Technische Universität München
Physik-Department T30

Prof. Dr. Axel Groß

Diplomvorprüfung Theorie 1 (Mechanik)

8. März 2001

$p = r\dot{\phi}$
$p = m r^2 \dot{\phi}$

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
Erlaubte Hilfsmittel: Mathematische Formelsammlung
Hinweis: Bitte schreiben Sie auf jeden Papierbogen Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer und benutzen Sie für jede Aufgabe einen separaten Bogen.

Aufgabe 1: Vergleich von H mit T+V beim ebenen Pendel (10 Punkte)

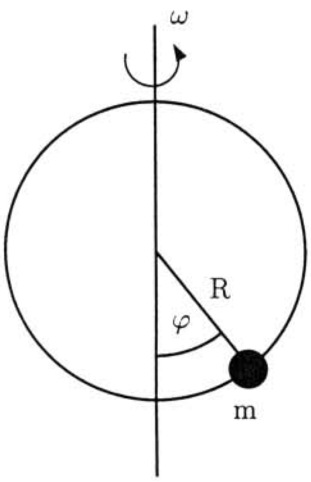
Betrachten Sie die zweidimensionale Bewegung eines ebenen Pendels (eine Masse befestigt an einer masselosen Stange, die Pendelebene sei fest) unter dem Einfluß der Schwerkraft.

a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion und die kanonischen Bewegungsgleichungen.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen.

c) Nun sei die Länge des Pendels eine vorgebene beliebige Funktion der Zeit, d.h. $r = r(t)$. Bestimmen Sie wieder die Hamiltonfunktion H und vergleichen Sie sie mit der Gesamtenergie $T + V$.

Aufgabe 2: Massenpunkt auf rotierendem Ring im Schwerefeld (10 Punkte)



Ein Ring mit Radius R rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Ein Massenpunkt der Masse m kann sich frei auf dem Ring bewegen und unterliegt zuätzlich der Schwerkraft.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V.

b) Zeigen Sie, dass φ der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\varphi} = (\omega^2 \cos\varphi - \frac{g}{R}) \sin\varphi$$

genügt.

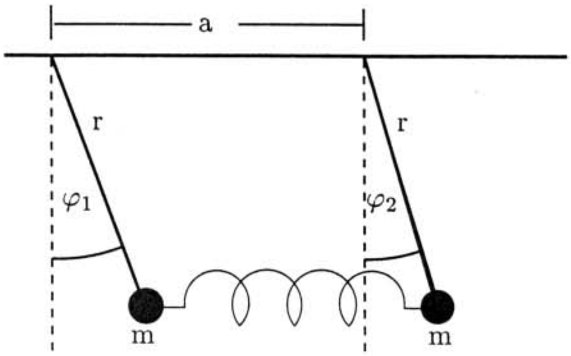
c) Bestimmen Sie die statischen Lösungen für $-\pi < \varphi \leq \pi$ für die Fälle $\omega^2 < \frac{g}{R}$ und $\omega^2 > \frac{g}{R}$.

d) Welche der statischen Lösungen sind stabil?
Hinweis: $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$
$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots$, $\sin\varphi = \varphi + \ldots$

e) Für $\omega^2 = \frac{g}{R}$ zeige man, dass $\varphi = 0$ eine stabile und $\varphi = \pi$ eine instabile statische Lösung sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 3: Gekoppelte Pendel (10 Punkte)



Zwei Kugelpendel der Länge r und der Masse m sind im Schwerefeld der Erde im Abstand a voneinander aufgehängt und können nur in einer Ebene schwingen. Zudem sind sie mit einer Feder (Federkonstante k>0) verbunden, deren länge im unbelasteten Zustand ebenfalls a beträgt.

a) Bestimmen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie V der gekoppelten Pendel.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der gekoppelten Pendel für kleine Auslenkungen auf.

c) Bestimmen Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen. Berechnen sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden der Lösung.

d) Skizzieren Sie die Eigenmoden.

Aufgabe 4: Kanonische Transformation (10 Punkte)

Gegeben ist die Hamiltonfunktion

$$H(P,Q) = P^2 + Q^2$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion $F(p,Q) = -\frac{Q^2}{2} \tan 2p$ und der Gleichungen

$$q = -\frac{\partial F}{\partial p}(p,Q) \quad , \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}(p,Q)$$

die Koordinaten Q und P als Funktion von q und p.

b) Wie lautet die Hamiltonfunktion H in den Variablen q und p?

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Hamiltongleichungen für p und q.

d) Skizzieren Sie die Phasenbahn für P und Q im Phasenraum. Bestimmen Sie die Periodendauer der Bahn.