Aufgabe 1: Meissner-Effekt im Supraleiter (5 Punkte)

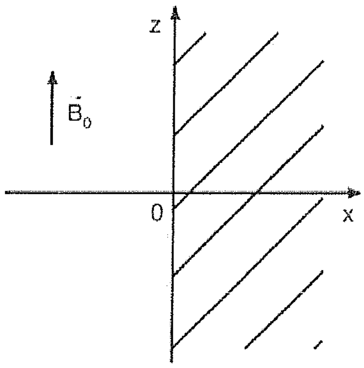
Die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ in einem Supraleiter hängt für stationäre Ströme mit dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ über die London-Gleichung

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{n_s e^2}{m_e c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \qquad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0)$$

zusammen. Dabei ist n_s die superfluide Dichte der Ladungsträger, e die Elementarladung und m_e die Elektronenmasse.

a) Leiten Sie aus dem Ampère'schen Gesetz unter Verwendung von $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = \operatorname{grad}\operatorname{div} - \nabla^2$ eine Differentialgleichung für das statische Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ in einem Supraleiter ab.

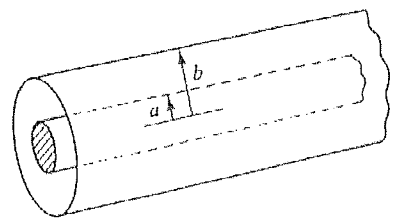
b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die z-Komponente des Magnetfeldes für einen Supraleiter im Halbraum $x > 0$, mit der Randbedingung, dass im angrenzenden Vakuum $x < 0$ ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ vorhanden sei. Bestimmen Sie die charakteristische Eindringtiefe λ des Feldes als Funktion der superfluiden Dichte n_s und berechnen Sie λ konkret für $n_s = 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$ ($e^2/m_e c^2 = 2.8 \cdot 10^{-13}$ cm).



Aufgabe 2: TEM-Moden in einem Koaxial-Leiter (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Koaxial-Leiter mit zwei unendlich langen, perfekt leitenden Zylinderfächen (s. Skizze). Eine elektromagnetische Welle im Vakuum zwischen den beiden Zylinderfächen, die sich entlang der z-Achse ausbreitet, wird beschrieben durch den Ansatz

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\mathbf{E}(x,y)\\ \mathbf{B}(x,y)\end{Bmatrix} \exp i\,(kz - \omega(k)t)\,.$$



a) Berechnen Sie die Dispersion $\omega(k)$ von TEM-Moden, also Moden in denen $E_z = B_z = 0$, aus den x- und y-Komponenten der Maxwell-Gleichungen $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}/c$ und $\nabla \wedge \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}/c$ im Vakuum.

Hinweis: $(\nabla \wedge \mathbf{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y$ und $(\nabla \wedge \mathbf{E})_y = \partial_z E_x - \partial_x E_z$

b) Zeigen Sie, dass die Felder $\mathbf{E}(x.y)$ und $\mathbf{B}(x,y)$ aufeinander senkrecht stehen und denselben Betrag haben.

c) Berechnen Sie $\mathbf{E}(x.y)$ und $\mathbf{B}(x, y)$ explizit in Polarkoordinaten s, φ unter der Annahme, dass die Felder unabhängig vom Winkel φ sind, aus den Gleichungen $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$.

Hinweis: Die Richtung der Felder ist durch die Randbedingungen bei $s = a$ und $s = b$ festgelegt. Die Divergenz in Polarkoordinaten hat die Form

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sE_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}\,.$$

Aufgabe 3: Retardiertes Potential (7 Punkte)

In einem unendlich langen geraden Draht entlang der z-Achse werde zur Zeit $t = 0$ ein konstanter Strom mit Stärke I_0 eingeschaltet, d.h. $\mathbf{I}(t) = I_0 \theta(t) \cdot \mathbf{e}_z$, wobei $\theta(t)$ gleich Eins ist für $t > 0$ und Null für $t \leq 0$. Das resultierende Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c}\int dz\, \frac{\mathbf{I}(t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

ist bestimmt durch den Strom zur retardierten Zeit $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ und den Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{s^2 + z^2}$ des Beobachtungspunkts im Abstand $s > 0$ vom Draht von dem Punkt z, von dem aus sich das elektromagnetische Feld ausbreitet (das Problem ist zylindersymmetrisch um die z-Achse, d.h. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ hängt nur ab von s und der Zeit $t > 0$).

a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential für Abstände $s \geq ct$ identisch verschwindet und dass für $s < ct$ nur der Bereich $|z| < \sqrt{(ct)^2 - s^2}$ zum Integral beiträgt.

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}$ explizit als Funktion des Abstands s und der Zeit t.

Hinweis: $\int dz/\sqrt{s^2 + z^2} = \ln\left(\sqrt{s^2 + z^2} + z\right)$.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(s, t) = -\partial_t \mathbf{A}(s, t)/c$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(s, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(s, t)$ und verifizieren Sie, dass sich im Grenzfall $t \to \infty$ die bekannten statischen Felder eines (neutralen) stromdurchflossenen Drahts ergeben.

Hinweis: Für $\mathbf{A} = \mathbf{A}(s, t)$ gilt in Zylinderkoordinaten s, φ, z

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sA_\varphi) \cdot \mathbf{e}_z\,.$$