Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

04.09.2006
14:30-16:00 Uhr

Diplomvorprüfung

Mathematik 3 für Physik

1. Aufgabe. Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

1. Sei $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ werde durch $f(\mathbf{x}) := \varphi(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle)$ definiert.

   (a) Man bestätige, dass $grad\, f\ (\mathbf{x}) = \varphi'(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle)\, \mathbf{a}$ gilt.

   (b) Wie lauten alle möglichen φ, für die $div\ (grad\, f)\ (\mathbf{x}) = \|\mathbf{a}\|_2^2$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt?

2. Für die stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ werde das Vektorfeld $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \psi(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle)\, \mathbf{a}$ definiert.

   (a) Man zeige, dass $\mathbf{F}$ ein Gradientenfeld ist.

   (b) Im Fall $n = 3$ bestimme man $\mathbf{rot}\, \mathbf{F}\ (\mathbf{x})$.

   (c) Sei ψ differenzierbar und $J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ die Jacobi-Matrix von $\mathbf{F}$ an der Stelle $\mathbf{x}$. Man zeige für alle $\mathbf{x}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

   $$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\, \mathbf{h} = \psi'(\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle)\, \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle\, \mathbf{a}\ .$$

3. Das Vektorfeld $\mathbf{G} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

   $$\mathbf{G}(\mathbf{x}) := \frac{1}{1 + (\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle)^2}\, \mathbf{a}\ .$$

   (a) Man bestimme das Potential $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ von G mit $U(\mathbf{0}) = 0$ ($U = -g$, mit $grad\, g = \mathbf{G}$).

   (b) Warum liegt der Wert des Kurvenintegrals des Vektorfeldes $\mathbf{G}$ längs einer beliebigen stückweise stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, stets im Intervall $]-\pi, \pi[$?

[18 Punkte]

Bitte wenden

2. Aufgabe. Es soll das Minimum der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2$ unter der Nebenbedingung $g = 0$, $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := 2z - xy - 2$ ermittelt werden. Sei $\Phi(x,y,z,\lambda) := f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$ für $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$.

1. Man bestimme $grad\,\Phi\,(x,y,z,\lambda)$.
2. Hat g stationäre Stellen?
3. Man finde die einzige stationäre Stelle von Φ. Insbesondere ist also zu zeigen, dass Φ genau eine stationäre Stelle besitzt.
4. Wie lautet der Lagrange-Multiplikator λ?
5. Offenbar hat das Problem nur ein Minimum. (Ein Beweis ist nicht verlangt!) Wie lautet das Minimum von f unter der Nebenbedingung $g = 0$? Wo wird dieses Minimum angenommen?

[9 Punkte]

3. Aufgabe. Für $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t,y) := \cos(\pi(\sin y - \sin t))$, sei die Differentialgleichung

$$y' = f(t,y) \qquad (\star)$$

gegeben.

1. Man berechne $\partial_y f(t,y)$. Warum ist f bezüglich y lokal Lipschitz-stetig?
2. Warum ist f in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezüglich y Lipschitz-stetig? Man finde eine Lipschitz-Konstante L.
3. Warum ist $y = y(t) = t$ eine Lösung von $(\star)$?
4. Man bestimme die Lösung $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ von $(\star)$ mit $\varphi(0) = 0$ und maximalem Lösungsintervall I. Wie lautet I?
5. Warum gibt es genau eine Lösung $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ von $(\star)$ mit $\psi(0) = \pi/6$? Insbesondere ist zu beweisen, dass $\mathbb{R}$ das Definitionsintervall von ψ ist. (Bemerkung: eine explizite Formel für $\psi(t)$ ist wohl kaum zu finden.)
   (a) Man zeige $\psi(t) > t$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
   (b) Man berechne $\psi'(0)$ und $\psi''(0)$.
   (c) Warum ist $t = 0$ eine isolierte (strenge) lokale Minimalstelle von ψ?

[17 Punkte]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.