TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Friedrich Roesler
Ralf Franken, PhD
Max Lein

Lineare Algebra 1

WS 2006/07
Lösungen Blatt 13/2
29.01.2007

Lösungen zur „Probeklausur“

Aufgabe 1 (ca. 6 Punkte)
Sei $f_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(i) Geben Sie $\ker f_A$ an.

(ii) Geben Sie $\operatorname{rg} f_A$ und eine Basis von $\operatorname{im} f_A$ an.

(iii) Untersuchen Sie, ob die Abbildung injektiv oder surjektiv ist.

Lösung

(i) $\ker f_A$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -6 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten also vier Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$-2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0 \tag{i}$$
$$5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \tag{ii}$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \tag{iii}$$
$$-7x_1 - 4x_2 + 9x_3 = 0 \tag{iv}$$

Aus Gleichung (i) folgt $x_2 = -x_1 - 3x_3$; eingesetzt in (ii) erhalten wir

$$5x_1 + 4(-x_1 - 3x_3) + 5x_3 = x_1 - 7x_3 = 0 \implies x_1 = 7x_3$$

Kombiniert mit (i) erhalten wir $x_2 = -10x_3$.
(i) eingesetzt in (iii) liefert

$$x_1 + (-x_1 - 3x_3) + 3x_3 = 0,$$

Gleichung (iii) ist also immer erfüllt, dasselbe gilt für Gleichung (iv).

$$-7 \cdot 7x_3 - 4 \cdot (-10x_3) + 9x_3 = 0$$

$\ker f_A$ wird also aufgespannt durch

$$\ker f_A = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}7\\-10\\1\end{pmatrix}\right\}$$

[Alternativ kann man das Gleichungssystem $Ax = 0$ auch mit dem Gauß-Algorithmus lösen.]

(ii) Aus Teilaufgabe (i) folgt, dass $\operatorname{rg} f_A = \dim \operatorname{im} f_A = 2$. Die ersten zwei Vektoren sind linear unabhängig und daher ist

$$\operatorname{im} f_A = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}-2\\5\\1\\-7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\1\\-4\end{pmatrix}\right\}$$

Die ersten zwei Spaltenvektoren bilden eine Basis von $\operatorname{im} f_A$.

(iii) Da die Dimension des Urbildraums kleiner als die Dimension des Bildraums ist, kann f_A nicht surjektiv sein. f_A ist auch nicht injektiv, da $\ker f_A \neq \{0\}$.

Aufgabe 2 (ca. 8 Punkte)
Sei $\mathbb{R}_4[X] := \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 4\}$ der Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich 4.

(i) Welche Dimension hat $\mathbb{R}_4[X]$? Geben Sie überabzählbar viele Basen dieses Raumes an (ohne Beweis).

(ii) Stellen Sie die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $H : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_4[X]$, definiert durch

$$H := \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)^2 + \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}_4[X]} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

in der Standardbasis $\{X^k : k = 0, \dots, 4\}$ dar, wobei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ die formale Ableitung auf dem Raum der Polynome bezeichnet.

(iii) Geben Sie Kern und Bild von H (in Abhängigkeit von λ) an.

Lösung

(i) Es ist $\dim \mathbb{R}_4[X] = 5$ (in Teilaufgabe (ii) wird die Standardbasis verraten!). Zwei Beipiele, wie man überabzählbar viele Basen angeben kann, sind

$$\left\{(X+\alpha)^k\right\}_{0\leq k\leq 4} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad \text{und} \qquad \left\{\alpha, X^1, X^2, X^3, X^4\right\} \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

(ii) Es ist klar, dass $H(X^0) = \lambda^2 X^0$ und $H(X^1) = \lambda^2 X^1$. Für $k \geq 2$ ist $H(X^k)$ gegeben durch

$$H(X^k) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\right)^2 (X^k) + \lambda^2 \mathrm{id}_{\mathbb{R}_4[X]}(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \lambda^2 X^k$$

Sei $P = \sum_{k=0}^4 \alpha_k X^k$ ein beliebiges, aber festes Polynom. Dann haben wir:

$$\begin{aligned} H(P) = H\left(\textstyle\sum_{k=0}^4 \alpha_k X^k\right) &\overset{*}{=} \sum_{k=0}^4 \alpha_k H(X^k) = \lambda^2 \alpha_0 X^0 + \lambda^2 \alpha_1 X^1 + \sum_{k=2}^4 \Big(\alpha_k k(k-1) X^{k-2} + \lambda^2 \alpha_k X^k\Big) \\ &= \lambda^2 \alpha_0 X^0 + \lambda^2 \alpha_1 X^1 + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_{k+2} (k+2)(k+1) X^k + \sum_{k=2}^4 \lambda^2 \alpha_k X^k\Big) \\ &= \sum_{k=0}^2 \big(\alpha_{k+2} (k+2)(k+1) + \lambda^2 \alpha_k\big) X^k + \lambda^2 \alpha_3 X^3 + \lambda^2 \alpha_4 X^4 \end{aligned}$$

Im mit $*$ markierten Schritt haben wir die $\mathbb{R}$-Linearität von H ausgenutzt. Die Koordinatenabbildung bezüglich der Standardbasis $\phi_{\mathbb{R}_4[X]} : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^5$ ist also definiert durch $\hat{H} = \phi_{\mathbb{R}_4[X]} \circ H \circ {\phi_{\mathbb{R}_4[X]}}^{-1} : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ und wir erhalten

$$\hat{H}\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \phi_{\mathbb{R}_4[X]} \circ H \circ {\phi_{\mathbb{R}_4[X]}}^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^2\,\alpha_0 + 2\cdot 1\,\alpha_2\\\lambda^2\,\alpha_1 + 3\cdot 2\,\alpha_3\\\lambda^2\,\alpha_2 + 4\cdot 3\,\alpha_4\\\lambda^2\,\alpha_3\\\lambda^2\,\alpha_4\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 & 2\cdot 1 & 0 & 0\\0 & \lambda^2 & 0 & 3\cdot 2 & 0\\0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 4\cdot 3\\0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix}$$

(iii) Wir können entweder den Kern dieser Abbildung mit abstrakten Vektoren berechnen oder zuerst $\ker\hat{H}$ berechnen und dann über ${\phi_{\mathbb{R}_4[X]}}^{-1}\big(\ker\hat{H}\big) = \ker H$ auf den Kern der abstrakten Abbildung schließen.

Wir beschreiben hier detailliert den zweiten Lösungsweg und skizzieren dann ersteren.

$\ker\hat{H}$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix}\lambda^2 & 0 & 2\cdot 1 & 0 & 0\\0 & \lambda^2 & 0 & 3\cdot 2 & 0\\0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 4\cdot 3\\0 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_0\\\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda^2\,\alpha_0 + 2\cdot 1\,\alpha_2\\\lambda^2\,\alpha_1 + 3\cdot 2\,\alpha_3\\\lambda^2\,\alpha_2 + 4\cdot 3\,\alpha_4\\\lambda^2\,\alpha_3\\\lambda^2\,\alpha_4\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Zunächst der Fall $\lambda \neq 0$:
Aus den letzten zwei Zeilen folgt sofort $\alpha_4 = 0 = \alpha_3$. Wird dies in die restlichen Zeilen von unten nach oben eingesetzt, so wird klar, dass aus $\lambda^2\alpha_k + (k+2)(k+1)\alpha_{k+2} = 0$ auch $\alpha_k = 0$ $\forall k \in \{0,1,2\}$ folgt und das Gleichungssystem *nur die triviale Lösung* hat. Daher ist $\ker\hat{H} = \{0\}$ und $\ker H$ muss auch trivial sein, ${\phi_{\mathbb{R}_4[X]}}^{-1}\big(\ker\hat{H}\big) = \{0\} = \ker H$.

Nun der Fall $\lambda = 0$:
Hier folgt sofort $\alpha_4 = 0 = \alpha_3 = \alpha_2$, wohingegen α_1 und α_0 beliebig sind. Es ist also $\ker\hat{H} = \langle e_1, e_2\rangle$ und $\ker H = {\phi_{\mathbb{R}_4[X]}}^{-1}\big(\ker\hat{H}\big) = \langle X^0, X^1\rangle$.

Alternativ können wir auch diese Rechnung in der Standardbasis durchführen. Statt obiger Matrixgleichung erhalten wir stattdessen

$$H\big(\textstyle\sum_{k=0}^4 \alpha_k\,X^k\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2}\big(\alpha_{k+2}\,(k+2)(k+1) + \lambda^2\,\alpha_k\big)\,X^k + \lambda^2\,\alpha_3\,X^3 + \lambda^2\,\alpha_4\,X^4 \stackrel{!}{=} 0$$

Da die Standardbasis aus linear unabhängigen Vektoren besteht, müssen die Vorfaktoren von X^k 0 sein, das heißt $\lambda^2\,\alpha_4 = 0$ und $\lambda^2\,\alpha_3 = 0$ sowie

$$\alpha_{k+2}\,(k+2)(k+1) + \lambda^2\,\alpha_k \stackrel{!}{=} 0$$

für $0 \leq k \leq 2$. Aufgelöst ergibt das für $\lambda \neq 0$ wieder, dass die Koeffizienten α_k, $0 \leq k \leq 4$, alle 0 sein müssen und $\ker H = \{0\}$ trivial ist; für $\lambda = 0$ sind $\alpha_4, \alpha_3, \alpha_2 = 0$ und α_1, α_0 beliebig, weiter wie oben.

Nun noch zu den Bildern.
Fall $\lambda \neq 0$: da $\ker H = \{0\}$ ist, ist H injektiv. Ein injektiver Endomorphismus ist aber auch surjektiv, und somit haben wir $\operatorname{im} H = \mathbb{R}_4[X]$.
Fall $\lambda = 0$: aus der darstellenden Matrix von $\hat{H}$ im Teil (ii) liest man ab

$$\operatorname{im} \hat{H} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$$

(das Bild ist der von den Spalten erzeugte Raum), somit $\operatorname{im} H = \phi^{-1}_{\mathbb{R}_4[X]}(\operatorname{im} \hat{H}) = \langle X^0, X^1, X^2 \rangle$.

Aufgabe 3 (ca. 6 Punkte)
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien eine Basis $a = (a_1, a_2)$ und Vektoren $b_1 := 2a_1 + a_2$ und $b_2 := 3a_1 + 2a_2$ gegeben.

(i) Begründen Sie, dass auch $b := (b_1, b_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ diejenige lineare Abbildung, die bgzl. der Basis b durch die Darstellungsmatrix

$$\left[\frac{f(b)}{b}\right] = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\left[\frac{f(a)}{a}\right]$ von f bzgl. der Basis a.

Lösung

a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 = 0$. Dann ist $\lambda_1(2a_1 + a_2) + \lambda_2(3a_1 + 2a_2) = 0$, also

$$(2\lambda_1 + 3\lambda_2)a_1 \; + \; (\lambda_1 + 2\lambda_2)a_2 \; = \; 0\,.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2 geht das nur für

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \; + \; 3\lambda_2 \; &= \; 0 \\ \lambda_1 \; + \; 2\lambda_2 \; &= \; 0 \end{aligned}$$

Dies hat (als homogenes lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix vom Rang 2) nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Also sind b_1, b_2 linear unabhängig und damit (als maximales linear unabhängiges System) eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

b) Es gilt die Transformationsformel

$$\left[\frac{f(a)}{a}\right] = \left[\frac{b}{a}\right] \cdot \left[\frac{f(b)}{b}\right] \cdot \left[\frac{a}{b}\right].$$

Hier ist $\left[\frac{f(b)}{b}\right]$ explizit gegeben, aus der Angabe liest man weiter ab

$$\left[\frac{b}{a}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

und schließlich ist

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{b}{a}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{(mit Inversionsformel für } 2 \times 2\text{-Matrizen).}$$

Zusammen:
$$\left[\frac{f(a)}{a}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 21 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (ca. 4 Punkte)
Es seien W und V zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie (mit genauen Begründungen), dass für $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(W, V)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit der üblichen punktweisen Addition und Skalarmultiplikation gilt:

$$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f\,.$$

Stimmt das auch, wenn f eine beliebige (nicht notwendig lineare) Abbildung von W nach V ist?

Lösung
Sowohl $(\lambda + \mu)f$ als auch $\lambda f + \mu f$ ist Abbildung von W nach V, und es gilt

$$\begin{aligned}\forall\, w \in W: \quad & \big((\lambda+\mu)f\big)(w) =^{\text{punktweise Definition des skalaren Vielfachen einer Abbildung}} \\ = \ & (\lambda+\mu)(f(w)) =^{\text{1. Distributivgesetz für die Skalarmultiplikation in } V} \\ = \ & \lambda(f(w)) + \mu(f(w)) =^{2 \times \text{ punktweise Definition des skalaren Vielfachen einer Abbildung}} \\ = \ & (\lambda f)(w) + (\mu f)(w) =^{\text{punktweise Definition der Summe zweier Abbildungen}} \\ = \ & (\lambda f + \mu f)(w)\,,\end{aligned}$$

also folgt die Gleichheit der beiden Abbildungen.
Die punktweise Addition und Skalarmultiplikation läßt sich für beliebige Abbildungen von W nach V erklären, und auch in diesem Fall bleibt das obige Rechengesetz gültig, da der Beweis nicht von der Linearität der Abbildung f abhängt.

Aufgabe 5 (ca. 4 Punkte)
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{F}_7$:

$$\mu \cdot \bar{x}_1 + \bar{3} \cdot \bar{x}_2 = \bar{1} \qquad \text{(i)}$$
$$\bar{2} \cdot \bar{x}_1 + \bar{7} \cdot \bar{x}_2 = \bar{5} \qquad \text{(ii)}$$

Geben Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit des Parameters $\mu \in \mathbb{F}_7$ an und untersuchen Sie, ob die Gleichung für alle Werte von μ eine Lösung hat.

Lösung
Wir schreiben zuerst das Gleichungssystem um, indem wir die einfachstmöglichen Repräsentanten (also $\bar{0}$ bis $\bar{6}$) wählen.

$$\mu \cdot \bar{x}_1 + \bar{3} \cdot \bar{x}_2 = \bar{1} \qquad \text{(i)}$$
$$\bar{2} \cdot \bar{x}_1 \qquad\quad = \bar{5} \qquad \text{(ii)}$$

Da die erste und die zweite Gleichung linear unabhängig sind, gibt es für alle $\mu \in \mathbb{F}_7$ genau eine Lösung. Aus (ii) erhalten wir $\bar{x}_1 = \bar{2}^{-1} \cdot \bar{5} = \bar{4} \cdot \bar{5} = \bar{20} = \bar{6}$. Eingesetzt in (i) liefert das

$$\mu \cdot \bar{6} + \bar{3} \cdot \bar{x}_2 = \bar{1}\,.$$

Hieraus folgt $\bar{3} \cdot \bar{x}_2 = \bar{1} - \mu \cdot \bar{6} = \bar{1} + \mu$. Wir multiplizieren mit $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$ und erhalten

$$\bar{x}_2 = \bar{5} + \bar{5} \cdot \mu\,.$$

Somit ist die Lösungsmenge in Abhängigkeit vom Parameter $\mu \in \mathbb{F}_7$ gegeben durch

$$\big\{(\bar{6}, \bar{5} + \bar{5} \cdot \mu)\big\}\,.$$

Aufgabe 6 (ca. 5 Punkte)
Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f \circ f = f$.

(i) Zeigen Sie: $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $v \in V$ zerlegen lässt in $v = u + w$ mit $u \in \operatorname{im} f$, $w \in \ker f$.

Lösung

(i) Sei $v \in \operatorname{im} f \cap \ker f$. Dann existiert einerseits ein Urbildvektor $u \in V$ mit $f(u) = v$. Andererseits ist $v \in \ker f$, also $f(v) = 0$. $f = f \circ f$ liefert dann

$$\begin{aligned} f \circ f(u) &= f(u) = v \\ &= f\big(f(u)\big) = f(v) = 0 \end{aligned}$$

Daher gilt $v = 0$ und der Schnitt von Bild und Kern ist trivial, $\operatorname{im} f \cap \ker f = \{0\}$.

(ii) Sei $v \in V$ beliebig, aber fest. Dann gilt nach Voraussetzung $f \circ f(v) = f(v)$. Also ist $(f - f \circ f)(v) = f\big(v - f(v)\big) = 0$. Daher ist $v - f(v) \in \ker f$ und v lässt sich zerlegen in

$$v = f(v) + \big(v - f(v)\big)$$

Aufgabe 7 (ca. 5 Punkte)
Kreuzen Sie an, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründungen sind nicht verlangt. (Für jedes richtige Kreuz gibt es 1 Punkt, **für jedes falsche Kreuz 1 Punkt Abzug.** Wenn Sie bei einer Aussage nichts ankreuzen, gibt es dafür 0 Punkte. Bei mehr falschen als richtigen Antworten wird die Aufgabe insgesamt mit 0 Punkten bewertet.)

Es gibt genau eine lineare Abbildung $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(1,0) = (4,-2,3)$, $f(1,1) = (1,0,2)$ und $f(2,3) = (-1,2,3)$.	☐ wahr ☐ falsch
Für jede Abbildung $f:\ M \to N$ und Teilmengen $A, B \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(A \cap B) \ = \ f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)\,.$	☐ wahr ☐ falsch
Ist $f:\ W \to V$ eine lineare Abbildung, so gilt für alle $a_1, \ldots, a_k \in W$: $f(a_1), \ldots, f(a_k)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $a_1, \ldots, a_k$ linear unabhängig.	☐ wahr ☐ falsch
Jeder Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat mindestens zwei Elemente.	☐ wahr ☐ falsch
Im $\mathbb{R}^9$ kann der Durchschnitt zweier 6-dimensionaler Unterräume nicht die Dimension 2 haben.	☐ wahr ☐ falsch

Lösung

Es gibt genau eine lineare Abbildung $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(1,0) = (4,-2,3)$, $f(1,1) = (1,0,2)$ und $f(2,3) = (-1,2,3)$.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert):
$(0,1)$ und $(1,1)$ sind Basis des $\mathbb{R}^2$, also gibt es nach Satz 8.3(i) genau eine lineare Abbildung f mit den hierfür angegebenen Bildern. Bleibt zu prüfen, ob sich $f(2,3)$ daraus durch lineare Fortsetzung ergibt:

$$(2,3) = 3 \cdot (1,1) - 1 \cdot (1,0) \quad \Rightarrow \quad f(2,3) = 3 \cdot (1,0,2) - 1 \cdot (4,-2,3) = (-1,2,3) \ \text{ – OK.}$$

Für jede Abbildung $f : M \to N$ und Teilmengen $A, B \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): siehe T7b).

Ist $f : W \to V$ eine lineare Abbildung, so gilt für alle $a_1, \ldots, a_k \in W$: $f(a_1), \ldots, f(a_k)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $a_1, \ldots, a_k$ linear unabhängig.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): siehe H24

Jeder Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ hat mindestens zwei Elemente.	☐ wahr ☒ falsch

Begründung (nicht gefordert): über jedem Körper gibt es den trivialen Vektorraum $\{0\}$.

Im $\mathbb{R}^9$ kann der Durchschnitt zweier 6-dimensionaler Unterräume nicht die Dimension 2 haben.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): Dimensionsformel für Unterräume, siehe T22.

Aufgabe 8 (ca. 3 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie: $\forall\, a, b \in \mathbb{K} : \ a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ a = -b \lor a = b$.

Lösung
Für alle $a, b \in \mathbb{K}$ gilt:

$$a^2 = b^2 \ \Leftrightarrow \ a^2 - b^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ (a+b)(a-b) = 0 \ \overset{\text{Nullteilerfreiheit in Körpern}}{\Leftrightarrow} \ a + b = 0 \lor a - b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = -b \lor a = b\,.$$