Klausur zur Quantenmechanik I

SS 2007, Prof. W. Weise

Mittwoch, 6. Juni 2007, 10:00 - 11:30, HS 1, Physik Department, TU München

Name: Gruppe:

Matrikelnummer: ID:

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte	10	15	15	40

Die Klausur besteht aus **3 Aufgaben**.
Bitte bearbeiten Sie **jede Aufgabe** auf einem **separaten** Blatt!

Bitte geben Sie auf **allen** Blättern
Ihren Namen
und **Ihre Übungsgruppe** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe K1 (10 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines dreidimensionalen, isotropen harmonischen Oszillators mit Masse m und charakteristischer Frequenz ω lautet

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right).$$

a) (4 Punkte) Zeigen Sie durch Zerlegung von $\hat{H}$ als Summe von drei eindimensionalen harmonischen Oszillatoren, daß die Energieeigenwerte gegeben sind durch

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

b) (3 Punkte) Weisen Sie nach, daß die niedrigsten drei Energieeigenzustände 1-fach, 3-fach, bzw. 6-fach entartet sind.

c) (3 Punkte) Geben Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes an.

Aufgabe K2 (15 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und mit der Energie E wird, von $x \to -\infty$ kommend, am Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

gestreut ($V_0 > 0$).

a) (3 Punkte) Lösen Sie die Schrödingergleichung für den Fall $E > V_0$. Nehmen Sie Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Wellenfunktion bei $x = 0$ an. Welche weitere physikalische Randbedingung gilt?

b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Stromdichten für die einfallende Welle, die reflektierten und die transmittierten Anteile.

c) (4 Punkte) Wie sind der Reflexionskoeffizient R und der Transmissionskoeffizient T definiert? Berechnen Sie R und T!

d) (4 Punkte) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte im Bereich $x < 0$ (links von der Potentialschwelle) und skizzieren Sie das Ergebnis! Wie nennt man das auftretende Phänomen?

Aufgabe K3 (15 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension in der Umgebung des Potentials

$$V(x) = -V_0\, a\, \delta(x), \quad V_0 > 0, \; a > 0.$$

a) (1 Punkt) Stellen Sie die Schrödingergleichung für dieses Problem auf.

b) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Anschlußbedingungen am Punkt $x = 0$. Gehen Sie dazu davon aus, daß die Wellenfunktion stetig und normierbar und daher insbesondere überall endlich ist, $|\psi(x)| < \infty$.
Hinweis: Integrieren Sie die Schrödingergleichung über ein Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$, um die Anschlußbedingung für die Ableitung der Wellenfunktion zu bestimmen. Was ergibt sich für eine stetige Wellenfunktion im Grenzwert $\varepsilon \to 0$?

c) (6 Punkte) Lösen Sie die Schrödingergleichung für den Fall $E < 0$ und bestimmen Sie mit Hilfe der Rand- und Anschlussbedingungen die Energie des gebundenen Zustands.

d) (1 Punkt) Welche Dimension hat die Konstante a, wenn V_0 die Dimension einer Energie hat? Warum? Können Sie das am Ergebnis für die Energie des gebundenen Zustands aus c) bestätigen?