....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Studienbegleitende Fachprüfung
Mathematik für Physik 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

9. Februar 2009, 9:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **11** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$$

LÖSUNG:

Induktionsbeginn $(n = 1)$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

Induktionsschritt $(n-1 \to n)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} &\overset{[\mathbf{2}]}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{n^2+n} \\
&\overset{\text{I.V.}[\mathbf{2}]}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&\overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} \\
&\overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

$\square$

Alternativ:
Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2+k} &\overset{[\mathbf{2}]}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{(n+1)^2+n+1} \\
&\overset{\text{I.V.}[\mathbf{2}]}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \\
&\overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{n+1}{n+2}
\end{aligned}$$

$\square$

Erklärung:
[**2 Punkte**] für den Induktionsbeginn,
[**2 Punkte**] für das Zerlegen,
[**2 Punkte**] für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
[**2 Punkte**] für das Zusammenfassen.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $(a+ib)^{-1}$ an, $a, b \in \mathbb{R}$. **[2]**

$$\frac{1}{a+ib} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2}} + i \boxed{\frac{-b}{a^2+b^2}}$$

(b) Geben Sie $(-1+i)^6$ in Polardarstellung, $r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an. **[4]**

$$\boxed{r = \quad 8} \qquad \boxed{\phi = \quad \tfrac{\pi}{2}}$$

LÖSUNG:

(a) $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

(b) $(-1+i) = \sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$. Somit ist $(-1+i)^6 = \sqrt{2}^{\,6} e^{i\frac{18}{4}\pi} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. **[2]**

☐ $=-\infty$ ☒ $=0$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$? **[2]**

☐ -4 ☐ -3 ☐ 0 ☐ $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☐ ∞ ☒ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n}$? **[3]**

☐ $=-\infty$ ☒ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=0.$

(b) Die Terme der Reihe bilden keine Nullfolge, also nicht konvergent.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n}=\frac{1}{(-1)^1}+\frac{1}{(-2)^2}-\frac{1}{(-3)^3}\pm\cdots=-1+\frac{1}{4}-\frac{1}{27}\pm\cdots$. Die Reihe ist nach dem Leibnitzkriterium (alternierende betragsmäßig monotone Nullfolge) konvergent. Die Teilsummen bilden eine Intervallschachtelung. Insbesondere liegt der Grenzwert im Intervall $[-1,-\frac{3}{4}]$, ist also negativ.

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}\, x^n$.

LÖSUNG:

$\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{3/n}}{2} = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} (n^{1/n})^3 = \frac{1}{2}$. Der Konvergenzradius ist also 2.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\log x}{x^2-1}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☒ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar? **[2]**

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

Lösung:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\log x}{x^2-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \cos^2 x = 1.$

6. **Grenzwert eines Integrals** **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Berechnen Sie $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt$.

LÖSUNG:

Sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt \overset{\textbf{[2]}}{=} \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \overset{\textbf{[1]}}{=} F'(x) \overset{\textbf{[1]}}{=} f(x)$.

7. **Maximales Volumen** **[10 Punkte]**
Aus einer Kugel mit Radius R soll ein Zylinder mit maximalem Volumen geschnitten werden.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen der Höhe h und dem Radius r des Zylinders, wenn der Rand von Boden und Deckel des Zylinders jeweils in der Kugeloberfläche liegen?

(b) Wie groß ist das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h?

(c) Bestimmen Sie, mit Begründung, die Höhe des Zylinders, dessen Volumen maximal ist.

LÖSUNG:

(a) $R^2 = r^2 + \frac{1}{4}h^2$ **[2]**

(b) $V(h) = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{1}{4}h^2)h = \pi(R^2 h - \frac{1}{4}h^3)$ **[2]**

(c) Es ist $0 \leq h \leq 2R$. Kandidaten für das Maximum von $V(h)$ sind die Randpunkte $h = 0$ und $h = 2R$, jeweils mit $V(h) = 0$ **[1]**
und die stationären Punkte mit $V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3}{4}h^2) = 0$, bzw. $h = \sqrt{\frac{4}{3}}R$. **[3]**
Wegen $V(h) > 0$ für $0 < h < 2R$ muss dies das absolute Maximum von $V : [0, 2R] \to \mathbb{R}$ sein. **[2]**

8. **Integration** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie **[2]**

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \quad -\tfrac{1}{2}e^{-x^2}$$

(b) Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ ist **[2]**

☒ konvergent, ☒ absolut konvergent, ☐ nicht konvergent.

(c) Das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ist **[2]**

☒ konvergent, ☒ absolut konvergent, ☐ nicht konvergent.

LÖSUNG:

(a) $\int xe^{-x^2}\,dx \overset{y=x^2}{=} \int e^{-y}\frac{dy}{2} = -\frac{1}{2}e^{-y} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

(b) $\left|\frac{\cos x-1}{x^2}\right| \leq \frac{2}{x^2}$, der Integrand ist auf $[0,\infty)$ durch eine absolut integrierbare Funktion beschränkt, ist also selbst absolut integrierbar, also auch integrierbar.

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, der Integrand ist auf $[0,1]$ also stetig fortsetzbar. Das Integral existiert somit im eigentlichen Sinne, ist daher konvergent und absolut konvergent.

9. **Integration** **[6 Punkte]**

Für welche Werte von $a, \mu \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|x-a|}dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.

LÖSUNG:

Der Integrand konvergiert unabhängig von a für $|x| \to \infty$ nicht gegen 0, falls $\mu \leq 0$. **[1]**

Im Fall $(a, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|x-a|}dx \overset{y=x-a,\textbf{[1]}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|y|}dy \overset{\textbf{[1]}}{=} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\mu y}dy + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\mu y}dy$$

$$\overset{\textbf{[2]}}{=} \left[\frac{e^{\mu y}}{\mu}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-\mu y}}{-\mu}\right]_{0}^{\infty} \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu}.$$

Alternative:

Ohne Substitution erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|x-a|}dx \overset{\textbf{[2]}}{=} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{\mu(x-a)}dx + \int\limits_{a}^{\infty} e^{-\mu(x-a)}dy$$

$$\overset{\textbf{[2]}}{=} \left[\frac{e^{\mu(x-a)}}{\mu}\right]_{-\infty}^{a} + \left[\frac{e^{-\mu(x-a)}}{-\mu}\right]_{a}^{\infty} \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{\mu}.$$

10. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Wie lautet die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $a = 2$? **[5]**

$$f(x) = \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 \qquad + \mathcal{O}\big((x-2)^3\big)$$

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $a = 2$? **[3]**

☐ 0 ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☒ 2 ☐ e ☐ ∞ ☐ existiert nicht

LÖSUNG:

(a) Wir setzen $h = x - 2$, dann gilt

$$f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{h}{2}\right)^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 - \frac{1}{16}h^3 + \frac{1}{32}h^4 \pm \cdots$$

[1] für die 0-te Ordnung.
[2] für die 1-te Ordnung.
[2] für die 2-te Ordnung.

(b) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \left(\frac{h}{2}\right)^k$ ist offenbar genau für $|x-2| < 2$ eine konvergente geometrische Reihe. Der Konvergenzradius ist also 2.

Plausibel ist dieses Ergebnis, da die Polstelle im Ursprung den Abstand 2 vom Entwicklungspunkt hat.

11. **Fourierreihen** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$, wobei $\hat{f}_0 = 0$. Sei F eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ von F gilt:

$$\hat{F}_k = \frac{\hat{f}_k}{ik} \quad \text{für } k \neq 0.$$

LÖSUNG:

Für $k \neq 0$ gilt

$$\hat{F}_k \overset{[1]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} \overset{[2]}{=} \left[F(x) \frac{e^{-ikx}}{-2\pi ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \frac{e^{-ikx}}{-ik} \frac{dx}{2\pi} \overset{[2]}{=} \frac{(-1)^k}{-2\pi ik}(F(\pi) - F(-\pi)) + \frac{\hat{f}_k}{ik} = \frac{\hat{f}_k}{ik},$$

da $F(\pi) - F(-\pi) \overset{[2]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \overset{[1]}{=} 2\pi \hat{f}_0 = 0$.