Name, Vorname:______________________

Matrikel:______________________

Übungsgruppe:______________________

Geburtsort und -datum:______________________

---

2. Klausur zur Vorlesung

Theoretische Physik III A: Elektrodynamik

H.W. Grießhammer und P. Ring WS 02/03

6. Februar 2003 Zeit: 90 Minuten

Auf jedem Blatt muß der *eigene Name* und die *Matrikelnummer* stehen.

Lesbar schreiben freut die Korrektoren!

Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Es sind insgesamt 50 Punkte erreichbar.

Hilfmittel: Keine. Interessante **mathematische Formeln auf der Rückseite dieses Blattes**.

Hinweise: Die meisten Teilaufgaben sind bearbeitbar, ohne daß die Ergebnisse aller vorhergehenden Teilaufgaben bekannt sind.
Dokumentieren Sie die Herleitung Ihrer Ergebnisse. Wenn Sie Überlegungen anstellen, die eine Rechnung vereinfachen oder ersparen, dann beschreiben Sie diese *in Stichworten.*
Bitte Streuen Sie zusammengehörende Aufgabenteile nicht über die ganze Klausur. Wir empfehlen ein Blatt pro Aufgabe.
Bekanntgabe der Klausurresultate und Scheinnoten durch Aushang vor Zimmer 3217 (Prof. Ring) und – falls datenschutzrechtlich möglich – auf der Homepage der Vorlesung, spätestens ab 15. Februar. Scheine in Zi. 3220 (G. Liebhardt-Schilling, Sekretariat).

Aufgabe	(max. Punkte)	Erreichte Punkte
1a	(1)	
1b	(4)	
1c	(5)	
1d	(4)	
2a	(4)	
2b	(4)	
3a	(4)	
3b	(4)	
4a	(4)	
4b	(4)	
4c	(2)	
4d	(4)	
4e	(4)	
4f	(2)	
$\sum$	(50)	

	(Punkte)	Erreichte Punkte
1. Klausur	(50)	
2. Klausur	(50)	
$\sum$	(100)	

Note:

Interessante mathematische Formeln

$$\nabla r = \vec{\mathrm{e}}_r \tag{1}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{U}) - \Delta\vec{U} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{U}) = \Phi(\vec{\nabla} \times \vec{U}) + (\vec{\nabla}\Phi) \times \vec{U} \tag{4}$$

$$\int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \quad \sin^n x = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } n = 2 \\ \frac{4}{3} & \text{für } n = 3 \\ \frac{3\pi}{8} & \text{für } n = 4 \end{cases} \tag{5}$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}x \quad \sin^n x = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}x \quad \cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \pi & \text{für } n = 2 \\ \frac{3\pi}{4} & \text{für } n = 4 \end{cases} \tag{6}$$

$$\int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \quad \sin x \;\cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{2}{n+1} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases} \tag{7}$$

$$\int\limits_0^\pi \mathrm{d}x \quad \sin^2 x \;\cos^n x = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{\pi}{8} & \text{für } n = 2 \\ \frac{5\pi}{128} & \text{für } n = 4 \end{cases} \tag{8}$$

$$1 + 1 = 2 \times 2 - \sqrt{4} \tag{9}$$

Name, Vorname:________________________

Matrikel:________________________

---

1. FELD EINER PUNKTLADUNG IN BEWEGTEN BEZUGSSYSTEMEN (**14P**): Eine Punktladung Q ruht im Koordinatenursprung eines Inertialsystems **I**. Mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ bewegt sich relativ dazu ein Beobachter in einem Intertialsystem **II**. Im Moment $t_{\mathbf{I}} = 0 = t_{\mathbf{II}}$ treffen sich Beobachter **II** und die Punktladung im Koordinatenursprung des Inertialsystems **II**.

   Hinweis: Die Teilaufgaben c), d) und e) können unabhängig voneinander und von b) gelöst werden.

   a) (**1P**) Geben Sie einen Vierervektor $A^\mu_{\mathbf{I}}$ an, der das Feld der Ladung im Bezugssystem **I** beschreibt. Eine Rechnung oder Begründung ist *nicht* notwendig.

   b) (**4P**) Berechnen Sie daraus den Vierervektor $A^\mu_{\mathbf{II}}$, der das Feld der Ladung im Bezugssystem **II** beschreibt, ausgedrückt durch die Koordinaten des Inertialsystems **II**.

   c) (**5P**) Berechnen Sie das elektrische und magnetische Feld, das Beobachter **II** sieht, ausgedrückt durch die Koordinaten des Inertialsystems **II**.

   d) (**4P**) In welchem Inertialsystem **II** kann ein Beobachter der Punktladung ein magnetisches Feld wahrnehmen, das betragsmäßig größer als das von ihm gesehene elektrische Feld ist? Begründung.

2. SINE-GORDON-GLEICHUNG (**8P**): Wir betrachten die folgende, Lorentz-invariante Lagrangedichte eines reellen Skalarfeldes Φ in einer Raum- und einer Zeitdimension:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\Phi\right)^2 - c^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\Phi\right)^2\right] + \frac{a}{b}\left(\cos b\Phi - 1\right)$$

   Hinweis: Die Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

   a) (**4P**) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Feld Φ auf.

   b) (**4P**) Berechnen Sie die Energiedichte in Abhängigkeit von Φ und den Parametern a, b.

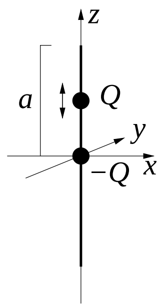
3. LICHTGESCHWINDIGKEIT IM MEDIUM (**8P**): Gegeben ein homogenes, isotropes Medium mit elektrischer Dielektrizitätskonstante ϵ und magnetischer Suszeptibilität μ. Es existieren weder freie Ladungsträger, noch freie Ladungsströme.

   a) (**4P**) Leiten Sie die Wellengleichung für das magnetische Feld $\vec{H}$ aus den Maxwellgleichungen im Medium her.

   b) (**4P**) Wie groß ist die Lichtgeschwindigkeit c_M im Medium? Eine Rechnung ist nicht notwendig, aber eine *Begründung* (Stichwort).

Fortsetzung nächste Seite

4. OSZILLIERENDE PUNKTLADUNG (**20P**): Eine Punktladung Q oszilliert harmonisch um eine im Koordinatenursprung ruhende Punktladung $-Q$. Q bewegt sich dabei mit der Frequenz ω auf einem entlang der z-Achse ausgerichteten Stab der Länge $2a$, dessen Schwerpunkt im Koordinatenursprung ruht, siehe Abbildung. Damit beschreibt Q eine Bahnkurve



$$\vec{R}(t) = a\,\vec{e}_z\,\cos\omega t \;\;,\;\; \omega = \text{const.}$$

Wir interessieren uns im Folgenden nur für die Strahlung in der Fernzone unter Berücksichtigung der Retardierungseffekte in führender, nicht-verschwindender Ordnung, d.h. $r \gg a, \lambda$ und $\lambda \gg a$. Die Geschwindigkeit der Punktladung ist stets klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit. Somit kann – wie in der Vorlesung und den Übungen besprochen – die Lösung der Strahlungsgleichung in der Lorentzeichung gut genähert werden durch

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{1}{cr} \int \mathrm{d}^3r'\; \vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{r}{c}) \;\; .$$

Hinweis: Die Teilaufgaben c), d) und e) können unabhängig voneinander mit dem unten angegebenen Teilergebnis gelöst werden.

a) (**4P**) Berechnen Sie *aus der oben gegebenen Näherungslösung der Strahlungsformel* das Vektorpotential in der Fernzone.

b) (**4P**) Berechnen Sie das *zeitabhängige* elektrische und magnetische Feld in der Fernzone in führender, nicht-verschwindender Ordnung, d.h. $r \gg a, \lambda$ und $\lambda \gg a$.

Teillösung zur Bearbeitung der weiteren Teilaufgaben:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = Qak^2\, \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\; \vec{e}_r \times \vec{e}_z$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = Qak^2\, \frac{\cos(kr - \omega t)}{r}\; (\vec{e}_r \times \vec{e}_z) \times \vec{e}_r$$

c) (**2P**) Wie groß ist die Wellenlänge der emittierten Strahlung, ausgedrückt durch a und ω? Begründung!

d) (**4P**) Berechnen Sie die zeitgemittelt in ein beliebiges Raumwinkelelement $\mathrm{d}\Omega$ ausgestrahlte Leistung.

e) (**4P**) Diskutieren Sie die Polarisation und Strahlungscharakteristik der Strahlung in Abhängigkeit von der Position des Beobachters. Skizze!

Hinweis: Für welche Winkel verschwindet die Strahlung, für welche ist sie maximal? Physikalische Interpretation! Besonders interessant sind die Azimutalwinkel $\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$. Diskutieren Sie auch die Abhängigkeit vom Polarwinkel ϕ. [θ, ϕ wie in Kugelkoordinaten.]

f) (**2P**) Berechnen Sie die zeitgemittelte Gesamtleistung.

Wir wünschen viel Spaß in der vorlesungsfreien Zeit, nicht nur bei der Nachbereitung der Vorlesung.