Probeklausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. M. Rief

Sommersemester 2010

20.7.2010

Musterlösung

Aufgabe 1:

a) Für Stickstoff als 2atomiges ideales Gas gilt

$$U = \frac{5}{2}nRT \tag{1}$$

Hier ist nur die Molzahl n unbekannt, sie wird mit Hilfe der idealen Gasgleichung bestimmt:

$$n = \frac{pV}{RT} \tag{2}$$

Setzt man dies ein, dann folgt

$$U = \frac{5}{2}pV = 19.0\,\mathrm{MJ} \tag{3}$$

[2]

b) Aus der in a) hergeleiteten Gleichung

$$U = \frac{5}{2}pV \tag{4}$$

folgt, dass bei gegebenem Druck p die in einem Volumen V enthaltene Energie unabhängig von der Temperatur ist. D.h. die in der Luft des geheizten Zimmers enthaltene Energie ist genauso groß wie im ungeheizten Zimmer. **[1]**

c) Die isobare Wärmekapazität eines 2atomigen idealen Gases ist

$$C_p = \frac{7}{2}nR \tag{5}$$

Da n im Fall des Zimmers eine Funktion von T ist (vgl. Teil a), folgt daraus nicht

$$\Delta Q = \frac{7}{2}nR\Delta T \tag{6}$$

sondern man muss die korrekte infinitesimale Version mit $n = n(T)$ integrieren:

$$dQ = \frac{7}{2}n(T)R\,dT \tag{7}$$

mit

$$n(T) = \frac{pV}{RT} \tag{8}$$

Also

$$dQ = \frac{7}{2}pV\,\frac{dT}{T} \tag{9}$$

mit der Lösung

$$\Delta Q = \frac{7}{2}pV\int_{T_0}^{T_1}\frac{dT}{T} = \frac{7}{2}pV\,\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \tag{10}$$

Zahlenwerte:

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\cdot 1013\cdot 10^2\,\mathrm{Pa}\cdot 75\,\mathrm{m}^3\cdot\ln\left(\frac{293\,\mathrm{K}}{287\,\mathrm{K}}\right) = 550\,\mathrm{kJ} \tag{11}$$

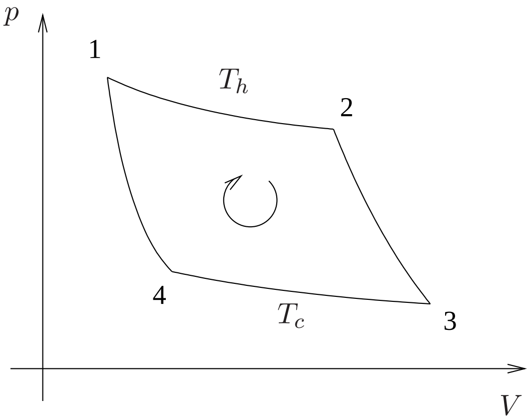
[2]

Aufgabe 2:

(a)

- isotherme Expansion auf hohem Temperaturniveau T_h
- adiabatische Expansion
- isotherme Kompression auf niedrigem Temperaturniveau T_c
- adiabatische Kompression

[1]



[1]

(b) Der Wirkungsgrad ist Nutzen durch Aufwand, also hier verrichtete Gesamtarbeit dividiert durch die dem heißen Wärmebad entnommene Wärmemenge:

$$\eta \;=\; \frac{W}{Q_h} \tag{12}$$

[1]

Aufgrund der Energieerhaltung gilt

$$W + Q_c - Q_h \;=\; 0 \tag{13}$$

also

$$W \;=\; Q_h - Q_c \tag{14}$$

[1]

Damit:

$$\eta \;=\; 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \tag{15}$$

Q_h ist die dem heißen Wärmebad entnommene Wärmemenge, Q_c ist die dem kalten Wärmebad zugeführte Wärmemenge. **[1]**

(c) Die bei isothermer Volumenänderung am Photonengas verrichtete Arbeit ist gegeben durch

$$W \;=\; -\int_{V_1}^{V_2} dV\, p(V) \;=\; -\frac{1}{3} b T^4 \int_{V_1}^{V_2} dV \;=\; -\frac{1}{3} b T^4 \Delta V \tag{16}$$

[1]

Daraus und aus der Energieerhaltung ergibt sich die dem Photonengas bei isothermer Volumenänderung zugeführte Wärme:

$$Q + W = \Delta U \quad\Rightarrow\quad Q \;=\; \Delta U - W \;=\; bT^4 \Delta V + \frac{1}{3} bT^4 \Delta V \;=\; \frac{4}{3} bT^4 \Delta V \tag{17}$$

[1]

(d) Nach Teil (b) ist der Wirkungsgrad

$$\eta \;=\; 1 - \frac{Q_c}{Q_h} \tag{18}$$

Nach (c) ist

$$Q_c \;=\; -\frac{4}{3} b T_c^4 (V_4 - V_3) \tag{19}$$
$$Q_h \;=\; \frac{4}{3} b T_h^4 (V_2 - V_1) \tag{20}$$

[1]

Die Volumenindizes beziehen sich dabei auf die in der Abbildung zu Teil (a) nummerierten Zustände. (Das negative VZ in Q_c kommt daher, dass in der Gleichung aus (b) Q_c die dem kalten Wärmebad zugeführte Wärmemenge bezeichnet, das in (c) berechnete Q aber die dem Gas zugeführte Wärmemenge ist.) Also

$$\eta \;=\; 1 + \frac{\frac{4}{3} b T_c^4 (V_4 - V_3)}{\frac{4}{3} b T_h^4 (V_2 - V_1)} \;=\; 1 + \frac{T_c^4 (V_4 - V_3)}{T_h^4 (V_2 - V_1)} \tag{21}$$

Hierin sind die Volumina V_1 bis V_4 unbekannt. V_1 und V_2 sind willkürlich vorgebbar. V_3 folgt aus der Bedingung, dass es durch adiabatische Expansion von V_2 bei gleichzeitiger Abkühlung von T_h auf T_c entsteht, d.h.

$$T_h^3 V_2 \;=\; T_c^3 V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 \;=\; V_2 \frac{T_h^3}{T_c^3} \tag{22}$$

Entsprechend folgt V_4 aus der Bedingung, dass es bei adiabatischer Kompression von T_c auf T_h V_1 ergeben muss:

$$T_c^3 V_4 \;=\; T_h^3 V_1 \quad \Rightarrow \quad V_4 \;=\; V_1 \frac{T_h^3}{T_c^3} \tag{23}$$

[1]

Damit ergibt sich letztendlich

$$\eta \;=\; 1 - \frac{T_c^4 (V_3 - V_4)}{T_h^4 (V_2 - V_1)} \;=\; 1 - \frac{T_c^4 \frac{T_h^3}{T_c^3} (V_2 - V_1)}{T_h^4 (V_2 - V_1)} \;=\; 1 - \frac{T_c}{T_h} \tag{24}$$

[1]

Aufgabe 3:

(a) Es sei der Radius der inneren Kugel R_1 und auf ihr befinde sich die Ladung Q. Aus Symmetriegründen ist das Feld im Zwischenraum von der Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; E(r) \boldsymbol{e}_r \tag{25}$$

Nach dem Gaußschen Gesetz für eine Sphäre vom Radius r mit $R_1 < r < R_2$ gilt dann:

$$4\pi r^2 E(r) \;=\; \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{26}$$

also

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \, \boldsymbol{e}_r \tag{27}$$

[1]

Die entgegengesetzte Ladung auf der äußeren Kugel hat keinen Einfluss auf das Feld im Zwischenraum der beiden Kugelschalen (Gaußscher Satz), sie sorgt lediglich dafür, dass außerhalb der gesamten Anordung kein Feld mehr existiert. Damit ist das Feld im Zwischenraum das oben angegebene $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$. **[1]**

(b) Die Potentialdifferenz zwischen innerer und äußerer Kugelschale ist

$$\phi_1 - \phi_2 \;=\; \int_1^2 d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; \int_{R_1}^{R_2} dr\, E_r(r) \tag{28}$$

[1]

(Die Vorzeichen sind korrekt: Für $Q > 0$ ist die innere Kugel positiv geladen und ihr Potential ist daher größer als das der äußeren Kugel, also $\phi_1 - \phi_2 > 0$. Dies ergibt sich tatsächlich auch so aus dem Integral, denn für $Q > 0$ zeigt $\boldsymbol{E}$ in dieselbe Richtung wie $d\boldsymbol{x}$ bei der Integration, nämlich nach außen, das Integral ist also positiv.)

Also:

$$\phi_1 - \phi_2 \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} dr\, r^{-2} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-r^{-1}\right]_{R_1}^{R_2} \;=\; \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{29}$$

(Nochmaliger Check: Das ist offenbar größer als 0 für $Q > 0$, so wie es sein muss.) **[1]**

(c) Die Kapazität ist definiert als

$$C \;=\; \frac{Q}{U} \tag{30}$$

Mit $U = \phi_1 - \phi_2$ folgt

$$C \;=\; Q\,\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\,\frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \;=\; 4\pi\varepsilon_0\,\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{31}$$

Die Singularität für $R_1 = R_2$ ist vernünftig, denn sie besagt, dass man eine unendliche Ladung braucht um eine endliche Spannung aufzubauen, wenn die Radien der beiden Kugeln zusammenfallen. **[1]**

Aufgabe 4:

(a) Es ist zunächst klar, dass das E-Feld radial vom Draht weggerichtet ist, also proportional zu $\boldsymbol{e}_r$ ist (Zylinderkoordinaten), und sein Betrag nur vom Abstand r zum Draht abhängt. Also

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; E(r)\boldsymbol{e}_r \tag{32}$$

Damit wird das Gaußsche Gesetz für einen den Draht zentrisch umschließenden Zylinder mit Höhe h und Radius r zu:

$$2\pi r h E(r) \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0} h\lambda \tag{33}$$

also

$$E(r) \;=\; \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 r}\lambda \tag{34}$$

und

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) \;=\; E(r)\boldsymbol{e}_r \;=\; \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r \tag{35}$$

[1]

Das B-Feld ist wegen der „Rechte-Hand-Regel" in $\boldsymbol{e}_\varphi$-Richtung gerichtet, und sein Betrag hängt ebenfalls nur vom Abstand r ab:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; B(r)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{36}$$

Damit wird das Amperesche Gesetz für eine den Draht zentrisch umschließende Kreislinie mit Radius r zu:

$$2\pi r B(r) \;=\; \mu_0 I \tag{37}$$

also

$$B(r) \;=\; \frac{\mu_0}{2\pi r}\, I \tag{38}$$

und

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; B(r)\boldsymbol{e}_\varphi \;=\; \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\boldsymbol{e}_\varphi \tag{39}$$

[1]

(b) Die Gesamtkraft auf eine Punktladung, die sich im Abstand r parallel zum Draht mit der Geschwindigkeit v bewegt, ist

$$\boldsymbol{F} \;=\; q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \;=\; q\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_x \;+\; v\boldsymbol{e}_z \times \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_y\right) \tag{40}$$

[1]

Dabei wurde o.B.d.A angenommen, dass sich die Punktladung auf der x-Achse bei $(r, 0, 0)$ befindet und sich mit der Geschwindigkeit $(0, 0, v)$ bewegt. Wegen $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_y = -\boldsymbol{e}_x$ ist dann die Bedingung verschwindender Kraft:

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \;-\; v\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{41}$$

Aufgelöst nach v ergibt dies:

$$v \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\lambda}{I} \tag{42}$$

[1]

Aufgabe 5:

Das „modifizierte Amperesche Gesetz“

$$\int\limits_{\partial A} d\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{H} = \int\limits_{A} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{j} \tag{43}$$

führt mit dem Ansatz

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \;=\; H_a(r)\boldsymbol{e}_\varphi \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \;=\; H_i(r)\boldsymbol{e}_\varphi \tag{44}$$

und einem Kreis vom Radius r um den Draht als Integrationsweg auf

$$\pi r H_a(r) + \pi r H_i(r) \;=\; I \tag{45}$$

[1]

Es fehlt noch der Zusammenhang zwischen Innen- und Außenfeld. Wegen $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ muss die Normalkomponente von $\boldsymbol{B}$ beim Übergang von Materie ins Vakuum stetig sein, also (r-Abhängigkeit im folgenden nicht ausgeschrieben)

$$B_i \;=\; B_a \tag{46}$$

[1]

Mit dem Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$, nämlich

$$H_i \;=\; \frac{1}{\mu_0\mu_r} B_i \tag{47}$$

bzw.

$$H_a \;=\; \frac{1}{\mu_0} B_a \tag{48}$$

folgt hieraus die gesuchte Verbindung zwischen H_a und H_i:

$$H_i \;=\; \frac{1}{\mu_0\mu_r} B_i \;=\; \frac{1}{\mu_0\mu_r} B_a \;=\; \frac{1}{\mu_r} H_a \tag{49}$$

[1]

Zusammen mit der obigen Gleichung sind das zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten H_i und H_a mit der Lösung

$$H_a(r) \;=\; \frac{\mu_r}{1+\mu_r}\,\frac{I}{\pi r} \quad , \quad H_i(r) \;=\; \frac{1}{1+\mu_r}\,\frac{I}{\pi r} \tag{50}$$

[1]

Daraus nun B_a und B_i:

$$B_a(r) \;=\; \frac{\mu_r}{1+\mu_r}\,\frac{\mu_0 I}{\pi r} \;=\; B_i(r) \tag{51}$$

[1]

Zum Schluss ergibt sich die Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ aus der Definition von $\boldsymbol{H}$

$$\boldsymbol{H} \;=\; \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{52}$$

zu

$$M_a(r) \;=\; 0 \tag{53}$$

[1]

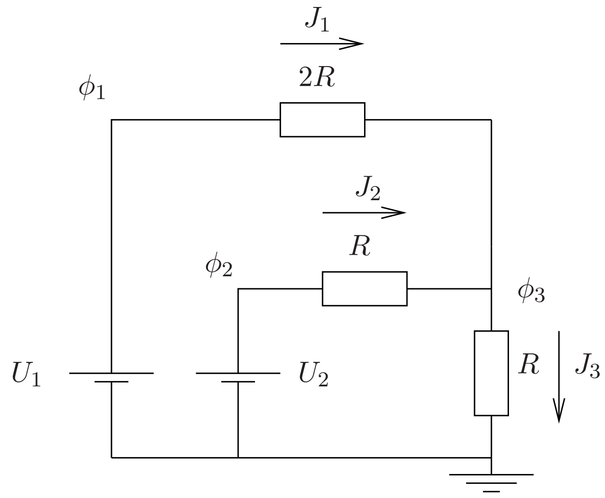
(klar) und

$$M_i(r) \;=\; \frac{\mu_r - 1}{1+\mu_r}\,\frac{I}{\pi r} \tag{54}$$

[1]

Aufgabe 6:

Es ist sehr hilfreich (aber nicht notwendig), wenn man erkennt, dass die beiden oberen R zu einem $2R$ zusammengefasst werden können. Dann kann man die positiven Stromrichtungen z.B. wie in der folgenden Abbildung festlegen und zeichnet noch die Potentialpunkte ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein:



Dann gelten für die große (äußere) Masche die folgenden vorzeichenrichtigen Spannungsgleichungen:

$$\phi_1 - \phi_3 = 2RJ_1 \tag{55}$$
$$\phi_3 - 0 = RJ_3 \tag{56}$$
$$0 - \phi_1 = -U_1 \tag{57}$$

also in Summe

$$0 = 2RJ_1 + RJ_3 - U_1 \tag{58}$$

[1]

Entsprechend für die kleine (innere) Masche:

$$\phi_4 - \phi_3 = RJ_2 \tag{59}$$
$$\phi_3 - 0 = RJ_3 \tag{60}$$
$$0 - \phi_4 = -U_2 \tag{61}$$

und in Summe

$$0 = RJ_2 + RJ_3 - U_2 \tag{62}$$

[1]

Zusätzlich hat man die Stromgleichung am Verzweigungspunkt:

$$J_1 + J_2 = J_3 \tag{63}$$

[1]

Zusammen sind dies 3 Gleichungen für die 3 Unbekannten J_1, J_2, J_3, die man problemlos auflösen kann. Hier geht es aber nur um die Frage, unter welchen Bedingungen an U_1 und U_2 der Strom

$J_1 = 0$ ist. Also setzt man $J_1 = 0$ in die 3 Gleichungen ein und erhält

$$RJ_3 = U_1 \tag{64}$$
$$RJ_2 + RJ_3 = U_2 \tag{65}$$
$$J_2 = J_3 \tag{66}$$

Daraus folgt

$$RJ_3 = U_1 \tag{67}$$
$$2RJ_3 = U_2 \tag{68}$$

also

$$\frac{U_2}{U_1} = 2 \tag{69}$$

[2]

Aufgabe 7:

(a) Die abgestrahlte Leistung ergibt sich als Integral des Zeitmittelwerts des Poynting-Vektors

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{70}$$

über eine Sphäre mit Mittelpunkt im Ursprung. **[1]**

Der Poynting-Vektor für den Hertzschen Dipol ist

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 E_\vartheta \boldsymbol{e}_\vartheta \times B_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi = -\varepsilon_0 c^2 E_\vartheta B_\varphi \boldsymbol{e}_r \tag{71}$$

[1]

E_ϑ und B_φ sind von der Form

$$E_\vartheta = \frac{\alpha}{r} \sin\vartheta \sin(\omega t - kr) \quad , \quad B_\varphi = -\frac{\beta}{r} \sin\vartheta \sin(\omega t - kr) \tag{72}$$

mit positiven Konstanten α, β. Also

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin^2\vartheta \sin^2(\omega t - kr) \boldsymbol{e}_r \tag{73}$$

und sein Zeitmittelwert ist

$$\langle \boldsymbol{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \frac{\alpha\beta}{r^2} \sin^2\vartheta \boldsymbol{e}_r \tag{74}$$

[1]

Das Integral über die im Ursprung zentrierte Sphäre mit Radius r ist

$$\int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin\vartheta \, \boldsymbol{e}_r \cdot \langle \boldsymbol{S} \rangle = \pi \varepsilon_0 c^2 \alpha\beta \int_0^\pi d\vartheta \sin^3\vartheta = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_0 c^2 \alpha\beta \tag{75}$$

[1]

Also:

$$\bar{P} = \frac{4\pi}{3} \varepsilon_0 c^2 \frac{J_0^2 L^2 \omega^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 c^5} = \frac{J_0^2 L^2 \omega^2}{12\pi \varepsilon_0 c^3} \tag{76}$$

[1]

(b) Die momentane Wärmeleistung eines Ohmschen Widerstandes ist

$$P = RJ^2 \tag{77}$$

Mit $J(t) = J_0 \sin \omega t$ ist die Energiedissipation:

$$\bar{P} \; = \; R J_0^2 \overline{\sin^2 \omega t} \; = \; \frac{1}{2} R J_0^2 \tag{78}$$

[1]

Dies soll nun gleich der in (a) berechneten abgestrahlten Leistung des Senders sein, also

$$\frac{1}{2} R J_0 \; = \; \frac{J_0^2 L^2 \omega^2}{12 \pi \varepsilon_0 c^3} \tag{79}$$

Daraus folgt

$$R \; = \; \frac{L^2 \omega^2}{6 \pi \varepsilon_0 c^3} \tag{80}$$

[1]

und wegen $\omega = kc = 2\pi c/\lambda$:

$$\begin{aligned} R \; &= \; \frac{2\pi}{3 \varepsilon_0 c} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 && (81) \\ &= \; \frac{2\pi}{3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \, \mathrm{Vm/As} \cdot 2.99 \cdot 10^8 \, \mathrm{m/s}} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 && (82) \\ &= \; 791 \Omega \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 && (83) \end{aligned}$$

[1]