

---

# Probeklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. S. Schönert

Sommersemester 2015

23. Juni 2015

---

Dr. Carsten Rohr (carsten.rohr@ph.tum.de)

---

## Aufgabe A (4 Punkte)

- (a) Was muss gelten um zwei Variablen gleichzeitig messen zu können?
- (b) Was verbindet die Linien einer Serie (Lyman, Balmer...)?
- (c) Schreiben Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung mit einem Potential auf.
- (d) Was besagt die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik?
- (e) Nennen Sie die zwei physikalische Effekte, die für den Lamb-Shift verantwortlich sind?
- (f) Unter welchen Umständen tritt der Paschen-Back-Effekt anstelle des Zeeman-Effektes auf?
- (g) Warum ist die Hyperfeinstrukturaufspaltung um einen Faktor  $10^{-3}$  schwächer als die Feinstrukturaufspaltung?

## Lösung

- (a) Kommutator der Variablen ist null.

[0,5]

- (b) Sie enden alle auf der selben Schale (Lyman  $n=1, \dots$ )

[0,5]

- (c)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{m_0}\nabla^2 + V(r)\right)\psi(r, t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(r, t)$$

[0,5]

- (d) Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik besagt, dass das Betragsquadrat der Wellenfunktion eines Teilchens die Wahrscheinlichkeit angibt, das Teilchen bei einer Messung in diesem Zustand vorzufinden.

[0,5]

- (e) Selbst-Wechselwirkung, Vakuum-Polarisation

[1]

- (f) Bei einem viel stärkeren Magnetfeld

[0,5]

- (g) Wegen der größeren Masse des Protons  $m_p \approx 10^3 m_e \Rightarrow \mu_p \approx 10^{-3} \mu_B \Rightarrow \Delta E_p \propto \mu_p \approx 10^{-3} \Delta E \propto \mu_B$

[0,5]

### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand. Wo ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthalt des Elektrons am größten? In welchem Abstand vom Kern hält sich das Elektron am wahrscheinlichsten auf?

Hinweise:

Die 1s-Wellenfunktion des Wasserstoffatoms lautet

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi} a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

### Lösung

Die 1s-Wellenfunktion ist:

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte ist  $|\Psi_{1,0,0}(r)|^2$ . Sie ist am größten für  $r=0$ .

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit  $P(r)dr$  in einer infinitesimal dünnen Kugelschale mit Radius  $r$  ist

$$P(r)dr = |\Psi_{1,0,0}(r)|^2 4\pi r^2 dr$$

bzw.

$$P(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}}$$

[2]

Auffinden des Maximums:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{4}{a_0^3} \left( 2r - \frac{2r^2}{a_0} \right) e^{-\frac{2r}{a_0}} \equiv 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt für  $r = a_0$ .

Das Elektron hält sich am wahrscheinlichsten im Abstand eines Bohrschen Radius vom Kern auf.

[1]

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

- a) Berechnen Sie (relativistisch) mit Hilfe der Heisenbergschen Unverschärfereleation  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$  die kinetische Energie, die ein Elektron hätte, wenn es sich ausschließlich in einem  $^{40}_{20}\text{Ca}$ -Atomkern (Radius:  $3.5 \cdot 10^{-15}\text{m}$ ) aufhielte. Kann das Elektron durch die Coulomb-Wechselwirkung mit der Kernladung ( $Z=20$ ) im Kern festgehalten werden?

- b) Bestimmen Sie durch analoge Rechnung die kinetische Energie eines Elektrons in der Atomhülle (Radius:  $0.5 \cdot 10^{-10} \text{m}$ ). Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Bindungsenergie des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms.

(Hinweis: Die kinetische Energie des Elektrons lautet  $E_{kin} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2$ )

## Lösung

- a) Für die Ortsunschärfe wird der Kerndurchmesser angesetzt, d.h.

$$\Delta x = 7 \cdot 10^{-15} \text{m} = 7 \text{fm}$$

Aus der Unschärferelation folgt

$$\Delta p \geq \hbar / \Delta x \text{ bzw. } \Delta pc \geq \hbar c / \Delta x \quad (1)$$

Mit  $\hbar c = 197.327 \text{MeV fm}$  folgt

$$\Delta pc \geq 28.19 \text{MeV} \quad [1]$$

Die relativistische Formel für die kinetische Energie des Elektrons lautet

$$E_{kin} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2 \quad (2)$$

Mit  $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  und mit  $pc \geq 28.19 \text{ MeV}$  folgt

$$E_{kin} \geq \sqrt{28.19^2 + 0.511^2} \text{MeV} - 0.511 \text{MeV} = 27.68 \text{MeV}$$

Die Gesamtenergie des Elektrons ist

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}$$

Für die potenzielle Energie kann das Coulomb-Potenzial am Kernrand angesetzt werden, da das Elektron dort am schwächsten gebunden ist.

$$E_{pot} = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Mit  $e^2/(4\pi\epsilon_0) = 1.44 \text{ MeV fm}$ ,  $Z=20$  und  $r=3.5 \text{ fm}$  folgt

$$E_{pot} = -8.2 \text{MeV}$$

Der Betrag der potenziellen Energie ist erheblich kleiner als die kinetische Energie, so dass das Elektron eine positive Gesamtenergie aufweist und daher nicht als an den Kern gebunden betrachtet werden kann. Ein dauerhafter Aufenthalt eines Elektrons in einem Atomkern ist also nicht möglich.

[2]

- b) Mit  $\Delta x = 10^{-10} \text{m} = 10^5 \text{ fm}$  folgt aus (1)

$$\Delta pc \geq \frac{197.327 \text{MeV fm}}{10^5 \text{ fm}} = 1.973 \text{keV}$$

und aus (2) folgt mit  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$

$$E_{kin} \geq \sqrt{1.973^2 + 511^2} \text{keV} - 511 \text{keV} = 3.81 \text{eV}$$

[1]

Die kinetische Energie ist kleiner als die potenzielle Energie  $E_{pot} = -13,6 \text{ eV}$  im Wasserstoffatom. Wegen  $E_{kin} < |E_{pot}|$  sollte eine Bindung des Elektrons in der Atomhülle möglich sein.

[1]

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen auf der  $x$ -Achse, das sich in einem bindenden Potential  $V(x)$  befinde. Die stationären Zustände mit negativer Energie (also die Bindungszustände) seien  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$  mit den Energien  $E_0, E_1, \dots$ . Das Teilchen sei zur Zeit  $t = 0$  in einem stationären Zustand, also  $\psi(t = 0, x) = \phi_n(x)$ .

- a) Wie sieht der Zustand zur Zeit  $t$  aus? Berechnen Sie den Erwartungswert von  $x$  zur Zeit  $t$  und vergleichen Sie ihn mit dem Erwartungswert zur Zeit  $t = 0$ .

### Lösung:

Der Anfangszustand ist

$$\psi(0, x) = \phi_n(x) \quad (3)$$

Da es sich um einen stationären Zustand handelt, ist seine Zeitentwicklung einfach die Multiplikation mit dem entsprechenden Phasenfaktor:

$$\psi(t, x) = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \phi_n(x) \quad (4)$$

und der Ortserwartungswert ist

$$\langle x \rangle(t) = \int dx \psi^*(t, x) x \psi(t, x) = \int x |\phi_n(x)|^2 dx \quad (5)$$

Der Ortserwartungswert ist also zeitlich konstant - was auch kein Wunder ist, denn das System befindet sich ja in einem stationären Zustand.

[2]

- b) Das Teilchen sei nun anfangs in einer Superposition aus zwei stationären Zuständen:

$$\psi(t = 0, x) = a\phi_n(x) + b\phi_m(x) \quad \text{mit } n \neq m, \quad ab \neq 0 \quad (6)$$

Wie sieht der Zustand zur Zeit  $t$  aus? Berechnen Sie den Erwartungswert von  $x$  zur Zeit  $t$ . Was bedeutet das Ergebnis für die Frequenz der emittierten Strahlung, wenn es sich um ein geladenes Teilchen handelt?

### Lösung:

Der Anfangszustand ist

$$\psi(0, x) = a\phi_n(x) + b\phi_m(x) \quad (7)$$

Da die Schrödinger-Gleichung linear ist, entwickelt sich jeder der beiden stationären Terme mit seinem entsprechenden Phasenfaktor:

$$\psi(t, x) = ae^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\phi_n(x) + be^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\phi_m(x) \quad (8)$$

und der Ortserwartungswert ist

$$\langle x \rangle(t) = \int dx \psi^*(t, x) x \psi(t, x) \quad (9)$$

$$= \int dx (a^* e^{\frac{i}{\hbar}E_n t} \phi_n^*(x) + b^* e^{\frac{i}{\hbar}E_m t} \phi_m^*(x)) x (a e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \phi_n(x) + b e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t} \phi_m(x)) \quad (10)$$

$$= |a|^2 \int x |\phi_n(x)|^2 dx + |b|^2 \int x |\phi_m(x)|^2 dx + \quad (11)$$

$$a^* b e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \int dx \phi_n^*(x) x \phi_m(x) + ab^* e^{-\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \int dx \phi_n(x) x \phi_m^*(x) \quad (12)$$

Der Ortserwartungswert hat also die Form

$$\langle x \rangle(t) = A + B + 2\operatorname{Re} \left( a^* b e^{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_m)t} \int dx \phi_n^*(x) x \phi_m(x) \right) \quad (13)$$

mit zeitunabhängigen  $A, B$ . Der Ort des Teilchens schwingt daher mit der Frequenz

$$\omega = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \quad (14)$$

also mit der Frequenz, die der Energiedifferenz der beiden stationären Zustände entspricht.

[3]

- c) Welches Resultat ergibt sich für  $\langle x \rangle$ , wenn die beiden stationären Zustände dieselbe Parität haben, d.h. beide symmetrisch oder beide antisymmetrisch bezüglich Spiegelung am Ursprung sind? Was bedeutet das für die emittierte Strahlung?

### Lösung:

Wenn beide beteiligten Wellenfunktionen symmetrisch sind, dann verschwindet das in den Ortserwartungswert eingehende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n(x) x \phi_m^*(x) = 0 \quad (15)$$

denn der Integrand ist dann insgesamt antisymmetrisch als Produkt von zwei symmetrischen und einer antisymmetrischen Funktion. Ebenso verschwindet das Integral, wenn beide Wellenfunktionen antisymmetrisch sind, denn auch dann ist der Integrand antisymmetrisch. Der Ortserwartungswert hat keine Zeitabhängigkeit und daher auch keine Strahlung.

[1]

#### Aufgabe 4 (6 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Radien und Energien für die ersten beiden Bohrschen Bahnen im Positronium. Wie groß ist die Wellenlänge des Photons, das bei einem Übergang von  $n=2$  nach  $n=1$  emittiert wird?
- (b) Warum kann das Positronium nicht in nur ein Photon annihilieren? Was sind die beiden Grundzustände des Positroniums und wie können diese zerfallen? Vergleichen Sie qualitativ die Lebensdauern der beiden Zustände.

Hinweise:

Positronium ist ein gebundenes System aus einem Elektron und einem Positron. Beide haben dieselbe Masse, aber entgegengesetzte Ladung. Positronium ist also vergleichbar mit dem Wasserstoffatom, nur dass das schwere Proton durch das leichtere Positron ersetzt ist.

#### Lösung

- (a) Nach Bohr sind Bindungsenergie  $E_n$  und Bahnradius  $r_n$  im Wasserstoffatom (Kernladungszahl  $Z=1$ )

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 \mu}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Ze^2 \mu} n^2$$

Die reduzierte Masse  $\mu = m_e^2/(m_e + m_e) = m_e/2$  ist gerade die halbe Elektronenmasse. Somit sind die Energien im Positronium nur halb so groß wie die Energien im Wasserstoffatom, und die Bahnradien sind doppelt so groß:

[1,5]

$$E_n = -\frac{13.6\text{eV}}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$$r_n = 2 \cdot 0.0528\text{nm} \cdot n^2$$

Für  $n=1$  und  $n=2$  erhält man die folgenden Werte:  $E_1 = -6.80\text{eV}$ ,  $r_1 = 0.1056\text{nm}$ ,  $E_2 = -1.7\text{eV}$  und  $r_2 = 0.4224\text{nm}$ .

Die Energiedifferenz zwischen erster und zweiter Bahn ist  $\Delta E = 5.10\text{eV}$ . Damit ist die gesuchte Wellenlänge  $\lambda = hc/\Delta E = 243\text{nm}$ .

[2,5]

- (b) Wegen des Impulserhaltungssatzes müssen wenigstens 2 Photonen bei der Annihilation entstehen.

Es existieren zwei  $1s$  Zustände (ähnlich wie beim Wasserstoff):

- Parapositronium:  $1^1S_0$  (Singulett-Positronium) mit  $S = 0, m_s = 0$ , Lebensdauer  $\tau_S = 125\text{ps}$  zerstrahlt in 2, 4, ...  $\gamma$ -Quanten.
- Orthopositronium:  $1^3S_1$  (Triplett-Positronium) mit  $S = 1, m_s = -1, 0, 1$ , Lebensdauer  $\tau_S = 142\text{ns}$ , zerstrahlt in 3, 5, ...  $\gamma$ -Quanten.

Der Ortho-Zustand ist wahrscheinlicher (75%) und langlebiger als der Para-Zustand (bei der Annihilation des Ortho-Zustandes handelt es sich um einen Prozess höherer Ordnung, daher ist er weniger wahrscheinlich als die Annihilation des Para-Zustandes). Der elektromagnetische Triplett-Singulett-Übergang ist verboten. Der Übergang  $1^3S_1$  zu  $1^1S_0$  kann nur durch Stoß mit einem anderen Teilchen erfolgen.

[2]

## Aufgabe 5 (3 Punkte)

Welche Werte kann der Gesamtdrehimpuls eines  $f$ -Elektrons im Wasserstoffatom annehmen? Wie viele Einstellmöglichkeiten haben die möglichen Gesamtdrehimpulse in einem Magnetfeld? Welche Werte kann die magnetische Quantenzahl jeweils annehmen? Welches ist der kleinstmögliche Wert für die Hauptquantenzahl  $n$ ?

## Lösung

Der Gesamtdrehimpuls  $\vec{j}$  ergibt sich aus Kopplung von Spin  $\vec{s}$  und Bahndrehimpuls  $\vec{l}$ . Für die entsprechenden Quantenzahlen  $s, l$  und  $j$  gilt

$$|l - s| \leq j \leq l + s$$

Für ein  $f$ -Elektron ist  $l = 3$  und  $s = 1/2$ , so dass  $j = 5/2$  und  $j = 7/2$  mögliche Werte für die Gesamtdrehimpulsquantenzahl sind.

Für jeden Gesamtdrehimpuls  $j$  gibt es  $2j + 1$  Einstellmöglichkeiten in einem  $\vec{B}$ -Feld, im vorliegenden Fall also 6 (für  $j = 5/2$ ) bzw. 8 (für  $j = 7/2$ ) Einstellmöglichkeiten. Die zugehörigen magnetischen Quantenzahlen sind

$$\begin{aligned} j = 5/2: & \quad m_j = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2 \\ j = 7/2: & \quad m_j = -7/2, -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, 5/2, 7/2 \end{aligned}$$

Bei gegebener Hauptquantenzahl  $n$  ist der maximal mögliche Bahndrehimpuls  $l_{max} = n - 1$ . Ein Zustand mit  $l = 3$  ist daher erst ab der  $n = 4$ -Schale möglich.

[3]

## Aufgabe 6 (3 Punkte)

Berechnen Sie die durch die Spin-Bahn-Wechselwirkung verursachte  $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$  Energieaufspaltung im Wasserstoffatom. (Hinweis:  $\langle a \rangle = -E_n \frac{(\alpha Z)^2}{nl(l+\frac{1}{2})(l+1)}$ )

## Lösung

Die Bindungsenergie eines Feinstrukturniveaus, das durch die Quantenzahlen  $n, l$  und  $j$  charakterisiert ist, beträgt

$$E_{n,l,j} = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

Hier ist die Energiedifferenz zwischen den Niveaus  $j = l - s$  und  $j = l + s$  mit  $s = \frac{1}{2}$  von Interesse.

$$\begin{aligned} E_{n,l,l+\frac{1}{2}} &= E_n + \frac{\langle a \rangle}{2} \left[ \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{3}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] = E_n + \frac{\langle a \rangle}{2} l \\ E_{n,l,l-\frac{1}{2}} &= E_n + \frac{\langle a \rangle}{2} \left[ \left(l - \frac{1}{2}\right)\left(l + \frac{1}{2}\right) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] = E_n - \frac{\langle a \rangle}{2} (l+1) \end{aligned}$$

Die Differenz beträgt

$$\Delta E_{l,s} = E_{n,l,l+\frac{1}{2}} - E_{n,l,l-\frac{1}{2}} = \langle a \rangle \left[ l + \frac{1}{2} \right]$$

[2]

Mit

$$\langle a \rangle = -E_n \frac{(\alpha Z)^2}{nl(l+\frac{1}{2})(l+1)}$$

folgt

$$\Delta E_{l,s} = -E_n \frac{(\alpha Z)^2}{nl(l+1)}$$

Für die  $2p_{1/2} - 2p_{3/2}$ -Aufspaltung in Wasserstoff ( $Z=1, n=2, l=1$ ) erhält man

$$|\Delta E_{2p}| = \frac{R\alpha^2}{4} \approx \frac{13.606 \text{ eV}}{16 \cdot 137^2} \approx 45 \mu\text{eV}$$

[1]

## Aufgabe 7 (5 Punkte)

Das Erdmagnetfeld hat am magnetischen Südpol eine Flussdichte  $B = 62 \mu\text{T}$ . Wie groß ist in diesem Magnetfeld die Zeeman-Aufspaltung der  $643.8 \text{ nm } {}^1D_2 \rightarrow {}^1P_1$  Linie des Cadmium-Atoms (normaler Zeeman-Effekt) in Frequenz und Wellenlänge. Wie groß ist die Aufspaltung in einem Magnetfeld von  $0.75 \text{ T}$ , wie es beispielsweise in Strahlführungsmagneten kleiner Beschleuniger herrscht?



## Lösung

Der Abstand zweier Komponenten mit  $\Delta m_j = 1$  beträgt

$$\Delta E = g_j \mu_B B$$

mit dem Landé-Faktor

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \quad [1]$$

Bei der hier betrachteten Linie ist  $s = 0$  und  $j = l$  (normaler Zeemaneffekt). Somit ist  $g_j = 1$  für beide Zustände, und die Aufspaltung  $\Delta E = \mu_B B$  zwischen benachbarten Komponenten ist dieselbe sowohl für den  $^1D_2$ - als auch für den  $^1P_1$ -Zustand. Daher ist die Frequenzaufspaltung zwischen benachbarten Linien

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{\mu_B B}{h} \quad [1]$$

Mit

$$\begin{aligned} \nu \lambda &= c \\ \frac{d\nu}{d\lambda} &= -\frac{c}{\lambda^2} \end{aligned}$$

ergibt sich für den Betrag der Wellenlängenaufspaltung:

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2 \Delta \nu}{c}$$

| B                | $\Delta \nu$                                       | $\Delta \lambda$                | $\Delta \lambda / \lambda$ |
|------------------|--|---------------------------------|----------------------------|
| $62 \mu\text{T}$ | $8.69 \cdot 10^5 \text{ Hz} = 869 \text{ kHz}$     | $1.20 \cdot 10^{-15} \text{ m}$ | $1.86 \cdot 10^{-9}$       |
| $0.75 \text{ T}$ | $1.05 \cdot 10^{10} \text{ Hz} = 10.5 \text{ GHz}$ | $1.45 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ | $2.25 \cdot 10^{-5}$       |

[3]

## Aufgabe 8 (4 Punkte)

Wir betrachten die spontane Emission eines Wasserstoff-Atoms. Das Atom befinde sich im angeregten Zustand  $E_i$  und kann sich über Dipolübergänge nur in den Zustand  $E_k$  abregen.

- Wie lauten die Auswahlregeln für die magnetische Quantenzahl  $m$ ? Wie ist die emittierte Strahlung in den einzelnen Fällen polarisiert?
- Die Lebensdauer des Zustandes  $E_i$  betrage  $\tau = 23 \text{ ns}$ . Mit welcher Auflösung können Sie die Frequenz  $\omega_{ik}$  des Überganges  $E_i \rightarrow E_k$  bestenfalls messen?
- Mit welcher relativen Auflösung können Sie die Frequenz  $\omega_{ik}$  bei einer Temperatur von  $T = 300 \text{ K}$  bestenfalls messen?

## Lösung

- a) Die Auswahlregeln für die magnetische Quantenzahl  $m$  sind  $\Delta m = 0, \pm 1$ . Die emittierte Strahlung ist für  $\Delta m = 0$  linear polarisiert und für  $\Delta m = \pm 1$  zirkular polarisiert.

[1,5]

- b) Die Frequenz  $\omega_{ik}$  können wir im Idealfall bis auf die natürliche Linienbreite genau messen. Wir betrachten hierzu die Heisenberg'sche Unschärferelation:

$$\begin{aligned}\Delta E \cdot \Delta t &\geq \hbar \\ \Delta \omega \cdot \tau &\geq 1 \\ \Delta \omega &\geq \frac{1}{\tau} = 43.48 \text{ MHz}\end{aligned}$$

[1]

- c)

$$\begin{aligned}\delta \omega_{ik} &= \frac{2\omega_{ik}}{c} \sqrt{\frac{2 \ln 2 RT}{M}} = 7.16 \cdot 10^{-7} \omega_{ik} \sqrt{\frac{T}{M [\text{g mol}^{-1}]}} \\ \frac{\delta \omega_{ik}}{\omega_{ik}} &= 1.24 \cdot 10^{-5}\end{aligned}$$

[1,5]

## Aufgabe 9 (4 Punkte)

- a) Betrachten Sie Triplett-Zustände ( $S=1$ ) des neutralen Helium-Atoms mit  $m_{s_1}=m_{s_2}=+1/2$ .
- Begründen Sie ausführlich, warum es keinen solchen Triplett-Zustand gibt, wenn sich beide Elektronen in der K-Schale befinden.
  - Warum gibt es dann einen derartigen Triplett-Zustand mit  $L=0$  ( $^3S$ -Zustand), wenn sich ein Elektron in der K-Schale und das andere in der L-Schale befindet?
- b) Warum können die  $2^1S_0$ - und  $2^3S_1$ -Zustände des neutralen He-Atoms nicht durch Emission elektrischer Dipolstrahlung in den  $1^1S_0$ -Grundzustand übergehen?

## Lösung

- a) (i) Elektronen haben Spin  $1/2$  und sind damit Fermionen. Das Pauli-Prinzip besagt, dass zwei gleiche Fermionen grundsätzlich nicht in allen Quantenzahlen übereinstimmen dürfen. Für Triplett-Zustände ( $S=1$ ) des neutralen Helium-Atoms mit  $m_{s_1}=m_{s_2}=+1/2$  ergeben sich folgende Quantenzahlen:

|           | $n$ | $l$ | $m_l$ | $m_s$ |
|-----------|-----|-----|-------|-------|
| Elektron1 | 1   | 0   | 0     | +1/2  |
| Elektron2 | 1   | 0   | 0     | +1/2  |

D.h. die Elektronen dieses Triplett-Zustands können sich nicht beide in der K-Schale befinden.

[1,5]

- (ii) Befindet sich ein Elektron in der K- und eines in der L-Schale lauten die Quantenzahlen

|                      | $n$ | $l$ | $m_l$ | $m_s$ |
|----------------------|-----|-----|-------|-------|
| Elektron in K-Schale | 1   | 0   | 0     | +1/2  |
| Elektron in L-Schale | 2   | 0   | 0     | +1/2  |

Das Pauli-Prinzip wird nun also nicht mehr verletzt.

[1,5]

- b)  $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$  ist verboten, da elektrische Dipolstrahlung mit  $\Delta j = 0$  nur für  $j \neq 0$  erlaubt ist (Spinflips sind verboten).  
 $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$  Übergänge zwischen Triplett- und Singulett-Systemen sind verboten (sog. Interkombinationsverbot).

[1]

## Konstanten

$$\begin{aligned}
 \hbar &= 1.05 \cdot 10^{-34} \text{Js} & m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg} \\
 e &= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} & m_p &= 1.67 \cdot 10^{-27} \text{kg} \\
 \epsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{As/V/m} & \alpha &= 7.3 \cdot 10^{-3} \\
 a_0 &= \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{m} & \mu_B &= \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{JT} \\
 R_\infty &= \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 \hbar^3} = 1,10 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}
 \end{aligned}$$