Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

01.09.2003

Vordiplom Mathematik 4 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(Ly)(x) := y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \qquad x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

mit stetigen Funktionen $p, q : (a,b) \to \mathbb{R}$. Es sei die zweimal differenzierbare Funktion $u : (a,b) \to \mathbb{R}$ bereits eine Lösung dieser Differentialgleichung, d.h. $(Lu)(x) = 0$ für alle $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, und u habe keine Nullstelle in (a,b). Es sei $\alpha \in (a,b)$ fest gewählt. Weiterhin sei $P : (a,b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto P(x) := \int_\alpha^x p(t)\,dt$. Zeigen Sie:

$$v : (a,b) \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto v(x) := u(x) \int_\alpha^x \frac{e^{-P(t)}}{u^2(t)}\,dt$$

liefert eine zweite, in $(a,b) \setminus \{\alpha\}$ ebenfalls nullstellenfreie Lösung der Differentialgleichung, d.h. $(Lv)(x) = 0$ mit $v(x) \neq 0$ für alle von α verschiedenen $x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Auf dem Intervall (0,1) sei die folgende Differentialgleichung gegeben:

$$(Ly)(x) := y''(x) - \frac{2x}{1-x^2}\, y'(x) + \frac{2}{1-x^2}\, y(x) = 0$$

Offensichtlich ist bereits $u : (0,1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto u(x) := x$ eine Lösung dieser Differentialgleichung. Bestimmen Sie mit Hilfe der in der vorherigen Aufgabe vorgestellten Methode die mit v bezeichnete zweite Lösung.

Aufgabe 3 **10 Punkte**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial C} \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

wobei C die Einheitskreisscheibe mit dem Nullpunkt als Zentrum ist.

Aufgabe 4 **8 Punkte**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \qquad x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

mit stetigen Funktionen $p, q, f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Es seien $u, v : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen dieser Gleichung im Fall $f = 0$ (d.h. Lösungen der homogenen Gleichung). Zeigen Sie folgenden Sachverhalt: Falls

$$w : (a,b) \to \mathbb{R},\ x \mapsto w(x) := u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

nullstellenfrei in (a,b) ist, so ist für ein beliebiges stetiges $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ die Funktion $y : (a,b) \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$y(x) := -u(x)\int_\alpha^x \tfrac{v(t)\,g(t)}{w(t)}\,dt + v(x)\int_\alpha^x \tfrac{u(t)\,g(t)}{w(t)}\,dt$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x) \qquad x \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$$

Aufgabe 5 **5 Punkte**

Ermitteln Sie alle Residuen der Funktion

$$f(z) = \tfrac{2z-z^2}{(iz+e^{i\frac{\pi}{2}})^2\,(z^2+4)}$$

zu ihren Polen erster Ordnung in der komplexen Ebene.

Es können maximal 43 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und
Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!

Vordiplom Mathematik 4 für Physiker 01.09.2003