....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Diplomvorprüfung

HÖHERE MATHEMATIK III
Analysis 2 für Physiker

8. September 2008, 13:00 – 14:30 Uhr

PD Dr. W. Aschbacher, Prof. Dr. H. Spohn

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
$\sum$		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

I ....
Erstkorrektur

Aufgabe 1. Differenzierbarkeit **[5 Punkte]**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Sei $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$. Wie lautet die Richtungsableitungen $\partial_v f(0,0)$ von f im Ursprung?

- ☐ existiert nicht für $v_2 = 0$
- ☒ 0 für $v_2 = 0$
- ☒ v_1^3/v_2^2 für $v_2 \neq 0$
- ☒ existiert für alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
- ☐ v_2/v_1^3 für $v_1 \neq 0$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung unstetig ist.

(c) Ist f im Ursprung partiell differenzierbar?

☒ ja ☐ nein

(d) Ist f im Ursprung total differenzierbar?

☐ ja ☒ nein

LÖSUNG

(a) Beh $\partial_v f(0,0) = \begin{cases} 0, & v_2 = 0, \\ v_1^3/v_2^2, & v_2 \neq 0. \end{cases}$

Bew Die Richtungsableitung von f im Ursprung in Richtung $v \neq 0$ hat folgende Gestalt,

$$\partial_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(tv_1, tv_2) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^5 v_1^3 v_2^2}{t^4(t^2 v_1^6 + v_2^4)} = \begin{cases} 0, & v_2 = 0, \\ v_1^3/v_2^2, & v_2 \neq 0. \end{cases}$$

[1 Punkt]

☐

(b) Beh f ist im Ursprung unstetig.

Bew Betrachten wir eine Folge in $\mathbb{R}^2$, die auf der Kurve $y = x^{3/2}$ mit $x > 0$ gegen den Ursprung strebt. Auf dieser Kurve ist die Funktion f aber konstant und verschieden von Null,

$$f(x, x^{3/2}) = \frac{x^3 x^3}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2}.$$

Da aber nach Definition $f(0,0) = 0$, folgt die Behauptung. **[2 Punkte]**

☐

(c) Beh f ist im Ursprung partiell differenzierbar.

Bew Die partielle Differenzierbarkeit entspricht der Existenz der Richtungsableitungen in die Richtungen $v = (1,0)$ und $v = (0,1)$. f ist aber nach Aufgabenteil (a) in alle Richtungen differenzierbar.

[1 Punkt]

☐

(d) Beh f ist im Ursprung nicht total differenzierbar.

Bew Aus der totalen Differenzierbarkeit folgt die Stetigkeit. f ist aber nach Aufgabenteil (b) im Ursprung unstetig. **[1 Punkt]**

$\square$

Aufgabe 2. Vektoranalysis **[4 Punkte]**

(a) Sei $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

☐ $f\nabla \cdot F = -(\nabla f) \cdot F + (\nabla \wedge F) \cdot \nabla f$

☐ $f\nabla \wedge F = -(\nabla f) \wedge F + \nabla \wedge (\nabla f)$

☒ $(\nabla f) \wedge F - \nabla \wedge (fF) = -f\nabla \wedge F$

☐ $(\nabla f) \cdot F + f\nabla \cdot F = \nabla \cdot (\nabla \wedge F)$

(b) Seien $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x, y, z) = \frac{1}{2}[x^2, y^2, z^2]^T$. Wie lautet $\nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F$?

☒ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

LÖSUNG

(a) Beh Genau die dritte Aussage ist richtig.

Bew Die erste Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir z.Bsp. $f(x, y, z) \equiv 1$ und ein nicht inkompressibles F. Die zweite Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir z.Bsp. $f(x, y, z) \equiv 1$ und ein nicht wirbelfreies F. Die dritte Aussage folgt aus Aufgabe 100 3. . Die vierte Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir z.Bsp. wieder $f(x, y, z) \equiv 1$ und ein nicht inkompressibles F (und $\nabla \cdot (\nabla \wedge F) = 0$ aus Aufgabe 98 4.). **[2 Punkte]**

☐

(b) Beh $\nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F = 0$

Bew Wir benutzen die Formel aus Aufgabe 100 2.,

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \Delta F.$$

Da $\nabla \wedge F = 0$, folgt die Behauptung.

[2 Punkte]

☐

Aufgabe 3. Gradientenfelder **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f erfüllt die Integrabilitätsbedingung. ☒ ja ☐ nein

(b) Der Definitionsbereich von f ist sternförmig. ☐ ja ☒ nein

(c) Das Wegintegral von f über den Einheitskreis verschwindet. ☐ ja ☒ nein

(d) f ist ein Gradientenfeld. ☐ ja ☒ nein

LÖSUNG

(a) Beh f erfüllt die Integrabilitätsbedingung.

Bew Wir berechnen $\partial_2 f_1(x_1, x_2)$ und $\partial_1 f_2(x_1, x_2)$,

$$\partial_2 f_1(x_1, x_2) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_1 f_2(x_1, x_2).$$

[1 Punkt]

☐

(b) Beh Der Definitionsbereich von f ist nicht sternförmig.

Bew Es existiert kein Sternmittelpunkt in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Sei nämlich $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist auch $x = -a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, aber die Verbindungsstrecke zwischen a und x liegt nicht ganz in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, da sie durch den Ursprung führt. **[1 Punkt]**

☐

(c) Beh Das Wegintegral von f über den Einheitskreis verschwindet nicht.

Bew Das Wegintegral von f über den Einheitskreis $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ lautet

$$\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \, (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 2\pi.$$

[1 Punkt]

☐

(d) Beh f ist kein Gradientenfeld.

Bew Wenn f ein Gradientenfeld wäre, müsste das Wegintegral von f über jeden geschlossenen Weg verschwinden. Dies ist aber nach Aufgabenteil (c) nicht der Fall. **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 4. Extrema **[4 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = y^2(x-1) + x^2(x+1),$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,2/3), \quad P_3 = (-2/3,0), \quad P_4 = (0,1/3), \quad P_5 = (-2/3,1/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in

☒ P_1 ☐ P_2 ☒ P_3 ☐ P_4 ☐ P_5

(b) f besitzt ein lokales Maximum in

☐ P_1 ☐ P_2 ☒ P_3 ☐ P_4 ☐ P_5

(c) f besitzt ein lokales Minimum in

☐ P_1 ☐ P_2 ☐ P_3 ☐ P_4 ☐ P_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in

☒ P_1 ☐ P_2 ☐ P_3 ☐ P_4 ☐ P_5

(a) Beh P_1 und P_3 sind die kritischen Punkte von f.

Bew Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + 2x + y^2, 2(x-1)y) = (0,0),$$

woraus folgt, dass P_1 und P_3 kritische Punkte sind. P_2, P_4 und P_5 sind keine kritischen Punkte.

[1 Punkt]

☐

(b) Beh f besitzt genau in P_3 ein lokales Maximum.

Bew Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x+2 & 2y \\ 2y & 2(x-1) \end{bmatrix}.$$

An den kritischen Punkten P_1 und P_3 erhalten wir,

$$H_f(P_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad H_f(P_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{bmatrix}.$$

Aufgrund der Vorzeichen der Eigenwerte von $H_f(P_1)$ und $H_f(P_3)$ hat f in P_3 ein (isoliertes) lokales Maximum und in P_1 einen Sattelpunkt. **[1 Punkt]**

☐

(c) Beh f besitzt in keinem der Punkte ein lokales Minimum.

Bew Siehe oben. **[1 Punkt]**

☐

(d) Beh f besitzt genau in P_1 einen Sattelpunkt.

Bew Siehe oben. **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 5. Koordinatentransformation **[4 Punkte]**

Gegeben seien die Halbebenen $U = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi_2 > 0\}$ und $V = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$ und die Koordinatentransformation $\Phi : U \to V$,

$$\Phi(\xi_1, \xi_2) = \begin{bmatrix} \xi_1\xi_2 \\ \xi_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Wie lautet die Umkehrtransformation $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2) : V \to U$?

☒ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_2}}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$ ☒ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$ ☐ $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}$ ☐ $\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{\sqrt{x_2}}$

(b) Wie lautet die erste Komponente ∂_{x_1} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☒ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1}$ ☐ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

(c) Wie lautet die zweite Komponente ∂_{x_2} des Gradienten in den ξ-Koordinaten?

☐ $\partial_{x_2} = \frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$ ☐ $\partial_{x_2} = -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_2}$ ☒ $\partial_{x_2} = -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\,\partial_{\xi_2}$

LÖSUNG

(a) Beh $\Psi_1(x_1, x_2) = x_1/\sqrt{x_2}$ und $\Psi_2(x_1, x_2) = \sqrt{x_2}$

Bew Wir lösen die Gleichungen $\xi_1\xi_2 = x_1$ und $\xi_2^2 = x_2$ nach ξ_1 und ξ_2 auf und erhalten die Behauptung. **[1 Punkt]**

☐

(b) Beh $\partial_{x_1} = \frac{1}{\xi_2}\,\partial_{\xi_1}$

Bew Sei $\tilde{f}(x) = f(\Psi(x))$. Dann folgt aus der Kettenregel $(D\tilde{f})(x)^T = (D\Psi)(\Phi(\xi))^T(Df)(\xi)^T$. **[1 Punkt]**

Wir berechnen also

$$(D\Psi)(\Phi(\xi))^T = \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\Psi_1(x) & \partial_{x_1}\Psi_2(x) \\ \partial_{x_2}\Psi_1(x) & \partial_{x_2}\Psi_2(x) \end{bmatrix}\Bigg|_{x=\Phi(\xi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{x_2}} & 0 \\ -\frac{x_1}{2\sqrt{x_2^3}} & \frac{1}{2\sqrt{x_2}} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=\Phi(\xi)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi_2} & 0 \\ -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2} & \frac{1}{2\xi_2} \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

☐

(c) Beh $\partial_{x_2} = -\frac{\xi_1}{2\xi_2^2}\,\partial_{\xi_1} + \frac{1}{2\xi_2}\partial_{\xi_2}$

Bew Siehe Aufgabenteil (b). **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 6. Trägheitsmoment **[4 Punkte]**

Berechnen Sie das Trägheitsmoment

$$I_3 = \int_H \mathrm{d}^3x \; \rho(x_1, x_2, x_3)\,(x_1^2 + x_2^2)$$

der Halbkugel $H = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq R,\; x_3 \geq 0\}$ mit Massendichte $\rho(x_1, x_2, x_3) = m\,|x_3|/R^4$ und $m > 0$.

LÖSUNG

<u>Beh</u> $I_3 = \dfrac{\pi}{12} m R^2$

<u>Bew</u> Wir transformieren auf Kugelkoordinaten und erhalten

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{m}{R^4} \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; r^2 \sin\theta \; r\cos\theta \, (r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi) \\
&= \frac{m}{R^4} \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; r^5 \underbrace{\sin^3\theta\cos\theta}_{=\frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin^4\theta} = \frac{2\pi m}{R^4} \left[\frac{1}{6} r^6\right]_0^R \left[\frac{1}{4}\sin^4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{12} m R^2.
\end{aligned}$$

[4 Punkte]

□

Erklärung:
[1 Punkt] für die Kugelkoordinaten,
[1 Punkt] für das Integral in Kugelkoordinaten,
[1 Punkt] für die Stammfunktionen,
[1 Punkt] für das Einsetzen.

Aufgabe 7. Lokale Auflösung eines Gleichungssystems **[5 Punkte]**

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + q_1^2 - 2q_2^2 = 0,$$
$$x^2 + 2q_1^2 + q_2^2 = 4,$$

für hinreichend kleine x durch positive Funktionen $q_1(x)$ und $q_2(x)$ aufgelöst werden kann.

Hinweis: Der Punkt $(x, q_1, q_2) = (0, 2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ ist eine Lösung dieses Gleichungssystems.

(b) Berechnen Sie $q_1'(x)$ in Abhängigkeit von x und $q_1(x)$ und $q_2'(x)$ in Abhängigkeit von x und $q_2(x)$.

LÖSUNG

(a) Beh In einer Umgebung des Punktes $x = 0$ existiert eine Funktion $g(x)$, die die Gleichung $f(x, q_1, q_2) = 0$ nach $(q_1, q_2) = g(x)$ auflöst.

Bew Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, q_1, q_2) = (x^2 + q_1^2 - 2q_2^2, x^2 + 2q_1^2 + q_2^2 - 4),$$

beschreibt das Gleichungssystem durch $f(x, q_1, q_2) = 0$.

Der Satz über implizite Funktionen aus der Vorlesung würde eine lokale Auflösung des Gleichungssystems liefern, falls seine Voraussetzungen erfüllt wären. Wir verifizieren also die Anwendbarkeit dieses Satzes (die 3 Voraussetzungen aus der Vorlesung).

(1) Die Funktion f ist stetig differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, da Polynome glatt sind. **[1/2 Punkt]**

(2) Die Funktion verschwindet im Punkt $(0, 2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. **[1/2 Punkt]**

(3) Die Determinante der Matrix der Ableitung nach den aufzulösenden Variablen $q = (q_1, q_2)$ ist am Punkt $(0, 2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ ungleich Null,

$$\det \partial_q f(x, q_1, q_2) = \det \begin{bmatrix} \partial_{q_1} f_1(x, q_1, q_2) & \partial_{q_2} f_1(x, q_1, q_2) \\ \partial_{q_1} f_2(x, q_1, q_2) & \partial_{q_2} f_2(x, q_1, q_2) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2q_1 & -4q_2 \\ 4q_1 & 2q_2 \end{bmatrix} = 20 q_1 q_2,$$

also $\det \partial_q f(0, 2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}) = 16\sqrt{2} \neq 0$. **[1 Punkt]**

Der Satz über implizite Funktionen liefert nun die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion g mit $g(0) = (2\sqrt{2}/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ und $f(x, g(x)) = 0$ in einer Umgebung von $x = 0$. **[1 Punkt]**

□

(b) Beh $g'(x) = [q_1'(x), q_2'(x)]^T = [-3x/(5q_1(x)), x/(5q_2(x))]^T$

Bew Gemäss der Formel aus der Vorlesung berechnet sich die Ableitung von g durch

$$g'(x) = -\left[\partial_q f(x, q)\right]^{-1} \partial_x f(x, q) = -\frac{1}{20 q_1(x) q_2(x)} \begin{bmatrix} 2q_2(x) & 4q_2(x) \\ -4q_1(x) & 2q_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x \\ 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \frac{x}{q_1(x)} \\ \frac{1}{5} \frac{x}{q_2(x)} \end{bmatrix}.$$

[2 Punkte]

□

Aufgabe 8. Konvexität **[3 Punkte]**

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und sei $f \in C^2(K, \mathbb{R})$.

(a) Welche Aussagen sind richtig?

☒ $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in K$. $\implies$ f ist konvex auf K.
☒ $H_f(x)$ ist positiv semidefinit für alle $x \in K$. $\impliedby$ f ist konvex auf K.
☒ $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in K$. $\implies$ f ist strikt konvex auf K.
☐ $H_f(x)$ ist positiv definit für alle $x \in K$. $\impliedby$ f ist strikt konvex auf K.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(ax_1^2 + e^{x_2}).$$

Zeigen Sie, dass f strikt konvex ist auf $\mathbb{R}^2$, falls $a > 0$.

LÖSUNG

(a) <u>Beh</u> Genau die ersten drei Aussagen sind richtig.

<u>Bew</u> Die ersten drei Aussagen sind Inhalt der Aufgaben 103 und 106 (a). Die letzte Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir z.Bsp. für $n = 1$ und $K = \mathbb{R}$ die Funtion $f(x) = x^4$, die strikt konvex ist, für die aber $f''(0) = 0$. **[1 Punkt]**

$\square$

(b) <u>Beh</u> f ist strikt konvex auf $\mathbb{R}^2$, falls $a > 0$.

<u>Bew</u> Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{x_2} \end{bmatrix}.$$

$H_f(x_1, x_2)$ ist also genau dann positiv definit, falls $a > 0$. Daraus folgt die Behauptung mit Aufgabenteil (a). **[2 Punkte]**

$\square$

Aufgabe 9. Taylor-Formel **[3 Punkte]**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$. Welches sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Taylorformel 1. Ordnung an der Stelle x mit Zuwachs ξ, in der das Restglied durch die Hesse-Matrix ausgedrückt wird?

(b) Wie lautet die Taylor-Formel in diesem Fall?

$$\boxed{f(x+\xi) = f(x) + (\nabla f)(x) \cdot \xi + \frac{1}{2}\,\xi \cdot H_f(x+\theta\xi)\xi \quad \text{für ein } \theta \in [0,1]}$$

LÖSUNG

(a) Beh Die Voraussetzungen lauten:

(1) $f \in C^2(U, \mathbb{R})$ **[1/2 Punkt]**

(2) $x + t\xi \in U$ für alle $t \in [0, 1]$ **[1/2 Punkt]**

Bew Siehe Vorlesung.

□

(b) Beh Es existiert ein $\theta \in [0, 1]$, sodass **[1 Punkt]**

$$f(x+\xi) = f(x) + (\nabla f)(x) \cdot \xi + \frac{1}{2}\,\xi \cdot H_f(x+\theta\xi)\xi.$$

[1 Punkt]

Bew Siehe Vorlesung. □

Aufgabe 10. Oberflächenintegral **[4 Punkte]**

Sei $g \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ und $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x) = g(\|x\|)\,\frac{x}{\|x\|}.$$

Berechnen Sie das Integral von f über die Oberfläche der Kugel mit Zentrum im Ursprung und Radius $R > 0$.

LÖSUNG

<u>Beh</u> $\displaystyle\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = 4\pi R^2 g(R)$

<u>Bew</u> Wir berechnen dieses Integral auf zwei Arten.

Ohne den Satz von Gauss:
Das Integral lautet in Kugelkoordinaten $\Gamma : [0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\Gamma(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$,

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, f(\Gamma(\theta,\varphi)) \cdot [\partial_\theta\Gamma(\theta,\varphi) \wedge \partial_\varphi\Gamma(\theta,\varphi)],$$

wobei

$$\begin{aligned} f(\Gamma(\theta,\varphi)) &= g(R)\,(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \\ \partial_\theta\Gamma(\theta,\varphi) \wedge \partial_\varphi\Gamma(\theta,\varphi) &= (R^2\sin^2\theta\cos\varphi, R^2\sin^2\theta\sin\varphi, R^2\sin\theta\cos\theta). \end{aligned}$$

Daraus folgt also

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, g(R)R^2\sin\theta = 4\pi R^2 g(R).$$

Mit dem Satz von Gauss:
Die Divergenz von f lautet

$$\begin{aligned} \nabla \cdot f(x) &= \sum_{j=1}^3 \partial_j \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}\,x_j\right) = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|} + x_j\,\frac{g'(\|x\|)\frac{x_j}{\|x\|}\|x\| - g(\|x\|)\frac{x_j}{\|x\|}}{\|x\|^2}\right) \\ &= g'(\|x\|) + 2\,\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}. \end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten finden wir also

$$\int_{\partial K} f \cdot \mathrm{d}S = \int_K \mathrm{d}^3x\,\nabla \cdot f(x) = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\ \sin\theta\, \underbrace{r^2\left(g'(r) + 2\,\frac{g(r)}{r}\right)}_{=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2 g(r)}$$

Bemerkung: Da $x/\|x\|$ gerade die Flächennormale ist, ist das Resultat offensichtlich.

[4 Punkte]

□