Klausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Fabbietti, Dr. B. Ketzer
Wintersemester 2012/2013
13. Februar 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Nennen Sie 3 Linsenfehler und sagen Sie kurz wie diese korrigiert werden können.

(b) Nennen Sie 3 experimentelle Befunde, die nicht mit Hilfe der klassischen Physik erkärt werden können. Wählen Sie aus Ihren Antworten **ein** Experiment aus, und beschreiben Sie es kurz und die Beobachtungen. Geben Sie die Interpretation im Rahmen der Quantenphysik bzw. die Probleme bei der klassischen Interpretation an.

Lösung

(a)
- Durch einen Achromaten werden primär chromatische Aberrationen korrigiert.
- Die sphärische Aberration kann man verringern, wenn man durch eine Blende die achsenfernen Strahlen unterdrückt oder z. B. durch Verwenden einer Plan-Konvex-Linse, wobei die konvexe Seite dem parallel einfallenden Lichtbündel zugewandt ist.
- Koma (Fehler bei schrägem Lichteinfall auf die Linse) läßt sich durch hinreichendes Abblenden der Linse unterdrücken.
- Tonnen-/kissenförmige Verzeichnung kann durch eine Erweiterung der Blendenöffnung verringert werden.
- Astigmatismus kann man korrigieren indem man Zylinderlinsen mit sphärischen Linsen kombiniert. Dies kann z. B. dadurch realisiert werden, dass eine sphärische Linse zusätzlich eine zylindrische Krümmung erhält.

Pro Fehler und Korrektur jeweils einen Punkt.

[**3**]

(b)
- \- spektrale Verteilung der Hohlraumstrahlung - photoelektrischer Effekt - Compton-Effekt - Franck-Hertz-Versuch

[**1**]

- Bei der Hohlraumstrahlung handelt es sich um die spektrale Dichte eines schwarzen Strahlers (Box mit kleinem Loch). Diese würde klassisch unendlich viel Energiedichte für hohen Frequenzen erreichen (Ultraviolett-Katastrophe). Durch Einführung der Quantenhypothese werden höherenergetische Zustände nur mit einer bestimmten (abnehmenden) Wahrscheinlichkeit angeregt.
- Beim Photoeffekt wird eine aufgeladene Kathode mit Licht bestrahlt. Man findet ein entladen der Kathode ab einer Schwellfrequenz, instantan, unabhängig von der Intensität aber abhängig vom Material. Laut klassischer Theorie sollten die angeregten Dipolschwingungen bei jeder Frequenz auftauchen, nach einer Weile starten (abhängig von der Intensität des Lichtes) und für jedes Material funktionieren. Laut Quantentheorie soll jedes Photon mindestens genug Energie tragen um ein Elektron zu lösen (oder nicht). Dies geschieht sofort. Die Schwellfrequenz ist intensitätsunabhängig.
- Bei der Comptonstreuung wird Licht (z.B. Röntgenlicht) an Materie gestreut. Dabei erwartet man klassisch eine gleichbleibende Lichtfrequenz und zum anderen eine einheitliche Streuwinkelverteilung. Man findet, dass sich die Wellenlänge verlängert und ihre Frequenz dabei eine Abhängigkeit wie bei einem Stoßprozess zeigt. Dies läßt sich im Teilchenbild von Licht erklären, indem das Photon an einem Elektron streut und dabei Energie verliert die mit längerer Wellenlänge abgestrahlt wird.
- Im Franck-Hertz-Versuch werden Elektronen mit Hilfe eines E-Feldes beschleunigt und nach dem durchqueren von Hg-Gas ihre verbleibende Energie (Anzahl der in Gegenspannung ankommenden Elektronen) gemessen. Dabei wird ein Zu- und Abnehmen der Restenergie der Elektronen beobachtet. Klassisch würde man ein stetiges Ansteigen der Elektronenenergie erwarten. Quantenmechanisch läßt sich die Situation durch die inelastische Streuung der Elektronen an den Elektronen des Hg-Gases erklären, sowie durch die Quantelung der Energieniveaus des Atoms.

Für die Beschreibung/Beobachtung, die klassische und die quantenmechanische Sicht gibt es jeweils einen Punkt.

[**3**]

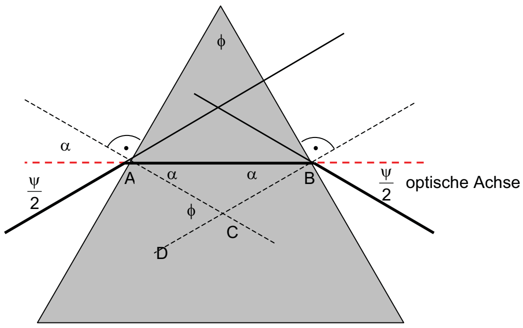
Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Lichtstrahl soll unter einem solchen Winkel gegen die Normale auf ein gleichschenkliges Prisma mit Öffnungswinkel ϕ fallen, dass der Einfallswinkel Luft-Prisma ($\psi/2$ bezüglich der optischen Achse) gleich dem Ausfallswinkel Prisma-Luft ($\psi/2$ bezüglich der optischen Achse) ist – symmetrischer Strahlengang durch das Prisma. Skizzieren Sie diese Situation. Leiten Sie für diese Bedingung einen Ausdruck für den Brechungsindex n_{Prisma} des Prismas ab. Man nennt diesen Einfallswinkel auch den *Winkel geringster Ablenkung*, weil unter der genannten Bedingung der Ablenkwinkel minimal bezüglich einer Drehung des Prismas ist.

Lösung

[**1**]

Der Winkel $\angle$ACD ist gleich ϕ, weil die beiden den Winkel einschließenden Geraden paarweise senkrecht aufeinander stehen und den Öffnungswinkel des Prismas ϕ einschließen. Somit gilt für



den Winkel in C des Dreiecks $\triangle$ABC mit der Winkelsumme im Dreieck

$$2\alpha + (180° - \phi) = 180° \tag{1}$$

[1]

Hieraus folgt direkt, dass $\alpha = \phi/2$. Es ist $\psi/2 + \alpha = (\psi+\phi)/2$ der Einfallswinkel gegen die Normale und $\alpha = \phi/2$ der Winkel des gebrochenen Strahls gegen die Normale. Das *Snelliussche Brechungsgesetz* liefert

$$n_{\text{Luft}} \sin\frac{\psi+\phi}{2} = n_{\text{Prisma}} \sin\frac{\phi}{2} \tag{2}$$

Wegen $n_{\text{Luft}} = 1$ gilt

$$\sin\frac{\psi+\phi}{2} = n_{\text{Prisma}} \sin\frac{\phi}{2} \tag{3}$$

[1]

Damit gilt

$$n_{\text{Prisma}} = \frac{\sin\frac{\psi+\phi}{2}}{\sin\frac{\phi}{2}} \tag{4}$$

[1]

Diese einfache Beziehung gilt nur, wenn das Licht symmetrisch durch das Prisma fällt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Linear polarisiertes Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 0,589\mu$m fällt auf ein Quarzplättchen, dessen optische Achse senkrecht zur Ausbreitungsrichtung des Lichtes zeigt. Der Winkel zwischen der Polarisationsebene des Lichtes und der optischen Achse beträgt 45°. Die Hauptbrechungsindizes für Quarz sind $n_o = 1,5443$ und $n_{ao} = 1,5534$.

(a) Bestimmen Sie die Phasendifferenz zwischen dem ordentlichen und dem außerordentlichen Strahl. Wie dick muss das Quarzplättchen sein, damit die Polarisationsebene des Lichtes um 90° gedreht wird?

(b) Skizzieren Sie das Prinzip der Doppelbrechung mit allgemeiner (**nicht** mit der Schnittkante des Kristalls parallelen) optischen Achse anhand des Huygenschen Prinzips. Zeichnen Sie die optische Achse, die Richtung des Wellenvektors, die Polarisationsrichtung, die Huygenschen Elementarwellen sowie den Poynting-Vektor für den ordentlichen **und** den ausserordentlichen Strahl ein (2 Zeichnungen).

Lösung

(a) Setzen wir den Koordinatenursprung an die Vorderfläche des Quarz-Plättchens, so ist die Feldstärke am Ort $z = 0$

$$\vec{E}_1 = E_0[\sin(\omega t), \sin(\omega t), 0] \tag{5}$$

wobei die y-Achse mit der Richtung der optischen Achse übereinstimmt. Nach Durchgang des Lichts durch das Plättchen ergibt sich eine Phasendifferenz zwischen x- und y-Komponente von

$$\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda}(n_{\mathrm{ao}} - n_{\mathrm{o}}) \tag{6}$$

Um linear polarisiertes Licht zu erhalten, muss

$$\phi = k\pi, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{7}$$

gelten. Während sich für geradzahlige k sich die Polarisationsebene nicht ändert, ergibt sich für ungeradzahlige k eine Drehung der Polarisationsebene um 90°. Wir müssen also fordern, dass

$$\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda}(n_{ao} - n_o) = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{8}$$

[**1**]

Daraus ergibt sich die notwenige Dicke d der Platte zu

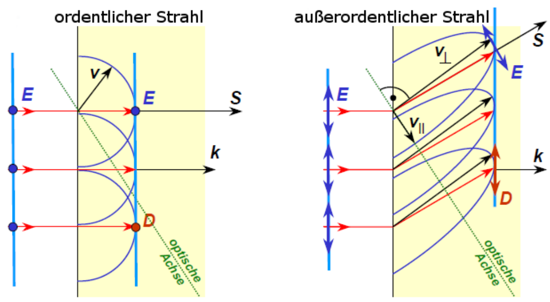
$$d = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{n_{\mathrm{ao}} - n_{\mathrm{o}}}(2k+1) \tag{9}$$

Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$d = (2k+1)32,4\mu\mathrm{m} \tag{10}$$

[**1**]

(b) Während die Hyugenschen Elementarwellen für den ordentlichen Strahl Kreiswellen bleiben, werden sie für den Außerordentlichen Strahl zu Ellipsen.



[**4**]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es soll ein Achromat aus einer konvex-planen ($n_{D1} = 1,505$, Abbézahl $V = 65,0$) und einer plan-konkaven Linse ($n_{D2} = 1,648$, Abbézahl $V = 33,9$) hergestellt werden, der die Dispersion für die Wasserstoff-F- und Wasserstoff-C-Linie kompensieren soll. Das fertige Linsensystem soll eine Brennweite von 10cm besitzen.

Hinweis: Die Abbézahl ist definiert als $V = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}$, dabei sind $\lambda_D = 589,2\text{nm}$, $\lambda_C = 656,3\text{nm}$, $\lambda_F = 486.1\text{nm}$ die wichtigsten Frauenhofer-Linien von Wasserstoff.

(a) Wie groß müssen die Brennweiten f_1 und f_2 der beiden Einzellinsen sein, um die obenstehende Bedingung zu erfüllen?

(b) Welche Krümmungsradien der Außenseiten beider Linsen muss ein Linsenmacher wählen?

Lösung

(a) Ein achromatisches Dublett besteht aus einer Kombination aus Linse 1 mit einer Brennweite f_1 und Linse 2 mit einer Brennweite f_2. Linse 1 besteht aus einem Glas mit der Abbé-Zahl V_1 und Linse 2 aus einem Glas mit der Abbé-Zahl V_2. Für den Unterschied ΔD der Brechkraft D des gesamten Dubletts bei der Wasserstoff-F- und -C-Linie ergibt sich, da die Abbé-Zahlen verwendet werden, folgende Gleichung

$$\Delta D = \frac{1}{V_1 f_1} + \frac{1}{V_2 f_2} \tag{11}$$

[1]

Für den Achromat soll gelten $\Delta D \stackrel{!}{=} 0$. Daraus folgt $f_2 = -({}^{V_1}/{}_{V_2}) f_1$. Damit ergibt sich mit den Abbé-Zahlen $V_1 = 65,0$ und $V_2 = 33,9$ und $f_2 = -1,92 f_1$. Da der Abstand zwischen den beiden Linsen Null ist ergibt sich für die Gesamtbrechkraft f_{ges}

[1]

$$f_{\text{ges}}^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1} = f_1^{-1} - 0,52 f_1^{-1} = 0,48 f_1^{-1} \tag{12}$$

Mit $f_{\text{ges}} = 100\text{mm}$ folgt daraus für die Brennweite f_1 der ersten Linse $f_1 = 0,48 \cdot f_{\text{ges}} = 48\text{mm}$. Für die Brennweite f_2 der zweiten Linse ergibt sich $f_2 = -1,92 \cdot f_1 = -92,2\text{mm}$.

[1]

(b) Zur Berechnung der Krümmungsradien wird der Brechungsindex n_D für die Wasserstoff-D-Linie eingenommen.

Mit der Linsenformel

$$\frac{1}{f(\lambda)} = (n(\lambda) - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{13}$$

ergibt sich für Linse 1 die konvex-plan ist (der Radius von Linse 1 ist also positiv gekrümmt ($R_1 > 0$), während der zweite Radius R_{Mitte} unendlich ist).

$$f_1^{-1} = (n_{D1} - 1) R_1^{-1}, \tag{14}$$

sowie $R_1 = 24,2\text{mm}$ und $R_{\text{Mitte}} = \infty$.

[**1**]

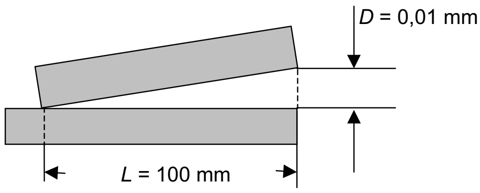
Linse 2 ist plan-konkav, das heißt der eine Radius ist unendlich, während der zweite Radius negativ wird, also

$$f_2^{-1} = (n_{D2} - 1)R_2^{-1}, \tag{15}$$

sowie $R_{\text{Mitte}} = \infty$ und $R_2 = -59,7\text{mm}$.

[**1**]

Aufgabe 5 (6 Punkte)



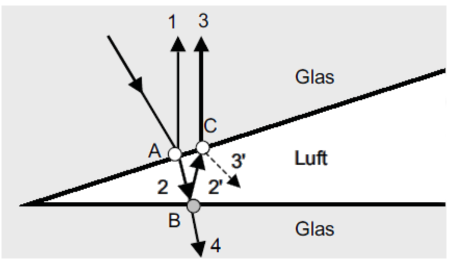
Die skizzierte Anordnung (nicht maßstabsgetreu) besteht aus zwei völlig planen Glasplatten, die einen Luftkeil von $L = 100\text{mm}$ Länge und $D = 0,01\text{mm}$ Rückenbreite einschließen. Die Anordnung wird von oben mit monochromatischem Licht beleuchtet. Von oben betrachtet sieht man abwechselnd helle und dunkle Streifen parallel zum Spalt des Keils.

(a) Begründen Sie kurz, wie diese hellen und dunklen Streifen zustandekommen.

(b) Zwei benachbarte dunkle Streifen haben den Abstand $d_1 = 5,9\text{mm}$. Welche Wellenänge λ hat das verwendete Licht?

(c) Füllt man einen Teil des Luftkeils mit Wasser aus, so rücken benachbarte dunkle Streifen auf einen Abstand $d_2 = 4,44\text{mm}$ zusammen. Bestimmen Sie daraus die Lichtgeschwindigkeit $c_{\text{H}_2\text{O}}$ und die Brechzahl $n_{\text{H}_2\text{O}}$ für Wasser.

Lösung



(a) In der Abbildung wird der Gang des Lichts illustriert. Das von oben durch die Glasplatte kommende Licht wird bei A

- teils reflektiert – Strahl 1, dies ohne Phasensprung, da von einem optisch dichteren Medium in ein optisch dünneres gewechselt wird.

- teils durchgelassen – Strahl 2, Bei B wird Strahl 2
- teils reflektiert – Strahl 2', dies mit Phasensprung, da von einem optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium gewechselt wird.
- teils durchgelassen – Strahl 4, bei C wird Strahl 2'
- teils reflektiert – Strahl 3' (ist für diese Aufgabenstellung nicht interessant), dies mit Phasensprung, da von einem optisch dünneren Medium in ein optisch dichteres gewechselt wird.
- teils durchgelassen – Strahl 3

Die kohärenten Strahlen 1 und 3 interferieren.

[**1**]

Der Wegunteschied A→B→C des Lichts im Luftkeil ist ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge bei hellen Streifen (bzw. ein geradzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge bei dunklen Streifen)

$$\Delta_{\text{Glas}} = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2} \tag{16}$$

$$\Delta_{\text{gesamt}} = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \tag{17}$$

[**1**]

(b) Der Strahlensatz liefert

$$\frac{\lambda}{d_1} = \frac{D}{L} \tag{18}$$

Damit wird

$$\lambda_{\text{Luft}} = \frac{D}{L}d_1 = \frac{10^{-2}\text{mm}}{100\text{mm}} \cdot 5,9\text{mm} = 590 \cdot 10^{-6}\text{mm} = 590\text{nm} \tag{19}$$

[**2**]

(c) Analog zur vorangegangenen Teilaufgabe erhält man

$$\lambda_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{D}{L}d_1 = \frac{10^{-2}\text{mm}}{100\text{mm}} \cdot 4,44\text{mm} = 4,44 \cdot 10^{-4}\text{mm} = 444\text{nm} \tag{20}$$

Da sich die Frequenz f des Lichts beim Übergang zwischen zwei Medien nicht ändert, gilt für die Lichtgeschwindigkeit in Luft und Wasser

$$c_{\text{Luft}} = \lambda_{\text{Luft}} f \qquad\qquad c_{\text{H}_2\text{O}} = \lambda_{\text{H}_2\text{O}} f \tag{21}$$

oder

$$\frac{c_{\text{H}_2\text{O}}}{\lambda_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{c_{\text{Luft}}}{\lambda_{\text{Luft}}} \tag{22}$$

[**1**]

also

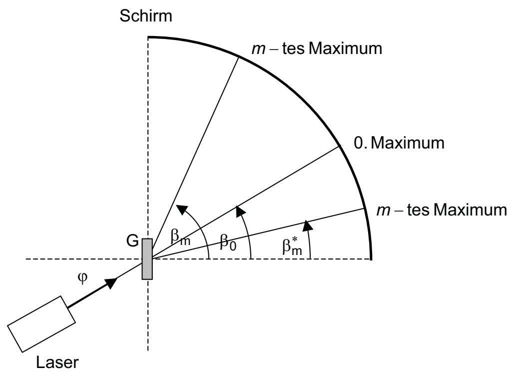
$$c_{\mathrm{H_2O}} = \frac{\lambda_{\mathrm{H_2O}}}{\lambda_{\mathrm{Luft}}} c_{\mathrm{Luft}} = \frac{444\mathrm{nm}}{590\mathrm{nm}} \cdot 3,00 \cdot 10^8 \mathrm{m/s} = 2,26 \cdot 10^8 \mathrm{m/s} \tag{23}$$

Der Brechungsindex $n_{\mathrm{H_2O}}$ ist definiert als das Verhältnis der Lichgeschwindigkeiten im Vakuum (näherungsweise Luft) und in einem Medium, damit erhält man für Wasser

$$n_{\mathrm{H_2O}} = \frac{c_{\mathrm{Luft}}}{c_{\mathrm{H_2O}}} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}}{2,26 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}} = 1,33 \tag{24}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (4 Punkte)



Monochromatisches Laserlicht der Wellenlänge $\lambda = 633$nm fällt auf ein Gitter G mit der Gitterkonstanten $g = 1 \cdot 10^{-4}$m. Hinter dem Gitter befindet sich ein Schirm. Der Laser kann auf einem Kreisbogen um das Gitter bewegt werden. Fällt das Licht unter dem Winkel φ ein, so erscheint das Maximum 0. Ordnung unter dem Winkel $\beta_0 = \varphi$. Die beiden Maxima m-ter Ordnung erscheinen unter den Winkeln $\beta_m > \beta_0$ und $\beta_m^* < \beta_0$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Winkel φ, β_m und β_m^* folgende Beziehungen gelten:

$$\sin \beta_m = \sin \varphi + \frac{m\lambda}{g} \qquad\qquad \sin \beta_m^* = \sin \varphi - \frac{m\lambda}{g} \tag{25}$$

(b) Für welche Winkel φ können beide Maxima 5. Ordnung auf dem Schirm beobachtet werden?

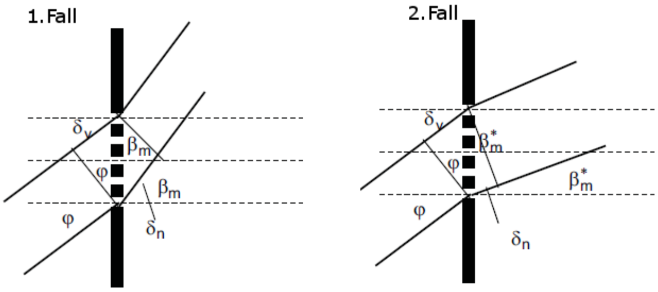
Lösung

(a) Der gesamte Gangunterschied δ setzt sich aus dem Gangunterschied vor und nach dem Gitter zusammen. Es müssen nun zwei Fälle betrachtet werden.

$\beta_m > \varphi$: Dann gilt $\delta_v = g \sin \varphi$ und $\delta_n = g \sin \beta_m$ also

$$\delta = \delta_n - \delta_v = g(\sin \beta_m - \sin \varphi) \tag{26}$$

[**1**]



Maxima erhält man, wenn der gesamte Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist, also $\delta = m\lambda, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\sin \beta_m - \sin \varphi = m\frac{\lambda}{g}$$
$$\sin \beta_m = \sin \varphi + m\frac{\lambda}{g}$$

[**1**]

$\beta_m^* > \varphi$**:** Dann gilt $\delta_v = g \sin \varphi$ und $\delta_n = d \sin \beta_m^*$ also

$$\delta = \delta_n - \delta_v = g(\sin \varphi \ - sin\beta_m^*) \tag{27}$$

Maxima erhält man, wenn der gesamte Gangunterschied ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist, also $\delta = m\lambda, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\sin \varphi - \sin \beta_m^* = m\frac{\lambda}{g}$$
$$\sin \beta_m^* = \sin \varphi - m\frac{\lambda}{g}$$

[**1**]

(b) Die Maxima 5.Ordnung sind nur dann zu beobachten, wenn die beiden Bedingungen $\beta_5 \leq 90°$ und $\beta_5^* \geq 0°$ erfüllt sind. Also müssen die Bedingungen

$$\sin \varphi = \sin \beta_5 - 5\frac{\lambda}{g} = 0,9684 \Rightarrow \varphi \leq 75,5°$$
$$\sin \varphi = \sin \beta_5^* + 5\frac{\lambda}{g} = 0,03165 \Rightarrow \varphi \geq 1,81°$$

Die beiden Maxima 5. Ordnung sind nur dann sichtbar, wenn $\varphi \in (1,81°; 75,5°)$ erfüllt ist.

[**1**]

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Man kann die Formeln, die zur Beschreibung von Beugungsphänomenen an der kreisförmigen Blende hergeleitet wurden, benutzen, um das Auflösungsvermögen optischer Instrumente abzuschätzen. Ein einfaches Beispiel ist das Auge. Die Rolle der Blende wird dabei durch die Pupille eingenommen. Das korrespondierende Beugungsmuster im Fernfeld begrenzt das Auflösungsvermögen des Auges. Wir nehmen an, dass zwei Objekte gerade dann noch getrennt wahrgenommen werden können, wenn sie einen Öffnungswinkel für die Nullintensitätslinie (Rayleigh-Kriterium) voneinander entfernt sind. Nehmen Sie im folgenden eine Wellenlänge von 550nm an (maximale Empfindlichkeit des Auges).

(a) In welchem Abstand d kann das Auge zwei Autoscheinwerfer (Abstand $x = 1\text{m}$) noch als getrennt wahrnehmen? Nehmen Sie einen Pupillendurchmesser von 2mm an.

(b) Von allen punktförmigen Objekten am Nachthimmel hat man bei der Venus (Durchmesser $x = 13\,000\text{km}$, Abstand zur Erde ungefähr $d = 150 \cdot 10^9\text{m}$) noch am ehesten den Eindruck, dass sie flächig ist. Kann man die reale Größe der Venus mit blossem Auge überhaupt sehen?

Lösung

(a) Aus der Aufgabenstellung erhält man $\lambda = 550\text{nm}$, einen Blendendurchmesser von $D = 2\text{mm}$ und einen Abstand der beiden Scheinwerfer von $x = 1\text{m}$.

Die beiden Scheinwerfer lassen sich gerade noch trennen, wenn der Betrachtungswinkel $\theta_{\text{Auto}} \approx {}^{x}/_{d}$ gleich dem Öfnungswinkel für die erste Nullintensität $\theta \approx 1,22\frac{\lambda}{D}$ ist.

Damit ergibt sich für die maximale Entfernung zum Auto

$$d = \frac{Dx}{1,22\lambda} \approx \frac{2 \cdot 10^{-3}\text{m}}{1,22 \cdot 550 \cdot 10^{-9}} = 3,0\text{km} \tag{28}$$

[**1**]

(b) Aus der Aufgabenstellung erhält man $\lambda = 550\text{nm}$, einen Blendendurchmesser von $D = 2\text{mm}$, einen Durchmesser der Venus von $x = 13\,000\text{km}$ und eine Entfernung zur Erde von $d = 150 \cdot 10^9\text{m}$.

Der Betrachtungswinkel $\theta_{\text{Venus}} \approx \frac{x}{d} = 86\mu\,\text{rad}$ ist deutlich kleiner als der Öffnungswinkel für die erste Nullintensitätslinie von $\theta \approx 1,22\frac{\lambda}{D} \approx 335\mu\,\text{rad}$. Das Auge ist daher nicht in der Lage, die Struktur der Venus aufzulösen.

[**2**]

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Röntgenstrahlen mit einer Wellenlänge von 20pm treffen auf freie Elektronen in einer dünnen Aluminiumfolie und werden durch den Compton-Effekt gestreut.

(a) Welche Energie und welchen Impuls hat ein Proton der eingehenden Röntgenstrahlung?

(b) Nach Streuung in der Folie werden Photonen unter einem Winkel von 60° relativ zur Eingangsrichtung gestreut. Wie gross ist der Anteil der Eingangsenergie, den diese Photonen auf das Elektron übertragen? Welche Wellenverschiebung tritt auf?

(c) Wie groß ist der maximal mögliche Energieverlust, den ein Photon mit Wellenlänge λ erfahren kann? Wie groß kann der relative Energieverlust für sichtbares Licht maximal sein(${}^{\Delta\lambda_{\max}}/_{\lambda}$)? Wie stark ist er für kosmische Gammastrahlen ($\lambda = 0,1\text{pm}$)?

(d) Warum betrachtet man gemeinhin nur den Fall der Streuung an freien Elektronen und nicht etwa an Protonen? Kommentieren Sie.

Lösung

(a) Es gilt

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\text{Js} \cdot 3 \cdot 10^{8}\text{m/s}}{20 \cdot 10^{-12}\text{m}} = 9,9 \cdot 10^{-15}\text{J} \tag{29}$$

[1]

und $E = cp$, womit gilt

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34}\text{Js}}{20 \cdot 10^{-12}\text{m}} = 3,3 \cdot 10^{-23}\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}\frac{\text{s}}{\text{m}} = 3,3 \cdot 10^{-23}\text{kgm/s} = 62,04\text{k}e\text{V}/c \tag{30}$$

[1]

(b) Für die Comptonstreuung gilt $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$ mit $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2,43\text{pm}$. Hier ist $\theta = 60°$. Damit ist $\Delta\lambda = 0,5\lambda_c = 1,21\text{pm}$. Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung ist also $\lambda' = 21,21\text{pm}$. Das entspricht einer Energie $E' = h\frac{c}{\lambda'} = 9,3 \cdot 10^{-15}\text{J}$. Der relative Energieverlust bei diesem Streuprozess beträgt also etwa 6%.

[2]

(c) Der maximale Energieübertrag wird bei Rückstreuung, also $\theta = 180°$ erreicht. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden.

$\lambda > 2\lambda_c \approx 4,8$pm: Dann ist

$$\Delta E = \left|\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda - 2\lambda_c}\right| = \left|\frac{\frac{2h^2}{m_e}}{\lambda(\lambda - 2\lambda_c)}\right| \tag{31}$$

Man sieht diesem Ausdruck leicht an, dass er für $\lambda \gg 2\lambda_c$ quadratisch mit λ kleiner wird. Im sichtbaren Wellenlängenbereich würde der Effekt der Comptonstreuung maximal zu relativen Wellenlängen von $\Delta\lambda_{\text{max}}/\lambda = 4,8\text{pm}/400\text{nm} = 7 \cdot 10^{-6}$ führen.

$\lambda \ll 2\lambda_c \approx 4,8$pm: In diesem Bereich kann man eine nahezu vollständige Konversion der Photonenenergie in kinetische Energie des Elektrons erreichen. Ein $0,1$pm-Photon wird z.B. in ein $2,9$pm-Photon konvertiert, verliert also etwa 97% seiner Energie.

[2]

(d) Eine Comptonstreuung an Protonen kann durchaus stattfinden. Die entsprechende Comptonwellenlänge für Protonen ist jedoch 2000 mal kleiner als die für Elektronen, denn $\lambda_{\text{C, Proton}} = h/m_p c$. Daher ist der Proton-Compton-Effekt für Röntgenstrahlen etwa so stark wie der Elektronen-Compton-Effekt für sichtbares Licht. Dieser Effekt spielt überhaupt erst eine Rolle für extrem harte Gammastrahlen.

[1]