2. Probeklausur in Experimentalphysik 1

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Wintersemester 2015/16
19. Januar 2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Während einer langen Messung versucht ein Physiker, kleine Papierknäuel in einen Mülleimer zu werfen.

(a) Der Mülleimer ist jetzt $l_1 = 5$m von der Abwurfposition entfernt. Der obere Rand des Mülleimers ist auf gleicher Höhe $h_0 = 1$m wie die Abwurfposition. Mit welcher Geschwindigkeit v muss man werfen um unter einem Abwurfwinkel von $\alpha = 30°$ den Mülleimer zu treffen?

(b) Nun soll das Papierknäuel erneut aus einer anderen Höhe und Entfernung geworfen werden und von der Wand hinter dem Mülleimer abprallen. Der Abstand des Mülleimers zur Wand beträgt $l_2 = 2$m. Dort trifft das Knäuel waagrecht auf und wird dann mit halber Geschwindigkeit reflektiert. Der Abwurfwinkel ist $\alpha = 17°$. Geworfen wird mit $v = 10,5$m/s. In welcher Höhe H **vom Boden gemessen** an der Wand muss das Knäuel auftreffen?

Hinweis: $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

Lösung

(a)

$$x(t) = v_0 \cos\alpha t \qquad ; \qquad z(t) = h_0 + v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

[1]

Bestimme Flugzeit T, wobei $T \neq 0$

$$z(T) = h_0 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 \sin\alpha T = \frac{1}{2}gT^2 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha \tag{2}$$

Nun soll gelten

$$l_1 = x(T) = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin\alpha \ \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{\frac{l_1 g}{\sin 2\alpha}} = 7,53\text{m/s} = 27,1\text{km/h} \tag{3}$$

[1,5]

(b) Die horizontale Geschwindigkeit bleibt auf dem Flug zur Wand unverändert. Vor dem Aufprall ist sie $v_A = v\cos\alpha$. Das Knäuel prallt ab mit $v_R = {}^1\!/_2 v\cos\alpha$. Bestimme Zeit τ die das Knäuel braucht um die Strecke l_2 zu überbrücken

$$\tau = \frac{l_2}{v_R} \tag{4}$$

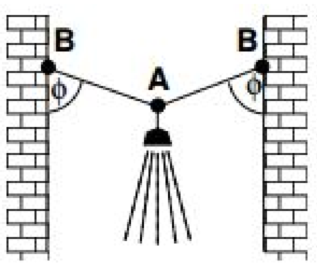
Die Fallstrecke ist dann

$$s = \frac{1}{2}g\tau^2 \stackrel{!}{=} H - h_0 \qquad \Rightarrow \qquad H = \frac{1}{2}g\frac{l_2^2}{v_0^2} + h_0 = \frac{2gl_2^2}{v^2\cos^2\alpha} + h_0 = 1,79\text{m}$$

[**2,5**]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Straßenlaterne mit der Masse 20kg ist an der Mitte eines masselosen Seils zwischen zwei Häusern aufgehängt. Das Seil hat an beiden Seiten einen Winkel von $\Phi = 80°$ zur Hauswand.



(a) Zeichnen Sie das Kräftediagramm der am Aufhängepunkt A der Lampe angreifenden Kräfte. Schreiben Sie die Kräfte als Vektoren auf.

(b) Welche Beträge haben die auf die Befestigungspunkte B wirkenden Kräfte?

(c) Was passiert, wenn man versucht das Seil horizontal zu spannen (d.h $\phi \to 90°$)?

Lösung

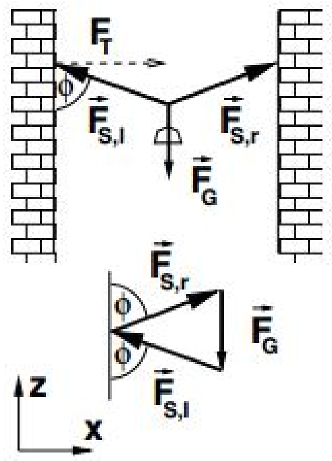
(a) An A greifen die Gewichtskraft $\vec{F}_G$ der Straßenlaterne sowie die Zugkräfte $\vec{F}_{S,l}$ und $\vec{F}_{S,r}$ der linken und rechten Seilhälfte an. Wegen der Symmetrie der Anordung (Aufhängung in Seilmitte, Winkel auf beiden Seiten gleich) ist $|\vec{F}_{S,l}| = |\vec{F}_{S,r}| = F_S$.

[**1**]

Aus dem Kräftediagramm folgt:

$$2F_S\cos\phi = |\vec{F}_G| = Mg \to F_S = \frac{Mg}{2\cos\phi} = 565\text{N} \tag{5}$$

und damit



$$\vec{F}_G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -195\text{N} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_{S,l} = \begin{pmatrix} -F_S \sin\phi \\ 0 \\ F_S \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -556\text{N} \\ 0 \\ 98\text{N} \end{pmatrix}, \vec{F}_{S,r} = \begin{pmatrix} F_S \sin\phi \\ 0 \\ F_S \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 556\text{N} \\ 0 \\ 98\text{N} \end{pmatrix}$$

[1,5]

(b) An den Befestigungspunkten B greifen die Kräfte $-\vec{F}_{S,l}$ und $-\vec{F}_{S,r}$ an, jeweils mit Betrag $F_S = 565\text{N}$.

[1]

(c) Für $\phi \to 90°$ ist $\lim_{\phi \to 90°} F_S = \infty$. Die benötigte Kraft wird unendlich, das Seil würde reißen bzw. die Befestigungspunkte nachgeben.

[0,5]

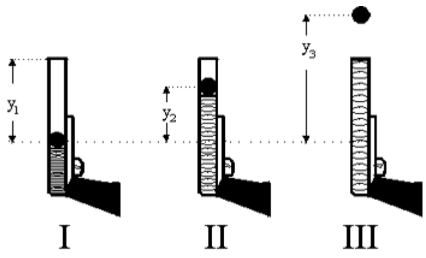
Aufgabe 3 (5 Punkte)

Bei einer Federpistole wird die Feder mit der Federkonstante $k = 90,0\text{N/m}$ um die Strecke $y_1 = 16,0\text{cm}$ zusammengedrückt bis sie einrastet. Dann wird eine Kugel der Masse $m = 100\text{g}$ auf die Feder gelegt (Bild I) und anschließend vertikal nach oben geschossen.

(a) Berechne, an welcher Stelle y_2 die Kugel die größte Geschwindigkeit hat(Bild II).

(b) Berechnen Sie diese höchste Geschwindigkeit.

(c) Was ist die maximale Höhe y_3, die die Kugel erreicht(Bild III)?



Lösung:

(a) Die Kugel erreicht ihre höchste Geschwindigkeit, wenn die Federkraft gleich der Gewichtskraft der Kugel ist und die Kugel nicht weiter von der Feder beschleunigt werden kann.

$$F_F = F_g \tag{6}$$

$$k\Delta y = mg \rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} = 1,1\text{cm} \tag{7}$$

Die Feder ist nun noch um Δy zusammengedrückt. Die Höhe y_2 ist denmach

$$y_2 = y_1 - \Delta y = 14,9\text{cm} \tag{8}$$

[**2**]

(b) Die höchste Geschwindigkeit im Punkt y_2 berechnet man mit dem Energieerhaltungssatz. Die Gesamtenergie in Position I ist gleich der Gesamtenergie in Position II:

$$E_{ges}(I) = \frac{1}{2}ky_1^2 = E_{ges}(II) = \frac{1}{2}k\Delta y^2 + \frac{1}{2}mv_{max}^2 + mgy_2 \tag{9}$$

$$\rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{ky_1^2 - k\Delta y^2 - 2mgy_2}{m}} = 4,47\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{10}$$

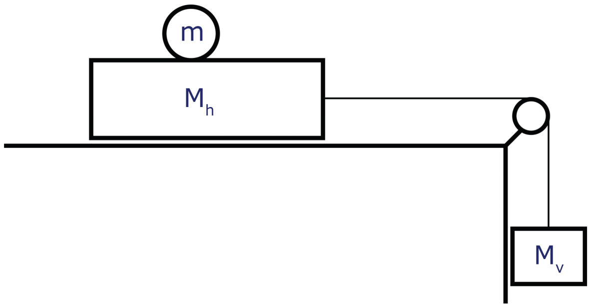
[**1,5**]

(c) Auch hier gilt wieder die Energieerhaltung. Wobei man beachten sollte, das in Position III weder Federenergie noch kinetische Energie vorhanden ist, da die Feder sich im entspannten Zustand befindet und die Kugel im Umkehrpunkt keine Geschwindigkeit besitzt.

$$E_{ges}(I) = E_{ges}(III) \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}ky_1^2 = mgy_3 \ \rightarrow y_3 = \frac{ky_2^2}{2mg} = 1,18\text{m} \tag{12}$$

[**1,5**]



Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Block der Masse M_h gleite ohne Reibung auf einem Tisch. Der Block sei über ein Seil mit einer zweiten, hängenden Masse M_v verbunden. Dabei wird die Masse M_v durch die Gravitation beschleunigt. Eine Kugel mit Masse m und Radius R befindet sich auf dem oberen Block in Ruhe. Sobald sich M_v bewegt, rollt die Kugel ohne zu Rutschen auf dem oberen Block.

(a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichungen für die drei Massen hin.

(b) Stellen Sie die Zwangsbedingungen für die Situation auf und finden Sie damit die resultierenden Beschleunigungen der Masse M_v und des Schwerpunktes der Kugel!

Lösung

(a) Die Seilspannung werde mit T bezeichnet und die Kraft, welche die Masse M_h nach rechts auf die Kugel ausübt, mit F. Dann gelten die Bewegungsgleichungen

$$M_h\ddot{X} = T - F \tag{i}$$
$$m\ddot{x} = F \tag{ii}$$
$$M_v\ddot{Y} = T - M_v g \tag{iii}$$

[1,5]

(b) Die Winkelorientierung der Kugel werde nun mit θ bezeichnet (im Uhrzeigersinn). Dann gelten aufgrund der rutschfreien Bewegung zwischen Kugel und M_h folgende Relationen für die Beschleunigungen

$$\frac{2}{5}mR^2\ddot{\theta} = -FR \tag{iv}$$
$$\ddot{x} = \ddot{X} + R\ddot{\theta} \tag{v}$$

Zusätzlich nutzen wir die Bedingung der konstanten Seillänge und finden

$$X + Y = \text{const} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{X} + \ddot{Y} = 0 \tag{vi}$$

[1,5]

Diese sechs Gleichungen (i) bis (vi) können nun nach T, F $\ddot{\theta}$, $\ddot{x}$, $\ddot{X}$ und $\ddot{Y}$ aufgelöst werden. Laut Aufgabenstellung gesucht sind $\ddot{Y}$ und $\ddot{x}$. Wir finden

$$\ddot{Y} = -\frac{M_v}{M_h + M_v + \frac{2}{7}m} g$$
$$\ddot{x} = \frac{2}{7}\frac{M_v}{M_h + M_v + \frac{2}{7}m} g$$

[**2**]

Um dieses Ergebnis zu erhalten können die Gleichungen (i) bis (vi) beispielsweise wie folgt umgeformt werden:

- Wir beginnen mit Gleichung (vi) und schreiben diese als

$$\ddot{X} = -\ddot{Y}$$

- Damit kann Gleichung (i) geschrieben werden als

$$\ddot{Y} = \frac{F}{M_h} - \frac{T}{M_h}$$

  Zur Bestimmung von $\ddot{Y}$ müssen demnach zunächst F und T berechnet werden.

- Die Seilspannung T kann man aus Gleichung (iii) erhalten

$$T = M_v \ddot{Y} + M_v g$$

- Die Kraft F kann man aus Gleichung (iv) unter Verwendung der Gleichungen (ii), (v) und (vi) berechnen

$$\begin{aligned} F &\overset{(iv)}{=} -\frac{2}{5}mR\ddot{\theta} \\ &\overset{(v)}{=} -\frac{2}{5}mR\left[\frac{\ddot{x} - \ddot{X}}{R}\right] \\ &\overset{(vi)}{=} -\frac{2}{5}m\ddot{x} - \frac{2}{5}m\ddot{Y} \\ &\overset{(ii)}{=} -\frac{2}{5}F - \frac{2}{5}m\ddot{Y} \\ F &= -\frac{2}{7}m\ddot{Y} \end{aligned}$$

- Demnach gilt für die Beschleunigung $\ddot{Y}$

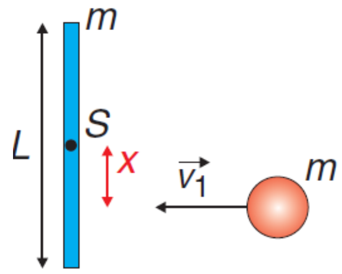
$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= \frac{F}{M_h} - \frac{T}{M_h} = -\frac{2}{7}\frac{m}{M_h}\ddot{Y} - \frac{M_v}{M_h}\ddot{Y} - \frac{M_v}{M_h}g \\ &= \frac{-\frac{M_v}{M_h}g}{1 + \frac{2}{7}\frac{m}{M_h} + \frac{M_v}{M_h}} = -\frac{M_v}{M_h + M_v + \frac{2}{7}m}g \end{aligned}$$

- Mit diesem Ergebnis kann nun auch $\ddot{x}$ aus den Gleichungen (ii) und (iv) berechnet werden

$$\ddot{x} = -\frac{2}{7}\ddot{Y} = \frac{2}{7}\frac{M_v}{M_h + M_v + \frac{2}{7}m}g$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Ein dünner homogener Stab (Länge L, Masse m) schwebt im kräftefreien Raum und wird im Abstand $x = L/4$ von seinem Schwerpunkt S von einer Kugel der gleichen Masse m und der Geschwindigkeit $\vec{v_1}$ vollkommen elastisch getroffen. Berechnen Sie das Verhältnis zwischen Translations- und Rotationsenergie des gesamten Systems (Stab und Kugel) nach dem Stoß. (*Hinweis:* $\Theta_{Stab} = \frac{1}{12} mL^2$)



Lösung

v_1 und v_1' sind die Geschwindigkeiten der Kugel vor bzw. nach dem Stoß, v_S und v_S' die Geschwindigkeiten des Schwerpunkts des Stabs vor bzw. nach dem Stoß, ω' die Winkelgeschwindigkeit des Stabs nach dem Stoß.

Impulserhaltung:

$$mv_1 = mv_1' + mv_S' \Rightarrow v_1 = v_1' + v_S'$$

[**1**]

Drehimpulserhaltung (bzgl. Schwerpunkt S des Stabes):

$$mv_1 x = mv_1' x + \Theta\omega' \Rightarrow v_1 x = v_1' x + \frac{1}{12} L^2 \omega' \Rightarrow v_1 = v_1' + \frac{1}{12x} L^2 \omega'$$

[**1**]

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m {v_S'}^2 + \frac{1}{2} m {v_1'}^2 + \frac{1}{2}\Theta{\omega'}^2 \Rightarrow v_1^2 - {v_1'}^2 = {v_S'}^2 + \frac{1}{12} L^2 {\omega'}^2$$

[**1**]

$$\frac{E'_{trans}}{E'_{rot}} = \frac{\frac{1}{2} m {v_S'}^2 + \frac{1}{2} m {v_1'}^2}{\frac{1}{2}\Theta{\omega'}^2} = \frac{v_1^2 - \frac{1}{12} L^2 {\omega'}^2}{\frac{1}{12} L^2 {\omega'}^2} = \frac{v_1^2}{\frac{1}{12} L^2 {\omega'}^2} - 1$$

Aus (1) $\Rightarrow v_S' = v_1 - v_1'$, aus (2)$\omega' = 12\frac{x}{L^2}(v_1 - v_1')$ damit in (3):

$$(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = (v_1 - v_1')^2 + (v_1 - v_1')^2 \left(12\frac{x}{L^2}\right)^2 \frac{1}{12} L^2$$

$$(v_1 + v_1') = (v_1 - v_1') + 12\left(\frac{x}{L}\right)^2 v_1 - 12\left(\frac{x}{L}\right)^2 v_1'$$

Aus $x = \frac{L}{4}$ folgt

$$(v_1 + v_1') = (v_1 - v_1') + \frac{3}{4}v_1 - \frac{3}{4}v_1' \Rightarrow v_1' = \frac{3}{11}v_1$$

$$\omega' = 12\frac{x}{L^2}(v_1 - v_1') \Rightarrow \omega' = \frac{24}{11}\frac{v_1}{L}$$

Damit wird aus

$$\frac{E'_{trans}}{E'_{rot}} = \frac{v_1^2}{\frac{1}{12}L^2\omega'^2} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{12}\frac{576}{121}} - 1 = \frac{73}{48}$$

[**3**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Ein Schiff der Masse $m_s = 20000\text{t}$ fährt von der Nordsee (Salzwasser $\rho_1 = 1,03\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) in den Hamburger Hafen (Süßwasser $\rho_2 = 1,0\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

(a) Wie ändert sich der Tiefgang des Schiffes? Begründung, keine Rechnung!

(b) Nachdem das Schiff im Hafen Last abgeladen hat, liegt es wieder genauso tief im Wasser wie in der Nordsee. Wie schwer muss die Last gewesen sein?

(c) Durch das Entladen des Schiffes wurde es zu einer harmonischen Schwingung angeregt. Hierfür soll das Schiff als Quader mit der Grundfläche $A = 30\text{m}^2$ angenommen werden. Reibung und Bewegung des Wassers sind zu vernachlässigen.
Stellen sie die Differentialgleichung auf und bestimmen sie daraus die Periodendauer der Schwingung.

Lösung:

(a) Der Auftrieb hängt von der Dichte der Flüssigkeit ab. Je schwerer das verdrängte Wasser ist, umso weniger sinkt das Schiff ein. Da die Dichte in Salzwasser höher ist, liegt das Schiff im Süßwasser tiefer. Erkennbar ist dies auch an der Formel für den Auftrieb:

$$F = gV\rho \tag{13}$$

[**1**]

(b) Sowohl in Süßwasser als auch in Salzwaser gilt das Kräftegleichgewicht

$$F_A = F_g \tag{14}$$

$$\rho g V = mg \tag{15}$$

Im Salzwasser:
Die Gesamtmasse wird bestimmt durch die Masse des Schiffes und die Masse der Last.

$$\rho_1 g V = (m_s + m_L)g \tag{16}$$

Im Süßwasser:
Die Gesamtmasse ist nur noch die Masse des Schiffes

$$\rho_2 g V = m_s g \tag{17}$$

Umgestellt nach dem verdrängten Volumen ergibt

$$V = \frac{m_s}{\rho_2} \tag{18}$$

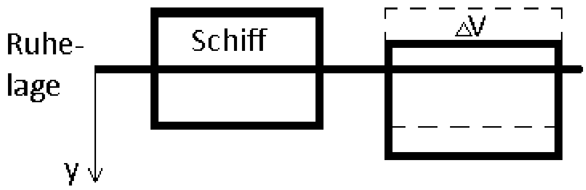
[2]

Setzt man dies in Gleichung 16, kann man nach m_L auflösen und erhält:

$$m_L = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1\right) m_s = \left(\frac{1,03\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}}{1,0\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} - 1\right) \cdot 2 \cdot 10^4 \mathrm{t} = 600\mathrm{t} \tag{19}$$

[1]

(c) Die Beschleunigung des Schiffes kommt nur von der Auftriebskraft, wenn man die Ruhelage(Gleichgewichtslage) des Schiffes als Nullpunkt wählt.



$$m_s \ddot{y} = -\rho_2 g \Delta V = -\rho_2 g A y \tag{20}$$

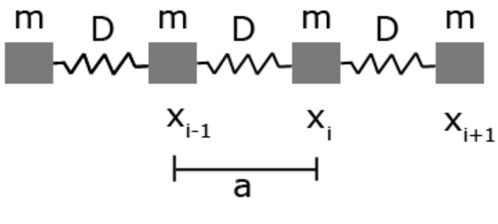
$$\ddot{y} = -\frac{\rho_2 g A}{m_S} \cdot y = -\omega \cdot y \tag{21}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_s}{\rho_2 g A}} = 51,8\mathrm{s} \tag{22}$$

[2]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Betrachten Sie die eindimensionale Masse-Feder-Kette.



(a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für das Masseelement am Ort x_i und die Auslenkung ψ_i auf.

(b) Leiten Sie für die beiden Kräfte mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung $\frac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'$ die Wellengleichung für die Masse-Feder-Kette her. Geben Sie die Kreisfrequenz der Schwingung an.

Lösung

(a)

$$m\ddot{\psi}_i = D(\psi_{i+1} - \psi_i) - D(\psi_i - \psi_{i-1})$$

[**1**]

(b) Mit dem Mittelwertsatz der Differentialgleichung ergibt sich für kleine Werte von a

$$\frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{a} = \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x \approx x_i + \frac{a}{2}}$$

$$\frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{a} = \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x \approx x_i - \frac{a}{2}}$$

Einsetzen ergibt

$$(\psi_{i+1} - \psi_i) - (\psi_i - \psi_{i-1}) = a \underbrace{\left[\frac{d\psi}{dx}\Big|_{x \approx x_i + \frac{a}{2}} - \frac{d\psi}{dx}\Big|_{x \approx x_i - \frac{a}{2}}\right]}_{(*)}$$

Nochmaliges Anwenden des Mittelwertsatz auf den Ausdruck (*) ergibt

$$(\psi_{i+1} - \psi_i) - (\psi_i - \psi_{i-1}) = a^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}\Big|_{x_i}$$

[**2**]

$$m\ddot{\psi}_i = Da^2 \frac{d^2\psi}{dx^2}\Big|_{x_i}$$

Dieser Ausdruck gilt für alle Massenpunkte, sodass man schreiben kann

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = D\frac{a^2}{m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \qquad v = \sqrt{\frac{Da^2}{m}}$$

[**1**]