Nachklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2017
04.10.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Sie betrachten zwei (masselose) Punktladungen mit Ladung $q > 0$, die sich an den Orten $x_1 = +a$ und $x_2 = -a$ befinden. Wird ein Teilchen der Masse m und Ladung $Q > 0$ auf die Höhe y über die beiden Punktladungen gebracht „schwebt" das Teilchen und bewegt sich nicht. Bestimmen sie den Parameter a.
Hinweis: Die Anordnung befindet sich im Gravitationsfeld der Erde.

Lösung

Auf das Teilchen wirkt die Gewichtskraft $\vec{F}_G = mg\vec{e}_y$ und wird zusätzlich von den beiden Punktladungen über die elektrostatische Kraft $\vec{F}_{el}$ abgestoßen. Befinden sich die beiden Punktladungen an der richtigen Stelle kompensieren sich die Kräfte und das Teilchen „schwebt".

[1]

Die elektrostatische Kraft auf das Teilchen am Ort $\vec{r}$ wird über das Coulomb-Gesetz bestimmt. Die gesamte elektrostatische Kraft ergibt sich aus Superposition der beiden einzelnen Kräfte.

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{Qq_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \tag{1}$$

$$\vec{F}_{el} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{r}_1) + \vec{F}(\vec{r}, \vec{r}_2) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\begin{pmatrix} -a \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_y$$

[3]

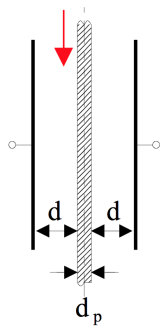
Um a zu bestimmen wird die elektrostatische Kraft mit der Gewichtskraft gleichgesetzt und umgeformt.

$$a = \sqrt{\left(\frac{qQy}{2\pi\epsilon_0 mg} \right)^{\frac{2}{3}} - y^2}$$

[3]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Die Produktion einer Papiermaschine wird durch kapazitive Papierdickenmessung kontinuierlich und berührungsfrei überwacht, indem die hergestellte Papierbahn der relativen Permeabilitätszahl $\epsilon_r = 2,4$ in der Mitte zwischen zwei Parallelen Metallplatten der Fläche $A = 0,1\,\mathrm{m}^2$ und Abstand $d_1 = 4,0\,\mathrm{mm}$ hindurchläuft und dabei die Kapazität gemessen wird.



(a) Wie groß ist die Kapazität C_0 der beiden Platten, wenn kein Papier durchläuft?

(b) Welche Dicke hat das Papier, wenn die Kapazität $C = 239\,\mathrm{pF}$ gemessen wird?

(c) Wie wird die Kapazitätsmessung beeinflusst, wenn die Papierbahn nicht genau in der Mitte zwischen den Metallplatten, sondern um $x = 1,0\,\mathrm{mm}$ nach rechts parallelverschoben hindurchläuft?

Lösung

(a) Die Kapazität der beiden Metallplatten ohne Papier lässt sich mit Hilfe der folgenden Gleichung bestimmen.

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d_1} = 221\,\mathrm{pF} \tag{2}$$

[2]

(b) Wenn das Papier zwischen den beiden Platten durchfährt, kann die Anordnung als Reihenschaltung von drei Kondensatoren behandelt werden. Für Die Gesamtkapazität C gilt

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \tag{3}$$

[1]

Hierbei lassen sich die einzelnen Kapazitäten mittels Gleichung (2) zu $C_1 = C_3 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$ und $C_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d_p}$ bestimmen.

[3]

Um die Unbekannte Größe d zu eliminieren, kann der feste Abstand der beiden Metallplatten $d_1 = d + d_p + d$ hinzugezogen werden.

[**1**]

Gleichung (3) kann nun nach d_p umgeformt werden.

$$d_p = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{C(1-\epsilon_r)} - \frac{\epsilon_r d_1}{1-\epsilon_r} = 0,51\,\mathrm{mm}$$

[**2**]

(c) Die Kapazität dieser Reihenschaltung ändert sich nicht, wenn das Papier zwischen den Platten verschoben wird.

[**1**]

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Ein Plattenkondensator habe parallele und und kreisförmige Platten mit dem Radius R=2,3cm. Der Plattenabstand betrage 1,1mm, das Dielektrikum sei Luft. Nun fließe Ladung auf die eine Platte. Von der andere fließe Ladung ab. Der Strom betrage 5A.

(a) Berechnen Sie die zeitliche Änderung des elektrischen Feldes zwischen den Platten.

(b) Berechnen Sie den Verschiebungsstrom zwischen den Platten und zeigen Sie, dass er 5A beträgt.

(c) Zeigen Sie, dass im Abstand r von der Mittelachse durch beide Platten das Magnetfeld zwischen den Platten gegeben ist durch $B = (1,89 \cdot 10^{-3} T/m) \cdot r$ wenn r kleiner ist als der Plattenradius R ($r < R$).

Lösung

(a) Elektrisches Feld zwischen den Platten:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

[**1**]

wobei σ die Flächenladungsdichte und A die Fläche der Platten darstellt. Daraus folgt, dass:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 A} = 3,4 \cdot 10^{14}\mathrm{V/ms}$$

[**1**]

(b) Elektrischer Fluß zwischen den Platten: $\phi_c = E \cdot A$. Damit gilt für den Verschiebungsstrom:

$$I_V = \epsilon_0 \frac{d\phi_c}{dt} = \epsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 A \frac{I}{\epsilon_0 A} = I = 5\mathrm{A}$$

[**2**]

(c) Das Ampereschen Gesetzes, besagt:

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 I.$$

[1]

Zwischen den Platten fließt kein Leitungsstrom, somit gilt für das Magnetfeld:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_{v,ein},$$

[1]

wobei $I_{v,ein}$ der Verschiebungsstrom ist, der durch einen Kreis mit dem Radius r fließt. Mit dem Plattenradius $R = 2,3$ cm und $r < R$ gilt:

$$I_{v,ein} = I_v \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_v \frac{r^2}{R^2}.$$

[1]

Damit:

$$B = \mu_0 I_v \frac{r}{2\pi R^2} = 1,89 \cdot 10^{-3} \cdot r \ \ \mathrm{T/m}$$

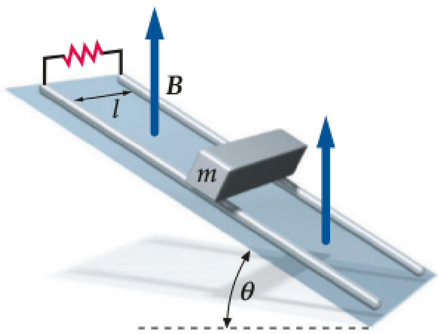
[2]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein Metallstab der Masse m liege quer über zwei ebenfalls parallelen Metallstangen mit dem Abstand l. Die Stangen sind um den Winkel θ gegen die Horizontale gekippt. Das Magnetfeld B zeigt vertikal nach oben. Die beiden Metallstangen sind am oberen Ende mit einem ohmschen Widerstand R verbunden. Der Metallstab gleite reibungslos nach unten.

(a) Zeigen sie, dass eine Kraft des Betrages $F = (B^2 l^2 v \cos^2\theta)/R$ auf den gleitenden Stab wirkt, die entgegen der Bewegungsrichtung wirkt *(Kraft abhängig von θ)*.

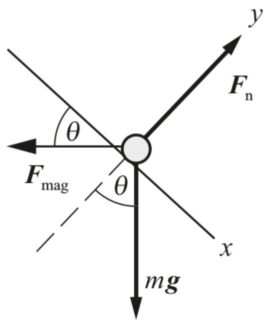
(b) Zeigen sie, dass für die Endgeschwindigkeit des Stabes (betragsmäßig) gilt: $v = (Rmg\sin\theta)/(B^2 l^2 \cos^2\theta)$



Lösung

(a) Für die Kraft, die die Abwärtsbewegung des Stabes verzögert ergibt sich aus der Lorentzkraft

$$F = F_{mag}\cos\theta = IlB\cos\theta \tag{4}$$



[**2**]

Den induzierten Strom I erhält man über die Geschwindigkeit des Stabes:

$$U_{ind} = I\dot{A} = Blv\cos\theta \tag{5}$$

[**1**]

Mit dem Widerstand R folgt:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{Blv\cos\theta}{R} \tag{6}$$

[**1**]

Da nur der Teil der Kraft parallel zu den Stäben interessant ist

$$F = IlB\cos\theta = \frac{B^2l^2v}{R}\cos^2\theta \tag{7}$$

[**1**]

(b) Der Stab hat die maximale Geschwindigkeit erreicht, wenn Kräftegleichgewicht zwischen der Hangantriebskraft und der Lorentzkraft gilt. Für die Hangantriebskraft gilt:

$$F_H = mg\sin\theta \overset{!}{=} \frac{B^2l^2v_E}{R}cos^2\theta \tag{8}$$

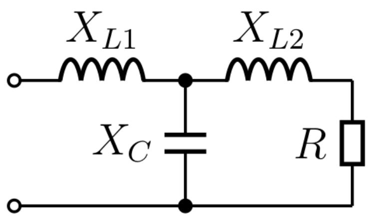
[**1**]

Damit folgt für die Endgeschwindigkeit:

$$v_E = \frac{mgR\sin\theta}{B^2l^2\cos^2\theta} \tag{9}$$

[**1**]

Aufgabe 5 (9 Punkte)



(a) Stellen Sie bei der gegebenen Schaltung die Gleichung für die Gesamtimpedanz auf (Zwischenschritte werden bewertet). **(Nicht explizit ausrechnen)** Die Gesamtimpedanz soll $Z = 10\Omega$ betragen.

(b) Berechnen Sie nun X_{L1} für $X_C = \frac{40}{3}\Omega$, $\mathbf{X_{L2}} = 8\Omega$ und $\mathbf{R} = 16\Omega$ so, dass die Gesamtimpedanz Reell wird und 10Ω beträgt.

Lösung

(a) Man kann die Schaltung als Reihenschaltung von X_{L1} und einer Ersatzimpedanz $\tilde{Z}$ darstellen. $\tilde{Z}$ wiederum ist eine Parallelschaltung von X_C und der Reihenschaltung Z^* von R und X_{L2} mit dem Wert

$$\tilde{Z} = \frac{Z^* \cdot (-iX_C)}{Z^* + (-iX_C)} \tag{10}$$

[**1**]

Es soll gelten:

$$Z_{Ges} = iX_{L1} + \tilde{Z} \tag{11}$$

[**1**]

(b) Mit den Angaben ist $\tilde{Z}$ vollständig bestimmt:

$$\tilde{Z} = \frac{Z^* \cdot (-iX_C)}{Z^* + (-iX_C)} = \frac{(16\Omega + i8\Omega) \cdot (-i\frac{40}{3}\Omega)}{(16\Omega + i8\Omega) + (-i\frac{40}{3}\Omega)} = \frac{320/3 - i640/3}{16 - i16/3}\Omega = 10\Omega - i10\Omega \tag{12}$$

[**3**]

Insgesamt gilt:

$$Re(Z) = 10\Omega \tag{13}$$

[**1**]

$$Im(Z) = 0\Omega \tag{14}$$

[**1**]

$$Z_{Ges} = iX_{L1} + \tilde{Z} \stackrel{!}{=} 10\Omega \Rightarrow X_{L1} = 10\Omega \tag{15}$$

[**2**]

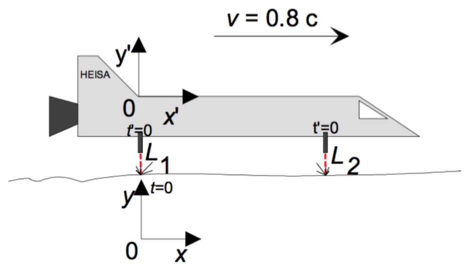
Aufgabe 6 (12 Punkte)

Ein Raumschiff fliegt im Tiefflug (die Höhe sei vernachlässigbar) Mit $v = 0,8c$ über einen Planeten. An der Unterseite des Raumschiffs sind bei $x'_1 = 0$ und $x'_2 = D' = 30\,\text{m}$ zwei Laser L_1 und L_2 angebracht. Zum Zeitpunkt $t' = t = 0$ befindet sich der Ursprung des bewegtegten Systems x'-y'-z' genau über dem des ruhenden x-y-z. In diesem Moment werden in dem Raumschiff gleichzeitig die beiden Laser gefeuert. Die Laserstrahlen erzeugen jeweils eine Markierung auf dem Boden.

(a) Welchen Abstand haben die beiden Laser L_1 und L_2 für einen Beobachter auf dem Boden?

(b) Bestimmen sie die beiden Koordinaten x_1 und x_2, bei denen die Laserstrahlen auf den Boden treffen! Wie weit sind die Markierungen auseinander? Vergleichen sie diesen Wert mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a).

(c) Zu welchem Zeitpunkt t_2 feuert für den ruhenden Beobachter der Laser L_2? Falls $t_2 \neq t_1$: Wie weit hat sich das Raumschiff in der vergangenen Zeit nach vorne bewegt? Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesem Ergebnis und den Ergebnissen aus den anderen Teilaufgaben?



Lösung

(a) Für den ruhenden Beobachter erscheint der Abstand der beiden Laser verkürzt.

$$D = \frac{D'}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \cdot D' = \frac{3}{5} D' = 18\,\mathrm{m}$$

[3]

(b) Um die beiden Auftrefforte der Laserstrahlen zu bestimmen wird eine Lorentztransformation der Abschussorte durchgeführt.

$$x_1 = \gamma(x_1' + vt') = \gamma x_1' = 0$$

$$x_2 = \gamma(x_1' + vt') = \gamma x_2' = \frac{5}{3} D' = 50\,\mathrm{m}$$

[3]

Der Abstand der Markierungen auf dem Boden ist 50 m und somit westentlich größer als der Abstand der beiden Laser.

[1]

(c) Für den ruhenden Beobachter geschehen der Abschuss des ersten Lasers und des zwieten Lasers nicht gleichzeitig. Um die Zeitfifferenz zwischen diesen beiden Ereignissen zu bestimmen kann eine Lorentztransformation der Zeit in das ruhende System durchgeführt werden.

$$t_1 = \gamma \left(t_1' + \frac{v}{c^2} x_1'\right) = \gamma t_1' = 0$$

$$t_2 = \gamma \left(t_2' + \frac{v}{c^2} x_2'\right) = \gamma \frac{v}{c^2} x_2' = 133\,\mathrm{ns}$$

[3]

In dieser Zeitspanne bewegt sich das Raumschiff um die Strecke s nach vorne.

$$s = v \cdot t = 32\,\mathrm{m}$$

[1]

Diese Strecke s und der in Teilaufgabe a) bestimmte Abstand D der beiden Laser addieren sich zu dem Abstand x_2 der beiden Markierungen.

[1]

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Eine sich in x-Richtung ausbreitende elektromagnetische Welle kann man durch ein elektrisches und ein magnetisches Feld der Form $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$ darstellen. λ ist dabei die Wellenlänge, die mit der Frequenz über $\lambda = c/f$ zusammenhängt. $\vec{E}$ besitze ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur eine Komponente in z-Richtung. Verwenden Sie im Weiteren die differentielle Darstellung des Faraday'schen Induktionsgesetztes $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$.

a) Zeigen Sie durch Rechnung, dass $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{E}$ und ebenso senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht.

b) Zeigen Sie, dass $|\vec{E}| = c\left|\vec{B}\right|$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass die elektrische gleich der magnetischen Energiedichte ist. Verwenden Sie hierzu $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.

Lösung

(a)

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_z \tag{16}$$

Linke Seite Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 \cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\right]\hat{e}_y \tag{17}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -E_0 \cdot \left[-\sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \cdot \left(-\frac{2\pi}{\lambda}\right)\right]\hat{e}_y = -\frac{2\pi}{\lambda}E_0 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \int \frac{2\pi}{\lambda}E_0 \sin\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\mathrm{d}t\hat{e}_y \\ &= \frac{2\pi E_0}{\lambda}\frac{1}{2\pi f}\cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y = \frac{E}{c}\cos\left(2\pi\left(ft - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\hat{e}_y\end{aligned} \tag{19}$$

[4]

$$\Rightarrow \vec{E} \parallel \hat{e}_z, \vec{B} \parallel \hat{e}_y, \vec{k} \parallel \hat{e}_x \tag{20}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \cdot \vec{E} = 0, \vec{B} \cdot \vec{k} = 0 \tag{21}$$

$$\Rightarrow \vec{B} \perp \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k} \tag{22}$$

Mit dem Propagationsvektor der Welle k.

[**2**]

(b)

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} = \frac{E_0}{E_0/c} = c \tag{23}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = c|\vec{B}| \tag{24}$$

[**2**]

(c)

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{\epsilon_0}{2}(cB)^2 = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}B^2 = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = w_{\mathrm{mag}} \tag{25}$$

[**2**]

Konstanten

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{CV^{-1}m^{-1}}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$

$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$

$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}\mathrm{mkgs^{-2}A^{-2}}$

$c = 3 \cdot 10^{8}\mathrm{m/s}$