....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Semestrale
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

14. Februar 2011, 8:30–10:00 Uhr, MW 1801, MW 2001

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Beweis** **[5 Punkte]**

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}$$

2. **Taylor-Reihen** **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{2+x^2}$.

(i) Wie lauten die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung von f um $x = 0$. Wie groß ist der Fehler?

$$f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}\big(x^{\square}\big)$$

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe um $x = 0$.

☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ ∞

3. **Diverse Integrale** **[7 Punkte]**

Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

(i)

$$\int \mathrm{d}x \, x \, \sqrt{x-1} =$$

(ii) Für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, bestimmen Sie

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{x(a+bx)} =$$

4. **Folgen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Verhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen.

(i) $a_n = n \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

☐ $\sqrt{e}$ ☐ $+\infty$ ☐ e ☐ 0 ☐ 1

(ii) $b_n = \dfrac{\sqrt{n^2+5}+n}{n+17}$

☐ 1 ☐ 0 ☐ 2 ☐ $\frac{5}{17}$ ☐ konvergiert nicht

(iii) $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \sin\tfrac{1}{k}$

☐ konvergiert nicht, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist

☐ konvergiert, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist

☐ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, und zwar gegen $c \in (-\infty, 0)$

☐ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium, und zwar gegen $c \in (0, +\infty)$

☐ konvergiert nicht, da $\left(\sin\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wie $({}^{1}\!/_{k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 geht

5. **Potenzreihen und uneigentliche Integrale** **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{d}s \, \frac{1 - \cos(2s^2)}{s^4}.$$

(i) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $F(x)$ für $x \neq 0$ existiert.

(ii) Setzen Sie F in $x = 0$ stetig fort.

(iii) Entwickeln Sie F als Potenzreihe um $x = 0$ und geben Sie den Konvergenzradius an.

(iv) Untersuchen Sie, ob $\int_0^\infty \mathrm{d}s \, \frac{1 - \cos(2s^2)}{s^4} = \lim_{x \to \infty} F(x)$ existiert und begründen Sie Ihre Antwort.

6. **Lipschitz-Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit** **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstanten $L > 0$. Zeigen Sie, dass f auch gleichmäßig stetig ist.

7. **Summierbarkeit und Quadratsummierbarkeit** **[10 Punkte]**

Seien $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, komplexe Koeffizienten. Zeigen oder widerlegen Sie (mit Begründung):

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert absolut.

☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert absolut $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

☐ Wahr ☐ Falsch