Klausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. M. Rief

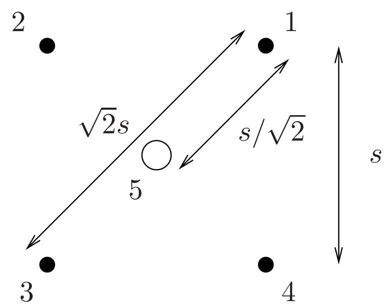
Sommersemester 2010

29.7.2010

Musterlösung

Aufgabe 1:

(a) Die betrachtete Anordnung sieht folgendermaßen aus:



Wir betrachten die Kräfte auf Teilchen 1. Wegen Symmetriegründen verschwinden auch die Gesamtkräfte auf alle Teilchen, wenn die Gesamtkraft auf 1 verschwindet. **[1]**

Die Gesamtkraft auf 1 ergibt sich durch Summation der Einzelkräfte, die von den Ladungen 2 bis 5 ausgeübt werden:

$$4\pi\varepsilon_0 \boldsymbol{F}_1 = \frac{q^2}{s^2}\boldsymbol{e}_x + \frac{q^2}{2s^2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) + \frac{q^2}{s^2}\boldsymbol{e}_y + \frac{Qq}{s^2/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y) \tag{1}$$

$$= \left(\frac{q^2}{s^2} + \frac{q^2}{2\sqrt{2}s^2} + \frac{Qq}{s^2/\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{q^2}{2\sqrt{2}s^2} + \frac{q^2}{s^2} + \frac{Qq}{s^2/\sqrt{2}}\right)\boldsymbol{e}_y \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

[2]

Nullsetzten der (identischen) Klammern ergibt

$$q + \frac{q}{2\sqrt{2}} + \sqrt{2}Q = 0 \tag{3}$$

also

$$Q = -\frac{1+2\sqrt{2}}{4}q = -0.957q = -0.957\,\mathrm{nC} \tag{4}$$

[1]

(b) Die freiwerdende Energie E ist das Negative der potentiellen Energie der Ladung Q an ihrem Ort im Ursprung:

$$E = -Q\phi(0) = -Q \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{s/\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}Qq}{\pi\varepsilon_0 s} = 0.406\,\mu\mathrm{J} \tag{5}$$

[1]

Aufgabe 2:

(a) Wegen der Unstetigkeit und der Radialsymmetrie von $\boldsymbol{P}$ ist die Innenfläche der Kugelschale mit einer gleichmäßigen Polarisationsflächenladungsdichte σ_1 überzogen, für die gemäß Angabe $|\sigma_1| = |P_1|$ gilt. Das Vorzeichen von σ_1 ist dem Vorzeichen von P_1 entgegengesetzt, da der Polarisationsvektor von den negativen auf die positiven Ladungen zeigt. Also

$$\sigma_1 = -P_1 \tag{6}$$

[1]

Diese sphärisch symmetrische Ladungsverteilung wirkt nach außen so, als ob ihre Gesamtladung im Zentrum vereint wäre. Also:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2\sigma_1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2 P_1}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \tag{7}$$

[1]

Die Polarisationsflächenladungsdichte σ_2 auf der Außenflächen der Kugelschale spielt wegen der Rotationssymmetrie keine Rolle, da eine sphärisch symmetrische Ladungsverteilung in ihrem Inneren kein Feld erzeugt. **[1]**

(b) Nun ist die Polarisation nicht vorgegeben, sondern wird durch die Punktladung q im Zentrum induziert. Dann gilt für das Feld im Dielektrikum:

$$E = E_0 + E_P \tag{8}$$

[1]

mit

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{9}$$

und

$$E_P = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi R_1^2 P_1}{r^2} \tag{10}$$

Also ist das Feld E_1 bei $r = R_1$ (innerer Limes)

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2} - \frac{P_1}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

[1]

Die zweite Gleichung ist der Zusammenhang zwischen Polarisation und Feld:

$$P_1 = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_1 \tag{12}$$

[1]

Setzt man dies ein, dann folgt für P_1:

$$\frac{P_1}{\varepsilon - 1} = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{R_1^2} - P_1 \tag{13}$$

also

$$P_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{q}{R_1^2}\Big/\left(1 + \frac{1}{\varepsilon - 1}\right) = \frac{1}{4\pi}\frac{(\varepsilon - 1)q}{\varepsilon R_1^2} \tag{14}$$

Damit ist die Polarisationsladung Q_1 auf der Innenfläche

$$Q_1 \;=\; 4\pi R_1^2\sigma_1 \;=\; -4\pi R_1^2 P_1 \;=\; -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q \tag{15}$$

[1]

Aufgabe 3:

(a) Das Biot-Savart-Gesetz lautet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{d\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \tag{16}$$

wobei $\boldsymbol{r} = (0,0,z)$ ist und $\boldsymbol{r}'$ die Stromverteilung überstreicht. Da es sich hier um einen Kreisring handelt, bietet sich als Integrationsparameter der Winkel φ an. Also:

$$\boldsymbol{r}'(\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d\boldsymbol{r}' \;=\; \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \tag{17}$$

[1]

Also ist

$$d\boldsymbol{r}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \;=\; \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} d\varphi \;=\; \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix} d\varphi \tag{18}$$

und

$$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3 \;=\; (R^2+z^2)^{3/2} \tag{19}$$

Damit wird das Integral zu

$$\boldsymbol{B}(0,0,z) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} Rz\cos\varphi \\ Rz\sin\varphi \\ R^2 \end{pmatrix} (R^2+z^2)^{-3/2} \tag{20}$$

[2]

Das Integral über die beiden ersten Komponenten verschwindet (wie aus Symmetriegründen zu erwarten) und es bleibt

$$\boldsymbol{B}(0,0,z) \;=\; \frac{\mu_0 I}{4\pi}\cdot 2\pi R^2(R^2+z^2)^{-3/2}\,\boldsymbol{e}_z \;=\; \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\,\boldsymbol{e}_z \tag{21}$$

[1]

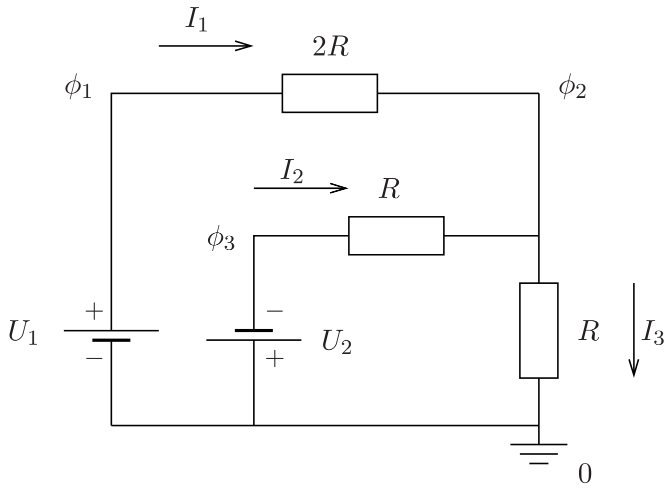
(b) Mit dem Ergebnis von Teil a gilt

$$I \;=\; \frac{2B(R^2+z^2)^{3/2}}{\mu_0 R^2} \;=\; 2.83\cdot 10^9\ \mathrm{A} \tag{22}$$

[1]

Aufgabe 4:

In der folgenden Abbildung ist das Netzwerk mit den Potentialpunkten ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und einer Konvention für die positiven Stromrichtungen dargestellt. Gesucht ist ϕ_2.



Für die äußere Masche gilt dann:

$$\phi_1 - \phi_2 = 2RI_1 \quad (23)$$
$$\phi_2 - 0 = RI_3 \quad (24)$$
$$0 - \phi_1 = -U_1 \quad (25)$$

also in Summe

$$0 = 2RI_1 + RI_3 - U_1 \quad (26)$$

[1]

Für die innere Masche gilt:

$$\phi_3 - \phi_2 = RI_2 \quad (27)$$
$$\phi_2 - 0 = RI_3 \quad (28)$$
$$0 - \phi_3 = +U_2 \quad (29)$$

also in Summe

$$0 = RI_2 + RI_3 + U_2 \quad (30)$$

[1]

Als dritte Gleichung hat man die Knotenregel

$$I_3 = I_1 + I_2 \quad (31)$$

[1]

Damit werden die beiden Maschengleichungen zu

$$3RI_1 + RI_2 = U_1 \quad (32)$$
$$RI_1 + 2RI_2 = -U_2 \quad (33)$$

Auflösen nach I_1 ergibt

$$I_1 = \frac{1}{5R}(2U_1 + U_2) \quad (34)$$

[1]

und daraus folgt das gesuchte ϕ_2:

$$\phi_2 \;=\; \phi_1 - 2RI_1 \;=\; U_1 - \frac{2}{5}(2U_1 + U_2) \;=\; \frac{1}{5}(U_1 - 2U_2) \tag{35}$$

[1]

Einsetzen der Zahlenwerte $U_1 = 6\,\mathrm{V}$, $U_2 = 4\,\mathrm{V}$ ergibt (unabhängig von R):

$$\phi_2 \;=\; -0.4\,\mathrm{V} \tag{36}$$

[1]

Aufgabe 5:

(a) Aus der Gleichheit der elektrischen und magnetischen Energiedichte folgt

$$\varepsilon_0 E^2 \;=\; \frac{1}{\mu_0} B^2 \tag{37}$$

also

$$\frac{E}{B} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \;=\; c \tag{38}$$

Die magnetische Feldstärke am Ort 1 ist also

$$B_1 \;=\; \frac{E_1}{c} \;=\; \frac{0.4\,\mathrm{V/m}}{299792458\,\mathrm{m/s}} \;=\; 1.33\,\mathrm{nT} \tag{39}$$

[1]

(b) Die Abstrahlcharakteristik des Dipols lautet

$$S \;\sim\; \sin^2\vartheta \tag{40}$$

Da die Energiedichte u proportional zur Strahlungsintensität S ist:

$$S \;=\; cu \tag{41}$$

gilt dieselbe Richtungscharakteristik auch für die Energiedichte. Da außerdem die Intensität mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, tut dies auch die Energiedichte. Zusammengenommen ergibt sich für die Energiedichte am Ort 2 in Abhängigkeit von der Energiedichte am Ort 1:

$$u_{\max}(r_2, \vartheta) \;=\; \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 u_{\max}(r_1, 90^\circ) \tag{42}$$

bzw. ausgedrückt durch E_1:

$$u_{\max}(r_2, \vartheta) \;=\; \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \varepsilon_0 E_1^2 \tag{43}$$

[1]

Der Zeitmittelwert der Energiedichte an einem festgehaltenen Ort bestimmt sich aus Mittelung der zeitabhängigen Gleichung

$$u(t) \;=\; u_{\max} \sin^2(\omega t - kr) \tag{44}$$

die wiederum aus

$$E(t) \;=\; E_{\max} \sin(\omega t - kr) \tag{45}$$

folgt. Also

$$\bar{u} \;=\; \frac{1}{2} u_{\max} \tag{46}$$

und speziell am Ort 2:

$$\bar{u}_2 \;=\; \frac{1}{2} u_{\max,2} \;=\; \frac{1}{2} \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 u_{\max,1} \tag{47}$$

bzw. ausgedrückt durch E_1:

$$\bar{u}_2 \;=\; \frac{1}{2} \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \varepsilon_0 E_1^2 \tag{48}$$

[1]

Die mittlere Strahlungsintensität ergibt sich genauso aus der maximalen Strahlungsintensität zu

$$\bar{S} \;=\; \frac{1}{2} S_{\max} \;=\; \frac{1}{2} c u_{\max} \tag{49}$$

Also am Ort 2:

$$\bar{S} \;=\; \frac{1}{2} c u_{\max,2} \;=\; \frac{1}{2} c \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 u_{\max,1} \;=\; \frac{1}{2} c \sin^2\vartheta \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \varepsilon_0 E_1^2 \tag{50}$$

[1]

(c) Wegen der invers-quadratischen Abnahme der Strahlungsintensität nimmt die Feldstärke invers-linear mit der Entfernung ab, also

$$E_2 \;=\; \frac{r_1}{r_2} E_1 \tag{51}$$

[1]

Damit folgt:

$$E_2(90^\circ) \;=\; \frac{r_1}{r_2} E_1(90^\circ) \;=\; 0.521\,\mu\text{V/m} \tag{52}$$

$$E_2(45^\circ) \;=\; \frac{r_1}{r_2} \sin(45^\circ) E_1(90^\circ) \;=\; 0.368\,\mu\text{V/m} \tag{53}$$

$\Rightarrow$ Senkrecht zur Dipolachse ist Empfang möglich, im Winkel von 45° nicht. **[1]**

Aufgabe 6:

Die Wärmepumpe entnimmt dem kalten Reservoir (Außenluft) die Wärme Q_L und führt unter Aufwand der Arbeit W die Wärme $Q_Z = Q_L + W$ dem heißen Reservoir (Zimmerluft) zu. Dabei ist der Wirkungsgrad

$$\eta \;=\; \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} \;=\; \frac{Q_Z}{W} \tag{54}$$

[1]

Gemäß Angabe hat η im Idealfall den Wert $T_Z/(T_Z - T_L)$, also ist

$$Q_Z \;=\; \frac{T_Z}{T_Z - T_L} W \tag{55}$$

Durch Zeitableitung erhält man die Wärmezuführungsrate:

$$\dot{Q}_Z \;=\; \frac{T_Z}{T_Z - T_L} P \tag{56}$$

[1]

Andererseits ist die Wärmeverlustrate des Zimmers gemäß Angabe:

$$V = L(T_Z - T_L) \tag{57}$$

[1]

Setzt man

$$V = \dot{Q}_Z \tag{58}$$

dann folgt

$$L(T_Z - T_L) = \frac{T_Z}{T_Z - T_L} P \tag{59}$$

[1]

Dies kann man sehr leicht nach T_L auflösen:

$$T_L = T_Z - \sqrt{T_Z P / L} = 228.3\,\mathrm{K} \tag{60}$$

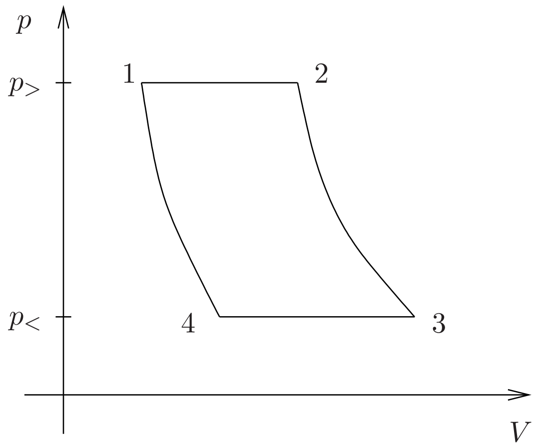
[1]

bzw.

$$\vartheta_L = -44.7\,^\circ\mathrm{C} \tag{61}$$

Aufgabe 7:

(a)



[2]

(b) Wir bezeichnen mit W die Nettoarbeit, die die Maschine während eines Zyklus verrichtet und mit Q_{ij} die Wärmemenge, die beim Schritt von Zustand i nach Zustand j in die Maschine hineinfließt. Der Energieerhaltungssatz für einen vollständigen Zyklus lautet also

$$W - Q_{12} - Q_{34} = 0 \tag{62}$$

[1]

Dabei ist schon berücksichtigt, dass $Q_{23} = Q_{41} = 0$ ist. Vorzeichenmäßig gilt:

$$W > 0 \quad , \quad Q_{12} > 0 \quad , \quad Q_{34} < 0 \tag{63}$$

Der Wirkungsgrad ist nun der Quotient aus Nettoarbeit und der im Schritt $1 \to 2$ hineingesteckten Wärme:

$$\eta = \frac{W}{Q_{12}} \tag{64}$$

[1]

Wegen der obigen Energieerhaltungsgleichung ist dies

$$\eta \;=\; \frac{Q_{12}+Q_{34}}{Q_{12}} \;=\; 1+\frac{Q_{34}}{Q_{12}} \;=\; 1-\frac{|Q_{34}|}{|Q_{12}|} \tag{65}$$

Es sind also Q_{12} und Q_{34} zu berechnen. Q_{12} ergibt sich aus

$$Q_{12} \;=\; \Delta U_{12}+W_{12} \;=\; \frac{f}{2}p_>\Delta V_{12}+p_>\Delta V_{12} \;=\; \frac{f+2}{2}p_>(V_2-V_1) \tag{66}$$

[1]

Entsprechend Q_{34}:

$$Q_{34} \;=\; \Delta U_{34}+W_{12} \;=\; \frac{f}{2}p_<\Delta V_{34}+p_<\Delta V_{34} \;=\; \frac{f+2}{2}p_<(V_4-V_3) \tag{67}$$

[1]

Also

$$\eta \;=\; 1-\frac{p_<(V_3-V_4)}{p_>(V_2-V_1)} \tag{68}$$

Wegen der Adiabatizität der Schritte $2 \to 3$ und $4 \to 1$ gilt

$$V_3 \;=\; V_2\left(\frac{p_>}{p_<}\right)^{1/\gamma} \quad , \quad V_4 \;=\; V_1\left(\frac{p_>}{p_<}\right)^{1/\gamma} \tag{69}$$

[1]

Damit ergibt sich schließlich

$$\eta \;=\; 1-\frac{p_<\left(\frac{p_>}{p_<}\right)^{1/\gamma}}{p_>} \;=\; 1-\frac{p_<^{1-1/\gamma}}{p_>^{1-1/\gamma}} \tag{70}$$

[1]