................
Note

| | |
|---|---|
| Name | Vorname |

| | | |
|---|---|---|
| Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach) |

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| $\sum$ | | |

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Probeklausur
# Mathematik 4 für Physik
# (Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

23. Dezember 2009, 10:15 – 11:45 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

1. **Zirkulation** **[8 Punkte]**

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Zirkulation von $F$ entlang des im mathematisch positiven Sinne orientierten Einheitskreises in der $xy$-Ebene.

2. **Fluss durch Oberfläche** **[10 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = (2-z)^2,\ 0 \leq z \leq 2\}$ die Mantelfläche des Kegels $K$ mit kreisförmigem Querschnitt dessen Kegelspitze bei $(0,0,2)$ liegt. $S$ sei so orientiert, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 y \\ (1-z)(x^2+y^2) \end{pmatrix},$$

durch $S$.

3. **Differenzialformen** **[6 Punkte]**

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

(a) Geben Sie die zu $v$ assoziierte 1-Form $v^* \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ an:

$v^* =$

(b) Unter welcher Bediungung an $v$ ist $v^*$ eine exakte Differentialform?

(c) Sei $n = 3$ und betrachten Sie das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie:

$$\mathrm{d}v^* = \boxed{\phantom{xx}}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \boxed{\phantom{xx}}\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \boxed{\phantom{xx}}\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

4. **Holomorphe Funktionen** **[4 Punkte]**

Sei $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = y^2 - x^2$. Geben Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, sodass

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

$v(x,y) =$

5. **Laurent-Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Geben Sie die Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

um $z = 0$ an:

$$\boxed{f(z) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(b) Geben Sie den größtmöglichen Kreisring $K$ an, für den die Laurent-Reihe

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^n + 1}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert.

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \boxed{\quad} < \left| z - \boxed{\quad} \right| < \boxed{\quad} \right\}$$

6. **Singularitäten** **[9 Punkte]**

(a) Welchen Typ von Singularität hat $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ bei $z = 0$?

☐ hebbar ☐ Pol 1. Ordnung ☐ Pol 2. Ordnung ☐ Pol $-1$. Ordnung ☐ wesentliche

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \pi.$$

7. **Komplexes Wegintegral** **[4 Punkte]**

Sei $\gamma$ ein Weg in der komplexen Ebene, der einmal den vollen Kreis um den Ursprung mit Radius $R > 0$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufe. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathrm{d}z \, \mathrm{Re}\,(z) \, \mathrm{Im}\,(z).$$