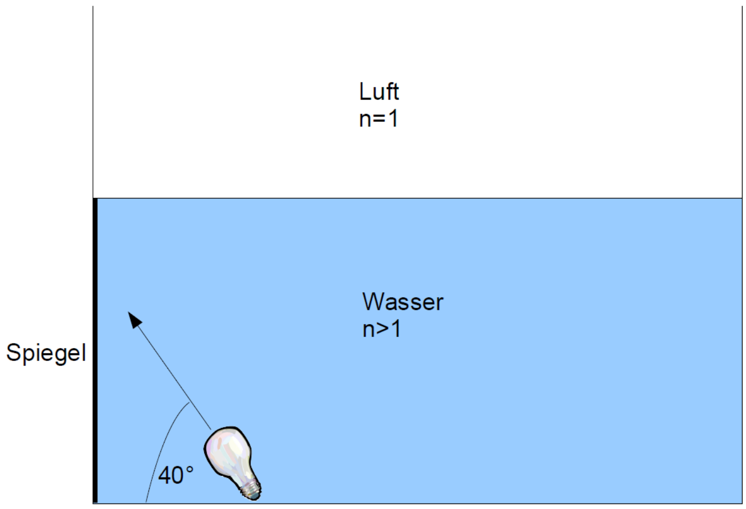
# Klausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer
Wintersemester 2010/2011
15. Februar 2011
**Lösungsvorschlag**

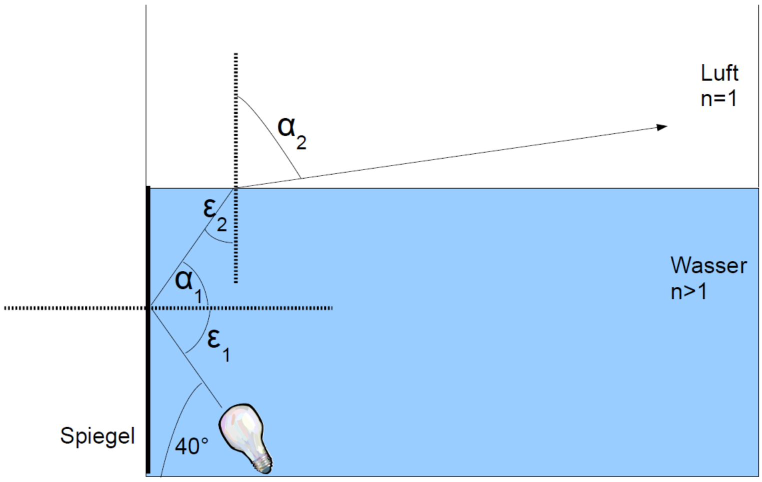
## Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Brechzahl $n$ in einem Medium ist eine Funktion der Frequenz. Es liegt also Dispersion vor. Im folgenden soll ein Wasserbecken indirekt beleuchtet werden. Dazu wird eine Lampe am Beckenboden angebracht. Das Licht fällt auf einen Spiegel, der an einer Seite des Beckens angebracht ist. Der Winkel zwischen Lichtstrahl und Beckenboden beträgt 40°. Vom Spiegel trifft der Lichtstrahl auf die glatte Wasser-Luft Grenzfläche. Die Brechzahl der Luft sei für alle Frequenzen $n_L$=1.000. Für Wasser sei die Brechzahl abhängig von der Frequenz, für rotes Licht $n_R = 1.295$ und für grünes Licht $n_G = 1.300$.



$a)$ Übernehmen Sie die Zeichnung und skizzieren Sie qualitativ den Strahlengang.

### Lösung:




**[2]**

$b)$ Bestimmen Sie die Lichtgeschwindigkeiten $c_R$ für rotes und $c_G$ für grünes Licht im Wasser.

### Lösung:

Die Lichtgeschwindigkeit als Funktion des Brechungsindex $n$ ist gegegeben durch:

$$c(n) = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} \tag{1}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass

$$c_R = 2.32 \times 10^8 \text{m/s} \tag{2}$$

$$c_G = 2.31 \times 10^8 \text{m/s} \tag{3}$$

**[1]**

$c)$ Berechnen Sie für rotes Licht alle Ein- und Ausfallswinkel, die an den optischen Grenzflächen auftreten. Geben Sie alle vier Winkel explizit an.

## Lösung:

Die Ein- und Ausfallwinkel für rotes Licht sind gegeben durch:

$$\epsilon_1 = 40^\circ \quad \text{(am Spiegel)} \tag{4}$$

$$\alpha_1 = 40^\circ \quad \text{(Einfallswinkel = Ausfallwinkel)} \tag{5}$$

[**1**]

$$\epsilon_2 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \tag{6}$$

[**1**]

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_R}{n_{\text{Luft}}}\sin(\epsilon_2)\right) = 82.76^\circ \tag{7}$$

[**1**]

*d*) Blaues Licht wird an der Wasser-Luft Grenzfläche totalreflektiert und läuft dann an der Grenzfläche entlang (Ausfallswinkel 90°). Bestimmen Sie die Brechzahl $n_B$ für blaues Licht.

## Lösung:

Aus Teil c) ist bekannt, dass

$$\epsilon_2 = 50^\circ \tag{8}$$

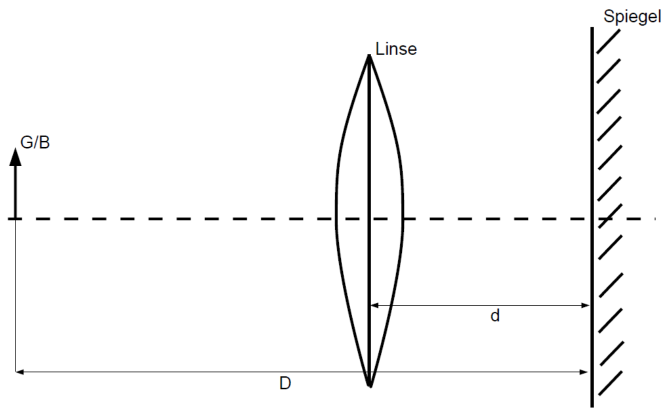
Der Ausfallwinkel $\alpha_2$ ist bei Totalreflektion 90°, wie angegeben. Daher beträgt $\sin(\alpha_2)$=1 und für die Brechzahl von blauem Licht ergibt sich:

$$n_B = \frac{n_L}{\sin(\epsilon_2)} = 1.305 \tag{9}$$

[**1**]

## Aufgabe 2 (6 Punkte)

In einem Abstand $D = 2\text{m}$ vor einem ebenen Spiegel befindet sich ein Gegenstand $G$. Dieser soll durch eine zwischen $G$ und dem Spiegel aufgestellte dünne Sammellinse der Brennweite $f = 0.25\text{m}$ so abgebildet werden, dass sich der Gegenstand $G$ und sein Bild $B$ genau decken. In welchen Abständen $d$ vom Spiegel kann die Linse aufgestellt werden, damit dies erreicht wird?




## Lösung:

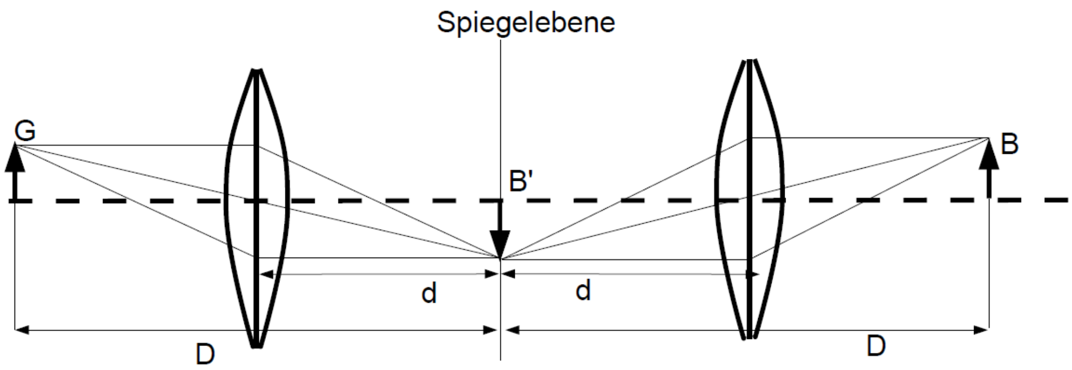
Zur Lösung dieser Aufgabe verwendet man natürlich die Abbildungsgleichung für Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{10}$$

[**1**]

Ohne den Spiegel müsste der Strahlengang symmetrisch zur Spiegelebene sein:

[**1**]



Daher muss auf der Spiegelebene ein reelles Bild $B'$ abgebildet sein, von dem aus durch die Linse das Bild $B$ projiziert werden kann.

[**1**]

Gleichung (10) wird dann zu:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{D-d} + \frac{1}{d} \tag{11}$$

[**1**]

Sie muss nach $d$ aufgelöst werden:

$$D - d = f + f\frac{D-d}{d} \tag{12}$$
$$Dd - d^2 = fD \tag{13}$$
$$d^2 - Dd + fD = 0 \tag{14}$$
$$\rightarrow d = \frac{1}{2}(D \pm \sqrt{D^2 - 4fd}) \tag{15}$$

[**1**]

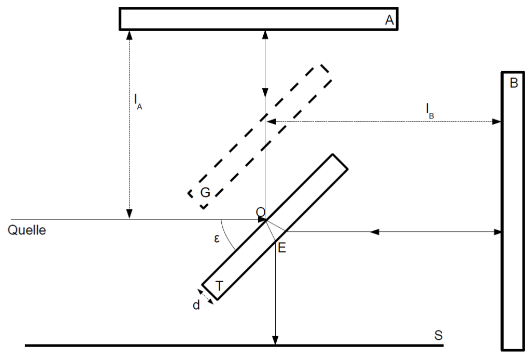
Und so ist der Abstand schließlich

$$d = (1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2})\text{m} = (1.0 \pm 0.707)\text{m} \tag{16}$$

[**1**]

## Aufgabe 3 (12 Punkte)

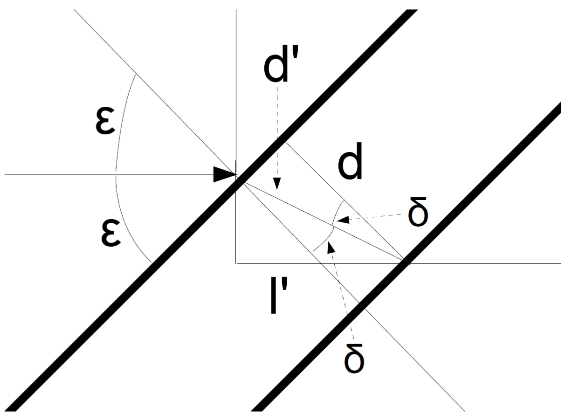
Ein Michelson-Interferometer besteht aus zwei Spiegeln $A$ und $B$ und einer halbdurchlässigen Strahlteiler-Platte $T$ der Dicke $d = 2\text{mm}$ mit der Brechzahl $n = 1.7$. Sie ist um $\epsilon = 45°$ gegen den einfallenden Strahl geneigt. An ihrer Vorderseite wird das auftreffende Licht der Wellenlänge $\lambda = 438\text{nm}$ in zwei Teilstrahlen aufgeteilt. Die Abstände zwischen $T$ und $A$ bzw. $B$ sind $l_A$ bzw. $l_B$.




*a*) Die Platte $G$ sei zunächst nicht vorhanden. Berechnen Sie die optischen Weglängen $x_A = \overline{OAOE}$ und $x_B = \overline{OBOE}$ der beiden Teilstrahlen. Wie groß ist der optische Gangunterschied $\Delta = x_B - x_A$ zwischen den Strahlen, wenn $l_A = l_B$ ist?

### Lösung:

Siehe Skizze für Bezeichnung der Winkel:




Dann ist:

$$d' = \frac{d}{\cos(\delta)} \quad , \quad l' = d' \cos(45° - \delta) \tag{17}$$

**[1]**

Damit kann nun der geometrische Weg $d'$ im Glas berechnet werden. Der Winkel $\delta$ ist durch das Snellius'sche Brechgesetz gegeben:

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\epsilon)} = \frac{n_{\text{Luft}}}{n} \tag{18}$$

[**1**]

$$\delta = \arcsin(\sin(\epsilon) \cdot \frac{1}{n}) = 24.58° \tag{19}$$

[**1**]

Dann ist $d'$:

$$d' = \frac{d}{\cos(\delta)} = 2.199\text{mm} \tag{20}$$

[**1**]

Für die gesuchten optischen Weglängen müssen die Phasensprünge beachtet werden, die bei Reflexion an optisch dichteren Medien stattfinden. Für $x_A$ finden zwei Phasensprünge statt, and den Punkten $O$ und $A$. Für $x_B$ findet ein Phasensprung an Punkt $B$ statt. Dann ergibt sich:

$$x_A = \overline{OAOE} = 2l_A + 2\frac{\lambda}{2} + nd' \tag{21}$$

[**1**]

$$x_B = \overline{OBOE} = 2l_B - 2l' + \frac{\lambda}{2} + 3nd' \tag{22}$$

[**1**]

Für die Differenz $\Delta$ für den Fall $l_A = l_B$ ergibt sich dann:

$$\Delta = x_B - x_A = 2(nd' - l') - \frac{\lambda}{2} \tag{23}$$

[**1**]

$$= 2d'(n - \cos(45° - \delta)) - \frac{\lambda}{2} = 3.355\text{mm} \tag{24}$$

[**1**]

*b*) In den Strahlengang zu Spiegel $A$ wird nun eine Glasplatte $G$ derselben Brechzahl und Dicke wie $T$ parallel zu $T$ aufgestellt. Wie groß ist jetzt $\Delta$?

**Lösung:**

Zu $x_A$ addiert sich nun $2(nd' - l')$.

[**1**]

Mit dem Ergebnis aus a) ergibt sich daraus:

$$\Delta = -\frac{\lambda}{2} = -219\text{nm} \tag{25}$$

[**1**]

*c*) Welche Eigenschaft muss das von der Quelle $Q$ ausgesandte Licht haben, damit auf dem Schirm $S$ Interferenzerscheinungen entstehen? Welche Bedingung muss dann $\Delta$ erfüllen, damit am Schirm maximale Helligkeit zu sehen ist?

**Lösung:**

Das von der Quelle $Q$ ausgesandte Licht muss kohärent sein; genauer gesagt muss die Kohärenzlänge des Lichts größer als $\Delta$ sein.

[**1**]

Maximale Helligkeit ergibt sich für:

$$\Delta = \pm k\lambda \tag{26}$$

wobei $k$ eine ganze Zahl ist.

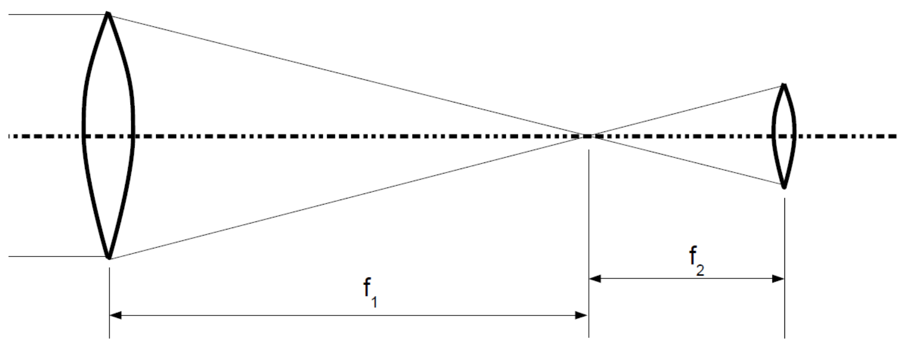
[**1**]

## Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein einfaches astronomisches Fernrohr besteht aus einer Sammellinse als Objektiv und einem Okular, mit dem ein vom Objektiv erzeugtes, reelles Zwischenbild beobachtet wird.

*a*) Skizzieren Sie den Strahlengang des Fernrohres.
**Hinweis:** Man beobachtet mit entspanntem Auge, das "auf unendlich" eingestellt ist.

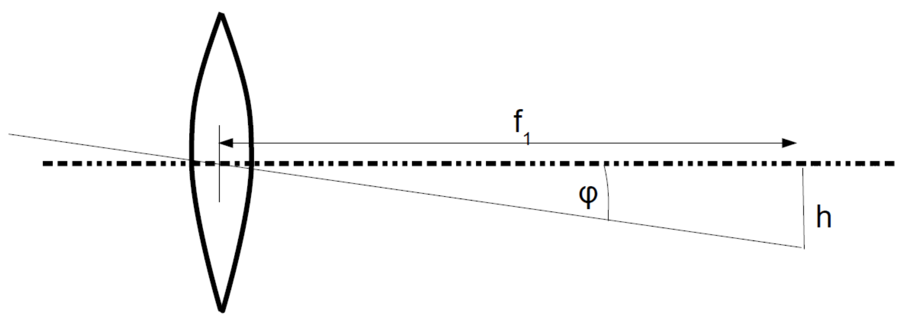
### Lösung:




**[2]**

*b*) Welche Brennweite hat das Objektiv des Fernrohrs, wenn der Mond im Zwischenbild 1cm Durchmesser hat? Der Winkeldurchmesser des Mondes sei 0.5°.

### Lösung:




Man verwendet die Kleinwinkelnäherung:

$$\frac{h}{f_1} = \tan(\phi) \approx \phi \rightarrow f_1 = \frac{h}{\phi} \tag{27}$$

[**1**]

$$f = \frac{1\text{cm}}{0.5^\circ} \frac{180^\circ}{\pi} = 114.6\text{cm} \tag{28}$$

[**1**]

*c*) Welche Vergrößerung ergibt sich bei einer Brennweite des Okulars von 10mm?

## Lösung:

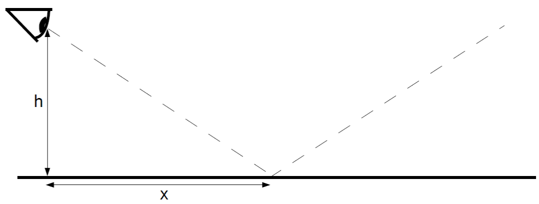
Die Vergrößerung ist gegeben durch:

$$V = \frac{f_1}{f_2} = \frac{114.6\text{cm}}{1\text{cm}} \approx 115 \tag{29}$$

[**1**]

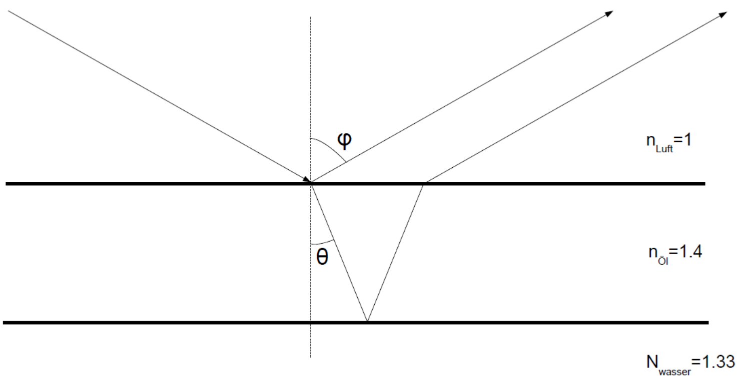
## Aufgabe 5 (11 Punkte)

Ein Student (Augenhöhe $h = 150\text{cm}$) blickt auf eine Wasserpfütze ($n_{\text{Wasser}} = 1.33$), welche mit einem dünnen Ölfilm der Dicke $d$ bedeckt ist ($d = 0.13\mu\text{m}$, $n = 1.4$).




*a*) In welchem Abstand $x$ erscheint das vom Ölfilm reflektierte Licht rot ($\lambda = 650\text{nm}$), in welchem Abstand grün ($\lambda = 530\text{nm}$)? Das Licht erscheine rot (grün), wenn für die entsprechende Wellenlänge konstruktive Interferenz auftritt.

### Lösung:




Es liegt natürlich Interferenz dünner Schichten vor. Zu berücksichtigen sind also die Unterschiede der optischen Wellenlänge sowie die Phasensprünge bei den optischen Übergängen. Daraus ergibt sich für den Gangunterschied folgende Gleichung:

$$\delta = 2dn_{\text{Öl}}\cos(\phi) = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{30}$$

[**1**]

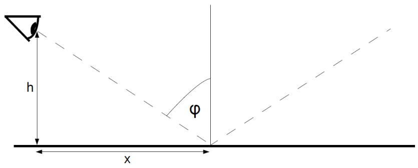
Mit dem Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\phi)}{\sin(\theta)} = \left(\frac{n_{\text{Öl}}}{n_{Luft}}\right) \rightarrow \sin(\phi) = n_{\text{Öl}}\sin(\theta) \tag{31}$$

wird dies zu

$$2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2(\phi)} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda \tag{32}$$

[**1**]




Nun ist $x$ gegeben durch

$$x = h\tan(\phi) \tag{33}$$

[**1**]

Also wird der Winkel $\phi$ gesucht; deshalb wird Gleichung (32) nach $\sin^2(\phi)$ aufgelöst:

$$0 \leq \sin^2(\phi) = n_{\text{Öl}}^2 - \left(\frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2d}\right)^2 \leq 1 \tag{34}$$

[**1**]

Betrachtet man diese Gleichung, so wird klar, dass es in beiden Fällen ($\lambda$ =650nm und $\lambda$ =530nm) keine Lösung für $k \neq 0$ geben kann, da $\sin^2(\phi)$ nicht negativ sein kann.

[**1**]

Daher ist für $\lambda$ =650nm und $k = 0$:

$$\sin^2(\phi) = 0.398 \rightarrow \phi = 39^\circ \tag{35}$$

$$\rightarrow x = 1.22\text{m} \tag{36}$$

[**1**]

Für $\lambda$ =530nm und $k = 0$:

$$\sin^2(\phi) = 0.921 \rightarrow \phi = 74^\circ \tag{37}$$

Und somit ist

$$x = 5.13\text{m} \tag{38}$$

[**1**]

*b*) Der Ölfilm verdunstet nun langsam. In welcher Richtung bewegt sich der rot reflektierende Teil des Films? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Lösung:

Da das Öl verdunstet, verringert sich $d$. Aus Gleichung (32) ist sofort ersichtlich, dass sich auch $\sin^2(\phi)$ verkleinert.

[**1**]

Dadurch verringert sich $\phi$ und daher auch $x$. Der rot reflektierende Teil des Films bewegt sich also zum Beobachter hin.

[**1**]

*c*) In welchem Bereich kann die Schichtdicke variieren, damit man in niedrigster Ordnung genau einen Streifen roten Lichts beobachtet?

## Lösung:

Eine Beobachtung in niedrigster Ordnung bedeutet, dass $k = 0$.

[**1**]

Da

$$0 \leq \sin^2(\phi) = n_{\text{Öl}}^2 - \left( \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda}{2d} \right)^2 \leq 1 \tag{39}$$

ist, liegt der Variationsbereich zwischen $\sin^2(\phi) = 0$ und $\sin^2(\phi) = 1$. Für $\sin^2(\phi) = 0$:

$$d = \frac{\lambda}{4 n_{\text{Öl}}} = 116\text{nm} \tag{40}$$

Für $\sin^2(\phi) = 1$:

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - 1}} = 166nm \tag{41}$$

[**1**]

Daher kann die Schichtdicke zwischen 116nm und 166nm variieren.

## Aufgabe 6 (9 Punkte)

*a*) Licht der Intensität $100\text{W/m}^2$ aus einer Halogenlampe falle auf einen idealen Linearpolarisator mit senkrechter Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensität beim Austritt? Hinter den ersten Polarisator schaltet man nun einen weiteren Linearpolarisator mit horizontaler Durchlassrichtung. Wie groß ist die Intensität nach dem zweiten Polarisator?

### Lösung:

Nach Durchgang durch eine Folie bleibt die Hälfte der Intensität über, denn Licht kann ja immer in zwei senkrechte Komponenten aufgespalten werden. Also:

$$I_1 = 50\text{W/m}^2 \tag{42}$$

[**1**]

Dann hat man eine gekreuzte Anordnung: D.h. es kommt gar keine Intensität mehr durch, denn alle horizontalen Komponenten sind ja zuvor herausgefiltert worden.

[**1**]

*b*) Nun bringt man noch einen dritten Linearpolarisator zwischen die beiden ersten. Seine Durchlassrichtung ist um 45° gedreht. Wie groß ist nun die Intensität nach allen drei Polarisationen? Erklären Sie das auftretende "Paradoxon"!

### Lösung:

Führt man den dritten Polarisator im Winkel von 45° ein, erhält man wieder Intensität. Zunächst nach dem zweiten Filter:

$$I_2 = \frac{I_0}{2}\cos^2(45°) = \frac{I_0}{4} = 25\text{W/m}^2 \tag{43}$$

[**1**]

Nach dem nächsten hat man wieder eine Halbierung der Intensität:

$$I_3 = 12.5\text{W/m}^2 \tag{44}$$

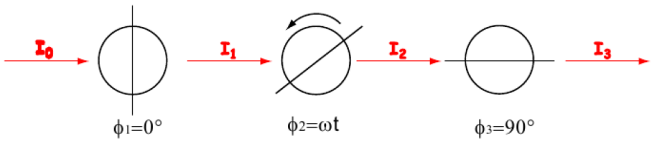
[**1**]

Dies erscheint paradox. Wieso kommt wieder Intensität durch, wenn man in eine Anordnung, die nichts durchlässt, noch einen weiteren Filter hineinstellt? Die schwingenden Elektronen im zweiten Filter erzeugen wieder eine Komponente in der horizontalen Achse. Das linear polarisierte Licht dieses Filters lässt sich eben wieder in zwei senkrechte Komponenten zerlegen, die nun eben wieder eine geeignete Komponente enthalten. Diese Komponente wird also durch den Filter und den in ihm angeregten Schwingungen wieder erzeugt.

[**1**]

*c)* Ein Lichtstrahl wird durch zwei gekreuzte perfekte Polarisationsfilter geleitet, zwischen denn sich ein dritter, ebenfalls perfekter Polarisationsfilter befindet, der mit der Kreisfrequenz $\omega$ rotiert. Zeigen Sie, dass der transmittierte Lichtstrahl mit der Frequenz $4\omega$ moduliert ist. Wie verhalten sich Amplitude und Mittelwert der transmittierten zur einfallenden Flussdichte?

## Lösung:




Der einfallende Lichtstrahl ist natürliches Licht und somit unpolarisiert. Daher erhält man sofort, dass

$$I_1 = \frac{I_0}{2} \tag{45}$$

**[1]**

Dann ist die Intensität nach Durchqueren des zweiten Polarisationsfilters:

$$I_2 = I_1 \cos^2(\omega t) \tag{46}$$

**[1]**

Und nach dem Durchqueren des dritten Filters:

$$I_3 = I_2 \cos^2(90° - \omega t) \tag{47}$$

Wegen $\cos^2(90° - \omega t) = \sin^2(\omega t)$ wird daraus schließlich:

$$I_3 = \frac{I_0}{2} \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\omega t) = \frac{I_0}{8} \sin^2(2\omega t) = \frac{I_0}{16}(1 - \cos(4\omega t)) \tag{48}$$

**[1]**

Das ist gerade die gesuchte Frequenz $4\omega t$. Anschaulich gedeutet bekommt man viermal pro Umdrehung gekreuzte Polarisatoren, also keine Intensität:

$$I_{3,\text{min}} = 0 \quad , \quad I_{3,\text{max}} = \frac{I_0}{8} \quad , \quad \overline{I_3} = \frac{I_0}{16} \tag{49}$$

**[1]**

## Aufgabe 7 (7 Punkte)

Röntgenstrahlung mit einer Wellenlänge von 20pm treffen auf freie Elektronen in einer dünnen Aluminiumfolie und werden durch den Compton-Effekt gestreut.

*a*) Welche Energie und welchen Impuls hat ein Photon der eingehenden Röntgenstrahlung?

### Lösung:

Energie und Impuls sind einfach zu bestimmen:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = 9.9 \times 10^{-15}\text{J} \tag{50}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = 3.3 \times 10^{-23}\frac{\text{kgm}}{\text{s}} \tag{51}$$

[**1**]

*b*) Nach Streuung in der Folie werden Photonen unter einem Winkel von 60° relativ zur Eingangsrichtung gestreut. Wie groß ist der Anteil der Eingangsenergie der Photonen, den diese auf das Elektron übertragen? Welche Wellenlängenverschiebung tritt auf?

### Lösung:

Man wendet die Gleichung für Compton-Streuung an:

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos(\theta)) \tag{52}$$

mit

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c} \approx 2.43\text{pm} \tag{53}$$

[**1**]

Der Streuwinkel beträgt $\theta = 60°$. Damit ist

$$\Delta\lambda = 0.5\lambda_C = 1.21\text{pm} \tag{54}$$

Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung ist also

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 21.21\text{pm} \tag{55}$$

[**1**]

Dies entspricht einer Energie von

$$E' = h\frac{c}{\lambda'} = 9.3 \times 10^{-15}\,\mathrm{J} \tag{56}$$

und somit beträgt der relative Energieverlust bei diesem Streuprozess

$$\frac{E'}{E} = \frac{2}{33} \quad (\approx 6\%) \tag{57}$$

[**1**]

*c*) Was ist der maximal mögliche Energieverlust, den ein Photon mit Wellenlänge $\lambda$ erfahren kann?

## Lösung:

Der maximale Energieübertrag wird bei Rückstreuung mit $\theta = 180^\circ$ erreicht.

[**1**]

*d*) Warum betrachtet man gemeinhin nur den Fall der Streuung an freien Elektronen und nicht etwa an Protonen? Berechnen Sie die Comptonwellenlänge für ein Proton und kommentieren Sie diese.

## Lösung:

Compton-Streuung an Protonen kann durchaus stattfinden.

[**1**]

Die entsprechende Comptonwellenlänge für Protonen ist jedoch etwa 200 mal kleiner als die für Elektronen:

$$\lambda_{C,Proton} = \frac{h}{m_p c} \tag{58}$$

Daher ist der Proton-Compton-Effekt für Röntgenstrahlen etwa so stark wie der Elektronen-Compton-Effekt für sichtbares Licht. Dieser Effekt spielt überhaupt erst eine Rolle für extrem harte Gammastrahlung.

[**1**]