Musterlösung Aufgabe 1

(Olaf Weidemann)

~~1,5 + 2,5 + 1 + 1 + 2 + 4 = 12~~

$1 + 2.5 + 1 + 1 + 2.5 + 4 = 12$

$V_1 = 30\,cm \cdot \left(\frac{5\,cm}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} = 196\ cm^3$

$p_1 = 1{,}5$ bar

$T_1 = T_{min} = 200\ K$

	1	2	3	4
p	1,5 bar	4,5 bar	1,0 bar	1,0 bar
V	196 cm³	196 cm³	483 cm³	294 cm³
T	200 K	600 K	329 K	200 K

a) $\boxed{1 \to 2}$ 1

isochor $T_2 = 3 \cdot T_1 = 600K$

$pV = nRT$

$V = const \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ 1/2 $p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1}$

$p_2 = 3 \cdot p_1 \overset{1/2}{=} 4{,}5$ bar

b) $\boxed{2 \to 3}$ 2,5

adiabatisch

$p_3 = 1013$ mbar $= 1{,}0$ bar

$pV^\kappa = const$ $\kappa = 1 + \frac{2}{f}$

$\kappa \overset{1/2}{=} \frac{5}{3}$ für einatomiges ideales Gas

$p_2 V_2^\kappa = p_3 V_3^\kappa$ 1/2

$\Rightarrow V_3 = V_2 \cdot \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \overset{1/2}{=} 483\ cm^3$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{nR} \overset{1/2}{=} \frac{p_3 V_3}{p_1 V_1} T_1 \; 1/2 = 329\ \mathrm{K} \quad 1/2$$

c) $\boxed{3 \to 4}$ 1

isobar

$p_4 = p_3 = 1{,}0\ \mathrm{bar}$

$T_4 = T_1 = 200\ \mathrm{K}$

$$\left(V_4 \overset{1/2}{=} \frac{nR\,T_4}{p_4} = \frac{p_1 V_1\,\cancel{T_4}}{\cancel{T_1}\;p_4} = \frac{p_1}{p_4} \cdot V_1 \right)$$

$$\overset{1/2}{=} 294\ \mathrm{cm}^3$$

einfacher $V_4 = V_3 \cdot \frac{T_4}{T_3} = 294\ \mathrm{cm}^3$

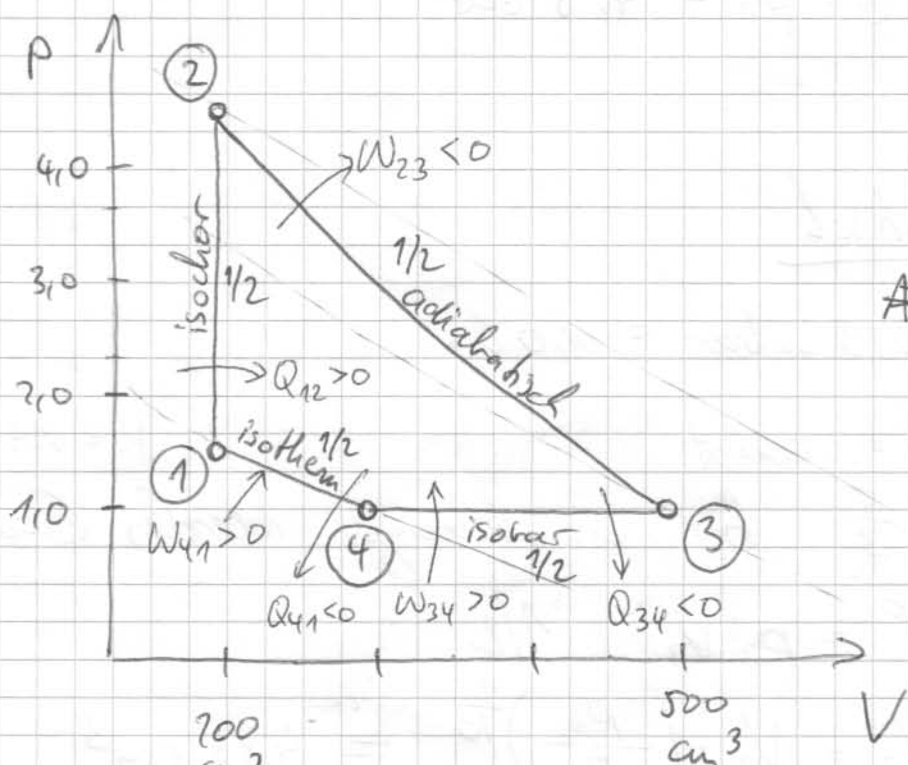
d) $\boxed{4 \to 1}$ 1

isotherm

$$\Delta Q_{41} = -\Delta W_{41} \overset{1/2}{=} + p_4 V_4 \cdot \ln\left(\frac{V_1}{V_4}\right)$$

$$\overset{1/2}{=} \cancel{-}11{,}9\ \mathrm{J} \quad (\Delta \text{ mit Pa}, \mathrm{cm}^3)$$

e) ~~2~~ 2,5



~~Achsenbeschr.~~ ~~1/2~~

Achsenbeschr. 1/2

f) $\underline{1 \to 2}$ isochor! $\Delta W_{12} = 0$ da $\Delta V = 0$

4

$$\Delta Q_{12} = C_V \cdot (T_2 - T_1) = n \cdot c_{V,mol} (T_2 - T_1)$$

mit $\kappa = \frac{c_{p,mol}}{c_{V,mol}}$

und $c_{p,mol} - c_{V,mol} = R$

$$\Rightarrow \quad c_{V,mol} = \frac{R}{\kappa - 1} = \frac{3}{2} R$$

$$\Rightarrow \quad \Delta Q_{12} = n \cdot R \cdot \frac{3}{2} (T_2 - T_1)$$

$$= \frac{p_1 V_1}{T_1} \cdot \frac{3}{2} \cdot 400K = +88{,}2 \, J \quad 1$$

$\underline{2 \to 3}$ adiabatisch $\Delta Q_{23} = 0$

$$\Delta W_{23} = n \cdot c_{V,mol} (T_3 - T_2) = -59{,}8 \, J \quad \frac{1}{2}$$

oder $\Delta W_{23} = \frac{p_3 V_3 - p_2 V_2}{\kappa - 1}$

$\underline{3 \to 4}$ isobar

$$\Delta W_{34} = -p_3 (V_4 - V_3) = \cancel{-12{,}9 \, J} + 18{,}9 \, J \quad 1/2$$

$$\Delta Q_{34} = n \, c_{p,mol} (T_4 - T_3)$$

$$= n R \frac{5}{2} (T_4 - T_3) = -47{,}4 \, J \quad 1$$

$\underline{4 \to 1}$ isotherm siehe d)

$$\Delta Q_{41} = -11{,}9 \, J$$
$$\Delta W_{41} = +11{,}9 \, J$$

Summe:

	ΔQ	ΔW
$1 \to 2$	$+88,2$	0
$2 \to 3$	0	$-59,8$
$3 \to 4$	$-47,4$	$+18,9$
$4 \to 1$	$-11,9$	$+11,9$
	$28,9$	$-29,0$ ✓

System leistet pro Zyklus 29 J. 1

$\underline{\sum (1) = 12 \text{ Punkte}}$

$$n = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = 1,77 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

Aufgabe 2

Adiabatengleichungen:

adiab. $\boxed{1}$ $\frac{1}{2}$ $pV^{\kappa} = \text{konst}$ (I) ✓ κ: ideales Gas $\Rightarrow 5/3$ $\boxed{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2}$ $TV^{\kappa-1} = \text{konst}$ (II) ✓

aus (I) $p_1 V_1^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right) \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\kappa}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ (I')

aus (II) $T_1 V_1^{\kappa-1} = T_2 V_2^{\kappa-1} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ (II')

(I') in (II') $\frac{T_2}{T_1} = \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\kappa}\right]^{\kappa-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ $\boxed{1}$ (III)

Erwärmung auf ursprüngliche Temperatur: isochores Prozess

$pV = nRT$ $V, n = \text{konst}$

$\Rightarrow \frac{p}{T} = \text{konst}$ ✓ $\boxed{\frac{1}{2}}$ isochor

$\Rightarrow \frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3} = \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\kappa-1/\kappa}$

$\boxed{\frac{1}{2}}$ $\boxed{T_3 = T_1}$ $\boxed{\text{Gl. (III)}}$ $\boxed{1}$ → Einformel

$\Rightarrow p_3 = p_2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\kappa/\kappa} = \underline{\underline{1{,}4 \cdot 10^5\ \text{Pa}}}$ $\boxed{\frac{1}{2}}$ Eintippen ✓

$-2/5$

3. Wirbelstrombremse

a)

$x \in]\,0cm; 25cm[$ (1) (Grenzen egal)

b)

$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\, d\vec{A} = -B \cdot \frac{\partial}{\partial t}\int dA =$ (1/2) (1/2)

$= -B \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[b \cdot (b - x(t))\right] = +B \cdot b \cdot \frac{\partial}{\partial t} x(t) = +B \cdot b \cdot v(t)$ (1/2) (1/2)

c)

es wirkt: Lorentzkraft auf bewegte Ladungen

Kraft auf Ladungselement dq $\left(\vec{I} = I \cdot \hat{e}_y\right)$

$d\vec{F}_L = dq \cdot \frac{dy}{dt} \cdot B \cdot (\hat{e}_y \times \hat{e}_z) = -B \cdot \frac{dq}{dt}\, dy \cdot \hat{e}_x = -B \cdot I\, dy \cdot \hat{e}_x$ (1/2) (1/2) (1/2)

e^-!

$\vec{F}_L = \int d\vec{F}_L = -B \cdot I \cdot \hat{e}_x \cdot \int_0^b dy = -B \cdot b \cdot I \cdot \hat{e}_x$ (1/2)

d)

Bewegungsgleichung: (in x-Richtung)

$m \cdot a = m \cdot g - B \cdot b \cdot I$ (1)

"senkrechte Teilstücke heben sich auf" (Kräfte kompensieren sich)

$I = \frac{|U_{ind}|}{R}$; $U_{ind} = +B \cdot b \cdot v$ $\rightarrow I = \frac{B \cdot b \cdot v}{R}$ (1)

$\Rightarrow m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - \frac{B^2 b^2}{R} \cdot v$ (1) (Dgl in v)

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \underbrace{\frac{B^2 b^2}{m \cdot R}}_{:= \alpha} \cdot v$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \alpha v$$

Trennung der Variablen:

$$\frac{dv}{g - \alpha v} = dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \frac{dv}{g - \alpha v} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\alpha} \ln (g - \alpha \cdot v) + c = t$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{\alpha} \left[g - c \exp(-\alpha t) \right]$$

$$v(t=0) = 0 \quad \Rightarrow c = g$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{g}{\alpha} \left[1 - \exp(-\alpha t) \right] \quad (1)$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t v(t)\, dt = \frac{g}{\alpha} \left[t + \frac{1}{\alpha} \exp(-\alpha t) \right] + c'$$

$$x(0) = 0 \quad \Rightarrow c' = -\frac{g}{\alpha^2} \approx 0$$

$$\Rightarrow x(t) \approx \frac{g}{\alpha} \cdot \left[t - \frac{1}{\alpha} \cdot \exp(-\alpha t) \right] \quad (1)$$

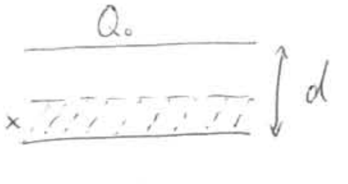
Näherung $\frac{B^2 b^2}{m \cdot R} \cdot t \gg 1$

$$\Rightarrow x(t) \approx \frac{g}{\alpha} \cdot t \quad (1/2) \qquad \Rightarrow \text{Fallzeit: } t_{mit} = \frac{\alpha \cdot b}{g} \approx 1{,}99\,s \quad (1/2)$$

ohne Bremswirkung:

$$x(t) = \underbrace{\frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t_{ohne} = \sqrt{\frac{2 \cdot b}{g}}}_{(1/2)} = 0{,}23\,s \qquad (1/2) \quad \Rightarrow \underline{\Delta t = 1{,}76\,s}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)



$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d-x}{\varepsilon_0 \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi} + \frac{x}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi}$$ 1

Energieinhalt Kondensator:

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_{ges}} = \frac{1}{2} Q_0^2 \cdot \frac{\varepsilon_r (d-x) + x}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi}$$ 1

Arbeit, die aufgebracht wird, zum Anheben der Flüssigkeit:

$$W = g\, m \cdot h = g \cdot \varrho \cdot x \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \varrho g \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot x^2$$ 1

Gesamtenergie: $E = E_c + W$ 1

Minimieren der Gesamtenergie: $\frac{dE}{dx} = 0$ 1

$$\frac{dE}{dx} = \cancel{\frac{1}{2}} Q_0^2 \frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2} + \varrho g \left(\frac{D}{2}\right)^2 \pi \cdot x \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{Q_0^2 (\varepsilon_r - 1)}{2 \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{D}{2}\right)^4 \pi^2 \varrho \cdot g}}}$$ 1 $\left(x \sim Q_0^2\right)$

Aufgabe 5

$$U_m = I\left(R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L\right) = I\left(R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right) \quad 1$$

$$U_{out} = I \cdot i\omega L \quad 1$$

$$\frac{U_{out}}{U_m} = \frac{i\omega L}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \quad 1 \quad = \frac{i\omega L R + \omega^2 L^2 - L/C}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad 1$$

$$\left|\frac{U_{out}}{U_m}\right| = \frac{\sqrt{\left(\omega^2 L^2 - L/C\right)^2 + \omega^2 L^2 R^2}}{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\omega^2 L^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$$

$$= \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}} \quad 1$$

6. Dipol

Ein elektrischer Dipol ($\vec{P} = Q \cdot \vec{d}$) befindet sich in einem homogenen elektrischen Feld in z-Richtung ($\vec{E} = E \cdot \vec{e}_z$)

a) Berechnen Sie die potentielle Energie in Abhängigkeit der Position seines Mittelpunktes $\vec{r}_0$ und seines Winkels ϕ zum elektrischen Feld.

b) Berechnen Sie das Drehmoment, das auf den Dipol wirkt.

c) Berechnen Sie die Kraft, die auf den Dipol wirkt, falls das Feld nicht mehr homogen ist:

$\vec{E}_1 = E_1 \cdot (1 + z \cdot \varepsilon) \cdot \vec{e}_z$ für $d \cdot \varepsilon << 1$.

a) 1 Position ist egal, da Feld homogen

$$E_{pot} = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -p\cdot E\cdot\cos\phi = -Q\cdot d\cdot E\cdot\cos\phi$$

1/2 1/2

b) $$|\vec{M}| = |\vec{p}\times\vec{E}| = p\cdot E\cdot\sin\phi = Q\cdot d\cdot E\sin\phi$$

1/2 1/2

c) $$\vec{F} = \left(\vec{p}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\right)\vec{E} = p\cdot\frac{\partial}{\partial z}E_z\vec{e}_z = Q\cdot d\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[E_1\cdot(1+z\cdot\varepsilon)\right]\vec{e}_z =$$

$$= Q\cdot d\cdot E_1\cdot\varepsilon\cdot\vec{e}_z \cdot\cos\phi$$

1/2 1/2

Σ 4

Aufgabe ist zu einfach, alle nötigen Formeln stehen in "Stöcker" auf Seite 410 direkt untereinander und es ist im Prinzip ~~keinerlei~~ kein Nachdenken erforderlich.

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_2 \\ -d_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$