....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
$\sum$		

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Studienbegleitende Fachprüfung, Wiederholung
Mathematik für Physik 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

6. April 2009, 9:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **11** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**
   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k!k = n! - 1$$

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie $z = \frac{1}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2}$ in Polardarstellung, $r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an. **[3]**

$$z = \boxed{}$$

(b) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt[3]{i}$ an. **[3]**

$$\sqrt[3]{i} = \boxed{} + \mathrm{i}\,\boxed{}$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ **[3]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=-1$ ☐ $=0$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(c) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$? **[2]**

☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ undefiniert

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Gegeben ist die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} z^n$. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar? **[2]**

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

6. **Stetige und differenzierbare Funktionen** **[6 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, $F(\frac{1}{2}) = 1$. Beweisen Sie: es gibt ein $t \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(t) = 2$.

7. Maximale Fläche **[10 Punkte]**

Unter den Rechtecken in der xy-Ebene, für welche

- eine Seite auf der x-Achse liegt, und
- zwei Ecken in der oberen Halbebene auf dem Graph der Funktion $f(x) = 9 - x^2$ liegen,

soll dasjenige bestimmt werden, welches den größten Flächeninhalt hat.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen der Höhe h und der Breite b des Rechtecks?

(b) Bestimmen Sie, mit Begründung, die Breite b desjenige Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.

8. **Integration** [**6 Punkte**]

(a) Bestimmen Sie [**2**]

$$\boxed{\int \frac{1}{x \log x}\, dx = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(b) Das Integral $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}} dx$ ist [**2**]

☐ konvergent, ☐ absolut konvergent, ☐ undefiniert.

(c) Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}} dx$ ist [**2**]

☐ konvergent, ☐ absolut konvergent, ☐ undefiniert.

9. **Integration** **[7 Punkte]**

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.

10. Taylorentwicklung **[8 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom fünfter Ordnung, $T_{f,5}(x)$, von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt 0. **[5]**

$T_{f,5}(x) =$

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt 0? **[3]**

☐ 0 ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 2 ☐ e ☐ ∞ ☐ existiert nicht

11. Matrixexponential **[7 Punkte]**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie A^n, $n \in \mathbb{N}$. **[2]**

$A^n =$

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. **[3]**

$\exp(tA) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

(c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

$x(t) =$