....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik 4 für Physik
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

09. April 2010, 8:30 – 10:00 Uhr, MI HS 1

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4-Seiten

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Zirkulation eines Vektorfeldes** **[6 Punkte]**

Es bezeichne $K_r(a) := \{\zeta \in \mathbb{R}^2 \mid |\zeta - a| \leq r\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$. Sei

$$M := K_{10}(1,0) \setminus \big(K_1(-3,0) \cup K_1(0,0) \cup K_1(0,3)\big)$$

und ∂M der positiv orientierte Rand von M. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y + x^3 \cos(x^2) \\ e^{y^2} + 2x \end{pmatrix}$$

entlang ∂M.

Lösung:

Wir benutzen die 2-dimensionale Variante des Satzes von Stokes,

$$\underbrace{\int_{\partial M} v \cdot \mathrm{d}r}_{[2]} \overset{[2]}{=} \int_M \mathrm{rot} v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Die Rotation von v ist aber gerade 1, denn

$$\mathrm{rot} v = \partial_x v_y - \partial_y v_x = 2 - 1 \overset{[1]}{=} 1.$$

Somit ist die Zirkulation gleich dem Flächeninhalt von M, also

$$\int_{\partial M} v \cdot \mathrm{d}r = \int_M \mathrm{rot} v \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_M 1 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \pi \left(10^2 - 1^2 - 1^2 - 1^2\right)$$
$$\overset{[1]}{=} 97\pi.$$

2. **Fluss durch eine Oberfläche** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche

$$S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2+y^2},\ x,y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 4 \right\}$$

welche in Richtung positiver z-Achse orientiert sei.

Lösung:

Wir parametrisieren die Fläche S mittels Zylinderkoordinaten: wir definieren die Abbildung $\psi : [0, \pi/2] \times [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ über

$$\psi(\varphi, z) \overset{[2]}{:=} \begin{pmatrix} z \cos\varphi \\ z \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Ein Normalenvektor $\tilde{n}$ ist gegeben durch

$$\tilde{n}(\varphi, z) := \partial_\varphi \psi \times \partial_z \psi = \begin{pmatrix} -z \sin\varphi \\ +z \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \cos\varphi \\ z \sin\varphi \\ -z \end{pmatrix}.$$

Das entlang positiver z-Richtung orientierte Flächenelement ist also

$$n \, \mathrm{d}S = \begin{pmatrix} -z \cos\varphi \\ -z \sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z \qquad [2]$$

und das Oberflächenintegral berechnet sich zu

$$\underbrace{\int_S v \cdot n \, \mathrm{d}S}_{[2]} \overset{[1]}{=} \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} z \sin\varphi \\ -z \cos\varphi \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -z \cos\varphi \\ -z \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}z \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \, z^2 = \tfrac{1}{3} 2^3 \cdot \tfrac{\pi}{2} \overset{[1]}{=} \tfrac{4}{3}\pi.$$

3. **Residuenkalkül** **[7 Punkte]**

Gegeben sei $f(z) = \tan z + e^z$.

(a) f hat bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$,

☐ hebbare Singularitäten. ☒ Pole 1. Ordnung. [1] ☐ Pole 2. Ordnung.
☐ Pole -1. Ordnung. ☐ wesentliche Singularitäten. ☐ keine Singularitäten.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$:

$\operatorname{Res}_{z_n}(f) = -1$ [2]

(c) Bestimmen Sie

$\int_{|z|=\pi} f(z)\,\mathrm{d}z = -i4\pi$ [2]

(d) Welchen Konvergenzradius hat die Taylor-Reihe von f um $z = 0$?

$R = \frac{\pi}{2}$ [2]

Lösung:

(a) Die Funktion e^z ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph und hat daher keine Singularitäten oder Pole. Die Funktion $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$ hat bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ Pole 1. Ordnung, denn $\cos z = \sin(z - \frac{\pi}{2})$ verhält sich bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ wie der sin bei $2n\pi$, also in erster Näherung linear.

(b) Man kann das Residuum direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{(2n+1)\frac{\pi}{2}} f = \operatorname{Res}_{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \tan z &= \left.\frac{\sin z}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z}\right|_{z=(2n+1)\frac{\pi}{2}} \\ &= \left.\frac{\sin z}{-\sin z}\right|_{z=(2n+1)\frac{\pi}{2}} = -1 \end{aligned}$$

(c) Von der Kurve werden zwei Residuen eingeschlossen, das bei $z = -\frac{\pi}{2}$ und das bei $z = +\frac{\pi}{2}$. Die Residuen sind beide -1 und somit ergibt das Integral

$$\int_{|z|=\pi} f(z)\,\mathrm{d}z = i2\pi\left(\operatorname{Res}_{-\frac{\pi}{2}} f + \operatorname{Res}_{+\frac{\pi}{2}} f\right) = i2\pi \cdot (-1-1) = -i4\pi.$$

(d) Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ist gleich dem Abstand zur nächsten Singularität, hier also $\pm\pi/2$.

4. **Fourier-Transformation** **[8 Punkte]**

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine Funktion, die sich auf den Streifen $S_r := \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < r\}$, $r > 0$, zu $f : S_r \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph fortsetzen lässt. Weiterhin nehmen wir an, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ existiert, so dass $|f(z)| < \varepsilon$ für alle $|\mathrm{Re}\, z| > R_\varepsilon$ gilt. Begründen Sie sorgfältig, dass die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < r$ die Gleichung

$$\hat{f}(k) = \frac{e^{ka}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, f(x + ia)\, \mathrm{d}x$$

erfüllt.

Lösung:

Da f per Annahme integrierbar ist, existiert die Fourier-Transformierte

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Die Idee ist, linke und rechte Seite der Behauptung als Grenzwerte von Pfadintegralen in der komplexen Ebene zu interpretieren: Für endliches $R > 0$ können wir über ein Rechteck $\gamma_1(R) \cup \gamma_2(R) \cup \gamma_3(R) \cup \gamma_4(R)$ in der komplexen Ebene integrieren. $\gamma_1(R) = [-R, +R]$ ist der Pfad entlang der reellen Achse, $\gamma_3(R) = [+R + ia, -R + ia]$ ist der um ia verschobene Pfad (man beachte die Orientierung!). Die Hilfspfade $\gamma_2(R) = [+R, +R + ia]$ und $\gamma_4(R) = [-R + ia, -R]$ schließen das Rechteck.

Da f auf S_r holomorph ist, schließt der Pfad $\gamma_1(R) \cup \gamma_2(R) \cup \gamma_3(R) \cup \gamma_4(R)$ keine Residuen ein, die rechte Seite ist 0,

$$\int_{\gamma_1(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_3(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_4(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z = 0.$$

Wir stellen um und erhalten

$$\int_{\gamma_1(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z = -\int_{\gamma_3(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z - \int_{\gamma_4(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z.$$

Im Limes $R \to \infty$ geht die linke Seite gegen $\sqrt{2\pi}\hat{f}(k)$. Wir zeigen zunächst, dass im Limes $R \to \infty$ der erste Term auf der rechten Seite gegen $\sqrt{2\pi}$ Mal der rechten Seite der Behauptung konvergiert:

$$\begin{aligned}
-\int_{\gamma_3(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z &= -\int_{+R}^{-R} 1 \cdot e^{-ik(s+ia)}\, f(s + ia)\mathrm{d}s = +\int_{-R}^{+R} e^{-i^2 ka}\, e^{-ikx}\, f(x + ia)\, \mathrm{d}x \\
&= e^{ka} \int_{-R}^{+R} e^{-ikx}\, f(x + ia)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Die Integrale über die Hilfswege $\gamma_2(R)$ und $\gamma_4(R)$ verschwinden im Grenzfall $R \to \infty$: z. B. lässt sich das Integral entlang von $\gamma_2(R)$,

$$\int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z = \int_0^a i \cdot e^{-ik(R+is)}\, f(R + is)\, \mathrm{d}s,$$

betragsmäßig unabhängig von R abschätzen durch

$$\left| \int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z \right| \leq \int_0^a \left| e^{-ik(R+is)} f(R + is) \right| \mathrm{d}s \leq a\, e^{ka} \sup_{z \in S_r} |f(z)|.$$

Da f auf S_r holomorph ist und für $|z| \to \infty$ innerhalb von S_r gegen 0 geht, ist $\sup_{z \in S_r} |f(z)|$ endlich. Wir können also dominierte Konvergenz anwenden und schließen daraus, dass das Integral über den Hilfsweg $\gamma_2(R)$ für $R \to \infty$ verschwindet,

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z = \int_0^a \lim_{R \to \infty} i e^{-ik(R+is)}\, f(R + is)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Vollkommen analog zeigt man, dass auch

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_4(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z = \int_a^0 \lim_{R\to\infty} ie^{-ik(-R+is)}\, f(-R+is)\, \mathrm{d}s = 0$$

gilt. Somit erhalten wir die Behauptung,

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z \\
&= - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_3(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z + \\
&\quad - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_2(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z - \lim_{R\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_4(R)} e^{-ikz}\, f(z)\, \mathrm{d}z \\
&= \frac{e^{ka}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, f(x+ia)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

5. **Komplexe Wegintegrale** **[5 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) := \prod_{k=0}^{2010} \frac{1}{z-2k}.$$

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -1$ den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

Lösung:

Die Funktion f hat 2011 einfache Pole bei $z_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq 2010$. Innerhalb des Kreises mit Radius 1 befindet sich nur der Pol $z_0 = 0$. Das Integral ergibt also $i2\pi$ Mal dem $n$ten Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Reihe [1], der hier nur aus einem Glied besteht. (Oder alternativ: bei Fallunterscheidung zwischen $n = -1$ und $n \leq -2$. [1]) Für $n = -1$ erhalten wir also

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^0} \,\mathrm{d}z = \int_{|z|=1} f(z) \,\mathrm{d}z = i2\pi \,\mathrm{Res}_0 f = i2\pi \prod_{k=1}^{2010} \frac{1}{-2k} = \frac{i2\pi(-1)^{2010}}{2^{2010} \cdot 2010!}$$
$$\overset{[2]}{=} + \frac{i\pi}{2^{2009} \cdot 2010!}.$$

Da der Pol um $z = 0$ einfach ist, verschwinden die Koeffizienten höherer Potenzen von $\frac{1}{z}$,

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \,\mathrm{d}z \overset{[2]}{=} 0$$

solange $n \leq -2$.

6. **Die freie Schrödinger-Gleichung** **[7 Punkte]**

Sei $g(x,t)$ eine distributionswertige Lösung der eindimensionalen freien Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t g(x,t) = -\tfrac{1}{2}\partial_x^2 g(x,t)$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, g(x,t)\,\mathrm{d}x = \varphi(0), \qquad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(a) Welcher partiellen Differentialgleichung gehorcht

$$f(x,t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\, g(y,t)\,\mathrm{d}y, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

und welche Anfangsbedingung $f(x,0)$ erfüllt f?

(b) Bestimmen Sie

$$\hat{g}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, g(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Wir erkennen, dass $f(\cdot,t)$ die Faltung der Testfunktion φ und der temperierten Distribution $g(\cdot,t)$ ist,

$$f(x,t) \overset{[1]}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\, g(y,t)\,\mathrm{d}y = \big(\varphi * g(\cdot,t)\big)(x).$$

Somit erfüllt die Distribution f die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} i\partial_t f(x,t) &= i\partial_t\big(\varphi * g(\cdot,t)\big)(x) = \big(\varphi * i\partial_t g(\cdot,t)\big)(x) \\ &= \big(\varphi * \big(-\tfrac{1}{2}\partial_x^2 g\big)(\cdot,t)\big)(x) = -\tfrac{1}{2}\big(\partial_x^2\varphi * g(\cdot,t)\big)(x). \qquad [2] \end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, dass g die distributionelle Lösung der freien Schrödinger-Gleichung ist und dass die distributionellen Ableitungen zwischen den beiden Faktoren einer Faltung hin- und hergeschoben werden können.

(b) Fourier-transformiert man die Differentialgleichung

$$i\partial_t g(x,t) = -\tfrac{1}{2}\partial_x^2 g(x,t), \qquad g(x,0) = \delta(x),$$

so erhält man

$$i\partial_t \hat{g}(k,t) \overset{[1]}{=} \tfrac{1}{2}k^2 \hat{g}(k,t), \qquad \hat{g}(k,0) \overset{[1]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Dieses Anfangswertproblem wird durch die Funktion

$$\hat{g}(k,t) \overset{[2]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{i}{2}tk^2}$$

gelöst.

7. **Hilbert-Raum-Theorie** **[8 Punkte]**

Gegeben sei der Hilbert-Raum $L^2([-\pi,+\pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

(a) Geben Sie eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ und für alle $k \in I$ Normierungsfaktoren $n_k \in \mathbb{R}$ an, so dass $\{e_k\}_{k\in I} = \{n_k e^{ikx}\}_{k\in I}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([-\pi,+\pi])$ bildet:

$I = \mathbb{Z}$ $\qquad n_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ $\qquad$ [2]

(b) Drücken Sie die Norm von $f \in L^2([-\pi,+\pi])$ mittels der Basiskoeffizienten $c_k(f) := \langle e_k, f\rangle$ aus:

$\|f\| = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|c_k(f)\right|^2}$ $\qquad$ [2]

(c) Sei $f : [-\pi,+\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(+\pi) = f(-\pi)$. Zeigen Sie, dass $c_k(f') = +ikc_k(f)$.

Lösung:

(c) $f \in \mathcal{C}^1([-\pi,+\pi])$ ist per Annahme periodisch. Daher liefert partielle Integration die Behauptung:

$$c_k(f') \overset{[1]}{=} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{e^{+ikx}}\, f'(x) \overset{[1]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big[e^{-ikx}\, f(x)\Big]_{-\pi}^{+\pi} - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-ik)\, e^{-ikx}\, f(x)$$
$$\overset{[1]}{=} \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} \big(f(\pi) - f(-\pi)\big) + ikc_k(f) \overset{[1]}{=} +ikc_k(f)$$