A1ai) Da U_1, U_2 UG, gilt lt. VL $e \in U_1$ und $e \in U_2$.

Also $e \in U_1 \cap U_2$, d.h. $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ (U1).

Es seien nun $a, b \in U_1 \cap U_2$, also $a, b \in U_1$ und $a, b \in U_2$.

Da U_1, U_2 UG von G gilt $a^{-1}b \in U_1$ und $a^{-1}b \in U_2$, also $a^{-1}b \in U_1 \cap U_2$ (d.h. U2) Also ist $U_1 \cap U_2$ UG von U.

1aii) Nein! Lt VL sind $(2\mathbb{Z}_3, +)$ und $(3\mathbb{Z}_2, +)$ UG von $\mathbb{Z}_6$, aber $2\mathbb{Z}_3 \cup 3\mathbb{Z}_2 = \{0, 2, 4, 0, 3\}$ ist wg $4, 3 \in 2\mathbb{Z}_3 \cup 3\mathbb{Z}_2$, aber $\overline{-4} = 2$ und also $-4 + 3 = 2 + 3 = 5 \notin 2\mathbb{Z}_3 + 3\mathbb{Z}_2$. Kein Untergrupp. von $\mathbb{Z}_6$.

1b Betrachte abc.

Aus $ab = e$ folgt durch Rechtsmult mit c, daß $(ab)c = ec = c$ gilt. Mit assoz. Gesetz folgt $a \cdot (bc) = c$ und wg. $bc = e$ gilt $ae = c$. Da e neutral ist, gilt $a = c$. Die Vor. $bc = e$ bedeutet also $ba = e$.

2a) Da V endl. erzeugt folgt lt. VL (6.29), daß jedes $U \in \mathcal{L}$ endl. erzeugt ist und besitzt lt. VL (6.18) eine Basis B_U.

$$\left.\begin{array}{l} B_U \text{ lin unabh.} \\ B_U \subset V \end{array}\right\} \overset{\text{Basis Erg Satz}}{\underset{6.16}{\Longrightarrow}} \quad \exists \text{ Basis } B \text{ von } V \text{ mit } B_U \subset B.$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Dim} U = |B_U| \leq |B| = n.$

b) Nach a) gilt $\operatorname{Dim} \langle A \rangle \leq n$. $(*)$
Wäre nun A lin unabh. so wäre $\operatorname{Dim} \langle A \rangle = |A| > n$ im Widerspruch zu $(*)$.

c) S ist Basis, denn $\operatorname{Dim} \langle S \rangle = n = \operatorname{Dim} V$
$\langle S \rangle \subset V \overset{(6.23)}{\Longrightarrow} \langle S \rangle = V$

3A

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \\ II-I \\ III-I \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \\ \\ III-II \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist kern $A_l = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

3b)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1 & & \\ 3 & 3 & 2 & & 1 & \\ 6 & 5 & 4 & & & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \frac{1}{3}\cdot I \\ II-I \\ III-2I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} I-\frac{2}{3}II \\ \\ III-II \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{c} I+1/3\,III \\ II-III \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist die Inverse: $\begin{pmatrix} 2/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

3c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3b & 3b & 2b \\ 3a & 2a+b & 2a \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} \\ II-bI \\ III-aI \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & b & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

$\to \begin{array}{l} \\ \\ III-II \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$

i) d.h. $\mathrm{Rg}\, A = 3$, falls $b \neq 0$ und $a \neq b$

ii) $\mathrm{Rg}\, A = 2$ wenn $(b \neq 0 \wedge a = b) \vee (b = 0 \wedge a \neq b)$

iii) $\mathrm{Rg}\, A = 1$ wenn $a = b = 0$.

4a) Für $i>0$:

$$n_i(a_k) = \prod_{j=0}^{i-1} (a_k - a_j) = \begin{cases} (a_k-a_k)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{i-1} (a_k-a_j) = 0 & : \text{falls } 0 \le k \le i-1 \\ \prod\limits_{j=0}^{i-1} (a_k - a_j) \neq 0 & : \text{falls } i \le k \end{cases}$$

denn $\forall\, 0 \le j \le i-1 < k : a_k \neq a_j$, also $(a_k - a_j) \neq 0$, und ein Körper ist natürlich Nullteilerfrei.

Für $i=0$ gilt $n_0(x) = 1$, ~~und da $k \in \mathbb{N}_0$~~ gilt $i \le k$, also ist $n_0(a_k) \neq 0$ zu zeigen, was wg gilt.

4b) Mit dem Kriterium aus VL (S.11.2) müssen wir für die Linear Unabhängigkeit der n_i $(0 \le i \le n)$ zeigen, daß für $\lambda \in K^{n+1}$ aus $\sum_{i=0}^{n} n_i \lambda_i = 0$ (*) folgt $\lambda = 0$.

Mit (3.7.1), da K kommutativ ist, ist

$\sum_{i=0}^{n} n_i(x)\lambda_i \overset{**}{=} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i n_i(x) \in V_n \subseteq K[x]$. Als Hilfsmittel betrachten wir $\varphi: K \to K : \gamma \mapsto \gamma$ und die zugehörigen Einsetzungshomomorphismen φ_{a_i}.

Mit a) ergibt sich $\varphi_{a_j}(n_i) \overset{+}{=} \begin{cases} = 0 & \text{falls } 0 \le j \le i-1 \\ \neq 0 & \text{falls } i \le j. \end{cases}$

Anwendung von φ_{a_j} auf * (mittels **) ergibt

$$0 = \varphi_{a_j}(0) = \varphi_{a_j}\Big(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i n_i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i n_i(a_j) \underset{\text{wg } +}{=} \sum_{i=0}^{j} \lambda_i n_i(a_j) \quad (***)$$

zu 4b) (***) läßt sich wg $n_j(a_j) \neq 0$ schreiben als

$$\lambda_j = \frac{-1}{n_j(a_j)} \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_i n_i(a_j) \quad (****)$$

(****) ergibt für $j=0$ zunächst $\lambda_0 = 0$ und sukzessive Betrachtung von $j=1,\dots,n$ liefert $\lambda_j = 0$.
Also $\lambda = 0$. Mithin ist N_n eine lin. unabh. Menge in V_n. Da lt. ~~Angabe~~ $\operatorname{Dim} V_n = n+1 = |N_n|$ folgt mit 2c), daß N_n Basis von V_n ist.

4c) $N_2 = \{1, (x-0), (x-0)(x-1)\} = \{1, x, x^2-x\}$
und $f = 1 - x + 3x^2$ soll dargestellt werden.
Der Koeffizient von (x^2-x) muß 3 sein
$f - (x^2-x)3 = 1+2x$. Der Koeffizient von x sollte also 2 und der von 1 bzw. 1 sein.
Die gesuchte Darstellung ist also
$$f = (x^2-x)3 + x\cdot 2 + 1\cdot 1$$

4d) $N_2 = \{1, x, x^2-x\}$ und $N_3 = N_2 \cup \{x^3 - 3x^2 + 2x\}$
Jetzt muß $D(N_3)$ bestimmt werden:
$D(1) = 0 =: f_0 \quad D(x) = 1 =: f_1 \quad D(x^2-x) = 2x-1 =: f_2$
$D(x^3-3x^2+2x) = 3x^2-6x+2 =: f_3$.

zu 4d: Jetzt müssen f_0, f_1, f_2, f_3 bezgl N_2 dargestellt werden: $f_0 = 1 \cdot 0 + x \cdot 0 + (x^2 - x) \cdot 0$

$$f_1 = 1 \cdot 1 + x \cdot 0 + (x^2 - x) \cdot 0$$

$$f_2 = 1 \cdot (-1) + x \cdot 2 + (x^2 - x) \cdot 0$$

$$f_3 = 1 \cdot 2 + x \cdot (-3) + (x^2 - x) 3$$

Also ist $F_{N_2, N_3}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufg 5 a) Es sei $x \in A$. Mit $U = \{x\}$, also $|U| = 1$ und $\lambda_x := 1$ folgt $\sum_{v \in U} v\lambda_v = x \cdot 1 = x$, also $x \in \operatorname{aff} A$, d.h. $A \subset \operatorname{aff} A$.

5 b) Mit $B := \operatorname{aff} A$ folgt aus 5a) sofort
$\operatorname{aff}(A) \subset \operatorname{aff}(\operatorname{aff}(A))$.

Sei nun andererseits $x \in \operatorname{aff}(\operatorname{aff}(A))$. Also gibt es $U \subset \operatorname{aff} A$ mit $|U| \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^U$, so daß
$x = \sum_{v \in U} v\lambda_v$ mit $\sum_{v \in U} \lambda_v = 1$

Zu jedem $v \in U \subset \operatorname{aff} A$ gibt es also $U^v \subset A$, $|U^v| \in \mathbb{N}$ und $\lambda^v \in \mathbb{R}^{U^v}$ mit $v = \sum_{u \in U^v} u\lambda_u^v$ und $\sum_{u \in U^v} u\lambda_u^v = 1$.
Da alle U^v endlich sind, ist auch $\mathcal{U} = \bigcup_{v \in U} U^v$ endlich und wir können die λ^v mit 0 auffüllen um Elemente von $\mathbb{R}^{\mathcal{U}}$ zu erhalten. Nun ergibt sich für x:

$$x = \sum_{v \in U} v\lambda_v = \sum_{v \in U} \Big(\sum_{u \in \mathcal{U}} u\lambda_u^v \Big) = \sum_{u \in \mathcal{U}} u \Big(\sum_{v \in U} \lambda_u^v \lambda_v \Big)$$

weiterhin gilt wg:

$$1 = \sum_{v \in U} \lambda_v = \sum_{v \in U} \underbrace{\Big(\sum_{u \in \mathcal{U}} \lambda_u^v \Big)}_{=1} \lambda_v = \sum_{u \in \mathcal{U}} \Big(\sum_{v \in U} \lambda_u^v \lambda_v \Big)$$

Also gilt $x \in \operatorname{aff} A$ und $\operatorname{aff} \operatorname{aff} A \subset \operatorname{aff} A$

5c) Es sei $x \in \operatorname{aff} A$. Also gibt es $U \subset A$ mit $|U| \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}^U$ mit $x = \sum_{v \in U} v \lambda_v$ und $\sum_{v \in U} \lambda_v = 1$.

Mit $A \subset B$ folgt $U \subset B$ und $x \in \operatorname{aff} B$.