....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

2. April 2015, 8:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

LÖSUNG:

Induktionsbeginn $(n = 1)$: $\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2!}$

Induktionsschritt $(n \to n+1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} &\overset{\textbf{[2]}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} \\
&\overset{\text{I.V.}\textbf{[2]}}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} 1 + \frac{-(n+2)+(n+1)}{(n+2)!} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} 1 - \frac{1}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

$\square$

Erklärung:

[2 Punkte] für den Induktionsbeginn,
[2 Punkte] für das Zerlegen,
[2 Punkte] für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
[2 Punkte] für das Zusammenfassen.

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt{\mathrm{i}}$ an.

$\operatorname{Re}\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **[1]**	$\operatorname{Im}\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ **[1]**

(b) Zeigen Sie, dass $\arg(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \frac{\alpha}{2}$, falls $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

LÖSUNG:

(a) $\sqrt{\mathrm{i}} = \sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \overset{[2]}{=} e^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}) \overset{[2]}{=} 2\cos\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha}{2}}$.
Da $\frac{\alpha}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \subseteq (-\pi, \pi]$, folgt $\arg(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \frac{\alpha}{2}$. **[2]**

Alternativ:
$z = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = 1 + \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha$ **[1]**
Wegen $\operatorname{Re}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) > 0$ gilt **[1]**

$$\arg(z) \overset{[1]}{=} \arctan\left(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right) \overset{[1]}{=} \arctan\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}\right) \overset{[1]}{=} \arctan\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right) \overset{[1]}{=} \frac{\alpha}{2}.$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Welchen Grenzwert besitzt die Folge $\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☒ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3^n}$? **[2]**

☐ $-\frac{3}{4}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☒ $\frac{9}{10}$ ☐ ∞ ☐ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)^n}$? **[3]**

☐ bei $-\infty$ ☒ in $(-\infty,0)$ ☐ bei 0 ☐ in $(0,\infty)$ ☐ bei $+\infty$ ☐ undefiniert

Lösung:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n-n^2}{\sqrt{n^2-n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)} = -\frac{1}{2}.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{2}{3})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{5} = \frac{9}{10}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-n)^n} = \frac{1}{(-1)^1} + \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^3} \pm \cdots = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} \pm \cdots$. Die Reihe ist nach dem Leibnitzkriterium (alternierende betragsmäßig monotone Nullfolge) konvergent. Die Teilsummen bilden eine Intervallschachtelung. Insbesondere liegt der Grenzwert im Intervall $[-1,-\frac{3}{4}]$, ist also negativ.

4. **Potenzreihen** **[5 Punkte]**

Gegeben ist die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R.

LÖSUNG:

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}} \overset{[\mathbf{1}]}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{1}{\mathrm{e}}.$

Der Konvergenzradius ist also $R = \mathrm{e}$. **[2]**

5. **Zwischenwertsatz** **[7 Punkte]**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.

HINWEIS: Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

LÖSUNG:

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$ ist stetig, da f stetig ist. **[1]**

Außerdem gilt $F(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -F(0)$. **[1]**

Erster Fall: $F(0) = 0$. Dann ist $x_0 = 0$ eine Lösung, denn $f(\pi) = f(0) - F(0) = f(0)$. **[1]**

Zweiter Fall: $F(0) > 0$. Dann ist $F(\pi) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (0, \pi)$ mit $F(x_0) = 0$, bzw. $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. **[3]**

Dritter Fall: $F(0) < 0$. Dann ist $F(\pi) > 0$ und wie im zweiten Fall gibt es ein $x_0 \in (0, \pi)$ mit $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. **[1]**

6. **Ableitungen der Umkehrfunktion** **[6 Punkte]**
Sei $f : (-2, 0) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare, streng monoton steigende und surjektive Funktion mit $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 3$. Wie lautet die Umkehrfunktion und ihre Ableitungen im Punkt 1?

$f^{-1}(1) = \quad -1$ **[1]**	$(f^{-1})'(1) = \quad \frac{1}{2}$ **[2]**	$(f^{-1})''(1) = \quad -\frac{3}{8}$ **[3]**

LÖSUNG:

f ist injektiv, da streng monoton steigend, also bijektiv.
Für die Umkehrfunktion gilt offenbar $f^{(-1)}(1) = -1$.
Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt allgemein $(f^{(-1)})'(y) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(y))}$
und speziell $f^{(-1)}(1) = \frac{1}{f'(f^{(-1)}(1))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$.
Für die zweite Ableitung gilt

$$(f^{(-1)})''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{f'(f^{(-1)}(y))} = -\frac{1}{(f'(f^{(-1)}(y)))^2} f''(f^{(-1)}(y))(f^{(-1)})'(y) = -\frac{f''(f^{(-1)}(y))}{(f'(f^{(-1)}(y)))^3}$$

Für $y = 1$ also

$$(f^{(-1)})''(1) = -\frac{f''(-1)}{(f'(-1))^3} = -\frac{3}{2^3} = -\frac{3}{8}$$

7. **Integration** **[6 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ und $f'(x) < 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int\limits_0^1 f^{-1}(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

LÖSUNG:

Wir substituieren $y = f(x)$, d.h. formal $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$. Somit ist

$$\int\limits_0^1 f^{-1}(y)\mathrm{d}y \overset{[\mathbf{2}]}{=} \int\limits_{f^{(-1)}(0)}^{f^{(-1)}(1)} f^{-1}(f(x))f'(x)\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{1}]}{=} \int\limits_1^0 xf'(x)\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{2}]}{=} [xf(x)]_1^0 - \int\limits_1^0 f(x)\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{1}]}{=} \int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

8. **Fourierreihen** **[9 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, wobei $\hat{f}_0 = 0$. Sei F eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ von F gilt:

$$\hat{F}_k = \frac{\hat{f}_k}{\mathrm{i}k} \quad \text{für } k \neq 0$$

LÖSUNG:

Für $k \neq 0$ gilt

$$\hat{F}_k \overset{[\mathbf{1}]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\frac{dx}{2\pi} \overset{[\mathbf{2}]}{=} \left[F(x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-2\pi\mathrm{i}k}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} F'(x)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}}{-\mathrm{i}k}\frac{dx}{2\pi} \overset{[\mathbf{2}]}{=} \frac{(-1)^k}{-2\pi ik}(F(\pi) - F(-\pi)) + \frac{\hat{f}_k}{\mathrm{i}k}$$

$$\overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{\hat{f}_k}{\mathrm{i}k},$$

da $F(\pi) - F(-\pi) \overset{[\mathbf{2}]}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \overset{[\mathbf{1}]}{=} 2\pi\hat{f}_0 = 0$.

9. **Matrixexponential** **[9 Punkte]**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$. **[3]**

$$A^n = \qquad 2^{n-1}A$$

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. **[4]**

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

$$x(t) = \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

(a) $A^2 = 2A$, $A^3 = 2A^2 = 4A$, $\ldots$, $A^n = 2^{n-1}A$.

(b) $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} 2^{n-1} A = \mathbb{1} + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)A = (\mathbb{1} - \frac{1}{2}A) + \frac{1}{2}e^{2t}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} \end{pmatrix}$

(c) Wegen $Ax(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist offenbar $x(t) = x(0)$ eine Lösung des AWP. Wegen der Eindeutigkeit ist das die einzige.