....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

2. April 2015, 8:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**
   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt{\mathrm{i}}$ an.

$\mathrm{Re}\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right) =$	$\mathrm{Im}\left(\sqrt{\mathrm{i}}\right) =$

(b) Zeigen Sie, dass $\arg(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}) = \frac{\alpha}{2}$, falls $\alpha \in (-\pi, \pi)$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Welchen Grenzwert besitzt die Folge $\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-2)^n}{3^n}$? **[2]**

☐ $-\dfrac{3}{4}$ ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{3}{5}$ ☐ $\dfrac{2}{3}$ ☐ $\dfrac{9}{10}$ ☐ ∞ ☐ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n}$? **[3]**

☐ bei $-\infty$ ☐ in $(-\infty,0)$ ☐ bei 0 ☐ in $(0,\infty)$ ☐ bei $+\infty$ ☐ undefiniert

4. **Potenzreihen** **[5 Punkte]**

Gegeben ist die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} z^n$. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R.

5. **Zwischenwertsatz** **[7 Punkte]**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$.
HINWEIS: Man betrachte die Funktion $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$.

6. **Ableitungen der Umkehrfunktion** **[6 Punkte]**
Sei $f : (-2, 0) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare, streng monoton steigende und surjektive Funktion mit $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 3$. Wie lautet die Umkehrfunktion und ihre Ableitungen im Punkt 1?

$f^{-1}(1) =$	$(f^{-1})'(1) =$	$(f^{-1})''(1) =$

7. **Integration** **[6 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ und $f'(x) < 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 f^{-1}(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

8. **Fourierreihen** **[9 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k \in \mathbb{C}$, wobei $\hat{f}_0 = 0$. Sei F eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ von F gilt:

$$\hat{F}_k = \frac{\hat{f}_k}{\mathrm{i}k} \quad \text{für } k \neq 0$$

9. **Matrixexponential** **[9 Punkte]**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie A^n für $n \in \mathbb{N}$. **[3]**

$A^n =$

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. **[4]**

$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

$x(t) =$