Technische Universität München **13. März, 2007, 10:00 – 11:30**

Diplomvorprüfung Theoretische Physik 3: QUANTENMECHANIK

1.(a) Geben Sie für jeden der folgenden Operatoren an (ohne Beweis!)
(i) ob er hermitesch ist, (ii) ob er unitär ist:

$$\hat{x},\ \frac{\partial}{\partial \hat{p}_x},\ \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix},\ \exp\left(\mathrm{i}\pi\hat{\sigma}_z\right)\,. \qquad \text{(6P)}$$

(b) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien zwei hermitesche Operatoren mit nicht-entarteten Eigenwerten. Zeigen Sie: Wenn der Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ verschwindet, dann gibt es eine Basis des Hilbertraums, die aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\hat{A}$ und $\hat{B}$ besteht. (2P)

2. Ein Teilchen der Masse M bewegt sich unter dem Einfluss des dreidimensionalen Kastenpotenzials

$$V(\vec{r} = \begin{cases} -V_0 = -\frac{\hbar^2 K_0^2}{2M}\ , & 0 \le r \le R \\ \quad 0 \quad , & r > R \end{cases} \quad , \qquad K_0 R \gg 1\ .$$

Wegen der Rotationsinvarianz des Potenzials können die Energieeigenfunktionen geschrieben werden als: $\psi(\vec{r}) = \dfrac{\phi_{l,m}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$.

(a) Welche radiale Schrödingergleichung erfüllen die Radialwellenfunktion $\phi_{l,m}(r)$? Welche Randbedingungen müssen sie bei $r \to 0$ und — für gebundene Zustände — bei $r \to \infty$ erfüllen. (3P)

(b) Die radialen Eigenfunktionen zu gegebenen Drehimpulsquantenzahlen l, m mögen mit aufsteigender Energie durch die Radialquantenzahl $n = 0, 1, 2, \ldots$ gekennzeichnet werden. Von welchen Quantenzahlen hängt die Energie $E_{n,l,m}$ tatsächlich ab? Geben Sie die Entartung des Energieeigenwerts $E_{n,l,m}$ an. (3P)

(c) Geben Sie eine Abschätzung (± 1) für die Anzahl der gebundenen Zustände mit $l = 0$. (4P)

(d) Nehmen wir an, das Teilchen habe Spin $\frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Energieverschiebungen, welche durch eine Spin-Bahn-Kopplung

$$\hat{V}_{LS} = \frac{1}{2M^2c^2} \frac{V_0}{R^2} \hat{\vec{L}} \cdot \hat{\vec{S}}$$

hervorgerufen werden. Diskutieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus und geben Sie die Entartung der Energieeigenwerte mit Spin-Bahn-Kopplung an. (4P)

3. Ein ruhendes Elektron befinde sich im normierten Eigenzustand $|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ des Operators $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, d.h. der Eigenwert ist $+\frac{\hbar}{2}$. Nun wird ein konstantes Magnetfeld der Stärke B angelegt, das in x-Richtung zeigt, d.h. der zugehörige Hamiltonoperator hat die Form

$$\hat{H} = -\mu_{\mathrm{B}} B \hat{S}_x \,, \quad \text{mit} \quad \hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Zeigen Sie: $\cos\left(\alpha \hat{S}_x\right) = \mathbf{1} \cos\left(\alpha \frac{\hbar}{2}\right)$, $\quad \sin\left(\alpha \hat{S}_x\right) = \frac{2}{\hbar}\hat{S}_x \sin\left(\alpha\frac{\hbar}{2}\right)$, wobei α eine endliche reelle Zahl ist. (4P)

(b) Die zeitliche Entwicklung des Zustands, ausgedrückt durch Eigenzustände von $\hat{S}_z$, ist $|\Psi(t)\rangle = a(t)|\uparrow\rangle + b(t)|\downarrow\rangle$.
Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $a(t)$, $b(t)$. (2P)

(c) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Erwartungswerts $\langle\Psi(t)|\hat{S}_x|\Psi(t)\rangle$. Wie hätten Sie dieses Ergebnis ohne Rechnung herleiten können? (2P)

(d) Wann befindet sich das Elektron im Zustand $|\downarrow\rangle$? (2P)

4. Ein Teilchen der Masse M bewegt sich in einem eindimensionalen harmonischen Potenzial,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M}{2}\omega^2\hat{x}^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{\beta^2\hat{p}^2}{\hbar^2} + \frac{\hat{x}^2}{\beta^2}\right) , \quad \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} .$$

Der Operator $\hat{b}$ sei definiert durch: $\quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\beta} + \mathrm{i}\frac{\beta\hat{p}}{\hbar}\right)$.

(a) Drücken Sie die Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$ und $\hat{H}$ durch $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$ aus. (3P)

(b) Verifizieren Sie folgende Vertauschungsrelationen:
$[\hat{H}, \hat{b}] = -\hbar\omega\hat{b}$, $\quad [\hat{H}, \hat{b}^\dagger] = \hbar\omega\hat{b}^\dagger$, $\quad [\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. (3P)

(c) Sei $|0\rangle$ ein auf Eins normierter Zustand mit der Eigenschaft $\hat{b}|0\rangle = 0$. Zeigen Sie, dass $|0\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{H}$ ist und berechnen Sie den Eigenwert E_0. (1P)

(d) Sei $|n\rangle = c_n\left(\hat{b}^\dagger\right)^n|0\rangle$, $\quad c_n \neq 0$, $\quad n = 1, 2, \ldots$. Zeigen Sie, dass die Zustände $|n\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}$ sind und berechnen Sie die Eigenwerte E_n. (3P)

(e) Zeigen Sie, dass es neben E_0 und den E_n keine weiteren Eigenwerte von $\hat{H}$ gibt. (3P)