

---

# Probeklausur in Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti

Sommersemester 2020

07.07.2020

---

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

## Aufgabe 1 (9 Punkte)

In dieser Aufgabe wird wasserstoffartiges Zirkonium ( ${}^{90}_{40}\text{Zr}^{39+}$ ) betrachtet.

- (a) Berechnen Sie nach dem Bohrschen Atommodell den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand für

- ein Elektron
- ein negatives Myon  $\mu^-$  (Masse:  $m_\mu = 207m_e$ )

im Feld eines Zirkonium-Kerns.

- (b) Nehmen Sie nun an, ein Anti-Proton werde von einem Zirkonium-Kern eingefangen.

- Welche ist die tiefste Bohrsche Bahn, auf der das Anti-Proton den Kern noch nicht berührt?

**Hinweis:** Radius Zirkoniumkern: 5,3 fm, Radius Antiproton: 1 fm (Masse:  $m_{p^+} = 1836m_e$ )

- Wie groß ist die Bindungsenergie für diese Bahn?

## Lösung

- (a) Den Bahnradius im Bohrschen Atommodell erhält man mit dem Bohrschen Radius  $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{e^2 m_e}$

$$r_n = \frac{n^2}{Z} a_0 \quad (1)$$

Die Gesamtenergie im Grundzustand mit der Rydbergenergie  $R_\infty = E_R = 13,6 \text{ eV}$

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} E_R \quad (2)$$

[2]

- Mit  $n = 1$  und  $Z = 40$  erhält man

$$r_1(Zr) = 1,33 \cdot 10^{-12} \text{m}, \quad E_1(Zn) = -21,8 \text{keV} \quad (3)$$

[2]

- Mit  $n = 1$ ,  $Z = 40$  und  $m_\mu$  erhält man für  $a_0$  und  $E_R$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_\mu} \Rightarrow a_0^\mu = \frac{1}{207} a_0$$

$$E_R = \left( \frac{e^2}{\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{m_e Z^2}{8\hbar^2 n^2} \Rightarrow E_R^\mu = 207 E_R$$

Einsetzen ergibt

$$r_1^\mu(Zr) = 6,42 \cdot 10^{-15}, \quad E_1^\mu(Zn) = -4,51 \text{MeV} \quad (4)$$

[2]

- (b) • Abermals mit dem Bohrschen Radius

$$r_n^{\bar{p}} = \frac{m_e}{m_{\bar{p}}} \cdot a_0 \frac{n^2}{Z} = \frac{a_0}{1840} \frac{n^2}{Z} = 7,2 \cdot 10^{-16} \text{m} \cdot n^2 \quad (5)$$

[1]

Damit das Anti-Proton und der Zirkoniumkern sich nicht berühren, muss gelten

$$r_n^{\bar{p}} > R = R_{Zn} + R_{\bar{p}}$$

$$r_n^{\bar{p}} = 7,2 \cdot 10^{-16} \text{m} \cdot n^2 > R = 6,3 \cdot 10^{-15}$$

$$\Rightarrow n = 3 : r_3^{\bar{p}} = 6,48 \cdot 10^{-15} \text{m}$$

[1]

- Die Bindungsenergie  $E_n$  erhält man aus

$$E_n = -\frac{m_{\bar{p}} e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \cdot \hbar^2} \frac{Z^2}{n^2} = -\frac{m_{\bar{p}}}{m_e} \cdot E_r \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad (6)$$

Einsetzen ergibt

$$E_3 = -1840 \cdot \frac{40^2}{3^2} \cdot 13,6 \text{eV} = -4,45 \text{MeV} \quad (7)$$

[1]

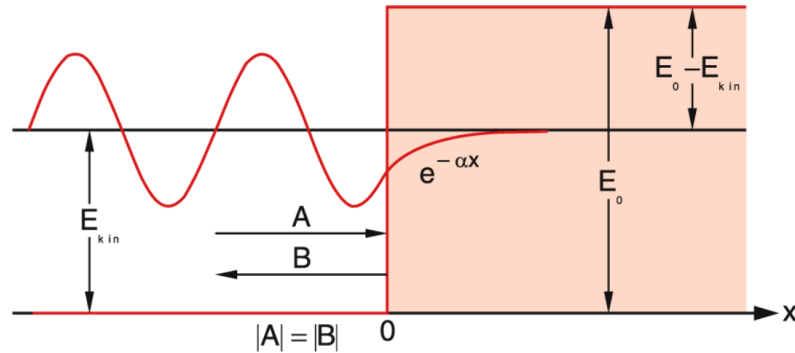
## Aufgabe 2 (14 Punkte)

Ein Teilchen mit Masse  $m$  und kinetischer Energie  $E < V_0$  trifft von links auf eine Potential-schwelle:

$$V(x) = V_0 \Theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Wie lautet der Lösungsansatz für die Potentialschwelle? Finden Sie die dabei auftretenden Koeffizienten und bestimmen Sie die Reflexionswahrscheinlichkeit  $R$  für den Fall  $E = V_0/2$ .
- (b) Wie lautet der Lösungsansatz für die Potentialschwelle für den Fall  $E > V_0$ ? Was hat sich nun effektiv geändert? Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionswahrscheinlichkeit  $R$  bzw.  $T$  für den Fall  $E = 9V_0/5$  und zeigen Sie, dass  $R + T = 1$  gilt.

## Lösung



- (a) Im Vergleich zur Potentialbarriere müssen hier nur zwei Bereiche betrachtet werden ( $x < 0$  und  $x > 0$ ). Für den Bereich I ( $x < 0$ ) lautet die Lösung

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \quad (8)$$

mit Wellenvektor  $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$ . Wir wählen o.B.d.A  $A = 1$ . Im Bereich II ( $x > 0$ ) lautet die Lösung:

$$\psi_{II}(x) = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} \quad (9)$$

mit Wellenvektor  $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar > 0$ . Aufgrund der Normierungsbedingung muss  $C = 0$  sein, da sonst  $\psi_{II}(x)$  für  $x \rightarrow \infty$  divergieren würde. Zusammenfassend erhalten wir also

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ De^{-\kappa x} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

[3]

Die Anschlussbedingung an der Stelle  $x = 0$  lautet

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad (10)$$

und die entsprechende Stetigkeitsbedingung ist

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0) \quad (11)$$

[2]

Daraus erhalten wir das Gleichungssystem:

$$1 + B = D \quad (12)$$

$$ik(1 - B) = -\kappa D. \quad (13)$$

Man erhält für die Koeffizienten  $B$  und  $D$ :

$$B = \frac{ik + \kappa}{ik - \kappa} \quad (14)$$

$$D = \frac{2ik}{ik - \kappa} \quad (15)$$

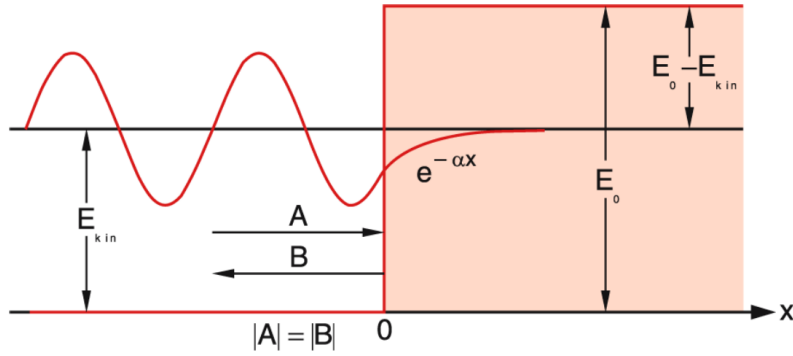
[2]

Mit  $k = \kappa = \frac{\sqrt{mV_0}}{\hbar}$  wird die Reflexionswahrscheinlichkeit  $R$  für den Fall  $E = V_0/2$  gegeben durch

$$R = |B|^2 = \left| \frac{1+i}{i-1} \right|^2 = 1 \quad (16)$$

Die einfallende Welle wird also vollständig reflektiert. Trotzdem gibt es eine von Null verschiedene Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Welle in der Barriere.

[2]



- (b) Für den Fall  $E > V_0$  ist die Wellenfunktion im Bereich I ( $x < 0$ ) dieselbe wie davor (auch in diesem Fall gibt es einen reflektierten Anteil). In Bereich II ( $x > 0$ ) jedoch ist die Wellenfunktion nun nicht mehr exponentiell abfallend sondern besteht aus einer transmittierten Welle mit Wellenvektor  $k' = \sqrt{2m(E - V_0)}/\hbar$ . Die Wellenfunktion lautet also insgesamt:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ De^{ik'x} & \text{für } x > 0 \end{cases} \quad (17)$$

[1]

Für die Koeffizienten  $B$  und  $D$  erhalten wir

$$1 + B = D \quad (18)$$

$$ik(1 - B) = ik'D \quad (19)$$

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{V}{E}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{V}{E}}} \quad (20)$$

. Für  $E = 9V_0/5$  ergibt sich die Reflexionswahrscheinlichkeit

$$R = |B|^2 = \left| \frac{1 - \sqrt{1 - 5/9}}{1 + \sqrt{1 - 5/9}} \right|^2 = \left| \frac{1/3}{5/3} \right|^2 = \frac{1}{25} \quad (21)$$

[1]

und die Transmissionswahrscheinlichkeit

$$T = \frac{k'}{k} |D|^2 = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} \left| \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{9}}} \right|^2 = \frac{2}{3} \left| \frac{2}{5/3} \right|^2 = \frac{24}{25} \quad (22)$$

Es gilt also  $R + T = 1$  wie es die Energieerhaltung fordert.

[3]

### Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ermitteln Sie für einen Zustand mit  $l = 2$

- (a) das Betragsquadrat  $L^2$  des Drehimpulses
- (b) den Maximalwert von  $L_z^2$
- (c) den kleinstmöglichen Wert von  $L_x^2 + L_y^2$

### Lösung

(a)

$$|L|^2 = \left( \hbar \sqrt{l(l+1)} \right)^2 = 6\hbar^2 \quad (23)$$

[1]

(b)

$$L_z^2 = (m\hbar)^2 = m^2\hbar^2 = 4\hbar^2 \quad (24)$$

[1]

(c) Es ist

$$L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad (25)$$

Daraus folgt

$$L_x^2 + L_y^2 = L^2 - L_z^2 = l(l+1)\hbar^2 - m^2\hbar^2 = (6 - m^2)\hbar^2 \quad (26)$$

Dann hat  $L_x^2 + L_y^2$  den minimalen Wert, wenn  $m$  maximal ist, also bei  $m = 2$ :

$$(L_x^2 + L_y^2)_{\min} = (6 - 2^2)\hbar^2 = 2\hbar^2 \quad (27)$$

[3]

#### Aufgabe 4 (4 Punkte)

- (a) Geben Sie die Quantenzahlen  $n, l, j$  und  $m_s$  für den Zustand eines  $3d_{5/2}$ - und eines  $3d_{3/2}$ -Elektrons an.
- (b) Atome mit einem  $3d_{3/2}$ -Leuchtelektron werden durch eine Stern-Gerlach-Apparatur geschickt. Der für die Strahlaufspaltung verantwortliche Drehimpuls dieser Atome sei gleich dem Gesamtdrehimpuls des Leuchtelektrons. Wie viele Teilstrahlen ergeben sich nach dem Durchlaufen der Apparatur? Und warum?

#### Lösung

- (a) Für das  $3d_{5/2}$ -Elektron gilt:  $n = 3, j = 5/2, l = 2, m_s = 1/2$ .  
Für das  $3d_{3/2}$ -Elektron gilt:  $n = 3, j = 3/2, l = 2, m_s = -1/2$ .

[2]

- (b) Die Kraft auf ein Elektron im inhomogenen Magneten der Stern-Gerlach-Apparatur ist gegeben durch

$$\vec{F} = \mu_z \cdot \frac{\delta B}{\delta z} \vec{e}_z = m_j \hbar \frac{\delta B}{\delta z} \vec{e}_z \quad (28)$$

Da das entscheidende Elektron den Gesamtdrehimpuls  $j = 3/2$  hat, existieren

$$-j \leq m_j \leq j, \quad (29)$$

insgesamt  $2j + 1 = 4$  verschiedene Möglichkeiten für die **magnetische Quantenzahl** und spaltet den Strahl somit in vier Komponenten auf.

[2]

#### Aufgabe 5 (11 Punkte)

Der atomare Übergang  $7^3S_1 \rightarrow 6^3P_2$  in Quecksilber entspricht einer Wellenlänge von  $\lambda = 546.10$  nm.

- (a) Begründen Sie, welcher Zeeman-Effekt vorliegt?
- (b) Berechnen Sie die Landé-Faktoren  $g_j$  der beiden Zustände und bestimmen Sie die Aufspaltung der  $6^3P_2$  Levels, wenn das  $7^3S_1$  Level im Magnetfeld mit  $\Delta E = 3 \cdot 10^{-5}$  eV aufspaltet.
- (c) Skizzieren Sie ein Termschema, das diese Aufspaltung zeigt und zeichnen Sie die mit der Auswahlregel  $\Delta m_j = 0, \pm 1$  erlaubten Übergänge ein.

#### Lösung

- (a) Es liegt der anomale Zeeman-Effekt vor, da neben einem Bahndrehimpuls auch ein nicht-verschwindender Spin existiert.

[1]

(b) Die Aufspaltung eines Levels aufgrund des anomalen Zeeman-Effekts ist mit

$$E = -\vec{\mu}_B \vec{B} = m_j g_j \mu_B B \quad (30)$$

gegeben. Der Landé-Faktor ist dabei definiert durch

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \quad (31)$$

[2]

Das Level  $7^3S_1$  ist im Zustand  $j = 1, l = 0, s = 1$ . Damit folgt für  $g_j$ :

$$g_j(^3S_1) = 2. \quad (32)$$

Für das Level  $6^3P_2$  gilt  $j = 1, l = 1, s = 1$  und somit

$$g_j(^3P_2) = 3/2 \quad (33)$$

[2]

Für den Energieunterschied zweier benachbarter Level gilt

$$\Delta E = g_j \mu_B B \quad (34)$$

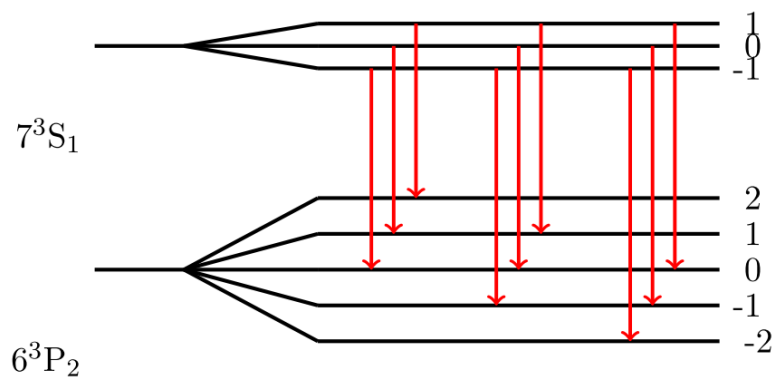
Damit können wir das angelegte Magnetfeld aus der Aufspaltung des  $7^3S_1$  Levels berechnen (nicht unbedingt nötig, da es auch über die Verhältnisse von  $g_j$  geht:

$$B = \frac{\Delta}{E_{g_j} (^3S_1) \mu_B} = 0,25 \text{ T} \quad (35)$$

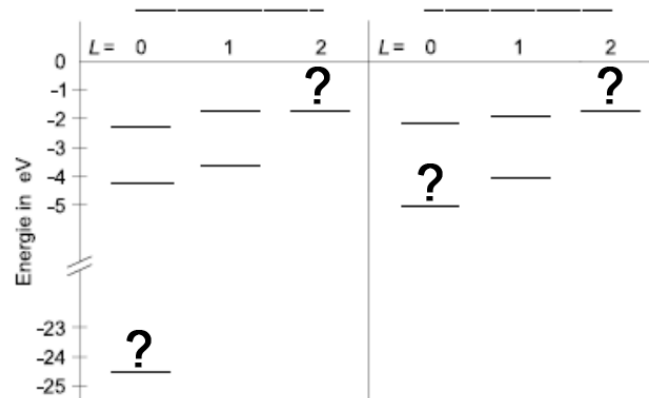
Für die Größe der Aufspaltung eines  $6^3P_2$ -Niveaus erhält man

$$\Delta E = 2,26 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \quad (36)$$

[2]



(c) [4]



### Aufgabe 6 (14 Punkte)

In der Abbildung sind die niedrigsten Energieniveaus aus dem Termschema von Helium zu sehen. Gegeben sind Energien und Drehimpuls der Niveaus. Feinstruktur und weitere Korrekturen wurden nicht eingezeichnet.

- Benennen Sie die gefragten Energieniveaus in spektroskopischen Symbolen auf ihrem Schreibblatt. Welches der beiden Schemata gehört zum Triplett- und welches zum Singulett-Helium?
- Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Triplett- und dem Singulett-System des Helium-Atoms. Welches der beiden Systeme weist für  $L \neq 0$  eine Feinstrukturaufspaltung auf? Begründen Sie ihre Antwort.
- Warum gibt es keinen  $1^3S_1$ -Zustand? Geben Sie für diesen hypothetischen Zustand für beide Elektronen alle relevanten Quantenzahlen an.
- Warum werden die Übergänge  $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$  und  $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$  nicht beobachtet?

### Lösung

(a) [5]

- (b) Singulett-System (links):

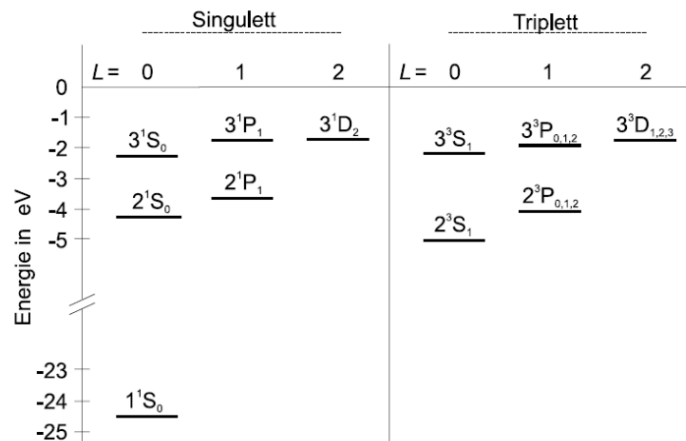
Die Spins der beiden Elektronen koppeln zu  $S = 0$ , d.h. die Elektronenspins sind antiparallel. Alle Terme im Parahelium sind einfach.

Triplett-System (rechts):

Spins koppeln zu  $S = 1$ , d.h. die Spins der Elektronen sind parallel. Durch die LS-Kopplung kommt es im Orthohelium zur Feinstrukturaufspaltung. Die Terme sind dreifach aufgespalten.

[4]





	$n$	$l$	$m_l$	$m_s$
Elektron 1	1	0	0	$+1/2$
Elektron 2	1	0	0	$+1/2$

- (c) Es gilt  $S = 1$ , also  $m_{s1} = m_{s2} = \frac{1}{2}$ . Die Quantenzahlen für den  $1^3S_1$ -Zustand wären daher: Das Pauli-Prinzip besagt jedoch, dass keine zwei Fermionen in einem geschlossenen System einen identischen Satz von Quantenzahlen haben dürfen. Der Zustand ist somit verboten.

[3]

- (d)  $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ :  
Übergänge mit  $J = 0 \rightarrow J = 0$  sind verboten.

$2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ :  
Spinflips sind verboten, weil  $\Delta S = 0$  verletzt würde. (Interkombinationsverbot)

[2]

## Aufgabe 7 (6 Punkte)

Welche Spektralterme sind für die angeregten Konfigurationen Be:  $[He]2s2p$ ; Ca:  $[Ar]4s3d$  möglich?

## Lösung

Be:  $(He)(2s)(2p)$ ,  $l_1 = 0, l_2 = 1 \rightarrow L = 1$ ,  $S = 0, 1$ . Es folgt für  $J$ :  $J = 1$  bzw.  $J = 0, 1, 2$  und somit:  $^1P_1$ ,  $^3P_{0,1,2}$ .

Ca:  $(Ar)(4s)(3d)$ ,  $l_1 = 0, l_2 = 2 \rightarrow L = 2$ ,  $S = 0, 1$ . Es folgt für  $J$ :  $J = 2$  bzw.  $J = 1, 2, 3$  und somit:  $^1D_2$ ,  $^3D_{1,2,3}$ .

[6]

## Aufgabe 8 (7 Punkte)

Wir betrachten ein Molekül, das nicht rotiert ( $J = 0$ ), aber dafür ist der Abstand  $R$  der beiden Atomkerne nicht mehr konstant. Die Kerne können also gegeneinander schwingen. Für die potentielle Energie zwischen den Kernen ist das Morse-Potential eine sehr gute Näherung:

$$E_{pot}(R) = E_{diss} \left( 1 - e^{-a(R-R_0)} \right)^2 \quad (37)$$

mit  $a = 2,75 \cdot 10^{10} \frac{1}{\text{m}}$ . Da die Lösung der Schrödingergleichung mit Morse-Potential kompliziert ist, wollen wir uns hier auf die harmonische Näherung beschränken.

- (a) Geben Sie die Entwicklung des Morse-Potentials bis zur 2. Ordnung an und bringen Sie es auf die Form  $E_{pot}(R) \approx \frac{1}{2}k(R - R_0)^2$ .
- (b) Geben Sie die Energieeigenwerte für dieses Potential an.
- (c) Berechnen Sie die Anregungsenergien für die harmonischen Energieniveaus für ein  $\text{H}_2$ -Molekül ( $E_{diss} = 4,75 \text{ eV}$ ,  $R_0 = 1,44 \text{ \AA}$ ).

## Lösung

- (a) Zunächst wird das Morse-Potential um  $R_0$  entwickelt:

$$E_{pot}(R) \approx E_{pot}(R_0) + E'_{pot}(R_0)(R - R_0) + \frac{1}{2}E''_{pot}(R_0)(R - R_0)^2 \quad (38)$$

$$= 0 + 0 + \frac{1}{2}2a^2 E_{diss}(R - R_0)^2 = \frac{1}{2}k(R - R_0)^2 \quad (39)$$

wobei  $k = 2a^2 E_{diss}$

[3]

- (b) Das Potential  $E_{pot}(R) = \frac{1}{2}k(R - R_0)^2$  ist das Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Die zugehörigen Energieeigenwerte lauten:

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (40)$$

wobei  $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$  und  $M$  die reduzierte Masse ist.

[1]

- (c) Die Anregungsenergie entspricht dem Unterschied zwischen zwei Energieniveaus:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \hbar\omega \quad (41)$$

Fürs  $\text{H}_2$ -Molekül ergibt sich damit

$$\Delta E = \hbar \sqrt{\frac{2a^2 E_{diss}}{0,5 M_H}} = 772 \text{ meV} \quad (42)$$

Die Vibrationsanregungen sind immer noch um eine Größenordnung kleiner als die elektronischen Anregungen, aber deutlich größer als die Rotationsanregungen.

[3]

## Konstanten

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{Js}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{As/V/m}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 \hbar^3} = 1,10 \cdot 10^7 \text{m}^{-1}$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$$

$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

$$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}$$

$$\alpha = 7,3 \cdot 10^{-3}$$

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{N/A}^2$$

$$A = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{eV}$$

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{N/m}^2$$