....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

18. April 2011, 8:30–10:00 Uhr, MI HS 1

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Parameterabhängiges Integral** **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}},$$

die als parameterabhängiges Integral definiert ist.

(i) Überprüfen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $f(x)$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

Lösung:

(i) Für $x < 0$ geht der Integrand gegen ∞ für $s \to \infty$,

$$\frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{e^{+|x|s}}{\sqrt{1+s^2}} \xrightarrow{s\to\infty} \infty, \qquad [1]$$

das Integral existiert nicht [1].

Für $x = 0$ und große s geht

$$\frac{e^{-0\cdot s}}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{s^2+s^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}s} = \mathcal{O}\left({}^1\!/_s\right)$$

wie ${}^1\!/_s$ gegen 0 [1]. Somit existiert $F(0)$ nicht [1].

Für $x > 0$ folgt aus

$$0 \leq \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}} \leq e^{-xs}, \qquad \forall s \in [0,\infty), \qquad [1]$$

dass $F(x)$ existiert [1],

$$0 \leq \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}} \leq \int_0^\infty \mathrm{d}s\, e^{-xs} = \left[-\tfrac{1}{x}e^{-xs}\right]_0^\infty = \frac{1}{x} < \infty. \qquad [1]$$

Daher ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$.

(ii) Für $0 < x < x'$ folgt aus

$$\frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}} \geq \frac{e^{-x's}}{\sqrt{1+s^2}} \qquad [1]$$

für alle $s \in [0,\infty)$ auch

$$F(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}} \overset{[1]}{\geq} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \frac{e^{-x's}}{\sqrt{1+s^2}} = F(x'),$$

F ist monoton fallend [1].

2. **Taylor-Entwicklung** **[8 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

(i) Setzen Sie f stetig in 0 fort. Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Wie lauten die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung der stetigen Fortsetzung von f um $x = 0$. Welche Ordnung hat der Fehlerterm?

$f(x) =$	$x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5$	$+\mathcal{O}(x^7)$	[4]

(iii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe um $x = 0$.

☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 0 ☒ 1[2] ☐ $+\infty$

Lösung:

(i) Mit l'Hôpital erhalten wir

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0. \qquad [1]$$

Somit kann man f durch 0 stetig in $x = 0$ fortsetzen [1],

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

(ii) Die Taylor-Reihe von f erhält man am effizientesten indem man x^2 die Taylor-Reihe von

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

einsetzt und durch x teilt,

$$\begin{aligned} f(x) = x^{-1} \cdot \ln(1+x^2) &= x^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+1} \\ &= x - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}x^5 + \mathcal{O}(x^7) \end{aligned}$$

(iii) Da der Konvergenzradius ρ der geometrischen Reihe 1 ist und Stammfunktionen von Potenzreihen denselben Konvergenzradius haben, konvergiert die logarithmische Reihe solange $|x| < 1$. Das kann man auch explizit ausrechnen, denn beispielsweise aus dem Wurzelkriterium folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{n+1}}\, x^2 \overset{x\neq 0}{=} x^2 \overset{!}{=} 1$$

und somit $\rho = 1$.

3. **Ableitung der Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus** **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sinh x = \frac{1}{2}\big(e^{+x} - e^{-x}\big)$.

(i) Begründen Sie, wieso sinh invertierbar ist. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1}$.

(ii) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} = (\sinh)^{-1}$.

Lösung:

(i) Da

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}\big(e^{+x} - e^{-x}\big) = \frac{1}{2}\big(e^{+x} + e^{-x}\big) = \cosh x > 0 \qquad [1]$$

ist sinh streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ und somit injektiv [1]. Da $\operatorname{im}\sinh = \sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ist sinh eine Bijektion von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$, das heißt die Umkehrabbildung arsinh existiert.

(ii) Wir benutzen die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und die Gleichung $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh} x \overset{[1]}{=} \frac{1}{\sinh'\big(\operatorname{arsinh} x\big)} \overset{[1]}{=} \frac{1}{\cosh\big(\operatorname{arsinh} x\big)} \overset{[1]}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2\big(\operatorname{arsinh} x\big)}}$$

$$\overset{[1]}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

4. **Diverse Integrale** **[9 Punkte]**

Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

(i) $$\boxed{\int \mathrm{d}x\,(x-5)\,\sqrt{x-5} = \tfrac{2}{5}(x-5)^{5/2} \qquad [1]}$$

(ii) Für $a > 0$, bestimmen Sie

$$\boxed{\int_1^a \mathrm{d}x\,x^n\,\ln x = \frac{a^{n+1}}{n+1}\left(\ln a - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \qquad [4]}$$

(iii) $$\boxed{\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{x\,(1+(\ln x)^2)} = \arctan(\ln x) \qquad [4]}$$

Lösung:

(i) $\displaystyle\int \mathrm{d}x\,(x-5)\sqrt{x-5} = \int \mathrm{d}x\,(x-5)^{3/2} = \frac{1}{3/2+1}(x-5)^{3/2+1} = \tfrac{2}{5}(x-5)^{5/2}$

(ii) Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_1^a \mathrm{d}x\,\underbrace{x^n}_{=u'(x)}\,\underbrace{\ln x}_{=v(x)} &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\ln x\right]_1^a - \int_1^a \mathrm{d}x\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{x} \\
&= \frac{a^{n+1}}{n+1}\,\ln a - 0 - \int_1^a \mathrm{d}x\,\frac{x^n}{n+1} \\
&= \frac{a^{n+1}}{n+1}\,\ln a - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^a \\
&= \frac{a^{n+1}}{n+1}\left(\ln a - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

(iii) Mit der Substitution $u = \ln x$, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$, erhalten wir

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{x\,(1+(\ln x)^2)} = \int \mathrm{d}u\,\frac{1}{1+u^2} = \arctan u\big|_{u=\ln x} = \arctan(\ln x).$$

5. **Rekursionen mit Integralen** **[12 Punkte]**

Wir definieren $F_n(x) = \int \mathrm{d}x \ \sin^{2n}(x)$.

(i) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{2n+2} F_n(x) - \frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1}(x) \ \cos(x).$$

(ii) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \ \sin^{2n}(x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

Lösung:

(i) Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= \int \mathrm{d}x \ \sin^{2(n+1)} x \overset{[1]}{=} \int \mathrm{d}x \ \sin^{2n} x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) \\ &\overset{[1]}{=} F_n(x) - \int \mathrm{d}x \ \sin^{2n} x \cos x \cdot \cos x \\ &\overset{[1]}{=} F_n(x) - \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \cdot \cos x + \int \mathrm{d}x \ \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \cdot (-\sin x) \\ &\overset{[1]}{=} F_n(x) - \frac{\sin^{2n+1} x}{2n+1} \ \cos x - \frac{1}{2n+1} F_{n+1}(x) \end{aligned}$$

Stellt man nach F_{n+1} um, erhalten wir

$$\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) F_{n+1}(x) = \frac{2n+2}{2n+1} F_{n+1}(x) = F_n(x) - \frac{1}{2n+1} \sin^{2n+1} x \ \cos x$$

$$\iff F_{n+1}(x) \overset{[1]}{=} \frac{2n+1}{2n+2} F_n(x) - \frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1} x \ \cos x$$

(ii) *Induktionsanfang:* Wir überprüfen die Aussage zunächst für $n = 1$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \ \sin^2 x \overset{[1]}{=} \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \ \left(1 - \cos^2 x\right) \overset{[1]}{=} x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \ \cos x \cdot \cos x \\ &\overset{[1]}{=} \frac{\pi}{2} - \Big[\sin x \cdot \cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \ \sin x \cdot (-\sin x) = \tfrac{\pi}{2} - 0 - I_1 \end{aligned}$$

Daraus folgt $2I_1 = \frac{\pi}{2}$ bzw.

$$I_1 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k}. \qquad [1]$$

Induktionsschritt: Angenommen, die Aussage ist für alle $j \leq n$ wahr. Dann erhalten wir mit Teilaufgabe (i)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \Big[F_{n+1}(x)\Big]_0^{\pi/2} \overset{[1]}{=} \left[\frac{2n+1}{2n+2} F_n(x)\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1} x \ \cos x\right]_0^{\pi/2} \\ &\overset{[1]}{=} \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} + 0 \overset{[1]}{=} \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}. \end{aligned}$$

6. **Folgen** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie das Verhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen:

(i) $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$

- ☒ konvergiert nach dem Integralkriterium nicht[2]
- ☐ konvergiert nach dem Integralkriterium
- ☐ konvergiert nicht, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist
- ☐ konvergiert, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist
- ☐ konvergiert nicht, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wie $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 geht

(ii) $b_n = (n^2 + 7n + 4)\, e^{-n}$

☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{2}{e}$ ☒ 0[2]

(iii) $c_n = \frac{e^{-n}\, 2^{n^2}}{7^n}$

☐ $\frac{2}{7e}$ ☒ $+\infty$[2] ☐ $\frac{2}{7}$ ☐ 0 ☐ 1

(iv) $d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

☐ $+\infty$ ☒ $\frac{1}{2}$[2] ☐ 3 ☐ 0 ☐ 1

Lösung:

(i) Das Integral

$$\int_2^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^\infty \mathrm{d}u\, \frac{1}{u} = \ln u\big|_{\ln 2}^\infty = +\infty$$

divergiert. Daher ist nach dem Integralkriterium auch

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = +\infty.$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 7n + 4)\, e^{-n} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2 + 7x + 4}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x + 7}{e^x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

(iii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} 2^{n^2}}{7^n} = +\infty$, denn

$$\frac{e^{-n} 2^{n^2}}{7^n} = \left(\frac{2^n}{7e}\right)^n \overset{n\geq 5}{\geq} \left(\frac{32}{7e}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

(iv) Aus $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} n(n+1)$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{n^2 + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

7. **Potenzreihen** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien für folgende Potenzreihen:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

$\square$ 2 $\quad$ $\square$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ $\square$ $+\infty$ $\quad$ $\boxtimes$ 0[2] $\quad$ $\square$ 1

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3^n} x^n$

$\square$ $+\infty$ $\quad$ $\square$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\square$ 0 $\quad$ $\square$ 1 $\quad$ $\boxtimes$ 3[2]

Lösung:

(i) Aus dem Wurzelkriterium folgt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|2^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} 2^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty,$$

der Konvergenzradius ist also 0.

(ii) Der Konvergenzradius ist 3: man kann sowohl das Wurzel- als auch das Quotientenkriterium anwenden:

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n(n+1)(n+2)}{3^n}}\right| = \frac{3^n}{3^{n+1}}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3}\frac{n+3}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{\rho}$$

$$\sqrt[n]{\left|(-1)^n\frac{n(n+1)(n+2)}{3^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{n+2}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1\cdot 1\cdot 1}{3} = \frac{1}{\rho}$$

8. **Folgen und Häufungspunkte** **[12 Punkte]**

Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen oder widerlegen Sie (mit Begründung):

(i) Für die Menge der Häufungspunkte HP(a) gilt: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathrm{HP}(a)$

☐ Wahr ☒Falsch [1]

Die Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel nehme man $a = (1, 0, 0, \ldots)$ [1]. Dann ist $\sup\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = 1 \notin \{0\} = \mathrm{HP}(a)$, aber 1 ist kein Häufungspunkt [1].

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

☐ Wahr ☒Falsch [1]

Die Aussage ist falsch. Seien $a = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ und $b = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ [1]. Dann gilt $a + b = (1, 1, 1, 1, \ldots)$ und somit auch

$$\limsup_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 2 = 1 + 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \qquad [1]$$

(iii) Ist b eine konvergente Folge, dann gilt: $\limsup\limits_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

☒Wahr [1] ☐ Falsch

Die Aussage ist wahr. Da $\limsup_{n\to\infty} a_n$ ein Häufungspunkt ist, existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ konvergiert [1]. Da Teilfolgen konvergenter Folgen gegen denselben Grenzwert konvergieren [1], folgt aus den Rechenregeln für Limiten

$$\limsup_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) \overset{[1]}{=} \lim_{k\to\infty}\big(a_{n_k} + b_{n_k}\big) \overset{[1]}{=} \lim_{k\to\infty} a_{n_k} + \lim_{k\to\infty} b_{n_k} \overset{[1]}{=} \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Lösung:

Siehe oben.