Theoretische Physik 3: QUANTENMECHANIK

Lösungen

13.03.2007 Prof. H. Friedrich, TU München

---

1. (a)

Operator	hermitisch	unitär
$\hat{x}$	ja	nein
$\dfrac{\partial}{\partial \hat{p}_x}$	nein	nein
$\hat{\sigma}_z$	ja	ja
$\hat{\sigma}_y$	ja	ja
$\exp(i\pi\hat{\sigma}_z)$	ja	ja

(b) Sei $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{A}$ mit Eigenwert α. Es folgt:

$$\hat{A}\hat{B}|\alpha\rangle = \hat{B}\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha\hat{B}|\alpha\rangle.$$

Da α nicht-entartet ist, müssen die Eigenzustände von $\hat{A}$, $\hat{B}|\alpha\rangle$ und $|\alpha\rangle$, proportional sein: $\hat{B}|\alpha\rangle = \beta|\alpha\rangle$, d.h. $|\alpha\rangle$ ist auch Eigenzustand von $\hat{B}$. Also, die Basis $\{|\alpha\rangle\}$ besteht aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$.

2. (a) Schrödingergleichung:

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{l(l+1)}{r^2} - K_0^2\right)\phi_{l,m}(r) = \pm k^2\phi_{l,m}(r), & 0 \le r \le R \\[2ex] \left(-\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{l(l+1)}{r^2}\right)\phi_{l,m}(r) = \pm k^2\phi_{l,m}(r), & r > R, \end{cases}$$

$E = \pm\frac{\hbar^2}{2M}k^2$, $\quad E \ge -\frac{\hbar^2}{2M}K_0^2$.

Randbedingungen: $\phi_{l,m}(r=0) = 0$

$\phi_{l,m}(r) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$, für gebundene Zustände.

(b) Die Energie $E_{n,l,m}$ hängt von n und l ab.
Entartung: $2l+1$ $(m = -l, \ldots, l)$.

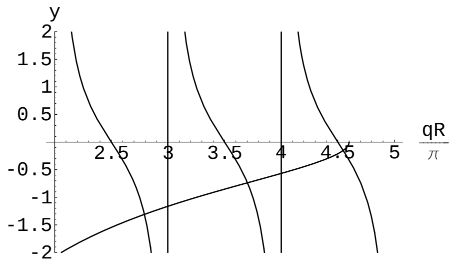
(c) Radiale Schrödingergleichung für $l = 0$:

$$\begin{cases} \left(-\frac{d^2}{dr^2} - (K_0^2 - k^2)\right)\phi(r) = 0, & 0 \le r \le R \\[2ex] \left(-\frac{d^2}{dr^2} + k^2\right)\phi(r) = 0, & r > R, \end{cases} \Rightarrow \phi(r) = \begin{cases} A\sin(qr), \\[2ex] Be^{-kr}, \end{cases}$$

mit $q^2 = K_0^2 - k^2$. Aus der Stetigkeit von ϕ und ϕ' an $r = R$ folgt:

$$\cot(qR) = -\frac{k}{q}.$$

Die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung ist $\lfloor \frac{K_0 R}{\pi} \rfloor \pm 1$.



Plot von $y = \cot(qR)$ und $y = -\frac{k}{q}$ für $K_0 R = 4.6\pi$.

(d) Mit $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ haben wir

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2).$$

Dann

$$\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}|jlms\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))|jlms\rangle, \qquad (1)$$

mit $j = |l - s|, \ldots, l + s$, d.h $j = l - 1/2 (l > 0)$ oder $j = l + 1/2$.

- $j = l - 1/2 \;\Rightarrow\; j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) = -l - 1$ und $\Delta E = \langle jlms|c\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}|jlms\rangle = -\frac{\hbar^2}{2}c(l+1)$, $l > 0$.
- $j = l + 1/2 \;\Rightarrow\; j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) = l$ und $\Delta E = \langle jlms|c\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S}|jlms\rangle = \frac{\hbar^2}{2}cl$, $c = \dfrac{1}{2m^2c^2}\dfrac{V_0}{R^2}$.

3. (a) Es folgt aus $\hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}1$ und aus der Taylor-Reihe von cos bzw. sin.

(b) In der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ der Eigenzustände von $\hat{S}_z$ lässt sich die zeitabhängige Schrödingergleichung für $|\Psi(t)\rangle$ darstellen als:

$$\begin{pmatrix} i\hbar\dot{a}(t) \\ i\hbar\dot{b}(t) \end{pmatrix} = -\mu_B B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = -\mu_B B \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} b(t) \\ a(t) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des gekoppelten Gleichungssystems lautet:

$$\begin{aligned} a(t) &= A \sin\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right) + B \cos\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right) \\ b(t) &= -iA \cos\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right) + iB \sin\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right). \end{aligned}$$

Aus den Anfangsbedingungen $a(0) = 1$ und $b(0) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} a(t) &= \cos\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right) \\ b(t) &= i \sin\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right). \end{aligned}$$

Alternative Lösung:
Der Zeitentwicklungsoperator ist

$$\hat{U}_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{i\frac{\mu_B B}{2}t\hat{\sigma}_x}.$$

Aus Teil (a) erhält man

$$\hat{U}_t = \cos\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right) + i\hat{\sigma}_x \sin\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right).$$

Schließlich:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}_t|\Psi(0)\rangle = \hat{U}_t|\uparrow\rangle = \cos\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right)|\uparrow\rangle + i\sin\left(\frac{\mu_B B}{2} t\right)|\downarrow\rangle.$$

(c)

$$\begin{aligned} \langle\Psi(t)|\hat{S}_x|\Psi(t)\rangle &= \langle\Psi(t)|(a(t)|\downarrow\rangle + b(t)|\uparrow\rangle) \\ &= b^*(t)a(t) + a^*(t)b(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

U_t und $\hat{S}_x$ kommutieren $\Rightarrow$ $\langle\Psi(t)|\hat{S}_x|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(0)|\hat{S}_x|\Psi(0)\rangle = 0.$

(d) Antwort: $\frac{\mu_B B}{2}t = \frac{2n+1}{2}\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{(2n+1)\pi}{\mu_B B},\; n = 0, 1, 2\ldots$

4. (a)

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{\beta}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \hat{p} &= -\frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\hbar}{\beta}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \\ \hat{H} &= \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] &= \frac{1}{2}\left[\frac{\hat{x}}{\beta} + i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}, \frac{\hat{x}}{\beta} - i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{\hat{x}}{\beta}, -i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right] + \left[i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}, \frac{\hat{x}}{\beta}\right]\right) \\
&= \left[i\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}, \frac{\hat{x}}{\beta}\right] = \frac{i}{\hbar}[\hat{p}, \hat{x}] = 1. \\
\left[\hat{H}, \hat{b}\right] &= \hbar\omega[\hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{b}] = \hbar\omega(\hat{b}^\dagger[\hat{b}, \hat{b}] + [\hat{b}^\dagger, \hat{b}]\hat{b}) = -\hbar\omega\hat{b} \\
\left[\hat{H}, \hat{b}^\dagger\right] &= \hbar\omega[\hat{b}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \hbar\omega(\hat{b}^\dagger[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] + [\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger]\hat{b}) = \hbar\omega\hat{b}^\dagger
\end{aligned}$$

(c) Aus Teil (a):

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right)|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|0\rangle.$$

(d) Es ist einfach mit Hilfe von Induktion zu beweisen, dass $\hat{b}(\hat{b}^\dagger)^n = (\hat{b}^\dagger)^n\hat{b} + n(\hat{b}^\dagger)^{n-1}$ gilt. Es folgt dann:

$$\begin{aligned}
\hat{b}|n\rangle &= c_n\hat{b}(\hat{b}^\dagger)^n|0\rangle = c_n n(\hat{b}^\dagger)^{n-1}|0\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}}n|n-1\rangle, \\
\hat{b}^\dagger|n\rangle &= c_n(\hat{b}^\dagger)^{n+1}|0\rangle = \frac{c_n}{c_{n+1}}|n+1\rangle.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{b}^\dagger\hat{b}|n\rangle = \hat{b}^\dagger\frac{c_n}{c_{n-1}}n|n-1\rangle = \frac{c_n}{c_{n-1}}n\frac{c_{n-1}}{c_n}|n\rangle = n|n\rangle.$$

Schliesslich:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

(e) Nehmen wir an, dass es einen Eigenzustand $|\alpha\rangle$ von $\hat{H}$ mit Eigenwert $E_\alpha = \hbar\omega(\alpha + 1/2)$ $(\alpha \neq 0, 1, 2, \dots)$ gibt. Aus Teil (b):

$$\hat{H}\hat{b}|\alpha\rangle = -\hbar\omega\hat{b}|\alpha\rangle + \hat{b}\hat{H}|\alpha\rangle = \hbar\omega\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\hat{b}|\alpha\rangle,$$

d.h. $\hat{b}|\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand von $\hat{H}$ und der entsprechende Eigenwert ist $\hbar\omega\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$. Es folgt, dass die Zustände der Art $\hat{b}^n|\alpha\rangle$ auch Eigenzustände sind. Die entsprechenden Eigenwerte $\hbar\omega\left(\alpha + \frac{1}{2} - n\right)$ sind aber von unten unbegrenzt, was unmöglich ist. Dieser Widerspruch beweist, dass es keine anderen Eigenwerte gibt.