....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. D. Castrigiano

21. April 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Teilaufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = i + \sin t - i \cos t.$$

(a) Skizzieren Sie qualitativ den Weg γ mit Umlaufrichtung.

(b) Berechnen Sie $\int_\gamma i\mathrm{Re}(z)dz$,

(c) Bestimmen Sie (mit Begründung) $\int_\gamma e^{\cos z}dz$,

2. **Residuen** **[10 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{1}{z^n(1-z)^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Geben Sie alle Pole von f in $\mathbb{C}$ an.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung der Pole von f.

(c) Berechnen Sie das Residuum von f bei $z = 0$. Hinweis: $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k$ für $|z| < 1$

(d) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

3. **Residuenkalkül** **[10 Punkte]**

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+4} dx$.

4. **Approximation kompakter durch offene Mengen** **[8 Punkte]**

Sei A eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$. $K_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| < \epsilon\}$ ist die Kugel mit Radius ϵ um $x \in \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

(a) $O_n := \bigcup_{x \in A} K_{\frac{1}{n}}(x)$ ist offen für $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n.$$

(b) Ist λ^d das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$, so gilt

$$\lambda^d(A) = \inf\{\lambda^d(O) : A \subset O \text{ und } O \text{ ist offen}\}.$$

5. **Bildmaß und Maß mit Dichte** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$, $(x, y) \mapsto |x| + |y|$. $\mu = h(\lambda^2)$ sei das zugehörige Bildmass.

(a) Warum ist h messbar?

(b) Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leq b$.

(c) Bestimmen Sie eine Dichte ρ, so dass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $a \leq b$.

6. **Lebesgue-Integrierbarkeit** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{|x|+|x|^3}}$. Begründen Sie, warum f auf $\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist.

7. **Substitutionsformel** **[20 Punkte]**

Auf dem offenen Einheitswürfel $B =]0,1[^3$ ist die bijektive Abbildung

$$\Phi : B \to C, \quad \Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} uvw \\ vw \\ w \end{pmatrix}$$

gegeben, mit dem Simplex $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < y < z < 1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass Φ ein lokaler C^1-Diffeomorphismus ist und geben Sie die zugehörige Umkehrfunktion an.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Substitutionsformel das Volumen von C.

(c) Geben Sie die Schwerpunktkoordinaten $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ von C an.

$x_s =$	$y_s =$	$z_s =$

8. **Hilbertraum** **[8 Punkte]**

$V := C[0,1]$ ist mit $\langle f, g\rangle := \int\limits_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx$ für $f, g \in C$ ein Vektorraum mit Skalarprodukt. Sei $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$, $f_n(x) = x^n$.

(a) Gilt $\mathrm{Span}(\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}) = V$?

☐ Ja ☐ Nein

(b) Ist V bezüglich der Norm $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ vollständig?

☐ Ja ☐ Nein

(c) Bestimmen Sie eine ONB von $\mathrm{Span}(\{f_0, f_1\})$, die f_0 enthält.