Diplomvorprüfung Theoretische Physik 3: Quantenmechanik

SS 2007, Technische Universität München

Dienstag, 11. September 2007, 10:00 - 11:30, HS MW 0001 und HS MW 2001

Die Klausur besteht aus **4 Aufgaben**. Die Aufgabenstellung hat **3 Seiten**.
Es gibt insgesamt **50 Punkte**.
Bitte geben Sie auf **allen zusätzlichen** Blättern **Ihren Namen** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

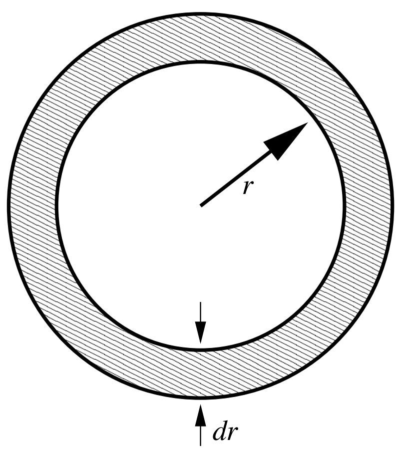
Die normierte Grundzustandswellenfunktion des Wasserstoffatoms hat die Form

$$\psi_{10}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}} \exp(-\beta r).$$

a) (4 P.) Stellen Sie die Schrödingergleichung mit dem Coulomb-Potential $V(r) = -e^2/r$ auf und zeigen Sie anhand dieser Gleichung, dass $\beta = \frac{1}{a_0}$ mit $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.

b) (1 P.) Zeigen Sie weiterhin, dass die Grundzustandsenergie $E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$ ist.

c) (1 P.) Es sei nun $w(r)\,dr$ die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in einer Kugelschale $[r, r + dr]$ im Abstand r vom Atomkern zu finden (siehe Abb.). Bestimmen Sie $w(r)$ mit der Grundzustandswellenfunktion.



d) (4 P.) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r^2 \rangle$ im Grundzustand des Atoms und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Lage des Maximums der Funktion $w(r)$.

Hinweise:
a) Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2\hbar^2}\hat{\vec{L}}^2.$$

b) $\int_0^\infty dx\, x^n \exp(-\alpha x) = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit Masse m und Schwingungsfrequenz ω mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2$$

erfahre eine kleine Störung durch den anharmonischen Term

$$\hat{H}_1 = \lambda \hat{x}^4.$$

a) (4 P.) Man führt die Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ ein:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{x} + \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right), \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\alpha \hat{x} - \frac{i}{\hbar \alpha} \hat{p} \right) \quad \text{mit} \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

Zeigen Sie, dass für die Vertauschungsrelation gilt $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Zeigen Sie weiter, dass sich der ungestörte Hamiltonoperator mit diesen Operatoren schreiben läßt als

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

b) (2 P.) Wie wirken die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ auf einen normierten Energieeigenzustand $|n^{(0)}\rangle$ des ungestörten Oszillators? Wie wirken Sie speziell auf den ungestörten Grundzustand?

c) (4 P.) Berechnen Sie die Verschiebung der Grundzustandsenergie durch die anharmonische Störung $\hat{H}_1$ in Störungstheorie erster Ordnung. **Hinweis**: Drücken Sie $\hat{x}$ durch die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ aus. Überlegen Sie sich unter Ausnutzung der Orthonormalität $\langle n^{(0)} | m^{(0)} \rangle = \delta_{mn}$ und der Wirkung von $\hat{a}$ auf den Grundzustand, welche Terme überhaupt nur zur Energieverschiebung des Grundzustandes beitragen können.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m mit der Energie E wird, von $x \to -\infty$ kommend, gestreut an einem eindimensionalen Potentialwall

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| > a \\ V_0 & |x| \le a \end{cases} \qquad (V_0 > 0).$$

a) (7 P.) Stellen Sie die Schrödingergleichung auf, geben Sie für den Fall $E > V_0$ den Lösungsansatz an und stellen Sie die Gleichungen für die Randbedingungen auf. Nehmen Sie Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Wellenfunktion bei $x = \pm a$ an und berücksichtigen Sie die physikalischen Randbedingungen. Lösen Sie die Schrödingergleichung für den speziellen Fall $E = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{5\pi}{a} \right)^2$ und $V_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{4\pi}{a} \right)^2$.

b) (3 P.) Bestimmen Sie für diesen Fall die Stromdichten für die einfallende Welle und für die transmittierte Welle jenseits des Potentialwalls.

c) (2 P.) Wie ist der Transmissionskoeffizient T definiert? Berechnen Sie T! Welcher spezielle Fall liegt hier vor?

Aufgabe 4 (18 Punkte)

Der Spinzustand eines Elektrons wird beschrieben durch zwei Basiszustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$, mit der z-Achse als Quantisierungsachse. Die Spinoperatoren sind gegeben durch $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$, $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$, und $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$. Die Paulimatrizen σ_x, σ_y und σ_z besitzen die Standarddarstellung

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) (3 P.) Welche der Operatoren $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$, $\hat{S}_z$ und $\hat{\vec{S}}^2$ vertauschen miteinander? Geben Sie die Vertauschungsrelation $[\hat{S}_x, \hat{S}_y]$ und $[\hat{S}_z, \hat{\vec{S}}^2]$ an. Geben Sie die explizite Darstellung von $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ an, die zur Standarddarstellung der Pauli-Matrizen korrespondiert. Berechnen Sie $\hat{\vec{S}}^2|\uparrow\rangle$, $\hat{\vec{S}}^2|\downarrow\rangle$, $\hat{S}_z|\uparrow\rangle$ und $\hat{S}_z|\downarrow\rangle$.

Ein ruhendes Elektron befinde sich im normierten Eigenzustand des Spinoperators $\hat{S}_y$ zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$.

b) (4 P.) Drücken Sie den Zustand, in welchem sich das Elektron befindet, durch die Eigenzustände des Operators $\hat{S}_z$ aus.

Das ruhende Elektron befinde sich nun zusätzlich in einem konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ ($B_0 > 0$), welches in z-Richtung zeigt. Der zugehörige Hamiltonoperator ist

$$\hat{H} = -\frac{2}{\hbar}\mu_B B_0 \hat{S}_z.$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandes wird beschrieben mit dem Ansatz

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle.$$

c) (6 P.)Stellen Sie die Schrödingergleichung auf und bestimmen Sie die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ als Funktionen der Zeit für den angegebenen Anfangszustand des ruhenden Elektrons. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach Ablauf der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?

d) (5 P.) Geben Sie die Zeiten an, zu denen sich das Elektron im Eigenzustand des Operators $\hat{S}_y$ mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ befindet!