....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Semestrale
Lineare Algebra 1
Prof. Dr. F. Roesler

19. Februar 2007, 10:15 – 11:45 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: keine

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Aufgabe 1 Lineare Abbildung [ca. 8 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(i) Geben Sie $\ker f$ an.

(ii) Geben Sie $\operatorname{rg} f$ und eine Basis von $\operatorname{im} f$ an.

(iii) Untersuchen und *begründen* Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Aufgabe 2 [ca. 6 Punkte]

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Beweisen Sie: zu $v_0, v_1 \in V$ mit $v_0 \neq v_1$ existiert eine Gerade in V (d.h. eine Nebenklasse $p + U$ mit $p \in V$ und einem eindimensionalen Unterraum $U \leq V$), die v_0 und v_1 enthält.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gerade in (i) *eindeutig* bestimmt ist.

Aufgabe 3 Basisdarstellung [ca. 8 Punkte]
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum, der durch die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(x) = 1 \\ f_2 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_2(x) = x \\ f_3 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_3(x) = \sin x \\ f_4 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_4(x) = \cos x \end{aligned}$$

aufgespannt wird. Der formelle Ableitungsoperator ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_2) = f_1,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_3) = f_4,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_4) = -f_3$$

definiert ist. Weiterhin definieren wir die Abbildung $H : V \longrightarrow V$ durch

$$f \mapsto \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f + f = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\right) + f$$

(i) Zeigen Sie, dass $b := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ eine Basis von V ist.

(ii) Geben Sie die darstellende Matrix $\left[\frac{H(b)}{b}\right] = M_b^b(H)$ von H bezüglich b an.

(iii) Geben Sie $\ker H$ an.

Aufgabe 4 Lineares Gleichungssystem auf endlichen Körpern mit Parameter [ca. 4 Punkte]
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \overline{16} \cdot x_1 + \bar{2} \cdot x_2 &= \overline{99} \\ \overline{14} \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 &= \overline{-1} \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösungsmengen für alle Werte von $\mu \in \mathbb{F}_5$ an. Untersuchen Sie, für welche Werte von μ das Gleichungssystem keine Lösung hat.

Aufgabe 5 Rang einer linearen Abbildung [ca. 4 Punkte]
Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit $\operatorname{rg} f = n$.

(i) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}} W \geq n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}} V \geq n$ gilt.

Aufgabe 6 [ca. 4 Punkte]

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Wie immer bezeichne f^k für $k \in \mathbb{N}$ die k-malige Hintereinanderausführung von f und für $k = 0$ die Identität auf V. Zeigen Sie:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad f\big(\ker(f^k)\big) \subseteq \ker(f^{k-1})\,.$$

(Hinweis: Es ist einfacher, diese Aussage *nicht* per Induktion zu beweisen.)

Aufgabe 7 [6 Punkte]

Kreuzen Sie an, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründungen sind nicht verlangt. (Für jedes richtige Kreuz gibt es 1 Punkt, **für jedes falsche Kreuz 1 Punkt Abzug.** Wenn Sie bei einer Aussage nichts ankreuzen, gibt es dafür 0 Punkte. Bei mehr falschen als richtigen Antworten wird die Aufgabe insgesamt mit 0 Punkten bewertet.)

Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(-3,1,4) = (1,2)$ und $f(2,2,0) = (0,1)$.	☐ wahr ☐ falsch
Sind R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf einer Menge M, so wird auch durch $$xRy \;:\Leftrightarrow\; xR_1y \vee xR_2y \qquad (x, y \in M)$$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.	☐ wahr ☐ falsch
Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat über allen Körpern denselben Rang.	☐ wahr ☐ falsch
Im Vektorraum der 2×2-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ ist $$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) :\; a + b - c = 0 \right\}$$ ein Untervektorraum.	☐ wahr ☐ falsch
Ist U ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gilt für alle $v, w \in V$: $$v \in U \wedge w \notin U \;\Rightarrow\; v + w \notin U\,.$$	☐ wahr ☐ falsch
Für Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ zwischen Mengen gilt: $$\psi \circ \varphi \text{ bijektiv } \;\Rightarrow\; \psi \text{ injektiv} \wedge \varphi \text{ surjektiv}$$	☐ wahr ☐ falsch