PROF. DR. NOAM BERGER
PD DR. G. WITTERSTEIN

MA9202, Analysis 1

Probeklausur

WS 2016/17
BLATT PK

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \neq 1$ gilt.

LÖSUNG:

Induktionsbeginn $n = 0$: **[1/2]**
Es gilt

$$\prod_{k=0}^{0}\left(1+x^{2^k}\right) \overset{[1]}{=} 1 + x^1 \overset{[1]}{=} \frac{1-x^2}{1-x},$$

also ist die Behauptung wahr für $n = 0$.

Induktionsschritt von $n-1$ auf n: **[1/2]**
Für jedes $n \geq 1$ gilt

$$\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right) \overset{[1]}{=} \left(1+x^{2^n}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+x^{2^k}\right) \overset{[1]}{=} \left(1+x^{2^n}\right)\frac{1-x^{2^n}}{1-x} \overset{[1]}{=} \frac{1-\left(x^{2^n}\right)^2}{1-x} \overset{[1]}{=} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x},$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme verwendet wurde. Es wurde für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gezeigt, damit gilt die Aussage auch für alle $n \in \mathbb{N}$. **[1]**

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}$.

$\operatorname{Re}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}$ **[1/2]**	$\operatorname{Im}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{2}$ **[1/2]**

(b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z^3 = 1$.

LÖSUNG:

(a) $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1} = \left(\frac{i+1}{i}\right)^{-1} = \frac{i}{1+i} \overset{[1]}{=} i\,\frac{1-i}{1^2-i^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i.$

(b) Eine Lösung von $z^3 = 1$, also von $z^3 - 1 = 0$, ist natürlich $z_1 = 1$ **[1]**. Polynomdivision zeigt $z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ **[1]**. Die beiden anderen komplexen Lösungen von $z^3 - 1 = 0$ sind demnach die Nullstellen von $z^2 + z + 1$, also $z_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-4}\right)$. Man findet also

$$z_1 = 1 + i\,0, \qquad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \textbf{[1]} \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \textbf{[1]}$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert von $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$.

(b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit des festen Parameters $c \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, ob die folgende Reihe konvergiert, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{(c+1)^{k+1}}$.

LÖSUNG:

(a) Es gilt durch Erweitern mit $\sqrt{n^2+1}+n$

$$a_n := \sqrt{n^2+1}-n \overset{[1]}{=} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} \overset{[1]}{\leq} \frac{1}{2n}$$

wegen $\sqrt{n^2+1}+n \geq 2n$. Aus der Monotonie des Limes folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ **[1]**.

(b) Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{(c+1)^{k+1}} \overset{[1]}{=} \frac{1}{c+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{c}{c+1}\right)^k$$

haben wir es mit einer geometrischen Reihe zu tun. Sie konvergiert, wenn $\left|\frac{c}{c+1}\right| < 1$ ist **[1]**. In diesem Fall, also wenn $|c| < |c+1|$ gilt, ist der Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{(c+1)^{k+1}} = \frac{1}{c+1}\left(\frac{1}{1-\frac{c}{c+1}} - 1\right) = \frac{1}{c+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{c+1}} - \frac{1}{c+1} = 1 - \frac{1}{c+1} = \frac{c}{c+1}. \quad \textbf{[1]}$$

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$.

LÖSUNG:

Für jedes $z \neq 0$ gilt mit dem Quotientenkriterium **[1]**

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)!\, z^{k+1}}{k!\, z^k}\right| \overset{[1]}{=} |z| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{1} \overset{[1]}{=} \infty;$$

Die Potenzreihe divergiert für jedes $z \neq 0$ **[1]**, d.h. der Konvergenzradius R ist gleich Null **[2]**.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[7 Punkte]**

(a) Es sei $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ gegeben durch $f(x) := a^x$.

(i) Zeigen Sie, dass f im Fall $a > 1$ streng monoton wachsend und im Fall $a < 1$ streng monoton fallend ist.

(ii) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ bei $x = 1$ stetig fortsetzbar?

LÖSUNG:

(a) (i) Es gilt $f(x) = a^x = \exp(x \ln(a))$. **[1]** Mit der Kettenregel folgt $f'(x) = \exp(x\ln(a))\ln(a) = a^x \ln(a)$. **[1]** Da $a^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und $\ln(a) > 0$ für $a > 1$, $\ln(a) < 0$ für $0 < a < 1$, so gilt $f'(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ für $a > 1$ und damit f streng monoton wachsend und $f'(x) < 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ für $a \in (0,1)$ und damit f streng monoton fallend. **[1]**

(ii) Sei $0 < a < 1$, damit ist $\ln(a) < 0$, und somit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln(a) = \mp\infty$. Es folgt daher: $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(\ln(a)x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \exp(\ln(a)x) = \infty$. **[1]** Sei $a > 1$, damit ist $\ln(a) > 0$, und somit $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln(a) = \pm\infty$. Es folgt daher $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. **[1]** Insgesamt hat man also

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{für } a \in (0,1), \\ \infty & \text{für } a > 1, \end{cases} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty & \text{für } a \in (0,1), \\ 0 & \text{für } a > 1. \end{cases}$$

(b) Zähler und Nenner sind als Polynome stetig differenzierbar und haben bei $x = 1$ den Wert 0. Die l'Hospitalsche Regel **[1]** ergibt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x-3}{2x} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}. \quad \textbf{[1]}$$

6. **Zwischenwertsatz** **[7 Punkte]**

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.

Hinweis: Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

Lösung:

Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$ ist stetig, da f stetig ist. **[1]**
Außerdem gilt $F(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -F(0)$. **[1]**
Erster Fall: $F(0) = 0$. Dann ist $x_0 = 0$ eine Lösung, denn $f(\pi) = f(0) - F(0) = f(0)$. **[1]**
Zweiter Fall: $F(0) > 0$. Dann ist $F(\pi) < 0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in (0, \pi)$ mit $F(x_0) = 0$, bzw. $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. **[3]**
Dritter Fall: $F(0) < 0$. Dann ist $F(\pi) > 0$ und wie im zweiten Fall gibt es ein $x_0 \in (0, \pi)$ mit $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$. **[1]**

7. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

(a) Die Funktion f ist

☒ stetig ☐ 2π-periodisch ☒ streng monoton steigend ☐ streng monoton fallend ?

Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: Es kann mehr als eine korrekte Antwort geben.

(b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist Stammfunktion von $g(x) = e^{x^2}$, das heisst es gilt $f'(x) = g(x)$. **[1]** Das bedeutet f ist differenzierbar. **[1]** Daraus folgt f ist stetig. **[1]**
Da $e^{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt $f'(x) = e^{x^2} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. **[1]** Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton steigend. **[1]**

(b) Da $f''(x) = g'(x) = e^{x^2}2x$, so gilt

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}_2 f)(x,1) &\overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{f^{(0)}(1)}{0!}(x-1)^0 + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1)^1 + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 \\
&= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} \int\limits_1^1 \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{1^2}(x-1) + \frac{\mathrm{e}^{1^2}\cdot 2\cdot 1}{2}(x-1)^2 \\
&= 0 + \mathrm{e}(x-1) + \mathrm{e}(x-1)^2 \overset{\textbf{[1]}}{=} \mathrm{e}(x-1)x\,.
\end{aligned}$$