TU München, Lehrstuhl E23
Walther-Meissner-Institut
L. Alff, R. Gross

Experimentalphysik IV

Vordiplom-Klausur

4. September 2003, MW 0001/MW 2001, 09:00-10:30

Aufgabe 1: Photoelektronen [$\sim$ 13/100 Punkte]

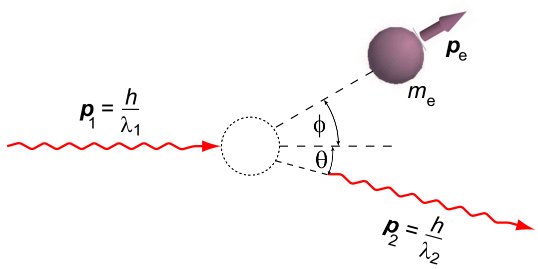
(i) Skizzieren Sie die Streuung eines Röntgenstrahls an einem ruhenden Elektron (Compton-Streuung)! Was passiert mit der Wellenlänge des gestreuten Photons? Welche Bedeutung hat die Größe $\frac{h}{m_e c}$? Diskutieren Sie den Streuprozess im Zusammenhang mit dem Welle-Teilchen-Dualismus!

(ii) Silber wird mit Licht der Wellenlänge $\lambda = 150\,\mathrm{nm}$ bestrahlt. Dabei treten Photoelektronen aus. Die Grenzwellenlänge des photoelektrischen Effekts bei Silber beträgt $\lambda_G = 261\,\mathrm{nm}$. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der ausgelösten Elektronen!

(iii) Ein Röntgenquant der Wellenlänge $\lambda_1 = 11.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$ überträgt auf ein Elektron die Energie $\Delta E = 13.8\,\mathrm{keV}$. Wie groß ist die Wellenlänge λ_2 des gestreuten Röntgenquants?

(iv) Unter welcher Bedingung wird die Wellenlänge des gestreuten Röntgenquants maximal?

Lösung 1: Photoelektronen [$\sim$ 13/100 Punkte]



(i) Die Skizze zeigt die Compton-Streuung eines Röntgenphotons an einem Elektron. Das gestreute Photon besitzt eine geringere Energie als das einfallende Photon, da Energie in den Rückstoß des Elektrons fließt. Die Wellenlängendifferenz der Photonen kann aus Energie- und Impulserhaltung berechnet werden (**2 Punkte**). Die beiden Punkte gibt es nur für eine klare (!) Zeichnung und die Kennzeichnung, dass vor und nach Streuung eine unterschiedliche Wellenlänge vorliegt. $\frac{h}{m_e c}$ ist von der Dimension her eine Länge. Es ist die Compton-Wellenlänge λ_C. Sie hängt nicht von der Wellenlänge des einfallenden Lichtquants ab. Sie ist nur eine Eigenschaft der Masse m_e des streuenden Elektrons. Die Compton-Wellenlänge geht wesentlich in die Wellenlängendifferenz des einfallenden und gestreuten Photons ein (Formel $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_\mathrm{C}[1 - \cos\theta]$) (auch ohne diese Formel **1 Punkt**). Das Teilchenbild wird stark unterstützt, da man ja hier simple Stoßgesetze anwendet, d.h. man hat die gleiche Physik wie bei Billiardkugeln (**2 Punkte**)!

(ii) Man muss zunächst eine Gleichung für die Energiebilanz aufstellen (**1 Punkt**):

$$E_\mathrm{Photon} = E_\mathrm{Elektron} + W_\mathrm{Austritt} \Rightarrow h\nu = \frac{m_\mathrm{e}}{2}v^2 + W_\mathrm{A}.$$

Die Austrittsarbeit W_A ist natürlich gerade durch die Grenzwellenlänge ν_G bestimmt: $W_\mathrm{A} = h\nu_\mathrm{G}$ (**1 Punkt**). Weiterhin kennen wir die Gleichung $\nu\lambda = c$. Nun können wir die obige Energiebilanz so umformen, dass wir v als Funktion der bekannten Größen erhalten:

$$h\frac{c}{\lambda} = \frac{m_\mathrm{e}}{2}v^2 + h\frac{c}{\lambda_\mathrm{G}} \Leftrightarrow \frac{m_\mathrm{e}}{2}v^2 = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{G}}\right).$$

Nach Auflösen nach v erhalten wir als Ergebnis (**2 Punkte**):

$$v = \sqrt{\frac{2hc}{m_\mathrm{e}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{G}}\right)} = c\sqrt{2\lambda_\mathrm{C}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_\mathrm{G}}\right)} \approx 1.11 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

(iii) Die Energie muss erhalten bleiben, also (**1 Punkt**)

$$E_\mathrm{Photon} = E_\mathrm{Elektron} + E_\text{gestreutes Photon} \Rightarrow h\nu_1 = \Delta E + h\nu_2.$$

Man formt um, um die Wellenlänge explizit zu haben (**1 Punkte**):

$$\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{\Delta E}{hc} \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda}{1 - \dfrac{\lambda\Delta E}{hc}} \approx 1.28 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}.$$

(iv) Die Wellenlänge des gestreuten Röntgenquants wird minimal, wenn der Energieübertrag auf das Elektron maximal ist. Dies ist natürlich genau bei Rückwärtsstreuung des Photons der Fall (**2 Punkte**).

Aufgabe 2: Diverses zum Wasserstoffatom [$\sim$ 17/100 Punkte]

Im Spektrum des Wasserstoffs tritt eine Linie mit der Wellenlänge $\lambda = 1874\,\mathrm{nm}$ auf.

(i) Welchen Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 entspricht dieser atomare Übergang?

(ii) Treten zusammen mit diesem Übergang weitere Übergänge auf? Wenn ja, warum und bei welchen Wellenlängen? Wenn nein, warum nicht? Wie heißen die entsprechenden Wellenlängenbereiche?

(iii) Das Trägheitsmoment T einer Schallplatte[1] beträgt etwa $10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2}$. Berechnen Sie den Drehimpuls $L = T\omega$ bei den bekannten 33.3 U/min! Wie groß ist etwa die Drehimpulsquantenzahl ℓ? Interpretieren Sie diese Zahl!

[1] Schwarze Scheiben, die man noch vor den sogenannten „compact discs“ (CDs) verwendet hat.

(iv) Wie groß ist der Winkel θ zwischen $\mathbf{L}$ und der z-Achse (Richtung des Magnetfelds) bei $\ell = 1$, 4 und 50? Fertigen Sie eine Skizze an! Interpretiren Sie diese Quantenzahlen! Diskutieren Sie den Fall $\theta = 0$!

Lösung 2: Diverses zum Wasserstoffatom [$\sim$ 17/100 Punkte]

(i) Nun, Ausgangspunkt ist die berüchtigte Gleichung $h\nu = E_{n_2} - E_{n_1}$ (**1 Punkt**, leicht verdient). Jetzt müssen wir noch die Energieniveaus des Wasserstoffatoms kennen, aber das ist ja kein Problem (**1 Punkt**):

$$E_n = -E_0 \cdot \frac{Z^2}{n^2}.$$

Hier haben wir $Z = 1$. Weiterhin $\lambda\nu = c$. Es folgt (**1 Punkt**)

$$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} = \frac{c}{\lambda E_0} \approx 0.0486.$$

Man löst dies einfach durch ausprobieren:

n_1	n_2	$\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}$
1	≥ 2	≥ 0.75
2	≥ 3	≥ 0.139
3	≥ 4	≥ 0.0486

Man findet also, dass es sich um einen Übergang von der vierten in die dritten Schale handelt (**1 Punkt**).

(ii) Damit ist klar, dass weitere Übergänge stattfinden müssen, denn der Endzustand ist ja nicht der Grundzustand mit $n_1 = 1$ (**1 Punkt**). Die Wellenlängen sind nun trivial auszurechnen und ergeben je einen halben geschenkten Punkt (**0.5 Punkte**):

$$\lambda = \frac{c}{E_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}}$$

Es folgt die Tabelle (**1.5 Punkte**):

n_1	n_2	λ [nm]
2	3	656
1	2	121
1	3	102

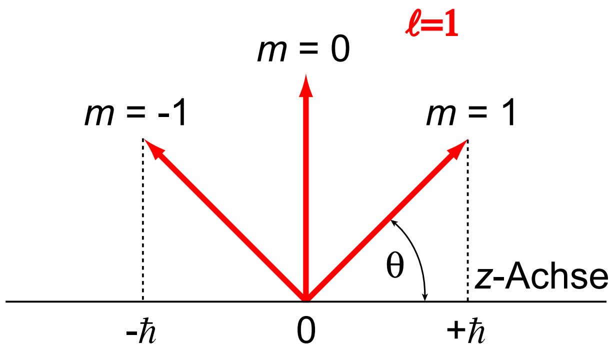
Die Übergänge von 4 auf 1 und 2 treten nicht wirklich gemeinsam mit dem Übergang 4 auf 3 auf. Die beiden Übergänge bei 100 nm sind im *ultravioletten* Bereich. Der andere ist *sichtbar*, irgendwo grün-gelb, eher gelb. Der Übergang der Aufgabenstellung (1874 nm) liegt im *infraroten* Bereich. Für die Bezeichnungen gibt es insgesamt einen weiteren Punkt (**1 Punkt**).

(iii) Nun, $\omega = 2\pi \cdot \frac{33.3}{60} \approx 3.49$. Daher $L = T\omega \approx 3.49 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2/s}$ (**1 Punkt**). Der Zusammenhang zwischen L und ℓ ist durch $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$ gegeben. Daher erhält man $\ell \approx 3.31 \cdot 10^{31}$ (**1 Punkt**). Die Zahl ist exorbitant groß, wir sind also allemal im klassischen Grenzfall, wie wir es von einer Schallplatte auch nicht anders erwarten (**1 Punkt**).

(iv) Die Quantenzahl m läuft von $-\ell$ bis $+\ell$ und bezeichnet die z-Komponente von $\mathbf{L}$ in Einheiten von $\hbar$ (**1 Punkt**). Der Winkel θ zwischen z-Achse und $\mathbf{L}$ ergibt sich also aus der Gleichung (**1 Punkt**)

$$\cos\theta = \frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}.$$

Das Minimum des Winkels entspricht einem Maximum des Kosinus. Dies wird erreicht für $m = \ell$. Man erhält für $\ell = 1$ den Minimalwinkel $\theta_{\text{min}} = 45°$, für $\ell = 4$ den Minimalwinkel $\theta_{\text{min}} = 26.6°$ und für $\ell = 50$ den Minimalwinkel $\theta_{\text{min}} = 8.05°$ (insgesamt **1 Punkt**). Wir sehen wieder, für große Quantenzahlen geht man in den klassischen Limes (**1 Punkt**). Der Fall $\theta = 0$ ist nur klassisch möglich (alle Einstellungen erlaubt). Quantenmechanisch geht das nicht, denn dann wären ja die x- und y-Komponenten gleichzeitig unendlich scharf bestimmt, was nicht mit der Unschärferelation vereinbar ist (**2 Punkte**).



Aufgabe 3: Hyperfeinstruktur [$\sim$ 11/100 Punkte]

In einem Atomstrahlexperiment ähnlich dem Stern-Gerlach-Experiment wird ein Strahl von $^{23}\mathrm{Na}(^2S_{1/2})$-Atomen durch ein stark inhomogenes Feld B_1 geschossen (Paschen-Back-Bereich). Was passiert mit der Kopplung von $\mathbf{I}$ und $\mathbf{J}$ zu $\mathbf{F}$? Man beobachtet, dass der Strahl in acht Teilstrahlen aufspaltet. Wie groß ist die Zusatzenergie ΔE_{HFS}? Wie groß ist die Kernspinquantenzahl I von $^{23}\mathrm{Na}$? Was geschieht eigentlich mit der LS-Kopplung? In wieviel Teilstrahlen würde der Strahl in einem schwachen inhomogenen Feld aufspalten (Zeeman-Bereich)? Präzediert $\mathbf{I}$ im Paschen-Back-bereich? Wenn ja, um welche Richtung? Wenn nein, warum nicht?

Lösung 3: Hyperfeinstruktur [$\sim$ 11/100 Punkte]

Der Kernspin **I** und der Elektronenspin **J** werden durch das starke Feld entkoppelt (**1 Punkt**). Die LS-Kopplung ist stärker, weil zwei starke Elektronenmomente beteiligt sind, sie bleibt erhalten (**1 Punkt**). Die Zusatzenergie beträgt $\Delta E_{\mathrm{HFS}} = g_J \mu_{\mathrm{B}} m_J B + a m_I m_J - g_I \mu_{\mathrm{K}} B m_I$ (**1 Punkt**). Wir wissen aus der Aufgabestellung, dass $J = \frac{1}{2}$ ist (**1 Punkt**). Damit hat man schlicht $(2J+1)(2I+1)$ Einstellmöglichkeiten, also $2(2I+1) = 8$, woraus $I(^{23}\mathrm{Na}) = \frac{3}{2}$ folgt (**1 Punkt**).
Im Falle schwacher Magnetfelder koppeln **I** und **J** zu **F**. F hat $J+I, ..., |J-I|$ Einstellmöglichkeiten (**1 Punkt**). Beim Natrium haben wir drei Niveaus, die eine Hyperfeinaufspaltung erfahren: $^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$ und $^2P_{3/2}$ (**1 Punkt**). Diese haben zwei, zwei und vier Einstellmöglichkeiten für F, also erhält man ebenfalls wieder 8 Teilstrahlen (**1 Punkt**). Die Anordnung der Strahlen ist jedoch anders als im Paschen-Back-Bereich (**1 Punkt**). **I** präzediert um **J**, da in der Regel das Hüllenfeld stärker ist als das angelegte äußere Feld. **J** wiederum präzediert um die Magnetfeldrichtung. Dies allerdings sehr viel schneller. Daher präzediert **I** im Endeffekt im Endeffekt um die Richtung des äußeren Feldes, aber eben mit anderer Frequenz (**2 Punkte**).

Aufgabe 4: Myonische Atome [$\sim$ 12/100 Punkte]

Ein Bleitarget ($Z = 82$) wird mit Myonen beschossen. Dabei bilden sich wasserstoffähnliche Systeme, sog. myonische Atome. Die Wellenfunktion für diese Art von Zuständen lautet für die Quantenzahlen $n = 1, l = 0, m = 0$:

$$\psi_{100} = C_{100} e^{-Zr/a_0^M}.$$

(i) Bestimmen sie den Radius der ersten Bahn des Myons als Bruchteil des Bohrschen Radius a_0!

(ii) Berechnen Sie für den Grundzustand des myonischen Atoms die Konstante C_{100} aus der Normierungsbedingung!

(iii) Berechnen Sie den Erwartungswert $< r_{100} >$ und interpretieren Sie das Ergebnis!

(iv) Begründen Sie, warum es sich bei myonischen Atomen um wasserstoffähnliche Systeme handelt.

Lösung 4: Myonische Atome [$\sim$ 12/100 Punkte]

(i) Der Radius eines wasserstoffähnlichen Atoms lautet

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2} \cdot \frac{n^2}{Z\mu},$$

wobei

$$\mu = \frac{m_{\mathrm{Myon}} \cdot m_{\mathrm{P}}}{m_{\mathrm{Myon}} + m_{\mathrm{P}}} = \frac{1835 \cdot 207\, m_{\mathrm{e}}^2}{2047\, m_{\mathrm{e}}} \approx 186\, m_{\mathrm{e}}.$$

Die genaue Formel muss man ja nicht wissen, es reicht, wenn man weiß, dass (**2 Punkte**):

$$r_{\mathrm{Myon}} = a_0 \frac{n^2}{Z\mu} \cdot m_{\mathrm{e}} = \frac{a_0}{82 \cdot 186} = \frac{a_0}{15252} \approx 6.6 \cdot 10^{-5} a_0.$$

(ii) Die Normierungsbedingung lautet $\int |\psi|^2 dV = 1$, denn irgendwo muss sich das Teilchen befinden (**2 Punkte**). Das Volumenelement in Polarkoordinaten ist $dV = r2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. Man muss hier aber eigentlich nur wissen, dass ein zusätzliches r^2 auftaucht. Denn die Winkelkoordinaten werden ja ausintegriert. Sie ergeben natürlich gerade 4π (Fläche der Einheitskugel). Es bleibt das Integral (Lösung im Anhang angegeben)

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2Zr/a_0^M}\, dr = \frac{(a_0^M)^3}{4Z^3}.$$

Wir erhalten also $C_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0^M}\right)^{3/2}$, d.h. (**2 Punkte**):

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0^M}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0^M}.$$

(iii) Definition des Erwartungswerts (**1 Punkt**):

$$< r_{100} >= \int \psi_{100}^* r \psi_{100}\, \mathrm{d}V$$

Man setzt ein (**2 Punkte**):

$$< r_{100} >= 4 \frac{Z^3}{(a_0^M)^3} \int_0^\infty r^3 e^{-\frac{Zr}{a_0^M}}\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{4Z^3}{(a_0^M)^3} [\frac{e^{-\frac{Zr}{a_0^M}}}{(\frac{Z}{a_0^M})^4} (\ldots - 6)]_0^\infty$$

$$= \frac{12}{41} \cdot a_0^M.$$

$< r_{100} >$ ist der Abstand vom Kern, bei dem sich das Myon mit größter Wahrscheinlichkeit aufhält (**1 Punkt**).

(iv) Da der Radius der ersten Elektronenbahn ca. 207-mal größer ist als der des Myons, sieht das Myon die volle Kernladung und die Wechselwirkung mit den restlichen Elektronen sind verschwindend gering (**2 Punkte**).

Aufgabe 5: Röntgenspektren [$\sim$ 12/100 Punkte]

Aus einer Wolfram-Anode treten Photonen mit einer Energie von 10 keV aus und treffen auf ein Target.

(i) Berechnen Sie die Kernladungszahl des Targetelements, bei dem ein Elektron aus der L-Schale das Atom gerade noch verlassen kann und berechnen Sie die Energie und Wellenlänge der L_α-Linie!

(ii) Berechnen Sie die Energie der K-Kante für Aluminium ($Z = 13$)!

(iii) Kupfer besitzt eine Kernladungszahl $Z = 29$ und befindet sich im Grundzustand. Berechnen Sie die Energie aller möglichen Spektrallinien 1. Ordnung (keine Folgeübergänge), wenn ein Elektron der K-Schale aus dem Cu-Atom entfernt wird!

(iv) Warum besitzt die K_α-Linie die größte Intensität?

Lösung 5: Röntenspektren [$\sim$ 12/100 Punkte]

(i) Das Elektron wird von der L-Schale ($n = 2$) ins Kontinuum ($n = \infty$) angehoben. Durch Anwendung des Moseley-Gesetzes erhält man (**1 Punkt**):

$$E \geqq (Z - 7.4)^2 \cdot E_R \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{\frac{4E}{E_R}} + 7.4 = 61.63 \quad (\textbf{1 Punkt})$$

Das Element ist Promethium ($Z = 61$).

$$E_{\mathrm{L}_\alpha} = (61 - 7.4)^2 \cdot E_R \cdot (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) = 5.4\,\mathrm{keV} \quad (\textbf{1 Punkt})$$

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \Rightarrow \lambda_{\mathrm{L}_\alpha} = \frac{h \cdot c}{E} = 23\,\mathrm{nm} \quad (\textbf{1 Punkt})$$

(ii) Der K_α-Übergang findet statt, wenn ein Elektron aus der K-Schale in eine freie Schale angehoben wird. Al hat 13 Elektronen, d.h. die ersten zwei Schalen sind voll besetzt, in der dritten sitzen drei Elektron, also muss ein Elektron in die dritte Schale angehoben werden (**1 Punkt**). Mit dem Moseley-Gesetz erhält man:

$$E = (Z - 1)^2 \cdot E_R \cdot (\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2}) = 1.7\,\mathrm{keV} \quad (\textbf{2 Punkte}).$$

(iii) Cu hat Elektronen in der vierten Schale, d.h es existieren die K_α-, die K_β- und die K_γ-Linie. Für die Energien ergibt sich $E_{K_\alpha} = 8.0$ keV, $E_{K_\beta} = 9.5$ keV, $E_{K_\gamma} = 10.0$ keV (insgesamt **2 Punkte**).

(iv) Für ein ankommendes Photon ist die Wahrscheinlichkeit ein K-Elektron herauszuschlagen am größten, weil der Kern den überschüssigen Impuls aufnimmt. Die Impulserhaltung muss bei diesem Prozess eben gegeben sein, dies geschieht am besten in Kernnähe. Ist das geschehen, so ist es nach Fermis Goldener Regel am wahrscheinlichsten, dass ein Elektron aus der L-Schale nachrückt (**3 Punkte**).

Aufgabe 6: Korrespondenzprinzip [$\sim$ 10/100 Punkte]

Die Übergänge des Wasserstoffatoms bei großen Quantenzahlen sollen klassisches Verhalten zeigen. Betrachten Sie die Bahn mit $n = 1000$. Welche Frequenz würde klassisch abgestrahlt? Setzen Sie dazu Zentripetal- und Coulombkraft gleich, um dann eine Quantenbedingung einzuführen. Was ergibt sich im Vergleich dazu quantenmechanisch für den Übergang von $n = 1000$ auf $n = 999$?

Lösung 6: Korrespondenzprinzip [$\sim$ 10/100 Punkte]

Wir müssen die Frequenz des Elektrons ausrechnen: $\nu = \frac{1}{T} = \frac{v_n}{2\pi r_n}$. Dazu brauchen wir offenbar die Geschwindigkeit auf der n-ten Bahn, sowie den Radius der n-ten Bahn. Klassisch gesehen, gibt es ein Gleichgewicht zwischen Zentripetal- und Coulombkraft (**2 Punkte**):

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2} \Leftrightarrow r_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_n^2}.$$

Die Quantisierungsbedingung unter Benutzung der de Broglie-Wellenlänge lautet (**2 Punkte**):

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{nh}{mv_n}.$$

Daraus erhalten wir die Geschwindigkeit (**1 Punkt**):

$$v_n = \frac{nh}{2\pi m r_n}.$$

Dies setzen wir in den Ausdruck für den Bahnradius ein:

$$r_n = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}n^2.$$

Daraus folgt die Frequenz $\nu = \frac{v_n}{2\pi r_n} = 6.5798 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ (**2 Punkte**).

Quantenmechanisch ergibt sich $h\nu = \Delta E = E_m - E_n = E_{\mathrm{Ry}}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \nu = 6.5798 \cdot 10^6\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ (**2 Punkte**). Beide Werte sind identisch, wieder wegen dem klassischen Limes (**1 Punkt**).

Aufgabe 7: Elektronenspinresonanz [$\sim$ 7/100 Punkte]

Bei der Elektronenspinresonanz (ESR) induziert man durch Einstrahlung von Mikrowellenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 3\,\mathrm{cm}$ Übergänge zwischen den durch den Zeeman-Effekt aufgespaltenen Energieniveaus von Atomen in einem äußeren Magnetfeld B.

(i) Wie groß muss das Feld B gewählt werden, um bei Wasserstoffatomen im Grundzustand die Elektronenspinresonanz zu beobachten?

(ii) Wie kann man das Auftreten der Resonanz klassisch verstehen?

Lösung 7: Elektronenspinresonanz [$\sim$ 7/100 Punkte]

(i) In einem äußeren Magnetfeld spaltet der Grundzustand des Wasserstoffatoms aufgrund des magnetischen Spinmoments des Elektrons gemäß

$$E(m_s) = E_R + m_s g_s \mu_B \cdot B, \qquad m_s = \pm\frac{1}{2},$$

in zwei Zeemann-Niveaus auf (**2 Punkte**). Um Übergänge zwischen diesen Niveaus zu induzieren, müssen Photonen eingestrahlt werden, deren Energie gleich der Energiedifferenz der Zeemann-Niveaus ist (**1 Punkt**) :

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} \stackrel{!}{=} E(+1/2) - E(-1/2) = g_s \mu_B \cdot B$$
$$\Rightarrow \qquad B = \frac{hc}{\lambda g_s \mu_B} = 0.357\,\mathrm{T}.$$

Dabei wurde $g_s = 2$ und $\mu_B = 9.274 \cdot 10^{-24}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{T}}$ benutzt (**1 Punkt**).

(ii) In einer semiklassischen Beschreibung präzediert der Spin des Elektrons mit der Larmorfrequenz ω_L um die Magnetfeldrichtung (**1 Punkt**). Die Larmorfrequenz ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar}\vec{L} \times \vec{B}$$

zu

$$\omega_L = \frac{g_s \mu_B B}{\hbar}$$

ergibt (**1 Punkt**). Dies ist gerade die Kreisfrequenz der eingestrahlten Mikrowellenstrahlung in der Resonanz. Man kann das Auftreten der Resonanz daher so deuten, dass die zeitliche Änderung des elektromagnetischen Felds der Mikrowellenstrahlung und die Präzession des magnetischen Moments des Elektrons in Phase sind, was die resonante Aufnahme und Abgabe von Energie ermöglicht (**1 Punkt**).

Aufgabe 8: Schwingungsspektren [$\sim$ 12/100 Punkte]

(i) Berechnen Sie die Kraftkonstanten der Halogen-Wasserstoff-Bindungen aus folgenden Frequenzen der Grundschwingungen:

Wellenzahl	HF	HCl	HBr	HI
$\overline{\nu} = \nu/c$ [cm^{-1}]	4141.3	2988.9	2649.7	2309.5

(ii) Zahlreiche funktionelle Gruppen weisen charakteristische Schwingungsfrequenzen auf, die von der Art der chemischen Anknüpfung kaum beeinflusst werden. So liegt die Streckschwingung der O-H-Gruppe bei $3600\,\mathrm{cm}^{-1}$, die der C-O-Einfachbindung bei $1150\,\mathrm{cm}^{-1}$ und die der C=S-Doppelbindung bei $1100\,\mathrm{cm}^{-1}$. Schätzen Sie daraus die Frequenzen der Streckschwingungen von O-D (D ist Deuterium, was ändert sich?) und C-S ab.

Lösung 8: Schwingungsspektren [$\sim$ 12/100 Punkte]

(i) Wichtig ist, dass man das Modell des harmonischen Oszillators anwendet (**1 Punkt**). Die Eigenfrequenz ω eines harmonischen Oszillators ist $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Hierbei ist M die reduzierte Masse $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (**1 Punkt**). Zwischen der Wellenzahl und der Frequenz besteht die Beziehung $\omega = 2\pi c\overline{\nu}$. Für die Kraftkonstante folgt daher (**1 Punkt**)

$$k = M\omega^2 = 4\pi^2 c^2 M\overline{\nu}^2.$$

Für die absolute Masse des Wassersoffs nehmen wir die in der Tabelle angegebene Masse des Neutrons. In der angegebenen Genauigkeit enstpricht sie der Protonenmasse. Das Deuterium hat doppelte Masse. Für folgende Lösungstabelle können noch zwei weitere leichte Punkte eingeheimst werden ($4\pi^2 c^2 \approx 3.5481 \cdot 10^{18}$) (**2 Punkte**):

	$^1H^{19}F$	$^1H^{35}Cl$	$^1H^{80}Br$	$^1H^{127}I$
$\overline{\nu}$ [cm^{-1}]	4141.3	2988.9	2649.7	2309.5
M [10^{-27} kg]	1.601	1.639	1.665	1.673
k [N/m]	**974.2**	**519.5**	**414.8**	**316.6**

(ii) Hier wenden wir wieder das Modell des harmonischen Oszillators an. Für die Schwingungsfrequenz gilt dann wieder $\omega = 2\pi c\overline{\nu} = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Wir gehen bei Isotopenaustausch bzw. Austausch ähnlicher Atome davon aus, dass die Bindungskräfte gleich bleiben, da wir ja die gleiche Elektronenkonfiguration haben. Dies bedeutet, dass die Kraftkonstante näherungsweise identisch bleibt, nur die reduzierte Masse ändert sich (**2 Punkte**). Es folgt also die Beziehung $\overline{\nu} \propto \frac{1}{\sqrt{M}}$ (**1 Punkt**). Die Frequenz der O-D-Streckwschwingung lässt sich also einfach aus der Frequenz der O-H-Streckschwingung ableiten (**2 Punkte**):

$$\overline{\nu}_{\text{O-D}} \approx \overline{\nu}_{\text{O-H}} \sqrt{\frac{M_{\text{O-H}}}{M_{\text{O-D}}}} \approx 2620\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

Dabei waren die Zahlenwerte: $M_{\text{O-H}}/M_{\text{O-D}} \approx 0.9482/1.7902 \approx 0.7278$. Die Kraftkonstante der C-S-Gruppe ist mit der C-O-Gruppe zu vergleichen, nicht mit der Doppelbindung C=S. Letztere hat ja eine ganz andere Bindung (**1 Punkt**). Daher folgt (**2 Punkte**):

$$\overline{\nu}_{\text{C-S}} \approx \overline{\nu}_{\text{C-O}} \sqrt{\frac{M_{\text{C-O}}}{M_{\text{C-S}}}} \approx 1005\,\mathrm{cm}^{-1}.$$

Dabei waren die Zahlenwerte: $M_{\text{C-O}}/M_{\text{C-S}} \approx 6.8605/8.7380 \approx 0.7645$.

Aufgabe 9: Feinstrukturkonstante [$\sim$ 6/100 Punkte]

Was genau bedeutet die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α? Wie groß ist sie? Welche anderen Naturkonstanten gehen in sie ein?

Lösung 9: Feinstrukturkonstante [$\sim$ 6/100 Punkte]

$\alpha \approx \frac{1}{137} \approx 0.00729$ (**1 Punkt**). Es gehen das Plancksche Wirkungsquantum h, die Lichtgeschwindigkeit c und die Größe der Elementarladung e ein (**1 Punkt**). Die Formel lautet: $\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 hc}$ (**1 Punkt**). Arnold Sommerfeld hat festgestellt, dass die Feinstruktur auch dem Verhältnis der Geschwindigkeit eines Elektrons auf der ersten Bohrschen Bahn zur Lichtgeschwindigkeit entspricht (**1 Punkt**). Damit kann man allgemeiner sagen, dass sie ein Maß für die Stärke der elektromagnetischen Kraft, welche die negativ geladenen Elektronen an den Atomkern bindet, darstellt (**2 Punkte**). Wer noch weiß, dass gerade diskutiert wird, ob α wirklich konstant ist, kann sich nach Lust und Laune noch ein Gnadenpünktchen verdienen. Man vermutet dies nach Messungen der Absorptionsspektren von milliarden Lichtjahren entfernten Quasaren.

ANHANG

$h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js - $m_{\text{Neutron}} \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg - $m_{\text{Elektron}} \approx 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg - 1 eV$= 1.6 \cdot 10^{-19}$ J

$\mu_{\text{P}} = \pm 2.79 \mu_{\text{K}}$ - $\mu_{\text{B}} = 9.274 \cdot 10^{-24}$ A/m^2 - $\mu_{\text{K}} = 5.05 \cdot 10^{-27}$ J/T - $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_{\text{e}}} \approx 5.3 \cdot 10^{-11}$ m

$\lambda_{\text{Compton}} \approx 2.43$ pm - $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ AsV^{-1}m^{-1} - $m_\mu \approx 207 \cdot m_{\text{e}}$ - $c = 299792458$ m/s

Relativistische Geschwindigkeit: $m(v) \approx m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)$ Abschirmkonstante $\sigma_{\text{L}} \approx 7.4$

Natürliche Linienbreite eines Zustands: $\delta\nu_n = \frac{1}{2\pi \cdot \tau_{\text{i}}}$

Dopplerbreite: $\delta\nu_D = 7.16 \cdot 10^{-7} \nu_0 \cdot \sqrt{T/M} \cdot \text{s}^{-1}$, mit T in K und M in g/mol

Relative Atommassen: Wasserstoff: 1.0079; Berillium: 9.0122; Bor: 10.811; Kohlenstoff: 12.011; Silizium: 28.086; Sauerstoff: 15.999; Fluor: 18.998; Schwefel: 32.066; Selen: 78.96; Chlor: 35.453; Brom: 79.904; Iod: 126.90; Iridium: 192.22

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-(ar^2+2br+c)} dr = \frac{a+2b^2}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2ar} dr = \frac{1}{4a^3}$$