Klausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Simmel
Sommersemester 2012
24. Juli 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder Computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

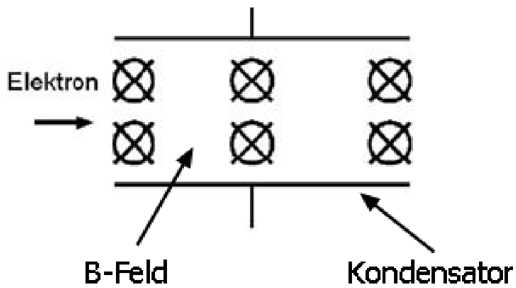
Aufgabe 1 (6 Punkte)

In einer Vakuumkammer werden Elektronen mit einer Spannung von $U = 100\text{V}$ beschleunigt und treten in ein magnetisches Feld ein. Das Magnetfeld steht senkrecht zur Geschwindigkeit der Elektronen und besitzt eine Stärke von $|\vec{B}| = 3\text{mT}$.

(a) Welche Geschwindigkeit besitzen die Elektronen vor dem Eintritt in das Magnetfeld?

(b) Wie groß ist der Kreisbahnradius, auf dem sich das Elektron bewegt?

(c) Nun sei zusätzlich ein Kondensator gemäß der Zeichnung eingebaut ($\vec{v}\perp\vec{B}, \vec{v}\perp\vec{E}, \vec{B}\perp\vec{E}$). Wie groß muss die elektrische Feldstärke sein, damit die Elektronen ohne Ablenkung durch die Apparatur hindurchfliegen?



Lösung

(a) Die elektrische Energie $E = Ue$ wird direkt in kinetische Energie ($\frac{1}{2}mv^2$) umgewandelt

[1]

$$\Rightarrow Ue = \frac{1}{2}mv^2$$
$$\Rightarrow v^2 = \frac{2Ue}{m}$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Ue}{m}}$$

mit $U = 100\text{V}$ erhält man $v = 5,93 \cdot 10^6\text{m/s}$.

[**1**]

(b) Der Elektronenstrahl wird auf eine Kreisbahn gezwungen. Die Lorentzkraft $F_L = qvB$ wirkt als Zentripetalkraft $F_R = \frac{mv^2}{r}$ radial nach innen.

[**1**]

$$F_L = F_Z \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{r}, q = e$$
$$\Rightarrow r = \frac{mv}{eB}$$
$$\Rightarrow r = 1,12\text{cm}$$

[**1**]

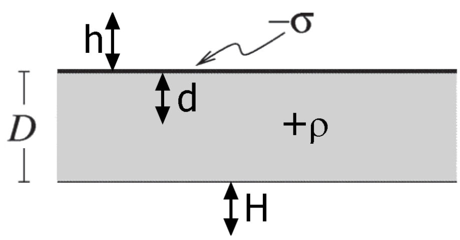
(c) Damit die Elektronen den Wienfilter ohne Ablenkung passieren, muss die Lorentzkraft genauso groß wie die elektrische Kraft im Feld des Plattenkondensators sein:

[**1**]

$$F_L = evB$$
$$F_E = eE$$
$$F_L = F_E \Leftrightarrow evB = eE$$
$$E = Bv$$
$$\Rightarrow E = 1,78 \cdot 10^4\text{V/m}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)



Es sei wie in der obigen Abbildung eine nicht-leitende, unendlich ausgedehnte Fläche von vernachlässigbarer Dicke und mit einer gleichmäßigen Flächenladungsdichte $-\sigma$ gegeben. Direkt daran anschließend gibt es einen unendlich ausgedehnten Bereich der Dicke D mit gleichmäßiger Raumladungsdichte ρ. Alle Ladungen seien ortsfest. Berechnen Sie die Richtung und die Stärke des elektrischen Feldes

(a) für eine Höhe h über der negativ geladenen Fläche (oberhalb im Sinne der Zeichnung)

(b) innerhalb des positiv geladenen Bereiches mit Abstand d von der negativ geladenen Fläche ($d < D$).

(c) für einen Abstand H vom unteren Ende des positiv geladenen Bereichs

Lösung

Da das Problem symmetrisch ist für beide Bereiche, muss das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche stehen. Stehe ein positives E für ein Feld mit der Richtung oben im Sinne der Zeichnung. Auf Grund von Superposition ist das elektrische Gesamtfeld die Summe des Feldes der Oberfläche und des Volumens darunter.

[**1**]

Betrachten wir zuerst die dünne Fläche. Wir wenden das Gaussgesetz an und ziehen eine gaussche Box um ein Stück der geladenen Fläche mit gleichem Abstand der Endstücke zur Oberfläche. Dies ergibt $E_{\text{Fläche oberhalb}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ und $E_{\text{Fläche unterhalb}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ unabhängig vom Abstand.

[**1**]

Betrachte als nächstes den ausgedehnten Bereich. Wir wenden abermals das Gaussgesetz an und bauen eine Box, die das Volumen komplett einschließt. Dies gibt $E_{\text{Volumen oberhalb}} = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}$ und $E_{\text{Volumen unterhalb}} = -\frac{\rho D}{2\varepsilon_0}$, abermals unabhängig vom Abstand. Da die Ladungsdichte uniform ist, nimmt von unten kommend die Feldstärke linear vom Wert unterhalb des Volumens zum Wert oberhalb des Volumens ab.

[**1**]

(a) Im Abstand h über der Fläche sind wir auch oberhalb des geladenen Volumens, also ist das elektrische Gesamtfeld

$$E = E_{\text{Fläche}} + E_{\text{Volumen}} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho D}{2\varepsilon_0} = \frac{(\rho D - \sigma)}{2\varepsilon_0} \tag{1}$$

[**1**]

(b) Innerhalb des Volumens ist $E_{\text{Volumen}}(d) = \frac{\rho(D-2d)}{2\varepsilon_0}$, denn diese Funktion ist linear in d und es gilt $E_{\text{Volumen}}(0) = \frac{\rho D}{2\varepsilon_0}$ und $E_{\text{Volumen}}(D) = -\frac{\rho D}{2\varepsilon_0}$. Des weiteren ist dies unterhalb der Fläche. Daraus resultiert

$$E(d) = E_{\text{Volumen}}(d) + E_{\text{Fläche}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho(D-d)}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\rho(D-2d)}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma + \rho(D-2d)}{2\varepsilon_0} \tag{2}$$

[**1**]

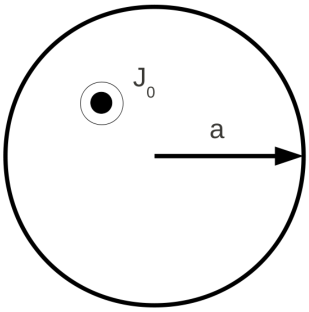
(c) Im Abstand H unterhalb der des unteren Endes des positiv geladenen Bereichs befinden wir uns außerhalb des geladenen Volumens und unterhalb der Fläche, also

$$E = E_{\text{Fläche}} + E_{\text{Volumen}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho D}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma - \rho D}{2\varepsilon_0} \tag{3}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Strom fließt durch einen unendlich langen Draht mit Radius a. Dabei ist die elektrische Stromdichte j_0 konstant, homogen und zeigt aus der Abbildung hinaus:



a) Berechnen Sie die Größe des Magnetfeldes $B(r)$ für einen Radius $r < a$ und einen Radius $r > a$. Geben Sie in beiden Fällen die Richtung des Magnetfeldes ein.

Lösung:

Für $r < a$ ergibt sich aus dem Ampèreschen Gesetz:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r B = \mu_0 I = \mu_0 j_0 \pi r^2 \tag{4}$$

und damit das Magnetfeld mit

$$B = \frac{\mu_0 j_0 \pi r^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_0 r}{2} \quad \text{gegen den Uhrzeigersinn} \tag{5}$$

[**2**]

Für $r > a$:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi r B = \mu_0 I = \mu_0 j_0 \pi a^2 \tag{6}$$

und dann ist das Magnetfeld gegeben durch

$$B = \frac{\mu_0 j_0 \pi a^2}{2\pi r} = \frac{\mu_0 j_0 a^2}{2r} \quad \text{gegen den Uhrzeigersinn} \tag{7}$$

[**1**]

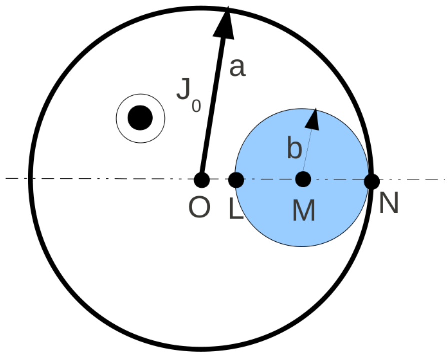
b) Was passiert mit der Richtung des Magnetfeldes wenn die Richtung des Stroms umgekehrt wird, so dass er in die Zeichenebene hineinfließt?

Lösung:

Wenn die Richtung des Stromes umgekehrt wird, so dreht sich auch die Richtung des Magnetfeldes: Es geht dann im Uhrzeigersinn und nicht mehr gegen den Uhrzeigersinn. Die Größe des Magnetfeldes ändert sich nicht.

[**1**]

c) Durch den Draht wird jetzt ein Loch gebohrt. Das Loch hat den Radius b (mit $2b < a$) und ist in der Abbildung gezeigt. Der Punkt O befindet sich in der Mitte des Drahtes und der Punkt M ist in der Mitte des Lochs. In diesem modifizierten Draht existiert eine Stromdichte und bleibt gleich j_0 über den verbleibenden Querschnitt des Drahtes. Berechnen Sie die Größe des Magnetfeldes bei M, bei L und bei N und begründen Sie Ihre Antworten.



Lösung:

Der Trick bei dieser Aufgabe besteht darin, zu erkennen, dass man diese Konfiguration als die Superposition von zwei verschiedenen Drähten begreifen kann. Durch den Draht mit Radius a fließt Strom aus der Zeichenebene hinaus, während durch den 'Draht' mit Radius b Strom in die Zeichenebene hineinfließt, mit derselben Stromdichte. Die Superposition der beiden Stromdichten j_0 und $-j_0$ ergibt null im Bereich des Loches. Bei allen Punkten L, M, N befinden wir uns auf der rechten Seite des großen Drahtes, daher zeigt das Magnetfeld nach oben auf der Zeichenebene. Für den kleinen Draht müssen wir die Richtung des Feldes für jeden der drei Punkte getrennt ermitteln.

Beim Punkt M befinden wir uns im Mittelpunkt des kleinen Drahtes; daher trägt er nicht zum Magnetfeld bei. Wir befinden uns also bei einem Radius $r = a - b$ innerhalb des großen Drahtes und daher ist das Magnetfeld gegeben durch

$$B = \frac{\mu_0 j_0 (a-b)}{2} \tag{8}$$

Es zeigt nach oben.

[**1**]

Beim Punkt L überlagern sich nun die Magnetfelder: es gibt das Feld in Uhrzeigerrichtung des kleinen Drahtes sowie das Feld gegen die Uhrzeigerrichtung des großen Drahtes. Wir befinden uns bei einem Radius $r = a - 2b$ im großen Draht. Beide Magnetfelder zeigen nach oben; daher kann man durch Addition das Magnetfeld ermitteln:

$$B = \frac{\mu_0 j_0 (a - 2b)}{2} + \frac{\mu_0 j_0 b}{2} = \frac{\mu_0 j_0 (a - b)}{2} \tag{9}$$

B zeigt also nach oben.

[**1**]

Bei Punkt N befinden wir uns zur Rechten des kleinen Drahtes bei $r = b$; das im Uhrzeigersinn gerichtete Feld zeigt also nach unten. Daher muss man nun subtrahieren:

$$B = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} - \frac{\mu_0 j_0 b}{2} = \frac{\mu_0 j_0 (a - b)}{2} \tag{10}$$

Das Feld zeigt also auch an dieser Stelle nach oben.

[**1**]

Man kann diese Teilaufgabe nicht mithilfe des Ampèreschen Gesetzes lösen. Das Loch zerstört die zylindrische Symmetrie des Drahtes. Daher ist B nicht mehr auf einer Kreislinie konstant, so dass $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \neq 2\pi r B$. B ist nicht konstant und kann daher nicht vor das Integral gezogen werden.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein Widerstand R, ein Kondensator C und eine Batterie mit Startspannung U_0 seien wie in der Skizze in Reihe geschaltet.

(a) Geben Sie die Differentialgleichung für die Ladung Q auf der unteren Kondensatorplatte an.

(b) Zeigen Sie durch Einsetzen in die Gleichung aus a), dass $Q = CU_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ eine Lösung ist mit der richtigen Wahl von τ. Bestimmen Sie τ.

(c) Was ist der Strom zum Zeitpunkt $t_1 (t_1 > 0)$?

(d) Wieviel Energie ist im Kondensator zum Zeitpunkt t_1 gespeichert?

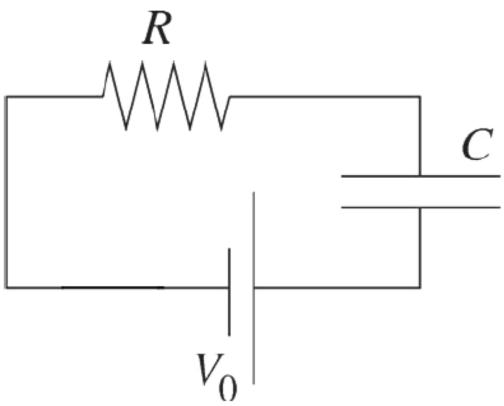
(e) Wieviel Wärme ist zwischen $t = 0$ und t_1 im Widerstand entstanden?

Lösung

(a) Maschenregel

$$U_C + U_R = U_0 \tag{11}$$

[**1**]



$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = U_0 \tag{12}$$

[1]

(b) Mit Einsetzen der gegebenen Lösung erhält man

$$\frac{Q}{C} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + (\frac{RCU_0}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}} = U_0 \Leftrightarrow \tau = RC \tag{13}$$

[1]

(c) Der Strom ist

$$I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = (\frac{CU_0}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}} = (\frac{U_0}{R})e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{14}$$

[1]

(d) Hier ist

$$W_C(t_1) = \frac{1}{2}Q(t_1)U_C(t_1) = \frac{Q^2(t_1)}{2C} = \frac{1}{2}CU_0^2(1 - e^{-\frac{t_1}{\tau}})^2 \tag{15}$$

[1]

(e) Die zeitabhängige dissipierte Energie im Widerstand ist

$$P(t) = I^2(t)R = (\frac{U_0^2}{R})e^{-\frac{2t}{\tau}} \tag{16}$$

[1]

Die dissipierte Wärme zwischen $t = 0$ und t_1 ist damit

$$W = \int_0^{t_1} P(t)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{R}\int_0^{t_1} e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t = \frac{-\tau U_0^2}{2R}e^{-\frac{2t}{\tau}}\Big|_0^{t_1} = \frac{1}{2}CU_0^2(1 - e^{-\frac{2t_1}{\tau}}) \tag{17}$$

[1]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein Gas der Temperatur T enthalte n Moleküle pro Volumeneinheit. Die Moleküle werden kugelförmig angenommen, ihr Radius sei r, ihre Masse m. Sie bewegen sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\overline{v}$.

(a) Wie groß ist die Teilchenzahldichte n bei einem Druck von $0,5 \cdot 10^5$Pa und einer Temperatur von 300K?

(b) Wie groß ist die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit $\sqrt{\overline{v}^2}$, wenn es sich um N_2-Moleküle handelt? (Verwenden Sie das Gleichverteilungssatz.)

(c) Wie weit fliegt das Molekül im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen (mittlere freie Weglänge)? (Ersatzlösung: $1,7 \cdot 10^{-7}$m)

(d) Schätzen Sie die Zahl der Zusammenstöße pro Sekunde eines Moleküls mit anderen Molekülen ab. (Nehmen Sie an, nur dieses Molekül bewege sich mit der Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die anderen seien in Ruhe.)

($m_{\mathrm{N}_2} = 28 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$kg, $r = 2 \cdot 10^{-10}$m, $T = 300$K, $p = 0,5 \cdot 10^5$Pa)

Lösung

(a)

$$n = \frac{p}{k_B T} \approx 1,2 \cdot 10^{25}/\mathrm{m}^3 \tag{18}$$

[1]

(b)

$$\begin{aligned} \langle E_{\mathrm{kin}} \rangle &= \frac{1}{2} f k_B T \\ \sqrt{\overline{v}^2} &= \sqrt{\frac{f k_B T}{m}} \approx 665,5\mathrm{m/s} \\ f &= 5 \quad (3\mathrm{Translationen} + 2\mathrm{Rotationen}) \end{aligned}$$

[2]

(c) Die (kugelförmigen) Moleküle stoßen zusammen, wenn die Schwerpunkte sich näher kommen als $2r$. Damit überstreicht das Molekül auf seinem Weg eine Fläche $\sigma = 4\pi r^2$. Wenn das Molekül eine mittlere freie Weglänge λ zurücklegt, wird es $n_{\mathrm{Streu}} = nV = n\sigma\lambda$ mal gestreut. $n_{\mathrm{Streu}} = 1$ liefert:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi r^2 n} \approx 1,7 \cdot 10^{-7}\mathrm{m} \tag{19}$$

[2]

(d)

$$t = \frac{\lambda}{\sqrt{\overline{v}^2}} \approx 2,5 \cdot 10^{-10}\mathrm{s}, t^{-1} = \frac{\sqrt{\overline{v}^2}}{\lambda} \approx 4 \cdot 10^9/\mathrm{s} \tag{20}$$

[2]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zu Silvester haben Sie eine unbekannte Menge Blei auf einem Löffel zum Schmelzen gebracht. Die Temperatur des Bleis beträgt 400°C, die Schmelztemperatur des Bleis beträgt 327°C. Sie gießen das Blei in ein Wassergefäß mit 250g Wasser (spezifische Wärmekapazität $4,2\text{kJ}/(\text{kgK})$), welches seine Temperatur von 20°C auf $21,5$°C erhöht.

Die spezifische Wärmekapazität von Blei (unabhängig vom Aggregatzustand) beträgt $0,13\text{kJ}/(\text{kgK})$, die spezifische Schmelzwärme ist $25\text{kJ}/\text{kg}$. Vernachlässigen Sie sämtliche Wärmeverluste an die Umgebung.

(a) Welche Wärmemenge hat das Wasser aufgenommen? (Ersatzlösung: 1500J)

(b) Beschreiben Sie Schritt für Schritt, welche Prozesse nach dem Hereinfließen des flüssigen Bleis in das Wasser ablaufen.

(c) Welche Masse Blei ist in das Wassergefäß gegeben worden?

Lösung

(a) Hier ist

$$\Delta Q_{\text{H}_2\text{O}} = c_{\text{H}_2\text{O}} m_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T = 1575\text{J} \tag{21}$$

[**1**]

(b) flüssiges Blei kühlt auf 327°C ab, Blei erstarrt, festes Blei kühlt auf $21,5$°C ab.

[**1**]

(c) vom Blei abgegebene Wärme:

$$\begin{aligned} \Delta Q_{\text{Pb}} &= m_{\text{Pb}}(c_{\text{Pb}} \cdot 73\text{K} + \Lambda_{\text{Pb}} + c_{\text{Pb}} \cdot 305,5\text{K}) \\ \Delta Q_{\text{H}_2\text{O}} &= \Delta Q_{\text{Pb}} \Rightarrow m_{\text{Pb}} = 21,2\text{g} \end{aligned}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (8 Punkte)

In einem durch einen Kolben abgeschlossenen Zylinder ist die Stoffmenge $\nu = 1\text{Mol}$ eines idealen zweiatomigen Gases eingeschlossen. Die Zustandsgrößen im Anfangszustand 1 sind: Druck $p_1 = 1,0\text{bar}$; Volumen $V_1 = 25\text{dm}^3$; Temperatur T_1.

(a) Welche mittlere kinetische Energie E_{kin} der Translation hat ein Molekül des Gases im Anfangszustand 1?

Anschließend wird das Gas in zwei aufeinanderfolgenden Prozessen erwärmt; dies geschieht unter den folgenden Versuchsbedingungen:

- Von einem Zustand 1 in einen Zustand 2 - bei festgehaltenem Kolben - auf den Druck $p_2 = \frac{7}{5}p_1$.
- Von einem Zustand 2 in einen Zustand 3 - bei konstantem Druck p_2 - auf das Volumen $V_3 = \frac{3}{2}V_1$

(b) Skizzieren Sie qualitativ diese beiden Prozesse in einem p, V-Diagramm.

(c) Bestimmen Sie die Temperaturen T_2 und T_3 .

Lösung

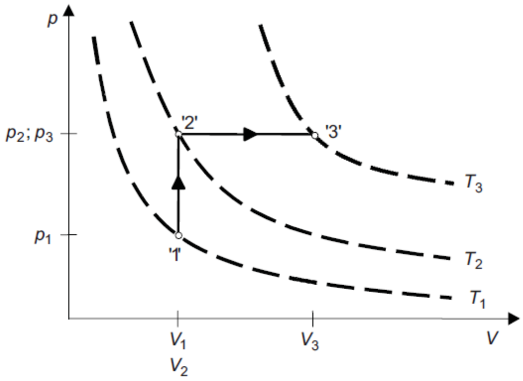


Abbildung 1: Skizze des p,V-Diagramms (nicht-maßstäblich); eingezeichnet sind als Hilfslinien die Isothermen für die Temperaturen T1, T2 und T3.

(a) Die mittlere kinetische Energie der Translation eines Moleküls - mit drei Freiheitsgraden der Translation - hängt nur von der absoluten Temperatur T_1 ab; es gilt

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kin}} = \frac{3}{2}kT_1, k = 1,38 \cdot 10^{-23}\text{JK}^{-1} \tag{22}$$

Die Anfangstemperatur T_1 erhält man aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases für den Zustand 1, also

$$p_1V_1 = \nu RT_1$$
$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = \frac{10^5\text{Nm}^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-3}\text{m}^3}{1\text{Mol} \cdot 8,31\text{JMol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 300,8\text{K}$$

[1]

Für die Anfangstemperatur T_1 wird

$$\bar{\varepsilon}_{\text{kin}}(T_1) = \frac{3}{2}kT_1 = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}\text{JK}^{-1} \cdot 301\text{K} = 6,23 \cdot 10^{-21}\text{J} \tag{23}$$

[1]

(b) Die beiden beschriebenen speziellen Zustandsänderungen sind

Prozess 1 → 2 isochor, $V_1 = V_2$, $p_2 = \frac{7}{5}p_1$, $T_2 > T_1$

[1]

Prozess 2 → 3 isobar, $p_3 = p_2 = \frac{7}{5}p_1$, $V_3 = \frac{3}{2}V_2 = \frac{3}{2}V_1$, $T_3 > T_2$

[**1**]

Skizze des p, V-Diagramms (nicht-maßstäblich). Eingezeichnet sind als Hilfslinien die Isothermen für die Temperaturen T_1, T_2 und T_3 mit $T_1 < T_2 < T_3$.

(c) **Bestimmung der Temperatur** T_2 : Bei einer isochoren Zustandsänderung vereinfacht sich - für ein geschlossenes System - die Zustandsgleichung eines idealen Gases auf

$$\frac{p}{T} = \text{const.} \tag{24}$$

[**1**]

Also gilt für den Prozess $1 \to 2$

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} \tag{25}$$

mit der Zusatzforderung $p_2 = 1,4p_1$ wird daraus

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = 1,4\frac{p_1}{p_1} \cdot T_1 = 1,4T_1 = 1,4 \cdot 301\text{K} = 421\text{K} \tag{26}$$

[**1**]

Bestimmung der Temperatur T_3 : Geht man vom Zustand 2 aus, dann ergibt sich die Temperatur im Zustand 3 aus der Forderung einer isobaren Prozessführung für den Prozess $2 \to 3$. Die spezielle Zustandsgleichung vereinfacht sich auf

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \tag{27}$$

[**1**]

also gilt

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3} \tag{28}$$

mit der Zusatzforderung

$$V_3 = 1,5V_2 = 1,5V_1 \tag{29}$$

erhält man

$$T_3 = \frac{V_3}{V_1} \cdot T_2 = 1,5\frac{V_1}{V_1} \cdot T_2 = 1,5T_2 = 1,5 \cdot 421\text{K} = 632\text{K} \tag{30}$$

[**1**]