Klausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. M. Rief

Wintersemester 2010/2011

16. Februar 2011

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein Asteroid gerät ins Schwerefeld der Erde und bewegt sich direkt auf die Erde zu. (Gravitationskonstante $G = 6.67 \times 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kgs}^2$, Erdradius $R = 6360\mathrm{km}$, Erdmasse $M = 5.977 \times 10^{24}\mathrm{kg}$.

a) Welche Geschwindigkeit hat er in 200km Höhe über der Erdoberfläche, bevor er in die Atmosphäre eintaucht und verglüht? Nehmen Sie an, dass der Asteroid weit weg von der Erde eine vernachlässigbare Relativgeschwindigkeit zur Erde hatte und nur das Erdpotential spürt.

Lösung:

Da der Abstand nur das Erdpotential spürt, ist das Potential in undendlicher Entfernung von der Erde Null:

$$U = 0 \quad \text{für } r \to \infty \tag{1}$$

Daher ist das Potential gegeben durch

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \tag{2}$$

[**1**]

wobei M die Masse der Erde ist und m die Masse des Asteroiden. Da weit weg von der Erde die Geschwindigkeit des Asteroiden relativ zur Erde vernachlässigbar ist, besagt der Energiesatz:

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \text{const.} = 0 \tag{3}$$

[**1**]

Diese Gleichung kann nun für $r = R + 200\mathrm{km}$ nach v aufgelöst werden:

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = 0 \tag{4}$$

$$\to v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 11 \times 10^3 \mathrm{m/s} \tag{5}$$

[2]

b) Welche Geschwindigkeit müsste er haben, um in 200km Höhe in eine Kreisbahn um die Erde einschwenken zu können?

Lösung:

Damit der Asteroid in eine Kreisbahn um die Erde einschwenken kann, muss gelten:

$$\text{Zentrifugalkraft=-Gravitationskraft} \tag{6}$$

d.h.

$$m\omega^2 r = G\frac{mM}{r^2} \tag{7}$$

[1]

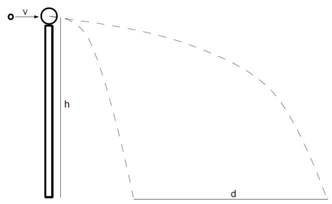
Mit $v = \omega r$ ergibt dies nach v aufgelöst:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 7.80 \times 10^3 \mathrm{m/s} \tag{8}$$

[2]

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Auf einer Stange mit Höhe $h = 12$m liegt ein Apfel der Masse M ($M = 0.5$kg). Er wird von einer Kugel der Masse m ($m = 5$g) durchschossen. Die Kugel fällt dreimal so weit von der Stange zur Erde wie der Apfel. Der Abstand zwischen den Auftreffpunkten ist $d = 16$m. Beide Körper sind als Massenpunkte anzusehen. Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9.81\text{m/s}^2$.



a) Was kann man beim inelastischen Stoß über den Gesamtimpuls und über die kinetische sowie die Gesamtenergie aussagen? Werden diese Größen erhalten?

Lösung:

Beim inelastischen Stoß wird der Gesamtimpuls erhalten:

$$p_{\text{Kugel}} = p'_{\text{Kugel}} + p'_{\text{Apfel}} \tag{9}$$

$$mv_{\text{Kugel}} = mv'_{\text{Kugel}} + mv'_{\text{Apfel}} \tag{10}$$

[**1**]

Die kinetische Energie wird nicht erhalten.

[**1**]

Allerdings wird die Gesamtenergie erhalten, da beim Durchschuss Wärme erzeugt wird:

$$E_{kin} = E'_{kin} + W \tag{11}$$

[**1**]

b) Wie groß war die ursprüngliche Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß?

Lösung:

Die ursprüngliche Geschwindigkeit der Kugel vor dem Stoß ergibt sich aus der Impulserhaltung (siehe Gleichung (10)):

$$v_K = v'_K + \frac{M}{m} v'_A \tag{12}$$

[**1**]

Nun sind die Fallweiten von Apfel und Kugel gegeben durch:

$$x_A = v'_A t \tag{13}$$
$$x_K = v'_K t \tag{14}$$

[**1**]

Die Kugel fällt dreimal so weit von der Stange zur Erde:

$$x_K = 3x_A \tag{15}$$

Die Fallzeiten von Kugel und Apfel sind natürlich gleich:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{16}$$

und deshalb gilt für die Geschwindigkeiten:

$$v'_K = 3v'_A \tag{17}$$

[**1**]

Nun lässt sich der Abstand d ermitteln

$$d = x_K - x_A = (v'_K - v'_A)t = 2v'_A t \tag{18}$$

[**1**]

und daraus die Geschwindigkeit des Apfels, indem man nach v'_A auflöst:

$$v'_A = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} \tag{19}$$

[**1**]

Daher:

$$v_K = (3 + \frac{M}{m})\frac{d}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}} = 526.8\text{m/s} \tag{20}$$

[**1**]

c) Wieviel Wärme wurde beim Durchschuss erzeugt?

Lösung:

Die Gesamtenergie bleibt erhalten:

$$E_{ges} = \frac{1}{2}mv_K^2 = \frac{1}{2}mv_K'^2 + \frac{1}{2}Mv_A'^2 + W \tag{21}$$

[**1**]

Nach der Wärme aufgelöst ergibt sich daraus:

$$W = \frac{m}{2}(v_K^2 - v_K'^2 - \frac{M}{m}v_A'^2) = 686.8\text{J} \tag{22}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Ein Wagen (Leergewicht M=500g) bewegt sich reibungsfrei auf einer Ebene mit der Geschwindigkeit v_0=10m/s in x-Richtung. Auf dem Wagen ist eine Wanne mit vernachlässigbarer Masse und der Grundfläche A=6m^2 mit der offenen Seite nach oben befestigt. Plötzlich zur Zeit $t = 0$, setzt ein Platzregen mit 180 Litern pro Stunde und Quadratmeter ein. Die Regentropfen fallen senkrecht.

Hinweis: Sie mögen das Integral $\int \frac{1}{a+bx}dx = \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$ nützlich finden.

a) Gilt hier der Impulserhaltungssatz? Gilt der Energieerhaltungssatz?

Lösung:

Es gilt der Impulserhaltungssatz, aber nicht der Energieerhaltungssatz, da ein inelastischer Stoß vorliegt.

[**1**]

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wagens als Funktion der Zeit?

Lösung:

Zu beachten ist, dass wegen der Impulserhaltung gilt:

$$p = mv = m_0 v_0 = m(t)v(t) \tag{23}$$

[**1**]

d.h. die Masse ist nicht konstant, da sie eine Funktion der Zeit ist.

[**1**]

$$\frac{dm}{dt} = 180\frac{\text{l}}{\text{hm}^2} \times 6\text{m}^2 = 180\frac{\text{kg}}{3600\text{s} \times \text{m}^2} \times 6\text{m}^2 = 0.3\frac{\text{kg}}{\text{s}} \tag{24}$$

[**1**]

da ein Liter Wasser natürlich einem Kilogramm Wasser entspricht. Integriert man nun $\frac{dm}{dt}$, so ergibt sich

$$m(t) = m_0 + 0.3kgs^{-1} \times t \tag{25}$$

[**1**]

Die Gleichung der Impulserhaltung (23) lässt sich nun nach $v(t)$ auflösen:

$$v(t) = \frac{m_0 v_0}{m(t)} = \frac{0.5\text{kg} \times 10\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.5\text{kg} + 0.3\text{kgs}^{-1}t} = \frac{5\text{m}}{0.5\text{s} + 0.3\text{kgs}^{-1}t} \tag{26}$$

[**1**]

c) Kommt der Wagen innerhalb einer endlichen Strecke zum Stehen? Begründen Sie ihre Antwort durch Rechnung.

Lösung:

Die zurückgelegte Strecke lässt sich durch Integration von $v(t)$ ermitteln:

$$s(t) = \int \frac{5\text{m}}{0.5\text{s} + 0.3\text{kgs}^{-1} t} dt = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \int \frac{dt}{1 + 0.6\text{s}^{-1} t} = \frac{10}{0.6} \ln(1 + 0.6\text{s}^{-1} \times t) \tag{27}$$

[**2**]

Der Wagen kommt nicht zum Stehen, da

$$\ln(x) \to \infty \quad \text{für } x \to \infty \tag{28}$$

Anders ausgedrückt: Die Geschwindigkeit wird nie Null, da $v(t) \propto \frac{1}{t}$.

[**1**]

d) Welche Kraft muss aufgebracht werden, um die Geschwindigkeit des Wagens konstant auf dem Wert v_0 zu halten?

Lösung:

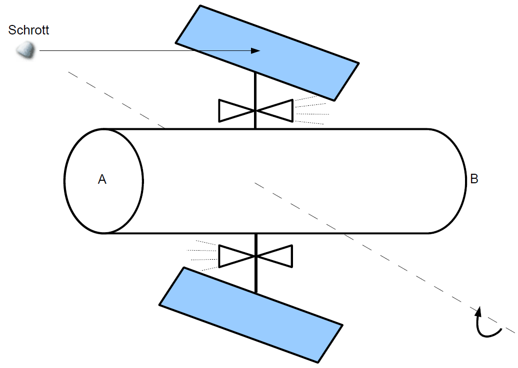
Die Kraft ist durch die Impulsänderung definiert:

$$F = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 0.3\frac{\text{kg}}{\text{s}} = 3\text{N} \tag{29}$$

[**2**]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine zylinderförmige Raumstation wird an einem ihrer Sonnensegel von einem Stück Weltraumschrott getroffen und gerät dadurch in Rotation um eine Achse mit Trägheitsmoment $I = 10^5 \text{kgm}^2$ (gestrichelt in der Zeichnung), und zwar mit einer Umlauffrequenz von $f = 3.18 \times 10^{-2}\text{Hz}$.



a) Wie lange müssen zwei Trimmraketen, die sich im Abstand 10m von dieser Drehachse befinden und je 100N Schub entwickeln, gezündet werden, um diese Drehbewegung zu stoppen?

Lösung:

Man verwendet den Drehimpulssatz, der besagt, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses gleich dem Drehmoment ist:

$$\dot{L} = M \tag{30}$$

$$\rightarrow \frac{dL}{dt} = M \tag{31}$$

[**1**]

Integriert man diesen Ausdruck, so erhält man

$$M\Delta t = \Delta L \tag{32}$$

[**1**]

F ist die Schubkraft, d der Abstand zur Drehachse. Der Faktor 2 entsteht natürlich aus der Tatsache, dass es zwei Trimmraketen gibt. Dann lässt sich für Gleichung (32) explizit schreiben:

$$2F \cdot d \cdot \Delta t = I\omega \tag{33}$$

[**1**]

Und nach der Zeit Δt aufgelöst ergibt sich:

$$\Delta t = \frac{I\omega}{2Fd} = 10\text{s} \tag{34}$$

[**1**]

b) Die Crew feiert eine Party und möchte währenddessen in der Mitte der beiden Endflächen A und B der Raumstation Erdbeschleunigung erzeugen, und zwar unter Verwendung derselben Trimmraketen. Welche Umlauffrequenz f um die gestrichelte Achse ist hierfür nötig, wenn die Gesamtlänge der Station $L = 40\text{m}$ beträgt?

Lösung:

Die Beschleunigung soll also der Erdbeschleunigung g entsprechen:

$$\omega^2 r = g \to \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} \tag{35}$$

[**1**]

Nach der Umlauffrequenz f aufgelöst ergibt sich dann für diese:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{g}{r}\right)^{1/2} = 0.11\text{Hz} \tag{36}$$

[**1**]

c) Wie lange müssen hierfür die Trimmrakten (Schub wie oben) gezündet werden?

Lösung:

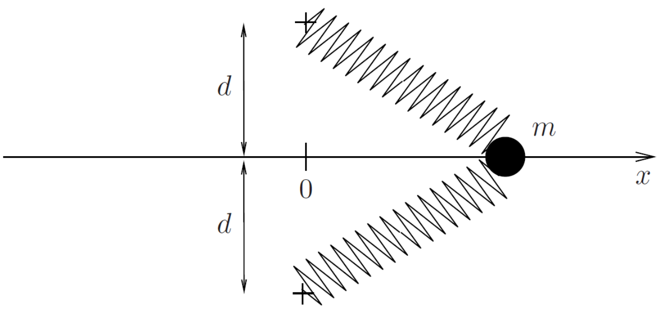
Man verwendet einfach Gleichung (33) aus Teilaufgabe a):

$$\Delta t = \frac{I\omega}{2Fd} = 35\text{s} \tag{37}$$

[**2**]

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Betrachten Sie das in der folgenden Abbildung dargestellte System aus zwei identischen Federn der Härte k und einer Masse m. Die Bewegung der Masse ist auf die x-Achse eingeschränkt, die beiden Federn sind bei $x = 0$ in der Entfernung d von der x-Achse befestigt. Die Federn sollen um ihre Aufhängepunkte frei beweglich und die Ausdehnung der Masse vernachlässigbar sein.



a) Gehen Sie zunächst davon aus, dass die beiden Federn entspannt sind, wenn sie die Länge null haben. Geben Sie die potentielle Energie des Systems und die Gesamtkraft der Masse als Funktionen der Auslenkung x an. Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Masse auf und bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz.

Lösung:

Die potentielle Energie des Systems ist die Spannungsenergie in den beiden Federn. Da sie die entspannte Länge null haben sollen, ist diese gegeben durch

$$V(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} k s^2(x) \tag{38}$$

[1]

wobei $s(x)$ die Länge einer Feder bei Auslenkung der Masse x ist. Wegen dem Pythagoras-Satz hat man durch

$$s^2(x) = x^2 + d^2 \tag{39}$$

dann also

$$V(x) = k(x^2 + d^2) \tag{40}$$

[1]

Die Kraft auf die Masse ergibt sich durch Ableiten der potentiellen Energie nach x, also

$$F(x) = -V'(x) = -2kx \tag{41}$$

[1]

(Man kann die Kraft natürlich auch direkt ausrechnen. Dabei muss man berücksichtigen, dass nur die x-Komponente der Federkraft wirksam wird:

$$F(x) = -2ks(x)\cos(\alpha(x)) \tag{42}$$

Wegen $\cos(\alpha(x)) = x/s(x)$ folgt

$$F(x) = -2kx \tag{43}$$

wie gehabt.)

Die Bewegungsgleichung ist also

$$m\ddot{x} = -2kx \tag{44}$$

bzw.

$$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0 \tag{45}$$

[1]

Vergleicht man dies mit der Standardform $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators, dann liest man ab:

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \tag{46}$$

bzw.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tag{47}$$

[1]

b) Nun sollen die Federn im entspannten Zustand die Länge $s_0 > d$ haben. Skizzieren Sie die potentielle Energie V des Systems als Funktion von x und stellen Sie die Bewegungsgleichung der Masse auf. Warum wäre diese schwierig zu lösen?

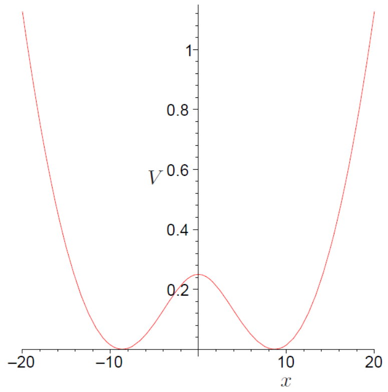
Lösung:

Die potentielle Energie ist wieder die Spannungsenergie der Federn, wobei hier die entspannte Länge s_0 sein soll. Die *Verlängerung* der Federn ist also als Funktion von x gegeben durch $s(x) - s_0$, wobei $s(x) = \sqrt{x^2 + d^2}$ wie oben die Länge der Federn ist. Also

$$V(x) = 2 \cdot \frac{1}{2}k(s(x) - s_0)^2 = k(\sqrt{x^2 + d^2} - s_0)^2 \tag{48}$$

[**1**]

In der folgenden Abbildung ist $V(x)$ für die Parameterwerte k=1N/cm, d=5cm und s_0=10cm dargestellt. (x ist in cm und V in J.)



[**1**]

Für die Bewegungsgleichung braucht man die Kraft $F(x)$:

$$F(x) = -V'(x) = -2kx + 2ks_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{49}$$

[**1**]

also

$$m\ddot{x} = -2kx + 2ks_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \tag{50}$$

[**1**]

Diese Bewegungsgleichung ist nichtlinear, d.h. die gesuchte Funktion x kommt nicht nur linear vor - im Unterschied z.B. zur gewöhnlichen Oszillatorgleichung $m\ddot{x} = -kx$. Solche Gleichungen sind im Allgemeinen schwierig und man lässt lieber die Finger davon.

[**1**]

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden sich die Drillinge Andrea, Barbara und Christina am Koordinatenursprung. Während Andrea dort verbleibt, fliegt Drilling Barbara zu einem zehn Lichtjahre entfernten Stern, hat dort einen Aufenthalt von einem halben Jahr und kehrt dann zurück zum Ursprung. Ihr Raumschiff fliegt mit einer Geschwindigkeit von $\beta = \frac{2}{3}$.
Drilling Christina fliegt mit $\beta = \frac{1}{2}$ zu einem fünf Lichtjahre entfernten Stern, bleibt dort zwei Jahre lang und kehrt dann wieder zurück.
Die Beschleunigungszeiten sind vernachlässigbar.

a) Welcher Drilling ist am ältesten, wenn sie sich alle im Bezugssystem von Andrea wiedertreffen? Wie groß sind die Altersunterschiede?

Lösung:

Aus Sicht von Andrea sind während der Reise von Barbara

$$\Delta t_B = 2 \times \frac{s}{v} + 0.5\text{Jahre} = 2 \times \frac{10c\text{Jahre}}{\frac{2}{3}c} + 0.5\text{Jahre} = 30.5\text{Jahre} \tag{51}$$

vergangen.

[**1**]

Für Andrea sind während der Reise von Christina

$$\Delta t_C = 2 \times \frac{5c\text{Jahre}}{\frac{1}{2}c} + 2\text{Jahre} = 22\text{Jahre} \tag{52}$$

vergangen.

[**1**]

Aus Sicht von Barbara sind während ihrer Reise

$$\Delta t'_B = 2 \times \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right) + 0.5\text{Jahre} = \tag{53}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2}} \left(\frac{10c\text{Jahre}}{\frac{2}{3}c} - \frac{2}{3} \frac{10c\text{Jahre}}{c} \right) + 0.5\text{Jahre} = 22.8\text{Jahre} \tag{54}$$

vergangen.

[**1**]

Aus Sicht von Christina sind während ihrer Reise

$$\Delta t'_B = 2 \times \gamma \left(t - \beta \frac{x}{c} \right) + 2\text{Jahre} = \tag{55}$$

$$\frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} \left(\frac{5c\text{Jahre}}{\frac{1}{2}c} - \frac{1}{2} \frac{5c\text{Jahre}}{c} \right) + 2\text{Jahre} = 19.3\text{Jahre} \tag{56}$$

vergangen.

[**1**]

Christina kommt also früher von ihrer Reise zurück als Barbara. Sie muss noch 8.5 Jahre auf Barbara warten; bis zu Barbaras Ankunft sind für Christina also ca. 27.8 Jahre vergangen. Für Barbara hingegen sind nur 22.8 Jahre vergangen. Am ältesten ist natürlich am ältesten; für sie sind insgesamt 30.5 Jahre vergangen:

$$\text{Alter}_{\text{Barbara}} < \text{Alter}_{\text{Christina}} < \text{Alter}_{\text{Andrea}} \tag{57}$$

[**2**]

b) Zeichnen Sie die Weltlinien von Andrea, Barbara und Christina in ein Minkowski-Diagramm ein.

Lösung:

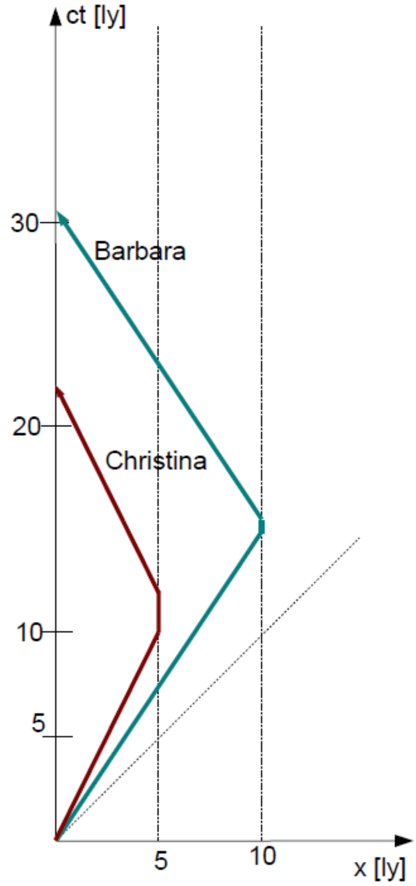
Für Barbara:

$$\tan(\alpha) = \frac{v}{c} = \frac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33.7^\circ \tag{58}$$

Für Christina:

$$\tan(\alpha) = \frac{v}{c} = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 26.6^\circ \tag{59}$$

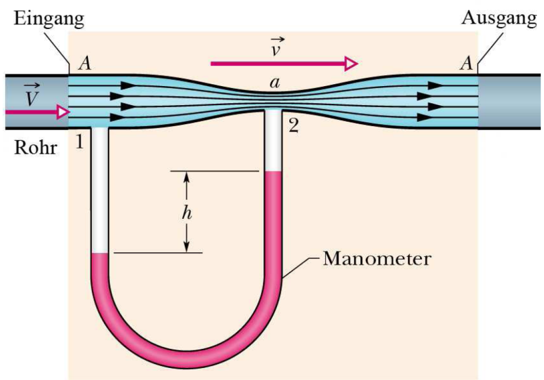
Dann sieht das Minkowski-Diagramm folgendermaßen aus:



[**3**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die Venturi-Düse wird oft zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Fluiden in einem Rohr verwendet (siehe Abbildung). Das Rohr habe am Eingang und Ausgang den Querschnitt A. Am Eingang und Ausgang fließt das Fluid mit derselben Geschwindigkeit V wie im Rohr. Dazwischen strömt es mit der Geschwindigkeit v durch eine Verengung mit der Querschnittsfläche a. Das Manometer verbindet den breiteren Teil der Düse mit dem engeren Teil.



a) Was bewirkt die Änderung des Fluiddrucks $\Delta p = p_2 - p_1$?

Lösung:

Die Veränderung des Fluiddrucks zwichen dem Druck in der Verengung am Punkt 2 und dem Druck im Rohr bei Punkt 1 erzeugt eine Höhendifferenz im Flüssigkeitsspiegel in den beiden Armen des Manometers.

[**1**]

b) Betrachten Sie die Druckdifferenz Δp zwischen Punkt 1 und Punkt 2 und zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit V gilt:

$$V = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}} \tag{60}$$

wobei ρ die Fluiddichte ist.

Lösung:

Man verwendet zuerst die Kontinuitätsgleichung

$$A \cdot V = a \cdot v \rightarrow v = \frac{A}{a} V \tag{61}$$

[**1**]

uns setzt dies dann in die Bernoulli-Gleichung ein:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{62}$$

[**1**]

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \left(\frac{a^2 - A^2}{a^2}\right) = \Delta p \tag{63}$$

$$\to V = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}} \tag{64}$$

[**1**]

c) Nehmen Sie nun an, bei dem Fluid handle es sich um Wasser mit der Dichte $\rho_W = 1\text{g/cm}^3$.Die Querschnittsflächen seien 5 cm^2 im Rohr und 4cm^2 in der Düsenverengung. Der Druck im Rohr sei 5.3 kPa und der Druck in der Verengung 3.3 kPa. Welche Wassermasse wird pro Sekunde durch den Rohreingang transportiert?

Lösung:

Mit der oben berechneten Geschwindigkeit und den angegeben Werten ergibt sich für V:

$$V = \frac{8}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{65}$$

[**1**]

Dann ist die Wassermasse pro Sekunde:

$$M_W = A \cdot V \cdot \rho_W = \frac{4}{3}\frac{\text{kg}}{\text{s}} \tag{66}$$

[**1**]