Technische Universität München
Physik-Department
Institut für Theoretische Physik

SS 2000

Klausur zu Quantenmechanik 1B

Prof. Dr. A. J. Buras

Aufgabe 1..

i) Beweisen Sie: Wenn der Operator A nicht explizit von der Zeit abhängt und $[H, A] = 0$ ist, dann ist auch $\langle A \rangle$ zeitunabhängig.

ii) Beweisen Sie: Eigenwerte von hermiteschen Operatoren sind reell.

iii) Zeigen Sie, daß der aus zwei Spin-1/2 Teilchen bestehende Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

einem Gesamtspin $S = 0$ entspricht.

iv) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte eines Operators in der Schrödinger- und Heisenberg-Darstellung identisch sind.

v) Beweisen Sie: $[A, B] = 0 \Longleftrightarrow$ es existiert ein gemeinsames vollständiges Orthonormalsystem $|\phi_n\rangle$ aus Eigenzuständen.

Aufgabe 2.: Eindimensionale stationäre Schrödingergleichung.

Ein Teilchen mit $E < 0$ (gebundener Zustand) befinde sich in folgendem Potential:

$$V(q) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad q \leq 0 & \text{I} \\ -V_0 & \text{für} \quad 0 < q < q_0 & \text{II} \\ 0 & \text{für} \quad q_0 \leq q & \text{III} \end{cases} . \tag{1}$$

i) Geben Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in den Bereichen (I), (II) und (III) an.

ii) Welche Bedingungen muß die Lösung bei a) $q = 0$, b) $q = q_0$ und c) $q \to \infty$ erfüllen?

iii) Berechnen Sie die Energieeigenwerte.

iv) Welche Bedingung muß das Potential, bzw. V_0 und q, erfüllen, damit mindestens ein gebundener Zustand existiert?

Aufgabe 3.: Spin und Drehimpuls.

i) Ein Spin $^3/_2$-System befinde sich in dem normierten Zustand $|\psi>$. Weiterhin gilt für diesen Zustand $<\psi|S_z|\psi> = \frac{3}{2}\hbar$. Zeigen oder widerlegen Sie die Behauptung, daß $|\psi>$ ein Eigenzustand zu S_z ist.
Hinweis: Drücken Sie $|\psi>$ durch S_z Eigenzustände aus.

ii) Konstruieren Sie für $j = \frac{3}{2}$ die Matrixdarstellung der Operatoren J_+, J_-, J_x, J_y, J_z in der Basis der Eigenzustände $|j,\, m>$ der Operatoren J^2, J_z.
Hinweis: $J_\pm = J_x \pm i\, J_y$, $J_\pm|j,\, m> = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j,\, m \pm 1>$

Aufgabe 4.: Linearer harmonischer Oszillator mit quadratischem Störterm.

Gegeben sei ein linearer harmonischer Oszillator mit einem zu α proportionalen quadratischen Störterm.

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 q^2 + \alpha \frac{1}{2} m\,\omega^2 q^2 && (2)\\
&= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega'^2 q^2 && (3)
\end{aligned}
$$

i) Drücken Sie (2) durch

$$
a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q + \frac{i\,p}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(q - \frac{i\,p}{m\omega}\right) \qquad (4)
$$

aus.

ii) Betrachten Sie (2) als gestörten harmonischen Oszillator mit Störterm α.

a) Berechnen Sie die Energiekorrekturen 1. Ordnung.

b) Berechnen Sie die Zustandsvektoren $|n>^{(1)}$ 1. Ordnung.

c) Berechnen Sie die Energiekorrekturen 2. Ordnung.

iii) Fassen Sie nun (3) als harmonischen Oszillator auf und vergleichen Sie die Energieeigenwerte mit dem exakten Ergebnis.