
Klausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti

Sommersemester 2014

18. Juli 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

- Geben Sie die Formeln für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit allgemein für Wellenpakete an, die in Abhängigkeit von Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k beschrieben werden. Was beschreiben die beiden Geschwindigkeiten?
- Wie lautet für Materiewellen der Zusammenhang von Teilchenenergie E und kreisfrequenz ω , sowie Impuls p und Wellenzahl k ? Wie lauten die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren für Energie und Impuls?
- Leiten Sie aus der Dispersionsrelation $E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$ die Ausdrücke für Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit von $\beta = pc/E$ ab.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Elektronenstrahl habe eine Impulsschärfe von $\Delta p/p = 10^{-4}$.

- Schätzen Sie die minimalste Ausdehnung eines Elektronen-Wellenpakets dieses Strahls in Strahlrichtung ab, wenn der Strahlimpuls 162 keV/c, 8 MeV/c bzw. 0,855 GeV/c beträgt. Welche kinetische Energie haben die Elektronen jeweils?

Der Strahl laufe jetzt in ein äußeres Potenzial mit $V_0 > 0$, das in Strahlrichtung (x -Koordinate) stufenförmig sei:

$$V(x) = V_0\theta(x) \text{ mit } \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

- Für welche/n der oben untersuchten Impulse ist die Teilchengeschwindigkeit $v \ll c$, so dass man den Strahl durch die nicht-relativistische Schrödingergleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))\Psi(x) \quad (2)$$

beschreiben kann?

- (c) Setzen Sie die komplexwertige Wellenfunktion $\Psi(x)$

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ Te^{iqx} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

für die stationäre Schrödingergleichung an und bestimmen Sie den Zusammenhang von R und T in Abhängigkeit von k und q . Nutzen Sie die Stetigkeitsbedingungen für Ψ und die Ortsableitung Ψ' an der Potenzialstufe. Beschränken Sie sich auf den Fall, dass die Teilchenenergie größer ist als die Potentialschwelle, d. h. $E > V_0$.

- (d) Wie kann man die einzelnen Terme $|T|^2$ und $|R|^2$ interpretieren?

Aufgabe 3 (8 Punkte)

- (a) Zeichnen Sie ein qualitativ korrektes Energieschema von Wasserstoff mit und ohne Feinstruktur bis einschliesslich $n = 2$.
- (b) Vor der Aufspaltung eines Energieniveaus des H-Atoms durch die Spin-Bahn-Kopplung hat es einen festen Energiewert. Berechnen Sie die Verschiebung des Energieniveaus durch die Spin-Bahn-Kopplung in Abhängigkeit von l .
- (c) Berechnen Sie den „Schwerpunkt“ der neuen Energieniveaus nach der Aufspaltung durch die Spin-Bahn-Kopplung. Gewichten Sie dazu die Verschiebung jedes Niveaus (n, j) mit der Anzahl seiner magnetischen Unterzustände (Entartung).
- (d) Bestimmen Sie die Energieverschiebung des $2P_{3/2}$ Niveaus durch die Feinstruktur. Wie gross ist der Spin-Bahn-Kopplung dieses Niveaus für die Spin-Bahn-Kopplungskonstante von $a = 3 \cdot 10^{-5} \text{eV}$?

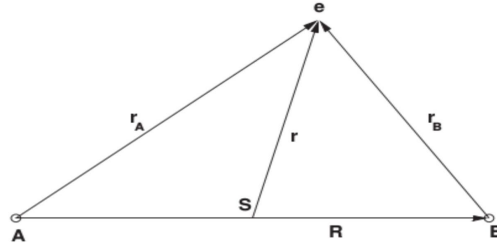
Aufgabe 4 (6 Punkte)

Wird in einem freien Atom ein Elektron in einen Zustand mit sehr kleiner Bindungsenergie gebracht, so nimmt die Wellenfunktion einen sehr großen Raum ein, und die Struktur des restlichen Atoms spielt fast keine Rolle mehr. Man spricht dann von Rydberg-Zuständen.

- (a) Zur Anregung der Rydberg-Zustände von Wasserstoff-Atomen werden zwei Laser benutzt, deren gemeinsame Energie die Elektronen auf das gewünschte Niveau hebt. Der erste Laser hat die feste Frequenz mit der Photonenenergie $E = 11,50 \text{eV}$, der zweite Laser sei durchstimmbar. Welche Wellenlängen muss man an diesem einstellen, um die Zustände mit $n = 20$ und $n = 100$ aus dem Grundzustand anzuregen?
- (b) Wie groß sind die Radien und Bindungsenergien dieser Zustände?
- (c) Welche Frequenzunschärfe dürfen die Laser jeweils maximal haben, um nur den Zustand $n = 100$ und nicht den Zustand $n = 101$ anzuregen?

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Das einfachste Molekül besteht aus zwei Protonen und einem Elektron – das einfach ionisierte Wasserstoff-Molekül H_2^+ .



- Formulieren Sie die stationäre, elektronische Schrödingergleichung für das H_2^+ Molekül (siehe Abb.) in der adiabatischen Näherung, d. h. der Abstand der Protonen R wird zunächst als konstant angenommen. Rechtfertigen Sie diese Näherung.
- Zeigen Sie am Beispiel des H_2^+ (Grundzustand), dass der Ansatz der LCAO Näherung zu zwei verschiedenen Molekülorbitalen führt und geben Sie diese an.

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Bei einem thermodynamischen Prozess werden $V_1 = 0,01 \text{ m}^3$ eines (idealen) Gases aus Molekülen mit fünf Freiheitsgraden von einer Temperatur $T_1 = 300 \text{ K}$ auf eine Temperatur $T_2 = 900 \text{ K}$ ($V_2 > V_1$) gebracht. Dabei ergibt sich eine Druckerhöhung von $p_1 = 1,0 \text{ bar}$ auf $p_2 = 2,0 \text{ bar}$.

- Skizzieren Sie den Vorgang in einem $p - V$ -Diagramm. Wählen Sie dabei den kürzesten, linearen Weg zwischen Start- und Endpunkt und zeichnen Sie die beiden Isothermen für T_1 und T_2 qualitativ ein.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Moleküle des Gases und die zugehörige Stoffmenge.
- Bestimmen Sie das Gasvolumen V_2 nach Abschluss des Vorgangs und den Betrag ΔU der Änderung der Inneren Energie. Nimmt diese zu oder ab?
- Berechnen Sie für diesen Prozess die verrichtete Arbeit W_{12} und die umgesetzte Wärme Q_{12} . Werden sie zugeführt oder abgegeben? Markieren Sie im $p - V$ -Diagramm die Fläche, die die umgesetzte Arbeit repräsentiert.

$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ A s V}^{-1} \text{ m}^{-1}$	$\alpha = 7,3 \cdot 10^{-3}$
$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$	$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J T}$
$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3} = 1,10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
$R_M = 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$