Technische Universität München **Sommersemester 2006**

Diplomvorprüfung Theoretische Physik 3: QUANTENMECHANIK

Dienstag, 05.09.2006 HS1 (A - N), HS2 (O - Z) 11:30 - 13:00

1. (a) Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

$$\left[\hat{x}^2, \hat{p}_x\right], \quad \left[\hat{p}_x, \hat{L}_y\right], \quad \left[\hat{x}, \hat{p}_x^n\right], \quad \left[\hat{x}, V(\hat{p}_x)\right],$$

wobei $V(\hat{p}_x)$ ein Polynom in $\hat{p}_x$ ist. (4P)

(b) Welche der folgenden Operatoren sind Hermitisch? Welche sind nicht Hermitisch? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

$$\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \hat{x} + \mathrm{i}\hat{p}_x, \quad \hat{L}_z \cdot \hat{S}_z, \quad e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\pi \hat{L}_z}, \quad e^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\pi \hat{S}_z}. \qquad \text{(6P)}$$

2. Betrachten Sie die auf Eins normierte Wellenfunktion

$$\psi_L(x) = A \exp(-|x|/L).$$

(a) Berechnen Sie $|A|$. (2P)

(b) Sei

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(-\beta^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{x}{\beta}\right)^2\right), \quad \text{mit } \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0\omega}}.$$

Für welchen Werte der Länge L ist der Erwartungswert $E_L = \langle\psi_L|\hat{H}|\psi_L\rangle$ minimal? Vergleichen Sie den minimalen Wert E_L mit dem exakten Energieeigenwert des Grundzustands von $\hat{H}$. (8P)

Nützliche Hinweise:

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \psi(x) \mathrm{d}\, x = -\int_{-\infty}^{\infty} (\psi'(x))^2 \mathrm{d}\, x.$
- $\displaystyle\int x^2 e^{-x} \mathrm{d}\, x = -(x^2 + 2x + 2) e^{-x}.$

3. Zwei harmonisch gebundene Fermionen:
Zwei ununterscheidbare Fermionen mit Masse M und Spin $\frac{1}{2}$ bewegen sich in einem harmonischen Potenzial

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2} M\omega^2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

ohne gegenseitige Wechselwirkung.

(a) Geben Sie die allgemeine Form der Zweiteilchen-Energieeigenfunktionen an und bennenen Sie einen vollständigen Satz von Quantenzahlen. Wie hängen die Quantenzahlen $m_1 = \pm\frac{1}{2}$ und $m_2 = \pm\frac{1}{2}$ der beiden Einteilchenspins mit den Quantenzahlen S, M_S des Gesamtspins $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$ zusammen? (4P)

(b) Geben Sie für den Grundzustand und für das erste angeregte Energieniveau den Energieeigenwert und die Entartung an. (4P)

(c) Wie beeinflusst ein Kopplungsterm $g\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2$ im Hamiltonoperator die Energien im Grundzustand und im 1. angeregten Niveau?(4P)

4. Gegeben sei ein ruhendes Elektron, welches sich im normierten Eigenzustand des Operators $\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$ mit Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ befindet. Die Quantisierungsachse ist die $z-$Achse, zu welcher die zugehörigen Eigenzustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ lauten. Drücken Sie den Zustand, in dem sich das Elektron befindet, durch $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ aus.
Betrachten Sie nun den Fall, dass sich das Elektron in einem konstanten magnetischen Feld B befindet, welches in z-Richtung zeigt, d.h. der zugehörige Hamilton-Operator hat die Form

$$\hat{H} = -\mu_b B \hat{S}_z,$$

mit $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist gegeben durch

$$|\Psi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle.$$

Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit: $a(t),\ b(t)$.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $|\uparrow\rangle$ zu finden?
Wann befindet sich das Elektron in dem Eigenzustand mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ bzgl. des Operators $\hat{S}_y$ (Spinflip)? (10P)