....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Semestrale
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

14. Februar 2011, 8:30–10:00 Uhr, MW 1801, MW 2001

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Beweis** **[5 Punkte]**

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

Lösung:

Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{1+1} \cdot 1^2 = 1 = (-1)^{1+1} \frac{1(1+1)}{2}$ [1]

Induktionsschritt: Die Formel sei für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann folgern wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} k^2 \overset{[1]}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 + (-1)^{n+2}(n+1)^2 \overset{[1]}{=} (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+2}(n+1)^2$$
$$\overset{[1]}{=} (-1)^{n+2}(n+1)\Big((n+1) - \tfrac{n}{2}\Big) \overset{[1]}{=} (-1)^{n+2} \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

2. **Taylor-Reihen** **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^2}$.

(i) Wie lauten die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung von f um $x = 0$. Wie groß ist der Fehler?

$f(x) =$	$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6$	$+\mathcal{O}(x^8)$	[4]

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe um $x = 0$.

☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ $\sqrt{2}$[2] ☐ 0 ☐ 1 ☐ ∞

Lösung:

(i) Die Taylor-Reihe von f erhält man am effizientesten indem man x^2 an die Taylor-Reihe des zweiten Faktors multipliziert:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+x^2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x^2}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}\, x^{2n}\end{aligned}$$

Daher ist die Taylor-Reihe von f um $x = 0$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2+x^2} &= x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-1}\, x^{2n+2} \\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{8}x^6 + \mathcal{O}(x^8).\end{aligned}$$

(ii) Da der Konvergenzradius ρ der geometrischen Reihe 1 ist, konvergiert die Reihe solange $|x| < \sqrt{2}$. Das kann man auch explizit ausrechnen, denn aus dem Wurzelkriterium folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n 2^{-n-1} x^{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}}\, \tfrac{x^2}{2} = \tfrac{x^2}{2} \overset{!}{=} 1$$

und somit $\rho = \sqrt{2}$.

3. **Diverse Integrale** **[7 Punkte]**

Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

(i)

$$\boxed{\int \mathrm{d}x\, x\,\sqrt{x-1} = \tfrac{2}{3}x(x-1)^{3/2} - \tfrac{4}{15}(x-1)^{5/2} = \tfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2} \qquad [3]}$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bestimmen Sie

$$\boxed{\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| = \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\ln|a+bx| \qquad [4]}$$

Lösung:

(i)

$$\int \mathrm{d}x\, \underbrace{x}_{=v(x)}\, \underbrace{\sqrt{x-1}}_{=u'(x)} = x \cdot \frac{(x-1)^{3/2}}{3/2} - \int \mathrm{d}x\, 1 \cdot \frac{(x-1)^{3/2}}{3/2}$$

$$= \frac{2}{3}x\,(x-1)^{3/2} - \frac{2}{3}\frac{(x-1)^{5/2}}{5/2} = \frac{2}{3}x\,(x-1)^{3/2} - \frac{4}{15}(x-1)^{5/2}$$

$$= \tfrac{2}{15}\big(5x - 2(x-1)\big)(x-1)^{3/2} = \tfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2}$$

(ii) Man macht zuerst eine Partialbruchzerlegung: aus

$$\frac{1}{x(a+bx)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+bx} = \frac{A(a+bx)+Bx}{x(a+bx)} = \frac{(Ab+B)x + Aa\cdot 1}{x(a+bx)}$$

folgt $A = \frac{1}{a}$ und $B = -\frac{b}{a}$. Daraus folgt

$$\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x(a+bx)} = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{a}\frac{1}{x} - \frac{b}{a}\frac{1}{a+bx}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\ln|a+bx| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$$

4. Folgen **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Verhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen.

(i) $a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

☐ $\sqrt{e}$ ☒ $+\infty$[2] ☐ e ☐ 0 ☐ 1

(ii) $b_n = \frac{\sqrt{n^2+5}+n}{n+17}$

☐ 1 ☐ 0 ☒ 2[2] ☐ $\frac{5}{17}$ ☐ konvergiert nicht

(iii) $c_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sin\frac{1}{k}$

☐ konvergiert nicht, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist

☐ konvergiert, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist

☒ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, und zwar gegen $c \in (-\infty, 0)$ [2]

☐ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, und zwar gegen $c \in (0, +\infty)$

☐ konvergiert nicht, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wie $({}^1\!/_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 geht

Lösung:

(i) Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} = 1+\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Da $\lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty$ folgt daher auch

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty.$$

Alternativ kann man auch l'Hôpital anwenden.

(ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5}+n}{n+17} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+{}^5\!/_{n^2}}+1}{1+{}^{17}\!/_n} = \frac{\sqrt{1+0}+1}{1+0} = 2$

(iii) Die Folge der Partialsummen konvergiert nach dem Leibnitz-Kriterium: für alle $k \in \mathbb{N}$ ist auch $\sin\frac{1}{k} \in [0,1]$. Außerdem ist $\sin x$ stetig und auf $[0, {}^\pi\!/_2]$ monoton wachsend. Daher ist $\sin\frac{1}{k}$ eine monoton fallende Nullfolge,

$$\lim_{k\to\infty}\sin\tfrac{1}{k} = \sin\Big(\lim_{k\to\infty}\tfrac{1}{k}\Big) = \sin 0 = 0,$$

und das Leibniz-Kriterium findet Anwendung: wir schließen, dass die Folge der Partialsummen konvergiert. Da der erste Term negativ ist, konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin\frac{1}{k}$ gegen ein $c \in (-\infty, 0)$.

5. **Potenzreihen und uneigentliche Integrale** **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{d}s\, \frac{1-\cos(2s^2)}{s^4}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $F(x)$ für $x \neq 0$ existiert.

(ii) Setzen Sie F in $x = 0$ stetig fort.

(iii) Entwickeln Sie F als Potenzreihe um $x = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius an.

(iv) Untersuchen Sie, ob $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{1-\cos(2s^2)}{s^4} = \lim_{x\to\infty} F(x)$ existiert und begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(i) Abseits von der 0 ist der Integrand $s \mapsto \frac{1-\cos 2s^2}{s^4}$ für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig [1]. In $s = 0$ lässt sich der Integrand stetig durch 2 fortsetzen [1], denn

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos 2s^2}{s^4} &= \frac{1-\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(2s^2\right)^{2n}}{s^4} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}}{(2n)!}s^{4n-4} \\ &= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}s^{4n} = \frac{2^2}{2!} + o(s) = 2 + o(s). \qquad [1]\end{aligned}$$

Da F die Stammfunktion einer stetig fortsetzbaren Funktion ist, existiert für $x \neq 0$ das uneigentliche Integral.

(ii) In $x = 0$ setzt man F durch 0 stetig fort, $F(0) = 0$. [1]

(iii) Da man den Integranden als Potenzreihe darstellen kann (siehe Teilaufgabe (i)) und diese für alle $s \in \mathbb{R}$ konvergiert [1], dürfen wir gliedweise integrieren:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^x \mathrm{d}s\, \frac{1-\cos 2s^2}{s^4} \overset{[1]}{=} \int_0^x \mathrm{d}s \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}s^{4n} \\ &\overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}\int_0^x \mathrm{d}s\, s^{4n} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + C\end{aligned}$$

Aus $F(0) = 0$ folgt $C = 0$ und die Potenzreihe ist

$$F(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{2^{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \qquad [1]$$

Die so definierte Potenzreihe konvergiert überall wo die Potenzreihe des Integranden konvergiert, das heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ [1].

(iv) Für $s \neq 0$ kann der Integrand beschränkt werden durch

$$\left|\frac{1-\cos 2s^2}{s^4}\right| \leq \frac{2}{s^4} \qquad [1]$$

und da $\int_1^\infty \mathrm{d}s\, \frac{1}{s^4} = -\frac{1}{3}s^{-3}\Big|_1^\infty = \frac{1}{3}$ endlich ist, existiert nach dem Majorantenkriterium [1] auch

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{1-\cos 2s^2}{s^4}, \qquad [1]$$

denn

$$
\begin{aligned}
0 \leq |F(x)| \leq |F(1)| + |F(x) - F(1)| &\leq \int_0^1 \mathrm{d}x \left|\frac{1-\cos 2s^2}{s^4}\right| + \int_1^x \mathrm{d}s \left|\frac{1-\cos 2s^2}{s^4}\right| \\
&\leq |F(1)| + 2\int_1^x \mathrm{d}s\, s^{-4} \leq |F(1)| + \tfrac{2}{3}\big[-s^{-3}\big]_1^x \\
&= |F(1)| + \tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{3}x^{-3} \leq |F(1)| + \tfrac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

6. **Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit** **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Zeigen Sie, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

Lösung:

Die Lipschitz-Stetigkeit von f bedeutet

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad [1]$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ [1]. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x-y| < \delta$

$$\big|f(x) - f(y)\big| \leq L\,|x-y| < L\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon. \qquad [1]$$

Da δ unabhängig von x und y ist, ist f gleichmäßig stetig [1].

7. **Summierbarkeit und Quadratsummierbarkeit** **[10 Punkte]**

Seien $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Koeffizienten. Zeigen oder widerlegen Sie (mit Begründung):

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert absolut.

☒Wahr [1] ☐ Falsch

Da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, sind die Koeffizienten eine Nullfolge, $a_n \to 0$ für $n \to \infty$ [1]. Daher existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n| < 1$ für alle $n \geq N$ [1]. Dann folgt auch $|a_n|^2 < |a_n|$ für alle $n \geq N$ [1] und somit

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n|^2 < \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| < \infty. \qquad [1]$$

Daher ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{N-1} a_n^2 + \sum_{n=N}^{\infty} a_n^2 \qquad [1]$$

ebenfalls absolut summierbar.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert absolut $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

☐ Wahr ☒Falsch [1]

$a_n = \frac{1}{n}$ ist quadratsummierbar, aber nicht summierbar [1], die Aussage ist falsch:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \qquad [1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \qquad [1]$$

Lösung:

(i) Alernativer Beweis: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge [1] und da konvergente Folgen beschränkt sind, existiert ein $M > 0$ mit $|a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ [1]. Dann folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \overset{[1]}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} M\,|a_n| \overset{[1]}{=} M \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch quadratsummierbar [1].

(ii) Siehe oben.