Lösung zur Klausur Analysis 3 – HM4, 24.01.03

Aufgabe 1

a) Es gilt:

$$\begin{aligned} dG &= dU + pdV + Vdp - (TdS + SdT) \quad 1 \\ &= -pdV + TdS + pdV + Vdp - (TdS + SdT) \qquad \text{wegen (1)} \\ &= Vdp - SdT. \quad 1 \end{aligned}$$

b) Aus a) folgt mit dT=0 direkt, daß $dG = Vdp$ ist. 1

c) Da U zweimal stetig differenzierbar ist, gilt $0 \overset{1}{=} d(dU) = d(-pdV + TdS) = -dp \wedge dV + dT \wedge dS$, also $dT \wedge dS = dp \wedge dV = -dV \wedge dp$, da $\wedge$ alternierend ist. 1

Aufgabe 2

Sei $h(x,y) := 2xy$, $g(x,y) := y^2 - 1/x$, $x > 0, y \in \mathbb{R}$.

a) Damit lautet die Differentialgleichung

$$h(x,y)y' + g(x,y) = 0, \;\; x > 0, \;\; y(1) = 1.$$

1 Die Menge $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ ist einfach zusammenhängend, h und g sind stetig differenzierbar und $h_x(x,y) = 2xy = g_y(z,y)$. Damit ist die Differentialgleichung nach einem Satz der Vorlesung exakt. 1

b) Zu finden ist eine Stammfunktion F mit $F_x = g$ und $F_y = h$. Aus der zweiten Gleichung erhält man durch Integration nach y:

$$F(x,y) = xy^2 + C(x) \qquad 1$$

mit einer Funktion C, die nur von x abhängt. Es folgt

$$y^2 - 1/x = g(x,y) = F_x(x,y) = y^2 + C'(x), \qquad 1$$

und damit $C'(x) = -1/x$, also etwa $C(x) = -\ln(x)$. Somit ist $F(x,y) = xy^2 - \ln(x)$. 1

Für eine Lösung y der Differentialgleichung gilt nun, daß die Menge $\{(x, y(x)) : x \in Def(y)\}$ auf einer Höhenlinie von F liegt, das heißt es gibt ein $\gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\gamma = F(x, y(x)) = xy(x)^2 - \ln(x) \quad \text{f. alle} \quad x \in Def(y). \qquad 1$$

Also $y(x) = \sqrt{(\gamma + \ln x)/x}$ oder $y(x) = -\sqrt{(\gamma + \ln x)/x}$. 1 Da $y(1) = 1$ ist, ist $\gamma = 1$ und $y(x) = \sqrt{(1 + \ln x)/x}$. 1

Bemerkung: Falls nur eine Stammfunktion für g und h bestimmt wird und damit die Exaktheit der Differentialgleichung begründet wird (das ist ja sogar die Definition für exakt), ist das korrekt und gibt bei a) die volle Punktzahl.

Aufgabe 3

Da der Anfangswert $x_0 = 0$ ist, ist die Lösung zu diesem Anfangswert maximal für $x \in (-1, 1)$ definiert.

1 Trennung der Variablen: $y'/y^2 = 2x/(1-x^2)$. Es folgt für $x \in (-1, 1)$:

$$-\frac{1}{y} + 1 = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^y \overset{1}{=} \int_1^y \frac{dt}{t^2} = \int_0^x \frac{2s\,ds}{1-s^2} \overset{2}{=} \left[-\ln(1-s^2)\right]_0^x = -\ln(1-x^2) + \ln(1) = -\ln(1-x^2).$$

Also ist $y(x) = \dfrac{1}{1 + \ln(1-x^2)}$. 1

Bestimmung des maximalen Lösungsintervalls I: Da $y(0) = 1 > 0$ ist, muß der Nenner in ganz I positiv sein, das heißt für alle $x \in I$:

1
$$1 + \ln(1-x^2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(1-x^2) > 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 > e^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 1 - e^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{1-e^{-1}} < x < \sqrt{1-e^{-1}}.$$

Also ist $I = (-\sqrt{1-e^{-1}}, \sqrt{1-e^{-1}})$. 1

Aufgabe 4

Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Zuerst lösen wir das homogene System $y' = Ay$: Eigenwerte von A:

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) - 2(-2),$$

also $0 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Einziger Eigenwert: $\lambda = 1$. 1

Eigenvektoren zu λ sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad 1$$

Daraus liest man ab: $Eig(A, 1) = \langle v \rangle$ mit $v := (1, -1)^T$. Damit ist ein Basisvektor für die Lösung des homogenen Systems gefunden: $y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x$. 1

Da der Eigenraum eine um eins kleinere Dimension als die Vielfachheit des Eigenwerts hat, machen wir für eine weitere Lösung des homogenen Systems den Ansatz $y_2(x) = (w + vx)e^x$, 1 wobei w noch bestimmt werden muß. Durch Einsetzen in die homogene Differentialgleichung erhält man $(w + vx)e^x + ve^x = y_2'(x) = (Aw + Avx)e^x$, also $w + v = Aw$ wegen $Av = v$. Für w ergibt sich das LGS $Aw - w = v$, das heißt:

1
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Setzt man $w_2 := 0$ so folgt $w_1 = 1/2$. Die zweite Lösung der homogenen Gleichung lautet demnach: $y_2(x) = (w + vx)e^x = \begin{pmatrix} 1/2 + x \\ -x \end{pmatrix} e^x$. 1

Jetzt fehlt noch eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen Gleichung:

1P.

1. Möglichkeit: Da die rechte Seite $(-2,2)^T$ konstant ist, kann man als Ansatz eine konstante Funktion $y_s(x) = (a,b)^T$ wählen mit $a, b \in \mathbb{R}$. Einsetzen in die DGL: 1

$$I \;\; 3a + 2b - 2 = 0 \;\text{ und }\; II \;\; -2a - b + 2 = 0.$$ 1

2II+I liefert $-a = -2$, das heißt $a = 2$ und damit $b = -2$. Also lautet eine spezielle Lösung $y_s = (2,-2)^T$. 1

3P.

2. Möglichkeit: Variation der Konstanten: Ansatz: $y_s = c_1y_1 + c_2y_2$. Durch Einsetzen in die DGL erhält man $c_1'y_1 + c_2'y_2 = (-2,2)^T$. Damit ergibt sich das folgende LGS für $c_1'(x), c_2'(x)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^x & (1/2+x)e^x & -2 \\ -e^x & -xe^x & 2 \end{array}\right) \overset{I+II}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} e^x & (1/2+x)e^x & -2 \\ 0 & 1/2e^x & 0 \end{array}\right).$$

Es folgt $c_2' = 0$, also oBdA $c_2 = 0$ und damit 1

$$c_1'(x)e^x = -2 \Rightarrow c_1'(x) = -2e^{-x} \Rightarrow c_1(x) = 2e^{-x}.$$ 1

Folglich: $y_s(x) = (c_1y_1 + c_2y_2)(x) = 2e^{-x}(1,-1)^Te^x + 0 = (2,-2)^T$. 1

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet also

$$\alpha y_1 + \beta y_2 + y_s, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$ 1

Aufgabe 5

a) Sei $f = u + iv$. Nach Voraussetzung ist $u + v$ konstant, also

$$(1)\;\; u_x + v_x = 0, \;\; (2)\;\; u_y + v_y = 0.$$

Da f holomorph ist, erfüllt f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, das heißt:

$$(3)\;\; u_x = v_y, \;\; (4)\;\; u_y = -v_x.$$

Es folgt:

$$u_x \overset{(3)}{=} v_y \overset{(2)}{=} -u_y \overset{(4)}{=} v_x \overset{(1)}{=} -u_x.$$ 1

Also ist $u_x = 0$ auf G. Mit (1) ist dann auch $v_x = 0$ auf G, also $f' = u_x + iv_x = 0$ auf G. 1 Da G ein Gebiet, insbesondere zusammenhängend ist, folgt, daß f konstant ist. 1

b) Die Aussage ist nicht wahr, wie das folgende Beispiel zeigt: 1

Sei $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$; dann ist G offen und zusammenhängend. Sei $f : G \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^{-1}$ (f ist holomorph auf G). 1

Sei $k : [0, 2\pi] \to G$, $t \mapsto e^{it} = \cos t + i \sin t$. Dann ist k stetig differenzierbar, geschlossen ($k(0) = k(2\pi)$) und doppelpunktfrei. 1

Setzt man $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 1$, so ist g holomorph auf ganz $\mathbb{C}$, und mit der Cauchy-Integralformel gilt:

$$\int_k f(z)dz = \int_k \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i g(0) = 2\pi i \neq 0.$$ 1

c) Wegen $k'(t) = 1 + i$ für alle $t \in [0, 1]$ gilt 1

$$\int_k z\bar{z}dz = \int_0^1 (1+i)t(1-i)t(1+i)dt = \int_0^1 2t^2(1+i)dt = (1+i)[2t^3/3]_0^1 = \frac{2}{3}(1+i).$$ 1 1

d) 1. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$. Für alle $z \neq i, -i$:

$$\frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{1}{z^2+1} \Leftrightarrow (A+B)z + (A-B)i = 1 \Leftrightarrow A + B = 0 \text{ und } A - B = -i.$$

1

Addition der beiden Gleichungen: $2A = -i \Rightarrow A = -i/2 \Rightarrow B = i/2$. Einsetzen in das Integral:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2+1} = \underbrace{\int_{|z|=2} \frac{-ie^z dz}{2(z-i)}}_{I} + \underbrace{\int_{|z|=2} \frac{ie^z dz}{2(z+i)}}_{II}.$$

Berechnung von I: Die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{-ie^z}{2}$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Also gilt nach der Cauchy-Integralformel, da $|i| = 1 < 2$:

$$I = \int_{|z|=2} \frac{g(z)dz}{z-i} = 2\pi i g(i) = 2\pi i \frac{-ie^i}{2} = \pi e^i.$$ 1

Analog gilt mit $h(z) = \frac{ie^z}{2}$:

$$II = \int_{|z|=2} \frac{h(z)dz}{z+i} = 2\pi i h(-i) = 2\pi i \frac{ie^{-i}}{2} = -\pi e^{-i}.$$ 1

Also hat das gesuchte Integral den Wert $I + II = \pi(e^i - e^{-i}) = 2\pi Im(e^i) = 2\pi i \sin 1$. 1

2. Möglichkeit: Mit dem Residuensatz: Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto e^z/(z^2+1)$. f ist holomorph und nach dem Residuensatz ist

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2+1} = 2\pi i(\text{res}_i f + \text{res}_{-i} f).$$ 1

Berechnung des ersten Residuums:

$$\text{res}_i f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{(z+i)(z-i)} = \frac{e^i}{i+i} = \frac{-ie^i}{2},$$ 1

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen nach der Cauchy-Integralformel gilt.

Berechnung des zweiten Residuums:

$$\text{res}_{-i} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z+i|=1} \frac{e^z dz}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-i}}{-i-i} = \frac{ie^{-i}}{2},$$ 1

wobei das vorletzte Gleichheitszeichen nach der Cauchy-Integralformel gilt. Also hat das gesuchte Integral den Wert $2\pi i \frac{-ie^i + ie^{-i}}{2} = \pi(e^i - e^{-i}) = 2\pi i \sin 1$. 1