Klausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Oberauer, Prof. Dr. L. Fabbietti

Wintersemester 2013/2014

17. Februar 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Im Folgenden ist die Umgebung jeweils Luft und die optischen Elemente sind aus Glas mit $n = 1,5$. Der Radius der Grenzfläche/n ist in allen Fällen 20mm. Berechnen Sie die Lage des gegenstandsseitigen Brennpunkts (gemessen vom Scheitelpunkt der Grenzfläche) für

(a) eine konvexe sphärische Grenzfläche.

(b) eine dünne bikonvexe Linse.

(c) eine dicke bikonvexe Linse ($d = 30$mm).

Der Gegenstand befinde sich jeweils links von der ersten Grenzfläche.

Lösung

(a) In der Abbildungsgleichung der sphärischen Grenzfläche

$$-\frac{n_1}{g} + \frac{n_2 - n_1}{R} = \frac{n_2}{b}$$

betrachten wir den Grenzfall $b = \infty$ und erhalten so für den gegenstandsseitigen Brennpunkt für $n_1 = 1$

$$f_g = -\frac{R}{n_2 - 1}$$

Einsetzen der Zahlenwerte gibt $f_g = +40$mm. Bei der sphärischen Grenzfläche ist die bereits der Abstand vom Scheitelpunkt.

[**1**]

(b) Für dünne Linsen in Luft ist die Brennweite gegeben durch

$$\frac{1}{f} = (n_2 - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Die Radien sind gleich, haben aber entgegengesetztes Vorzeichen. Gemäß der Vorzeichenkonvention erhält R_2 ein negatives Vorzeichen, da sich der Kreismittelpunkt links vom Scheitelpunkt befindet. Einsetzen ergibt

$$f = -f_g = 20\text{mm}$$

Da bei der Herleitung der Formeln für dünne Linsen $d = 0\text{mm}$ gesetzt wurde, fallen die Scheitelpunkte mit dem Linsenzentrum zusammen.

[1,5]

(c) Die Brennweite für dicke Linsen in Luft ist durch

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2}\right)$$

gegeben. Die Vorzeichen werden wie oben berücksichtigt und es ergibt sich

$$f = -f_g = 26,6\text{mm}$$

Gemessen wird jetzt allerdings von der linken Hauptebene, so dass wir den Abstand Scheitelpunkt-Hauptebene noch berücksichtigen müssen. Dieser ist

$$h_1 = -\frac{f(n-1)d}{nR_2}$$

R_2 wird wieder negativ eingesetzt und man erhält $h_1 = 13,3\text{mm}$. Das positive Vorzeichen bedeutet jetzt, dass die Hauptebene rechts vom Scheitelpunkt liegt und somit beträgt der Abstand des Brennpunkts vom Scheitelpunkt $(26,6 - 13,3)\text{mm} = 13,3\text{mm}$.

[2,5]

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Der Abstand Erde-Mond beträgt $3,844 \cdot 10^5\text{km}$.

(a) Bis zu welchen Abstand können Sie zwei Objekte auf der Mondoberfläche mit bloßem Auge unterscheiden (Pupillendurchmesser 4mm, $\lambda = 550\text{nm}$)? Nehmen Sie an, dass das Auge mit Luft gefüllt ist.

(b) Bis zu welchem Abstand können sie zwei Objekte auf der Mondoberfläche mit dem Mt.-Palomar-Teleskop (Spiegeldurchmesser 5m, $\lambda = 550\text{nm}$) unterscheiden?

Lösung

Die Auflösung ist durch eine Lochblende des Durchmessers D beschränkt auf den Winkel $\phi = 1,22\lambda/D$. Daraus ergibt sich der minimale Abstand x zweier Objekte auf der Mondoberfläche aus $\phi = x/L$, wenn L der Abstand zur Mondoberfläche ist:

$$x = 1,22\frac{L\lambda}{D}$$

(a) Wir setzen $D = 4\text{mm}$ ein und erhalten

$$x = 1,22 \frac{3,844 \cdot 10^8 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{4 \cdot 10^{-3}} \text{m} = 64,5\text{km}.$$

(b) Wir setzen $D = 5\text{m}$ ein und erhalten

$$x = 1,22 \frac{3,844 \cdot 10^8 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{5} \text{m} = 51,6\text{m}.$$

[**2**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine punktförmige Lichtquelle beleuchte einen kreisrunden Tisch (Radius 1m). Die Lichtquelle befinde sich direkt über der Tischmitte.

(a) Bei variabler Höhe der Lampe über dem Tisch, wann wird die Bestrahlungsstärke $E_e(\text{W/m}^2)$ am Tischrand maximal?

(b) Wie groß muss bei dieser Anordnung die Leistung P der Lichtquelle sein, damit die Bestrahlungsstärke an jeder Stelle des Tisches mindestens 3W/m^2 beträgt?

Lösung

(a) Bei dieser Anordnung ist der Tisch in der Mitte immer am besten beleuchtet, d.h. die Bestrahlungsstärke ist dort am größten. Die Bestrahlungsstärke wird von zwei Größen bestimmt:

- dem Abstand der Lichtquelle vom Tisch, da die Bestrahlungsstärke mit $1/l^2$ abnimmt, wenn l der Abstand Lichtquelle-Flächenelement ist.
- der Projektion des Flächenelements auf eine Fläche senkrecht zur Verbindung Lichtquelle-Flächenelement (Ausbreitungsrichtung der Lichtstrahlen).

In weiter Entfernung vom Tisch führt der Abstand zur Abnahme der Bestrahlungsstärke, nah am Tisch die Projektion.

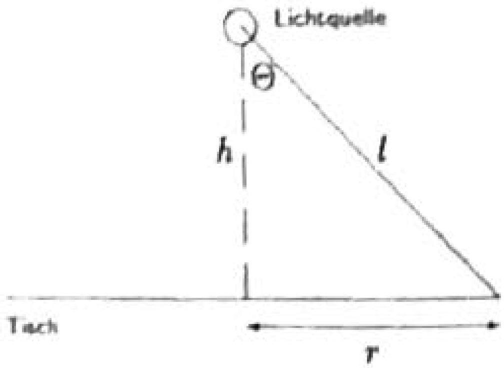
Wir betrachten eine schmale Fläche F entlang des Tischrands (ringförmige Fläche mit der Breite Δr, so dass $F = 2\pi r \Delta r$ ist). Der Abstand zur Lichtquelle sei l. Mit dem Radius r des Tisches und der Höhe h der Lichtquelle über der Tischmitte ist $l = \sqrt{r^2 + h^2}$. Ist Θ der Winkel zwischen h und l, so ist $\cos\Theta = h/l$.

Damit ist die projizierte Fläche (also die Fläche senkrecht zur Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts) $F \cos\Theta = Fh/l$.

Für die Lichtquelle, die die Gesamtleistung P in den vollen Raumwinkel abstrahlt, ist die *Strahlungsflussdichte* S im Abstand l

$$S = \frac{P}{4\pi l^2} = \frac{P}{4\pi(r^2 + h^2)}.$$

[**1**]



Die Projektion auf die Tischfläche wird mit dem Faktor $\cos\Theta$ berücksichtigt und wir erhalten für die Bestrahlungsstärke E_e am Tischrand

$$\begin{aligned} E_e = S\cos\Theta &= \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)}\cos\Theta = \frac{P}{4\pi(r^2+h^2)}\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \\ &= \frac{Ph}{4\pi(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

[**1**]

Diesen Ausdruck müssen wir jetzt nach h ableiten, um das Maximum zu finden. Aus physikalischen Überlegungen wissen wir bereits, dass es Minima für $h = 0$ und $h = \infty$ gibt. Da

$$\frac{\mathrm{d}E_e}{\mathrm{d}h} = \frac{(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h\frac{3}{2}(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}}2h}{(r^2+h^2)^3}\frac{P}{4\pi}$$

[**1**]

ist, können wir das Maximum aus

$$(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - 3h^2(r^2+h^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

bestimmen. Durch Multiplikation mit $\sqrt{r^2+h^2}^{-1}$ erhalten wir

$$r^2 + h^2 - 3h^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2.$$

Also ist

$$h = \frac{1}{\sqrt{2}}r.$$

Die Bestrahlungsstärke ist also maximal, wenn die Lichtquelle in einer Höhe $h = 70,7$cm angebracht wird.

[**1**]

(b) Wir fordern $E_e = 3$W/cm und hängen die Lichtquelle in der eben errechneten optimalen Höhe auf. Die geringste Betrahlungsdichte ist am Tischrand, so dass wir die oben gefundene Gleichung für E_e benutzen können. Wenn wir diese nach P auflösen, erhalten wir

$$P = E_e\frac{4\pi(r^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h}.$$

Einsetzen ergibt $P = 97,95\text{W}$.

[2]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Im Folgenden soll ein zylindrischer Plexiglasstab mit polierten Oberflächen umgeben von Luft als Lichtleiter eingesetzt werden. Der Brechungsindex von Plexiglas ist $n = 1,491$. Sie wollen den Lichtleiter zur Datenübertragung benutzen. Er soll eine Länge von 1km und einen Durchmesser von 1cm haben. Welche *Baudrate* (Pulse pro Sekunde) können Sie erreichen, wenn Sie annehmen, dass sie Einzelpulse noch identifizieren können, wenn ihr Abstand das Doppelte ihrer Breite ist? Nehmen Sie dazu infinitesimal kurze Pulse am Eingang an.

Hinweis: Die Breite der Pulse entsteht durch unterschiedlichen Strahlengänge eines Pulses innerhalb des Lichtleiters.

Lösung

Man betrachtet den Laufzeitunterschied zwischen direktem Stahl und einem unter dem kritischen Winkel hin- und herreflektierten Strahl. Die Lichtquelle befinde sich auf der Stabachse. Der kritische Winkel Θ_T ist gegeben durch

$$\sin\Theta_T = \frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Plexi}}}$$

[1]

Die Geschwindigkeit v_{Plexi} des Lichts im Plexiglas-Stabs ist c/n_{Plexi}. Also ist die kürzeste Zeit bei einer Länge L des Stabs

$$t_{\text{min}} = \frac{L}{v_{\text{Plexi}}} = \frac{Ln_{\text{Plexi}}}{c}$$

[1]

Wie man sich leicht veranschaulichen kann, hängt der Weg, den der reflektierte Strahl zurücklegt, nur von der Länge des Stabes und dem Winkel ab, nicht jedoch vom Durchmesser des Stabs. Wir erhalten für den Weg l

$$l = \frac{L}{\sin\Theta_T} = L\frac{n_{\text{Plexi}}}{n_{\text{Luft}}} = Ln_{\text{Plexi}}$$

[1]

In unserem Fall beträgt der Weg $1,491\text{km}$ ($n_{\text{Luft}} = 1$).

Mit $t_{\text{max}} = l/v_{\text{Plexi}}$ können wir den Laufzeitunterschied berechnen:

$$\Delta t = \frac{Ln_{\text{Plexi}}}{c}(n_{\text{Plexi}} - 1)$$

Es ergibt sich eine Zeitdifferenz von $2,44\mu\text{s}$. Zur Informationsübertragung gelangen wir als Pulsabstand das Doppelte der Breite. Das sind etwa $5\mu\text{s}$, das heißt, wir können maximal $200 \cdot 10^3\text{Bits/s}$ übertragen.

[1]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Zwei linear polarisierte elektromagnetische Wellen gleicher Wellenlänge interferieren in einem Punkt P. Die elektrischen Felder der beiden Wellen sind parallel. Die Wellen haben die Intensitäten I_1 und I_2. Ihre Phasendifferenz sei θ.

(a) Wie hängt die Gesamtintensität I von I_1, I_2 und θ ab?

(b) Wann wird I maximal, wann minimal?

(c) Der Interferenzkontrast ist als

$$K := \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

definiert. Skizzieren Sie den Interferenzkontrast in Abhängigkeit vom Intensitätsverhältnis $x = {}^{I_1}/_{I_2}$ der beiden Wellen zwischen 1 und 100.

Lösung

(a) Das Gesamtamplitudenquadrat der sich überlagernden Wellen ist

$$\vec{E}_0^2 = \vec{E}_{10}^2 + \vec{E}_{20}^2 + 2\vec{E}_{10}\vec{E}_{20}\cos\theta.$$

Da die elektrischen Felder parallel sind, ist $\vec{E}_{10}\vec{E}_{20} = E_{10}E_{20}$. Für die Intensitäten gilt

$$I = c\epsilon_0 \frac{E_0^2}{2}$$
$$I_1 = c\epsilon_0 \frac{E_{10}^2}{2}$$
$$I_2 = c\epsilon_0 \frac{E_{20}^2}{2}$$

Daraus erhalten wir

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\theta$$

[2]

(b) Maxima (konstruktive Interferenz) ergeben sich für $\cos\theta = 1$, also für $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dann ist $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$. Entsprechend ergeben sich Minima (destruktive Interferenz) für $\cos\theta = -1$ bzw. $\theta \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Die Gesamtintensität ist dann $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.

[2]

(c) Einsetzen von $I_{\max}$ und $I_{\min}$ ergibt für den Inteferenzkontrast

$$K = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Mit $x = {}^{I_1}/_{I_2}$ erhalten wir daraus

$$K = \frac{2\sqrt{\frac{I_1^2}{x}}}{I_1 + \frac{I_1}{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1 + \frac{1}{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{x + 1}$$

Abbildung 1 zeigt $K(x)$ für $x \in (1, 100)$.

[3]

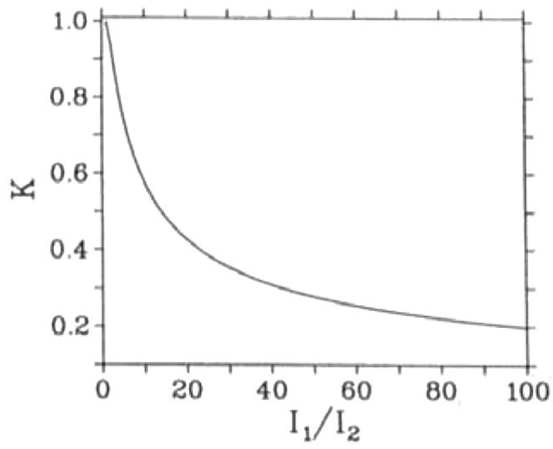


Abbildung 1: Der Interferenzkontrast K in Abhängigkeit vom Intensitätsverhältnis I_1/I_2. Die elektrischen Felder der beiden beteiligten Wellen sind parallel.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Im Phasenverschiebungs-Plättchen läuft der Lichtstrahl senkrecht zur optischen Achse. Aufgrund der resultierenden Phasenverschiebung zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl kommt es zur Änderung der Polarisation. Ein monochromatischer Lichtstrahl durchlaufe ein $\lambda/2$- bzw. ein $\lambda/4$-Plättchen. Wie ist die Polarisation des Lichts nach dem Plättchen, wenn die einfallende Welle

(a) parallel oder senkrecht zur optischen Achse des Kristalls linear polarisiert ist.

(b) unter einem Winkel von 45° zur optischen Achse des Kristalls linear polarisiert ist.

(c) rechtszirkular polarisiert ist.

(d) unpolarisiert ist.

Hinweis: Geben Sie bei linearem Licht den Winkel zur optischen Achse an.

Lösung

Phasenverschiebungs-Plättchen haben die optische Achse parallel zur Grenzfläche. In dieser Geometrie sind sowohl im optisch inaktiven als auch im optisch aktiven Material ordentlicher und außerordentlicher Strahl linear polarisiert. Außerdem werden bei senkrechtem Einfall weder der außerordentliche noch der ordentliche Strahl gebrochen. Sie werden aber gegeneinander phasenverschoben.

Der einfallende Lichtstrahl sei in z-Richtung. Die optische Achse sein in x-Richtung. Linear polarisiertes Licht in x- bzw. y-Richtung außerhalb des Plättchens ist also gegeben durch

$$\vec{E}_x = E_{x0} \cos(kz - \omega t)\hat{x}$$
$$\vec{E}_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \phi)\hat{y}$$

Die Phase der x-polarisierten Welle ist willkürlich gleich Null gesetzt. Die Phase der y-polarisierten ist der Phasenunterschied zur x-polarisierten und erlaubt uns beliebige Wellen aus den beiden linear polarisierten zusammenzusetzen. Im Plättchen ist das in x-Richtung polarisierte Licht der außerordentliche Strahl und das in y-Richtung polarisierte der ordentliche Strahl.

Beim Durchgang durch doppelbrechendes Material haben ordentlicher und außerordentlicher Strahl verschiedene Brechungsindizes. Wir können für die Wellenvektoren also als $k_{\mathrm{ao}} = n_{\mathrm{ao}} k_0$ und $k_{\mathrm{o}} = n_{\mathrm{o}} k_0$ schreiben. In der Literatur sind die Brechungsindizes für die Ausbreitungsrichtung senkrecht zur optischen Achse angegeben. Für Kalkspat ist z.B. der Brechungsindex für den ordentlichen Strahl $n_{\mathrm{o}} = 1,658$ und für den äußerordentlichen $n_{\mathrm{ao}} = 1,486$ (optisch negativer Kristall). Der ordentliche Strahl bleibt also in diesem Fall hinter dem außerordentlichen zurück. Die optische Achse ist hier also die schnelle Achse, senkrecht dazu ist die langsame Achse. Dies führt zu einer zusätzlichen Phasenverschiebung $\Delta\phi$ zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl. Hinter dem Plättchen ist die y-polarisierte Welle also

$$\vec{E}_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \phi + \Delta\phi)\hat{y}$$

$\Delta\phi$ ist beim $\lambda/2$-Plättchen gleich π und beim $\lambda/4$-Plättchen gleich $\pi/2$. Die zusätzliche Phasenverschiebung ist positiv für die y-Richtung, wenn wir eine schnelle optische Achse in x-Richtung haben. Dann ist $n_{\mathrm{o}} = n_{\mathrm{ao}} + \Delta n > n_{\mathrm{ao}}$ und wir können $\Delta\phi$ als $\Delta n k_0 d$ identifizieren, wobei d die Dicke des Plättchens ist.

Man kann sich das Vorzeichen von $\Delta\phi$ auch noch anders klarmachen. Das Zeitglied hat ein negatives Vorzeichen. Eine Funktion $\cos(kz - \omega t + \Delta\phi)$ erreicht einen Funktionswert also später als $\cos(kz - \omega t)$, wenn $\Delta\phi$ positiv ist.

(a) Ist der Lichtstrahl parallel bzw. senkrecht zur optischen Achse polarisiert, so ist er im Plättchen gerade der außerordentliche bzw. der ordentliche Lichtstrahl und es ergibt sich keine Phasenverschiebung. Die Polarisation bleibt also sowohl beim $\lambda/2$- als auch beim $\lambda/4$-Plättchen erhalten.

[**1**]

(b) Unter einem Winkel von 45° zur optischen Achse polarisiertes Licht lässt sich un einen ordentlichen und einen außerordentlichen Lichtstrahl gleicher Intensität aufteilen. Die Phasendifferenz ϕ zwischen beiden ist Null:

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \cos(kz - \omega t)[\hat{x} + \hat{y}]$$

Das $\lambda/2$-Plättchen verschiebt die Phasen um π gegeneinander, also

$$\vec{E}_y = E_{y0} \cos(kz - \omega t + \pi)\hat{y} = -E_{y0} \cos(kz - \omega t)\hat{y}.$$

Es ändert sich also das Vorzeichen einer Komponente. Dies bedeutet, dass sich hinter dem Plättchen die Polarisationsrichtung der Welle um 90° gedreht hat. Die Polarisationsrichtung wird also an der optischen Achse „gespiegelt“.

Das $\lambda/4$-Plättchen verschiebt die Phasen um $\pi/2$ gegeneinander, also

$$\vec{E}_y = E_{y0} \cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} = -E_{y0} \sin(kz - \omega t)\hat{y}.$$

Die Addition von Kosinus und Sinus ergibt eine zirkular polarisierte Welle. In unserem Beispiel ($n_{\mathrm{o}} > n_{\mathrm{ao}}$) ist die Welle linkszirkular polarisiert.

[**2**]

(c) Eine rechtszirkular (im Uhrzeigersinn) polarisierte Welle ist durch

$$\vec{E} = \frac{E_0}{2} \left(\cos(kz - \omega t)\hat{x} + \sin(kz - \omega t)\hat{y}\right)$$

gegeben. Durch das $\lambda/2$-Plättchen wird die y-Komponente zu

$$\vec{E}_y = E_{y0} \sin(kz - \omega t + \pi)\hat{y} = -E_{y0} \sin(kz - \omega t)\hat{y}$$

Also erhalten wir eine linkszirkular polarisierte Welle. Durch das $\lambda/4$-Plättchen wird die y-Komponente zu

$$\vec{E}_y = E_{y0} \sin\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{y} = -E_{y0} \cos(kz - \omega t)\hat{y}$$

Also erhalten wir eine linear polarisierte Welle. Die Polarisationsebene bildet einen Winkel von 45° mit der optischen Achse. Die Richtung hängt wieder von den Brechungsindizes ab.

[**2**]

(d) Besteht vor dem Plättchen keine Phasenbeziehung zwischen den Komponenten, so besteht auch hinter dem Plättchen keine. Ein Phasenverschiebungs-Plättchen kann also nicht als Polarisator verwendet werden.

[**1**]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass aus dem *Planckschen Strahlungsgsetz* für die spezifische Ausstrahlung eine Lambert Strahlers

$$M_\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}.$$

für kurze Wellenlängen das Wiensche Strahlungsgesetz und für lange Wellenlängen in das Rayleigh-Jeans Strahlungsgesetz folgt.

Lösung

Wir gehen vom Planckschen Strahlungsgesetz aus. Im Grenzfall kurzer Wellenlängen wird der Exponent im Nenner sehr groß und es gilt:

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \gg 1$$

[**1**]

Wir können also die Eins im Nenner der Planckschen Strahlungsformel vernachlässigen und es ergibt sich das Wiensche Strahlungsgesetz

$$M_\lambda^{\mathrm{W}}(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \exp\left(-\frac{hc}{\lambda k_B T}\right).$$

[**1**]

Für Wellenlängen wird der Exponent klein und erlaubt die Entwicklung

$$\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) \approx 1 + \frac{hc}{\lambda k_B T}.$$

[**1**]

Wir erhalten also das Rayleigh-Jeans-Gesetz

$$M_\lambda^{\mathrm{RJ}}(\lambda, T) \approx \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} k_B T$$

[**1**]