MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. R. König
Probeklausur, 22.12.2017, 12:15-13:45

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

Hinweis: Beachten Sie den Startindex in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung.

Lösung:

Beh $\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bew

Induktionsbeginn ($n = 1$): $\frac{(-1)^2}{1} \overset{[2]}{=} \frac{1}{1}$

Induktionsschritt ($n \to n+1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &\overset{[2]}{=} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&\overset{[2]}{=} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&\overset{[1]}{=} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\
&\overset{[1]}{=} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Erklärung:
[2 Punkte] für den Induktionsbeginn, □
[2 Punkte] für das Zerlegen,
[2 Punkte] für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
[2 Punkte] für das Zusammenfassen.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt{\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})}}$.

Lösung:

Es ist

$$\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})} \overset{[1]}{=} \mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} \overset{[1]}{=} \mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}$$

$$\sqrt{\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})}} \overset{[1]}{=} \sqrt{\mathrm{e}^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}} \overset{[1]}{=} \mathrm{e}^{\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \overset{[1]}{=} \mathrm{e}^{\pi}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \overset{[1]}{=} \frac{\mathrm{e}^{\pi}\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{e}^{\pi}\sqrt{2}}{2}.$$

D.h. $\mathrm{Re}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})}}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\pi}\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{Im}\left(\sqrt{\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})}}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}\sqrt{2}}{2}$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[10 Punkte]**

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \frac{25}{21}}$ **[3]**

(b) Wo liegt der Grenzwert c der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$? **[2]**

☐ $c = -\infty$ ☒ $c \in (-\infty, 0)$ ☐ $c = 0$ ☐ $c \in (0, \infty)$ ☐ $c = +\infty$ ☐ c ist undefiniert

(c) Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$? **[2]**

☐ 0 ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☒ e ☐ π ☐ ∞

(d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge mit $x_{n+1} - x_n \leq r\,(x_n - x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $r < 1$ ist. (x_n) ist **[3]**

☒ beschränkt ☐ divergent ☐ alternierend ☒ konvergent ☐ unbeschränkt

LÖSUNG:

(a) Summe zweier konvergenter geometrischer Reihen:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n = (\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1) - 2(\frac{1}{1+\frac{3}{4}} - 1) = \frac{4}{3} - 1 - 2(\frac{4}{7} - 1) = \frac{1}{3} + \frac{6}{7} = \frac{25}{21}$

(b) Die Teilsummenfolge $a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium. Sie bildet eine Intervalschachtelung, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$, $a_2 = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \in [-1, 0)$. Somit muss der Grenzwert im Intervall $[-1, -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}]$ enthalten sein, also ist $c < 0$.

(c) Cauchy-Hadamard-Formel: Der Konvergenzradius ist (da der Limes existiert)

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{e}}} = \mathrm{e}.$$

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $x_{n+1} - x_n \leq r^n(x_1 - x_0)$, denn der Induktionsanfang ist erfüllt und

$$x_{n+1} - x_n \leq r\,(x_n - x_{n-1}) \leq r r^{n-1}(x_1 - x_0) = r^n(x_1 - x_0).$$

Also ist

$$x_{n+1} - x_0 = \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) \leq (x_1 - x_0)\sum_{k=0}^{n} r^k = (x_1 - x_0)\frac{1}{1-r} < \infty$$

Die Folge (x_n) ist also beschränkt und wegen der Monotonie auch konvergent.

4. **Uneigentliche Grenzwerte** **[5 Punkte]**

Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen, die eigentlich oder uneigentlich konvergieren. Zeigen Sie: Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > -\infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty.$$

LÖSUNG:

Zu zeigen ist $\forall C > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : a_n + b_n > C$. **[1]**
Sei nun $C > 0$. Da (b_n) gegen ein $b \in \mathbb{R}$ oder $+\infty$ konvergiert, ist (b_n) nach unten beschränkt. **[1]**
Es gibt also ein $D \in \mathbb{R}$, so dass $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \geq D$. **[1]**
Weiter gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq N : a_n > C - D$. **[1]**
Sei nun $n \geq N$. Dann gilt **[1]**

$$a_n + b_n > C - D + D = C.$$

□

5. **Stetige Funktionen** **[10 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x^2) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $f(0) = f(\frac{1}{2})$, (b) $f(1) = f(\frac{1}{2})$.

LÖSUNG:

1. Betrachte die Folge $x_n = \frac{1}{2^{2^n}}$, $n \in \mathbb{N}_0$. **[1]**
Wegen $x_{n+1} = x_n^2$ gilt $f(x_{n+1}) = f(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, bzw. $f(x_n) = f(\frac{1}{2})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. **[1]**
Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und der Stetigkeit von f **[1]**
folgt $f(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = f(0)$. **[1]**
2. Nun setzen wir $y_n = \frac{1}{2^{2^{-n}}}$. **[1]**
Somit ist $y_{n+1} = \frac{1}{2^{2^{-(n+1)}}} = \frac{1}{2^{2^{-n}\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{y_n}$. **[1]**
Es gilt $y_n = \frac{1}{\sqrt[2^n]{2}} \to 1$ für $n \to \infty$. **[1]**
Wie unter 1. folgt wieder $f(y_n) = f(y_{n+1}^2) = f(y_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und damit $f(y_n) = f(y_0) = f(\frac{1}{2})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. **[1]**
Wir schließen wegen der Stetigkeit von f wieder genau wie in 1.:
$f(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} y_n) = f(1)$. **[1]**
Insgesamt haben wir $f(0) = f(\frac{1}{2}) = f(1)$ gezeigt. $\square$ **[1]**

6. **Gerade und ungerade Funktionen** **[10 Punkte]**

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$ und **ungerade**, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$ ist.

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ungerade, dann ist f' eine gerade Funktion.
(b) Sei nun f wieder differenzierbar und ungerade. Setze $g(x) = f(x^3)$ und $h(x) = f(x)^3$. Zeigen Sie, dass g' und h' gerade Funktionen sind.

LÖSUNG:

(a) (i) *Mit dem Limes des Differenzenquotienten:*

$$f'(-x) \overset{[1]}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f((-x)+h)-f(-x)}{h} \overset{[1]}{=} -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{h} \overset{s=-h[1]}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(x+s)-f(x)}{s} \overset{[1]}{=} f'(x),$$

da für jede Nullfolge (h_n) auch $(s_n) = (-h_n)$ eine Nullfolge ist. **[1]**
(ii) *Mit Kettenregel:* Sei $m(x) = -x$. Dann ist nach Vorasussetzung $f \circ m = -f$. **[1]**
Behauptung $f' \circ m = f'$. **[1]**
Es ist mit der Kettenregel $(f \circ m)'(x) = f'(m(x))m'(x) = -(f' \circ m)(x)$. **[2]**
Nach Voraussetzung ist $f' = -(f \circ m)'$. **[1]**
Hieraus erhält man die Behauptung, $f' = -(f \circ m)' = f' \circ m$. **[1]**

(b) Die Funktion $x \mapsto x^3$ ist offensichtlich ungerade. **[1]**
Es ist $g(-x) = f(-x^3) = -f(x^3) = -g(x)$. **[1]**
Also ist g ungerade und damit g' gerade. **[1]**
Analog für h. **[2]**

7. **Ableitung einer Umkehrfunktion** **[16 Punkte]**

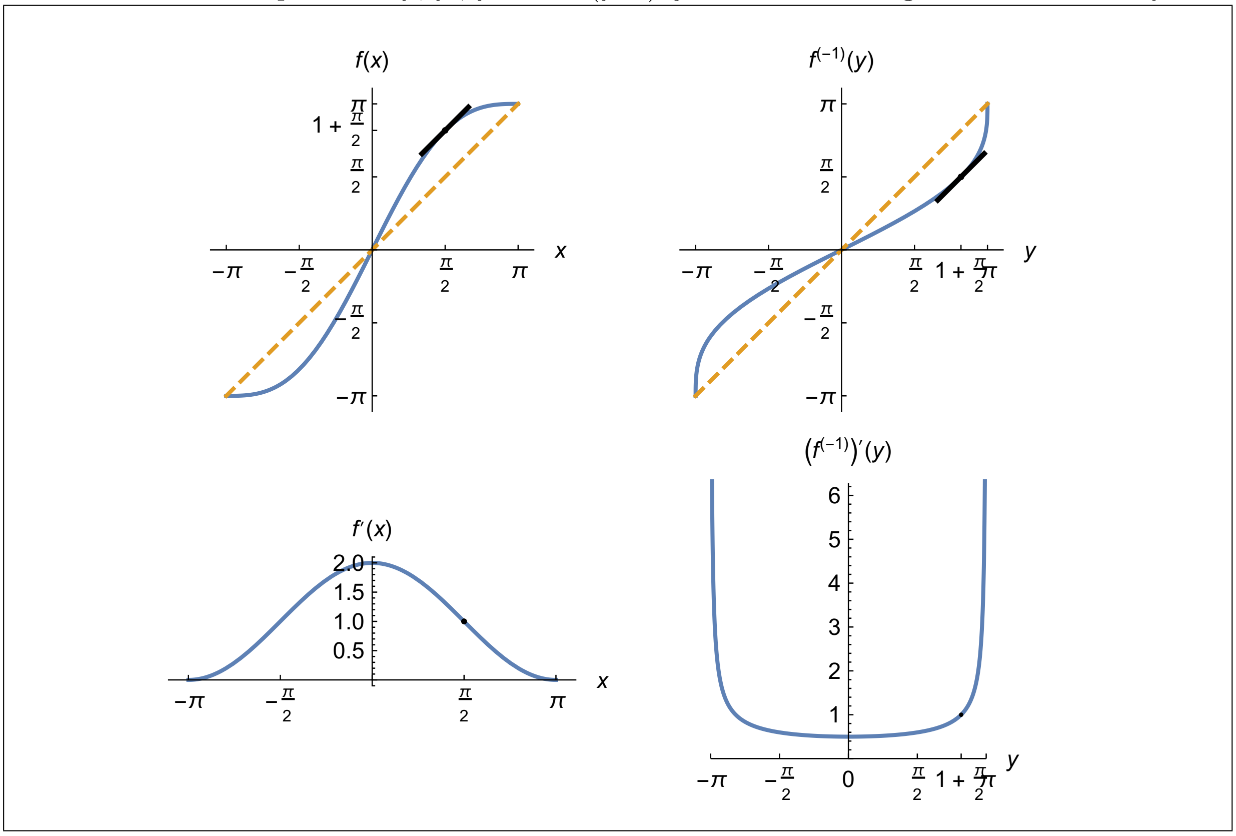
BEWERTUNG:

Sei die Funktion $f(x) = x + \sin(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $f : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi]$ bijektiv ist.
(b) Wie lautet die Ableitung von f^{-1} an den Punkten 0 und $1 + \frac{\pi}{2}$?

$\boxed{(f^{-1})'(0) = \frac{1}{2}}$ $\boxed{(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{2}) = 1}$ **[3]**

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f, f', f^{-1} und $(f^{-1})'$ jeweils in einem eigenen Koordinatensystem.



LÖSUNG:

(a) Die Ableitung ist $f'(x) = 1 + \cos(x) > 0$ für $x \in (-\pi, \pi)$. f ist also auf $(-\pi, \pi)$ streng monoton wachsend. **[1]**
Wegen $f(-\pi) = -\pi < f(x) < \pi = f(\pi)$ ist f als ganzes streng monoton wachsend, also injektiv. **[1]**
Es gilt $f([-\pi, \pi]) \subset [-\pi, \pi]$. **[1]**
Da f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz zu jedem $y \in [-\pi, \pi]$ wegen $f(-\pi) = -\pi \leq y$ und $f(\pi) = \pi \geq y$ ein $x \in [-\pi, \pi]$, so dass $f(x) = y$ ist, also ist f auch surjektiv. **[2]**

(b) Für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gilt

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1 + \cos(x)}.$$

Wegen $f(0) = 0$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{\pi}{2}$ erhält man also **[1]**

$$(f^{-1})'(0) = \tfrac{1}{f'(0)} = \tfrac{1}{2},$$
$$(f^{-1})'(1 + \tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = 1.$$

[3]

(c) s.o. **[8]**