Nachklausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Simmel

Sommersemester 2012

25. September 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein kugelförmiger Wassertropfen ist mit der Ladung $q = 30\text{pC}$ geladen. Das elektrische Potential auf seiner Oberfläche ist $V = 500\text{V}$ im Vergleich zum Unendlichen.

(a) Wie groß ist der Radius r des Tropfens?

(b) Nun vereinigt sich ein zweites Tröpfchen (ebenfalls mit Radius r und gleicher Ladung q) mit dem ersten Tropfen. Wie groß ist der Radius des neuen Tropfens und wie groß ist dessen elektrisches Potential an der Oberfläche?

(c) Wie groß war die abstoßende Kraft zwischen den beiden Tropfen unmittelbar vor der Berührung (Abstand $2r$)?

Hinweis: Nehmen Sie vereinfacht an, dass sich auf dem Tropfen keine Ladungen umverteilen.

(d) Nimmt man an, dass sich beide Tröpfchen mit der gleichen Geschwindigkeit v aufeinander zu bewegen:

Welche kinetische Energie muss **jedes** der Tröpfchen im Abstand $a = 1\text{m}$ bereits haben, damit sie sich vereinigen können?

Hinweis: Nehmen Sie vereinfacht an, dass sich auf dem Tropfen keine Ladungen umverteilen.

Lösung

(a)

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \Rightarrow r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{V} = 0,54\text{mm} \tag{1}$$

[**1**]

Das Volumen verdoppelt sich, also

$$r_2 = r\sqrt[3]{2} = 0,68\text{mm}$$
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{r\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2^{\frac{2}{3}}q}{r} = 2^{\frac{2}{3}}V = 794\text{V}$$

(b) **[1,5]**

(c) Die abstoßende Kraft im Abstand $2r$ ist

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2r)^2} = 7,0\cdot 10^{-6}\text{N} \tag{2}$$

[1]

(d) Unmittelbar vor der Berührung im Abstand $2r$ beträgt die gesamte kinetische Energie:

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{\text{pot}}(r) - E_{\text{pot}}(a) \\ &= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{a}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a-2r}{2ar} \end{aligned}$$

bzw. für ein Tröpfchen

$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2}E_{\text{kin}} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{a-2r}{2ar} = 3,74\cdot 10^{-9}\text{J} \tag{3}$$

[1,5]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein Metalldraht mit der Masse m und dem Widerstand R liegt auf zwei parallelen leitenden Schienen mit dem Abstand l. Der Draht kann auf den Schienen reibungsfrei gleiten. Senkrecht zur Schienenebene liegt ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$.

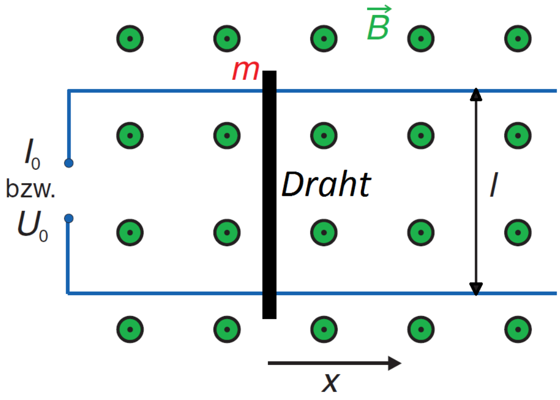
(a) zwischen beiden Schienen liefert ein Stromgenerator einen konstanten Strom I_0. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v der Metalldrahts als Funktion der Zeit, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$ ruht.

(b) Welchen Endwert erreicht die Geschwindigkeit des Metalldrahts, wenn der Stromgenerator durch eine Batterie mit konstanter Spannung U_0 ersetzt wird?

Lösung

(a) Es wirkt eine Lorentzkraft:

$$\begin{aligned} \vec{F_L} &= l\vec{I}\times\vec{B}, \vec{I}\perp\vec{B} \\ F_L &= lIB = m\ddot{x} \\ \Rightarrow \ddot{x} &= \frac{lIB}{m} \\ \Rightarrow \dot{x} &= v(t) = \frac{lIB}{m}t \end{aligned}$$



[**2**]

(b) Mit den Formeln zur Induktion:

$$U_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = -Bl\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Blv$$
$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_0 - Blv(t)}{R}$$
$$F_L = lIB = l\frac{U_0 - Blv(t)}{R}B = m\ddot{x}$$

[**2**]

Damit ist $\ddot{x} + \frac{l^2B^2}{Rm}\dot{x} - \frac{lbU_0}{Rm} = 0$ die Bewegungsgleichung des Systems. Dies hat einen stationären Zustand $\ddot{x}(t) = a = 0$. Damit ergibt sich

$$\frac{l^2B^2}{Rm}\dot{x} - \frac{lbU_0}{Rm} = 0 \Rightarrow \dot{x} = v_{\text{End}} = \frac{U_0}{lB} \tag{4}$$

[**1**]

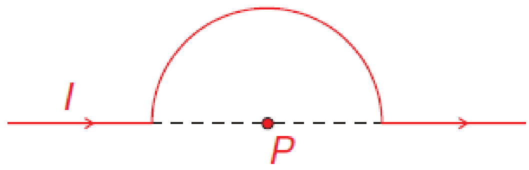
Dies geht auch einfacher:

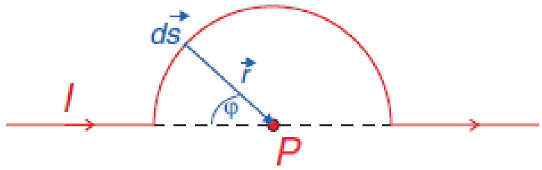
Für den stationären Zustand gilt $U_{\text{ind}} = -U_0 = -Blv_{\text{End}}$, woraus folgt, dass $v_{\text{End}} = \frac{U_0}{lB}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein unendlich langer dünner Draht ist so gebogen, dass ein Halbkreis mit zwei geraden Enden entsteht. Durch den Draht fließt der Strom I.

Wie groß ist das Magnetfeld $\vec{B}$ im Mittelpunkt P des Halbkreises und wie bestimmen Sie es?





Lösung

Rechnung in Zylinderkoordinaten mit z-Achse durch P senkrecht zur Halbkreisebene. Biot-Savart liefert, dass

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

[**1**]

und damit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Halbkreis}} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} + \underbrace{\frac{mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{Geraden}} \frac{\mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}}_{=0,\, \mathrm{d}\vec{s} \| \vec{r} \Leftrightarrow \mathrm{d}\vec{s} \times \vec{r} = 0} \tag{6}$$

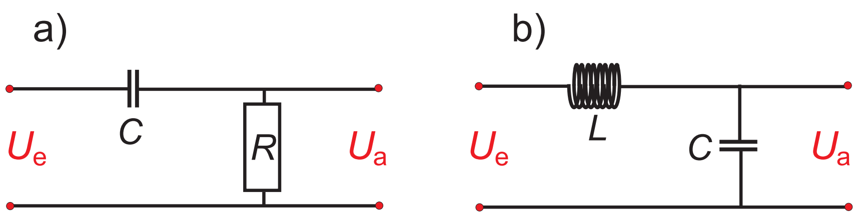
[**2**]

Mit den Substitutionen $\vec{r} = -r\vec{e_r}$ und $\mathrm{d}\vec{s} = r\mathrm{d}\varphi\vec{e_\varphi}$ erhält man schließlich

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi -\frac{r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}r \cdot r}{r^3} \underbrace{(\vec{e_\varphi} \times \vec{e_r})}_{=-\vec{e_z}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r} \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \cdot \vec{e_z} = \frac{\mu_0 I}{4r} \vec{e_z} \tag{7}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (9 Punkte)

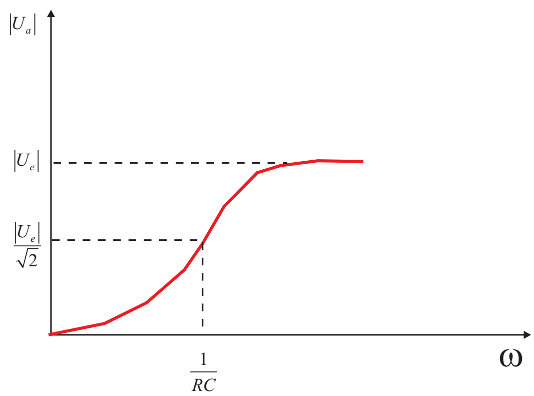


Die in den Abbildungen a) und b) dargestellten Schaltungen nennt man Vierpole.

Berechnen Sie für diese die Spannung am Ausgang $U_a \cdot e^{i\omega t}$ als Funktion einer sinusförmigen Eingangsspannung $U_e \cdot e^{i\omega t}$.

Skizzieren Sie $U_a(\omega)$ für a) und b) und betrachten Sie $U_a(\omega)$ für die Spezialfälle $\omega \to 0$, $\omega \to \infty$ und $\omega \to$ Zeitkonstante des jeweiligen Vierpols.

Lösung



a) [**1**]

Es ist für die linke und rechte Seite jeweils

$$Z_e^{\text{links}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C} + R$$
$$Z_e^{\text{rechts}}(\omega) = R$$

[**1**]

Es ist $I_e = I_a$ und damit

$$\frac{U_e}{\frac{1}{i\omega C} + R} = \frac{U_a}{R} \tag{8}$$

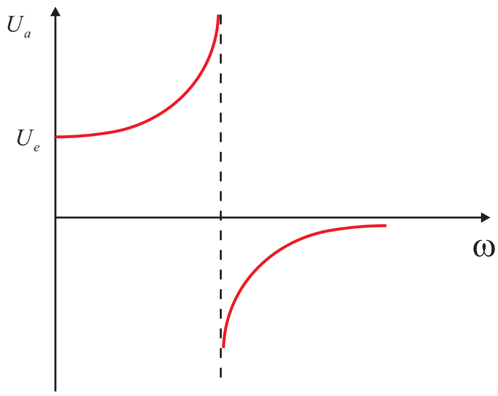
womit folgt, dass

$$U_a = \frac{U_e}{\frac{1}{i\omega C} + R} R$$
$$= U_e \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega CR}}$$

[**1**]

Für die Spezialfälle gilt

$$\omega \to 0: \quad U_a \to 0 \tag{9}$$
$$\omega \to \infty: \quad U_a \to U_e \tag{10}$$
$$\omega \to \frac{1}{RC}: \quad U_a \to \tfrac{1}{1-i} U_e (\text{bzw. Effektivwert} |U_a| = |U_e| \tfrac{1}{\sqrt{2}}) \tag{11}$$



[1,5]

b) **[1]**

Es ist für die linke und rechte Seite jeweils

$$Z_e^{\text{links}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L$$
$$Z_e^{\text{rechts}}(\omega) = \frac{1}{i\omega C}$$

[1]

Es ist $I_e = I_a$ und damit

$$\frac{U_e}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L} = \frac{U_a}{\frac{1}{i\omega C}} \tag{12}$$

womit folgt, dass

$$U_a = \frac{U_e}{\frac{1}{i\omega C} + i\omega L}\frac{1}{i\omega C}$$
$$= U_e\frac{1}{1 - \omega^2 LC}$$

[1]

Für die Spezialfälle gilt

$$\omega \to 0 : \quad U_a \to U_e \tag{13}$$
$$\omega \to \infty : \quad U_a \to 0 \tag{14}$$
$$\omega \to \frac{1}{\sqrt{RC}} : \quad U_a \to \infty \tag{15}$$

[1,5]

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Eine Kanne Limonade (2L) wurde den ganzen Tag auf dem Gartentisch vergessen (33°C Außentemperatur im Garten). Man gießt $0,24$kg Limonade in eine isolierte Tasse und gibt 2 Eiswürfel (Temperatur 0°C) à 25g hinzu.

(a) Angenommen, es werde keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht, welche Endtemperatur erreicht die Limonade?

(b) Was ist die Endtemperatur, wenn man sechs anstatt zwei Eiswürfel in die Limonade gibt?

Lösung

(a) Die durch die Limonade absorbierte Wärme ist in Abhängigkeit von der Endtemperatur:

$$Q_{\text{aus}} = m_{Limo}c|\Delta T| = m_{Limo}c(T_{\text{Limo}} - T_{\text{End}}) \tag{16}$$

[1]

Nun ist die durch die Eiswürfel absorbierte Wärme und das entstehende Wasser:

$$Q_{\text{in}} = m_{\text{Eis}}L_{\text{Schmelz}} + m_{\text{Eis}}c\Delta T_{\text{Wasser}} = m_{\text{Eis}}L_{\text{Schmelz}} + m_{\text{Eis}}c(T_{\text{End}} - T_{\text{Eiswasser}}) \tag{17}$$

[1]

Da sie diese beiden Wärmemenge entsprechen müssen, gilt

$$\begin{aligned} m_{Limo}c(T_{\text{Limo}} - T_{\text{End}}) &= m_{\text{Eis}}L_{\text{Schmelz}} + m_{\text{Eis}}c(T_{\text{End}} - T_{\text{Eiswasser}}) \\ \Rightarrow T_{\text{End}} &= \frac{(m_{\text{Eis}}T_{\text{Eiswasser}} + m_{Limo}T_{\text{Limo}})c + m_{\text{Eis}}L_{\text{Schmelz}}}{(m_{Limo} + m_{\text{Eis}})c} \\ &= \frac{(0,050 \cdot 273,15 + 0,24 \cdot 306,15) \cdot 4,18 - 0,050 \cdot 333,5}{0,29 \cdot 4,18} \\ &= 286,7\text{K} \\ &= 14°\text{C} \end{aligned}$$

[1]

(b) Mit sechs Eiswürfeln $m_{Eis} = 0,15$kg und der Formel aus Aufgabenteil a) gerechnet, ergibt sich eine finale Temperatur von $-10,4$°C. Dies ist aber nicht möglich, da 0°C kaltes Eis nie eine Flüssigkeit auf eine niedrigere Temperatur kühlen kann als seine eigene. Daher muss angenommen werden, dass nicht das gesamte Eis schmilzt und sich bei sechs Eiswürfels eine finale Temperatur von 0°C ergibt.

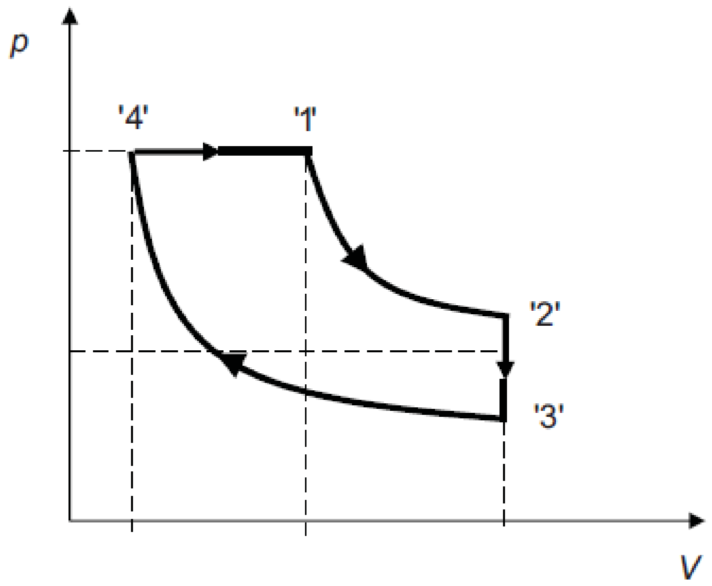
[2]

Aufgabe 6 (17 Punkte)

Eine Wärmekraftmaschine arbeitet nach einem thermodynamischen Kreisprozess, der aus einer Isobaren, aus einer isochoren und zwei isothermen Zustandsänderungen besteht.

Die Wärmekraftmaschine arbeitet mit der Stoffmenge $n = 10$mol eines idealen zweiatomigen Gases.

Die Höchstwerte von Druck, Temperatur und Volumen in diesem Kreisprozess sind $p_{\max} = 30\text{Bar}$, $T_{\max} = 500\text{K}$ und $V_{\max} = 72\text{L}$.



(a) Welche Volumenänderungsarbeit W verrichtet die Maschine bei der isothermen Expansion?

(b) Der Minimaldruck im Kreisprozess beträgt $p_{\min} = 3,84\text{bar}$.

Bei welcher der vier Zustandsänderungen des Kreisprozesses nimmt die Innere Energie U des Gases zu? Bestimmen Sie diese Zunahme.

(c) Berechnen Sie den Minimalwert $V_{\min}$ des vom Gas eingenommenen Volumens.

(d) Bei welcher/welchen Zustandsänderungen des Kreisprozesses wird/werden Wärme(n) umgesetzt? Bestimmen Sie diese Wärme(n) und geben Sie an, ob Sie dem System zugeführt oder vom System abgegeben wurde(n).

(e) Berechnen Sie die abgegebene mechanische Nettoarbeit der Maschine W_n für einen Umlauf. Welchen Wirkungsgrad $\eta_{\text{th, real}}$ erreicht diese Wärmekraftmaschine?

Lösung

(a) Das Volumen V_1 erhält man aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases für den Zustand *1.*

$$pV = nRT_1 \tag{18}$$

zu

$$V_1 = \frac{nRT_{\max}}{p_{\max}} = \frac{10\text{mol} \cdot 8,31\text{Jmol}^{-1}K^{-1} \cdot 500\text{K}}{30 \cdot 10^5\text{Nm}^{-2}} = 13,9\text{dm}^3 \tag{19}$$

[**1**]

Die abgegebene Arbeit für eine isotherme Expansion ist

$$W_{12} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \tag{20}$$

[1]

also

$$\begin{aligned} W_{12} &= -nRT_{\max} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= -10\text{mol} \cdot 8{,}31\text{mol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 500\text{K} \cdot \ln\left(\frac{72\text{L}}{13{,}9\text{L}}\right) \\ &= -68{,}4\text{kJ} \end{aligned}$$

[1]

Es muss nun eine betragsmäßig gleich große Wärme dem System zugeführt werden, damit sich die innere Energie nicht ändert, also

$$Q_{12} = -W_{12} = 68{,}4\text{kJ} \tag{21}$$

(b) Die innere Energie U eines idealen Gases

- bleibt bei der isothermen Expansion $1 \to 2$ konstant.
- nimmt bei der isochoren Abkühlung $2 \to 3$ ab.
- bleibt bei der isothermen Kompression $3 \to 4$ konstant.
- nimmt bei der Isobaren Expansion $4 \to 1$ zu.

[2]

Diese Zunahme der Inneren Energie bei der Isobaren Expansion $4 \to 1$ ist

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_{\text{mv}}(T_1 - T_4) \\ &= nC_{\text{mv}}(T_{\max} - T_4) \end{aligned}$$

Die Zustandsänderung $3 \to 4$ ist eine isotherme Zustandsänderung, also gilt $T_3 = T_4$.

Aus dem Teilprozess $2 \to 3$ kann $T_3 = T_4$ ermittelt werden. Es gilt $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3}$, also

$$\frac{p_2}{T_{\max}} = \frac{p_{\min}}{T_3} \tag{22}$$

[1]

Damit wird $T_3 = \frac{p_{\min}}{p_2} T_{\max}$. Aus dem Teilprozess $1 \to 2$ kann schließlich p_2 ermittelt werden: Es gilt $p_2 V_2 = p_1 V_1$ oder gleichbedeutend

$$p_2 V_{\max} = p_{\max} V_1 \tag{23}$$

Damit ist

$$p_2 = \frac{V_1}{V_{\max}} p_{\max} \tag{24}$$

p_2 eingesetzt in die Beziehung für T_3 gibt

$$T_3 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} \frac{V_{\max}}{V_1} T_{\max} = \frac{3{,}84\text{bar}}{30\text{bar}} \frac{72\text{L}}{13{,}9\text{L}} 500\text{K} = 332\text{K} = T_4 \tag{25}$$

[1]

(c) Das Volumen V_{min} gehört zum Zustand 4 und kann aus dem Teilprozess $4 \rightarrow 1$ ermittelt werden. Es gilt $\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_1}{T_1}$ oder

$$\frac{V_{\text{min}}}{T_4} = \frac{V_1}{T_{\text{max}}} \tag{26}$$

[1]

damit wird

$$\begin{aligned} V_{\text{min}} &= \frac{T_4}{T_{\text{max}}} \cdot V_1 \\ &= \frac{332\text{K}}{500\text{K}} \cdot 13,9\text{L} \\ &= 9,2\text{L} \end{aligned}$$

[1]

(d) Für die isotherme Expansion $1 \rightarrow 2$ ändert sich die Energie nicht, deshalb ist die zugeführte Wärme $Q_{12}(> 0)$ betragsmäßig gleich der abgegebenen mechanischen Arbeit $W_{12}(< 0)$.

1 → 2 Es ist $Q_{12} = -W_{12} = 68,4\text{kJ}$.

[1,5]

2 → 3 Es ist keine Volumenarbeit verrichtet, also $W_{23} = 0$. Die abgegebene Wärme ist gleich der Absenkung der Inneren Energie

$$\begin{aligned} Q_{23} &= -\Delta U \\ &= nC_{\text{mv}}(T_3 - T_2) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &= nC_{\text{mv}}(T_3 - T_{\text{max}}) \\ &= 10\text{mol} \cdot 20,46\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (332 - 500)\text{K} \\ &= -34,7\text{kJ} \end{aligned}$$

[1,5]

3 → 4 Die Innere Energie hängt nur von der absoluten Temperatur ab, bei konstanter Temperatur ändert sich die Innere Energie nicht. Daher gilt

$$Q_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right)$$

oder

$$\begin{aligned} &= nRT_3 \ln\left(\frac{V_{\text{min}}}{V_{\text{max}}}\right) \\ &= 10\text{mol} \cdot 8,31\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 332\text{K} \cdot \ln\left(\frac{9,23\text{L}}{72\text{L}}\right) \\ &= -56,9\text{kJ} \end{aligned}$$

[1,5]

4 → 1 Es ist $Q_{41} = \Delta U - W_{41}$. Die umgesetzte Arbeit wird repräsentiert durch die Fläche unter der $p(V)$-Kurve. Für eine Isobare ist die die Fläche eines Rechtecks. Zu berücksichtigen ist dabei die Vorzeichenkonvention.

$$W_{41} = -p_4(V_1 - V_4) \tag{27}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} Q_{41} &= \Delta U_{(41)} - (-p_{\max}(V_1 - V_{\min})) \\ &= 34,7\text{kJ} - (-30 \cdot 10^5 \text{Nm}^{-2} \cdot (13,9 - 9,2) \cdot 10^{-3}\text{m}^3) \\ &= (34,7 + 13,9)\text{kJ} \\ &= 48,6\text{kJ} \end{aligned}$$

[1,5]

(e) Die insgesamt in einem Zyklus umgesetzte Arbeit ist mit den Ergebnissen von Teilaufgabe 4

$$\begin{aligned} W_n &= W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \\ &= (-68,4 + 0 + 56,9 - 13,9)\text{kJ} \\ &= -25,4\text{kJ} \end{aligned}$$

Die insgesamt zugeführte Wärme ist

$$Q_{\text{zu}} = Q_{41} + Q_{12} = (48,6 + 68,4)\text{kJ} \\ = 117,0\text{kJ}$$

[1]

Der Wirkungsgrad wird damit

$$\begin{aligned} \eta_{\text{th, real}} &= \frac{|W_n|}{Q_{\text{zu}}} = \frac{25,4\text{kJ}}{117,0\text{kJ}} \\ &= 0,22 \end{aligned}$$

[1]