# Nachklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Oberauer
Sommersemester 2011
13. Oktober 2011
**Musterlösung**

## Aufgabe 1 (6 Punkte)

**Hinweis:** Der Abstand zwischen Sonne und Erde beträgt ca. $1.5 \times 10^8$km und die Sonnenmasse $2 \times 10^{30}$kg.

*a*) Zwei identische Schwarzkörperstrahler haben Temperaturen von 300K und 750K. Wie groß ist das Verhältnis der Leistungen, welche den Schwarzkörperstrahlern jeweils zugeführt werden muss, um die Temperatur konstant zu halten?

### Lösung:

Bleibt bei einem Körper die Temperatur konstant, so gilt, dass die zugeführte Leistung gleich der abgestrahlten Leistung ist.

[**1**]

Für einen Schwarzkörperstrahler gilt für die pro Fläche abgestrahlte Leistung das Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P = \sigma T^4 \tag{1}$$

[**1**]

Damit ergibt sich für das Verhältnis der von den beiden Körpern abgestrahlten Leistungen:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sigma T_1^4}{\sigma T_2^4} = \left(\frac{300}{750}\right)^4 = 0.026 \tag{2}$$

[**1**]

*b*) Die Strahlungsleistung pro Fläche aufgrund der Sonnenstrahlung beträgt direkt außerhalb der Erdatmosphäre ca. $1.37\mathrm{kJm^{-2}s^{-1}}$. Wie lange würde es dauern, bis bei konstanter Abstrahlung die gesamte Masse der Sonne in Strahlung umgesetzt wird?

### Lösung:

Die gesamte Strahlungsleistung, die von der Sonne abgestrahlt wird, beträgt:

$$P_{tot} = 4\pi d^2 \alpha \tag{3}$$

[**1**]

Dabei ist $d = 1.5 \times 10^{11}$m der Abstand Sonne-Erde und $\alpha = 1.37 \times 10^3$Jm$^{/2}$s$^{/1}$ die so genannte Solarkonstante. Die Ruheenergie der Sonne beträgt

$$E = mc^2 \tag{4}$$

[**1**]

Bei konstanter Strahlungsleistung gilt für die Zeit $\Delta t$, die es dauert bis die gesamte Ruheenergie in Strahlung umgesetzt wird:

$$P_{tot} = \frac{E_0}{\Delta t} \tag{5}$$

Daraus folgt:

$$\Delta t = \frac{mc^2}{4\pi d^2 \alpha} \tag{6}$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so erhält man schließlich

$$\Delta t = \frac{2.0 \times 10^{30} \times (3 \times 10^8)^2}{4\pi(1.5 \times 10^{11})^2 \times 1.37 \times 10^3}\mathrm{s} = 4.6 \times 10^{20}\mathrm{s} = 1.5 \times 10^{13}\mathrm{Jahre} \tag{7}$$

[**1**]

## Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Myon-Atom besteht aus einem Atomkern der Kernladungszahl $Z$ und einem eingefangenen Myon, das sich im Grundzustand befindet. Myonen sind Elementarteilchen mit $m_\mu$=207$m_e$, $q = -e$ und einer Lebensdauer von $\tau_\mu = 2.2 \times 10^{-6}$s.

**Hinweis:** Im Folgenden soll die Kernbewegung vernachlässigt werden.

*a*) Berechnen Sie die Bindungsenergie eines Myons, das von einem Proton eingefangen wird.

### Lösung:

Die Bindungsenergie eines Elektrons im Bohrschen Atommodell ist gegeben durch

$$E_n(\mu) = -R\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{eV} \tag{8}$$

Dabei trägt $R$ für das Wasserstoffatom natürlich 13.6 und berechnet sich aus den folgenden Konstanten:

$$R = \frac{e^4 m_e}{32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2} \tag{9}$$

Nun wird diese Konstante für das Myon modifiziert und $m_e$ durch $m_\mu = 207m_e$ ersetzt.

**[1]**

Daraus folgt dann für die Bindungsenergie:

$$E_n(\mu) = -2813\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{eV} \tag{10}$$

**[1]**

*b*) Berechnen Sie den Radius der Bohrschen Bahn mit $n = 1$.

### Lösung:

Die Bohrsche Bahn ist gegeben durch

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Ze^2 m_\mu}n^2 = 0.256\frac{n^2}{Z}\mathrm{pm} \tag{11}$$

**[1]**

Alternativ kann man auch einfach das numerische Ergebnis erhalten, indem man den Wert für Wasserstoff durch $m_\mu$ dividiert.

*c*) Wie groß ist die Energie des Photons, das ausgestrahlt wird, wenn ein Myon vom Zustand $n = 2$ in den Grundzustand übergeht?

## Lösung:

Die Energie lässt sich einfach berechnen aus

$$h\nu = E_2(\mu) - E_1(\mu) = 2110 Z^2 \mathrm{eV} \tag{12}$$

[**1**]

## Aufgabe 3 (7 Punkte)

Der Zustand eines Teilchens lässt sich durch die folgende Wellenfunktion darstellen:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < -b \\ A & \text{für } -b \leq x \leq 3b \\ 0 & \text{für } x > 3b \end{cases} \tag{13}$$

*a*) Finden Sie $A$ indem sie die Normalisierungsbedinung nutzen.

**Hinweis:** Die Phasenkonvention darf so gewählt werden, dass $A$ real ist.

### Lösung:

Die Normalisierungsbedingung fordert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 \, dx = 1 \tag{14}$$

In diesem Fall heißt das also, dass

$$\int_{-b}^{3b} |A|^2 \, dx = 1 = 4b \, |A|^2 \tag{15}$$

und damit ist

$$A = \frac{1}{2\sqrt{b}} \tag{16}$$

**[1]**

*b*) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[0, b]$ zu finden.

### Lösung:

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[0, b]$ zu finden, beträgt:

$$\int_0^b |\psi|^2 \, dx = \int_0^b \frac{1}{4b} = \frac{1}{4} \tag{17}$$

**[1]**

*c*) Berechnen Sie für diesen Zustand die Erwartungswerte $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$.

## Lösung:

Die Erwartungswerte sind:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x \, |\psi|^2 \, dx = \int_{-b}^{3b} x \frac{1}{4b} dx = b \tag{18}$$

**[1]**

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, |\psi|^2 \, dx = \int_{-b}^{3b} x^2 \frac{1}{4b} dx = \frac{7}{3} b^2 \tag{19}$$

**[1]**

$d$) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte des Impulses.

## Lösung:

Die Impulswellenfunktion $\phi(p)$ ist im Wesentlichen die Fourier-Transformierte der Ortswellenfunktion

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ipx/\hbar} \tag{20}$$

In diesem Fall wird $\phi(p)$ zu

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-b}^{3b} dx A e^{-ipx/\hbar} \tag{21}$$

**[1]**

Dieses Integral berechnet sich zu:

$$\phi(p) = \frac{i\hbar A}{\sqrt{2\pi\hbar} p} \left[ e^{-ipx/\hbar} \right]_{b}^{3b} = \frac{iA}{p} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} \left[ e^{-3ipb/\hbar} - e^{ipb/\hbar} \right] = \tag{22}$$

$$\frac{2A}{p} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} e^{-ipb/\hbar} \underbrace{\frac{1}{2i} \left[ e^{+2ipb/\hbar} - e^{-2ipb/\hbar} \right]}_{= \sin(2bp/\hbar)} \tag{23}$$

**[1]**

Dann beträgt die Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$|\phi(p)|^2 = \frac{2A^2\hbar}{p^2\pi} \sin^2 \left( \frac{2pb}{\hbar} \right) \tag{24}$$

**[1]**

## Aufgabe 4 (10 Punkte)

Zwei Elektronen bilden einen Gesamtspin $\mathbf{S} = 1$ und einen Bahndrehimpuls $\mathbf{L} = 2$.

$a)$ Welche möglichen Quantenzahlen hat der Gesamtdrehimpuls?

### Lösung:

Für den Gesamtdrehimpuls gilt

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{25}$$

Also hat der Gesamtdrehimpuls die möglichen Werte $J = 1, 2, 3$.

[**1**]

$b)$ Welchen Winkel bilden $\mathbf{S}$ und $\mathbf{L}$ für $\mathbf{J} = 2$?

### Lösung:

Vektoren bilden ein Dreieck mit den Seitenlängen:

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} = \sqrt{2} \tag{26}$$

$$\left|\vec{l}\right| = \sqrt{l(l+1)} = \sqrt{6} \tag{27}$$

$$\left|\vec{j}\right| = \sqrt{j(j+1)} = \sqrt{6} \tag{28}$$

[**1**]

Mit dem Cosinussatz folgt:

$$\vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 - 2 \cdot \left|\vec{l}\right| |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha) \tag{29}$$

[**1**]

$$180° - cos(\alpha) = \frac{\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2}{2 \cdot \left|\vec{l}\right| |\vec{s}|} = 0.288 \tag{30}$$

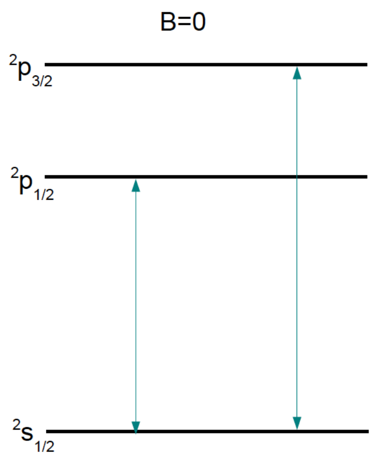
Also ist

$$\alpha = 180° - 73.2° = 107° \tag{31}$$

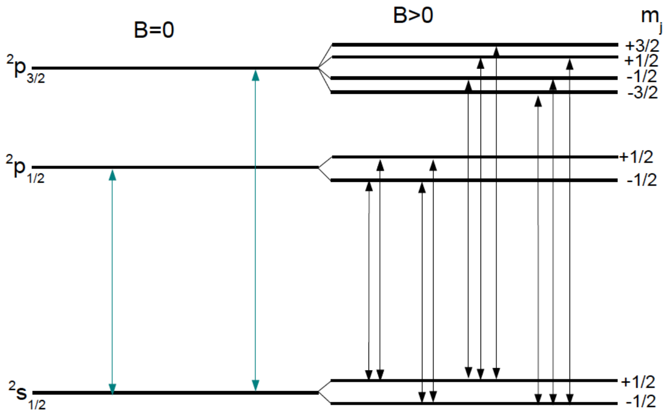
[**1**]

Betrachten Sie im nun ein Wasserstoffatom mit Spin $\mathbf{S} = 1/2$ in einem schwachen $B-$Feld.

*c*) Kopieren und erweitern Sie die folgende Skizze, indem Sie die magnetisch induzierten Aufspaltungen sowie die erlaubten Übergänge einzeichnen. Vernachlässigen Sie dabei die unterschiedlichen Aufspaltungen beim anomalen Zeeman-Effekt.




## Lösung:




**[3]**

*d*) Welches Magnetfeld braucht man, umd einen Übergang von $2S_{\frac{1}{2}}; m_j = +\frac{1}{2}$ auf $^2S_{\frac{1}{2}}; m_j = -\frac{1}{2}$ mit einer 3cm Mikrowelle zu induzieren?

## Lösung:

Der $g-$Faktor ist gegeben durch

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \tag{32}$$

In diesem Fall beträgt er also

$$g_{1/2} = 2 \tag{33}$$

[**1**]

Dann ist die Energie der Mikrowelle gegeben durch

$$\Delta E = h\nu = \Delta m_j \mu_B B g_j \tag{34}$$

[**1**]

Mit einer Frequenz von $\nu = \frac{c}{\lambda} = 10^{10}\mathrm{s}^{-1}$ und $\Delta m_j$ ist dann also das Magnetfeld:

$$B = \frac{h\nu}{2\mu_B} = \frac{10^{10} \times 4.1 \times 10^{-15}\mathrm{eV}}{2 \times 5.6 \times 10^{-5}\mathrm{eV/T}} = 0.3\mathrm{T} \tag{35}$$

[**1**]

## Aufgabe 5 (8 Punkte)

Die Energieverschiebung eines Elektrons aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung im Wasserstoffatom ist gegeben durch

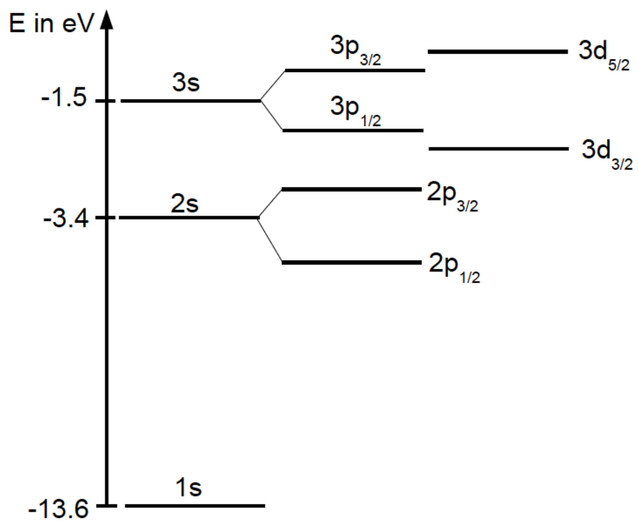
$$\Delta E = \frac{a}{2}\left(j\left(j+1\right) - l\left(l+1\right) - s\left(s+1\right)\right) \tag{36}$$

wobei $a$ die Spin-Bahnkopplungskonstante ist.

*a*) Zeichnen Sie ein Termschema für $n = 1, 2, 3$ unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung und diskutieren Sie die Entartung der Zustände. Welche Besonderheit ergibt sich für die $s-$Zustände? Vernachlässigen Sie die unterschiedlichen Größen der Aufspaltungen.

### Lösung:

Die Spin-Bahn-Kopplung ist die Wechselwirkung des Bahndrehimpulses eines Elektrons in einem Atom mit dem Spin des Elektrons. Sie sorgt für die Aufspaltung der Spektrallinien. Für ein Wasserstoffatom ist das Termschema für $n = 1, 2, 3$ dargestellt:




[**2**]

Die Energie eines jeweiligen Niveaus ist gegeben durch

$$E_n = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2} \tag{37}$$

Es gibt also keine $l-$ und keine $j-$ Entartung.

[**1**]

Im $s-$Zustand mit $l = 0$ misst man nur den Spinmagnetismus. Es gibt also keine Spin-Bahn-Kopplung.

[**1**]

*b*) Für die gesamte Feinstrukturaufspaltung einschließlich relativistischer Korrekturen gilt:

$$\Delta E_{n,j} = E_n \frac{\alpha^2}{n} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + j} - \frac{3}{4n} \right) \quad \text{mit} \quad E_n = -\frac{13.6\text{eV}}{n^2} \tag{38}$$

Welche relativistischen Korrekturen sind gemeint? Erläutern Sie kurz die Unterschiede zu den Ergebnissen der Energieverschiebung der Spin-Bahn-Kopplung.

## Lösung:

Die relativistische Korrektur wird notwendig, da man die relativistische Massenzunahme des Elektrons bei seiner Bewegung um den Kern berücksichtigen muss.

[**1**]

Im Gegensatz zum nichtrelativistischen Fall senkt die Feinstruktur hier alle Niveaus, einschließlich dem $s-$Niveau.

[**1**]

Außerdem gibt es eine $l-$Entartung, wie aus Gleichung (38) leicht zu erkennen ist.

[**1**]

*c*) Wie kommt die Hyperfeinstruktur im Vergleich zur Spin-Bahn-Kopplung zustande?

## Lösung:

Es ist der Elektronspin, der für die Spin-Bahn-Kopplung verantwortlich ist, u.a. durch die relativistische Massenkorrektur. Hingegen ist die Hyperfeinstruktur kein relativistischer Effekt, sondern eine Wechselwirkung zwischen Elektron und Kernspin.

[**1**]

## Aufgabe 6 (8 Punkte)

Der Gesamtdrehimpuls der Elektronenhülle wird dabei durch ein einzelnes Valenzelektron bestimmt. Betrachten Sie ein Rubidium-Atom mit dem Valenzelektron im Zustand mit der Hauptquantenzahl $n = 5$ und der Drehimpulsquantenzahl $l = 1$.

*a*) Welche Gesamtdrehimpulsquantenzahlen $j$ sind möglich? Wie groß ist jeweils die maximale beobachtbare Komponente des zugehörigen magnetischen Moments? Geben Sie die Termsymbole für diese Zustände an.

### Lösung:

Die möglichen Gesamtdrehimpulsquantenzahlen für ein Einelektronensystem mit $l = 1$ sind

$$j_1 = l + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{und} \quad j_2 = l - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \tag{39}$$

[**1**]

Für die beobachtbare Komponente des magnetische Moments gilt

$$\left|(\vec{\mu_j})_j)\right| = g_j \mu_B m_j \tag{40}$$

[**1**]

mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \tag{41}$$

[**1**]

Damit erhält man

$$g_{j1} = 4/3 \quad \rightarrow \quad \left|(\vec{\mu_{j1}})_{j1})\right| = \frac{4}{3}\mu_B m_j \tag{42}$$

$$g_{j2} = 2/3 \quad \rightarrow \quad \left|(\vec{\mu_{j2}})_{j2})\right| = \frac{2}{3}\mu_B m_j \tag{43}$$

[**1**]

Die Zustände werden gemäß $n^{2s+1}l_j$ bezeichnet. Damit ergibt sich für die Zustände hier

$$5^2 p_{3/2} \tag{44}$$

und

$$5^2 p_{1/2} \tag{45}$$

[**1**]

$b)$ Berechnen Sie für alle möglichen Gesamtdrehimpulse die Energieverschiebung für die Zustände mit maximaler Ausrichtung des Gesamtdrehimpulses entlang eines externen Magnetfeldes von $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} \times 10^{-6}\text{T}$.

### Lösung:

Maximale Ausrichtung des Gesamtdrehimpulses entlang des Magnetfeldes bedeutet, dass $m_j = j$. Für die Zeeman-Verschiebung gilt:

$$E_{mj} = m_j g_j \mu_B B_z \tag{46}$$

[**1**]

Damit erhält man für $j_1 = 3/2$:

$$E_{3/2} = 3/2 g_{3/2} \mu_B B_z = 1.85 \times 10^{-29}\text{J} = 1.2\text{peV} \tag{47}$$

[**1**]

Und für $j_2 = 1/2$:

$$E_{3/2} = 1/2 g_{1/2} \mu_B B_z = 3.09 \times 10^{-29}\text{J} = 1.91 \times 10^{-13}\text{eV} \tag{48}$$

[**1**]

## Aufgabe 7 (4 Punkte)

Ein zweiatomiges Molekül besteht aus zwei Atomen mit Masse $M$ in einem Abstand $R$. Es hat die Vibrationsfrequenz $\omega$. Ein Molekül dieses Gases befindet sich in seinem niedgrigsten Vibrationszustand und ist in einem Rotationszustand mit $l = 3$. Geben Sie die Rotations- sowie die Vibrationsenergie an und berechnen Sie die Energien der erlaubten Übergänge durch Absorption. Ihre Ergebnisse sollten abhängig von $\hbar\omega$, $M$ und $R$ sein.

### Lösung:

Das Trägheitsmoment des zeitatomigen Moleküls beträgt

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \tag{49}$$

Die Energie der Rotationsanregung ist

$$E_R = \frac{\hbar^2}{2I}(j+1)j = \frac{\hbar^2}{MR^2} j(j+1) \tag{50}$$

mit $|\Delta j = 1|$ als Auswahlregel.

[**1**]

Für die Vibrationsenergie:

$$E_V = \hbar\omega \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \tag{51}$$

mit $|\Delta\nu = 1|$ als Auswahlregel.

[**1**]

Daher sind die möglichen Übergänge:

$$E\left(\nu = 0, j = 3\right) = \frac{\hbar\omega}{2} + 12E_R \tag{52}$$

$$E\left(\nu = 1, j = 4\right) = \frac{3}{2}\frac{\hbar\omega}{2} + 20E_R \tag{53}$$

$$E\left(\nu = 1, j = 2\right) = \frac{3}{2}\hbar\omega + 6E_R \tag{54}$$

[**1**]

Also haben die Photonen die Energie

$$E_1 = E(\nu = 1, l = 4) - E(\nu = 0, l = 3) = \hbar\omega + 8E_R \tag{55}$$

$$E_2 = E(\nu = 1, l = 2) - E(\nu = 0, l = 3) = \hbar\omega - 6E_R \tag{56}$$

[**1**]

**Anmerkung:** Die richtige Antwort auf die letzte Teilaufgabe wäre eigentlich gewesen: Es gibt überhaupt keine Schwingungs-Rotations-Übergänge, da es sich hier um ein homonukleares Molekül handelt. Das Matrixelement $M_{ik}$ berechent sich aus:

$$M_{ik} = e \int \chi_{iN}^{*}\left(Z_1\mathbf{R}_1 + Z_2\mathbf{R}_2\right)\chi_{kN}d\tau_N \tag{57}$$

Für homonukleare Moleküle ist $Z_1 = Z_2$ und wegen $M_1 = M_2$ wird $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$. Daher wird $\mathbf{p}_n = 0$ und $M_{ik}$ verschwindet. Also: Homonukleare Moleküle haben in Dipolnäherung keine erlaubten Schwingungs-Rotations-Übergänge.