Technische Universität München
TUM School of Natural Sciences
Physik Department

Experimentalphysik 1

Wintersemester 2023/2024

Prof. Dr. Alexander Holleitner

Probeklausur 2

22. Januar 2024

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 - Bungeesprung (8 Punkte)

Ein Bungee-Springer möchte von einer Brücke der Höhe 45 m springen. Im entspannten Zustand hat das Bungee-Seil eine Länge $L = 25$ m. Das Seil gehorche dem Hook'schen Gesetz mit Federkonstante $k = 160$ N/m. Der Springer kann als Massepunkt behandelt werden.

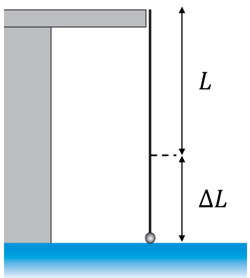
(a) Welche Masse m muss der Springer haben, damit er gerade nicht ins Wasser eintaucht? (2P)

(b) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung der Kraft F, die auf den Springer am Umkehrpunkt wirkt. (2P)

(c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Springers nach 30 m. (2P)

(d) Der Springer führt seinen Bungeesprung am Äquator durch. Wie groß ist die Corioliskraft, die nach 30 m auf ihn wirkt, im Verhältnis zur Gewichtskraft? In welche Richtung wirkt sie? (2P)

Lösung



(a) Im tiefsten Punkt über dem Wasser hat der Springer seine potentielle Energie komplett in Spannenergie der Feder umgewandelt (keine kinetische Energie), also:

$$\Delta E_{\text{pot}} = \Delta E_{\text{span}}$$
$$mg(L + \Delta L) = \frac{1}{2}k\Delta L^2$$

[1]

Aufgelöst auf m ergibt:

$$m = \frac{k\Delta L^2}{2g(L + \Delta L)} = 72,5 \text{ kg}$$

[1]

(b) An diesem Punkt wird die Gewichtskraft F_g nach unten und die Federkraft F_{Spann} des gespannten Seils nach oben:

$$F_{\text{res}} = F_{\text{Spann}} - F_g = k\Delta L - mg = 3200 \text{ N} - 711 \text{ N} \approx 2500 \text{ N}$$

[**1**]

Richtung resultierende Kraft: Nach oben.

[**1**]

(c) Auch hier verwenden wir Energieerhaltung: Die potentielle Energie zu Beginn der Bewegung steckt nun sowohl in kinetischer Energie als auch in Spannenergie der Feder:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

[**1**]

hier ist jetzt $h = 30$ m und $x = h - L = 5$ m. Aufgelöst auf v erhält man:

$$v = \sqrt{2gh - \frac{k}{m}x^2} = 23,3 \text{ m/s}$$

[**1**]

(d) Die Corioliskraft ist gegeben durch

$$\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

wird mit $v = 23,3$ m/s und $\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ s^{-1} erhält man

$$|\vec{F}_C| = 0,24 \text{ N}$$

Sie ist damit ca. um einen Faktor

$$\frac{F_g}{F_C} \approx 3000$$

[**1**]

kleiner als die Gewichtskraft. Die Corioliskraft wirkt nach Osten.

[**1**]

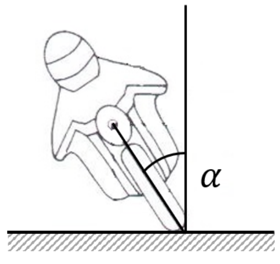
Aufgabe 2 - Motorrad-Testfahrt (12 Punkte)

Auf einer ebenen Kreisbahn mit Durchmesser von 200 m wird ein Motorrad getestet. Dafür wird das Motorrad aus dem Stand gleichmäßig beschleunigt.

(a) Zur Kontrolle der Beschleunigung/Geschwindigkeit befinden sich entlang der Strecke im Abstand von 10 m Lichtschranken. Der Motorradfahrer startet in unbekanntem Abstand zur ersten Lichtschranke. Der gemessene Zeitintervall zwischen Lichtschranke 1 und 2 beträgt $\Delta t_{12} = 1,2$ s und der zwischen Lichtschranke 2 und 3 beträgt $\Delta t_{23} = 0,7$ s. Berechnen Sie die Beschleunigung a des Motorrads. (5P)

(*Ersatzergebnis*: $a = 7,2$ m/s^2)

(b) Berechnen Sie die seitliche Neigung α des Motorrads gegen die Normale (siehe Abbildung) für den Zeitpunkt $t_b = 5$ s nach dem Start. (4P)



(c) Der Reibungskoeffizient zwischen Motorradreifen und Boden beträgt $\mu = 0,9$. Begründen Sie, ob es möglich ist, dass das Motorrad auf der Teststrecke seine Höchstgeschwindigkeit von 200 km/h erreichen kann, ohne wegzurutschen. (3P)

Lösung

(a) Es handelt sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Für die zurückgelegten Streckenunterschiede gilt also:

$$\Delta s_{12} = v_1 \Delta t_{12} + \frac{1}{2} a \Delta t_{12}^2$$
$$\Delta s_{23} = v_2 \Delta t_{23} + \frac{1}{2} a \Delta t_{23}^2$$

[2]

Hierbei ist a die gesuchte Beschleunigung. v_1 bzw. v_2 sind die (unbekannten) Geschwindigkeiten beim Passieren von Lichtschranke 1 bzw. 2. Es gilt jedoch auch:

$$v_2 = v_1 + a \Delta t_{12}$$

[1]

also:

$$\Delta s = v_1 \Delta t_{12} + \frac{1}{2} a \Delta t_{12}^2$$
$$\Delta s = v_1 \Delta t_{23} + a \Delta t_{12} \Delta t_{23} + \frac{1}{2} a \Delta t_{23}^2$$

Nun hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die erste Gleichung aufgelöst auf v_1:

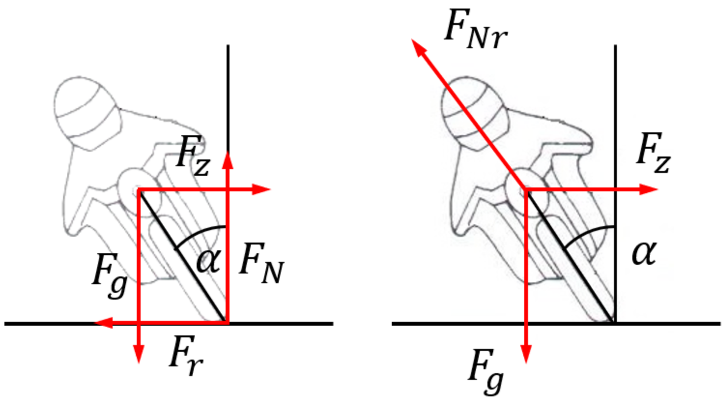
$$v_1 = \frac{\Delta s}{\Delta t_{12}} - \frac{1}{2} a \Delta t_{12}$$

Eingesetzt in zweite Gleichung und aufgelöst auf a ergibt:

$$a = \frac{2 \Delta s}{\Delta t_{12} + \Delta t_{23}} \left(\frac{1}{\Delta t_{23}} - \frac{1}{\Delta t_{12}} \right) = 6,3 \text{ m/s}^2$$

[2]

(b) Betrachtung im Bezugssystem des Motorrads: Es wirkt die Gewichtskraft F_g und die Zentrifugalkraft F_Z. Diese werden durch die Normalkraft F_N und die Reibungskraft F_r kompensiert (siehe Abbildung).



Für den Neigungswinkel α gilt dann:

$$\tan \alpha = \frac{F_Z}{F_g}$$

[1]

Für die Zentrifugalkraft F_Z gilt entsprechend:

$$F_Z = m\frac{v^2}{r}$$

mit der Bewegungsgleichung:

$$v(t) = at$$

[**1**]

Damit für $t_b = 5$ s:

$$\alpha(t_b) = \arctan\left(\frac{a^2t_b^2}{gr}\right) \approx 45,3° \qquad (52,9°)$$

[**2**]

Hier fällt bereits auf, dass der Winkel mit den gegebenen Werten größer als 45° ist.

(c) Für die maximale Reibungskraft, ohne dass das Motorrad wegrutscht, gilt:

$$F_r = \mu F_N = \mu mg$$

Die Reibungskraft ist entgegengesetzt gleich zur Zentrifugalkraft (bzw. hält das Motorrad auf seiner Kreisbahn), also:

$$\mu mg \stackrel{!}{=} m\frac{v_{\max}^2}{r}$$

[**1**]

Damit ist die maximal mögliche Geschwindigkeit $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \sqrt{\mu gr} = 29,7 \text{ m/s}$$

[**1**]

Die Höchstgeschwindigkeit ist 200 km/h, entspricht also ≈ 56 m/s. Die Höchstgeschwindigkeit lässt sich somit auf der Teststrecke nicht erreichen.

[**1**]

Alternativ: Die Reibungskraft is immer kleiner als die Normalkraft (da $\mu < 1$), damit muss mindestens $\alpha < 45°$, da er sonst wegrutscht. Wenn er also zur Zeit t_b noch nicht seine Höchstgeschwindigkeit erreicht hätte, dann würde er sie vor dem Wegrutschen auch nicht erreichen. Es gilt: $v(t_b) = at_b = 31,5$ m/s $< v_{\max}$, also erreicht er sie nicht.

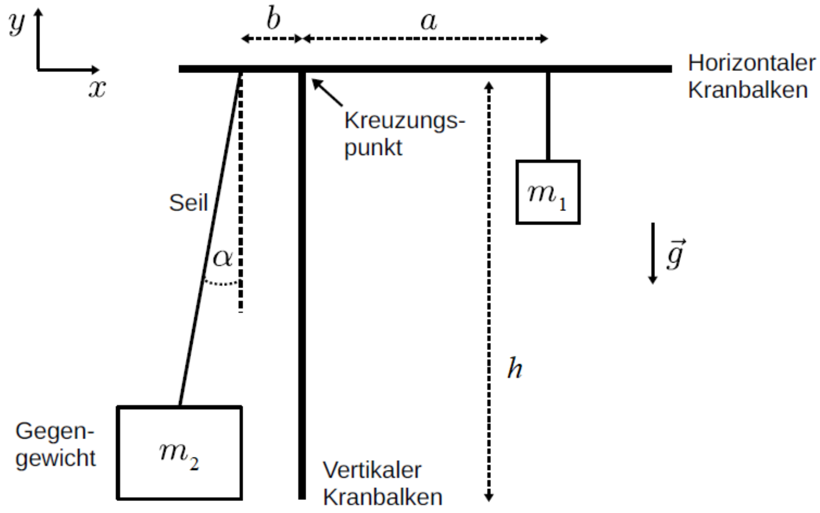
Aufgabe 3 - Kran (8 Punkte)

Gegeben sei ein Kran, bestehend aus zwei zueinander senkrechten Balken. Der horizontale Balken liegt am Kreuzungspunkt auf dem vertikalen Balken der Höhe h auf (siehe Abbildung). Es werde eine Kiste der Masse m_1 gehalten, welche sich im Abstand a vom Kreuzungspunkt befindet. Das Gegengewicht wird von einer Masse m_2 aufgebracht, welche über ein Seil mit dem horizontalen Balken verbunden ist. Der Punkt, an dem das Seil mit dem horizontalen Balken verbunden ist, hat den horizontalen Abstand b vom Kreuzungspunkt. Das Seil ist gespannt und bildet einen Winkel α mit der Vertikalen. Die Balken sind unverformbar und haben vernachlässigbare Masse, ferner kann sich der vertikale Balken nicht bewegen oder rotieren.

(a) Bestimmen Sie den Betrag der Seilkraft F_S, die das Seil auf den horizontalen Balken ausüben muss, damit der horizontale Balken nicht kippt. (3P)

(b) Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Auflagekraft F_K, die der vertikale Balken am Kreuzungspunkt auf den horizontalen Balken auswirkt. Bestimmen Sie außerdem das auf den vertikalen Kranbalken wirkende Drehmoment M_K, das kompensiert werden muss damit er in Ruhe ist. (3P)

(c) Wie groß muss m_2 mindestens sein, damit die Masse m_1 mit einer Beschleunigung von g nach oben gezogen werden kann? (2P)



Lösung

(a) Wir betrachten die Drehmomente auf den horizontalen Balken:

$$
\begin{aligned}
M_m &= aF_m = am_1 g \\
M_S &= bF_S \cos\alpha
\end{aligned}
$$

[2]

Damit der Kran in Ruhe ist, müssen sich beide Drehmomente ausgleichen:

$$
\begin{aligned}
M_m &= M_S \\
\Rightarrow F_S &= \frac{am_1 g}{b\cos\alpha}
\end{aligned}
$$

[1]

(b) Die auf den vertikalen Balken wirkende Kraft am Kreuzungspunkt hat zwei Komponenten: Eine vertikale und eine horizontale Komponente: Letztere ist notwendig, um den horizontalen Anteil der Seilkraft auszugleichen, und bewirkt ein Drehmoment auf den vertikalen Balken.

Kraftkomponente in y-Richtung:

$$F_{K,y} = F_S \cos\alpha + m_1 g = m_1 g \left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

diese wirkt in positive y-Richtung.

[1]

Kraftkomponente in x-Richtung:

$$F_{K,x} = F_S \sin\alpha = \frac{am_1 g}{b}\tan\alpha$$

diese wirkt in positive x-Richtung.

[1]

Für das Drehmoment gilt dann also:

$$\Rightarrow M_K = h \cdot F_{K,x} = \frac{am_1 gh}{b}\tan\alpha$$

[**1**]

(c) Wenn die Masse m_1 mit g in positive y-Richtung beschleunigt wird, dann muss das Seil das zusätzlich wirkende Drehmoment durch die Beschleunigung der Masse ausgleichen. Nun gilt:

$$M_m = am_1(2g)$$
$$M_S = bF_S \cos\alpha$$
$$\Rightarrow F_S = \frac{2am_1g}{b\cos\alpha}$$

[**1**]

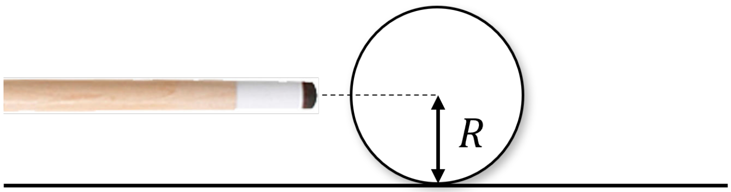
Diese Kraft muss von der Gewichtskraft der Masse m_2 bereitgestellt werden (bzw. von deren Projektion auf die Seilrichtung). Also gilt im Grenzfall:

$$m_2 g\cos\alpha \stackrel{!}{=} \frac{2am_1g}{b\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow m_2 = \frac{2am_1}{b\cos^2\alpha}$$

[**1**]

Aufgabe 4 - Billard (13 Punkte)

Stößt man eine Billardkugel (Masse $m = 170$ g und Radius $R = 57$ mm) mit einem Billardstock derart an, dass die Wirkungslinie der Kraft parallel zur Tischplatte und durch den Massenmittelpunkt der Kugel geht (siehe Abbildung), gleitet sie zunächst und beginnt dann zu rollen.



(a) Erklären Sie, warum geht die Bewegung der Kugel vom Rutschen schließlich in eine reine Rollbewegung übergeht. (2P)

(b) Unmittelbar nach dem Stoß beträgt die Geschwindigkeit der (rutschenden) Kugel $v_0 = 1,0$ m/s. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 der Kugel, wenn sie vollständig rollt ohne zu rutschen. (4P)

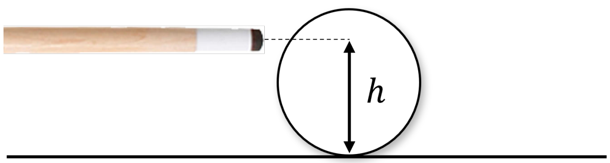
Hinweis: Das Trägheitsmoment einer Kugel bei Rotation um deren Schwerpunkt ist gegeben mit:

$$I_S = \frac{2}{5}mR^2 \tag{1}$$

Ersatzergebnis: $v_1 = 0,78$ m/s

(c) Welche Energiemenge wurde beim Übergang von der Rutsch- in die Rollbewegung der Kugel in Wärme umgewandelt? (3P)

(d) Berechnen Sie die Höhe h über dem Tisch, in der man die Billardkugel mit dem Billardstock treffen muss, damit sie nach dem Stoß nicht gleitet sondern sofort zu rollen beginnt. (4P)



Lösung

(a) Es wirkt (Gleit-)Reibung. Die Reibungskraft wirkt auf den Rand der Kugel. Da die Kugel ist ein ausgedehnter Körper ist, bewirkt das schließlich ein Drehmoment, das zur Rollbewegung führt.

[**2**]

(b) Wir betrachten den Drehimpuls der Kugel. Unmittelbar nach dem Stoß hat die Kugel zum Auflagepunkt der Drehimpuls:

$$L = Rmv_0$$

[**1**]

Sobald die Kugel komplett rollt, ist der Drehimpuls komplett in eine Rotationsbewegung um den Auflagepunkt übergegangen. Die Kugel habe dann die Translationsgeschwindigkeit v_1. Damit ist der Drehimpuls auch gegeben über:

$$L' = I\omega = I\frac{v_1}{R}$$

[**1**]

Das Trägheitsmoment um den Auflagepunkt ist:

$$I = I_S + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2$$

[**1**]

Gleichsetzen und auflösen auf v_1 ergibt:

$$\begin{aligned} Rmv_0 &= \frac{7}{5}mRv_1 \\ \Rightarrow v_1 &= \frac{5}{7}v_0 = 0,71 \text{ m/s} \end{aligned}$$

[**1**]

(c) Die anfänglich reine kinetische Energie E_{kin} der Kugel (Translationsbewegung des Schwerpunkts) wandelt sich teilweise in Rotationsenergie (um den Schwerpunkt) und in Wärme um. Damit gilt folgende Bilanzgleichung:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{trans}} + E_{\text{rot}} + H \\ \frac{1}{2}mv_0^2 &= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}I_S\omega^2 + H \end{aligned}$$

[**1**]

H ist hierbei die gesuchte Wärmemenge. Aufgelöst darauf ergibt sich:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - v_1^2 - \frac{2}{5}R^2\frac{v_1^2}{R^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - \frac{7}{5}v_1^2\right) \\ &= 0,025 \text{ J} \qquad (= 0,013 \text{ J}) \end{aligned}$$

[**2**]

(d) Drehimpuls des Billardstocks bzgl. Drehpunkt (direkt vor dem Stoß) und Drehimpuls der Kugel (direkt nach dem Stoß) sind gegeben durch:

$$L_Q = hp_Q \quad \text{und} \quad L_K = I_K\omega_K$$

[**1**]

Es muss Drehimpulserhaltung gelten:

$$L_Q = L_K$$

Außerdem gilt Impulserhaltung:

$$p_Q = m_K v_K$$

[**1**]

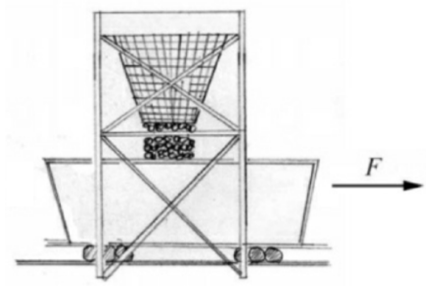
Damit:

$$\begin{aligned} h m_K v_K &= I_K \omega_K \\ h m_K \omega_K R &= \left(\frac{2}{5} m_K R^2 + m_K R^2\right) \omega_K \\ \Rightarrow h &= \frac{7}{5} R = 79{,}8 \text{ mm} \end{aligned}$$

[**2**]

Aufgabe 5 - Minenwaggon (10 Punkte)

Ein leerer Minenwaggon der Masse m_0 wird aus der Ruhe mit der (konstanten) Kraft F beschleunigt. Gleichzeitig wird Kohle in den Waggon geladen. Diese fällt mit der Rate $\dot{m}$ (Einheit kg/s) vertikal von oben in den Waggon. Reibung kann vernachlässigt werden.



(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_a des Waggons, wenn die Masse m_a verladen wurde. (3P)

(b) Bestimmen Sie den Betrag der Arbeit, die aufgewendet werden musste, um den Waggon zu beschleunigen. (2P)

An seinem Ziel soll der Waggon nun wieder entladen werden. Dafür wird, während er mit Geschwindigkeit v_a fährt, eine Klappe am Boden geöffnet und die Kohle fällt vertikal mit (konstanter) Rate $\dot{m}$ aus dem Waggon.

(c) Bestimmen Sie die Kraft F_b mit der der Waggon gebremst werden muss, damit der Waggon seine Geschwindigkeit konstant hält. (3P)

(d) Welche Geschwindigkeit v_c hätte der Waggon am Ende des Entladevorgangs (m_a ist wieder vollständig entladen), wenn er nicht gebremst werden würde? (2P)

Lösung

(a) Die beschleunigende Kraft F ändert den Impuls p des Waggons ($F = \dot{p}$), also gilt:

$$p(t) - p_0 = \int_0^t F \mathrm{d}t' = Ft$$

[**1**]

Mit $p_0 = 0$. Gleichzeitig gilt für den Impuls des Waggons außerdem:

$$p(t) = m(t)v(t) = (m_0 + \dot{m}t)v(t)$$

[**1**]

Zur Zeit t_a sei $m_a = \dot{m} \cdot t_a$ verladen worden. Die End-Geschwindigkeit ist dann v_a und damit gilt:

$$\begin{aligned} F t_a &= (m_0 + m_a) v_a \\ \Rightarrow v_a &= \frac{F m_a}{\dot{m}(m_0 + m_a)} \end{aligned}$$

[1]

(b) Es wirkt keine Reibung. Die Arbeit W, die aufgewendet werden musste um den Waggon zu beschleunigen, entspricht also gerade der Zunahme der kinetischen Energie. Am Ende hat der Waggon (und die gesamte verladene Kohle) die Geschwindigkeit v_a, damit:

$$W = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(m_0 + m_a)v_a^2$$

[2]

(c) Die Masse des Waggons ist zeitabhängig:

$$m(t) = m_0 + m_a - \dot{m}t$$

Die Geschwindigkeit v_a des Waggons soll konstant bleiben. Damit muss der Impuls des Waggons mit fortschreitender Zeit abnehmen entsprechend der Gleichung:

$$p(t) = (m_0 + m_a - \dot{m}t)v_a$$

[1]

Die wirkende Bremskraft F_b muss also zu genau dieser Impulsänderung führen, also:

$$|F_b| = \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{m}v_a$$

[2]

Anmerkung: Beachte in der Angabe das Wort *vertikal* (hier im Bezugsystem des außenstehenden Beobachters). Eigentlich würde die Kohle vertikal im System des Waggons abfallen, damit würde nicht nur die Masse abnehmen, sondern diese auch einen Teil des Impulses abführen. Damit wäre $F_b = 0$, um die Geschwindigkeit konstant zu halten.

(d) Ohne wirkende Kraft ist der Impuls erhalten:

$$p = p'$$
$$(m_0 + m_a)v_a = m_0 v_c$$

[1]

Für die Geschwindigkeit v_c nach der Entladung gilt dann:

$$v_c = \frac{(m_0 + m_a)}{m_0}v_a = \left(1 + \frac{m_a}{m_0}\right)v_a$$

[1]

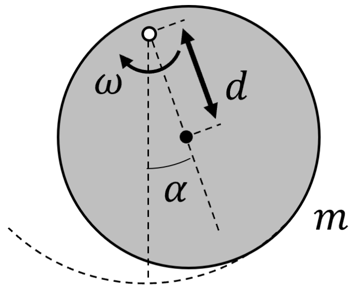
Anmerkung: Mit dem Argument von oben: $v_c = v_a$.

Aufgabe 6 - Schwingung einer ausgedehnten Scheibe (10 Punkte)

Eine zylindrische Scheibe mit Radius $r = 0,80$ m und einer Masse $m = 6,0$ kg habe eine homogene Massendichte. In der Entfernung d vom Mittelpunkt der Scheibe befindet sich ein kleines Loch, an dem man die Scheibe aufhängen kann.

(a) Sie bauen aus der Scheibe ein physikalisches Pendel indem Sie sie an einen Nagel an der Wand hängen. Berechnen Sie den Wert von d, damit die Schwingungsdauer dieses physikalischen Pendels $T = 2,5$ s beträgt. Sie können von kleinen Auslenkungen ausgehen. (6P)

(b) Welchen Wert muss d haben, damit die Schwingungsdauer minimal wird? Wie groß ist diese minimale Schwingungsdauer? (4P)



Lösung

(a) Die Differenzialgleichung dieser Schwingung ergibt sich aus der Betrachtung des wirkenden Drehmoments (Gewichtskraft am Schwerpunkt):

$$\begin{aligned}|\vec{M}| &= |\vec{r} \times \vec{F}_g| \\ &= d \sin\alpha \cdot mg\end{aligned}$$

Das Drehmoment ist gleichzeitig die Ableitung des Drehimpulses, also $M = I\ddot{\alpha}$. Daraus ergibt sich unter der Berücksichtigung, dass das Drehmoment rücktreibend wirkt, folgende DGL:

$$I\ddot{\alpha} = -mgd \sin\alpha$$

Mit Kleinwinkelnäherung $\sin\alpha \approx \alpha$ ergibt das die DGL einer harmonischen Schwingung:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0$$

[2]

Es gilt also:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \frac{2\pi}{T}$$

[1]

Das Trägheitsmoment I dieser Anordnung ist nach dem Satz von Steiner:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + md^2$$

[1]

Setzt man das nun in die Gleichung für T ein:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{\frac{1}{2}r^2 + d^2}{gd}$$

kann die Gleichung nach d aufgelöst werden zu:

$$d^2 - \frac{gT^2}{4\pi^2}d + \frac{r^2}{2} = 0$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Die eine ($d = 1,31$ m) ist physikalisch nicht sinnvoll, da der Radius der Scheibe nur $0,8$ m beträgt. Der gesuchte Abstand ist also

$$d = 24 \text{ cm}$$

[2]

(b) Für die Periodendauer T als Funktion von d gilt die Formel:

$$T(d) = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2 + d^2}{gd}}$$

Die Extrema der Periodendauer lassen sich nun ermitteln, indem man diese Formel nach d ableitet und mit null gleichsetzt:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}d} \stackrel{!}{=} 0$$

[**1**]

$$\Rightarrow \frac{(d^2 - \frac{1}{2}r^2)}{2gd^2\sqrt{\frac{\frac{1}{2}r^2+d^2}{gd}}} = 0$$

Wir betrachten nur den Zähler:

$$\Leftrightarrow d^2 - \frac{1}{2}r^2 = 0$$
$$\Rightarrow d = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

[**2**]

Eingesetzt in die Formel für die Periodendauer:

$$T_{\min} = T(d = r/\sqrt{2}) = 2,1 \text{ s}$$

[**1**]