Aufgabe 1 (16 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben sind die Ergebnisse **ohne Begründung** in den dafür vorgegebenen Kästchen anzugeben. Nebenrechnungen und Ergebnisse außerhalb der Kästchen werden **nicht** gewertet. (je 1,5 Punkte für (a) bis (i), 2,5 Punkte für (j))

(a) Geben Sie an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$) mindestens eine Lösung hat:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & a \\ x & + & 3y & = & 3 \\ ax & + & 2ay & = & 2a \end{array}$$

Es ist lösbar für $a \in \{ \boxed{} \}$

(b) Gegeben sei eine *surjektive* lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 14} \to \mathbb{R}^8$. Berechnen Sie die Dimension des Kerns von φ.

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \boxed{}$$

(c) Von einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien die Werte

$$\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bekannt. Berechnen Sie den Wert $\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$:

$$\varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \boxed{}$$

(d) Geben Sie die Menge der Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ an:

$$\text{Menge der Eigenwerte} = \{ \boxed{} \}$$

(e) Geben Sie das Signum der folgenden Permutation an:

$$\mathrm{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{}$$

(f) Gegeben sind die Untervektorräume $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$ und $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \; x_1 + x_3 = 0 \}$. Geben Sie den Schnitt $U \cap W$ durch Angabe eines Erzeugendensystems an:

$$U \cap W \quad = \quad \langle \boxed{} \rangle$$

(g) Es sei $V = \mathbb{R}[x]$ und U sei der Unterraum

$$U = \langle -2x+1, \quad 3x^2+2x, \quad 3x^2+1, \quad 3x^2-2x+2 \rangle$$

von V. Geben Sie die Dimension von U an:

$$\dim(U) \quad = \quad \boxed{}$$

(h) Es sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich-oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ (Ableitung). Geben Sie einen Eigenvektor $f \in V$ zum Eigenwert 5 von φ an:

$$f(x) \quad = \quad \boxed{}$$

(i) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Geben Sie entweder die Definition der Determinante von A oder die Formel zur Entwicklung nach einer Zeile i (oder Spalte j) an:

$$\det(A) \quad = \quad \boxed{}$$

(j) Gegeben sei die (geordnete) Basis $B = \{b_1, b_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}$ und $S_{B,E}$ an (wobei E die Standardbasis ist):

$$S_{E,B} = \boxed{} \qquad S_{B,E} = \boxed{}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(A)$. (3 Punkte)

(b) Es sei n ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *antisymmetrisch*, d. h. $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) = 0$ gilt. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben seien die drei Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$f_1(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = x.$$

Es sei $U = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ (also ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ferner sei φ die Abbildung

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B := \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von U ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(c) Geben Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{D}_{B,E}(\varphi)$ an, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ist. (1 Punkt)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi = \varphi_A : \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad x \mapsto A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ den Bildvektor $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ explizit an. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Kern}(\varphi)$. (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathrm{Bild}(\varphi)$. (2 Punkte)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ferner sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Beweisen Sie: Ist $\varphi \circ \varphi = 0$ (die Nullabbildung), so gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.
(3 Punkte)

(b) Gilt auch die Umkehrung von (a)? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
(3 Punkte)