Klausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2016
18. Juli 2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Gegeben sei ein Kugelkondensator mit den Radien $r_1 = 2,50\text{cm}$ und $r_2 = 2,65\text{cm}$. Die Potentialdifferenz zwischen den Platten ist gegeben mit $\Delta\phi = 20\text{V}$.

(a) Welche Ladung trägt der Kondensator? Lösen Sie die Aufgabe mithilfe des Satzes von Gauß.

(b) Welche Kapazität hat der Kondensator?

Um den Kondensator aufzuladen, wird er über einen Widerstand $R = 42\text{k}\Omega$ mit einer Gleichspannungsquelle von $U = 30\text{V}$ verbunden, bis er die Ladung $Q_1 = 1 \cdot 10^{-9}\text{C}$ erreicht hat.

(c) Stellen Sie die Differentialgleichung auf und berechnen Sie die Funktion $Q(t)$ der Ladung auf dem Kondensator als Funktion der Zeit. Dabei kann angenommen werden, dass zu Beginn noch keine Ladung auf dem Kondensator gespeichert ist.

(d) Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis der Kondensator die Ladung Q_1 trägt.

Lösung

(a) Man wählt für den Satz von Gauß eine Kugel vom Radius $r_1 < r < r_2$, dann ist Q_{in} die gesuchte Ladung. Der Vektor des elektrischen Feldes ist parallel zur Flächennormale $d\vec{A}$, deshalb kann man das Integral einfach ausführen.

$$\frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0} = \int_{Kugel} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 E(r) \tag{1}$$

Das elektrische Feld zwischen den Platten lautet somit

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{2}$$

Die Potentialdifferenz $U = \Delta\phi$ ergibt sich durch das Integral über das E-Feld von r_1 bis r_2.

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\ dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2}\ dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] \tag{3}$$

Jetzt kann man auf das gesuchte Q umstellen.

$$Q = \frac{4\pi\epsilon_0 U}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 9,8 \cdot 10^{-10}\mathrm{C} \tag{4}$$

[**3**]

(b) Die Kapazität berechnet sich über

$$C = \frac{Q}{U} = 4,9 \cdot 10^{-11}\mathrm{F} \tag{5}$$

[**1**]

(c) Die Spannung, welche am Kondensator anliegt ist die Differenz zwischen anliegender Spannung und der abfallenden Spannung am Widerstand.

$$U_c + RI = U \tag{6}$$

$$\text{mit } U_c = \frac{Q}{C} \text{ und } I = \dot{Q} \tag{7}$$

Setzt man nun beides gleich, erhält man die Differentialgleichung

$$\dot{Q} + \frac{1}{RC}Q = \frac{U}{R} \tag{8}$$

[**1**]

Als homogene Lösung erhält man

$$Q_h = Ae^{-\frac{t}{RC}} \tag{9}$$

Für die inhomogene Lösung macht man den Ansatz

$$Q_i = \text{ konst.} \tag{10}$$

und erhält als Lösung

$$Q_i = CU \tag{11}$$

Dadurch ergibt sich für $Q(t)$:

$$Q(t) = Q_h + Q_i \tag{12}$$

$$= Ae^{-\frac{t}{RC}} + CU \tag{13}$$

Mit der Anfangsbedingung $Q(0) = 0$ erhält man die Konstante A

$$Q(0) = A + CU = 0 \tag{14}$$
$$\Rightarrow A = -CU \tag{15}$$

somit lautet spezielle Lösung

$$Q(t) = CU\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \tag{16}$$

[**2**]

(d) Den Zeitpunkt t_1, an dem der Kondensator bis zu Q_1 aufgeladen ist, erhält man mit

$$Q(t_1) = Q_1 \tag{17}$$
$$\Rightarrow Q_1 = CU\left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}}\right) \tag{18}$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{Q_1}{CU} = e^{-\frac{t}{RC}} \tag{19}$$
$$\Rightarrow t_1 = -RC \cdot \ln(1 - \frac{Q_1}{CU}) = 2,3 \cdot 10^{-6}\mathrm{s} \tag{20}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Techniker Mike soll den Kurzschluss in einer Telefonleitung, welche zwischen München und Ingolstadt verläuft, reparieren. Die Leitung bestehe aus zwei identischen Kupferkabeln (Spezifischer Widerstand: $\rho_{\text{Kupfer}} = 0,018\ \frac{\Omega\text{mm}^2}{\text{m}}$, Querschnitt: $A = 1\ \text{mm}^2$) und habe eine Länge von 80 km.

Mike schließt dazu in Ingolstadt eine 24 V Batterie an die Enden der beiden Leitungen an und misst einen Strom von 19mA. Wie weit ist der Kurzschluss von Ingolstadt entfernt?

(b) Mike soll außerdem die Spannung eines regelbaren Netzgerätes so einstellen, dass eine Glühlampe mit einer Nennleistung von 100W betrieben werden kann. Das Netzgerät selbst habe einen Innenwiderstand von 1Ω und der Widerstand der Lampe beträgt 42Ω. Welche Spannung muss der Techniker einstellen?

Lösung

(a) Der Widerstand der Leitung kann durch die gemessene Stromstärke und der Spannung der Batterie berechnet werden.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{24\text{V}}{0,019\text{A}} = 1263\Omega \tag{21}$$

Durch dem Zusammenhang zwischen Widerstand und spezifischem Widerstand kann man nun die Länge der Kupferleitung berechnen.

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{R \cdot A}{\rho} = 70,2\text{km} \tag{22}$$

Dies entspricht allerdings der Länge der Hin- und Rückleitung, daher muss dieser Wert noch halbiert werden. Der Kurzschluss befindet sich demnach $35,1$km von Ingolstadt entfernt.

[2,5]

(b) Wenn man die Lampe bei Nennleistung betreiben will, muss ein Strom von

$$P_L = R_L \cdot I^2 \tag{23}$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\frac{P_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{100\text{W}}{42\Omega}} = 1,5\text{A} \tag{24}$$

fließen. Damit muss am Netzteil eine Spannung von

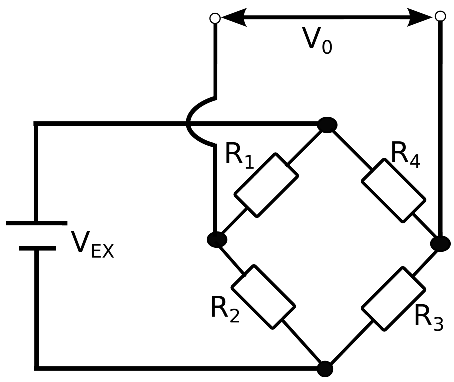
$$U = R_L \cdot I = 42\Omega \cdot 1,5\text{A} = 63\text{V} \tag{25}$$

eingestellt werden.

[1,5]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Der Schaltplan der Abbildung zeigt die sogenannte Wheatston'sche Brückenschaltung. Dabei bezeichnet V_{EX} die Anregungsspannung der Schaltung, die von einer externen Gleichspannungsquelle geliefert wird. Die Spannung V_0 gilt als Messsignal, welches abgetastet wird.



(a) Leiten Sie folgende Beziehung her:

$$V_0 = \left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_{EX} \tag{26}$$

(b) Was muss für den Quotienten R_1/R_2 gelten, damit die Brücke ausgeglichen ist, d.h. $V_0 = 0$?

Lösung

(a) Die Brücke besteht aus 2 parallel geschaltete Reihenschaltungen. Seien I_1 und I_2 jeweils die fliessenden elektrischen Ströme durch den linken und rechten Ast der Brücke. Für diese beiden Reihenschaltungen gilt

$$\begin{aligned} V_{EX} &\overset{(1)}{=} (R_1 + R_2)I_1 && (27) \\ V_{EX} &\overset{(1)}{=} (R_3 + R_4)I_2. && (28) \end{aligned}$$

[**1**]

Die Brücke besteht auch aus 2 Reihenschaltungen mit der Spannung V_0 (oben/unten). Für diese Reihenschaltungen gilt

$$\begin{aligned} V_0 &\overset{(1)}{=} R_3I_2 - R_2I_1 && (29) \\ V_0 &\overset{(1)}{=} -R_4I_2 + R_1I_1. && (30) \end{aligned}$$

[**1**]

Obige vier Gleichungen beschreiben die Brücke vollständig. Um Gleichung (26) zu beweisen, muss man I_1 und I_2 eliminieren. Um erstmal I_2 zu eliminieren, kann man Gleichung (29) mit R_4 und Gleichung (30) mit R_3 multiplizieren:

$$\begin{aligned} R_4V_0 &= R_3R_4I_2 - R_2R_4I_1 && (31) \\ R_3V_0 &= -R_3R_4I_2 + R_1R_3I_1 && (32) \end{aligned}$$

und anschließend beide Gleichungen zusammenaddieren:

$$V_0(R_3 + R_4) = I_1(R_1R_3 - R_2R_4) \tag{33}$$

Um nun I_1 zu eliminieren, verwendet man Gleichung (27) umgeformt nach I_1:

$$V_0(R_3 + R_4) \overset{(1)}{=} \frac{V_{EX}}{R_1 + R_2}(R_1R_3 - R_2R_4) \tag{34}$$

Umformen und Addition von Null ($0 = R_2R_3 - R_2R_3$) bringt uns auf die zu beweisende Formel:

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{V_{EX}} &= \frac{R_1R_3 - R_2R_4 + R_2R_3 - R_2R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} && (35) \\ &= \frac{(R_1 + R_2)R_3 - R_2(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} && (36) \\ &\overset{(1)}{=} \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}. && (37) \end{aligned}$$

[**2**]

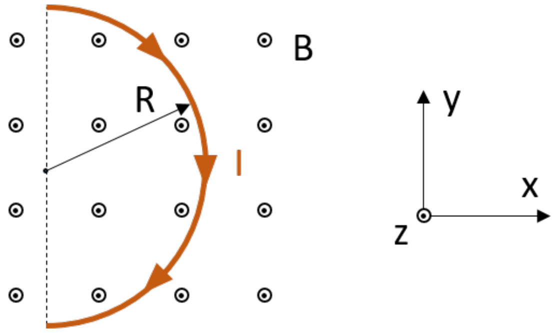
(b) $V_0 = 0$ gilt genau dann wenn

$$\begin{aligned} \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} &\overset{(1)}{=} 0 && (38) \\ \frac{R_3}{R_2} &= \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2} && (39) \\ R_1R_3 + R_2R_3 &= R_2R_3 + R_2R_4 && (40) \\ \frac{R_1}{R_2} &\overset{(1)}{=} \frac{R_4}{R_3}. && (41) \end{aligned}$$

[1]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein halbkreisförmiger Draht mit Radius R wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit Betrag B senkrecht zur Stromrichtung (siehe Abbildung). Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der Kraft, die auf den Draht wirkt.



Hinweis: Die Kraft auf ein vom Strom I durchflossenes Leiterstück $d\vec{l}$ im Magnetfeld $\vec{B}$ ist gegeben mit:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \tag{42}$$

Lösung

Es gilt die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\vec{l} \times \vec{B}) \tag{43}$$

Auf ein Segment des Drahtes mit der Länge $d\vec{l}$ wirkt also eine Kraft $d\vec{F}$. Das Differential Kraft ist damit gegeben durch:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \tag{44}$$

Für das Magnetfeld gilt $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und als Parametrisierung des Weges nehmen wir:

$$d\vec{l} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \qquad \theta \in [0, \pi] \tag{45}$$

[1,5]

Damit ergibt sich für das Differential der Kraft:

$$d\vec{F} = IRd\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B = IRB \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \tag{46}$$

und man erhält als Gesamtkraft auf das Leiterstück:

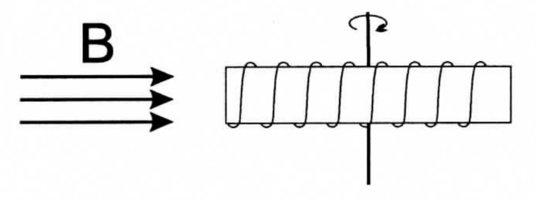
$$\vec{F} = IRB \int_0^\pi d\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -IRB \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

[2,5]

Damit ist der Betrag der Kraft $F = 2IRB$ und wirkt in negative x-Richtung.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Eine Spule mit $N = 300$ Windungen und einer Querschnittsfläche $A_0 = 25\,\mathrm{cm}^2$ wird in einem homogenen Magnetfeld der Stärke $B = 500\,\mathrm{mT}$ um ihre vertikale Achse gedreht.



(a) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss die Spule rotieren, um eine Wechselspannung mit einem Scheitelwert von $U_0 = 600\,\mu\mathrm{V}$ zu induzieren?

(b) Nun soll die Spule festgehalten und stattdessen das Magnetfeld mit der selben Frequenz variiert werden. Wie hoch muss der Scheitelwert eines sinusförmigen Magnetfelds sein, um die gleiche Induktionsspannung zu erzeugen, wenn das Magnetfeld stets parallel zur Längsachse der Spule ist?

Lösung

(a) Da das Magnetfeld zeitlich konstant ist, hängt die induzierte Spannung nur von der zeitlichen Änderung der effektiven Querschnittfläche der Spule A ab, die vom Magnetfeld gesehen wird:

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -NB\dot{A} \tag{48}$$

Diese lässt sich beschreiben durch:

$$A = A_0 \cos(\omega t) \tag{49}$$

$$\dot{A} = -A_0 \omega \sin(\omega t) \tag{50}$$

Für die induzierte Spannung erhält man daher

$$U_{ind} = NBA_0 \omega \sin(\omega t)\,, \tag{51}$$

mit dem Scheitelwert

$$U_0 = NBA_0 \omega \tag{52}$$

Durch Auflösen erhält man schließlich die gesuchte Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{U_0}{NBA_0} = \frac{600 \cdot 10^{-6}\mathrm{V}}{300 \cdot 0{,}5\mathrm{T} \cdot 25 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\mathrm{s}^{-1} \tag{53}$$

[2,5]

(b) Das Magnetfeld wird nun beschrieben durch:

$$B = B_0 \cos(\omega t) \tag{54}$$

$$\dot{B} = -B_0 \omega \sin(\omega t) \tag{55}$$

Die induzierte Spannung wird dadurch zu

$$U_{ind} = -\dot{\Phi} = -NA_0\dot{B} = NA_0B_0\omega \sin(\omega t), \tag{56}$$

mit dem Scheitelwert

$$U_0 = NB_0A_0\omega, \tag{57}$$

welcher nach wie vor $U_0 = 600\,\mu\mathrm{V}$ betragen soll. Auflösen führt schließlich zum gesuchten Scheitelwert des Magnetfeldes:

$$B_0 = \frac{U_0}{NA_0\omega} = \frac{600 \cdot 10^{-6}\mathrm{V}}{300 \cdot 25 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2} \cdot 1,6 \cdot 10^{-3}\mathrm{s}^{-1} = 0,5\mathrm{T} \tag{58}$$

[1,5]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Ein Wechselspannungsgenerator liefere eine Spannung der Form $U = U_0 \sin(\omega_a t - \pi/4)$ mit $U_0 = 30\mathrm{V}$ und $\omega_a = 350\mathrm{rad/s}$. Der in einem angeschlossenen Stromkreis erzeugte Strom sei $I(t) = I_0 \sin(\omega_a t - 3\pi/4)$ mit $I_0 = 620\mathrm{mA}$.

(a) Zu welchem Zeitpunkt nach $t = 0$ erreicht die Spannung des Generators zum ersten Mal ihren Scheitelwert? Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Strom zum ersten Mal seinen Scheitelwert?

(b) Der Stromkreis enthalte neben dem Generator nur noch eine einzelne Komponente. Handelt es sich um einen Kondensator, eine Spule oder einen Widerstand? Begründen Sie ihre Antwort.

(c) Welchen Wert (für Kapazität, Induktivität oder Wirkwiderstand) hat die entsprechende Komponente?

Lösung

(a) (a) Die Spannung am Generator ist maximal, wenn $\sin(\omega_a t - \pi/4) = \pm 1$, also $\omega_a t - \pi/4 = \pi/2 \pm n\pi$. Zum ersten Mal nach $t = 0$ tritt dies ein, wenn $n = 0$, also gilt:

$$\omega_a t - \pi/4 = \pi/2 \tag{59}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3\pi}{4\omega_a} = \frac{3\pi}{4(350\mathrm{rad/s})} = 6,73 \cdot 10^{-3}\mathrm{s} \tag{60}$$

(b) Der Strom ist maximal, wenn $\sin(\omega_a t - 3\pi/4) = \pm 1$, also $\omega_a t - 3\pi/4 = \pi/2 \pm n\pi$. Zum ersten Mal nach $t = 0$ tritt dies ein, wenn $n = -1$, also gilt:

$$\omega_a t - 3\pi/4 = -\pi/2 \tag{61}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{4\omega_a} = \frac{\pi}{4(350\mathrm{rad/s})} = 2,24 \cdot 10^{-3}\mathrm{s} \tag{62}$$

[2]

(b) Der Strom hinkt der Spannung um $+\frac{\pi}{2}$ nach, also muss es sich bei der Komponente um eine Spule handeln.

[0,5]

(c) Die Stromamplitude I_0 hängt mit der Spannungsamplitude an der Spule U_L zusammen über

$$U_L = I_0 X_L \tag{63}$$

wobei $X_L = w_a L$ der induktive Widerstand der Spule ist. Da es im Stromkreis nur eine Komponente gibt, muss die Amplitude der Potentialdifferenz über das Bauelement genauso groß sein wie die Amplitude der Generatorspannung: $U_L = U_0$. Also ergibt sich:

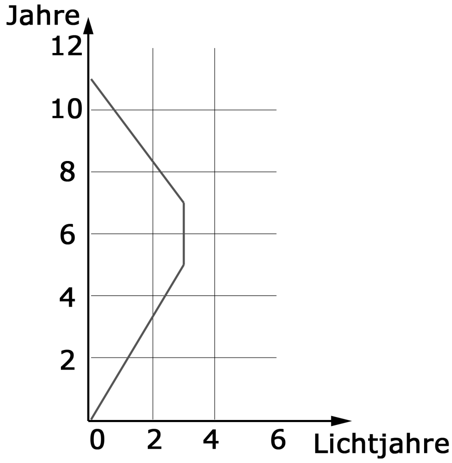
$$U_0 = I_0 w_a L \tag{64}$$

$$\Rightarrow L = \frac{U_0}{I_0 \omega_a} = \frac{30\mathrm{V}}{(620 \cdot 10^{-3}\mathrm{A})(350\mathrm{rad/s})} = 0,138\mathrm{H} \tag{65}$$

[1,5]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Armstrong macht eine Reise ins Weltall, Bernd hingegen bleibt auf der Erde zurück. Das Minkowski-Diagramm ist im Bezugssystem von Bernd und zeigt die Weltlinie von Armstrong.



(a) Entnehmen Sie dem Diagramm, wie schnell Armstrong bei seinem Hin-, bzw. Rückflug unterwegs ist.

(b) Wie viele Jahre vergehen während der Reise auf der Uhr von Bernd. Wie viel Zeit vergeht auf der Uhr von Armstrongs? Entnehmen Sie alle benötigten Informationen dem Diagramm.

(c) Auf dem Rückflug schießt Armstrong ein Projektil mit $v = 0,2c$ relativ zu seinem Raumschiff Richtung Erde um seine Ankunft anzukündigen. Wie lang sieht das Projektil für Armstrong aus im Vergleich zur Ausgangslänge? Wie lang sieht es für Bernd aus?

Lösung

(a) Hinreise:

$$v_{Hin} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3ly}{5a} = \frac{3ca}{5a} = 0,6c \tag{66}$$

Rückreise:

$$v_{Ruck} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{3ly}{(11-7)a} = 0,75c \tag{67}$$

[1,5]

(b) Dem Diagramm kann man entnehmen, dass Bernd 11 Jahre auf Armstrong wartet.

Armstrong bewegt sich im gestrichenem System, demnach vergehen für ihn

$$\Delta t'_{Hin} = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5a\sqrt{1-0,6^2} = 4a \tag{68}$$

für den Hinflug und

$$\Delta t'_{Ruck} = 4a\sqrt{1-0,75^2} = 2,64a \tag{69}$$

für den Rückflug. zudem hat Armstrong 2 Jahre Aufenthalt, was eine Gesamtzeit von 8,64a auf seiner Uhr anzeigt.

$$\Delta t'_{ges} = \Delta t'_{Hin} + \Delta t'_{Ruck} + \Delta t'_{Aufenthalt} = 4a + 2,64a + 2a = 8,64a \tag{70}$$

[2]

(c)

$$v_{P-A} = 0,2c \qquad \frac{L_{P-A}}{L_0} = \frac{1}{\gamma} = 98\% \tag{71}$$

$$v_{P-B} = \frac{\frac{3}{4}c + \frac{1}{5}c}{1 + \frac{3}{20}} = \frac{19}{23}c = 0,83c \qquad \frac{L_{P-B}}{L_0} = \frac{1}{\gamma'} = 56\% \tag{72}$$

[2,5]

Konstanten

$$\begin{aligned}
\epsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{CV^{-1}m^{-1}} \\
\mu_0 &= 1,26 \cdot 10^{-6}\mathrm{mkgs^{-2}A^{-2}} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \\
c &= 3 \cdot 10^{8}\mathrm{m/s} \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}
\end{aligned}$$