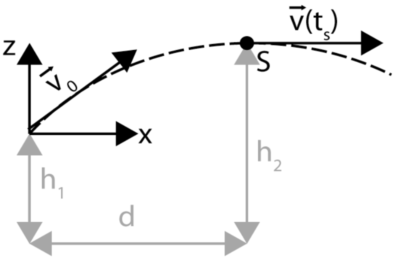
Musterlösung zur Klausur E1 Wintersemester 2011/12

Aufg.1 Volleyball

a) Bahnkurve:



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \cdot t \\ h_1 + \mathbf{v}_z \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

Im Scheitelpunkt gilt $\dot{z}(t_S) = \mathbf{v}_z(t_S) = 0$,bzw $\mathbf{v}_z(0) - g t_S = 0$, einsetzen in z(t):

$$h_2 - h_1 = \Delta h = \frac{\mathbf{v}_z^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{\mathbf{v}_z^2}{g^2} \rightarrow \mathbf{v}_z = \sqrt{2\Delta h g} \quad , \; t_S = \sqrt{2\Delta h / g} \qquad \mathbf{v}_x = d\sqrt{g / 2\Delta h}$$

$$\tan\alpha = \frac{\mathbf{v}_z}{\mathbf{v}_x} = \frac{2(h_2 - h_1)}{d} ; \qquad |\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_z^2} = \sqrt{2g(h_2 - h_1) + \frac{g \cdot d^2}{2(h_2 - h_1)}}$$

Aufg2: Apfellooping

a) Impulserhaltung

$$m_S \cdot \mathbf{v}_S = (m_A + m_S) \cdot \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{v}_A = \frac{m_S \mathbf{v}_S}{m_A + m_S} = (15g \cdot 60\, m/s) / 210g = 4{,}3 \frac{m}{s}$$

b) Energieerhaltung

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^2 = 2mgL + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{oben}^2$$

Die Mindestgeschwindigkeit muss $F_Z = F_G$ erfüllen, also

$$\frac{m\mathbf{v}_{\min}^2}{L} = mg \Rightarrow \mathbf{v}_{\min} = \sqrt{Lg} = \sqrt{0{,}40m \cdot 10 \frac{m}{s^2}} = 2\frac{m}{s}$$

Damit Apfel auf Kreisbahn bleibt:

$$\mathbf{v}_A \geq \sqrt{4gL + \mathbf{v}_{\min}^2} = \sqrt{4 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 0{,}4m + 4 \frac{m^2}{s^2}} = 4{,}5 \frac{m}{s}$$

$\Rightarrow$ Der Apfel schafft es gerade nicht.

Aufg.3 Gravitationsfeld

a) Die Gravitationskraft im Inneren einer homogenen Kugel wächst linear.
Mit der Randbedingung $F_G(R)$=mg erhält man

$$F_G(r) = -mg\frac{r}{R}$$

b) Energieerhaltung: $E_{pot}(R) = E_{kin\ \max}$

$$\int_0^R mg\frac{r}{R}dr = \frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2_{\max}$$

$$\mathbf{v}_{\max} = \sqrt{gR} = 8000\frac{m}{s}$$

c) Der Stein schwingt harmonisch, da lineares Kraftgesetz F=-Dr, mit D=mg/R

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} = \sqrt{\frac{10\,m/s^2}{6400\,km}} = \qquad => \qquad T_{1/2} = \frac{\pi}{\omega_0} = 2512s$$

Aufg. 4: ***Gravitationsgetriebener Ventilator***

a) Bewegungsgleichung für Drehbewegungen

$$I\ddot{\phi} = D \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{F_{ext}R_Z}{I}$$

b) Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders ist

$$I_Z = M_z R_z^2$$

$$\dot{\phi}(t) = \frac{F_{ext}}{M_z R_z}t = \frac{1N\cdot 1s}{1000g\cdot 10cm} = 10\,s^{-1}$$

c) Die Dichte des Flügels ist:

$\rho = \dfrac{M_V}{\alpha R_V^2 d}$ (α im Bogenmaß!), dann folgt für das Trägheitsmoment

$$I_V = 2\int_0^d\int_0^\alpha\int_0^R \rho r^2 r\,dr\,d\varphi\,dz = 2\rho\cdot d_Z\cdot\alpha\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_V} = \frac{1}{2}M_V R_V^2$$

$$I_V = \frac{1}{2}\cdot 0.2kg\cdot(0.2m)^2 = 0.004kg\cdot m^2$$

d) Wenn der Ventilator von einer Masse, m, getrieben wird, darf die Trägheit der ziehenden Masse nicht vernachlässigt werden. Wenn z(t) die nach unten gerichtete Variable der ziehenden Masse ist, folgt $z(t) = -R_z\cdot\varphi(t)$ und die Kraftgleichung im Seil lautet

$$I/R_Z\cdot\ddot{\varphi} - m\cdot\ddot{z} = mg$$

und damit die Bewegungsgleichung des gravitationsgetriebenen Ventilators

$\left[I + m\cdot R_Z^2\right]\cdot\ddot{\varphi} = R_Z\cdot mg$, wobei $I=I_Z+I_V$ (mit Ventilator) oder $I=I_Z$ (ohne Ventilator) das Gesamtträgheitsmoment ist.

Aufg.5 ***Schwingende Blattfeder***
a)
$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0$ Exponentialansatz $x(t)=C\cdot\exp\lambda t$ =>
$\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2=0 \quad \Rightarrow \lambda_{1/2}=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

b) Für $\omega_0 >> \gamma$ folgt näherungsweise eine gedämpfte Schwingung
$x(t)=C\cdot e^{-\gamma t}\cdot e^{i\omega_0 t}$
Die Amplitude fällt zum Zeitpunkt, t_e, mit $-2=-\gamma t_e$ auf $1/e^2$ ab.
Die Anzahl Schwingungen in der Zeit t_e ist:
$$N=\frac{\omega_0\cdot t_e}{2\pi}=\frac{\omega_0}{\pi\cdot\gamma}=\frac{100s^{-1}}{\pi\cdot 1s^{-1}}=31.8$$
(lässt sich auf 31 ganze Schwingungen abrunden oder 32 aufrunden)

c) Für die Stokessche Reibung gilt $\gamma_{Stokes}\propto R$,
Wegen b) halbiert sich die Anzahl Schwingungen

d) Die Federkonstante des sich biegenden Balkens skaliert $D_B\propto L^{-3}$
Wegen $\omega_0=\sqrt{D/m}$, skaliert dann $N(L)\propto\omega_0\propto L^{-3/2}$
Also nimmt die Anzahl Schwingungen um den Faktor $2\sqrt{2}$ ab

Aufg. 6: ***Springbrunnen***

a) Zur Vereinfachung wird angenommen, dass der Aussendruck $p_{Aussen}=0$ ist. Dann ist der hydrostatische Druck am Boden des Fasses (Hahn zu) :
$$p_{stat}=p_{Öl}+p_{Wasser}$$
$$gh_{Ö}\rho_{Ö}+gh_W\rho_W=gh_1\rho_W$$
$$h_1=h_{Öl}\frac{\rho_{Öl}}{\rho_{Wasser}}+h_{WasserFass}=4m\cdot 0.7+2m=4.8m$$

b) Geschwindigkeit des austretenden Wassers
$$p_{stat}=gh_1\rho_W=\frac{1}{2}\rho_W\mathbf{v}^2$$
$$\mathbf{v}=\sqrt{2gh_1}=\sqrt{2\cdot 10ms^{-2}4,8m}\approx 9.8\frac{m}{s}$$

c) Höhe der austretenden Fontäne $h_2=h_1=4.8m$

d) Für die ideale Flüssigkeit (Bernoulli):
$$p_{Fass}=p_{Rohr}+\frac{1}{2}\rho_W\mathbf{v}_{Rohr}^2=p_{Aussen}+\frac{1}{2}\rho_W\mathbf{v}_{Austritt}^2$$
Da der Querschnitt der Öffnung gleich dem Querschnitt des Seitenrohres ist folgt $v_{Rohr}=v_{Austritt}$
Mit Aussendruck $p_{Aussen}=0$, ist auch der hydrostat. Druck im Seitenrohr Null, $h_1^*=0$.

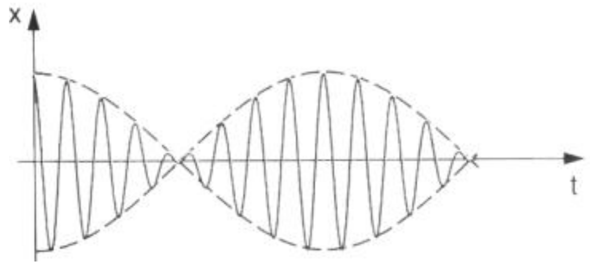
Aufg.7 ***Schwingungen und Wellen***

a) mit λ_1=2L=0.6m (Grundmode) folgt λ_2=λ_1 /2=0.3m, λ_3=λ_1 /3=0.2m

b) $f_n = \frac{\mathbf{v}}{\lambda_n} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \cdot \frac{1}{\lambda_n}.$

2. Mode: f_A (2)= 1202 Hz (A) oder 1190Hz (für g=9.81)
3. Mode: f_B (3)= 1204 Hz (A) oder 1193Hz (für g=9.81)

c) Schwebung. $\xi(t) = 2A\cos\left(2\pi \frac{f_2 + f_1}{2}\right)\cos\left(2\pi \frac{f_2 - f_1}{2}\right)$
(oder entsprechende phasenverschobene Ausdrücke)



Für die Modulation gilt dt= 1/(f_B(2)-f_A(3)), da hier nur zwischen laut und leise (Amplitude maximal und Einschnürung) unterschieden wird. Die Zeitintervalle sind 0.5s.

Musterlösung *Bonusfragen*

a) Eigenmoden des linearen CO_2-Moleküls:

O=C=O

1. Symmetrische Streckschwingung ← • →
2. Asymmetrische Streckschwingung → ← →
3. Transversale Kippschwingung (2-fach entartet) ↑ ↓ ↑

Von den transversalen Kippschwingungen gibt es zwei Moden, weil das Molekül auch aus der Zeichenebene schwingen kann.

b) Güte = Maß für die Dämpfung des Resonators, d.h. für das Verhältnis von gespeicherter zur umgesetzer Verlustenergie

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\left|\left(\frac{dE}{dt}\right)_t \cdot T\right|} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

c) Präzession des Kreisel im Schwerefeld (hier M:Drehmoment)