Probeklausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2010/2011

7. Januar 2011

Musterlösung

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0[\cos(kz-\omega t)\vec{e_x} + \sin(kz-\omega t)\vec{e_y}],$$

und breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für diese Welle

$a)$ die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$

Lösung:

Maxwell-Gleichungen im Vakuum (SI-Einheiten):

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{D} &= 0 && (1)\\ \text{div } \vec{B} &= 0 && (2)\\ \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (3)\\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && (4) \end{aligned}$$

[1]

mit $\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r},t)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} && (5)\\ &= E_0 \begin{pmatrix} -k\cos(kz-\omega t) \\ -k\sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = -k\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (6) \end{aligned}$$

[1]

Integration nach t liefert dann für die magnetische Induktion

$$\vec{B} = E_0 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}). \tag{7}$$

[**1**]

b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$

Lösung:

Der Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ gibt die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes an:

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0}\vec{B} && (8)\\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} \cos(kz-\omega t) \\ \sin(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz-\omega t) \\ \cos(kz-\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} && (9)\\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz-\omega t) + \sin^2(kz-\omega t) \end{pmatrix} && (10)\\
&= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \vec{e}_z = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z = \text{const.} && (11)
\end{aligned}$$

[**3**]

Im Gegensatz zu einer linear polarisierten Welle oszilliert die Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle nicht.

c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung ($\vec{k} = k\vec{e_z}$) geneigte, total absorbierende Ebene

Lösung:

Strahlungsdruck: Wir betrachten eine Fläche, deren Normale mit der Ausbreitungsrichtung der Welle einen Winkel θ einschließt (siehe Abb.1).

Die Feldimpulsdichte der elektromagnetischen Welle ist

$$\begin{aligned}
\vec{\pi}(\vec{r}, t) &= \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} && (12)\\
&= \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \frac{1}{c^2}\vec{S}. && (13)
\end{aligned}$$

[**1**]

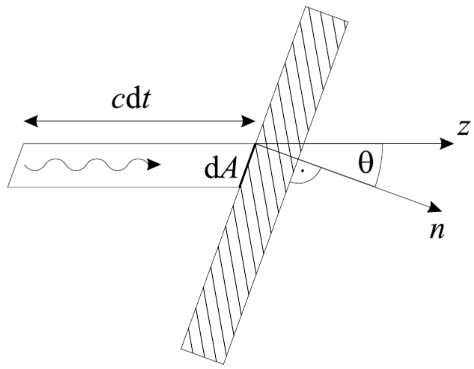


Figure 1: Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle auf eine schiefe Ebene.

Alle Wellenfronten in dem schiefen Zylinder mit Volumen $dV = cdt\cos\theta dA$ erreichen in der Zeit dt das Flächenelement dA.

[**1**]

Der Feldimpuls beträgt daher

$$
\begin{aligned}
d\vec{p} &= \vec{\pi} dV = \frac{1}{c^2}\vec{S} dA_\perp cdt && (14)\\
&= \epsilon_0 E_0^2 dA\cos\theta\, dt\, \vec{e}_z. && (15)
\end{aligned}
$$

[**1**]

Die Ebene sei vollständig absorbierend, d.h. der Strahlungsdruck ist

$$
p_s = \frac{d\vec{F}\cdot\vec{n}}{dA}, \tag{16}
$$

[**1**]

wobei $d\vec{F}\cdot\vec{n}$ die Normalkomponente der auf die Ebene ausgeübten Kraft

$$
d\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 dA\cos\theta\,\vec{e}_z \tag{17}
$$

[**1**]

ist. Damit folgt für den Strahlungsdruck

$$
p_s = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2\theta \tag{18}
$$

[**1**]

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Die Gruppengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen in einem Medium mit Brechungsindex n ist durch

$$v_g \;=\; \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}}$$

gegeben. c ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum, ω ist die Winkelgeschwindigkeit der Wellen; der Brechungsindex ist gegeben durch $n \;=\; c\frac{k}{\omega}$.

Ein Pulsar ist ein schnell rotierender Neutronenstern, der sehr klare Pulse über einen großen Teil des Radiospektrums aussendet. Diese durchqueren geradlinig das interstellare Medium, bis sie die Erde erreichen. Beobachtungen zeigen, dass die Ankunftszeit eines Pulses bei 400 MHz um 700 ms verglichen mit einem Puls bei 1400 MHz verzögert ist. Diese Information kann man benutzen um die Entfernung des Pulsar zur Erde zu ermitteln.

Der Brechungsindex des interstellaren Mediums ist gegeben durch

$$n^2 \;=\; 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}.$$

e und m sind die Ladung und Masse eines Elektrons, N ist die Elektronendichte: Von dieser ist bekannt, dass sie zwischen dem Pulsar und der Erde einen ungefähr konstanten Wert von $3 \times 10^4 m^{-3}$ hat. Berechnen Sie die Entfernung der Erde zum Pulsar.

Lösung:

Der Puls bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit. Für eine Strecke D benötigt der Puls daher die Zeit

$$t = \frac{D}{v_g} = \frac{D}{c}(n + \omega\frac{dn}{d\omega}) \tag{19}$$

[**1**]

n ist gegeben durch:

$$n = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}} \tag{20}$$

Nun kann diese Aufgabe auf zwei Arten gelöst werden: Entweder man benutzt den kompletten Ausdruck für $n(\omega)$; in diesem Fall wird die Rechnung schnell unübersichtlich. Alternativ kann $n(\omega)$ durch eine binomische Erweiterung angenähert werden. Dies ist gerechtfertigt durch die Tatsache, dass $\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}$ für beide Werte von ω sehr klein ist.

Für $\omega_1 = 2\pi \times 4 \times 10^8 \ s^{-1}$:

$$\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_1^2} = 1,51 \times 10^{-11} \tag{21}$$

Für $\omega_2 = 2\pi \times 1,4 \times 10^9 \ s^{-1}$:

$$\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega_2^2} = 1,23 \times 10^{-12} \tag{22}$$

Daher ergibt sich für die binomische Erweiterung:

$$n \ \approx \ 1 - \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} \tag{23}$$

[**1**]

$$\frac{dn}{d\omega} \ \approx \ \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^3} \tag{24}$$

[**1**]

Dann ist

$$t = \frac{D}{v_g} \approx \frac{D}{v_g}(1 - \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2} + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}) = \tag{25}$$

$$\frac{D}{c}(1 + \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m\omega^2}) \tag{26}$$

[**1**]

Für die Differenz zwischen den Ankunftszeiten ergibt sich dann:

$$\Delta t = \frac{Ne^2 D}{2\epsilon_0 mc}(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}) \tag{27}$$

[**1**]

Für die Entfernung ergibt sich:

$$D = \frac{2\epsilon_0 mc\Delta t}{Ne^2}(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2})^{-1} = \tag{28}$$

$$3,02 \times 10^{19} m \ (\approx \ 3200 ly) \tag{29}$$

[**1**]

Diese Antwort erscheint vernünftig, da der Durchmesser der Milchstraße 75000 Lichtjahre beträgt; der Pulsar befindet sich also in unserer Galaxie.

[**1**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei eine zylindrische Glasfaser in Luft mit stufenförmigen Brechzahlprofil:

$$n(r) = \begin{cases} n_K & \text{für } r \leq a \\ n_M & \text{für } r > a \end{cases}$$

Dabei ist $n_K = 1.457$ die Brechzahl des Kerns mit Radius a, $n_M = 1.448$ die Brechzahl des Mantels und r die Radialkoordinate.

a) Ein Lichtstrahl treffe unter dem Winkel α bei $r = 0$ auf die Stirnfläche der Glasfaser. Bis zu welchem Winkel α_{max} wird er an der Grenzfläche Kern-Mantel der Glasfaser totalreflektiert?

Lösung:

Im Lichtleiter ist der Grenzwinkel für Totalreflektion $\alpha = \arcsin n_M/n_K = 83.63°$.

[**1**]

Zum Lot auf der Stirnfläche entspricht dies $90° - \alpha = 6.37°$.

[**1**]

Dieser Winkel wird für alle Lichtrahlen, die steiler als $\arcsin(\sin 6.37 \cdot n_K) = 9.30°$ einfallen, unterschritten.

[**1**]

b) Die Dauer, die das Licht zum Durchlaufen des Kerns einer Faser der Länge L benötigt, hängt nur vom Winkel ab, unter dem sich das Licht zur Faserachse ausbreitet. Wie groß ist der maximale relative Laufzeitunterschied zwischen Strahlen mit unterschiedlichen Eintrittswinkeln α? Was müsste man ändern, damit diese die Übertragungslänge begrenzenden Laufzeitunterschiede minimiert werden?

Lösung:

Der maximale relative Weglängenunterschied in einem Faserstück der Länge L für die beiden Extremalstrahlen mit Winkeln von 6.37° und 0° zur Faserachse ist

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\cos 6.37°} - 1 = 0.6\%. \tag{30}$$

[**1**]

Der relative Laufzeitunterschied beträgt also folglich auch 0.6%.

[**1**]

Man kann die Radialabhängigkeit der Brechzeit der Faser so profilieren, dass für einen größeren Winkelbereich keine merklichen Laufzeitunterschiede zustande kommen (Gradientenphaser).

[**1**]

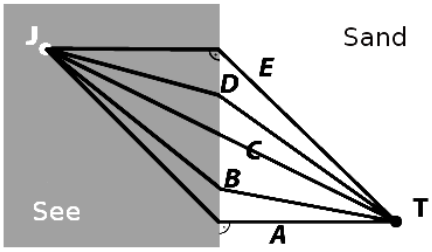
Eine weitere Möglichkeit ist eine geeignete Linsenkonstruktion vor der Glasfaser um das Licht zu parallelisieren.

[**1**]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Jane wird in einem ruhigen See am Punkt J von einem Krokodil angegriffen. Tarzan, der sich an Land mit gezücktem Buschmesser am Punkt T befindet, möchte ihr zu Hilfe eilen. Tarzan rennt mit 12 m/s und schwimmt mit 3 m/s. Er wählt den in der Skizze eingezeichneten Weg A. Leider kommt er zu spät.

Auf welchem der eingezeichneten Wege hätte Tarzan die größte Chance gehabt, rechtzeitig bei Jane zu sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz.



Lösung:

Die Wege A und B kommen von vornherein nicht in Frage.

[**1**]

Da Wasser die langsamere Fortbewegungsgeschwindigkeit für Tarzan besitzt, ist es als das dichtere Medium anzusehen. Somit ist der Weg durch die Brechung vom Lot weg sicher nicht der kürzeste Weg (und ganz nebenbei physikalisch unmöglich).

[**1**]

Fall C wäre zu wählen, wenn die Geschwindkeit in Wasser und auf Land gleich groß wären. Da dies aber nicht der Fall ist, ist auch diese Strecke zu verwerfen.

[**1**]

Es bleiben also noch Möglichkeit D und E. Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gilt, daß

$$\frac{\sin \theta_{Wasser}}{\sin \theta_{Sand}} = \frac{n_{Sand}}{n_{Wasser}} = \frac{v_{Wasser}}{v_{Sand}} \tag{31}$$

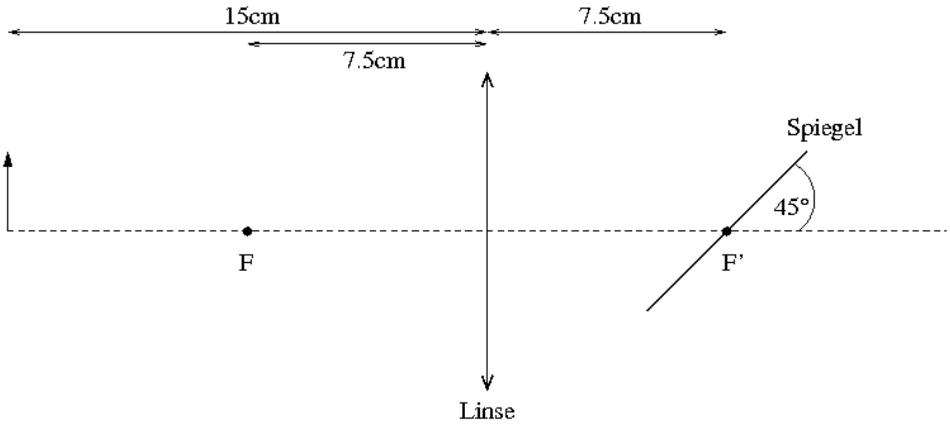
[**1**]

ist. n_i gibt den Brechungsindex des jeweiligen Mediums an und v_i die Fortbewegungsgeschwindigkeit. Für Weg E müßte demnach $\sin \theta_{Sand} > 1$ sein, was nicht möglich ist. Es bleibt also nur Weg D übrig.

[**1**]

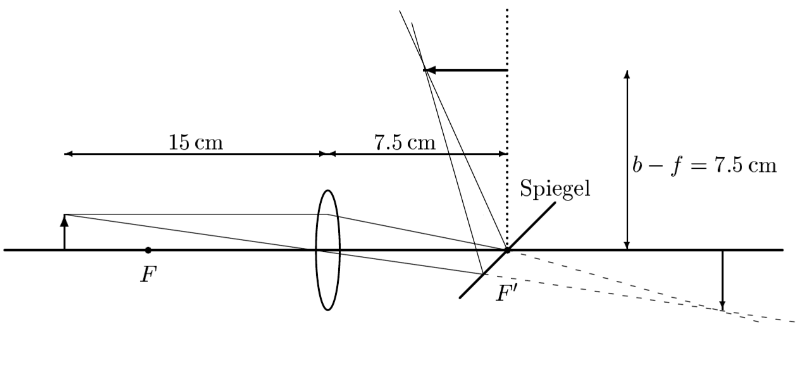
Aufgabe 5 (6 Punkte)

Ein Gegenstand befindet sich 15 cm vor einer dünnen Sammellinse mit einer Brennweite von 7.5 cm. Auf der rechten Seite der Linse befindet sich im Brennpunkt ein Spiegel, der um 45° gedreht ist, so dass die reflektierten Strahlen nicht mehr die Linse treffen.



Wo entsteht das Bild? Wie weit ist es von der optischen Achse entfernt? Ist das Bild reell oder virtuell? Skizzieren Sie den Strahlengang!

Lösung:



[**3**]

Die Abbildungsgleichung liefert uns sofort die Bildweite der Linse:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{fg}{g-f} = 15cm \tag{32}$$

[**1**]

Zur Bildkonstruktion muss man sich den Strahlengang ohne Spiegel denken und ihn dann an der Ebne des Spiegels reflektieren. Es entsteht ein reelles Bild.

[**1**]

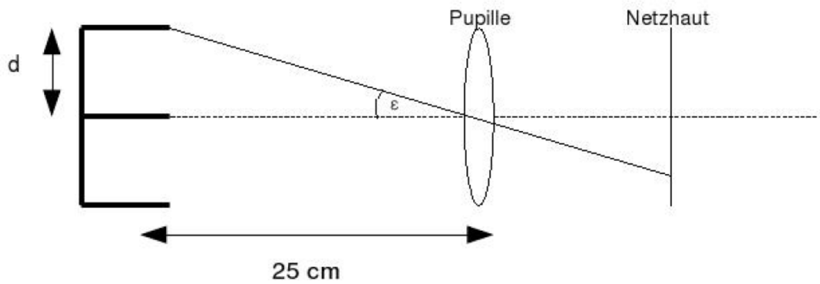
Dieses befindet sich 7.5 cm oberhalb der optischen Achse. Der Strahlengang ist in der Skizze angedeutet.

[**1**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Findige Studenten sind dabei, möglichst viel Information auf ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt zu bekommen. Wie klein dürfen sie die Schrift maximal machen, wenn man sie ohne technische Hilfsmittel lesen können soll, d.h. wie klein kann man den Buchstaben E machen, wenn das Kriterium zur Erkennbarkeit ist, dass die drei horizontalen Linien noch getrennt werden können? Nehmen Sie einen Pupillendurchmesser von 3 mm und einen Leseabstand von 25 cm an und fertigen Sie eine Skizze an.
Hinweis: Zwei Lichtpunkte gelten als aufgelöst, wenn das Maximum des einen auf das erste Minimum des anderen gebeugt wird. (Rayleigh-Kriterium)

Lösung:



[**2**]

Mit dem Durchmesser D der Pupille gilt gemäß dem Rayleigh Kriterium der Auflösung für den Winkel ϵ (unter dem man zwei benachbarte Striche noch getrennt auflösen kann):

$$\epsilon = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{33}$$

[**1**]

Setzt man für $\tan(\epsilon) \approx \epsilon = \frac{d}{l}$ an, so erhält man:

[**1**]

$$\frac{d}{l} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{34}$$

$$\rightarrow d = \frac{1.22\lambda l}{D} \approx 7.12\mu\mathrm{m} \tag{35}$$

Hierbei wurde für die Wellenlänge ein Wert von 700 nm eingesetzt, was in etwa dem gerade noch sichtbaren Bereich des Spektrums entspricht. Der Buchstabe E muss also mindestens etwa

$$2d = 140\mu\mathrm{m} \tag{36}$$

groß gedruckt werden.

[**1**]

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Strahl trifft senkrecht auf ein Streifengitter mit Gitterkonstante g. Im Abstand D in Strahlrichtung dahinter befindet sich ein Beobachtungsschirm bzw. eine Detektoranordnung.

a) Durch Kernspaltung entstehen im Reaktor Neutronen mit einer mittleren kinetischen Energie von einigen MeV. Beim Durchgang durch einen Moderator tauschen die Neutronen durch Stöße mit dem Kern des Moderators solange Energie aus, bis ihre mittlere kinetische Energie $< E_k >= \frac{3}{2}k_BT$ beträgt (T: Temperatur des Moderators). Neutronen aus einer kalten Quelle ($T = 20\,\mathrm{K}$) werden nun an diesem Streifengitter mit der Konstante $g = 10^8/\mathrm{m}$ gebeugt. Die Detektoranordnung befindet sich in einem Abstand $D = 1\,\mathrm{m}$ hinter dem Gitter.

In welchem Abstand (senkrecht zum Strahl) vom 0. Maximum ist das 1. Maximum zu finden? (Verwenden Sie gegebenenfalls bei der Herleitung die Kleinwinkelnäherung.)

Lösung:

Als erstes muß man die Energie bestimmen. Dazu verwendet man den in der Angabe gegebenen Zusammenhang $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}k_BT$. Mit der Energie-Impulsbeziehung $E_k = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_N}$ und dem Zusammenhang zwischen Impuls und Wellenlänge $p = \frac{h}{\lambda}$ erhält man:

$$E_k = \frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}m_Nv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m_N} \tag{37}$$

$$\rightarrow p = \sqrt{3m_Nk_BT} = \frac{h}{\lambda} \tag{38}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{3m_Nk_BT}} \tag{39}$$

[**2**]

Aus der Geometrie für Beugung am Gitter und mittels der Kleinwinkelnäherung muß für die Wellenlänge λ außerdem folgende Bedingung gelten:

$$m \cdot \lambda = \frac{R}{D} \cdot k \tag{40}$$

[**1**]

Hierbei bezeichnet R den gesuchten Abstand, k den Strichabstand und m die Ordnung des gesuchten Maximums (in dem hier vorliegenden Fall also $m = 1$). Auflösen und Einsetzen der Zahlenwerte ergibt schließlich den gesuchten Abstand:

$$R = \frac{m \cdot \lambda \cdot D}{k} = m \cdot \frac{h}{\sqrt{3 m_N k_B T}} \cdot D \cdot g = 0.056\,\mathrm{m} \tag{41}$$

b) Welche Gitterkonstante g muss das Beugungsgitter besitzen, um das gleiche Beugungsmuster wie in Teil (a) für sichtbares Licht ($E = 3\,\mathrm{eV}$) herzustellen?

Lösung:

Was sich ändert ist die Wellenlänge und die Gitterkonstante, das Verhältnis der beiden zueinander muß insgesamt gleich bleiben, d.h $\lambda_{ph} \cdot g_{ph} = \lambda_n \cdot g_n$ muß gelten.

[**1**]

Für Photonen gilt die Energiebeziehung $E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$.

[**1**]

Somit ist die neue Gitterkonstante g_{ph} gegeben durch:

$$g_{ph} = g_n \frac{\lambda_n}{\lambda_{ph}} = g_n \frac{\frac{h}{\sqrt{3 m_N k_B T}}}{\frac{hc}{E}} = 1.36 \cdot 10^5 /\,\mathrm{m} \tag{42}$$

[**1**]

c) Nun sollen Elektronen (Ruhemasse $m_e = 511\,\mathrm{keV}/c^2$) mit einer kinetischen Energie $E_{kin} = 500\,\mathrm{keV}$ gebeugt werden. Um die Orte der Maxima mit einem Detektor bestimmen zu können, müssen diese mehr als $1\,\mathrm{mm}$ voneinander getrennt liegen.

Wie weit müsste der Detektor bei den Gitterkonstanten aus (a) und (b) mindestens hinter dem Gitter angebrachtwerden, um die Lage des 0. und 1. Maximums bestimmen zu können?

Lösung:

In dem nun betrachteten Fall ist R gegeben und D für die beiden unterschiedlichen Fälle gesucht. Da sich die Elektronen sehr schnell bewegen, muß elativistisch gerechnet werden. Es gilt:

$$E_{ges} = E_0 + E_{kin} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} \tag{43}$$

[**1**]

Nun kann der Impuls p berechnet werden und anschließend mit $p = \frac{h}{\lambda}$ auch die Wellenlänge λ der Elektronen.

$$p = \sqrt{\frac{E_{kin}^2 + 2E_0 E_{kin}}{c^2}} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{\sqrt{E_{kin}^2 + 2E_0 E_{kin}}} \tag{44}$$

[**1**]

Mit Aufgabenteil (a) folgt somit für die Abstände Schirm-Gitter:

$$D = \frac{R}{m\lambda g} = \frac{R}{mg} \cdot \frac{\sqrt{E_{kin}^2 + 2E_0 E_{kin}}}{hc} = 7.02\,\mathrm{m} \text{ bzw. } 5166.3\,\mathrm{m} \tag{45}$$

[**1**]