# Übungen zum Ferienkurs Analysis II 2014

## Lösungsvorschlag Klausur SS 2014

### Aufgabe 1

Man bestimme diejenigen Werte $c \in \mathbb{R}$, für die jeweils alle Lösungen der Differentialgleichung

$$\vec{x}(t)' = \begin{pmatrix} c & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

beschränkt sind $\forall t \in [0, \infty[$, und berechne die zugehörigen Fundamentalmatrizen.

**Lösung:** Schritt 1: Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix $A$. Dafür berechnen wir das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = (c - \lambda)^2 - 1 = c^2 - 2c\lambda + \lambda^2 - 1$$

Das kann mithilfe der Mitternachtsformel gelöst werden:

$$\lambda_{1/2} = \frac{2c \pm \sqrt{4c^2 - 4(c^2 - 1)}}{2} = c \pm 1$$

Schritt 2: Wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = c + 1 : (A - \lambda_1 \mathbb{1})x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = c - 1 : (A - \lambda_2 \mathbb{1})x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die normierten Eigenvektoren $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich:

$$e^{At} = \exp(TDT^{-1}) = T \exp(Dt) T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp((c+1)t) & 0 \\ 0 & \exp((c-1)t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 2

Man bestimme für $t \geq 1$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{x}(t)' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung** Die Differentialgleichung kann entkoppelt werden:

$$x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) - 2$$
$$x_2'(t) = \frac{1}{t} x_2(t)$$

Da die zweite Gleichung nur von $x_2$ abhängt, können wir sie durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}x_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{x_2} = \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

Durch Beidseitiges Integrieren erhalten wir:

$$\int_{x_{2,0}=1}^{x_2} \frac{1}{\tilde{x_2}}\mathrm{d}\tilde{x_2} = \ln x_2 - \ln 1 = \int_0^t \frac{1}{\tilde{t}}\mathrm{d}\tilde{t} = \ln t$$
$$x_2 = t$$

Dieses Ergebnis kann nun in die erste Gleichung eingesetzt werden:

$$x_1'(t) = x_1(t) + t - 2$$

Diese inhomogene Differentialgleichung lässt sich mithilfe der Formel aus dem Ferienkurs lösen (mit $A = 1$):

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_{1,0}\exp(t) + \int_0^t \exp(t-s)b(s)\mathrm{d}s = \int_0^t \exp(t-s)\cdot(s-2)\mathrm{d}s \ (\rightarrow \mathit{part.Integration}) \\
&= [-\exp(t-s)\cdot(s-2)]_0^t - \int_0^t -\exp(t-s)\cdot 1\mathrm{d}s = (-1(t-2) - 2\exp(t)) - [\exp(t-s)]_0^t \\
&= 2 - t - 2\exp(t) + \exp(t) - 1 = 1 - t - \exp(t)
\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 - t - \exp(t) \\ t \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

Gegeben sei $f(x,y) := (x-1)^2 + y^2$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sowie $B := (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4$.

(a) Bestimmen Sie den stationären Punkt von $f(x,y)$ und dessen Art im Inneren von B.

(b) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum von f in ganz B unter Verwendung des Lagrange-Formalismus.

### Lösung

(a) Um den stationären Punkt zu finden, müssen wir den Gradienten der Funktion bilden:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (x_0, y_0) = (1, 0)$$

Um die Art des Extremums zu bestimmen, verwenden wir die Hessematrix:

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hessematrix ist positiv definit, daraus können wir schließen, dass es sich um ein Minimum im Inneren von B handeln muss.

(b) Um das Minimum und Maximum von f in ganz B zu finden, setzen wir folgende Formel an:

$$\nabla f = \lambda \nabla h$$

mit

$$h(x, y) = x^2 + y^2 - 4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{matrix} 2x \\ 2y \end{matrix}$$

Wir erhalten zusammen mit der Nebenbedingung drei Gleichungen mithilfe deren wir die drei Unbekannten herausfinden können:

$$2x - 2 = 2\lambda x \quad (1)$$
$$2y = 2\lambda y \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (3)$$

**Fallunterscheidung:**
Fall 1: $y = 0$: aus Gleichung (1) bekommen wir die Werte für x:

$$x = \pm 2$$

Daraus resultieren die Werte für $\lambda$ und die zugehörigen Punkte:

$$x_1 = 2 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow (x_1, y_1) = (2, 0)$$
$$x_2 = -2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow (x_2, y_2) = (-2, 0)$$

Fall 2: $y \neq 0 \Rightarrow \lambda = -1$
Im zweiten Fall kann kein Wert für x gefunden werden, der Gleichung (1) erfüllt $\Rightarrow$ Widerspruch!

$\Rightarrow$ Da B kompakt ist folgt mit $f(x_1, y_1) = (1, 0)$ das Minimum bei $(x_1, y_1)$ und mit $f(x_2, y_2) = (9, 0)$ das Maximum bei $(x_2, y_2)$

# Aufgabe 4

(a) Man bestimme die Nullstellenmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ der Funktion

$$f : \mathbb{R}^{\not\models} \to \mathbb{R}, f(x, y) := x^2(1 - x^2) - y^2$$

(b) Durch $f(x, y) = 0$ ist eine implizite Funktion y=g(x) definiert. Für welche Punkte $(a, b) \in N$ darf der Satz über implizite Funktionen NICHT angewendet werden und warum?

**Lösung**

(a) Die Nullstellen einer Funktion werden berechnet, indem man sie gleich 0 setzt:

$$f(x, y) = x^2(1 - x^2) - y^2 \overset{!}{=} 0$$

Daraus ergibt sich folgende Nullstellenmenge:

$$N = \{(x, y) | y^2 = x^2 - x^4\}$$

(b) Wir wenden den Satz der impliziten Funktionen an:

- f ist stetig
- überall außerhalb der Nullstellenmenge darf der Satz nach Definition nicht verwendet werden. An diesen Stellen ist f nicht nach y auflösbar.
- Zusätzlich darf die Ableitung nicht verschwinden bzw. $D_y f(x,y)$ muss invertierbar sein:

$$\partial_y = -2y \stackrel{!}{\neq} 0$$

f ist also zusätzlich nicht auflösbar, wenn $y = 0$.

## Aufgabe 5

Gegeben sei die geschlossene, gegen den Uhrzeigersinn orientiert Kurve

$$\vec{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ -2\sin t \end{pmatrix}, -\pi \leq t < \pi,$$

sowie die Funktion $f := \frac{6x}{\sqrt{4x+4-y^2}}$

(a) Man bestimme die Parameterwerte, für die $\vec{\gamma}(t)$ eine horizontale oder vertikale Tangente besitzt. Ist $\vec{\gamma}(t)$ für $t \in [-\pi, \pi[)$ regulär?

(b) Man berechne $\int_{\vec{\gamma}} f ds$.

**Lösung:** blabla

(a) Wir berechnen zuerst den Tangentialvektor:

$$T = \vec{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -2\cos t \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\gamma}(t)$ besitzt eine horizontale Tangente, wenn $y = const.$ und damit $T_y = 0$:

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$\vec{\gamma}(t)$ besitzt eine vertikale Tangente, wenn $x = const.$ und damit $T_x = 0$:

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

also

$$t = 0.$$

(b) Zur Berechnung des Kurvenintegrals benutzen wir folgende Formel:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\gamma}} f ds &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6t^2}{\sqrt{4t^2+4-4\sin^2 t}} \cdot 2\sqrt{t^2+\cos^2 t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{6t^2\sqrt{t^2+\cos^2 t}}{\sqrt{t^2+1-\sin^2 t}}dt \end{aligned}$$

mit $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$ erhalten wir

$$\int_{-\pi}^{\pi} 6t^2 dt = \left[2t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi^3 + 2\pi^3 = 4\pi^3$$

## Aufgabe 6

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$tx^2 + xt^2 \cdot x' = -\exp(x) \cdot x' - 1, x(0) = \ln 2.$$

Man prüfe die Differentialgleichung auf Exaktheit und bestimme die eindeutige Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems in impliziter Form (d.h. in der Form $f(t, x(t)) = 0$).

**Lösung** Die Differentialgleichung lässt sich wie folgt umstellen:

$$\begin{aligned} tx^2 - 1 + (xt^2 + e^x)x' &= 0 \\ \Rightarrow A(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} f = tx^2 - 1 \\ B(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} f = xt^2 + \exp(x) \end{aligned}$$

Um das Anfangswertproblem auf Exaktheit zu überprüfen, verwenden wir die Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial}{\partial x} A(x,t) = 2tx = \frac{\partial}{\partial t} B(t,x)$$

Um nun die implizite Lösung $f(t, x(t))$ zu finden integrieren wir $A(x,t)$ und $B(x,t)$:

$$\begin{aligned} f_t &= \frac{1}{2}x^2t^2 - t + g(x \\ f_x &= \frac{1}{2}x^2t^2 + \exp(x) + h(t) \\ \Rightarrow f(x,t) &= \frac{1}{2}x^2t^2 - t + e^x \end{aligned}$$

Nach dem Satz der impliziten Funktionen ist die Lösung zudem eindeutig, da $B(t_0, x_0) = 2$ und somit ungleich 0.

## Aufgabe 7

Betrachtet werde die Differentialgleichung

$$t^2x' + x = t, x(0) = 0$$

(a) Man benutze einen Potenzreihenansatz mit dem Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ zur (versuchsweisen) Bestimmung einer Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Wieso lässt sich die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung nicht in diese Taylorreihe entwickeln?

(c) Geben Sie - falls möglich - eine (globale) Lipschitzkonstante für die Differentialgleichung in dieser Aufgabe an.

**Lösung**