Klausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2017/18
12. Februar 2018

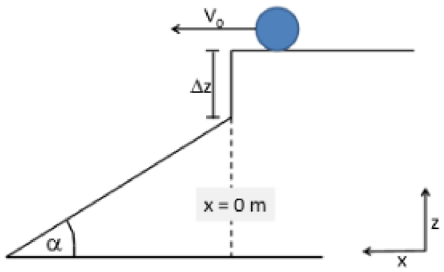
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine Kugel ($m = 7$ kg) rollt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf die Kante vor einem Abhang zu. Hinter der Kante fällt das Gelände zunächst senkrecht um $\Delta z = 5$ m nach unten, ehe eine Hangschräge mit $\alpha = 60°$ beginnt, die im Rahmen der Aufgabe nicht endet. Vernachlässigen Sie den Durchmesser der Kugel.



(a) Um wie viele m in x-Richtung gegenüber der Hangkante verschoben trifft die Kugel auf dem Hang auf? (Wählen Sie ein geeignetes Koordinatensystem.)

(b) Wie lange braucht die Kugel von der Hangkante bis zum Aufprall?

(c) Wie groß ist die gesamte kinetische Energie der Kugel beim Aufprall?

Lösung

(a) Die Bahnkurven für die Kugel lauten

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

$$x(t) = v_0 \cdot t. \tag{2}$$

[2]

Aus der Kurve in x-Richtung erhält man $t = \frac{x(t)}{v_0}$ und somit ergibt sich

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}.$$

Die Hangschräge in z-Richtung ist gegeben durch

$$z_H = -\Delta z - \tan\alpha \cdot x,$$

wobei $\tan\alpha = \frac{\Delta z}{\Delta x}$ ist.

[2]

Wenn $z(x) = z_H$ ist, dann trifft der Ball auf die Hangschräge:

$$\begin{aligned} z(x) = z_H \quad &\Rightarrow \quad \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 - \tan\alpha \cdot x - \Delta z = 0 \\ &\Rightarrow = x^2 - \frac{2v_0^2 \tan\alpha}{g} \cdot x - \frac{2v_0^2 \Delta z}{g} = 0 \\ &\Rightarrow x_{1/2} = \frac{v_0^2 \tan\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \tan\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2v_0^2 \Delta z}{g}} = 38 \text{ m} \end{aligned}$$

Physikalisch sinnvoll ist nur die positive Lösung.

[3]

(b) Aus (a):

$$t = \frac{x}{v_0} = 3,8 \text{ s}.$$

[1]

(c) Die kinetische Energie ergibt sich aus der Energieerhaltung. Zum Zeitpunkt des Auftreffens ist die potentielle Energie $mg|z|$ vollständig in kinetische Energie umgewandelt. $|z|$ erhält man duch Einsetzen der Zeit aus Aufgabenteil (b) in Gleichung (2):

$$z(t) = -\frac{1}{2} g (3,8 \text{ s})^2 = 70,8 \text{ m}$$

Damit ergibt sich

$$mg|z| = \frac{1}{2} m v^2 = 4864 \text{ J}.$$

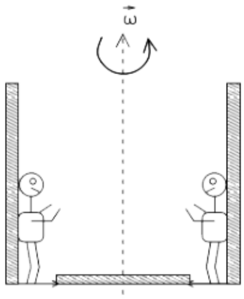
[3]

$$E_{Kin-Ges} = \frac{1}{2} m v_0^2 + mg\,|z| = 5213\text{J}$$

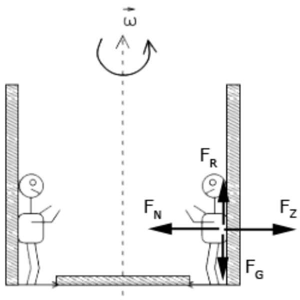
[1]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Mit welcher Frequenz f muss sich ein zylinderförmiger Rotor von $d = 4,5$ m Durchmesser mindestens drehen, damit Menschen an seiner Innenwand haften bleiben, wenn der Boden unter ihren Füßen weggezogen wird? Die Reibungszahl zwischen der Wand des Rotors und des Rücken eines Menschen betrage $\mu = 0,1$ (siehe Abbildung). Skizieren Sie alle wirkenden Kräfte in einem mitrotierenden Bezugssystem.



Lösung



[**2**]

Die Zentrifugalkraft drückt den Menschen gegen die Wand. F_Z wirkt als Normalkraft. Die Reibungskraft kompensiert die Gewichtskraft des Menschen.

$$\begin{aligned}
F_g &= mg, \quad F_R = F_N \cdot \mu_r = \mu_r \cdot F_Z = \mu_r m\omega^2 r \\
F_g &= F_R \\
mg &= \mu_r m\omega^2 r \\
mg &= \mu_r m(2\pi f)^2 \frac{d}{2} \\
\Rightarrow f^2 &= \frac{g}{\mu_r 2\pi^2 d},
\end{aligned}$$

[**3**]

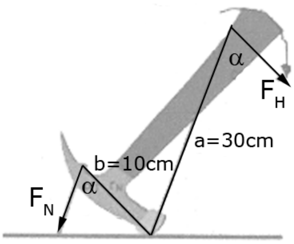
wobei $\omega = 2\pi f$ und $r = \frac{d}{2}$ verwendet wurde. Für die Frequenz gilt also:

$$f = \sqrt{\frac{g}{\mu_r 2\pi^2 d}} = 1,06 \text{ Hz}.$$

[**1**]

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ermitteln Sie die Kraft, mit der ein Tischlerhammer den Nagel aus dem Holz zieht, wenn die Kraft der Hand 50 N beträgt. Entnehmen Sie die fehlenden Größen aus der Zeichnung.



Lösung

Momentengleichgewicht:

$$M_L = M_R$$

mit

$$M_L = F_N \cdot r_N \cdot \sin\alpha \quad \text{und} \quad M_R = F_H \cdot r_H \cdot \sin\alpha.$$

[**2**]

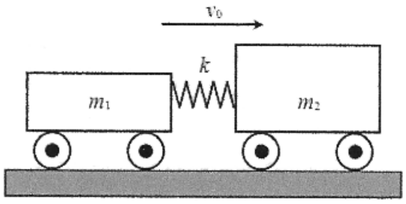
$$\Rightarrow F_N \cdot r_N = F_H \cdot r_H \Rightarrow F_N = F_H \cdot \frac{r_H}{r_N} = 150 \text{ N}.$$

Die erzielte Nagelkraft F_N ist also bedingt durch die Konstruktion des Hammers.

[**2**]

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zwei aneinander gekoppelte Fahrzeuge mit den Massen m_1 und m_2 bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit v_0 auf gerader Bahn. Zwischen beiden Fahrzeugen befindet sich eine (nicht befestigte) um die Länge x zusammengedrückte Feder der Federkonstanten k. Nach Lösen der Kopplung entspannt sich die Feder.
Dabei gilt $v_0 = 1,00 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $k = 40 \ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$.



(a) Welche Geschwindigkeiten v_1 und v_2 besitzen die beiden Fahrzeuge danach im **Laborsystem**?

(b) Es sei jetzt $m_1 = m_2 = 500$ kg sowie $v_1 = 0$. Wie groß ist dann v_2, und um welche Länge x war die Feder gespannt?

Lösung

(a) Im Laborsystem Σ (Inertialsystem, welches mit der Erde fest verbunden ist) haben die aneinandergekoppelten Waggons die gemeinsame Geschwindigkeit v_0. Um die Rechnung zu vereinfachen, begeben wir uns in das Schwerpunktsystem Σ', welches mit dem Schwerpunkt der beiden Waggons fest verbunden ist. Im Schwerpunktsystem haben die Waggons die Geschwindigkeit Null, d.h. der Gesamtimpuls ist in Σ' ebenfalls Null. Die kinetische Energie ist in Σ' ebenfalls Null, die Gesamtenergie entspricht also der in der gestauchten Feder gespeicherten Energie $\frac{1}{2}kx^2$. Nach der Entkopplung haben die beiden Waggons in Σ die Geschwindigkeiten v_1 und v_2, während sie in Σ' die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' besitzen. Der Gesamtimpuls im Schwerpunktsystem beträgt nach der Entkopplung $m_1v_1' + m_2v_2'$ und dieser muss dann Null sein, genau wie vor dem Stoß:

$$m_1v_1' + m_2v_2' = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2' = -\frac{m_1}{m_2}v_1' \tag{3}$$

Die Gesamtenergie bleibt während des Abkoppelns konstant, wird aber von Federenergie in kinetische Energie umgewandelt:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{4}$$

$$\Leftrightarrow kx^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \tag{5}$$

$$\text{mit (3)}: kx^2 = m_1v_1'^2 + m_2\left(-\frac{m_1}{m_2}v_1'\right)^2 \tag{6}$$

$$\Leftrightarrow v_1' = \pm|x|\sqrt{\frac{k}{m_1}\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}} \tag{7}$$

$$\text{Da } v_1' < 0 : v_1' = -|x|\sqrt{\frac{k}{m_1}\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}} \tag{8}$$

$$\text{mit (3)}: v_2' = +|x|\sqrt{\frac{k}{m_2}\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}} \tag{9}$$

[**4**]

Nun transformieren wir noch zurück ins Laborsystem:

$$v_1 = v_1' + v_0 = v_0 - |x|\sqrt{\frac{k}{m_1}\frac{1}{1+\frac{m_1}{m_2}}} \tag{10}$$

$$v_2 = v_2' + v_0 = v_0 + |x|\sqrt{\frac{k}{m_2}\frac{1}{1+\frac{m_2}{m_1}}} \tag{11}$$

[**2**]

(b) Die Massen sind gleich groß ($m_1 = m_2 = m$) und der erste Waggon ruht nach dem Abkoppeln im Laborsystem ($v_1 = 0$). Dies setzen wir in (10) und (11) ein:

$$0 = v_0 - |x|\sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{12}$$

$$v_2 = v_0 + |x|\sqrt{\frac{k}{2m}} \tag{13}$$

Die Geschwindigkeit v_2 des zweiten Waggons nach dem Stoß im Laborsystem erhält man durch Addition der beiden Gleichungen (12) und (13):

$$(12) + (13) \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2v_0 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[**2**]

Schließlich berechnet man x aus Gleichung (12) zu

$$|x| = v_0\sqrt{\frac{2m}{k}} = 15,6\ \mathrm{cm}$$

[**2**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein Hohlzylinder und ein Vollzylinder mit jeweils gleicher Masse m und gleichem Radius $R = 0,1$ m rollen mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit $\omega_0 = 15\ \frac{1}{\mathrm{s}}$ auf einer horizontalen Ebene und danach eine schiefe Ebene hinauf. Die Wandstärke des Hohlzylinders sei vernachlässigbar gegenüber des Radius.

(a) Berechnen Sie die Formel für das Trägheitsmoment des Hohlzylinders (mR^2) und des Vollzylinders ($\frac{1}{2}mR^2$).

(b) Bei welchen Höhen kehren die Zylinder jeweils um (auch Zahlenwerte berechnen)? Reibungsverluste werden vernachlässigt.

Lösung

(a) Hohlzylinder:

$$d\Theta = R^2 dm \quad \Rightarrow \quad \Theta = \int R^2 dm = mR^2$$

[**1**]

Jedes Massenelement hat das gleiche Trägheitsmoment.

Vollzylinder:

$$d\Theta = r^2 dm = \sigma r^2 dA = \frac{m}{\pi R^2} r^2 r d\Phi dr$$
$$\Theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{m}{\pi} r^3 d\Phi dr = \frac{m}{\pi R^2} \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^R = \frac{mR^2}{2}$$

[**2**]

(b) Energieansatz: $E_{kin} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega_0^2 = mgh$ mit $\Theta = kmR^2$, wobei $k = 1$ für den Hohlzylinder und $k = \frac{1}{2}$ für den Vollzylinder.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\omega_0^2 R^2 + \frac{1}{2}km\omega_0^2 R^2 = mgh$$
$$\Rightarrow h = \frac{1}{2g}\omega_0^2 R^2 (1+k)$$

Für die Höhen gilt also:

$$\text{Hohlzylinder}: \quad h_H = \frac{R^2\omega_0^2}{g} = 22,5 \text{ cm}$$
$$\text{Vollzylinder}: \quad h_V = \frac{3R^2\omega_0^2}{4g} = 16,9 \text{ cm}$$

[**4**]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Ein Wasserläufer frisst zu viel. Bei welcher Masse (in g) zerreißt aufgrund seines Übergewichts die Wasseroberfläche, sodass er untergeht? Die Oberflächenspannung von Wasser beträgt $0,073 \ \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Zur Vereinfachung soll angenommen werden, dass die vier Füße des Wasserläufers flache, kreisförmige Scheiben mit einem Durchmesser von $d = 4$ mm sind. Achten Sie auf die Einheiten.

Lösung

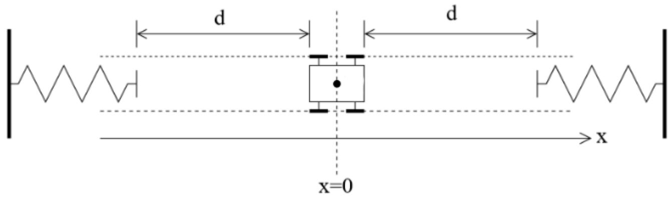
Der Wasserläufer geht unter, falls seine Gewichtskraft F_g größer ist als die Kraft der Oberflächenspannung $F_o = \sigma \cdot b$ (σ: Oberflächenspannung, b: Gesamtlänge des Randes) der Wasseroberfläche:

$$F_g = F_o$$
$$mg = \sigma \cdot b = \sigma \cdot 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2}$$
$$\Rightarrow m = \frac{1}{g}\sigma \cdot 4 \cdot 2\pi \cdot \frac{d}{2} = 0,4 \text{ g}$$

[**4**]

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Wagen bewege sich reibungsfrei auf Gleisen zwischen zwei Pufferfedern hin und her. Beide Federn haben die Federkonstante $D = 72\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ s durchlaufe der Schwerpunkt des Wagens die Position $x = 0$ m nach rechts mit der Geschwindigkeit $v_0 = 0,36\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und treffe nach der Strecke $d = 18$ cm auf die rechte Feder. Die Masse m des Wagens betrage 2 kg.



(a) Wie lange berührt der Wagen die rechte Feder?

(b) Um welche Strecke Δs wird die Feder zusammengedrückt?

(c) An welchen Stellen x hat die Beschleunigung den größten Betrag? Geben Sie den Betrag der maximalen Beschleunigung an.

Lösung

(a) Der Wagen berührt die rechte Feder eine halbe Schwingungsperiode lang, d.h. $\Delta t = \frac{T}{2}$.

Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} + Dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$
$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$
$$\Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{6} = 0,52 \text{ s}$$

[**3**]

(b) • Lösungsweg 1: Über die Energie
Berechnung der maximalen Amplitude im Umkehrpunkt, wenn $E_{kin} = 0$.
Zum Zeitpunkt des Auftreffens auf die Feder gilt

$$E_{Feder} = E_{kin}$$
$$\frac{1}{2}D\Delta s^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\Rightarrow D\Delta s^2 = mv_0^2$$
$$\Rightarrow \Delta s = v_0\sqrt{\frac{m}{D}} = 6 \text{ cm}$$

[**3**]

- Lösungsweg 2: Über die Lösung der Bewegungsgleichung:
  Für die Teilbewegung an der rechten Feder gilt:

$$x(t) = d + \Delta s \cdot \sin(\omega t + \Phi)$$
$$\dot{x}(t) = \omega \Delta s \cdot \cos(\omega t + \Phi)$$

  Für $t = \frac{t_d}{v_0} = \omega \cdot \Delta s$

$$\Delta s = \frac{v_0 T}{2\pi} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

(c) $\ddot{x} \neq 0$ gilt nur während der Schwingung an den Federn. Die größte Beschleunigung (betragsmäßig) findet an den beiden Umkehrpunkten statt:

$$\begin{aligned} x(t) &= d + \Delta s \cdot \sin(\omega t + \Phi) \\ \Rightarrow x_1 &= d + \Delta s, x_2 = -d - \Delta s \\ \ddot{x}(t) &= -\Delta s \omega^2 \sin(\omega t + \Phi) \\ \Rightarrow |\ddot{x}|_{max} &= \Delta s \omega^2 = v_0 \sqrt{\frac{m}{D}} \frac{D}{m} = v_0 \sqrt{\frac{D}{m}} = 2,16 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

[4]

Alternativer Ansatz:

$|\ddot{x}|_{max} = a_{max} = \frac{F_{max}}{m} = \frac{D \Delta s}{m}$ ...

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Ein Containerschiff werde durch einen Quader der Länge $L = 300$ m, der Breite $B = 40$ m und der Höhe $H = 35$ adäquat beschrieben. Das Schiff besitzt ohne Container eine Masse von $m = 20000$ t und kann mit Containern der Masse $M = 100000$ t beladen werden. Wie tief (Δz) sinkt der Schiffsrumpf im leeren und im beladenen Zustand jeweils im Wasser (Dichte $\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) ein?

Lösung

Ohne Container:

$$\begin{aligned} m \cdot g &= \rho \cdot g \cdot \Delta V = \rho \cdot g \cdot B \cdot L \cdot \Delta z_1 \\ \Rightarrow \Delta z_1 &= \frac{m}{\rho \cdot B \cdot L} = 1,7 \text{ m} \end{aligned}$$

[3]

Mit voller Beladung:

$$\begin{aligned} (m + M) \cdot g &= \rho \cdot g \cdot \Delta V = \rho \cdot g \cdot B \cdot L \cdot \Delta z_2 \\ \Rightarrow \Delta z_2 &= \frac{m + M}{\rho \cdot B \cdot L} = 10 \text{ m} \end{aligned}$$

[2]

Mathematische Ergänzungen (8 Punkte)

(a) Berechnen Sie durch explizite Integration das Trägheitsmoment eines homogenen Kreiszylinders der Höhe h mit Radius R bei der Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt parallel zur Grundfläche.

(b) Das Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse des Zylinders ist $I_{33} = \frac{1}{2}MR^2$. Welche Maße hat ein Zylinder, dessen Trägheitstensor dem einer Kugel entspricht?

Lösung

(a) Zur Berechnung des Trägheitsmoments wählen wir Zylinderkoordinaten mit der Symmetrieachse des Zylinders als z-Achse und der Rotationsachse als x-Achse. Die Grundfläche liege bei $-\frac{h}{2}$. Der Abstand eines Punktes von der Rotationsachse ist daher $r_\perp = \sqrt{z^2 + y^2}$. Mit der Höhe h des Zylinders und Radius R der Grundfläche gilt

[2]

$$\begin{aligned}
I_{11} = I_{22} &= \iiint \varrho {r_\perp}^2 \, \mathrm{d}x^3 \\
&= \varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}(z^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \varphi) \\
&= \varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathrm{d}z \left(\frac{1}{2} R^2 z^2 + \frac{1}{4} R^4 \sin^2 \varphi \right) \\
&= \varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{1}{3} R^2 \frac{1}{8} h^3 + \frac{1}{4} R^4 h \sin^2 \varphi \right) \\
&= \varrho \left(2\pi \frac{1}{3} R^2 \frac{1}{8} h^3 + \frac{1}{4} R^4 h \pi \right) \\
&= \varrho \pi R^2 h \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} h^2 + R^2 \right) \qquad = \frac{1}{4} M \left(\frac{1}{3} h^2 + R^2 \right)
\end{aligned}$$

[4]

(b) Für den Trägheitstensor einer Kugel gilt $I_{11} = I_{22} = I_{33}$. Dies gilt für den Zylinder, wenn

$$\frac{1}{4} M \left(\frac{1}{3} h^2 + R^2 \right) = \frac{1}{2} M R^2$$

Also wenn

$$\frac{1}{3} h^2 + R^2 = 2R^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{3} R$$

[2]