
Klausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti, Dr. B. Ketzer

Sommersemester 2013

26. Juli 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Grundzustands-Wasserstoff-Wellenfunktion

$$\psi_{1,0,0}(r, \phi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

eine Lösung der Schrödinger Gleichung,

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + U(r)\psi = E\psi,$$

mit

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

ist und bestimmen Sie den Ausdruck für $E_{(1,0,0)}$ ($a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$).

Lösung

Da der Grundzustand rotationssymmetrisch ist, ist es nicht nötig, in der Schrödingers Gleichung die Ableitungen nach den Winkeln zu betrachten. Definiere $C := 1/\sqrt{\pi} (Z/a_0)^{3/2}$ und $k := 1/4\pi\epsilon_0$. Dann gilt

$$\frac{\partial \psi_{1,0,0}}{\partial r} = C \frac{\partial}{\partial r} e^{-\frac{Zr}{a_0}} = -C \frac{Z}{a_0} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Multipliziere beide Seiten mit r^2 und erhalte nach Differentiation nach r

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi_{1,0,0}}{\partial r} \right) = -C \frac{Z}{a_0} \frac{\partial}{\partial r} r^2 e^{-\frac{Zr}{a_0}} = \left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^2 \right] C e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

[1]

Setze dies in die Schrödingergleichung ein und erhalte

$$-\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^2 \right] C e^{-\frac{Zr}{a_0}} - \frac{kZe^2}{r} C e^{-\frac{Zr}{a_0}} = E C e^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Nach Auflösen nach E erhält man

$$E = -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[-\frac{2Zr}{a_0} + r^2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^2 \right] - \frac{kZe^2}{r} \quad [1]$$

Nun benutze $a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2}$ und erhalte

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\hbar^2}{2mr^2} \left[-\frac{2mke^2Zr}{\hbar^2} + r^2 \left(\frac{Zmke^2}{\hbar^2} \right)^2 \right] - \frac{kZe^2}{r} = \frac{kZe^2}{r} - \frac{Z^2k^2e^4m}{2\hbar^2} - \frac{kZe^2}{r} \\ &= -\frac{Z^2k^2e^4m}{2\hbar^2} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \end{aligned}$$

Dies ist die korrekte Grundzustandsenergie, daher ist gezeigt, dass die angegebene Funktion für die Schrödinger-Gleichung mit Potenzialenergiefunktion $U(r)$ ist.

[1]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Teilchen in einem unendlich hohen, eindimensionalen Kastenpotential ($V(x) = 0$ für $0 < x < L$) der Länge L ist im ersten angeregten Zustand ($n = 2$).

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\psi(x)^2$ an und zeichnen Sie die Funktion gegen x für diesen Zustand.
- Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle$ für diesen Zustand.
- Wie wahrscheinlich ist es, das Teilchen in einem schmalen Bereich dx um $x = L/2$ herum zu finden?
- Erklären Sie kurz, warum die Ergebnisse von den Teilaufgaben b) und c) nicht im Widerspruch zueinander stehen.

Lösung

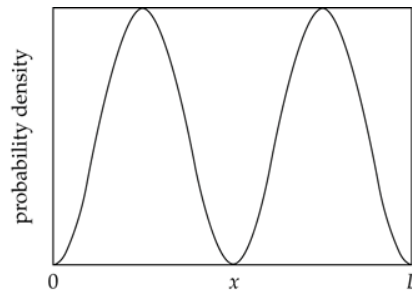
- Drücke die Wellenfunktion für ein Teilchen in seinem ersten angeregten Zustand aus und erhalte

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

Gleichbedeutend dazu ist $\psi_2^2(x) = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L}$.

[1]

[1]



(b) Es gilt

$$\langle x \rangle = \int_0^L \frac{2x}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx$$

Führe die Substitution $\theta = \frac{2\pi x}{L}$ ($x = L\theta/2\pi$, $d\theta = 2\pi dx/L$, $dx = L d\theta/2\pi$, Grenzen 0 und 2π) durch und erhalte

$$\langle x \rangle = \frac{L}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \theta \sin^2 \theta d\theta$$

Man erhält durch Anwenden der Additionstheoreme für den Sinus eine Stammfunktion für den Integranden und erhält

$$\langle x \rangle = \left[\frac{\theta^2}{4} - \frac{\theta \sin 2\theta}{4} - \frac{\cos 2\theta}{8} \right]_0^{2\pi} = \frac{L}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) = \frac{L}{2}$$

[2]

(c) Es gilt

$$P(x) = \psi_2^2(x) = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{2\pi x}{L} dx$$

Erhalte

$$P\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{2}{L} \sin^2 \frac{2\pi}{L} \cdot \frac{L}{2} = \frac{2}{L} \sin^2 \pi = 0$$

Damit folgt auch $P(L/2) dx = 0$.

[1]

(d) Die Antworten zu den beiden vorangegangenen Teilaufgaben sind nicht widersprüchlich. Die zweite Teilaufgabe liefert, dass der Erwartungswert der Position des Teilchens bei $L/2$ liegt. Dies sagt nichts darüber aus, ob dieser Wert auch angenommen wird.

[1]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Die Pickering-Serie des Spektrums von He^+ (einfach ionisiertem Helium) besteht aus den Spektrallinien für Übergängen in den $n = 4$ -Zustand von He^+ . In Experimenten findet man, dass jede zweite Spektrallinie der Pickering-Serie nahezu identisch mit einer Spektrallinie der Balmer-Serie für Wasserstoff-Übergänge in den $n = 2$ Zustand ist.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Formeln, warum dies so ist.

- (b) Berechnen Sie die Wellenlänge eines Übergangs von $n = 6$ zu $n = 4$ von He^+ , und zeigen Sie, dass diese Wellenlänge zu einer Wellenlänge der Balmer-Serie passt.
- (c) Neutrale Heliumatome (mit zwei Elektronen) können in zwei Arten vorliegen, Ortho- und Parahelium. Wie unterscheiden sich diese beiden Arten? Wie kann man diesen Unterschied experimentell feststellen? Geben Sie spektroskopischen Symbole für den jeweils energetisch günstigsten Zustand an. Warum gibt es keinen 1^3S_1 -Zustand?

Lösung

- (a) Es gilt mit der Rydberg-Konstante E_0 , dass die Energieniveaus eines Atoms gegeben sind durch

$$E_n = -Z^2 \frac{E_0}{n^2}$$

Für He^+ ist $Z = 2$ und es ergibt sich hier speziell $E_n = -4E_0/n^2$.

Daher wird ein Energieniveau mit gerader Hauptquantenzahl n in He^+ dieselbe Energie haben wie ein Niveau mit Quantenzahl $n/2$ für H. Daher wird ein Übergang zwischen Niveaus $2m$ und $2p$ in He^+ nahezu dieselbe Energie haben wie ein Übergang zwischen Niveau m und p für H. Insbesondere werden Übergänge von $2m$ nach $2p = 4$ in He^+ dieselben Energien haben wie Übergänge von m nach $n = 2$ in H (die Balmer-Serie).

[2]

- (b) Übergänge zwischen diesen Energieniveaus ergibt sich aus der Emission oder Absorption eines Photons, dessen Wellenlänge bestimmt wird durch

$$\lambda = \frac{hc}{E_6 - E_4}$$

Für E_6 und E_4 erhält man die Werte

$$E_6 = -4 \left(\frac{13,6 \text{ eV}}{6^2} \right) = -1,51 \text{ eV}$$

$$E_4 = -4 \left(\frac{13,6 \text{ eV}}{4^2} \right) = -3,40 \text{ eV}$$

Einsetzen ergibt

$$\lambda = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{-1,51 \text{ eV} - (-3,40 \text{ eV})} = 656 \text{ nm}$$

was derselbe Wert wie der für den $n = 3$ -zu- $n = 2$ -Übergang für H ist.

[2]

- (c) Para- und Ortho-Helium unterscheiden sich durch die relative Stellung ihrer Spins, die sich einmal zu $S = 0$ (Para-Helium) und $S = 1$ (Ortho-Helium) zusammensetzen.

[1]

Im Para-Helium beobachtet man im Gegensatz zu Ortho-Helium keine Feinstruktur (alle Linien sind einfach), da die beiden Spins der Elektronen antiparallel sind und sich deshalb vektoriell zu $S = 0$ zusammensetzen. Generell liegen die Triplett-Zustände energetisch niedriger als die Singulett-Zustände, weil durch die symmetrische Ortswellenfunktion die positive Coulomb-Wechselwirkung für die Triplett-Zustände kleiner ist.

[1]

Para-Helium: 1^1S_0 (Elektronverteilung: $(1s)^2$)

Ortho-Helium: 2^3S_1 (Elektronverteilung: $(1s)^1(2s)^1$).

[1]

Der Zustand 1^3S_1 mit Elektronenverteilung $(1s)^2$ fehlt bei Ortho-Helium wegen des Pauliverbots.

[1]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Um einen Phosphorkern, (P^{15+} , $Z = 31u$) kreist

- ein Elektron
- ein π^- -Meson ($m_\pi \approx 272m_e$)
- ein Antiproton

Berechnen Sie den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand.

Lösung

- Es gilt hier $r_n = n^2 a_0 / Z$, $E_n = -(Z^2 E_R / n^2)$, $E_\infty = E_R = 13,6\text{eV}$.

[1]

Für $n = 1$, $Z = 15$ ergibt sich $r_1(P) = 3,53 \cdot 10^{-12}\text{m}$, $E_1(P) = 3,04\text{keV}$.

[1]

- Hier ergibt sich, da $a_0^\pi = \frac{a_0}{272}$ oder $a_0^\pi = \left(1 + \frac{m_\pi}{M_P}\right) \frac{a_0}{272}$ und $E_R^\pi = 272E_R$, dass $r_1^\pi(P) = 1,298 \cdot 10^{-13}\text{m}$ oder $r_1^\pi(P) = 1,304 \cdot 10^{-13}\text{m}$ und $E_1^\pi(P) = 832\text{keV}$ oder $E_1^\pi(P) = 828\text{keV}$ mit reduzierter Masse gerechnet.

[1]

- Hier gilt

$$r_1^{p^-} = \frac{m_e}{m_p} \frac{a_0}{Z} \left(1 + \frac{m_p}{M_P}\right) = 1,98 \cdot 10^{-15}\text{m}$$

und

$$E_1^{p^-}(P) = -\frac{m_p}{m_e} E_R \frac{Z^2}{n^2} \frac{M_P}{M_P + m_{p^-}} = 5,45\text{MeV}$$

wobei hier die reduzierte Masse einen Unterschied von 3% ausmacht.

[2]

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Das Ca^+ -Ion emittiert Licht der Wellenlänge 393,4 nm beim Übergang von $4^2P_{3/2}$ auf das $4^2S_{1/2}$ - bzw. 396,9 nm beim Übergang vom $4^2P_{1/2}$ auf das $4^2S_{1/2}$ -Niveau.

- Skizzieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus in einem schwachen Magnetfeld in einer Zeichnung und beschriften Sie die Niveaus mit den relevanten Quantenzahlen. Geben Sie die Größe der Aufspaltung der benachbarten Niveaus in Einheiten von $\mu_B B$ an. Zeichnen Sie alle erlaubten Übergänge für elektrische Dipolstrahlung unter Berücksichtigung der Auswahlregeln ein.
- Bei diesem Experiment kann man parallel und senkrecht zum Magnetfeld Strahlung beobachten. Beschreiben Sie die beobachtete Strahlung und geben Sie eine Erklärung für ihr Entstehen im Einzelnen.

Lösung

- Da es sich um ein schwaches Magnetfeld handelt, liegt hier genau der (anormale) Zeeman-Effekt vor. Dabei erfährt das Elektron durch das Magnetfeld $\mathbf{B} = B\vec{e}_x$ die energetische Verschiebung

$$V_{l,s,j,m_j} = -(\vec{\mu}_j)_j \cdot \mathbf{B} = -(\vec{\mu}_j)_{j,z} B$$

mit dem magnetischen Moment $(\vec{\mu}_j)_{j,z} = m_j g_j \mu_B$ und dem Landé-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Für gegebene l, s, j ist also der energetische Unterschied zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zuständen $m_j, m_j + 1$ gegeben durch

$$\Delta E_{m_j, m_j+1}^{l,s,j} = \left[1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \right] \cdot \mu_B B, m_j = -j, \dots, j$$

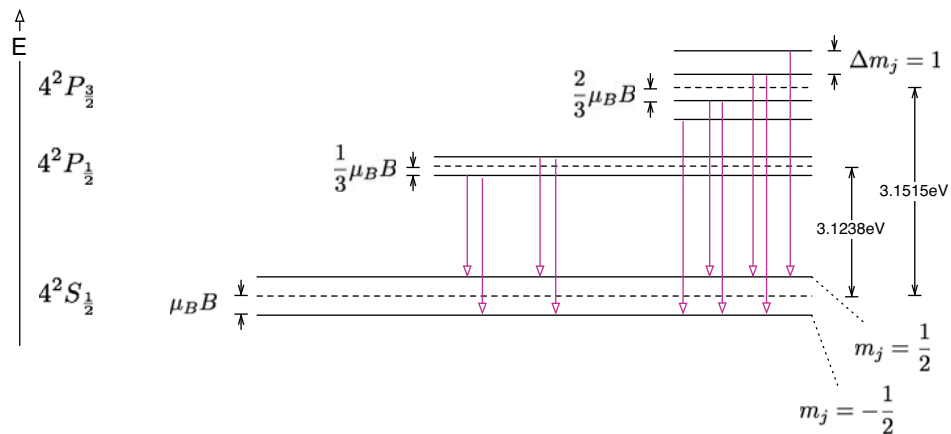
Speziell für den vorliegenden Fall ergeben sich die in Tabelle (a) aufgelisteten Werte

$\mathbf{n^{2s+1}L_j}$	$\Delta_{m_j, m_j+1}^{l,s,j} [\mu_B B]$
$4^2S_{\frac{1}{2}}$	2
$4^2P_{\frac{1}{2}}$	2/3
$4^2P_{\frac{3}{2}}$	4/3

[2]

Unter Berücksichtigung der Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1, \Delta m_l = 0, \pm 1, \Delta j = 0, \pm 1, \Delta m_j = 0, \pm 1$ ist in Abbildung (a) gegeben.

[3]



- (b) Es werden zwei Arten von zirkular polarisiertem Licht parallel zum Magnetfeld und drei Arten Senkrecht zur Magnetfeldausrichtung beobachtet.

[1]

Das Auftreten unterschiedlicher Polarisationen ist eine Folge der Drehimpulserhaltung des Gesamtsystems bei Strahlungsübergängen. Der Gesamtimpuls des Systems muss bei der Emission erhalten bleiben. Ein zirkular polarisiertes Photon besitzt einen Drehimpuls $\pm\hbar$. Ein linear polarisiertes Photon kann als Überlagerung aus einem links- und einem rechts-zirkular polarisierten Licht beschrieben werden.

$\Delta m = \pm 1$ zirkular polarisierte Strahlung

$\Delta m = 0$ linear polarisierte Strahlung erhalten.

[1]

Der Drehimpuls des Photons zeigt in Ausbreitungsrichtung. Deshalb beobachtet man parallel zum Magnetfeld zirkuläres Licht. $\Delta m = 0$ strahlt wie ein Hertzscher Dipol und emittiert deshalb nicht parallel zur Feldrichtung. Senkrecht zur Schwingungsrichtung wird linear polarisierte Strahlung emittiert. Zusätzlich findet man noch zwei linear polarisierte Strahlungen senkrecht zur Feldrichtung deren Polarisationsrichtung um 90° gedreht ist. Dies ist zirkular polarisierte Strahlung die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung linear polarisiert erscheint.

[1]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Die Breite einer Absorptionslinie kann durch die Wechselwirkungszeit des Atoms mit der Lichtwelle begrenzt sein. Wie groß müsste die Wechselwirkungszeit mindestens sein, wenn man bei dem Ca-Übergang $^1S_0 \rightarrow ^3P_1$ ($\lambda = 657,46\text{nm}$) eine Linienbreite von 3kHz erreichen will? Das obere Niveau hat eine Lebensdauer von $\tau = 0,39\text{ms}$.

Wie lang müsste die Wechselwirkungszone in einem Ca-Atomstrahl sein, wenn der selbe Prozess bei einer Ofentemperatur von $T = 900\text{K}$ passiert?

Hinweis: $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$

Lösung

Die natürliche Linienbreite des Ca-Übergangs ist

$$\delta v_n = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{10^4}{2\pi \cdot 3,9} \text{s}^{-1} = 4,1 \cdot 10^2 \text{s}^{-1} = 410 \text{Hz}$$

[1]

Die Wechselwirkungszeit ΔT müsste größer sein als

$$\Delta T \geq \frac{1}{2\pi\Delta v} = \frac{1\text{s}}{2\pi \cdot 3 \cdot 10^3} = 53 \mu\text{s}$$

um eine Linienbreite von $\Delta v = 3\text{kHz}$ zu erreichen. Die natürliche Linienbreite spielt dabei wegen $\delta v_n \ll \Delta v$ keine Rolle.

[1]

Bei einer Ofentemperatur von $T = 900\text{K}$ ist die mittlere Geschwindigkeit der Ca-Atome

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 9 \cdot 10^2}{\pi \cdot 40 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}} \text{m/s} \\ &= 690 \text{m/s} \end{aligned}$$

[1]

Die Mindestlänge der Wechselwirkungszone ist dann

$$\begin{aligned} \Delta s &= \bar{v}\Delta T \\ &= 6,9 \cdot 10^2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-5} \text{m} \\ &= 3,7 \cdot 10^{-2} \text{m} \end{aligned}$$

[1]

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Ein HCl-Molekül kann sowohl zu Schwingungen als auch Rotationen angeregt werden. Die Energie der Schwingungs-Rotationszustände ist gegeben durch

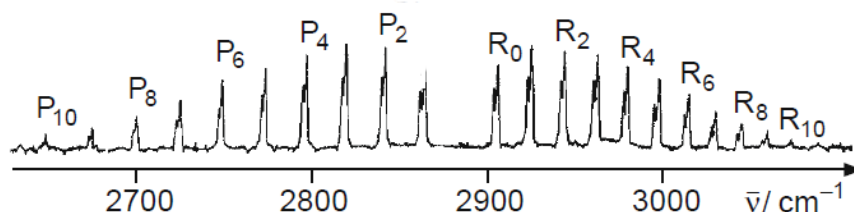
$$E = E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} = \hbar\omega \left(v + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} \cdot j(j+1)$$

- (a) In der Abbildung sehen Sie ein gemessenes Spektrum Schwingungsrotationszustände. Es zerfällt in zwei Teile, den P-Zweig und den R-Zweig. Was charakterisiert P-Übergänge bzw. R-Übergänge? Zeichnen Sie die erlaubten Übergänge in ein Energieniveauschema für $v = 1, 2$ und $j = 0, 1, 2, 3$. Warum gibt es keinen Peak bei $\bar{\nu} = 2880\text{cm}^{-1}$? Welchem Übergang würde dieser Peak entsprechen? Warum ist dieser Übergang nicht erlaubt?

Hinweis

$$\Delta v = \pm 1$$

$$\Delta j = \pm 1$$



- (b) Berechnen Sie wie groß der Abstand R der beiden Atome im Molekül ist ($m_{\text{Cl}} = 35,45u$). Bestimmen Sie dazu den mittleren Abstand der Absorptionspeaks aus der Messung.
- (c) Die Absorptions-Peaks haben eine Doppelstruktur. Warum ist das so?

Lösung

- (a) • P-Zweig: $\Delta j = -1$; R-Zweig: $\Delta j = +1$. Im P-Zweig nimmt die Absorptionsenergie mit sinkendem j , im R-Zweig mit steigendem j zu.

[1]

- Der Übergang $J = 0 \rightarrow J = 0$ ist verboten. Diese Linie fehlt.

[1]

[2]

- (b) Der Kernabstand kann aus dem Energieintervall zwischen den Rotationspeaks bestimmt werden. Zwischen $\bar{\nu} = 3000\text{cm}^{-1}$ und $\bar{\nu} = 2700\text{cm}^{-1}$ befinden sich ≈ 14 Peaks. Der mittlere Abstand ist dann

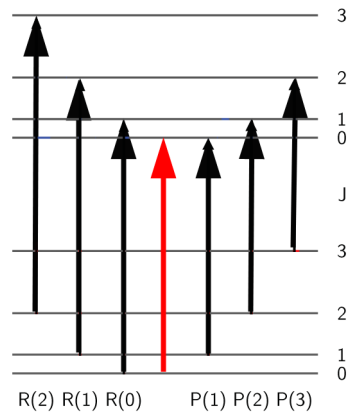
$$\Delta \bar{\nu} = \frac{3000\text{cm}^{-1} - 2700\text{cm}^{-1}}{14} = 21,4\text{cm}^{-1}$$

Daraus erhält man den Kernabstand:

$$R = \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi c M \Delta \nu}}$$

also $R = 1,3\text{\AA}$.

[2]



- (c) Chlor kommt in der Natur in zwei Isotopen vor: ^{35}Cl (75,5%) und ^{37}Cl (24,5%). Die Massenunterschiede führen zu unterschiedlichen Trägheitsmomenten und damit zu verschobenen Absorptionspeaks im Rotationsspektrum.

[1]

Konstanten

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{As/Vm}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e}$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

$$\alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2x}{4} - \frac{\cos 2x}{8} \right]$$