....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

10. Februar 2015, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=0}^{n-1} k^4 \leq \frac{1}{5}n^5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Geben Sie den Wert von $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ als Bruch an.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \underline{\hspace{8cm}}$$

(b) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}$.

$\mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}\right) =$

$\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}\right) =$

(c) Geben Sie Betrag und Argument von $\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}$ an.

$\left|\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}\right| =$

$\arg\left(\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}\right) =$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)$.

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☐ $=\frac{1}{3}$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ eigentlich oder uneigentlich konvergent?

☐ $-\infty$ ☐ -4 ☐ -3 ☐ 0 ☐ $\dfrac{3}{7}$ ☐ $\dfrac{4}{7}$ ☐ ∞ ☐ keiner der angegebenen Werte

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{2}}}{n^2}$ ist

☐ konvergent ☐ absolut konvergent ☐ bestimmt divergent ☐ undefiniert

4. **Potenzreihen** **[7 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^{2n}$.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$?

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ bei $x = 1$ stetig fortsetzbar?

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

6. **Integration** **[5 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das folgende Integral für alle $x \in \mathbb{R}$. (HINWEIS: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t =$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ absolut konvergent?

$$\alpha \in$$

7. **Eine gewöhnliche Differentialgleichung** **[9 Punkte]**
Bestimmen Sie eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1+x}$ mit $x(0) = 0$ für $t \geq 0$ und skizzieren Sie diese.

8. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

(a) Wie lautet das Taylorpolynom sechster Ordnung von f um den Entwicklungspunkt 0?

$T_6 f(x; 0) =$

(b) Zeigen Sie, dass $T_4 f(x; 0) - f(x) = o(x^5)$.

9. **Fourierkoeffizienten** **[9 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π–periodisch mit $f(x) = 1$ für $x \in (-\pi, 0]$ und $f(x) = -1$ für $x \in (0, \pi]$.

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$.

(b) Für welche $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ gegen $f(x)$?