Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

06.03.2003

Vordiplom Mathematik 2 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 **14 Punkte**

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit der Eigenschaft $f(0) = f(1) = 1$. Ist es möglich, dass für alle $x \in (0,1)$ die Ungleichung $f'(x) > 0$ gilt? Man gebe eine kurze Begründung an.

b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit der Eigenschaft $f(1) = -f(-1) \neq 0$. Ist es möglich, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $f(x) \neq 0$ gilt? Man gebe eine kurze Begründung an.

c) Beweise, dass für eine feste Zahl q zwischen 0 und 1 und jede natürliche Zahl n die folgende Beziehung gilt:

$$\textstyle\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

d) Die Funktion f werde durch folgende Vorschrift festgelegt:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := e^{-x^2}$$

Beweise oder widerlege die folgende Aussage: f ist eine beschränkte Funktion.

e) Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Es gibt keine auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ die nachstehende Gleichung gilt:

$$(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$$

Aufgabe 2 **13 Punkte**

a) Besitzt die folgende Differentialgleichung zwei linear unabhängige periodische Lösungen? Begründe die Antwort detailliert.

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

b) Finde zwei linear unabhängige Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(x) + 5y'(x) - 6y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

c) Man gebe eine spezielle Lösung der nachstehenden Differentialgleichung an:

$$y'(x) - y(x) = 7x + 3 \qquad x \in \mathbb{R}$$

d) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Beweise oder widerlege die folgende Aussage: Es ist möglich, eine von der Nullfunktion verschiedene Lösung y dieser Differentialgleichung zu finden, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die folgende Beziehung gilt: $y(x) = y(x + 2\pi)$.

Aufgabe 3 **13 Punkte**

a) Man untersuche, ob die folgende Funktion stetig ist:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto f(x) := x + \frac{x}{|x|} \qquad f(0) := 1$$

b) Begründe detailliert, welche der nachstehenden Reihen konvergent bzw. welche divergent sind:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

c) Berechne den Wert der folgenden Reihe, wobei i die imaginäre Einheit ist:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{2^n\, n!}$$

d) Man gebe eine detaillierte Antwort auf die folgende Frage: Ist es möglich, zwei voneinander verschiedene reelle Zahlen x, y zu finden, so dass

$$\sin x + \sin y \neq 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad ?$$

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!