Technische Universität München
TUM School of Natural Sciences
Physik Department

Experimentalphysik 1

Wintersemester 2023/2024

Prof. Dr. Alexander Holleitner

Klausur

14. Februar 2024

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 - Masse an Schnur (10 Punkte)

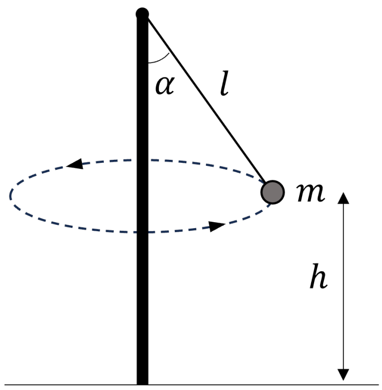
Eine punktförmige Masse $m = 100$ g sei an einer Schnur der Länge $l = 1,0$ m befestigt, welche an einem Fahnenmast im homogenen Schwerefeld der Erde aufgehängt ist. Nach einem anfänglichen Anstoßen, rotiere die Masse kreisförmig und reibungsfrei um den Fahnenmast (siehe Abbildung). Die Aufhängung ist drehbar gelagert, der Faden wickle sich also nicht auf.

(a) Nennen Sie die Kräfte, die auf die Masse wirken. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm im Bezugssystem der Masse. (3P)

(b) Während der Rotation messen Sie als Winkel zwischen Stange und Schnur $\alpha = 22°$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v, mit der die Masse um die Stange rotiert. (4P)

Ersatzergebnis: $v = 1,5$ m/s

(c) Die Masse rotiere in einer Höhe von $h = 2,0$ m. Während der Rotation schneiden Sie plötzlich die Schnur durch. Berechnen Sie die Weite, die die Masse fliegt. Betrachten Sie die Masse weiterhin als Punktmasse und vernachlässigen Sie etwaige Reste der Schnur an der Masse. (3P)



Lösung

(a) Im Bezugssystem der Masse wirken auf die Masse: Gravitationskraft F_g, Zentrifugalkraft F_Z, Seilspannung/Seilkraft T (siehe Kräftediagramm).

[**1**]

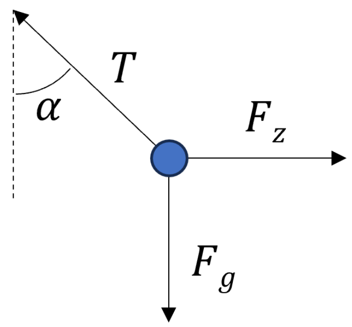


Diagramm: [**2**]

Diese Kräfte heben sich komponentenweise auf.

(b) Aus dem Winkel zwischen Stange und Schnur α erhält man das Verhältnis von Zentrifugalkraft und Gravitationskraft:

$$|F_z| = T_x, \quad |F_g| = T_y$$
$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{F_z}{F_g}$$

[**1**]

Die Zentrifugalkraft ist gegeben über

$$F_z = \frac{mv^2}{r}$$

wobei r der Radius der Kreisbahn ist, welcher bestimmt ist durch:

$$\sin\alpha = \frac{r}{l}$$

[**1**]

Alles eingesetzt und aufgelöst auf die Geschwindigkeit v:

$$v = \sqrt{lg\tan\alpha\sin\alpha} = 1,22 \text{ m/s}$$

[**2**]

(c) Nachdem die Schnur durchgeschnitten wird, erfolgt ein 'Wurf' der Masse in horizontaler Richtung. Es gelten dann die Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = vt$$
$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$$

[**1**]

Die Weite berechnet sich aus der Bedingung

$$y(t_0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

[**1**]

Und damit ergibt sich für die Weite:

$$x_{\max} = x(t_0) = v\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,78 \text{ m} \qquad (0,96 \text{ m})$$

[**1**]

Aufgabe 2 - Reibung bei Autofahrt (14 Punkte)

Ein Auto der Masse $m = 1,5$ t fahre mit konstanter Geschwindigkeit $v_0 = 120$ km/h auf einer geradlinigen Strecke. Zwischen Reifen und Boden wirke die Rollreibung mit Rollreibungskoeffizient $\mu_{RR} = 0,01$.

(a) Erklären Sie anschaulich, warum die Rollreibungskraft F_{RR} proportional zur Normalkraft F_N ist, die vom Boden auf das Fahrzeug wirkt, also: (2P)

$$F_{RR} = \mu_{RR}F_N \tag{1}$$

(b) Berechnen Sie die Leistung, die das Auto aufwenden muss, um die Geschwindigkeit v_0 konstant zu halten. Vernachlässigen hier die Luftreibung. (3P)

Zusätzlich zur Rollreibung wirke nun auch Luftreibung auf das Auto. Die Luftreibungskraft F_{LR} ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v des Autos, also:

$$F_{LR}(v) = f_{LR}\ v^2 \tag{2}$$

(c) Welche Einheit hat der Luftreibungskoeffizient f_{LR}? (1P)

(d) Um die Geschwindigkeit v_0 auf gerader Strecke konstant zu halten, benötigt das Auto tatsächlich eine Leistung von $P = 100$ kW. Berechnen Sie den Luftreibungskoeffizienten des Autos. (3P)

(e) Das Auto kann eine maximale Leistung von $P_{\max} = 130$ kW aufbringen. Schafft es das Auto, unter Berücksichtigung aller Reibungseffekte, einen Berg mit einer Steigung von 10% hochzufahren und dabei die Geschwindigkeit v_0 konstant zu halten? (5P)

Lösung

(a) Die Rollreibung hängt von der Art der Oberflächen ab, die in Kontakt sind. Reibung entsteht durch **Verformung der Oberflächen**, die miteinander in Kontakt stehen (vgl. Gummireifen auf Fahrbahn). Je **größer das Gewicht eines Körpers, desto stärker die Verformung**
$\Rightarrow$ Proportionalität zur Normalkraft.

[**2**]

(b) Die Reibungskraft, die auf das Auto wirkt, ist zeitlich konstant. Da auch die Geschwindigkeit v_0 zeitlich konstant sein soll, gilt für die Leistung des Autos:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F v_0$$

[**1**]

Hierbei ist F gerade die Reibungskraft F_{RR}, die gegeben ist über:

$$F_{RR} = \mu_{RR} F_N = \mu_{RR} m g$$

[**1**]

Damit erhält man für die Leistung

$$\begin{aligned} P &= F_{RR} v_0 = \mu_{RR} m g v_0 \\ &= 0,01 \cdot 1500\ \text{kg} \cdot 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot \frac{120}{3,6}\ \text{m/s} = 4,91\ \text{kW} \end{aligned}$$

[**1**]

(c) Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\begin{aligned} [F] &= [f_{LR}] \cdot [v^2] \\ \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} &= [f_{LR}] \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \\ \Rightarrow \quad [f_{LR}] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}} \end{aligned}$$

[**1**]

(d) Da sich das Auto weiterhin mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt, ist auch der Luftwiderstand zeitlich konstant. Somit lässt sich obige Gleichung modifizieren:

$$\begin{aligned} P &= (F_{RR} + F_{LR})\, v_0 \\ &= 4,91\ \text{kW} + f_{LR}\ v_0^3 \stackrel{!}{=} 100\ \text{kW} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{LR} = \frac{100\ \text{kW} - 4,91\ \text{kW}}{v_0^3} = 2,57\ \text{kg/m}$$

[3]

(e) Nun gibt es drei bremsende Kräfte: Rollreibung F_{RR}, Luftreibung F_{LR} und einen bremsenden Anteil der Graviationskraft F_g (entlang der schiefen Ebene).

Da v_0 identisch ist, bleibt die Luftreibungskraft unverändert.

Der bremsende Anteil der Graviationskraft ist:

$$F_g = mg \sin \alpha$$

[1]

Auch die Rollreibungskraft ist winkelabhängig, da sich die Normalkraft mit größerem Winkel verringert:

$$F_{RR} = \mu_{RR} mg \cos \alpha$$

[1]

Für den Steiggungswinkel α gilt:

$$\tan \alpha = 10\% \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan(0,1) = 5,71^\circ$$

[1]

Demnach erhält man als die notwendige Leistung P, um den Berg mit konstanter Geschwindigkeit hochfahren zu können:

$$\begin{aligned} P &= (F_{RR} + F_{LR} + F_g) v_0 \\ &= \mu_{RR} mg \cos \alpha \; v_0 + f_{LR} v_0^3 + mg \sin \alpha \; v_0 \\ &= 4,88 \text{ kW} + 95,19 \text{ kW} + 48,80 \text{ kW} \\ &= 149 \text{ kW} \end{aligned}$$

[1]

Da $P > P_{\max} = 130$ kW kann das Auto den Berg nicht mit konstanter Geschwindigkeit v_0 hochfahren.

[1]

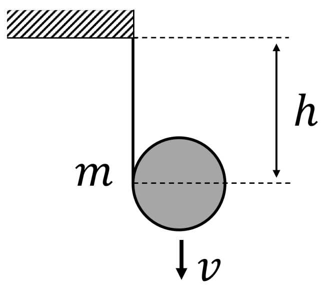
Aufgabe 3 - Jojo (12 Punkte)

Ein aufgerolltes Jojo der Masse m befindet sich zunächst in Ruhe und werde losgelassen, woraufhin es sich entlang seines Fadens abrollt. Das Jojo kann als Hohlzylinder mit Radius R und unendlich dünner Mantelfäche betrachtet werden. Der Faden sei um diesen Zylinder gewickelt (vgl. Abbildung). Reibungseffekte können vernachlässigt werden.

(a) Finden Sie eine Funktion für die Fallgeschwindigkeit v des Jojos nach der Fallhöhe h. (5P)

(b) Vergleichen Sie die Funktion aus (a) mit der Fallgeschwindigkeit bei einem freien Fall nach der Fallhöhe h. (2P)

(c) Sie betrachten nun ein weiteres zylinderförmiges Jojo mit gleicher Masse m und gleichem Radius R, aber mit unbekannter Massenverteilung. Sie messen für dieses Jojo nach der Fallhöhe h eine um den Faktor $\sqrt{\frac{4}{3}}$ höhere Geschwindigkeit, als für das Jojo in (a). Wie groß ist das Trägheitsmoment des Jojos und welche Massenverteilung im Jojo könnten Sie damit annehmen? (5P)



Lösung

(a) Es gilt Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \end{aligned}$$

[2]

Das Jojo dreht sich um seinen Schwerpunkt. Damit hat es das Trägheitsmoment I eines Hohlzylinders bei Rotation um dessen Schwerpunkt (die gesamte Masse m befinde sich im Abstand R), also:

$$I = mR^2$$

[1]

Außerdem gilt die (Ab-)Rollbedingung:

$$v = \omega R$$

[1]

Aus dem Energiesatz folgt also:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\frac{v^2}{R^2} \\ \Rightarrow v(h) &= \sqrt{gh} \end{aligned}$$

[1]

(b) Beim freien Fall gilt:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= E_{\text{kin}} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ \Rightarrow v_f(h) &= \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

[1]

$$\Rightarrow v_f(h) = \sqrt{2} \cdot v(h)$$

Die Geschwindigkeit nach der Fallhöhe h beim freien Fall ist also um $\sqrt{2}$ höher als die des Jojos aus (a).

[1]

(c) Es gilt für das neue Jojo:

$$v_v = \sqrt{\frac{4}{3}}v = \sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{gh} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

[1]

Wir rechnen die obigen Schritte aus (a) rückwärts:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; v_v^2 = \frac{4}{3}gh \\ &\Rightarrow \; \frac{3}{4}mv_v^2 = mgh \\ &\Rightarrow \; mgh = \frac{1}{2}mv_v^2 + \frac{1}{4}mv_v^2 \\ &\Rightarrow \; mgh = \frac{1}{2}mv_v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega_v^2 \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich mit obiger Energieerhaltungsgleichung lässt sich erkennen, dass hier:

$$I = \frac{1}{2}mR^2$$

[**3**]

Da das Jojo weiterhin die Form eines Zylinders beibehält und sich um seine Längsachse drehen soll, handelt es sich nun bei dem Jojo um einen **Vollzylinder** (mit homogene Massenverteilung), da das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bei Drehung um seine Längsachse gegeben ist über $I = \frac{1}{2}mR^2$.

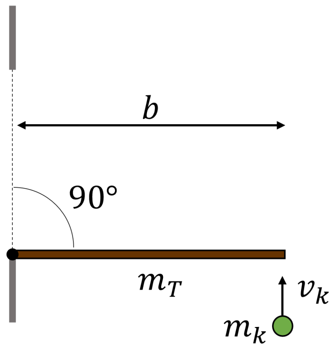
[**1**]

Aufgabe 4 - Knetball auf Tür (12 Punkte)

Eine dünne Tür sei anfangs um 90° geöffnet und in Ruhe. Die Tür habe eine Breite von $b = 1,0$ m und eine Masse von $m_T = 12$ kg. Sie lässt sich reibungsfrei bewegen.

(a) Sie schließen die Tür, indem Sie auf diese mit einer konstanten Kraft von 80 N am äußeren Rand drücken. Die Kraft wirke immer senkrecht zur Tür. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist? (6P)

(b) Nun möchten Sie die um 90° geöffnete Tür schließen, indem Sie einen Knetball (punktförmige Masse mit $m_k = 0,5$ kg) mit der Geschwindigkeit $v_k = 12$ m/s an den äußeren Rand werfen (siehe Abbildung). Der Knetball bleibt vollständig an der Tür haften. Wie lange dauert es bis die Tür geschlossen ist? (6P)



Lösung

(a) Trägheitsmoment eines dünnen Quaders mit Masse m_T und Breite b bei Rotation um den Schwerpunkt:

$$I_S = \frac{1}{12} m_T b^2$$

Mit dem Satz von Steiner ergibt sich damit als Trägheitsmoment für eine Rotation um eine Seite:

$$I = I_S + m_T \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_T b^2$$

[**2**]

Der Zusammenhang zwischen Drehmoment M und Winkelbeschleunigung α ist:

$$M = I\alpha \quad \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}$$

[**1**]

Das Drehmoment ist außerdem durch die wirkende Kraft F und den Hebelarm $r = b$ gegeben. Da die Kraft immer senkrecht zur Türe wirkt, ist auch das Drehmoment konstant, also:

$$M = bF$$

[**1**]

Eingesetzt ergibt das eine Winkelbeschleunigung α von:

$$\alpha = \frac{bF}{I} = \frac{3F}{m_T b} = 20 \text{ s}^{-2}$$

Als Bewegungsgleichung für die Türe, die zu Beginn um 90° (im Bogenmaß $\pi/2$) geöffnet ist, lässt sich eine linear beschleunigte Bewegungsgleichung für den Winkel $\phi(t)$ ansetzen:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Um die geöffnete Türe zu schließen, benötigt man daher:

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha t^2$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = 0,40 \text{ s}$$

[2]

(b) Es handelt sich um einen vollkommen inelastischen Stoß. Daher gilt hier ausschließlich Drehimpulserhaltung:

$$L = L'$$

[1]

mit

$$L = bp_k = bm_k v_k$$
$$L' = (I_T + I_k)\omega$$

[2]

hierbei ist das Gesamtträgheitsmoment nach dem Stoß gegeben durch:

$$I_T + I_K = \frac{1}{3}m_T b^2 + m_k b^2$$

[1]

Wenn man alles zusammenführt, erhält man damit für die Winkelgeschwindigkeit ω nach dem Stoß:

$$\omega = \frac{bm_k v_k}{\left(\frac{1}{3}m_T + m_k\right) b^2} = 1,33 \text{ s}^{-1}$$

Man setzt wieder eine lineare Bewegungsgleichung an:

$$\phi(t) = \frac{\pi}{2} - \omega t$$

Man setze $\phi = 0$ und löse wieder auf t auf:

$$t = \frac{\pi}{2\omega} = 1,18 \text{ s}$$

[2]

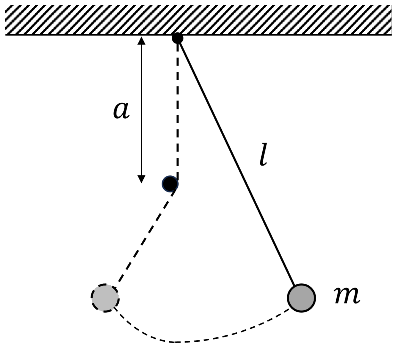
Aufgabe 5 - Fadenpendel mit Nagel (8 Punkte)

An einem Faden der Länge $l = 1,0$ m hänge ein (punktförmiges) Gewicht der Masse $m = 100$ g. Der Faden sei an der Decke befestigt. Im Abstand $a = 40$ cm unter dem Aufhängepunkt befinde sich ein dünner Nagel in der Wand, an den sich der Faden während des Schwingens vorübergehend anlegt (siehe Abbildung). Gehen Sie von kleinen Auslenkungen aus, Reibungseffekte können vernachlässigt werden.

(a) Wie viele Schwingungen führt das Pendel in einer Minute aus? (5P)

Ersatzergebnis: 40 Schwingungen pro Minute.

(b) Tatsächlich messen Sie bei dem Pendel 45 Schwingungen pro Minute. Begründen Sie, ob das abweichende Messergebnis dadurch erklärbar ist, dass Sie die Masse als Punktmasse und nicht als ausgedehnten Körper betrachtet haben. (3P)



Lösung

(a) Die Differentialgleichung für ein Fadenpendel der Länge l_i für kleine Auslenkungen φ lautet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_i}\varphi = 0$$
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l_i}}$$

Für die Periodendauer T_i des Pendels mit Fadenlänge l_i gilt dann:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l_i}{g}}$$

[**1**]

Eine Schwingung des vorliegenden Pendels setzt sich zusammen aus zwei halben Schwingungen - eine halbe Schwingung mit der langen Fadenlänge, und eine halbe Schwingung mit der kurzen Fadenlänge.

[**1**]

Für die gesamte Periodendauer gilt dann:

$$T = \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2}$$

[**1**]

Mit eingesetzten Werten $l_1 = 1,0$ m, $l_2 = 0,60$ m (!) erhält man damit:

$$T = \pi\left(\sqrt{\frac{l_1}{g}} + \sqrt{\frac{l_2}{g}}\right) = 1,78 \text{ s}$$

[**1**]

In einer Minute führt das Pendel damit:

$$\frac{60 \text{ s}}{T} = 33,7$$

Schwingungen aus.

[**1**]

(b) Die Differentialgleichung eines physikalischen (Faden)Pendels mit Trägheitsmoment I des starren Körpers lautet:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I}\varphi = 0$$

mit:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}$$

[1]

Für den Fall, dass m nicht als Punktmasse betrachtet werden kann, gilt:

$$I > ml^2$$
$$\Rightarrow \omega_b < \omega_a$$
$$\Rightarrow T_b > T_a$$

Dieses Pendel hätte also eine längere Periodendauer, würde also weniger Schwingungen pro Minute ausführen. Die Messung kann mit dieser Begründung also nicht erklärt werden.

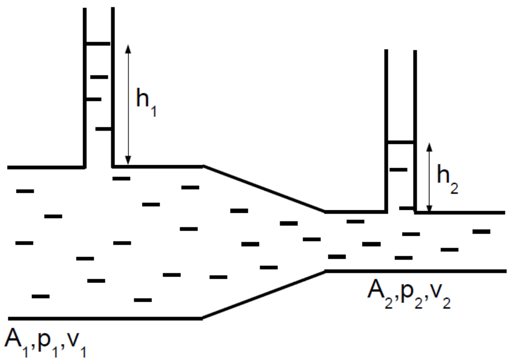
[2]

Aufgabe 6 - Verjüngendes Rohr (8 Punkte)

Gegeben sei ein von Wasser ($\rho = 1,0$ kg/L) durchströmtes Glasrohr, dessen Querschnitt sich verjüngt. Der Radius des Rohres ändere sich von $r_1 = 2,0$ cm auf $r_2 = 1,0$ cm. Vor und hinter der Verjüngung sind auf dem Rohr Steigröhrchen aufgesetzt (siehe Abbildung). Die Steigröhrchen seien oben offen. Außerhalb der Anordnung herrsche ein Luftdruck von $p_0 = 1$ bar.

(a) Im ersten Steigröhrchen steht der Wasserspiegel $h_1 = 15$ cm hoch. Wie hoch steht das Wasser im zweiten Steigröhrchen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im engen Rohrteil $v_2 = 80$ cm/s beträgt und die Viskosität von Wasser vernachlässigbar ist? (5P)

(b) Sie möchten nun die Fließgeschwindigkeit v_2 im Rohr soweit anpassen, dass der Flüssigkeitsstand h_2 gegen 0 geht, h_1 aber unverändert bleibt. Begründen Sie, ob das möglich ist. Wenn ja, wie groß muss die Fließgeschwindigkeit v_2 sein? (3P)



Lösung

(a) Für eine horizontale Rohrströmung ist die Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltung eines Fluidelements entlang seiner Stromlinie):

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

[1]

Wir betrachten die zentrale Stromlinie in der Mitte des Rohres. Die statischen Drücke p_1 und p_2 unterhalb der Steigröhrchen sind hier gegeben durch:

$$p_1 = \rho g(h_1 + r_1) + p_0$$
$$p_2 = \rho g(h_2 + r_2) + p_0$$

[1]

wobei p_0 der äußere Luftdruck ist.

Es gilt außerdem die Kontinuitätsgleichung, die besagt, dass der Volumenstrom konstant ist:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

[**1**]

woraus für v_1 folgt:

$$\Rightarrow v_1 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) v_2 = \left(\frac{r_2^2}{r_1^2}\right) v_2 = 20 \text{ cm/s}$$

Setzt man diese Ergebnisse in die Bernoulli-Gleichung ein, so kann man auf h_2 auflösen und man erhält:

$$\begin{aligned} 2\rho g(h_1 + r_1) + \rho v_1^2 &= 2\rho g(h_2 + r_2) + \rho v_2^2 \\ 2g(h_1 + r_1) + \left(\frac{r_2^2}{r_1^2} v_2\right)^2 &= 2g(h_2 + r_2) + v_2^2 \\ \Rightarrow \ h_2 &= h_1 + (r_1 - r_2) + \frac{v_2^2}{2g}\left(\frac{r_2^4}{r_1^4} - 1\right) \end{aligned}$$

[**1**]

Als Zahlenwert mit den gegebenen Größen:

$$h_2 = 12{,}9 \text{ cm}$$

[**1**]

(b) Nein, das ist nicht möglich.

[**1**]

Wenn h_1 identisch bleiben soll und sich die Rohrgeometrie nicht ändert, dann muss auch v_1 identisch sein wie in Teil (a).

Da jedoch aufgrund der Kontinuitätsgleichung die Querschnittsflächen der Rohre und die zugehörigen Fließgeschwindigkeiten gekoppelt sind

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

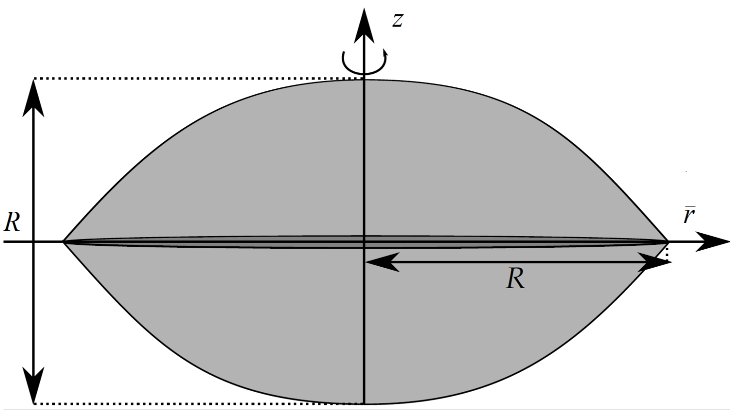
lässt sich keine andere Geschwindigkeit v_2 einstellen, ohne dass sich auch v_1 und damit h_1 verändert.

Begründung: [**2**]

Aufgabe 7 - Mathematische Ergänzungen (8 Punkte)

Betrachten Sie eine bikonvexe, parabolische Linse aus homogenem Material, die symmetrisch durch zwei rotierte Parabeln begrenzt ist. Der Radius der Linse sei R, die Dicke der Linse sei ebenfalls R und die Masse M.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment I der Linse als Funktion von R und M bei Rotation um die Symmetrieachse durch explizite Integration.



Lösung

Durch die Spiegelsymmetrie genügt es, eine halbe Linse zu berechnen. Die Symmetrieebene liege in der x-y-Ebene und die Symmetrieachse auf der z-Achse. Die Höhe der Linsenoberseite in Abhängigkeit des Radius $\bar{r}$ (aus den Zylinderkoordinaten) ist gegeben durch eine Parabel

$$z = b - a\bar{r}^2$$

mit $z(0) = \frac{R}{2}$ und $z(R) = 0$ folgt

$$b = \frac{R}{2}, \qquad a = \frac{1}{2R}$$

damit gilt:

$$z(\bar{r}) = \frac{R}{2} - \frac{1}{2R}\bar{r}^2$$

[2]

Für die Masse gilt

$$\begin{aligned}
M &= \int_V \rho \, \mathrm{d}^3x \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_{-\frac{R}{2}+\frac{1}{2R}\bar{r}^2}^{\frac{R}{2}-\frac{1}{2R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z \\
&= 2\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{\frac{R}{2}-\frac{1}{2R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z \\
&= 4\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}\bar{r} \left(\frac{R}{2}\bar{r} - \frac{1}{2R}\bar{r}^3\right) \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho R^3
\end{aligned}$$

[3]

Der Abstand zur Drehachse (z-Achse) ist gleich der Zylinderkoordinate $\bar{r}$. Das Trägheitsmoment ist somit

$$\begin{aligned}
I &= \int_V \rho\bar{r}^2 \, \mathrm{d}^3x = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_{-\frac{R}{2}+\frac{1}{2R}\bar{r}^2}^{\frac{R}{2}-\frac{1}{2R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z\, \bar{r}^2 \\
&= 2\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{\frac{R}{2}-\frac{1}{2R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z\, \bar{r}^2 \\
&= 4\rho\pi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}^3 \left(\frac{R}{2} - \frac{1}{2R}\bar{r}^2\right) \\
&= 4\rho\pi \left(R\frac{1}{8}R^4 - \frac{1}{R}\frac{1}{12}R^6\right) \\
&= \frac{\pi}{6}\rho R^5 = \frac{1}{3}MR^2
\end{aligned}$$

[3]