....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. H. Spohn

17. Februar 2012, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

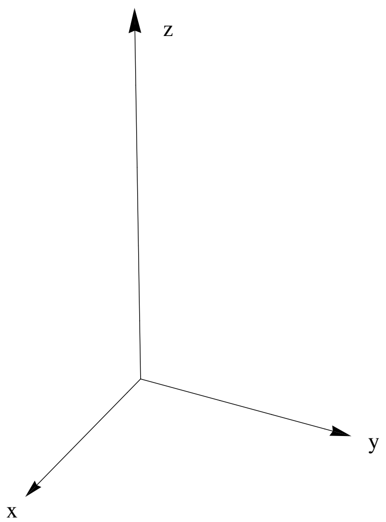
Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Oberflächenintegrale I** **[17 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{z}{4},\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \subset [0, \infty[^3$ und das Vektorfeld $v(x, y, z) = (x^2 + y^2, 1, z^2)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge K.



(b) Geben Sie eine Parametrisierung des Mantelflächenstücks $M := \partial K \cap \,]\,0, \infty[^3$ an

Fortsetzung: nächste Seite

1. **Oberflächenintegrale I (Fortsetzung)**

   (c) Berechnen Sie den Fluss F von v durch das Flächenstück M, wobei der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt.

   (d) Berechnen Sie den Gesamtfluss G von v durch ∂K mit Hilfe des Satzes von Gauß.

2. **Oberflächenintegrale II** **[9 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9,\ x \geq 0\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Punkt $(0,0,4)$ wegzeigt, und $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 23\sin(e^{x+y}) + \arctan(y + 4z^2) \\ \sin x - z \\ y \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

(a) Was besagt allgemein der Satz von Stokes für den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch S?

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Randlinie ∂S von S an.

$\gamma(t) =$

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch S.

$\int_S \langle \operatorname{rot} v, n \rangle d\sigma =$

3. **Residuen** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{z-k}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) f hat bei $z = 1$

☐ eine hebbare Singularität ☐ einen Pol erster Ordnung ☐ einen Pol n-ter Ordnung
☐ eine wesentliche Singularität ☐ eine einfache Nullstelle

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = 1$.

$\mathrm{Res}_1(f) =$

(c) Wie lautet der Hauptteil $H_1(z)$ der Laurent-Reihe von f in einer punktierten Kreisscheibe um $z = 1$?

$H_1(z) =$

(d) Welchen Konvergenzradius R hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 1$?

$R =$

4. **Komplexe Wegintegrale** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \leq 2\}$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von ∂G durch drei Wegstücke an.

$\gamma_1(t) =$	$\gamma_2(t) =$	$\gamma_3(t) =$

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{\partial G} f(z)dz$ für $f(z) = |z| \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$.

(c) Bestimmen Sie, mit Begründung, den Wert des Integrals $\int\limits_{\partial G} \frac{z^3}{z^2-2i} dz$.

5. **Fourierreihen** **[10 Punkte]**

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

(a) Beweisen Sie für $g(x) = f(-x)$, dass $\widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}$.

(b) Was besagt die Parsevalsche Gleichung (Parseval 1) für f?

(c) Sei nun $f(x) = \frac{\pi - |x|}{2}$. Die Fourierkoeffizienten von f lauten $\widehat{f}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } k = 0, \\ \frac{(-1)^k - 1}{2\pi k^2} & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$

Berechnen Sie mit Hilfe von (b) den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

6. **Fouriertransformation** **[6 Punkte]**

Sei $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Ist die Fouriertransformierte $\widehat{f}(k)$ quadratintegrabel?

☐ Ja ☐ Nein

(b) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$.