Klausur zur Theoretischen Physik 3: QUANTENMECHANIK

Harald Friedrich, T.U. München

Montag, 11.07.2005 Hörsaal 1 9:10 – 10:40

1. Operatoren im Hilbertraum:

   (a) Sei $|\psi_1\rangle$, $|\psi_2\rangle$, $\ldots$, $|\psi_n\rangle$ $\ldots$ eine vollständige orthonormale Basis des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Mit $\hat{P}_k$ bezeichnen wir den Projektionsoperator auf den vom Zustand $|\psi_k\rangle$ aufgespannten eindimensionalen Unterraum von $\mathcal{H}$: $\hat{P}_k = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$.
   Zeigen Sie, dass $\hat{P}_k$ gerade zwei Eigenwerte, 0 und 1, besitzt.
   Zeigen Sie: $(\hat{P}_k)^m = \hat{P}_k$ für alle natürlichen Zahlen m.
   Zeigen Sie: $\sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}_k = \mathbf{1}$. (3P)

   (b) Welche der folgenden Operatoren sind Hermitesch (ohne Beweis!),

   $$\hat{x}\ , \quad \frac{\partial}{\partial x}\ , \quad \hat{p}\ , \quad \hat{L}_x\ , \quad \hat{S}_y\ , \quad \hat{S}_+ = \hat{S}_x + \mathrm{i}\hat{S}_y\ ? \qquad (3P)$$

2. Vertauschungsrelationen:

   (a) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien zwei Hermitesche Operatoren deren Kommutator verschwindet, $[\hat{A},\hat{B}] = 0$. Die Eigenwerte von $\hat{B}$ mögen nicht entartet sein. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ eine gemeinsame Basis von Eigenzuständen besitzen. (3P)

   (b) Zeigen Sie: $[\hat{p},\hat{x}^n] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\, n\, \hat{x}^{n-1}$ und berechnen Sie $[\hat{p}^n,\hat{x}]$. (3P)

3. Wellenpaket:

   $|n\rangle$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ seien die auf Eins normierten Eigenzustände des

   Hamiltonoperators $$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right)$$

   für ein Teilchen der Masse μ in einem harmonischen Potenzial. Dabei sind $\hat{b}^\dagger$ und $\hat{b}$ die Auf- und Absteigeoperatoren,

   $$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} + \mathrm{i}\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right)\ , \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} - \mathrm{i}\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right)\ , \quad \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\ ,$$

mit den Eigenschaften $\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ und $\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$; ihr Kommutator ist $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. Für eine gegebene komplexe Zahl z ist der "kohärente Zustand" $|z\rangle$ ein Wellenpaket definiert durch:

$$|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ .$$

(a) Zeigen Sie: $\langle z|z\rangle = 1$. (2P)

(b) Zeigen Sie: $\hat{b}|z\rangle = z^*|z\rangle$; berechnen Sie $\langle z|\hat{b}^\dagger\hat{b}|z\rangle$ und $\langle z|\hat{b}\hat{b}^\dagger|z\rangle$. (3P)

(c) Zeigen Sie, dass im Zustand $|z\rangle$ der Mittewert des Ortes gegeben ist durch $\langle\hat{x}\rangle = (z+z^*)\beta/\sqrt{2} = \beta\sqrt{2}\,\Re(z)$. Berechnen Sie den Mittelwert $\langle\hat{p}\rangle$ des Impulses und die Unschärfen Δx, Δp. (4P)

(d) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im kohärenten Zustand $|z_0\rangle$, wobei z_0 reell ist, $|\psi(t=0)\rangle = |z_0\rangle$. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Systems gegeben ist durch

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|z\rangle \quad \text{mit} \quad z = z_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

und berechnen Sie $\langle\hat{x}\rangle$ für $t = \frac{\pi}{2\omega}$, $t = \frac{\pi}{\omega}$ und $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Periode und Amplitude der entsprechenen klassischen Schwingung. (6P)

4. Spin-Bahn-Kopplung beim radialsymmetrischen Oszillator:

Ein Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ und Masse μ bewege sich unter dem Einfluss des radialsymmetrischen harmonischen Potenzials $V(r) = \frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$. Die Energieeigenwerte hängen ab von der Bahndrehimpulsquantenzahl $l = 0, 1, 2, \ldots$ und der Radialquantenzahl $n = 0, 1, 2, \ldots$: $E_{n,l} = (2n + l + 3/2)\hbar\omega$. Die Oszillatorenergie $\hbar\omega$ sei klein im Vergleich zur Ruheenergie μc^2 des Teilchens.

Berechnen Sie die Energieverschiebungen, welche durch die Spin-Bahn-Kopplung

$$\hat{V}_{LS} = \frac{1}{2\mu^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$$

hervorgerufen werden. Diskutieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus bis zur Hauptquantenzahl $2n + l = 2$ und geben Sie die Entartung der Energieeigenwerte mit und ohne Spin-Bahn-Kopplung an. (10P)