Probeklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Simmel
Wintersemester 2011/2012
19. Januar 2011

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1

Wilhelm Tell will mit einem Pfeil ($m_1 = 50$g) einen Apfel ($m_2 = 200$g) vom Kopf seines Sohnes schießen. Berechnen Sie

1. die Abschusshöhe h_1 , die Tell wählen muss, damit er bei einem Abschusswinkel $\alpha_0 = 4°$ zur Horizontalen, einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 70$m/s und einem Abstand $a = 20$m vom Sohn den Apfel (Höhe $h_2 = 1,50$m) genau in der Mitte trifft.
2. den Winkel α_1 sowie die Geschwindigkeit v_1 des Pfeils beim Auftreffen auf den Apfel.
3. die Geschwindigkeit v_2 mit der Apfel und Pfeil den Kopf des Sohns gemeinsam verlassen und den dabei auftretenden Winkel α_2.

Die Luftreibung ist zu vernachlässigen.

Lösung

1. Für den Pfeil gilt die Wurfparabel, das heißt

$$x(t) = \cos\alpha_0 v_0 t \tag{1}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin\alpha_0 v_0 t + h \tag{2}$$

Die Flugzeit bis zum Apfel ergibt sich mit $x(t_1) = a$ zu

$$t_1 = \frac{a}{\cos\alpha_0 v_0} \tag{3}$$

Aus (**??**) folgt wegen $y(t_1) = h_2$

$$h_1 = h_2 + \frac{g}{2}t_1^2 - \sin\alpha_0 v_0 t_1 = h_2 + \frac{ga^2}{2\cos^2\alpha_0 v_0^2} - \tan\alpha_0 \cdot a = 0,504\text{m} \tag{4}$$

2. Es gilt

$$\dot{x}(t_1) = \cos\alpha_0 \cdot v_0 = \cos\alpha_1 \cdot v_1 \tag{5}$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} v_0 \tag{6}$$

Zugleich ist

$$\dot{y}(t_1) = -gt_1 + \sin\alpha_0 \cdot v_0 = \sin\alpha_1 \cdot v_1 \tag{7}$$

Division von (**??**) und (**??**) liefert mit (**??**)

$$\alpha_1 = \arctan\left(\tan\alpha_0 - \frac{ga}{\cos^2\alpha_0 v_0^2}\right) = 1,701^\circ \tag{8}$$
$$\xrightarrow{(\mathbf{??})} v_1 = 69,86\text{m/s} \tag{9}$$

3. Impulserhaltung für unelastischen Stoß:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \tag{10}$$
$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = 13,97\text{m/s} \tag{11}$$

Des weiteren:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1,701^\circ \tag{12}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten ein Pendel, das aus einem masselosen Winkeleisen (Schenkellänge r) mit Zwischenwinkel 90° und zwei identischen Massenpunkten der Masse m besteht, die an den Enden des Winkeleisens befestigt sind. Das Winkeleisen ist im Knick $(0,0,0)$ drehbar gelagert.

1. Berechnen Sie das Gesamtdrehmoment in Abhängigkeit von dem in der Zeichnung angegebenen Winkel α.
2. Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Pendel auf. Nehmen Sie dazu an, dass $\alpha' = \alpha - 45^\circ$. Verwenden Sie die beiden Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \qquad \cos(x+y) = \cos x \sin y - \sin x \sin y.$$

3. Lösen Sie die Bewegungslgeichung analog zum mathematischen Pendel. Geben Sie die Frequenz ω der Pendelgeschwindigkeit an.

Lösung

1. Gesamtdrehmoment $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} r\sin\alpha \\ 0 \\ -r\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mgr\sin\alpha \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} r\sin(\alpha - 90°) \\ 0 \\ -r\cos(\alpha - 90°) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ mgr\sin(\alpha - 90°) \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ mgr(\sin\alpha - \cos\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

2. Die Bewegungsgleichung ergibt sich über die Beziehung von Drehimpuls und Drehmoment:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\Theta\dot{\omega} = mgr(\sin\alpha - \cos\alpha) \tag{16}$$

Transformation auf $\alpha' = \alpha - 45°$

mit $\omega' = \dot{\alpha}' = \dot{\alpha}$, $-\Theta\ddot{\alpha}' = mgr(\sin(\alpha' + 45°) - \cos(\alpha' + 45°))$ und $\Theta = 2mgr^2$ folgt

$$-\ddot{\alpha}' = \frac{g}{2r}(\sin\alpha' \cos 45° + \sin 45° \cos\alpha' - \cos\alpha' \cos 45° + \sin\alpha' \sin 45°) \tag{17}$$

mit $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ folt

$$\ddot{\alpha}' = -\frac{g}{r\sqrt{2}} \sin\alpha \tag{18}$$

3. Analog zum mathematischen Pendels betrachten wir kleine Ausrenkungen α' des Winkeleisens, womit $\sin\alpha' \approx \alpha'$ gilt.

Folglich gilt für die Bewegungsgleichung

$$\ddot{\alpha}' = -\frac{g}{r\sqrt{2}}\alpha' \tag{19}$$

Ansatz:

$$\alpha' = \alpha'_0 \sin(\omega t \phi_0)$$

Einsetzen:

$$-\omega^2 \alpha_0 \sin(\omega t + \phi_0) = -\frac{g}{r\sqrt{2}} \sin(\omega t + \phi_0)$$

woraus folgt

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{g}{r\sqrt{2}}} \tag{20}$$

Aufgabe 3

Diskutieren und begründen Sie stichwortartig unter Angabe der relevanten physikalischen Formeln:

1. Was ist ein Inertialsystem? Geben Sie Beispiele in der Natur.
2. Stellen Sie die Corioliskraft, die aufgrund der Erdrotation auf einen bewegten Körper wirkt, in vektorieller Form dar.
3. Wo treffen alle auf der Erde ungestört fallenden Körper in Bezug auf den mit einem Lot ermittelten Punkt auf?

Lösung

1. Inertialsysteme werden nicht beschleunigt, vollführen also gleichförmige, geradlinige Bewegung. Es sind zwei Arten von Beschleunigungen zu unterscheiden:
   (a) tangential zur Bahn
   (b) normal zur Bahn

   insbesondere zweiter Fall tritt in der Natur sehr häufig auf, wie bei Kreisbewegungen (z.B. Planetenbewegungen). Ein Beispiel für ersteren Fall ist die Fallbewegung. Inertialsysteme kommen in der Natur quasi nicht vor.
2. Corioliskraft: Scheinkraft
$$\vec{F}_C = 2m(\vec{v} \times \vec{w})$$
   wobei $\vec{v}$ ein Rotationsvektor ist, $\vec{w}$ ein zur Erdachse normaler Vektor.
3. Alle Körper treffen östlich von dem Lot auf.

Aufgabe 4

Zwei Raumschiffe A und B starten zur gleichen Zeit auf der Erde und fliegen in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit v zu Punkten in der gleichen Entfernung L. Sobald die Raumschiffe ihre jeweiligen Zielpunkte erreicht haben, senden sie ein Funksignal zu Erde, das dort zur Zeit T nach dem Start der Raumschiffe empfangen wird.

1. Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang gilt
$$\frac{v}{c} = \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-} 1$$
2. Berechnen Sie für $L = 1$Lichttag und $T = \frac{8}{3}$Tage mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ankunftszeiten der beiden Raumschiffe an ihren Zielpunkten betrachtet vom Inertialsystem von A.

Vernachlässigen Sie die Effekte der Beschleunigung der Raumschiffe.

Lösung

1. Um den gewünschten Zusammenhang zu zeigen, gehen wir so vor, dass wir v, L, und c als gegeben betrachten und die (irdische) Ankunftszeit des Lichtsignals berechnen: Die Bewegung des Raumschiffs A wird beschrieben durch

$$x = vt$$

Also kommt es zut Zeit $t_0 = \frac{L}{v}$ an seinem Ziel an. Zu diesem Zeitpunkt wird ein Lichtstrahl zur Erde zurückgeschickt, der dort also zur Zeit

$$T = t_0 + \frac{L}{c} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = l\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right)$$

ankommt. Löst man dies nun nach v auf, dann erhält man

$$\frac{1}{v} = \frac{T}{L} - \frac{1}{c}$$

also

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{cT}{L} - 1}$$

was zu zeigen war. Für Raumschiff B gilt selbiges, da es dieselbe Geschwindigkeit zurücklegt.

2. Wir betrachten mithilfe des ersten Aufgabenteils die Geschwindigkeit von A. L ist dabei einen Lichttag und cT sind $\frac{8}{3}$ Lichttage, also

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{\frac{8}{3}\mathrm{LT}}{\mathrm{LT}} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5}$$

Der dazugehörige γ-Faktor ist

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4}$$

Lorentz-Transformation:

Die Ankunft von A bei L hat im Erdsystem die Raumzeit-Koordinaten

$$t_A = \frac{L}{v} \qquad x_A = L$$

Die Lorentz-Transformation der Zeitkoordinate lautet

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_A = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2}\right)$$

Mit $L = c \cdot 1\mathrm{Tag}$ folgt

$$t'_A = \gamma\left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c}\right) \cdot 1\mathrm{Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot 1\mathrm{Tag}$$

also

$$t'_A = \frac{4}{3}\text{Tage}$$

Andererseits gilt für die Ankunft von B bei $-L$ mit den Koordinaten im Erdsystem

$$t_B = \frac{L}{v} \qquad x_B = -L$$

Also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_B = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v(-L)}{c^2}\right)$$

Mit $L = c \cdot 1\text{Tag}$ folgt

$$t'_B = \gamma\left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c}\right) \cdot 1\text{Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot 1\text{Tag}$$

also

$$t'_B = \frac{17}{6}\text{Tage}$$

Aufgabe 5

Eine Töpferscheibe besteht aus einer homogenen Kreisscheibe mit dem Radius $r = 20\text{cm}$ und der Masse $M = 20\text{kg}$. Die leere Töpferscheibe rotiert reibungsfrei und antriebslos um ihre Mittelachse mit einer Winkelgeschwindigkeit von zunächst $\omega = 5,0\text{s}^{-1}$. Der Töpfer platziert eine zylinderförmige Tonmasse mit dem Radius $r = 5\text{cm}$ und der Masse $m = 1,0\text{kg}$ so auf der Scheibe, dass die Achse der Töpferscheibe und die Symmetrieachse des Ton-Zylinders einen Abstand von $d = 12\text{cm}$ aufweisen. Aufgrund der starken Reibung zwischen der Platte und der Tonmasse stellt sich für das Gesamtsystem sehr schnell eine neue, gemeinsame Kreisfrequenz ein.

1. Das Trägheitmoment für eine Kreisscheibe und ebenso für einen Zylinder der Masse m_0 mit Radius r_0 bezüglich einer Rotation um die Mittelachse ist $I = \frac{1}{2}m_0 r_0^2$. Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_1 der leeren Töpferscheibe und das Trägheitsmoment I_2 der Töpferscheibe mit aufgesetztem Ton-Zylinder bezüglich der Rotation der Töpferscheibe um deren Mittelachse!
2. Mit welchem Erhaltungssatz lässt sich Teilaufgabe c) lösen?
3. Wie groß ist die Kreisfrequenz, die sich nach Aufsetzen der Tonmasse einstellt?
4. Berechnen Sie die kinetische Energie der Drehbewegung vor und nach dem Aufsetzen der Tonmasse. Begründen Sie kurz den auftretenden Unterschied.

Lösung

1.

$$I_1 = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}20\text{kg}(0,2)^2 = 0,4\text{kg} \tag{21}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + md^2 = \frac{1}{2}20\text{kg}(0,2)^2 + \frac{1}{2}\text{kg}(0,05\text{m})^2 + \text{kg}(0,12\text{m}) = 0,416\text{kgm}^2 \tag{22}$$

(23)

2. Drehimpulserhaltung
3. $$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{24}$$
$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{MR^2}{MR^2 + mr^2 + 2md^2}\omega_1 = 0,96\omega_1 = 4,81\mathrm{s}^{-1} \tag{25}$$
4. $$E_{\mathrm{Rot}_1} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_1^2 = 5\mathrm{J} \tag{26}$$
$$E_{\mathrm{Rot}_2} = \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = 4,81\mathrm{J} \tag{27}$$
$$\tag{28}$$

   Grund für Obiges ist, dass die Energie die Verformungsarbeit des Tones ist.

Aufgabe 6

Zur Messung der Geschwindigkeit einer Gewehrkugel (Masse $m_1 = 5\mathrm{g}$) wird diese horizontal in einen ruhenden Holzklotz der Masse $m_2 = 20\mathrm{kg}$ geschossen, welcher an einem Pendelstab der Länge $l = 1\mathrm{m}$ hängt. Der maximale Auslenkungswinkel des Holzklotzes mit darin stehender Kugel wird zu $\theta = 1,2°$ bestimmt. Die Masse des Pendelstabs ist zu vernachlässigen.

1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_1 der Gewehrkugel.
2. Welche Geschwindigkeit hat der Holzklotz unmittelbar nach dem Stoß?
3. Welcher Anteil kinetischer Anfangsenergie der Kugel wird in nicht-kinetische Energie (Wärme) umgewandelt?

Lösung

1. vollständig inelastischer Stoß:

   Energieerhaltungssatz (für kleine Auslenkungen)
$$E_{\text{kin, max}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 \tag{29}$$
$$E_{\text{pot, max}} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta) \tag{30}$$

   Mit der Impulserhaltung für den unelastischen Stoß folgt
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta) \tag{31}$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_1)}{m_1}\sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = 262,5\mathrm{m/s} \tag{32}$$

2. $$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0,0656\mathrm{m/s}$$

3.

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = 172,2\text{J}$$

Aufgabe 7

Ein menschliches Haar habe einen Elastizitätsmodul $E = 5 \cdot 108 Nm^{-2}$. Nehmen Sie an, dass sich das Haar elastisch verhält bis es für Dehnungen größer als 10% beschädigt wird.

1. Berechnen Sie das Volumen an Haar, dass Archimedes 250 B.C. für ein Katapult benötigte, um einen Fels von 50kg auf eine Geschwindigkeit von 20m/s zu beschleunigen.
2. Wie weit fliegt dieser Fels unter idealen Bedingungen maximal?

Lösung

1. Es ist das Volumen an Haar für ein einfaches Katapult bei gegebenem Elastizitätsmodul und Dehnung von $\frac{\Delta l}{l} = 10\%$ gesucht.

   Aus dem Hookeschen Gesetz ($\sigma = E\epsilon$) folgt $\frac{F}{A} = E\frac{\Delta l}{l}$ bzw. $F = \frac{EA}{l}\Delta l$

   Es gilt $F = kx$ mit $k = \frac{EA}{l}$, $x = \Delta l$ mit dem Energieerhaltungssatz und Äquivalenzumformungen

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\Delta l^2 = \frac{1}{2}EAl\frac{\Delta l^2}{l^2} = \frac{1}{2}Ev\frac{\Delta l^2}{l^2} \tag{34}$$

$$\Rightarrow v = \frac{mv^2 l^2}{E\Delta l^2} = 4 \cdot 10^{-3}\text{m} \tag{35}$$

2. Es ist die maximale Wurfweite bei optimalen Bedingungen gefragt. Es ist bekannt, dass die geworfene Weite bei $\varphi = 45°$ maximal wird (Luftwiderstand vernachlässigt).

$$x_{\max} = \frac{v^2}{g}\sin 2\varphi = \frac{v^2}{g} = 40,77\text{m}$$