Übungen zu Theor. Physik 3 (Quantenmechanik)

Prof. Walter Schirmacher, Dr. Anatoly Zharikov, SS 2008

Klausur

HS 1: 07.07.08

1. Zwei-Niveaus-System. (9 P)

Der Hamiltonoperator eines Zwei-Niveaus-Systems lautet:

$$\hat{H} = \epsilon\Big(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + \sqrt{3}\big[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big]\Big).$$

Dabei sind $|1\rangle$ und $|2\rangle$ orthonormierte Basiszustände. Der Parameter ϵ hat die Einheit einer Energie.

(a) Wie lautet die Matrixdarstellung von $\hat{H}$ in dieser Basis. **(3P)**

(b) Finden Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenzustände von $\hat{H}$. **(6P)**

2. Teilchen im eindimensionalen Potential. (18 P)

Gegeben sei das eindimensionale Potential

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad (\lambda > 0).$$

Dabei ist $\delta(x)$ die Dirac-Delta-Funktion.

(a) Welchen Anschlußbedingungen muß die Wellenfunktion $\psi(x)$ bei $x = 0$ gehorchen? **(5P)**

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\frac{d\psi}{dx}$ bei $x = 0$ unstetig ist, indem Sie die Schrödingergleichung über das infinitesimale Interval $[-\epsilon, \epsilon]$ integrieren.

(b) Es existiert genau ein gebundener Zustand in diesem Potential. Bestimmen Sie seine normierte Eigenfunktion und den zugehörigen Energieeigenwert. **(7P)**

(c) Betrachten Sie die Streuzustände ($E > 0$) in diesem Potential. Unter Ansatz

$$\psi(x) = e^{ikx} + R(E)\,e^{-ikx}\ (x < 0), \quad \psi(x) = T(E)\,e^{ikx}\ (x > 0), \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

berechnen Sie die Reflexionsamplitude $R(E)$, den Reflexionskoeffizienten $r(E) = |R(E)|^2$, die Transmissionsamplitude $T(E)$ und den Transmissionskoeffizienten $t(E) = |T(E)|^2$. **(6P)**

3. Variationsverfahren. (9 P)

Wählen Sie die unnormierte Versuchswellenfunktion für den Grundzustand im δ-Potential (Aufgabe 2) in der Form

$$\psi^{(var)}(x, \beta) = e^{-\frac{\beta^2 x^2}{2}}.$$

Dabei ist β ein Variationsparameter.
Geben Sie die Abschätzung E^{var}_{min} für die Grundzustandsnergie an .

4. Dreidimensionaler Oszillator. (22 P)

Gegeben ist der dreidimensionale isotrope harmonische Oszillator mit Hamiltonoperator ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$)

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2.$$

(a) Berechnen Sie durch Separation der x, y und z-Bewegung das Energiespektrum und die Entartungsgrade für die niedrigsten 4 Terme, d.h. Grundzustand und die Zustände mit den 3 niedrigsten Anregungsenergien. **(11P)**

Hinweis: Verwenden Sie die schon bekannten Ergebnisse des eindimensionalen Oszillators.

(b) Unter Verwendung dimensionlosen Größen $\xi = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}\, r$ und $e_n = \frac{E_n}{\hbar\omega_0}$ bekommt man eine reduzierte Form der Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten:

$$\hat{h}\psi_n(\xi,\theta,\varphi) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\xi}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\xi + \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2\xi^2} + \xi^2\right)\psi_n(\xi) = e_n\psi_n(\xi)$$

Weiter leitet man mit Hilfe der Darstellung $\psi_n(\xi,\theta,\varphi) = f_n(\xi)\xi^l\, e^{-\frac{\xi^2}{2}} Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ die folgende Differentialgleichung für die Funktionen $f_n(\xi)$ her.

$$f_n'' + \frac{1}{\xi}2(l+1)f_n' - 2\xi f_n' + (2e_n(l) - 3 - 2l)f_n = 0.$$

- Zeigen Sie, dass nur im Falle $e_n(l) = 2n + l + \frac{3}{2}$, $(n, l = 0, 1, ...)$ die Funktion $f_n(\xi)$ ein Polynom $2n$-ten Grades ist. **(6P)**

  Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung $f_n(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\xi^{2k}$ und leiten Sie mit Hilfe der Differentialgleichung eine Rekursionsformel für die Koeffizienen a_k ab.

- Welche Zusände gehören zu den 3 niedrigsten Anregungsenergien. Geben Sie die Quantenzahlen (n, l) und den Entartungsgrad an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit (a). **(5P)**