Probeklausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Simmel
Sommersemester 2012
11. Juni 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Vier identische Teilchen (jeweils mit Ladung q und Masse m) seien so angeordnet, dass sie die Eckpunkte eines Quadrats der Seitenlänge a bilden.

(a) Bestimmen Sie das elektrische Feld am Ort des Teilchens 1 (siehe Skizze) und die resultierende Kraft auf dieses Teilchen (inkl. Richtung).

(b) Bestimmen Sie die potentielle elektrische Energie dieser Anordnung.

(c) Welche Ladung müsste im Zentrum des Quadrats sitzen, damit die Anordnung kräftefrei wird?

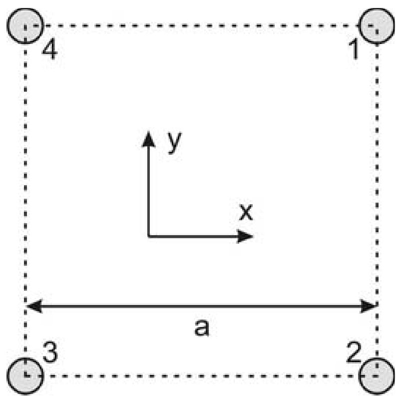


Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 1

Lösung

(a)

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{12} + \vec{E}_{13} + \vec{E}_{14} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{a^3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{a^3} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a}{2\sqrt{2}a^3} \\ \frac{a}{2\sqrt{2}a^3} \end{pmatrix} \right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[1,5]

(b)

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\underbrace{\frac{q^2}{a}}_{\text{1-2}} + \underbrace{\frac{q^2}{\sqrt{2}a}}_{\text{1-3}} + \underbrace{\frac{q^2}{a}}_{\text{1-4}} + \underbrace{\frac{q^2}{a}}_{\text{2-3}} + \underbrace{\frac{q^2}{\sqrt{2}a}}_{\text{2-4}} + \underbrace{\frac{q^2}{a}}_{\text{3-4}} \right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} \left(4 + \sqrt{2}\right) \tag{1}$$

[1]

(c)

$$\vec{F}_1 = q\vec{E}_1 + q\vec{E}_C = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{q^2}{a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2\sqrt{2}qQ}{a^3} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) q + \sqrt{2}Q = 0$$

$$\Rightarrow Q = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\right) q = -0,69q$$

[1,5]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Plattenkondensator mit dem Plattenabstand y_0 und der Plattenfläche A ist mit einem Dielektrikum gefüllt, dessen relative Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon_r(y) = a + \frac{b}{y_0} y, \quad 0 \leq y \leq y_0 \tag{2}$$

vom Abstand y zu einer der Platten abhängt. Hierbei sind a und b Konstanten. Weiterhin sei der Kondensator mit der Ladung Q aufgeladen.

(a) Berechnen Sie die elektrische Feldstärke $E(y)$.

(b) Welche Spannung U fällt über dem Kondensator ab? *Hinweis:* $\int \frac{1}{ax+b} = \frac{1}{a} ln(ax + b)$

(c) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

Lösung

(a) Es ist $D = \frac{Q}{A}$ konstant, daher

$$E(y) = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \left(a + \frac{b}{y_0} y\right) A} \tag{3}$$

[**1**]

(b)

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{y_0} E \mathrm{d}\tilde{y} \\ &= \int_0^{y_0} \frac{Q}{A\varepsilon_0} \frac{1}{a + \frac{b}{y_0}\tilde{y}} \mathrm{d}\tilde{y} \\ &= \left[\frac{Q y_0}{A \varepsilon_0 b} \ln\left(a + \frac{b}{y_0}\tilde{y}\right)\right]_0^{y_0} \\ &= \frac{Q y_0}{A\varepsilon_0 b} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right) \end{aligned}$$

[**2**]

(c)

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{A\varepsilon_0 b}{y_0 \ln\left(\frac{a+b}{a}\right)} \tag{4}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Gesetzes die Kapazität eines quadratischen Plattenkondensators mit Platten der Kantenlänge L, Ladung Q und Abstand d. Randeffekte sind zu vernachlässigen.

(b) Nun wird der geladene Kondensator über einen Widerstand R entladen. Zeigen Sie, dass die gesamte elektrische Feldenergie im Widerstand dissipiert wird. *Hinweis:* Differentialgleichung aufstellen

Lösung

(a) Das Gaußsche Gesetz lautet

$$\int_F \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{5}$$

wobei F die Oberfläche des betrachteten Volumens und Q die in ihm befindliche Gesamtladung ist. Wendet man dies auf eine einzelne Kondensatorplatte an, die die Ladung Q trägt, dann erhält man unter Vernachlässigung von Inhomogenitäten:

$$2L^2 E_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{6}$$

Dabei ist E_1 der Betrag der Feldstärke. Der Faktor 2 kommt daher, dass die einzelne Platte auf beiden Seiten ein gleichstarkes Feld erzeugt. Die zweite Platte mit der Ladung $-Q$ erzeugt ein vom Betrag her gleich großes Feld E_2, das sich im Zwischenraum zum Feld der ersten Platte addiert. Also

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2\varepsilon_0 L^2}Q + \frac{1}{2\varepsilon_0 L^2}Q = \frac{1}{\varepsilon_0 L^2}Q \tag{7}$$

[**1**]

Daraus ergibt sich die Spannung zwischen den beiden Platten:

$$U = Ed = \frac{d}{\varepsilon_0 L^2}Q \tag{8}$$

U ist also proportional zu Q, und die Kapazität ist

$$C = \frac{Q}{U} = \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} \tag{9}$$

[**1**]

(b) Die Differentialgleichung für die Entladung des Kondensators lautet

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0 \tag{10}$$

[**1**]

mit der Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} \tag{11}$$

und

$$\dot{Q}(t) = -\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}} \tag{12}$$

[**1**]

Daraus folgt die im Widerstand dissipierte Leistung

$$P(t) = R\dot{Q}^2(t) = \frac{Q_0^2}{RC^2}e^{-2\frac{t}{RC}} \tag{13}$$

Die gesamte dissipierte Energie ist also

$$W = \int_0^\infty \mathrm{d}t P(t) = \frac{Q_0^2}{RC^2}\underbrace{\left[-\frac{RC}{2}e^{-2\frac{t}{RC}}\right]_0^\infty}_{=\frac{RC}{2}} = \frac{Q_0^2}{2C} \tag{14}$$

[**1**]

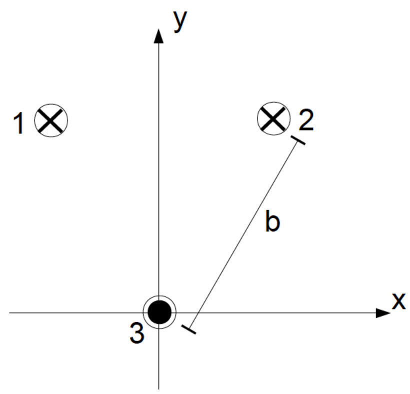
und das ist dasselbe wie die im Kondensator enthaltenen Feldenergie:

$$W = \frac{1}{2}CU_0^2 = \frac{1}{2C}Q_0^2 \tag{15}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Drei unendlich lange Drähte sind wie in der Abbildung gezeigt in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge b angeordnet. Draht 1 und 2 tragen Strom in die Zeichenebene hinein während Draht 3 Strom aus der Zeichenebene hinaus leitet. Die Beträge der Ströme sind in allen drei Drähten gleich groß. Draht 3 befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.



(a) Bestimmen Sie das Magnetfeld **B** bei Draht 1, das durch die Ströme der beiden anderen Drähte hervorgerufen wird.

Lösung:

Aus dem Ampereschen Gesetz ergibt sich für das Magnetfeld bei 1:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \tag{16}$$

[**1**]

Also:

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{17}$$

Daher ist das Magnetfeld durch 2:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\mathbf{e}_y \tag{18}$$

[**1**]

Durch 3:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\cos(30°)\mathbf{e}_x - \sin(30°)\mathbf{e}_y\right) \tag{19}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{20}$$

Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{21}$$

[**1**]

(b) Berechnen Sie die Kraft pro Längeneinheit auf Draht 1.

Lösung:

Die Kraft ist natürlich gegeben durch

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{22}$$

[**1**]

Also:

$$\mathbf{F}_2 = IlB_2\mathbf{e}_x \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{F}_2}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\mathbf{e}_x \tag{23}$$

[**1**]

Und:

$$\mathbf{F}_3 = Il \times \mathbf{B}_3 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{F}_3}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(-\cos(60^\circ)\mathbf{e}_x + \sin(60^\circ)\mathbf{e}_y\right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{24}$$

Insgesamt:

$$\frac{\mathbf{F}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{25}$$

[**1**]

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Ein Plattenkondensator mit Plattenabstand d und Plattenfläche A ist mit einer Spannungsquelle U verbunden.

(a) Welche Ladungsmenge befindet sich auf den Kondensatorplatten und wie groß ist das elektrische Feld im Kondensator?

(b) Eine isolierende Platte der Dielektrizitätszahl ε_r derselben Fläche A und der Dicke $d_D \leq d$ wird zwischen die Kondensatorplatten geschoben. Wie groß ist nun das elektrische Feld im Dielektrikum und im Zwischenraum?

(c) Nun wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt und das Dielektrikum wieder entfernt. Wie groß ist danach die Spannung zwischen den Kondensatorplatten? (Hinweis: Randeffekte können vernachlässigt werden.)

Lösung

(a) Die Kapazität des Plattenkondensators ist

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{26}$$

so dass die Ladung bei gegebener Spannung U

$$Q = CU = \varepsilon_0 \frac{A}{d} U \tag{27}$$

ist. Die Feldstärke ist

$$E = \frac{U}{d} \tag{28}$$

(b) Man kann den teilweise mit Dielektrikum gefüllten Kondensator auffassen als eine Hintereinanderschaltung eines leeren Kondensators mit Plattenabstand $d-d_D$ und eines vollständig mit Dielektrikum gefüllten Kondensators mit Plattenabstand d_D. Seine Kapazität beträgt daher

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_D} \tag{29}$$

wobei

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d - d_D} \tag{30}$$

und

$$C_D = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d_D} \tag{31}$$

[**1**]

Die Ladung des Kondensators ist dann bei gegebener Ladung U:

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 AU}{d - d_D + \varepsilon_r^{-1} d_D} \tag{32}$$

[**1**]

Die Feldstärke im Leerraum folgt daraus zu

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{Q}{A}}{\varepsilon_0} = \frac{U}{d - d_D + \varepsilon_r^{-1} d_D} \tag{33}$$

Die Feldstärke im Dielektrikum ist demgegenüber um den Faktor ε_r reduziert, also

$$E_D = \frac{\frac{U}{\varepsilon_r}}{d - d_D + \varepsilon_r^{-1}} \tag{34}$$

[**1**]

(c) Die Spannung ergibt sich aus der in der ersten Teilaufgabe berechneten Ladung, wobei nun die Kapazität jedoch

$$C' = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \tag{35}$$

beträgt. Damit folgt

$$U' = \frac{Q}{C'} = \frac{\varepsilon_0 A U}{d - d_D + \varepsilon_r^{-1} d_D} \frac{d}{\varepsilon_0 A} = \frac{U\, d}{d - d_D + \varepsilon_r r^{-1} d_D} \tag{36}$$

[**2**]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

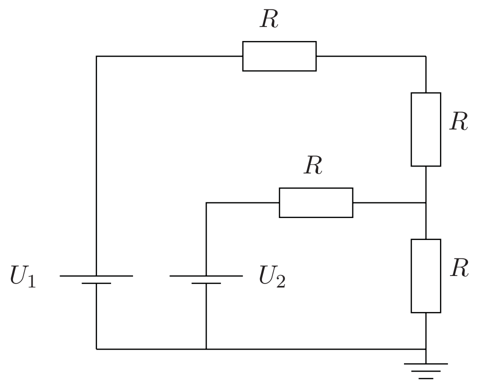


Abbildung 2: Schaltplan zu Aufgabe 6

Betrachten Sie das abgebildete Widerstandsnetzwerk und bestimmen Sie das Verhältnis der beiden Eingangsspannungen U_1 und U_2 so, dass durch den obersten Widerstand kein Strom fließt.

Lösung

Es ist sehr hilfreich (aber nicht notwendig), wenn man erkennt, dass die beiden oberen R zu einem $2R$ zusammengefasst werden können. Dann kann man die positiven Stromrichtungen z.B. wie in der folgenden Abbildung festlegen und zeichnet noch die Potentialpunkte ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ein:

Dann gelten gut die große Masche folgende Gleichungen (vorzeichenrichtig)

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_3 &= 2RJ_1 \\ \phi_3 - 0 &= RJ_3 \\ 0 - \phi_1 &= -U_1 \end{aligned}$$

Also in Summe

$$0 = 2RJ_1 + RJ_3 - U_1 \tag{37}$$

[**1**]

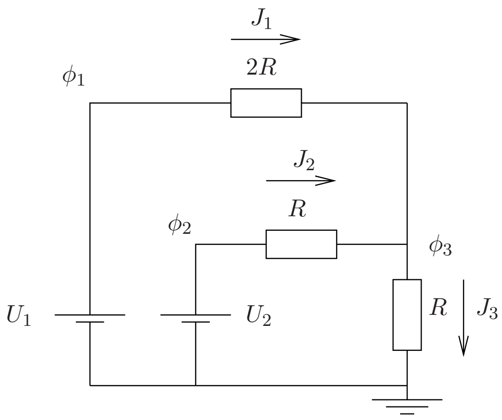


Abbildung 3: Schaltplan zu Aufgabe 6

Für die innere Masche

$$\begin{aligned}\phi_4 - \phi_3 &= RJ_2\\ \phi_3 - 0 &= RJ_3\\ 0 - \phi_1 &= -U_2\end{aligned}$$

Also in Summe

$$0 = RJ_2 + RJ_3 - U_2 \tag{38}$$

[**1**]

Zusätzlich hat man eine Gleichung für den Verzweigungspunkt

$$J_1 + J_2 = J_3 \tag{39}$$

[**1**]

Die drei hergeleiteten Gleichungen ergeben ein lösbares System. Es ist gefragt nach der Wahl von U_1, U_2, so dass $J_1 = 0$. Durch Einsetzen

$$\begin{aligned}RJ_3 &= U_1\\ RJ_2 + RJ_3 &= U_2\\ J_2 &= J_3\end{aligned}$$

[**1**]

woraus folgt

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{2} \tag{40}$$

[**1**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Betrachten Sie eine Reihenschaltung eines elektrischen Widerstands R, einer Spule mit Induktivität L, eines Kondensators der Kapazität C und einer Spannungsquelle der zeitabhängigen Spannung $U = U_0 e^{i\omega t}$

(a) Zeigen Sie, dass die dynamische Gleichung für die Ladung Q auf dem Kondensator gegeben ist durch

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U_0 e^{i\omega t} \tag{41}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Resonanzfrequenz gegeben ist durch

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \tag{42}$$

Lösung

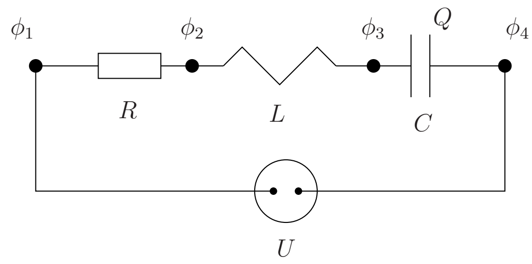


Abbildung 4: Schaltplan zu Aufgabe 7

(a) Aus der Abbildung (Konvention: Q ist die Ladung auf der rechten Kondensatorplatte) entnimmt man die vorzeichenrichtigen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\phi_1 - \phi_2 &= -R\dot{Q} \\
\phi_2 - \phi_3 &= -L\ddot{Q} \\
\phi_3 - \phi_4 &= -\frac{1}{C}Q \\
\phi_4 - \phi_1 &= U_0 e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

[**1**]

(Das Vorzeichen der letzten Gleichung ist strenggenommen durch die Aufgabenstellung nicht festgelegt. Wir wählen es so, dass sich die angegebene dynamische Gleichung ergibt.) Also durch Addition der 4 Gleichungen (*Maschenregel*):

$$0 = -R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{1}{C}Q + U_0 e^{i\omega t} \tag{43}$$

also

$$U_0 e^{i\omega t} = R\dot{Q} + L\ddot{Q} + \frac{1}{C}Q \tag{44}$$

[**1**]

(b) Ansatz für $Q(t)$:

$$Q(t) = Ae^{i\omega t} \tag{45}$$

ergibt

$$(-\omega^2 LA + i\omega RA + \frac{1}{C}A)e^{i\omega t} = U_0 e^{i\omega t} \tag{46}$$

[**1**]

also

$$A = \frac{U_0}{-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}} \tag{47}$$

Die Amplitude von Q ist der Absolutbetrag von $|A|$, also

$$|A| = \frac{U_0}{\sqrt{(L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + R^2\omega^2}} \tag{48}$$

[**1**]

Dies wird maximal, wenn der Nenner bzw. der Ausdruck unter der Wurzel minimal wird:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\omega^2)}\left((L\omega^2 - \frac{1}{C})^2 + R^2\omega^2\right) = 2(L^2\omega^2 - L/C) + R^2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{49}$$

[**1**]

also

$$\omega_{\mathrm{res}}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \tag{50}$$

[**1**]