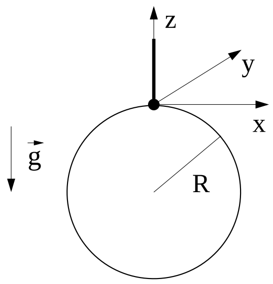
Name, Vorname:__________________________

Matrikel:__________________________

Übungsgruppe:__________________________

1.-3. Berechnung physikalischer Systeme

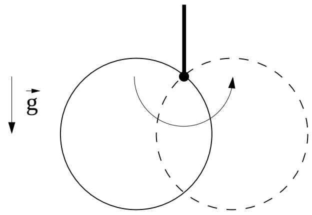
1. Der Hula-Hopp-Reifen (**10P**): Ein Hula-Hopp-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke. Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerefeld der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt. Zunächst soll er frei in jede Richtung schwingen können. Die Schwerkraft wirkt antiparallel zur z-Achse, siehe Abbildung. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) (**3P**) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Aufhängepunktes im abgebildeten Koordinatensystem.

b) (**2P**) Geben Sie die kontinuierlichen Symmetrien des Systems und die dazugehörigen Erhaltungsgrößen an.

Wir betrachten nunmehr den Fall, daß der Reifen nur in der xz-Ebene schwingen kann, siehe Abbildung.



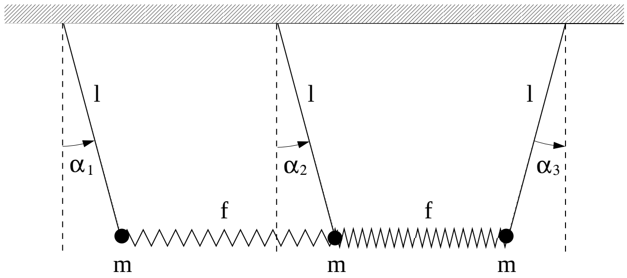
c) (**1P**) Wie lautet die Lagrangefunktion des Problems?

d) (**1P**) Berechnen Sie daraus die Frequenz kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment I um die y-Achse.

e) (**3P**) Lösen Sie das Problem in der Näherung kleiner Auslenkungen mit den Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)=0,\ \dot{\varphi}(t=0)=\dot{\varphi}_0$.

Fortsetzung nächste Seite

2. Drei gekoppelte Pendel (**17P**): Drei gleiche mathematische Pendel (Masse m, Länge l) sind durch zwei ideale, masselose Federn derselben Federkonstante f verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde, siehe Abbildung. Die Länge jeder der unbelasteten Federn ist jeweils gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der zwei durch sie verbundenen Pendel. Sie können ohne Beweis annehmen, daß das durch die Feder verursachte Potential nur vom *horizontalen* Abstand zweier Pendel abhängt. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) (**2P**) Formulieren Sie die Lagrangefunktion im Falle kleiner Auslenkungen.

b) (**2P**) Leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen ab.

c) (**3P**) Zeigen Sie durch Rechnung, daß

$$\omega_I^2 = \frac{g}{l} + \frac{f}{m} \quad , \quad \omega_{II}^2 = \frac{g}{l} \quad \text{und} \quad \omega_{III}^2 = \frac{g}{l} + \frac{3f}{m}$$

die Eigenfrequenzen des Systems sind.

d) (**4P**) Berechnen Sie die zu den zwei langsamsten Eigenfrequenzen gehörenden Normalschwingungen.

e) (**2P**) Geben Sie die zur schnellsten Schwingungsmode gehörende Normalschwingung an. Eine Rechnung ist *nicht* notwendig. Begründen Sie kurz, warum diese Schwingung zur größten Eigenfrequenz gehört.

f) (**2P**) Leiten Sie aus diesen Resultaten eine graphische Darstellung jeder der drei Normalschwingungen ab, zugeordnet zu ihrer jeweiligen Eigenfrequenz.

g) (**2P**) Wie lautet die allgemeine Lösung des physikalischen Problems, ausgedrückt durch die Normalschwingungen?

3. Relativistik (**6P**): In einem Inertialsystem K werden zwei Ereignisse durch die Koordinaten $(ct_1, x_1, 0, 0)$ und $(ct_2, 0, 0, 0)$ beschrieben.

a) (**2P**) Unter welchen Voraussetzungen kann man ein Inertialsystem K' finden, in welchem diese Ereignisse (I) *gleichzeitig* bzw. (II) *am gleichen Ort* stattfinden?

b) (**4P**) Berechnen Sie in beiden Fällen die Relativgeschwindigkeiten zwischen K und K'.

Fortsetzung nächste Seite

Name, Vorname:________________________

Matrikel:________________________

Übungsgruppe:________________________

---

4. Verständnisfragen (17P)

Regeln:

- Es müssen nicht alle Fragen beantwortet werden.
- Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.
- Für jede falsch beantwortete Frage gibt es einen *Minus*-Punkt.
- Die Gesamtzahl der bei den Verständnisfragen erreichten Punkte ist jedoch nie negativ.

Vorsicht: Verständnisfragen sind gefährlich. Verbringen Sie nicht zu lange Zeit mit Ihnen!

4.1 Zur speziellen Relativitätstheorie (5P):

Wir charakterisieren im folgenden Größen nach ihrem Transformationsverhalten als Vierer-Skalare, Vierer-Vektoren und Vierer-Tensoren. $(x^\mu) = (ct, x, y, z)$ sind die kontravarianten Komponenten eines Vierervektors.

ja nein

○ ○ $(-ct, x, y, z)$ ist ein kontravarianter Vierervektor.

○ ○ Der Impuls $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ ist der räumliche Anteil eines Vierervektors.

○ ○ $(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ ist ein kovarianter Vierervektor-Operator.

○ ○ Die Teilchenzahldichte (Zahl der Teilchen pro Volumen) ist ein Vierer-Skalar.

○ ○ Die Hamilton-Funktion eines freien Teilchens ist ein Vierer-Skalar.

4.2 Zum Trägheitstensor (4P)

Welche Relation besteht zwischen der Spur des Trägheitstensors $\mathcal{I}$ in einem beliebigen raumfesten Bezugssystem und der Spur des Trägheitstensors $\mathcal{I}'$ im körperfesten System, jeweils bezüglich desselben Punktes?

Fortsetzung nächste Seite

Behauptung: Die folgenden Matrizen sind proportional zu Trägheitstensoren eines realistischen starren Körpers.

ja nein ○ ○ $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & -7 \\ -4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$

ja nein ○ ○ $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

ja nein ○ ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.3 Zum starren Körper (4P)

Wir betrachten die Bewegung eines unregelmäßigen starren Körpers der Masse M, der im Punkt P festgehalten wird. Der Ursprung seines körperfesten Koordinatensystems liegt im Punkt P. Die körperfesten Komponenten seiner Winkelgeschwindigkeit sind gegeben als $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$. Sein Trägheitstensor im körperfesten System (bezogen auf P) ist $\mathcal{I}_{ik}$. Der Trägheitstensor ist nicht notwendigerweise auf die Symmetrieachsen des Körpers bezogen. Der Schwerpunkt S des Körpers hat die Koordinaten $\vec{R}$.
Folgende Aussagen gelten immer:

ja nein

○ ○ Falls P mit S zusammenfällt, ist die kinetische Energie der Rotation dieses Körpers

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{I}_{11}\,\omega_1^2 + \mathcal{I}_{22}\,\omega_2^2 + \mathcal{I}_{33}\,\omega_3^2\right] \quad .$$

○ ○ Der Gesamtimpuls des Körpers ist gegeben durch $\vec{P} = M\,\dot{\vec{R}}$.

○ ○ Die raumfesten Komponenten seines Gesamtdrehimpulses sind $L_i = \sum_{k=1}^{3} \mathcal{I}_{ik}\,\omega_k$.

○ ○ Sind zwei Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers gleich, so ist er rotationssymmetrisch bezüglich der dritten Achse.

4.4 Zu Schwingungsproblemen (4P)

N Massenpunkte sind im dreidimensionalen Raum untereinander mit idealen Federn gekoppelt, aber im Raum frei beweglich. Wir betrachten nun Normalmoden, in denen dieses System periodische Schwingungen ausführen kann.

ja nein

○ ○ Die Zahl f der Moden, in denen dieses System periodische Schwingungen ausführen kann, ist $3N$.

○ ○ Eine periodische Bewegung liegt nur dann vor, wenn das System in der Eigenmode mit der größten Frequenz schwingt.

○ ○ Wenn zur Zeit $t = 0$ nur eine Normalschwingung mit der Frequenz ω_1 angeregt ist, werden in einem idealen System nach einiger Zeit auch die anderen Normalschwingungen mitschwingen.

○ ○ Die allgemeine Lösung dieser Bewegung hängt von $3N$ Integrationskonstanten ab.