Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Probeklausur

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

Modul MA 9201

16. Dezember 2013, 14:15 – 15:30 Uhr

Prof. Dr. Dr. Eric Sonnendrücker
Dr. Katharina Kormann, Dr. Holger Heumann

Musterlösung

Aufgabe 1. Kern (9 Punkte)

Die folgende Matrix beschreibt eine lineare Abbildung:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 11 \\ -3 & -3 & -3 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & -4 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie eine Basis des Kerns der durch A dargestellten Abbildung.

<u>Lösung:</u>

Durch Gauß-Elemination bringt man die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$A \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} \\ \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}+2\cdot\mathrm{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & 12 \\ 0 & -3 & -3 & -3 & 9 \\ 0 & -4 & -4 & -4 & 12 \end{pmatrix} A \rightsquigarrow \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ -1/4\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{III}-3/4\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Bild hat also Dimension 2, der Kern folglich Dimension 3. Jetzt kann man die einzelnen Basisvektoren ausrechnen. Dabei wählt man x_5, x_4, x_3 frei und linear unabhängig, am geschicktesten einen 1 und die anderen beiden 0. x_2 und x_1 ergeben sich dann daraus.

$$\begin{aligned} & & x_5 &= 1 & & & x_5 &= 0 & & & x_5 &= 0 \\ & & x_4 &= 0 & & & x_4 &= 1 & & & x_4 &= 0 \\ & & x_3 &= 0 & & & x_3 &= 0 & & & x_3 &= 1 \\ x_2 - 3x_5 &= 0 & x_2 &= 3 & x_2 + x_4 &= 0 & x_2 &= -1 & x_2 + x_3 &= 0 & x_2 &= -1 \\ x_1 + x_5 &= 0 & x_1 &= -1 & x_1 - 4x_4 &= 0 & x_1 &= 4 & x_1 &= 0 & x_1 &= 0 \end{aligned}$$

Eine mögliche Basis dieses Kerns lautet also:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Alternativ zum separaten Suchen nach den einzelnen Basis-Vektoren kann man auch nach allen gleichzeitig suchen, indem man beim Lösen des homogenen Gleichungssystems drei Parameter frei wählt:

$$\begin{aligned} x_5 &\in \mathbb{R} & x_5 &= \lambda \\ x_4 &\in \mathbb{R} & x_4 &= \mu \\ x_3 &\in \mathbb{R} & x_3 &= \tau \\ x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = x_2 + \tau + \mu - 3\lambda &= 0 & x_2 &= 3\lambda - \mu - \tau \\ x_1 - 4x_4 + x_5 = x_1 - 4\mu + \lambda &= 0 & x_1 &= -\lambda + 4\mu \end{aligned}$$

$$\mathrm{Kern}(A) = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu, \tau \in \mathbb{R} \right\}$$

Aus dieser Lösungsmenge kann man die oben bereits angegebene Basis ebenfalls ablesen. In dieser Schreibweise wurde angenommen, dass der zugrundeliegende Vektorraum ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist, aber für andere Körper, die die verwendeten Zahlen enthalten, also insbesondere auch über $\mathbb{C}$, wäre das Ergebnis das gleiche.

Aufgabe 2. Nicht ganz linear (1+1+2+4=8 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Gleichungen in drei reellwertigen Variablen:

$$\begin{aligned} \text{I:} &\quad a = 2c \\ \text{II:} &\quad a - 1 = b + c \\ \text{III:} &\quad 2(1-b) = a(2-c) \end{aligned}$$

a) Geben Sie an, welche dieser Gleichungen nicht linear sind.

b) Notieren Sie das Gleichungssystem, das aus den übrigen (linearen) Gleichungen gebildet wird, in Matrix-Notation, also als

$$M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{v}$$

Geben Sie die Matrix M und den Vektor $\vec{v}$ konkret an.

c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des in Teilaufgabe b) bestimmten linearen Gleichungssystems.

d) Geben Sie die Menge aller Vektoren $(a, b, c)^T \in \mathbb{R}^3$ an, die alle vorgegebenen Gleichungen erfüllen, also auch die nicht linearen.

<u>Lösung:</u>

a) Die Gleichung III ist nicht linear.

b) Einfach Gleichungssystem wie gewohnt notieren:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Zeilenstufenform erhält man im Kopf, indem man die 0 in der ersten Zeile ausnutzt. Man kann also direkt auflösen.

$$\begin{aligned} c &\in \mathbb{R} & \qquad c &= \lambda \\ a - 2c &= 0 & a &= 2\lambda \\ a - b - c &= 1 & b &= \lambda - 1 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L}_c = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

d) Man kann jetzt die nicht-lineare Gleichung als Gleichung in λ auffassen.

$$\begin{aligned} 2\big(1 - (\lambda - 1)\big) &= 2\lambda\big(2 - \lambda\big) \\ 2(2 - \lambda) &= 2\lambda\big(2 - \lambda\big) \\ 4 - 2\lambda &= 4\lambda - 2\lambda^2 \\ (4 - 2\lambda)(1 - \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda_1 = 2 \qquad\qquad \lambda_2 = 1$$

$$\mathbb{L}_d = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 3. Eigenschaften linearer Abbildungen (5+5=10 Punkte)

Sei $\vec{F} : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei $K-$Vektorräumen V und W. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist $\vec{F}$ injektiv und $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ linear unabhängig in V, so ist $(\vec{F}(\vec{v}_1), \ldots \vec{F}(\vec{v}_n))$ linear unabhängig in W.

b) Sei $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine Basis von V und seien die Vektoren $\vec{w}_i \in W$ definiert durch $\vec{w}_i = \vec{F}(\vec{v}_i)$. Wenn $\vec{F}$ surjektiv, so ist $(\vec{w}_1, \ldots \vec{w}_n)$ ein Erzeugendensystem von W.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Wir zeigen, dass der Nullvektor nur die trivial Darstellung hat:

$$\vec{0} = \sum_i \lambda_i \vec{F}(\vec{v}_i) \overset{linear}{\Rightarrow} \vec{0} = \vec{F}(\sum_i \lambda_i \vec{v}_i) \overset{injektiv}{\Rightarrow} \vec{0} = \sum_i \lambda_i \vec{v}_i \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$$

Der letzte Schritt folgt, weil $(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$ linear unabhängig.

b) Da $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)$ eine Basis von V ist, lässt sich jedes $\vec{x} \in V$ als Linearkombination schreiben. Nutzt man die Linearität der Abbildung aus, so erhält man

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{F}(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{w}_i.$$

Folglich gilt also $\vec{F}(V) = \vec{F}(\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)) = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$. Da aber $\vec{F}$ nach Annahme surjektiv ist, gilt auch $\vec{F}(V) = W$ und damit $W = \mathrm{Span}(\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n)$.

Aufgabe 4. Lineare Abbildungen (1+1+1=3 Punkte)

Sei $\vec{f}$ eine lineare Abbildung eines K-Vektorraums V in einen K-Vektorraum W, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} L1: &\quad \vec{f}(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = \vec{f}(\vec{v}_1)+\vec{f}(\vec{v}_2) \quad \text{für alle } \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in V\,, \\ L2: &\quad \vec{f}(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{f}(\vec{v}) \quad \text{für alle } \vec{v}\in V,\ \lambda\in K \end{aligned}$$

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche Aussagen sind falsch? Begründen Sie jeweils ihre Antwort, indem Sie die Aussage aus den Axiomen L1 und L2 herleiten oder ein Gegenbeispiel angeben.

a) $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$.

b) $\vec{f}(-\vec{v}) = -\vec{f}(\vec{v})$.

c) $\vec{f}(V) = W$.

LÖSUNG:

a) Richtig. Für beliebiges $\vec{v}\in V$ gilt:

$$\vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{v}+\vec{0}) = \vec{f}(\vec{v})+\vec{f}(\vec{0}).$$

b) Richtig. $-\vec{v}$ ist das Negative von $\vec{v}$, d.h. $-\vec{v}+\vec{v}=\vec{0}$. Damit gilt aber nach (a) $\vec{0}=\vec{f}(\vec{0})=\vec{f}(-\vec{v}+\vec{v}) = \vec{f}(-\vec{v})+\vec{f}(\vec{v})$.

c) Falsch, z.B. $V=W=\mathbb{R}$ und $\vec{f}(\vec{v})=\vec{0}$ für alle $\vec{v}$, d.h $\vec{f}(V)=\{\vec{0}\}\neq W$.

Aufgabe 5. Ein Körper von Matrizen (4+8+3=15 Punkte)

Sei
$$M := \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

a) Finden Sie zu gegebenem $A \in M \setminus \{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \}$ diejenige Matrix $B \in M$, so dass
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Zeigen Sie, dass M mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und Multiplikation ein Körper ist.
Hinweis: Sie können voraussetzen, dass die Menge $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{R})$ mit der gewöhnlichen Matrizenaddition und Multiplikation ein Ring ist.

c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : M \to \mathbb{C}, A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \mapsto x + iy$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus von der Gruppe $(M, \cdot)$ nach der Gruppe $(\mathbb{C}, \cdot)$ ist.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Wir bestimmen $A \cdot B$
$$A \cdot B = F \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ -\widetilde{y} & \widetilde{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} & x\widetilde{y} + y\widetilde{x} \\ -x\widetilde{y} - y\widetilde{x} & x\widetilde{x} - y\widetilde{y} \end{pmatrix}$$
Wir habe $A \cdot B = E_2$, genau dann wenn die Einträge $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ von B, das folgende lineare Gleichungssytem erfüllen.
$$\begin{aligned} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} &= 1 \\ x\widetilde{y} + y\widetilde{x} &= 0 \end{aligned}.$$
Wir machen die Fallunterscheidung $x = 0$ und $x \neq 0$:

- $x = 0$: Dann gilt $y \neq 0$ und wir finden: $\widetilde{y} = -\frac{1}{y}$ und $\widetilde{x} = 0$.
- $x \neq 0$:
$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{y^2}{x} + x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{y}{x} \end{pmatrix}$$
Wir finden $\widetilde{y} = -\frac{y}{y^2+x^2}$ und $\widetilde{x} = \frac{x}{y^2+x^2}$.

Also gilt in jedem Fall
$$B = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

b) Es gilt $M \subsetneq \mathcal{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$. Zunächst müssen wir zeigen, dass M abgeschlossen ist bezüglich Addition und Multiplikation. Seien $A, B \in M$, d.h. $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.
Dann gilt
$$A + B = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ -y_1 - y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{pmatrix} \in M,$$
wobei $x_3 = x_1 + x_2 \in \mathbb{R}$ und $y_3 = y_1 + y_2 \in \mathbb{R}$. Ferner gilt
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -y_1x_2 - x_1y_2 & -y_1y_2 + x_1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -(x_1y_2 + y_1x_2) & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & y_3 \\ -y_3 & x_3 \end{pmatrix} \in M,$$
wobei $x_3 = x_1x_2 - y_1y_2 \in \mathbb{R}$ und $y_3 = x_1y_2 + y_1x_2 \in \mathbb{R}$.
Da $\mathcal{M}(2 \times 2; \mathbb{R})$ ein Ring ist und M abgeschlossen ist, gilt

- $(M,+)$ abelsche Gruppe
- $(M,\cdot)$ Halbgruppe
- Distributivgesetze

Es bleibt also zu zeigen,

- $(M,\cdot)$ kommutativ
- $(M,\cdot)$ ein Einselement besitzt und alle $A \in M^*$ ein Inverses besitzen.

Wir gehen der Reihe nach vor:

- Seien $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ -\widetilde{y} & \widetilde{x} \end{pmatrix} \in M$. Dann gilt
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} & x\widetilde{y} + y\widetilde{x} \\ -x\widetilde{y} - y\widetilde{x} & x\widetilde{x} - y\widetilde{y} \end{pmatrix} = B \cdot A$$
- $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ ist das Einselement, da
$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$
- Sei nun $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Wenn A nicht die Nullmatrix ist, ist die Matrix $A^{-1} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ definiert und es gilt $A^{-1}A = E_2$.

c) Definiere $G : \mathcal{C} \to M, x + \mathrm{i}y \mapsto A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.
Es gilt $F \circ G = G \circ F = id$, weshalb F bijektiv ist.
Die Verträglichkeit folgt aus:
$$F(A \cdot B) = F(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ -\widetilde{y} & \widetilde{x} \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} & x\widetilde{y} + y\widetilde{x} \\ -x\widetilde{y} - y\widetilde{x} & x\widetilde{x} - y\widetilde{y} \end{pmatrix}) = x\widetilde{x} - y\widetilde{y} + i(x\widetilde{y} + y\widetilde{x})$$
und
$$F(A) \cdot F(B) = F(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}) \cdot F(\begin{pmatrix} \widetilde{x} & \widetilde{y} \\ -\widetilde{y} & \widetilde{x} \end{pmatrix}) = (x + iy) \cdot (\widetilde{x} + i\widetilde{y}) = x\widetilde{x} - y\widetilde{y} + i(x\widetilde{y} + y\widetilde{x})$$

Aufgabe 6. Teilmengen von Vektorräumen (10 Punkte)

Sind die folgenden Teilmengen U von $\mathbb{R}^n$ Vektorräume oder nicht? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

a) $U = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 = x_2 = \dots x_n\}$

b) $U = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 = 1\}$

c) $U = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 = 0\}$

d) $U = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 - x_2^2 = 0\}$

LÖSUNG:

a) Ist ein VR. Wir zeigen die Unterraumkriterien:

- U ist nicht leer, da z.B. $(0, 0, 0 \dots) \in U$.
- Abgeschlossenheit bezüglich Addition: $(a, a, \dots), (b, b, \dots) \in U \Rightarrow (a, a, \dots) + (b, b, \dots) = (a + b, a + b, \dots) \in U$.
- Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation bzg. Skalaren: $(a, a, \dots) \in U \Rightarrow \lambda(a, a, \dots) = (\lambda a, \lambda a, \dots) \in U$.

Alternativ zeigt man alle Vektorraumaxiome.

b) Ist kein VR, da $\vec{0}$ nicht enthalten.

c) Ist ein VR. Wir zeigen die Unterraumkriterien:

- U ist nicht leer, da z.B. $(0, 0, 0 \dots) \in U$
- Abgeschlossenheit bezüglich Addition: $(0, x_2, \dots), (0, y_2, \dots) \in U \Rightarrow (0, x_2, \dots) + (0, y_2, \dots) = (0, x_2 + y_2, \dots) \in U$.
- Abgeschlossenheit bezüglich Multiplikation bzg. Skalaren: $(0, x_2, \dots) \in U \Rightarrow \lambda(0, x_2, \dots) = (0, \lambda x_2, \dots) \in U$.

Alternativ zeigt man alle Vektorraumaxiome.

d) Ist kein VR, da $(2, -2, \dots) \in U$ und $(1, 1, \dots) \in U$ aber deren Summe $(2 + 1, -2 + 1, \dots) = (3, -1, \dots) \notin U$.