gefundenen Lösung nach x, y als Funktionen von z auflösen lässt.

□0 □1 □2 □3 □4 □5

Wir setzen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 3z^3 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} - 3 \end{pmatrix}$.

f ist offenbar stetig differenzierbar[1], $f(0,0,0) = (0,0)$ [1]und $\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist invertierbar[1]. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist somit die Existenz einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}$ von $z_0 = 0$ und $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x_0, y_0) = (0,0)$ und einer stetig differenzierbaren Funktion $g : U \to V$ garantiert [1], so dass $f(z, g(z)) = 0$ für alle $z \in U$[1].

(c) (4 Punkte) Seien $z \mapsto x(z)$ und $z \mapsto y(z)$ die Lösungsfunktionen aus (b). Bestimmen Sie $x'(z_0)$ und $y'(z_0)$.

□0 □1 □2 □3 □4

Sei $z \mapsto g(z) = (x(z), y(z))$ die Lösungsfunktion aus (a). Dann ist

$$\begin{aligned} g'(z_0) = g'(0) &\overset{[1]}{=} -\left(\frac{\partial f}{\partial(x,y)}(0,0,0)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \\ &\overset{[1]}{=} -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \overset{[1]}{=} -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $x'(0) = 0$ und $y'(0) = -\frac{3}{2}$[1].

5. (11 Punkte) **Extrema unter Nebenbedingungen**

   (a) (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig und $N := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass N abgeschlossen ist.

□0 □1 □2 □3

Sei $x_n \in N$ mit $x_n \to x$. Wegen Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \to f(x)$ und außerdem ist $f(x_n) = 0$, da $x_n \in N$. Insgesamt gilt also $f(x) = 0$, also $x \in N$[**3**].

   (b) (8 Punkte) Sei nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Maximieren Sie f auf der Menge $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8

Da M kompakt und f stetig ist, wird das Maximum angenommen[**1**].
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ die Funktion, deren Nullstellenmenge M entspricht.
Wegen $\nabla g(x, y) \neq 0\ \forall (x, y)$ ist $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein notwendiges Kriterium für Extrema von f auf M [**1**]. Zusammen mit der Nebenbedingung resultiert das in das nichtlineare Gleichungssystem [**1**]

$$
\begin{aligned}
y &= 2\lambda x,\\
x &= 2\lambda y,\\
1 &= x^2 + y^2.
\end{aligned}
$$

Einsetzen der zweiten in die erste Gleichung liefert $y = 4\lambda^2 y$, also $y = 0$ oder $\lambda = \pm\frac{1}{2}$[**1**]. $y = 0$ fällt raus, da dann wegen Gleichung 1 auch $x = 0$ sein müsste, was der Nebenbedingung widerspricht. $\lambda = \frac{1}{2}$ führt auf $y = x$ und $\lambda = -\frac{1}{2}$ auf $y = -x$. Gleichung 3 führt dann auf $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$[**1**]. Letztlich sind Kandidaten für Extrema durch

$$
p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), p_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), p_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
$$

gegeben[**1**].
Wegen $f(p_1) = f(p_2) = \frac{1}{2}$ und $f(p_3) = f(p_4) = -\frac{1}{2}$[**1**] wird das Maximum in den Punkten p_1, p_2 angenommen und ist $\frac{1}{2}$[**1**].

Platz für Notizen:

6. (9 Punkte) **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

Gegeben sei das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = -\frac{x(t)}{t+x(t)}$ $(\star)$, $x(0) = 1$.

(a) (5 Punkte) Bestimmen Sie ein erstes Integral der Differentialgleichung $(\star)$, d.h., eine Funktion $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $V(t, x(t)) = \text{const.}$ für jede Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ von $(\star)$ gilt.

□0 □1 □2 □3 □4 □5

Die Differentialgleichung ist exakt, denn für $f(t,x) = x$ und $g(t,x) = t + x$ gilt $\partial_2 f(t,x) = 1 = \partial_1 g(t,x)$[**2**].
Somit ist $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\partial_1 V(t,x) = f$ und $\partial_2 V(t,x) = g$ ein erstes Integral für $(\star)$[**2**].
Wegen $\partial_1 V(t,x) = x$, $\partial_2 V(t,x) = t + x$ können wir z.B. $V(t,x) = tx + \frac{1}{2}x^2$ wählen [**1**].

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Lösung des obigen Anfangswertproblems mit maximalem Definitionsbereich.

□0 □1 □2 □3 □4

Durch Auflösen der Gleichung $V(t,x) = V(0,x(0)) = V(0,1) = \frac{1}{2}$ nach x[**1**], also $\frac{1}{2}x^2 + tx - \frac{1}{2} = 0$, erhält man die beiden Lösungen

$$x_\pm(t) = -t \pm \sqrt{t^2+1}.[\mathbf{1}]$$

Diese beiden Funktionen sind für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert und stetig differenzierbar, bilden also eine Lösung der Differentialgleichung $(\star)$. Da nur x_+ die Anfangsbedingung $x(0) = 1$ erfüllt, ist $x_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine maximale Lösung des Anfangswertproblems[**2**].

7. (9 Punkte) **Kurze Fragen**

Im Folgenden sind einige Aussagen gegeben, deren Wahrheitsgehalt Sie überprüfen müssen. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist und geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.
Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

(a) (3 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x\cdot y^{21}}{x^2+y^{42}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ist auf $\mathbb{R}^2$ stetig.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐ Wahr; Begründung: ☒Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Beispielsweise ist

$$\lim_{t\to 0} f(t^{21}, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{21} \cdot t^{21}}{(t^{21})^2 + t^{42}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Damit ist f im Ursprung unstetig **[3]**.

(b) (3 Punkte) Das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = t^3 x(t), \quad x(\sqrt{2}) = -e$ besitzt die eindeutige Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x(t) = e^{\frac{1}{4}t^4}$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☐ Wahr; Begründung: ☒Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Die gegebene Funktion erfüllt offenbar die Differentialgleichung und wäre nach dem Satz von Picard-Lindelöf ($f(t,x) := t^3 x$ ist Lipschitz-stetig in der zweiten Variablen) auch eindeutig. Jedoch löst sie nicht das gegebene Anfangswertproblem**[3]**.

(c) (3 Punkte) Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t, x, v) \mapsto L(t, x, v)$ eine Lagrangefunktion. Ist $\partial_2 L(t, x, v) = 0$, so ist $\partial_3 L(t, x, v)$ ein erstes Integral.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☒ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Setzt man in der Euler-Lagrange-Gleichung $\left(\partial_2 L - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_3 L\right)(t, x, v) = 0$ die Bedingung $\partial_2 L(t, x, v) = 0$ ein, so erhält man $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_3 L(t, x, v)$=0 und damit ist $\partial_3 L(t, x, v) = \text{const.}$, also ein erstes Integral. [**3**].

Platz für Notizen: