TU München, Lehrstuhl E23
Walther-Meissner-Institut
L. Alff, R. Gross

Experimentalphysik IV

Vordiplom-Klausur

5. September 2002, HS S0320, 10:00-11:30

Aufgabe 1: Welle-Teilchen-Dualismus [$\sim 6/80$ Punkte]

1. Ein Körper mit einer Masse von 2.5 Gramm habe eine Geschwindigkeit von 200 m/s. Wie breit müsste ein Spalt sein, um ein Beugungsmuster zu erhalten? Ist das möglich?
2. Betrachten Sie einen Strahl von Neutronen, wobei jedes Neutron eine kinetische Energie von 20 MeV habe. Welche Größe hat ein Objekt, an dem man die Beugung dieser Neutronen beobachten kann, wenn man es als Target verwendet? Ist das möglich?

Lösung 1: Welle-Teilchen-Dualismus [**6 Punkte**]

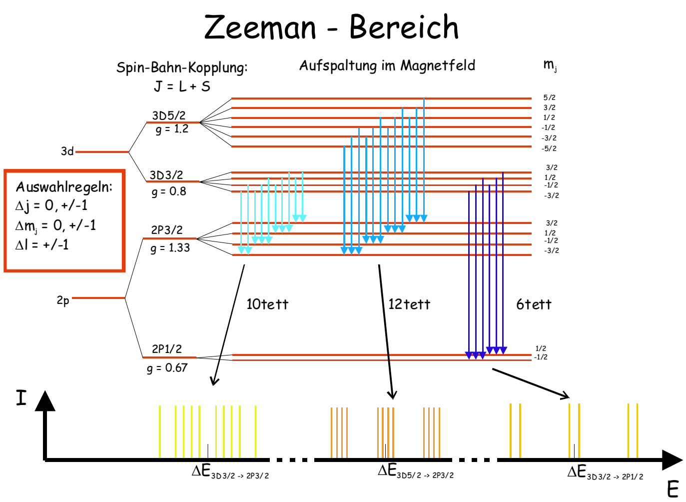
Für die Beugung müssen die Breite der Öffnung d und die Wellenlänge des Teilchens λ vergleichbar sein (**2 Punkte**).

1. $d \approx \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \approx 1.32 \cdot 10^{-33}$ m (**1 Punkt**). Der Durchmesser eines Atomkerns liegt in der Größenordnung 10^{-15} m. Kein Körper der Masse 2.5 Gramm kann an einer solchen (nicht existenten) Öffnung gestreut werden (**1 Punkt**).
2. 20 MeV entsprechen $3.2 \cdot 10^{-12}$ J. Aus der kinetischen Energie erhält man wegen $v = \sqrt{2E_{kin}/m}$ etwa $6.2 \cdot 10^{7}$ m/s (**1 Punkt**). Aus der de Broglie-Beziehung folgt $\lambda = h/p \approx 6.4 \cdot 10^{-15}$ m. Ein Atomkern kann also Neutronenbeugung hervorrufen (**1 Punkt**).

Aufgabe 2: Atomare Übergänge [$\sim 10/80$ Punkte]

Skizzieren Sie schematisch, welche Spektrallinien man bei einem $3d \to 2p$ Übergang eines Wasserstoffatoms in einem äußeren Magnetfeld beobachtet, wenn die Größe des Feldes im Zeeman-Bereich liegt! Beachten Sie, dass die Landéschen g-Faktoren der verschiedenen Niveaus alle unterschiedlich sind. Auswahlregeln: $\Delta j = 0, \pm 1$, $\Delta m_j = 0, \pm 1$ und $\Delta \ell = \pm 1$. Was passiert im Paschen-Back-Bereich (hierfür müssen Sie kein Schema zeichnen)?

Lösung 2: Atomare Übergänge [**10 Punkte**]



Die Skizze wurde folgendermaßen bewertet: Im Zeemann-Bereich koppeln zunächst Spin- und Bahndrehimpuls des Elektrons zum Gesamtdrehimpuls, so dass aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung das $3d$ und das $2p$-Niveau in je zwei Niveaus, $3D_{5/2}$ und $3D_{3/2}$, bzw. $2P_{3/2}$ und $2P_{1/2}$ mit unterschiedlichem Gesamtdrehimpuls aufspalten. Die richtige Anzahl der Niveaus liefert **1 Punkt**, die korrekte Beschriftung ($3D_{5/2}$ u.s.w.)**1 Punkt**.Diese vier Niveaus spalten dann im äußeren Magnetfeld bezüglich der Orientierung des Gesamtdrehimpulses in je $2j + 1$ Niveaus auf. Wiederum liefert die richtige Anzahl der Niveaus **1 Punkt**, die korrekte Beschriftung **1 Punkt**. Unter Berücksichtigung der Auswahlregeln spaltet der 3D3/2 $\to$ 2P3/2 -Übergang in ein 10tett (**1 Punkt**), der 3D5/2 $\to$ 2P3/2 -Übergang in ein 12tett (**1 Punkt**) und der 3D3/2 $\to$ 2P1/2 -Übergang in ein 6tett (**1 Punkt**) von Spektrallinien auf. Wegen der unterschiedlichen g-Faktoren tritt keine Energieentartung auf, alle Übergänge ergeben eine eigene Linie (insgesamt 28) (**1 Punkt**). Weiterhin gibt es **1 Zusatzpunkt** für die Angabe der g-Faktoren bzw. der entsprechenden Formel $g = 1 + \dfrac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$.

Im Paschen-Back-Bereich wird die Spin-Bahnkopplung durch das äußere Feld aufgebrochen und Spin- und Bahndrehimpuls können sich unabhängig voneinander im Magnetfeld orientieren (**1 Punkt**). Die Zusatzenergie im Magnetfeld ist daher gegeben durch $E = (g_l m_l + g_s m_s) \cdot \mu_B \cdot B$ (**1 Punkt**). Wegen $g_s \approx 2 g_l$ überlappen sich einige Niveaus, so dass trotz 15 verschiedener Übergänge nur 3 verschiedene Energiedifferenzen auftreten und somit 3 Spektrallinien zu beobachten sind (**1 Zusatzpunkt**). Bei dieser Aufgabe waren also 10 reguläre und 2 Zusatzpunkte zu erreichen, wobei mehr als 10 Punkte nicht vergeben wurden.

Aufgabe 3: Hyperfeinstruktur [$\sim$ 5/80 Punkte]

Wie groß ist das durch das $1s$-Elektron am Ort des Protons im Wasserstoffatom verursachte Magnetfeld, wenn die Hyperfeinstruktur ($\lambda = 21\,\mathrm{cm}$) im $1s$-Zustand durch die beiden Einstellungen des Kernspins im Magnetfeld erklärt werden?

Lösung 3: Hyperfeinstruktur [**5 Punkte**]

Die magnetische Energie eines magnetischen Moments im Magnetfeld B ist (**1 Punkt**)

$$E = -\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}.$$

Das magnetische Moment des Protons beträgt $\mu_P = \pm 2.79\mu_K$, so dass der Abstand der beiden Hyperfeinstruktur-Komponenten $\Delta E = 2\mu_P \cdot B = 5.58\mu_K \cdot B$ ist (**1 Punkt**). Die Linie mit $\lambda = 21\,\mathrm{cm}$ entspricht einer Energiedifferenz von (**1 Punkt**)

$$\Delta E = h\nu = hc/\lambda = 9.46 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J}.$$

Mit $\mu_K = 5.05 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J/T}$ (Kernmagneton) folgt (**2 Punkte**)

$$B = \frac{\Delta E}{2\mu_P} = \frac{9.46 \cdot 10^{-25}}{5.58 \cdot 5.05 \cdot 10^{-27}}\,\mathrm{T} = 3.35 \cdot 10^{1}\,\mathrm{T} = 33.5\,\mathrm{T}.$$

Aufgabe 4: Wasserstoffatom [$\sim 10/80$ Punkte]

Die Schrödinger-Gleichung für das Wasserstoffatom besitzt für die Quantenzahlen $n = 1, l = 0, m = 0$ die Lösung $\psi_{100} = C_{100} e^{-Zr/a_0}$. (a) Berechnen Sie für den Grundzustand des Wasserstoffatoms zunächst die Konstante C_{100} aus der Normierungsbedingung! Geben Sie ψ_{100} bei $r = a_0$ an. (b) Berechnen Sie $|\psi_{100}|^2$ ebenfalls an der Stelle $r = a_0$ und interpretieren Sie es! (c) Berechnen Sie die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r)$ an der Stelle $r = a_0$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron in einer Kugelschale der Dicke $r + dr$ zu finden.

Lösung 4: Wasserstoffatom [**10 Punkte**]

(a) Die Normierungsbedingung lautet $\int |\psi|^2 dV = 1$, denn irgendwo muss sich das Teilchen befinden (**2 Punkte**). Das Volumenelement in Polarkoordinaten ist $dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$. Man muss hier aber eigentlich nur wissen, dass ein zusätzliches r^2 auftaucht. Denn die Winkelkoordinaten werden ja ausintegriert. Sie ergeben natürlich gerade 4π (Fläche der Einheitskugel). Es bleibt das Integral (Lösung im Anhang angegeben)

$$\int_0^\infty r^2 e^{-2Zr/a_0} dr = \frac{a_0^3}{4Z^3}.$$

Wir erhalten also (**2 Punkte**) $C_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$, also

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}.$$

Daher ist bei $r = a_0$ (**1 Punkt**)

$$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-1}.$$

(b) Es folgt sofort (**1 Punkt**)

$$\psi_{100}^2 = \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2}.$$

$|\psi_{100}|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte. Also ist die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron im Volumen dV zu finden gerade $|\psi_{100}|^2 dV$ (**1 Punkt**). (c) Wir interessieren uns nun dafür, mit welcher Wahrscheinlichkeit in der Kugelschale zwischen r und $(r + dr)$ das Elektron sich aufhält. Das Volumen dieser Kugelschale ist $dV = 4\pi r^2 dr$. Dies multipliziert mit der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P(r) = 4\pi r^2 |\psi|^2$ (**2 Punkte**). Daher erhalten wir sofort (**1 Punkt**)

$$P(r) = \frac{4}{a_0} e^{-2}.$$

Aufgabe 5: Spektrum im Röntgenbereich [$\sim 5/80$ Punkte]

(a) Berechnen Sie mit der effektiven Kernladungszahl $(Z-1)$ die Energie eines Elektrons in der K-Schale des Wolframatoms $(Z = 74)$! Warum benutzt man diese effektive Kernladungszahl?
(b) Der experimentelle Wert beträgt $69.5\,\mathrm{keV}$. Berechnen Sie daraus eine bessere Abschirmungskonstante σ! Was schließen sie aus dem Wert dieser Konstante?

Lösung 5: Spektrum im Röntgenbereich [**5 Punkte**]

Die Energieniveaus E_n eines wasserstoffähnlichen Atoms mit Kernladungszahl Z lauten $E_n = -Z^2 E_0/n^2$ (**2 Punkte**). Diese Gleichung wurde im Rahmen der Übungsaufgaben oft genug angewandt! Ein Elektron in der K-Schale besitzt $n = 1$. Daher lässt sich die Energie leicht ausrechnen (**1 Punkt**)

$$E = -(Z-1)^2(13.6)\,\mathrm{eV} \approx -72.5\,\mathrm{keV}.$$

Man benutzt die effektive Kernladungszahl $(Z-1)$, weil alle Atome außer dem Wasserstoff zwei Elektronen in der K-Schale haben. Ein Elektron sieht dann den Kern abgeschirmt durch dieses andere Elektron.
(b) $\sigma = 1$ war nicht ganz perfekt. Wir wissen experimentell (**1 Punkt**)

$$-69.5\,\mathrm{keV} = -(Z-\sigma)^2(13.6)\,\mathrm{eV} \Leftrightarrow \sigma = Z - [-E/(13.6\,\mathrm{eV})]^{1/2} \approx 2.51.$$

Dies bedeutet, dass die Abschirmung größer ist, also durchdringen die Wellenfunktionen der Elektronen der inneren Elektronenschalen die der äußeren K-Schale (**1 Punkt**).

Aufgabe 6: Bohr-Modell [$\sim 10/80$ Punkte]

In einer Übungsaufgabe wurde der Bohr-Radius und die Energiestufen aus der Unschärferelation abgeleitet. Diskutieren Sie dazu ausgehend von der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \approx \hbar$ die Gesamtenergie eines Teilchens in einem Volumen mit Durchmesser d. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit a_0 und der Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms!

Lösung 6: Bohr-Modell [**10 Punkte**]

Die Ortsunschärfe beträgt maximal $\Delta x \approx d$ (**1 Punkt**). Daraus erhalten wir die minimale Impulsunschärfe $\Delta p \approx \hbar/d$ (**1 Punkt**). Es gilt $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \langle p^2\rangle, da \langle p\rangle = 0$ (Teilchen ist gebunden) (**1 Punkt**) Daher kann man dieser kleinsten Impulsunschärfe eine minimale kinetische Energie zuordnen: $W_0 \approx \langle p^2\rangle/(2m) \approx \hbar^2/(2md^2)$ (**1 Punkt**). Die Gesamtenergie ist demnach gegeben durch

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\hbar^2}{8mr^2}\ (\mathbf{1\,Punkt})$$

Dabei ist $d = 2r$. Die potenzielle Energie eines Elektrons wurde vorausgesetzt. Je enger das Teilchen eingesperrt ist (kleinere potenzielle Energie), desto höher seine kinetische Energie. Es geht also um die Balance der Gesamtenergie. Das Minimum der Gesamtenergie finden wir über die Bedingung $dW/dr = 0$ (**1 Punkt**), also $r = \frac{\pi\hbar^2\varepsilon_0}{me^2}$ (**1 Punkt**). Das ist bis auf einen fehlenden Faktor 4 der Bohr-Radius a_0 (**1 Punkt**). Die Minimalenergie ist $W = -\frac{me^4}{8\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \approx 54.6\,\mathrm{eV}$,(**1 Punkt**) genau das Vierfache der Rydberg-Energie (**1 Punkt**). Je nach dem, wie man die Unschärfe (z.B. $\Delta x \approx d/2$) ansetzt, kann man auch exakt a_0 und die Rydberg-Energie erhalten. Solche Lösungen sind natürlich auch richtig.

Aufgabe 7: Exotische Atome [$\sim$ 10/80 Punkte]

(a) Was ist ein Myonium (myonisches Atom), was ist ein Positronium, was ist ein Quarkonium?

(b) Wie groß ist die Bindungsenergie eines Myons, das von einem Proton eingefangen worden ist? Setzen Sie dazu die Kernmasse unendlich und verwenden Sie die Rydberg-Konstante in eV.

(c) Wie groß ist der Radius der entsprechenden Bohrschen Bahn mit $n = 1$ (Zahlenwert)?

(d) Man gebe die Energie des Photons an, das ausgestrahlt wird, wenn das Myon vom Zustand $n = 2$ in den Grundzustand springt!

Lösung 7: Exotische Atome [**10 Punkte**]

(a) Das Myonium besteht aus einem Atomkern der Kernladungszahl Z mit einem eingefangenen Myon, das sich im Grundzustand befindet. Das Myon ist ein Lepton, dessen Masse 207mal so groß wie die Elektronenmasse ist. Seine Ladung ist der Elektronenladung gleich (**1 Punkt**). Das Positronium ist ein gebundenes Elektron-Positron-Paar (Lepton-Antilepton-Paar, Coulomb-Kraft). Ein Positron ist das Antiteilchen zum Elektron mit Ladung $+e$ und derselben Ruhmasse. Beide kreisen um den gemeinsamen Schwerpunkt, der in der Mitte liegt (**1 Punkt**). Ähnlich das Quarkonium: In der Quantenchromodynamik bezeichnet man gebundene Zustände von schweren Quarks mit Antiquarks als Quarkonium. Ein Beispiel ist das Charmonium. Die vermittelnde Wechselwirkung ist die starke Wechselwirkung (**1 Punkt**).

(b) Wir gehen vom Bohrschen Atommodell aus. Die möglichen Energiezustände unter Verwendung der Rydberg-Konstanten Ry in eV lauten (Ry muss man nicht auswendig wissen, nur als Zahlenwert) (**2 Punkte**)

$$E_n(\mu) = -\frac{e^4\mu}{8\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} = -Ry\frac{Z^2}{n^2}\,\mathrm{eV}.$$

μ ist dabei die reduzierte Masse. $Z = 1$ im Proton, $n = 1$ im Grundzustand ergibt $207 \cdot Ry\,\mathrm{eV} = -2815\,\mathrm{eV}$ (**1 Punkt**).

(c) Demgemäß verändert sich der Radius auch nur dadurch, dass statt der Elektronenmasse die Myonenmasse zu verwenden ist. Da die Masse im Nenner auftaucht, ist der Radius des Myoniums 207mal kleiner als der des Wasserstoffatoms, also $a_0/207 \approx 2.5 \cdot 10^{-13}$ m (**2 Punkte**).

(d) Dies ist wiederum sehr leicht aus (b) zu berechnen (**2 Punkte**):

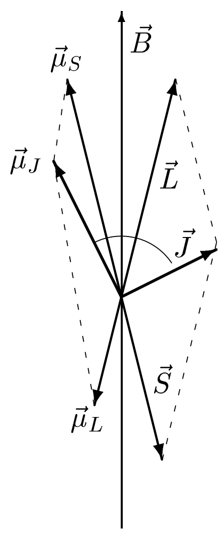
$$h\nu = E_2(\mu) - E_1(\mu) = 2111 \cdot Z^2\,\mathrm{eV}$$

Aufgabe 8: Aufspaltung im Magnetfeld [$\sim 6/80$ Punkte]

Wieso ist es möglich, dass der Term ${}^4D_{1/2}$ in einem Magnetfeld nicht aufspaltet? Erläutern diesen Sachverhalt mit Hilfe von einer Vektorskizze!

Lösung 8: [**6 Punkte**]

Der Zustand ${}^4D_{1/2}$ bedeutet $4 = 2S + 1 \Leftrightarrow S = 3/2$, $J = 1/2$. D steht für $L = 2$ (**1 Punkt**). Aufgrund der unterschiedlichem g-Faktoren für **L** und **S**, ist das resultierende magnetische Moment von **J** diesem nicht einfach antiparallel (**2 Punkte**). Im genannten Fall ist es sogar senkrecht auf **J** (**1 Punkt**). Gemessen wird aber nur die Komponente parallel zu **J** (denn μ_J präzediert viel schneller um **J**, als **J** um **B**). Diese Komponente gibt es hier nicht, also kann auch keine Aufspaltung auftreten (**1 Punkt**). Man kann sich auch $g_J = 1 + \dfrac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$ ausrechnen, dass dann Null ergibt. Da die Aufspaltung porportional zu g_J ist, ist sie ebenfalls nicht vorhanden. Skizze (**1 Punkt**):



Aufgabe 9: Atome mit mehreren Elektronen [$\sim$ 12/80 Punkte]

(a) Welche prinzipiell neuen Phänomene treten in Atomen mit mehreren Elektronen auf? (b) Warum können die Produktfunktionen $\Psi^I_{ab} = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b)$ und $\Psi^{II}_{ab} = \psi_2(a) \cdot \psi_1(b)$ nicht die richtigen Wellenfunktionen zur Beschreibung des Atomzustands eines Heliumatoms sein? a bzw. b beschreiben dabei die Quantenzahlen des ersten bzw. zweiten Elektrons. (c) Durch welche Wellenfunktion können zwei Elektronen mit denselben Quantenzuständen nur beschrieben werden? (d) Verstößt das Ergebnis gegen das Pauli-Prinzip? Wie lautet das Pauli-Prinzip (zwei Formulierungen bitte)?

Lösung 9: [**12 Punkte**]

(a) Wenn mehrere Elektronen auftreten, so muss die elektrostatische Wechselwirkung zwischen diesen beachtet werden! Da Elektronen ununterscheidbare Teilchen sind, müssen Symmetrieprinzipien bei Vertauschung von Elektronen berücksichtigt werden (**2 Punkte**).
(b) Da die Elektronen ununterscheidbar sind, darf sich die Ladungsverteilung bei Vertauschung nicht verändern, also $|\Psi^I_{ab}|^2 = |\Psi^{II}_{ab}|^2 \Rightarrow \Psi^I_{ab} = e^{i\varphi}\Psi^{II}_{ab}$ (**2 Punkte**). Bei zweimaliger Vertauschung muss der Zustand wieder in sich selbst übergehen, also $\varphi = 0, \pi$. Also $\Psi^I_{ab} = \pm\Psi^{II}_{ab}$. Die in der Aufgabe genannten Produktfunktionen erfüllen diese Anforderung nicht (**2 Punkte**).
(c) Die einfachste Möglichkeit, eine Wellenfunktion, die der genannten Bedingung genügt, zu formulieren ist (**2 Punkte**)

$$\Psi^{sym}_{Atom} = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) + \psi_2(a) \cdot \psi_1(b) \tag{1}$$
$$\Psi^{asym}_{Atom} = \psi_1(a) \cdot \psi_2(b) - \psi_2(a) \cdot \psi_1(b). \tag{2}$$

Sind beide Elektronen im gleichen Zustand, also $a = b$, folgt sofort $\Psi^{asym}_{Atom} \equiv 0$, also müssen zwei Elektronen mit denselben Quantenzahlen durch eine symmetrische räumliche Wellenfunktion beschrieben werden (**2 Punkte**).
(d) Das Pauli-Prinzip besagt, dass die Gesamtwellenfuntkion eines Systems mit mehreren Elektronen immer antisymmetrisch gegen Vertauschung zweier Elektronen sein muss. Dies ist aber kein Widerspruch, weil wir noch die Spinquantenzahl haben. In dieser müssen sich die beiden Elektronen unterscheiden, dann wird die Gesamtwellenfunktion antisymmetrisch im Einklang mit dem Pauli-Prinzip. Daher auch die Formulierung des Pauli-Verbots, dass ein durch die 4 Quantenzahlen vollständig beschriebener Zustand nur durch ein Fermion besetzt werden kann (**2 Punkte**).

Aufgabe 10: Dopplerbreite [$\sim 6/80$ Punkte]

Metastabile He(2^1S_0)-Atome in einer Gasentladungszelle bei $T = 1000\,\mathrm{K}$ absorbieren Licht auf dem Übergang $2^1S_0 \rightarrow 3^1P_1$. Die Termwerte der Niveaus sind $166272\,\mathrm{cm}^{-1}$ und $186204\,\mathrm{cm}^{-1}$, die Lebensdauern $\tau(3^1P_1) = 1.4\,\mathrm{ns}$ und $\tau(2^1S_0) = 1\,\mathrm{ms}$.

(a) Bei welcher Wellenlänge liegt die entsprechende Resonanzlinie?

(b) Wie groß ist die natürliche Linienbreite?

(c) Wie groß ist die Dopplerbreite?

Lösung 10: [**6 Punkte**]

(a) Die Termwerte sind ja schon in cm^{-1}. Die Wellenlänge λ des Übergangs zwischen den Zuständen mit Termwerten T_i, T_k ist (**2 Punkte**)

$$\lambda_{ik} = \frac{1}{T_i - T_k} = \frac{1}{19932}\,\mathrm{cm} = 501.7\,\mathrm{nm}.$$

(b) Die natürlich Linienbreite war angegeben. Die natürliche Linienbreite eines Übergangs ergibt sich additiv aus beiden Lebensdauern (**2 Punkte**):

$$\delta\nu_n \leq \frac{1}{2\pi\tau_i} + \frac{1}{2\pi\tau_k} = \frac{10^9}{2\pi \cdot 1.4} + \frac{10^3}{2\pi} = 1.14 \cdot 10^8\,\mathrm{s}^{-1} = 114\,\mathrm{MHz}.$$

(c) Die Dopplerbreite (Formel im Anhang angegeben) beträgt

$$\delta\nu_D = 7.16 \cdot 10^{-7} \cdot \nu_0 \cdot \sqrt{T/M}\sqrt{\mathrm{mol}/(\mathrm{g{\cdot}K})}.$$

Dabei ist $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{3 \cdot 10^8}{5.017 \cdot 10^{-7}}\,\mathrm{s}^{-1} = 5.98 \cdot 10^{14}\,\mathrm{s}^{-1}$, $T = 10^3\,\mathrm{K}$ und $M = 4\,\mathrm{g/mol}$. Also (**2 Punkte**)

$$\delta\nu_D = 6.77 \cdot 10^9\,\mathrm{s}^{-1} = 6.77\,\mathrm{GHz}.$$

ANHANG

$h \approx 6.6 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$

$m_{\mathrm{Neutron}} \approx 1.67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

$m_{\mathrm{Elektron}} \approx 9.1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$1\,\mathrm{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

$\mu_P = \pm 2.79\mu_K$

$\mu_K = 5.05 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J/T}$

$a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} \approx 5.3 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}$

$c = 299792458\,\mathrm{m/s}$

Natürliche Linienbreite eines Zustands: $\delta\nu_n = \dfrac{1}{2\pi \cdot \tau_i}$

Dopplerbreite: $\delta\nu_D = 7.16 \cdot 10^{-7}\nu_0 \cdot \sqrt{T/M} \cdot \mathrm{s}^{-1}$, mit T in K und M in g/mol

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-(ar^2+2br+c)}dr = \frac{a+2b^2}{2a^2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot e^{\frac{b^2-ac}{a}}, \quad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-2ar}dr = \frac{1}{4a^3}$$