

Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

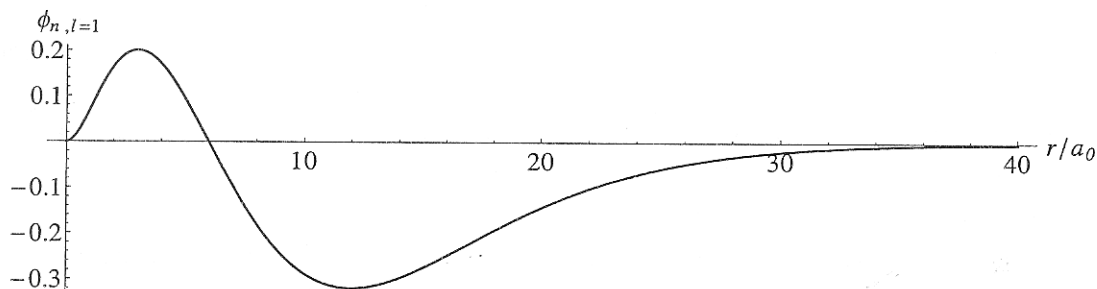
Sommersemester 2011

Nachholklausur am 11. Oktober 2011

Aufgabenblatt

Aufgabe 1: Diverses (10 Punkte) (5 aus 7 Möglichkeiten auswählen, je 2 Punkte)

- (a) Betrachten Sie den Drehimpulsoperator $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ der Quantenmechanik. Die Eigenfunktionen der Operatoren \hat{L}^2 und \hat{L}_z sind die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$. Was sind die Eigenwerte der beiden Operatoren? Welche Werte der Bahndrehimpulsquantenzahl l sind bei gegebener Azimuthalquantenzahl m möglich?
- (b) Geben Sie die Eigenenergien der gebundenen Zustände des Wasserstoffatoms in Einheiten Ry (Rydberg Energie) an. Geben Sie außerdem den jeweiligen Entartungsgrad an.
- (c) Ein System werde zum Zeitpunkt $t = 0$ durch folgenden Zustandsvektor beschrieben $|\psi\rangle = \sqrt{2/9}|\psi_1\rangle - \sqrt{7/9}|\psi_2\rangle$, wobei $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ jeweils Energieeigenzustände zu den Eigenwerten E_1 und E_2 sind. Geben Sie den Energieerwartungswert des Zustands $|\psi\rangle$ an und einen expliziten Ausdruck für den zeitabhängigen Zustand $|\psi(t)\rangle$.
- (d) Betrachten Sie ein System aus zwei identischen Teilchen, welche sich je in drei Zuständen befinden können $|\psi_j\rangle \in \{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$, wobei $j \in \{1, 2\}$ die beiden Teilchen identifiziert. Geben Sie eine Basis für den Produktraum an, welche eine Eigenbasis des Teilchenvertauschungsoperators ist. Welche Basiselemente sind symmetrisch/antisymmetrisch unter Teilchenvertauschung?
- (e) Die Eigenfunktionen gebundener Zustände des Wasserstoffatoms lassen sich schreiben als $\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\phi_{n,l}(r)/r$. Bestimmen Sie aus der untenstehenden Darstellung der Radialwellenfunktion für $l = 1$, $\phi_{n,l=1}(r)$, die Hauptquantenzahl n . Skizzieren Sie auf dem Skizzenblatt den Verlauf der Radialwellenfunktion zur gleichen Hauptquantenzahl in der s -Welle, $l = 0$. Begründen Sie beides kurz.



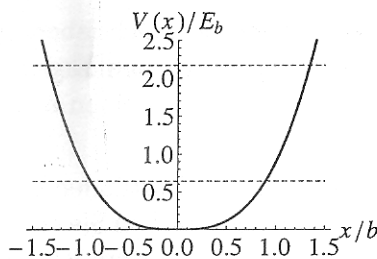
- (f) Betrachten Sie eine eindimensionale Potentialschwelle, $V(x) = V_0\theta(x)$. Skizzieren Sie auf dem Skizzenblatt qualitativ das Verhalten der Reflektionswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Energie jeweils für Wellen mit von links und von rechts einlaufenden Randbedingungen.
- (g) Welcher Operator erzeugt im (eindimensionalen) Ortsraum eine Translation um die Länge a ? Zeigen Sie explizit wie dieser Operator die Wellenfunktion $\psi_k(x) = e^{-ikx}$ des freien Teilchens im Ortsraum verschiebt.

Aufgabe 2: Kohärente Zustände (10 Punkte)

In einem harmonischen Oszillator mit Frequenz ω definiert man (normierte) kohärente Zustände als Eigenzustände des Vernichtungsoperators, $\hat{b}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, mit komplexen Eigenwert α , $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

- Zeigen Sie, dass für die Linkswirkung des Erzeugungsoperator gilt: $\langle\alpha|\hat{b}^\dagger = \langle\alpha|\alpha^*$.
- Zeigen Sie, dass bereits aus der definierenden Eigenschaft folgt, dass ein kohärenter Zustand die minimale Unschärferelation erfüllt, $\Delta\hat{p}\Delta\hat{x} = \frac{\hbar}{2}$. Benutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe (a).
- Stellen Sie den Zustand $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}e^{\alpha\hat{b}^\dagger}|0\rangle$ in der Eigenbasis des harmonischen Oszillators dar, $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n|n\rangle$. Zeigen Sie mit Hilfe dieser Darstellung, dass $|\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand ist.
- Ein kohärenter Zustand im Schrödingerbild bleibt mit der Zeit kohärent, $\hat{U}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{z(t)}|z(t)\alpha\rangle$, mit $|z(t)| = 1$. Bestimmen Sie die komplexe Zahl $z(t)$.
- Benutzen Sie die bisherigen Ergebnisse um die Zeitentwicklung der Orts- und Impulserwartungswerte, $\langle\hat{x}\rangle(t)$ und $\langle\hat{p}\rangle(t)$, anzugeben.

Aufgabe 3: Variationsverfahren (9 Punkte)



Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer räumlichen Dimension unter dem Einfluss eines kubischen Potentials,

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad V(x) = \frac{\hbar^2\sqrt{\pi}}{2mb^2} \left(\frac{|x|}{b}\right)^3.$$

In Einheiten der Energie $E_b = \hbar^2/(mb^2)$ sind die niedrigsten zwei Energieeigenwerte $E_0 \approx 0.643 E_b$ und $E_1 \approx 2.169 E_b$.

- Skizzieren Sie auf dem Skizzenblatt qualitativ den Verlauf der zugehörigen Eigenfunktionen $\psi_0(x)$ und $\psi_1(x)$.
- Benutzen Sie als Testfunktionen die normierten Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators mit den Oszillatorbreiten α und β :

$$\varphi_0(x, \alpha) = \left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} e^{-\frac{1}{2}x^2/\alpha^2}, \quad \varphi_1(x, \beta) = \left(\frac{2}{\beta\sqrt{\pi}}\right)^{1/2} \frac{x}{\beta} e^{-\frac{1}{2}x^2/\beta^2},$$

und berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\varphi_i|\hat{T}|\varphi_i\rangle$ der kinetischen und $\langle\varphi_i|\hat{V}|\varphi_i\rangle$ der potentiellen Energie.

- Berechnen Sie jeweils den minimalen Energieerwartungswert, den man bei geeigneter Wahl von α und β erhält. Vergleichen Sie mit den exakten Werten.

Aufgabe 4: Spin-Spin-Kopplung (11 Punkte)

Das Positronium ist ein Zwei-Teilchen-System aus einem Elektron und einem Positron (Antiteilchen des Elektrons), dessen gebundene Zustände denen des Wasserstoffatoms ähneln. Betrachten Sie nur die Spin-Freiheitsgrade des Systems, die unter Einwirkung eines externen magnetischen Feldes durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben werden:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda\hat{H}_I, \quad \hat{H}_0 = \Omega_B(\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}), \quad \hat{H}_I = \frac{\omega_I}{\hbar} \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2.$$

$\Omega_B = \frac{eB}{mc}$ und ω_I sind positive Konstanten, λ ein dimensionsloser Kopplungsparameter und \hat{S}_1 (\hat{S}_2) der Spin-Operator des Elektrons (Positrons). Der Gesamtspin ist $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$. Für starke Magnetfelder kann man \hat{H}_I als Störung zum System \hat{H}_0 betrachten.

- Geben Sie die Eigenenergien und die zugehörigen Eigenzustände von \hat{H}_0 an.
- Drücken Sie diese Eigenbasis als Linearkombinationen der Basiszustände des Gesamtspins $|S, M\rangle \in \{|0, 0\rangle, |1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$ aus (Singulett und Triplett Zustände).
- Stellen Sie die Matrix des Störoperators \hat{H}_I in der Eigenbasis von H_0 auf, $\langle m_{S_1}, m_{S_2}|\hat{H}_I|m'_{S_1}, m'_{S_2}\rangle$. Benutzen Sie dabei die Darstellung, die Sie in Teilaufgabe (b) gezeigt haben.
- Berechnen Sie die Energieverschiebungen in erster Ordnung Störungstheorie. Wie lauten die korrigierten Energien?
- Berechnen Sie die Energieverschiebungen in zweiter Ordnung Störungstheorie. Wie lauten die korrigierten Energien?

Formelblatt

Integralformeln

Konstanten

$$2^{-1/5} \approx 0.871, \quad 2^{2/5} \approx 1.32, \quad 2^{-3/5} \approx 0.660,$$

$$3^{-1/5} \approx 0.803, \quad 3^{2/5} \approx 1.55, \quad 3^{-3/5} \approx 0.517,$$

$$4^{-1/5} \approx 0.758, \quad 4^{2/5} \approx 1.74, \quad 4^{-3/5} \approx 0.435,$$

$$9^{-1/5} \approx 0.644, \quad 9^{2/5} \approx 2.41, \quad 9^{-3/5} \approx 0.268.$$

Stufenfunktion

$$\theta(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Varianz einer Observablen \hat{O}

$$\Delta\hat{O} = \sqrt{\langle\hat{O}^2\rangle - \langle\hat{O}\rangle^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2/s^2} dx = \frac{s\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2/s^2} dx = \frac{s^2}{2},$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^2/s^2} dx = \frac{s^3\sqrt{\pi}}{4},$$

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2/s^2} dx = \frac{s^4}{2},$$

$$\int_0^\infty x^4 e^{-x^2/s^2} dx = \frac{3s^5\sqrt{\pi}}{8},$$

$$\int_0^\infty x^5 e^{-x^2/s^2} dx = s^6.$$

Störungstheorie

Für ein System mit den Eigenfunktionen $|\varphi_m^{(0)}\rangle$ und den Eigenenergien $E_m^{(0)}$ des ungestörten Systems und einer Störung $\lambda\hat{W}$ lauten die Gleichungen für die Energieverschiebungen eines nicht entarteten Eigenwerts $E_n^{(0)}$ in Störungstheorie

erster Ordnung:

$$\lambda E_n^{(1)} = \langle\varphi_n^{(0)}|\lambda\hat{W}|\varphi_n^{(0)}\rangle,$$

und zweiter Ordnung:

$$\lambda^2 E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle\varphi_n^{(0)}|\lambda\hat{W}|\varphi_m^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}.$$

Harmonischer Oszillator

Für den harmonischen Oszillator $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(\frac{x}{s}\right)^2$, Oszillatorbreite s , mit Eigenfunktionen $\varphi_n(x) = \mathcal{A}_n H_n(x/s) e^{-\frac{1}{2}x^2/s^2}$ und Spektrum $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, $\hbar\omega = \hbar^2/(ms^2)$, gilt der Virialsatz:

$$\langle\varphi_n|\hat{T}|\varphi_n\rangle = \langle\varphi_n|\hat{V}|\varphi_n\rangle = \frac{1}{2}E_n.$$

Algebra des harmonischen Oszillators

$$b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle,$$

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

$$[b, b^\dagger] = 1,$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}),$$

$$\hat{p} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}).$$