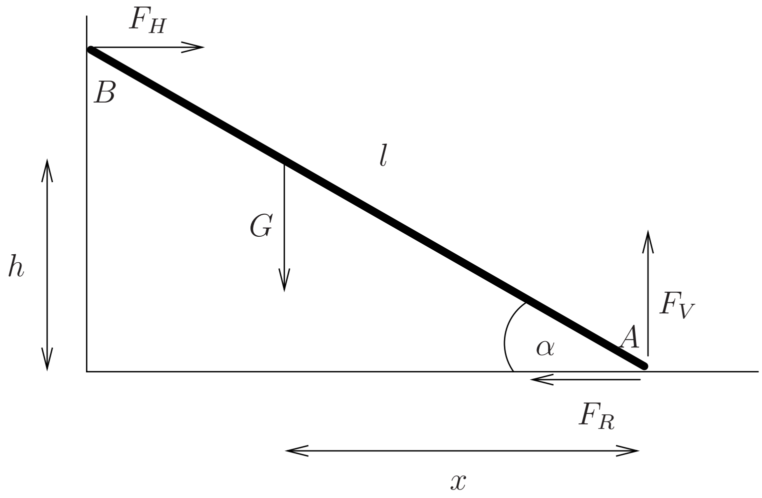
Musterlösung DVP-Klausur ExPhysik 1
SoSe 2008

Aufgabe 1

Auf die Leiter wirken 4 Kräfte:

1. Gewichtskraft G des Studenten
2. horizontale Kraft F_H der Wand am Punkt B
3. vertikale Kraft F_V des Bodens am Punkt A
4. Reibungskraft F_R des Bodens am Punkt A



Damit die Leiter im Gleichgewicht ist, müssen die Gesamtkraft und das Gesamtdrehmoment auf die Leiter verschwinden. Verschwindende Gesamtkraft bedeutet:

$$F_V = G \quad , \quad F_R = F_H \tag{1}$$

(F_V etc. bezeichnet hier nur die Beträge der Kräfte.)

Verschwindendes Gesamtdrehmoment bzgl. Punkt A bzw. Kompensation der Momente von F_H und G bedeutet:

$$F_H l \sin\alpha \ = \ Gx \tag{2}$$

Wegen $x = h/\tan\alpha$ heißt dies:

$$F_H \ = \ G \frac{h}{l \sin\alpha \tan\alpha} \tag{3}$$

Die Leiter rutscht so lange nicht weg, wie die Bedingung

$$F_R < \mu F_V \tag{4}$$

erfüllt ist, also

$$F_H < \mu G \tag{5}$$

gilt. Setzt man hier die Gleichgewichtsbedingung ein, dann erhält man:

$$G\frac{h}{l\sin\alpha\tan\alpha} \;<\; \mu G \tag{6}$$

also im Ganzen:

$$h \;<\; \mu l\sin\alpha\tan\alpha \tag{7}$$

bzw.

$$h_{max} \;=\; \mu l\sin\alpha\tan\alpha \tag{8}$$

Aufgabe 2

Wahl des Koordinatensystems: z-Achse zeigt nach oben, der Nullpunkt liegt am Boden des Ablaufbeckens. Dann ist der Druck im Wasser als Funktion von z gegeben durch

$$p(z) \;=\; p_0 + \rho g(h - z)$$

Auf die Klappe wirkt von rechts der konstante Gegendruck p_0, d.h. der Gesamtdruck auf die Klappe ist

$$p(z) \;=\; \rho g(h - z)$$

Um den Druck über die Klappe integrieren zu können, ist es sinnvoll die Koordinate y auf der Klappe einzuführen. Der Nullpunkt sei auf der Höhe der Drehachse und die positive Richtung zeige nach oben. Dann ist rein geometrisch

$$z(y) \;=\; \frac{a}{2} + y\sin\alpha$$

und der Druck als Funktion von y:

$$p(y) \;=\; p(z(y)) \;=\; \rho g(h - \tfrac{a}{2} - y\sin\alpha)$$

Für das Drehmoment muss man über y integrieren in den Grenzen $y = -a/2\sin\alpha$ bis $y = a/2\sin\alpha$, abgekürzt $y = -a' \ldots a'$:

$$D \;=\; \int_{-a'}^{a'} dy\, b\, p(y) y$$

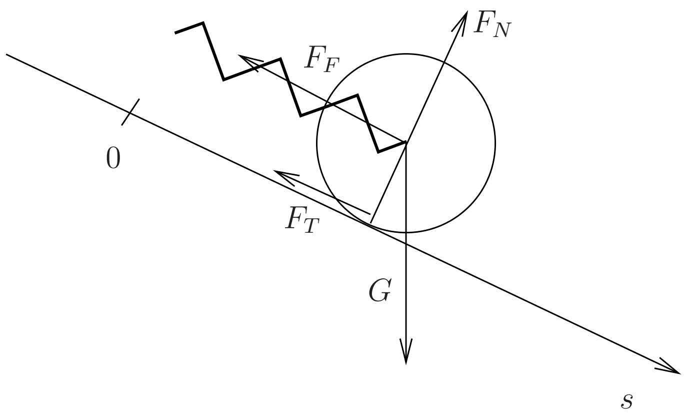
(Das Flächenelement ist der Streifen bdy, die Kraft ist Fläche mal Druck, und der Hebelarm ist y.)

Es ergibt sich hieraus

$$
\begin{aligned}
D &= b\int_{-a'}^{a'} dy\ \left((\rho g(h-\tfrac{a}{2})y\ -\ \rho g y^2\sin\alpha\right) \\
&= -b\rho g\sin\alpha\left[\frac{1}{3}y^3\right]_{-a'}^{a'} \\
&= -b\rho g\sin\alpha\frac{1}{3}\left(2\frac{a^3}{8\sin^3\alpha}\right) \\
&= -\frac{a^3 b\rho g}{12\sin^2\alpha}
\end{aligned}
$$

Mit den angegebenen Werten folgt $|D| = 28.25\cdot 10^6$ Nm.

Aufgabe 3



Auf den Zylinder wirken die in der Abbildung dargestellten Kräfte:

1. Gewichtskraft G
2. Normalkraft F_N der Ebene
3. Tangentialkraft F_T der Ebene (verhindert Rutschen)
4. Kraft F_F der gespannten Feder

Daraus lassen sich die folgenden Bewegungsgleichungen für die Streckenkoordinate s und den Drehwinkel bzgl. Schwerpunkt φ aufstellen:

$$
\begin{aligned}
M\ddot{s} &= Mg\sin\alpha - F_T - F_F &\quad (9)\\
\Theta\ddot{\varphi} &= RF_T &\quad (10)
\end{aligned}
$$

Die Federkraft F_F ist als Funktion von s bekannt:

$$
F_F = 2Ds \qquad (11)
$$

(F_F bezeichnet hier nur die Beträge der Kräfte.)

Die Tangentialkraft F_T ist nicht bekannt, allerdings gibt es als zusätzliche Gleichung noch die Rollbedingung:

$$\ddot{s} \;=\; R\ddot{\varphi} \tag{12}$$

Damit hat man nun 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten $\ddot{s}$, $\ddot{\varphi}$ und F_T. Einsetzen in die erste Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} M\ddot{s} \;&=\; Mg\sin\alpha - \frac{\Theta}{R}\ddot{\varphi} - 2Ds \qquad (13)\\ &=\; Mg\sin\alpha - \frac{\Theta}{R^2}\ddot{s} - 2Ds \qquad (14)\end{aligned}$$

also

$$\left(M + \frac{\Theta}{R^2}\right)\ddot{s} \;+\; 2Ds \;=\; Mg\sin\alpha \tag{15}$$

Wegen $\Theta = \frac{1}{2}MR^2$ für einen homogenen Vollzyinder ist dies:

$$\frac{3}{2}M\ddot{s} + 2Ds \;=\; Mg\sin\alpha \tag{16}$$

Die Ruhelage folgt hieraus zu

$$s_0 \;=\; \frac{Mg\sin\alpha}{2D} \tag{17}$$

Ersetzt man in der Bewegungsgleichung s durch die Auslenkung σ mit $s = s_0 + \sigma$, dann erhält man:

$$\frac{3}{2}M\ddot{\sigma} + 2D\sigma \;=\; 0 \tag{18}$$

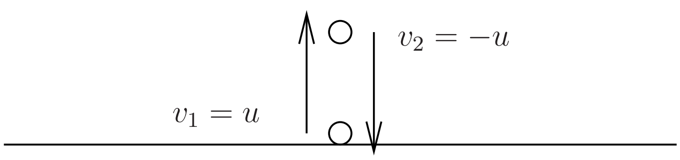
Die Schwingungsdauer für Schwingungen um die Ruhelage ist also

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{3M}{4D}} \tag{19}$$

also unabhängig von α und von R.

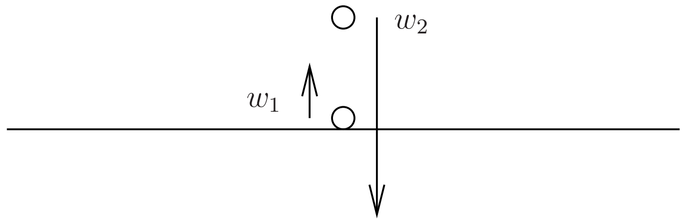
Aufgabe 4

(a) Vom Laborsystem aus betrachtet, sieht die Situation unmittelbar nach dem Auftreffen von Kugel 1 (= untere Kugel) folgendermaßen aus:



Wir wählen dabei die Geschwindigkeitsrichtung nach oben als positiv. Da der Abstand der beiden Kugeln vernachlässigbar sein soll, hat auch Kugel 2 unmittelbar vor dem Zusammenstoß den Geschwindigkeitsbetrag u.

(b) Im Schwerpunktsystem sind nicht mehr beide Geschwindigkeiten entgegengesetzt gleich, sondern die Impulse sind entgegengesetzt gleich. D.h. die Kugel 1 mit der größeren Masse M hat die kleinere Geschwindigkeit.



(c) Man berechnet das Resultat des Zusammenstoßes am besten im Schwerpunktsystem, da hier einfach die Geschwindigkeiten durch den Stoß ihre Vorzeichen wechseln. Die Geschwindigkeiten w_1, w_2 im Schwerpunktsystem sind unmittelbar vor dem Zusammenstoß, d.h. unmittelbar nach dem Auftreffen von Kugel 1:

$$w_1 \;=\; v_1 - v_s \quad , \quad w_2 \;=\; v_2 - v_s \tag{20}$$

mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$v_s \;=\; \frac{Mv_1 + mv_2}{M+m} \;=\; \frac{Mu + m(-u)}{M+m} \;=\; \frac{M-m}{M+m}\,u \tag{21}$$

Die gesuchte Geschwindigkeit v_2' der oberen Kugel im Laborsystem unmittelbar nach dem Zusammenstoß ist also:

$$v_2' \;=\; w_2' + v_s \;=\; -w_2 + v_s \;=\; -(v_2 - v_s) + v_s \;=\; -v_2 + 2v_s \tag{22}$$

Drückt man hier v_2 und v_s durch u aus, dann erhält man:

$$v_1' \;=\; u + 2\frac{M-m}{M+m}\,u \;=\; \frac{3M-m}{M+m}\,u \tag{23}$$

(d) Die Maximalhöhe der Kugel 2 ergibt sich aus ihrer Geschwindigkeit durch Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}m{v_2'}^2 \;=\; mgh_{max} \tag{24}$$

also

$$h_{max} \;=\; \frac{1}{2g}{v_2'}^2 \;=\; \frac{1}{2g}\left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 u^2 \tag{25}$$

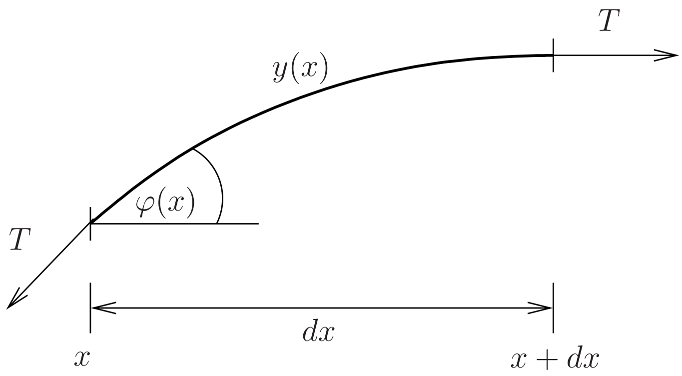
u^2 wiederum folgt per Energieerhaltung aus der ursprünglichen Abwurfhöhe h:

$$u^2 \;=\; 2gh \tag{26}$$

und so:

$$h_{max} \;=\; \left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 h \tag{27}$$

Aufgabe 5



Man betrachte das in der Abbildung dargestellte infinitesimale Saitenstück der unausgelenkten Länge dx. Die rücktreibende Kraft kommt dadurch zustande, dass die Spannungskräfte an den Endpunkten des Saitenstück aufgrund der Krümmung der Saite nicht in exakt entgegengesetzte Richtungen ziehen und so ein Nettoeffekt übrigbleibt. Wir betrachten nur die y-Komponente des Nettoeffekts, da die Schwingung nach Voraussetzung transversal sein soll. Die Bewegungsgleichung für das infinitesimale Saitenstück lautet also:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T \sin\varphi(x) + T \sin\varphi(x+dx) \qquad (28)$$

Dabei ist $\varphi(x)$ der Winkel zwischen der x-Achse und der Saite am Ort x. Am rechten Ende ist dies zugleich der Winkel zwischen der x-Achse und der wirkenden Kraft, daher dort das positive Vorzeichen, am linken Ende zeigt die Kraft in Gegenrichtung, daher dort das negative Vorzeichen.

Da dx infinitesimal ist, kann man die Bewegungsgleichung als

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\sin\varphi(x+dx) - \sin\varphi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \sin\varphi(x) \qquad (29)$$

schreiben.

Da wir nur kleine Schwingungen betrachten wollen, für die auch φ klein ist, darf man nähern:

$$\sin\varphi \approx \varphi \approx \tan\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (30)$$

und erhält so

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (31)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (32)$$

Aufgabe 6

(a) Die translatorische kinetische Energie eines Gases (egal aus wievielen Atomen die Moleküle bestehen) ist

$$E_T \;=\; \frac{3}{2}NkT \;=\; \frac{3}{2}pV \tag{33}$$

nach der idealen Gasgleichung. Einsetzen der angegebenen Werte ergibt:

$$E_T \;=\; \frac{3}{2}\cdot 1.0\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 40\,\mathrm{m}^3 \;=\; 6.0\cdot 10^6\,\mathrm{J} \tag{34}$$

(b) Die Gesamtenergie der Gasmoleküle ist

$$E \;=\; \frac{f}{2}NkT \;=\; \frac{f}{2}pV \tag{35}$$

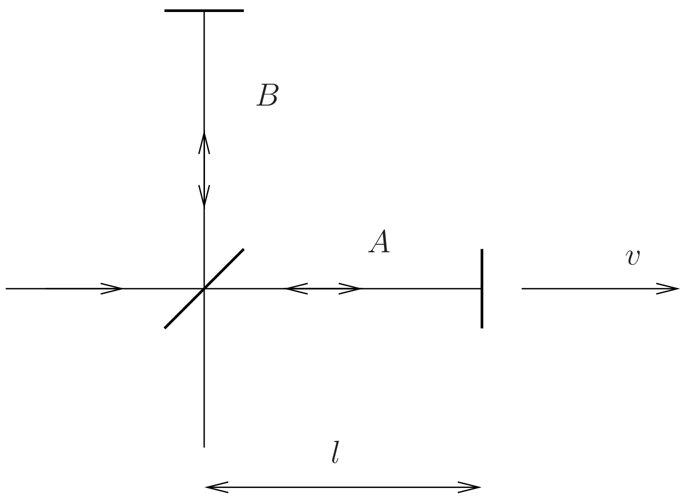
Nun gibt es bei einem zweiatomigen Molekül 3 Translationsfreiheitsgrade, 3 Rotationsfreiheitsgrade und einen Schwingungsfreiheitsgrad, d.h. $f = 3 + 3 + 1 = 7$. Also

$$E \;=\; \frac{7}{2}pV \tag{36}$$

und daher

$$E_{RV} \;=\; \frac{4}{2}pV \;=\; 8.0\cdot 10^6\,\mathrm{J} \tag{37}$$

Aufgabe 7



Die Lichtlaufzeit durch den Arm A setzt sich zusammen aus den Laufzeiten für Hin- und Rückweg. Man kann diese vom Laborsystem aus berechnen, indem man die Geschwindigkeit v des „Ätherwindes“ zur Geschwindigkeit des Lichts addiert bzw. subtrahiert:

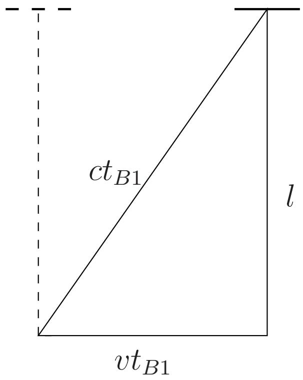
$$\text{hin:} \qquad l \;=\; (c-v)t_{A1} \tag{38}$$

$$\text{zurück:} \qquad l \;=\; (c+v)t_{A2} \tag{39}$$

also

$$t_A = t_{A1} + t_{A2} = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{2l}{c} \tag{40}$$

Die Lichtlaufzeit durch den Arm B berechnet man am besten vom Äthersystem aus, wo man den Lichtweg vom Strahlteiler zum Spiegel betrachtet. Dieser ist im Äthersystem die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks aus Armlänge l und zurückgelegtem Weg des Interferometers vt_{B1}.



Also gemäß Pythagoras

$$c^2 t_{B1}^2 = l^2 + v^2 t_{B1}^2 \tag{41}$$

Dies kann man auflösen nach t_{B1}:

$$t_{B1} = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{l}{c} \tag{42}$$

Mit derselben Zeit für den Rückweg also:

$$t_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{2l}{c} \tag{43}$$

Die Laufzeitdifferenz ist also

$$\Delta t = t_A - t_B = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \frac{2l}{c} \tag{44}$$

Entwickelt man dies in erster Ordnung in v^2/c^2, dann erhält man:

$$\Delta t = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{l}{c} = \left(10^{-4}\right)^2 \cdot \frac{10\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}} = 3.3 \cdot 10^{-16}\,\mathrm{s} \tag{45}$$