Diplomvorprüfung zu Experimentalphysik I
28. Februar 2003
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Eine Billardkugel (Masse $m = 0.25$ kg, Radius $R = 8$ cm) werde durch einen horizontalen, auf den Kugelmittelpunkt gerichteten Stoß auf eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5$ m/s gebracht. Auf die Kugel wirke eine konstante Gleitreibungskraft (Koeffizient $\mu = 0.5$), die reine Rollbewegung sei reibungsfrei. Trägheitsmoment einer homogenen Kugel: $I = \frac{2}{5} mR^2$.

a) Berechnen Sie die Zeitdauer, nach welcher die Kugel in die reine Rollbewegung übergeht (Hinweis: Stellen Sie zunächst Ausdrücke für die Zeitabhängigkeit der Translationsgeschwindigkeit und der Winkelgeschwindigkeit auf.)
b) Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt Ihre Translationsgeschwindigkeit?
c) Welchen Weg hat sie bis dahin zurückgelegt?
d) Welche Arbeit verrichtet die Reibungskraft insgesamt?

Lösung:

a) Zunächst reine Translation: *(5 Punkte)*

$$v(t) = v_0 - \frac{F_R}{m} t = v_0 - \mu g t \qquad (1)$$

Drehmoment durch Reibung:

$$M = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5} mR^2 \frac{d\omega}{dt} \equiv F_R R = \mu m g R$$

$$\Leftrightarrow \qquad \omega(t) = \frac{\mu m g R}{\frac{2}{5} mR^2} t = \frac{5 \mu g t}{2R}$$

Sei ab Zeit t_e reine Rollbewegung; mit (1):

$$v_e = \omega_e R = \frac{5 \mu g t_e}{2} \equiv v_0 - \mu g t_e \qquad \Rightarrow v_0 = \frac{7}{2} \mu g t_e \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow t_e = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g} = 0.291 \text{ s}$$ unabhängig vom Radius!

b) Aus (2) folgt $v_e = v_0 - \mu g t_e = 3.57$ m/s *(1 Punkt)*

c) $s_e = \int_0^{t_e} v(t) dt = \int_0^{t_e} (v_0 - \mu g t) dt = v_0 t_e - \frac{1}{2} \mu g t_e^2 = 1.25$ m *(2 Punkte)*

d) Erfordert Berechnung des gesamten relativen Gleitwegs der Kugeloberfläche auf Unterlage:

(3 Punkte)

$$s_{Gl} = \int_0^{t_e} [v(t) - R\omega(t)]dt = s_e - \int_0^{t_e} \frac{5\mu g t}{2} dt = s_e - \frac{5\mu g t_e^2}{4}$$

$$W = F_R s_{Gl} = \mu m g \left(s_e - \frac{5\mu g t_e^2}{4} \right) = 0.896 \text{ J}$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Zur Messung der Geschwindigkeit einer Gewehrkugel (Masse $m_1 = 5$ g) wird diese horizontal in einen ruhenden Holzklotz der Masse $m_2 = 20$ kg geschossen, welcher an einem Pendelstab der Länge $l = 1$ m hängt. Der maximale Auslenkungswinkel des Holzklotzes mit darin steckender Kugel wird zu $\theta = 1.2°$ bestimmt. Die Masse des Pendelstabs ist zu vernachlässigen.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Gewehrkugel v_1.
b) Welche Geschwindigkeit hat der Holzklotz unmittelbar nach dem Stoß?
c) Welcher Anteil kinetischer Anfangsenergie der Kugel wird in nicht-kinetische Energie (Wärme) umgewandelt?

Lösung:

a) Vollständig inelastischer Stoß *(4 Punkte)*

Energieerhaltung

$$E_{kin,\max} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2$$
$$= E_{pot,\max} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta) \qquad \text{für kleine Auslenkungen}$$

Mit Impulserhaltung $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v_2$ folgt

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2 v_1^2}{(m_1 + m_2)^2} = (m_1 + m_2)gl(1 - \cos\theta)$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\sqrt{2gl(1 - \cos\theta)} = 262.5 \text{ m/s}$$

b) $v_2 = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = 0.0656$ m/s *(1 Punkt)*

c) $\Delta E = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 - \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 = 172.2$ J *(2 Punkte)*

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Durch einen kugelförmigen Planeten (Masse M, Radius R) mit homogener Massenverteilung werde ein Tunnel entlang des Durchmessers gebohrt. In diesen Tunnel werde eine punktförmige Masse m fallengelassen. Reibungskräfte mit der Tunnelwand sind zu vernachlässigen.

a) Wie lautet die Bewegungsgleichung der Punktmasse? Hinweis: Anziehungskraft auf Punktmasse im Abstand r vom Planetenmittelpunkt ist proportional zum Anteil der Planetenmasse, der innerhalb der Kugel mit Radius r liegt. Setzen Sie $g := GM / R^2$. ($G = 6.673 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$)

b) Der Planet führe nun eine Rotationsbewegung (raumfeste Drehachse senkrecht zum Tunnel) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω aus. Wie lautet jetzt die Bewegungsgleichung?

c) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung aus b) für die Erde an ($R = 6.4 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, Annahme homogener Massenverteilung, $M = 5.977 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$).

d) Wie lange müsste ein „Erdtag" (einmalige Rotation) sein, damit die Punktmasse relativ zum Tunnel keine Beschleunigung erfährt?

e) Die Corioliskraft drückt bei $\Omega > 0$ die Punktmasse gegen die Tunnelwand. Erweitern Sie die Bewegungsgleichung aus b) für einen Gleitreibungskoeffizient μ.

Lösung:

a) Gravitationskraft auf Punktmasse: $F_G = -G \dfrac{Mm}{r^2} \dfrac{r^3}{R^3}$ für $r \le R$

Bewegungsgleichung $\ddot{r} = -\dfrac{g}{R} r$ mit $g := GM / R^2$ *(2 Punkte)*

b) Zentripetalkraft $F_Z = m\Omega^2 r$

Bewegungsgleichung $\ddot{r} = -\dfrac{g}{R} r + \Omega^2 r \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} + \left(\dfrac{g}{R} - \Omega^2 \right) r = 0$ *(2 Punkte)*

c) Erde: $\dfrac{g}{R} = 1.53 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s^{-2}} \gg \Omega^2 = \left(\dfrac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}} \right)^2 = 5.29 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s^{-2}}$

→ harmonische Schwingung

$r(t) = R \cos \omega_0 t$ mit $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R} - \Omega^2} \approx \sqrt{\dfrac{g}{R}} = 1.24 \cdot 10^{-3}\ \dfrac{1}{\mathrm{s}}$ *(3 Punkte)*

d) Zentripetalkraft=Gravitationskraft *(2 Punkte)*

$\dfrac{g}{R} - \Omega_0^{\,2} = 0 \;\rightarrow\; \Omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{R}} = 1.24 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{s^{-1}} \;\rightarrow\; T = \dfrac{2\pi}{\Omega_0} = 1\mathrm{h}\ 24\mathrm{min}\ 27\mathrm{s}$

e) Reibungskraft $F_R = \mu F_{Coriolis} = -2\mu m\Omega\dot{r}$ *(1 Punkt)*

Bewegungsgleichung: $\ddot{r} + 2\mu\Omega\dot{r} + \left(\frac{g}{R} - \Omega^2\right) r = 0$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Ein Fass (Durchmesser 1 m) ist mit Glycerin ($\rho_{GL} = 1.26 \cdot 10^3$ kg/m³) bis zum oberen Rand gefüllt. Auf Höhe des Fassbodens ragt aus dem Fass ein horizontales Rohr der Länge 70 cm mit Innendurchmesser 1 cm.

a) Zu Beginn sei das Rohr verschlossen. Zur Bestimmung der Viskosität η des Glycerins wird die Gleichgewichts-Sinkgeschwindigkeit einer Stahlkugel (Durchmesser r_{Kugel} = 6 mm, $\rho_{ST} = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m³) mit $v = 9$ cm/s gemessen. Berechnen Sie η.
b) Nach Öffnen des Rohrs werde der Pegel des Glycerins durch ständiges Zufüllen von $I = 3.7\ \text{cm}^3/s$ (Flüssigkeitsstrom) konstant gehalten. Berechnen Sie unter Annahme laminarer Strömung im Rohr die Höhe h des Fasses.
c) Wie groß ist die mittlere Glyceringeschwindigkeit im Rohr?
d) Die Zufuhr von Glycerin werde gestoppt. Nach welcher Zeit ist das Fass halbleer?

Lösung:

a) $(\rho_{ST} V_{Kugel} - \rho_{GL} V_{Kugel}) g = 6\pi \frac{r_{Kugel}}{2} \eta v$ (Stokes) *(2 Punkte)*

$$\eta = \frac{(\rho_{ST} - \rho_{GL}) \frac{4}{3}\pi \frac{r_{Kugel}^3}{8} g}{6\pi \frac{r_{Kugel}}{2} v} = \frac{2}{9} \frac{\frac{r_{Kugel}^2}{4} g}{v} (\rho_{ST} - \rho_{GL}) = 0.357\ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

b) $\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi r^4} \dot{V}$ $\quad ,\dot{V} = I$ (Hagen-Poiseuille) *(3 Punkte)*

$\Delta p = \rho_{GL} g h \qquad \Rightarrow h = \frac{8\eta l}{\rho_{GL} g \pi r^4} \dot{V} = 0.304$ m

c) $\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = 4.71$ cm/s *(1 Punkt)*

d) $\frac{h(t) \rho_{GL} g \pi r^4}{8\eta l} = I(t)$ Flüssigkeitsstrom im Rohr *(5 Punkte)*

= Flüssigkeitsstrom im Fass: $\quad I(t) = -\frac{dh}{dt} A_{Fass}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dh(t)}{dt} = -\frac{\rho_{GL} g \pi r^4}{8 A_{Fass} \eta l} h(t)$$

Lösung der Differentialgleichung: $h(t) = h_0 e^{-\frac{\rho_{GL} g \pi r^4}{8 A_{Fass} \eta l} \cdot t}$ mit $h_0 = h(t=0) = 0.304$ m

Halbleeres Fass: $\frac{h_0}{2} = h_0 e^{-\frac{\rho_{GL} g \pi r^4}{8 A_{Fass} \eta l} \cdot t}$

$$\Leftrightarrow \qquad t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\frac{\rho_{GL} g \pi r^4}{8 A_{Fass} \eta l}} = 44781 \text{ s} = 12\text{h } 26\text{min } 21\text{s}$$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Mit einer idealen Carnot-Maschine soll ein Kreisprozess durchgeführt werden. Der Zylinder der Maschine ist mit $n = 0.12$ mol eines idealen Gases (Adiabatenkoeffizient $\chi = 1.4$) gefüllt und durch einen reibungsfrei gleitenden Kolben abgeschlossen. Die beiden Wärmereservoire haben die Temperaturen $T_1 = 560$ K und $T_2 = 300$ K.

Der Ausgangsdruck im Kolben sei $p_A = 7.5 \cdot 10^5$ N/m^2, die Ausgangstemperatur T_1. Gaskonstante $R = 8.314$ JK^{-1}mol^{-1}.

a) Welches Ausgangsvolumen V_A hat das Gas?
b) Das Gas werde im ersten Teilprozess isotherm ausgedehnt mit einem Enddruck von $p_1 = 3.3 \cdot 10^5$ N/m^2. Welches Volumen V_1 hat das Gas danach?
c) Welche Arbeit W_1 verrichtet das Gas im ersten Teilprozess, welche Wärmemenge Q_1 wird ihm dabei zugeführt?
d) Im 2. Teilprozess wird das Gas adiabatisch ausgedehnt, bis es sich auf die Temperatur T_2 abgekühlt hat. Welches Volumen V_2 hat das Gas danach?
e) Welche Arbeit W_2 muss im folgenden, 3. Teilprozess am Gas verrichtet werden, um es isotherm auf das Volumen $V_3 = 3.55 \cdot 10^{-3}$ m^3 zu komprimieren?
f) Im 4. Teilprozess wird das Gas adiabatisch auf das Ausgangsvolumen V_A komprimiert. Bestimmen Sie die resultierende Endtemperatur T_E des Gases.

Lösung:

a) Aus allgemeiner Gasgleichung folgt *(1 Punkt)*

$$V_A = \frac{nRT_1}{p_A} = 7.45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$

b) $p_1 V_1 = p_A V_A \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{p_A V_A}{p_1} = 1.69 \cdot 10^{-3}$ m^3 *(2 Punkte)*

c) $W_1 = -\int_{V_A}^{V_1} p \cdot dV = -nRT_1 \int_{V_A}^{V_1} \frac{1}{V} \cdot dV = -nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_A} = -458 \text{ J} = -Q_1$ *(2 Punkte)*

d) Aus allg. Gasgleichung $p_2 V_2 / T_2 = p_1 V_1 / T_1$ und Adiabatengleichung $p_2 V_2^{\chi} = p_1 V_1^{\chi}$ folgt

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\chi-1} \quad \Leftrightarrow \quad V_2 = V_1 \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(\chi-1)} = 8.05 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$ *(2 Punkte)*

e) $W_2 = -\int_{V_2}^{V_3} p \cdot dV = -nRT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{1}{V} \cdot dV = -nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = 295 \text{ J}$ *(2 Punkte)*

f) vgl. d), $\frac{T_2}{T_E} = \left(\frac{V_A}{V_3}\right)^{\chi-1} \quad \Leftrightarrow \quad T_E = T_2 \cdot \left(\frac{V_3}{V_A}\right)^{\chi-1} = 560 \text{ K}$ *(2 Punkte)*