Technische Universität München **Sommersemester 2008**

Theoretische Physik 2: ELEKTRODYNAMIK, DVP-Klausur

Freitag, 19.09.2008 13:00 – 14:30

1. Geben Sie zu jeder Frage eine Antwort an. Richtige Antworten werden mit plus einem, falsche mit minus einem Punkt bewertet: **5 P**

   (i) Eine negative Punktladung wird in die Nähe einer ungeladenen, isolierten, leitenden Kugel gebracht. Erfährt die Kugel dadurch (a) eine Kraft, die sie zur Punktladung zieht, (b) eine Kraft, die sie von der Punktladung abstößt, oder (c) keine Kraft?

   (ii) Aus wievielen Punktladungen muss eine Ladungsanordnung mit endlichem Quadrupolmoment mindestens bestehen, wenn ihr Monopol- und Dipolmoment verschwinden sollen?
   (a) 2, (b) 3, (c) 4, (d) 6.

   (iii) An der Grenzfläche zweier Medien folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{B}$ die Stetigkeit der
   (a) Normalkomponente von $\vec{B}$, (b) Tangentialkomponente von $\vec{H}$,
   (c) Normalkomponente von $\vec{D}$, (d) Tangentialkomponente von $\vec{E}$.

   (iv) Eine ebene elektromagnetische Welle wird durch das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{a}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ und das skalare Potenzial $\Phi(\vec{r},t) = \phi\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$ beschrieben, also $A^\mu(\vec{r},t) = a^\mu\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $\mu = 0, \ldots, 3$. Welche Bedingung reicht aus, damit $\vec{A}$ und Φ der Lorentz-Eichung genügen?
   (a) $\vec{k}\cdot\vec{a} = 0$, (b) $\sum_\mu k_\mu a^\mu = 0$, (c) $\phi = 0$, (d) $|\vec{k}| = \omega/c_0$.

   (v) Welche der folgenden Größen einer Ladungs- und Stromverteilung ist bei einer Lorentz-Transformation invariant?
   (a) Ladungsdichte $\rho(\vec{r},t)$, (b) Stromdichte $\vec{j}(\vec{r},t)$, (c) Gesamtladung $Q = \int \rho(\vec{r},t)\,\mathrm{d}^3r$, (d) Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{r}\,\rho(\vec{r},t)\mathrm{d}^3r$.

2. Betrachten Sie das radialsymmetrische elektrostatische Potenzial

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{e_0}{r} + \frac{e_0}{a_0}\right)\mathrm{e}^{-2r/a_0}$$

   mit den positiven Konstanten e_0 und a_0, das von einer (radialsymmetrischen) Ladungsdichte $\rho(r)$ erzeugt wird.

   (a) Wie groß ist die Gesamtladung $Q = \int \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3r$? Gibt es nichtverschwindende höhere Momente (Dipol-, Quadrupol-, etc.)? **3 P**

(b) Berechnen Sie die Ladungsdichte $\rho_>(r)$ für $r > 0$. Welchen Beitrag zur Gesamtladung liefert dieser Teil der Ladungsdichte? **4 P**

(c) Wie können Sie die Ladungsdichte bei $\vec{r} = 0$ so ergänzen, dass die Gesamtladung mit dem Ergebnis von (a) übereinstimmt? **2 P**

3. Eine ebene elektromagnetische Welle, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, propagiert (im Vakuum) im Bezugsystem K in z-Richtung und ist rechts-zirkular polarisiert,

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} , \quad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathrm{i}E_0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad E_0 \text{ reell} .$$

(a) Geben Sie den Vorfaktor $\vec{B}_0$ für das zugehörige Magnetfeld, $\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$, an. **2 P**

Das Bezugsystem K', dessen Ursprung bei $t = 0$ mit dem von K übereinstimmt, bewegt sich (ohne Rotation) mit Geschwindigkeit v in x-Richtung in K. In K' sind die Felder der obigen ebenen Welle,

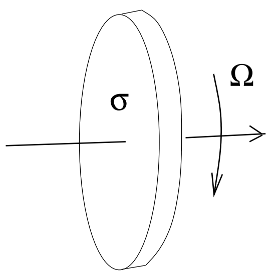
$$\vec{E}'(\vec{r}', t') = \vec{E}_0' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega' t')} , \quad \vec{B}'(\vec{r}', t') = \vec{B}_0' \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}'\cdot\vec{r}' - \omega' t')} .$$

(b) Berechnen Sie den Vorfaktor $\vec{E}_0'$ sowie die Komponenten des Wellenvektors $\vec{k}'$ und die Kreisfrequenz ω' im System K'. **6 P**

(c) Zeigen Sie, dass der Realteil von $\vec{E}_0'$ im Ortsteil von K' eine Richtung $\hat{e}'$ definiert, die orthogonal zu $\vec{k}'$ ist. **3 P**

(d) Zeigen Sie, dass die Welle auch im System K' rechts-zirkular polarisiert ist. (Hinweis: Dazu genügt es zu zeigen, dass die Komponente von $\vec{E}_0'$ in der Richtung von $\vec{k}' \times \hat{e}'$ gerade i mal die Komponente in Richtung $\hat{e}'$ ist.) **3 P**

4. Eine dünne Kreisscheibe mit Radius R besitzt eine homogene Flächenladungsdichte σ. Die Scheibe dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre Symmetrieachse (siehe Skizze).



Berechnen Sie das Magnetfeld entlang der Symmetrieachse. **12 P**

Hilfreiche Formeln für die DVP-Klausur, Elektrodynamik, Freitag 19.09.2008

Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{\text{frei}}\,,\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\,,\quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_{\text{frei}}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Felder: $\vec{D}=\epsilon\epsilon_0\vec{E}$, $\vec{B}=\mu\mu_0\vec{H}$. Lichtgeschwindigkeit: $c_0^2=1/(\epsilon_0\mu_0)$.

Darstellung durch Potenziale: $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$, $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

Felder aus statischen Ladungs- und Stromverteilungen:

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'\,,\quad \vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

Lorentz-Transformation für den Spezialfall, dass K' sich mit Geschwindigkeit v in x-Richtung relativ zu K bewegt:

$$\begin{pmatrix}c_0t'\\x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma(c_0t-\beta x)\\\gamma(x-\beta c_0t)\\y\\z\end{pmatrix}\,,\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\,,\quad \beta=\frac{v}{c_0}$$

Transformation der Felder in diesem Spezialfall:

$$\begin{aligned}E'_x&=E_x & B'_x&=B_x\\ E'_y&=\gamma\left(E_y-vB_z\right) & B'_y&=\gamma\left(B_y+E_zv/c_0^2\right)\\ E'_z&=\gamma\left(E_z+vB_y\right) & B'_z&=\gamma\left(B_z-E_yv/c_0^2\right)\end{aligned}$$

Dispersionsrelation: $\displaystyle\sum_{\mu=0}^{3}k_\mu k^\mu=0$ bzw. $\left(\dfrac{\omega}{c_0}\right)^2-\vec{k}\cdot\vec{k}=0$

Vektorrechnung: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,,\quad \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta f(\vec{r})=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$$

Integrale: $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\,,\quad \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha^2}\,,\quad \int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\alpha^3}\,,$

$$\int_0^R\frac{s^2}{(s^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s=\frac{|z|}{z}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{R}{z}\right)-\frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}\,,\quad \int_0^R\frac{s^3}{(s^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}s=\frac{2z^2+R^2}{\sqrt{z^2+R^2}}-2|z|$$