Theoretische Physik 1 (Mechanik)
2. Klausur
SS 2008, Technische Universität München

Montag, 14. Juli 2008, 10:15–11:45, HS 1/HS 2

Die Klausur besteht aus **4 Aufgaben**, von denen **3 Aufgaben** bearbeitet werden sollen. Die Aufgabenstellung umfasst **4** Seiten.
Es gibt insgesamt **60 Punkte**.
Bitte geben Sie auf **allen zusätzlichen** Blättern **Ihren Namen** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im dreidimensionalen Raum im Potential $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ mit $r = |\vec{r}|$. Der zeitliche Erwartungswert einer Funktion $f(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t))$ der Ortskoordinate $\vec{r}(t)$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ ist definiert als

$$\langle f \rangle = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt f(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t)).$$

a) (**2 P**) Formulieren Sie die Lagrangefunktion in kartesischen Koordinaten für das angegebene Potential.

b) (**3 P**) Stellen Sie die Lagrange-Bewegungsgleichungen auf.

c) (**6 P**) Zeigen Sie für das angegebene Potential, dass mit der durch das Potential erzeugten Kraft $\vec{F}$ gilt $\langle 2T + \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle = 0$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, wie weit sich das Teilchen vom Koordinatenursprung entfernen kann, um was für eine Bewegung es sich handelt, und was daraus für die Erwartungswerte folgt.

d) (**2 P**) Zeigen Sie dann, dass gilt $\langle T \rangle = \langle \frac{r}{2} \frac{dU}{dr} \rangle$ und leiten Sie daraus eine Beziehung zwischen $\langle T \rangle$ und $\langle U \rangle$ ab. *Hinweis*: Sie brauchen nicht zu beweisen, dass $\langle A + B \rangle = \langle A \rangle + \langle B \rangle$ gilt.

e) (**3 P**) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die zugehörige Hamiltonfunktion.

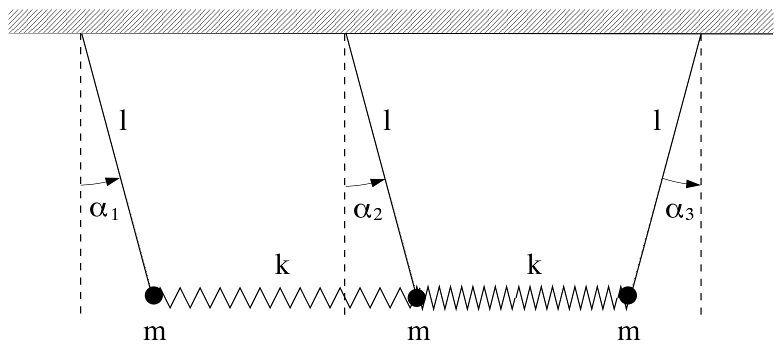
f) (**3 P**) Stellen Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass diese zu den Lagrangegleichungen äquivalent sind. *Hinweis*: Am schnellsten lässt sich das zeigen, wenn Sie kartesische Koordinaten verwenden.

g) (**1 P**) In welcher Beziehung steht der Erwartungswert der Hamiltonfunktion $\langle H \rangle$ zu den Erwartungswerten der kinetischen Energie $\langle T \rangle$ und der potentiellen Energie $\langle U \rangle$? Drücken Sie $\langle T \rangle$ und $\langle U \rangle$ durch $\langle H \rangle$ aus. Welche physikalische Größe wird durch H beschrieben?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 2 (25 Punkte)

Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale, masselose Federn derselben Federkonstanten k verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde ($g > 0$) (siehe Abbildung). Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängepunkte der durch sie verbundenen Pendel. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) (**8 P**) Stellen Sie die Lagrangefunktion für den Fall kleiner Auslenkungen der Pendel auf. Nehmen sie dabei näherungsweise an, dass das durch die Federn verursachte Potential nur vom *horizontalen* Abstand zweier Pendel abhängt. *Hinweise*: $\tan\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ und $\sin\alpha \approx \alpha$ für $\alpha \ll 1$.

b) (**3 P**) Leiten Sie aus der Lagrangefunktion dieses Systems die Bewegungsgleichungen ab.

c) (**8 P**) Zeigen Sie, dass die Eigenfrequenzen des Systems gegeben sind durch

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}, \quad \omega_{\mathrm{II}}^2 = \frac{g}{l} \quad \text{und} \quad \omega_{\mathrm{III}}^2 = \frac{g}{l} + \frac{3k}{m}.$$

Hinweise: Einige der Eigenfrequenzen kann man auch durch Symmetrieüberlegungen erhalten. Geben Sie dann aber eine Begründung an. Die in den Bewegungsgleichungen auftretende Matrix hat mit den noch zu bestimmenden Parametern ω_0 und β die Form

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} 1+\beta & -\beta & 0 \\ -\beta & 1+2\beta & -\beta \\ 0 & -\beta & 1+\beta \end{pmatrix}$$

d) (**4 P**) Berechnen Sie explizit die zu den zwei langsamsten Eigenschwingungen gehörigen Normalschwingungen.

Hinweis: Falls Sie die Normalschwingungen nicht berechnen können, geben sie zumindest die Schwingungsform an und ordnen Sie diese den Eigenfrequenzen zu, die Sie gefunden haben. Begründen Sie dann Ihr Ergebnis kurz.

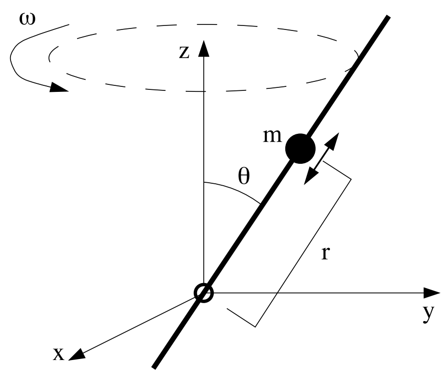
e) (**2 P**) Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Normalschwingung an. Begründen Sie kurz, warum diese Schwingung zur größten Eigenfrequenz gehört.

Wählen Sie aus den folgenden Aufgaben 3 und 4 nur *eine* zur Bearbeitung aus!

Aufgabe 3 (15 Punkte)

(**Wählen Sie diese Aufgabe oder Aufgabe 4 zur Bearbeitung!**)

Ein Teilchen der Masse m wird durch eine Zwangskraft auf einer masselosen Stange gehalten, auf der es reibungsfrei gleiten kann (siehe Abbildung). Die Stange steht in einem festen Winkel θ zur z-Achse und rotiert mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) (**6 P**) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Teilchens explizit in Kugelkoordinaten auf.

b) (**3 P**) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung aus der Lagrangefunktion.

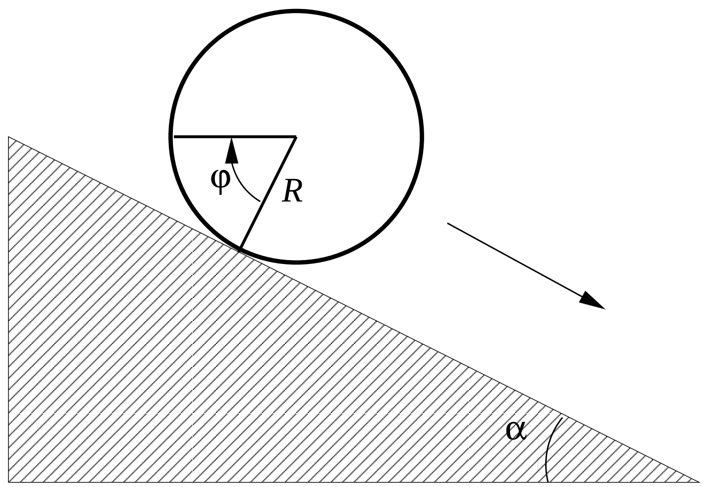
c) (**6 P**) Lösen Sie die Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r}(0) = 0$. Skizzieren Sie die Lösung $r(t)$ und die Projektion der Bewegung auf die x-y-Ebene. Bestimmen Sie das Verhalten von $r(t)$ für $t \to \infty$: wohin bewegt sich das Teilchen?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (15 Punkte)

(**Wählen Sie diese Aufgabe oder Aufgabe 3 zur Bearbeitung!**)

Eine homogene Kugel und ein homogener Zylinder mit gleicher Masse M und gleichem Radius R rollen unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung $g > 0$ eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α hinab.



a) (**6 P**) Berechnen Sie die Trägheitsmomente der beiden Körper bezüglich der Rotationsachse der Rollbewegung, d.h. für die Kugel bezüglich der Rotation um einen Durchmesser und für den Zylinder bezüglich einer Rotation um seine Längsachse. Zeigen Sie, dass mit einer homogenen Massenverteilung gilt

$$I_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad \text{und} \qquad I_{\text{Zylinder}} = \frac{1}{2}MR^2.$$

Hinweis: $\int_0^\pi d\theta \, \sin^3\theta = \int_{-1}^1 d(\cos\theta)(1-\cos^2\theta)$.

b) (**6 P**) Stellen Sie für beide Körper die jeweilige Lagrangefunktion für die Bewegung auf der schiefen Ebene auf. Benutzen Sie den Rotationswinkel φ um die Rollachse als verallgemeinerte Koordinate des Problems. Wie weit bewegt sich der Schwerpunkt des Körpers, wenn der rollende Körper mit Radius R um einen Winkel φ rotiert? Welche Anteile hat die kinetische Energie, wenn man die Rotationsenergie und die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung berücksichtigt?

c) (**3 P**) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf. Wie groß sind die jeweiligen Beschleunigungen, welche die beiden Körper erfahren? Welcher Körper ist damit schneller unten, wenn beide vom gleichen Ort aus der Ruhe losgelassen werden?