Vordiplomsprüfung (Wiederholungsklausur)

Prof. Lindner / Prof. Dietrich **Quantenmechanik 1** **06.03.2002**

Name: ______________________ Matrikelnummer: ______________________

- Diese Prüfung beinhaltet 5 Fragen und 60 Punkte.
- Die Blätter sind beidseitig bedruckt.
- Die Punkte sind jeweils am Rand des Blattes angegeben.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.

[7] 1. (a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

die Kommutatorrelation

$$\left[H, x\frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x}V(x)$$

erfüllt.

[5] (b) Es genüge nun $V(x)$ der Homogenitätsbedingung, d. h. es gelte

$$x\frac{\partial}{\partial x}V(x) = \lambda V(x)$$

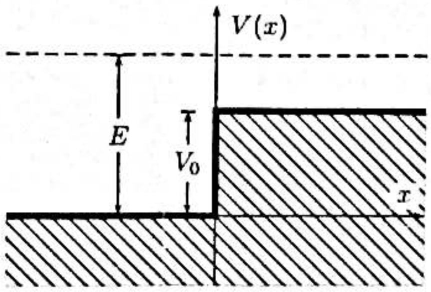
mit $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für einen Energie-Eigenzustand $|\psi\rangle$ die Erwartungswerte der potentiellen Energie und der kinetischen Energie die Relation

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle_\psi = \frac{\lambda}{2}\langle V(x)\rangle_\psi$$

erfüllen.

2. Ein Strahl von Teilchen (Masse m, Energie E) treffe auf eine eindimensionale Potentialschwelle der Höhe $V_0 < E$.

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases}$$



[6] (a) Bestimmen Sie die Wellenfunktionen für $x < 0$ und $x > 0$. Wie lauten die Anschlussbedingungen bei $x = 0$? Was ergibt sich daraus für die Amplituden?

[5] (b) Berechnen Sie den Reflexionskoeffizienten

$$R = \frac{j_{\text{reflektiert}}}{j_{\text{einfallend}}}$$

als Funktion der Energie E und der Potentialhöhe V_0.

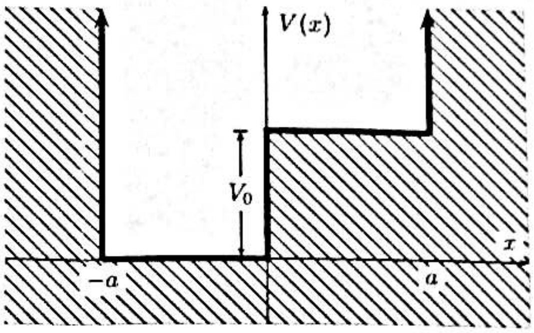
$A + B = C$

$kA - kB = KC$

[4] (c) Wie muss V_0 gewählt werden, damit gilt $R = \frac{1}{2}$?

$\boxed{8}$ 3. Betrachten Sie das eindimensionale Potentialproblem

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x \leq -a \\ 0\,, & -a < x < 0 \\ V_0\,, & 0 \leq x < a \\ \infty\,, & x \geq a \end{cases}$$



mit $V_0 > 0$. Finden Sie eine Bestimmungsgleichung für die Energieeigenwerte E mit $0 < E < V_0$. (Sie brauchen diese Bestimmungsgleichung nicht zu lösen.)

4. Betrachte das folgende vereinfachte Modell, bei dem ein Elektron durch eine harmonische Kraft an ein Atom gebunden ist. Untersuchen Sie den Einfluss eines konstanten äußeren elektrischen Feldes in z-Richtung $\vec{E} = \bar{E}\vec{e}_z$. Der Hamiltonoperator sei

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + e\bar{E}\,z\,.$$

$E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

$\boxed{5}$ (a) Führen sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung durch Separation auf eindimensionale Differentialgleichungen zurück.

$\boxed{4}$ (b) Geben Sie die Energie-Eigenwerte für das durch H beschriebene Elektron an.

5. Betrachtet wird das Elektron des Wasserstoff-Atoms in einem konstanten Magnetfeld in z-Richtung $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

$\boxed{4}$ (a) Vernachlässigt man den Elektron-Spin, so werde das Elektron durch den Hamiltonoperator

$$H = H_0 + \frac{eB}{2m_e c}L_z$$

beschrieben. Es ist $H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} - \frac{e}{r}$. L_z ist der Operator für die z-Komponente des Bahndrehimpulses. Sind die Eigenfunktionen $\psi_{n\ell m_\ell}$ zu H_0 auch Eigenfunktionen zu H? Wie lauten die Energie-Eigenwerte von H?

$\boxed{4}$ (b) Nun wird der Spin des Elektrons berücksichtigt. In einem <u>starken</u> Magnetfeld kann die Spin-Bahn-Wechselwirkung vernachlässigt werden und das Elektron wird beschrieben durch

$$H_s = H_0 + \frac{eB}{2m_e c}(L_z + 2S_z)\,.$$

S_z ist der Operator für die z-Komponente des Spins. Berechnen Sie die Veränderung der Energie-Eigenwerte durch den Zeeman-Term $\frac{eB}{2m_e c}(L_z + 2S_z)$.
[Hilfe: *Verwenden Sie als Eigenzustände von H_s die Produktzustände aus Eigenfunktionen von H und S_z.*]

$\boxed{8}$ (c) Betrachten Sie nun H_s aus Teilaufgabe (b) für den Fall eines <u>schwachen</u> Magnetfeldes. Der Zeeman-Term wird als Störung betrachtet. Berechnen Sie die Veränderung der Energie-Eigenwerte von H_0 durch den Störterm für Eigenzustände $|n, \ell, j = \ell \pm 1/2, m_j\rangle$ des Gesamtdrehimpulses in erster Ordnung Störungstheorie. Die Quantenzahl n ist die Knotenzahl des radialen Anteils der Eigenfunktionen von H_0. j ist die Quantenzahl für den Gesamtdrehimpuls und m_j ist die korrespondierende magnetische Quantenzahl.
[Hilfe: *Die Eigenzustände $|n, \ell, j = \ell \pm 1/2, m_j\rangle$ sind als Linearkombination der Produktzustände aus Eigenfunktionen $|n, \ell, m_\ell\rangle$ von L_z und $|\pm\rangle$ von S_z gegeben durch*

$$|n, \ell, j = \ell \pm 1/2, m_j\rangle = \alpha_\pm\,|n, \ell, m_\ell = m_j - 1/2\rangle\,|+\rangle + \beta_\pm\,|n, \ell, m_\ell = m_j + 1/2\rangle\,|-\rangle$$

mit $\alpha_\pm = \pm\beta_\mp = \sqrt{\frac{\ell \pm m_j + 1/2}{2\ell+1}}$.]