Klausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Pfeiffer
Wintersemester 2013/2014
10. Februar 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

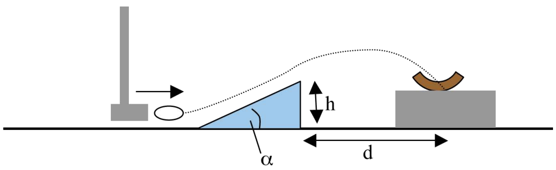
Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Puck der Masse m soll reibungsfrei über eine Rampe mit Neigungswinkel α und einer Endhöhe h in einen Korb geschlagen werden, der sich im Abstand d zum Ende der Rampe und in gleicher Höhe h wie das Ende der Rampe befindet. Die Erdeschleunigung sei g.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 muss der Puck die Rampe verlassen, damit er den Korb trifft?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit muss der Einhockeyschläger (mit Masse M) auf den ruhenden und als elastisch angenommenen Puck zentral stoßen, damit dieser die Geschwindigkeit v_0 am Ende der Rampe erhält? (Nehmen Sie an, dass $M \gg m$).



Lösung

(a) Die Geschwindigkeit beim Verlassen der Rampe in x- und y-Richtung ohne Gravitation sind $x_{x,0} = v_0 \cos\alpha$ und $v_{y,0} = v_0 \sin\alpha$. Mit Erdbeschleunigung ist die Geschwindigkeit in y-Richtung $v_y(t) = -gt + v_{y,0}$. Damit ist die Flugzeit

$$t_F = 2\frac{v_{y,0}}{g}$$

[1,5]

und die Flugweite

$$d = v_{x,0} \cdot t_F = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$$

[1]

Damit ist die benötigte Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \sqrt{\frac{dg}{2\cos\alpha\sin\alpha}}$$

[1]

(b) Es findet eine Impulsübertragung (Reflexion an harter Wand) statt. Damit ist $v_{\text{Puck}} = \frac{2M}{m+M} v_{\text{Schläger}} \approx 2v_{\text{Schläger}}$ für $M \gg m$ und

$$\frac{1}{2}mv_{\text{Puck}}^2 - mgh = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Damit ist

$$v_{\text{Schläger}} = \sqrt{\frac{1}{4}v_0^2 + \frac{1}{2}gh}$$

[2,5]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Schon Jules Verne hatte die Idee, ein Raketengeschoss auf direktem Weg von der Erde auf den Mond zu schießen.

(a) Bestimmen Sie durch Integration die Arbeit, die erforderlich ist, einen Körper gegen die Gravitationskraft von der Erdoberfläche ins Unendliche zu bringen. Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit (Geschwindigkeit, die ein Geschoss bei senkrechtem Abschuss mindestens benötigt, um dem Gravitationsfeld der Erde zu entkommen)?

(b) Berechnen Sie den Bahndrehimpuls des Mondes. (Kreisförmige Umlaufbahn um die Erde mit $T_M = 27,32$ Tagen angenommen)

(c) Ändert sich der Drehimpuls des Systems Erde-Geschoss-Mond, wenn ein Geschoss von der Erde zum Mond fliegt? Warum?

Konstanten

Erdmasse $M_E = 5,974 \cdot 10^{24}$kg, Mondmasse $M_M = 7,349 \cdot 10^{22}$kg, Erdradius $R_E = 6371$km, Mondradius $R_M = 1738$km, Gravitationskonstante $G = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{m}^3/\text{kgs}^2$, Mittlerer Abstand Erde-Mond: $d = 384400$km.

Lösung

(a) Es gilt

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s} = \int_{R_E}^{\infty} F_G(r)\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_{R_E}^{\infty} -G\frac{mM_E}{r^2}\,\mathrm{d}r = G\frac{mM_E}{r}\bigg|_{R_E}^{\infty} = -G\frac{mM_E}{R_E}$$

[**1**]

Eine Flucht ist möglich, falls $E_{\mathrm{kin}} > \Delta E_{\mathrm{pot}}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2}mv^2 > G\frac{mM}{R_E} \Rightarrow v > \sqrt{\frac{2GM}{R_E}}$$

Damit ist $v_E \approx 11,2\mathrm{km/s}$.

[**1**]

(b) Es gilt

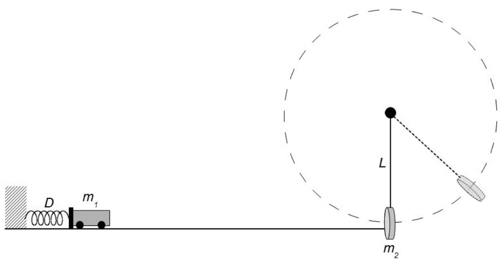
$$L = dM_M v_M = dM_M\frac{2\pi d}{T} = 2,89\cdot 10^{34}\mathrm{kgm^2/s}$$

[**1**]

(c) Es findet keine Änderung statt, da das System Erde-Rakete-Mond abgeschlossen ist und Drehimpulserhaltung gilt.

[**1**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)



Ein Wagen (Masse m_1) wird mithilfe einer gespannten Feder (Federkonstante D) beschleunigt. Er fährt geradlinig und reibungsfrei auf eine an einem masselosen Faden (Länge L) hängende Zielscheibe (Masse m_2) zu. Die Zielscheibe soll im Folgenden als Punktmasse behandelt werden.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 fährt der Wagen, wenn die Feder um Δx gespannt war?

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Zielscheibe nach dem vollkommen elastischen Stoß mit den Wagen? Betrachten Sie hierzu vereinfacht den Grenzfall $m_1 \ll m_2$.

(c) Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_1 mindestens sein, damit die Zielscheibe einen Überschlag mit gespanntem Faden schafft?

Lösung

(a) Energieerhaltung liefert

$$\frac{1}{2}D(\Delta x)^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \Rightarrow v_1 = \Delta x \sqrt{\frac{D}{m_1}}$$

[1]

(b) Wegen $m_1 \ll m_2$ wird der Wagen reflektiert und es ergibt sind eine Impulsänderung des Wagens von

$$\Delta p^{\text{Wagen}} = -2p = -2m_1 v_1$$

Wegen Impulserhaltung gilt $\Delta p^{\text{Wagen}} + \Delta p^{\text{Scheibe}} = 0 \Rightarrow p^{\text{Scheibe}} = -\Delta p^{\text{Wagen}}$ (vorher $p^{\text{Scheibe}} = 0$), also $m_2 v_2 = 2m_1 v_1$, womit $v_2 = 2\frac{m_1}{m_2}v_1 = \frac{2x}{m_2}\sqrt{Dm_1}$.

[2]

(c) Im Scheitelpunkt gilt $F_Z \geq F_G$, also $m_2 \frac{v_S^2}{L} \geq m_2 g$ und $v_S^2 \geq gL$.

[1]

v_S kann mit Energieerhaltung bestimmt werden:

$$\frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_2 v_S^2 + m_2 g 2L \Rightarrow v_S = \sqrt{v_2^2 - 4gL}$$

Die Bedingung für einen Überschlag ist $v_S^2 = v_2^2 - 4gL > gL$, also

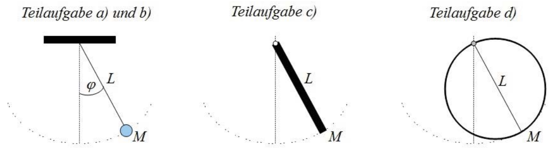
$$v_2^2 > 5gL \Rightarrow v_1^2 > \frac{5}{4}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 L$$

[2]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Drei Körper von jeweils der Masse M sind als Pendel aufgehängt.

(a) Eine Masse an einem masselosen Faden der Länge L: Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel $\varphi(t)$ auf.



(b) Geben Sie die Näherung für kleine Winkel an und bestimmen sie die Schwindungsdauer T des Pendels dem Ansatz $\varphi(t) = A\sin(\omega t)$.

(c) Wie groß ist die Schwingungsdauer T für einen schwingenden Stab? (Ein Stab hat ein Trägheitsmoment $I = {}^1\!/_{12} ML^2$ bei der Rotation um seinen *Schwerpunkt*)

(d) Wie groß ist die Schwingungsdauer T für einen Ring ($I = MR^2$) mit Radius $R = {}^L\!/_2$ und Masse M?

Hinweis: Benutzen Sie bei c) und d) weiterhin die Kleinwinkelnäherung.

Lösung

(a) Mit einem Kraftansatz erhält man $|F_H| = \sin\varphi F_G = gM\sin\varphi$ und $|F_H| = Ma = M\ddot{r} = ML\ddot{\varphi}$. Damit gilt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{F_H}{ML} = -\frac{g}{L}\sin\varphi$$

[**1**]

(b) Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi \approx \varphi$ erhält man die Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{L}\varphi$$

[**1**]

Mit dem Ansatz $\varphi(t) = A\sin(\omega t)$ ergibt sich $\ddot{\varphi} = -A\omega^2\sin(\omega t)$. Durch Einsetzen erhält man

$$-A\omega^2\sin(\omega t) = -\frac{g}{L}A\sin\omega t \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

[**1**]

(c) Es muss der Satz von Steiner für die veränderte Rotationsachse angewendet werden

$$I_{\text{Stab}} = \frac{1}{12}ML^2 + MD^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

[**1**]

Die Beweggungsgleichung des physikalischen Pendels ist mit einem Drehmomentansatz

$$D = -F_H L_S = I\ddot{\varphi}$$

mit L_S dem Abstand vom Schwerpunkt zum Drehpunkt gegeben. Dann gilt $|F_H| = \sin\varphi F_G = gM\sin\varphi \approx gM\varphi$ und es folgt

$$\ddot{\varphi} = -\frac{gML}{I}\varphi$$

sowie

$$\omega^2 = \frac{gML}{I} = \frac{gML}{\frac{ML^2}{3}} = \frac{3g}{L} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{3g}}$$

[**2**]

(d) Mit dem Satz von Steiner gilt $I_{\text{ges}} = I_{\text{Ring}} + ML_S^2$ mit $L_2 = {}^L\!/_2$ und $I_{\text{Ring}} = M({}^L\!/_2)^2$. Damit folgt

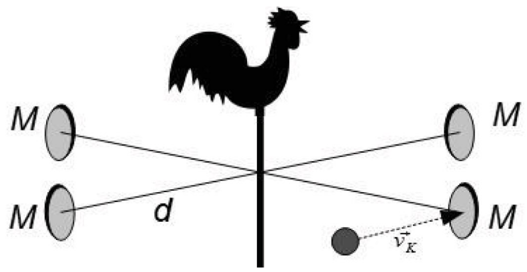
$$I_{\text{ges}} = M\left(\frac{L}{2}\right)^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{2}$$

und

$$\omega^2 = \frac{gML}{I} = \frac{gML}{\frac{ML^2}{2}} = 2\frac{g}{L} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

[**2**]

Aufgabe 5 (6 Punkte)



Ein masseloser Wetterhahn sitzt auf einem nicht ganz reibungsfreien Drehkreuz, an dessen Stäben homogene Scheiben mit jeweils der Masse M und Radius R befestigt sind. Der Schwerpunkt der Scheiben liegt jeweils im Abstand d zum Drehpunkt.

Ein Lausbub' schiesst mit einem Kaugummi (Masse m) auf eine der Scheiben. Das Kaugummi trifft senkrecht zur Scheibe und in deren Mitte mit der Geschwindigkeit v_K auf.

(a) Welches Trägheitsmoment hat die gezeigte Anordnung bezüglich der Drehachse? Benutzen Sie den Zusammenhang $I_z = I_x + I_y$ für flache Körper, um das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe bezüglich einer Symmetrieachse in der Körperebene zu berechnen. I_z ist dabei das Trägheitsmoment bezüglich einer Rotation um die Achse, die senkrecht zur Fläche steht und durch den Scheibenmittelpunkt verläuft ($I_z = {}^1\!/_2 MR^2$.

(b) Welchen Bahndrehimpuls hat das Kaugummi bezüglich der Drehachse des Drehkreuzes im Moment kurz vor dem Auftreffen?

(c) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit dreht sich der Hahn nach dem Stoß?

(d) Der Bewegung wirkt eine Reibungsmoment entgegen, die proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist $D_R = -\gamma\omega$. Stellen Sie eine Differentialgleichung für den Winkel φ zur Ruhelage des Kreuzes auf. Lösen Sie diese Gleichung mithilfe des Ansatzes $\varphi(t) = Ae^{-t/\tau}$ und berechnen Sie die Relaxationszeit τ.

Lösung

(a) Aus der Symmetrie des Problems folgt $I_x = I_y = {}^1\!/_2 I_z$. Damit gilt

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I_x = \frac{1}{4}MR^2$$

Der Satz von Steiner liefert $I_S = Md^2 + I_x$ (Trägheitsmoment einer Kugel) und die Additivität von Trägheitsmomenten $I_{\text{ges}} = 4Md^2 + MR^2$.

[**2**]

(b) Es gilt $L = mv_K d$

[**1**]

(c) Die Drehimpulserhaltung liefert $L = (I_{\text{ges}} + I_K)\omega = mv_K d$, also

$$\omega = \frac{mv_k d}{4Md^2 + MR^2 + md^2}$$

mit $I_K = md^2$ wegen der zusätzlichen Masse des Kaugummis.

[**1**]

(d) Es gilt $D_R = -\gamma\omega = -\gamma\dot{\varphi}$ und $D = \dot{L} = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi}$, also ist die zu lösende DGL $-\gamma\dot{\varphi} = I\ddot{\varphi}$.

[**1**]

Man erhält

$$\varphi(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{1}{\tau}Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{1}{\tau^2}Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

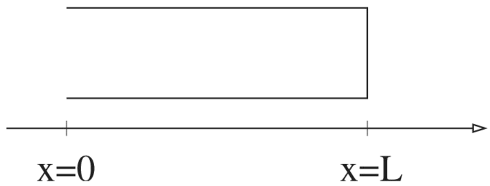
Also formuliert sich die DGL zu

$$-\frac{-\gamma}{\tau} = \frac{I}{\tau^2}$$

also erhält man $\tau = 1/\gamma$.

[**1**]

Aufgabe 6 (2 Punkte)



Eine Orgelpfeife ist am linken Ende ($x = 0$) offen und am rechten Ende ($x = L, L = 1\text{m}$) geschlossen. Berechnen Sie die Frequenz f und die Wellenlänge λ für die Grundschwingung und die erste Oberschwingung (Schallgeschwindigkeit $v = 340\text{m/s}$).

Lösung

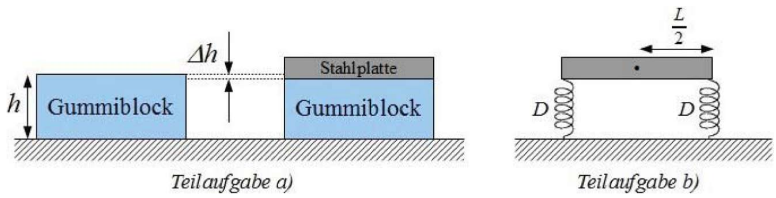
Am offenen Ende ($x = 0$) hat der Druck einen Knoten und am geschlossenen Ende ($x = L$) einen Schwingungsbauch. Die Schallgeschwindigkeit ist $v = \lambda f = 340\text{m/s}$. Für die Grundschwingung gilt $\lambda_1 = 4L = 4\text{m}$, $f_1 = v/\lambda_1 = 85\text{Hz}$. Für die erste Oberschwingung gilt $\lambda_2 = 4L/3 = 1,3\text{m}$ und $f_2 = v/\lambda_2 = 255\text{Hz}$.

[**2**]

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Eine lange Stahlplatte mit Grundfläche $10\text{cm} \times 120\text{cm}$ und Masse 40kg liegt auf einem Gummiblock mit der gleichen Grundfläche und Höhe $h = 30\text{cm}$. Durch das Gewicht der Platte wird der Gummiblock um $\Delta h = 5\text{mm}$ zusammengedrückt (siehe Abbildung)

(a) Wie groß ist das Elastizitätsmodul des Gummiblocks?



(b) Der Block soll durch zwei masselose Federn ersetzt werden, so dass sich die gleiche relative Deformation bei den Federn einstellt. Wie groß ist dann die Federkonstante D einer einzelnen Feder?

Lösung

(a) Es gilt

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta h}{h}} = \frac{40\text{kg} \cdot 9,81\text{m/s}^2 \cdot 0,3\text{m}}{(0,1\text{m} \cdot 1,2\text{m}) \cdot 5 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 1,96 \cdot 10^5\text{N/m}^2$$

[**1**]

(b) Es gilt $F_{\text{Block}} = 2F_{\text{Feder}} = 2D\Delta h$ und $\sigma = E\epsilon$ bzw.

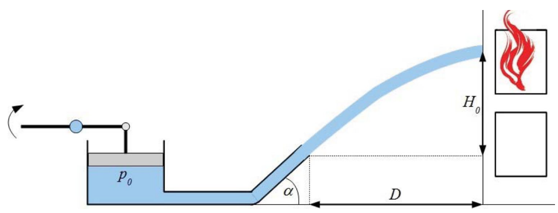
$$\frac{F_{\text{Block}}}{A} = E\frac{\Delta h}{h}$$

womit man erhält, dass

$$D = E\frac{A}{2h} = 1,96 \cdot 10^5\text{N/m}^2 \frac{0,1\text{m} \cdot 1,2\text{m}}{2 \cdot 0,3\text{m}} = 3,92 \cdot 10^4\text{N/m}$$

[**2**]

Aufgabe 8 (4 Punkte)



Das Bild zeigt eine Feuerwehrpumpe mit Löschschlauch. Das Wasser soll als ideale Flüssigkeit angenommen werden.

(a) Bestimmen Sie die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus dem Löschschlauch als Funktion des Drucks p_0.

(b) Bis zu welcher Hohe kann maximal gelöscht werden, wenn das Wasser senkrecht nach oben gespritzt wird?

(c) Das Wasser tritt nun unter einem Winkel α aus dem Schlauch aus. In welchem Abstand D erreicht das Wasser seine maximale Höhe H_0 über der Schlauchspitze? Wie groß ist die Höhe H_0 als Funktion des Winkels α?

Lösung

(a) Das Bernoulli-Gesetz liefert

$$p_0 = \frac{1}{2} p v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$$

[**1**]

(b) Es gilt

$$E_{\text{pot}}^{\text{max}} = E_{\text{kin}}^{\text{Austritt}} \Rightarrow mgh_{\text{max}} = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow h_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} = \frac{p_0}{g\rho}$$

[**1**]

(c) Es gilt $v_{x,0} = v \cos\alpha$ und $v_{y,0} = v \sin\alpha$. Auf dem Scheitel gilt $v_y(t_S) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow v_Y(t_S) = v_{y,0} - g t_S$, also

$$t_S = \frac{v_{y,0}}{g} = \frac{v \sin\alpha}{g}$$

Es soll des weiteren $x(t_S) \overset{!}{=} D$ gelten, also

$$x(t_S) = v_x t_S = v \cos\alpha \frac{v \sin\alpha}{g} = \frac{v^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \overset{!}{=} D$$

Damit erhält man

$$D = \frac{2p_0}{g\rho} \sin\alpha \cos\alpha$$

[**2**]