1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 6)

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Determinante der $n \times n$-Matrix T_n und begründen Sie Ihr Ergebnis.

$$T_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \dots & 0 & 1-n & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

$T_1 = (1) \Rightarrow \det T_1 = 1$

$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det T_2 = 2$ } (Induktionsanfang)

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det T_3 = 1 \cdot \det T_2 - (-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 2+4 = 6$$

$\Rightarrow$ Vermutung $\det T_n = n!$ (Ind. voraussetzung)

$$T_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 2 & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & n-2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2-n & 1 & n-1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1-n & 1 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -n & 1 \end{vmatrix}$$

(Induktionsschluss $n \to n+1$)

$$\Rightarrow \det T_{n+1} \underset{\uparrow}{=} 1 \cdot \det T_n - (-n) \cdot \underset{\uparrow}{n} \cdot \det T_{n-1} =$$

(Entwicklung nach letzter Zeile/Spalte) (Entwicklung der Unterdeterminante nach letzter Spalte/Zeile)

$$\underset{\uparrow}{=} n! + n^2 \cdot (n-1)! = n!(1+n) = (n+1)!$$

(Ind. voraus.)

2. Weg:

$$\det T_n \underset{\uparrow}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1-n & 1 \end{pmatrix} \underset{\uparrow}{=} \cdots = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

addiere 1. Zeile zur 2. Zeile !

addiere i-te Zeile zur (i+1)-ten Zeile rekursiv für $2 \leq i \leq n-1$

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine 3×3-Matrix.

1. Bestimmen Sie die von A erzeugte Menge $\langle A \rangle$ bezüglich der Matrixmultiplikation.
2. Geben Sie die Gruppenaxiome an und zeigen Sie, dass $\langle A \rangle$ diese erfüllt.
3. Zeigen Sie: $\langle A \rangle$ ist isomorph zu einer Untergruppe U der Permutationsgruppe S_3.
4. Geben Sie alle Elemente von U in Zykelschreibweise und deren Signum an.

---

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$

$\Rightarrow \langle A \rangle = \{A, A^2, A^3 = E_3\}$

2)
- Abgeschlossenheit : offensichtlich
- Existenz des neutralen Elements : $E_3 \in \langle A \rangle$
- Assoziativ, wegen Matrizenprodukt
- Existenz des inversen Elements : $A \cdot A^2 = E_3 \Rightarrow$ A und A^2 sind zueinander invers

3) Für kanonische Basis e_1, e_2, e_3 gilt:

a) $A: e_1 \to e_3 \to e_2 \Rightarrow$ Identifiziere A mit $(1\,3\,2) =: \pi$

entsprechend A^2 mit $\pi^2 = (1\,2\,3)$ und A^3 mit $\pi^3 = id$

b) $A = (e_3, e_1, e_2)$: Identifiziere A mit $(3\,1\,2) =: \pi'$

entsprechend A^2 mit $\pi'^2 = (3\,2\,1)$ und A^3 mit $\pi'^3 = id$

Wähle Abbildung $\varphi : \langle A \rangle \to \langle \pi \rangle < S_3$ (analog $\langle \pi' \rangle < S_3$)

mit $\varphi(A) = \pi$, $\varphi(A^2) = \pi^2$, $\varphi(A^3) = \pi^3 = id \Rightarrow$

- φ offensichtlich bijektiv und • φ Homomorphismus, da

$\varphi(A^i \cdot A^j) = \varphi(A^{i+j}) = \varphi(A^{(i+i) \bmod 3}) = \pi^{(i+j) \bmod 3} = \pi^i \cdot \pi^j = \varphi(A^i)\varphi(A^j)$

$\forall i,j \in \{0,1,2\}$ und $A^3 = A^0 = E_3$; $\pi^0 = id \Rightarrow \langle A \rangle \cong \langle \pi \rangle$

4) $\pi = (1\,3\,2) = (1\,3)(3\,2)$, $\pi^2 = (1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3)$, $\pi^3 = id \Rightarrow sgn(\pi^i) = +1$, $0 \leq i \leq$

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 14)

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^8 - 1$.

1. Bestimmen Sie die Menge $N = \{x \in \mathbb{C} \mid p(x) = 0\}$ und deren Mächtigkeit $|N|$.
2. Zeigen Sie, dass die Nullstellenmenge N von p bezüglich Multiplikation eine Gruppe bildet.
3. Zeigen Sie, dass N zu $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ isomorph ist.
4. Geben Sie alle Untergruppen von N an.
5. Für welche $x \in N$ gilt, dass sie die ganze Gruppe $\langle x \rangle = N$ erzeugen?

---

1) $N = \{ 1 = e^{0\frac{\pi i}{4}}, e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{2\frac{\pi i}{4}}, e^{3\frac{\pi i}{4}}, e^{4\frac{\pi i}{4}}, e^{5\frac{\pi i}{4}}, e^{6\frac{\pi i}{4}}, e^{7\frac{\pi i}{4}} \}$

$|N| = 8$

2) Wir zeigen: N ist Untergruppe von $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ mittels Untergruppenkriteriums

(0) $N \neq \emptyset$

(i) $a = e^{k\frac{\pi i}{4}}, b = e^{l\frac{\pi i}{4}}, 0 \leq k, l \leq 7 \Rightarrow a \cdot b = e^{(k+l)\frac{\pi i}{4}} \underset{\uparrow}{=} e^{\frac{\pi i}{4}(k+l \bmod 8)} \in N$

$e^{2\pi i} = 1$

(ii) $a = e^{k\frac{\pi i}{4}}, 0 \leq k \leq 7 \Rightarrow a^{-1} = e^{(8-k)\frac{\pi i}{4}} \in N$

3) $\varphi : (N, \cdot) \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +),\ e^{k\frac{\pi i}{4}} \mapsto [k] \quad (0 \leq k \leq 7)$

φ offensichtlich bijektiv

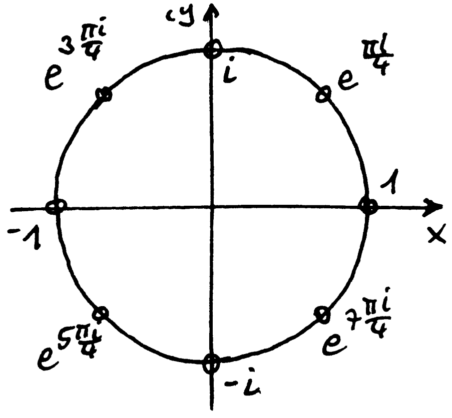
Homomorphismuseigenschaft folgt direkt aus den Potenzgesetzen für $\mathbb{C}$ und der Addition mod 8.

$\varphi(e^{k\frac{\pi i}{4}} \cdot e^{l\frac{\pi i}{4}}) = \varphi(e^{(k+l)\frac{\pi i}{4}}) = [k+l] = [k] + [l] = \varphi(e^{k\frac{\pi i}{4}}) + \varphi(e^{l\frac{\pi i}{4}})$

4) triviale Untergruppen $\{1\}$ und N

sonst: $\{1, -1\}$ und $\{1, i, -1, -i\}$

Beachte: Ordnung der Untergruppe teilt Gruppenordnung!



5) $N = \langle e^{\pi i/4} \rangle = \langle e^{3\frac{\pi i}{4}} \rangle = \langle e^{5\frac{\pi i}{4}} \rangle = \langle e^{7\frac{\pi i}{4}} \rangle$

$\Rightarrow e^{\frac{\pi i}{4}}, e^{3\frac{\pi i}{4}}, e^{5\frac{\pi i}{4}}, e^{7\frac{\pi i}{4}}$ erzeugen N

3) alternativ: $\mathbb{Z} \to N$ mit $\varphi(k) = e^{\frac{\pi i}{4}(k \bmod 8)}$ ist Epimorphismus mit

$\operatorname{Kern} \varphi = 8\mathbb{Z}$ Isomorphiesatz $\Rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \cong N$

1	2

Aufgabe 4. (Punkte: 8)

Gegeben seien die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 1 & \alpha i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und $C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ sowie die Menge $M = \{A \mid B \cdot A = C\}$.

1. Bestimmen Sie M für $\beta \neq -2$ in Abhängigkeit von α.
2. Bestimmen Sie $dim(M)$ für $\beta = -2$ in Abhängigkeit von α.

---

1) $B\cdot A = C \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -2 & -1 \\ 0 & (\alpha-2)i & \beta+2 & 2-\alpha \end{array}\right)$ (*) oder $\det B = (\alpha-2)i \Rightarrow$

Fallunterscheidung:

① $\alpha \neq +2 \Rightarrow$ eindeutig lösbar ($Rg\, B = 2$)

$$(*) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{\beta+2}{2-\alpha} i & i \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 1 & \frac{\beta+2}{2-\alpha} i & i \end{array}\right) \Rightarrow M = \left\{ \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{\beta+\alpha}{2-\alpha} & 1 \\ \frac{\beta+2}{2-\alpha} i & i \end{pmatrix} \right\}$$

$\underbrace{\qquad}_{=A}$ mit $\alpha \neq 2$, β beliebig

$$\text{mit } \gamma = -2 + 2\frac{\beta+2}{2-\alpha} = 2\left(\frac{\beta+2}{2-\alpha} - 1\right) = 2\cdot\left(\frac{\beta+\alpha}{2-\alpha}\right)$$

$\Uparrow$

oder alternativ

$$A = B^{-1}C = \frac{1}{(\alpha-2)i} \cdot \begin{pmatrix} \alpha i & -2i \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix} = \frac{i}{2-\alpha} \cdot \begin{pmatrix} -2(\alpha+\beta)i & (\alpha-2)i \\ 2+\beta & 2-\alpha \end{pmatrix}$$

Bem: Man kann $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ auch spaltenweise bestimmen aus $Ba_1 = c_1 \wedge Ba_2 = c_2$ oder mittels einer LGS mit 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten von A.

② $\alpha = 2 \wedge \beta \neq -2 \Rightarrow$ nicht lösbar $\Rightarrow M = \emptyset$

2) Nach 1) gilt für

(1) $\alpha \neq +2 \wedge \beta$ beliebig $\Rightarrow dim(M) = 0$ eindeutig lösbar

[(3) $\alpha = +2 \wedge \beta \neq -2 \Rightarrow dim(M) = -1$ unlösbar] nicht verlangt

(2) $\alpha = +2 \wedge \beta = -2 \Rightarrow dim(M) = 2$, da $Rg\, B = 1 \Rightarrow Dim(Kern(B)) = 1$

$\Rightarrow a_1 \wedge a_2$ einparam. Lösungen!

$$(*) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \text{ wähle für } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda & \mu \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -2-2i\lambda & -1-2i\mu \\ \lambda & \mu \end{pmatrix},$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 5)

Gegeben seien die linear unabhängigen Vektoren $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}^4$.

1. Warum gibt es genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit
$$f(a_1) = 0\ , \quad f(a_2) = 0\ , \quad f(a_3) = a_1\ , f(a_4) = a_2\ ?$$
2. Bestimmen Sie je eine Basis für den Kern und das Bild der linearen Abbildung f.

---

1) Die linear unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_4$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$
Ein lineare Abbildung ist durch Vorgabe der Bilder der Basisvektoren eindeutig bestimmt.

$$\left(\text{zu } x \in \mathbb{R}^4\ \exists\ \lambda_i : \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i = x \Rightarrow f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i\right) \overset{\substack{\text{Linearität}\\ \downarrow}}{=} \sum_{i=1}^{4} \lambda_i f(a_i) \right)$$

<u>alternativ:</u> über Koordinatenvektoren zur Basis $\{a_1, \dots, a_4\}$

$$f: y = A \cdot x \text{ mit } \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ ist eindeutig bestimmt.}$$

2) Basis Kern(f) = $\{a_1, a_2\}$, Basis Bild$(f) = \{a_1, a_2\}$

$$\text{Kern}(f) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid f(x) = 0\} = \left\{x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i \;\middle|\; \lambda_3 \underbrace{a_1 + \lambda_4 a_2}_{\text{lin. unabh.}} = 0\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i \;\middle|\; \begin{matrix}\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\\ \lambda_3 = \lambda_4 = 0\end{matrix}\right\}$$
$$= \operatorname{span}(a_1, a_2)$$

$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists x \in \mathbb{R}^4 : f(x) = y\} \underset{\substack{\uparrow\\ x = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i a_i}}{=} \{y \in \mathbb{R}^4 \mid \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_4 : \lambda_3 \underbrace{a_1 + \lambda_4 a_2}_{\text{lin. unabh.}} = y\} =$$
$$= \operatorname{span}(a_1, a_2)$$

<u>alternativ</u>

$\operatorname{Rg} A = \dim \text{Bild}(f) = 2 \Rightarrow \dim \text{Kern}(f) = 2$ und

$\text{Kern}(A) = \operatorname{span}(e_1, e_2) \Rightarrow \operatorname{span}(a_1, a_2) = \text{Kern}(f)$

Basis $\text{Bild}(A) = \{e_1, e_2\} \Rightarrow \{a_1, a_2\}$ Basis Bild(f)

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 10)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a, b, c, d \in V$. Für welche der folgenden Aussagen A gilt:

$$A \quad \Longrightarrow \quad span(a,b) = span(c,d) \ ?$$

Aussage A	richtig	falsch
$a, b \in span(c,d) \ \wedge \ c, d$ linear unabhängig.	☐	☒
$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}: \ c = \lambda_1 a + \lambda_2 b \ \wedge \ \exists \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}: \ d = \mu_1 a + \mu_2 b$	☐	☒
$a, b \in span(c,d) \ \wedge \ c, d \in span(a,b)$	☒	☐
$a, b \in span(c,d) \ \wedge \ dim(span(c,d)) = 2$	☐	☒
$a, b \in span(c,d) \ \wedge \ dim(span(a,b)) = 2$	☒	☐
Je drei der vier Vektoren a, b, c, d sind linear abhängig.	☐	☒
$dim(span(c,d)) = 2 \ \wedge \ dim(span(a,b)) = 2$	☐	☒
c, d sind nichttriviale Linearkombinationen der linear abhängigen Vektoren a und b.	☐	☒
c, d sind nichttriviale Linearkombinationen von $a, b \ \wedge \ dim(span(a,b)) = 1$		☒
a, b, c, d sind linear abhängig	☐	☒

Punktevergabe je Zeile:

Für jedes richtig gesetzte "X"gibt es 1 Punkt.
Für jedes falsch gesetzte "X"gibt es 1 Punkt Abzug.
Begründungen sind nicht verlangt und werden nicht bewertet.

1	2

Aufgabe 7. (Punkte: 10)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x & \longmapsto & Ax \end{cases}$.

1. Bestimmen Sie $Kern(f)$.
2. Bestimmen Sie $dim(Bild(f))$ und eine Basis von $Bild(f)$.
3. Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.
4. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

---

1) $Kern(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & -5 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-8} & \cancel{-12} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = 2\mu \\ x_2 = -3\mu \\ x_1 = 3(-3\mu) + 4\cdot 2\mu = -\mu \end{array} \Rightarrow x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow Kern(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$$

2) $dim\, Bild(f) = 3 - \underbrace{dim(Kern(f))}_{=1} = 2$ und z.B.

$Basis_{Bild(f)} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ oder z.B. zwei andere Spalten von A.

3) $v \neq 0$ ist EV von A zum EW $\lambda \Leftrightarrow Av = \lambda v$ mit $v \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & -5 & -8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3+4 \\ -1-5+8 \\ 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +2 \\ +2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\Rightarrow \text{EW } \lambda = 2\,!)$$

4) $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & -4 \\ -1 & -5-\lambda & -8 \\ 0 & 4 & 6-\lambda \end{pmatrix} =$ (Entwicklung nach 1. Spalte)

$$= (1-\lambda)\cdot[\underbrace{-(5+\lambda)(6-\lambda) + 32}_{= 2 - \lambda + \lambda^2}] - (-1)\cdot[-3(6-\lambda) + 16] =$$

$$= 2 - 3\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 3\lambda = \lambda^2(2-\lambda) \Rightarrow \text{EW } \lambda_{1,2} = 0 \wedge \lambda_3 = 2$$

zugehörige EV aus 1) und 3):

$$\lambda_{1,2} = 0 \Rightarrow v_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \lambda_3 = 2 \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

alternativ: $spur\, A = 1 - 5 + 6 = 2 = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\lambda_1} + \underset{\overset{\shortparallel}{2}}{\lambda_2} + \lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 0$