Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Diplomvorprüfung

HÖHERE MATHEMATIK II

Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. H. Spohn

5. September 2005, 16:30 – 18:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: zwei selbsterstellte DIN A4 Blätter

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

....

Note

Gruppe

	I
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
$\sum$	

I ....

Erstkorrektur

II ....

Zweitkorrektur

Aufgabe 1. **[ca. 6 Punkte]**

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reellwertige **monotone** Folge. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☐	☒	(x_n) besitzt mindestens einen Häufungswert in $\mathbb{R}$.
☒	☐	Falls die Folge (x_n) beschränkt ist, besitzt sie einen Grenzwert.
☒	☐	Jeder reelle Grenzwert von (x_n) ist zugleich ein Häufungswert.
☒	☐	Ist (x_n) unbeschränkt, so konvergiert $(\frac{1}{x_n})$ gegen 0.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☒	☐	f ist beschränkt.
☐	☒	f' ist beschränkt.
☐	☒	Es gibt einen Punkt $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = 0$.
☒	☐	Es gibt einen Punkt $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$.

(c) Sei (f_n) eine Folge differenzierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in [a,b]$, und sei $x_0 \in [a,b]$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffen:

richtig	falsch	
☐	☒	Wenn $\lvert f_n(x)\rvert < c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
☒	☐	Wenn $\lvert f_n(x)\rvert < c \in \mathbb{R}$ für alle $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
☒	☐	Wenn $\sup\limits_{x\in[a,b]} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.
☐	☒	Wenn $\sup\limits_{x\in[a,b]} \lvert f_n(x) - f(x)\rvert \to 0$, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n'(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Hinweis: Jede Zeile wird mit höchstens einem halben Punkt bewertet.

Aufgabe 2. Konvergenz (Multiple Choice) [**ca. 5 Punkte**]

a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$$

☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☒ $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{11}{12}$ ☐ $\frac{13}{6}$

b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$?

☐ $=-\infty$ ☐ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☒ undefiniert

c) Wie groß ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{n}^{\sqrt{n}}\,x^n$$

☐ 0 ☒ 1 ☐ e ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ ∞

d) Für welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe absolut? (Mehrere Antworten können zutreffen.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{2^n}$$

☐ $z=2i$ ☐ $z=1+i$ ☒ $z=1$ ☒ $z=-i$ ☒ $z=-\frac{1}{2}$

e) Durch welchen Wert ist die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\cos^2 x-1}{x^2}$ bei $x=0$ stetig fortsetzbar?

☒ -1 ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ 0

Aufgabe 3. HDI [**ca. 3 Punkte**]

Definieren Sie den Begriff Stammfunktion und formulieren Sie den Fundamentalsatz (Hauptsatz) der Differential- und Integralrechnung aus der Vorlesung.

Für $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, heißt $F : D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. **[1]**

Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung besagt:

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt für jede Stammfunktion F von f, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

[2]

Aufgabe 4. Konvexität [**ca. 4 Punkte**]

Zur Erinnerung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $\alpha \in [0, 1]$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Zeigen Sie:
Gilt für die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dass ihr Graph nie unterhalb ihrer Tangenten liegt, so ist f konvex, in Formeln:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ f(b) \geq f(a) + (b-a)f'(a) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist konvex.}$$

Hinweis: Setzen Sie $a = (1-\alpha)x + \alpha y$.

Beweis. Seien $\alpha \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, $a = (1-\alpha)x + \alpha y$. Zu zeigen ist

$$f(a) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a) \quad \text{und} \quad f(y) \geq f(a) + (y-a)f'(a),$$

[2]

also auch

$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \geq f(a) + \big((1-\alpha)(x-a) + \alpha(y-a)\big)f'(a) = f(a),$$

[1]

da $(1-\alpha)(x-a) + \alpha(y-a) = (1-\alpha)\alpha(x-y) + \alpha(1-\alpha)(y-x) = 0$. **[1]**

Aufgabe 5. Taylorreihe [**ca. 5 Punkte**]

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Wie lauten die Koeffizienten a_n der Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$?

☐ $a_n = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☒ $a_n = \dfrac{i^n + (-i)^n}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☐ $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{2n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☐ $a_n = \dfrac{i^n - i^{-n}}{2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

b) Wie groß ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, mit a_n aus Teilaufgabe a)?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ e ☐ ∞

c) Wie ergeben sich die Koeffizienten b_n der Taylorreihe $\arctan(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ aus den Koeffizienten a_n aus Teilaufgabe a)?

☐ $b_n = a_n$

☐ $b_0 = 0,\ b_n = a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

☐ $b_n = n\, a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☒ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$

☐ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

☐ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 6. Integration **[ca. 6 Punkte]**

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

a) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ ☐ divergent ☐ 1 ☒ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{4}{3}$

b) $\int_{0}^{1} dx \, \log x$ ☐ divergent ☒ -1 ☐ -2 ☐ $\frac{1}{2}$

c) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}}$ ☒ divergent ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$

a)

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{-1+\epsilon}^{0} dx \, (x+1)^{-1/3} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left[\frac{(x+1)^{2/3}}{2/3} \right]_{-1+\epsilon}^{0} = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{3}{2} \left(1 - \epsilon^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$

[2]

b)

$$\int_{0}^{1} dx \, \log x = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\epsilon}^{1} dx \, 1 \cdot \log x = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left([x \log x]_{\epsilon}^{1} - \int_{\epsilon}^{1} dx \right) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (-1 + \epsilon - \epsilon \log \epsilon) = -1$$

Dabei haben wir benutzt, dass $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \epsilon \log \epsilon = 0$ (Regel von de l'Hospital). **[2]**

c) Aus der $\cosh$-Reihe erhalten wir

$$\cosh x - 1 = \frac{x^2}{2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2(n+1))!} \right) \leq \frac{x^2}{2} \left(2 \cosh x - 1 \right).$$

Daraus folgt

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}} \geq \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}} \geq \sqrt{2} \int_{0}^{1} \frac{dx}{x \sqrt{2 \cosh x - 1}} \geq \sqrt{\frac{2}{2 \cosh 1 - 1}} \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \infty.$$

[2]

Aufgabe 7. Supremum einer Menge **[ca. 3 Punkte]**
Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt, und sei $A + B = \{a + b \,|\, a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie die Ihnen aus den Übungen bekannte Tatsache, dass

$$\sup (A + B) = \sup A + \sup B.$$

Wir benutzen die Abkürzungen $\alpha = \sup A$ und $\beta = \sup B$. Sei $a \in A$, $b \in B$ beliebig. Da $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$, folgt $a + b \leq \alpha + \beta$, was bedeutet, dass $\alpha + \beta$ eine obere Schranke an $A + B$ ist. **[1]**

Es bleibt also zu zeigen, dass $\alpha + \beta$ die *kleinste* obere Schranke ist. Die Supremumseigenschaften von α und β liefern aber, dass für $\epsilon/2 > 0$ ein $a_0 \in A$ und ein $b_0 \in B$ existieren, sodass $a_0 > \alpha - \epsilon/2$ und $b_0 > \beta - \epsilon/2$. **[1]**

Daraus folgt, dass $a_0 + b_0 > (\alpha + \beta) - \epsilon$ und somit die Behauptung. **[1]**

Aufgabe 8. Inhomogenes Differentialgleichungssystem **[ca. 4 Punkte]**

Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie den Propagator e^{tA}. Wie lautet er bei $t = 1$?

☒ $\begin{pmatrix} e & 0 & 2e \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} e & 0 & e \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} e & 0 & 2e \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2e \\ e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

b) Berechnen Sie die erste Komponente von $x(t)$ zur Zeit $t = 1$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = (0, 0, 0)$ (benutzen Sie die Formel $x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t ds\, e^{(t-s)A}b(s)$).

☐ $\frac{1}{2}\left(2e + \frac{1}{e}\right)$ ☒ $\frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$ ☐ $\frac{1}{2}\left(e - \frac{2}{e}\right)$ ☐ $\frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$

a) Wir zerlegen die Matrix A in eine Summe einer Diagonalen und einer nilpotenten, die miteinander kommutieren

$$A = B + C, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$e^{t(B+C)} = e^{tB}e^{tC} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 2te^t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix},$$

wobei wir benutzt haben, dass $e^{tB} = 1 + tB$. **[2]**

b) Unter Anwendung der angegebenen Formel finden wir

$$x(t)_1 = e^t \int_0^t ds\, e^{-2s} = \frac{1}{2}e^t(1 - e^{-2t}) = \sinh t$$

An der Stelle $t = 1$ lautet dies also $\sinh 1 = (e - 1/e)/2$. **[2]**

Aufgabe 9. Homogenes Differentialgleichungssystem **[ca. 4 Punkte]**
Sei $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \text{wobei} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A berechnen.

Das charakteristische Polynom lautet

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda),$$

woraus die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$ folgen. **[1]**

Die beiden Eigenvektoren bestimmen sich zu

$$0 = (A - \lambda_1)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$0 = (A - \lambda_2)v_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[2]

Schliesslich lautet die Lösung $x(t)$ folgendermassen.

$$x(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[1]