1. Aufgabe

1. $$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ -6y - 6x \end{pmatrix}$$ (2)

2. $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - y = 0 \quad \Rightarrow \\ y + x = 0 \Leftrightarrow y = -x \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + x = 0$$

$\Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = -1$

Für $x = 0 \underset{y=-x}{\Rightarrow} y = 0$, $x = -1 \underset{y=-x}{\Rightarrow} y = 1$ (3)

Stationäre Punkte sind höchstens:
$(0,0)$ und $(-1,1)$.

Umgekehrt: $\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\operatorname{grad} f(-1,1) = \begin{pmatrix} 6 - 6 \\ -6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1)

Also sind $(0,0)$ und $(-1,1)$ genau die stationären Punkte von f.

3. $$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$$ (1)

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H_f(0,0) = -36 < 0$ (1)

$\Rightarrow (0,0)$ ist Sattelpunkt (1)

$H_f(-1,1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}$, (1)

$\left.\begin{array}{l} \det H_f(-1,1) = (-6)(-6) \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 36 > 0 \\ a_{11} = -12 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (negativ definit) (1)

$\Rightarrow (-1,1)$ ist lokale Maximalstelle. (1)

2. Aufgabe. Graph von f, Kurve

$\varphi : [0, \pi]$

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$\text{Länge}(\varphi) = \int_0^\pi \|\varphi'(t)\|_1 \, dt = \int_0^\pi (1 + 2|\cos t|) \, dt \qquad (2)$$

$$= \int_0^\pi 1 \, dt + 2 \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt - 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt \qquad (2)$$

$$= \pi + 2 \sin t \Big|_{t=0}^{\pi/2} - 2 \sin t \Big|_{t=\pi/2}^{\pi} \qquad (1)$$

$$= \pi + 2(1-0) - 2(0-1) = \underline{\pi + 4} \qquad (1)$$

DVP, Math 3 für Physik (An. 2) -3- 9.9.03

3. Aufgabe

1. $$\partial_y f(t,y) = \frac{1-ty-y(-t)}{(1-ty)^2} = \frac{1}{(1-ty)^2}$$ (1)

2. $f: D \to \mathbb{R}$ bez. y lokal Lipschitz-stetig, da $(t,y) \mapsto \partial_y f(t,y) = \frac{1}{(1-ty)^2}$ stetig (1)

auf D

3. Für $(t,y) \in]-\infty, 0] \times [0,\infty[$ gilt
$ty \le 0 \Rightarrow -ty \geq 0 \Rightarrow 1-ty \geq 1$
$\Rightarrow (1-ty)^2 \geq 1 \Rightarrow 0 < \partial_y f(t,y) \leq 1$ (1)

Für $y_1, y_2 \in [0,\infty[$ und $t \in]-\infty, 0]$ gilt

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\partial_y f(t,\tilde{y})(y_1-y_2)|$
mit $\tilde{y}$ zwischen y_1 und y_2, M.W.satz
für $y \mapsto f(t,y)$, $y \in [0,\infty[$, t fest

$\underset{|\partial_y f(t,y)| \leq 1}{\Rightarrow} |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq |y_1 - y_2|$ (2)

$\Rightarrow f$ bezüglich y in $]-\infty, 0] \times [0,\infty[$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

4. $y = \mathbb{R}$ und $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$
löst A.W.A, denn $\varphi'(t) = 0$ und (2)

$$f(t,\varphi(t)) = \frac{\varphi(t)}{1-t\varphi(t)} = \frac{0}{1} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

5. Existenz des maximalen Lösungsintervalls I und der Lösung $\varphi: I \to \mathbb{R}$ der gegebenen

A.W.A. folgen aus der Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$ und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$ bzw. y. (1)

(a) Annahme: $\psi(\bar{t}) \le 0$ für ein $\bar{t} \in I$

$\Rightarrow \exists\, t_0 \in I$ mit $\psi(t_0) = 0$
z.W.S.

$\Rightarrow \varphi$ und ψ lösen A.W.A. (*) und $y(t_0)=0$

$\Rightarrow \psi = \varphi|I \Rightarrow a = \psi(0) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow$ ↯ zu $a \neq 0$ (3)

↑

f st., lok. Lipsch.-st.

(b) $\psi(t) > 0 \Rightarrow \psi'(t) = f(t, \psi(t)) = \dfrac{\psi(t)}{\underbrace{1 - t\psi(t)}_{>0,\ \text{Vor.}}} > 0 \quad \forall t \in I$ (2)

$\Rightarrow \psi: I \to \mathbb{R}$ streng monoton steigend

(c) Für $t \in I \cap]-\infty, 0]$ gilt wegen mon. st. und (a) $0 < \psi(t) \le \psi(0) = a$ (1)

(d) (α) $I \cap]-\infty, 0] =]-\infty, 0]$

Annahme $I \cap]-\infty, 0] \neq]-\infty, 0]$

$\Rightarrow I \cap]-\infty, 0] =]b, 0]$ mit $b < 0$.

$\Rightarrow \{(t, \psi(t)) : t \le 0,\ t \in I\} \subset \underbrace{[b, 0] \times [0, a]}_{\subset D}$

kompakt

$\Rightarrow$ ↯ zum Satz über Graphen der Lösungsfunktion, da f st. und lokal Lipsch.-st. (3)

(β) Für $t \in I \cap [0, \infty[$ (also auch $(t, \psi(t)) \in D$) gilt:

$1 - t\psi(t) > 0$ also $0 \le t\psi(t) < 1$

$\Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{1}{\psi(t)} \le \dfrac{1}{a}$, da $\psi(t) \ge a$ für $t \ge 0$, $t \in I$ (3)

(Monotonie)

$\Rightarrow I \cap [0, \infty[= [0, c[$ mit $c > 0$.

$0 \le t\,\varphi(t) < 1$ für $t \in [0, c[$ (s.o.)

$\Rightarrow \varphi(t) \le \frac{1}{t} \le \frac{2}{c}$ für $t \in [\frac{c}{2}, c[$

$\Rightarrow \sup\limits_{t \in I} \varphi(t) =: m < \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{\substack{t \to c \\ t < c}} t\,\varphi(t) = c \cdot m$

$\uparrow$ Monotonie

$t \cdot \varphi(t) < 1$ für $t \in [0, c[\Rightarrow c \cdot m \le 1$; Annahme: $c \cdot m < 1$

$\Rightarrow \{(t, \varphi(t)) : t \in [0, c[\} \subset \underbrace{[0, c] \times [a, m]}_{\text{kompakt}} \subset D$

$\Rightarrow$ $\not{}$ zum Satz über den Graphen der Lösungsfunktion.

Also $\lim\limits_{\substack{t \to c \\ t < c}} t\,\varphi(t) = c \cdot m = 1$

und $I =]-\infty, c[$

(4)