**Klausur Theoretische Physik I (Mechanik)**

# Allgemeine Hinweise

Lesen die Angaben bitte genau durch. Bei jedem Beispiel ist als Hinweis die Punktezahl angegeben. Mit 50% der maximal erreichbaren Punkte ist die Klausur auf alle Fälle bestanden. Sie müssen nicht alle Teilaufgaben lösen. Beginnen Sie mit der Aufgabe, die Ihnen am einfachsten erscheint.

**Schreiben Sie bitte Ihren Namen und Matrikelnummer auf jedes Aufgabenblatt.** Numerieren Sie jede einzelne beschriebene A4 Seite Ihrer Aufgaben-Blätter fortlaufend in der Reihenfolge, in der Sie die Blätter beschreiben. Machen Sie bitte jedesmal deutlich, zu welcher Aufgabe ein (Teil-)Ergebnis gehört, insbesondere, wenn sich die Lösung über mehrere Seiten erstreckt. Nicht eindeutig gekennzeichnete Ergebnisse können wir leider nicht anerkennen.
Wir empfehlen Ihnen, die Klausur nach erfolgter Benotung einzusehen. Details zu den Terminen werden auf der WSI-Webseite zur Vorlesung veröffentlicht.

Ich wünsche die Publikation meiner Klausurnote auf der WSI-Webseite zur Vorlesung in der Form "Matrikel-Nr - Note"

☐ einverstanden ☐ nicht einverstanden

Hinweis: Es ensteht Ihnen keinerlei Nachteil, wenn Sie nicht einverstanden sind, Sie erfahren das Ergebnis nur möglicherweise etwas später, da in diesem Fall die Note vom Dekanat ins TUM-Online eingetragen wird.

## Aufgabe 1 (14 Punkte)

Bei jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwort richtig. Jede richtige Antwort gibt 2 Punkte, jede falsche Antwort gibt 1 Punkt Abzug (die Gesamtpunktezahl dieser Aufgabe ist jedoch niemals negativ). Keine Antwort 0 Punkte

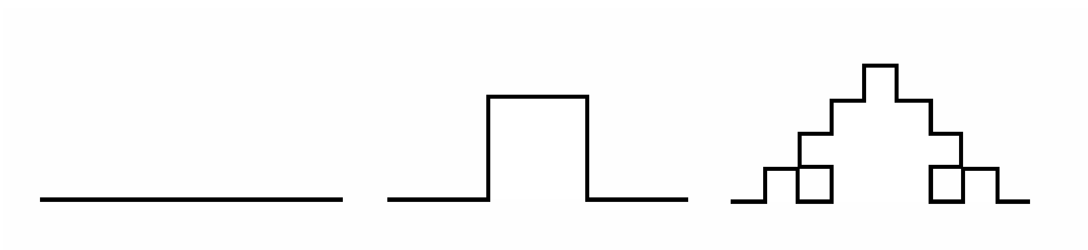
**(a)** Die Komponente $\Theta_{xx}$ des Trägheitstensors eines beliebigen starren Körpers bezüglich der kartesischen Koordinatenachsen $(x, y, z)$ im körperfesten Bezugssystem ($\rho(\vec{r})$ ist die Massendichte) lautet

- ☐ $\Theta_{xx} = \int d^3x \rho(\vec{r})(x^2 + y^2 + z^2)$
- ☒ $\Theta_{xx} = \int d^3x \rho(\vec{r}) yz$
- ☒ $\Theta_{xx} = \int d^3x \rho(\vec{r})(y^2 + z^2)$

**(b)** Die Lagrangegleichungen können in der Form $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ geschrieben werden, wenn folgende Bedingung gilt

- ☒ alle Zwangsbedingungen sind holonom und die Kräfte konservativ
- ☐ alle Zwangsbedingungen müssen verschwinden
- ☐ alle Zwangsbedingungen sind holonom und die Kräfte beliebig

**(c)** Ein Fraktal wird nach folgender Iterationsvorschrift gebildet:



Wie groß ist ist Hausdorff Dimension $D$?

- ☒ $D = \frac{\ln 5}{\ln 3}$
- ☐ $D = 1$
- ☐ $D = \frac{3}{\ln 5}$

**(d)** Ein N-Teilchensystem, auf das keine externen Kräfte wirken, hat die folgende Zahl von Erhaltungsgrößen

- ☐ 3
- ☒ 10
- ☐ 6

**(e)** Ein freies Teilchen ($m\ddot{\vec{r}} = 0$ im Inertialsystem) spürt in einem rotierenden Bezugssystem die Zentrifugalkraft $\vec{Z}$ und die Corioliskraft $\vec{C}$. Diese sind gegeben durch

- ☒ $\vec{Z} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}), \vec{C} = -2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}$
- ☐ $\vec{Z} = -m\vec{\omega} \times \vec{r}, \vec{C} = m\vec{\omega} \times \vec{r}$
- ☐ $\vec{Z} = 4m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}), \vec{C} = -2m\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$

**(f)** Nehmen wir an, eine Lagrangefunktion $L(q_1, ..q_f, \dot{q}_1, ...\dot{q}_f)$ sei nicht explizit zeitabhängig und die Kräfte seien konservativ. Kann es sein, dass die Gesamtenergie trotzdem nicht erhalten ist?

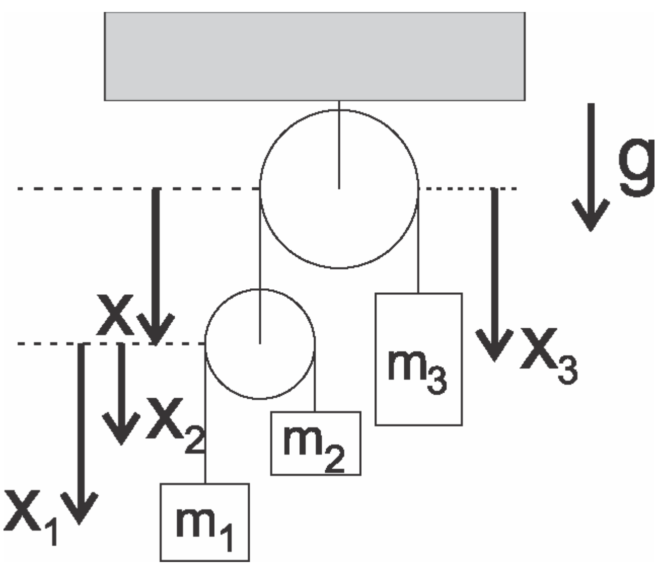
- ☒ ja
- ☐ nein

**(g)** Das Hamilton'sche Variationsprinzip sagt aus, dass

- ☐ die Hamiltonfunktion minimal ist
- ☒ die physikalische Trajektorie die Wirkung $S$ minimiert
- ☐ die Lagrangefunktion für die wirkliche Trajektorie minimal ist

## Aufgabe 2: Seilrollen [14 Punkte]

Eine Punktmasse $m_3$ hängt an einem Ende eines masselosen Seils fester Länge, das über eine fixierte, reibungsfreie, masselose Scheibe läuft. Am anderen Ende des Seils ist eine weitere derartige Scheibe befestigt, über die ein zweites masseloses Seil fester Länge läuft. An diesem Seil sind zwei Punktmassen $m_1$ und $m_2$ befestigt (siehe Skizze). Auf alle drei Massen wirkt die Schwerkraft senkrecht nach unten.




**(a)** Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L(x_1, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_3)$. Verwenden Sie hierzu die Zwangsbedingungen $x + x_3 = \text{konst.}$ und $x_1 + x_2 = \text{konst.}$, um die Variablen $x$ und $x_2$ zu eliminieren. Das Ausmultiplizieren von quadratischen Termen ist für die Lösung der Aufgabe nicht nötig. [11 Punkte]

**(b)** Geben sie anhand der Langrange-Funktion an, welche Variable für $m_1 = m_2$ zyklisch ist. Bestimmen Sie die entsprechende Erhaltungsgröße. [5 Punkte]

**Lösung:**

a) Mit

$$x + x_3 = l_3 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = l_2$$

erhält man

$$\begin{aligned} x &= l_3 - x_3, \\ x_2 &= l_2 - x_1, \end{aligned}$$

Die kinetischen Energien sind

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2} m_3 \, \dot{x}_3^2, \\ T_1 &= \frac{1}{2} m_1 \, (\dot{x} + \dot{x}_1)^2 = \frac{1}{2} m_1 \, (-\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2, \\ T_2 &= \frac{1}{2} m_2 \, (\dot{x} + \dot{x}_2)^2 = \frac{1}{2} m_2 \, (\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2. \end{aligned}$$

Die potentiellen Energien sind

$$\begin{aligned} V_3 &= -m_3 \, g \, x_3, \\ V_1 &= -m_1 \, g \, (x + x_1) = m_1 \, g \, (x_3 - x_1), \\ V_2 &= -m_2 \, g(x + x_2) = m_2 \, g \, (x_3 + x_1). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} L = T - V &= T_1 + T_2 + T_3 - V_1 - V_2 - V_3 \\ &= \frac{1}{2} m_3 \, \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \, (-\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 \, (-\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2 \\ &+ m_3 \, g \, x_3 - m_1 \, g \, (x_3 - x_1) - m_2 \, g \, (x_3 + x_1). \end{aligned}$$

b) Für $m_1 = m_2$ erhält man

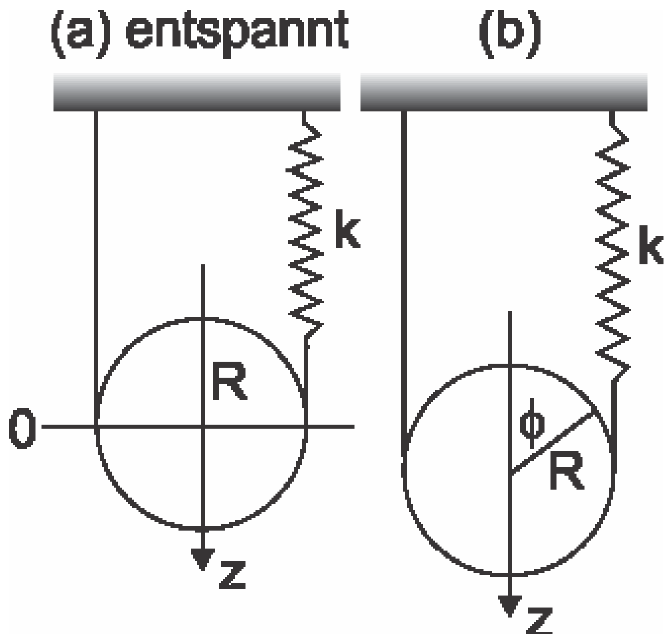
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} m_3 \, \dot{x}_3^2 + \frac{1}{2} m_1 \, (-\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} m_1 \, (\dot{x}_3 + \dot{x}_1)^2 \\ &+ m_3 \, g \, x_3 - 2 m_1 \, g \, x_3 \\ &= \frac{1}{2} m_3 \, \dot{x}_3^2 + m_1 (\dot{x}_3^2 + \dot{x}_1^2) + (m_3 - 2m_1) g x_3 \end{aligned}$$

$L$ hängt nicht von $x_1$ sondern nur von $\dot{x}_1$ ab [1P]. Daher ist $x_1$ zyklisch. [1P]. Der zu $x_1$ konjugierte Impuls ist erhalten [1P] und ergibt sich aus

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2 m_1 \dot{x}_1$$

## Aufgabe 3: Schwingende Scheibe[14 Punkte]

Eine dünne Scheibe mit Radius $R$ der Masse $M$ wird von einer masselosen Schnur gehalten, wobei ein Ende der Schnur an der Decke festgemacht, und das andere Ende mit einer harmonischen Feder mit Federkonstante $k$ verbunden ist (das Potenzial der Feder beträgt also $V_{Feder} = (k/2) \cdot (\text{Auslenkung der Feder})^2$). Die Scheibe darf unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung $g$ entlang der $z$-Achse über die Änderung der Federauslenkung auf der Schnur rollen, jedoch nicht rutschen. Des Weiteren ist ihre Schwerpunktsbewegung auf die Vertikale beschränkt, d.h. entlang der in der Skizze gezeichneten $z$-Achse.




**(a)** Finden Sie die Lagrange Funktion $L(\phi, \dot{\phi})$ für das gegebene System ($\phi$: siehe Skizze).
Hinweis: Das Trägheitsmoment der Scheibe ist gegeben durch $\frac{1}{2}MR^2$. Des Weiteren führt die Einschränkung, dass die Seillänge konstant und nur die Länge der Feder variabel ist, dazu, dass Rollen um den Winkel $\phi$ in einer Höhenverschiebung $\Delta z_S = R\phi$ des Schwerpunktes der Scheibe und in einer Änderung der Auslenkung der Feder um $\Delta l_F = 2R\phi$ resultiert. Wählen Sie den Winkel $\phi$ so, dass $\phi = 0$ der entspannten Feder entspricht (siehe Skizze (a)). Ebenso soll $z_S = 0$ die Position des Schwerpunkts bei entspannter Feder sein. (9 Punkte)

**(b)** Leiten Sie die Bewegungsgleichung her. (3 Punkte)

**(c)** Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslage gegeben ist durch $\phi_0 = \frac{Mg}{4kR}$. (2 Punkte)

### Lösung

a) Wähle $\phi$ so, dass $\phi = 0$ für die entspannte Feder. Dann gilt (wenn $z_S = 0$ die Position des Schwerpunkts bei entspannter Feder ist)

$$z_S = R\phi$$

und für die Dehnung der Feder

$$l_F = 2R\phi$$

Die potentiellen Energien $V_F$ der Feder und $V_G$ durch das Schwerefeld der Erde (beide gemessen zum Referenzpunkt "entspannte Feder") sind gegeben als

$$V_F = \frac{k}{2}(2R\phi)^2 = 2kR^2\phi^2 \tag{1a}$$

$$V_G = -Mgz_S = -MgR\phi \tag{1b}$$

Die kinetische Energie setzt sich aus den Anteilen $T_T$ (Translation des Schwerpunktes) und $T_R$ (Rotation der Scheibe) zusammen:

$$T_T = \frac{M}{2}(R\dot{\phi})^2 \tag{2a}$$

$$T_R = \frac{1}{2}\Theta\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}MR^2\dot{\phi}^2 \tag{2b}$$

Damit ergibt sich für die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned} L = T - V &= \frac{1}{2}M\left(R^2 + \frac{R^2}{2}\right)\dot{\phi}^2 - \left(-MgR\phi + 2kR^2\phi^2\right) \\ &= \frac{3}{4}MR^2\dot{\phi}^2 - 2kR^2\phi^2 + MgR\phi \end{aligned}$$

b) Aus der Lagrangefunktion ergibt sich für die beiden für die Bewegungsgleichung relevanten Ableitungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{3}{2}MR^2\ddot{\phi} \tag{3a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = -4kR^2\phi + MgR \tag{3b}$$

Und somit die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}MR^2\ddot{\phi} = -4kR^2\phi + MgR$$

Oder, explizit nach $\ddot{\phi}$ aufgelöst:

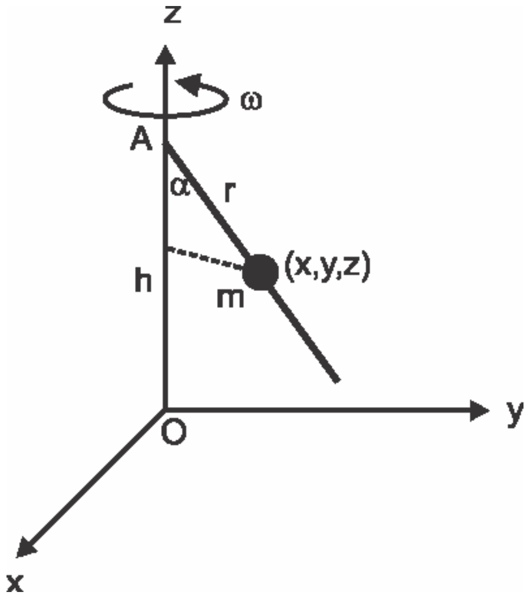
$$\ddot{\phi} = -\frac{8}{3}\frac{k}{M}\phi + \frac{2}{3}\frac{g}{R}$$

c) Bestimmung der Gleichgewichtslage $\phi_0$:

$$\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow Mg = 4kR\phi_0 \Rightarrow \frac{Mg}{4kR} = \phi_0$$

## Aufgabe 4: Rotierende Masse [12 Punkte]

Am Punkt A sei in der Höhe $h$ über der $x$-$y$-Ebene eine masselose Stange im festen Winkel $0 < \alpha < \pi$ zur Achse OA befestigt. Die Stange rotiere mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um die Achse OA. Unter dem Einfluss der Rotation und einer konstanten Schwerebeschleunigung $g$ bewege sich ein Teilchen der Masse $m$ auf der Stange. Der Abstand zwischen A und der Masse sei mit $r(t)$ bezeichnet.




**(a)** Die kartesischen Koordinaten des Teilchen lauten zur Zeit $t$:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\sin\alpha\cos(\omega t) \\
y(t) &= r(t)\sin\alpha\sin(\omega t) \\
z(t) &= h - r(t)\cos\alpha
\end{aligned}
$$

Bestimmen Sie daraus die Lagrangefunktion $L$ in der verallgemeinerten Koordinate $r$.und die dazugehörige Euler-Lagrange-Gleichung. [8 Punkte]

(b) Bestimmen Sie die stationären Lösung $r_0$. Geben Sie den Wertebereich von $\alpha$ an, für den eine stationäre Lösung (d.h. $r =$ konst.) möglich ist. [4 Punkte]

**Lösung**

**(a)**

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \sin\alpha[\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t] \\
\dot{y} &= \sin\alpha[\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t] \\
\dot{z} &= -\dot{r}\cos\alpha \\
T &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= \frac{m}{2}\sin^2\alpha[(\dot{r}\cos\omega t - r\omega\sin\omega t)^2 \\
&\quad + (\dot{r}\sin\omega t + r\omega\cos\omega t)^2] + \frac{m}{2}\dot{r}^2\cos^2\alpha \\
&= \frac{m}{2}\sin^2\alpha\ [\dot{r}^2 + r^2\omega^2] + \frac{m}{2}\cos^2\alpha\ \dot{r}^2 \\
&= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha) \\
V &= mgz = mg(h - r\cos\alpha)
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 \sin^2\alpha\right) - mg\,(h - r\cos\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 = m\ddot{r} - m\omega^2 r \sin^2(\alpha) - mg\cos(\alpha)$$

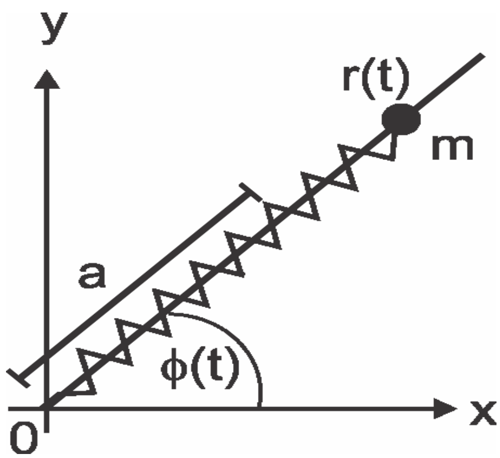
(b) Die stationäre Lösung $r_0$ ($\ddot{r} = 0$):

$$r_0\omega^2 \sin^2\alpha = -g\cos\alpha \quad \Leftrightarrow \quad r_0 = -\frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

Damit $r_0 > 0$ gilt, muss $\cos(\alpha) < 0$ sein. Dies ist erfüllt für $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ . [2P]

### Aufgabe 5: Schwingende Masse [13 Punkte]

Ein Massenpunkt der Masse $m$ gleite reibungsfrei auf einer horizontal angeordneten masselosen Stange. Er sei durch eine Feder mit Federkonstante $k$ und Gleichgewichtslänge $a$ mit dem Ursprung verbunden. Die Feder bewirke eine harmonische Kraft $F = -k(r - a)$ auf den Massenpunkt. Die Stange kann in der Ebene frei rotieren, die Schwerkraft spielt hier keine Rolle.




**(a)** Stellen Sie die Lagrangefunktion des Massenpunktes in Polarkoordinaten $r(t)$ and $\phi(t)$ auf. [4 Punkte] Hilfe: Die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten ist gegeben durch $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$

**(b)** Gibt es zyklische Koordinaten? Welche physikalische Bedeutung haben die Erhaltungsgrößen und wie lauten die entsprechenden Erhaltungssäze? [3 Punkte]

**(c)** Eliminieren Sie unter Ausnutzung der Erhaltungsgrößen die zyklischen Koordinaten, und bringen Sie die Bewegungsgleichung für $r$ in die Form $m\ddot{r} = F(r)$. Bestimmen Sie $F(r)$. [3 Punkte]

**(d)** Beweisen Sie, dass für die stationäre Lösung $r_0$ im Allgemeinen $r_0 > a$ gilt und nur für eine spezielle Anfangsbedingung $r_0 = a$. [3 Punkte]

**Lösung:**

**(a)** Die potentielle Energie lautet

$$V(r) = -\frac{k}{2}(r - a)^2$$

. Wegen $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\,\mathbf{e}_\phi$ ergibt sich die kinetische Energie zu

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right]$$

und damit die Lagrangefunktion zu

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right] - \frac{k}{2}(r-a)^2$$

**(b)** Es gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

Daher ist $\phi$ zyklisch. Die zugehörige Lagrangegleichung führt auf:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\phi}\right) = 0$$

Die Größe $mr^2\dot{\phi}$ ist also zeitlich konstant. Es handelt sich um den Drehimpuls senkrecht zur zur Bewegungsebene [1P]

**(c)** Die Lagrangegleichung für den radialen Abstand lautet:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + k(r-a)$$

Durch Einsetzen des Erhaltungsgesetzes:

$$\dot{\phi} = \frac{l}{mr^2}$$

erhält man:

$$m\ddot{r} = F(r) = \frac{l^2}{mr^3} - k(r-a)$$

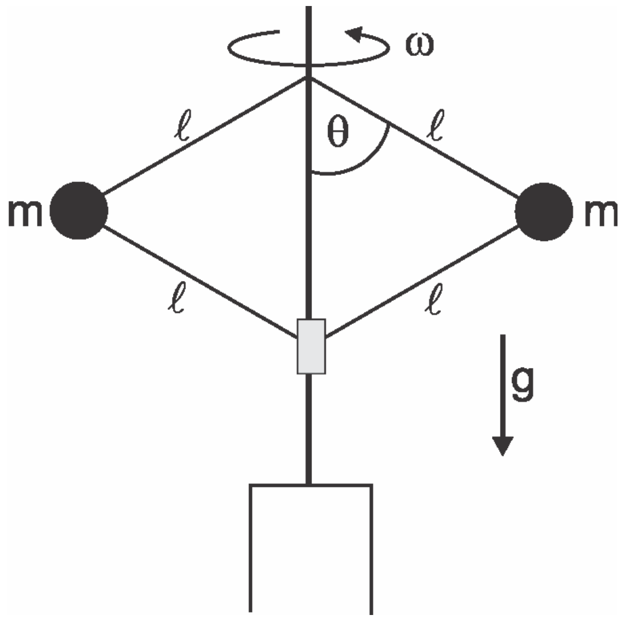
**(d)** Die stationäre Lösung ist

$$\frac{l^2}{mk} = (r-a)r^3$$

Da die linke Seite für $l \neq 0$ positiv ist, muss $r > a$ sein Offenkundig gilt $r = a$ nur für $l = 0$. [1P].

### Aufgabe 6: Fliehkraftregler [14 Punkte] - Bonusaufgabe

Ein vereinfachter Fliehkraftregler (siehe Abbildung) besteht aus 2 Massen $m$, die mittels je zweier masseloser Stäbe der Länge $l$ an einer zentralen vertikalen Stange befestigt sind. Die oberen Stäbe sind fix an der zentralen Stange befestigt, während die unteren an einer masselosen Manschette befestigt sind, die sich reibungsfrei entlang der drehenden Stange auf und ab bewegen kann, wodurch sich die Massen entsprechend nach außen bewegen. Die ganze Anordnung dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega$ und steht unter der Wirkung der Schwerkraft. Der Winkel der masselosen Stäbe gegen die Vertikale sei $\theta$.




**(a)** Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(\theta, \dot{\theta})$. Beachten Sie, dass jede der beiden Massen sowohl Bewegungen tangential zum Kreis um die vertikale Stange, als auch senkrecht zum oberen masselosen Stab ausführt.

**(b)** Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung.

**(c)** Berechnen Sie die minimale Winkelgeschwindigkeit $\omega$, die für eine stationäre Drehung (ohne vertikales Schwingen der Massen) erforderlich ist. Wie groß ist im stationären Fall für gegebene Winkelgeschwindigkeit $\omega$ der Abstand $z$ der unteren Manschette von der oberen Befestigung auf der vertikalen Stange (es gilt offenbar $z \leq 2l$)?

**Lösung Aufgabe 11**

**(a)** Die Geschwindigkeit jeder Masse hat Komponenten entlang zweier orthogonaler Richtungen: Tangential zum Kreis, in dem sich die Massen drehen, ist die Geschwindigkeit

$$v_{\text{rot}} = \omega l \sin\theta$$

und senkrecht zu den oberen Armen beträgt sie

$$v_{\text{flieh}} = l\dot{\theta}$$

Die kinetische Engerie jeder Masse $m$ ist daher

$$T_m = \frac{1}{2} m \left\{ l^2 \omega^2 \sin^2\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right\}$$

Somit ist die gesamte kinetische Energie

$$T = m \left\{ l^2 \omega^2 \sin^2\theta + l^2 \dot{\theta}^2 \right\}$$

Die potenzielle Energie für jede Masse ist daher

$$V_{2m} = -mgl\cos\theta$$

Somit ist die gesamte potenzielle Energie

$$V = -2mgl\cos\theta$$

und der Lagrange

$$L = T - V = m\left\{l^2\omega^2\sin^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\right\} + 2mgl\cos\theta$$

**(b)**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left[2ml^2\dot{\theta}\right] - 2ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + 2mgl\sin\theta = 0$$
$$2ml^2\ddot{\theta} - 2ml^2\omega^2\sin\theta\cos\theta + 2mgl\sin\theta = 0$$
$$ml\ddot{\theta} - ml\omega^2\sin\theta\cos\theta + mg\sin\theta = 0$$

**(c)** Im stationären Zustand ist $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, daher gilt

$$l\omega^2\cos\theta_0 = g$$

Da der $\cos\theta \leq 1$, muss $\omega$ größer oder gleich sein

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dies bedeutet für die Höhe

$$2l\cos\theta_0 = \frac{2g}{\omega^2},$$
$$z = 2l(1 - \frac{g}{l\omega^2}) \quad \text{für } \omega \geq \omega_{\min}$$