Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

10.09.2002

Vordiplom Mathematik 2 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 **10 Punkte**

a) Beweise, dass für eine feste Zahl q zwischen 0 und 1 und jede natürliche Zahl n die folgende Beziehung gilt:

$$\sum_{j=0}^{n} q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

b) Untersuche, ob die folgende Aussage für alle natürlichen Zahlen richtig ist:

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$$

c) Beweise oder widerlege die folgende Aussage:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{1}{4}\, n^2\,(n+1)^2$$

Aufgabe 2 **10 Punkte**

a) Besitzt die folgende Differentialgleichung zwei linear unabhängige periodische Lösungen? Begründe die Antwort detailliert.

$$y''(x) + y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

b) Finde zwei linear unabhängige Lösungen der folgenden Differentialgleichung:

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

c) Beweise, dass alle reellwertigen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$y'(x) = y(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

von der Bauart $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ x \mapsto y(x) = ce^x$ sind, wobei $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 **10 Punkte**

a) Zeige mit Hilfe der Definition für die Stetigkeit, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := x^2$$

stetig in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs ist.

b) Untersuche, ob die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto f(x) := x + \tfrac{x}{|x|} \qquad f(0) := 1$$

stetig ist.

c) Gib die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ so an, dass

$$e^z = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n+1} \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

d) Berechne die Ableitung der folgenden Funktion:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \ln(\sqrt{4e^{2x} + 3} + 2e^x)$$

Warum existiert diese Ableitung?

Aufgabe 4 **10 Punkte**

a) Beweise das folgende Additionstheorem des Sinus:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \qquad \sin x + \sin y = 2 \sin \tfrac{x+y}{2} \ \cos \tfrac{x-y}{2}$$

b) Beweise das folgende Additionstheorem des Cosinus:

$$\forall u, v \in \mathbb{C} : \qquad \cos(u + v) - \cos(u - v) = -2 \ \sin u \ \sin v$$

c) Berechne den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(1+x)}{x}$$

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und
Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!