Probeklausur Lineare Algebra ~~Verbesserung~~ Lösung 15. Januar '17

TUM

① 1. richtig (alle Vielfachen)

2. falsch ZB $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

3. falsch (genau dann, wenn $fg = gf$; wähle etwa $g = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$)

4. richtig (A ist invertierbar, wenn $\det A \neq 0$)

5. richtig (Übungsaufgabe)

6. falsch (es gilt: ähnlich => gleiche Det, aber nicht andersrum)

7. falsch ($0 \notin$ Lösungsmenge)

8. richtig ($\chi(AB) = \chi(BA)$ (Übungsaufgabe))

9. falsch (zB für A beliebig und B = A)

②!

a) Es ist $f(X) = (1,1)$ $f(1) = f(x^2) = f(x^3) = f(x^4) = (1,0)$

$M_f = \begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$ (Darstellungsm. bzgl. Basen $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ und $\{e_1, e_2\}$)

b) M_f äquivalent zu $\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&0&0&0\end{pmatrix}$, also Rang $= 2$

Es gilt $\dim(\ker f) = \dim \mathbb{R}[X]_{\leq 4} - \operatorname{rg} f = 5 - 2 = 3$

Weiter sind $1-x^2, 1-x^3, 1-x^4 \in \ker f$ und $1-x^2, 1-x^3, 1-x^4$ sind lin. unabh.

$(a(1-x^2) + b(1-x^3) + c(1-x^4) = r - ax^2 - bx^3 - cx^4 = 0,\ r \in K)$

Also gilt $\ker f = \langle 1-x^2, 1-x^3, 1-x^4 \rangle$

③ $A = \begin{pmatrix}3&1&1&4\\\lambda&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{pmatrix}$

man darf Zeilen/Spalten operationen beim Rang mischen

λ „nach hinten"!

a) Rang von A:

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&4&3\\4&10&1&\lambda\\7&17&3&1\\2&4&3&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&4&3\\0&6&-15&\lambda-12\\0&10&-25&-20\\0&2&-5&-4\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&4&3\\0&1&-\frac{5}{2}&-2\\0&0&0&\lambda\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ => Rang(A) = 3

$\lambda \neq 0$

Rang(A) = 2

$\lambda = 0$

b) zum B.: Argument über Gaußalgorithmus (in $\mathbb{R}$ kommt das gleiche raus, wie über $\mathbb{Q}$)

oder: Falls $v \in \operatorname{im}(A_{\mathbb{Q}})$, dann auch $v \in \operatorname{im}(A_{\mathbb{R}})$

Falls $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ linear unabh.

so sind sie auch in $\mathbb{R}$ lin. unabh. $\Rightarrow \operatorname{rg}(A_{\mathbb{Q}}) \leq \operatorname{rg}(A_{\mathbb{R}})$

Falls $v \in \ker(A_{\mathbb{Q}})$, dann auch $v \in \ker(A_{\mathbb{R}})$.

Gleichheit

Also $\dim(\ker(A_{\mathbb{Q}})) \leq \dim(\ker(A_{\mathbb{R}})) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A_{\mathbb{Q}}) \geq \operatorname{rg}(A_{\mathbb{R}})$

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A_{\mathbb{Q}}) = \operatorname{rg}(A_{\mathbb{R}})$

ICH WILL'S SICHER!
www.it.tum.de/sicher

(4)
$$A=\begin{pmatrix} 2&3&4&5&6&7\\ 7&2&3&4&5&6\\ 6&7&2&3&4&5\\ 5&6&7&2&3&4\\ 4&5&6&7&2&3\\ 3&4&5&6&7&2 \end{pmatrix}$$

Zeigen: $\det(A)$ ist durch $729=3^6$ teilbar

Gaußalgorithmus: Typ III Operationen ändern Det nicht.

Schreibe die Summe aller 6 Zeilen in die 6. Zeile und für $i=3,4,5$ die Summe der $i-2, i-1$ und i-ten Zeile in die i-te Zeile und erhalte B.

$$B=\begin{pmatrix} 2&3&4&5&6&7\\ 7&2&3&4&5&6\\ 15&12&9&12&15&18\\ 18&15&12&9&12&15\\ 15&18&15&12&9&12\\ 27&27&27&27&27&27 \end{pmatrix},$$

wegen Multilinearität gilt

$\det(A)=\det(B)=729\cdot\det(C)$

$3\cdot3\cdot3\cdot27=3^6$

wird „hier" rausgezogen

für
$$C=\begin{pmatrix} 2&3&4&5&6&7\\ 7&2&3&4&5&6\\ 5&4&3&4&5&6\\ 6&5&4&3&4&5\\ 5&6&5&4&3&4\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

(5) $f,g: V\to V$ und $f+g=id_V$, K ein Körper und V ein K-Vektorraum

a) Zeige: es gilt: $V=\operatorname{im} f+\operatorname{im} g$

Bew.: Sei $v\in V$, dann ist $v=id_V=(f+g)(v)=f(v)+g(v)$

mit $f(v)\in \operatorname{im} f$ und $g(v)\in\operatorname{im} g$. Also $V\subseteq \operatorname{im} f+\operatorname{im} g$

Da $\operatorname{im} f\subseteq V$, $\operatorname{im} g\subseteq V$ gilt auch $\operatorname{im} f+\operatorname{im} g\subseteq V$

b) falls $\operatorname{im} f\cap \operatorname{im} g=0$, dann gilt $f\circ f=f$, $g\circ g=g$ sowie $f\circ g=g\circ f=0$

Bew. Sei $v\in V$. Es gilt $f(g(v))\in\operatorname{im} f$, weiter gilt $f(g(v))=(id-g)(v-f(v))$

$=v-v+g(f(v))=g(f(v))\in\operatorname{im} g$

Es folgt $f(g(v))=0$ und analog $g(f(v))=0$.

Weiter $f\circ f=(id-g)\cdot f=f-g\circ f$, analog $g\circ g=g$

(6) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

a) char. Polynom
b) Eigenwerte über $\mathbb{Q}$
c) Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$
d) Ist A diagonalisierbar? Triagonalisierbar?

a) $\chi(A) = \begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ 4 & x-6 & 12 \\ 2 & -2 & x+4 \end{vmatrix}$

$= x(x-6)(x+4) - 48 - 24 - 6(x-6) + 24x + 8(x+4)$

$= x^3 - 2x^2 - 24x - 4 + 26x = x^3 - 2x^2 + 2x - 4 = (x-2)(x^2+2)$

b) Der einzige rat. Eigenwert ist $\lambda = 2$ mit Vielfachheit 1.

c) $\ker(\lambda I - A)$ $\quad \lambda I - A = 2I - A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 12 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ zB $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Lsg, Also $E_2(A) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

d) Weder triagonalisierbar, noch diagonalisierbar, da nur ein Eigenwert. ($\lambda = 2$)

ICH WILL'S SICHER!
www.it.tum.de/sicher