Klausur zur Experimentalphysik 1 für TUMtwoinone

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2011
5. August 2011
Musterlösung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein als masselos anzunehmendes Gummiseil, das in entspanntem Zustand die Länge $l_0 = 40$m hat, ist am Geländer einer Brücke der Höhe $h_0 = 100$m befestigt. Am anderen Ende des Seils ist ein Mensch mit der Masse $m = 70$kg befestigt. Nehmen Sie an, dass sich das Gummiseil bei Dehnung gemäß dem Hookeschen Gesetz mit einer Federkonstante von $k = 40$N/m verhält. Nun springt der Mensch zur Zeit $t_0 = 0$ von der Brücke. Reibungseffekte seien zu vernachlässigen.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 zu dem Zeitpunkt t_1, zu dem das Seil erstmals gestreckt ist und dessen Dehnung beginnt. Wie groß ist t_1?

Lösung:

Das Seil ist erstmals gestreck, wenn die Fallstrecke x des freien Falls der Länge l_0 des entspannten Seils entspricht:

$$x = \frac{1}{2} g t_1^2 \tag{1}$$

Setzt man $l_0 = 40$m für x ein und löst nach t_1 auf, so erhält man

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 40\text{m}}{9.81\text{m/s}^2}} = 2.86\text{s} \tag{2}$$

[1]

Für den freien Fall lässt sich die Geschwindigkeit v_1 einfach berechnen:

$$v_1 = v(t_1) = g t_1 = \sqrt{2 l_0 g} = \sqrt{2 \times 40\text{m} \times 9.81\text{m/s}^2} = 28\text{m/s} \tag{3}$$

[1]

b) Nach welcher Fallstrecke x_2 kompensieren sich gerade die Schwerkraft auf den Menschen und die elastische Kraft des Seils?

Lösung:

Die elastische Kraft wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben. Dann gilt

$$mg = (x_2 - l_0)k \tag{4}$$

wobei $(x_2 - l_0)$ natürlich die Dehnung des Seils darstellt. Nach x_2 aufgelöst ergibt sich

$$x_2 = \frac{mg}{k} + l_0 = \frac{70\text{kg} \times 9.81\text{m/s}^2}{40\text{N/m}} + 40\text{m} = 57.2\text{m} \tag{5}$$

[**1**]

c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max}, die der Springer erreicht?

Lösung:

Die maximale Geschwindigkeit wird an dem Ort erreicht, an dem die Schwerkraft gleich der elastischen Kraft des Seils ist. Dann ergibt sich durch die Energieerhaltung, dass die frei gewordene potentielle Energie gleich der Summe der kinetischen Energie und der Energie, die in der Dehnung steckt, ist:

$$\begin{aligned} mgx_2 &= \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \left(\int_{l_0}^{x_2} (x - l_0)k dx\right) && (6) \\ &= \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}(x_2 - l_0)^2 k && (7) \end{aligned}$$

[**1**]

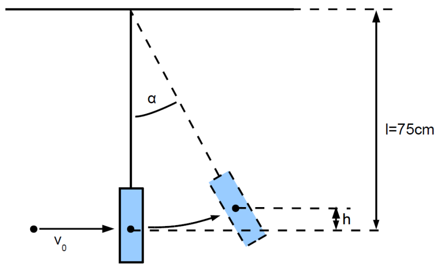
Aufgelöst nach v_{max} ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{max}^2 &= \frac{2}{m}\left(mgx_2 - \frac{1}{2}(x_2 - l_0)^2 k\right) && (8) \\ &= \frac{2}{m}\left(mg\left(\frac{mg}{k} + l_0\right) - \left(\frac{mg}{k}\right)^2 \frac{k}{2}\right) && (9) \\ &= \frac{2mg^2}{k} + 2gl_0 - \frac{mg^2}{k} && (10) \\ &= \frac{mg^2}{k} + 2gl_0 && (11) \\ &= 30.9\text{m/s} && (12) \end{aligned}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein hartes Geschoss ($m = 100\text{g}$, $v_0 = 150\text{m/s}$) trifft einen aufgehängten mit Sand gefüllten Sack ($M = 15\text{kg}$) genau im Schwerpunkt, der 75cm unterhalb des Aufhängepunktes liegt. Dadurch wird der Sack ausgelenkt (siehe Abbildung).



a) Das Geschoss ist in den Sack eingedrungen. Welche Geschwindigkeit besitzt der Sack nach dem Stoß?

Lösung:

Es handelt sich hier um einen inelastischen Stoß, daher gilt die Impulserhaltung:

$$mv_0 = (M + m)v \tag{13}$$

Die Geschwindigkeit berechnet sich zu:

$$v = \frac{m}{M + m} v_0 = \frac{0.1\text{kg}}{(15 + 0.1)\text{kg}} \times 150\text{m/s} = 1.0\text{m/s} \tag{14}$$

[**1**]

b) Wieviel Energie wurde bei dem Stoß in Wärme umgewandelt?

Lösung:

Die kinetische Energie vor dem Stoß beträgt

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 \tag{15}$$

Nach dem Stoß:

$$E'_{kin} = \frac{1}{2}(M + m)v^2 \tag{16}$$

[**1**]

Daraus berechnet sich die Wärmeenergie als Energiedifferenz:

$$\Delta E = E_{kin} - E'_{kin} = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \frac{1}{2}\frac{mM}{M+m} v_0^2 = 1118\mathrm{J} \tag{17}$$

[1]

c) Um welchen Wert h wird der Schwerpunkt des Sackes angehoben und welchem Auslenkwinkel α entspricht dies?

Lösung:

Die kinetische Energie nach dem Stoß wird in potentielle Energie umgewandelt:

$$E'_{kin} = E_{pot} \tag{18}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m^2}{M+m} v_0^2 = (M+m) g h \tag{19}$$

Dann ist h:

$$h = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v_0^2}{g} = 5.0\mathrm{cm} \tag{20}$$

[1]

Die Auslenkung berechnet sich aus geometrischen Überlegungen:

$$\cos(\alpha) = \frac{l-h}{l} = \frac{70\mathrm{cm}}{75\mathrm{cm}} \quad \rightarrow \quad \alpha = 21^\circ \tag{21}$$

[1]

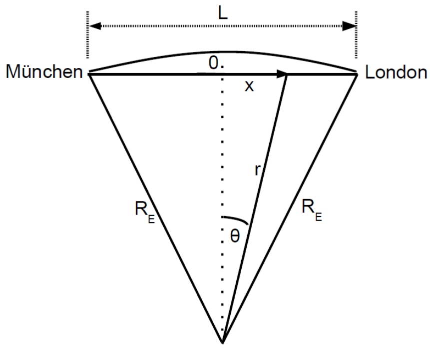
Aufgabe 3 (7 Punkte)

Zwischen München und London soll zum schnellen Transport ein geradliniger Rohrtunnel gebaut werden, also nicht der Erdkrümmng folgend (siehe Abbildung). Der Transport von Containern soll dabei reibungsfrei erfolgen. Die geradlinige Entfernung zwischen London und München beträgt 900km.

a) Zeigen Sie, dass die in $x-$Richtung wirkende Komponente der Gravitationskraft gegeben ist durch

$$F_{G,x} = F_G(r) \cdot \sin(\theta) = \frac{GmM_E}{R_E^3} \cdot r \cdot \frac{x}{r} \quad , \quad \mathbf{F}_{G,x} = -F_{G,x}\mathbf{e}_x \tag{22}$$

Hinweis: Die Gravitationskraft am Ort $r < R_E$ vom Erdmittelpunkt entfernt beträgt:



$$F_G(r) = G\frac{mM_E(r)}{r^2} = G\frac{4}{3}\rho_E \pi r m \tag{23}$$

Gehen Sie dabei von einer konstanten Dichte ρ_E der Erde aus. Betrachten Sie zunächst die am Ort $r < R_E$ wirkende Gravitation.

Lösung:

Unter Annahme einer konstanten Erddichte $\rho_E = \frac{3}{4\pi}\frac{M_E}{R_E^3}$ ergibt sich für die Gravitationskraft:

$$F_G(r) = \frac{GmM_E}{R_E^3} r \tag{24}$$

[**1**]

Damit folgt (siehe Abbildung) als Resultat für die Gravitationskomponente in $x-$Richtung:

$$F_{G,x} = F_G(r)\sin(\theta) = \frac{GmM_E}{R_E^3} r \frac{x}{r} \tag{25}$$

[**1**]

$b)$ Ermitteln Sie damit die Bewegungsgleichung des Containers in $x-$Richtung. Lösen Sie diese Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $v(0) = 0\text{m/s}$ und $x(0) = -L/2$ (Start des Transports in München). Gehen Sie dabei davon aus, dass das Be- und Entladen des Containers in London und München vernachlässigbar ist.

Lösung:

Die Bewegungsgleichung des Containers ist somit:

$$m\ddot{x} + \frac{GmM_E}{R_E^3} x = 0 \tag{26}$$

[**1**]

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t\right) \tag{27}$$

[1]

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = A = -L/2$ und $\dot{x}(0) = B\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}} = 0$ ergibt sich als Lösung:

$$x(t) = -\frac{L}{2}\cos(\omega t) \tag{28}$$

wobei $\omega = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}} \approx 0.00124\text{s}^{-1}$.

[1]

c) Welche Zeit t_D benötigt der Transport (mit Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0\text{m/s}$) von München nach London durch diesen Tunnel? Welche Höchstgeschwindigkeit v_{max} wird dabei erreicht?

Lösung:

London wird nach einer halben Periodendauer erreicht:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}} \approx 2530\text{s} \approx 42\text{min} \tag{29}$$

[1]

Dann ist die Höchstgeschwindigkeit des Zuges:

$$v_{max} = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}} = 559\text{m/s} \tag{30}$$

[1]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wie schnell muss ein Raumfahrer mit konstanter Geschwindigkeit fliegen, um die Strecke von der Erde bis zum nächsten Fixstern Proximus Centaurus (Entfernung 4.3 Lichtjahre) in einer Zeitspanne zurückzulegen, während der er selber um fünf Jahre altert?

Lösung:

Für die Eigenzeit t' im System des Raumfahrers gilt:

$$t' = \frac{1}{\gamma}t = \sqrt{1-\beta^2}\frac{s}{\beta c} \tag{31}$$

[**1**]

mit der Lichtgeschwindigkeit c, der zurückgelegten Strecke $s = ct_r$ mit der Reisedauer $t_r = 4.3$y und $\beta = \frac{v}{c}$.

[**1**]

Einsetzen ergibt:

$$t' = \sqrt{1-\beta^2}\frac{ct_r}{c\beta} \tag{32}$$

$$\frac{t'}{t_r} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \tag{33}$$

$$\left(\frac{t'}{t_r}\right)^2 = \frac{1-\beta^2}{\beta^2} \tag{34}$$

Dann ist

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t'}{t_r}\right)^2 + 1}} \tag{35}$$

[**1**]

Mit $t' = 5$y berechnet sich dies zu

$$\beta = 0.652 \tag{36}$$

und deshalb ist die Geschwindigkeit

$$v = 0.652\text{c} \tag{37}$$

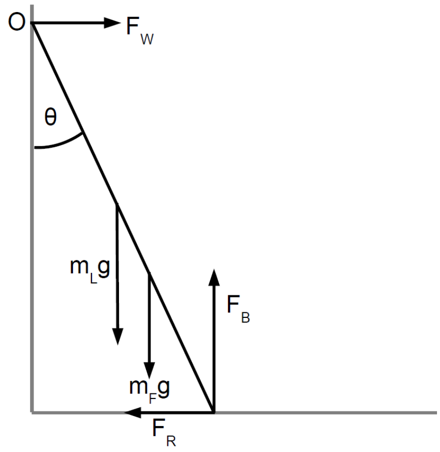
[**1**]

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Eine Leiter der Länge $l = 8$m und der Masse $m_L = 15$kg lehnt an einer glatten, senkrechten Wand. Der Winkel zwischen Wand und Leiter beträgt $\theta = 25°$. Die Schwerkraft greift dabei im Schwerpunkt der Leiter an. Der Reibungskoeffizient zwischen Boden und Leiter ist $\mu = 0.2$. Nun klettert eine Frau mit Masse $m_F = 60$kg auf die Leiter. Berechnen Sie die Höhe h, bis zu der sie die Leiter hinaufklettern kann, bevor die Leiter anfängt zu rutschen. Erstellen Sie eine Skizze der Anordnung und zeichnen Sie die Kräfte ein.

Lösung:

Die Abbildung zeigt die Kräfte, die auf die Leiter wirken: Dies sind die Haltekraft des Bodens und der Wand, die Schwerkraft der Leiter und der Frau sowie die Reibungskraft:



[**1**]

Aus dem Kräftegleichgewicht folgt:

$$\sum \mathbf{F}_x = \mathbf{F}_W + \mathbf{F}_R = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{F}_W = -\mathbf{F}_R \tag{38}$$

[**1**]

$$\sum \mathbf{F}_y = m_L g + m_F g + \mathbf{F}_B = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{B} = -(m_L + m_F)g \tag{39}$$

[**1**]

Auch die Drehmomente müssen verschwinden, d.h. $\sum \mathbf{D}_i = 0$, damit die Leiter in Ruhe bleibt. Drehmomente werden z.B. für den Ansatzpunkt O berechnet:

$$m_L g \frac{l}{2} \sin(\theta) + m_F g x \sin(\theta) + \underbrace{\mu(m_L + m_F)g}_{\mathbf{F}_R} l \cos(\theta) - \underbrace{(m_L + m_F)g}_{\mathbf{F}_B} l \sin(\theta) = 0 \tag{40}$$

[**1**]

Die Höhe h ergibt sich dann aus geometrischen Überlegungen zu

$$h = (l - x)\cos(\theta) \tag{41}$$

[**1**]

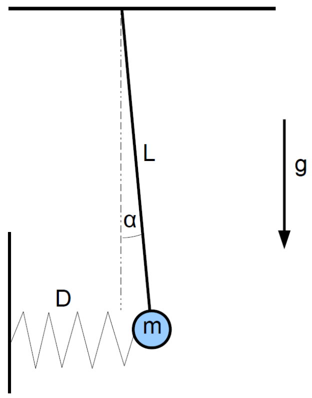
Alles zusammen ergibt schließlich für h:

$$h = \left(l - \frac{(m_L + m_F)gl\sin(\theta) - \mu(m_L + m_F)gl\cos(\theta) - m_L g \frac{l}{2}\sin(\theta)}{m_F g \sin(\theta)} \right) \cos(\theta) \tag{42}$$

$$= 3\text{m} \tag{43}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (10 Punkte)



Die Masse m eines idealen Pendels der Länge L wird mit einer masselosen Feder mit Federkonstante D verbunden. Am tiefsten Punkt des Pendels (d.h. bei $\alpha = 0$) wird die Feder um die Strecke x_0 aus ihrer Gleichgewichtslage eingedrückt.

Hinweis: Nehmen Sie näherungsweise an, dass eine Auslenkung der Feder senkrecht zu ihrer Achse keine rücktreibende Kraft zur Folge hat, und vernachlässigen Sie Reibungseffekte. Das Pendel schwingt im Gravitationsfeld der Erde. Sie dürfen ebenfalls annehmen, dass $\alpha << 1$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Pendelauslenkung α auf. Zeigen Sie, dass im Fall kleiner Auslenkungen ($\alpha << 1$) die allgemeine Lösung folgende Form hat:

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \alpha_R \tag{44}$$

Lösung:

Um die Bewegungsgleichung aufzustellen, muss man zuerst die Kräfte kennen, die auf das System wirken. Aufgrund des Hinweises darf man annehmen, dass sich das Pendel parallel zum Pendelfaden in Ruhe befindet. Man muss also nur die Kräfte senkrecht zum Fadenpendel beachten. Hier wirkt die Gewichtskraft:

$$F_G = -mg\sin(\alpha) \tag{45}$$

sowie die Federkraft:

$$F_H = -D(x - x_0)\cos(\alpha) \tag{46}$$

[**1**]

Also ist dann

$$ma = -mg\sin(\alpha) - DL\sin(\alpha)\cos(\alpha) + Dx_0\cos(\alpha) = mL\ddot{\alpha} \tag{47}$$

[**1**]

Für $\alpha << 1$ erhält man also die Differentialgleichnng:

$$-\left(\frac{g}{L} + \frac{D}{m}\right)\alpha + \frac{Dx_0}{mL} = \ddot{\alpha} \tag{48}$$

[**1**]

Der Ansatz für eine homogene Differentialgleichung ist

$$\alpha_h(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{49}$$

und daher hat diese Bewegungsgleichung die allgemeine Lösung:

$$\alpha(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \alpha_R \tag{50}$$

Hier ist α_R die Ruhelage.

[**1**]

b) Geben Sie die Schwingungsperiode T und die Ruhelage α_R als Funktion von m, L, D und x_0 an.

Lösung:

Aus dem Ansatz für die homogene Differentialgleichung ergibt sich für ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{D}{m}} \tag{51}$$

und damit ist die Schwingungsperiode:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{mg + DL}} \tag{52}$$

[**1**]

Die Ruhelage α_R kann ermittelt werden, wenn das Federpendel komplett in Ruhe ist, also im Falle eines Kräftegleichgewichts, $\sum F = 0$. In diesem Fall ist die Gleichung (48) gleich Null und kann nach $\alpha = \alpha_R$ aufgelöst werden:

$$\left(\frac{g}{L} + \frac{D}{m}\right)\alpha = \frac{Dx_0}{mL} \tag{53}$$

[**1**]

$$\rightarrow \alpha_R = \frac{Dx_0}{mg + DL} \tag{54}$$

[**1**]

c) Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung, wenn das Pendel zum Zeitpunkt 0 in die Position $\alpha = 0$ gebracht und losgelassen wird?

Lösung:

Aus den Anfangsbedingungen lassen sich A und B ermitteln. Für α zum Zeitpunkt 0 ist nämlich

$$\alpha(0) = B + \alpha_R = 0 \tag{55}$$

und daher ist

$$B = -\alpha_R \tag{56}$$

[**1**]

A hingegen lässt sich aus der Ableitung von Gleichung (50) berechnen:

$$\dot{\alpha}(0) = \omega A = 0 \tag{57}$$

ergibt

$$A = 0 \tag{58}$$

[**1**]

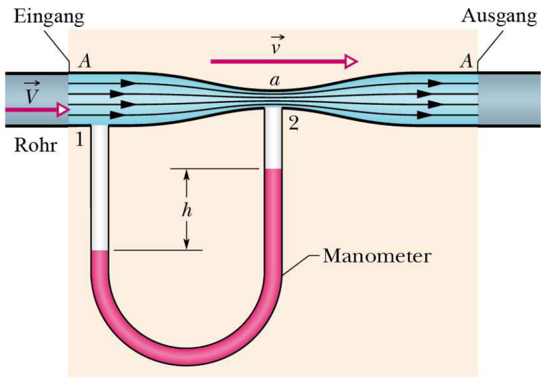
Daher ist die Lösung:

$$\alpha(t) = \frac{Dx_0}{mg + DL}(1 - \cos(\omega t)) \tag{59}$$

[**1**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die Venturi-Düse wird oft zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Fluiden in einem Rohr verwendet (siehe Abbildung). Das Rohr habe am Eingang und Ausgang die Querschnittsfläche A. Am Eingang und Ausgang fließt das Fluid mit derselben Geschwindigkeit V wie im Rohr. Dazwischen strömt es mit der Geschwindigkeit v durch eine Verengung mit der Querschnittsfläche a. Das Manometer verbindet den breiteren Teil der Düse mit dem engeren Teil.



a) Was wird durch die Änderung des Fluiddrucks $\Delta p = p_2 - p_1$ bewirkt?

Lösung:

Die Veränderung des Fluiddrucks zwischen dem Druck in der Verengung am Punkt 2 und dem Druck im Rohr bei Punkt 1 erzeugt eine Höhendifferenz im Flüssigkeitsspiegel in den beiden Armen des Manometers.

[**1**]

b) Betrachten Sie die Druckdifferenz Δp zwischen Punkt 1 und Punkt 2 und zeigen Sie, dass für die Geschwindigkeit V gilt:

$$V = \sqrt{\frac{2a^2 \Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}} \tag{60}$$

wobei ρ die Fluiddichte ist.

Lösung:

Man verwendet zuerst die Kontinuitätsgleichung

$$A \cdot V = a \cdot v \rightarrow v = \frac{A}{a} V \tag{61}$$

[**1**]

uns setzt dies dann in die Bernoulli-Gleichung ein:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{62}$$

[**1**]

$$\frac{1}{2}\rho V^2 \left(\frac{a^2 - A^2}{a^2}\right) = \Delta p \tag{63}$$

$$\rightarrow V = \sqrt{\frac{2a^2\Delta p}{\rho(a^2 - A^2)}} \tag{64}$$

[**1**]

c) Nehmen Sie nun an, bei dem Fluid handle es sich um Wasser mit der Dichte $\rho_W = 1\text{g}/\text{cm}^3$. Die Querschnittsflächen seien 5 cm^2 im Rohr und 4cm^2 in der Düsenverengung. Der Druck im Rohr sei 5.3 kPa und der Druck in der Verengung 3.3 kPa. Welche Wassermasse wird pro Sekunde durch den Rohreingang transportiert?

Lösung:

Mit der oben berechneten Geschwindigkeit und den angegeben Werten ergibt sich für V:

$$V = \frac{8}{3}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{65}$$

[**1**]

Dann ist die Wassermasse pro Sekunde:

$$\frac{\Delta M_W}{\Delta t} = A \cdot V \cdot \rho_W = \frac{4}{3}\frac{\text{kg}}{\text{s}} \tag{66}$$

[**1**]