....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Semestrale
HÖHERE MATHEMATIK II
Analysis 1 für Physiker

11. Februar 2008, 10:30 – 12:00 Uhr

Prof. Dr. H. Spohn, PD Dr. W. Aschbacher

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Σ		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Aufgabe 1. Definitionen **[3 Punkte]**

(a) Aus welchen Aussagen folgt, dass die reellwertige Folge (a_n) für $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

- ☐ $a \neq 0$ und $\forall \delta{>}0\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{>}N\colon \left|\frac{a_n}{a}\right| \leq \delta$
- ☐ $\forall N{\in}\mathbb{N}\ \exists \varepsilon{>}0\ \forall n{>}N\colon |a_n - a| < \varepsilon$
- ☒ $|a_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$
- ☒ $\forall n{\in}\mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ und $\sup\{a_n | n{\in}\mathbb{N}\} = a$

(b) Sei $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Welche Aussagen gelten für $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in [0,1]$?

- ☒ $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
- ☐ $g(1) = 0$
- ☒ $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- ☒ $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$

(c) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Welche Aussagen treffen zu?

- ☒ f ist beschränkt.
- ☐ f' ist beschränkt.
- ☐ Es existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = 0$.
- ☒ Es existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$.

LÖSUNG

(a) Beh Genau die Aussagen 3 und 4 sind richtig.

Bew Die Aussagen 1 und 2 sind falsch. Die Aussage 3 besagt gerade die Konvergenz von (a_n) gegen a. Die Aussage 4 besagt, dass eine monoton wachsende beschränkte Folge gegen ihr Supremum konvergiert, was richtig ist. ☐

[1 Punkt]

(b) Beh Genau die Aussagen 1, 3 und 4 sind richtig.

Bew Da f stetig ist, impliziert der Fundamentalsatz aus der Vorlesung die Aussagen 3 und 4. Dann ist auch Aussage 1 richtig. Die Aussage 2 ist falsch. ☐

[1 Punkt]

(c) Beh Genau die Aussagen 1 und 4 sind richtig.

Bew Da f stetig ist, impliziert der Satz vom Maximum die Aussage 1. Die Aussage 2 ist falsch. Wir betrachten dazu z.Bsp. die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^{3/2}\sin(1 - 1/x), & \text{falls} \quad x > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Die Ableitung $f'(x)$ für $x > 0$ divergiert für $x \to 0^+$, denn

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}\sin(1 - 1/x) + x^{-1/2}\cos(1 - 1/x).$$

Bemerkung:
Die Ableitung am Ursprung lautet $f'(0) = \lim_{x \to 0^+} x^{1/2}\sin(1 - 1/x) = 0$.

Die Aussage 3 ist falsch. Die Aussage 4 folgt aus dem Mittelwertsatz. ☐

[1 Punkt]

Aufgabe 2. Konvergenz **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} \qquad \square\ \frac{1}{4} \qquad \square\ \frac{3}{8} \qquad \boxtimes\ \frac{2}{3} \qquad \square\ \frac{5}{12} \qquad \square\ \frac{5}{6}$$

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$?

$\square = -\infty$ $\square \in (-\infty, 0)$ $\square = 0$ $\square \in (0, \infty)$ $\square = +\infty$ $\boxtimes$ existiert nicht

(c) Wie gross ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)/n}\, x^n \qquad \square\ 0 \qquad \boxtimes\ 1 \qquad \square\ \mathrm{e} \qquad \square\ \frac{1}{\mathrm{e}} \qquad \square\ \infty$$

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$. Durch welchen Wert ist f bei $x = 0$ stetig fortsetzbar?

$\boxtimes$ 1 $\square$ nicht stetig fortsetzbar $\square$ $\frac{1}{2}$ $\square$ 2 $\square$ 0

LÖSUNG

(a) <u>Beh</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{2}{3}$

<u>Bew</u> Wir berechnen die Reihe unter Anwendung der geometrischen Summenformel,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = \frac{2}{3}\,.$$

$\square$

[1 Punkt]

(b) <u>Beh</u> Der Grenzwert existiert nicht.

<u>Bew</u> Die Folge (a_n) mit $a_n := (-1)^n/(1+1/n)^n$ ist keine Nullfolge, denn die Menge ihrer Häufungswerte $\mathrm{H}(a_n)$ lautet

$$\mathrm{H}(a_n) = \{-1/\mathrm{e}, 1/\mathrm{e}\},$$

da $(1+1/n)^n$ gegen e konvergiert für $n \to \infty$. Ausserdem hat sie ein alternierendes Vorzeichen. $\square$

[1 Punkt]

(c) <u>Beh</u> Der Konvergenzradius ist $R = 1$.

<u>Bew</u> Wir benutzen z.Bsp. die Formel von Cauchy-Hadamard zur Berechnung des Konvergenzradius' R, d.h. $R = 1/\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, wobei hier $a_n := n^{\log(n)/n}$, also

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\mathrm{e}^{\frac{(\log n)^2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{\log n}{n}\right)^2}.$$

Da $\log(n)/n \to 0$ für $n \to \infty$, gilt $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. $\square$

[1 Punkt]

(d) Beh f ist durch den Wert 1 stetig nach $x = 0$ fortsetzbar.

Bew Wir berechnen den Grenzwert indem wir zweimal die Regel von de l'Hospital anwenden (was erlaubt ist),

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \cos(2x) = 1\,.$$

$\square$

[1 Punkt]

Aufgabe 3. Integration **[6 Punkte]**

Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ ☐ divergent ☐ 1 ☒ π ☐ $\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \log x \;\mathrm{d}x$ ☐ divergent ☒ -1 ☐ -2 ☐ $\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ ☒ divergent ☐ 1 ☐ 2π ☐ $\frac{3}{2}$

LÖSUNG

(a) <u>Beh</u> $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = \pi$

<u>Bew</u> Wir führen die Substitution $y = \sqrt{x}$ durch. Dann erhalten wir $\mathrm{d}x = 2y\,\mathrm{d}y$ und

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)} = 2\int_0^\infty \frac{y}{y\,(1+y^2)}\,\mathrm{d}y = 2\,[\arctan y]_0^\infty = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi.$$

☐

[2 Punkte]

(b) <u>Beh</u> $\displaystyle\int_0^1 \log x \;\mathrm{d}x = -1$

<u>Bew</u> Wir integrieren partiell und erhalten

$$\int_0^1 \log x \;\mathrm{d}x = \int_0^1 1\cdot\log x \;\mathrm{d}x = [x\log x]_0^1 - \int_0^1 x\,\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = (0 - \underbrace{\lim_{x\to 0^+} x\log x}_{=0}) - 1 = -1.$$

☐

[2 Punkte]

(c) <u>Beh</u> Das Integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ ist divergent.

<u>Bew</u> Mit $\sin x \le x$ für $x \in [0, \pi/2]$ folgt

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} \ge \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = +\infty.$$

☐

[2 Punkte]

Aufgabe 4. Inhomogenes Differentialgleichungssystem **[4 Punkte]**

Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Propagator e^{tA}. Welche Form hat er bei $t = 1$?

$$\square \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & \mathrm{e}^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 2\mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxtimes \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Schreiben Sie $A = D + N$ für ein diagonales D und ein nilpotentes N, sodass D und N kommutieren.

(b) Wie lautet die erste Komponente von $x(t)$ bei $t = 1$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = [0, 0, 0]^T$?

$$\square \quad \mathrm{e}^2 - 1 \qquad \square \quad \mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1) \qquad \square \quad \mathrm{e}^2 + 1 \qquad \boxtimes \quad \mathrm{e}\,(\mathrm{e}-1)$$

LÖSUNG

(a) Beh $\quad \mathrm{e}^A = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix}$

Bew Wir benutzen den Hinweis, schreiben

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

und stellen fest, dass $[D, N] = 0$. Daraus folgt, dass

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,(D+N)} = \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & t\,\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{bmatrix},$$

wobei wir im dritten Schritt benutzt haben, dass $\mathrm{e}^{tN} = 1 + tN$. Einsetzen von $t = 1$ liefert die Behauptung. $\square$

[2 Punkte]

(b) Beh $\quad (x(t))_1 = \mathrm{e}\,(\mathrm{e} - 1)$

Bew Die Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}\,x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\,A}\,b(s)\,\mathrm{d}s,$$

woraus in unserem Fall,

$$x(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{tA}\,x(0)}_{=0} + \int_0^t \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2(t-s)} & 0 & (t-s)\,\mathrm{e}^{2(t-s)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}s.$$

Es ergibt sich also für die erste Komponente von $x(t)$,

$$(x(t))_1 = \mathrm{e}^{2t} \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{2t}\left[-\mathrm{e}^{-s}\right]_0^t = \mathrm{e}^t\,(\mathrm{e}^t - 1).$$

Einsetzen von $t = 1$ liefert die Behauptung. $\square$

[2 Punkte]

Aufgabe 5. Parameterintegral **[5 Punkte]**
Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Benutzen Sie den *Satz von der dominierten Konvergenz* um zu zeigen, dass $f'(0) = \pi - 1$.

LÖSUNG

<u>Beh</u> $f'(0) = \pi - 1$
<u>Bew</u> Sei (x_n) eine reellwertige Nullfolge. Dann haben wir

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \int_1^\pi \underbrace{\frac{\sin(tx_n)}{tx_n}}_{=:\,g_n(t)}\,\mathrm{d}t,$$

wobei wir $f(0) = 0$ eingesetzt haben. Um den Satz von der dominierten Konvergenz aus der Vorlesung anzuwenden, prüfen wir, ob dessen Voraussetzungen in unserem Fall erfüllt sind:
(1) (g_n) konvergiert punktweise gegen die Funktion $g(t) = 1$ für alle $t \in [1, \pi]$. **[1 Punkt]**
(2) g_n für alle n und g sind stetig. **[1 Punkt]**
(3) g_n besitzt eine in n uniforme, integrable Majorante, z.Bsp. $\varphi(t) = 1$ für alle $t \in [1, \pi]$,

$$|g_n(t)| = \left|\frac{\sin(tx_n)}{tx_n}\right| \leq \varphi(t) = 1.$$

[1 Punkt]
Der Satz impliziert nun, dass wir den Limes unter das Integral ziehen dürfen, **[1 Punkt]**

$$f'(0) = \int_1^\pi g(t)\,\mathrm{d}t = \pi - 1.$$

[1 Punkt]
□

Erklärung:
je **[1 Punkt]** für jede der drei Voraussetzungen,
[1 Punkt] für die Anwendung des Satzes,
[1 Punkt] für die Auswertung des Integrals.

Aufgabe 6. Homogenes Differentialgleichungssystem **[6 Punkte]**

Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0)$, indem Sie eine Basis aus Eigenvektoren von A benutzen.

LÖSUNG

Beh $\quad x(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t\,(2e^{2t} - 1) \end{bmatrix}$

Bew Wir berechnen das charakteristische Polynom von A,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = (1-\lambda)(3-\lambda).$$

A hat also die zwei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$. **[1 Punkt]**

Es gibt also nur Hauptvektoren 1. Stufe, d.h. Eigenvektoren, die wir nun bestimmen.

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ finden wir

$$(A - \lambda_1\mathbf{1})\,x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x_1 = 0, \quad \text{also z.Bsp.} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

[1 Punkt]

[1 Punkt]

und zum Eigenwert $\lambda_2 = 3$,

$$(A - \lambda_2\mathbf{1})\,x_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x_2 = 0, \quad \text{also z.Bsp.} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

Die Vektoren $\{x_1, x_2\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, und deshalb können wir die Anfangsbedingung $x(0)$ bzgl. dieser Basis entwickeln,

$$x(0) = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

[1 Punkt]

wobei $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA}x(0) = e^{tA}(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1e^{tA}x_1 + c_2e^{tA}x_2 = c_1e^{t\lambda_1}x_1 + c_2e^{t\lambda_2}x_2 \\ &= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\,e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t\,(2e^{2t} - 1) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

□

Erklärung:
[1 Punkt] für die Eigenwerte,
[1 Punkt] für die Eigenvektorgleichung,
je **[1 Punkt]** für die beiden Eigenvektoren,
[1 Punkt] für die Entwicklung der Anfangsbedingung,
[1 Punkt] für das Anwenden des Propagators.

Aufgabe 7. Taylorreihe **[3 Punkte]**

Sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

und sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ihre Taylorreihe mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

(a) Wie lauten die Koeffizienten a_n für $n \geq 1$?

- ☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{2^n}$
- ☒ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!\,2^n}$
- ☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n-1}(2j-1)}{2^n}$
- ☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{(n-1)!\,2^n}$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ e ☐ ∞

(c) Wie lauten die Koeffizienten b_n der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ von $f'(x)$ im gleichen Entwicklungspunkt?

- ☐ $b_n = a_n$
- ☐ $b_0 = 0,\ b_n = a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_n = n\,a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☒ $b_n = (n+1)\,a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

LÖSUNG

(a) <u>Beh</u> Die Koeffizienten a_n für $n \geq 1$ lauten $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!\,2^n}$.

<u>Bew</u> Wir leiten ab und erhalten

$$f^{(n)}(x) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{2^n}\,(1-x)^{-(2n+1)/2}.$$

Bemerkung:
Wir können auch die Binomialreihe und den Satz über die Identität der Potenzreihe und der Taylorreihe aus der Vorlesung benutzen,

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \binom{-1/2}{n}}_{=a_n} x^n.$$

Der n-te Taylorkoeffizient im Ursprung lautet also

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!\,2^n}.$$

$\square$

[1 Punkt]

(b) <u>Beh</u> Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist $R = 1$.

<u>Bew</u> Wir können die Formel von Euler benutzen,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{f^{(n+1)}(0)}\,(n+1) = \lim_{n\to\infty} 2\,(n+1)\,\frac{1}{2(n+1)-1} = 1\,.$$

$\square$

[1 Punkt]

(c) <u>Beh</u> Die Koeffizienten der Taylorreihe von $f'(x)$ im Ursprung lauten $b_n = (n+1)\,a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Bew</u> Die Ableitung einer Potenzreihe kann auf ihrem Konvergenzintervall gliedweise durchgeführt werden,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n+1)\,a_{n+1}}_{=\,b_n}\, x^n\,.$$

$\square$

[1 Punkt]

Aufgabe 8. Stetigkeit **[3 Punkte]**

Seien $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Benutzen Sie die $\varepsilon\delta$-Definition der Stetigkeit um zu zeigen, dass

$$f + g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

LÖSUNG

Beh Falls $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ist $f + g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Bew Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren nach Voraussetzung $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad |x - a| < \delta_1, \\ |g(x) - g(a)| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad |x - a| < \delta_2. \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Dann existiert aber auch ein $\delta > 0$, z.Bsp. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, sodass für alle x mit $|x - a| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - (f(a) + g(a))| &= |[f(x) - f(a)] + [g(x) - g(a)]| \\ &\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{\leq} \underbrace{|f(x) - f(a)|}_{<\varepsilon/2} + \underbrace{|g(x) - g(a)|}_{<\varepsilon/2} \\ &\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Erklärung:

[1 Punkt] für die $\varepsilon\delta$-Definition der Stetigkeit,

[1 Punkt] für die Dreiecksungleichung,

[1 Punkt] für das Einsetzen der Voraussetzung.

Aufgabe 9. Häufungwerte **[4 Punkte]**

Sei (a_n) eine beschränkte reellwertige Folge und $\mathrm{H}(a_n)$ die Menge aller ihrer Häufungswerte. Zeigen Sie, dass

$$\sup \mathrm{H}(a_n) \in \mathrm{H}(a_n).$$

LÖSUNG

<u>Beh</u> $\sup \mathrm{H}(a_n) \in \mathrm{H}(a_n)$

<u>Bew</u> Sei $\alpha := \sup \mathrm{H}(a_n)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der Schrankeneigenschaft und der Minimalitätseigenschaft des Supremums ein $a \in \mathrm{H}(a_n)$, sodass

$$\alpha - \varepsilon \overset{\textbf{[1 Punkt]}}{<} a \overset{\textbf{[1 Punkt]}}{\leq} \alpha.$$

Fall 1: $a = \alpha$

Es folgt die Behauptung.

Fall 2: $a < \alpha$

Dann existiert ein $\delta > 0$ (z.Bsp. $\delta = \min\{\alpha - a, \varepsilon - (\alpha - a)\}/2$), sodass

$$\alpha - \varepsilon < a - \delta < a + \delta < \alpha.$$

[1 Punkt]

Da $a \in \mathrm{H}(a_n)$, gilt definitionsgemäss, dass

$$|a - a_n| < \delta \quad \text{für unendlich viele } n,$$

[1 Punkt]

und deshalb

$$|\alpha - a_n| \leq |\alpha - a| + \underbrace{|a - a_n|}_{<\delta} < \varepsilon.$$

Es liegen also auch unendlich viele Folgenglieder in jeder Umgebung von α, und deshalb ist α ein Häufungspunkt. $\square$

Erklärung:

[1 Punkt] für die Schrankeneigenschaft,
[1 Punkt] für die Minimalitätseigenschaft,
[1 Punkt] für die Definition des Häufungspunktes,
[1 Punkt] für die Inklusion der Umgebungen.

Aufgabe 10. Satz von Taylor **[2 Punkte]**

(a) Sei $f \in C^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet die Integralform des Restgliedes $R_{n+1}(x)$ in der Taylorformel n-ter Ordnung mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt?

$$\boxed{R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

(b) Welches Abfallverhalten hat $R_{n+1}(x)$ für $x \to 0^+$?

☒ $R_{n+1}(x) = o(x^n)$
☒ $R_{n+1}(x) = O(x^n)$
☐ $R_{n+1}(x) = o(x^{n+1})$
☒ $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$

LÖSUNG

(a) Beh $\quad R_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

Bew Dies ist die Formel aus der Vorlesung. □

[1 Punkt]

(b) Beh Es gilt $R_{n+1}(x) = o(x^n), O(x^n), O(x^{n+1})$ aber $R_{n+1}(x) \neq o(x^{n+1})$.

Bew Aus der Integralformel folgt (siehe auch Vorlesung),

$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \, f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{n!}\int_0^x \underbrace{|x-t|^n}_{\le x^n} \quad \underbrace{|f^{(n+1)}(t)|}_{\le \max_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)|} \quad \mathrm{d}t$$
$$\le \frac{1}{n!}\max_{t\in[0,1]} |f^{(n+1)}(t)|\, x^{n+1},$$

wobei das Maximum existiert, da $f \in C^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$. Ausserdem ist im allgemeinen $R_{n+1}(x) \neq o(x^{n+1})$, denn (z.Bsp. Lagrangesche Form des Restgliedes)

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_{n+1}(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}.$$

□

[1 Punkt]