....
Note

Name	Vorname	
Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

4. August 2009, 09:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **74 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Stetigkeit, Differenzierbarkeit** **(7 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Hinweis: Bestimmen Sie x_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $y_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☒ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☒ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt?

☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $Df(0)$ ist nicht definiert ☐ $Df(0)$ hängt von der betrachteten Kurve ab

LÖSUNG:

(a) Für die Nullfolge $(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n})$ gilt $f(\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^6}}{2\frac{1}{n^6}} = \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$.

(b) $f(x,0) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) $f(0,y) = 0$, $y \in \mathbb{R}$.

(d) f ist nicht stetig im Nullpunkt, also auch nicht (total) differenzierbar.

2. **Gradient** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die skalare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{|x|^2}$ und die Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \binom{e^t}{e^{-t}}$.

(a) Berechnen Sie den Gradient von F.

$$\operatorname{grad} F(x) = -\frac{2x}{|x|^4}$$

(b) Wie lautet die Geschwindigkeit von $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 2$?

$$\dot{x}(2) = \begin{pmatrix} e^2 \\ -e^{-2} \end{pmatrix}$$

(c) Die Funktion $F \circ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung des Punktes $t = 2$

☐ streng monoton steigend,
☒ streng monoton fallend,
☐ weder monoton steigend noch monoton fallend.

LÖSUNG:

(a) s.o.

(b) s.o.

(c) $\frac{d}{dt}(F \circ x)(2) = \operatorname{grad} F(x(2)) \cdot \dot{x}(2) = -\frac{2}{|x(2)|^4} \begin{pmatrix} e^2 \\ e^{-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^2 \\ -e^{-2} \end{pmatrix} = -\frac{2}{|x(2)|^4}(e^4 - e^{-4}) < 0$, also streng monoton fallend.

3. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)\,.$$

(a) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t)}$$

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$?

☐ 0 ☐ 1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A\,x\,,\ \ x(0) = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Zur Kontrolle: Die Matrix A hat die beiden Eigenwerte 0 und 2.

LÖSUNG:

(a) Es ist $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Der Lösungsraum ist also zweidimensional.

(c) Die Matrix A hat die Eigenwerte 0 und 2 mit den Eigenvektoren $(1,\,1)^T$ und $(1,\,-1)^T$. Mit der Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $S^{-1}\,A\,S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$. Nun rechnet man nach:

$$e^{At}\,v \overset{\textbf{(1)}}{=} S\,e^{Dt}\,S^{-1}\,v \overset{\textbf{(1)}}{=} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} S^{-1} v \overset{\textbf{(1)}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix}\,.$$

4. **Taylor-Formel** **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 5, \quad \partial_1^2 g(0) = \partial_1 \partial_2 g(0) = 1, \quad \partial_2^2 g(0) = 0.$$

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$$\boxed{g(x,y) = 5 + \frac{1}{2}x^2 + xy \qquad\qquad + R_3(x,y)}$$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ kann man $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_3(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ folgern?

☒ $k = 0$ ☒ $k = 1$ ☒ $k = 2$ ☐ $k = 3$ ☐ $k = 4$ ☐ $k = 5$

(c) Sei nun $f(x,y) = (-y, x+y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ f$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$$\boxed{h(x,y) = 5 - \frac{1}{2}y^2 - yx \qquad\qquad + R_3'(x,y)}$$

Lösung:

(a) $g(x,y) = g(0) + \operatorname{grad} g(0) \cdot \binom{x}{y} + \frac{1}{2}\binom{x}{y} \cdot H_g(0)\binom{x}{y} + R_3(x,y)$
$= g(0) + \frac{1}{2}\partial_1^2 g(0)x^2 + \partial_1\partial_2 g(0)xy + \frac{1}{2}\partial_2^2 g(0)y^2 + R_3(x,y).$

(b) Nach dem Satz von Taylor ist $R_3(x,y) = o(|(x,y)|^2)$. D.h., $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_3(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ für $k = 2$ und damit auch für $k \leq 2$.

(c) Es ist $h(x,y) = g(f(x,y)) = g(-y, x+y) = 5 + \frac{1}{2}y^2 - y(x+y) + R_3(-y, x+y)$.

5. **Extremalstellen** **(12 Punkte)**
Sei $f(x,y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f.

(b) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f entlang der Kurve $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^{1/3}, t^{1/2})$.

Lösung:

(a) $0 = \operatorname{grad} f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} -3x^2+3x^2y^2 \\ -2y+2x^3y \end{smallmatrix}\right)$.
Es muss also $x^2(1-y^2) = 0$ und $y(1-x^3) = 0$ erfüllt sein.
1. Fall: $x = 0$. Dann folgt aus der zweiten Gleichung $y = 0$.
2. Fall: $x \neq 0$. Dann folgt aus der ersten Gleichung $y = \pm 1$ und aus der zweiten $x = 1$.
Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x(y^2-1) & 6x^2y \\ 6x^2y & 2(x^3-1) \end{pmatrix}$$

- Da $f(x,0) = 1 - x^3$, ist im Punkt $(0,0)$ kein lokales Minimum oder Maximum, sondern ein Sattelpunkt.
- $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte ± 6), also ist $(1,1)$ ein Sattelpunkt.
- $H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ ist indefinit (Eigenwerte ± 6), also ist $(1,-1)$ ein Sattelpunkt.

(b) Mit $g := f \circ \gamma$ ist $g(t) = 1 - t - t + t^2 = (1-t)^2$, eine Parabel mit Scheitel bei $t = 1$ auf $\mathbb{R}_0^+$.
Somit hat g sein absolutes Minimum 0 bei $t = 1$ und ein lokales Maximum 1 bei $t = 0$.

6. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**

Seien $f_1(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t, x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1, 1, -2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t,x,y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t,x) \mapsto \tilde{y}(t,x)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{y}(1,1)$.

$\partial_t \tilde{y}(1,1) = 1$	$\partial_x \tilde{y}(1,1) = \frac{1}{4}$

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(t,x,y) &= 0, \\ f_2(t,x,y) &= 0. \end{aligned}$$

Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?

$$M = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x,y)}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial_x}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial_y}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial_x}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial_y}(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

(a) Zunächst ist $f_1(1,1,-2) = 0$, also ist $P = (1,1,-2)$ eine Lösung.

Auflösen nach y ergibt $y = \pm\sqrt{\frac{4-\log x}{t}}$. In einer Umgebung von $(1,-2,1)$, die klein genug ist, wird die Lösungsmenge von $f_1(t,x,y) = 0$ also durch den Graphen von $\tilde{y}(t,x) = -\sqrt{\frac{4-\log x}{t}}$ dargestellt.

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist mit $\operatorname{grad} f_1(t,x,y) = (y^2, \frac{1}{x}, 2yt)$, $\operatorname{grad} f_1(1,1,-2) = (4,1,-4)$

$$\partial_t \tilde{y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial t}(1,1,-2)}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,-2)} = -\frac{4}{-4} = 1,$$

$$\partial_x \tilde{y}(1,1) = -\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}(1,1,-2)}{\frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,-2)} = -\frac{1}{-4} = \frac{1}{4}.$$

(b) $\operatorname{grad} f_1(t,x,y) = (y^2, \frac{1}{x}, 2yt)$, $\operatorname{grad} f_2(t,x,y) = (2yt + 2t, 2x, t^2)$, also
$\operatorname{grad} f_1(1,1,-2) = (4,1,-4)$, $\operatorname{grad} f_2(1,1,-2) = (-2,2,1)$

7. **Vektoranalysis** **(9 Punkte)**

Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld mit $v(x) = \big(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, 0\big)$.

(a) Berechnen Sie:

$$\operatorname{rot} v(x) = 0$$

(b) Es gilt:

☒ der Definitionsbereich von v ist sternförmig
☒ v ist konservativ
☐ v ist nicht konservativ
☒ v besitzt ein Potential
☐ v besitzt kein Potential

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ von v entlang der Kurve

$$\gamma : [0,1] \ni t \mapsto (1-t, 2t, \tanh t) \in \mathbb{R}^3.$$

Lösung:

(a) Einfache Rechnung zeigt, dass $\operatorname{rot} v = 0$, $\operatorname{div} v \neq 0$. Fasst man den Gradienten von v komponentenweise auf, gilt $\operatorname{grad} v \neq 0$, sonst wären die alle Komponenten konstant.

(b) $\mathbb{R}^3$ ist konvex, also auch Sternförmig (z.B. bezüglich $0 \in \mathbb{R}^3$). Mit dem Lemma von Poincaré besitzt v ein Potential und ist damit ein konservatives Vektorfeld.

(c) Ein Potential von v ist $f(x) = \log(1 + x_1^2 + x_2^2)$. Somit ist

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx \overset{\textbf{(1)}}{=} f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(0, 2, \tanh 1) - f(1, 0, \tanh 0) \overset{\textbf{(1)}}{=} \log 5 - \log 2 = \log \tfrac{5}{2}.$$

Alternativ:

$$\int_\gamma v(x) \cdot dx = \int_0^1 v(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} \frac{2(1-t)}{1+(1-t)^2+4t^2} \\ \frac{4t)}{1+(1-t)^2+4t^2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \tanh' t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{10t-2}{5t^2-2t+2} dt = \big[\log(5t^2 - 2t + 2)\big]_0^1 = \log 5 - \log 2 = \log \tfrac{5}{2}$$

8. **Schwerpunkt der Halbkugel** **(10 Punkte)**

Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| \leq 1, x_3 \geq 0\}$. Gesucht sind Volumen V und Schwerpunktkoordinaten $S = (S_1, S_2, S_3)$ der Halbkugel H.

(a)

$V = \dfrac{2}{3}\pi$	$S_1 = 0$	$S_2 = 0$

(b) Berechnen Sie S_3 mit Hilfe von Kugelkoordinaten.

LÖSUNG:

(a) Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4}{3}\pi$, wegen Symmetrie sind $S_1 = S_2 = 0$.

(b) Die Jakobi-Determinante der Transformation auf Kugelkoordinaten ist $r^2 \sin\theta$, $x_3 = r\cos\theta$.
Somit ist

$$
\begin{aligned}
V S_3 &= \int_H x_3 d^3x = \int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r\cos\theta (r^2 \sin\theta) = 2\pi \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \left[\tfrac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Somit ist $S_3 = \frac{\pi/4}{2\pi/3} = \frac{3}{8}$.