....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. H. Spohn

5. April 2012, 11:30 – 13:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Flächeninhalt** **[8 Punkte]**
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche $F := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
LÖSUNG:

Parametrisierung: $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ xy \end{pmatrix}$, $x^2 + y^2 \leq 1$. **[1]**

Normalenvektorfeld: $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \end{pmatrix}$. Betrag ist $\sqrt{1 + x^2 + y^2}$. **[2]**

Oder als Graph der Funktion $f(x,y) = xy$. Fläche:

$$\int_F d\sigma = \int\limits_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \|\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi\| \, dx\, dy = \int\limits_{\{x^2+y^2\leq 1\}} \sqrt{1 + x^2 + y^2} \, dx\, dy$$
$$= \int\limits_0^1 2\pi r \sqrt{1 + r^2} \, dr = \left[\tfrac{2}{3}\pi (1 + r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\pi (2\sqrt{2} - 1).$$

[5]

2. **Oberflächenintegrale I** **[11 Punkte]**

Gegeben ist das Flächenstück $G = G_f$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $v(x,y,z) = (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y, z)$. Bestimmen Sie den Fluss F von v durch die nach oben orientierte Fläche G. Vereinfachen Sie möglichst weit durch partielles Integrieren.

LÖSUNG:

Parametrisierung: $\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$, $x, y \in [0,1]$. **[1]**

Normalenvektorfeld: $\partial_x \Phi \times \partial_y \Phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x f \\ -\partial_y f \\ 1 \end{pmatrix}$. **[2]**

Orientierung ist nach oben. **[1]**

Fluss:

$$F = \int_G \langle v, n \rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^1 \langle v(\Phi(x,y)), \partial_x \Phi \times \partial_y \Phi \rangle \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x \\ -\frac{1}{2}y \\ f(x,y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\partial_x f(x,y) \\ -\partial_y f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \big(f(x,y) + \tfrac{1}{2} x \partial_x f(x,y) + \tfrac{1}{2} y \partial_y f(x,y)\big) dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \, dx \, dy + \int_0^1 \tfrac{1}{2} \left([x f(x,y)]_{x=0}^1 - \int_0^1 f(x,y) dx \right) dy$$

$$+ \int_0^1 \tfrac{1}{2} \left([y f(x,y)]_{y=0}^1 - \int_0^1 f(x,y) dy \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f(1,y) dy + \frac{1}{2} \int_0^1 f(x,1) dx.$$

[3] bis zur zweiten Zeile, weitere **[3]** für das Ergebnis.

Fubini ist anwendbar, da die auftretenden Funktionen stetig auf $[0,1]^2$ sind. **[1]**

3. **Oberflächenintegrale II** **[11 Punkte]**

Sei $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$ und $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \sin z \\ y - \sinh x \\ -x^2 - y^2 - z^2 \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

(a) Was besagt allgemein der Satz von Gauß für den Fluss von v durch den Rand ∂M von M? **[2]**

$$\boxed{\int\limits_{\partial M} \langle v, n\rangle d\sigma = \int\limits_M \operatorname{div} v \, d^3x}$$

(b) Berechnen Sie den Gesamtfluss F von v durch ∂M.

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) Die Divergenz von v ist

$$\operatorname{div} v(x,y,z) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = 1 + 1 - 2z = 2(1-z).$$

Die Halbkugel M wird durch Kugelkoordinaten

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} 1 + r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \quad r \in]0,2],\ \theta \in]0, \tfrac{\pi}{2}],\ \phi \in [0, 2\pi[,$$

mit Ursprung im Punkt $(1,0,0)$ parametrisiert.
Die Jacobi-Determinante ist bekannterweise $|\det D\Phi(r,\theta,\phi)| = r^2 \sin\theta$.

$$\begin{aligned} F &= \int\limits_{\partial M} \langle v, n\rangle d\sigma = \int\limits_M \operatorname{div} v \, d^3x = \int\limits_0^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} 2(1 - r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= 4\pi \Bigg(\int\limits_0^2 r^2 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta - \int\limits_0^2 r^3 dr \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \Bigg) \\ &= 4\pi \left(\tfrac{8}{3} \cdot 1 - 4 \cdot \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

4. **Residuen** **[10 Punkte]**

Geben Sie die folgenden Residuen an, wobei $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\boxed{\mathrm{Res}_1(\frac{1}{z^2-1}) = \frac{1}{2}}$ **[1]**

(b) $\boxed{\mathrm{Res}_1(\frac{z^3-1}{z-1}) = 0}$ **[1]**

(c) $\boxed{\mathrm{Res}_0(e^{-\frac{1}{z}}) = -1}$ **[2]**

(d) $\boxed{\mathrm{Res}_0(\tan z) = 0}$ **[1]**

(e) $\boxed{\mathrm{Res}_{-1}(\frac{1}{(z+1)^2}) = 0}$ **[2]**

(f) $\boxed{\mathrm{Res}_1(\frac{z^n}{(z-1)^n}) = n}$ **[3]**

LÖSUNG:

(a) klar. **[1]**

(b) bei 1 holomorph fortsetzbar, hebbare Singularität. **[1]**

(c) Exponentialreihe, $e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} \mp \cdots$. **[2]**

(d) $\tan z$ ist holomorph bei $z = 0$. **[1]**

(e) Dies ist die Laurententwicklung um -1.**[2]**

(f) n-fache Nullstelle:
$\mathrm{Res}_1(f) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left((z-1)^n f(z)\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} z^n|_{z=1} = \frac{1}{(n-1)!}(n \cdot (n-1) \cdots 2) = n.$
Oder direkt durch Verschiebung:
$\mathrm{Res}_1(\frac{z^n}{(z-1)^n}) = \mathrm{Res}_0(\frac{(z+1)^n}{z^n}) = \mathrm{Res}_0\left(\frac{z^n+nz^{n-1}+\cdots}{z^n}\right) = n.$
[3]

5. **Residuenkalkül** **[14 Punkte]**

Berechnen Sie $C := \int\limits_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$.

Hinweis: Integrieren Sie entlang des Randes von $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \arg z \in [0, \frac{2\pi}{3}], |z| \leq R\}$ und betrachten Sie den Limes $R \to \infty$.

Lösung:

Mit $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{2\pi}{3}]$ ist **[2]**

$$\int\limits_{\partial G} \frac{1}{z^3+1} dz = \underbrace{\int\limits_0^R \frac{1}{x^3+1} dx}_{:=C_R} + \int\limits_\gamma \frac{1}{z^3+1} dz + \int\limits_{[e^{i\frac{2\pi}{3}}R, 0]} \frac{1}{z^3+1} dz.$$

Für den Hilfsweg γ gilt **[3]**

$$\left| \int\limits_\gamma \frac{1}{z^3+1} dz \right| \leq \int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \left| \frac{iRe^{it}}{R^3 e^{3it}+1} \right| dt \leq \frac{R}{(R-1)^3} \frac{2\pi}{3} \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Für den 3. Term erhält man **[2]**

$$\int\limits_{[e^{i\frac{2\pi}{3}}R, 0]} \frac{1}{z^3+1} dz = -\int\limits_0^R \frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}}{(te^{i\frac{2\pi}{3}})^3+1} dt = -e^{i\frac{2\pi}{3}} C_R.$$

Die Nullstellen von z^3+1 sind $z_k = e^{i\frac{\pi}{3}} e^{ik\frac{2\pi}{3}}$, $k = 0, \ldots, 2$, alle einfach, wovon nur $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ im Inneren des geschlossenen Wegs ∂G liegt. Es gilt also **[3]**

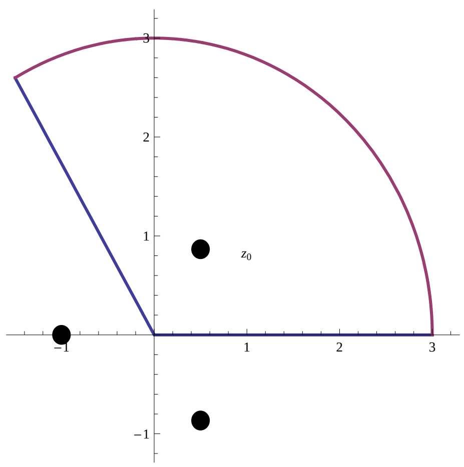
$$\int\limits_{\partial G} \frac{1}{z^3+1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{1}{z^3+1}\right) = 2\pi i \frac{1}{3z_0^2} = 2\pi i \frac{1}{3e^{i\frac{2\pi}{3}}} = -\frac{2}{3}\pi i e^{i\frac{\pi}{3}}$$

unabhängig von R. Insgesamt also mit $C = \lim\limits_{R\to\infty} C_R$ im Limes $R \to \infty$ **[1]**

$$-\frac{2}{3}\pi i e^{i\frac{\pi}{3}} = C - e^{i\frac{2\pi}{3}} C,$$

bzw., **[1]**

$$C = \frac{-\frac{2}{3}\pi i e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\pi}{3} \frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$



6. **Fourierreihen** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische, stetige Funktion.

(a) Beweisen Sie: Ist f sogar π-periodisch, d.h. $f(x+\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, so gilt $\widehat{f_k} = 0$ für alle ungeraden $k \in \mathbb{Z}$. **[3]**

(b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) = |\sin x|$.

LÖSUNG:

(a)

$$\begin{aligned}
\widehat{f_k} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi} = \int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi} + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_{0}^{\pi} \underbrace{f(x-\pi)}_{=f(x)} e^{-ik(x-\pi)}\frac{dx}{2\pi} + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi} \\
&= (e^{-ik\pi}+1)\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Ist nun $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so gilt $\widehat{f_k} = 0$, da $e^{-ik\pi} + 1 = (-1)^k + 1 = 0$.

(b) Nach (a) müssen wir nur die geraden Fourierkoeffizienten berechnen, die ungeraden sind gleich 0. Für $k \neq 0$ gerade gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{f_k} &= 2\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\pi} (e^{ix} - e^{-ix})e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{-i(k-1)x}}{-i(k-1)} - \frac{e^{-i(k+1)x}}{-i(k+1)}\right]_0^\pi = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k-1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&\overset{k \text{ gerade}}{=} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) = -\frac{2}{\pi(k^2-1)}
\end{aligned}$$

und $\widehat{f_0} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{dx}{2\pi} = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{\pi}[-\cos x]_0^\pi = \frac{2}{\pi}$.

7. **Fouriertransformation** **[6 Punkte]**

Sei $f(x) = e^{-\alpha|x-1|}$, $\alpha > 0$.

(a) Begründen Sie, warum die Fouriertransformierte $\widehat{f}(k)$ quadratintegrabel ist. **[2]**

(b) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$. **[4]**

LÖSUNG:

(a) Da f offenbar quadratintegrabel ist und die Fouriertransformation unitär auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen wirkt ist $\widehat{f}$ auch quadratintegrabel, oder explizit (b), der Abfall von $|\widehat{f}(k)|^2$ ist $\mathcal{O}(k^{-4})$.

(b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\alpha(x-1)-ikx}dx + \int\limits_{-\infty}^{1} e^{\alpha(x-1)-ikx}dx \\
&= e^{\alpha}\left[\frac{e^{-(\alpha+ik)x}}{-(\alpha+ik)}\right]_1^{\infty} + e^{-\alpha}\left[\frac{e^{(\alpha-ik)x}}{(\alpha-ik)}\right]_{-\infty}^{1} \\
&= -e^{\alpha}\frac{e^{-(\alpha+ik)}}{-(\alpha+ik)} + e^{-\alpha}\frac{e^{(\alpha-ik)}}{(\alpha-ik)} = \frac{e^{-ik}}{\alpha+ik} + \frac{e^{-ik}}{\alpha-ik} \\
&= \frac{2\alpha e^{-ik}}{\alpha^2+k^2}.
\end{aligned}$$

also

$$\widehat{f}(k) = \frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ik}}{\alpha^2+k^2}$$