....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur Mathematik 4 für Physiker (Analysis 3)

Prof. Dr. D. Castrigiano

21. April 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Teilaufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = i + \sin t - i \cos t.$$

(a) Skizzieren Sie qualitativ den Weg γ mit Umlaufrichtung.

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma i\mathrm{Re}(z)dz$,

(c) Bestimmen Sie (mit Begründung) $\int_\gamma e^{\cos z} dz$,

LÖSUNG:

(a) Ein Kreis mit Mittelpunkt i, Radius 1, gegen Uhrzeigersinn durchlaufen. **[2]**

(b) $\dot{\gamma}(t) = \cos t + i \sin t$, $i\mathrm{Re}(z) = i \sin t$. Nach Definition des komplexen Wegintegrals ist

$$\int_\gamma i\mathrm{Re}(z)dz = \int_0^{2\pi} i\mathrm{Re}(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_0^{2\pi} i \sin t(\cos t + i \sin t)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi.$$

[4]

(c) Die Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_\gamma e^{\cos z} dz = 0$. **[2]**

2. **Residuen** **[10 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{1}{z^n(1-z)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie alle Pole von f in $\mathbb{C}$ an.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Pole von f.

(c) Berechnen Sie das Residuum von f bei $z = 0$. HINWEIS: $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$ für $|z| < 1$

(d) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

LÖSUNG:

(a) $z = 0$ und $z = 1$. **[2]**

(b) Bei $z = 0$ ist die Ordnung n, bei $z = 1$ ist die Ordnung 2. **[2]**

(c) Die Laurentreihe von $f(z)$ um 0 lautet

$$f(z) = z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^{k-n}.$$

Für $k = n-1$ erhält man den Koeffizienten von z^{-1}, das Residuum, also $\operatorname{Res}_0(f) = n$. **[4]**

(d) De nächstliegende Pol von f ist bei 1. Somit ist der Konvergenzradius des Nebenteils von f bei 0 gleich 1. **[2]**

3. **Residuenkalkül** **[10 Punkte]**

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$.

LÖSUNG:

Der Integrand, $\frac{1}{z^4+4}$ geht für große $|z|$ schnell genug gegen 0. **[1]**

Die Nullstellen von $z^4 + 4 = (z^2 + 2i)(z^2 - 2i) = (z + 1 + i)(z - 1 - i)(z + 1 - i)(z - 1 + i)$ liegen bei $z_k = \pm 1 \pm i,\ k = 1, 2, 3, 4$ **[3]**

mit den Residuen $\frac{z_k}{4\cdot(-4)}$. **[3]**

Als Integrationsweg wählen wir den Rand des oberen Halbkreises, dessen Radius gegen ∞ strebt. **[1]**

Nach Kap. 24 (25) gilt dann **[2]**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx = 2\pi i \operatorname{Res}_{1+i}\left(\tfrac{1}{z^4+4}\right) + 2\pi i \operatorname{Res}_{-1+i}\left(\tfrac{1}{z^4+4}\right) = 2\pi i \left(\tfrac{1+i}{-16} + \tfrac{-1+i}{-16}\right) = 2\pi i \frac{2i}{-16} = \frac{\pi}{4}.$$

4. **Approximation kompakter durch offene Mengen** **[8 Punkte]**
Sei A eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. $K_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < \epsilon\}$ ist die Kugel mit Radius ϵ um $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) $O_n := \bigcup_{x \in A} K_{\frac{1}{n}}(x)$ ist offen für $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n.$$

(b) Ist λ^d das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$, so gilt

$$\lambda^d(A) = \inf\{\lambda^d(O) : A \subset O \text{ und } O \text{ ist offen}\}.$$

LÖSUNG:

(a) O_n ist als Vereinigung offener Mengen offen. Da $A \subset O_n$, gilt auch $A \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$.
Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$, also $x \in O_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Annahme: $x \notin A$. Da A abgeschlossen ist, gibt es dann ein $\epsilon > 0$ mit $K_\epsilon(x) \subset \mathbb{R}^d \setminus A$. Für $n > \frac{1}{\epsilon}$ gilt dann $x \notin O_n$. Widerspruch.
Somit gilt auch $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subset A$.

(b) Aus $A \subset O$ folgt $\lambda^d(A) \leq \lambda^d(O)$, somit gilt

$$\lambda^d(A) \leq \inf\{\lambda^d(O) : A \subset O \text{ und } O \text{ ist offen}\}.$$

Umgekehrt gilt $\lambda^d(O_n) \to \lambda^d(A)$ für $n \to \infty$, da $O_n \nearrow A$, $\lambda^d(O_1) \leq \infty$ (A und damit auch O_1 ist beschränkt), siehe z.B. Aufgabe 45. Nun gilt $\{O_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda^d(O) : A \subset O \text{ und } O \text{ ist offen}\}$, also auch

$$\lambda^d(A) = \inf\{O_n : n \in \mathbb{N}\} \geq \{\lambda^d(O) : A \subset O \text{ und } O \text{ ist offen}\}$$

[0,2,2,2,0]

5. **Bildmaß und Maß mit Dichte** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$, $(x, y) \mapsto |x| + |y|$. $\mu = h(\lambda^2)$ sei das zugehörige Bildmass.

(a) Warum ist h messbar?

(b) Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leq b$.

(c) Bestimmen Sie eine Dichte ρ, so dass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leq b$.

LÖSUNG:

(a) h ist als stetige Funktion messbar. **[2]**

(b) Für kompakte Intervalle $[a, b]$, $a \leq b$ gilt

$$\mu([0, b]) = \lambda^2(h^{-1}([0, b])) = \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq b\}) = 2b^2,$$

also $\mu([a, b]) = \mu([0, b]) \setminus [0, a] \cup \{a\}) = \mu([0, b]) - \mu([0, a]) + \mu(\{a\}) = 2b^2 - 2a^2 + 0.$ **[3]**

(c) Für die Dichte $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss gelten

$$2(b^2 - a^2) = \mu([a, b]) = (\rho\lambda^1)([a, b]) = \int\limits_{[a,b]} \rho \, \mathrm{d}\lambda^1 = \int\limits_a^b \rho(x)dx$$

für alle $a \leq b$. Ableiten nach b ergibt $4b = \rho(b)$. Die Dichte $\rho(x) = 4x$ erfüllt also die Gleichung $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. **[3]**

6. **Lebesgue-Integrierbarkeit** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{|x|+|x|^3}}$. Begründen Sie, warum f auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

LÖSUNG:

$$|f(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x|}}, & \text{für } |x| \leq 1, \\ \frac{1}{|x|^{3/2}}, & \text{für } |x| \geq 1. \end{cases}$$

[4]

Somit ist

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \leq 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx + 2\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}}dx = 2[\tfrac{1}{2}x^{1/2}]_0^1 + 2[-\tfrac{1}{2}x^{-1/2}]_1^\infty = 1 + 1 < \infty,$$

f also Lebesgue-integrierbar. **[4]**

7. **Substitutionsformel** **[20 Punkte]**

Auf dem offenen Einheitswürfel $B =]0,1[^3$ ist die bijektive Abbildung

$$\Phi : B \to C, \quad \Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} uvw \\ vw \\ w \end{pmatrix}$$

gegeben, mit dem Simplex $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist und geben Sie die zugehörige Umkehrfunktion an.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsformel das Volumen von C.

(c) Geben Sie die Schwerpunktkoordinaten $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ von C an.

$x_s = \frac{1}{4}$	$y_s = \frac{1}{2}$	$z_s = \frac{3}{4}$

LÖSUNG:

(a) $\det(D\Phi(u,v,w)) = \det \begin{pmatrix} vw & uw & uv \\ 0 & w & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = vw^2 > 0$, also ein lokaler Diffeomorphismus. **[4]**

Die Umkehrfunktion ist $\Phi^{-1}(x,y,z) = (\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, z)$. **[3]**

(b) $V = \lambda^3(C) = \int\limits_C 1 \,\mathrm{d}\lambda^3 = \int_D 1 \circ \Phi |\det(D\Phi)| d^3\lambda = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^1 dw\, vw^2 = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. **[4]**

(c) $Vs_x = \int\limits_C x \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^1 dw\, uvw\, vw^2 = \int\limits_0^1 udu \int\limits_0^1 v^2 dv \int\limits_0^1 w^3 dw = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$. **[3]**

$Vs_y = \int\limits_C y \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^1 dw\, vw\, vw^2 = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 v^2 dv \int\limits_0^1 w^3 dw = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. **[3]**

$Vs_z = \int\limits_C y \,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 dv \int\limits_0^1 dw\, w\, vw^2 = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 vdv \int\limits_0^1 w^3 dw = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. **[3]**

8. **Hilbertraum** **[8 Punkte]**

$V := C[0,1]$ ist mit $\langle f,g\rangle := \int\limits_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx$ für $f,g \in C$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = x^n$.

(a) Gilt $\operatorname{Span}(\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}) = V$?

☐ Ja ☒ Nein

(b) Ist V bezüglich der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f,f\rangle}$ vollständig?

☐ Ja ☒ Nein

(c) Bestimmen Sie eine ONB von $\operatorname{Span}(\{f_0, f_1\})$, die f_0 enthält.

LÖSUNG:

(a) Nein, da e^x stetig auf $[0,1]$ ist, aber nicht als endliche Linearkombination der f_n, d.h. als Polynom geschrieben werden kann. **[2]**

(b) Nein, da erst $L^2([0,1])$ vollständig ist. Z.B. ist $g_n(x) = \max\{0, \min\{n - 2nx, 1\}\}$ Cauchy-Folge, konvergiert aber punktweise gegen die Funktion $1_{[0,\frac{1}{2}]}$, welche nicht stetig ist. **[2]**

(c) $g_0 = f_0$ ist schon auf 1 normiert. $g_1 := f_1 - \langle g_0, f_1\rangle g_0$ steht senkrecht auf g_0, wegen $\langle f_0, f_1\rangle = \int\limits_0^1 x dx = \frac{1}{2}$, also $g_1(x) = x - \frac{1}{2}$.

$\langle g_1, g_1\rangle = \int\limits_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{4})dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Somit ist $(1, \sqrt{12}(x - \frac{1}{2}))$ eine ONB.

[4]