Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

10.09.2002

Vordiplom Mathematik 3 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 **10 Punkte**

a) Es sei $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar nach allen ihren Variablen. Beweise, dass

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\varphi)) = 0$$

b) Es sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar nach allen ihren Variablen. Beweise, dass

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}(A)) = 0$$

c) Gegeben sei die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$ mit

$$F(x,y,z) := \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\arctan(\sqrt{x^2+y^2+z^2})} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(1+x^2+y^2+z^2)\,(\arctan(\sqrt{x^2+y^2+z^2}))^2} \frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, so dass $\mathrm{grad}(f) = F$. Begründe die Antwort.

Aufgabe 2 **6 Punkte**

a) Es sei M eine nichtleere Menge. Wann nennt man eine Abbildung

$$f : M \times M \to \mathbb{R}$$

eine Metrik auf M?

b) Was versteht man unter einer Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V?

c) Was versteht man unter einem Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V?

Aufgabe 3 **14 Punkte**

a) Berechne die folgenden Integrale

$$\int_B (xy^2 + y^6)\, dx\, dy \qquad \int_B (xy^2 + y^6)\, dy\, dx \qquad B := [0,1] \times [0,1]$$

Man begründe das Ergebnis.

b) Es sei $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 6\}$. Ermittle mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenmethode denjenigen Punkt $x \in E$ mit kleinster Entfernung zum Ursprung.

c) Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = 14641 + 7e^{-5x^2-5y^2-5z^2} \int_0^{3x^2+3y^2+3z^2} \frac{dt}{1+t^2}$$

Ist es möglich, zwei voneinander verschiedene Punkte $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ zu finden, an denen f globale Extrema annimmt?

Aufgabe 4 **10 Punkte**

a) Es seien für $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Vorschrift

$$(x,y,z) \mapsto f_n(x,y,z) := (50x + ny, nx + 200y, z + 4)$$

Ist es möglich, zu jeder Funktion $f \in \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine zugehörige Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit positiv definiter Hesse-Matrix zu finden, so dass die Ableitungsmatrix von f gleich der Hesse-Matrix von g ist?

b) Es seien $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen und $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in beiden Variablen sowie stetig differenzierbar nach der ersten Variable. Beweise die folgende Ableitungsregel:

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\, dt = f(x, v(x))\, v'(x) - f(x, u(x))\, u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\, dt$$

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und

Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!