Klausur in Experimentalphysik 3
Lösung

Prof. Dr. L. Fabbietti
Wintersemester 2019/20
17. Februar 2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe A (10 Punkte)

(a) Ein Kurzsichtiger und ein Weitsichtiger stranden auf einer Insel. Wer von ihnen kann mit seiner Brille am ehesten Feuer entfachen?

(b) Weißes Licht fällt aus Luft auf ein Prisma. Welcher Farbe entspricht die größte bzw. die kleinste Ablenkung?

(c) Beschreiben Sie kurz ein Experiment, mit dem sich die optische Aktivität eines Mediums demonstrieren lässt.

(d) Unter welchen Umständen erzeugt eine Sammellinse ein virtuelles Bild?

(e) Welche Art der Kohärenz liegt beim Young'schen Doppelspaltversuch vor?

(f) Wie hängt bei einem Einfachspalt der Abstand der Maxima/Minima mit der Spaltgröße zusammen?

(g) Welcher Anteil der EM Welle hat einen höheren Einfluß auf Materie? Geben Sie eine kurze Begründung (Formel).

(h) Was sind die elektromagnetischen Eigenschaften des Vakuums?

(i) Was besagt die Definition des Dichroismus?

(j) Was versteht man unter einer Wellenfront?

Lösung

(a) Der Weitsichtige, da er eine bikonvexe Linse als Brillengläser trägt und somit über eine Sammellinse verfügt, mit dieser die Strahlen der Sonne im Brennpunkt bündeln kann und somit ausreichende Intensität zum Entzünden leicht entzündlicher Materialien „erzeugen“ kann.

[**1**]

(b) Da der reelle Brechungsindex bei normaler Dispersion mit steigender Wellenlänge abfällt, wird rotes Licht schwächer gebrochen als blaues und hat somit einen kleineren Ablenkwinkel, da die Wellenlänge von rotem Licht größer ist als die von blauem.

[**1**]

(c) Man positioniere zwei Polfilter, mit gekreuzten Durchlassrichtungen und platziere eine Probe dazwischen. Lässt sich hinter dem zweiten Polfilter Licht wahrnehmen, wurde die Polarisationsrichtung vom optisch aktiven Medium gedreht.

[**1**]

(d) Die Sammellinse erzeugt ein virtuelles Bild, wenn der Abstand des Gegenstands g zur Linse kleiner gewählt wird als die Brennweite f der Linse.

[**1**]

(e) Es liegt räumliche Kohärenz vor da der Wellenzug mit einer räumlich verschobenen Kopie seiner selbst überlagert wird.

[**1**]

(f) Je größer der Spalt, desto näher zusammen sind die Maxima/Minima.

[**1**]

(g) Der elektrische Anteil. $B \propto \frac{E}{c}$

[**1**]

(h) Die Eigenschaften des Vakuums sind die Abwesenheit von Ladung ($\rho = 0$), Strömen ($j = 0$) und Materie ($\mu = 1$,$\epsilon = 1$).

[**1**]

(i) Der Dichroismus ist die Eigenschaft eines anisotropen Mediums, Licht in Abhängigkeit seiner Polarisation unterschiedlich stark zu absorbieren.

[**1**]

(j) Unter einer Wellenfront versteht man eine Ebene konstanter Phase, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht.

[**1**]

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine Glasplatte mit Brechungsindex $n_3 = 1.50$ soll durch das Aufbringen einer Vergütungsschicht entspiegelt werden. Berechnen Sie den Brechungsindex n_2 und die Dicke d der Vergütungsschicht, die für senkrechten Lichteinfall aus der Luft für Licht der Wellenlänge $\lambda = 589$ nm Reflexionsfreiheit ergibt. *Hinweis:* Nehmen Sie alle Transmissionsgrade vereinfacht als 1 an, da diese sehr viel größer als die Reflektionsgrade sind.

Lösung

Bei senkrechtem Einfall ist der Reflexionskoeffizient (Anteil der einfallenden Amplitude, die reflektiert wird) beim Übergang von n_a nach n_b:

$$r = \left(\frac{n_a - n_b}{n_b + n_a}\right). \tag{1}$$

Damit die Reflexion verschwindet (Wellen löschen sich gegenseitig aus), müssen die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

1. Die beiden reflektierten Wellen müssen einen optischen Gangunterschied von $\lambda/2$ (bzw. $\lambda(1/2 + n)$) besitzen:
$$2 \cdot n \cdot d = \frac{\lambda}{2} \tag{2}$$

2. Die Amplituden des elektrischen Feldes bzw. die Intensitäten müssen gleich sein.

[**2**]

Folglich muss das Verhältnis der Intensitäten am ersten und zweiten Übergang gleich groß sein, damit die Amplituden der reflektierten Wellen gleich groß sind:

$$\left(\frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}\right)^2 = \left(\frac{n_2 - n_3}{n_3 + n_2}\right)^2 \tag{3}$$

$$\Rightarrow \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} = \frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \tag{4}$$

$$\Rightarrow n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3} = \sqrt{1 \cdot 1,5} = 1,22 \tag{5}$$

Die Schichtdicke d erhält man aus Gleichung (2):

$$2 \cdot n_2 \cdot d = \frac{\lambda}{2} \tag{6}$$

$$d = \frac{\lambda}{4 \cdot n_2} = \frac{589 \text{ nm}}{4 \cdot \sqrt{1,5}} = 120 \text{ nm} \tag{7}$$

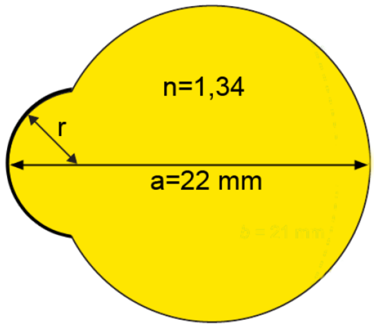
[**4**]

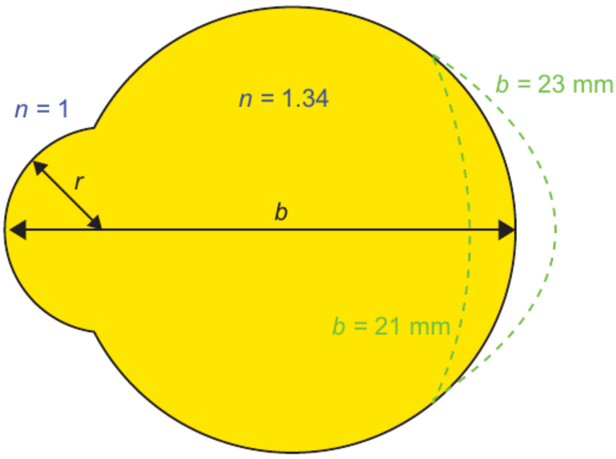
Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein einfaches Modell für das menschliche Auge ist das reduzierte Auge. Es besteht aus einer brechenden Kugelfläche mit Radius r, hinter der das einfallende Licht über einen Abstand $a = 22$ mm durch ein Medium mit Brechzahl $n = 1,34$ auf die Netzhaut fokussiert werden soll.

(a) Berechnen Sie den Kugelradius r für die Einstellung auf unendlich tief und auf 10 cm Entfernung.

(b) In welchen Entfernungen kann das Auge scharf sehen, wenn bei (beiden) unveränderten Kugelradien der Abstand a auf 23 mm steigt?





Lösung

(a) Der Abstand a entspricht hierbei der Bildweite b. Für die Brechung an der Kugelfläche gilt:

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r}. \tag{8}$$

Aufgelöst nach r lautet der Ausdruck:

$$r = \frac{(n-1)gb}{b+ng} \tag{9}$$

Nun müssen noch die Zahlenwerte eingesetzt werden: Für $g = \infty$ wird $r = 5,580$ mm und für $g = 100$ mm wird $r = 4,795$ mm.

[**3**]

(b) Gleichung (8) aufgelöst nach g lautet:

$$g = \frac{rb}{(n-1)b - nr} \tag{10}$$

Nun wird b für den Nah- und Fernbereich jeweils um 1 mm vergrößert:
Bei einer Verlängerung von 1 mm, wird man schon ziemlich kurzsichtig!

	$b = 23$ mm
von Nahbereich $r = 4,795$ mm	$g = 79,1$ mm
bis Fernbereich $r = 5,580$ mm	$g = 374,4$ mm

[**2**]

(Altersweitsichtigkeit beruht übrigens darauf, dass die Linse verhärtet, also r nicht mehr einfach variiert werden kann.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Ein sphärischer Rasierspiegel mit dem Krümmungsradius $r = 300$ mm soll so benutzt werden, dass das aufrechte, virtuelle Bild in der Entfernung $S = 250$ mm vor dem Gesicht entsteht.

(a) In welcher Entfernung a muss sich das Gesicht vor dem Spiegel befinden?

(b) Wie groß ist der Abbildungsmaßstab?

(c) Konstruieren Sie den Strahlengang (mit 3 Strahlen) für die gegebene Situation qualitativ und beschriften Sie ihre Zeichnung (groß genug zeichnen).

Lösung

Für einen sphärischen Spiegel gilt:

- Die Brennweite f ist gleich dem halben Kugelradius, $f = r/2$,
- Bei einem virtuell aufrechten Bild, welches hinter dem Spiegel entsteht, ist die Bildweite b negativ.

(a) Mit den Definitionen aus der Abbildung gilt:

$$S = g - b, \tag{11}$$

wobei a die gesuchte Entfernung ist.

Die Brennweite beträgt:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}. \tag{12}$$

[**2**]

Einsetzen der Bedingung (11) und Auflösen nach b liefert:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \tag{13}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{S+b} + \frac{1}{b} \tag{14}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{S+b+b}{(S+b)\cdot b} \tag{15}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{2b+S}{Sb+b^2} \tag{16}$$
$$b^2 + Sb = 2bf + Sf \tag{17}$$
$$0 = b^2 + (S-2f)b - Sf \tag{18}$$
$$\Rightarrow b_{1/2} = -\frac{(S-2f)}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{(S-2f)}{2}\right)^2 + Sf} \tag{19}$$

Einsetzen der Werte $S = 250$ mm und $f = r/2 = 150$ mm liefert die Lösungen

$$b_1 = 220,26 \text{ mm} \tag{20}$$
$$b_2 = -170,26 \text{ mm}, \tag{21}$$

wobei nur die zweite Lösung aufgrund ihres negativen Vorzeichens physikalisch sinnvoll ist.

Für die gesuchte Entferung a ergibt sich somit:

$$g = S + b = 250 \text{ mm} - 170,26 \text{ mm} = 79,74 \text{ mm}. \tag{22}$$

Das Gesicht muss sich also in einer Enfernung von 79,74 mm vor dem Spiegel befinden.

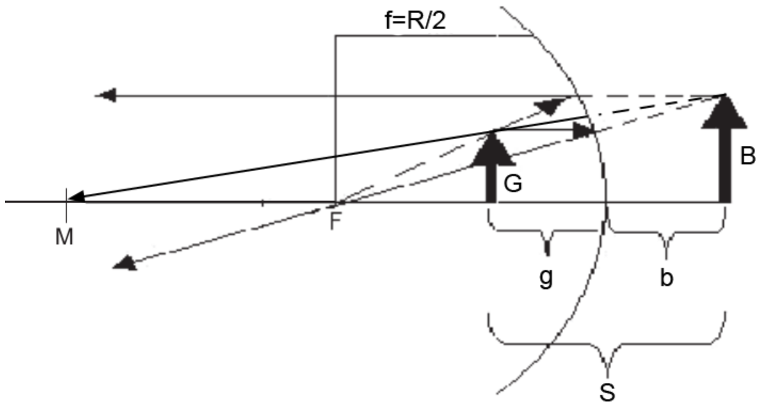
[**3**]

(b) Für den Abbildungsmaßstab V gilt:

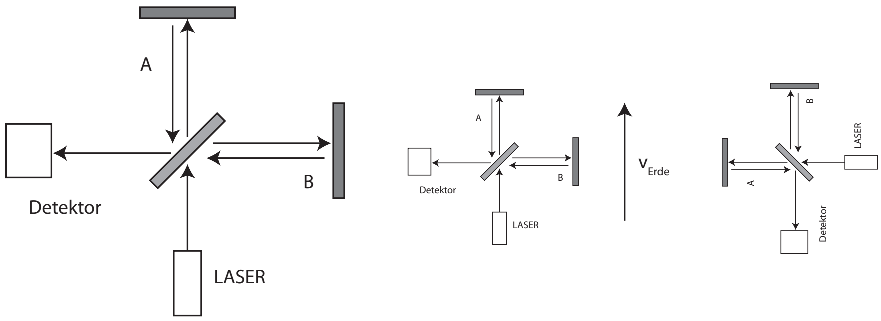
$$V = \frac{R-b}{R-g} = \frac{300 \text{ mm} + 170,26 \text{ mm}}{300 \text{ mm} - 79,74 \text{ mm}} = 2,14. \tag{23}$$

[**2**]

(c) [**5**]



Aufgabe 4 (10 Punkte)



(a) In dem abgebildeten Interferometer, das als Positionsmesser in einer Fräsmaschine dient, soll ein Diodenlaser der Wellenlänge $\lambda = 488$ nm verwendet werden. Wieviele Maxima werden beobachtet, wenn Spiegel A um $x = 5$ μm verfahren wird.

(b) Nun soll mithilfe des Interferometers der Brechungsindex von Luft bestimmt werden. Dazu wird eine 10 cm lange Glasröhre im Strahlengang evakuiert und die Anzahl der auftretenden Maxima während des Abpumpens gezählt. Es treten 120 Maxima auf. Berechnen Sie n_L!

(c) Vor der Entdeckung der speziellen Relativitätstheorie wollten Michelson und Morley 1904 die Geschwindigkeit der Erde im Vergleich zum Äther messen. Dazu benutzten Sie ein Interferometer mit 11 m Armlänge. Die Erde bewegt sich mit einer Geschwindigkeit $v = 29,8\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$ um die Sonne. Wieviele Maxima hätten die beiden sehen müssen, wenn sie ihr Messgerät um 90° drehen? Berechnen Sie dazu zunächst den Laufzeitunterschied zwischen beiden Armen.

Lösung

(a) Der Gangunterschied ist die doppelte Länge $2x$, da das Licht hin- und zurückläuft.

$$\Delta s = 2x = k\lambda \Rightarrow k = \frac{2x}{\lambda} = 20,5 \quad (24)$$

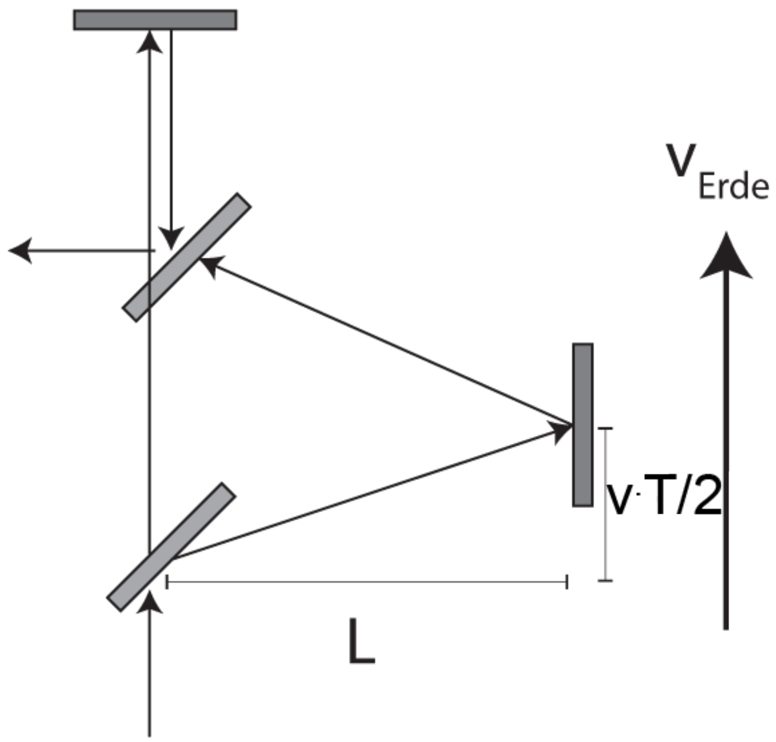
$$(25)$$

[2]

(b)

$$\Delta s = 2l(n_L - 1) = k\lambda \tag{26}$$
$$n_L = \frac{k\lambda}{2l} + 1 = 1,000293 \tag{27}$$

[2]



(c) Die folgende Rechnung geht von einem Ätherwind (Fahrtwind der Erde) aus, was natürlich nicht der Realität entspricht. Die Rechnung wäre allerdings physikalisch richtig für Schallwellen (natürlich mit geringeren Geschwindigkeiten). Wir berechnen zunächst die Laufzeit des Strahls in Richtung der Erdbewegung für Hin- und Rückweg.

$$T_{parallel} = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = L\frac{c+v+c-v}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{28}$$

Nun die Laufzeit im Arm senkrecht dazu. Dafür berechnen wir zuerst die veränderte zurückgelegte Wegstrecke:

$$x = 2\sqrt{L^2 + v^2\left(\frac{T_{senk}}{2}\right)^2} = T_{senk}c \tag{29}$$
$$4L^2 + v^2T_{senk}^2 = T_{senk}^2c^2 \tag{30}$$
$$T_{senk} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{31}$$

Der gesamte Laufzeitunterschied zwischen den Armen ist damit:

$$\Delta T_1 = T_{parallel} - T_{senk} = \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{32}$$

Nach einer Drehung um 90° vertauschen sich die Laufzeitunterschiede der beiden Arme:

$$\Delta T_2 = T_{senk} - T_{parallel} = \frac{2L}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2L}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{33}$$

Es ergibt sich ein Gesamtlaufzeitunterschied der beiden Stellungen von:

$$\Delta T_G = \Delta T_2 - \Delta T_1 = \frac{4L}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \tag{34}$$

$$\tag{35}$$

Und ein Gangunterschied von:

$$\Delta s = \Delta T_G c = 4L\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = 217\text{ nm} \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

Dies entspricht ungefähr dem Wechsel von einem Minimum zum Maximum ($k = \frac{\Delta s}{\lambda} = 0,44$).

[**6**]

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Sie benutzen einen monochromatischen Laser der Wellenlänge $\lambda = 500$ nm, um diverse Parameter verschiedener Messaufbauten zu bestimmen:

(a) Zunächst bestrahlen Sie die Kathode einer Vakuum-Photozelle aus unbekanntem Material, sodass Photoeffekt auftritt. Sie regeln die anliegende Spannung und erkennen, dass ab einer Gegenspannung von $U_B = 1,28$ V kein Strom mehr fließt. Welche Austrittsarbeit besitzt das Material?

(b) Als nächstes bestrahlen Sie einen Doppelspalt. Auf dem $l = 2$ m entfernten Schirm erkennen Sie ein Interferenzmuster. Sie bestimmen den Abstand zwischen den zwei innersten Interferenzminima ($m = \pm 1$) zu $x_I = 4$ cm und den Abstand zwischen den zwei Beugungsminima erster Ordnung zu $x_B = 20$ cm. Wie groß sind Spaltbreite und Abstand der Spalte?

(c) Zuletzt bestrahlen Sie einen doppelbrechenden Kristall der Dicke $d = 1$ mm (senkrechter Lichteinfall, optische Achse parallel zur Kristalloberfläche). Vor und hinter den Kristall schalten Sie zwei Polarisationsfilter (45° zur optischen Achse gedreht) in gleicher Ausrichtung. Berechnen Sie den kleinstmöglichen Wert Δn um den sich der ordentliche und der außerordentliche Brechungsindex unterscheiden, wenn Sie hinter dem zweiten Polarisator keine Intensität messen können?

Lösung

(a) Als Bedingung erhält man

$$E_{ph} = W_A + eU_B \tag{38}$$

wobei E_{ph} die Energie eines Photons ist, W_A die Austrittsarbeit und U_B die Bremsspannung. Aufgelöst auf die Austrittsarbeit erhält man

$$W_A = E_{ph} - eU_B = \frac{hc}{\lambda} - eU_B = 1,2 \text{ eV} = 1,93 \cdot 10^{-19}\text{J} \tag{39}$$

[**2**]

(b) **Beugung** (Einzelspalt):
Es gilt für das Minimum n-ter Ordnung der Beugung eines Einzelspalts

$$n\lambda = b \sin\alpha \tag{40}$$

$$\approx b \tan\alpha \approx b\frac{x_B}{2l} \tag{41}$$

Auflösen auf Spaltbreite b liefert für $m = 1$:

$$b = \frac{2\lambda l}{x_B} = 10 \ \mu\text{m} \tag{42}$$

[**3**]

Interferenz (Mehrfachspalt):
Es gilt für das Minimum m-ter Ordnung der Interferenz des Doppelspalts:

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda = d \sin\alpha \tag{43}$$

$$\approx d \tan\alpha \approx d\frac{x_I}{2l} \text{mit} \alpha = \frac{x}{2l} \tag{44}$$

Auflösen auf Gitterabstand d liefert für $n = 1$:

$$d = \frac{\lambda l}{x_I} = 25 \ \mu\text{m} \tag{45}$$

[**2**]

(c) Damit bei gleicher Ausrichtung der Polarisationsfilter hinter dem Kristall keine Intensität gemessen werden kann, muss die Polarisationsrichtung des Strahls durch den Kristall um 90° gedreht werden. Daher gilt für den Phasenunterschied:

$$\Delta\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} d\Delta n = (2k+1)\,\pi \tag{46}$$

Und man erhält für den Unterschied der Brechungsindizes:

$$\Delta n = \frac{\lambda}{2d}\,(2k+1) \tag{47}$$

Man erhält für $k = 0$: $\Delta n = 2,5 \cdot 10^{-4}$.

[**3**]

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Sie vermessen das Sonnenspektrum auf der Erde. Als Maximum Ihrer Verteilung erhalten Sie $\lambda_{max} = 500$ nm und als Bestrahlungsstärke $B_E = 1350$ W/m^2.

(a) Wie groß ist der Abstand zwischen Erde und Sonne, wenn Sie davon ausgehen, dass die Sonne ein Schwarzkörper ist, der isotrop in alle Richtungen strahlt und einen Radius von $6,95 \cdot 10^5$ km besitzt? (Ersatzlösung: $1,4 \cdot 10^8$ km)

(b) Wie groß ist die Bestrahlungsstärke auf dem Mars, wenn dieser $2,28 \cdot 10^8$ km von der Sonne entfernt ist? (Ersatzlösung: $650\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$)

(c) Welche Temperatur würden Sie auf dem Mars erwarten, wenn Sie diesen als Schwarzkörper im thermischen Gleichgewicht annehmen und er einen Radius von $3,39 \cdot 10^3$ km besitzt?

Lösung

(a) Mit dem Wienschen Gesetz lässt sich zunächst die Temperatur T_S der Sonne errechnen:

$$T_S = \frac{b}{\lambda_{max}} = 5800\ \mathrm{K} \tag{48}$$

[2]

wobei $b = 2898\ \mu$mK die Wiensche Verschiebungskonstante bezeichnet. Die Gesamte Strahlungsleistung P_S der Sonne lässt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz berechnen:

$$P_S = \sigma \cdot A_S \cdot T_S^4 = \sigma \cdot 4\pi R_S^2 \cdot T_S^4 = 3,90 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W} \tag{49}$$

[2]

wobei $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2\mathrm{K}^4}$ die Stefan-Boltzmann-Konstante und A_S die Sonnenoberfläche bezeichnet. Unter der Annahme, dass sich die Strahlungsleistung isotrop über den Raum ausbreitet, erhält man die Bedingung

$$P_S \stackrel{!}{=} B_E \cdot A_{S-E} = B_E \cdot 4\pi R_{S-E}^2 \tag{50}$$

wobei A_{S-E} die Oberfläche einer Kugel mit Radius Abstand zwischen Erde und Sonne R_{S-E} ist. Aufgelöst nach diesem Abstand erhält man

$$R_{S-E} = \sqrt{\frac{P_S}{4\pi \cdot B_E}} = 1,51 \cdot 10^8\ \mathrm{km} \tag{51}$$

[3]

(b) Gleichung (50) gilt für alle Abstände bei ihrer jeweiligen Bestrahlungsstärke. Aufgelöst nach der gesuchten Bestrahlungsstärke B_M des Mars ergibt sich:

$$B_M = \frac{P_S}{4\pi \cdot R_{S-M}^2} = 596\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \tag{52}$$

wobei R_{S-M} der Abstand zwischen Sonne und Mars ist.

[2]

(c) Ein Schwarzer Körper befindet sich im thermischen Gleichgewicht, wenn die absorbierte Leistung P_{abs} gleich der emittierten Leistung P_{em} ist. Der Mars absorbiert die ankommende Strahlung über seinen kreisförmigen Querschnitt, emittiert jedoch isotrop in alle Raumrichtungen, also über seine gesamte Kugeloberfläche. Die emittierte Leistung ist außerdem durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz proportional zu dessen Temperatur T_M:

$$P_{abs} = P_{em} \tag{53}$$

$$B_M \cdot \pi R_M^2 = \sigma \cdot 4\pi R_M^2 \cdot T_M^4 \tag{54}$$

Aufgelöst nach der Temperatur erhält man

$$T_M = \sqrt[4]{\frac{B_M}{4\sigma}} = 226 \text{ K} \tag{55}$$

[**3**]

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Mit Röntgenbeugungsverfahren kann man Gitterkonstanten von Kristallen sehr genau bestimmen und dies als Abschätzung für Atomdurchmesser verwenden. Es ergeben sich typische Werte von etwa 0,1 nm (Wasserstoff) bis 0,5 nm (z.B. Cäsium). Stellt man sich das Elektron innerhalb des Atomdurchmessers lokalisiert vor, folgt daraus mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärferelation sofort eine Abschätzung für seine Impulsunschärfe. Für ein ruhendes Elektron ist die Impulsverteilung symmetrisch um $p = 0$ und man kann die kinetische Energie ausrechnen, wenn man als Impuls $\Delta p/2$ ansetzt.

(a) Vergleichen Sie die sich ergebenden Werte der kinetischen Energie mit den ersten Ionisierungsenergien von Wasserstoff (13,6 eV) und Cäsium (3,9 eV).

(b) Wie klein muss man sich also etwa die innere Schale von Blei vorstellen (Ionisierungsenergie der K-Schale = 88 keV)? Vergleichen Sie dies mit dem Kernradius von Blei ($= 7 \cdot 10^{-15}$ m).

(c) Bestimmen Sie die Eigenenergiewerte E_n eines Teilchens in einem unendlich hohen Potentialtopf der Form

$$V(x) = \begin{cases} 0, \text{ für } \quad 0 < x < a \\ \infty, \text{ sonst} \end{cases}$$

Lösung

Im Folgenden wird die Heisenbergsche Unschärferelation in der Form $\Delta x \Delta p_x \approx h$ für die Abschätzungen verwendet. (Es gibt andere Abschätzungen z.B. $\Delta x \Delta p_x \approx \hbar$, die auch möglich sind)

(a) (i) Wasserstoff:

Mit $\Delta x = 10^{-10}$ m folgt die Abschätzung

$$\Delta p_x = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{10^{-10} \text{ m}} = 6,6 \cdot 10^{-24} \text{ kg}\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nun ist dies die volle Breite der Verteilungsfunktion zentriert bei $p = 0$, d.h. effektiv muss man mit $\Delta p/2$ weiterrechnen, um eine Abschätzung für die kinetische Energie zu gewinnen. Mit der Elektronenmasse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg erhält man $\langle v \rangle = \Delta p/2m_e = 1,8 \cdot 10^6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Damit kann man die kinetische Energieunschärfe zu

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{1}{8m_e} \Delta p_x^2 = \frac{1}{8m_e} \left(\frac{h}{\Delta x} \right)^2 = 6 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = 37,4\ \text{eV} = 2,75\ \cdot I_H \tag{56}$$

berechnen.

[4]

(ii) Cäsium:

$$\Delta p_x = 1,3 \cdot 10^{-24}\ \text{kg}\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{57}$$

$$\langle E_{kin} \rangle = 2,4 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1,5\ \text{eV} = 0,38 \cdot I_{Cs} \tag{58}$$

[2]

Was dieses Ergebnis zeigt, ist, dass man die Heisenbergsche Unschärferelation durchaus zu einer größenornungsmäßigen Abschätzung der Beziehung zwischen Atomradius und erforderlicher Bindungsenergie heranziehen kann. Die Abweichungen sind durchaus ein systematisches Indiz. Cäsium tendiert dazu, in Kristallen ionische Bindungen einzugehen. Wasserstoff hingegen tendiert eher zu kovalenten Bindungen, bei denen sich die Elektronenwolken mit den Nachbaratomen relativ stark überlappen können.

(b) Der in (a) gefundene Zusammenhang lässt sich nach

$$\Delta x = \frac{h}{\sqrt{8m_e \langle E_{kin} \rangle}} \tag{59}$$

auflösen. Einsetzen des Ionisationspotentials der K-Schale von Blei für $\langle E_{kin} \rangle$ ergibt:

$$\Delta x = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}}{\sqrt{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 88000 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}} = 2 \cdot 10^{-12}\ \text{m}. \tag{60}$$

[2]

Der gemäß dieser Abschätzung zu erwartende Radius der K-Schale beträgt also in etwa einen Pikometer, immer noch mehr als zwei Größenordnungen größer als der Kernradius von Blei.

(c) Das Teilchen hält sich ausschließlich im Potentialkasten auf, weswegen sich die Schrödingergleichung wie folgt liest:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = E\psi$$

Mit der Beziehung $E = k^2\hbar^2/2m$ kann an die Gleichung zu

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi - k^2 \psi = 0$$

umschreiben. Mit dem Ansatz

$$\psi(x) = A \exp[\mathrm{i}kx] + B \exp[-\mathrm{i}kx]$$

und den Randbedingungen $\psi(0) = 0$ und $\psi(a) = 0$ erhält man schließlich

$$\psi(0) = A + B = 0 \ \Leftarrow \psi = A\left(\exp[\mathrm{i}kx] - \exp[-\mathrm{i}kx]\right) = 2\mathrm{i}A\sin(kx)$$

und damit:

$$\psi(a) = 2\mathrm{i}A\sin(ka) = 0$$

Der Ausdruck der zweiten Randbedingung verschwindet für Vielfache von π des Arguments im Sinus:

$$ka = n\pi, \quad n \in \mathtt{R}$$

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}k_n^2 = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$$

[**4**]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{CV^{-1}m^{-1}}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8}\mathrm{ms^{-1}}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$
Stefan-Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3}\mathrm{mK}$