Klausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Simmel

Wintersemester 2011/2012

16. Februar 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

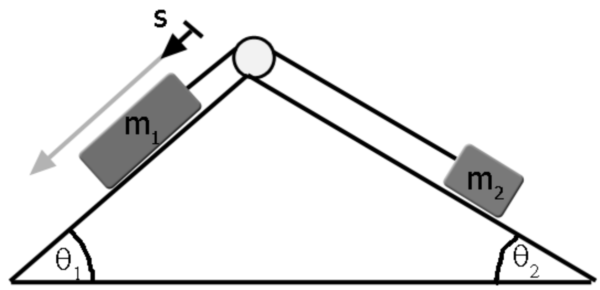
- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten. Gesamtpunktzahl: 42

Konstanten: $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$; $1bar = 10^5 Pa$, $\rho_{Wasser} = 1000 \frac{kg}{m^3}$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zwei Blöcke mit Masse m_1 und m_2 liegen auf gegenüberliegenden, reibungsfreien schiefen Ebenen eines Keils und sind durch ein masseloses Seil über eine reibungsfreie Umlenkung verbunden. Die Ebenen haben die Neigungswinkel θ_1 und θ_2. Der Keil ist fixiert. Es wirkt die Erdbeschleunigung g.



1. Formulieren Sie die Gleichgewichtsbedingung für die Massen in Abhängigkeit von den Neigungswinkeln θ_1 und θ_2 für den Fall, dass die Massen in Ruhe sind.
2. Bestimmen Sie die wirkenden Kräfte für das Massensystem im Nichtgleichgewicht und stellen Sie ein Gleichung für $s(t)$ auf für den Fall, dass die Masse m_1 im Abstand null von der Rolle und in Ruhe startet.

   Hinweis: Wählen Sie als Koordinate den Abstand s der Masse m_1 von der Rolle.
3. Wie lange braucht die Masse m_1, um aus der Ruhelage eine Strecke $s = 1\text{m}$ zu rutschen, wenn $m_1 = 2\text{kg}, m_2 = 1\text{kg}, \theta_1 = 60°, \theta_2 = 30°$ ist? ($g = 9,81\text{m/s}^2$)

Lösung

1.

$$
\begin{aligned}
F_{H_1} = F_{H_2} &\Rightarrow m_1 g \sin\theta_1 = m_2 g \sin\theta_2 \\
&\Rightarrow m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2
\end{aligned}
$$

[**1**]

2.

$$
\begin{aligned}
F &= m_{\text{ges}} a = (m_1 + m_2)a = m_1 g \sin\theta_1 - m_2 g \sin\theta_2 \\
a &= \frac{g(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2)}{m_1 + m_2} \\
s &= \frac{1}{2} a t^2 = \frac{g(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2)}{2(m_1 + m_2)} t^2 + b \cdot t + c
\end{aligned}
$$

[**2**]

Mit $s(0) = 0$ und $\dot{s}(0) = 0$ die Gleichung reduziert sich auf

$$
s = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{g(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2)}{2(m_1 + m_2)} t^2 \tag{1}
$$

[**1**]

3.

$$
t = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)s}{g(m_1 \sin\theta_1 - m_2 \sin\theta_2)}} = 0,705\text{s} \tag{2}
$$

[**1**]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im Potenzial $U(\vec{r}) = \frac{k}{2}\vec{r}^2$, wobei k eine positive Konstante ist.

1. Berechnen Sie die Kraft, die auf das Teilchen im Potenzial wirkt.
2. Ist der Bahndrehimpuls bezüglich des Ursprungs erhalten? Begründen Sie die Antwort (1 Satz oder eine 1 Formel).
3. Zeigen Sie, dass die Flächengeschwindigkeit konstant ist. (Die Fläche, die der Bahnvektor pro Zeit überstreicht ist konstant)

Lösung

1. $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -k\vec{r}$

[**1**]

2. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = -k(\vec{r} \times \vec{r}) = 0$, oder:

   Es handelt sich um eine Zentralkraft, womit der Drehimpuls erhalten ist.

   [**1**]

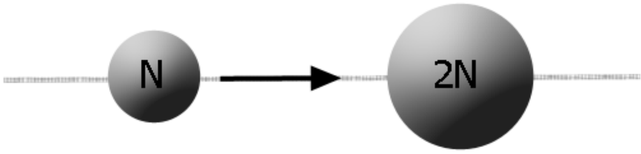
3. $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right| = \frac{1}{2m}|\vec{L}| = \text{const.}$

   [**2**]

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Ein Neutron mit Masse m_N und Impuls p_N stößt zentral und elastisch auf einen im Laborsystem ruhenden Deuterium-Kern der Masse $2m_N$.

Hinweis: Rechnen Sie in den Teilaufgaben 3.1 - 3.3 klassisch/nicht-relativistisch.



1. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Neutrons nach dem Stoß?
2. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Schwerpunktes des Gesamtsystems.
3. Welche Geschwindigkeit hat das Neutron im Schwerpunktsystem vor und nach dem Stoß?
4. Wie lautet der relativistische Ausdruck für den Impuls des Neutrons vor dem Stoß im Laborsystem (nur Formel)?

Lösung

1. Gegeben sind m_N und p_N, damit auch $v_N = \frac{p_N}{m_N}$. Gesucht ist v'_N.

   Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_N v_N^2 &= \frac{1}{2}m_N v_N'^2 + \frac{1}{2}2m_N v_0'^2 \\ v_N^2 &= v_N^2{}' + 2v_0^2{}' \end{aligned}$$

   [**1**]

   Weiter gilt mit dem Impulserhaltungssatz (kann vektoriell gemacht werden, ist aber nicht nötig)

$$\begin{aligned} m_N v_N &= m_N v'_N + 2m_N v'_0 \\ v_N &= v'_N + 2v'_0 \end{aligned}$$

   [**1**]

Weiter gilt

$$\begin{aligned} v_N^2 &= v_N'^2 + 2v_0'^2 = v_N'^2 + \frac{1}{2}(v_N - v_N')^2 \\ v_N^2 - v_N'^2 &= \frac{1}{2}(v_N - v_N')^2 \\ (v_N + v_N')(v_N - v_N') &= \frac{1}{2}(v_N - v_N')(v_N - v_N') \\ v_N + v_N' &= \frac{1}{2}(v_N - v_N') \\ v_N &= -3v_N' \\ v_N' &= -\frac{1}{3}v_N \end{aligned}$$

[2]

2. $(m_N + 2m_N)v_s = m_N v_N \Rightarrow v_s = \frac{v_N}{3}$

[1]

3.

$$\begin{aligned} v_{N,s} &= v_N - v_s = v_N - \frac{v_N}{3} = \frac{2}{3}v_N \\ v_{N,s} &= v_N' - v_s = -\frac{1}{3}v_N - \frac{v_N}{3} = -\frac{2}{3}v_N \end{aligned}$$

[1]

4.

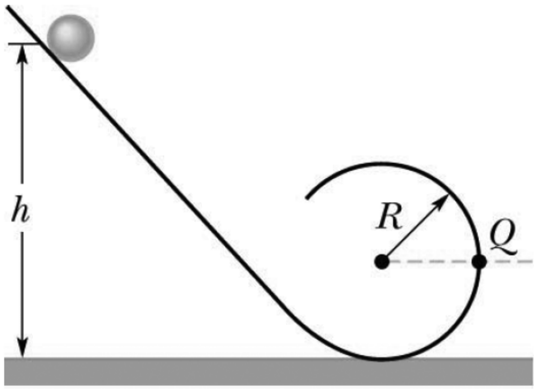
$$\begin{aligned} P_N &= m_N(v_N)v_N \\ &= \gamma m_{N,0}v_N = \frac{m_{N,0}v_N}{\sqrt{1 - \frac{v_N^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

[1]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Eine massive Kugel mit Masse m, Radius r und Trägheitsmoment $\theta = \frac{2}{5}mr^2$ **rollt** die in der Abbildung gezeigte Bahn hinunter. Die Kugel wird auf der Höhe h losgelassen.

1. Von welcher Höhe h muss die Kugel losgelassen werden, damit die Kugel am oberen Punkt des Loopings nicht die Bahn verlässt, also den Looping gerade noch schafft (man nehme $R \gg r$ an.)
2. Nun wird die Kugel von der Höhe $h = 6R$ losgelassen. Welche horizontale Kraftkomponente wirkt auf die Kugel im Punkt Q?



Lösung

Zuerst wird eine Formel für die Geschwindigkeit hergeleitet. Mit dem Energieerhaltungssatz ergibt sich für den höchsten Punkt des Loopings

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\theta\omega^2 + mg2R \tag{3}$$

[**1**]

Mit

$$\theta = \frac{2}{5}mr^2, \quad \omega = \frac{v}{r} \tag{4}$$

[**1**]

ergibt sich

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\left(\frac{v}{r}\right)^2 + 2mgR = \frac{7}{10}mv^2 + 2mgR \\ \Rightarrow gh &= \frac{7}{10}v^2 + 2gR \\ \Rightarrow v^2 &= \frac{10}{7}g(h-2R). \end{aligned}$$

[**1**]

1. $$F_{\text{Zentripetal}} = m\omega^2(R-r) = \frac{mv^2}{R-r} \tag{5}$$

   [**1**]

   Damit die Kugel auf der Bahn bleibt, muss gelten

$$mg = F_{\text{Zentripetal}} = \frac{mv^2}{R-r} = \frac{m\frac{10}{7}g(h-2R)}{R-r} \Rightarrow h = 2,7R - 0,7r \approx 2,7R \tag{6}$$

[**1**]

2. Energieerhaltung in Q liefert

$$mg(6R) = \frac{7}{10}mv^2 + mgR \Rightarrow v^2 = \frac{50gR}{7}$$
$$F_{\text{Zentripetal}} = \frac{mv^2}{R-r} = \frac{50mgR}{7(R-r)}, \quad R \gg r \Rightarrow F_{\text{Zentripetal}} \approx \frac{50}{7}mg$$

[2]

Hier noch eine etwas andere Art die Aufgabe zu lösen:

1.

$$\Delta E_{Pot} = \Delta E_{Kin} - \Delta E_{Rot}$$
$$mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

Höhenunterschied: $\Delta h = y$, Rollbedingung: $\omega = \frac{v}{r}$, Trägheitsmoment: $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{10gy}{7}}$$

Am Scheitelpunkt des Loopings gilt dann $y = h - 2R$ sowie

$$F_G = F_Z$$
$$mg = \frac{mv^2}{R} = \frac{10}{7}mg\frac{y}{R}$$
$$\Rightarrow y = \frac{10}{7}R = h - 2R$$
$$\Rightarrow h = \frac{27}{10}R$$

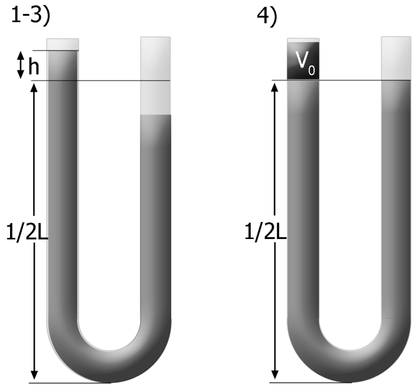
2. Wenn $h = 6R$ dann ist $y = 5R$ am Punkt Q. In horizontaler Richtung wirkt nur die Zentripetalkraft

$$F_Z = \frac{mv^2}{R} = \frac{10}{7}mg\frac{y}{R} = \frac{50}{7}mg \tag{7}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

In einem U-Rohr steht eine Flüssigkeitssäule. Ihre Gesamtlänge sei L, die Dichte der Flüssigkeit ρ und der Rohrquerschnitt A. Die Flüssigkeit bewegt sich reibungsfrei. Sie kann somit eine ungedämpfte Schwingung ausführen, wenn sie aus ihrer Ruhelage ausgelenkt wird. Die Biegung am unteren Ende des U-Rohres werde vernachlässigt.

1. Wie hängt die rücktreibende Kraft von der Höhe h des Flüssigkeitsstandes über der Ruhelage in einem der beiden Schenkel ab?
2. Wie groß ist die Kreisfrequenz ω der Schwingung?
3. Welche Länge l müsste ein Fadenpendel haben, um mit der gleichen Frequenz zu schwingen?



4. Jetzt befinde sich die Flüssigkeit in Ruhe. Es werde zum Zeitpunkt $t = 0$ auf einer Seite das zusätzliche Flüssigkeitsvolumen V_0 (gleiche Dichte ρ) eingefüllt. Die geschehe instantan und der Umfüllvorgang werde vernachlässigt. Lösen Sie Bewegungsgleichung für die neue Situation und die konkreten Randbedingungen der Situation.

Lösung

1.
$$F = -2g\rho Ah \tag{8}$$
[1]

2.
$$\begin{aligned} F &= M\ddot{h} = AL\rho\ddot{h} = -2g\rho Ah \\ \ddot{h} &= -\frac{2gh}{L} = -\omega^2 h \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{2g}{L}} \end{aligned}$$
[2]

3.
$$l = \frac{L}{2} \tag{9}$$
[1]

Hinweis: Bei einem Fadenpendel gilt

$$\begin{aligned} F_\alpha &= F_g \cdot \sin\alpha \approx F_g \cdot \alpha = mg\alpha \\ m \cdot \ddot{\alpha} \cdot l^2 &= m\dot{v}l = \dot{L} = M = F_\alpha l \\ \Rightarrow \ddot{\alpha}l &= g \cdot \alpha \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow l = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

4. Die Bewegungsgleichung bleibt gleich bis auf die veränderte Masse durch das hinzugekommene Volumen:

$$F = M\ddot{h} = (AL + V_0)\rho\ddot{h} = -2g\rho A h$$
$$\ddot{h} = -\frac{2g}{L + \frac{V_0}{A}} h = -\omega^2 h$$

[**1**]

Ansatz:

$$h(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{10}$$

mit den Randbedingungen $h(0) = \frac{1}{2}\frac{V_0}{A}$ und $\dot{h}(0) = 0$ folgt die Trajektorie:

[**1**]

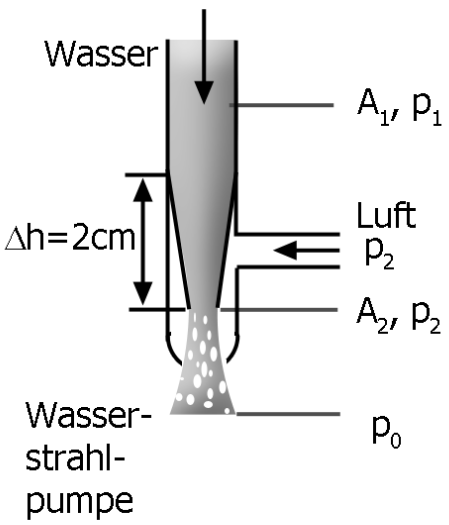
$$h(t) = \frac{V_0}{2A}\cos\left(\sqrt{\frac{2g}{L + \frac{V_0}{A}}} \cdot t\right) \tag{11}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Das Wasser einer Wasserstrahlpumpe hat am Eingang einen Druck von $p_1 = 2$ bar und eine Geschwindigkeit von 2m/s. Der Rohrquerschnitt verringert sich auf einer Strecke von nur 2cm von A_1 auf $A_2 = \frac{A_1}{9}$. Außen gilt $p_0 = 1$ bar.

1. Stellen Sie eine Formel für den Druck auf.
2. Nähern Sie die Formel wegen des geringen Höhenunterschiedes an und bestimmen Sie einen Zahlenwert für den Unterdruck bei p_2. Zeigen Sie durch Rechnung, dass der Druck auf Grund des Höhenunterschiedes nicht relevant ist und deshalb die Näherung gerechtfertigt ist.



Lösung

1. Mit der Kontinuitätsgleichung und $A_1 v_1 \rho_1 = A_2 v_2 \rho_2$, mit $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ und $\frac{A_1}{A_2} = 9$ gilt

[**1**]

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = 9 \cdot 2\text{m/s} = 18\text{m/s} \tag{12}$$

[**1**]

Mit der Bernoulli-Gleichung gilt weiter

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$
$$\Rightarrow p_2 = p_1 + \rho g (h_1 - h_2) + \frac{1}{2}\rho (v_1^2 - v_2^2)$$

[**1**]

2.

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho g (h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) \\ &\cong p_1 - \frac{1}{2}\rho (v_2^2 - v_1^2) \\ &= 2\text{bar} - \frac{1}{2} 10^3 \text{kg/m}^3 (324 - 4)\text{m}^2/\text{s}^2 \\ &= (2 - 500 \cdot 320 \cdot 10^{-5})\text{bar} = 0,4\text{bar} < 1\text{bar} = p_0 = 10^5\text{Pa} \end{aligned}$$

[**2**]

Als Unterdruck können $(1 - 0,4)\text{bar} = 0,6\text{bar}$ erzeugt werden.

Überprüfung der Näherungsannahme:

$$\rho g \Delta h \ll \frac{1}{2}\rho \Delta(v^2) \Leftrightarrow 10\text{m/s}^2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{m} \ll \frac{1}{2} \cdot 320\text{m}^2/\text{s}^2 \Leftrightarrow 0,2 \ll 160 \checkmark \widehat{=} 0,002 bar \ll 1,6 bar \tag{13}$$

[**1**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Eine Schallwelle der Frequenz $f_1 = 677Hz$ breitet sich in Luft mit der Schallgeschwindigkeit $c = 340\frac{m}{s}$ aus:

$$\xi_1 = \xi_m \cos\left(2\pi\left(f_1 t - \frac{x}{\lambda_1}\right)\right) \tag{14}$$

In gleicher Ausbreitungsrichtung überlagert sich ihr eine zweite Schallwelle mit geringfügig höherer Frequenz $f_2 = f_1 + \Delta f, \Delta f = 6,8Hz$, aber gleicher Amplitude:

$$\xi_2 = \xi_m \cos\left(2\pi\left(f_2 t - \frac{x}{\lambda_2}\right)\right) \tag{15}$$

1. Welche resultierende Wellenfunktion $\xi(t,x) = \xi_1 + \xi_2$ ergibt sich?

   (*Hinweis:* $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.)

2. Wie groß ist die Frequenz des sich aus der Überlagerung ergebenden Tons sowie die hörbare Periodendauer seines An- und Abschwellens? In welche Richtung breitet(en) sich die Welle(n) aus?

Lösung

Überlagerung zweier Schallwellen mit Ausbreitung in gleicher Richtung und unterschiedlicher Frequenz:

$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) \tag{16}$$

mit

$$\xi_1 = \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 t - \frac{x}{\lambda_1}\right)\right]$$
$$\xi_2 = \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_2 t - \frac{x}{\lambda_2}\right)\right]$$

1. $$\xi(x,t) = \xi_m \cos\left[2\pi f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] + \xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 + \Delta f\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{17}$$

   [**1**]

   mit $\lambda = \frac{c}{f}$ und $f_2 = f_1 + \Delta f$.

   Aus dem Additionstheorem folgt

   $$\xi(x,t) = 2\xi_m \cos\left[2\pi\left(f_1 + \frac{\Delta f}{2}\right)\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\cos\left[2\pi\frac{\Delta f}{2}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \tag{18}$$

   d.h. es resultiert eine Schwebung

   [**2**]

2. Frequenz des sich aus der Überlagerung ergebenden Tons (schnelle Frequenz):

   $$f = f_1 + \frac{\Delta f}{2} = 680,4Hz \tag{19}$$

   [**1**]

   Periodendauer des An- und Abschwellens des Tons:

   $$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\Delta f}{2}} = \frac{1}{\Delta f} = 0,15s \tag{20}$$

   [**1**]

   Die Wellen breiten sich beide nach rechts (in positive x-Richtung) aus, da ω und k in beiden Argumenten ein unterschiedliches Vorzeichen haben.

   [**1**]