Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

WS 05/06

HÖHERE MATHEMATIK 2 FÜR PHYSIK

(Analysis 1)

Studienbegleitende Prüfung *B*
Donnerstag, 16.02.2006, 9 : 00 – 10 : 30 *Uhr*.
Arbeitszeit : 90 *Minuten*

1. Aufgabe. Gegeben seien die Polynome $P(z) = 6z^2+6z-6$ und $Q(z) = z^3+2z^2-5z-6$.

1. Man bestätige, dass -1, 2 und -3 genau die Nullstellen von $Q(z)$ sind.
2. Man finde die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion
$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
3. Man berechne
$$I := \int_0^1 \frac{6x^2+6x-6}{x^3+2x^2-5x-6}dx$$
und bestimme zwei ganze Zahlen a und b derart, dass $I = a\ln 2 + b\ln 3$ gilt.

[11 Pkte.]

2. Aufgabe. Man berechne $x = \Re z$ und $y = \Im z$ für die Lösungen $z \in \mathbb{C}$ von
$$z^2 = -5 + 12i\ .$$
Die Lösungen x und y sind ganze Zahlen, die explizit anzugeben sind (Hilfe: $13^2 = 169$). Man finde den Betrag von z und den Tangens des Polarwinkels von z.

[7 Pkte.]

3. Aufgabe. Sei
$$g :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ g(x) = x^2 - \frac{1}{x}\ .$$

1. Man berechne $g'(x)$, $g''(x)$ und $g'''(x)$.
2. Warum ist g streng monoton wachsend?
3. Man bestimme
$$\lim_{x\to 0} g(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} g(x)\ .$$
4. Warum hat g eine Umkehrfunktion? Sei f die Umkehrfunktion von g.
   (a) Wie lautet der Definitionsbereich D von f (Begründung!) und wie lautet $f(D)$?
   (b) Warum gilt $f(0) = 1$?
   (c) Man berechne $f'(0)$, $f''(0)$ und $f'''(0)$.

[11 Pkte.]

4. Aufgabe. Sei

$$f : [-4, 4] \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = \frac{3+x}{7+x} \ .$$

1. Man zeige, dass die Funktion f Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten $L = 4/9$ ist.

2. Man zeige

$$f([-4, 4]) \subset [-4, 4] \ .$$

3. Man zeige, dass <u>genau</u> ein $\tilde{x} \in [-4, 4]$ mit $f(\tilde{x}) = \tilde{x}$ existiert. Man bestimme $\tilde{x}$. Gesucht ist also der eindeutig bestimmte Fixpunkt von f auf $[-4, 4]$.

4. Warum wird durch $x_0 := -4$, $x_{n+1} := f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ eine Folge $(x_n) \subset [-4, 4]$ rekursiv (sinnvoll) definiert?

5. Warum gilt

$$|x_n - \tilde{x}| \leq 8 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad , n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

für die in Nr.4 definierte Folge (x_n) und das in Nr.3 berechnete $\tilde{x}$?

6. Man bestimme

$$\lim_{n \to \infty} x_n$$

und begründe das Ergebnis.

[15 Pkte.]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.