Klausur zur Theoretischen Physik 3: QUANTENMECHANIK

Prof. H.Friedrich, TU München

Montag, 24.07.2006 Hörsaal 1 9:00 - 10:30

---

1. Geben Sie für jeden der folgenden Operatoren an (ohne Beweis):

   (a) ob er hermitisch ist oder nicht,

   (b) ob er unitär ist oder nicht.

$$\begin{array}{l} \hat{x}, \quad \dfrac{\partial}{\partial p}, \quad \text{der Quantenvernichtungsoperator } \hat{b}, \\ \hat{b}^\dagger \hat{b}, \quad e^{i\hat{x}/\beta} \quad (\beta \in \mathbb{R}), \quad \text{der Paritätsoperator } \hat{\Pi}. \end{array} \qquad \text{(6P)}$$

   (c) Das Heliumatom werde durch den folgenden Zwei-Elektronen-Hamiltonoperator beschrieben:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_0} + \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_2^2}{2m_0} - \frac{2e^2}{r_1} - \frac{2e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|} + V_{\text{Spin-Bahn}}(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\hat{\boldsymbol{L}} \cdot \hat{\boldsymbol{S}},$$

   wobei $\hat{\boldsymbol{L}} = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{L}}_2$ und $\hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_2$ der Gesamtbahndreimpuls bzw. der Gesamtspin des Zwei-Elektronen-Systems ist. Geben Sie für jeden der folgenden vier Operatoren an, ob er mit $\hat{H}$ kommutiert oder nicht (geben Sie jeweils eine kurze Begründung):

$$\hat{\Pi} : \Psi(\boldsymbol{r}_1, m_{s_1}, \boldsymbol{r}_2, m_{s_2}) \longmapsto \Psi(-\boldsymbol{r}_1, m_{s_1}, -\boldsymbol{r}_2, m_{s_2}),$$

$$\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}, \quad \hat{\boldsymbol{J}}_1 = \hat{\boldsymbol{L}}_1 + \hat{\boldsymbol{S}}_1, \quad \hat{H}_1 = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_1^2}{2m_0} - \frac{2e^2}{r_1}. \qquad \text{(8P)}$$

2. (a) Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist der Operator $\hat{A} = \alpha\hat{\sigma}_x + \beta\hat{\sigma}_y + \gamma\hat{\sigma}_z$ unitär? (3P)

   (b) Zeigen Sie, dass für den Operator $\hat{B} = (\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_z)/\sqrt{3}$ gilt:

$$e^{i\pi\hat{B}} = -\mathbf{1}. \qquad \text{(3P)}$$

3. Betrachten Sie die auf Eins normierte Wellenfunktion

$$\psi_L(x) = \begin{cases} A\cos(x/L), & |x| \le \pi L/2 \\ 0, & |x| > \pi L/2. \end{cases}$$

   (a) Berechnen Sie $|A|$. (2P)

(b) Sei

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2}\omega^2 x^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-\beta^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right), \quad \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega}}.$$

Für welchen Wert der Länge L ist der Erwartungwert $E_L = \langle\psi_L|\hat{H}|\psi_L\rangle$ minimal? Vergleichen Sie den minimalen Wert E_L mit dem exakten Energieeigenwert des Grundzustands von $\hat{H}$.

(8P)

4. Der Zustand eines harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \frac{m_0}{2}\omega^2 x^2$$

wird zur Zeit $t = 0$ durch die Wellenfunktion

$$|\psi(t=0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$$

beschrieben, wobei $|n\rangle$ den Eigenzustand von $\hat{H}$ zur Quantenzahl n bezeichnet.

Nehmen Sie an, dass $\langle x\rangle_{t=0} < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Ortserwartungswerts gegeben ist durch:

$$\langle x\rangle_t = \langle\psi(t)|\hat{x}|\psi(t)\rangle = A\cos(\omega(t-t_0)),$$

mit reellen Konstanten A und t_0. (15P)

Nützliche Information:

- Auf- und Absteigeoperatoren eines harmonischen Oszillators der Masse m_0 und der Frequenz ω:

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} - \mathrm{i}\frac{\beta}{\hbar}\hat{p}\right), \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} + \mathrm{i}\frac{\beta}{\hbar}\hat{p}\right), \qquad \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega}}$$

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad \hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

- Nützliche Integrale:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos x \sin x \\ \int x^2\cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \frac{x^3}{6} + \frac{x\,\cos(2\,x)}{4} + \frac{\left(-1+2\,x^2\right)\,\sin(2\,x)}{8}.\end{aligned}$$

- Pauli Matrizen:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$