
Klausur zur Experimentalphysik 4
Prof. Dr. L. Oberauer
Sommersemester 2010
3.8.2010

Musterlösung

Aufgabe 1:

Die elektrische Stromstärke eines Strahls von α -Teilchen ist

$$I = 2e\Phi \quad (1)$$

wobei Φ der Teilchenstrom des Strahls ist. Der wiederum beträgt laut Angabe 5% der Zerfallsrate, also

$$\Phi = q|\dot{N}| \quad (2)$$

mit $q = 0.05$. [1]

Die Zerfallsrate folgt durch Ableiten aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz

$$|\dot{N}| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} N \quad (3)$$

[1]

Setzt man alles ineinander ein, dann ist

$$I = 2eq \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} N \quad (4)$$

Dies kann man nach der benötigten Zahl N von Radiumatomen auflösen:

$$N = \frac{1}{q} \frac{I}{2e} \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} \quad (5)$$

und deren Masse folgt zu

$$m = M \frac{N}{N_A} = \frac{M}{N_A} \frac{1}{q} \frac{I}{2e} \frac{\tau_{1/2}}{\ln 2} = 1.66 \text{ g} \quad (6)$$

[2]

Aufgabe 2:

(a) Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung ist die Bewegungsgleichung der Quantenmechanik analog zur Newtonschen Bewegungsgleichung der klassischen Mechanik. Sie bestimmt die zeitliche Entwicklung eines Zustands. [1]

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ist die Eigenwertgleichung für die Energie, sie liefert die möglichen Energiemesswerte und die stationären Zustände. [1]

(b) Die stationären Zustände sind die Zustände mit scharf definierter Energie (Energieeigenzustände). [1]

Die zeitliche Entwicklung von stationären Zuständen ist besonders einfach, durch Darstellung eines beliebigen Zustands als Linearkombination von stationären Zuständen kann man daher dessen zeitlichen Entwicklung erhalten. [1]

(c) Die möglichen Messwerte von A sind die Eigenwerte von A .

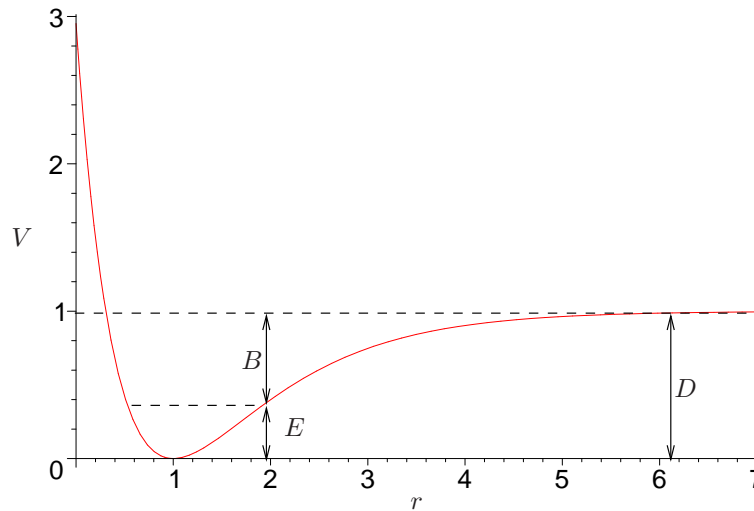
[1]

Der einfachst mögliche Fall ist, dass alle Eigenwerte nichtentartet sind. Dann erhält man die Wahrscheinlichkeit eines Messwerts als das Betragsquadrat des Skalarprodukts von ψ mit dem Eigenzustand zu diesem Messwert.

[1]

Aufgabe 3:

(a+c) In der folgenden Abbildung ist das Potential für die Parameterwerte $D = a = r_0 = 1$ dargestellt.



[2]

(b) Die Taylor-Entwicklung von $V(r)$ bis zur zweiten Ordnung um den Minimumspunkt r_0 lautet

$$U(r) = V(r_0) + (r - r_0)V'(r_0) + \frac{1}{2}(r - r_0)^2V''(r_0) \quad (7)$$

Es ist:

$$V(r_0) = 0 \quad , \quad V'(r_0) = 0 \quad , \quad V''(r_0) = 2a^2D \quad (8)$$

also ist das quadratische Ersatzpotential

$$U(r) = a^2D(r - r_0)^2 \quad (9)$$

[1]

Die zugehörige Schrödinger-Gleichung ist

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + a^2D(r - r_0)^2 \right) \varphi(r) = E\varphi(r) \quad (10)$$

[1]

Für den Ansatz

$$\varphi(r) = e^{-b(r-r_0)^2} \quad (11)$$

berechnet man

$$\varphi'(r) = -2b(r - r_0)e^{-b(r-r_0)^2} \quad (12)$$

$$\varphi''(r) = (4b^2(r - r_0)^2 - 2b)e^{-b(r-r_0)^2} \quad (13)$$

Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung führt auf

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(4b^2(r - r_0)^2 - 2b) + a^2D(r - r_0)^2 = E \quad (14)$$

[1]

Damit dies für alle $r - r_0$ erfüllt sein kann, muss der Koeffizient von $(r - r_0)^2$ verschwinden:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}4b^2 + a^2D = 0 \quad (15)$$

also

$$b = \frac{a}{\hbar} \sqrt{\frac{D\mu}{2}} \quad (16)$$

[1]

Die Energie des Zustandes ergibt sich dann aus

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}(-2b) = E \quad (17)$$

also

$$E = \frac{\hbar^2 b}{\mu} = \hbar a \sqrt{\frac{D}{2\mu}} \quad (18)$$

[1]

(c) Die Bindungsenergie ist gegeben durch die Dissoziationsenergie D des Potentials vermindert um die Energie E im berechneten Zustand φ :

$$B = D - E = D - \hbar a \sqrt{\frac{D}{2\mu}} \quad (19)$$

[1]

Aufgabe 4:

(a) Das gesuchte f_n ist

$$f_n = \frac{v_n}{2\pi r_n} \quad (20)$$

[1]

r_n ist angegeben, v_n ergibt sich aus r_n durch die Quantenbedingung $mv_n r_n = n\hbar$:

$$v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \quad (21)$$

[1]

Also ist

$$f_n = \frac{n\hbar}{2\pi n} \frac{1}{r_n^2} = \frac{n\hbar}{2\pi n} \frac{e^4 m^2}{16\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^4} \frac{1}{n^4} = \frac{e^4 m}{32\pi^3 \varepsilon_0^2 \hbar^3} \frac{1}{n^3} \quad (22)$$

Für $n = 1000$ hat dies den Wert

$$f_{1000} = 6.575 \text{ MHz} \quad (23)$$

[1]

Die quantenmechanische Frequenz ν beim Übergang $n = 1000 \rightarrow 999$ ergibt sich per

$$\nu = \frac{1}{2\pi\hbar}(E_{1000} - E_{999}) = \frac{1}{2\pi\hbar} R_\infty \left(\frac{1}{999^2} - \frac{1}{1000^2} \right) = 6.583 \text{ MHz} \quad (24)$$

[1]

(b) Die $1s$ -Wellenfunktion im Feld des 17-fach geladenen Chlorkerns ist

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{Z^3}{\pi a_0^3}} e^{-Zr/a_0} \quad (25)$$

[1]

mit $Z = 17$. Der Wert von ψ verändert sich merklich erst auf der Skala $a_0/Z = 3.11 \text{ pm}$. Der Kernradius von $^{35}_{17}\text{Cl}$ liegt demgegenüber im fm-Bereich, so dass ψ über das gesamte Kernvolumen praktisch konstant ist. Daher kann man für die gesuchte Aufenthaltswahrscheinlichkeit in sehr guter Näherung schreiben:

$$w = \frac{4\pi}{3} R^3 |\psi(r=0)|^2 = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{Z^3}{\pi a_0^3} = 4.25 \cdot 10^{-9} \quad (26)$$

[1]

Aufgabe 5:

(a) $2n^2$

[1]

(b+c) Die neuen Niveaus durch Spin-Bahn-Kopplung sind gegeben durch

$$n = 1 \rightarrow 1s_{1/2} \quad (27)$$

$$n = 2 \rightarrow 2s_{1/2}, 2p_{1/2}, 2p_{3/2} \quad (28)$$

$$n = 3 \rightarrow 3s_{1/2}, 3p_{1/2}, 3p_{3/2}, 3d_{3/2}, 3d_{5/2} \quad (29)$$

da jedes nl -Niveau aufspaltet in nl_j mit $j = l \pm 1/2$ (außer ns , das wird nur zu $ns_{1/2}$).

[3]

Da hier nur die Aufspaltung durch Spin-Bahn-Kopplung (d.h. ohne relativistische Effekte) berücksichtigt werden soll, sieht die Anordnung der Energieniveaus wie folgt aus:

$n = 1$	$\frac{1s_{1/2}}{(2)}$	=====	$+1/2$ $-1/2$
$n = 2$	$\frac{2p_{3/2}}{(4)}$	=====	$+3/2$ $-1/2$ $+1/2$ $-3/2$
	$\frac{2s_{1/2}}{(2)}$	=====	$+1/2$ $-1/2$
	$\frac{2p_{1/2}}{(2)}$	=====	$+1/2$ $-1/2$
	$\frac{3d_{5/2}}{(6)}$		
	$\frac{3p_{3/2}}{(4)}$		
$n = 3$	$\frac{3s_{1/2}}{(2)}$		
	$\frac{3p_{1/2}}{(2)}$		
	$\frac{3d_{3/2}}{(4)}$		

(Die relativen Abstände der Niveaus sind willkürlich gewählt.) In Klammern sind die Entartungen gemäß $2j + 1$ angegeben. Die durch das äußere Magnetfeld bewirkte weitere Aufspaltung ist der anomale Zeeman-Effekt. Dadurch wird die Entartung vollständig aufgehoben, d.h. die Zeeman-Niveaus haben alle die Dimension 1. [3]

Aufgabe 6:

(a) Die gegebene Konfiguration $1s^2 2s^2 2p 3d$ ist von der Form $[\dots]n_1 l_1 n_2 l_2$, wobei $[\dots]$ für vollständig besetzte Orbitale steht. In diesem Fall gilt:

$$L = |l_1 - l_2|, \dots, l_1 + l_2 \quad , \quad S = 0, 1 \quad , \quad J = |L - S|, \dots, L + S \quad (30)$$

Wir haben $l_1 = 1$, $l_2 = 2$, also ergibt sich folgendes Schema:

$$^1P \quad , \quad J = 1 \quad \rightarrow \quad ^1P_1 \quad (31)$$

$$^3P \quad , \quad J = 0, 1, 2 \quad \rightarrow \quad ^3P_0, ^3P_1, ^3P_2 \quad (32)$$

$$^1D \quad , \quad J = 2 \quad \rightarrow \quad ^1D_2 \quad (33)$$

$$^3D \quad , \quad J = 1, 2, 3 \quad \rightarrow \quad ^3D_1, ^3D_2, ^3D_3 \quad (34)$$

$$^1F \quad , \quad J = 3 \quad \rightarrow \quad ^1F_3 \quad (35)$$

$$^3F \quad , \quad J = 2, 3, 4 \quad \rightarrow \quad ^3F_2, ^3F_3, ^3F_4 \quad (36)$$

[2]

Die Dimension jedes spektroskopischen Symbols ist durch $2J + 1$ gegeben. Addiert man alle auf, dann erhält man

$$d = 3 + 1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 5 + 7 + 7 + 5 + 7 + 9 = 60 \quad (37)$$

als Dimension der gesamten Konfiguration. [1]

(b) Die Hundschen Regeln lauten:

1. Die Orbitale der Unterschale werden möglichst parallel mit Spins besetzt. S ist das sich hieraus ergebende $\sum m_s$.
2. Die Orbitale der Unterschale werden so besetzt, dass große m_l -Werte zuerst besetzt werden. L ist das sich hieraus ergebende $|\sum m_l|$.
3. J ist $|L - S|$ wenn die Unterschale weniger als halb oder halb besetzt ist, $L + S$ sonst.

Es sind 7 Elektronenspins auf $2 \cdot 3 + 1 = 7$ Orbitale zu verteilen. Die Regeln 1. und 2. führen auf das Bild

$m_l = 3$	2	1	0	-1	-2	-3
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑

Also

$$S = \frac{7}{2} \quad , \quad L = 0 \quad (38)$$

Mit Regel 3. folgt

$$J = L + S = \frac{7}{2} \quad (39)$$

Insgesamt also:

$$S = \frac{7}{2} \quad , \quad L = 0 \quad , \quad J = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad ^8S_{7/2} \quad (40)$$

[2]

Beim Anlegen eines schwachen B -Feldes spaltet dies in $2J + 1 = 8$ Zeeman-Komponenten auf, die durch die Werte von $M_J = -\frac{7}{2}, \dots, \frac{7}{2}$ durchnummeriert werden.

[1]

(c) Der Endzustand hat

$$S = \frac{7}{2}, L = 0, J = \frac{7}{2} \quad (41)$$

Aus den Auswahlregeln für elektrische Dipolstrahlung folgt dann für den möglichen Anfangszustand:

$$\Delta S = 0 \Rightarrow S' = \frac{7}{2} \quad (42)$$

$$\Delta L = 0, \pm 1 \Rightarrow L' = 0, 1 \quad (43)$$

$$\Delta J = 0, \pm 1 \Rightarrow J' = \frac{7}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \quad (44)$$

Es gibt also 6 mögliche spektroskopische Symbole für den Anfangszustand:

$${}^8S_{7/2}, {}^8S_{5/2}, {}^8S_{9/2} \quad (45)$$

$${}^8P_{7/2}, {}^8P_{5/2}, {}^8P_{9/2} \quad (46)$$

[2]

Aufgabe 7:

(a) Bei der Drehung eines starren Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse mit Trägheitsmoment I ist die Rotationsenergie

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (47)$$

und der Drehimpuls

$$L = I \omega \quad (48)$$

Also ist die Rotationsenergie in Abhängigkeit vom Drehimpuls:

$$E = \frac{L^2}{2I} \quad (49)$$

[1]

Ist der Drehimpuls nun gemäß $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ quantisiert, dann ist auch die Rotationsenergie quantisiert, und zwar gemäß

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (50)$$

[1]

(b) Es ist

$$\omega = \frac{1}{\hbar}(E_l - E_{l-1}) = \frac{\hbar}{2I}(l(l+1) - (l-1)l) = \frac{\hbar l}{I} \quad (51)$$

[1]

(c) Aus der gemessenen Wellenlänge λ beim Übergang $l = 1 \rightarrow 0$ ergibt sich das Trägheitsmoment des Moleküls:

$$I = \frac{\hbar}{\omega} = \frac{\hbar \lambda}{2\pi c} \quad (52)$$

[1]

Um daraus und aus den Massen der Atome auf den Abstand der Atome rückschließen zu können, benötigt man das Trägheitsmoment I als Funktion der Massen und des Abstandes der beiden Atome:

$$I = \mu r_0^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \quad (53)$$

[1]

Aufgelöst nach dem gesuchten r_0 :

$$r_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)I}{m_1 m_2}} \quad (54)$$

Im Ganzen also:

$$r_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \frac{\hbar \lambda}{2\pi c}} = 1.28 \cdot 10^{-10} \text{ m} \quad (55)$$

[1]