Semestralklausur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. F. v. Feilitzsch

Sommersemester 2008

12.7.2008

Aufgabe 1: (7 Punkte)

Radium 226 ist ein α-Strahler mit einer Teilchenenergie von 4.78 MeV. Fünf Prozent der von 2 g Radium 226 emittierten α-Teilchen werden zu einem parallelen Strahl gebündelt und auf eine 0.005 mm dicke Kupferfolie ($Z_{Cu} = 29$) gelenkt. Ein Detektor mit einer quadratischen Öffnung der Seitenlänge 3 cm befindet sich in 3 m Abstand vom Auftreffpunkt des α-Strahls. Wie groß ist die Zählrate im Detektor für den Streuwinkel $\vartheta = 45°$?
Hinweis: Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes erhalten Sie durch Ableiten aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \ln 2/\tau_{1/2}$.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Gegeben sei eine 1dimensionale Potentialstufe

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich mit definierter Energie $E = 2V_0$ in positiver x-Richtung auf die Stufe zu. Geben Sie die Lösung $\varphi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für $-\infty < x < \infty$ an, die diesen Zustand des Teilchens beschreibt.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Teilchen an der Stufe reflektiert?

Aufgabe 3: (5 Punkte)

a) Der Radialanteil der Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms ist

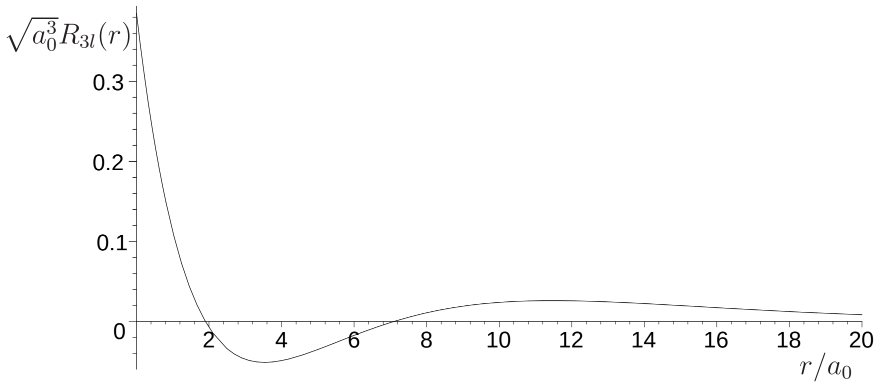
$$R_{10}(r) = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

Berechnen Sie den Abstand, bei dem die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w(r) = r^2R^2(r)$ des Elektrons maximal ist. Erläutern Sie, weshalb die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit nicht einfach durch $R^2(r)$ gegeben ist.

b) Das Wasserstoffatom befindet sich nun in einem angeregten Zustand mit $n = 3$. Der Radialanteil der Wellenfunktion lautet:

$$R_{3l}(r) \;=\; \frac{2}{\sqrt{27a_0^3}}\left[1-\frac{2}{3}\frac{r}{a_0}+\frac{2}{27}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right]e^{-r/3a_0}$$

und ist in der folgenden Abbildung widergegeben:



Wie kann man der Abbildung entnehmen, zu welcher Bahndrehimpulsquantenzahl l dieser Zustand gehört?

c) Berechnen Sie für den Zustand aus b) näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron im Bereich zwischen $r_1 = 7.9a_0$ und $r_2 = 8.1a_0$ befindet.

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Platziert man ein Wasserstoffatom in einem zeitunabhängigen Magnetfeld, dann spalten die Energieniveaus in Unterniveaus auf, wobei hier der Elektronenspin vernachlässigt werden soll.

a) Wie nennt man diesen Effekt? In wieviele Unterniveaus zerfällt ein Schrödinger-Niveau nl?

b) Skizzieren Sie die Aufspaltung eines s, eines p, und eines d Niveaus und beschriften Sie die Unterniveaus mit den jeweiligen Werten der magnetischen Quantenzahl m.

c) Wieviele unterschiedliche Linien sind beim Übergang von einem p-Niveau in ein s-Niveau zu beobachten? Wieviele beim Übergang von einem d-Niveau in ein p-Niveau?(Berücksichtigen Sie die relevante Auswahlregel!)

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Magnesium hat die Ordnungszahl 12 und die Grundzustandskonfiguration ist $1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s^2$. Wie lautet die Konfiguration des ersten angeregten Zustandes? Wie groß ist seine Energie, ausgedrückt durch die 1Elektronenenergien der Zentralfeldnäherung? In welche spektroskopische Niveaus $^{2S+1}L_J$ zerfällt die Konfiguration des ersten angeregten Zustandes? Welche Dimension hat folglich der Raum des ersten angeregten Zustandes?

Aufgabe 6: (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System aus N nichtwechselwirkenden Teilchen, die jeweils nur die beiden nichtentarteten Energien $\varepsilon_1 = 0$ und $\varepsilon_2 = \eta$ annehmen können. Die Verteilungsfunktion ist $f(\varepsilon) = Ae^{-\varepsilon/kT}$.

a) Bestimmen Sie A.

b) Berechnen Sie die Gesamtenergie E des Systems und zeigen Sie, dass $E \to 0$ für $T \to 0$ und dass $E \to \frac{1}{2}N\eta$ für $T \to \infty$.

c) Wie groß ist die Wärmekapazität des Systems? Gegen welchen Wert geht die Wärmekapazität für $T \to \infty$? Ist das Ergebnis physikalisch plausibel?

Aufgabe 7: (8 Punkte)

a) Bei $T = 0$ beträgt die Fermi-Energie von Kupfer $\varepsilon_{F0} = 7.04\,\text{eV}$. Berechnen Sie daraus mit Hilfe der Fermi-Dirac-Verteilung und der Zustandsdichte der Elektronen den Nullpunktsdruck des Elektronengases in Kupfer. Gehen Sie dabei aus von $p = \frac{2E}{3V}$. Vergleichen Sie den erhaltenen Druck mit dem Atmosphärendruck 1013 hPa.

b) Zeigen Sie, dass die „root-mean-square“-Geschwindigkeit $v_{rms} := \sqrt{\overline{v^2}}$ der Elektronen im Elektronengas bei $T = 0$ gegeben ist durch

$$v_{rms} \;=\; 4.6 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_{F0}}{\text{eV}}}$$

Hinweis: $\overline{\varepsilon} = \frac{3}{5}\varepsilon_{F0}$.

c) Drücken Sie die Verteilung der Elektronenenergien $n(\varepsilon)$ bei $T = 0$ durch die Gesamtzahl N der Elektronen, die Fermi-Energie ε_{F0} und ε aus. Leiten Sie daraus die Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten $n(v)$ bei $T = 0$ her.

Formeln und Konstanten:

Umrechnung eV $\leftrightarrow$ J: $1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

Rutherfordsche Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

Elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/Vm}$

Ladung des Protons: $e = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$

Avogadro-Zahl: $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$

Dichte von Kupfer: $\rho_{Cu} = 8.9\,\mathrm{g/cm}^3$

Molmasse von Kupfer: $M_{Cu} = 63.5\,\mathrm{g/mol}$

Halbwertszeit von Radium 226: $\tau_{1/2} = 1602\,\mathrm{a}$

Molmasse von Radium 226: $M_{Ra} = 226.0\,\mathrm{g/mol}$

Bohrscher Radius: $a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$

Zustandsdichte des Elektronengases:

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

Fermi-Energie des Elektronengases:

$$\varepsilon_{F0} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Elektronenmasse: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

Plancksche Konstante: $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$