1. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger

Wintersemester 2018/19

4. Dezember 2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sie fahren mit $40,0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ auf eine Kreuzung zu. Die Ampel an der Kreuzung 65m vor Ihnen (vor der Stoßstange) schaltet auf Gelb. Die Ampel wird genau $5,0$s gelb bleiben, bevor sie auf Rot schaltet. Sie brauchen $1,0$s, um nachzudenken. Dann beschleunigen Sie das Auto gleichförmig. Sie schaffen es gerade, mit dem gesamten $4,5$m langen Auto über die $15,0$m breite Kreuzung zu fahren, bevor die Ampel rot wird. Kurze Zeit später werden Sie wegen überhöhter Geschwindigkeit angehalten. Berechnen Sie ihre Höchstgeschwindigkeit und entscheiden Sie ob Sie zu schnell waren, wenn Sie davon ausgehen, dass eine Höchstgeschwindigkeit von $50,0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ gilt.

Lösung

Zwischen dem Zeitpunkt, zu dem die Ampel auf Gelb schaltet, und dem Zeitpunkt, zu dem die hintere Stoßstange des Autos die Kreuzung verlässt, legt das Auto die Strecke

$$\Delta s = 65\text{m} + 15\text{m} + 4,5\text{m} = 84,5\text{m} \tag{1}$$

zurück.

[1]

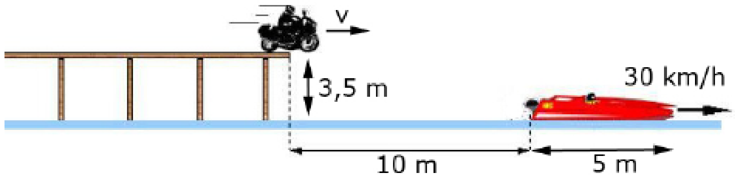
$$\Delta s = v_1 t + \frac{1}{2} a \left(t - 1\text{s}\right)^2 = 84,5\text{m} \Longrightarrow a = 2\frac{\left(\Delta s - v_1 t\right)}{\left(t - 1\text{s}\right)^2} = 3,62\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

[3]

$$v_{end} = v_1 + a(t - 1\text{s}) = 25,6\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

[2]

Das sind umgerechnet $92\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sie sollten Ihren Bußgeldbescheid also besser nicht anfechten.



Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Gegenspieler von James Bond versuchen mit einem Schnellboot zu entkommen. 007 rast mit seinem Motorrad mit der Geschwindigkeit v über den Landungssteg, der 3,5 m über der Wasseroberfläche verläuft. Seine Absicht ist es, nach einem freien Flug auf dem feindlichen 5 m langen Boot zu landen. Die Abbildung zeigt den Moment des Absprungs. Das Boot bewegt sich mit 30 km/h nach rechts. Berechnen Sie, in welchem **Geschwindigkeitsbereich** sich James Bond beim Absprung seines Motorrads bewegen muss, damit er (mit der Mitte seines Motorrads) auf das Boot trifft.

Lösung

Die Entfernung des Bootes vom Landungssteg zur Absprungzeit $t = 0$ s beträgt $e = 10$ m, die Länge des Bootes $l = 5$ m.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei die Absprungkante des Steges. Dann gilt für das Niveau der Landefläche:

Zunächst wird die Flugzeit t_0 mit der Gleichung für die Vertikalbewegung (Fall) ermittelt:

$$y_0 = -\frac{1}{2}gt^2$$
$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}$$

[**1**]

Für den Weg s_B, den das Boot während dieser Zeit zurücklegt, gilt:

$$s_b = v_b \cdot t_0$$

Somit gilt für den minimalen horizontalen Flugweg:

$$s_{min} = e + v_B \cdot t_0$$

In diesem Fall trifft der Mittelpunkt des Motorrads gerade noch am Heck des Bootes auf. Für den maximalen horizontalen Flugweg gilt:

$$s_{max} = e + l + v_B \cdot t_0$$

[**2**]

In diesem Fall landet 007 auf der vorderen Spitze des Bootes. Für die konstante horizontale Geschwindigkeit gilt damit, wenn man die Geschwindigkeit des Bootes $v_B = 30$ km/h $= 8,33$ m/s verwendet:

$$v_{max} = \frac{s_{max}}{t_0} = \frac{e + l + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e + l}{t_0} + v_B = \frac{e + l}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 26,11 \text{ m/s} = 94 \text{ km/h}$$

$$v_{min} = \frac{s_{min}}{t_0} = \frac{e + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e}{t_0} + v_B = \frac{e}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 20,28 \text{ m/s} = 73 \text{ km/h}$$

Die Geschwindigkeit von James Bond muss zwischen 73 km/h und 94 km/h liegen.

[**3**]

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Ein Stein der Masse $m = 0,2$kg wird an einer $0,5$m langen Schnur mit 2 Umdrehungen pro Sekunde in $h = 2$m Höhe (Aufhängungspunkt) in einer horizontalen Kreisbahn herumgeschleudert. Die **Schwerkraft** ist zu vernachlässigen.

(a) Wie groß ist die kinetische Energie des Steins?

(b) Welche Kraft muss man aufbringen, um den Stein an der Schnur zu halten?

(c) Bei welcher Umdrehungsfrequenz würde die Schnur reißen, wenn sie 100N aushält bevor sie reißt?

(d) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten drei Teilaufgaben bei Berücksichtigung der Schwerkraft? Und wie weit fliegt der Stein, wenn die Schnur reißt? (12 Punkte)

Hinweis zu (d): Bestimmen Sie die Änderung des Radius der Kreisbahn.

Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 && (2)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 && (3)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\frac{4\pi^2}{T^2} && (4)\\ &= \frac{2}{5}\pi^2\frac{\text{m}^2\text{kg}}{\text{s}^2} && (5)\\ &= 3,95\text{J} && (6) \end{aligned}$$

[**2**]

(b) Es gilt für F_z die Kraft, die aufgebracht werden muss

$$\begin{aligned} F_z &= mr\omega^2 && (7)\\ &= \frac{8}{5}\pi^2\frac{\mathrm{mkg}}{\mathrm{s}^2} && (8)\\ &= 15,79\mathrm{N} && (9)\end{aligned}$$

[**2**]

(c) Es gilt für ν die Umdrehungsfrequenz, bei der die Schnur reißt

$$\begin{aligned} 100\mathrm{N} &= mr\omega^2 = 4\pi^2 mr\nu^2 && (10)\\ \Leftrightarrow \nu &= \sqrt{\frac{100\mathrm{N}}{0,2\mathrm{kg}\pi^2 0,5\mathrm{m}}} = 5\mathrm{Hz} && (11)\end{aligned}$$

[**2**]

(d) Die Kreisbahn ist immer noch in der Horizontalen, nur der Radius verringert sich, da die Schwerkraft $\vec{F}_g$ den Stein nach unten zieht: Die Schnur bildet einen Winkel α mit der Horizontalen. Der neue Radius der Kreisbahn r' ergibt sich aus den beiden Beziehungen im rechtwinkligen Kräftedreieck, denn damit gilt $\tan\alpha = {}^{F_g}/_{F_z}$ und $\cos\alpha = {}^{r'}/_{r}$. Es kann eingesetzt werden

$$\tan\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r'} = \frac{mg}{m\omega^2 r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (12)$$

was $\sin\alpha = {}^{g}/_{(\omega^2 r)}$ liefert. Damit gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin\frac{g}{\omega^2 r} && (13)\\ &= 7,1^\circ && (14)\end{aligned}$$

[**2**]

Was ergibt, dass $r' = r\sqrt{1-\frac{m^2g^2}{F_{Ges}^2}} = 0,496\mathrm{m}$. Damit ist die kinetische Energie

$$\begin{aligned} E'_{\mathrm{kin}} &= \frac{1}{2}mr'^2\omega^2 && (15)\\ &= \frac{1}{2}mr'^2\frac{4\pi^2}{T^2} && (16)\\ &= \frac{8}{5}(0,496)^2\pi^2\mathrm{J} && (17)\\ &= 3,89\mathrm{J} && (18)\end{aligned}$$

[**2**]

$$\cos\alpha = \frac{r'}{r} = \frac{F_{z-Grav}}{F_{Ges-Grav}} = \frac{mr'\omega^2}{F_{Ges-Grav}} \Rightarrow F_{Ges-Grav} = mr\omega^2 = F_z = T$$

Die Kraft, die auf das Seil wirkt, bleibt gleich. Da bei gleicher Rotationsfrequenz die aufgewendete Kraft gleich bleibt, ist die Frequenz für das Abreißen auch gleich.

$$\nu = 5\mathrm{Hz}$$

[**3**]

Bei Reißen der Schnur wird der Stein tangential, das heißt horizontal, mit der Bahngeschwindigkeit v aus der Kreisbahn geworfen. Die Flugweite s ergibt sich hier einfach aus der horizontalen Bewegung mit v während der Fallzeit aus der Höhe h' (horizontaler Wurf):

$$\begin{aligned} h' &= h - \delta h && (19) \\ &= h - r \sin\alpha && (20) \end{aligned}$$

Des weiteren gilt $h' = {}^1\!/\!_2 g t^2$, also

$$t = \sqrt{\frac{2(h - r\sin\alpha)}{g}} = 0,63\text{s} \qquad (21)$$

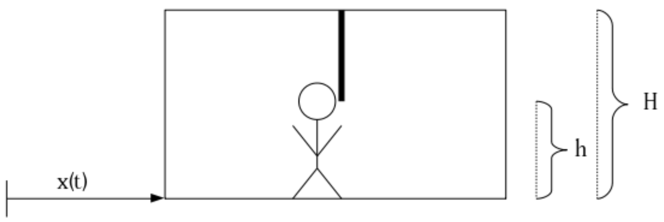
Es gilt auch

$$s = v't = \omega r' t = \omega r \sqrt{\left(1 - \frac{m^2 g^2}{F_{Ges}^2}\right) \frac{2}{g} \left(h - r\frac{mg}{F_{Ges}}\right)} = 9,91\text{m} \qquad (22)$$

[**3**]

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Mann der Masse $m = 80$ kg und der Höhe $h = 1,80$ m steht in einer Gondel ($H = 3$ m), an deren Decke ein Seil aufgehängt ist. Der Mensch hält sich nun an dem Seil fest und die Gondel setzt sich in x-Richtung in Bewegung. Die Bewegungsgleichung für die Gondel lautet $x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a_S t^2$ mit $x_0 = 20$ m, $a_S = \frac{1}{5} g$. Wie groß ist der Auslenkwinkel des Seils gegenüber

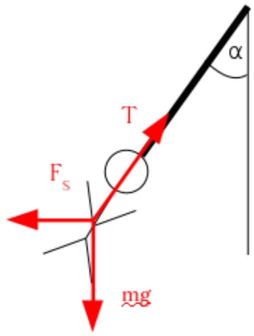


der Senkrechten, falls keine Reibung vorhanden ist? Machen sie außerdem eine Zeichnung der wirkenden Kräfte (Richtung und Länge beachten).

Lösung

Es wirken die folgenden Kräfte:

[**2**]



Dabei ist T die Seilspannung und $F_S = ma_S$ die Scheinkraft in negative Bewegungsrichtung.

Im Kräftegleichgewicht gilt:

$$0 = \sum F_x = T \sin\alpha - \frac{1}{5} mg$$
$$0 = \sum F_y = T \cos\alpha - mg$$

[2]

Daraus erhält man die Gleichungen

$$\frac{1}{5} mg = T \sin\alpha$$
$$mg = T \cos\alpha$$

und der Auslenkungswinkel α ergibt sich durch Division der beiden Gleichungen

$$\frac{T \sin\alpha}{T \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{\frac{1}{5} mg}{mg} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \alpha = 11{,}31^\circ.$$

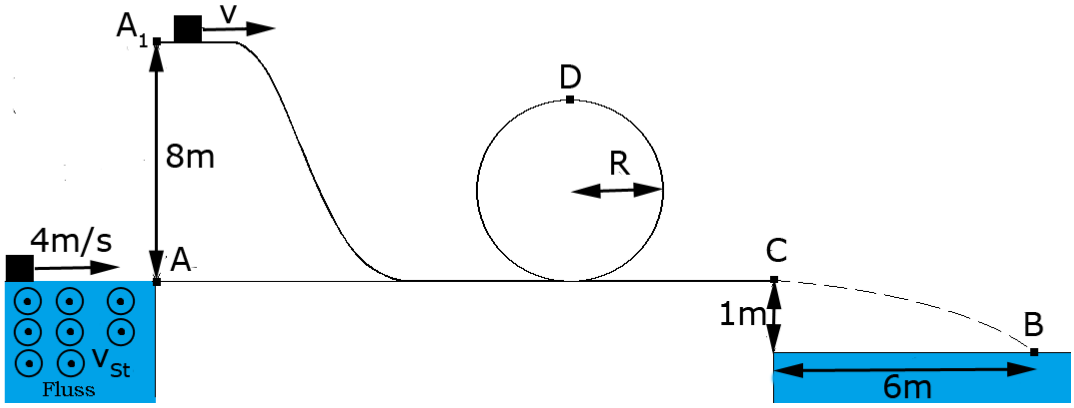
[2]

Aufgabe 5 (18 Punkte)

In einem Wasserpark soll eine neue Attraktion gebaut werden.

(a) Ein Boot hat die Geschwindigkeit $v_B = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und möchte auf der gegenüberliegenden Flussseite bei A ankommen. Die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses sei $v_{St} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und zeigt aus der Zeichenebene heraus. In welchem Winkel gegen die Strömung muss das Boot steuern um sich geradlinig über den Fluss zu bewegen? Zeichnen Sie eine Skizze und beschriften Sie den Winkel.

(b) Im Punkt A bringt eine Hebebühne das Boot auf die Höhe $h = 8$m. Wieviel Arbeit wird dabei verrichtet, wenn das Boot eine Masse von $m = 15$kg hat?

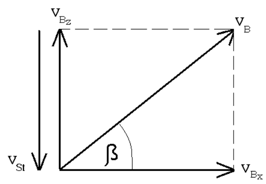


Im Punkt A_1 wird das Boot auf eine Geschwindigkeit v_1 gebracht und gleitet durch einen Looping und springt am Ende in einen $y = 1$m tieferliegenden See.

(c) Welche Anfangsgeschwindigkeit v_1 hat das Boot, wenn es im Punkt B, im Abstand d=6m von dem Ende der Bahn, im See Auftreffen soll?

(d) Welchen Radius R hat der Looping, wenn die Zentripetalkraft im höchsten Punkt D betragsmäßig das 2-fache der Gewichtskraft ist?

Lösung



(a) Um gegenüber anzukommen muss die z-Komponente der Bootsgeschwindigkeit betragsmäßig der Strömungsgeschwindigkeit entsprechen. $|v_{Bz}| = |v_{St}|$

$$\sin(\beta) = \frac{v_{Bz}}{v_B} = \frac{v_{ST}}{v_B} \rightarrow \beta = \arcsin(\frac{2}{4}) = 30° \tag{23}$$

[3]

(b)

$$W = \Delta E = mgh = 1,177\text{kJ} \tag{24}$$

oder:

$$W = \int_0^h F(s)\ ds = \int_0^h mg\ ds = mgh = 1,177\text{kJ} \tag{25}$$

[**2**]

(c) Die Gesamtenergien bei A_1 und bei C müssen gleich sein.

$$E_{gesA_1} = E_{gesC} \tag{26}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{27}$$
$$\rightarrow v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gh} \tag{28}$$

Die Geschwindigkeit v_2 berechnet sich durch die Weite d und Höhe y.

Bis das Boot auf dem Wasser aufschlägt, vergeht die Zeit t:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = 0,45\mathrm{s} \tag{29}$$

[**4**]

In dieser Zeit legt das Boot eine Weite von d=6m zurück, dh. die Geschwindigkeit v_2 ist

$$v_2 = \frac{d}{t} = \sqrt{\frac{g}{2y}}d = 13,3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{30}$$

Setzt man dies nun in Gleichung 28, erhält man für v_1:

$$v_1 = \sqrt{13,3^2\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} - 2 \cdot 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 8\mathrm{m}} = 4,46\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{31}$$

[**3**]

(d) Es gilt:

$$F_z = 2F_g \tag{32}$$
$$\frac{mv_3^2}{R} = 2mg \tag{33}$$
$$\rightarrow v_3^2 = 2gR \tag{34}$$

[**2**]

Man kann die Energieerhaltung im Punkt D und C anwenden:

$$mg2R + \frac{1}{2}mv_3^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \rightarrow v_3^2 = v_2^2 - 4Rg \tag{35}$$

Setzt man dies nun in Gleichung 34, kann man nach R auflösen und erhält:

$$2Rg = v_2^2 - 4Rg \rightarrow R = \frac{v_2^2}{6g} = 3,0\mathrm{m} \tag{36}$$

Genauso könnte man die Energieerhaltung im Punkt D und A_1 anwenden. Man hat nur einen Term mehr, da im Punkt A_1 auch noch die Höhenenergie vorhanden ist.

[**4**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

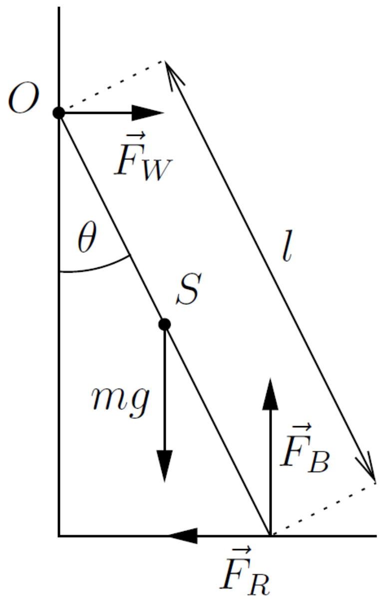
Eine Leiter der Länge l und der Masse m lehnt unter dem Winkel ϕ an einer glatten senkrechten Wand. Die Schwerkraft greift dabei im Schwerpunkt der Leiter an. Der Reibungskoeffizient zwischen Boden und Leiter ist μ.

(a) Erstellen Sie eine Skizze der Anordnung und zeichnen Sie die Kräfte ein.

(b) Bestimmen Sie den Maximalwinkel ϕ_{max}, unter dem die Leiter an der Wand stehen bleibt, ohne zu rutschen.

Lösung

(a) Die Abbildung zeigt die Kräfte, die auf die Leiter wirken: Dies sind die Haltekraft des Bodens und der Wand, die Schwerkraft und die Reibungskraft:



[2]

(b) Aus dem Kräftegleichgewicht folgt:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{F}_W + \vec{F}_R = 0 \rightarrow \vec{F}_W = -\vec{F}_R \tag{37}$$

[1]

$$\sum \vec{F}_y = mg + \vec{F}_B = 0 \rightarrow \vec{F}_B = -mg \tag{38}$$

[1]

Auch die Drehmomente müssen verschwinden (d.h. $\sum \vec{M}_i = 0$), damit die Leiter in Ruhe bleibt. Drehmomente werden für den Ansatzpunkt O berechnet:

$$\underbrace{mg}_{\text{Schwerkraft}} \frac{l}{2}\sin(\phi) \underbrace{-mg}_{\vec{F}_B} l\sin(\phi) \underbrace{+\mu mg}_{\vec{F}_R} l\cos(\phi) = 0 \tag{39}$$

[1]

Damit ergibt sich

$$mg\frac{l}{2}\sin(\phi) = \mu mgl\cos(\phi) \tag{40}$$

und für θ:

$$\tan(\phi) = 2\mu \tag{41}$$

[1]

Mathematische Ergänzungen (12 Punkte)

Die Transformation zwischen elliptischen Zylinderkoordinaten $(y_1, y_2, y_3)^t = (u, \varphi, z)^t$ und kartesischen Koordinaten (x_1, x_2, x_3) lautet

$$\vec{r}(u,\varphi,z) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u \cos\varphi \\ \sinh u \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie an einem gegebenen Punkt (u, φ, z) die Koordinateneinheitsvektoren $(\vec{e}_u, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ durch

$$\vec{e}_{y_i} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$$

und verifizieren Sie, dass es sich um eine Orthonormalbasis handelt.

(b) Die Transformation, welche die Standardbasis auf die neue, nicht-normierte Basis $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}\right)$ abbildet, bildet ein infinitesimaler Kubus $(\delta u, \delta\varphi, \delta z)$ auf einen Quader ab. Bestimmen Sie das Volumen dieses Quaders.

Lösung:

(a) Die partielle Ableitung einer Variable x_i einer Funktion von $f(x_1, x_2, x_3)$ ist definiert als die bekannte Ableitung, welche die anderen Variablen $(x_j; j \neq i)$ als Konstanten auffast.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} \sinh u \cos\varphi \\ \cosh u \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\cosh u \sin\varphi \\ \sinh u \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[3]

Es gilt Anmerkung: $\cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$

$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|^2 = \sinh^2 u \cos^2\varphi + \cosh^2 u \sin^2\varphi$$
$$= \sinh^2 u + \sin^2\varphi$$
$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right\|^2 = \sinh^2 u + \sin^2\varphi$$
$$\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right\|^2 = 1$$

[3]

Die gesuchten Einheitsvektoren folgen durch einsetzen in gegebene Gleichung.
Die Vektoren sind orthogonal, wenn das Skalarprodukt null ist.

$$\vec{e}_u = \frac{1}{N}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} \sinh u \cos\varphi \\ \cosh u \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\cosh u \sin\varphi \\ \sinh u \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind damit offensichtlich normiert und es gilt

$$\langle \vec{e}_u | \vec{e}_\varphi \rangle = \frac{-\sinh u \cosh u \sin\varphi \cos\varphi + \sinh u \cosh u \sin\varphi \cos\varphi}{N^2} = 0$$
$$\langle \vec{e}_u | \vec{e}_z \rangle = 0$$
$$\langle \vec{e}_\varphi | \vec{e}_z \rangle = 0$$

[3]

(b) Die Jacobi-Matrix ist

$$(J_{ij}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \begin{pmatrix} \sinh u \cos\varphi & -\cosh u \sin\varphi & 0 \\ \cosh u \sin\varphi & \sinh u \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds ist gegeben durch die Determinante

$$\begin{aligned} \delta V &= \det J = \sinh^2 u \cos^2\varphi + \cosh^2 u \sin^2\varphi \\ &= N^2 \end{aligned}$$

[3]

Anmerkung: Da $\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}$ paarweise aufeinander senkrecht stehen, ist

$$\delta V = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right| \cdot \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| \cdot \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right|$$