Klausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. R. Kienberger
Sommersemester 2020
14.08.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet sich eine Punktladung $Q_1 = +3\ \mu$C. Auf der x-Achse bei $x = 0,4$ m befindet sich eine zweite Punktladung $Q_2 = -7\ \mu$C.

(a) Bestimmten Sie das elektrische Feld $\vec{E}(x) = E(x)\hat{x}$ für alle Punkte entlang der x-Achse.

(b) Gibt es Punkte (abgesehen von $|x| = \infty$), an denen $E(x) = 0$ gilt? Falls ja, welche?

(c) Zeichnen Sie $E(x)$ als Funktion von x für $x < 0$.

Lösung

(a) Zunächst wird das elektrische Feld bestimmt, das allein durch Q_1 hervorgerufen wird. Für das elektrische Feld einer Punktladung gilt

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}. \tag{1}$$

An der Stelle x auf der x-Achse gilt:

$$\vec{r} = x\hat{x}, r = \sqrt{x^2} = |x|, \quad \text{and} \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x}{|\vec{x}|}\hat{x} \tag{2}$$

und damit

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|x|^2}\frac{x}{|x|}\hat{x} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{|x|^3}\hat{x} \tag{3}$$

Für $x > 0$ ist $\vec{E}$ in positive x-Richtung gerichtet, für $x < 0$ in negative x-Richtung. Gleichermaßen gilt für das Feld, das durch die zweite Ladung hervorgerufen wird:

$$\vec{E}_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x - 0,4}{|x - 0,4\text{m}|^3}\vec{x} \tag{4}$$

Das Vorzeichen von $\vec{E}_2$ ändert sich, je nachdem ob es rechts oder links von der Position der Ladung Q_2 ist. Das Gesamtfeld ergibt sich durch die Summe der beiden Einzelfelder:

$$\vec{E} = \frac{10^{-6}\text{C}}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{x}{|x|^3} - 7\frac{x-0,4\text{m}}{|x-0,4\text{m}|^3}\right)\hat{x} \tag{5}$$

$$= \frac{10^{-6}\text{C}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\hat{x}\begin{cases} (\frac{-3}{x^2} + \frac{7}{(x-0,4\text{m})^2}) & -\infty < x < 0 \\ (\frac{+3}{x^2} + \frac{7}{(x-0,4\text{m})^2}) & 0 < x < 0,4 \\ (\frac{+3}{x^2} - \frac{7}{(x-0,4\text{m})^2}) & 0,4 < x < \infty \end{cases} \tag{6}$$

[**3**]

(b) Für $x < 0$ ist

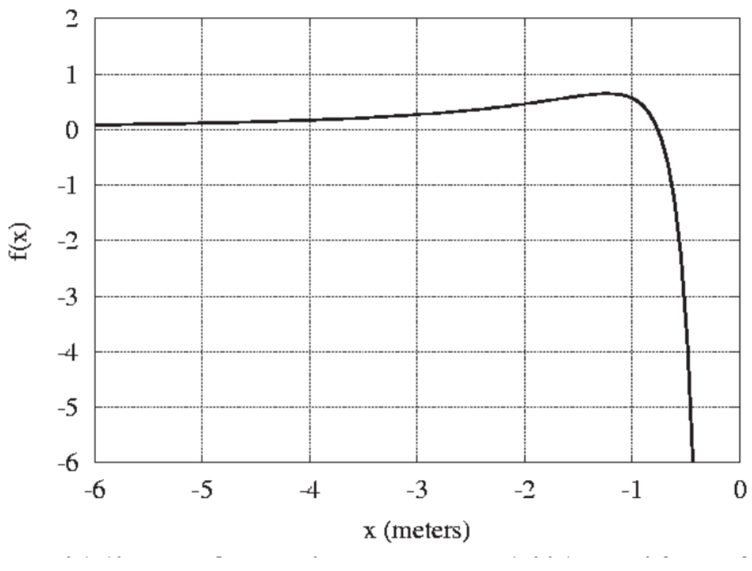
$$\vec{E}(x) = \hat{x}\frac{10^{-6}}{4\pi\varepsilon_0}f(x) \tag{7}$$

mit

$$f(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{7}{(x-0,4)^2} \tag{8}$$

Die Funktion besitzt eine Nullstelle bei $x = -0,758$ m und ein Maximum bei $x = -1,225$ m, mit dem Maximalwert 0.652 $1/\text{m}^2$. Wenn man sich $x = 0$ nähert, fällt $f(x)$ schlagartig ab und geht gegen $-\infty$, da sich bei $x = 0$ die positive Ladung befindet. Für $x = -\infty$ nähert sich $f(x)$ asymptotisch an $+4/x^2$ an. Folglich entspricht das Feld für ausreichend große Abstände $|x| >> 0,4$ dem einer Punktladung der effektiven Ladung $Q = Q_1 + Q_2 = -4\ \mu$C.

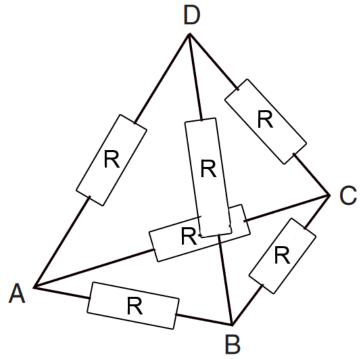
[**2**]



(c) [**3**]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein Tetraeder aus sechs gleichen ohmschen Widerständen R wird gebildet.

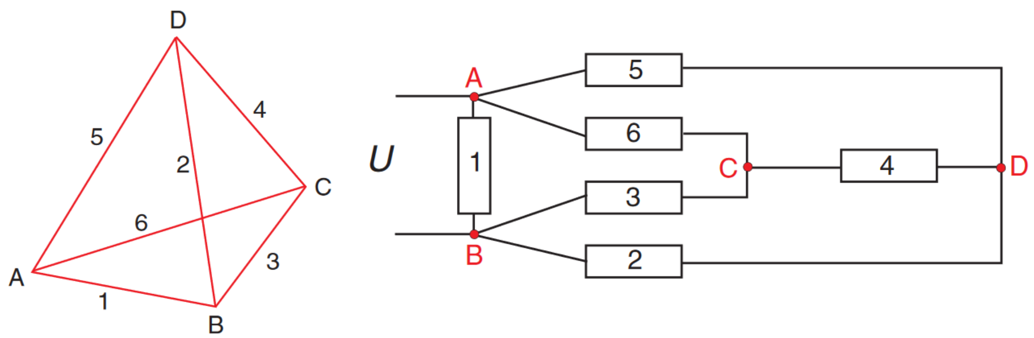


(a) Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges} zwischen den Ecken A und B? Zeichnen Sie dafür ein Ersatzschaltbild. Ein Widerstand befindet sich zwischen zwei Äquipotentialpunkten und ist deshalb irrelevant. Welcher?

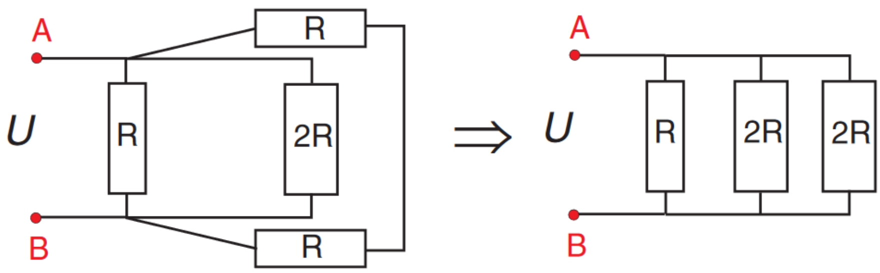
(b) Zwei Ecken werden über einen Widerstand R_i seriell an eine Spannungsquelle mit der Spannung U_0 verbunden. Wie groß ist R_{ges} (Tetraeder) zu wählen (bei festem R_i), damit am Tetraeder die maximale Leistung abfällt?

Lösung

(a) Ersatzschaltung: Da $V_C = V_D$, kann Widerstand 4 weggelassen werden. Damit erhält man



das Ersatzschaltbild:

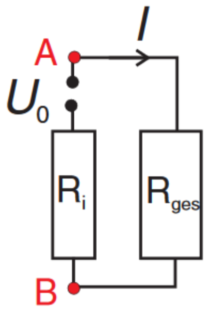


[3]

Es gilt:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \quad \Rightarrow \quad R_{ges} = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2} \tag{9}$$

[2]



(b) Für die Spannung U_0 gilt:

$$U_0 = (R_i + R_{ges})\, I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U_0}{R_i + R_{ges}} \tag{10}$$

Für die Spannung zwischen den Punkten A und B gilt (siehe Abbildung):

$$U_{AB} = U_0 - R_i I = I\frac{R}{2} \tag{11}$$

Die Leistung beträgt

$$P = R_{ges} I^2 = \frac{R}{2} I^2 = \frac{R}{2} \frac{U_0^2}{\left(R_i + \frac{R}{2}\right)^2} \tag{12}$$

Das Maximum erhält man durch Nullsetzen de Ableitung:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = \frac{1}{2}\left(\frac{U_0^2\left(R_i + \frac{R}{2}\right)^2 - U_0^2 R 2\left(R_i + \frac{R}{2}\right)\frac{1}{2}}{\left(R_i + \frac{R}{2}\right)^4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(R_i + \frac{R}{2}\right) - R}{\left(R_i + \frac{R}{2}\right)^3}\right) \tag{13}$$

$$\Leftrightarrow R_i + \frac{R}{2} - R = 0 \quad R_i = \frac{R}{2} = R_{ges} \tag{14}$$

Die optimale Lastanpassung ist bei einem Lastwiderstand, der gleich dem Innenwiderstand der Spannungsquelle ist.

[5]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Proton, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = (1 \cdot 10^4 \vec{e}_x + 2 \cdot 10^4 \vec{e}_y)$ m/s bewegt, befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt t im Punkt $x = 3\,\text{m}$, $y = 4\,\text{m}$. Berechnen Sie das erzeugte Magnetfeld zu diesem Zeitpunkt im Punkt ($x = 6$ m, $y = 4$ m).

Lösung

Wir stellen zunächst die Formel auf, mit der wir das Magnetfeld des Protons an den einzelnen Punkten berechnen können. Mit dem Einheitsvektor $\vec{e_r}$ zwischen dem Proton und dem jeweiligen Punkt ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{e_r}}{r^2} &= (1\times10^{-7}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-2})(1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}) \\ &\cdot\frac{\left[(1\times10^4\vec{e_x})\mathrm{m/s}+(2\times10^4\vec{e_y})\mathrm{m/s}\right]\times\vec{e_r}}{r^2} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\vec{B} = (1.60\times10^{-22}\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2)\frac{(\vec{e_x}+2\vec{e_y})\times\vec{e_r}}{r^2} \tag{16}$$

[**2**]

Der Ortsvektor zwischen dem Ort (3 m, 4 m) des Protons und dem Punkt (6 m, 4 m) ist $\vec{r}=(3\vec{e_x})$m. Der Abstand der beiden Punkte beträgt $r = 3$ m, und der Einheitsvektor zwischen ihnen ist

$$\vec{e_r} = \vec{e_x} \tag{17}$$

Damit ergibt sich das Magnetfeld am Punkt (6 m, 4 m) zu

$$\begin{aligned} \vec{B_{6,4}} &= (1.60\times10^{-22}\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2)\frac{(\vec{e_x}+2\vec{e_y})\times\vec{e_x}}{r^2} \\ &= (1.60\times10^{-22}\,\mathrm{T}\cdot\mathrm{m}^2)\left(\frac{-2\vec{e_z}}{9\mathrm{m}^2}\right) = (-3.56\times10^{-23}\vec{e_z})\mathrm{T} \end{aligned} \tag{18}$$

[**4**]

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei ein Inertialsystem K und ein dazu gleichförmig mit Geschwindigkeit V bewegtes System K'. Die relative Bewegung der Inertialsystme erfolge entlang der x-Achse. Ein Photon bewegt sich im System K' in einem Winkel θ zur x-Achse mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v'} = \begin{pmatrix} c\cos\theta \\ c\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Finden Sie die Komponenten der Geschwindigkeit des Photons im System K und zeigen Sie, dass der Geschwindigkeitsbetrag immer noch c ist.

Lösung

Wir finden die allgemein gültigen Formeln für die Transformationen der Geschwindigkeit. Wir beginnen mit der Komponente der Geschwindigkeit in Richtung der Relativbewegung der beiden Koordinatensysteme. Wir verwenden die gebräuchliche Schreibweise $\beta \equiv V/c$, wobei V die

Relativgeschwindigkeit der Koordinatensysteme ist. Es gilt die Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \beta x/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

[2]

und für die x-Komponente des zurückgelegten Weges:

$$x' = v'_x t', \quad x = v_x t \tag{20}$$

Damit finden wir

$$v'_x = \frac{x'}{t'} = \frac{x - \beta ct}{t - \beta x/c} = \frac{x/t - \beta c}{1 - \beta x/(ct)} \tag{21}$$

also

$$v'_x = \frac{v_x - \beta c}{1 - \beta v_x/c} \tag{22}$$

Invertieren liefert

$$v_x = \frac{v'_x + \beta c}{1 + \beta v'_x/c} \tag{23}$$

[2]

Für die Komponente v_y transversal zur Relativbewegung der Koordinatensysteme gilt

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{t - \beta x/c} = \frac{y}{t}\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta x/(ct)} \tag{24}$$

also

$$v'_y = v_y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \beta v_x/c} \tag{25}$$

Invertieren ergibt

$$v_y = v'_y\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta v'_x/c} \tag{26}$$

[2]

In der Aufgabenstellungen haben wir

$$v'_x = c\cos\theta, \quad v'_y = c\sin\theta \tag{27}$$

sodass die Gleichungen (23) und (26) im ruhenden System liefern:

$$v_x = c\frac{\cos\theta + \beta}{1 + \beta\cos\theta} \tag{28}$$

$$v_y = c\sin\theta\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta\cos\theta} \tag{29}$$

[**2**]

Für den Betrag der Geschwindigkeiten ergibt sich

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2 \frac{\cos^2\theta + 2\beta\cos\theta + \beta^2 + \sin^2\theta(1-\beta^2)}{(1+\beta\cos\theta)^2} \tag{30}$$

$$= c^2 \frac{1 + 2\beta\cos\theta + \beta^2(1-\sin^2\theta)}{(1+\beta\cos\theta)^2)} \tag{31}$$

$$= c^2 \tag{32}$$

wie es für ein Photon sein muss.

[**2**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

In einer langen Spule 1 ($l_1 = 1\,\text{m}$) vom Durchmesser $d_1 = 5\,\text{cm}$ mit 3500 Windungen befindet sich eine kleine Spule 2, deren Achse parallel zu der großen Spule steht. Sie hat einen Durchmesser von $d_2 = 2\,\text{cm}$ und 80 Windungen.

(a) Zunächst wird die Spule 1 von $I = 3\,\text{A}$ durchflossen. Wie groß ist deren Induktivität L_{11} der Spule und ihr Energieinhalt?

(b) Welche Spannung U wird zwischen den Enden der kleinen Spule 2 beobachtet, wenn während 5 Sekunden die Stromstärke in der großen Spule 1 gleichmäßig von 0 auf 3 A ansteigt?

Lösung

(a) Die Selbstinduktivität der großen Spule beträgt

$$L_{11} = \mu_0 \left(\frac{N_1}{l_1}\right)^2 A_1 l_1 = \mu_0 N_1^2 \frac{\pi d_1^2}{4 l_1} = 30.2\,\text{mH} \tag{33}$$

[**2**]

Und für die Feldenergie gilt

$$W = \frac{1}{2} L_{11} I^2 = 0.136\,\text{J} \tag{34}$$

[**2**]

(b) Das Induktionsgesetz lautet

$$U = -N_2 \frac{d\Phi}{dt} = -L_{12}\frac{dI}{dt} \tag{35}$$

Der Fluss in der Induktionsspule beträgt

$$\Phi = B A_2 = \mu_0 N_1 I \frac{A_2}{l_1} \tag{36}$$

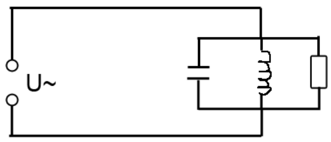
Damit gilt:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 N_1 \frac{A_2}{l_1}\frac{dI}{dt} \quad \Rightarrow U = -\mu_0 \frac{N_1 N_2 A_2}{l_1}\frac{dI}{dt} = -66.34\,\mu\text{V} \tag{37}$$

[**3**]

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Ein Parallelschwingkreis mit $R = 400\,\Omega$, $L = 350\,\mathrm{mH}$ und $C = 5\,\mu\mathrm{F}$ werde mit variabler Frequenz ν und effektiver Spannung $220\,\mathrm{V}$ betrieben.



(a) Berechnen Sie die Resonanzfrequenz ν_0.

(b) Berechnen Sie für die Resonanzfrequenz ν_0 die Impedanz Z des Parallelschwingkreises.

(c) Berechnen Sie für die Resonanzfrequenz ν_0 jeweils die Ströme durch die Spule, den Kondensator und den Widerstand.

Lösung

(a) Für die Resonanzfrequenz des Schwingkreises gilt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.35\,\mathrm{H} \cdot 5\,\mu\mathrm{F}}} = 750\,\mathrm{s}^{-1} \tag{38}$$

Daraus folgt

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 120\,\mathrm{Hz} \tag{39}$$

[**2**]

(b) Für die Impedanz gilt:

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} \tag{40}$$

wobei

$$X_C = \frac{1}{2\pi\nu_0 C} = 265.23\,\Omega \tag{41}$$

$$X_L = 2\pi\nu_0 L = 263.89\,\Omega \tag{42}$$

Damit folgt

$$\frac{1}{Z} = 2.5\,\mathrm{m}\Omega^{-1} \quad \Rightarrow \quad Z = 400\,\Omega = R \tag{43}$$

[**3**]

(c)

$$I_R = \frac{U}{R} = \frac{220\,\mathrm{V}}{400\,\Omega} = 0.55\,\mathrm{A} \tag{44}$$
$$I_C = \frac{U}{X_C} = \frac{220\,\mathrm{V}}{265\,\Omega} = 0.83\,\mathrm{A} \tag{45}$$
$$I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{220\,\mathrm{V}}{264\,\Omega} = 0.83\,\mathrm{A} \tag{46}$$

[**3**]

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Eine in z-Richtung laufende elektromagnetische Welle trifft bei z=0 senkrecht auf die Oberfläche A eines unendlich guten Leiters. Die Schwingungsebene des elektrischen Feldes sei die yz-Ebene.

(a) Bestimmen Sie mit den Maxwell-Gleichungen einen Ausdruck für den magnetischen Anteil der Welle ($\vec{B}(\vec{r},t)$) in Abhängigkeit von E_0

(b) Berechnen Sie aus den Maxwell Gleichungen die auf der Leiteroberfläche induzierte Stromdichte $j(t)$ in Anhängigkeit von E_0.

(c) Ein Astronaut der Gesamtmasse M=100 kg schwebt im freien Raum hat lediglich einen Laser mit einer Lichtleistung P=10 W zur Hand. Wie lange braucht er unter Ausnutzung der Laserstrahlung als Antrieb, um eine Geschwindigkeit v=10 m/s zu erreichen?

Lösung

(a) Mit dem Faraday'schen Gesetz:

$$\begin{aligned}
-\partial_t \vec{B}_i &= \nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} E_0 \left[\exp\left(i(kz - \omega t)\right) - \exp\left(i(-kz - \omega t)\right)\right] \\
&= -\vec{e}_x E_0 ik \left[\exp\left(i(kz - \omega t)\right) - \exp\left(i(-kz - \omega t)\right)\right] \\
\vec{B} &= \vec{e}_x E_0 \frac{ik}{-i\omega} \left[\exp\left(i(kz - \omega t)\right) - \exp\left(i(-kz - \omega t)\right)\right] \\
&= \vec{e}_x \frac{E_0}{c} \left[\exp\left(i(kz - \omega t)\right) - \exp\left(i(-kz - \omega t)\right)\right]
\end{aligned}$$

[**3**]

(b) Für die Stromdichte:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \tfrac{d}{c^2 dt}\vec{E} \qquad \vec{E}(0) = 0 \Rightarrow \tfrac{d}{dt}\vec{E}(0) = 0 \\
\vec{j}(z=0) &= \tfrac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}(z=0) = \tfrac{E_0}{\mu_0 c} \vec{e}_y ik \left[\exp\left(i(kz - \omega t)\right) + \exp\left(i(-kz - \omega t)\right)\right]_{z=0} \\
&= \tfrac{2E_0}{\mu_0 c} ik \vec{e}_y e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

[**3**]

(c) Wir verwenden die Beschleunigung a, die Fläche A, den Druck p, die Leistung P und den Poynting Vektor S.

$$\begin{aligned}
\text{Leistung: } P &= <\vec{S}> \cdot \vec{A} = 10\text{W} \\
\text{Kraft: } F = M \cdot a &= A \cdot p \\
a &= \frac{A\ p}{M} = \frac{P\ p}{M <S>} = \frac{P}{M\ c} \\
t &= \frac{v}{a} = \frac{M\ c\ v}{P} = \frac{100\text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{W}} = 3 \cdot 10^{10}\text{s}
\end{aligned}$$

[**3**]

Konstanten

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$	$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}\text{mkgs}^{-2}\text{A}^{-2}$
$e = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{C}$	$c = 3 \cdot 10^8\text{ms}$
$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$	$m_U = 1,66 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$