Technische Universität München **Sommersemester 2007**

Theoretische Physik 2: ELEKTRODYNAMIK, DVP

Lösungen 21.09.2007

Aufgabe 1

(a) Allgemein gilt: $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})$

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Analoge Rechnungen liefern: $\vec{B}_1(\vec{r}) = \vec{B}_2(\vec{r}) = \vec{B}_3(\vec{r})$
Ursache: Eichinvarianz

(b) Allgemein:

	kontinuierlich	diskret
Monopolm.	$Q = \int \rho(\vec{x}')d^3x'$	$Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$
Dipolm.	$\vec{p} = \int \vec{x}'\rho(\vec{x}')d^3x'$	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i\vec{x}_i$
Quadrupolm.	$Q_{kl} = \int (x_k'x_l' - \frac{1}{3}r'^2\delta_{kl})\rho(\vec{x}')d^3x'$	$Q_{kl} = \sum_{i=1}^{n} q_i(x_{ik}x_{il} - \frac{1}{3}r_i^2\delta_{kl})$

i.)
Ladung 1: +q mit den Koordinaten $(0, d, 0)^T$
Ladung 2: +q mit den Koordinaten $(0, -d, 0)^T$
Ladung 3: -2q mit den Koordinaten $(0, 0, 0)^T$

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=1}^{3} q_i = +q + q - 2q = 0\,, \\
\vec{p} &= \sum_{i=1}^{3} q_i\vec{x}_i = +q(0,d,0)^T + q(0,-d,0)^T - 2q(0,0,0)^T = \vec{0} \quad \text{und} \\
Q_{xx} &= q(-\frac{1}{3}d^2) + q(-\frac{1}{3}d^2) = -\frac{2}{3}qd^2 \\
Q_{yy} &= q(d^2 - \frac{1}{3}d^2) + q(d^2 - \frac{1}{3}d^2) - 2q(0-0) = \frac{4}{3}qd^2 \\
\sum Q_{ii} &= 0 \Rightarrow Q_{zz} = -\frac{2}{3}qd^2 \quad \text{und} \quad Q_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j
\end{aligned}$$

ii.)
Ladung 1: +q mit den Koordinaten $r(\cos(\pi/6), -\sin(\pi/6), 0)^T$
Ladung 2: +q mit den Koordinaten $-r(\cos(\pi/6), \sin(\pi/6), 0)^T$
Ladung 3: -2q mit den Koordinaten $r(0, 1, 0)^T$
$\Rightarrow Q = 0\,, \vec{p} = -3qr(0,1,0)^T\,, Q_{xx} = -Q_{yy} = \frac{3}{2}qr^2\,, Q_{zz} = 0\,, Q_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad i \neq j$

iii.)
Ladung 1: +q mit den Koordinaten $d(1,1,0)^T$
Ladung 2: -q mit den Koordinaten $d(-1,1,0)^T$
Ladung 3: +q mit den Koordinaten $d(-1,-1,0)^T$
Ladung 4: -q mit den Koordinaten $d(1,-1,0)^T$
$\Rightarrow Q = 0\,, \vec{p} = \vec{0}$ und $Q = \begin{pmatrix} 0 & 4qd^2 & 0 \\ 4qd^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

(a) $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r})$ mit $\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e_z$ folgt: $\phi(\vec{r}) = -E_0 z + c$

(b)

$$\phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(\vec{r}-\vec{r}_p)\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}_p|^3} + c'$$

Wegen Symmetrie: $\vec{r}_p = 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \phi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{R^3} + c' = E_0 z + c \qquad (\phi_p + \phi_0 = 0) \\
\Rightarrow \quad & c = c' \quad \text{und} \quad \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 \hat{e}_z
\end{aligned}$$

(c) $\phi = \phi_p + \phi_0$, $\phi|_{\text{Oberfläche}} = 0$
außerhalb:

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}\cdot\vec{p}}{r^3} - E_0 z = \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3 z}{r^3} - E_0 z = E_0 z\frac{R^3}{r^3} - E_0 z \\
\Rightarrow E &= -\nabla\phi = E_0\hat{e}_z\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) + E_0 z R^3 \nabla\frac{1}{r^3} = \\
&= E_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\hat{e}_z - 3E_0 R^3 z\frac{\vec{r}}{r^5}
\end{aligned}$$

innerhalb: $E = \text{const} \Rightarrow \phi(\vec{r}) = 0$

(d)

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= n\cdot 4\pi\varepsilon_0 E_0 R^3 \hat{e}_z \\
&= n\cdot 4\pi\varepsilon_0 \vec{E} \\
\Rightarrow & \quad \chi = 4\pi n R^3 \\
& \quad \varepsilon = 1 + 4\pi n R^3.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a) Die Lorentz-Eichung besagt

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0.$$

Berechnen wir $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{p}_0\right) = -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{p}_0\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)\\
&= -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}(\vec{p}_0\cdot\hat{e}_r)\left(\frac{\mathrm{i}k}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\\
&= \frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{p}_0\cdot\vec{k}_r)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}+\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi r^2}(\vec{p}_0\cdot\hat{e}_r)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)},
\end{aligned}$$

wobei wir die Identität

$$\vec{\nabla}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)=\hat{e}_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)=\hat{e}_r\left(\frac{\mathrm{i}k}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{\mathrm{i}kr}. \tag{1}$$

benuzt haben.

Für die Zeitableitung des skalaren Potenzials folgt

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\omega}{c_0^2}\frac{(\vec{p}_0\cdot\vec{k}_r)}{4\pi\varepsilon_0 r}e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)} \overset{\mu_0\varepsilon_0=1/c_0^2}{=} -\frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{p}_0\cdot\vec{k}_r)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}.$$

Schließlich:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi r^2}(\vec{p}_0\cdot\hat{e}_r)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}=0+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

(b) Magnetisches Feld:

$$\begin{aligned}
\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} &= -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{\nabla}\times\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{p}_0\right) = -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}e^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{\nabla}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\right)\times\vec{p}_0\\
&= -\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi}(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)\left(\frac{\mathrm{i}k}{r}-\frac{1}{r^2}\right)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\\
&= \frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}+\mathrm{i}\frac{\mu_0\omega}{4\pi r^2}(\hat{e}_r\times\vec{p}_0)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\\
&= \frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

Das elektrisches Feld wird durch $\vec{E}=-\vec{\nabla}\Phi-\partial\vec{A}/\partial t$ gegeben. Für den ersten Teil gilt

$$\begin{aligned}
-\vec{\nabla}\Phi &= \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r}\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0\right) = \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}k\left\{\vec{\nabla}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r^2}\right)(\vec{r}\cdot\vec{p}_0)+\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r^2}\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{p}_0)\right\}\\
&= \mathrm{i}\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}k\left\{\left(-\frac{2}{r^3}+\frac{\mathrm{i}k}{r^2}\right)e^{\mathrm{i}kr}\hat{e}_r(\vec{r}\cdot\vec{p}_0)+\frac{e^{\mathrm{i}kr}}{r^2}\vec{p}_0\right\}\\
&= \mathrm{i}\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0}k\frac{\mathrm{i}k}{r^2}\hat{e}_r(\vec{r}\cdot\vec{p}_0)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\vec{k}_r(\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right).
\end{aligned}$$

Für $-\partial\vec{A}/\partial t$ ergibt sich

$$-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\omega^2\vec{p}_0 = \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\vec{p}_0.$$

Es folgt:

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= -\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\vec{k}_r(\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0) + \frac{k^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\vec{p}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= -\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\vec{k}_r(\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0) - k^2\vec{p}_0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= -\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\vec{k}_r(\vec{k}_r\cdot\vec{p}_0) - (\vec{k}_r\cdot\vec{k}_r)\vec{p}_0\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)\times\vec{k}_r\right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right). \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(c) Da $(\vec{k}_r \times \vec{p}_0) \times \vec{k}_r = k^2(\hat{e}_r \times \vec{p}_0) \times \hat{e}_r$ ist zu r senkrecht, folgt aus Gl. (2), dass $\vec{E}$ linealpolariesiert in diese Richtung ist.

(d)

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left[(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)\times\vec{k}_r\right]\right) \times \mathrm{Re}\left(\frac{\mu_0\omega}{4\pi r}(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)e^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\omega}{4\pi r}\cos^2(kr-\omega t)\left[(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)\times\vec{k}_r\right]\times(\vec{k}_r\times\vec{p}_0) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{\omega}{4\pi r}\cos^2(kr-\omega t)(\vec{k}_r\times\vec{p}_0)^2\vec{k}_r,
\end{aligned}
$$

wobei wir die Identität $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$ benutzt haben. Wenn θ der Winkel zwischen $\vec{p}_0$ und $\vec{r}$ ist, dann

$$
\vec{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\omega}{4\pi}\cos^2(kr-\omega t)k^3 p_0^2\sin^2\theta\hat{e}_r = \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\cos^2(kr-\omega t)k^2 c_0 p_0^2\sin^2\theta\hat{e}_r.
$$

Die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie:

$$
\begin{aligned}
\oint \vec{S}\cdot d\vec{\sigma} &= \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0 r^2}\cos^2(kr-\omega t)k^4 c_0 p_0^2\int r^2\sin^2\theta\, d\Omega \\
&= \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\cos^2(kr-\omega t)k^4 c_0 p_0^2 2\pi\int_{-1}^{1}\sin^2\theta\, d\cos\theta \\
&= \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0}\cos^2(kr-\omega t)k^4 c_0 p_0^2 2\pi\frac{4}{3} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0}\cos^2(kr-\omega t)k^4 c_0 p_0^2.
\end{aligned}
$$

Zum Schluß berechnen wir das zeitliche Mittel und finden für die pro Zeiteinheit abgestrahlte Energie den Wert

$$
\frac{1}{12\pi\varepsilon_0}k^4 c_0 p_0^2.
$$

Aufgabe 4

(a)

$$
\begin{aligned}
E_1' &= E_1 = 0 \\
E_2' &= \gamma(E_2 - c_0\beta B_3) = -\gamma c_0\beta B_3 = -2\gamma\beta E_0\cos\theta \\
E_3' &= \gamma(E_3 + c_0\beta B_2) = \gamma E_0(1 + 2\beta\sin\theta).
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
B'_1 &= B_1 = 0 \\
B'_2 &= \gamma(B_2 + (\beta/c_0)E_3) = (\gamma/c_0)E_0(2\sin\theta + \beta) \\
B'_3 &= \gamma(B_3 - (\beta/c_0)E_2) = 2(\gamma/c_0)E_0\cos\theta
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\vec{E}' \parallel \vec{B}' \quad &\Rightarrow \quad \frac{E'_2}{B'_2} = \frac{E'_3}{B'_3} \\
&\Rightarrow \quad \frac{-2\gamma\beta E_0\cos\theta}{(\gamma/c_0)E_0(2\sin\theta+\beta)} = \frac{\gamma E_0(1+2\beta\sin\theta}{2(\gamma/c_0)E_0\cos\theta} \\
&\Rightarrow \quad \frac{-2\beta\cos\theta}{2\sin\theta+\beta} = \frac{1+2\beta\sin\theta}{2\cos\theta} \\
&\Rightarrow \quad 2\beta^2 + 5\beta + 2\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16\sin^2\theta}}{4\sin\theta}.
\end{aligned}$$

Falls $\theta = 0$ ist, sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ parallel und, dann, muss $\beta = 0$ sein. Deshalb ist Plus das richtige Vorzeichen in der letzten Gleichung:

$$\beta = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16\sin^2\theta}}{4\sin\theta}.$$

Für kleine Werte von θ gilt:

$$\beta \approx \frac{-5 + 5(1 - \frac{16}{25}\theta^2)^{1/2} + \mathcal{O}(\theta^4)}{4\theta} \approx \frac{-5+5-\frac{8}{5}\theta^2}{4\theta} + \mathcal{O}(\theta^3) \approx -\frac{2}{5}\theta + \mathcal{O}(\theta^3),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots \approx 1 + \frac{2}{25}\theta^2 + \mathcal{O}(\theta^4)$$

$$\vec{E}' \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5}\theta \\ 1 \end{pmatrix} E_0 + \mathcal{O}(\theta^2) \quad \text{und} \quad \vec{B}' \approx \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{8}{5}\theta \\ 2 \end{pmatrix} \frac{E_0}{c} + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Für $\theta \to \pi/2$, $\beta \to -1/2$, $\gamma \to 2/\sqrt{3}$, $\vec{E}' = 0 + \mathcal{O}(\pi/2 - \theta)$ und $\vec{B}' \approx \sqrt{3}(E_0/c_0)\hat{e}_y$.