Prof. Dr. P. Rentrop, Dr. K.-D. Reinsch
Lehrstuhl M2 für Numerische Mathematik
Zentrum Mathematik, TU München

WS 2006/07
Probeklausur

Höhere Mathematik II für Physik (Analysis 1)

Unterstützung im Internet unter *http://www-hm.ma.tum.de/ws0607/ph1/*

Probeklausur als Hausaufgabe zur 9. Übung

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel sind **nicht** zulässig.

Zum Bestehen bräuchten Sie 17 von 40 Punkten.

Aufgabe 1 (ca. 12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4\,|\,x-1\,|^3 + |\,x\,|^3\,, -\infty < x < \infty\,.$

a) Man zeige : $f(x) > 0$ für alle x. Welchen Werten strebt $f(x)$ zu, falls $x \longrightarrow \pm\infty$?

b) Man berechne $f'(x)$.

c) Man zeige: $f''(x) = \begin{cases} -30\,x + 24 & , x \le 0 \\ -18\,x + 24 & , 0 < x \le 1 \\ 30\,x - 24 & , x > 1 \end{cases}$.

d) Man zeige, dass $f(x)$ für alle x zweimal stetig differenzierbar ist.

e) Man bestimme Extrema sowie (mögliche) Wendepunkte von $f(x)$.

d) Man skizziere sorgfältig den Graphen der Funktion

$$g(x) = \frac{1}{4\,|\,x-1\,|^3 + |\,x\,|^3}\,, \quad -\infty < x < \infty\,.$$

Aufgabe 2 (ca. 5 Punkte)

Man beweise durch vollständige Induktion $(n = 1, 2, 3, \dots)$:

$$\sin(2\,\alpha) + \sin(4\,\alpha) + \ldots + \sin(2\,n\,\alpha) = \frac{\cos(\alpha) - \cos\big((2n+1)\,\alpha\big)}{2\,\sin(\alpha)} \text{ für } \alpha \ne k\,\pi,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Aufgabe 3 (ca. 6 Punkte)

Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_1 = 2\,,\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\,a_k + \frac{1}{a_k}\,,\ k \in \mathbb{N}\,.$
Man zeige:

a) $a^* = \sqrt{2}$ ist Fixpunkt der Rekursion, d.h. $a^* = \frac{1}{2}\,a^* + \frac{1}{a^*}\,.$

b) $a^* < a_k \le 2\,,\ k \in \mathbb{N}$

c) Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

d) a^* ist der Grenzwert der Folge.

Aufgabe 4 (ca. 17 Punkte)

Es sind nur die Ergebnisse anzugeben!

a) Man gebe die Werte an von:

a1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^k}+\frac{(-1)^k}{3^k}\right)$,

a2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{101}\binom{101}{k}(-1)^k$.

b) Man gebe Real- und Imaginärteil, Betrag und Phase an von

b1) $\displaystyle\left(\frac{2\,\mathrm{i}}{1-i}\right)^9$,

b2) $\displaystyle\sqrt{\frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}}$.

c) Man gebe die Ableitungen – so weit vereinfacht wie möglich – an von

c1) $\displaystyle\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+\arcsin\frac{x}{2}$

c2) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$.

d) Man gebe die folgenden Grenzwerte an:

d1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\ln\left(2\,x^2+1\right)-2\,\ln\left(2\,x-\sqrt{x^2+1}\right)\right)$,

d2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\,\tan x}{1-\cos x}$.

Abgabe Dienstag, 09.01.07 bis 15:00 Uhr in den Briefkasten im Untergeschoß FMI