# Probeklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. R. Kienberger
Sommersemester 2019
01.07.2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Zwei leitende Kugeln mit den unterschiedlichen Radien $R_1$ und $R_2$ sind über einen dünnen Draht leitend miteinander verbunden. Insgesamt befindet sich die Ladung $Q_{Ges}$ auf beiden Kugeln zusammen.

(a) (i) Finden Sie einen Ausdruck, wie sich das Verhältnis der Ladungen $Q_1$ auf der Kugel 1 und $Q_2$ auf der Kugel 2 in Abhängigkeit der Kugelradien verhält.
**Hinweis:** Leiter sind Äquipotentialflächen.

(ii) Geben Sie in Abhängigkeit der Kugelradien an, welcher Anteil der Gesamtladung $Q_{Ges}$ sich auf Kugel 1 befindet.

(b) Was bedeutet dies für die Verhältnisse der Ladungsdichten, d.h. für die Ladungen pro Fläche? Finden Sie einen Ausdruck, wie sich das Verhältnis der Flächenladungsichte $\sigma_1$ auf Kugel 1 zur Flächenladungsdichte $\sigma_2$ auf Kugel 2 in Abhängigkeit der Kugelradien verhält.

(c) Welche Auswirkung hat die Ladungsdifferenz auf das elektrische Feld der beiden Kugeln, falls $R_1 \ll R_2$? Warum können aus dünnen Spitzen manchmal Funken austreten?
**Hinweis:** Das elektrische Feld ist proportional zur Flächenladungsdichte.

## Lösung

(a) (i) Da es sich bei Leitern um Äquipotentialflächen handelt, muss an den Oberflächen der beiden Kugeln das Potential gleich sein, also:

$$\phi_1 = \phi 2 \tag{1}$$

$$\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \tag{2}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \tag{3}$$

Das Verhältnis der Ladungen entspricht also dem der Kugelnradien.

[**2**]

(ii) Mit dem in (i) gefundenem Zusammenhang ergibt sich:

$$\frac{Q_1}{Q_{Ges}} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_1 \frac{R_2}{R_1}} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \tag{4}$$

Somit trägt die größere der beiden Kugeln mehr Ladung.

**[2]**

(b) Für die Flächenladungsdichte von Kugel 1 gilt:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} \tag{5}$$

und damit:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_2}{R_1} \tag{6}$$

Durch Einsetzen von $R_2 < R_1$ sieht man, welche Kugel die größere Flächenladungsdichte trägt, nämlich die kleinere Kugel: $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$.

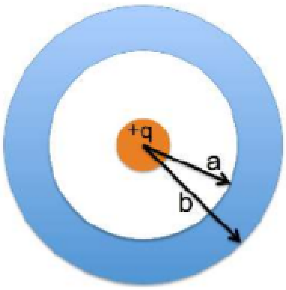
**[2]**

(c) Wie in (b) berechnet wird die Flächenladungsdichte im Verhältnis umso größer, je kleiner der Radius wird. Da $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ gilt, steigt entsprechend auch das elektrische Feld an. Ist das Verhältnis der Radien hinreichend groß, kann es zu einem Spannungsdurchschlag durch die umgebende Luft kommen, was als Spitzentladung bezeichnet wird.

**[2]**

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Eine nichtleitende Kugelschale mit innerem Radius $a$ und äußerem Radius $b$ hat innerhalb ihrer Dicke (zwischen $a$ und $b$) eine positive Ladungsdichte $\rho = A/r$, wobei $r$ der Abstand vom Zentrum und $A$ eine Konstante ist. Im Zentrum der Kugelschale befindet sich eine Punktladung $+q$.




(a) Was ist das Feld in der Region zwischen der Puntladung und der Kugelschale, d.h. für $r < a$?

(b) Wie müssen Sie die Konstante $A$ wählen, sodass das Feld innerhalb der Kugelschale (für $a < r < b$) homogen ist?
**Hinweis:** Die Konstante $A$ hängt von $a$ ab, jedoch nicht von $b$.

## Lösung

(a) Das Feld für $r < a$ ist das Feld einer positiven Punktladung $+q$. Nach dem Gaußschen Satz gilt:

$$\oint_F \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot A = E \cdot 4\pi r^2 \tag{7}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{+q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{8}$$

[**2**]

(b) Das elektrische Feld am Radius $a < r < b$ innerhalb der Kugelschale lässt sich analog zu Teilaufgabe (a) mithilfe des Gaußschen Satzes bestimmen, wobei jetzt $Q = q + q_S$ gilt. $q_s$ beschreibt hierbei die von der Gaußschen Fläche umschlossene Ladung aus der Kugelschalte. $q_S$ ist abhängig vom umschlossenen Volumen $dV$, wofür man eine Kugelschale von infinitesimaler Dicke $dr$ annehmen kann, sodass $dV = 4\pi r^2 dr$ gilt.

$$q_S = \int_a^r \rho dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r} \rho r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr = 4\pi \int_a^r \frac{A}{r'} r'^2 dr' = 4\pi \int_a^r Ar' dr' = 2\pi A(r^2 - a^2) \tag{9}$$

[**2**]

Dann ist das elektrische Feld gegeben durch:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}(q + 2\pi A r^2 - 2\pi A a^2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{r^2} + 2\pi A - \frac{2\pi A a^2}{r^2}\right). \tag{10}$$

[**2**]

Damit das elektrische Feld homogen ist, müssen sich der erste und dritte Term gegenseitig aufhaben. Dies ist der Fall wenn $q - 2\pi A a^2 = 0$. Also gilt für $A$:

$$A = \frac{q}{2\pi a^2} \tag{11}$$

[**2**]

## Aufgabe 3 (13 Punkte)

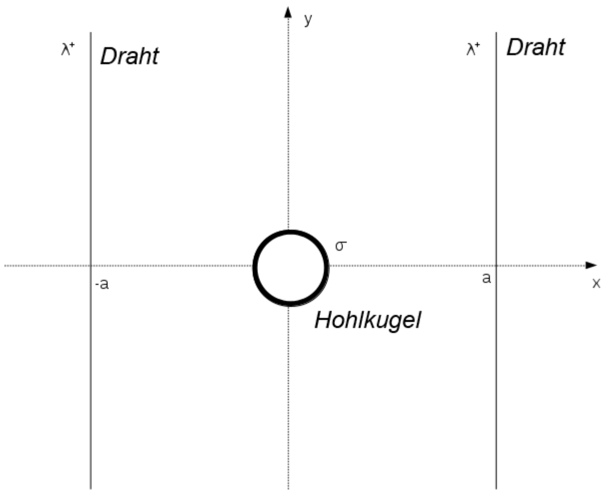
Eine nicht-leitende, negativ geladene Hohlkugel der Flächenladungsdichte $\sigma^-$ befindet sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Bei $x = \pm a$ befindet sich jeweils ein positiv gelandener, endlos langer Draht, welcher parallel zur y-Achse verläuft und eine positive Linienladungsdichte $\lambda^+$ besitzt.

(a) Berechnen Sie das elektrische Feld in der x-y-Ebene ($E(x, y, 0)$). Unterscheiden Sie dabei die Fälle:

(i) innerhalb der Kugel

(ii) außerhalb der Kugel zwischen den Drähten

(iii) $|x| > a$




(b) Wie verändert sich das Feld innerhalb der Kugel, wenn

  (i) die Kugel entlang der y-Achse zwischen den Drähten verschoben wird?

  (ii) die Kugel entlang der x-Achse zwischen den Drähten verschoben wird?

  (iii) die Kugel leitend gemacht wird?

## Lösung

(a) Zunächst werden die elektrischen Felder der Drähte mit dem Satz von Gauß berechnet:

$$\int E dA = El2\pi r = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi r}\hat{e}_r \tag{12}$$

**[1]**

Das elektrische Feld einer homogen gelandenen Kugel ist bekannt:

$$E_{\text{Kugel}} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases} \tag{13}$$

**[1]**

Daraus folgt:

  (i) für das Feld innerhalb der Kugel:

$$\vec{E}(x,y,0) = 0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r} + a\hat{e}_x|}\hat{e}_x - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0|\vec{r} - a\hat{e}_x|}\hat{e}_x \tag{14}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x+a|} - \frac{1}{|x-a|}\right)\hat{e}_x \tag{15}$$

**[3]**

(ii) für das Feld außerhalb der Kugel:

$$\vec{E}(x,y,0) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x+a|} - \frac{1}{|x-a|}\right)\hat{e}_x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{16}$$

[**2**]

(iii) für den Bereich $|x| > a$:

$$E_{x>0} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x+a|} + \frac{1}{|x-a|}\right)\hat{e}_x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

und

$$E_{x<0} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x+a|} + \frac{1}{x-a|}\right)\hat{e}_x + \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

[**3**]

(b) (i) Bei Verschiebung entlang der y-Achse: keine Änderung

(ii) Bei Verschiebung entlang der x-Achse: Änderung gemäß $\vec{E}(x,y,0)$ (Fall (i) Aufgabe (a))

(iii) Die Kugeloberfläche ist jetzt leitend: Es liegt ein Faradayscher Käfig vor; $E = 0$.

[**3**]

## Aufgabe 4 (10 Punkte)

(a) Die Platten eines luftgefüllten Plattenkondensators haben jeweils eine Fläche von $5,0$ cm$^2$ und sind durch ein $0,30$ mm breites Dielektrikum ($\epsilon_r = 3,4$) voneinander getrennt. Der Kondensator ist an eine $3,0$ V-Batterie angeschlossen.

(i) Bestimmen Sie die Kapazität der Anordnung.

(ii) Bestimmen Sie die maximal mögliche Ladung auf dem Kondensator.

(iii) Bestimmen Sie die potentielle Energie, die im vollständig aufgeladenen Kondensator gespeichert ist.

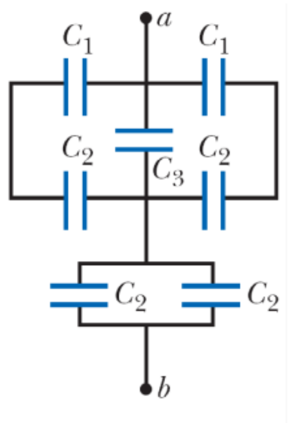
(b) Bestimmen Sie jetzt die Kapazität zwischen den Punkten a und b, die der Anordnung aus den einzelnen Kondensatoren äquivalent ist. Verwenden Sie: $C_1 = 5,00$ $\mu$F, $C_2 = 10,00$ $\mu$F und $C_3 = 2,00$ $\mu$F.

## Lösung

(a) (i) Für die Kapazität des Plattenkondensators gilt:

$$C = \epsilon_0\epsilon_r\frac{A}{d} = 50,15 \text{ pF}, \tag{19}$$

mit $A$ der Plattenfläche und $d$ dem Abstand der beiden Platten voneinander.




**[1]**

(ii) Die maximal mögliche Ladung auf dem Kondensator beträgt:

$$Q = C \cdot U = 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ C}. \tag{20}$$

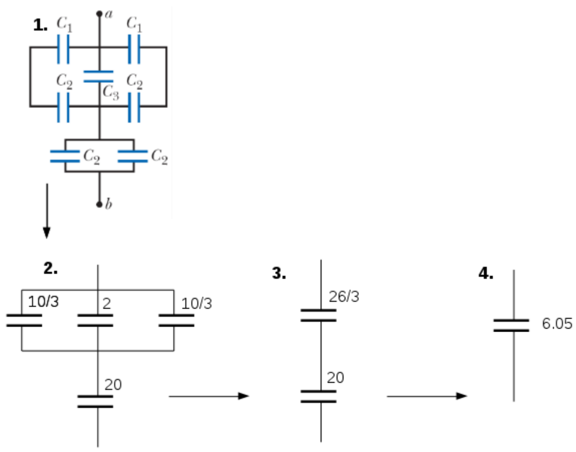
**[1]**

(iii) Die im vollständig aufgeladenen Plattenkondensator gespeicherte potentielle Energie beträgt:

$$E_{pot} = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = 2,3 \cdot 10^{-10} \text{ J} \tag{21}$$

**[1]**

(b) Um die Ersatzkapazität zu erhalten, werden die folgenden Schritte durchgeführt:




**1. → 2.**

Jeweils Reihenschaltung der Kondensatoren $C_1$ und $C_2$ in den beiden oberen Maschen und Parallelschaltung von $C_2$ und $C_2$ in der unteren Masche:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{5\ \mu\text{F}} + \frac{1}{10\ \mu\text{F}} = \frac{3}{10}\ \frac{1}{\mu\text{F}} \tag{22}$$

$$C = 10\ \mu\text{F} + 10\ \mu\text{F} = 20\mu\text{F} \tag{23}$$

[**3**]

**2. → 3.**

Parallelschaltung der verbleibenden drei Kondensatoren in der oberen Masche:

$$C = \frac{10}{3}\ \mu\text{F} + 2\ \mu\text{F} + \frac{10}{3}\ \mu\text{F} = \frac{26}{3}\ \mu\text{F} \tag{24}$$

[**2**]

**3. → 4.**

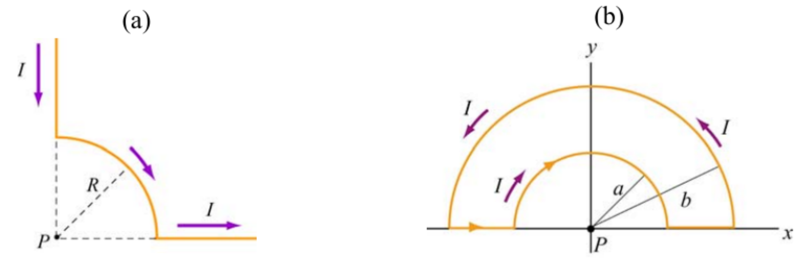
Reihenschaltung der verbleibenden beiden Kondensatoren:

$$\frac{1}{C} = \frac{3}{26}\ \frac{1}{\mu\text{F}} + \frac{1}{20}\ \frac{1}{\mu\text{F}} \quad \Rightarrow \quad C = 6,05\ \mu\text{F}. \tag{25}$$

[**2**]

## Aufgabe 5 (12 Punkte)

Bestimmen Sie das magnetische Feld am Punkt P für die folgenden beiden Stromverteilungen:




## Lösung

(a) Die Felder, die von den geraden Drahtabschnitten hervorgerufen werden verschwinden am Punkt P, weil $d\vec{s}$ und $\hat{\vec{r}}$ parallel oder antiparallel sind. Im verbleibenden Drahtsegment wird ein magnetisches Feld erzeugt. Zur Beschreibung des Viertelkreises werden die beiden Einheitsvektoren $\hat{\vec{x}}$ und $\hat{\vec{y}}$ sowie der Winkel $\theta$ verwendet (siehe Abbildung). Damit folgt für das Magnetfeld:

[**1**]

$$d\vec{\hat{B}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{\hat{r}}}{R^3} \tag{26}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\theta \left(\sin\theta \vec{\hat{x}} - \cos\theta \vec{\hat{y}}\right) \times \left(-\cos\theta \vec{\hat{x}} - \sin\theta \vec{\hat{y}}\right)}{R^2} \tag{27}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)}{R} \vec{\hat{z}} d\theta \tag{28}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\theta}{R} \vec{\hat{z}} \tag{29}$$

,

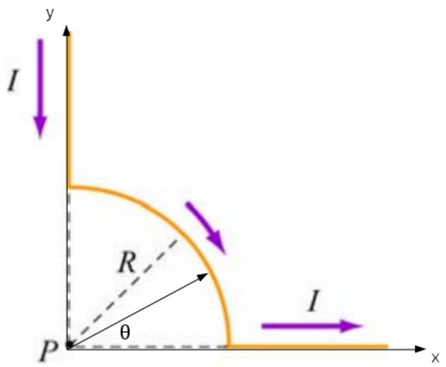
[**3**]

wobei verwendet wurde, dass $\vec{\hat{x}} \times \vec{\hat{y}} = \vec{\hat{z}}$.
Für das Gesamte Magnetfeld entlang des Viertelkreises gilt damit:

$$\vec{B} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} d\theta \vec{\hat{k}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\pi}{2} \vec{\hat{k}} = -\left(\frac{\mu_0 I}{8R}\right) \vec{\hat{z}}. \tag{30}$$

[**2**]

Alternativ ist auch das engegengesetzte Vorzeichen, also in die Seite hineinzeigend, richtig.




(b) Entlang der geraden Abschnitte ist kein Magnetfeld, da der Punkt P genau auf der Linie liegt. Für das äußere und das innere Teilstück kann jeweils das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) verwendet werden mit $b$ dem äußeren und $a$ dem inneren Radius:

$$\vec{B}_{out} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{Id\theta}{b} \vec{\hat{z}} = \left(\frac{\mu_0 I}{4b}\right) \vec{\hat{z}} \tag{31}$$

[**2**]

und (beachte die Vertauschung der Integrationsgrenzen)

$$\vec{B}_{in} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{Id\theta}{a} \vec{\hat{z}} = \left(\frac{\mu_0 I}{4a}\right) \vec{\hat{z}} \tag{32}$$

[**2**]

Das gesamte magnetische Feld am Punkt P beträgt damit:

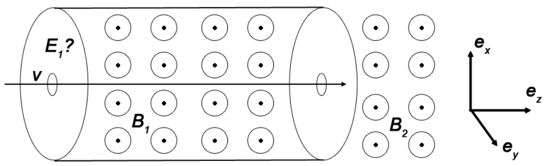
$$\vec{B}_{net} = \vec{B}_{out} + \vec{B}_{in} = -\frac{\mu_0 I}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\hat{\vec{z}} \tag{33}$$

[**2**]

Es zeigt in die Seite hinein, da $a < b$ ist.

## Aufgabe 6 (8 Punkte)

Kosmische Strahlung erzeugt beim Auftreffen auf die Atmosphäre einen Schauer von geladenen Teilchen mit hoher kinetischer Energie. Darunter befinden sich Elektronen, Positronen, Myonen und Anti-Myonen. Diese vier Teilchenarten sollen in einem Messgerät voneinander unterschieden werden, wobei nur die unterschiedlichen (nichtrelativistischen) Geschwindigkeiten von Interesse sind.
Das Messgerät besteht aus einem Zylinder entlang der z-Achse mit einem punktförmigen Einlass am linken Ende und einem Loch zum Auslass am rechten Ende. Im Zylinder wird ein homogenes E-Feld und ein homogenes B-Feld erzeugt, wobei für das B-Feld gilt $\vec{B}_1 = B_1\vec{e}_y$.




(a) Berechnen Sie welche Richtung und welchen Betrag das elektrische Feld im Zylinder (bei bekanntem $B_1$) haben muss, damit nur Teilchen der gewünschten Geschwindigkeit $v$ das Loch am rechten Ende erreichen?

Am rechten Ende treten die Teilchen nun mit bekannter Geschwindigkeit $v$ aus. Dort wird ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}_2 = B_2\vec{e}_y$ erzeugt, aber kein elektrisches Feld.

(b) Wie können die vier Teilchenarten rechts vom Zylinder voneinander unterschieden werden? Geben Sie eine Formel zur Bestimmung der Masse der Teilchen anhand der beobachtbaren Teilchenbahn und der bekannten Größen $B_1, E_1, B_2$ und dem Ladungsbetrag $|q|$ an.

**Hinweis:** Elektronen und Myonen sind einfach negativ geladen, Positronen und Anti-Myonen einfach positiv. Elektronen und Positronen besitzen dieselbe Masse, Myonen und Anti-Myonen ebenfalls. Myonen sind deutlich schwerer als Elektronen.

## Lösung

(a) Benötigt wird ein Kräftegleichgewicht für die Teilchen mit der richtigen Geschwindigkeit $v$ (Prinzip eines Wien-Filters):

$$\begin{aligned} F_{ges} &= q \cdot \vec{E} + q \cdot \vec{v} \times \vec{B} &(34)\\ &= q \cdot \vec{E} + q \cdot v \cdot B \cdot \hat{\vec{e}}_z \times \hat{\vec{e}}_y &(35)\\ &= q \cdot \vec{E} - q \cdot v \cdot B \hat{\vec{e}}_x \stackrel{!}{=} 0 &(36)\\ \Rightarrow \vec{E} &= v \cdot B \cdot \hat{\vec{e}}_x &(37) \end{aligned}$$

**[3]**

(b) Teilchen werden durch das konstante Magnetfeld auf eine Kreisbahn in der x-z-Ebene gebracht:

$$\vec{F}_{B_2} = \vec{F}_Z \qquad (38)$$

$$|q| \cdot v \cdot B_2 = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{|q| \cdot B_2} \qquad (39)$$

Da $|q|$ und $v$ aller Teilchen gleich groß sind, wenn sie aus dem Zylinder austreten, ist die Ablenkung (also der Radius $R$ der Kreisbahn) nur Masseabhängig. Das Vorzeichen der Ladung bestimmt die Richtung der Ablenkung:

**[3]**

- Elektronen: negativ, kleine Masse: kleiner, unterer Halbkreis
- Myonen: negativ, große Masse: großer, unterer Halbkreis
- Positron: positiv, kleine Masse: kleiner, oberer Halbkreis
- Anti-Myon: positiv, große Masse: großer, oberer Halbkreis

**[2]**

Mit $e \cdot v \cdot B_2 = m \cdot \frac{v^2}{R}$ und $E_1 = v \cdot B_1$ ergibt sich für die exakten Massen:

$$m = \frac{e \cdot R \cdot B_1 \cdot B_2}{E_1}. \qquad (40)$$

## Aufgabe 7 (4 Punkte)

Wie schnell muss ein Raumfahrer mit konstanter Geschwindigkeit fliegen, um die Strecke von der Erde bis zum nächsten Fixstern Proximus Centaurus (Entfernung 4.3 Lichtjahre) in einer Zeitspanne zurückzulegen, während der er selber um fünf Jahre altert?

## Lösung:

Für die Eigenzeit $t'$ im System des Raumfahrers gilt:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{s}{\beta c} \qquad (41)$$

[**1**]

mit der Lichtgeschwindigkeit $c$, der zurückgelegten Strecke $s = ct_r$ mit der Reisedauer $t_r = 4.3\text{y}$ und $\beta = \frac{v}{c}$.

[**1**]

Einsetzen ergibt:

$$t' = \sqrt{1-\beta^2}\frac{ct_r}{c\beta} \tag{42}$$

$$\frac{t'}{t_r} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{43}$$

$$\left(\frac{t'}{t_r}\right)^2 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \tag{44}$$

Dann ist

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t'}{t_r}\right)^2 + 1}} \tag{45}$$

[**1**]

Mit $t' = 5\text{y}$ berechnet sich dies zu

$$\beta = 0.652 \tag{46}$$

und deshalb ist die Geschwindigkeit

$$v = 0.652\text{c} \tag{47}$$

[**1**]

## Konstanten

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1} \qquad \mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}\text{mkgs}^{-2}\text{A}^{-2}$$

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{C} \qquad c = 3 \cdot 10^8\text{m/s}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg} \qquad m_U = 1,66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$