Klausur zur Theoretischen Physik I - Mechanik

1. Juli 2004

Auf jedem abgegebenen Blatt bitte unbedingt
Name, Matrikelnummer sowie Nummer der Übungsgruppe angeben!
Auch unbedingt das verwendete Schmierblatt (mit Name) abgeben!

Bitte für jede Aufgabe eine neue Seite beginnen. Lesbar schreiben!

Aufgabe 1 - Kurze Fragen:

a) **(2P)** Geben Sie die Bewegungsgleichung für den freien Fall im homogenen Schwerefeld der Erde an ($g > 0$) und integrieren Sie diese für allgemeine Randbedingungen bis zur Angabe von $z(t)$.

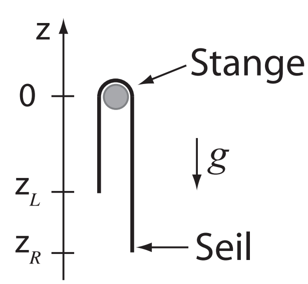
b) **(3P)** Wann ist ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ? Geben Sie drei äquivalente Definitionen.

c) **(4P)** Zeigen Sie, dass im Zentralpotential $U(r)$ der Drehimpuls erhalten ist. Welche andere Größe ist erhalten?

d) **(3P)** Zeigen Sie, für eine eindimensionale Bewegung im Potential $U(x)$, dass die Euler-Lagrangegleichung gerade die Newtonsche Bewegungsgleichung ergibt.

Aufgabe 2 - Rutschendes Seil:

Ein ideal biegsames undehnbares Seil der Länge l hängt im homogenen Schwerefeld der Erde (Erdbeschleunigung $g > 0$) über eine horizontale Stange (siehe Figur). Auf der Stange kann das Seil reibungsfrei gleiten. Die Masse pro Länge des Seiles, κ, sei konstant über die Länge des Seiles. Der Radius der Stange sei vernachlässigbar. Betrachtet wird nur der Zeitraum, in welchem sich das Seil noch auf der Stange befindet.



a) **(3P)**: Verwenden Sie als generalisierte Koordinate q die z-Position des rechten Seilendes. Zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion des Systems schreiben lässt als

$$L = \frac{1}{2}\,\kappa\, l\, \dot{q}^2 + \frac{1}{2}\,\kappa\, g\left((l+q)^2 + q^2\right) .$$

b) **(2P)**: Zeigen Sie, dass sich aus der Euler-Lagrangegleichung die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} - \omega^2\, q = g$$

ergibt. Welcher Ausdruck wurde dabei durch ω abgekürzt?

c) **(4P)** Zeigen Sie, dass die Funktion

$$q(t) = A\, e^{\omega t} + B\, e^{-\omega t} - \frac{l}{2}$$

die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung ist. Bestimmen Sie die Integrationskonstanten A und B wenn das rechte Seilende zum Zeitpunkt $t = 0$ zur Koordinate $z_{R0} < 0$ reichte und das Seil in Ruhe war. Zeigen Sie, dass sich durch Einführung des Ausdrucks $\Delta z_0 = z_{R0} + l/2$ die Lösung ergibt als

$$q(t) = \Delta z_0 \cosh(\omega t) - \frac{l}{2}\,.$$

d) **(3P)** Berechnen Sie damit den Zeitpunkt zu welchem das Seil gerade von der Stange gleitet und die Geschwindigkeit des Seiles zu diesem Zeitpunkt. Vereinfachen Sie das Resultat mit Hilfe der Beziehung $\sinh(\mathrm{Arcosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}\,$.

e) **(3P)** Leiten Sie direkt aus dem Energieerhaltungssatz die Geschwindigkeit des Seiles beim Abgleiten ab (dazu ist die Lösung der vorigen Aufgabe nicht notwendig!).

Aufgabe 3 - Teilchen im Magnetfeld:

Ein Teilchen der Ladung $e > 0$ und Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}$. Die Bewegungsgleichung lautet

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = e\,\vec{v} \times \vec{B} \quad .$$

Die Anfangsbedingungen sind $\vec{r}(t = 0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v}(t = 0) = (v_0, 0, 0)$ mit $v_0 \geq 0$. Das Magnetfeld hat die Form $\vec{B} = (0, 0, B_0)$, $B_0 = \text{const.} \geq 0$.

a) **(2P)** Zeigen Sie, dass aus der Bewegungsgleichung folgt:

$$\dot{x} = \omega y + v_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{y} = -\omega x$$

und bestimmen Sie ω.

b) **(2P)** Zeigen Sie daraus, dass sich die Bewegungsgleichung umschreiben läßt zu:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y + \omega v_0 &= 0 \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned}$$

c) **(3P)** Bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ unter den gegebenen Randbedingungen. (Für die y- Komponente können Sie dazu auch zeigen, dass $y(t) = -\frac{v_0}{\omega}(1 - \cos(\omega t))$ die Differentialgleichung für $y(t)$ löst.)

d) **(2P)** Auf welcher Kurve bewegt sich das Teilchen? Nach welcher Zeit T erreicht es wieder seinen Ausgangspunkt? Skizzieren Sie die Bewegung.

e) **(2P)** Welche Bewegung im Raum vollführt das Teilchen, wenn die z-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit nicht verschwindet, also $v_z(t = 0) \neq 0$? Eine Rechnung ist *nicht* notwendig.

f) **(2P)** Zeigen Sie, dass bei der Bewegung des Teilchens zwischen zwei beliebigen Punkten seiner Bahn keine Arbeit verrichtet wird.
Hinweis zu f): Die Kenntnis der Lösung der Bewegungsgleichungen ist *nicht* nötig.