T3p Elektrodynamik

30.07., SS 2013

Hauptklausur

Prof. Buchalla

Aufgabe 1: Kurze Fragen

a) Zeigen Sie, dass die Einheit des magnetischen Feldes im cgs-System gegeben ist durch $[B] = g^{1/2}cm^{-1/2}s^{-1}$.

b) Eine Punktladung Q befinde sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Wie groß ist der Fluss des von ihr erzeugten elektrischen Feldes durch die Kugeloberfläche $(x-2a)^2 + y^2 + z^2 = a^2$?

c) Zeigen Sie die Identität $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \vec{F}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\ \vec{F}) - \Delta\vec{F}$. Verwenden Sie die Indexschreibweise und den Levi-Civita-Tensor ε_{ijk}.

d) Leiten Sie aus den freien Maxwell-Gleichungen ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) die Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ her.

e) Die Intensität einer monochromatischen ebenen elektromagnetischen Welle in einem homogenen Dielektrikum mit Brechungsindex n ist

$$I = c/(8\pi)\, nE_o^2$$

wobei E_o die reelle Amplitude der elektrischen Feldstärke bezeichnet. Bei senkrechtem Einfall der Welle auf eine ebene Trennfläche aus einem Dielektrikum mit Brechungsindex n in eines mit Brechungsindex n' sind die elektrischen Feldamplituden der transmittierten (E_o') und der reflektierten Welle (E_o'') gegeben durch

$$E_o' / E_o = (2n) / (n + n') \qquad \& \qquad E_o'' / E_o = (n - n') / (n + n')$$

Berechnen Sie den Transmissionsgrad T und den Reflexionsgrad R. Zeigen Sie, dass T + R = 1.

f) Eine ebene elektromagnetische Welle im Vakuum hat das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = E_o\, e^{i(kx - \omega t)}$$

Berechnen Sie daraus das magnetische Feld der Welle als Funktion $k = \vec{k} / |\vec{k}|$ und $\vec{Eo}$.
Hinweis: $\vec{Eo}$ *soll* E_o *mit Vektorpfeil bedeuten. k = ... soll k Dach bezeichnen.*

g) Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(x) = -\vec{x} / r^3$, $r \equiv |\vec{x}|$. Wie groß ist das Linienintegral $\int \vec{F}\, d\vec{l}$ entlang der geraden Verbindung der Punkte $P_1 = (-a, 0, 0)$ und $P_2 = (0, b, 0)$?

Aufgabe 2: Bewegter Draht

Ein unendlich langer gerader Draht von vernachlässigbar dünnem Querschnitt befinde sich im Inertialsystem K' in Ruhe und trage eine homogene Linienladungsdichte λ. Der Draht liege auf der z'-Achse von K'. Das System K' und der Draht bewegen sich gegenüber dem Laborsystem K mit der konstanten Geschwindigkeit β in Richtung der z'-Achse, die mit der z-Achse von K zusammenfällt. Die Koordinaten von K und K' sind verknüpft durch (Lichtgeschwindigkeit c = 1)

$$\begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} \qquad \text{mit } x = x',\ y = y' \text{ und } b = \beta$$

a) Bestimmen Sie das elektrische und magnetische Feld, $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$, im Ruhesystem des Drahts in Zylinderkoordinaten (z', r', φ'). Verwenden Sie $\vec{E}' = E' \vec{er}$ mit $\vec{er}$ Einheitsvektor in r.

b) Geben Sie Potentiale Φ' und A_z' an, die den Feldern $\vec{E}'$ und $\vec{B}'$ entsprechen.
Hinweise: $A_x' = A_y' = 0$; *es sei* $\Phi'(r = a) = 0$

c) Berechnen Sie Φ und A_z in K aus Φ' und A_z' durch eine Lorentztransformation ($A_x = A_y = 0$).

d) Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ in K aus Φ und A_z.

e) Überprüfen Sie mit den expliziten Ausdrücken für $\vec{E}'$, $\vec{B}'$ und $\vec{E}$, $\vec{B}$ die Lorentz-Invarianz von $\vec{E} \cdot \vec{B}$ und $\vec{E}^2 - \vec{B}'^2$.

f) Geben Sie Ladungs- und Stromdichte ρ' und j_z' in K' an. Zeigen Sie, dass in K gilt ($j_x = j_y = j_x' = j_y' = 0$)

$$\rho = \gamma\lambda\delta(x)\delta(y) \qquad \& \qquad j_z = \gamma\beta\lambda\delta(x)\delta(y)$$

g) Betrachten Sie einen Kreiszylinder mit Radius r und Länge l um die z-Achse in K (Zylinderachse & z-Achse fallen zusammen). F sei die gesamte Zylinderoberfläche, G die kreisförmige Grundfläche des Zylinders. Skizzieren Sie die Anordnung. Zeigen Sie, dass in K die folgenden Maxwell-Gleichungen erfüllt sind:

$$\oint_F \vec{E}\, d\vec{\sigma} = 4\pi Q \qquad \& \qquad \oint_{\partial G} \vec{B}\, d\vec{s} = 4\pi I + \partial + \int_G \vec{E}\, d\vec{\sigma}$$