Nachklausur in Experimentalphysik 3
Lösung

Prof. Dr. S. Schönert
Wintersemester 2016/17
12. April 2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Licht falle senkrecht auf eine Glasplatte mit dem Brechungsindex $n = 1,5$, wobei ein Teil des Lichtes an den Grenzflächen reflektiert wird, der andere Teil an den Grenzflächen transmitiert wird. Absorption im Glas kann vernachlässigt werden.

(a) Nehmen Sie die Formel für die reflektierte Feldstärke als gegeben an und leiten Sie daraus die Formel für die transmitierte Feldstärke her.

(b) Wie groß ist das Verhältnis der **Feldstärke** E_t des durch die Glasplatte durchgelassenen Lichtes zur Feldstärke des einfallenden Lichtes? Mehrfachreflektionen können vernachlässigt werden.

Lösung

(a) Der Brechungsindex der Glasscheibe sei n_2, der Brechungsindex der umgebenden Luft n_1. Für das reflektierte elektrische Feld vor der Glasplatte gilt nach Vorlesung

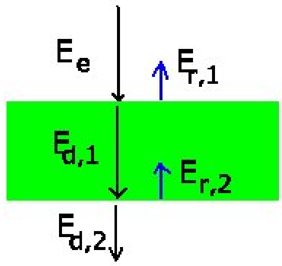
$$E_{r,1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_e,$$

wenn E_e die Feldtärke des einfallenden Lichtes ist. Für die reflektierte Intensität gilt

$$R = \frac{I_{r,1}}{I_e} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 .$$

Wegen Energieerhaltung folgt für die durchgelassene Intensität

$$T = 1 - R = \frac{I_{d,1}}{I_e} = \frac{c_2 \epsilon_2 E_{t,1}^2}{c_1 \epsilon_1 E_e^2} = \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_{t,1}}{E_e} \right)^2 .$$



mit

$$T = 1 - R = 1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

folgt daraus

$$\frac{E_{t,1}}{E_e} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

[**4**]

(b) Bei unserer Ableitung gilt diese Formel zunächst nur für die Beträge der Feldstärken. Wir wissen aber, daß die durchgelassenen Komponenten keinen Phasensprung haben, also muß diese Formel auch für das Vorzeichen gelten. Bei der zweiten Grenzschicht erhalten wir entsprechend mit Vertauschung von n_1 und n_2:

$$\frac{E_{t,2}}{E_{t,1}} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2}$$

und daher

$$\frac{E_{t,2}}{E_e} = \frac{2n_2}{n_1 + n_2} \cdot \frac{2n_1}{n_1 + n_2} = \frac{4n_1n_2}{(n_1 + n_2)^2}.$$

Setzen wir jetzt noch $n_1 = 1$ und $n_2 = n$, so erhalten wir

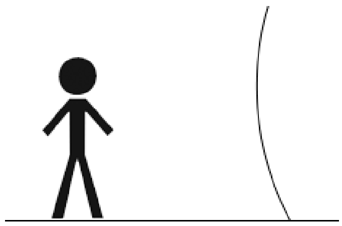
$$\frac{E_{t,2}}{E_e} = \frac{4n}{(1 + n)^2} = 0,96.$$

[**3**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Spiegel sei wie in der Zeichnung vertikal leicht gebogen mit einem Krümmungsradius von 50 Metern. Horizontal ist er plan, insgesamt also eine (auf der Seite liegende) Zylinderfäche.

(a) Um welchen Faktor sieht ein Beobachter sich selbst vertikal vergrößert, wenn er in 2.5 Metern Abstand zum Spiegel steht?



(b) Vertauscht ein Spiegel links und rechts?
Wenn ja, warum vertauscht er dann nicht oben und unten?
Wenn nein, warum erscheint ein Schriftzug im Spiegel "wie von rechts nach links geschrieben"?

Lösung

(a) Für den Bildabstand vom Spiegel b gilt

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

also mit $f = R/2 = 25\,\mathrm{m}$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{g} = \frac{1}{25\,\mathrm{m}} - \frac{1}{2.5\,\mathrm{m}} = -\frac{1}{2.78\,\mathrm{m}}$$

[2]

(b negativ bedeutet virtuelles, d.h. hinter dem Spiegel liegendes Bild) und Vergrößerung

$$V = \frac{B}{G} = -\frac{b}{g} = -\frac{2.78}{2.5} = 1.11$$

[2]

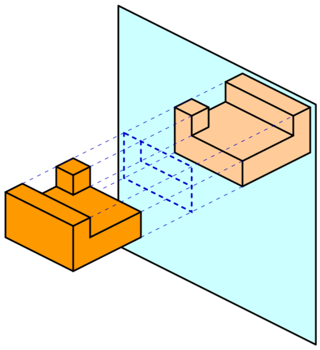
d.h. der Beobachter erscheint 11% größer als breit.

(b) Tatsächlich vertauscht der Spiegel prinzipiell nicht rechts und links, sondern vorn und hinten. Die Vertauschung von vorn und hinten entspricht jedoch der Vertauschung von rechts und links bezüglich einer Drehung um die vertikale Achse um 180°. Im Spiegelbild erscheinende Gegenstände werden in unserer Anschauung mit dem in die Bildebene rotierten Original verglichen - meist um die vertikale Achse, da dabei die "starken" Asymmetrien oben-unten und vorne-hinten erhalten bleiben. Der rotierte Gegenstand ist allerdings nicht deckungsgleich mit dem Spiegelbild, bei welchem rechts und links "spiegelverkehrt" sind.

[2]

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Aus einer dünnen Bikonvex-Linse (Brennweite f_1) und einer dünnen Bikonkavlinse (Brennweite f_2) wird das unten skizzierte Galilei-Fernrohr aufgebaut und zur Beobachtung eines sehr weit



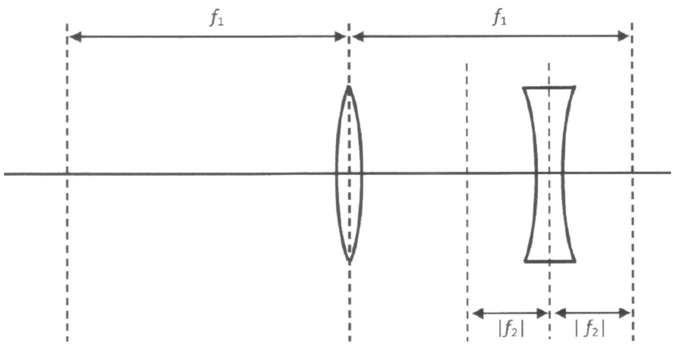
entfernten Gegenstandes eingesetzt, sodass die einfallenden Lichtstrahlen als parallel angesehen werden können. Die Bikonvexlinse (links) stellt dabei das Objektiv und die Bikonkavlinse (rechts) das Okular dar.

(a) Zeichnen Sie den Strahlengang durch das Fernrohr für ein Lichtbündel, das unter dem Winkel ϵ_0 bezüglich der optischen Achse einfällt. Beachten Sie dabei, dass es sich um dünne Linsen handeln soll. Zeichnen Sie gross genug und beschriften Sie!

(b) Ist das entstehende Bild reell oder virtuell? Sieht das Auge ein auf dem Kopf stehendes oder aufrechtes Bild?

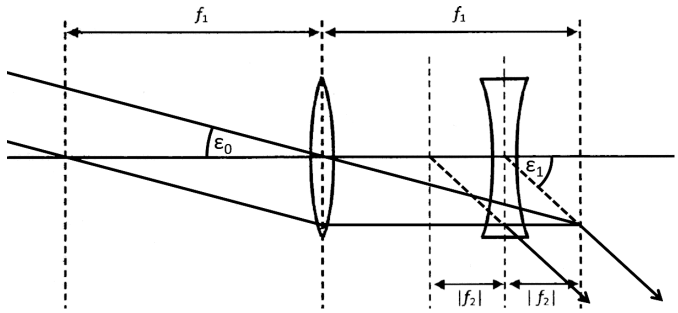
(c) Zeigen Sie mithilfe der Matrixmethode, dass Lichtstrahlen, die parallel unter dem Winkel ϵ_0 bezüglich der optischen Achse auf das Teleskop treffen, dieses auch wieder parallel verlassen! Berechnen Sie ebenfalls unter Verwendung der Matrixmethode die Winkelvergrößerung V_F des Fernrohrs! Beachten Sie die Vorzeichen.

Hinweis:
Vektor: $\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ r_1 \end{pmatrix}$; Abbildungsmatrix einer Linse: $\begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; Translationsmatrix für Strecke d: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}$;



Lösung

(a) Den Strahlengang erhält man durch Konstruktion mithilfe der Brenn- und Mittelpunktstrahlen. ϵ_0 bezeichnet den Einfallswinkel, ϵ_1 den Ausfallswinkel. Ein Strahl reicht.



[**4**]

(b) Es handelt sich um ein virtuelles, aufrecht stehendes Bild.

[**2**]

(c) Da es sich um eine konvexe und eine konkave Linse handelt, gilt für das Vorzeichen der Brennweiten: $f_1 > 0$ und $f_2 < 0$
Daraus folgt für den Abstand d der beiden Linsen:

$$d = f_1 - |f_2| = f_1 + f_2 \tag{1}$$

[**1**]

Unter der Annahme, dass ein Lichtstrahl unter einem Winkel ϵ_0 in einem Abstand r_0 zur optischen Achse auf die erste Linse trifft, erhält man Winkel ϵ_1 und Abstand r_1 des Lichtstrahls nach dem Durchgang durch die zweite Linse durch Multiplikation der beiden Linsenmatrizen und der Translationsmatrix in folgender Form:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_1 + f_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/f_1 \\ f_1 + f_2 & -f_2/f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1/f_2 & 0 \\ f_1 + f_2 & -f_2/f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ r_0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

[**3**]

Die letzte Zeile besagt insbesondere:

$$\epsilon_1 = -f_1/f_2 \cdot \epsilon_0 \tag{5}$$

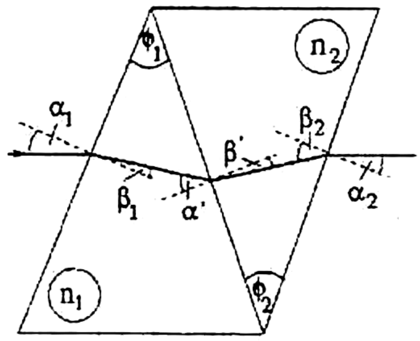
Der Ausfallswinkel hängt also nur vom Einfallswinkel ab und ist unabhängig vom Abstand des einfallenden Strahles von der optischen Achse. Parallel einfallende Strahlen besitzen denselben Einfallswinkel und folglich auch denselben Ausfallswinkel, bleiben also parallel. Für die Winkelvergrößerung gilt:

$$V_F = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = -\frac{f_1}{f_2} \tag{6}$$

[**3**]

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Ein Lichtstrahl falle unter dem Winkel α_1 auf ein Prismenpaar, dass aus zwei symmetrischen Prismen aus unterschiedlichen Gläsern und Winkeln (Brechzahlen n_1 und n_2; Prismenwinkel ϕ_1 und ϕ_2) zusammengesetzt ist. Der Strahl verlässt das Prismenpaar unter dem Winkel α_2. Alle Prismen-, Einfalls- und Ausfallswinkel seien genügend klein damit die Kleinwinkelnäherung gilt $\sin\alpha \approx \alpha$.



(a) Berechnen Sie den Ausfallswinkel α_2 in Abhängigkeit von den bekannten Größen: n_1, n_2, ϕ_1, ϕ_2 und α_1.

(b) Was ergibt sich daraus für die Gesamtablenkung $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 - \phi_1 + \phi_2$? Geben Sie die Farbabweichung $\Theta = \frac{d\delta}{d\lambda}$ des Ablenkwinkels δ in Abhängigkeit der Winkel ϕ_1 und ϕ_2 und den (als bekannt vorrausgesetzten) Dispersionen $\frac{dn_1}{d\lambda}$ und $\frac{dn_2}{d\lambda}$ der beiden Gläser an.

(c) Wie groß muss das Verhältnis der Prismenwinkel $\frac{\phi_1}{\phi_2}$ gewählt werden, damit das Prismenpaar

- geradsichtig (d.h. $\delta = 0$)
- achromatisch (d.h. $\Theta = 0$)

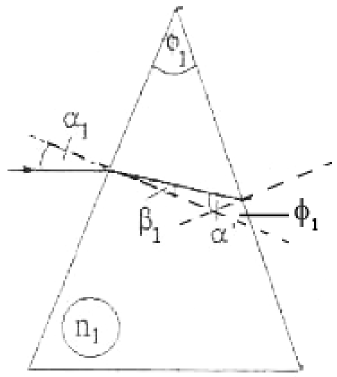
sein soll?

Lösung

(a) Das Lot steht jeweils senkrecht auf den Schenkeln des Prismas, daher findet man ϕ_1 ein zweites Mal. Es gilt:

$$\beta_1 + \alpha' + (\pi - \phi_1) = \pi \Rightarrow \alpha' = \phi_1 - \beta_1 \quad \text{analog:} \quad \beta_2 = \phi_2 - \beta'$$

[2]



Snellius:

$$\begin{aligned} n_1 =& \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \approx \frac{\alpha_1}{\beta_1} \Rightarrow \beta_1 = \frac{\alpha_1}{n_1} \\ n_2 =& \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \approx \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Rightarrow \alpha_2 = \beta_2 n_2 \\ \frac{n_1}{n_2} =& \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} \approx \frac{\alpha'}{\beta'} \Rightarrow \beta' = \frac{\alpha' n_1}{n_2} \end{aligned}$$

[**3**]

$$\alpha_2 = n_2\beta_2 = n_2(\phi_2 - \beta') = n_2\phi_2 - n_1\alpha' = n_2\phi_2 - n_1(\phi_1 - \beta_1) = n_2\phi_2 - n_1\phi_1 + \alpha_1$$

[**1**]

(b)

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2 - \phi_1 + \phi_2 = \alpha_1 - n_2\phi_2 - n_1\phi_1 + \alpha_1 - \phi_1 + \phi_2 = (n_1 - 1)\phi_1 - (n_2 - 1)\phi_2$$

$$\Theta = \frac{d\delta}{d\lambda} = \phi_1\frac{dn_1}{d\lambda} - \phi_2\frac{dn_2}{d\lambda}$$

[**2**]

(c)

$$\delta = 0 = (n_1 - 1)\phi_1 - (n_2 - 1)\phi_2 \Rightarrow \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{n_2 - 1}{n_1 - 1}$$

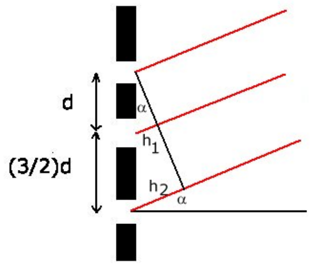
[**2**]

$$\Theta = 0 = \phi_1\frac{dn_1}{d\lambda} - \phi_2\frac{dn_2}{d\lambda} \Rightarrow \frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{\frac{dn_2}{d\lambda}}{\frac{dn_1}{d\lambda}}$$

[**2**]

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Zwei unendlich lange Spalte sind im Abstand d, ein dritter Spalt im Abstand $(3/2)d$ vom zweiten angebracht. Die Breite der einzelnen Spalte sei klein und der Schirm weit entfernt. Die Anordnung werde mit monochromatischem Licht der Wellenlänge $\lambda \ll d$ bestrahlt.



(a) Bei welchem Winkel $\alpha_1 \neq 0$ beobachtet man das erste Hauptmaximum? (d.h. alle drei Wellen sind in Phase)

(b) Berechnen Sie die Intensitätsverteilung als Funktion des Winkels α, indem Sie die zuerst die drei Feldstärken addieren (mit den jeweiligen Phasenwinkeln). *Hinweis*: $E^2 = EE^*$ und $\cos(x) = (1/2)(e^{ix} + e^{-ix})$

(c) Die Intensität beim Winkel $\alpha_0 = 0$ werde mit I_0 bezeichnet. Wie groß ist die Intensität beim Winkel $\alpha = \alpha_1/2$?

Lösung

(a) Die Hauptmaxima liegen bei den Winkeln, bei denen die Phasen aller drei Teilwellen übereinstimmen. Bezeichnen wir den Wegunterschied der zweiten und dritten Welle gegeüber der ersten mit h_1 und h_2, so ist

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{d} = \frac{h_2}{d + (3/2)d} = \frac{h_2}{(5/2)d}$$

Da $n = 1$, ist der Wegunterschied identisch mit dem optischen Gangunterschied. Maximale Verstärkung erhalten wir, wenn gleichzeitig $h_1 = m_1\lambda = d\ \sin\alpha\ h_2 = m_2\lambda = (5/2)\ \sin\alpha$,

wobei m_1 und m_2 ganze Zahlen sind. Dieses kann nur dann gleichzeitig erfüllt werden, wenn

$$\sin\alpha = \frac{m_1\lambda}{d} = \frac{m_2\lambda}{(5/2)d}$$

gilt, d.h. $5m_1 = 2m_2$. Die einfachste, von Null verschiedene Lösung ist $m_1 = 2$ und $m_2 = 5$. Das erste Hauptmaximum liegt also unter dem Winkel $\sin\alpha = 2\lambda/d$ oder $\delta = 4\pi$. Allgemein gilt:

$$\sin\alpha_m = \pm m\,\frac{2\lambda}{d}, \qquad m = 0, 1, 2, 3, ...$$

[5]

(b) Die Feldstärke der drei Wellen kann geschrieben werden als

$$E(\delta) = C + Ce^{i\delta} + Ce^{i(5/2)\delta}, \qquad \delta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\alpha.$$

Die Intensität ist

$$I(\delta) = EE^* = C^2\left(1 + e^{i\delta} + e^{i(5/2)}\right)\left(1 + e^{-i\delta} + e^{-i(5/2)\delta}\right).$$

Ausmultiplizieren und mit Hilfe der Formel $\cos(x) = (1/2)(e^{ix} + e^{-ix})$ folgt

$$I(\delta) = C^2\left[3 + 2\ \cos(\delta) + 2\ \cos\left(\frac{3}{2}\delta\right) + 2\ \cos\left(\frac{5}{2}\delta\right)\right].$$

[3]

(c) Für die Intensitäten in den Maxima gilt

$$I(\delta = 0) = I(\delta = 4\pi) = 9C^2 = I_0.$$

Einem Winkel von $\alpha = \alpha_1/2$ entsprecht $\delta = 2\pi$. Hierfür erhalten wir:

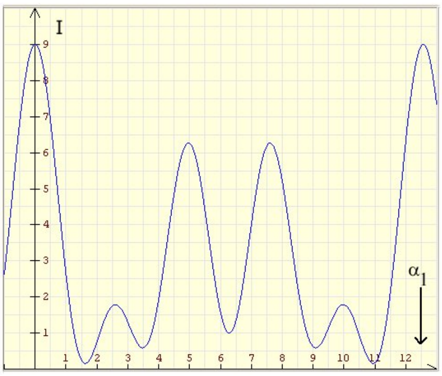
$$I(\delta = 2\pi) = C^2(3 + 2 - 2 - 2) = C^2$$

und

$$I(\delta = 2\pi) = \frac{I_0}{9}.$$

[3]

Zeichnung nicht gefordert.



Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein monochromatischer Lichtstrahl trifft auf eine Rubidium-Kathode (Austrittsarbeit $W_A = 2,13$ eV).

(a) Wie groß darf die Wellenlänge höchstens sein, damit der Photoeffekt auftritt?

(b) Wieso lässt sich durch diesen Effekt auf den Teilchencharakter des Lichtes schließen?

(c) Im Folgenden wird Licht der Wellenlänge $\lambda = 400$ nm verwendet. Bis zu welcher Grenzgegenspannung kommen noch Elektronen im Zählrohr an?

Lösung

(a) Für den Photoeffekt gilt

$$E_{ph} = W_A + E_{kin} \tag{7}$$

wobei $E_{ph} = \frac{hc}{\lambda}$ die Energie der einfallenden Photonen ist, W_A die Austrittsarbeit und E_{kin} die kinetische Energie der ausgelösten Elektronen ist. Der Photoeffekt tritt dann gerade noch auf, wenn gilt $E_{kin} = 0$. Damit erhält man als Grenzwellenlänge

$$\lambda_G = \frac{hc}{W_A} = 582 \text{ nm} \tag{8}$$

[**3**]

(b) Der Photoeffekt tritt instantan auf. Im Wellenbild lösen sich erst dann Elektronen aus einem Material, sobald die absorbierte Energie (pro Volumenelement) ausreicht um die Austrittsarbeit zu überwinden. Der Photoeffekt würde daher erst nach einer gewissen Zeit eintreten sobald genug Energie absorbiert würde, er tritt aber sofort auf. Das lässt sich nur mithilfe des Teilchenbildes erklären.

[**2**]

(c) Als kinetische Energie der Elektronen erhält man

$$E_{kin} = \frac{hc}{\lambda} - W_A = 0,99 \text{ eV} \tag{9}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Die Wellenfunktion $\psi(r)$ eines Teilchens in einem eindimensionalen Potential sei

$$\psi(r) = N \frac{e^{ip_0 r/\hbar}}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

wobei a, p_0 reelle Parameter und N die Normierungskonstante ist.

(a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante N.

(b) Sie messen den Ort r des Teilchens. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man das Teilchen im Intervall $\left[\frac{-a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right]$?

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert für den Ort $\langle r \rangle$ des Teilchens.

Hinweis: $\int \frac{1}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$

Lösung

(a)

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0 r/\hbar} e^{ip_0 r/\hbar}}{a^2 + r^2} dr = N^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + r^2} dr = \frac{N^2}{a} \arctan \frac{r}{a}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{N^2}{a}\pi \Rightarrow N = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

[3]

(b)

$$\frac{a}{\pi} \int_{\frac{-a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} \frac{1}{a^2 + r^2} dr = \frac{a}{\pi} \frac{1}{a} \arctan \frac{r}{a}\Big|_{\frac{-a}{\sqrt{3}}}^{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}$$

[2]

(c)

$$\langle r\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dr \psi^*(r) r \psi(r) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r}{a^2 + r^2} dr = 0$$

wegen Symmetrie.

[2]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \mathrm{CV}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \mathrm{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \mathrm{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{ms}^{-1}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \mathrm{kg}$
Stefan Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \mathrm{mK}$