....
Note

Gruppe A

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Diplomvorprüfung

HÖHERE MATHEMATIK II

Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. H. Spohn

5. September 2005, 16:30 – 18:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: zwei selbsterstellte DIN A4 Blätter

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Aufgabe 1. **[ca. 6 Punkte]**

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige **monotone** Folge. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☐	☐	(x_n) besitzt mindestens einen Häufungswert in $\mathbb{R}$.
☐	☐	Falls die Folge (x_n) beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert.
☐	☐	Jeder reelle Grenzwert von (x_n) ist zugleich ein Häufungswert.
☐	☐	Ist (x_n) unbeschränkt, so konvergiert $(\frac{1}{x_n})$ gegen 0.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☐	☐	f ist beschränkt.
☐	☐	f' ist beschränkt.
☐	☐	Es gibt einen Punkt $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = 0$.
☐	☐	Es gibt einen Punkt $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$.

(c) Sei (f_n) eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$, und sei $x_0 \in [a,b]$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☐	☐	Wenn $\lvert f_n(x)\rvert < c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
☐	☐	Wenn $\lvert f_n(x)\rvert < c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
☐	☐	Wenn $\sup\limits_{x\in[a,b]} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
☐	☐	Wenn $\sup\limits_{x\in[a,b]} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Hinweis: Jede Zeile wird mit höchstens einem halben Punkt bewertet.

Aufgabe 2. Konvergenz (Multiple Choice) [**ca. 5 Punkte**]

(a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$$

☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☐ $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{11}{12}$ ☐ $\frac{13}{6}$

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$?

☐ $=-\infty$ ☐ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ undefiniert

(c) Wie groß ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}^{\sqrt{n}}\,x^n$$

☐ 0 ☐ 1 ☐ e ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ ∞

(d) Für welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe absolut? (Mehrere Antworten können zutreffen.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{2^n}$$

☐ $z=2i$ ☐ $z=1+i$ ☐ $z=1$ ☐ $z=-i$ ☐ $z=-\frac{1}{2}$

(e) Durch welchen Wert ist die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$ bei $x=0$ stetig fortsetzbar?

☐ -1 ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 0

Aufgabe 3. HDI [**ca. 3 Punkte**]

Definieren Sie den Begriff Stammfunktion und formulieren Sie den Fundamentalsatz (Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung aus der Vorlesung.

Aufgabe 4. Konvexität [**ca. 4 Punkte**]

Zur Erinnerung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $\alpha \in [0,1]$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Zeigen Sie:
Gilt für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass ihr Graph nie unterhalb ihrer Tangenten liegt, so ist f konvex, in Formeln:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \;:\; f(b) \geq f(a) + (b-a)f'(a) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist konvex.}$$

Hinweis: Setzen Sie $a = (1-\alpha)x + \alpha y$.

Aufgabe 5. Taylorreihe [**ca. 5 Punkte**]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(a) Wie lauten die Koeffizienten a_n der Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

- ☐ $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $a_n = \dfrac{i^n + (-i)^n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $a_n = \dfrac{i^n - i^{-n}}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

(b) Wie groß ist der Konvergenzradius der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit a_n aus Teilaufgabe a)?

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ e ☐ ∞

(c) Wie ergeben sich die Koeffizienten b_n der Taylorreihe $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ aus den Koeffizienten a_n aus Teilaufgabe a)?

- ☐ $b_n = a_n$
- ☐ $b_0 = 0,\ b_n = a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_n = n\, a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$
- ☐ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 6. Integration **[ca. 6 Punkte]**

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ ☐ divergent ☐ 1 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{4}{3}$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} dx\ \log x$ ☐ divergent ☐ -1 ☐ -2 ☐ $\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}}$ ☐ divergent ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$

Aufgabe 7. Supremum einer Menge **[ca. 3 Punkte]**

Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, und sei $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie die Ihnen aus den Übungen bekannte Tatsache, dass

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Aufgabe 8. Inhomogenes Differentialgleichungssystem **[ca. 4 Punkte]**

Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Propagator e^{tA}. Wie lautet er bei $t = 1$?

$$\square \begin{pmatrix} e & 0 & 2e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} e & 0 & 2e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2e \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die erste Komponente von $x(t)$ zur Zeit $t = 1$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = (0, 0, 0)$ (benutzen Sie die Formel $x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t ds\, e^{(t-s)A} b(s)$).

$$\square \ \frac{1}{2}\left(2e + \frac{1}{e}\right) \quad \square \ \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) \quad \square \ \frac{1}{2}\left(e - \frac{2}{e}\right) \quad \square \ \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

Aufgabe 9. Homogenes Differentialgleichungssystem **[ca. 4 Punkte]**

Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnen.