Musterlösung zur Probeklausur zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2009/2010

Quirin Meindl
Timo Lewke

21.12.09

quirin.meindl@ph.tum.de
timo.lewke@ph.tum.de

Raum: PH3043
Tel.:089/289-12328

Aufgabe 1: Elektromagnetische Welle (~ 15 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei zirkular polarisiert,

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0[\cos{(kz-\omega t)}\vec{e_x} + \sin{(kz-\omega t)}\vec{e_y}], \tag{1}$$

und breite sich in z-Richtung aus. Berechnen Sie für diese Welle

(a) die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r},t)$,

Lösung:

Maxwell-Gleichungen im Vakuum (SI-Einheiten):

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{D} &= 0 && (2)\\
\text{div } \vec{B} &= 0 && (3)\\
\text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} && (4)\\
\text{rot } \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} && (5)
\end{aligned}$$

mit $\vec{D}(\vec{r},t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{H}(\vec{r},t)$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} && (6)\\
&= E_0 \begin{pmatrix} -k\cos{(kz-\omega t)} \\ -k\sin{(kz-\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} = -k\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. && (7)
\end{aligned}$$

Integration nach t liefert dann für die magnetische Induktion

$$\vec{B} = E_0 \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_y \\ E_x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega}(\vec{k} \times \vec{E}). \tag{8}$$

(b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$,

Lösung:
Der Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$ gibt die Energiestromdichte des elektromagnetischen Feldes an:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{1}{\mu_0} \vec{B} && (9) \\ &= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(kz - \omega t) \\ \cos(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} && (10) \\ &= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t) \end{pmatrix} && (11) \\ &= \frac{kE_0^2}{\mu_0 \omega} \vec{e}_z = \epsilon_0 c E_0^2 \vec{e}_z = \text{const.} && (12) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu einer linear polarisierten Welle oszilliert die Energiestromdichte einer zirkular polarisierten Welle nicht.

(c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel θ gegen die Ausbreitungsrichtung ($\vec{k} = k\vec{e_z}$) geneigte, total absorbierende Ebene.

Lösung:
Strahlungsdruck: Wir betrachten eine Fläche, deren Normale mit der Ausbreitungsrichtung der Welle einen Winkel θ einschließt (siehe Abb.1). Die Feldimpulsdichte der elektromagnetischen Welle ist

$$\begin{aligned} \vec{\pi}(\vec{r}, t) &= \vec{D} \times \vec{B} = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} && (13) \\ &= \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{S}. && (14) \end{aligned}$$

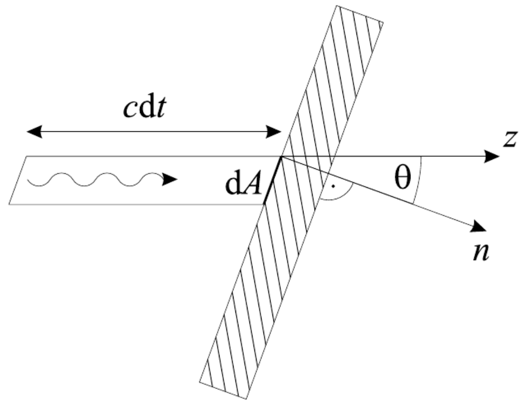


Abbildung 1: Strahlungsdruck einer elektromagnetischen Welle auf eine schiefe Ebene.

Alle Wellenfronten in dem schiefen Zylinder mit Volumen $dV = cdt\cos\theta dA$ erreichen in der Zeit dt das Flächenelement dA. Der Feldimpuls beträgt daher

$$d\vec{p} = \vec{\pi}dV = \frac{1}{c^2}\vec{S}dA_\perp cdt \tag{15}$$

$$= \epsilon_0 E_0^2 dA\cos\theta\, dt\, \vec{e}_z. \tag{16}$$

Die Ebene sei vollständig absorbierend, d.h. der Strahlungsdruck ist

$$p_s = \frac{d\vec{F}\cdot\vec{n}}{dA}, \tag{17}$$

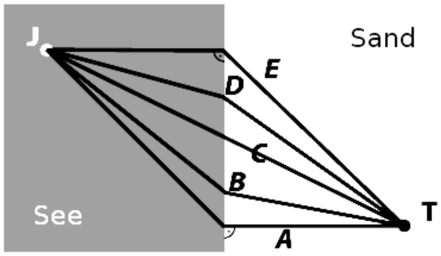
wobei $d\vec{F}\cdot\vec{n}$ die Normalkomponente der auf die Ebene ausgeübten Kraft

$$d\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 dA\cos\theta\,\vec{e}_z \tag{18}$$

ist. Damit folgt für den Strahlungsdruck

$$p_s = \epsilon_0 E_0^2\cos^2\theta. \tag{19}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Snellius-Gesetz (~ 5 Punkte)



Jane wird in einem ruhigen See am Punkt J von einem Krokodil angegriffen. Tarzan, der sich an Land mit gezücktem Buschmesser am Punkt T befindet, möchte ihr zu Hilfe eilen. Tarzan rennt mit $12m/s$ und schwimmt mit $3m/s$. Er wählt den in der Skizze eingezeichneten Weg A. Er kommt knapp zu spät... Auf welchem der eingezeichneten Wege hätte Tarzan die größte Chance gehabt, rechtzeitig bei Jane zu sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung mit dem Snellius'schen Brechungsgesetz.

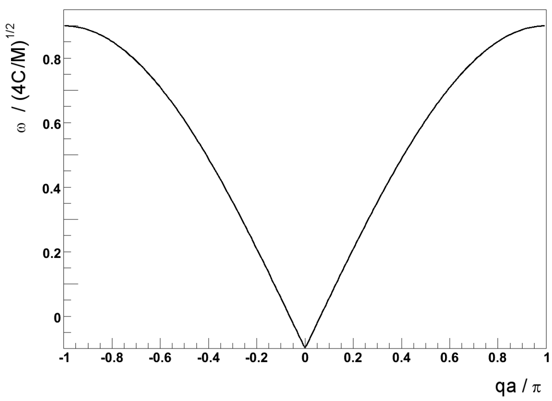
<u>Lösung:</u>
Die Wege A und B kommen von vornherein nicht in Frage. Da Wasser die langsamere Fortbewegungsgeschwindigkeit für Tarzan besitzt, ist es als das dichtere Medium anzusehen. Somit ist der Weg durch die Brechung vom Lot weg sicher nicht der kürzeste Weg (und ganz nebenbei physikalisch unmöglich).
Fall C wäre zu wählen, wenn die Geschwindkeit in Wasser und auf Land gleich groß wären. Da dies aber nicht der Fall ist, ist auch diese Strecke zu verwerfen.
Es bleiben also noch Möglichkeit D und E. Nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz gilt, daß

$$\frac{\sin\theta_{Wasser}}{\sin\theta_{Sand}} = \frac{n_{Sand}}{n_{Wasser}} = \frac{v_{Wasser}}{v_{Sand}} \tag{20}$$

ist. n_i gibt den Brechungsindex des jeweiligen Mediums an und v_i die Fortbewegungsgeschwindigkeit. Für Weg E müßte demnach $\sin\theta_{Sand} > 1$ sein, was nicht möglich ist. Es bleibt also nur Weg D übrig.

Aufgabe 3: Phasen- und Gruppengeschwindigkeit (~ 8 **Punkte**)

Auch in Festkörpern spielen Wellenphänomene eine große Rolle. So können zum Beispiel Atome zu Schwingungen angeregt werden, die sich durch den Festkörper ausbreiten. Diese Gitterschwingungen, auch Phononen genannt, werden durch ihre Dispersionsrelationen charakterisiert. In der Graphik ist der akkustische Zweig einer Phononen-Dispersionsrelation



für ein einatomiges Gitter dargestellt, welche durch die folgende Formel beschrieben wird:

$$\omega^2(q) = \frac{4C}{M} \sin^2 \frac{qa}{2}$$

Hierbei gibt a den Gitterebenenabstand und M die Masse des schwingenden Atoms an. Der Wellenvektor ist durch q gegeben und die Rückstellkraft durch den Term C.

(a) Berechnen Sie die Gruppen- und Phasengeschwindigkeit $(v_{gr}(q), v_{ph}(q))$.

Lösung:
Die Gruppen Geschwindigkeit ergibt sich durch Ableiten der Dispersionsrelation:

$$\omega(q) = \sqrt{\frac{4C}{M}} |\sin \frac{qa}{2}| = \sqrt{\frac{4C}{M}} \begin{cases} \sin \frac{qa}{2} & \frac{qa}{2} > 0 \\ -\sin \frac{qa}{2} & \frac{qa}{2} < 0 \end{cases} \tag{21}$$

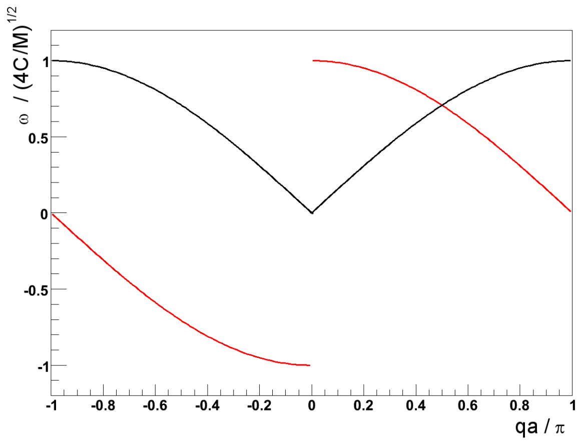
$$\Rightarrow v_{gr}(q) = \frac{\partial \omega}{\partial q} = \sqrt{\frac{4C}{M}} \cdot \frac{a}{2} \begin{cases} \cos \frac{qa}{2} & \frac{qa}{2} > 0 \\ -\cos \frac{qa}{2} & \frac{qa}{2} < 0 \end{cases} \tag{22}$$

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich durch Teilen der Dispersionsrelation durch den Wellenvektor q:

$$v_{ph}(q) = \omega^2(q) = \sqrt{\frac{4C}{M}} \frac{|\sin \frac{qa}{2}|}{q} \tag{23}$$

(b) Skizzieren Sie für die erste Brillouin-Zone (entspricht dem Bereich von $\frac{qa}{\pi} \in [-1; 1]$) die Gruppengeschwindigkeit. Deuten Sie das Verhalten der Welle an den Grenzen der Brillouin-Zone.

Lösung:
An den Grenzen der Brillouin-Zone ist die Gruppengeschwindigkeit gleich Null. Das Bedeutet an dieser Stelle liegt eine stehende Welle vor.

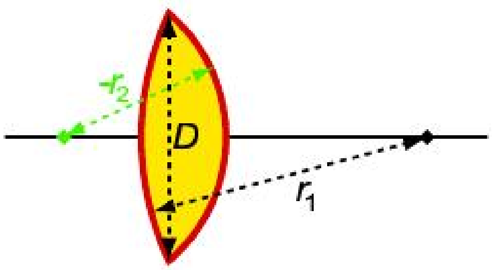


<u>Aufgabe 4:</u> Zoom-Objektiv (~ 9 Punkte)

Das Modell eines Zoom-Objektivs für eine Kleinbild-Kamera soll aus zwei dünnen Sammellinsen mit veränderbarem Abstand d, gleichen Dicken, Brennweiten und Brechzahlen $n = 1.57$ aufgebaut werden und folgende Eigenschaften haben:
Brennweitenvariation zwischen $90\,mm$ und $210\,mm$, Öffnungsverhältnis $1 : 3.5$.

(a) Alle Oberflächen der sphärischen Sammellinsen haben den Krümmungsradius $r = 91mm$. Wie groß ist deren Brennweite f_1 bzw. f_2?

<u>Lösung:</u>
Nach der bekannten Formel kann man aus den Radien ($r_1 = -r_2$) der Linse und des Brechungsindex des Glases die Brennweite berechnen:



$$f = \frac{1}{n-1}\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 79.8mm \tag{24}$$

(b) Welchen Durchmesser D muss die Frontlinse (Eintrittspupille) haben?

<u>Lösung:</u>
Sei k die Blendenzahl. Das Öffnungsverhältnis ist dann duch $\frac{1}{k} = \frac{D}{f}$ gegeben. Für $k = 3.5$ und $f_{max} = 210mm$ ergibt sich:

$$D = \frac{f}{k} = 60mm \tag{25}$$

(c) In welchem Bereich muss der Linsenabstand d veränderbar sein?

Lösung:
Die Brennweiten beider Linsen sind nach Aufgabenstellung gleich, also $f_1 = f_2$. Für eine Linsenkombination mit dem Abstand der Linsen d ergibt sich wie auch schon auf vorigen Übungsblättern die Brennweite zu:

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} \tag{26}$$

$$\Rightarrow d = \frac{2ff_1 - f_1^2}{f} \tag{27}$$

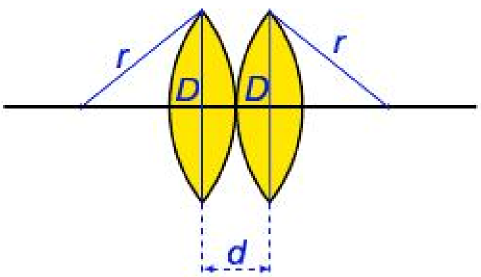
Durch Einsetzen erhält man:

$$f_{min} = 90mm \quad \Rightarrow \quad d_{min} = 88.8mm \tag{28}$$

$$f_{max} = 210mm \quad \Rightarrow \quad d_{max} = 129.3mm \tag{29}$$

(d) Welche kleinste Brennweite ist möglich, wenn beide Linsen denselben Durchmesser D haben?

Lösung:
Der kleinste Abstand zwischen den beiden Linsen entspricht gerade der Linsendicke. Nach



Pythagoras erhalten wir:

$$\left(r - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 = r^2 \tag{30}$$

$$\Rightarrow d^2 - 4rd + D^2 = 0 \tag{31}$$

$$\Rightarrow d = 2r \pm \sqrt{4r^2 - D^2} \tag{32}$$

Man wählt natürlich die kleinere der beiden Lösungen und erhält somit $d = 10.2mm$. Die kleinste Brennweite ist also:

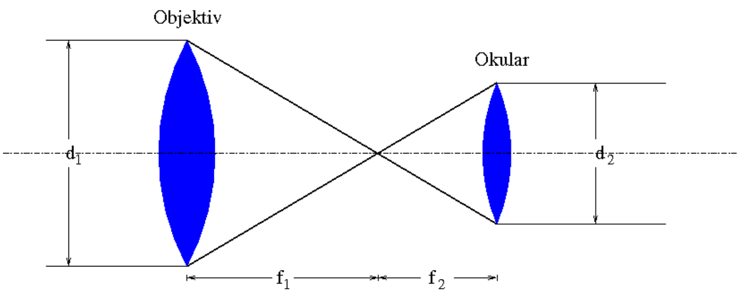
$$f = \frac{f_1^2}{2f_1 - d} = 42.6mm \tag{33}$$

Aufgabe 5: **Feldstecher (~ 7 Punkte)**

Zwei handelsübliche Feldstecher (als Fernrohre anzusehen) haben die Bezeichnungen 8×30 und 7×50. Dabei bedeutet die erste Zahl die Vergrößerung v und die zweite Zahl den Objektivdurchmesser d_1 in mm.

(a) Wie groß ist bei beiden Feldstechern der Durchmesser d_2 des hinter dem Okular austretenden Parallellichtbündels, das von einem unendlich fernen Gegenstand stammt? Bitte eine klare Skizze!

Lösung:
Die Strahlen kommen von einem unendlich fernen Punkt und sind somit parallel.



Laut Strahlensatz gilt:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} \tag{34}$$

$$\Rightarrow \quad d_2 = d_1 \frac{f_2}{f_1} = \frac{d_1}{v} \tag{35}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenützt, dass $f_1/f_2 = v$ gerade die Vergrößerung des Feldstechers ist. Es ergibt sich somit für den Objektivdurchmesser d_2:

$$d_2 = \begin{cases} 3.8mm & (8 \times 30) \\ 7.1mm & (7 \times 50) \end{cases} \tag{36}$$

(b) Welcher der beiden Feldstecher ist in der Dämmerung besser geeignet (begründen Sie Ihre Antwort)?

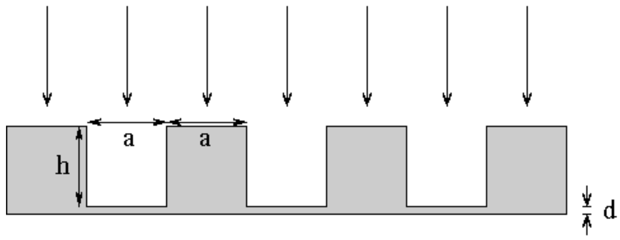
Lösung:
In der Dämmerung ist es wichtig eine große Lichtintensität zu erhalten. Da die Beleuchtungsstärke eines Fernrohres proportional ist zu

$$\frac{\phi}{F} \sim \frac{D^2}{v^2} \tag{37}$$

ist sofort zu erkennen, dass der Feldstecher (7×50) besser geeignet ist.

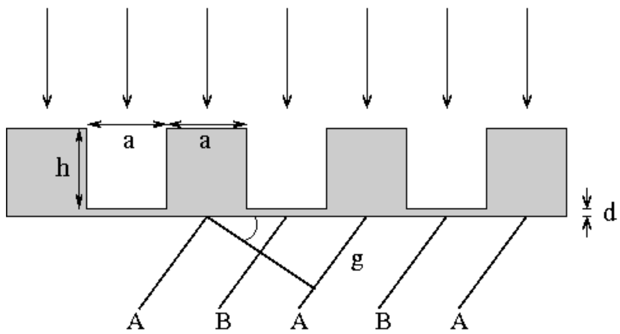
Aufgabe 6: Phasengitter (~ 12 Punkte)

Bei einem Phasengitter wird an Stelle der Amplitude die Phase der transmittierten Welle periodisch moduliert.



Die abgebildete transparente Struktur stellt ein Phasengitter dar, auf das senkrecht von oben eine ebene elektromagnetische Welle einfällt. Wie groß muss die Tiefe h bei vorgegebenem Brechungsindex n gewählt werden, damit die Intensität des Hauptmaximums erster Ordnung maximal wird (hierbei kann die Dicke d komplett vernachlässigt werden)? Welche Intensität hat das Maximum nullter Ordnung in diesem Fall?

Lösung:
Man kann sich das Gitter als Anordnung zweier amplitudenmodulierender Strichgitter denken, die um den halben Gitterabstand (Gitterabstand $= 2a$) seitlich und um die Höhe h nach hinten versetzt sind.



Die Bedingung für maximale Intensität im Hauptmaximum 1.Ordnung ist genau dann gegeben, wenn der Gangunterschied g zwischen zwei benachbarten Strahlen des gleichen Gitters (Strahlen A) genau eine Wellenlänge λ beträgt. Nach dem Strahlensatz muß demnach für den Strahl B ein Gangunterschied von $\lambda/2$ zuzüglich der Höhe h gelten. Maximale Intensität liegt bei konstruktiver Interferenz beider Amplituden (Strahl A und B) vor. Es muß demnach $\Delta s = m\lambda$ gelten. Es folgt:

$$\Delta s = hn - h - a \sin\alpha = m\lambda \tag{38}$$

$$\Delta s = h(n-1) - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \tag{39}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{2m+1}{2(n-1)}\lambda \tag{40}$$

Das Maximum nullter Ordnung ist bei $\alpha = 0$ zu finden, und es ergibt sich somit für den Gangunterschied:

$$\Delta s = h(n-1) = \frac{2m+1}{2(n-1)}\lambda(n-1) \tag{41}$$

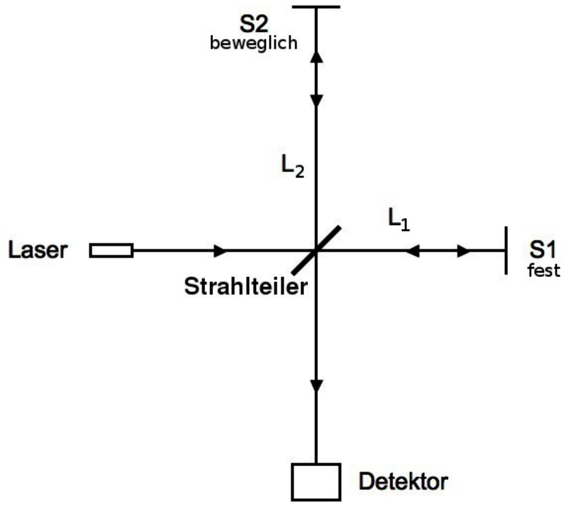
$$\Rightarrow \quad \Delta s = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \tag{42}$$

Der Gangunterschied der beiden Strahlen erfüllt demnach genau die Bedingung für destruktive Interferenz. Dies hat zur Folge, dass die Intensität gleich Null ist.

<u>Aufgabe 7:</u> Michelson-Interferometer ($\sim$ 7 Punkte)

Erläutern Sie anhand einer Skizze das Prinzip des Michelson-Interferometers. Benötigt man zwangsläufig Laserlicht (begründen Sie Ihre Antwort!)? Nennen Sie ein Anwendungsbeispiel für diesen Interferometertyp?

<u>Lösung:</u>
Am Strahlteiler wird die ankommende Welle aufgespalten. Ein Teil geht in den mit 1



gekennzeichneten rechten Strahlengang, der andere Teil wandert nach oben in Strahlengang 2. Die Spiegel reflektieren die Teilstrahlen zurück. Die vom beweglichen Spiegel S_2 kommende Welle gelangt durch den Strahlteiler in den Detektor, wo sie mit der vom festen Spiegel S_1 kommenden (wird am Strahlteiler reflektiert) Welle interferiert. In der Nullstellung, d.h wenn die optischen Wege gleich lang sind ($L_1 = L_2$) und man somit keinen Gangunterschied hat, tritt eine Phasenverschiebung von π auf. Es liegt also destruktive Interferenz vor.
Mit dem Michelson-Interferometer kann man zum Beispiel sehr exakte Längenmessungen durchführen. Durch Einbringung einer Gaskanüle in einen der optischen Wege, kann man den Brechungsindex des Gases bestimmen.
Da es diesen Typ von Interferometer schon länger gibt als den Laser, muss es demnach auch ohne diesen möglich sein. Entscheidend ist, dass die verwendete Lichtquelle eine genügend große Kohärenzlänge besitzt. Ein Beispiel hierfür ist die Quecksilberdampflampe.