Name: [ ] Gruppe: [ ]

MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. R. König
Probeklausur, 22.12.2017, 12:15-13:45

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt.
Bei **Multiple-Choice-Aufgaben** sind keine, eine oder mehrere, in jedem Fall jedoch **genau** die zutreffenden Aussagen, anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt.
Aufgaben ohne Kästen lösen Sie bitte auf dem bereitgestellten Bearbeitungsbogen.

Viel Erfolg!

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

   $$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

   Hinweis: Beachten Sie den Startindex in der Summe auf der rechten Seite der Gleichung.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

   Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt{\mathrm{e}^{\pi(2+\frac{7}{2}\mathrm{i})}}$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[10 Punkte]**

   (a) Berechnen Sie den Wert der Reihe: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \qquad}$

   (b) Wo liegt der Grenzwert c der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$?

   ☐ $c = -\infty$ ☐ $c \in (-\infty, 0)$ ☐ $c = 0$ ☐ $c \in (0, \infty)$ ☐ $c = +\infty$ ☐ c ist undefiniert

   (c) Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$?

   ☐ 0 ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ e ☐ π ☐ ∞

   (d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Zahlenfolge mit $x_{n+1} - x_n \leq r\,(x_n - x_{n-1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $r < 1$ ist. (x_n) ist

   ☐ beschränkt ☐ divergent ☐ alternierend ☐ konvergent ☐ unbeschränkt

4. **Uneigentliche Grenzwerte** **[5 Punkte]**

   Seien (a_n) und (b_n) zwei reelle Folgen, die eigentlich oder uneigentlich konvergieren. Zeigen Sie: Ist $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim_{n\to\infty} b_n > -\infty$, dann gilt

   $$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

5. **Stetige Funktionen** **[10 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(x^2) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $f(0) = f(\frac{1}{2})$,

(b) $f(1) = f(\frac{1}{2})$.

6. **Gerade und ungerade Funktionen** **[10 Punkte]**

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$ und **ungerade**, wenn $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$ ist.

(a) Zeigen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und ungerade, dann ist f' eine gerade Funktion.

(b) Sei nun f wieder differenzierbar und ungerade. Setze $g(x) = f(x^3)$ und $h(x) = f(x)^3$. Zeigen Sie, dass g' und h' gerade Funktionen sind.

7. **Ableitung einer Umkehrfunktion** **[16 Punkte]**

Sei die Funktion $f(x) = x + \sin(x)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $f : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi]$ bijektiv ist.

(b) Wie lautet die Ableitung von f^{-1} an den Punkten 0 und $1 + \frac{\pi}{2}$?

$(f^{-1})'(0) =$

$(f^{-1})'(1 + \frac{\pi}{2}) =$

(c) Skizzieren Sie die Graphen von f, f', f^{-1} und $(f^{-1})'$ jeweils in einem eigenen Koordinatensystem.