Klausur in Experimentalphysik 1

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Wintersemester 2014/15
2. Februar 2015

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine Kiste der Masse $m = 200\text{kg}$ rutscht unter dem Einfluss der Schwerkraft und der Gleitreibung eine um den Winkel $\alpha = 30°$ geneigte schiefe Ebene der Länge $l = 10\text{m}$ hinab (Gleitreibungskoeffizient $\mu_\text{G} = 0,4$). Sie gleitet in einen Wagen der Masse $M = 2\text{t}$ und bleibt dort liegen. Der ungebremste Wagen setzt sich daraufhin horizontal in Bewegung.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit v_K (entlang der schiefen Ebene) gleitet die Kiste in den Wagen, wenn sie anfangs am höchsten Punkt der schiefen Ebene in Ruhe war?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v_W bewegt sich der Wagen, nachdem die Kiste auf ihm gelandet ist?

Lösung

(a) Die Kräfte, die auf die Kiste wirken, sind Gewichtskraft, die Auflagekraft und die Reibungskraft. Die Normalkomponente der Gewichtskraft relativ zur schiefen Ebene wird exakt kompensiert durch die Auflagekraft. Die Komponente parallel zur schiefen Ebene (die positive Richtung zeige hinab) der Gewichtskraft ist $F_\text{G, par} = mg \sin\alpha$, und die Reibungskraft ist dieser entgegengesetzt, $F_\text{R} = -\mu_\text{G} mg \cos\alpha$. Damit ergibt sich folgende Bewegungsgleichung für die Bewegung entlang der schiefen Ebene:

$$ma_\text{par} = F_\text{G, par} + F_\text{R} = mg(\sin\alpha - \mu_\text{G}\cos\alpha)$$

Die Beschleunigung parallel zur Ebene ist also

$$a_\text{par} = g(\sin\alpha - \mu_\text{G}\cos\alpha)$$

[1]

Hier haben wir es mit einer konstanten Beschleunigung zu tun, deshalb ist die Berechnung der Endgeschwindigkeit v_K besonders leicht: Der zurückgelegte Weg ist

$$s(t) = \frac{1}{2}a_\text{par}t^2 + v_0 t + s_0$$

Für Anfangsgeschwindigkeit und Ort gilt $v_0 = s_0 = 0$. Damit wird das Ende der schiefen Ebene zur Zeit t_E erreicht:

$$t_\mathrm{E} = \sqrt{\frac{2l}{a_\mathrm{par}}}$$

Für die Geschwindigkeit entlang der schiefen Ebene als Funktion der Zeit gilt

$$v(t) = a_\mathrm{par} t + v_0$$

und damit ergibt sich nach der Zeit t_E die Endgeschwindigkeit

$$v_\mathrm{K} = a_\mathrm{par} t_\mathrm{E} = \sqrt{2 l a_\mathrm{par}}$$

[1,5]

Einsetzen der Zahlenwerte ($g = 9,81 \mathrm{m/s^2}$) ergibt

$$a_\mathrm{par} = \frac{g}{2}(1 - \mu_\mathrm{G}\sqrt{3}) = 1,51 \mathrm{m/s^2} \qquad v_\mathrm{K} = 5,49 \mathrm{m/s}$$

[1]

(b) Nach dem Impulserhaltungssatz muss der Gesamtimpuls entlang der Fahrtrichtung (dies sei jetzt die positive x-Richtung) des Wagons erhalten sein. Die Gesamtimpulse in x-Richtung des Systems Kiste-Wagon vor bzw. nach dem Losfahren sind

$$p_{x,\mathrm{vorher}} = m v_\mathrm{K} \cos\alpha \qquad p_{x,\mathrm{nachher}} = (m + M) v_\mathrm{W}$$

Damit kann die Geschwindigkeit des Wagons leicht berechnen zu

$$v_\mathrm{W} = \frac{m}{m+M} v_\mathrm{K} \cos\alpha = 0,43 \mathrm{m/s}$$

[1,5]

Aufgabe 2 (3 Punkte)

(a) Geben Sie drei Erhaltungssätze der Mechanik an!

(b) Welches ist jeweils die Voraussetzung für die Gültigkeit der Erhaltungssätze?

Lösung

(a) Energieerhaltungssatz, Impulserhaltungssatz, Drehimpulserhaltungssatz

[1,5]

(b) abgeschlossenes System (kein Energietransport zu oder vom System) bzw. keine äußeren Kräfte bzw. keine äußeren Drehmomente

[1,5]

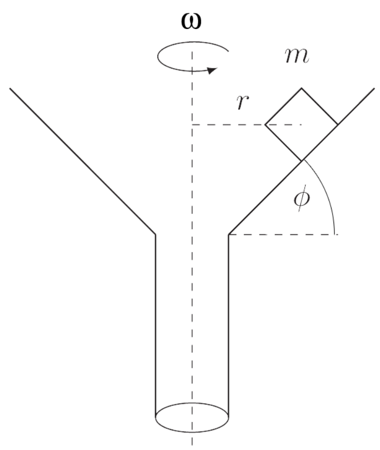
Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein sehr kleiner Würfel der Masse m befinde sich auf der Innenseite eines Trichters, der um seine vertikale Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Der Trichter habe die Neigung ϕ zur Horizontalen (siehe Bild). Die Haftreibungszahl zwischen Würfel und Trichter sei μ_H, und der Abstand vom Zentrum des Würfels zur Rotationsachse sei r.

(a) Sei der Neigungswinkel des Trichters zunächst $\phi = 0$ (waagerecht). Geben Sie für diesen Spezialfall die größte Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max}$ an, für die der Würfel noch am Boden haftet.

(b) Betrachten Sie nun den dargestellten Trichter. Jetzt gelte keine Haftreibung ($\mu_H = 0$). Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit ω an, für die sich der Würfel relativ zum rotierenden Trichter nicht bewegt.

(c) Berücksichtigen Sie jetzt eine konstante Haftreibung μ_H und berechnen Sie die größte und die kleinste Winkelgeschwindigkeit $\omega_{\max}$ bzw. $\omega_{\min}$, für die der Würfel noch an der Trichterwand haftet und sich nicht hoch oder runter bewegt.



Lösung

(a) Es muss $F_Z = \mu_H F_N$ gelten. Daher

$$m\omega_{\max}^2 r = \mu_H m g \Rightarrow \omega_{\max} = \sqrt{\frac{\mu_H g}{r}}$$

[1,5]

(b) Es muss $F_Z \cos\phi = F_G \sin\phi$ sein, also

$$m\omega^2 r \cos\phi = mg \sin\phi \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \tan\phi}{r}}$$

[1,5]

(c) Es muss $F_Z \cos\phi - F_G \sin\phi < |F_R|$ gelten, d.h. die Haftreibung $F_R = \mu_H F_N$ muss betragsmäßig größer als die resultierende Kraft parallel zur Trichterwand sein. Dies entspricht

$$|\omega^2 r \cos\phi - g \sin\phi| < \mu_H (g \cos\phi + \omega^2 r \sin\phi)$$

Es werden nun nach dem Vorzeichen des Argumentes des Betrages Fälle unterschieden.

Ist $\omega^2 r \cos\phi - g \sin\phi > 0$, so gilt

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g(\mu_H \cos\phi + \sin\phi)}{r(\cos\phi - \mu_H \sin\phi)}}$$

Gilt $\omega^2 r \cos\phi - g \sin\phi < 0$, so erhalten wir

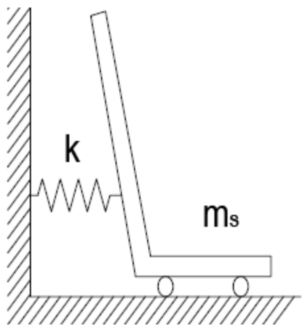
$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{g(\sin\phi - \mu_H \cos\phi)}{r(\mu_H \sin\phi + \cos\phi)}}$$

[**2**]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Um die Masse eines Astronauten in einer Raumstation zu bestimmen, nutzen wir das folgende Verfahren:

Zunächst wird ein Sitz der Masse $m_S = 12,5$kg durch eine Feder (Federkonstante k) an eine Wand der Raumstation gekoppelt, so dass der Sitz harmonische Schwingungen ausführt. Die dabei beobachtete Periodendauer ist $T_{0,S} = 0,35$s.



Anschließend wird ein Astronaut in den Sitz geschnallt und das System erneut in Schwingungen versetzt. Man misst nun eine Schwingungsdauer $T_{0,S,A} = 0,90$s.

(a) Bestimmen Sie aus diesen Messwerten die Masse m_A des Astronauten. Stellen Sie dazu am Anfang die Differentialgleichung der Schwingung auf.

(b) Ein Mitastronaut muss die Schwingung starten. Welche Arbeit W muss er einmalig aufwenden, damit sich für eine ungedämpfte Schwingung eine Schwingungsamplitude $\hat{y} = 10$cm einstellt?

(c) Bestimmen Sie die größte Geschwindigkeit $v_{\max}$, die der Astronaut während der Schwingungsbewegungen erreicht?

Lösung

(a)

$$\ddot{x} = -\frac{k}{M}x$$

Für eine ungedämpfte Schwingung eines Feder-Masse-Systems gilt für die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

bei einer linearen Federcharakteristik.

Für die beiden Schwingungsversuche gilt somit (Indizes „S“ für Sitz und „A“ für Astronaut)

$$T_{0,\,\mathrm{S}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{S}}{k}} \qquad T_{0,\mathrm{S,A}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_\mathrm{S}+m_\mathrm{A}}{k}}$$

Mit dem ersten Schwingungsversuch wird experimentell bei bekannter Masse m_S die Federkonstante k bestimmt; aus der Beziehung für die Schwingungsdauer $T_{0,\mathrm{S}}$ erhält man

$$k = 4\pi^2\frac{m_\mathrm{S}}{T^2_{0,\,\mathrm{S}}} = 4\pi^2\frac{12,5\mathrm{kg}}{(0,35\mathrm{s})^2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = 4,03\cdot 10^3\mathrm{Nm}^{-1}$$

[2]

Man braucht aber die Federkonstante k aus der ersten Gleichung (Schwingung des Sitzes allein) gar nicht explizit für diese Teilaufgabe auszurechnen. Da die Feder für beide Versuche die gleiche ist, fällt bei der Division der beiden Schwingungsdauern $T_{0,\mathrm{S,A}}$ und $T_{0,\mathrm{S}}$ die Federkonstante k weg; Quadrieren ergibt

$$\frac{T^2_{0,\mathrm{S,A}}}{T^2_{0,\mathrm{S}}} = \frac{m_\mathrm{S}+m_\mathrm{A}}{m_\mathrm{S}}$$

daraus erhält man für die Masse des Astronauten

$$\begin{aligned} m_\mathrm{A} &= \left(\frac{T^2_{0,\mathrm{S,A}}}{T^2_{0,\mathrm{S}}} - 1\right)m_\mathrm{S} = \left(\frac{(0,9\mathrm{s})^2}{(0,35\mathrm{s})^2} - 1\right)12,5\mathrm{kg} \\ &= 70,2\mathrm{kg} \end{aligned}$$

[1,5]

(b) Die vom Mitastronauten aufgewendete Arbeit W wird zum einen in potentielle Energie der Feder und zum anderen in kinetische Energie des schwingenden Systems (Astronaut und Sitz) umgesetzt. Im Umkehrpunkt der Schwingung, also bei Maximalauslenkung (= Amplitude) ist die kinetische Energie des schwingenden Systems

$$E^{\mathrm{S,A}}_{\mathrm{kin}} = 0$$

weil im Umkehrpunkt der Schwingung die Geschwindigkeit null ist. Es ist nur die potentielle Energie der Feder zu berücksichtigen. Diese hängt quadratisch von der Auslenkung ab, also ergibt sich für die Amplitude $\hat{y}$

$$\begin{aligned} W &= E^{\mathrm{Feder}}_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}k\hat{y}^2 = \frac{1}{2}\cdot 4,03\cdot 10^3\mathrm{N/m}\cdot 10^{-2}\mathrm{m}^2 \\ &= 20,2\mathrm{J} \end{aligned}$$

[1,5]

(c) Die beiden folgenden Lösungen sind korrekt: Beim Nulldurchgang der Schwingung ist die potenzielle Energie der Feder $E_{\text{pot}}^{\text{Feder}} = 0$, weil die Auslenkung 0 ist. Die kinetische Energie der beiden schwingenden Körper beim Nulldurchgang ist

$$E_{\text{kin}}^{\text{S,A, max}} = \frac{1}{2}(m_{\text{S}} + m_{\text{A}})v_{\text{max}}^2$$

Sie ist gleich der Gesamtenergie, also

$$W = E_{\text{kin}}^{\text{S,A, max}} = \frac{1}{2}(m_{\text{S}} + m_{\text{A}})v_{\text{max}}^2$$

Daraus erhält man

$$v_{\text{max}}^2 = \frac{2W}{m_{\text{S}} + m_{\text{A}}} = \frac{2 \cdot 20,2\text{Nm}}{82,7\text{kg}} = 0,489\text{m}^2\text{s}^{-2}$$

$$v_{\text{max}} = 0,7\text{m/s}$$

[2]

Alternativ:

Das Weg-Zeit-Gesetz einer ungedämpften harmonischen Schwingung lässt sich durch eine Sinus- oder eine Kosinus-Schwingung darstellen. Die Geschwindigkeit erhält man als erste Ableitung des Weg-Zeit-Gesetzes nach der Zeit Dabei ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 des

Darstellung	als Sinus-Funktion	als Kosinus-Funktion
Weg-Zeit-Gesetz	$y(t) = \hat{y}\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$	$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$
Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz	$\dot{y}(t) = \hat{y}\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$	$\dot{y}(t) = -\hat{y}\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Tabelle 1: Ungedämpfte harmonische Schwingung mit Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

schwingenden Systems

$$\sqrt{\frac{k}{M}} = \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0,9\text{s}} = 7\text{s}^{-1}$$

und die Amplitude $\hat{y} = 10$cm. Da der Betrag einer harmonischen Funktion maximal den Wert 1 annehmen kann, also wegen

$$0 \leq |\sin(\omega_0 t + \varphi_0)| \leq 1 \qquad\qquad 0 \leq |\cos(\omega_0 t + \varphi_0)| \leq 1$$

ist der Vorfaktor im Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz der Betrag der maximal auftretenden Geschwindigkeit, also

$$|v_{\text{max}}| = \hat{y}\omega_0 = 10^{-1}\text{m} \cdot 6,98\text{s}^{-1} = 0,7\text{m/s}$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Ein Gleiter (Masse m_1) bewegt sich auf einer Bahn reibungsfrei mit der Geschwindigkeit $v_1 = 20$cm/s nach rechts und stößt auf einen zweiten Gleiter „2“ (Masse $m_2 = 3m_1$) der sich ebenfalls bewegt (Geschwindigkeit v_2). Nach dem vollständig elastischen Zusammenstoß bleibt der leichte Gleiter „1“ stehen.

Bestimmen Sie für den schweren Gleiter 2

(a) die Geschwindigkeit v_2 vor dem Zusammenstoß.

(b) die Geschwindigkeit u_2 nach dem Zusammenstoß.

Lösung

Beobachte zuerst:

- Der Versuch findet auf einer geraden Gleitkissenbahn statt, damit liegt ein zentraler, gerader Stoß vor.
- Außerdem soll der Stoß vollständig elastisch erfolgen, damit sind die kinetischen Energien der Stoßpartner vor und nach dem Stoß gleich.

Um bei gegebenen Massenverhältnissen die beiden Geschwindigkeiten des Wägelchens 2 vor und nach dem Stoß zu berechnen, braucht man zwei Gleichungen. Für einen vollständig elastischen, zentralen, geraden Stoß Stoßvorgang sind dies die Erhaltungssätze für Impuls und Energie; also

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{aligned} \tag{1}$$

[1]

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich die allgemeinen Beziehungen für die Endgeschwindigkeiten der beiden Stoßpartner in Abhängigkeit von den Anfangsgeschwindigkeiten zu

$$u_1 = \frac{1}{m_1 + m_2}((m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2) \qquad u_2 = \frac{1}{m_1 + m_2}((m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1)$$

[1]

(a) Die erste Gleichung ergibt mit der Forderung „Wägelchen 1 bleibt nach dem Stoßprozess stehen“, also für $u_1 = 0$ und den gegebenen Massenverhältnissen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{m_1 + 3m_1}((m_1 - 3m_1)v_1 + 2 \cdot 3m_1 v_2) \\ &= -2m_1 v_1 + 6m_1 v_2 \end{aligned}$$

Also gilt

$$v_2 = \frac{1}{3} v_1 = \frac{1}{3} \cdot 20\text{cm/s} = 6,67\text{cm/s}$$

[1,5]

(b) (1) liefert

$$u_2 = \frac{1}{m_1 + 3m_1}((3m_1 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1) = \frac{2m_1}{4m_1} v_2 + \frac{2m_1}{4m_1} v_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

wie oben erhalten gilt $v_2 = \frac{1}{3} v_1$ und damit schließlich

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} v_1 + \frac{1}{2} v_1 = \frac{2}{3} v_1 = \frac{2}{3} \cdot 20\text{cm/s} = 13,3\text{cm/s}$$

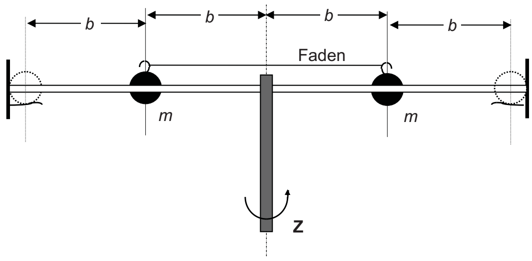
[1,5]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Auf einer (masselosen) Stange sind zwei Punktmasse vom Gewicht m jeweils im Abstand b vom Mittelpunkt der Stange durch einen Faden miteinander verbunden. Zu Beginn des Versuchs rotiert das System mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_{A} um eine Achse Z senkrecht zur Stange durch ihren Mittelpunkt. Anschließend wird der Faden durchtrennt. Die beiden Massen gleiten dann um jeweils den Abstand b nach außen und rasten dort ein. Es stellt sich eine Endwinkelgeschwindigkeit ω_{E} ein.

(a) Geben Sie das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten ω_{A} und ω_{E} an.

(b) Vergleichen Sie die beiden Rotationsenergien für den End- und Anfangszustand. Welcher Anteil der ursprünglichen kinetischen Energie wird in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt?



Lösung

(a) Der Index A stehe für den Anfangszustand, E für den Endzustand. Bei diesem Vorgang wirken nur innere Momente; damit ändert sich die Richtung und der Betrag $|\vec{L}|$ des Drehimpulses $\vec{L}$ des Systems nicht. Also gilt mindestens eine der Gleichungen

$$|\vec{L}| = \text{const.} \qquad I_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{E}}$$

[1]

Für die Massenträgheitsmomente gilt – in der Näherung als materielle Teilchen – für den Anfangszustand bzw. Endzustand

$$I_{\mathrm{A}} = 2mb^2 \qquad I_{\mathrm{E}} = 2m(2b)^2$$

[1]

Einsetzend erhält man

$$I_{\mathrm{A}}\omega_{\mathrm{A}} = I_{\mathrm{E}}\omega_{\mathrm{E}} \Leftrightarrow \omega_{\mathrm{E}} = \frac{I_{\mathrm{A}}}{I_{\mathrm{E}}}\omega_{\mathrm{A}} = \frac{2mb^2}{8mb^2}\omega_{\mathrm{A}} = \frac{1}{4}\omega_{\mathrm{A}}$$

[1]

(b) Für die kinetischen Energien im Anfangs- bzw. Endzustand erhält man damit

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot, A}} = \frac{1}{2} I_{\text{A}} \omega_A^2 = \frac{1}{2}(2mb^2)\omega_{\text{A}}^2 = mb^2\omega_{\text{A}}^2$$
$$E_{\text{kin}}^{\text{rot, E}} = \frac{1}{2} I_{\text{E}} \omega_E^2 = \frac{1}{2}(8mb^2)\left(\frac{1}{4}\omega_{\text{A}}\right)^2 = \frac{1}{4}mb^2\omega_{\text{A}}^2$$

Damit ergibt sich

$$\frac{E_{\text{kin}}^{\text{rot, E}}}{E_{\text{kin}}^{\text{rot, A}}} = \frac{1}{4}$$

Die kinetische Energie am Ende beträgt nur noch ein Viertel der kinetischen Energie am Anfang, also sind 75% der Anfangsenergie in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt worden.

[**2**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Ein Stab der Länge $L = 1\text{m}$ ist an seinen Enden eingespannt. Es wird eine Welle der Frequenz $f_0 = 700\text{Hz}$ erzeugt.

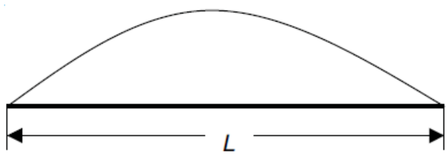
(a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit c im Stab und welche Obertöne f_n werden erzeugt?

Welcher Grundton und welche Obertöne können erzeugt werden, wenn der Stab

(b) nur an einem Ende eingespannt ist?

(c) nur in der Stabmitte fixiert ist?

Lösung



(a) Es gilt

$$f_0 = f_{0(\text{a})} = 700\text{Hz}$$
$$c = \lambda f = 2Lf_{0(\text{a})} = 2Lf_0 = 1400\text{m/s}$$

mit $f_{0(\text{a})}$ des Aufgabenteils (a) (analog für andere Aufgabenteile).

[**1**]

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit c ist materialtypisch und gilt somit auch für die beiden folgenden Aufgabenteile. Mit $L = (n+1)\frac{\lambda}{2}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ haben wir

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} f_{(\text{a})} = \frac{2(n+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} f_0 = (n+1)f_0 = (n+1)700\text{Hz}$$

für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

[**1**]

(b) Hier gilt

$$c = \lambda f = 4L f_{0(\mathrm{b})}$$
$$f_{0(\mathrm{b})} = \frac{1}{2} f_{0(\mathrm{a})} = \frac{1}{2} f_0$$

mit $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erhält man

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{4L}{\lambda} f_{0(\mathrm{b})} = \frac{4(2n+1)\frac{\lambda}{4}}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} f_0 = \frac{1}{2}(2n+1) f_0 = (n + \frac{1}{2})700\mathrm{Hz}$$

für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

[**2**]

(c) Hier erhält man

$$c = \lambda f = 2L f_{0(\mathrm{c})}$$
$$f_{0(\mathrm{c})} = f_{0(\mathrm{a})} = f_0$$

Mit $\frac{L}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ erhält man

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} f_{0(\mathrm{c})} = \frac{2(2n+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} f_0 = (2n+1) f_0 = (2n+1)700\mathrm{Hz}$$

für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

[**2**]

Aufgabe 8 (3 Punkte)

Ein Winzer hat im Keller ein Weinfass mit Höhe 2.20 m, gefüllt mit Wein. Um den Wein zu kosten, öffnet er den Hahn am Fass. Der Hahn befindet sich 20cm über dem Fassboden. Das Fass ist belüftet, d.h. der Außendruck ist gleich dem Druck auf der Oberläche (Atmosphärendruck) des Weines. Die Dichte des Weines ist $\rho = 1\mathrm{g/cm}^3$. Mit welcher Geschwindigkeit strömt der Wein aus dem Hahn?

Lösung:

Die Ausströmgeschwindigkeit wird durch zweimalige Anwendung der Bernoulli-Gleichung bei der Höhe $h_0 = 2.20\mathrm{m}$ und bei der Höhe $h_1 = 0.20\mathrm{m}$ ermittelt. Die zu den Bernoulli-Gleichungen gehörenden Geschwindigkeiten sind $v_0 = 0\mathrm{m/s}$ bei der Höhe h_0 und die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit v_1 bei der Höhe h_1. Desweiteren gilt:

$$p_0 = p_1 = p, \tag{2}$$

da der Außendruck gleichmäßig überall auf die Flüssigkeit wirkt.

Allgemein gilt:

$$p_0 + \frac{\rho}{2}v_0^2 + \rho g h_0 = p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1 \tag{3}$$

[1,5]

Mit Einsetzen der Randbedingungen ergibt sich:

$$\rho g h_0 = \frac{\rho}{2}v_1^2 + \rho g h_1 \tag{4}$$

Daraus folgt für die gesuchte Ausströmgeschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_0 - h_1)} = 6.26\mathrm{m/s} \tag{5}$$

[1,5]