Probeklausur in Experimentalphysik 3 - Lösung

Prof. Dr. S. Schönert
Wintersemester 2017/18
15. Januar 2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle mit der Vakuumwellenlänge $\lambda = 589,6$nm falle senkrecht auf einen Halbleiter mit dem komplexen Brechungsindex $\tilde{n} = 1,5 - 0,15i$.

(a) Nach welcher Strecke ist die Intensität der eingedrungenen Strahlung auf den e^{-1}-ten Teil abgesunken?

(b) Bestimmen Sie die Phasenverschiebung zwischen dem $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld im Halbleiter.

Lösung

Für die elektromagnetische Welle benutzen wir den Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}z)}$$

wobei die Wellenzahl $\tilde{k}$ echt komplex ist, da der Brechugnsindex $\tilde{n} = n - i\kappa$ echt komplex ist. Da

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}\tilde{n} = \frac{\omega}{c}(n - i\kappa)$$

können wir die elektrische Feldstärke schreiben als

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \frac{n\omega z}{c} + i\frac{\kappa\omega z}{c})} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\kappa\omega z}{c}} e^{i(\omega t - \frac{n\omega z}{c})} = \vec{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\omega(t - \frac{nz}{c})}$$

wobei $\delta = \frac{c}{\omega\kappa}$ als Abkürzung benutzt wurde.

[2]

(a) Die Intensität ist proportional zu $\vec{E}^2$. Daher

$$I \sim E_0^2 e^{-\frac{2z}{\delta}}$$

Die Intensität ist also bei der Strecke $R_\text{e} = \frac{\delta}{2}$ auf den e^{-1}-ten Teil abgesunken. Zahlenwerte sind

$$R_\text{e} = \frac{\delta}{2} = \frac{c}{2\kappa\omega} = \frac{\lambda_\text{vak}}{2 \cdot 2\pi\kappa} = 313\text{nm}$$

[2]

(b) Das Magnetfeld $\vec{B}$ ist nach Maxwell wie folgt an die elektrische Feldstärke gekoppelt:

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\tilde{n}}{c}\vec{s} \times \vec{E}$$

wobei $\vec{s}$ ein Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung ist. mit

$$\tilde{n} = |\tilde{n}|e^{i\phi_\mathrm{B}} \qquad \vec{B} = \frac{|\tilde{n}|}{c}\vec{s} \times \vec{E}e^{i\phi_\mathrm{B}}$$

folgt

$$\tan(\phi_\mathrm{B}) = \frac{\kappa}{n}$$

Der Phasenwinkel ist also $\phi_\mathrm{B} = 5,7° \Leftrightarrow \tan(\phi_\mathrm{B}) = 0,1$:

[4]

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Der Grenzwinkel der Totalreflexion beträgt für eine bestimmte Glassorte 40,5°.

(a) Wie groß ist für diesen Stoff der Winkel der vollständigen Polarisation?

Jetzt fällt natürliches Licht unter diesem Brewsterwinkel α_P auf das Glas.

(b) Welcher prozentuale Anteil des einfallenden Lichts wird an der Grenzfläche Luft/Glas reflektiert und welcher Anteil wird gebrochen und dringt in das Glas ein?

(c) Wie groß ist der Polarisationsgrad P für das reflektierte und das gebrochene Licht? Die Absorption des Lichts ist zu vernachlässigen.

Lösung

(a) $\theta_T = 40,5°$, gesucht ist der Brewster-Winkel θ_B.

Totalreflexion tritt auf, falls $n_e > n_t$, mit $\sin\theta_T = \frac{n_t}{n_e} = \frac{1}{n}$ für $n_e = 1$ und $n_t = n$.

Der Brewster-Winkel bei Reflexion am Material ($n_e = 1$ und $n_t = n$) beträgt:

$$\theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_e}\right) = \arctan(n) = \arctan\left(\frac{1}{\sin\theta_T}\right) = 57°.$$

[3]

(b) Das im natürlichen Licht zu je 50 % enthaltene senkrecht ($\perp$) und parallel ($\|$) zur Einfallsebene polarisierte Licht wird an der Grenzfläche - abhängig vom Einfallswinkel α_1 und mittelbar wegen $\sin\alpha_1/\sin\alpha_2 = n$ auch vom Brechungswinkel α_2 - unterschiedlich stark reflektiert und gebrochen. Für den Reflexionsgrad R (reflektierte/einfallende Lichtintensität) gelten die Fresnelschen Formeln:

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad R_\| = \frac{\tan^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan^2(\alpha_1 + \alpha 2)} \qquad (1)$$

[**2**]

Für $\alpha_1 = \alpha_P = 57°$ (folgt aus $\tan \alpha_P = n$) ist $\alpha_2 = 33°$. Damit wird nach (1) $R_\perp = 0,1645$ und (wegen $\tan 90° \to \infty$) $R_\| = 0$, d.h. es wird beim Einfallswinkel $\alpha_1 = \alpha_P$ vom Glas nur senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Lich reflektiert, und zwar 16,45 % der Intensität desselben im natürlichen Licht, das sind also nur $0,5 \cdot 16,54 \approx 8,3$ % der Intensität des natürlichen Lichts. Der Rest, nämlich $91,7$% wird an der Grenzfläche gebrochen und geht durch das Glas hindurch. Dieses enthält demnach noch (50 - 8,3) % = 41,7 % senkrecht polarisiertes sowie das gesamte parallel polarisierte Licht (= 50 % des einfallenden Lichts).

[**6**]

(c) Mit dem Durchlassgrad $D = 1 - R$ für das gebrochene Licht (wegen des Energieerhaltungssatzes $R + D = 1$ bzw. 100 %) folgt als Polarisierungsgrad des reflektierten Lichts P_r und des gebrochenen (durchgehenden) Lichts P_d:

$$P_r = \frac{R_\perp - R_\|}{R_\perp + R_\|} = 1(100\ \%), \quad P_d = \frac{D_\| - D_\perp}{D_\| + D_{perp}} = \frac{R_\perp - R_\|}{2 - (R_\perp + R_\|)} = 0,09(9\ \%)$$

[**3**]

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Ein Glasstab mit der Brechzahl $n = 1,5$ ist an seinen beiden Enden durch Halbkugelschliffe mit dem gleichen Radius r_0 begrenzt. Der Stab hat die Länge $3r_0$ von Scheitelfläche zu Scheitelfläche, die Kugelflächen haben eine gemeinsame optische Achse, die mit der Längsachse des Stabes identisch ist. In einem Abstand von r_0 von der vorderen konkaven Kugelfläche befindet sich eine punktförmige Lichtquelle auf der optischen Achse. Berechnen Sie, in welchem Abstand von der hinteren konvexen Kugelfläche das Bild entsteht.

Lösung

Das resultierende Bild der Punktquelle erhalten wir durch eine schrittweise Abbildung des Gegenstands durch die erste und dann durch die zweite Kugelfläche. Das durch die erste Abbildung entstandene Bild betrachten wir als den für die zweite Abbildung vorzusehenden Gegenstand. Die zweite Abbildung erzeugt dann das endgültige Bild. Für die Brechung an einer Kugelfläche mit dem Radius r, die zwei Stoffe mit den absoluten Brechzahlen n_1 und n_2 trennt, gilt die Beziehung

$$\frac{n_1}{g} + \frac{n_2}{b} = \frac{n_2 - n_1}{r}. \tag{2}$$

[**1**]

Bei der Brechung an der ersten Kugelfläche tritt der aus der Luft kommende Strahl ins Glas ein, die Kugelfläche ist hier konkav. Daher ist $n_1 = 1$, $n_2 = n, r = r_0$; und da auch $g = r_0$ ist, finden wir nach Einsetzen in (2)

$$\frac{1}{r_0} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r},$$

woraus sich ergibt

$$b = r_0 \cdot \frac{n}{n-2}.$$

[**1**]

Das durch die erste Kugelfläche entworfene Bild hat vom Scheitelpunkt der zweiten den Abstand

$$g' = 3r_0 - b = 2r_0 \cdot \frac{n-3}{n-2}.$$

[**1**]

Bei der Berechnung der zweiten, hinteren Kugelfläche tritt der Strahl aus dem Glas in die Luft aus. Hier ist $n_1 = n, n_2 = 1, r = -r_0$. Nach dem Einsetzen dieser Größen in (2) findet man

$$\frac{n}{2r_0 \cdot \frac{n-3}{n-2}} + \frac{1}{b'} = -\frac{1-n}{r_0},$$

[**2**]

wobei der Abstand des durch die zweite Kugelfläche entworfenen Bildes vom Scheitelpunkt der zweiten Kugelfläche mit b' bezeichnen. Daraus ergibt sich

$$b' = 2r_0 \cdot \frac{n-3}{n^2 - 6n + 6}.$$

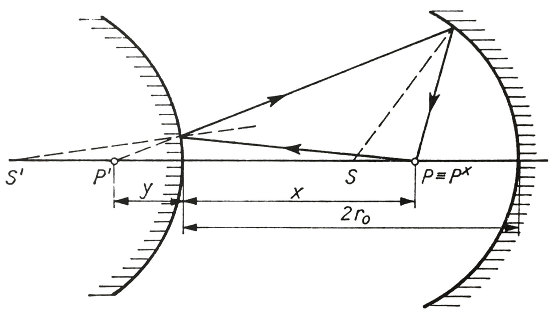
Mit $n = 1,5$ erhält man

$$b' = 4r_0.$$

[**2**]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Ein Konvex- und ein Konkavspiegel mit gleichem Krümmungsradius r_0 sind mit ihren Spiegelflächen einander so gegenübergesetllt, dass ihre optischen Achsen zusammenfallen und ihre Scheitel den Abstand $d = 2r_0$ haben.



Es soll ein auf der gemeinsamen optischen Achse gelegener Punkt gesucht werden, für den gilt, dass die von einer hier aufgestellten Lichtwelle ausgehenden Strahlen nach Reflexion auf Konvex- und Konkavspiegel wieder im Ausgangspunkt zusammentreffen.

Lösung

Den auf der Achse liegenden Lichtpunkt bilden wir zunächst durch den Konvexspiegel ab und das so enstandene Bild durch den Konkavspiegel. Danach formulieren wir die Bedingung, dass das resultierende Bild im Ausgangspunkt entworfen wird.

Wenn wir den Lichtpunkt P in einem Abstand $a = x$ vor dem Konvexspiegel aufstellen, so entwirft dieser ein viruelles Bild P' im Abstand $b = -y(y > 0)$ hinter dem Scheitelpunkt des Spiegels. Für diese Abbildung gilt

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{2}{r_0}. \tag{3}$$

[**2**]

Der Abstand des Konvexspiegels hat die Größe $a_2 = 2r_0 + y$. Wenn das resultierende Bild P^* wieder im Ausgangspunkt P erscheinen soll, muss seine vom Scheitelpunkt des Konkavspiegels aus gemessene Bildweite

$$b_2 = 2r_0 - x$$

[**2**]

sein. Nach der Abbildungsgleichung für Spiegel gilt weiter

$$\frac{1}{2r_0 + y} + \frac{1}{2r_0 - x} = \frac{2}{r_0}. \tag{4}$$

[**1**]

Die Kombination der Gleichungen (3) und (4) führt zu einer quadratischen Gleichung

$$2x^2 - 2r_0x - r^2 = 0,$$

[**1**]

deren Wurzeln $x_1 = 1,35r_0$ und $x_2 = -0,35r_0$ sind. Physikalisch sinnvoll ist nur die erste der beiden Lösungen. Demzufolge muss die Lichtquelle vom Konvexspiegel in der Entfernung $s = 1,35r_0$ angeordnet sein.

[**2**]

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sie haben eine Sammellinse ($f_1 = 20$ cm), benötigen jedoch eine Gesamtbrennweite von 40 cm, die durch Aneinandersetzen mit einer weiteren Linse f_2 erreicht werden soll.

(a) Von welchem Typ ist diese Linse und welche Brennweite (in cm) muss diese haben?

(b) In welcher Bildweite b läge ein mit diesem zusammen zusammengesetzen Linsensystem abgebildeter Gegenstand, der sich in $g = 120$ cm Entfernung befindet?

Lösung

(a) Für die Gesamtbrennweite f einer Kombination dünner Linsen der Brennweiten f_1 und f_2 im Abstand d gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 \cdot f_2}.$$

In dieser Aufgabe ist $d = 0$, da die Linsen aneinander gesetzt werden sollen. Die Umstellung der obigen Gleichung nach f_2 ergibt mit $d = 0$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1}} = \frac{f \cdot f_1}{f_1 - f}.$$

Einsetzen von $f = 40$ cm und $f_1 = 20$ cm ergibt den Zahlenwert $f_2 = -40$ cm. Die negative Brennweite besagt, dass die zweite Linse eine Zerstreuungslinse sein muss.

[**3**]

(b) Aus der Abbé-Abbildungsgleichung $\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$ folt die Bildweite:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{f \cdot g}{g - f}.$$

Einsetzen von $g = 120$ cm und $f = 40$ cm ergibt $b = 60$ cm.

[**2**]

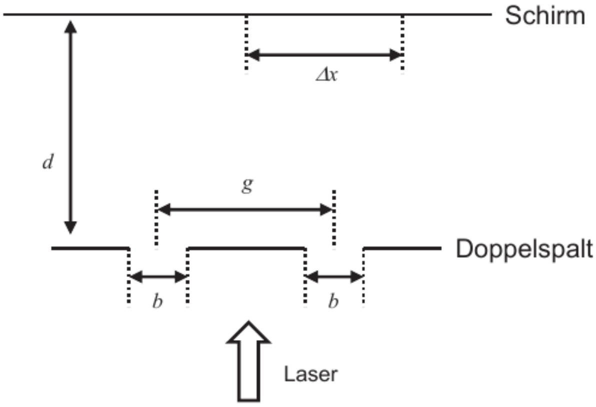
Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Ein langer Einfachspalt mit einer Breite von $d = 0,05$ mm wird senkrecht mit einem Argon-Ionen-Laser ($\lambda = 514$ nm) beleuchtet. In großer Entfernung ($D = 1$ m) hinter dem Spalt befindet sich ein Schirm, auf dem das Beugungsbild beobachtet wird. In welchem Abstand vom zentralen Maximum befindet sich das erste Beugungsminimum? Welche zu $\lambda = 514$ nm benachbarte Wellenlänge ergibt an diesem Ort ein Maximum (welches)?

(b) Ein Doppelspalt werde mit einem Laser der Wellenlänge λ senkrecht beleuchtet. Der Doppelspalt besteht aus zwei langen Einfachspalten identischer Breite b. Die Mitten der beiden Spalte sollen den Abstand $g = 90$ μm voneinander haben. Sie beobachten das von der Anordnung erzeugte Beugungsbild auf einem Schirm mit sehr großem Abstand d vom Doppelspalt.

   (i) Leiten Sie eine Formel für den Abstand Δx des dritten Interferenzmaximums des Doppelspalts vom zentralen Maximum auf den Schirm her. Die Formel soll keine trigonometrischen Funktionen (sin, cos, tan, o.Ä.) mehr enthalten, aber trotzdem auch bei großen Beugungswinkeln exakt gültig sein.
   (*Hinweis:* Zählen Sie bei der Nummerierung der Maxima das zentrale Maximum nicht mit!)

   (ii) Berechnen Sie die Breite b der Einfachspalte (Zahlenwert), die gewählt werden muss, damit das dritte Interferenzmaximum aus dem Aufgabenteil (i) mit dem ersten Beugungsminimum der Einfachspalte zusammenfällt, also ausgelöscht ist.



Lösung

(a) Es gibt genau dann ein Minimum, wenn

$$x = m\pi = \pi \frac{b}{\lambda} \sin\Theta.$$

Außerdem ist

$$\tan\Theta = \frac{d}{D}.$$

[**2**]

Man erhält (für $m = 1$ gerade)

$$d \approx 1 \text{ cm}.$$

Damit eine andere Wellenlänge dort ihr Maximum hat, muss gelten

$$x = \frac{\pi}{2}(2n+1) = \pi \frac{b}{\lambda_n} \sin\Theta,$$

aber da wir uns immer noch beim gleichen Θ befinden, gilt

$$x = \pi \frac{b}{\lambda_n} \frac{\lambda}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda}{\lambda_n} = \frac{1}{2}(2n+1).$$

Es gäbe also eine bei 2λ, aber die nächste ist bei $\frac{2}{3}\lambda$.

[**3**]

(b) (i) Der Phasenunterschied zwischen den beiden Teilstrahlen ist

$$\Delta s = g \sin\Phi = 3\lambda.$$

Außerdem ist

$$\tan\Phi = \frac{\Delta x}{d} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \tan\Phi \cdot d = d \cdot \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$$
$$= d \cdot \frac{sin\Phi}{\sqrt{1-\sin^2\Phi}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\Phi} - 2}} = \frac{d}{\sqrt{\frac{g^2}{9\lambda^2} - 1}}.$$

[**3**]

(ii) Für den Doppelspalt ist

$$g \sin \Phi = 3\lambda.$$

Für den Einzelspalt ist

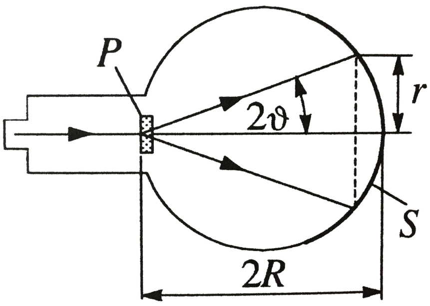
$$b \sin \Phi = \lambda.$$

Damit ist $b = 30\ \mu$m.

[**2**]

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Elektronenbündel durchstrahlt nach Durchlaufen einer Beschleunigungsspannung von $U = 10$ kV eine polykristalline Graphitschicht (Probe P), wobei der auf dem kugelförmigen Leuchtschirm S beobachtete Interferenzring erster Beugungsordnung einen Radius $r = 1,29$ cm aufweist.



(a) Wie groß ist der Abstand d der in interferenzfähiger Lage befindlichen Netzebenen (gedachte Ebenen im Kristall, welche gleichmäßig mit Gitterebenen belegt sind) des Graphitkristalls?

(b) Bis zu welcher Beugungsordnung z treten bei der gegebenen Beschleunigungsspannung konstruktive Interferenzen auf? Der Abstand der Probe zum Leuchtschirm beträgt $2R = 13$ cm.

Lösung

(a) Wir gehen von der Interferenzbedingung $2d \sin \theta = z\lambda$ (Braggsche Gleichung) aus, wobei θ der Winkel zwischen dem einfallenden Strahl und der 'reflektierenden' Netzebenenschar bzw. 2θ der Winkel zwischen Einfallsrichtung und gebeugtem Strahl ist. Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{2r}{\sin(4\theta)} = 2R,$$

sodass

$$\theta = \frac{1}{4} \arcsin \left(\frac{r}{R} \right) = 0,05 \text{ rad} = 2,86\ ^\circ.$$

[**3**]

Die Geschwindigkeit der Elektronen ergibt sich aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}.$$

Damit beträgt die De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = 1,226 \cdot 10^{-11} \text{ m}.$$

[**3**]

Schließlich folgt aus der Braggschen Gleichung der Netzebenenabstand

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\theta} = 1,23 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

[**1**]

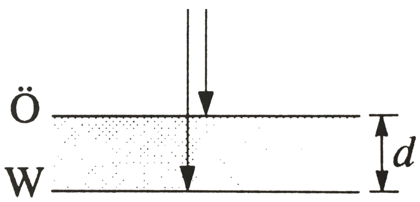
(b) Der maximale Streuwinkel beträgt $2\theta = 180°$ oder $\theta = 90°$; somit gilt nach der Braggschen Gleichung

$$z = \frac{2d}{\lambda} = 20,03.$$

Da z eine gerade Zahl sein muss, beträgt die höchste Beugungsordnung $z = 20$.

[**3**]

Aufgabe 8 (7 Punkte)



Weisses Licht fällt auf eine Ölschicht ($n = 1,5$), die sich auf einer Wasseroberfläche ($n = 1,33$) ausgebreitet hat. An einer Stelle ist der Ölfilm gerade $d = 60$ cm dick. Welche Wellenlängen werden im sichtbaren Bereich nach Reflexion

(a) bei senkrechtem Lichteinfall

(b) bei Lichteinfall unter einem Winkel $\alpha = 45°$ durch Interferenz ausgelöscht?

Lösung

(a) Die Bedingung für Interferenzminima lautet:

$$\Delta L = n \cdot 2d$$

wobei noch zu berücsichtigen ist, dass am Öl ein Phasensprung von π auftritt. Damit ist der gesamte Gangunterschied also $\Delta L = 2nd + \lambda/2$. Auslöschung tritt auf wenn

$$2nd + \lambda/2 = (2z+1)\lambda/2$$

Für sichtbares Licht sind das die Wellenlängen $z = 3$(600nm) und $z = 4$(450nm).

[4]

(b) In der Interferenzbedingung ist jetzt statt n überall $\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$ mit α als Einfallswinkel anzusetzen. Demnach fehlen die Wellenlängen $z = 3(529\text{nm})$ und $z = 4(397\text{nm})$

[3]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\text{C}$
Magnetische Feldkonstante:	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$
Boltzmannkonstante:	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{JK}^{-1}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\text{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8\text{ms}^{-1}$
Neutronenruhemasse:	$m_N = 1.6749 \cdot 10^{-27}\text{kg} = 939.57\text{MeV/c}^2$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$
Stefan Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3}\text{mK}$