....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Probeklausur
Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

15. Juni 2009, 12:20 – 13:50 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Stetigkeit** **(8 Punkte)**
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.
LÖSUNG:

Beh Das stetige Urbild einer offenen Menge ist offen.

Bew Wir geben drei Alternativen an.

Alternative 1: M offen bedeutet: Für jedes $y \in M$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(y) \subset M$.
Annahme: $f^{-1}(M)$ ist nicht offen. Dann gibt es ein $x \in f^{-1}(M)$ und zu jedem $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, immer ein x_n mit $x_n \notin f^{-1}(M)$. Offenbar gilt $x_n \to x$. Da f stetig ist, folgt $f(x_n) \to f(x)$. Da M offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset M$. D.h. fast alle $f(x_n)$ liegen in M, im Widerspruch zu $x_n \notin f^{-1}(M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternative 2: Das Komplement von M, M^c, ist abgeschlossen. D.h., ist $y_n \in M^c$, $n \in \mathbb{N}$, mit $y_n \to y$, so ist auch $y \in M^c$. Wir zeigen, dass $f^{-1}(M)^c$ abgeschlossen und damit, dass $f^{-1}(M)$ offen ist:
Sei $x_n \in f^{-1}(M)^c$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $f(x_n) \in M^c$ und, wegen der Stetigkeit von f gilt $f(x_n) \to f(x) \in M^c$, da M^c abgeschlossen ist. Das bedeutet aber, dass $x \in f^{-1}(M)^c$.

Alternative 3: Mit ϵ–δ Definition.
Sei x in $f^{-1}(M)$. Da M offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset M$. Da f stetig ist gibt es zu diesem ϵ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x)$ auch $f(y) \in B_\epsilon(f(x))$, d.h. $y \in f^{-1}(M)$. Also ist $f^{-1}(M)$ offen.

Ist die Definition von “offen”, bzw. “abgeschlossen” richtig benutzt oder explizit angegeben: [**2**].
Ist die Definition der Stetigkeit (Folgen- oder ϵ–δ-) richtig verwendet oder explizit angegeben: [**2**].
Für richtige Beweisführung: [**4**].
$\square$

2. **Krümmung einer Klothoide** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2)\,\mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2)\,\mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

HINWEIS: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

LÖSUNG:

Sei $t > 0$. Wir berechnen zuerst die Krümmung mit der Formel aus dem Hinweis. **[2]**

$$\dot{x}(t) = \cos(t^2/2), \quad \ddot{x}(t) = -t\sin(t^2/2), \quad \dot{y}(t) = \sin(t^2/2), \quad \ddot{y}(t) = t\cos(t^2/2)$$

Einsetzen ergibt nun **[2]**

$$\kappa(t) = \left| \frac{t\cos^2(t^2/2) + t\sin^2(t^2/2)}{(\cos^2(t^2/2) + \sin^2(t^2/2))^{3/2}} \right| = t.$$

Die Länge berechnet sich aus **[2]**

$$L(t) = \int_0^t |\dot{\vec{r}}(u)|\,\mathrm{d}u = \int_0^t \sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{y}(u)^2}\,\mathrm{d}u = t.$$

3. **Wegintegral** **(4 Punkte)**

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $x \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$, $t \mapsto x(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich unter dem Einfluss der Kraft F gemäss des 2. Newtonschen Gesetzes $F(x(t)) = m\,\ddot{x}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $x(t_0) = (0,0,0)$ nach $x(t_1) = (1,1,1)$ bewege und bei $x(t_0)$ die Geschwindigkeit $|\dot{x}(t_0)| = 0$ und bei $x(t_1)$ die Geschwindigkeit $|\dot{x}(t_1)| = 1$ besitze. Wie groß ist die von F geleistete Arbeit, d.h. die entlang der Teilchenbahn integrierte Kraft?

☐ -1 ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{2}$

LÖSUNG:

<u>Beh</u> Die Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien.

<u>Bew</u> Wir integrieren die Kraft entlang des Weges,

$$\int_x F(y) \cdot \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\dot{x}(t)|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(|\dot{x}(t_1)|^2 - |\dot{x}(t_0)|^2)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

4. **Separierbare Differentialgleichungen** **(8 Punkte)**

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1-y^2)$ mit $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $y_0 > 0$: **(2)**

$$y(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}$$

Für $y_0 < 0$: **(2)**

$$y(x) = -\sqrt{1 - e^{-x^2}(1 - y_0^2)}$$

(b) Wieviele konstante Lösungen gibt es? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

(c) Wieviele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4

LÖSUNG:

(a) Wir lösen durch Separation der Variablen. Für eine Lösung $y(x)$ mit $y(0) = y_0$ muss gelten

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{y\,dy}{1-y^2} = \int_0^x x'\,dx', \quad \text{also} \quad -\tfrac{1}{2}\ln|1-y(x)^2| + \tfrac{1}{2}\ln|1-y_0^2| = \tfrac{1}{2}x^2.$$

Da die Integration über die Singularitäten $y = \pm 1$ nicht möglich ist, müssen $1 - y_0^2$ und $1 - y(x)^2$ für alle x das gleiche Vorzeichen haben. Somit ergibt beidseitiges exponenzieren

$$1 - y(x)^2 = e^{-x^2}(1 - y_0^2).$$

Die rechte Seite ist immer kleiner als 1. Damit $y(x)$ stetig ist, muss also gelten

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - e^{-x^2}(1-y_0^2)}, & \text{falls } y_0 > 0, \\ -\sqrt{1 - e^{-x^2}(1-y_0^2)}, & \text{falls } y_0 < 0, \end{cases}$$

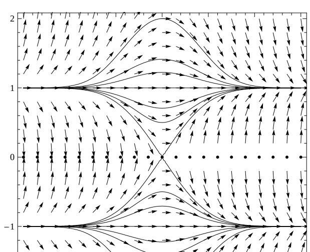
denn der Radikant ist in beiden Fällen immer positiv.

(b) Die rechte Seite der Differentialgleichung ist Null für alle x, genau dann, wenn $y = \pm 1$ ist. Somit sind $y(x) = \pm 1$ genau zwei konstante Lösungen.

(c) Für $y_0 = 0$ sind $y_\pm(x) = \pm\sqrt{1 - e^{-x^2}}$ die einzigen zwei Lösungen auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{x \to 0} y_\pm(x) = 0$. Für kleine x gilt $y_\pm(x) \approx \pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$. Somit gibt es genau zwei Lösungen

$$y_1(x) = \begin{cases} y_+(x), & \text{für } x > 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \\ y_-(x), & \text{für } x < 0, \end{cases} \qquad \text{und} \quad y_2(x) = -y_1(x),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und Lösungen der Differentialgleichung mit $y(0) = 0$ sind.



5. **Lineare Differentialgleichungen** **(8 Punkte)**
Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$ $(*)$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $(*)$? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen von $(*)$? **(2)**

☐ $-\ln x$ ☒ 0 ☐ 1 ☒ $2e^{-x}$ ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem von $(*)$ an: **(2)**

$$(e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x})$$

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an: **(2)**

$$\left\{ \tfrac{1}{3} + a_1 e^{-x} + a_2 e^{-3x} + a_3 x e^{-3x} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

LÖSUNG:

(a) $(*)$ ist eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung, ihr Lösungsraum ist also dreidimensional.

(b) $(*)$ hat konstante Koeffizienten, somit sind ihre Lösungen Produkte von Polynomen (maximal 2. Grades) und Exponentialfunktionen, und Linearkombinationen davon. Die Nullfunktion ist immer eine Lösung. Man überprüft leicht, dass auch e^{-x} eine Lösung ist, da -1 Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(c) Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 15\lambda + 9$ mit der aus (b) bekannten Nullstelle -1. Polynomdivision ergibt $\chi(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda^2+6\lambda+9) = (\lambda+1)(\lambda+3)^2$. Also ist -3 noch eine doppelte Nullstelle. Somit ist $(e^{-x}, e^{-3x}, xe^{-3x})$ Basis des Lösungsraums.

(d) Offenbar ist die konstante Lösung $y(x) = \frac{1}{3}$ Lösung der inhomogenen Dgl. Der gesamte Lösungsraum besteht aus der Summe dieser konstanten Lösung und einer beliebigen Lösung des inhomogenen Systems.

6. **Differenzierbarkeit** **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Für den Punkt $a = (0,0)$ und den Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ berechne man **[2]**

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = v_1^2 v_2}$$

und **[2]**

$$\boxed{\partial_x f(a) = 0} \qquad \boxed{\partial_y f(a) = 0}$$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist. **[4]**

LÖSUNG:

(a) Die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v ist

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^3 v_1^2 v_2}{tt^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = f(v) = v_1^2 v_2,$$

da $|v| = 1$ **[2 Punkte]**

Wegen $f(x,0) = 0$ ist $\partial_x f(0,0) = 0$ und wegen $f(0,y) = 0$ ist $\partial_y f(0,0) = 0$ **[2 Punkte]**

□

(b) Beh f ist im Ursprung nicht total differenzierbar.

Bew Gemäss Definition aus der Vorlesung ist f total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, falls eine lineare Abbildung $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ existiert, so dass

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0,y_0) + (h_1,h_2)) - f(x_0,y_0) - A(h_1,h_2)}{|(h_1,h_2)|} = 0.$$

[1 Punkt]

Außerdem ist die Matrix A eindeutig bestimmt und gleich der Jacobi-Matrix $Df(x_0,y_0)$ an der Stelle (x_0,y_0). **[1 Punkt]**

Nach Aufgabenteil (a) gilt im Ursprung $(x_0,y_0) = (0,0)$, dass $Df(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (0,0)$. Wählen wir nun $(h_1,h_2) = (h,h) \neq 0$, so lautet obiger Differenzenquotient im Ursprung

$$\frac{f(h,h) - f(0,0) - Df(0,0)(h,h)}{|(h,h)|} = 2^{-3/2} \frac{h}{|h|}.$$

Daraus folgt, dass der Differenzenquotient im Limes $h \to 0$ gegen $\pm 2^{-3/2}$ und nicht gegen 0 strebt, was im Widerspruch steht zur Definition der totalen Differenzierbarkeit. **[2 Punkte]**

7. **Extrema** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u,v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0,0), \quad x_2 = (0,2/3), \quad x_3 = (-2/3,0), \quad x_4 = (-1,0), \quad x_5 = (-2/3,-2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☒ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☒ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

LÖSUNG:

(a) <u>Beh</u> x_1, x_3 und x_5 sind kritische Punkte von f.

<u>Bew</u> Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(u,v) = (u(3u+2), v(3v+2)) = (0,0),$$

woraus folgt, dass x_1, x_3 und x_5 kritische Punkte sind. x_2 und x_4 sind keine kritischen Punkte. □

(b) <u>Beh</u> f besitzt in x_5 ein lokales Maximum.

<u>Bew</u> Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(u,v) = \begin{pmatrix} 6u+2 & 0 \\ 0 & 6v+2 \end{pmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_1, x_3 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwert $2 > 0$, $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$ und $H_f(x_5)$ den doppelten Eigenwert $-2 < 0$. Also hat f in x_5 ein lokales Maximum.

(c) <u>Beh</u> f besitzt in x_1 ein lokales Minimum.

<u>Bew</u> $H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwerte $2 > 0$.

(d) <u>Beh</u> f besitzt in x_3 einen Sattelpunkt.

<u>Bew</u> $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$.

8. **Taylor-Formel** **(8 Punkte)**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $a, x \in U$. Welches sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Taylorformel 1. Ordnung für $f(x)$ im Entwicklungspunkt a, in der das Restglied durch die Hesse-Matrix in einem Punkt ausgedrückt wird? **[2]**

(b) Wie lautet die Taylor-Formel in diesem Fall? **[6]**

$$\boxed{f(x) = f(a) + \operatorname{grad} f(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}\,(x-a) \cdot H_f(a + \theta(x-a))(x-a) \quad \text{für ein } \theta \in [0,1]}$$

Lösung:

Lösung

(a) Die Voraussetzungen lauten:
(1) $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ **[1 Punkt]**
(2) U konvex, oder zumindest $(1-t)a + tx \in U$ für alle $t \in [0,1]$ **[1 Punkt]**

(b) Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\theta \in [0,1]$, sodass **[1 Punkt]**

$$f(x) = f(a) + (\nabla f)(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2}\,(x-a) \cdot H_f(a + \theta(x-a))(x-a).$$

[1+2+2 Punkte]

□