

.....
Note

--

Name

--

Vorname

--

Matrikelnummer

--

Studiengang (Hauptfach)

--

Fachrichtung (Nebenfach)

--

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur

MA9202 Mathematik für Physiker 2

(Analysis 1)

Prof. Dr. R. König

23. Februar 2018, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: Reihe: Platz:

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.

Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I | II

1

2

3

4

5

6

7

8

Σ

I

.....
Erstkorrektur

II

.....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von bis

Vorzeitig abgegeben um

Besondere Bemerkungen:

1. Vollständige Induktion**[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

2. Maximum/Minimum, Infimum/Supremum einer Menge

[12 Punkte]

Gegeben sei $M := \{\cos(\pi \frac{k}{n}) \mid k, n \in \mathbb{N}, k \leq n\} \subset \mathbb{R}$

(a) Kreuzen Sie genau die wahren Aussagen an.

☐ $-2 \in M$ ☐ $-1 \in M$ ☐ $0 \in M$ ☐ $1 \in M$ ☐ $2 \in M$

(b) Geben Sie, wenn möglich, eine Folge an, die in M enthalten ist und gegen -1 konvergiert.

(c) Geben Sie, wenn möglich, eine Folge an, die in M enthalten ist und gegen 1 konvergiert.

(d) Wie lauten jeweils Minimum/Maximum und Infimum/Supremum der Menge M ?

• $\min M$

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

• $\inf M$

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

• $\max M$

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

• $\sup M$

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

(e) Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob die folgende Aussage wahr ist:

Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Supremum an.

3. Konvergenz von Folgen und Reihen

[8 Punkte]

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 - \sqrt{n^4 - n^2} \right)$

☐ $= -\infty$ ☐ $= -\frac{1}{2}$ ☐ $= 0$ ☐ $= \frac{1}{2}$ ☐ $= 1$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

(b) Schreiben Sie die Reihe $\frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \dots$ mit dem Summenzeichen und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

\sum	$=$
--------	-----

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + n(-1)^n}{n^2}$ ist

- bestimmt divergent: ☐ Ja ☐ Nein
- konvergent: ☐ Ja ☐ Nein
- absolut konvergent: ☐ Ja ☐ Nein

4. Potenzreihen**[12 Punkte]**

Geben Sie mit Begründung alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} x^{2n}$ konvergiert.

5. Grenzwerte von Funktionen

[5 Punkte]

(a) Welchen Wert hat $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\log x}$?

☐ $-\infty$ ☐ -2 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert hat $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{\log x} \right)^2$?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 - 1}{\log x} \right)^2 =$$

(c) Geben Sie an, für welches $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, wobei

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{für } x = 1, \\ \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} & \text{für } x \neq 1. \end{cases}$$

☐ $c = -3$ ☐ $c = -1$ ☐ $c = -\frac{1}{3}$ ☐ $c = 0$ ☐ $c = \frac{1}{3}$ ☐ $c = 1$ ☐ $c = 3$ ☐ für kein $c \in \mathbb{R}$

6. Taylorentwicklung**[11 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

- (a) Wie lautet das Taylorpolynom sechster Ordnung von f im Entwicklungspunkt 0?

$$(T_0^6 f)(x) =$$

- (b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-2, 2]$ gilt:

$$|f(x) - (T_0^6 f)(x)| \leq \frac{1}{5}.$$

7. Integration**[11 Punkte]**

- (a) Bestimmen Sie die Ableitung von $x \mapsto e^{-x^2}$.
- (b) Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto xe^{-x^2}$ an.
- (c) Berechnen Sie $I_1 := \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$.
- (d) Berechnen Sie $I_2 := \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ unter Verwendung von $I_0 := \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

HINWEIS: In (d) partielle Integration mit Hinblick auf (b).

8. Matrixexponential

[11 Punkte]

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Berechnen Sie die Matrix A^n für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$A^n = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

- (b) Berechnen Sie die Matrix $B(t) = \exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

- (c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} =$$

