Aufgabe 1: Phasenverschiebung durch Gravitation (6 Punkte)

(a) insgesamt 4 Punkte

Die stationäre Wellenfunktion einer ebenen Welle in x-Richtung ist

$$\psi(x) = Ae^{ik_x(z)\cdot x}$$

mit einem Wellenvektor in x-Richtung

$$k_x(z) = \sqrt{2m(E - mgz)}/\hbar\,,$$

1 Punkt

der von Höhe z abhängt:

$$k_x(z=0) = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k = 2\pi/\lambda$$
$$k_x(z=h) = \frac{\sqrt{2m(E-mgh)}}{\hbar} = k\sqrt{1-\frac{mgh}{E}} \overset{(E\gg mgh)}{\approx} k\left(1-\frac{mgh}{2E}\right).$$

mit Näherung: 1 Punkt

Die Phasendifferenzen zwischen den Punkten C und A bzw. D und B sind

$$\varphi_{AC} = k_x(z=0)\cdot(l-0) = kl$$
$$\varphi_{BD} = k_x(z=h)\cdot(l-0) = kl\sqrt{1-\frac{mgh}{E}} \approx kl\left(1-\frac{mgh}{2E}\right)$$

und damit mit Näherung: 1 Punkt

$$\varphi_{BD} - \varphi_{AC} \approx kl\left(-\frac{mgh}{2E}\right) = -\frac{m^2glh}{\hbar^2 k} = -\frac{m^2glh\lambda}{2\pi\hbar^2}\,.$$

1 Punkt

(b) insgesamt 2 Punkte

Da der Cosinus 2π-periodisch ist, wiederholt sich das Interferenzmuster, wenn $\Delta\varphi = \varphi_{ABD} - \varphi_{ACD} \in 2\pi\mathbb{Z}$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist. 0,5 Punkte

Aus der Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = (\varphi_{AB} + \varphi_{BD}) - (\varphi_{AC} + \varphi_{CD})$$

hebt sich gemäß der Angabe $\varphi_{AB} = \varphi_{CD}$ heraus, und man erhält die Bedingung für die Höhendifferenz Δh

$$\Delta\varphi = \varphi_{BD} - \varphi_{AC} = -\frac{m^2gl(\Delta h)\lambda}{2\pi\hbar^2} \overset{!}{=} -2\pi$$

bzw.

$$\Delta h = \frac{1}{gl\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar}{m_n}\right)^2 .$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$

Für Neutronen mit Masse $m = m_n$ ist dann

$$\Delta h = \frac{(4\cdot 10^{-7}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1})^2}{(9.81\,\mathrm{m\,s}^{-2})(0.05\,\mathrm{m})(1.4\cdot 10^{-10}\mathrm{m})} \approx 2\,\mathrm{mm}\,.$$

(es genügt die führende Stelle vom Ergebnis). $\boxed{\text{0,5 Punkte}}$

Aufgabe 2: GHZ-Zustände, Verschränkung (6 Punkte)

(a) $\boxed{\text{insgesamt 4 Punkte}}$

Die Wirkung von

$$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 = \sigma_{1x}\otimes\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\otimes\sigma_{2y} + \sigma_{1z}\otimes\sigma_{2z}$$

auf $|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2$ bzw. $|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2$ ist mit der angegebenen Wirkung der Pauli-Matrizen

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2|\uparrow\uparrow\rangle &= (1)^2|\downarrow\downarrow\rangle + (i)^2|\downarrow\downarrow\rangle + (1)^2|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle\\ \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2|\downarrow\downarrow\rangle &= (1)^2|\uparrow\uparrow\rangle + (-i)^2|\uparrow\uparrow\rangle + (-1)^2|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle\end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$

Damit ist der GHZ-Zustand Eigenzustand von $\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2$ (mit Eigenwert 1):

$$\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2|\mathrm{GHZ}\rangle = |\mathrm{GHZ}\rangle\,.$$

$\boxed{\text{1 Punkt}}$

Das Quadrat des totalen Spins ist

$$\vec{S}^2_{\mathrm{tot}} = \frac{\hbar^2}{4}\left(\vec{\sigma}_1^2 + 2\vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2^2\right) = \frac{\hbar^2}{2}\left(3 + \vec{\sigma}_1\cdot\vec{\sigma}_2\right),$$

wobei wir genutzt haben, dass das Quadrat der einzelnen Pauli-Matrizen $\sigma_i^2 = 1$ ist und damit $\vec{\sigma}_1^2 = \sigma_{1x}^2 + \sigma_{1y}^2 + \sigma_{1z}^2 = 3$ und $\vec{\sigma}_2^2 = 3$. Also ist der GHZ-Zustand ein Eigenzustand mit Eigenwert $2\hbar^2$,

$$\vec{S}^2_{\mathrm{tot}}|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{\hbar^2}{2}(3+1)|\mathrm{GHZ}\rangle = \hbar^2 S(S+1)|\mathrm{GHZ}\rangle$$

mit $S = 1$. $\boxed{\text{1 Punkt}}$

Die Wirkung des totalen Spins in z-Richtung

$$S_{z,\mathrm{tot}} = \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}\right)$$

auf den GHZ-Zustand ergibt

$$S_{z,\mathrm{tot}}|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big((1+1)|\uparrow\uparrow\rangle + (-1-1)|\downarrow\downarrow\rangle\Big)$$

und *kein* Vielfaches des GHZ-Zustandes, der damit also *kein* Eigenzustand von $S_{z,\mathrm{tot}}$ ist. 1 Punkt

(b) insgesamt 2 Punkte

Man bildet die Spur über den ersten Spin, indem man über alle seine Basisvektoren $|\uparrow\rangle_1$, $|\downarrow\rangle_1$ summiert:

$$\rho_1 = \langle\uparrow|_1|\mathrm{GHZ}\rangle\langle\mathrm{GHZ}||\uparrow\rangle_1 + \langle\downarrow|_1|\mathrm{GHZ}\rangle\langle\mathrm{GHZ}||\downarrow\rangle_1\,.$$

Mit

$$\langle\uparrow|_1|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\uparrow|_1\Big(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle_2$$

und $\langle\downarrow|_1|\mathrm{GHZ}\rangle = |\downarrow\rangle_2/\sqrt{2}$ folgt 1 Punkt

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\Big(|\uparrow\rangle_2\langle\uparrow|_2 + |\downarrow\rangle_2\langle\downarrow|_2\Big)\,.$$

Dies ist kein reiner, sondern ein gemischter Zustand. 1 Punkt

Aufgabe 3: Zweidimensionales Wasserstoffatom (8 Punkte)

(a) insgesamt 3 Punkte

In die stationäre Schrödingergleichung

$$\Big(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V(r)\Big)\psi(r,\varphi) = E\psi(r,\varphi)$$

0,5 Punkte

setzt man das Potential

$$V(r) = -\frac{e^2}{\epsilon r}$$

0,5 Punkte

und die Energie $E = -\hbar^2\kappa^2/2\mu$ des gebundenen Zustands ein und erhält so

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} - \frac{e^2}{\epsilon r}\psi = -\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}\psi\,.$$

1 Punkt

Den Potentialterm kann man durch den Bohr-Radius a_B ausdrücken,

$$-\frac{e^2}{\epsilon r}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2\mu e^2}{\epsilon\hbar^2 r}\psi = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2}{a_B r}\psi$$

und erhält so

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{2}{a_B r}\psi=-\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}\psi$$

bzw. durch Multiplikation mit $-2\mu/\hbar^2$ 1 Punkt

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{a_B r}\psi=\kappa^2\psi\,.$$

(b) insgesamt 2 Punkte

Die Wellenfunktion $\psi(r,\varphi)$ in Polarkoordinaten ist 2π-periodisch im Winkel,

$$\psi(r,\varphi+2\pi)=\psi(r,\varphi)\quad\Leftrightarrow\quad\psi(r)e^{im\varphi}e^{2\pi im}=\psi(r)e^{im\varphi}\,.$$

Daraus folgt $e^{2\pi im}=1$, d.h. m muss ganzzahlig sein. 1 Punkt

Die Quantenzahl m ist die Projektion des Drehimpulses auf die z-Achse (die z-Komponente des Drehimpulsvektors). 1 Punkt

(c) insgesamt 2 Punkte

Im Grundzustand $\psi_0(r)$ ist $m=0$. Mit den radialen Ableitungen $\psi_0'(r)=-\psi_0(r)/l$, $\psi_0''(r)=\psi_0(r)/l^2$ folgt die kinetische Energie

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_0}{\partial r}\right)=\psi_0''+\frac{1}{r}\,\psi_0'=\left(\frac{1}{l^2}-\frac{1}{rl}\right)\psi_0$$

und die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(\frac{1}{l^2}-\frac{1}{rl}+\frac{2}{a_B r}\right)\psi_0=\kappa^2\psi_0\,.$$

1 Punkt

Der Koeffizientenvergleich für $1/r$ und r^0 (r-unabhängig) ergibt, dass $\psi_0(r)$ eine Lösung ist für

$$l=\frac{a_B}{2}\qquad\text{und}\qquad\kappa=\frac{1}{l}=\frac{2}{a_B}\,.$$

1 Punkt

(d) insgesamt 1 Punkt

Damit folgt die Bindungsenergie

$$E_b=\frac{\hbar^2\kappa^2}{2\mu}=4\,\frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2}=4\,\mathrm{Ry}\,.$$