Lösung der Probeklausur

Aufgabe 0.1 (Quickies (8 Punkte)).

a) Ein Komet mit Masse m, Energie $E > 0$ und Drehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ bewegt sich im radialsymmetrischen Potential $V(r) = -\frac{\beta}{r^2}$. Bei welchen Werten des Parameters β kann der Komet ins Zentrum stürzen?

b) $L(q, \dot{q})$ sei die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen Systems. Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen an und zeigen Sie, dass die Größe

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

eine Erhaltungsgröße ist.

c) Ein Auto der Masse m wird aus dem Stand mit konstanter *Leistung* P beschleunigt. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Autos jeweils als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie Reibungseffekte.

d) In einem System aus N Massenpunkten m_i wechselwirken die Teilchen über ein Zweiteilchenpotential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} v\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right).$$

Nennen Sie zwei Größen, die durch Hinzufügen eines äußeren Potentials $V_{\text{ext}} = \sum_i m_i g z_i$ nicht mehr erhalten sind.

Lösung.

a) Das effektive Potential ist $V_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\beta}{r^2}$, somit ist für $L^2 - 2m\beta < 0$ das Zentrum ein Minimum und der Komet kann hineinfallen.

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}.$$

Für die Zeitableitung von E gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \ddot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dot{q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \\ &= \dot{q}\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q} = 0\end{aligned}$$

c) Bei konstanter Leistung ergibt sich die Energie zu $E = \frac{1}{2}mv^2 = Pt$ und somit

$$v(t) = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}, \qquad a(t) = \sqrt{\frac{P}{2m}t}$$

d) Das äußere Potential zerstört die Erhaltung der Drehimpulskomponenten L_x und L_y sowie des Gesamtimpulses in z-Richtung P_z.

□

Aufgabe 0.2 (Raketenflug (6 Punkte))**.** Eine Rakete der Gesamtmasse m_0 transportiert einen Satelliten der Masse m_s und startet von der Erdoberfläche. Die Bewegungsgleichung der Rakete im Schwerefeld ($g = \text{const.}$) lautet

$$m(t)\dot{v}_z = -m(t)g - \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{g}, \tag{1}$$

wobei $m(t) = m_0 - (m_0 - m_\mathrm{s})\frac{t}{t_\mathrm{B}}$ die zeitabhängige Masse der Rakete für $0 \leq t \leq t_\mathrm{B}$ mit der Brenndauer t_B ist und u_g die konstante, relative Geschwindigkeit der austretenden Gase ist.

a) Geben Sie die Bedingung an, dass die Rakete abhebt.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit t für $0 \leq t \leq t_\mathrm{B}$ und speziell die Endgeschwindigkeit bei $t = t_\mathrm{B}$.

c) Geben Sie den Ausdruck für die erste kosmische Geschwindigkeit eines Körpers, der sich reibungsfrei auf einer Kreisbahn knapp über der Erdoberfläche bewegt, in Abhängigkeit der Erdbeschleunigung und des Erdradius R_E an.

d) Schätzen Sie unter Vernachlässigung der Erdbeschleunigung ($g = 0$) die Nutzlast m_s, die die Rakete der Masse $m_0 = 2 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$ mit $u_\mathrm{g} = 2 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf die erste kosmische Geschwindigkeit bringen kann.

Lösung. a) Damit die Rakete abhebt, muss die Beschleunigung am Anfang nach oben weisen, also $\dot{v}(0) > 0$. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{(m_0 - m_\mathrm{s})}{t_\mathrm{B}}u_\mathrm{g} > m_0 g.$$

b) Die Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\,v_z}{\mathrm{d}t} &= -g - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{g} \\
v_z &= u_\mathrm{g} \ln \frac{m_0}{m(t')} - g t' \bigg|_0^t \\
v(t_\mathrm{B}) &= u_\mathrm{g} \ln \frac{m_0}{m_\mathrm{s}} - g t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

c) Die erste kosmische Geschwindigkeit ergibt sich aus dem Gleichgewicht von Zentrifugal- und Schwerkraft

$$\begin{aligned} m\frac{v_1^2}{R_\mathrm{E}} &= mg \\ v_1 &= \sqrt{gR_\mathrm{E}} \approx 8 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

Aus der Endgeschwindigkeit aus Aufgabenteil b) lesen wir mit $v(t_\mathrm{B}) = v_1$ ab

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{u_g} &= \ln\frac{m_0}{m_s} \\ m_\mathrm{s} &= \mathrm{e}^{-\frac{v_1}{u_g}} m_0 = \mathrm{e}^{-4} m_0 \approx 36 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

□

Aufgabe 0.3 (Zwangskräfte (9 Punkte))**.** Ein Pinguin der Masse m gleitet aus dem Stand reibungslos auf der Außenseite eines Iglu (Halbkugel mit Radius R) im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Nehmen Sie an, dass die Bewegung in der x-z-Ebene stattfindet und der Startpunkt infinitesimal nah zum höchsten Punkt des Iglu ist.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten unter der Zwangsbedingung $r = R$.

b) Bestimmen Sie aus dem Energieerhaltungssatz die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ.

c) Der Kontakt geht verloren, wenn die Zwangskraft nach Innen gerichtet wäre. Bestimmen Sie den kritischen Winkel φ_c, bei dem der Pinguin den Kontakt mit dem Iglu verliert.

Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$.

Lösung. a) Die Bewegungsgleichung unter einer Zwangsbedingung $f(\vec{r}, t) = r - R = 0$ ergibt sich zu

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}' = \vec{F} + \lambda\vec{\nabla} f. \tag{I}$$

In Polarkoordinaten gilt

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r\vec{e}_r, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Für die Kräfte folgt

$$
\begin{aligned}
\vec{F} &= mg\vec{e}_x = -mg\cos\varphi\vec{e}_r + mg\sin\varphi\vec{e}_\varphi, \\
\vec{F}' &= \lambda\vec{\nabla}f = \lambda\frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \lambda\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi = \lambda\vec{e}_r,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Zwangsbedingung $f(\vec{r},t) = r - R = 0$ verwendet haben. Damit lauten die r- und φ-Komponente der Bewegungsgleichung (I)

$$
\begin{aligned}
m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= -mg\cos\varphi + \lambda, \\
\frac{m}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) &= mg\sin\varphi.
\end{aligned}
$$

Unter Verwendung der Zwangsbedingung ($r = R$ und $\ddot{r} = 0$) erhalten wir daraus

$$
\begin{aligned}
\lambda &= mg\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{\varphi} &= \frac{g}{R}\sin\varphi.
\end{aligned}
\tag{II}
$$

b) Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ergibt sich aus dem Energieerhaltungssatz

$$
0 = -mgR(1-\cos\varphi) + \frac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2, \rightarrow \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\varphi)
$$

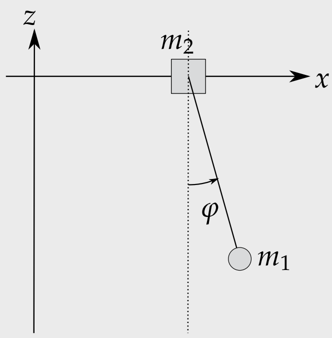
Damit erhalten wir aus der r-Komponente der Bewegungsgleichung (II)

$$
\lambda = mg(3\cos\varphi - 2).
$$

c) Sobald die Zwangskraft in der obigen Betrachtung nach Innen weist, passt das Modell mit der holonomen Zwangsbedingung $f(\vec{r},t) = r - R = 0$ nicht mehr zu dem experimentellen Aufbau. In diesem Sinne ist die Lösung in diesem Moment „unphysikalisch.“ Die Zwangskraft weist nach Innen, wenn $\lambda < 0$ ist, da $\vec{F}' = \lambda\vec{e}_r$. Mit der Darstellung von λ aus der letzten Teilaufgabe erhalten wir damit den kritischen Winkel φ_c, bei dem der Pinguin den Kontakt zum Iglu verliert.

$$
\begin{aligned}
\lambda = mg(3\cos\varphi - 2) &< 0 \\
\cos\varphi &< \frac{2}{3} =: \cos\varphi_\mathrm{c}.
\end{aligned}
$$

□



Aufgabe 0.4 (Pilgerschrittpendel (11 Punkte))**.**
Betrachten Sie ein Pendel der Masse m_1 und der Länge l, das an einer reibungsfrei auf Schienen gelagerten Masse m_2, die sich nur entlang der x-Achse bewegen kann, befestigt ist. Die Koordinaten der Pendelmasse seien x_1 und z_1, die der Masse m_2 seien x_2 und $z_2 = 0$. Die x-Koordinate des Schwerpunkts der beiden Massen werde mit x_s bezeichnet.

a) Bestimmen Sie x_1, z_1 und x_s als Funktionen von x_2 und dem Winkel φ, den das Pendel mit der z-Achse bildet.

b) Betrachten Sie nun x_s und φ als generalisierten Koordinaten und bestimmen Sie x_1, z_1 und x_2 als Funktionen von x_s und φ.

c) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems $L(x_\mathrm{s}, \varphi, \dot{x}_\mathrm{s}, \dot{\varphi})$ auf und zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion im Falle kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ auf die Form

$$L = \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_\mathrm{s}^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\varphi}^2 - \tfrac{1}{2} m_1 g l^2 \varphi^2 + m_1 g l \tag{2}$$

reduziert.

d) Formulieren Sie für den Fall kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ die Euler-Lagrange-Gleichungen für x_s und φ und geben Sie die Lösung an.

Lösung. a) Die Koordinaten der Masse m_1 ergeben sich zu

$$x_1 = x_2 + l\sin\varphi, \qquad z_1 = -l\cos\varphi.$$

Die x-Koordinate des Schwerpunkts ist damit

$$x_\mathrm{s} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = x_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \sin\varphi.$$

b) Durch Umkehrung der Transformation aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$x_2 = x_\mathrm{s} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} l\sin\varphi, \qquad x_1 = x_\mathrm{s} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin\varphi, \qquad z_1 = -l\cos\varphi.$$

Die Lagrange-Funktion lautet

$$
\begin{aligned}
L = T - V &= \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{z}_1^2 - m_1 g z_1 \\
&= \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_\mathrm{s} - \frac{m_1}{m_1+m_2}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m_1\left(\dot{x}_\mathrm{s} + \frac{m_2}{m_1+m_2}l\dot{\varphi}\cos\varphi\right)^2 + \frac{1}{2}m_1(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + m_1 g l\cos\varphi \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}_\mathrm{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}m_1 l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + m_1 g l\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

c) Im Falle kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ so ist wegen der Energieerhaltung auch $\dot{\varphi}^2$ beschränkt. In der Lagrangefunktion belassen wir nur Terme höchstens zweiter Ordnung

$$
L = \frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{x}_\mathrm{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}l^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_1 g l\varphi^2 + m_1 g l.
$$

Die Bewegungsgleichung für x_s lautet

$$
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s} - \frac{\partial L}{\partial x_s} = (m_1+m_2)\ddot{x}_s.
$$

Der Schwerpunkt bewegt sich also in x-Richtung geradlinig gleichförmig mit

$$
x_\mathrm{s}(t) = x_\mathrm{s}(0) + \dot{x}_\mathrm{s}(0)t.
$$

Die Bewegungsgleichung für φ lautet

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}l^2\ddot{\varphi} + m_1 g l\varphi.
$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators, welche durch

$$
\varphi(t) = \varphi(0)\cos\omega t + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega}\sin\omega t
$$

gelöst wird, wobei wir die Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)g}{m_2 l}}$ definiert haben.

□

Aufgabe 0.5 (Billard (4 Punkte))**.** Eine Billardkugel der Masse m mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ trifft eine ruhende Billardkugel der gleichen Masse. Zeigen Sie, dass nach einem nicht-zentralen, elastischen Stoß der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der Kugeln 90° beiträgt. Vernachlässigen Sie Reibung und Rotation der Kugeln.

Lösung. Bei dem Stoß sind Energie und Impuls erhalten. Somit gilt mit den Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2, \\
m\vec{v} &= m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2.
\end{aligned}
$$

Durch Quadrieren erhalten wir aus dem Impulserhaltungssatz

$$v^2 = v_1^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_2^2$$

Durch Vergleich mit dem Energieerhaltungssatz ergibt dies

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

und somit die drei Möglichkeiten

$v_1 = 0$ dies stellt den in der Aufgabenstellung ausgeschlossenen zentralen Stoß dar, bei der die erste Kugel ihren Impuls vollständig auf die zweite Kugel überträgt.

$v_2 = 0$ dies stellt den ebenfalls ausgeschlossenen Fall dar, dass die erste Kugel die zweite garnicht trifft.

$\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$ Die beiden nicht verschwindenden Geschwindigkeitsvektoren stehen senkrecht aufeinander.

□