# Musterlösung der Semestralklausur

**Aufgabe 1.**
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**Lösung:** Mit $y = z^2$ lautet die Potenzreihe

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} y^n.$$

Die Koeffizienten lauten $a_n = \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}$. Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \frac{(n+1)!}{\sqrt{(2n+2)!}} = \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!} \frac{n!(n+1)}{\sqrt{(2n)!}\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+2)}} = \frac{1+1/n}{\sqrt{(2+1/n)(2+2/n)}} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist der Konvergenzradius von (*) gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{\sqrt{(2+1/n)(2+2/n)}} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $y = z^2$ konvergiert die Ausgangspotenzreihe also für

$$|z|^2 = |y| < \frac{1}{2} \iff |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Der Konvergenzradius ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**Aufgabe 2.**
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+2n^3}-n^2}{\sqrt{n^2+1}}, \; n \in \mathbb{N},$ b) $b_n = \sqrt{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right), \; n \in \mathbb{N}.$

a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\sqrt{n^4+2n^3}-n^2}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^4+2n^3-n^4}{\sqrt{n^2+1}(\sqrt{n^4+2n^3}+n^2)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\frac{\sqrt{n^4+2n^3}+n^2}{n^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{\sqrt{1}(\sqrt{1}+1)} = 1. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+1/n^2}(\sqrt{1+2/n}+1)} = 1.$$

b) Nach **T 34.**, b) gilt für alle $x > 0$

$$\frac{x-1}{x} \le \ln x \le x - 1.$$

Dies liefert

$$\frac{-\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}} \le \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \le -\frac{1}{2n} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2n-1} \le \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \le -\frac{1}{2n}.$$

Dies liefert

$$-\frac{\sqrt{n}}{2n-1} = \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{n}-1/\sqrt{n}}}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty} \le b_n = \sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) \le -\frac{\sqrt{n}}{2n} = \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{n}}}_{\to 0 \text{ für } n\to\infty}.$$

Mit dem Einschließungskriterium folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

**Aufgabe 3.**

Gegeben sei die induktiv definierte Folge

$$x_0 := 2, \quad x_{n+1} := \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{2x_n^3}\right) =: f(x_n), \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : ]0,\infty[ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2x^3}\right)$$

für $x \ge \sqrt[4]{2}$ monoton wächst und folgern Sie, daß $f(x) \ge \sqrt[4]{2}$ gilt für alle $x \ge \sqrt[4]{2}$.

b) Zeigen Sie, daß $x_n \ge \sqrt[4]{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daß die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fällt.

c) Weisen Sie nach, daß die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

a) Für alle $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \left(\frac{3}{4} + \frac{-3}{2x^4}\right) \ge 0 \iff 2x^4 \ge 4 \iff x^4 \ge 2.$$

Für $x \ge \sqrt[4]{2}$ ist also $f'(x) \ge 0$. Damit wächst $f$ monoton auf $[\sqrt[4]{2}, \infty)$ und damit gilt

$$\forall\, x \ge \sqrt[4]{2}: \ \ f(x) \ge f(\sqrt[4]{2}) = \sqrt[4]{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}^4}\right) = \sqrt[4]{2}.$$

b) Wir zeigen $x_n \ge \sqrt[4]{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

$n = 0$: $x_0 = 2 \ge \sqrt[4]{2}$. $\surd$

$n \to n+1$: Nach IV gilt $x_n \ge \sqrt[4]{2}$ und daher nach a)

$$x_{n+1} = f(x_n) \ge \sqrt[4]{2}. \ \surd$$

Wegen $x_n \ge \sqrt[4]{2}$ folgt nun

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2x_n^4}\right) \ge x_n\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}^4}\right) = x_n.$$

Damit ist $\{x_n\}$ monoton fallend.

c) Nach b) ist $\{x_n\}$ monoton fallend und durch $\sqrt[4]{2}$ nach unten beschränkt. Daher konvergiert $\{x_n\}$ nach dem Monotoniekriterium. Mit $\tilde{x} := \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt nun

$$\tilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{2x_n^3}\right) = \left(\frac{3}{4}\tilde{x} + \frac{1}{2\tilde{x}^3}\right).$$

Wegen $\tilde{x} \geq \sqrt[4]{2}$ liefert Division durch $\tilde{x}$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2\tilde{x}^4} \overset{\tilde{x}>0}{\Longleftrightarrow} \tilde{x} = \sqrt[4]{2}.$$

**Aufgabe 4.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Lösung:** Induktionsanfang $n = 1$:

LS: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{2+1}{1^2(1+1)^2} = \frac{3}{4}.$

RS: $\displaystyle 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(1+1)^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \quad \surd$

Induktionsschritt $n \to n+1$:

RS: $\displaystyle 1 - \frac{1}{(n+2)^2}$

LS: $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \overset{IV}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+2)^2 - 2n - 3}{(n+1)^2(n+2)^2}$$
$$= 1 - \frac{n^2 + 4n + 4 - 2n - 3}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2(n+2)^2} = 1 - \frac{1}{(n+2)^2} \quad \surd$$

**Aufgabe 5.**
Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie $f$.
b) Konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f$? Begründen Sie Ihre Antwort!

a) Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} = \sqrt{x^2} = |x|.$$

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $f(x) = |x|$.

b) Wir haben

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $N > 0$ mit $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Dies liefert

$$\forall\, n \geq N: \ \forall\, x \in \mathbb{R}: |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.

**Aufgabe 6.**
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\searrow 0} \dfrac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{\ln(1+x)}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos(x)} - \dfrac{2}{x^2}\right)$.

a)

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\overbrace{\cos(\sqrt{x}) - 1}^{\to 0}}{\underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0}} \overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{-\sin(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{1+x}} = \lim_{x\searrow 0}(1+x) \lim_{y\searrow 0} \frac{-\sin(y)}{2y} \overset{l'Hosp.}{=} 1\cdot \lim_{y\searrow 0} \frac{-\cos y}{2} = -\frac{1}{2}.$$

b) Wir haben

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Für $x < 1$ ist dies offensichtlich eine Leibniz-Reihe (vgl. **T 37.** oder auch **H 39.**). Also gilt für $|x| < 1$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) \leq 1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{2x^4}{6!}\right).$$

Für $0 < |x| < 1$ gilt also

$$\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}} - 1\right) = \frac{2}{x^2}\frac{\frac{x^2}{12}}{1-\frac{x^2}{12}} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{x^2}{12}} \overset{x\to 0}{\to} \frac{1}{6}.$$

sowie

$$\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2} \geq \frac{2}{x^2}\left(\frac{1}{1-\frac{x^2}{12}+\frac{2x^4}{6!}} - 1\right) = \frac{2}{x^2}\frac{\frac{x^2}{12} - \frac{2x^4}{6!}}{1-\frac{x^2}{12}+\frac{2x^4}{6!}} = \frac{\frac{1}{6} - \frac{4x^2}{6!}}{1-\frac{x^2}{12}+\frac{2x^4}{6!}} \overset{x\to 0}{\to} \frac{1}{6}.$$

Damit ist gezeigt

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{6}.$$

**Alternative:** L'Hospitalsche Regel anwenden:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{2}{x^2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2 + 2\cos x}{(1-\cos(x))x^2} \overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - 2\sin x}{x^2 \sin x + 2x(1-\cos x)} \\
&\overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x}{x^2\cos x + 4x\sin x + 2(1-\cos x)} \\
&\overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{-x^2\sin x + 6x\cos x + 6\sin x} \\
&\overset{l'Hosp.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{-x^2\cos x - 8x\sin x + 12\cos x} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 7.**
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right).$$

a) Weisen Sie nach, daß $f$ ein Maximum und ein Minimum annimmt.

b) Geben Sie an, wo die Minima und wo die Maxima von $f$ liegen.

a) Da $1 + x^2 > 0$ ist für alle $x$, ist $f$ offensichtlich stetig, sogar beliebig oft differenzierbar als Komposition glatter Funktionen. Es gilt

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \ \frac{\pi}{1+x^2} \in ]0, \pi].$$

Daher gilt

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) \in [0, 1].$$

Andererseits haben wir

$$f(0) = \sin(\pi) = 0, \quad f(\pm 1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Wegen $f(x) \in [0, 1]$ hat $f$ bei $x = 0$ ein Minimum und bei $x = \pm 1$ Maxima.

b) Wir haben bereits festgestellt, daß $f$ bei $x = 0$ ein Minimum und bei $x = \pm 1$ Maxima hat. Weiter gilt

$$f'(x) = \frac{-\cos\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right) 2x}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0 \ \vee \ 1 + x^2 = 2 \iff x = 0 \ \vee x = \pm 1.$$

Es gibt also keine weiteren (auch keine lokalen) Extrema.

**Alternative:** Für $x \neq 0, \pm 1$ gilt

$$\frac{\pi}{1+x^2} \in ]0, \pi[ \setminus \{\pi/2\}$$

und daher $f(x) \in ]0, 1[$ für alle $x \neq 0, \pm 1$. Es gibt also keine weiteren (globalen) Maxima oder Minima.