Prof. Dr. Rupert Lasser WS 2000/01

Semestralklausur

zur Analysis I

Hinweise: 1) Es sind keine elektronischen Hilfsmittel, wie Taschenrechner, usw, zugelassen.
Bitte nicht vergessen handys auszuschalten.
2) Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden.
3) Die Antworten sind gegebenenfalls ausreichend zu begründen.

1. a) Untersuchen Sie, ob die Folgen

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n+2}, \qquad b_n = n \cdot \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzwerte.

b) Zeigen Sie, daß die durch $q_1 = 3\ ,\ q_{n+1} = 4 - \dfrac{1}{q_n}$ rekursiv definierte Folge,

die Abschätzungen (1) $3 \leq q_n \leq 4$ und (2) $q_{n+1} \geq q_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt (mit Induktion).
Zeigen Sie damit, daß die Folge konvergiert, und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} q_n$.

2. a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n+2)}$ konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ konvergiert.

3. a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, z^{2n+1} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

b) Stellen Sie $f(z)$ innerhalb des Konvergenzkreises mit Hilfe von e^z und e^{-z} explizit dar.

4. Gegeben seien die drei reellen Zahlen $a < b < c$. Zeigen Sie, daß die durch

$$f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

auf $\mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ definierte Funktion f sowohl im Intervall $]a, b[$ als auch im Intervall $]b, c[$ jeweils mindestens eine Nullstelle besitzt.
Hinweis: Benutzen Sie den Zwischenwertsatz.

5. Bestimmen Sie

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}, \qquad \lim_{\substack{x\to 2\\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}}} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}.$$

6. Für $x, y \in \mathbb{R}$ sei $d(x,y) := \sqrt{|x-y|}$. Zeigen Sie, daß $(\mathbb{R}, d)$ ein metrischer Raum ist.

VIEL ERFOLG!