Theoretische Physik 1 (Mechanik)
Sommersemester 2010
Prof. Ralf Metzler

1 Quickies (10 Punkte)

Beantworten Sie die Fragen und geben Sie eine möglichst kurze Erklärung.

a) Gegeben sei die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta$. Welche Größe ist neben der Energie eine Erhaltungsgröße?

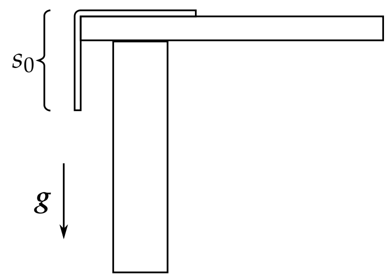
b) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen Oszillators an.

c) Skizzieren Sie das Phasenraumdiagramm eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators mit schwacher Dämpfung.

d) In welcher Richtung (von oben gesehen) präzediert ein schneller, schwerer Kreisel im homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$?

e) Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{p_1, L_3\}$, die aus der ersten kartesischen Komponente des Impulses $\boldsymbol{p}$ und der dritten Komponente des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ eines Massenpunktes gebildet ist.

2 Seil (10 Punkte)



Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil (Gesamtlänge l und Masse M) hängt zu einem Teil der Länge s_0 über die Kante eines Tisches. Es wird in dieser Lage zur Zeit $t = 0$ losgelassen und fängt an, unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ reibungsfrei über die Tischkante abzugleiten.

a) Betrachten Sie die hängende Länge des Seiles $s(t)$ als generalisierte Koordinate und geben Sie die potentielle und kinetische Energie des Seils an. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems $L(s, \dot{s})$ auf. Die Tischoberfläche liege bei $z = 0$.

b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $s(t)$ und geben Sie die Lösung für den Fall $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = 0$ an.

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Seils, wenn das hintere Seilende die Tischkante ereicht hat?

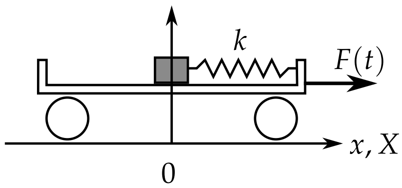
Hinweis: Es gilt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

3 Asteroid (10 Punkte)

Ein Asteroid der Masse m bewege sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne (Masse $M \gg m$). Der kürzeste Abstand zur Sonne sei gleich dem Radius der (kreisförmigen) Erdbahn r_{min} und der größte Abstand sei gleich dem Radius der Jupiterbahn $r_{\text{max}} = 5r_{\text{min}}$. Vernachlässigen Sie alle Effekte der Planeten auf die Asteroidenbahn.

a) Welche Erhaltungsgrößen gibt es für den Asteroiden?
b) Bestimmen Sie das Verhältnis der maximalen zur minimalen Bahngeschwindigkeit des Asteroiden.
c) Bestimmen Sie den Bahndrehimpuls L des Asteroiden als Funktion von r_{max} und r_{min}. Was ist der Bahndrehimpuls der Erde?
d) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit des Asteroiden in Einheiten der Bahngeschwindigkeit der Erde.
e) Wieviele Jahre beträgt die Periode der Bewegung des Asteroiden?

4 Masse auf Wagen (10 Punkte)



Ein Wagen der Masse M rolle reibungsfrei entlang der x-Achse unter dem Einfluss einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$. Auf dem Wagen gleite reibunglos eine Masse m, die durch eine Feder (Federkonstante k) mit dem Wagen verbunden ist. Beide Körper können sich nur entlang der x-Achse bewegen.

Betrachten Sie die Auslenkungen des Wagens $X(t)$ und der Masse $x(t)$ im Laborsystem, in dem im ruhenden Wagen die Gleichgewichtslage der Masse im Ursprung liegt.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $X(t)$.
b) Führen Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinate ein

$$x_{\text{S}} = \frac{mx + MX}{m + M}, \qquad x_{\text{R}} = x - X$$

und geben Sie die Bewegungsgleichungen dafür an.
c) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen für x_{S} und x_{R} mit den Anfangsbedingungen $x(0) = X(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $\dot{X}(0) = 0$ für den Fall verschwindender äußerer Kraft $F = 0$ an.
d) Wie muss die zeitabhängige Kraft $F(t)$ lauten, damit sich der Wagen mit *konstanter* Beschleunigung $\ddot{X} = a$ bewegt? Gehen Sie dazu von den Bewegungsgleichungen für x und X sowie den Anfangsbedingungen $x(0) = X(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{X}(0) = 0$ aus.

5 Bonusaufgabe (3 Punkte)

Ein Fadenpendel mit der Masse m und der Länge l bewege sich im homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ in der x-z-Ebene. Welche Geschwindigkeit muss der Massenpunkt des Pendels in der Gleichgewichtslage mindestens haben, damit eine Kreisbewegung des Pendels möglich ist?