Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

9.9.2003
16:30-18:00 Uhr

Diplomvorprüfung

Mathematik für Physik 2

1. Aufgabe. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 10x + 34} \, .$$

[7 Punkte]

2. **Aufgabe.** Man finde die Partialbruchzerlegung (über $\mathbb{C}$) von

$$R(x) = \frac{3x^3 - 9x^2 + 9x - 1}{(x^2 - 4x + 4)\,(x^2 + 1)} \, .$$

[10 Punkte]

3. Aufgabe.

1. Warum konvergieren für $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} k z^k \ ?$$

2. Man berechne das Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

der beiden Reihen aus Nr. 1.

3. Man berechne die durch die 3 Reihen dargestellten Funktionen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \, , \; g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k z^k \text{ und } h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \, .$$

Hinweis zu $g(z)$: Man differenziere die geometrische Reihe.

[10 Punkte]

Bitte wenden

4. Aufgabe. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n^2\,, & \text{falls} \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < x < \frac{1}{n} \\ 1/(n+1)\,, & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Sind die φ_n Treppenfunktionen? Sind die φ_n Regelfunktionen? Sind die φ_n stetige Funktionen? (Eine Begründung ist **nicht** verlangt.)

2. Man berechne
$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$
für alle $x \in [0,1]$. (Die Funktionenfolge (φ_n) konvergiert also punktweise.)

3. Sei
$$f(x) := \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$
für $x \in [0,1]$. Wie lautet $f(x)$? Ist f eine Regelfunktion?

4. Man ermittle
$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$$
für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

5. Man bestimme
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

6. Konvergiert (φ_n) gleichmäßig (auf $[0,1]$) gegen f? (Begründung!).

[14 Punkte]

5. Aufgabe. Sei die folgende Teilmenge A aus $\mathbb{R}$ gegeben:

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[n, n + \frac{1}{n}\right]\,.$$

Man beantworte die folgenden Fragen mit “Ja” oder “Nein”. (Eine Begründung ist **nicht** verlangt.)

1. Ist A offen?

2. Ist A abgeschlossen?

3. Ist A beschränkt?

4. Ist A kompakt?

[4 Punkte]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 45 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.