....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Probeklausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

15. Februar 2017, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **69 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Volumenberechnung** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie für $a > 0$ das Volumen des von der zylindrischen Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 = 2ax, 0 \leq x \leq 1\}$$

aus dem Rotationsparaboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| y^2 + z^2 \leq 4ax, 0 \leq x \leq 1\}$$

herausgeschnittenen Körpers in $\mathbb{R}^3$.
HINWEIS: Das Ergebnis hängt von $2a\alpha := \min\{1, 2a\}$ ab.

2. **Oberflächenintegral** **[8 Punkte]**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$v(x,y,z) = (x + y + \sqrt{z}, x - y - z^{5/2}, z + 2)$$

auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S \langle v(x,y,z), \nu(x,y,z) \rangle \mathrm{d}S$$

über die Rotationsfläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 = e^{-2z} \ \text{ und } \ 0 \le z \le 1\},$$

wobei ν das von der Rotationsachse weg zeigende Einheitsnormalenfeld sei.
Hinweis: S ist nicht der Rand einer geschlossenen, kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.

3. **Oberflächenintegral** **[9 Punkte]**

Berechnen Sie $\int_S \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x) \rangle dS$ jeweils einmal direkt und einmal unter Verwendung des Satzes von Stokes, für

(a) S die obere Hälfte der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, ν nach oben und $F(x) = (-y, x, 0)$.

(b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$, ν nach außen und $F(x) = (yz, x^2, 1)$.

4. **Uneigentliches Integral** **[10 Punkte]**

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1} \mathrm{d}x, \qquad \alpha > 1.$$

HINWEIS: Betrachten Sie einen Weg um den Rand des Rechtecks $K := [-R, R] \times [0, \frac{2\pi i}{\alpha}]$.

5. **Holomorphe Funktion** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien $a > 0$, $b > 0$ Konstanten, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$|f(z)| < a\sqrt{|z|} + b.$$

Zeigen Sie, dass f konstant ist.
HINWEIS: Gehen Sie wie im Beweis des Satzes von Liouville vor und betrachten Sie die Taylorkoeffizienten von f.

6. **Eigenschaften holomorpher Funktionen** **[10 Punkte]**

Sei $B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 2\}$. Geben Sie jeweils eine holomorphe Funktion mit den folgenden Eigenschaften an, oder begründen Sie warum es keine solche geben kann:

(a) $f : \mathbb{C} \to B$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$.

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(c) $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+4n^2}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(d) $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+2|n|}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

7. **Fouriertransformation** **[8 Punkte]**

(a) Beweisen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g(x) := e^{ik_0 x} f(x)$ die Identität $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k - k_0)$.

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \cos x$, $x \in \mathbb{R}$?

(c) Sei nun mit dem g aus (b) die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Welche Aussagen gelten für h?

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ h ist stetig, ☐ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$?

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

8. **Maßtheorie und Konvergenzsätze für Integrale** **[8 Punkte]**

Sei $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,1)}(x)$ und $\{r_n \in \mathbb{Q} | n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Berechnen Sie folgende Limes und Integrale:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}dx$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{1} n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx$. c) $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx$, mit $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$