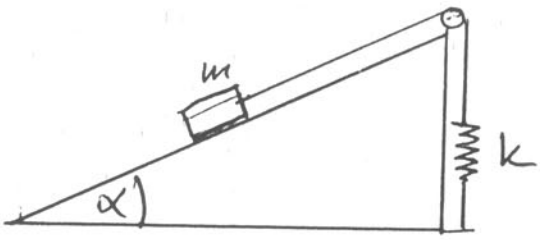
Aufgabe 1:



3

a) $m\cdot\ddot{x} \quad m\cdot g\cdot\sin\alpha + kx = 0$

$x=0$ entspricht der Position vor dem Anhängen der Masse m

b) $m\ddot{x} + kx = + m\cdot g\cdot\sin\alpha$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = + g\cdot\sin\alpha$

homogene Lösung:

Ansatz: $x(t) = A\cdot\sin\omega_0 t$

$\dot{x}(t) = A\cdot\omega_0\cdot\cos\omega_0 t$

$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2\sin\omega_0 t$

$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ 2

$k = \omega_0^2\cdot m = (2\pi\nu)^2\cdot m = \left(2\pi\cdot 10\cdot\frac{1}{s}\right)^2\cdot 1$

$= 3948\ \frac{kg}{s^2} = 40\cdot 10^2\ \frac{kg}{s^2}$

1

c) Die Eigenfrequenz des Systems hängt nicht vom gewählten Winkel α ab. Die Ruhelage des Systems variiert mit dem Winkel α.

1 + 1

inhomogene Lösung: $x=c$

$k\cdot c = m\cdot g\cdot\sin\alpha \Rightarrow c = \frac{m\cdot g\cdot\sin\alpha}{k}$

$\Rightarrow$ Vollständige Lösung der DGL: $x(t) = A\cdot\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + \frac{mg\cdot\sin\alpha}{k}$

Σ 8 Pkt.

Aufgabe 2:

a) $$I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l\,m\cdot g\cdot\sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

✓ $$kg\,m^2\,\frac{rad}{s^2} + m\cdot kg\cdot\frac{m}{s^2}$$ (Σ über Drehmomente)

⇒ physikalisches System

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{I}{R}\,\frac{d\omega}{dt} + kx = 0 \qquad (2)$$

✓ $$kg\,\frac{m}{s^2} + \frac{kg\,m^2}{m}\cdot\frac{rad}{s^2} + \frac{kg}{s^2}\,m$$ (Σ über Kräfte)

⇒ physikalisches System

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha^2}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \alpha\,\frac{dx}{dt} + mg = 0 \quad (\ldots$$

✓ $$kg\,\frac{m}{s^2} + \frac{1}{kg}\cdot\frac{m^2}{s^2} + \frac{m}{s} + kg\,\frac{m}{s^2}$$

Inkonsistenz der Einheiten

⇒ sicher kein physikalisches System

b) ✓(1) physikalisches Pendel

✓(2) harm. Oszillator über Rolle (bewegt)
mit Feder

(3) kein physikalisches System!

$\sum$ 5 Pkt.

Aufgabe 3:

a) $E_{kin} = Mg\,(h-h_2) = \frac{1}{2} M v_0^2$

pot. En.   kin Energie am Pkt A

$$\left(v_0 = \sqrt{2g(h-h_2)}\right)$$

b) $$\underline{x(t)} = v_{0,x} \cdot t = v_0 \underbrace{\cos\alpha}_{\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2} t = \underline{v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t}$$

$$\underline{y}(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \underbrace{\sin\alpha}_{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}} t + h_2 = \underline{-\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot t + h_2}$$

c) $y(t_c) \overset{!}{=} 0 \quad ; \; x(t_c) = d = 120\,m$

$$x(t_c) = d = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 t_c \quad \Rightarrow \quad t_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{v_0} \quad \text{in } y(t_c)$$

$$y(t_c) = -\frac{1}{2} g \frac{4}{3} \frac{d^2}{v_0^2} + \frac{\cancel{v_0}}{\cancel{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{\cancel{v_0}} + h_2 \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{2}{3} \frac{g d^2}{v_0^2} = \frac{d}{\sqrt{3}} + h_2 \qquad \text{mit } v_0 = \sqrt{2g(h-h_2)} \text{ aus a)}$$

$$\frac{\cancel{2}}{3} \frac{\cancel{g} d^2}{\cancel{2}\cancel{g}(h-h_2)} = \frac{d}{\sqrt{3}} + h_2$$

$$\frac{d^2}{3\left(\frac{d}{\sqrt{3}} + h_2\right)} = h - h_2$$

$$\underline{h = \frac{d^2}{\sqrt{3}\,d + 3h_2} + h_2 \quad = 70{,}5\,m}$$

d) $\dot{x}(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0$; $\dot{y}(t) = -gt + \frac{1}{2} v_0$

$$\tan\beta = \frac{\dot{y}(t_c)}{\dot{x}(t_c)}$$

mit $t_c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{v_0}$

und $\underline{v_0} = \sqrt{2g(h-h_2)} = \underline{34{,}5 \frac{m}{s}}$

$\Rightarrow t_c = 4{,}0 s$

$$\tan\beta = \frac{-g t_c + \frac{1}{2} v_0}{\sqrt{3}/2 \, v_0} \Rightarrow \underline{|\beta| = 36{,}4°}$$

$$v_c = \sqrt{\dot{x}(t_c)^2 + \dot{y}(t_c)^2}$$

mit $\dot{x}(t_c) = 29{,}9 \frac{m}{s}$

$\dot{y}(t_c) = -22{,}0 \frac{m}{s}$

$$\underline{v_c = 37{,}1 \frac{m}{s}}$$

e) Punkt B ; größter Verlust an pot. Energie vor Absprung

Geschwindigkeit ausschließlich in x-Richtung

Aufgabe 4:

a) Impulserhaltung: $p_{vorher} = p_{nachher}$

$$mv + MV = (M+m)\, v_{ges}$$

$$v_{ges} = \frac{mv + MV}{(M+m)} \qquad \text{mit } v = -50\,\text{km/h}$$
$$V = 75\,\text{km/h}$$

$$\underline{v_{ges} = 48{,}7\,\text{km/h}}$$

Weiterbewegung in Bewegungsrichtung der Limousine

b) $E_{vorher} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V^2 = 7{,}3 \cdot 10^5\,J$

$E_{nachher} = \frac{1}{2}(m+M)\, v_{ges}^2 = 3{,}5 \cdot 10^5\,J$

$\Delta E = 3{,}8 \cdot 10^5\,J$ Deformationsenergie

c) $\Delta V_{vorher} = V - v = 75\,\text{km/h} - (-50\,\text{km/h}) = 125\,\text{km/h}$

$\Delta V_{nachher} = 0$

$$t_{def} = \frac{d+D}{\bar{v}}$$

wobei: d: Def. kleiner Wagen

D: Def. großer Wagen

$$\underline{t_{def}} = \frac{d+D}{\frac{1}{2}(\Delta V_{vorher} - \Delta V_{nachher})} = \frac{d+D}{\frac{1}{2}\Delta V_{vorher}} =$$

$$= \frac{(1+0{,}8)\,m}{\frac{1}{2} \cdot 125\,\text{km/h}} = \underline{0{,}10\,s}$$

d) mittl. Beschleunigung

$$a = \frac{v - v_{ges}}{t_{def}} = \frac{-50\,\mathrm{km/h} - 48{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{0{,}10\,\mathrm{s}} = -274\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

$$A = \frac{V - v_{ges}}{t_{def}} = \frac{75\,\mathrm{km/h} - 48{,}7\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{0{,}10\,\mathrm{s}} = 73\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Aufgabe 5

a) Trägheitsmoment:

$$J = \int r^2 dm = \rho_A \cdot \int_0^{2\pi} r\, d\varphi \int_{R/3}^{R} r^2 dr = 2\pi \rho_A \cdot \int_{R/3}^{R} r^3 dr =$$

$$= 2\pi\rho_A \left[\frac{1}{4} r^4\right]_{R/3}^{R} = 2\pi\rho_A \left(\frac{1}{4}R^4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{R^4}{81}\right) = \frac{40}{81}\cdot\pi\rho_A R^4$$

mit ρ_A (Flächendichte) : $\rho_A = \dfrac{M}{R^2\pi - \frac{1}{9}R^2\pi} = \dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{M}{\pi R^2}$

3

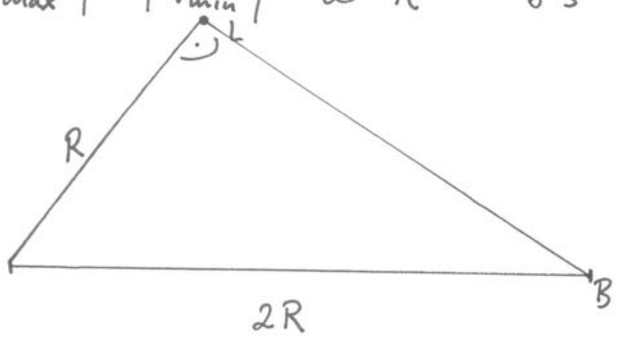
folgt: $J = \frac{5}{9} M R^2 = \frac{5}{9}\cdot 100\,kg \cdot (10m)^2 = \underline{\underline{5555{,}6\ kgm^2}}$

b) Kreisfrequenz:

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2\cdot E_{rot}}{J}} = \sqrt{\frac{2\cdot 100000 J}{5555{,}6\ kgm^2}} = 6\ s^{-1}$$

1

c) $|V_{max}| = |V_{min}| = \omega \cdot R = 6\,s^{-1}\cdot 10m = \underline{\underline{60\frac{m}{s}}}$



$$|\overline{LB}| = \sqrt{4R^2 - R^2} = \sqrt{3}\cdot R =$$

$$\sqrt{3}\cdot 10m = \underline{\underline{17{,}3\ m}}$$

d) Dopplereffekt:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 75\,\text{cm} \\ c = 330\,\frac{m}{s} \end{array}\right\} \quad \nu_0 = 440\,\text{Hz} \qquad v = 60\,\frac{m}{s}$$

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{v}{c}} = 440\,\text{Hz} \cdot \frac{1}{1 + \frac{60}{330}} = \underline{\underline{372\,\text{Hz}}}$$

(2)

$$\nu = \nu_0 \cdot \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} = 440\,\text{Hz} \cdot \frac{1}{1 - \frac{60}{330}} = \underline{\underline{538\,\text{Hz}}}$$

Aufgabe 6

$E_{rot} = 100\,kJ \qquad v_F = 200\,\frac{m}{s}$

a) $m = 10\,kg$

$$E_{kin} = \frac{E_{rot}}{0{,}8} = \frac{1}{2} m v_{end}^2$$

$$\Rightarrow \quad v_{end} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{rot}}{0.8 \cdot m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,000\,J}{0{,}8 \cdot 10\,kg}} = \underline{\underline{158\,\frac{m}{s}}}$$ 2

laut Aufgabe 36 der Übungen:

$$v_{end} = v_{Rück} = -v_P \cdot \ln\left(\frac{m}{m + m_F}\right)$$ 2

$$\frac{v_{end}}{v_P} = -\ln\left(\frac{m}{m + m_F}\right)$$ + 1 / 5

$$e^{-\frac{v_{end}}{v_P}} = \frac{m}{m + m_P}$$

$$(m + m_P) \cdot e^{-\frac{v_{end}}{v_P}} = m$$

$$m\left(e^{-\frac{v_{end}}{v_P}} - 1\right) = -m_F \cdot e^{-\frac{v_{end}}{v_P}}$$

$$m_P = m_0 \cdot \frac{1 - e^{-\frac{v_{end}}{v_P}}}{e^{-\frac{v_{end}}{v_P}}} = 10\,kg \cdot \frac{1 - e^{-\frac{158}{200}}}{e^{-\frac{158}{200}}} = \underline{\underline{14{,}8\,kg}}$$

Aufgabe 7

a. Bernoulli: $p + \rho \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \rho v^2 = const$

$$p_A + \rho \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = p_B + \rho \cdot g \cdot h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$v_A = v_B = 0 \quad \longrightarrow \quad p_A = p_B + \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$p_B = p_A - \rho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\underline{\underline{p_B = \frac{F}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi} - \rho \cdot g \cdot \Delta h}}$$

b, $$p_B + \rho \cdot g \cdot h_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 = p_C + \rho \cdot g \cdot h_C + \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$p_B = \frac{1}{2} \rho v_C^2$$

$$\Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{2 p_B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2F}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \rho} - 2 g \Delta h}$$

$$x(t) = v \cdot t \qquad (1)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + h \qquad (2)$$

aus (2) $\quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ am Auftreffpunkt

in (1) $$x_{max} = v_C \cdot t_1 = $$

$$= \sqrt{\frac{2F}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \rho} - 2g \cdot \Delta h} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} =$$

$$\underline{\underline{= 2 \cdot \sqrt{\frac{F \cdot h}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot g} - \Delta h \cdot h}}}$$

c)

$$p_A = p_B + \varrho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\frac{F_1}{\left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot \pi} = \frac{F_2}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi} + \varrho \cdot g \cdot \Delta h$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{F_2 = F_1 \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2 - \varrho \cdot g \cdot \Delta h \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi}}$$

Aufgabe 8

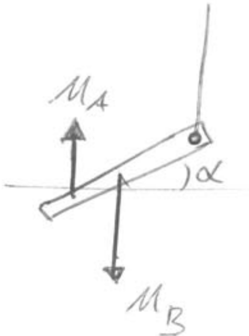
a) Kräftegleichgewicht (am Schwerpunkt des Balkens)

Auftriebskraft + Gewichtskraft + Kraft am Seil = 0

$$- m_W g \quad + \quad m_B g \quad - \quad F = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F = (m_B - m_W) \cdot g}}$$

Drehmoment-Gleichgewicht (z.B. am Aufhängepunkt)



Auftriebsmoment M_A + Gewichtsmoment M_B = 0

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Hebelarm für M_B: $r_B = \frac{1}{2} \ell \cdot \cos\alpha$

Hebelarm für M_A: $r_A = \frac{3}{4} \ell \cos\alpha$

(Schwerpunkt des verdrängten Wassers)

$$\Rightarrow - m_W \cdot g \cdot \frac{3}{4} \ell \cos\alpha + m_B \cdot g \cdot \frac{1}{2} \ell \cos\alpha = 0$$

$$\frac{3}{4} m_W = \frac{1}{2} m_B$$

$$\underline{\underline{\frac{m_W}{m_B} = \frac{2}{3}}}$$

b) Der Balken taucht zur Hälfte ein: $V_W = \frac{1}{2} V_B$

$$\Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_W} = \frac{m_B V_W}{m_W V_B} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$$ (leichter als Wasser)

c) $$\frac{F}{m_B g} = \frac{(m_B - m_W) g}{m_B g} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$