1. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2019/20
26. November 2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (11 Punkte)

(a) Vom Rand eines tiefen Brunnens werde ein Stein fallengelassen. Nach $t_a = \frac{35}{3}$s höre man am Brunneneingang den Aufschlag des Steins auf der Wasseroberfläche. Wie tief ist der Brunnen? (Schallgeschwindigkeit $v_S = 300\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)

Ein zweiter Stein falle wie oben aus der Ruhe in den Brunnen. Eine Sekunde nach Beginn des freien Falls werde ein dritter Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nachgeworfen.

(b) Berechnen Sie die Zeit t_2, die nach dem Fallbeginn des zweiten Steins vergeht, bis dieser vom dritten Stein überholt wird.

(c) In welcher Tiefe z_0 findet der Überholvorgang statt?

(d) Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegungen beider Steine in einem Ort-Zeit-Diagramm und beschriften Sie dieses.

Hinweis: Rechnen Sie mit $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Lösung

(a) Definiert sind Fallzeit des Steins t_1, Laufzeit des Schalls t_S, $t_a = t_1 + t_\mathrm{S} = \frac{35}{3}$s und Schachttiefe $s = \frac{g}{2}t_1^2 = v_\mathrm{S}t_\mathrm{S}$. Damit folgt die Lösung

$$\frac{g}{2}t_1^2 = v_\mathrm{S}t_\mathrm{S} = v_\mathrm{S}(t_a - t_1) \tag{1}$$

$$0 = \frac{g}{2}t_1^2 - v_\mathrm{S}t_a + v_\mathrm{S}t_1 \tag{2}$$

[2]

Diese quadratische Gleichung lässt sich nach t_1 auflösen. Als einzig physikalisch sinnvolle Lösung muss hierbei die positive Lösung verwendet werden. Es ergibt sich

$$t_1 = 10\ \mathrm{s} \rightarrow t_\mathrm{S} = t_a - t_1 = \frac{5}{3}\mathrm{s} \tag{3}$$

$$s = v_S t_S = 500 \text{ m} \tag{4}$$

[2]

(b) Die Fallstrecke des zweiten Steins ist definiert als $z_2 = \frac{g}{2}t^2$, die für den dritten Stein als $z_3 = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)$, wobei $t_0 = 1$ s ist. Bedingung für t_2 ($z_2 = z_3$):

$$\frac{g}{2}t_2^2 = \frac{g}{2}t_2^2 - 2\frac{g}{2}t_2 t_0 + \frac{g}{2}t_0^2 + v_0 t_2 - v_0 t_0 \tag{5}$$

$$t_2 = \frac{\frac{g}{2}t_0^2 - v_0 t_0}{g t_0 - v_0} = \frac{3}{2}\text{s.} \tag{6}$$

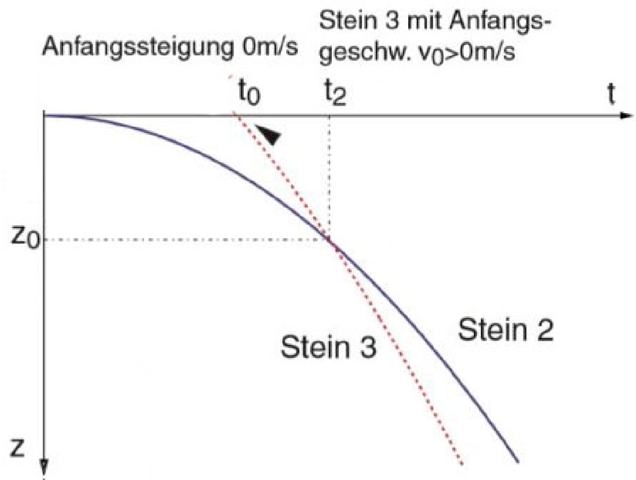
[3]

Zu beachten ist, dass das System nur dann eine physikalisch sinnvolle Lösung hat, wenn $v_0 > g t_0$ gilt.

(c)

$$z_0 = z_2(t_2) = \frac{g}{2}t_2^2 = \frac{45}{4}\text{m} \tag{7}$$

[1]



(d) **[3]**

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Um das Leben auf dem Mond angenehmer zu gestalten, soll ein Golfplatz errichtet werden. Dazu ist es notwendig zu wissen, wie weit Golfbälle auf dem Mond fliegen können.

Hinweis: Die Beziehung $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$ könnte hilfreich sein.

(a) Der Mond hat $1,23\%$ der Erdmasse und $27,3\%$ des Erdradius. Berechnen Sie daraus die Fallbeschleunigung g_M auf der Mondoberfläche.

Ersatzlösung: $g_M = 2\text{m/s}^2$

(b) Geben Sie die Flugweite L eines Golfballs in Abhängigkeit vom Abschlagwinkel α und dem Betrag v_0 der Anfangsgeschwindigkeit an. Zeigen Sie, dass L für $\alpha = 45°$ maximal wird.

(c) Berechnen Sie die maximale Flugweite für $v_0 = 50\text{m/s}$. Welche maximale Höhe H über dem Boden erreicht der Ball dabei?

Lösung

(a) Die Fallbeschleunigung ist durch die Gravitationskraft zwischen Mond (Masse M_M) bzw. Erde (Masse M_E) und einem Objekt mit der Masse m gegeben:

$$m \cdot g_M = G\frac{m \cdot M_M}{R_M^2} \qquad \text{und} \qquad m \cdot g_E = G\frac{m \cdot M_E}{R_E^2} \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad g_M = g_E \cdot \frac{M_M}{M_E} \cdot \frac{R_E^2}{R_M^2} = 9,81\text{m/s}^2 \cdot \frac{0,0123}{0,273^2} = 1,62\text{m/s}^2 \tag{9}$$

[**3**]

(b) Wir zerlegen die Flugbahn des Golfballes (Wurfparabel) in x- und y-Komponente. Die Anfangsbedingungen sind $x(t=0) = 0$ und $y(t=0) = 0$:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \tag{10}$$

$$y(t) = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g_M \cdot t^2 \tag{11}$$

Die Flugzeit t_F ist durch die Bedingung $y(t_F) = 0$ gegeben, damit folgt:

$$t_F = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g_M} \tag{12}$$

[**3**]

Wir setzen nun t_F in die Gleichung für $x(t)$ ein und erhalten

$$x(t_F) = L = \frac{v_0^2}{g_M} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g_M} \cdot \sin(2\alpha) \tag{13}$$

Offensichtlich wird L maximal wenn $\sin(2\alpha)$ maximal wird und dies ist der Fall für $2\alpha = 90°$, also $\alpha = 45°$.

[**2**]

(c) Für die maximale Flugweite setzen wir $\alpha = 45°$ und $v_0 = 50\text{m/s}$ in Gleichung 13 ein und erhalten

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g_M} = 1,54\text{km} \tag{14}$$

Am Scheitelpunkt ist die Geschwindigkeit in y-Richtung null, also

$$\dot{y}(t_S) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_S = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g_M} \tag{15}$$

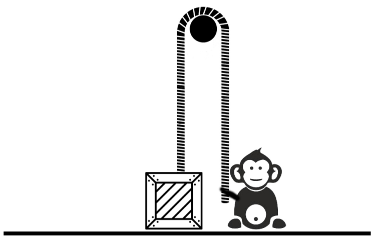
und damit folgt die Höhe am Scheitelpunkt (=maximale Höhe über dem Boden) zu

$$y(t_S) = H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g_M} = \frac{v_0^2}{4 \cdot g_M} = 386\text{m} \tag{16}$$

[**4**]

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Ein Affe der Masse $m = 10$ kg klettert ein Seil hinauf, das reibungslos über einen Ast läuft und an einer auf dem Boden stehenden Kiste der Masse $M = 15$ kg befestigt ist.



(a) Bestimmen Sie die Beschleunigung, die der Affe beim Klettern mindestens erreichen muss, damit die Kiste vom Boden angehoben wird.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der angehobenen Kiste (Starthöhe h_0), wenn der Affe zu klettern aufhört und sich am Seil festhält. Ermitteln Sie außerdem die Zugspannung (Kraft) im Seil.

Lösung

(a) Bei der minimalen Beschleunigung des Affen muss ein Kräftegleichgewicht auf das Seil mit der Normalkraft auf die Kiste $F_N = 0$ N herrschen, also

$$F_{a_A} + F_{g_A} = F_{g_K} \tag{17}$$

$$m \cdot a + m \cdot g = M \cdot g \tag{18}$$

$$a = \frac{(M-m) \cdot g}{m} = 4,91\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{19}$$

[**3**]

(b) Die beschriebene Situation entspricht dem Prinzip einer Atwoodschen Fallmaschine.

Kräfte auf den Affen: $F_A = m \cdot g - T = m \cdot a_A$

Kräfte auf die Kiste: $F_K = M \cdot g - T = M \cdot a_K$

Da das Seil eine konstante Länge hat gilt außerdem: $a_A = -a_K$

[**3**]

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$T = m \cdot g + m \cdot a_K = M \cdot g - M \cdot a_K \tag{20}$$

$$a_K = \frac{M-m}{M+m} \cdot g = 1,96\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{21}$$

[1]

Die Kiste bewegt sich also gleichmäßig beschleunigt gemäß folgender Gleichung nach unten:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_K \cdot t^2 - h_0 = 0,98 \cdot t^2 - h_0 \tag{22}$$

[1]

Für die Zugspannung im Seil gilt:

$$T = m \cdot g + m \cdot \left(\frac{M - m}{M + m}\right) \cdot g \tag{23}$$

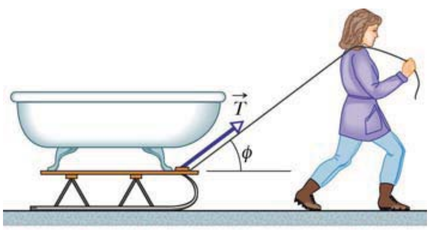
$$= 2 \cdot \frac{M \cdot m}{M + m} \cdot g = 117,72 \text{ N} \tag{24}$$

[1]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Eine Frau zieht mit konstanter Geschwindigkeit einen Schlitten mit einer Masse von 75kg auf einer Ebene. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kufen und Schnee beträgt $\mu_\text{K} = 0,1$, der Winkel $\phi = 42°$.

Wie groß ist die vom Seil auf den Schlitten ausgeübte Kraft T (das Seil greift im Schwerpunkt des Schlittens an)? Machen Sie eine Zeichnung der wirkenden Kräfte.



Lösung

[2]

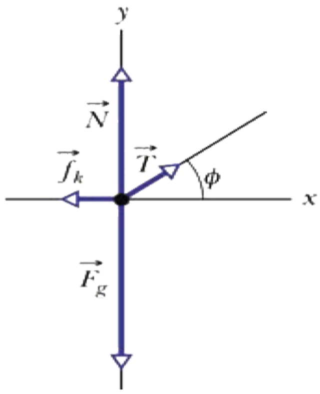
Folgende Kräfte wirken auf den Schlitten. Da $\vec{a} = 0$,

$$\vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_\text{g} + \vec{F}_\text{R} = 0$$

Komponentenweise bedeutet dies

$$T_x - F_R = 0 \Rightarrow T\cos\phi - \mu_\text{k} N = 0$$
$$T_y + N - F_\text{g} = 0 \Rightarrow T\sin\phi + N - mg = 0$$

[3]



Das resultierende 2×2-Gleichungssystem für die Unbekannten T und N wird für T durch

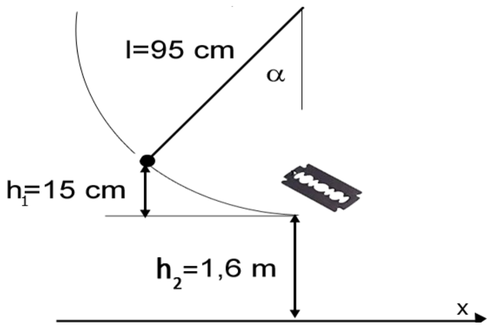
$$T = \frac{\mu_\mathrm{k} m g}{\cos\phi + \mu_\mathrm{k} \sin\phi} = 90,8\mathrm{N}$$

gelöst.

[**2**]

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Ein Fadenpendel der Länge $l = 95$ cm wird um die Höhe $h_1 = 15$ cm angehoben und dann losgelassen. Im tiefsten Punkt der Bahn wird der Pendelkörper ($m = 150$ g) durch eine Rasierklinge vom Faden getrennt und fällt auf den $h_2 = 1,6$ m tiefer gelegenen Boden.



(a) Berechnen Sie den Auftreffpunkt r_x des Körpers

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_A betragsmäßig und vektoriell beim Auftreffen auf dem Erdboden, sowie den Auftreffwinkel.

(c) Nun wird die Rasierklinge entlang des Kreises, auf dem die Kugel sich am Seil bewegt, um einmal $\beta = +15°$ und dann um $\beta = -15°$ verschoben. Zeichnen Sie für beide Fälle die Flugbahn der Kugel ein.

Lösung

(a) Mit $h_1 = 15$ cm ergibt sich mit der Energieerhaltung

$$E_{pot} = E_{kin} \tag{25}$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \tag{26}$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = 1,72 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{27}$$

[**2**]

für den Zeitpunkt, zu dem die Rasierklinge den Pendelkörper vom Faden trennt. Da dies im unteren Bahnpunkt des Kreises, auf dem sich die Kugel bis zu diesem Zeitpunkt bewegt hat, geschieht, zeigt der Geschwindigkeitsvektor in horizontale Richtung. Damit ergibt sich mit $h_2 = 1,6$ m die Bewegungsgleichung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

[**1**]

Für das Auftreffen des Körpers auf den Boden gilt $r_y = 0$, dies geschieht zum Zeitpunkt t_t, also

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} = 0,57 \ \mathrm{s} \tag{29}$$

[**2**]

Der Körper bewegt sich nur in der Pendelebene weiter, der horizontale Abstand r_x beim Auftreffen ist damit gegeben durch

$$r_x(t_t) = v_1 \cdot t_t = 0,98 \ \mathrm{m}. \tag{30}$$

[**1**]

(b) Für die Geschwindigkeit zur Zeit t_t gilt:

$$\vec{v}(t_t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t_t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ -g \cdot t_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,72 \\ -5,59 \end{pmatrix} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{31}$$

[**2**]

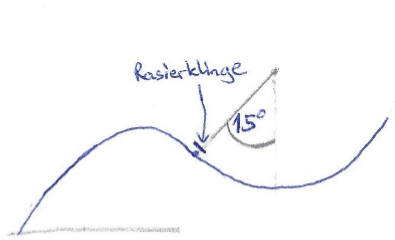
Und für den Betrag der Geschwindigkeit gilt

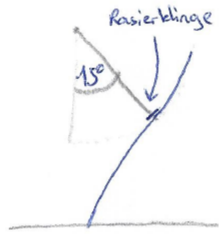
$$|\vec{v}(t_t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5,85 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad \alpha = 17,07° \tag{32}$$

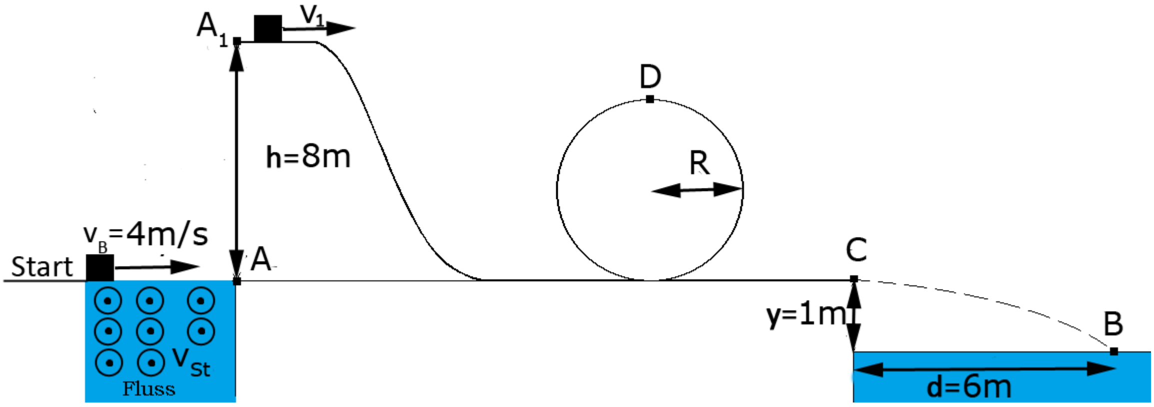
[**2**]

(c) In der Abbildung sieht man links die Verschiebung der Rasierklinge um $+15°$ und rechts bei einer Verschiebung von $-15°$:

[**2**]







Aufgabe 6 (18 Punkte)

In einem Wasserpark soll eine neue Attraktion gebaut werden.

(a) Ein Boot hat die Geschwindigkeit $v_B = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und möchte auf der gegenüberliegenden Flussseite bei A ankommen. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei $v_{St} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und zeigt aus der Zeichenebene heraus. In welchem Winkel gegen die Strömung muss das Boot steuern um sich geradlinig über den Fluss zu bewegen? Zeichnen Sie eine Skizze und beschriften Sie den Winkel.

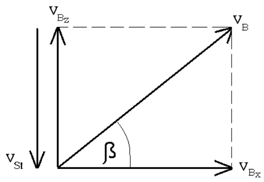
(b) Im Punkt A bringt eine Hebebühne das Boot auf die Höhe $h = 8\text{m}$. Wieviel Arbeit wird dabei verrichtet, wenn das Boot eine Masse von $m = 15\text{kg}$ hat?

Im Punkt A_1 wird das Boot auf eine Geschwindigkeit v_1 gebracht und gleitet mit dieser Geschwindigkeit durch einen Looping und springt am Ende in einen $y = 1\text{m}$ tieferliegenden See.

(c) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_1 hat das Boot in A_1, wenn es im Punkt B, im Abstand d=6m vom Ende der Bahn, im See auftreffen soll?

(d) Welchen Radius R hat der Looping, wenn die Zentripetalkraft im höchsten Punkt D betragsmäßig das 2-fache der Gewichtskraft ist?

Lösung



(a) Um gegenüber anzukommen muss die z-Komponente der Bootsgeschwindigkeit betragsmäßig der Strömungsgeschwindigkeit entsprechen. $|v_{Bz}| = |v_{St}|$

$$\sin(\beta) = \frac{v_{Bz}}{v_B} = \frac{v_{ST}}{v_B} \rightarrow \beta = \arcsin(\frac{2}{4}) = 30° \tag{33}$$

[**3**]

(b)

$$W = \Delta E = mgh = 1,177\text{kJ} \tag{34}$$

oder:

$$W = \int_0^h F(s)\ ds = \int_0^h mg\ ds = mgh = 1,177\text{kJ} \tag{35}$$

[**2**]

(c) Die Gesamtenergien bei A_1 und bei C müssen gleich sein.

$$E_{gesA_1} = E_{gesC} \tag{36}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{37}$$
$$\rightarrow v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gh} \tag{38}$$

Die Geschwindigkeit v_2 berechnet sich durch die Weite d und Höhe y.

Bis das Boot auf dem Wasser aufschlägt, vergeht die Zeit t:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 0,45\text{s} \tag{39}$$

In dieser Zeit legt das Boot eine Weite von d=6m zurück, dh. die Geschwindigkeit v_2 ist

$$v_2 = \frac{d}{t} = \sqrt{\frac{g}{2y}}d = 13,3\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{40}$$

Setzt man dies nun in Gleichung 38, erhält man für v_1:

$$v_1 = \sqrt{13,3^2\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} - 2 \cdot 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8\text{m}} = 4,46\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{41}$$

[**7**]

(d) Es gilt:

$$F_z = 2F_g \tag{42}$$

$$\frac{mv_3^2}{R} = 2mg \tag{43}$$

$$\rightarrow v_3^2 = 2gR \tag{44}$$

[**2**]

Man kann die Energieerhaltung im Punkt D und C anwenden:

$$mg2R + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow v_3^2 = v_2^2 - 4Rg \tag{45}$$

Setzt man dies nun in Gleichung 44, kann man nach R auflösen und erhält:

$$2Rg = v_2^2 - 4Rg \rightarrow R = \frac{v_2^2}{6g} = 3,0\text{m} \tag{46}$$

Genauso könnte man die Energieerhaltung im Punkt D und A_1 anwenden. Man hat nur einen Term mehr, da im Punkt A_1 auch noch die Höhenenergie vorhanden ist.

[**4**]

Aufgabe Mathematische Ergänzung (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen

$$\int e^x \cos x \, dx$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x \, dx.$$

Lösung:

Das Integral kann durch partielle Integration gelöst werden. Mit $u(x) = \mathrm{e}^x$ und $v'(x) = \cos x$ gilt $u'(x) = \mathrm{e}^x$ und $v(x) = \sin x$ und somit

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

in dem verbleibenden Integral kann erneut partielle Integration mit $u(x) = \mathrm{e}^x$ und $w'(x) = \sin x$ mit $w(x) = -\cos x$ angewendet werden

$$= \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x$$

damit steigt der Phönix aus der Asche

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{e}^x (\sin x + \cos x) + C$$

[5]

Für das bestimmte Integral ergibt sich dann

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \right) = \cosh \tfrac{\pi}{2}.$$

[2]