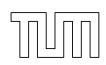


## TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

#### Zentrum Mathematik



Prof. Dr. Simone Warzel Dr. Michael Prähofer

# Mathematik 3 für Physiker (Analysis 2) MA9203

Sommersemester 2015 Probeklausur (29.06.2015)

#### 1. Krümmung einer Klothoide

(8 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Krümmung  $\kappa(t)$  der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos(u^2/2) \, \mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin(u^2/2) \, \mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle t > 0 gleich ihrer Länge L(t) ist.

HINWEIS: Die Krümmungsformel lautet  $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$ , wobei  $\vec{r} = \binom{x}{y}$ .

### 2. Stetigkeit, Differenzierbarkeit

(7 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

- (a) Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist. Hinweis: Bestimmen Sie  $x_n$ , so dass  $f(x_n, y_n)$  für  $y_n = \frac{1}{n}$  konstant ist.
- (b) Die partielle Ableitung  $\partial_1 f(0,0)$  ist
  - $\square -1$   $\square 0$   $\square \frac{1}{2}$   $\square 1$   $\square$  nicht definiert.
- (c) Die partielle Ableitung  $\partial_2 f(0,0)$  ist
  - $\Box -1$   $\Box 0$   $\Box \frac{1}{2}$   $\Box 1$   $\Box$  nicht definiert.
- (d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt?

$$\Box \quad Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Box \ Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Box \ Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $\square$  Df(0) ist nicht definiert  $\square$  Df(0) hängt von der betrachteten Kurve ab

#### 3. Kurvenintegral und Integrabilität

(9 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld  $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ,  $v(x) = (x_2x_3, x_3x_1, x_1x_2)$  und die Kurve  $\gamma: [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (1, 1 + \cos t, 1 + \sin t)$ .

- (a) Ist v konservativ? Begründen Sie.
- (b) Berechnen Sie das Kurvenintegral  $\int_{\gamma} v(y) \cdot dy$ .
- (c) Ist  $\gamma((0,\pi))$  eine Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ ? Wenn ja, welche Dimension hat sie?
  - $\Box$  Ja,  $\dim(\gamma((0,\pi))) =$

□ Nein.

4.	Kettenrege	
----	------------	--

(5 Punkte)

Seien  $v, w \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  und  $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Kurve. Beweisen Sie für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(\gamma(t))\cdot w(\gamma(t)) = \sum_{j=1}^{n} \left[ w_j(\gamma(t))\nabla v_j(\gamma(t)) + v_j(\gamma(t))\nabla w_j(\gamma(t)) \right] \cdot \dot{\gamma}(t).$$

#### 5. Extrema

(10 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$ .

- (a) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f.
- (b) Unter der Nebenbedingung  $x_2 = 1$  besitzt f bei  $x_1 = -1$

□ ein lokales Maximum

 $\square$  ein lokales Minimum

 $\square$  einen Sattelpunkt bei  $x_1 = -1$ 

#### 6. Taylorpolynom

(8 Punkte)

Geben Sie das Taylorpolynom 5. Ordnung von  $f(x,y) = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}$  um (0,0) an.

$$T_5 f((x,y);(0,0)) =$$

#### 7. Inverse Funktionen

(6 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ,  $f(x,y) = (x^3 + 2xy + y^2, x^2 + y)$ . Zeigen Sie, dass f in einer Umgebung von (1,1) invertierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion im Punkt f(1,1).

#### 8. Tangentialraum

(4 Punkte)

Sei  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot x$ . Dann ist der Graph  $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^4$  eine 3-dimensionale  $C^{\infty}$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^4$ . Geben Sie möglichst explizit eine Basis von  $T_pG_f$  an, wobei  $p \in G_f$ .