....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Semestrale
Mathematik 4 für Physik
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

19. Februar 2010, 8:15 – 9:45 Uhr, MW 0001

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4-Seiten

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Fluss durch eine Oberfläche** **[7 Punkte]**

Sei $S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x^2 + y^2 + 16z^2 = 2010\right\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt. Berechnen Sie den Fluss von

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y - z \\ -x + z \\ x - y \end{pmatrix} \tag{1}$$

durch S.

2. **Zirkulation durch den Rand einer Fläche** **[8 Punkte]**

Sei $S := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge z \geq 0\right\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt, und

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y + 4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2 + z^2) + e^{4y^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. Bestimmen Sie die Zirkulation von v durch den Rand von S.

3. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$f(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - \alpha_k)^{-1}.$$

(a) f hat bei α_k eine

☐ hebbare Singularität ☐ Pol 1. Ordnung ☐ Pol 2. Ordnung
☐ Pol -1. Ordnung ☐ wesentliche Singularität

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = \alpha_1$:

$\mathrm{Res}_{\alpha_1}(f) =$

(c) Geben Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f um $z = \alpha_1$ an:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - \alpha_1)^{-n} =$$

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius des Nebenteils $N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha_1)^n$ der Laurent-Reihe von f um $z = \alpha_1$:

$R =$

4. **Fourier-Transformation** **[11 Punkte]**

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2},$$

mit $\varepsilon > 0$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}$.

5. **Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{g}(k,t)$ von $g(x,t)$, so dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$\phi(x,t) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y,t)\, \mathrm{d}y$$

das Anfangswertproblem $\phi(x,0) = f(x)$ zur Gleichung

$$\partial_t \phi(x,t) = \left(\partial_x^2 - m^2\right)\phi(x,t)$$

löst.

6. **Rechnen mit Distributionen** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

7. **Operatoren auf Hilbert-Räumen** **[7 Punkte]**

Sei $T_\lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ der durch

$$(T_\lambda \psi)(x) := \lambda^{n/2} \psi(\lambda x)$$

definierte Operator, wobei $\lambda > 0$ ist.

(a) Bestimmen Sie den adjungierten Operator:

$(T_\lambda^* \varphi)(x) =$

(b) T_λ ist für alle $\lambda \neq 1$

☐ selbstadjungiert ☐ eine Orthonormalbasis ☐ positiv
☐ ein orthogonaler Projektor ☐ unitär

Seien A, B selbstadjungierte beschränkte Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

(c) Zeigen Sie, dass aus $AB = 0$ auch $BA = 0$ folgt: