Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

WS 05/06

HÖHERE MATHEMATIK 2 FÜR PHYSIK

(Analysis 1)

Probeklausur
Freitag, 13.01.2006, 08 : 15 *Uhr.*
Arbeitszeit : 90 *Minuten*

1. Aufgabe. Man berechne $\mathfrak{Re} z$ und $\mathfrak{Im} z$ für

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \left(1+i\right) \right)^{100} .$$

[6 Pkte.]

2. Aufgabe. Man finde die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$R\left(z\right) = \frac{3z^2 + 2z}{\left(z-1\right)\left(z^2+2z+2\right)}$$

[10 Pkte.]

3. Aufgabe. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ seien die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

gegeben.

1. Warum sind die beiden Reihen absolut konvergent?
2. Man berechne die Glieder c_k des Cauchy-Produktes
$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \qquad (*)$$
der beiden gegebenen Reihen.
3. Warum konvergiert die Reihe $(*)$ absolut?
4. Man bestimme den Grenzwert der Reihe $(*)$. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k+1\right) z^k = \frac{1}{\left(1-z\right)^2} .$$

[13 Pkte.]

Bitte wenden

4. Aufgabe. Sei

$$f : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad .$$

1. Man zeige, dass die Funktion f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L = 4/9$ ist.
2. Man zeige
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right] \quad .$$
3. Man ermittle alle $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ mit $f(x) = x$, also alle Fixpunkte von f.
4. Warum konvergiert nach Aufgabe 113 (Blatt 9) die rekursiv definierte Folge $x_0 := 1$, $x_{n+1} := f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$. Wie lautet der Grenzwert $\widetilde{x}$ dieser Folge?
5. Warum gilt
$$|x_n - \widetilde{x}| \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \qquad , n = 0, 1, 2, 3, ...$$
für die in Nr.4 definierte Folge (x_n) und ihren Grenzwert $\widetilde{x}$?

[15 Pkte.]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.