....
Note

Name | Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physiker
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

30. Juni 2017, 15:00 – 16:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **68 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Stetigkeit** **(9 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ x \times \frac{y-x}{|y-x|} & x \neq y \end{cases}$$

definiert. Ist f stetig? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG:

Seien $x_n = (1,0,0)$ und $y_n = (1,1/n,0)$ so dass

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = (1,0,0), \qquad x = \lim_{n\to\infty} x_n = (1,0,0).$$

Es gilt

$$f(x_n,y_n) = x_n \times \frac{y_n - x_n}{|y_n - x_n|} = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = (0,0,1) \neq (0,0,0) = f(x,y)$$

und f ist nicht stetig.

2. **Kurvenlänge** **(6 Punkte)**

Gegeben sei die Kurve $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{\cosh(at)-\cosh(a)}{a} \end{pmatrix}$$

und $a > 0$. Bestimmen Sie die Länge der Kurve in Abhängigkeit von a.

LÖSUNG:

Es gilt

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(at) \end{pmatrix},$$

also ist die gesuchte Länge

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^{1} |\dot{\gamma}(t)|\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\sinh^2(at)}\, dt \\ &= \int_{-1}^{1} \cosh(at)\, dt \\ &= \frac{1}{a}(\sinh(a) - \sinh(-a)) \\ &= \frac{2\sinh(a)}{a}. \end{aligned}$$

3. **Teilchen im Kraftfeld** **(3+7 Punkte)**

Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$ Matrix. Ein Teilchen bewegt sich im Kraftfeld $F(x) = Ax$ entlang einer Kurve $x : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

(a) Ist F konservativ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Sei nun $x(T)$ ein normierter Eigenvektor von A mit Eigenwert 42 und $x(0) = 0$. Berechnen Sie die bei der Bewegung des Teilchens geleistete Arbeit.

LÖSUNG:

(a) Es gilt $F = \nabla G$ mit $G(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax$, also ist F konservativ.

(b) Die gesuchte Arbeit ist

$$A = \int_0^T F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \, dt.$$

Wegen der Kettenregel ist

$$\frac{d}{dt} G(x(t)) = \nabla G(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = F(x(t)) \cdot \dot{x}(t),$$

und somit

$$A = G(x(T)) - G(x(0)) = \frac{1}{2} x(T) \cdot Ax(T) - \frac{1}{2} x(0) \cdot Ax(0).$$

Weil $x(T)$ ein normierter Eigenvektor mit Eigenwert 42 ist, gilt

$$Ax(T) = 42 \, x(T).$$

Mit $x(0) = 0$, folgt:

$$A = \frac{42}{2} x(T) \cdot x(T) - 0 = 21.$$

4. **Divergenz** **(6 Punkte)**

Seien $v, \phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie die Formel

$$\operatorname{div} v(\phi(x)) = \sum_{k=1}^{n} \left[Dv(\phi(x))D\phi(x)\right]_{kk}.$$

LÖSUNG:

Es gilt

$$\operatorname{div} v(\phi(x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial(v \circ \phi)_k}{\partial x_k}(x) = \operatorname{Tr} D[v \circ \phi](x).$$

Mit der Kettenregel ist

$$D[v \circ \phi](x) = Dv(\phi(x))D\phi(x)$$

also

$$\operatorname{div} v(\phi(x)) = \operatorname{Tr} D[v \circ \phi](x) = \operatorname{Tr} Dv(\phi(x))D\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[Dv(\phi(x))D\phi(x)\right]_{kk}.$$

5. **Taylorpolynom** **(6+6 Punkte)**

Seien $f : \mathbb{R} \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (1+\tan y)\log\left(2+y+\frac{x^2}{2}\right).$$

(a) Wie lautet das Taylorpolynom erster Ordnung von f um 0?

$$\boxed{T_1 f((x,y);(0,0)) = \log 2 + \left(\tfrac{1}{2} + \log 2\right) y}$$

(b) Wie lautet die Hessematrix von f in 0?

$$\boxed{H_f(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}}$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{d}{dz}\tan z = 1 + \tan^2 z, \quad \frac{d^2}{dz^2}\tan z = 2\tan z(1+\tan^2 z)$$

so dass Taylor-Entwicklung um $z = 0$

$$\tan z = z + T.h.O.$$

liefert, wobei $T.h.O.$ die Terme der Ordnung z^3 oder höher bezeichnet. Ähnlich ergibt sich

$$\log(2+z) = \log 2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + T.h.O.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}(1+\tan y)\log\left(2+y+\frac{x^2}{2}\right) &= (1+y+T.h.O.)\left(\log 2 + \frac{1}{2}\left(y+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{8}\left(y+\frac{x^2}{2}\right)^2 + T.h.O.\right)\\ &= (1+y)\log 2 + (1+y)\left(\frac{1}{2}\left(y+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{8}y^2\right) + T.h.O.\\ &= \log 2 + \left(\frac{1}{2}+\log 2\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}y^2\right) + T.h.O.\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Taylor folgt

$$T_1 f((x,y);(0,0)) = \log 2 + \left(\frac{1}{2}+\log 2\right) y.$$

(b) Wegen

$$\begin{aligned}(1+\tan y)\log\left(2+y+\frac{x^3}{2}\right) &= \log 2 + \left(\frac{1}{2}+\log 2\right)y + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}y^2\right) + T.h.O.\\ &= T_1 f((x,y);(0,0)) + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T.h.O.\end{aligned}$$

gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}.$$

6. **Extrema mit Nebenbedingung** **(9 Punkte)**

Bestimmen Sie die absoluten Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x + y^2$$

unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = r^2$ für beliebiges $r > 0$.

LÖSUNG:

Auf der Nebenbedingung ist $|x| \leq r$ und $y^2 = r^2 - x^2$ also $f(x, y) = x + r^2 - x^2$. Es reicht deshalb für jedes $r > 0$ die absoluten Extrema der Funktion

$$f_r(x) = x + r^2 - x^2$$

mit $x \in [-r, r]$ zu finden. Es sind $f_r(-r) = -r$ und $f_r(r) = r$. Wegen

$$\frac{d}{dx} f_r(x) = 1 - 2x$$

gelten folgende Aussagen:

- f_r ist auf $[-r, 1/2)$ monoton steigend
- f_r ist auf $(1/2, r]$ monoton fallend
- f_r hat bei $x = 1/2$ einen lokales Maximum mit $f_r(1/2) = r^2 + 1/4$.

Also:

- Falls $r \leq 1/2$, ist das absolute Minimum $f_r(-r) = -r$ bei $(-r, 0)$ und das absolute Maximum $f_r(r) = r$ bei $(r, 0)$.
- Falls $r > 1/2$, ist das absolute Minimum bei $f_r(-r) = -r$ bei $(-r, 0)$ und die beiden absolute Maxima $f_r(1/2) = r^2 + 1/4$ bei $(1/2, \pm\sqrt{r^2 - 1/4})$.

7. **Implizit definierte Funktionen** **(2+3+4 Punkte)**

Seien $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, mit $f(X_0) = g(X_0) = 0$, wobei $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Unter welcher Bedingung kann die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ im Punkt X_0 lokal nach z aufgelöst werden?

(b) Wie lautet dann der Gradient der sich in (a) ergebenden Funktion $(x, y) \mapsto \tilde{z}(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0)?

(c) Unter welcher Bedingung können die beiden Gleichungen $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$, im Punkt X_0 lokal nach y und z aufgelöst werden?

LÖSUNG:

(a) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist die Gleichung nach z auflösbar falls $\partial_z f(X_0) \neq 0$.

(b) Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$\nabla \tilde{z}(x_0, y_0) = \frac{-1}{\partial_z f(X_0)} \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix} f(X_0).$$

(c) Die Gleichungen sind gleichzeitig erfüllt falls $F(x, y, z) = 0$ mit

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen lässt sich dieses System nach (y, z) auflösen falls

$$\begin{pmatrix} \partial_y f(X_0) & \partial_z f(X_0) \\ \partial_y g(X_0) & \partial_z g(X_0) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

8. **Umkehrfunktionen** **(4+3 Punkte)**

Sei $\Psi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

$$\Psi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die totale Ableitung von Ψ.

$$D\Psi(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus? Begründen Sie Ihre Antwort.

LÖSUNG:

(a) siehe oben

(b) Ψ ist stetig differenzierbar und die Jakobi-Matrix ist überall invertierbar, da

$$\det D\Psi(r, \phi, z) = r > 0.$$

Nach dem Satz über die Lokale Umkehrfunktion ist Ψ also ein lokaler Diffeomorphismus.