Aufgabe 1 (ca. 8 Punkte)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die eingerahmten Felder ein.
Begründungen brauchen Sie bei dieser Aufgabe nicht anzugeben.

(a) Die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$$

inverse Matrix ist

$$A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 31 & 16 & -15 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

(b) Geben Sie die Determinante und den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5,5,\mathbb{R})$$

an.

$$\det(B) = \boxed{-16} \qquad \mathrm{Rang}(B) = \boxed{5}.$$

(c) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3,3,\mathbb{R})$$

hat drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Geben Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3 von C an und einen Vektor v_3 mit ganzzahligen Einträgen, so dass v_3 Eigenvektor von C zum positiven Eigenwert λ_3 ist.

$$\lambda_1 = \boxed{-3} \qquad \lambda_2 = \boxed{-1} \qquad \lambda_3 = \boxed{5} \qquad v_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe 2 (ca. 7 Punkte)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die eingerahmten Felder ein.
Begründungen brauchen Sie bei dieser Aufgabe nicht anzugeben.

(a) Der Untervektorraum

$$U := \operatorname{spann}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension

$$\dim(U) = \boxed{2}.$$

(b) Geben Sie eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & 3x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & (\alpha-6)x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen hat.

$$\alpha = \boxed{5}$$

(c) Es sei $G = S_6 = \operatorname{Aut}(\{1,2,3,4,5,6\})$ mit der üblichen Verknüpfung $\circ$. Die Untergruppe $U := \{\pi \in S_6 \,|\, \pi(1) = 1, \pi(3) = 3\}$ hat die Kardinalität

$$\#U = \boxed{24}.$$

(d) Wieviele eindimensionale Untervektorräume hat der $\mathbb{Z}_5$-Vektorraum $\mathbb{Z}_5^3$?

$$\#\{W \subseteq \mathbb{Z}_5^3 \,|\, W \text{ eindimensionaler Untervektorraum von } \mathbb{Z}_5^3\} = \boxed{31}.$$

Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils entweder mit „**Ja**” oder „**Nein**” und **geben Sie jeweils eine sehr kurze Begründung** an. Minuspunkte werden nicht vergeben.

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

(i) $M_1 := \{ \begin{pmatrix} -\lambda^2 \\ \lambda+\mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

NEIN, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_1$, $(-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M_1$.

(ii) $M_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| = |x_2|\} \subseteq \mathbb{R}^3$

NEIN, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in M_2$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin M_2$.

(iii) $M_3 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_2 - x_1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

JA, Lsg.menge ein homog. LGS.

(iv) $M_4 := \{f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(-1) = 1\} \subseteq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

NEIN, Nullabb. $\notin M_4$.

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften?

(i) $\varphi(\begin{pmatrix} 11 \\ 56 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \pi \\ 3 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

JA, $\{\begin{pmatrix} 11 \\ 56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix}\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$.

(ii) $\varphi(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

JA, $\{\underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=:b_2}\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix} = b_1 - 3b_2$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) $\varphi(\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

NEIN $\varphi(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen jeweils entweder mit „**Ja**” oder „**Nein**” und **geben Sie jeweils eine sehr kurze Begründung** an. Minuspunkte werden nicht vergeben.

(a) Es seien V und W Vektorräume über $\mathbb{Q}$ mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ und $\varphi : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen richtig?

(i) Die lineare Abbildung φ hat den Rang 3.

NEIN, $\mathrm{Rang}(\varphi) = \dim(\mathrm{Bild}\,\varphi) = \dim(W) = 2 \neq 3$.

(ii) Die lineare Abbildung φ ist bijektiv.

NEIN, da $\dim(\mathrm{Kern}\,\varphi) = 3-2 = 1$, also $\mathrm{Kern}(\varphi) \neq \{0\}$.

(iii) Es gibt Basen B und C von V bzw. W mit $D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

NEIN, da $\mathrm{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq \mathrm{Rang}(\varphi)$.

(iv) Es gibt Basen B und C von V bzw. W mit $D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

NEIN, da $D_{B,C}(\varphi) \in \mathrm{Mat}(2,3,\mathbb{Q})$ für alle Basen B, C.

(b) Sind die folgenden Aussagen richtig?

(i) Es gibt eine Linearform f auf $\mathbb{R}^{12}$ mit $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 10$.

NEIN, da $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 12 - \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}(f))}_{\leq 1} \in \{11, 12\}$.

(ii) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i x_i$ ist eine alternierende Multilinearform auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

NEIN, da z.B. $\varphi(1,0,1,0) = -2 \neq 0$.

(iii) Für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V gibt es eine surjektive lineare Abbildung: $V^{**} \to V$.

JA, da $V^{**} \cong V$.

Aufgabe 5 (ca. 8 Punkte)

Es sei $V = \operatorname{spann}(\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos) \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wobei

$$\begin{aligned} \sin^2: \quad & x \mapsto (\sin x)^2, \\ \cos^2: \quad & x \mapsto (\cos x)^2, \\ \sin\cdot\cos: \quad & x \mapsto (\sin x)\cdot(\cos x). \end{aligned}$$

Es sei die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ gegeben durch $\varphi(f): x \mapsto f'(x) + f''(x)$ für $f \in V$.

(a) Es ist $B := \{\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos\}$ eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums V (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Geben Sie die Darstellungsmatrix $D_{B,B}(\varphi)$ an.

(b) Geben Sie eine Basis für $\operatorname{Kern}(\varphi)$ an.

Zur Kontrolle: $\operatorname{Kern}(\varphi)$ wird von einem Element von V aufgespannt.

(c) Geben Sie die Dimension $\dim(\operatorname{Bild}(\varphi))$ an.

(d) Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten!

(a) $\varphi(\sin^2) = 2\sin\cdot\cos + 2\cdot(\cos^2 - \sin^2) = -2\cdot\sin^2 + 2\cdot\cos^2 + 2\cdot\sin\cdot\cos$

$\varphi(\cos^2) = -2\sin\cdot\cos - 2\cdot(\cos^2 - \sin^2) = 2\cdot\sin^2 - 2\cdot\cos^2 - 2\cdot\sin\cdot\cos$

$\varphi(\sin\cdot\cos) = \cos^2 - \sin^2 - 2\cdot\sin\cdot\cos - 2\sin\cdot\cos = -\sin^2 + \cos^2 - 4\cdot\sin\cdot\cos$

$\rightsquigarrow \quad \underline{\underline{D_{B,B}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}}}$

(b) $\operatorname{Rang}(D_{B,B}(\varphi)) = 2 \Rightarrow \dim(\operatorname{Kern}\varphi) = 1$, $\varphi(\sin^2 + \cos^2) = 0$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\{\sin^2 + \cos^2\} \text{ ist Basis von } \operatorname{Kern}(\varphi)}}$.

(c) $\dim(\operatorname{Bild}\varphi) = 3 - \dim(\operatorname{Kern}\varphi) = \underline{\underline{2}}$

(d) $\operatorname{Kern}(\varphi) \neq \{0\} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \text{ nicht inj}}}$

$\dim(\operatorname{Bild}\varphi) < 3 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi \text{ nicht surj}}}$.

Aufgabe 6 (ca. 3 Punkte)

Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ ist.

Beweisen Sie: Es gibt ein $\lambda \in K$ mit $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Vor. $\Rightarrow$ $\forall v \in V\setminus\{0\} \; \exists \lambda_v \in K: \; \varphi(v) = \lambda_v v$.

Genügt zu zeigen: $\forall v,w \in V\setminus\{0\}: \; \lambda_v = \lambda_w$.

Hierzu: Sei $v,w \in V\setminus\{0\}$, o.B.d.A. v,w lin. unabh.

$\Rightarrow \lambda_{v+w} v + \lambda_{v+w} w = \lambda_{v+w}(v+w) = \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w) = \lambda_v v + \lambda_w w$

$\underset{v,w \text{ l.u.}}{\Rightarrow} \lambda_{v+w} = \lambda_v = \lambda_w$. $\Rightarrow$ Beh.

$\square$