Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

06.03.2003

Vordiplom Mathematik 3 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 — 10 Punkte

a) Es seien f und g zweimal stetig differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ werde gegeben durch

$$(x,t) \mapsto u(x,t) := f(x-t) + g(x+t)$$

Zeige, dass die Funktion u die sogenannte Wellengleichung erfüllt:

$$\forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ (\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2})(x,t) - (\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2})(x,t) = 0$$

b) Beweise mit Hilfe der Taylor-Entwicklung die nachstehende binomische Formel:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \ (x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

c) Es sei $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ der Raum der nach allen Variablen beliebig oft differenzierbaren Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ und $C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ der Raum der nach allen Variablen beliebig oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Zeige, dass es eine von der Nullabbildung verschiedene lineare Abbildung $G : C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gibt, so dass für alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ die Beziehung $\operatorname{rot}(G(\varphi)) = 0$ gilt.

Aufgabe 2 — 10 Punkte

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ werde gegeben durch die Vorschrift $x \mapsto f(x) := Ax$. Berechne alle partiellen Ableitungen von f.

b) Was versteht man unter einem Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V?

c) Untersuche, ob man für hinreichend nahe bei 0 liegende reelle Zahlen x, y die folgende Gleichung in der Form $y = y(x)$ auflösen kann:

$$e^{y \sin x} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

Aufgabe 3 **10 Punkte**

a) Bestimme die Menge aller globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (x + y, x + 5y - 2z, 10z - 2y)\ (x, y, z)^T$$

b) Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch die drei Punkte $(2, 2, 2), (-1, 5, 2), (0, 0, 6)$ geht. Ermittle mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenmethode denjenigen Punkt $(x^*, y^*, z^*) \in E$ mit kleinster Entfernung zum Ursprung.

Hinweis: Bilde zuerst die Summe aller drei Koordinaten für jeden der drei gegebenen Punkte.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

a) Berechne die Ableitung der Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto F(x, y) := \int_0^{e^{x^2+y^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt + 5 \int_0^{e^{-\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}y^2}} \frac{t^4}{1+t^{10}}\, dt$$

Hinweis: Im zweiten Integral lohnt sich die Substitution $t^5 = z$.

b) Berechne $\int\limits_0^{10} \frac{1+3x+3x^2}{1+2x+2x^2+x^3}\, dx$

Hinweis: Der Nenner des Integranden hat nur eine reelle Nullstelle, und zwar bei $x = -1$. Man wende mit dieser Information zuerst Partialbruchzerlegung an.

c) Berechne für jeden Punkt des offenen Intervalls $(1, 2)$ die Ableitung von

$$F : [1, 2] \to \mathbb{R},\quad x \mapsto F(x) := \int\limits_x^{2x} \frac{e^{xt}}{t}\, dt$$

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und
Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!