Vordiplomsprüfung

Prof. Lindner **Quantenmechanik 1** **11.03.2005**

- Diese Prüfung beinhaltet 6 Aufgaben und 90 Punkte.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Die Punkte sind jeweils am Rand des Blattes angegeben.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie deutlich. Unleserliche Antworten werden nicht bewertet.

1. Operatoren

3 (a) Es sei p der Impuls- und x der Ortsoperator. Zeigen Sie folgende Kommutatorrelation:
$[p, x^n] = -in\hbar x^{n-1}$ für ganzahlige $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, daß ein hermitescher Operator A auch nach einer unitären Transformation $A \to UAU^\dagger$ hermitesch ist. Dabei ist U ein unitärer Operator.

3 (c) Gegeben seien zwei Operatoren A und B, die miteinander vertauschen. Berechnen Sie den Kommutator $[A', B']$, wobei $A' = UAU^\dagger$ und $B' = UBU^\dagger$ mit einem unitären Operator U.

6 (d) Finden Sie in einer Raumdimension (x-Achse) die Randbedingung, die die Wellenfunktionen $\psi(x)$ und $\phi(x)$ erfüllen müssen, damit der Impulsoperator $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ hermitesch ist.

7 2. Ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m bewege sich unter dem Einfluß eines Potentials $V(x)$ in einer Raumdimension. Dabei befinde sich das Teilchen in dem Energieeigenzustand

$$\psi(x) = (\gamma^2/\pi)^{1/4} \cdot \exp\left(-\frac{\gamma^2 x^2}{2}\right)$$

des Hamiltonoperators mit dem Energieeigenwert $E = \hbar^2\gamma^2/(2m)$. Bestimmen Sie das Potential $V(x)$ und die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle p \rangle$ des Orts- bzw. des Impulsoperators für den angegeben Zustand.

3. Betrachten Sie in einer Raumdimension ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m, welches durch das Potential $V(x)$ in einem Bereich der Länge a eingesperrt sei: $V(x) = 0$ für $0 \leq x \leq a$ und $V(x) = \infty$ für $x < 0, x > a$. Zur Zeit $t = 0$ sei die normierte Wellenfunktion des Teilchens gegeben durch

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}}\left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

4 (a) Bestimmen Sie einen vollständigen und orthonormierten Satz von Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n des Hamiltonoperators mit dem angegebenen Potential $V(x)$.

10 (b) Nehmen Sie an, daß Teilaufgabe (a) folgende Lösungen liefere:
$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad E_n = \frac{(n\pi\hbar)^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
Finden Sie nun die zeitliche Entwicklung $\psi(x, t > 0)$ des Teilchens, indem Sie $\psi(x, t)$ nach den $\psi_n(x)$ entwickeln:
$$\psi(x, t) = \sum_n A_n(t)\psi_n(x).$$
Bestimmen Sie $A_n(t = 0)$ für alle n. Wie lauten dann die $A_n(t)$?

6 (c) Berechnen Sie den Energiemittelwert $\langle E(t) \rangle$ des Teilchens?

Hinweis: $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.

4. Ein spinloses Teilchen sei beschrieben durch eine Wellenfunktion deren normierter Winkelanteil $\psi(\theta,\phi)$ gegeben sei durch

$$\psi(\theta,\phi) = (\cos(\phi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\theta) + 2\cos(\theta))/\sqrt{8\pi}.$$

$\boxed{13}$ (a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\sqrt{\langle L^2\rangle}$ und $\langle L_z\rangle$, wobei L der Drehimpulsoperator und L_z seine z-Komponente ist.

$\boxed{5}$ (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Messung der z-Komponente des Drehimpulses den Wert $+\hbar$?

Hinweis: Die Darstellung der Winkelfunktionen durch Exponentialfunktionen und einige der folgenden Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}$ könnten Ihnen bei der Bearbeitung der Aufgabe nützlich sein:

$$Y_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}};\ \ Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{\pm i\phi};\ \ Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta).$$

5. Im Eindimensionalen befinde sich ein nichtrelativistisches Teilchen der Masse m in einem Potentialkasten der Länge L mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0, L$. Zusätzlich enthalte das Potential $V(x)$ eine δ-Funktion bei $x = L/2$. Die Schrödinger-Gleichung für die Wellenfunktion $\psi(x)$ des Teilchens lautet somit

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \lambda\delta(x - \frac{L}{2})\psi(x) = E\psi(x),\ \ 0 < x < L,\ \ \lambda = \text{const.}.$$

$\boxed{4}$ (a) Finden Sie für einen vorgegebenen Wert der Energie E die Lösungen $\psi(x)$ für dieses System, wobei Sie die Bereiche links und rechts der δ-Singularität einzeln betrachten sollten.

$\boxed{7}$ (b) Bestimmen Sie die Anschlußbedingungen für $\psi(x)$ und $\psi'(x)$ bei $x = L/2$, indem Sie u.a. die Schrödinger-Gleichung über einen infinitesimalen Bereich um $x = L/2$ integrieren.

$\boxed{3}$ (c) Geben Sie eine Gleichung für die Energie E an, die nur von den Parametern m, λ und L (und $\hbar$) abhängt. Sie müssen diese Gleichung nicht nach E auflösen.

6. Ein starrer ausgedehnter Rotor mit Trägheitsmoment I rotiere um die z-Achse in der xy-Ebene und sei durch den Hamiltonoperator $H_0 = \vec{L}^2/(2I)$ beschrieben, wobei $\vec{L}$ den Drehimpulsoperator darstellt.

$\boxed{4}$ (a) Bestimmen Sie einen vollständigen orthonormierten Satz $\psi_n(\vec{r})$ von Lösungen der Schrödinger-Gleichung $H_0\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$ und die zugehörigen Energieeigenwerte E_n.

$\boxed{12}$ (b) Nehmen Sie an, das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) sei $\psi_n(\phi) = \exp(in\phi)/\sqrt{2\pi}$ mit $E_n = (n\hbar)^2/(2I)$ und $n \in \mathbb{Z}$. Nun besitze der Rotor ein elektrisches Dipolmoment μ und befinde sich in einem statischen homogenen elektrischen Feld E, welches den Wechselwirkungsterm $H_1 = -\mu E\cos(\phi)$ induziert. Betrachten Sie H_1 als Störung zu H_0 und berechnen Sie die Korrekturen $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$ zur Energie E_n in erster und zweiter Ordnung Störungsrechnung für alle $n \in \mathbb{Z}$. *Hilfe*: Hier ist keine entartete Störungsrechnung notwendig.

Hinweis: Für die Transformation von Kugelkoordinaten (r,θ,ϕ) nach kartesischen Koordinaten (x,y,z) gilt

$$x = r\sin(\theta)\cos(\phi),\ \ y = r\sin(\theta)\sin(\phi),\ \ z = r\cos(\theta),$$

und das Quadrat $\vec{L}^2$ des Drehimpulsoperators hat in Kugelkoordinaten die Form

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right).$$

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt $\int_0^{2\pi} d\phi \cdot \exp(i(m-n)\phi) = 2\pi\delta_{m,n}$.