PROF. DR. RUPERT LASSER
PROF. DR. A. LEUTBECHER
DR. R. GIRGENSOHN

WS 2000/01

# Wiederholungsklausur

zur Analysis I

**Hinweise:**
1) Es sind keine elektronischen Hilfsmittel zugelassen.
2) Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Vorangehende Ergebnisse dürfen benutzt werden, auch wenn sie noch nicht bewiesen sind.
3) Die Antworten sind stets ausreichend zu begründen.

**1.** Es seien $a \geq 0$ und $b \geq 0$.

a) Folgern Sie aus dem binomischen Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad a^n + b^n \leq (a+b)^n$.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe der Aussage aus a):
Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt $\quad (a+b)^n \leq a^n + n\,a\,b\,(a+b)^{n-2} + b^n$.

**2.** Es sei $z \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n+z^n}{n-z^n}$ in Abhängigkeit von $z$.

*Hinweise:* 1) Unterscheiden Sie die Fälle $|z| > 1$ und $|z| \leq 1$.
2) Hier und in den folgenden Aufgaben können Sie ohne Beweis die Aussage verwenden:
Für reelle Zahlen $s > 1$ gilt $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{s^n} = 0$.

**3.** a) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$ konvergent ist.

b) Zeigen Sie mit dem Leibniz-Kriterium, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$ konvergiert.

**4.** a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$ der Potenzreihe $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} z^n \qquad (z \in \mathbb{C})$.

b) Begründen Sie, daß für $|z| < R$ die Gleichung $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ gilt.

c) Stellen Sie $f(z)$ für $|z| < R$ als explizite Funktion dar.

**5.** Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $\quad f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x}\right]^{-1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

a) Zeigen Sie: Für alle $x \in\, ]0,1[$ gilt $\quad x \leq f(x) \leq \dfrac{x}{1-x}$.

b) Zeigen Sie: Die Funktion $f$ ist im Punkt $x_0 = 0$ stetig.

c) Geben Sie einen Punkt $x_1 \in\, ]0,1[$ an, in dem die Funktion $f$ unstetig ist. Beweisen Sie die Unstetigkeit in diesem Punkt.

*Zur Erinnerung:* Für $y \in \mathbb{R}$ ist $\quad [y] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq y\}$.

**6.** Berechnen Sie, ohne die Regel von l'Hospital zu benutzen, die Grenzwerte

$$\text{a)}\ \lim_{\substack{z\to 0\\ z\neq 0}} \frac{z - \sin(z)}{z^3}, \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x - \sin(x))}{\ln(x)}.$$

**VIEL ERFOLG!**