am 28.02.2014

Name: Bbo Julian

Matrikelnummer: 03642940

Aufgabe Nr.:	1	2	3	4	5	Σ
Punktezahl:	11	14	11	13	11	60
davon erreicht:						

- Bitte schreiben Sie leserlich Ihren **Namen** und Ihre **Matrikelnummer** auf diese Seite sowie auf **jeden** beschriebenen Papierbogen.
- Geben Sie immer den Lösungsweg an!
- Lesen Sie sich die Aufgabenstellungen zunächst aufmerksam durch!
- Diese Klausur besteht aus **5 Aufgaben**. Insgesamt können **60 Punkte** erreicht werden. Die Bearbeitungszeit ist **90 Minuten.**
- Geben Sie dieses **Angabenblatt** unbedingt ab.

Aufgabe 1 .... *11 Punkte*

Ein in x-Richtung zeigender, elektrischer Dipol $\vec{p} = (p, 0, 0)$ befindet sich am Punkt $\vec{a} = (0, 0, a)$ (mit $a > 0$) über einer in der xy-Ebene liegenden, geerdeten (unendlich ausgedehnten) Metallplatte.

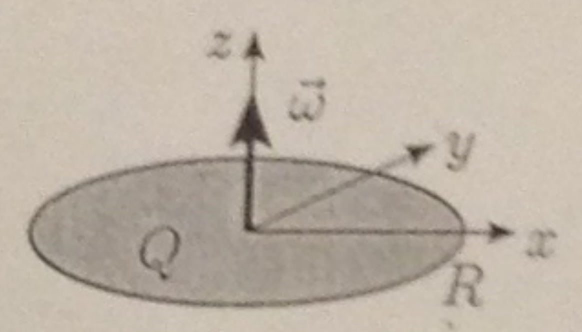
(a) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie unter Verwendung der Methode der Spiegelladungen das Potential $\Phi(\vec{r})$ im oberen Halbraum $z > 0$ zu der Randbedingung, dass es auf der Metallplatte ($z = 0$) verschwindet. Überprüfen Sie diese Randbedingung explizit.

(b) *(3 Punkte)* Berechnen Sie die auf der Metallplatte influenzierte Flächenladungsdichte $\sigma(x, y)$.

(c) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie ausgehend vom Dipol-Dipol-Wechselwirkungspotential die Kraft $\vec{F} \sim \vec{e}_z$, die der Spiegeldipol $\vec{p}\,'$ am Spiegelpunkt $\vec{a}\,'$ auf den Dipol $\vec{p}$ am Punkt $\vec{a}$ ausübt.

Aufgabe 2 .... *14 Punkte*

Eine in der xy-Ebene liegende, homogen geladene Kreisscheibe mit Radius R und vernachlässigbarer Dicke trägt die Gesamtladung Q. Sie rotiert starr ($\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$) mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$ um eine Achse senkrecht durch dem Kreismittelpunkt.



(a) *(3 Punkte)* Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r})$ im ganzen Raum an und überprüfen Sie die Divergenzfreiheit, $\mathrm{div}\,\vec{j}(\vec{r}) = 0$.

(b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie (*ohne* Verwendung von Symmetrieargumenten) das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ auf der z-Achse, d.h. für die Punkte $\vec{r} = (0, 0, z)$.

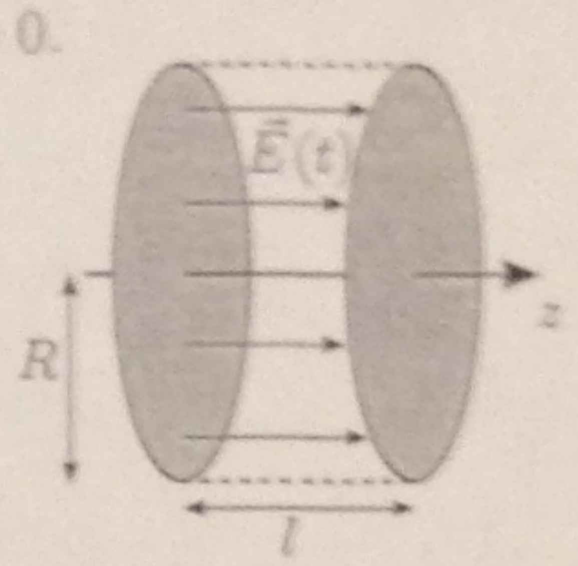
Hinweis: Sie können das folgende unbestimmte Integral benutzen $\int dx\, \frac{x^3}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x^2 + 2a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

(c) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ und das zugehörige Dipolfeld $\vec{B}_{\mathrm{dip}}$ auf der z-Achse. Verifizieren Sie, dass für große Entfernungen auf der z-Achse das Ergebnis aus Teilaufgabe (b) mit diesem Dipolfeld übereinstimmt.

Hinweis: Es gilt die Taylorreihenentwicklung $1/\sqrt{1+x} = 1 - x/2 + 3x^2/8 + \ldots$.

Aufgabe 3 .... *11 Punkte*

Ein Plattenkondensator aus zwei parallelen kreisförmigen Platten im Abstand l mit Radius R, deren Mittelpunkte auf der z-Achse liegen, wird langsam aufgeladen. Das zeitabhängige elektrische Feld zwischen den Platten hat die Form $\vec{E}(\vec{r},t) = E(t)\,\vec{e}_z$ mit $dE(t)/dt = K =$ konstant und $E(0) = 0$.



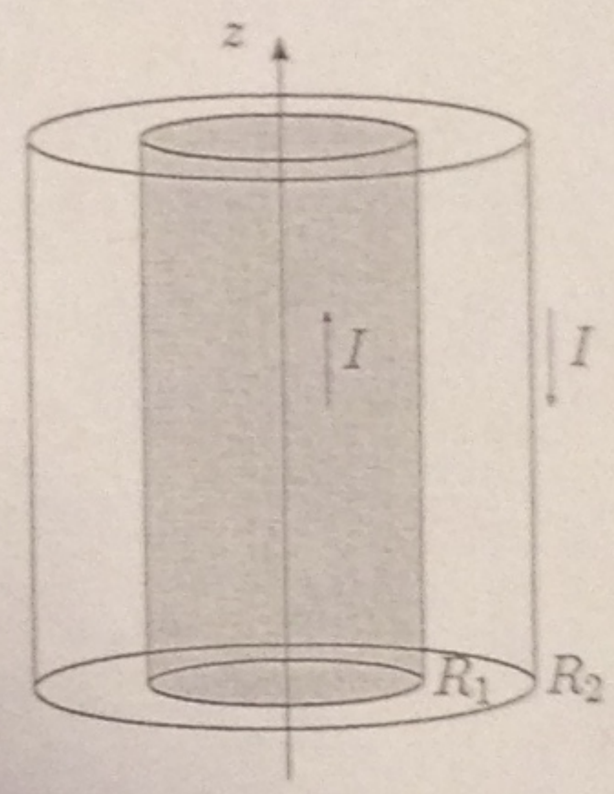
(a) *(4 Punkte)* Berechnen Sie das durch den Verschiebungsstrom induzierte Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ als Funktion des Abstandes ρ von der Symmetrieachse des Kondensators. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld (wie bei einem stromdurchflossenen geraden Leiter) nur eine azimutale Komponente hat: $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi$.

(b) *(2 Punkte)* Berechnen Sie den Poynting-Vektor.

(c) *(5 Punkte)* Berechnen Sie explizit den gesamten Energiefluss J in den Kondensator hinein, sowie die im Kondensator gespeicherte Feldenergie $\mathcal{E}_{\text{em}}(t)$. Zeigen Sie, dass $d\mathcal{E}_{\text{em}}(t)/dt = J$ gilt.

Aufgabe 4 .... *13 Punkte*

Ein (sehr langes) gerades Koaxialkabel besteht aus einem inneren, leitenden Vollzylinder vom Radius R_1 und konzentrisch dazu einem leitenden Zylindermantel mit Radius $R_2 > R_1$ und vernachlässigbarer Dicke, welcher als Rückleitung dient. Die Zylinderachse liegt auf der z-Achse.



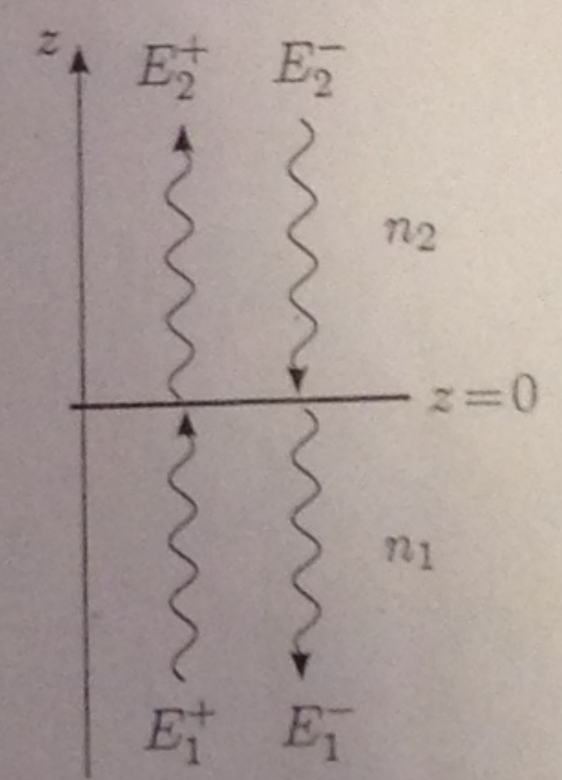
(a) *(3 Punkte)* Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{r}) \sim \vec{e}_z$ im ganzen Raum an, wenn der hin- und rückfließende Strom I jeweils gleichmäßig über den Leiterquerschnitt verteilt ist.

(b) *(7 Punkte)* Berechnen Sie das zugehörige (stetige) Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = A(\rho)\,\vec{e}_z$ im ganzen Raum.
Hinweis: Da die Funktion $A(\rho)$ nur vom Radius ρ abhängt, gilt für den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten: $\Delta A(\rho) = A''(\rho) + \frac{1}{\rho}A'(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}[\rho A'(\rho)]$.

(c) *(3 Punkte)* Berechnen Sie die Selbstinduktivität pro Längeneinheit L/l des Koaxialkabels.

Aufgabe 5 .... *11 Punkte*

Gegeben sei die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei dielektrischen Medien ($j = 1,2$) mit den Brechungsindizes $n_j = \sqrt{\epsilon_j}$. In beiden Medien gibt es ebene elektromagnetische Wellen $\vec{E}_j(z,t) = \{E_j^+ e^{i(k_j z-\omega t)} + E_j^- e^{i(-k_j z-\omega t)}\}\,\vec{e}_x$ mit vorwärts und rückwärts laufenden Komponenten, die senkrecht auf die Grenzfläche treffen.



(a) *(6 Punkte)* Zeigen Sie, dass die Stetigkeitsbedingungen für die transversalen Felder auf folgenden linearen Zusammenhang zwischen den komplexen Feldamplituden führen

$$\begin{pmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie die Koeffizienten α und β in Abhängigkeit von den Brechungsindizes n_1, n_2.

Betrachten Sie nun die Brechung und Reflexion einer in Medium 1 in positive z-Richtung laufenden, auf die Grenzfläche treffenden Welle (es gilt somit $E_2^- = 0$).

(b) *(2 Punkte)* Drücken Sie den zeitlichen Mittelwert $\langle S_j^\pm \rangle$ der Energiestromdichte (in Richtung $\pm\vec{e}_z$) durch die elektrische Feldamplitude $E_j^\pm$ aus.

(c) *(3 Punkte)* Berechnen Sie das Reflexionsvermögen $R = \langle S_1^- \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ und das Transmissionsvermögen $T = \langle S_2^+ \rangle / \langle S_1^+ \rangle$ jeweils als Funktion von n_1, n_2 und zeigen Sie, dass $R + T = 1$ gilt.