Probeklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Pfeiffer
Wintersemester 2013/2014
15. November 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Was ist eine Zeitmessung (Definition)? (1 oder 2 Sätze)

(b) Was ist der Mittelwert $\bar{x}$ und die Standardabweichung σ folgender drei Messwerte: 8, 5, 8?

Lösung

(a) Eine Zeitmessung ist die reproduzierbare Messung der Zeitdifferenz innerhalb eines physikalischen Vorgangs. Dabei sind sowohl kontinuierliche (Sanduhr, radioaktiver Zerfall), als auch periodische Vorgänge möglich (Pendelschwingung, Erdrotation)

[**1**]

(b) Der Mittelwert ist:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 7 \tag{1}$$

[**1**]

Die Standardabweichung ist

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(\bar{x} - x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{3} \tag{2}$$

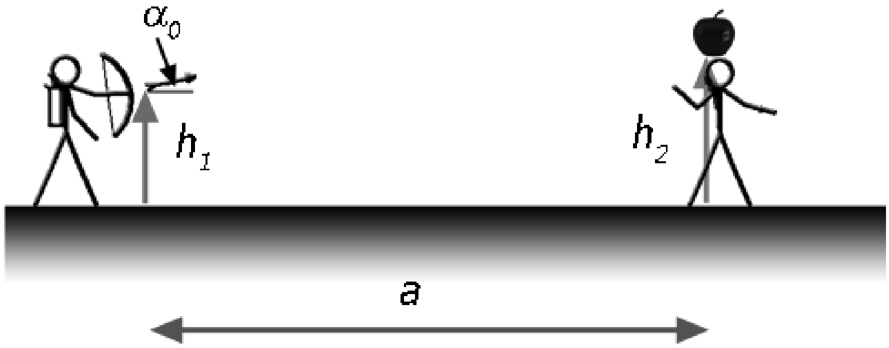
[**1**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wilhelm Tell will mit einem Pfeil ($m_1 = 50$g) einen Apfel ($m_2 = 200$g) vom Kopf seines Sohnes schießen. Die Luftreibung ist zu vernachlässigen.

Berechnen Sie

(a) die Abschusshöhe h_1 , die Tell wählen muss, damit er bei einem Abschusswinkel $\alpha_0 = 4°$ zur Horizontalen, einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 70$m/s und einem Abstand $a = 20$m vom Sohn den Apfel (Höhe $h_2 = 1,50$m) genau trifft.



(b) den Winkel α_1 sowie den Geschwindigkeitsbetrag v_1 des Pfeils beim Auftreffen auf den Apfel.

(c) die Geschwindigkeit v_2 mit der Apfel und Pfeil gemeinsam den Kopf des Sohns verlassen und den dabei auftretenden Winkel α_2.

Lösung

(a) Für den Pfeil gilt die Wurfparabel, das heißt

$$x(t) = \cos\alpha_0 v_0 t \tag{3}$$
$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \sin\alpha_0 v_0 t + h_1 \tag{4}$$

[1]

Die Flugzeit bis zum Apfel ergibt sich mit $x(t_1) = a$ zu

$$t_1 = \frac{a}{\cos\alpha_0 v_0} \tag{5}$$

Aus (4) folgt wegen $y(t_1) = h_2$

$$h_1 = h_2 + \frac{g}{2}t_1^2 - \sin\alpha_0 v_0 t_1 = h_2 + \frac{ga^2}{2\cos^2\alpha_0 v_0^2} - \tan\alpha_0 \cdot a = 0,504\text{m} \tag{6}$$

[1]

(b) Es gilt

$$\dot{x}(t_1) = \cos\alpha_0 \cdot v_0 = \cos\alpha_1 \cdot v_1 \tag{7}$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_1} v_0 \tag{8}$$

Zugleich ist

$$\dot{y}(t_1) = -gt_1 + \sin\alpha_0 \cdot v_0 = \sin\alpha_1 \cdot v_1 \tag{9}$$

[1]

Alternativ kann man auch vektoriell rechnen:

$$\vec{v_1}(t_1) = v_0 \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 \\ \sin\alpha_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} t_1 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha_0 \\ v_0 \sin\alpha_0 - \frac{ga}{v_0 \cos\alpha_0} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Division von (7) und (9) liefert mit (5)

$$\alpha_1 = \arctan\left(\tan\alpha_0 - \frac{ga}{\cos^2\alpha_0 v_0^2}\right) = 1,701^\circ \tag{11}$$

$$\xrightarrow{(8)} v_1 = 69,86\text{m/s} \tag{12}$$

[**1**]

(c) Impulserhaltung gibt:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \tag{13}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = 13,97\text{m/s} \tag{14}$$

[**1**]

Des weiteren bewegt sich der Apfel mit Pfeil im selben Winkel weiter:

$$\alpha_2 = \alpha_1 = 1,701^\circ \tag{15}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zwei Steine werden mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ im zeitlichen Abstand t_0 am Ort $\vec{r}_0$ im Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben geworfen.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1(t)$ und $\vec{v}_2(t)$ der Steine und ihre Ortsvektoren $\vec{r}_1(t)$ und $\vec{r}_2(t)$.

Lösung:

Benutzt man ein kartesisches Koordinatensystem, dann ist $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor 'senkrecht nach oben'. Die Beschleunigung im Schwerefeld der Erde wird als konstant angenommen und sei

$$-g\mathbf{e}_z \tag{16}$$

Die Geschwindigkeit des ersten Steins ist daher

$$\vec{v}_1(t) = v_0\mathbf{e}_z - gt\mathbf{e}_z \tag{17}$$

und sein Ortsvektor ist einfach gegeben durch

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_0 + v_0 t\mathbf{e}_z - \frac{1}{2}gt^2\mathbf{e}_z \tag{18}$$

[1]

Für den zweiten Stein ist der zeitliche Verlauf verschoben, da er um eine Zeit t_0 nach dem ersten Stein nach oben geworfen wird. Abgesehen von dieser Tatsache ist seine Bewegung gleich die des ersten Steins, so dass

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_1(t - t_0) \quad , \quad \vec{v}_2(t) = \vec{v}_1(t - t_0) \tag{19}$$

[1]

b) Nach welcher Zeit treffen sich die Steine?

Lösung:

Die Steine treffen zusammen, wenn sie sich zur selben Zeit am selben Ort befinden, also wenn

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) \tag{20}$$

und somit

$$\vec{r}_0 + v_0 t \mathbf{e}_z - \frac{1}{2} g t^2 \mathbf{e}_z = \vec{r}_0 + v_0(t - t_0)\mathbf{e}_z - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \mathbf{e}_z \tag{21}$$

Diese Gleichung kann vereinfacht werden zu

$$v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2 \tag{22}$$

[1]

Die t^2-Terme heben sich weg und es bleibt nur eine lineare Gleichung für den Stoßzeitpunkt:

$$0 = g t_0 t - v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2 \tag{23}$$

Löst man nach t auf, so erhalt man den Zeitpunkt, wenn sich die beiden Steine treffen.

$$t = \frac{v_0}{g} + \frac{t_0}{2} \tag{24}$$

[1]

c) Wie groß sind dann ihre Geschwindigkeiten $v_1(t_0)$ und $v_2(t_0)$?

Lösung:

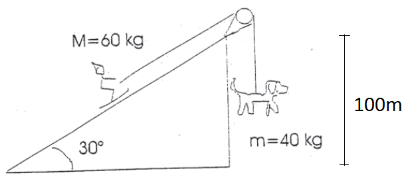
Das Ergebnis aus Gleichung (24) wird nun in die Geschwindigkeitsgleichungen (17) und (19) eingesetzt:

$$v_1 = -\frac{gt_0}{2} \quad , \quad v_2 = \frac{gt_0}{2} \tag{25}$$

[1]

Dass diese Werte betragsmäßig gleich sein müssen, hätte man auch direkt aus der Energieerhaltung schließen können, denn die Steine werden vom selben Ort mit derselben Geschwindigkeit geworfen und haben daher dieselbe Energie. Da diese konstant ist, haben die Steine zu jedem Zeitpunkt dieselbe Energie. Wenn sie zusammentreffen, befinden sie sich am selben Ort und stimmen dann sogar in der potentiellen Energie überein, also auch in der kinetischen Energie. Sie können sich dann nur in der Richtung der Geschwindigkeit unterscheiden.

Aufgabe 4 (4 Punkte)



Ein etwas rudimentärer Skilift zieht einen Skifahrer (Masse $M = 60$kg) reibungsfrei den 30° steilen Hang hinauf (siehe Skizze). Das Seil laufe parallel zum Hang, sei masselos und nicht dehnbar. Der Lift wird über eine Rolle durch die Gewichtskraft des Hundes (Masse $m = 40$kg) angetrieben.

(a) Wenn der Skifahrer mit $v_0 = 0$m/s unten startet, wie lange braucht er, um 100 Höhenmeter entlang der Piste zu steigen?

(b) Mit welcher Kraft wird das Seil gespannt?

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
&(M+m)\ddot{z} = mg - Mg\sin 30^\circ \\
\Rightarrow &\ddot{z} = \frac{g(m - M\sin 30^\circ)}{M+m} = g \cdot \frac{40\text{kg} - 60\text{kg}\sin 30^\circ}{100\text{kg}} = 0,1g \\
\Rightarrow &z = \frac{1}{2}(0,1g)t^2 = \frac{L}{\sin 30^\circ} = 2L \\
\Rightarrow &t = \sqrt{\frac{2L}{\sin 30^\circ 0,1g}} = 20\text{s}
\end{aligned}$$

[3]

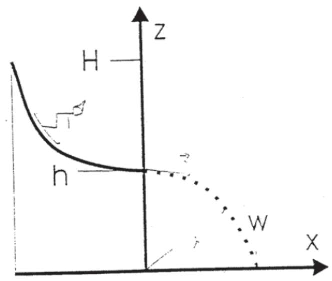
Der Hund muss also 200 Meter sinken, um den Skifahrer 100 Meter zu heben.

(b) Aus $a = 0,1g$ folgt

$$\begin{aligned} F &= m(g-a) \\ &= m(g-0,1g) = 360\text{N} \end{aligned}$$

[1]

Aufgabe 5 (5 Punkte)



Bei einer Sprungschanze der festen Gesamthöhe H erfolgt der waagerechte Absprung bei einer (variablen) Höhe h (siehe Skizze).

(a) Zeigen Sie, dass die waagerechte Absprunggeschwindigkeit vom Schanzentisch bei vernachlässigter Reibung durch $v = \sqrt{2g(H-h)}$ gegeben ist.

(b) Wie muss man die Höhe $0 \leq h \leq H$ des Schanzentischs gewählt werden, damit die Sprungweite w möglichst groß wird. Wie groß ist $w_{\max}$?

Lösung

(a) Es ist zu zeigen, dass $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$mgH = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh \Rightarrow v = v_x = \sqrt{2g(H-h)} \tag{26}$$

[1]

(b) Sei z die Höhe. Dann gilt

$$\begin{aligned} x &= v_x t, z = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Rightarrow h &= \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Rightarrow t_1 &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \Rightarrow w_{max} &= v_x t_1 = \sqrt{2g((H-h))}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)} \end{aligned}$$

[**2**]

Diese Formel liefert also die Weite eines Sprunges in Abhängigkeit von den Werten H und h.

Für das Optimum:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\sqrt{4h(H-h)}\right) = \frac{4H-8h}{2\sqrt{4h(H-h)}} \stackrel{!}{=} 0\\
&\Leftrightarrow 4H - 8h = 0\\
&\Leftrightarrow 4H = 8h\\
&\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}H
\end{aligned}$$

[**1**]

Für die optimale Weite ergibt sich damit

$$w = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}H\left(H - \frac{1}{2}H\right)} = 2 \cdot \frac{H}{2} = H \tag{27}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (7 Punkte)

a) Eine kleine Kugel hängt an einem 5m langen, masselosen Faden. Berechnen Sie die Auslenkung, die sie infolge der Massenanziehung durch eine in gleicher Höhe befindliche Masse von 5000kg in 0,5m Abstand erfährt.

Hinweis: Die Auslenkung ist so klein, dass der Abstand bei der Berechnung der Kraft als unveränderlich angenommen werden kann.

Lösung:

Die Kraft der großen Masse M auf die kleine Kugel mit Masse m beträgt

$$F_{GMm} = G\frac{mM}{r^2} \tag{28}$$

Der Auslenkungswinkel lässt sich aus dieser Gravitationskraft sowie der Gewichtskraft der kleinen Kugel berechnen:

$$\tan(\alpha) = \frac{F_{GMm}}{F_g} = \frac{GMm}{mgr^2} = \frac{GM}{gr^2} \tag{29}$$

$$\rightarrow \alpha = 7.8 \times 10^{-6\circ} \tag{30}$$

Für die Auslenkung ergibt sich aus der Geometrie:

$$d = l\sin(\alpha) = 5\text{m} \times \sin(7.8 \times 10^{-6\circ}) = 6.8 \times 10^{-7}\text{m} \tag{31}$$

[**2**]

b) Berechnen Sie aus der Mondmasse und dem Mondradius das Graviationsfeld des Mondes (g_{Mond}) auf der Mondoberfläche.

Hinweis: Mondmasse $m_M = 7.348 \times 10^{22}$kg, Mondradius $r_M = 1738$km

Lösung:

Das Gravitationsfeld des Mondes ist bestimmt durch g_{Mond}:

$$g = G\frac{m_{Mond}}{r^2_{Mond}} = 1.62\text{m/s}^2 \tag{32}$$

[**1**]

c) Meterologische Satelliten befinden sich in einem geostationären Orbit: In diesem Orbit behalten die Satelliten ihre Position gegenüber einem festen Punkt auf der Erde unverändert bei und rotieren syncron mit der Erde mit. Berechnen Sie die Höhe des geostationären Orbits. Ist es möglich, einen geostationären Orbit über dem Nordpol zu positionieren?

Lösung:

Befindet sich ein Objekt mit Masse m im geostationären Orbit, so wird die Anziehungskraft der Erde durch die Zentrifugalkraft aufgehoben:

$$F_G = F_Z \tag{33}$$

$$G\frac{m_S m_{Erde}}{r^2} = m_S\omega^2 r \tag{34}$$

[**1**]

Die Winkelgeschwindigkeit ist hier natürlich die Winkelgeschwindigkeit der Erde, wobei die Periode einen Tag lang ist:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{35}$$

Außerdem ist r der Abstand vom Erdmittelpunkt, so dass die gesuchte Höhe h durch

$$h = r - r_{Erde} \tag{36}$$

gegeben ist. Dann ist letztenlich

$$h = \sqrt[3]{\frac{Gm_{Erde}T^2}{4\pi^2}} - r_{Erde} = 35799\text{km} \tag{37}$$

[**1**]

Es ist nur möglich, einen geostationären Satelliten über dem Äquator zu positioneren, da er nur auf diesem Breitengrad für Beobachter seine Position unverändert beibehält. Es gibt auch geosynchrone Umlaufbahnen auf anderen Breitengraden: In diesen Fällen entspricht die Umlaufzeit des Satelliten ebenso genau einen Tag, allerdings beschreiben diese Satelliten täglich von der Erde aus gesehen eine 8-förmige Kurve.

[**1**]

d) In welchem Abstand vom Erdmittelpunkt (auf der Verbindungslinie Erdmittelpunkt-Mondmittelpunkt) sind Erdanziehung und Gravitation vom Mond gleich groß und entgegengesetzt?

Lösung:

Bei dem gesuchten Abstand handelt es sich um den Punkt, an dem sich die Anziehungskraft der Erde und die Anziehungskraft des Mondes gegenseitig aufheben, also wo

$$g_{Erde} = g_{Mond} \tag{38}$$

$$G\frac{m_{Erde}}{r^2} = G\frac{m_{Mond}}{(R_{Erde-Mond} - r)^2} \;\rightarrow\; r = 3.46 \times 10^8\text{m} \tag{39}$$

[**1**]