

Diplomvorprüfung
Mathematik für Physik 3

1. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^3 - 3y^2 - 6xy$.

1. Man berechne **grad** $f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Man zeige, dass $(0, 0)$ und $(-1, 1)$ **genau** die stationären Punkte von f sind.
3. Für jeden der beiden stationären Punkte von f entscheide man jeweils, ob eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt.

[12 Punkte]

2. Aufgabe. Sei $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 2 \sin t$. Man berechne die Länge des Graphen von f ($\text{graph}(f) \subset \mathbb{R}^2$), wenn \mathbb{R}^2 mit der Norm $\|\cdot\|_1$ versehen wird.

[8 Punkte]

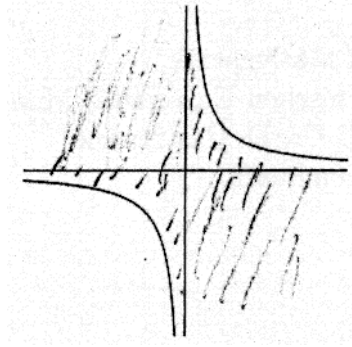
Bitte wenden

3. Aufgabe. Für $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - ty > 0\}$
und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t, y) = \frac{y}{1 - ty}$$

sei die Differentialgleichung

$$y' = f(t, y) \quad (\star)$$



gegeben. Die nebenstehende Skizze der Menge D darf ohne Beweis verwendet werden.

1. Man berechne $\partial_y f(t, y)$.
2. Warum ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich y lokal Lipschitz-stetig?
3. Man zeige, dass f bezüglich y in $] -\infty, 0] \times [0, \infty[$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.
4. Man bestimme das maximale Lösungsintervall J und die Lösung $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ der durch (\star) und $y(0) = 0$ gegebenen Anfangswertaufgabe.
5. Warum gibt es zu der durch (\star) und $y(0) = a$ mit $a > 0$ gegebenen Anfangswertaufgabe ein maximales Lösungsintervall I und eine Lösung $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$?
 - (a) Warum gilt $\psi(t) > 0$ für alle $t \in I$?
 - (b) Warum ist ψ auf I streng monoton steigend?
 - (c) Warum gilt $0 < \psi(t) \leq a$ für alle $t \in I \cap] -\infty, 0]$?
 - (d) Man zeige $I =] -\infty, c[$ mit $c > 0$ und

$$\lim_{t \rightarrow c, t < c} t\psi(t) = 1.$$

Hinweis: Was sagt die Theorie über den Graphen der Lösungsfunktion ψ ?

[24 Punkte]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.