....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. H. Spohn

17. Februar 2012, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

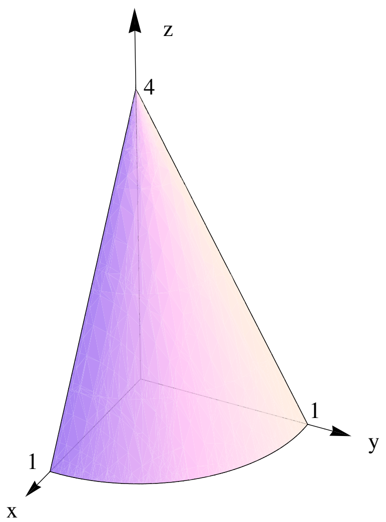
Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Oberflächenintegrale I** **[17 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{z}{4},\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \subset [0, \infty[^3$ und das Vektorfeld $v(x, y, z) = (x^2 + y^2, 1, z^2)$.

(a) Skizzieren Sie die Menge K. **[2]**



(b) Geben Sie eine Parametrisierung des Mantelflächenstücks $M := \partial K \cap]\,0, \infty[^3$ an **[2]**

$$\Phi(r, \phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 4(1-r) \end{pmatrix},\ r \in]0, 1],\ \phi \in]0, \tfrac{\pi}{2}[$$

Fortsetzung: nächste Seite

Lösung:

(a) , (b) s.o.

1. **Oberflächenintegrale I (Fortsetzung)**

   (c) Berechnen Sie den Fluss F von v durch das Flächenstück M, wobei der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt. **[6]**

   (d) Berechnen Sie den Gesamtfluss G von v durch ∂K mit Hilfe des Satzes von Gauß. **[7]**

LÖSUNG:

(c) $\partial_r\Phi \times \partial_\phi\Phi = \begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\\ -4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-r\sin\phi\\ r\cos\phi\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4r\cos\phi\\ 4r\sin\phi\\ r\end{pmatrix}$. Das Normalenfeld zeigt, wie gefordert, vom Ursprung weg. Somit ist mit $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\phi\, d\phi = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\phi\, d\phi = 1$ und $\int\limits_0^1 r^n dr = \frac{1}{n+1}$.

$$F = \int_M \langle v, n\rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle v\circ\Phi, \partial_r\Phi \times \partial_\phi\Phi\rangle\, d\phi\, dr = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} r^2\\ 1\\ 16(1-r)^2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4r\cos\phi\\ 4r\sin\phi\\ r\end{pmatrix} d\phi\, dr$$
$$= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(4r^3\cos\phi + 4r\sin\phi + 16(r^3 - 2r^2 + r)\big) d\phi\, dr$$
$$= \int_0^1 (4r^3 + 4r + 8\pi(r^3 - 2r^2 + r))dr = 1 + 2 + 8\pi(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}) = 3 + \frac{2}{3}\pi,$$

(d) Nach dem Satz von Gauss ist mit $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2x + 2z$,

$$G = \int_{\partial K} \langle v, n\rangle d\sigma = \int_K \operatorname{div} v\, d^3x = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4(1-r)} (2r\cos\phi + 2z) r\, dz\, d\phi\, dr$$
$$= \int_0^1 \big(8r^2(1-r) + \tfrac{\pi}{2} r (4(1-r))^2\big) dr = \int_0^1 \big(8r^2 - 8r^3 + 8\pi(r^3 - 2r^2 + r)\big) dr$$
$$= \tfrac{8}{3} - 4 + 8\pi(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\pi,$$

wobei Zylinderkoordinaten mit dem Volumenelement $r\, dz\, d\phi\, dr$ verwendet wurden.

2. **Oberflächenintegrale II** **[9 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 9,\ x \geq 0\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Punkt $(0,0,4)$ wegzeigt, und $v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 23\sin(e^{x+y}) + \arctan(y + 4z^2) \\ \sin x - z \\ y \end{pmatrix}$ ein Vektorfeld.

(a) Was besagt allgemein der Satz von Stokes für den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch S? **[2]**

$$\int_S \langle \operatorname{rot} v, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle v, dx \rangle$$

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Randlinie ∂S von S an. **[3]**

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos t \\ 4 + 3\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

(c) Berechnen Sie den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch S. **[4]**

$$\int_S \langle \operatorname{rot} v, n \rangle d\sigma = \quad 18\pi$$

Lösung:

(a) s.o.

(b) $\partial S = \{(0,y,z) \mid y^2 + (z-4)^2 = 9\}$, also ein Kreis mit Radius 3 und Mittelpunkt $(0,0,4)$ in der yz-Ebene. Der Orientierung von S entsprechend wird er im mathematischen Sinne durchlaufen.

(c) $$\int_S \langle \operatorname{rot} v, n \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle v, dx \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 - 4 - 3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-12\sin t + 9\sin^2 t + 9\cos^2 t) dt = 18\pi.$$

3. **Residuen** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z-k}$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) f hat bei $z = 1$ **[1]**

☐ eine hebbare Singularität ☒ einen Pol erster Ordnung ☐ einen Pol n-ter Ordnung
☐ eine wesentliche Singularität ☐ eine einfache Nullstelle

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = 1$. **[3]**

$$\mathrm{Res}_1(f) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(c) Wie lautet der Hauptteil $H_1(z)$ der Laurent-Reihe von f in einer punktierten Kreisscheibe um $z = 1$? **[2]**

$$H_1(z) = \frac{\mathrm{Res}_1(f)}{z-1}$$

(d) Welchen Konvergenzradius R hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 1$? **[2]**

$$R = 1$$

LÖSUNG:

(a) f hat seine Pole bei $z = 1, \ldots, n$. Alle sind von erster Ordnung. **[1]**

(b) $\mathrm{Res}_1(f) = \prod_{k=2}^{n} \frac{1}{1-k} = \frac{1}{(-1)\cdot(-2)\cdots(-n+1)} = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}$ **[3]**

(c) s.o.

(d) Der Konvergenzbereich ist eine Kreisscheibe um 1 die bis zum nächsten Pol reicht, also ist der Konvergenzradius 1.

4. **Komplexe Wegintegrale** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 0,\ \operatorname{Im} z \geq 0,\ |z| \leq 2\}$.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von ∂G durch drei Wegstücke an. **[3]**

$\gamma_1(t) =\ t,\ t \in [0,2]$	$\gamma_2(t) =\ 2e^{it},\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$	$\gamma_3(t) =\ (2-t)i,\ t \in [0,2]$

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{\partial G} f(z)dz$ für $f(z) = |z| \operatorname{Re} z \operatorname{Im} z$. **[3]**

(c) Bestimmen Sie, mit Begründung, den Wert des Integrals $\int\limits_{\partial G} \frac{z^3}{z^2-2i}dz$. **[4]**

Lösung:

(a) s.o.

(b) $\int\limits_{\partial G} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int\limits_0^2 0 \cdot 2dt + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\ \sin t(2ie^{it})dt + 0$

$= 4i \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\ \sin t\,dt - 4 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\ \cos t\,dt = 4i \left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 4 \left[\frac{\sin^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}(-1+i).$

(c) $\int\limits_{\partial G} \frac{z^3}{z^2-2i}dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{1+i}(\frac{z^3}{z^2-2i}) = 2\pi i \frac{(1+i)^3}{2(1+i)} = -2\pi$, wegen Residuensatz. Pole bei $\pm(1+i)$, der Pol $1+i$ liegt in G.

5. **Fourierreihen** **[10 Punkte]**

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

(a) Beweisen Sie für $g(x) = f(-x)$, dass $\widehat{g}_k = \widehat{f}_{-k}$. **[3]**

$$\widehat{g}_k = \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\tfrac{dx}{2\pi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(-x)e^{-ikx}\tfrac{dx}{2\pi} = -\int\limits_{\pi}^{-\pi} f(x)e^{ikx}\tfrac{dx}{2\pi} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i(-k)x}\tfrac{dx}{2\pi} = \widehat{f}_{-k}$$

(b) Was besagt die Parsevalsche Gleichung (Parseval 1) für f? **[2]**

$$\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}_k|^2$$

(c) Sei nun $f(x) = \frac{\pi-|x|}{2}$. Die Fourierkoeffizienten von f lauten $\widehat{f}_k = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{für } k=0, \\ \frac{(-1)^k-1}{2\pi k^2} & \text{für } k \neq 0. \end{cases}$

Berechnen Sie mit Hilfe von (b) den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$. **[5]**

Lösung:

(a) , (b), s.o.,

(c) Wir benutzen Parseval 1: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} h(x)^2 dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{(x-\pi)^2}{4} dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^2}{12}$.

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{h}_k|^2 = \frac{\pi^2}{16} + \sum\limits_{k\in 2\mathbb{Z}+1} \frac{1}{\pi^2 k^4} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$. Also $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{8}(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = \frac{\pi^4}{96}$.

6. **Fouriertransformation** **[6 Punkte]**

Sei $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Ist die Fouriertransformierte $\widehat{f}(k)$ quadratintegrabel? **[2]**

☒ Ja ☐ Nein

(b) Berechnen Sie $\widehat{f}(k)$. **[4]**

LÖSUNG:

(a) Da f offenbar quadratintegrabel ist und die Fouriertransformation unitär auf dem Raum der quadratintegrablen Funktionen wirkt ist $\widehat{f}$ auch quadratintegrabel, oder explizit (b), der Abfall von $|\widehat{f}(k)|^2$ ist $\mathcal{O}(k^{-4})$.

(b)

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-(1+ik)x}dx = \int_{0}^{\infty} i\frac{d}{dk}e^{-(1+ik)x}dx \\ &= \int_{0}^{\infty} i\frac{d}{dk}e^{-(1+ik)x}dx = i\frac{d}{dk}\frac{1}{1+ik} = \frac{1}{(1+ik)^2}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\widehat{f}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-(1+ik)x}dx = \left[x\frac{e^{-(1+ik)x}}{-(1+ik)}\right]_0^\infty - \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-(1+ik)x}}{-(1+ik)}dx \\ &= \left[\frac{e^{-(1+ik)x}}{(1+ik)^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{(1+ik)^2}\end{aligned}$$

also

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(1+ik)^2}$$