Nachklausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. M. Rief

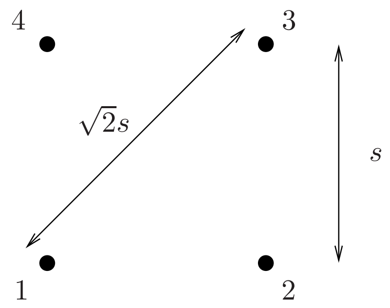
Sommersemester 2010

1.10.2010

Musterlösung

Aufgabe 1:

Die betrachtete Anordnung sieht folgendermaßen aus:



Die Arbeit um Teilchen 1 heranzuführen ist

$$W_1 \;=\; 0 \tag{1}$$

da noch keine anderen Ladungen, die auf 1 Kräfte ausüben könnten, vorhanden sind. Die Arbeit für Teilchen 2 bei Anwesenheit von Teilchen 1 ist

$$W_2 \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} \tag{2}$$

[1]

Die Arbeit für Teilchen 3 bei Anwesenheit von 1 und 2 ist

$$W_3 \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}s} \;+\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} \tag{3}$$

[1]

Die Arbeit für Teilchen 4 bei Anwesenheit von 1, 2 und 3 ist schließlich

$$W_4 \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} \;+\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{\sqrt{2}s} \;+\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{s} \tag{4}$$

[1]

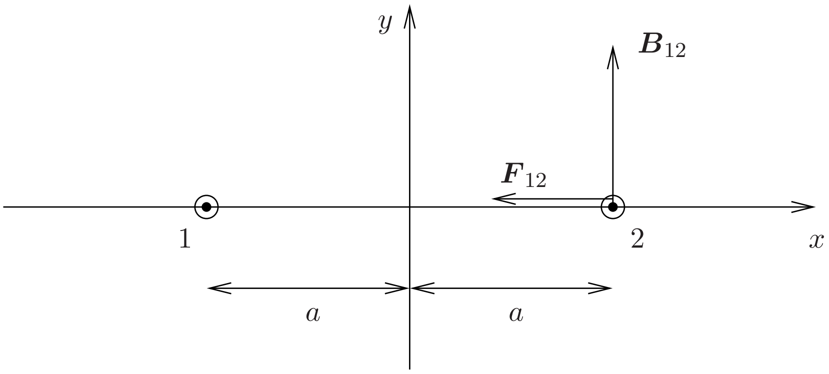
Die gesuchte Gesamtarbeit ist also

$$W \;=\; W_1 + W_2 + W_3 + W_4 \;=\; (4+\sqrt{2})\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 s} \;=\; 4\cdot 10^{-7}\,\mathrm{J} \tag{5}$$

[1]

Aufgabe 2:

(a) Die Situation ist in der folgenden Abbildung dargestellt, wobei o.B.d.A. angenommen wird, dass die beiden Ströme in positive z-Richtung fließen.



Gemäß der Rechten-Hand-Regel für das Biot-Savart-Gesetz erzeugt der Strom in Draht 1 am Ort des Drahtes 2 ein B-Feld, das in die positive y-Richtung zeigt: $\boldsymbol{B}_{12}$. Gemäß der Rechten-Hand-Regel für die Lorentz-Kraft wirkt dann auf den Strom in Draht 2 eine Kraft in negative x-Richtung: $\boldsymbol{F}_{12}$. Also zieht Draht 1 den Draht 2 an u.u. **[2]**

(b) Das vom Strom in Draht 1 auf der x-Achse erzeugte $\boldsymbol{B}$-Feld ist

$$\boldsymbol{B}_1(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\boldsymbol{e}_y}{x+a} \tag{6}$$

und das von Draht 2 erzeugte entsprechend

$$\boldsymbol{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\boldsymbol{e}_y}{x-a} \tag{7}$$

[1]

Das Gesamtfeld ist die Summe

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} \right) \boldsymbol{e}_y \tag{8}$$

[1]

(c) Das Feld des mittleren Drahtes 0 auf der x-Achse ist

$$\boldsymbol{B}_0(x) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \frac{\boldsymbol{e}_y}{x} \tag{9}$$

Aus Symmetriegründen genügt es, das von 0 und 1 erzeugte Feld am Ort von Draht 2 zu betrachten:

$$\boldsymbol{B}_1(a) + \boldsymbol{B}_0(a) = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{I_1}{2a} + \frac{I_0}{a} \right) \boldsymbol{e}_y \stackrel{!}{=} 0 \tag{10}$$

[1]

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn

$$I_0 = -\frac{I_1}{2} \tag{11}$$

Der Betrag des Stromes im Draht 0 ist also halb so groß wie die Ströme in 1 und 2, und seine Richtung ist entgegengesetzt zu diesen. **[1]**

Aufgabe 3:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass sich die Anordnung in der xz-Ebene befindet, mit der Spule im positiven x-Bereich und dem Draht entlang der z-Achse. Nach Biot-Savart oder dem Ampereschen Durchflutungsgesetz ist das zeitabhängige B-Feld des Drahtes ($r := \sqrt{x^2+y^2}$)

$$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \;=\; B(t,r)\boldsymbol{e}_\varphi \quad , \quad B(t,r) \;=\; \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \tag{12}$$

[1]

Die induzierte Spannung $U(t)$ ist nach dem Induktionsgesetz betragsmäßig gegeben durch

$$U \;=\; N\frac{d}{dt}\int d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{13}$$

[1]

Also:

$$\begin{aligned}
U(t) &= N\frac{d}{dt}\int_a^{2a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz\, B(t,x,0,z) && (14)\\
&= N\frac{d}{dt}\int_a^{2a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz\, \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} && (15)\\
&= \frac{N a \mu_0 \dot{I}(t)}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dx}{x} && (16)\\
&= \frac{N a \mu_0 \dot{I}(t)}{2\pi}\big[\ln x\big]_a^{2a} && (17)\\
&= \frac{N a \mu_0 \ln 2}{2\pi}\,\dot{I}(t) && (18)
\end{aligned}$$

[2]

Mit $I(t) = I_0 \sin\omega t$ folgt

$$U(t) \;=\; \frac{N a \mu_0 \ln 2}{2\pi}\, I_0\omega\cos\omega t \tag{19}$$

[1]

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$U(t) \;=\; 0.0196\,\mathrm{V}\cdot\cos(314\,\mathrm{s}^{-1}t) \tag{20}$$

[1]

Aufgabe 4:

(a) Aus der Differentialgleichung

$$\frac{1}{C}Q \;=\; U(t) \;=\; \hat{U}\,e^{i\omega t} \tag{21}$$

[1]

folgt durch Ableiten nach t:

$$\frac{1}{C}I \;=\; i\omega\hat{U}\,e^{i\omega t} \tag{22}$$

Also ist

$$\hat{I} = i\omega C\hat{U} \tag{23}$$

und der komplexe Widerstand des Kondensators ist

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{i\omega C} \tag{24}$$

[1]

(b) Der komplexe Widerstand der Reihenschaltung ist

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} \tag{25}$$

[1]

also ist

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{\hat{U}}{R + \frac{1}{i\omega C}} \tag{26}$$

Die Übertragungsfunktion $Y(\omega)$ ist definitionsgemäß der Proportionalitätsfaktor zwischen $\hat{I}$ und $\hat{U}$, also einfach der Kehrwert des komplexen Widerstandes:

$$Y(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega C}{1 + i\omega RC} = \frac{i\omega C + \omega^2 RC^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \tag{27}$$

[1]

(c) Die Wärmeerzeugungsrate im Widerstand ist

$$P(t) = RI^2(t) \tag{28}$$

und ihr zeitliches Mittel

$$\overline{P} = R\overline{I^2} \tag{29}$$

[1]

Aus

$$I(t) = \frac{1}{2}\hat{I}\, e^{i\omega t} + \frac{1}{2}\hat{I}^*\, e^{-i\omega t} \tag{30}$$

folgt

$$\overline{I^2} = \frac{1}{4}\hat{I}\hat{I}^* + \frac{1}{4}\hat{I}^*\hat{I} = \frac{1}{2}|\hat{I}|^2 \tag{31}$$

Also:

$$\overline{P} = \frac{1}{2}R|\hat{I}|^2 \tag{32}$$

[1]

Wegen $|\hat{I}|^2 = |Y(\omega)|^2|\hat{U}|^2$ folgt dann mit dem Ergebnis von Teil (b):

$$\overline{P} = \frac{1}{2}R\frac{\omega^2 C^2 + \omega^4 R^2 C^4}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}\, |\hat{U}|^2 \tag{33}$$

[1]

Dies lässt sich vereinfachen zu

$$\overline{P} = \frac{1}{2R}\frac{\omega^2 R^2 C^2 + \omega^4 R^4 C^4}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}\, |\hat{U}|^2 = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}\, \frac{|\hat{U}|^2}{2R} \tag{34}$$

Aufgabe 5:

(a) Es bietet sich an, von der 3. Maxwell-Gleichung (= Faradaysches Induktionsgesetz) auszugehen:

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \tag{35}$$

[1]

Die Rotation von $\boldsymbol{E}$ ist:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_z E_y \\ \partial_z E_x \\ 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Wegen ($2\pi/\lambda =: k$, $2\pi c/\lambda =: \omega$)

$$\partial_z \sin(kz - \omega t) = k\cos(kz - \omega t) \tag{37}$$

folgt

$$\dot{\boldsymbol{B}} = -\frac{kE_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\cos(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

[1]

Integration nach t liefert

$$\boldsymbol{B} = -\frac{kE_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\sin(kz - \omega t) \\ -\frac{1}{\omega}\sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Also:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y)\frac{E_0}{c}\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)\right] \tag{40}$$

[1]

(b) Die Strahlungsintensität im Abstand r von einem isotropen Radiosender der Leistung P ist

$$J_R = \frac{P}{4\pi r^2} \tag{41}$$

[1]

Die Strahlungsintensität der kosmischen Hintergrundstrahlung ist andererseits

$$J_H = cu \tag{42}$$

[1]

Durch Gleichsetzen von S_R und S_H findet man r:

$$r = \sqrt{\frac{P}{4\pi cu}} = 2.58\,\mathrm{km} \tag{43}$$

[1]

Aufgabe 6:

(a) Die Strahlungsintensität J_P auf dem Planeten ergibt sich aus der vom Stern emittierten Gesamtstrahlungsleistung P_S durch „quadratische Verdünnung“ über die Entfernung r:

$$J_P = \frac{P_S}{4\pi r^2} \tag{44}$$

Die Gesamtstrahlungsleistung des Sterns ergibt sich aus seiner Intensität (= Strahlungsleistung pro Flächeneinheit) J_S per

$$P_S = 4\pi R^2 J_S \tag{45}$$

also

$$J_P = \frac{R^2}{r^2} J_S \tag{46}$$

[1]

J_S ergibt sich nun aus der Oberflächentemperatur mit Hilfe des Stefan-Boltzmann-Gesetzes

$$J = \sigma T^4 \tag{47}$$

[1]

Also insgesamt:

$$J_P = \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4 = 381\,\mathrm{W/m^2} \tag{48}$$

Dies sind 38% der Helligkeit auf der Erde. **[1]**

(b) Die Oberflächentemperatur T_P des Planeten ist die Gleichgewichtstemperatur die nötig ist, um die von seinem Stern empfangene Strahlungsenergie wieder komplett abzustrahlen. Also:

$$P_{in} = \frac{R^2}{r^2} \sigma T^4 \cdot \pi r^2 = \pi \sigma R^2 T^4 \tag{49}$$

[1]

und

$$P_{out} = \sigma T_P^4 \cdot 4\pi r^2 = 4\pi \sigma r^2 T_P^4 \tag{50}$$

[1]

Gleichsetzen ergibt

$$\pi \sigma R^2 T^4 = 4\pi \sigma r^2 T_P^4 \tag{51}$$

also

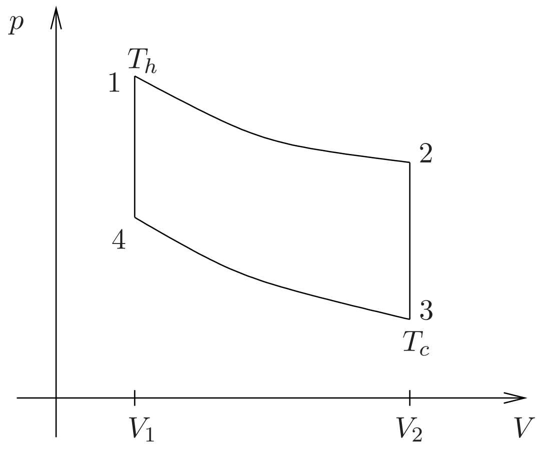
$$T_P = \sqrt{\frac{R}{2r}}\, T = 202\,\mathrm{K} \tag{52}$$

Das sind ca. $-70\,^\circ$C, also liegt der Planet deutlich außerhalb der habitablen Zone. **[1]**

(In der Realität geht man allerdings davon aus, dass die Temperatur des Planeten aufgrund von Treibhauseffekten in der Atmosphäre deutlich höher liegt.)

Aufgabe 7:

(a)



[2]

(b) Wir bezeichnen mit W die Nettoarbeit, die die Maschine während eines Zyklus verrichtet und mit Q_{ij} die Wärmemenge, die beim Schritt von Zustand i nach Zustand j in die Maschine hineinfließt. Der Energieerhaltungssatz für einen vollständigen Zyklus lautet dann

$$W \;=\; Q_{23} + Q_{41} \tag{53}$$

[1]

Dabei ist schon berücksichtigt, dass $Q_{12} = Q_{34} = 0$ ist. Vorzeichenmäßig gilt:

$$W > 0 \quad , \quad Q_{23} < 0 \quad , \quad Q_{41} > 0 \tag{54}$$

Der Wirkungsgrad ist nun der Quotient aus Nettoarbeit und der im Schritt $4 \to 1$ hineingesteckten Wärme:

$$\eta \;=\; \frac{W}{Q_{41}} \tag{55}$$

[1]

Wegen der obigen Energieerhaltungsgleichung ist dies

$$\eta \;=\; \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{41}} \;=\; 1 + \frac{Q_{23}}{Q_{41}} \tag{56}$$

Es sind also Q_{23} und Q_{41} zu berechnen:

$$Q_{23} \;=\; \frac{f}{2}R(T_3 - T_2) \;=\; \frac{f}{2}R(T_c - T_2) \tag{57}$$

[1]

$$Q_{41} \;=\; \frac{f}{2}R(T_1 - T_4) \;=\; \frac{f}{2}R(T_h - T_4) \tag{58}$$

[1]

Damit ergibt sich

$$\eta \;=\; 1 - \frac{T_2 - T_c}{T_h - T_4} \tag{59}$$

Da der Prozess vollständig durch T_h, T_c, V_1, V_2 definiert ist, kann man T_2, T_4 und damit η durch

T_h, T_c und V_1, V_2 ausdrücken: Wegen der Adiabatizität der Schritte $1 \to 2$ und $3 \to 4$ gilt

$$T_2 = T_h \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} \quad , \quad T_4 = T_c \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \tag{60}$$

[1]

Setzt man dies in η ein, dann erhält man in wenigen Schritten

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa-1} \tag{61}$$

[1]

q.e.d

(c) Der Wirkungsgrad der Carnot-Maschine ist der größtmögliche zwischen den Temperaturen T_h und T_c. Also ist der Wirkungsgrad des hier betrachteten Prozesses auf jeden Fall kleiner oder gleich dem Carnot-Wirkungsgrad zwischen T_h und T_c. **[1]**