Theoretische Physik 1 (Mechanik)

Klausur

Prof. Dr. Norbert Kaiser

7. August 2020
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ____________________

Diese Klausur enthält 8 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 4 Aufgaben.
Die Gesamtpunktzahl beträgt 46.

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	14	
2	8	
3	16	
4	8	
Gesamt:	46	

Musterlösung

Bemerkung: Diese Musterlösung wurde, basierend auf den originalen Lösungen von Prof. Kaiser erstellt.

1. (14 Punkte) Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Zentralpotential $U(r) = \frac{\Gamma}{r^2}$, wobei $\Gamma > 0$. Gegeben sind der Stoßparameter b und die (asymptotische) Geschwindigkeit v_∞ für $r \to \infty$. Neben der Energie $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ und dem Drehimpuls $L = mbv_\infty$ existiert für die Bewegung im $1/r^2$-Potential noch eine weitere Erhaltungsgröße, nämlich:

$$K = m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - 2Et.$$

   (a) (*5 Punkte*) Zeigen Sie, dass K eine Konstante der Bewegung ist. Weisen Sie allgemein $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r\dot{r}$ nach. Welchen Wert hat K, wenn zur Zeit $t = 0$ der minimale Radius $r(0) = r_0$ erreicht wird?

   (b) (*3 Punkte*) Bestimmen Sie mithilfe des Erhaltungssatzes für K den Bahnradius $r(t)$, ausgedrückt durch die Parameter r_0 und v_∞.

   (c) (*2 Punkte*) Berechnen Sie im nächsten Schritt den Winkel $\varphi(t)$ zur Anfangsbedingung $\varphi(0) = 0$.
   Hinweis: $\int \frac{1}{c^2 + t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{c} \arctan\left(\frac{t}{c}\right)$.

   (d) (*4 Punkte*) Zeigen Sie, dass für die ebene Bahnkurve $r(\varphi)$ den minimalen Radius r_0 folgende Beziehungen gelten:

$$r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(\frac{\varphi r_0}{b})}, \quad r_0 = \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}}.$$

Lösung:

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} - 2Et \right) = m \left(\dot{\vec{r}}\right)^2 + m\vec{r} \cdot \ddot{\vec{r}} - 2E$$

$$\text{mit } E = T + U,\ \vec{F} = m\ddot{\vec{r}},\ T = \frac{m}{2}\left(\dot{\vec{r}}\right)^2 \text{ und } \vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} K &= 2T + \vec{r} \cdot \vec{F} - 2(T + U) \\
&= -2U + \vec{r} \cdot \vec{F} \\
&= -2\frac{\Gamma}{r^2} - \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{\Gamma}{r^2}\right) \\
&= -2\frac{\Gamma}{r^2} - \vec{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma}{r^2}\right) \\
&= -2\frac{\Gamma}{r^2} + r\frac{2\Gamma}{r^3} = 0.
\end{aligned}$$

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \cdot \vec{r}\right) \Rightarrow 2r\dot{r} = 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}.$$

minimaler Radius bei $t = 0 \Rightarrow \dot{r}(t = 0) = 0$

$$K(t = 0) = m\vec{r}(0) \cdot \dot{\vec{r}}(0) - 2E \cdot 0 = mr_0\dot{r}(0) = 0.$$

(b) $K(t=0)=0$ und K ist eine Erhaltungsgröße.
Somit gilt $K = mr\dot{r} - mv_\infty^2 t = 0$.
Hier haben wir $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$ benutzt.
Nachdem obige Gleichung mal zwei genommen und nach der Zeit integriert wird, erhalten wir

$$r^2 - v_\infty^2 t^2 = c^2$$

mit der Integrationskonstanten c.

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{c + v_\infty^2 t^2} \\ \text{mit } r(0) = r_0 \Rightarrow c &= r_0^2 \\ \Rightarrow r(t) &= \sqrt{r_0^2 + v_\infty^2 t^2}. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} L = mbv_\infty = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} &= \frac{bv_\infty}{(r(t))^2} \\ \Rightarrow \varphi(t) &= \int_0^t \frac{bv_\infty}{(r(t'))^2}\mathrm{d}t' = \int_0^t \frac{b/v_\infty}{(r_0/v_\infty)^2 + (t')^2}\mathrm{d}t \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{b}{v_\infty}\frac{v_\infty}{r_0}\arctan\left(\frac{v_\infty t}{r_0}\right) \\ &= \varphi(t) = \frac{b}{r_0}\arctan\left(\frac{v_\infty t}{r_0}\right). \end{aligned}$$

(d) Aus (c) folgt

$$\frac{v_\infty t}{r_0} = \tan\left(\frac{\varphi r_0}{b}\right).$$

Eingesetzt in das Ergebnis aus (b):

$$r^2 = r_0^2 + (v_\infty t)^2 = r_0^2\left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi r_0}{b}\right)\right) = r_0^2\frac{\sin^2(\frac{\varphi r_0}{b}) + \cos^2(\frac{\varphi r_0}{b})}{\cos^2(\frac{\varphi r_0}{b})}$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{r_0}{\cos(\frac{\varphi r_0}{b})}.$$

Erhaltene Energie:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\Gamma}{r^2}$$

ausgewertet zur Zeit $t=0$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m^2b^2v_\infty^2}{2mr_0^2} + \frac{\Gamma}{r_0^2} = \frac{1}{r_0^2}(Eb^2 + \Gamma) \\ \Rightarrow r_0^2 E &= Eb^2 + \Gamma \\ \Rightarrow r_0 &= \sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}}. \end{aligned}$$

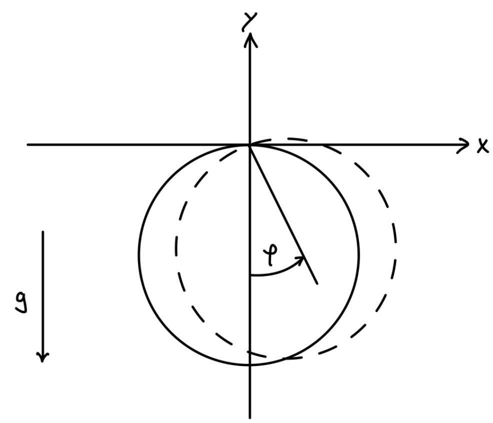
Der Streuwinkel ϑ ist gegeben durch

$$\vartheta = \pi - 2\varphi_{\max}$$

wobei $\varphi_{\max}$ $r \to \infty$ entspricht.

$$r \to \infty \text{ für } \cos\left(\frac{\varphi_{\max} r_0}{b}\right) = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\varphi_{\max} r_0}{b} \Rightarrow \varphi_{\max} = \frac{\pi b}{2r_0}$$
$$\Rightarrow \vartheta(b) = \pi\left(1 - \frac{b}{r_0}\right)$$
$$\text{oder } \vartheta(b) = \pi\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 + \frac{\Gamma}{E}}}\right).$$

2. (8 Punkte) Eine homogene, starre Kreisscheibe mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke ist an einem festen Punkt im homogenen Schwerefeld der Erde aufgehängt. Die Scheibe kann nur in der vertikalen xy-Ebene schwingen (siehe Abbildung).

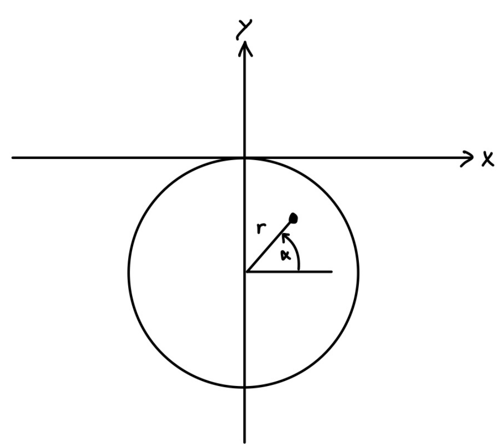


(a) (*3 Punkte*) Berechnen Sie das Trägheitsmoment Θ der Scheibe für Drehungen um den Aufhängepunkt.

(b) (*3 Punkte*) Geben Sie die Lagrangefunktion des Systems in Abhängigkeit von der generalisierten Koordinate ϕ an und leiten Sie die Bewegungsgleichung ab.

(c) (*2 Punkte*) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage ϕ_0 und die Frequenz ω kleiner Schwingungen um diese.

Lösung:



(a)

$$x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha - R \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\sin\alpha$$

<u>Trägheitsmoment bzgl. $(x, y) = (0, 0)$:</u>

$$\begin{aligned}
\Theta &= \frac{M}{\pi R^2}\int \mathrm{d}F[x^2+y^2] \qquad \text{mit } \mathrm{d}F = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha r \left[R^2 + r^2 - \underbrace{2Rr\sin\alpha}_{=0 \text{ (nach Integration)}}\right] \\
&= \frac{2M}{R^2}\int_0^R \mathrm{d}r \left[R^2 r + r^3\right] \\
&= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{R^2}{2} + \frac{R^4}{4}\right] \\
&= \frac{3}{2}MR^2
\end{aligned}$$

<u>Alternativ mit Satz von Steiner:</u> $\Theta = \Theta_S + MR^2$, wobei Θ_S das Trägheitsmoment bzgl. des Schwerpunkts ist.

$$\Theta_S = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\alpha r \left[\underbrace{r^2\cos^2\alpha}_{=x^2} + \underbrace{r^2\sin^2\alpha}_{=y^2}\right]$$

(b) Höhe des Schwerpunkts: $y_S = -R\cos\phi$

$$\begin{aligned}
U &= Mgy_S = -MgR\cos\phi \\
T &= \frac{1}{2}\Theta\dot{\phi}^2 = \frac{3}{4}MR^2\dot{\phi}^2 \\
L &= T - U = \frac{3}{4}MR^2\dot{\phi}^2 + MgR\cos\phi
\end{aligned}$$

Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} &= \frac{\partial L}{\partial\phi} \\
\frac{3}{2}MR^2\ddot{\phi} &= -MgR\sin\phi \\
\ddot{\phi} &= -\frac{2g}{3R}\sin\phi
\end{aligned}$$

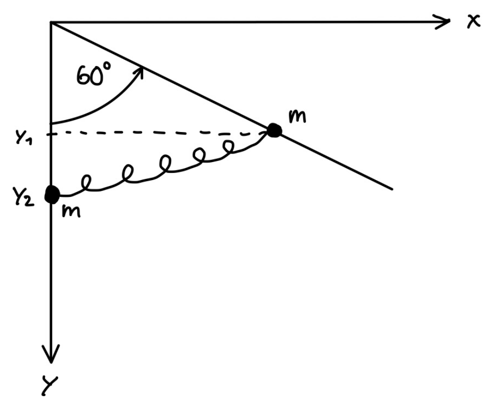
(c) Stabile Gleichgewichtslage entspricht Minimum von $U = -MgR\cos\phi \Rightarrow$ Gleichgewichtslage bei $\phi_0 = 0$.
Kleine Ausschläge um $\phi_0 = 0 : \sin\phi \approx \phi$.
$\Rightarrow$ linearisierte Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\phi} = -\frac{2g}{3R}\phi.$$

$\Rightarrow$ Frequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{3R}}.$$

3. (16 Punkte) Zwei gleiche Punktmassen m bewegen sich in einer Ebene reibungsfrei auf einer Vertikalen bzw. auf einer um 60° geneigten Geraden. Sie stehen unter dem Einfluss der Schwerkraft und sind mit einer idealen Feder (Federkonstante f und ungestreckte Länge $l_0 = 0$) verbunden (siehe Abbildung).



(a) (*5 Punkte*) Geben Sie die Zwangsbedingungen an und stellen Sie die Lagrangefunktion in den Variablen (y_1, y_2), den Vertikalpositionen der Massen, auf.

(b) (*4 Punkte*) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab und bestimmen Sie die Gleichgewichtslage (y_1^0, y_2^0).

(c) (*1 Punkt*) Führen Sie neue Koordinaten (η_1, η_2) für die Auslenkungen aus der Gleichgewichtlage ein. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichungen nun die Form

$$4m\ddot{\eta}_1 + f(4\eta_1 - \eta_2) = 0, \quad m\ddot{\eta}_2 + f(\eta_2 - \eta_1) = 0.$$

(d) (*6 Punkte*) Bestimmen Sie die Eigenrequenzen ω_1, ω_2 und die (unnormierten) Amplitudenvektoren $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ des Systems.

Lösung:

(a) Zwangsbedingungen: $x_2 = 0, x_1 = \tan 60° y_1 = \sqrt{3} y_1$

$$\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{m}{2}\left[(\tan^2\alpha + 1)\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right] \\
U &= -mg(y_1 + y_2) + \frac{f}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right] \\
&= -mg(y_1 + y_2) + \frac{f}{2}\left[(\tan^2\alpha + 1)y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right] \\
L = T - U &= \frac{m}{2}\left[(\tan^2\alpha + 1)\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right] + mg(y_1 + y_2) - \frac{f}{2}\left[(\tan^2\alpha + 1)y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right]
\end{aligned}$$

mit $\alpha = 60°$:

$$L = \frac{m}{2}\left(4\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2\right) + mg(y_1 + y_2) - \frac{f}{2}\left(4y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2\right).$$

(b) Bewegungsgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i}$$
$$m(\tan^2\alpha + 1)\ddot{y}_1 = mg - f\left[(\tan^2\alpha + 1)y_1 - y_2\right]$$
$$m\ddot{y}_2 = mg - f(y_2 - y_1)$$

Gleichgewichtslage: $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$

$$(\tan^2\alpha + 1)y_1^0 - y_2^0 = \frac{mg}{f}$$
$$y_2^0 - y_1^0 = \frac{mg}{f}$$

Addition beider Gleichungen liefert $\tan^2\alpha\ y_1^0 = \frac{2mg}{f}$.

$$y_1^0 = \frac{2mg}{f\tan^2\alpha} = \frac{2mg}{3f}$$
$$y_2^0 = \frac{mg(2+\tan^2\alpha)}{f\tan^2\alpha} = \frac{5mg}{3f}$$

(c) Neue Koordinaten (η_1, η_2) für die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage:

$$\eta_1 = y_1 - \frac{2mg}{3f} \qquad \eta_2 = y_2 - \frac{5mg}{3f}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichungen:

$$4m\ddot{\eta}_1 + f(4\eta_1 - \eta_2) = 0$$
$$m\ddot{\eta}_2 + f(\eta_2 - \eta_1) = 0$$

(d)

$$\begin{pmatrix} 4m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4f & -f \\ -f & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenfrequenzen sind durch

$$\det\begin{pmatrix} 4f - 4m\omega^2 & -f \\ -f & f - m\omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

bestimmt.

$$(f - m\omega^2)^2 - f^2 = 0$$
$$m\omega^2 - f = \pm\frac{f}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3f}{2m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{f}{2m}}$$

Eigenvektor zu ω_1:

$$f\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor zu ω_2:

$$f\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4. (8 Punkte) Ein zylindrisches Rohr der Höhe h hat den Innenradius r und den Außenradius $R > r$. Berechnen Sie für diesen homogenen, starren Körper der Masse M den Trägheitstensor Θ_{ij} bezüglich seines Schwerpunkts S. Wählen Sie das Koordinatensystem mit dem Ursprung in S und der z-Achse als Symmetrieachse.

Lösung:
In Zylinderkoordinaten hat man den Bereich: $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}, r < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi$. Das Volumen ist $V = \pi h(R^2 - r^2)$. Der Trägheitstensor bzgl. des Schwerpunks S ist

$$\Theta = \frac{M}{V}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \int_r^R \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

mit $x = \rho\cos(\varphi)$ und $y = \rho\sin(\varphi)$. Also erhalten wir

$$\Theta_{zz} = \frac{M}{\pi h(R^2 - r^2)}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \int_r^R \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \rho^2 = \frac{2M}{R^2 - r^2}\frac{1}{4}\left(R^4 - r^4\right) = \frac{M}{2}\left(R^2 + r^2\right),$$

sowie

$$\begin{aligned}\Theta_{xx} = \Theta_{yy} &= \frac{M}{\pi h(R^2 - r^2)}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \int_r^R \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(z^2 + \rho^2 \sin^2\varphi\right) \\ &= \frac{M}{h(R^2 - r^2)}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \int_r^R \mathrm{d}\rho \left(2\rho z^2 + \rho^3\right) \\ &= \frac{M}{h(R^2 - r^2)}\left[(R^2 - r^2)\frac{h^3}{12} + \frac{h}{4}(R^4 - r^4)\right] = \frac{M}{4}\left[R^2 + r^2 + \frac{h^2}{3}\right].\end{aligned}$$

Die Nichtdiagonalelemente verschwinden, da

$$\Theta_{xz} \sim \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\mathrm{d}z = 0, \quad \Theta_{yz} \sim \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\mathrm{d}z = 0, \quad \Theta_{xy} \sim \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 0.$$