1. Aufgabe

1. $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 6y \\ -6y^2 + 6x \end{pmatrix}$ (2)

2. $\operatorname{grad} f(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \left.\begin{cases} x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \\ x-y^2=0 \end{cases}\right\} \Rightarrow -y-y^2=0$

$\Rightarrow y(y+1)=0 \Rightarrow y=0$ oder $y=-1$ und $x=-y$ (3)

$\Rightarrow$ stationäre Punkte sind höchstens:

$(0,0)$ und $(1,-1)$

Wegen $\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\operatorname{grad} f(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & +6 \end{pmatrix} = 0$ sind dies (1)

genau die stationären Punkte.

3. $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$ (1)

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, $\det H_f(0,0) = -36 < 0$ (1)

$\Rightarrow (0,0)$ ist Sattelpunkt (1)

$H_f(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ (1)

$\left.\begin{array}{r} \det H_f(1,-1) = 36 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 36 > 0 \\ a_{11} = 6 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (1)

$(1,-1)$ ist lokale Minimalstelle, (1)

da $H_f(1,-1)$ pos. definit.

2. Aufgabe

Kurve $\varphi : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$, ①

$\varphi'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\cos t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, \pi]$ ①

$\|\varphi'(t)\|_1 = 1 + 3|\cos t|$

$\text{Länge}(\varphi) = \int_0^\pi \|\varphi'(t)\|_1 \, dt = \int_0^\pi (1 + 3|\cos t|) \, dt$ ②

$= \int_0^\pi 1 \cdot dt + 3\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt - 3\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \, dt$ ②

$= \pi + 3 \sin t \Big|_0^{\pi/2} - 3 \sin t \Big|_{\pi/2}^{\pi}$ ①

$= \pi + 3 \cdot (1 - 0) - 3 \cdot (0 - 1) = \pi + 6$ ①

3. Aufgabe

1. $$\partial_y f(t,y) = \frac{1-ty-y(-t)}{(1-ty)^2} = \frac{1}{(1-ty)^2}$$ (1)

2. $f: D \to \mathbb{R}$ bez. y lokal Lipschitz-stetig, da (1)

$(t,y) \longmapsto \partial_y f(t,y) = \frac{1}{(1-ty)^2}$ stetig auf D

3. Für $(t,y) \in]-\infty, 0] \times [0,\infty[$ gilt $ty \le 0$

$\Rightarrow -ty \geq 0 \Rightarrow 1-ty \geq 1 \Rightarrow (1-ty)^2 \geq 1$

$\underset{2.}{\Rightarrow}$ $0 < \partial_y f(t,y) \le 1$ (1)

Für $y_1, y_2 \in [0,\infty[$ und $t \in]-\infty, 0[$ gilt

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |\partial_y f(t,\tilde{y})(y_1 - y_2)|$
mit $\tilde{y}$ zwischen y_1 und y_2, also $\tilde{y} \in [0,\infty[$
nach dem MWS für $y \mapsto f(t,y)$, $y \in [0,\infty[$
$\Rightarrow |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le |y_1 - y_2|$,
da $0 < \partial_y f(t,y) \le 1$. (2)

$\Rightarrow f$ bezüglich y in $]-\infty,0] \times [0,\infty[$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

4. $y = \mathbb{R}$ und $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$
löst die die gegebene A.W.A., denn $\psi'(t) = 0$
und $f(t,\psi(t)) = \frac{\psi(t)}{1-t\psi(t)} = \frac{0}{1} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (2)

5. Existenz des maximalen Lösungsintervalls I und der Lösung $\varphi: I \to \mathbb{R}$ der gegebenen A.W.A. folgen aus der Stetigkeit von $f: D \to \mathbb{R}$ und der lokalen Lipschitz-Stetigkeit bez.

DVP Math. 3 für Physik (Am. 2) - 4 - 5.9.03 (12)

y von $f: D \to \mathbb{R}$) (1)

(a) Annahme $\varphi(\tilde{t}) \leq 0$ für ein $\tilde{t} \in I$

$\underset{\text{Z.W.S.}}{\Rightarrow}$ $\exists\, t_0 \in I$ mit $\varphi(t_0) = 0$

$\Rightarrow$ ψ und φ lösen A.W.A. (*) und $y(t_0) = 0$

$\Rightarrow$ $\varphi = \psi|I$ $\Rightarrow$ $a = \varphi(0) = \psi(0) = 0 \Rightarrow$ ↯ zu $a > 0$ (3)

↑ f stetig, lok. Lipschitz-st. bez. y.

(b) $\varphi(t) > 0 \Rightarrow \varphi'(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\underbrace{1 - t\varphi(t)}_{>0,\ \text{Vor.}}} > 0 \quad \forall t \in I$ (2)

$\Rightarrow$ $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend

(c) Für $t \in I \cap]-\infty, 0]$ gilt wg. mon. steig.: (1)

und (a): $0 < \varphi(t) \leq \varphi(0) = a$

(d) (α) $I \cap]-\infty, 0] =]-\infty, 0]$

Annahme: $I \cap]-\infty, 0] =]b, 0]$ mit $b < 0$

$\Rightarrow \{(t, \varphi(t)) : t \leq 0,\ t \in I\} \subset \underbrace{[b, 0] \times [0, a]}_{\subset D}$

kompakt (3)

$\Rightarrow$ ↯ zum Satz über Granken der Lösungsfunktion, da f st. und lokal Lipschitz-st. bez. y

(β) Für $t \in I \cap [0, \infty[$ (also auch $(t, \varphi(t)) \in D$)

gilt: $1 - \underbrace{t\varphi(t)}_{\geq 0} > 0$, also $0 \leq t\varphi(t) < 1$

$\Rightarrow$ $0 \leq t \leq \dfrac{1}{\varphi(t)} \leq \dfrac{1}{a}$, da $\varphi(t) \geq a$ für $t \geq 0$, $t \in I$ wg. Monotonie (3)

$\Rightarrow$ $I \cap [0, \infty[= [0, c[$ mit $c > 0$

$0 \le t\varphi(t) < 1$ für $t \in [0, c[$

$\Rightarrow \varphi(t) < \frac{1}{t} \le \frac{2}{c}$ für $t \in [\frac{c}{2}, c[$

$\Rightarrow \sup_{t \in I} \varphi(t) =: M < \infty$

$\underset{\text{Monotonie}}{\Rightarrow} \lim_{t \to c,\, t<c} t\varphi(t) = \sup t\varphi(t) = c \cdot M \underset{0<t\varphi(t)<1}{\le} 1$ (4

Annahme: $cM < 1$

$\Rightarrow \{(t, \varphi(t)) : t \ge 0,\ t \in I\} \subset \underbrace{[0, c] \times [0, M]}_{\text{komp.} \quad \subset D, \text{ da } cM<1}$

$\Rightarrow$ ↯ zum Satz über den Graphen der Lösungsfunktion (f st. und lok. Lipschitz-st. bzgl. y).

Also $\lim_{t \to c,\, t<c} t\varphi(t) = c \cdot M = 1$ und $I =]-\infty, c[$, $c > 0$.