Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. W. Aschbacher

SS 2004
1.9.2004

Analysis II

Diplomvorprüfung

Aufgabe 1 [ca. 7]
Beantworten Sie die folgenden Fragen möglichst kurz aber vollständig.
(a) Existieren Vektorfelder, die von Potentialen herstammen, obwohl ihre Definitionsbereiche nicht sternförmig sind? Falls ja, geben Sie ein Beispiel.
(b) Wie lautet die Definition des Antisymmetrisierers A, der zur Definition des Grassmann-Produktes herangezogen wird?
(c) Wie lässt sich die negative Definitheit einer reell-symmetrischen $n \times n$ - Matrix A durch Determinanten von Teilmatrizen ausdrücken?
(d) Wie lauten die drei Keplerschen Gesetze?

Aufgabe 2 [ca. 8]
Untersuchen Sie die Integrale auf Konvergenz und berechnen Sie, falls möglich, ihre Werte.

$$\textbf{(a)} \quad \int_0^\infty x^x e^{-x^2}\, dx \qquad \textbf{(b)} \quad \int_0^1 \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\, dx \qquad \textbf{(c)} \quad \int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\, dx$$

Aufgabe 3 [ca. 5]
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = xyz$$

für (x, y) in einer offenen Umgebung von $(1, -1)$ eine eindeutige, stetig differenzierbare Lösung der Form $z = g(x, y)$ besitzt. Berechnen Sie $\nabla g(1, -1)$.

Aufgabe 4 [ca. 4]
Seien $a, p, q, r > 0$ strikt positive, feste Zahlen. Bestimmen Sie die drei Summanden $x, y, z > 0$ in der Zerlegung von $a = x + y + z$ so, dass $x^p y^q z^r$ maximal wird.

Aufgabe 5 [ca. 4]
Sei $g \in C(]0, \infty[, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass das durch g spezifizierte *Zentralfeld* $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$A(x) := g(|x|)\, \frac{x}{|x|},$$

ein Gradientenfeld ist indem Sie das zugehörige Potential bestimmen.

Aufgabe 6 [ca. 5]
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend und $v \in C^1(G, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass man die Funktion v aus ihrem Gradienten und einem Anfangswert $v(x_0)$ rekonstruieren kann:

$$v(x) = v(x_0) + \int_\gamma \operatorname{grad} v(y) \cdot dy$$

Dabei bezeichne γ eine stückweise stetig differenzierbare und ganz in G verlaufende Kurve mit Anfangspunkt $x_0 \in G$ und Endpunkt $x \in G$.

Aufgabe 7 [ca. 7]
(a) Integrieren Sie das Vektorfeld A aus Aufgabe 5 über die Oberfläche der im Ursprung des $\mathbb{R}^3$ zentrierten Kugel vom Radius $R > 0$.
(b) Integrieren Sie das Vektorfeld B in $\mathbb{R}^3$, $B(x, y, z) := (y^2, x^2, z)$, über die Oberfläche des Ellipsoides $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$, $a, b, c > 0$.