Prof. Dr. H. Friedrich
Physik-Department T30a

Technische Universität München

Klausur zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Donnerstag, 15.10.2009, 09:15 - 10:45

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Geben Sie möglichst kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

(a) Geben Sie ein Beispiel für ein nicht-konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$. **(1 P)**

Lösung: Verschiedene Möglichkeiten; z.B. $\vec{F}(\vec{r}) = U_0 x \hat{e}_z$.

(b) Wie schafft es eine Schlittschuhläuferin in einer Pirouette, sich immer schneller zu drehen? **(1 P)**

Lösung: Durch Einziehen ihrer Arme verringert Sie ihr Trägheitsmoment Θ, so dass wegen Erhaltung des Drehimpulses $L = \Theta\omega$ die Winkelgeschwindigkeit ω zunehmen muss.

(c) Ein hohler Würfel steht fest auf einer horizontalen Tischplatte. In dem Würfel bewegt sich ein Massenpunkt, der an den Wänden elastisch reflektiert wird. Nennen Sie drei unabhängige Erhaltungsgrößen. **(2 P)**

Lösung: In den beiden horizontalen Richungen (etwa x, y), $|p_x|$ oder p_x^2 und $|p_y|$ oder p_y^2; Energie der vertikalen Bewegung (z-Richtung) $p_z^2/(2M) + Mgz$ oder Gesamtenergie.

(d) Sowohl für das Kepler-Potential, $V_{\rm K}(\vec{r}) \propto -1/|\vec{r}|$, als auch für den harmonischen Oszillator, $V_{\rm ho}(\vec{r}) \propto |\vec{r}|^2$, gibt es elliptische Bahnen als Lösungen der Bewegungsgleichungen. Nennen Sie zwei wesentliche Eigenschaften, in denen sich die Bahnen unterscheiden. **(2 P)**

Lösung: Während die Ellipse des harmonischen Oszillators ihren Mittelpunkt im Kraftzentrum (im Ursprung $\vec{r} = 0$) hat, ist für die Kepler-Ellipse einer der beiden Brennpunkte bei $\vec{r} = 0$. Die Kepler-Ellipse wird am Perihel schnell und am gegenüberligenden Aphel langsam durchlaufen, bei der Ellipse des harmonischen Oszillators ist der Betrag der Geschwindigkeit an gegenüberliegenden Bahnpunkten stets gleich. Die Umlaufzeit beim harmonischen Oszillator ist von der räumlichen Ausdehnung der Ellipse unabhängig, die Umlaufzeit der Kepler Ellipse wächst mit ihrer Ausdhenung R proportional zu $R^{3/2}$.

(e) In einem Auto, dass mit konstanter Geschwindigkeit fährt, hängt ein Heliumballon unter der Decke. Wie verhält sich der Heliumballon bei einer plötzlichen Bremsung? **(1 P)**

Lösung: Im Bezugsystem des Autos: Unter dem Einfluss der nach vorne gerichteten Trägheitskraft verdrängt die schwerere Luft den leichteren Heliumballon, der dadurch nach hinten beschleunigt wird.

(f) Die Hamiltonfunktion $H(q, p)$ eines mechanischen Systems hängt von der Koordinate q und dem kanonisch konjugierten Impuls p ab. Wie muss, beim Übergang zu einer gestreckten

Koordinate $Q = aq$, der neue Impuls P gewählt werden, damit die Transformation $(q, p) \mapsto (Q, P)$ kanonisch ist? **(2 P)**

Lösung: Damit $\dot{P} = -\partial H/\partial Q = -a^{-1}\partial H/\partial q = a^{-1}\dot{p}$ sein kann, muss gelten: $P = p/a$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Ein Pendel besteht aus einem Massenpunkt der Masse M am Ende einer massenlosen Stange der Länge l, die am anderen Ende fest aufgehängt ist und in einer vertikalen Ebene um den Aufhängepunkt drehbar ist. Die Auslenkung aus der Gleichgewichtslage werde durch den Winkel θ beschrieben.

(a) Stellen Sie die Lagrangefunktion als Funktion von θ und der zugehörigen Geschwindigkeit $\dot{\theta}$ auf. Wählen Sie den Nullpunkt der potentiellen Energie so, dass $U(\theta = \pi/2) = 0$. **(2 P)**

Lösung: $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$, $U = -Mgl\cos\theta$, $L = \frac{1}{2}Ml^2\dot{\theta}^2 + Mgl\cos\theta$.

(b) Welche physikalische Bedeutung hat der zu θ kanonisch-konjugierte Impuls p_θ? Geben Sie die Hamiltonfunktion $H(\theta, p_\theta)$ an. **(2 P)**

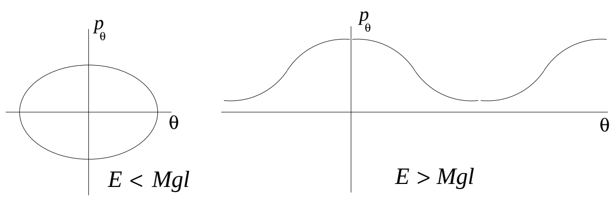
Lösung: $p_\theta = \partial L/\partial\dot{\theta} = Ml^2\dot{\theta} =$ Drehimpuls um den Aufhängepunkt. $H(\theta, p_\theta) = p_\theta^2/(2Ml^2) + Mgl\cos\theta$.

(c) Wie unterscheidet sich die Bewegung mit einer Gesamtenergie $E < Mgl$ qualitativ von der Bewegung mit $E > Mgl$? **(1 P)**

Lösung: $E = p_\theta^2/(2Ml^2) + Mgl\cos\theta < Mgl \Rightarrow \cos\theta > E/(Mgl)$, da $p_\theta^2/(2Ml^2)$ nie negativ ist. Es gibt einen maximalen Auslenkwinkel θ_0, $\cos\theta_0 = E/(Mgl)$ bei dem p_θ verschwindet und die Bewegung umkehrt. Das Pendel schwingt zwischen $\pm\theta_0$.
Für $E > Mgl$ ist $p_\theta^2/(2Ml^2) = E - Mgl\cos\theta$ für alle Auslenkwinkel θ größer als Null, p_θ ist immer positiv oder immer negativ, das Pendel überschlägt und schwingt nie zurück.

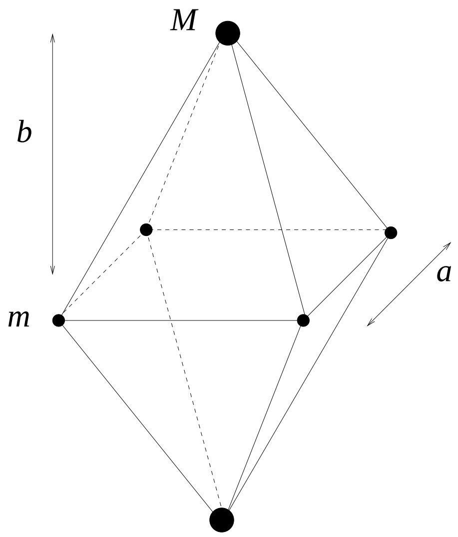
(d) Zeichnen Sie in einem Phasenraumdiagramm Bahnen für die beiden in (c) genannten Fälle. **(4 P)**

Lösung:



Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine quadratische, symmetrische Doppelpyramide mit Seitenlänge a und halber Höhe b besteht aus vier gleichen Massen m an den Ecken des Quadrats und jeweils einer Masse M an der oberen und der unteren Spitze; alle Massen sind miteinander durch masselose Stäbe starr verbunden, siehe Skizze.



(a) Berechnen Sie in einem möglichst günstigen Koordinatensystem den Trägheitstensor. **(4 P)**

Lösung: Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Zentrum der Pyramide, die x- und y-Achsen liegen in Richtung der Diagonalen des Quadrats. Die z-Achse zeige nach oben und verbindet die beiden Massen M. In diesem Koordinatensystem ist der Trägheitstensor diagonal (alle Massen liegen auf einer Achse), die Diagonalelemente sind

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_{yy} &= m(a^2/2 + a^2/2) + M(b^2 + b^2) = ma^2 + 2Mb^2 \,, \\ I_{zz} &= 4ma^2/2 = 2ma^2 \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Hierbei wurde verwendet, dass der Abstand der Massen m vom Koordinatenursprung durch $a/\sqrt{2}$ gegeben ist.

(b) Wie muss, bei gegebenen Werten von m, M und a, der Höhenparameter b gewählt werden, damit sich die Doppelpyramide so dreht wie eine homogene Kugel? **(2 P)**

Lösung: Die Doppelpyramide dreht sich wie eine Kugel, wenn $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$. Aus dieser Bedingung findet man

$$ma^2 = 2Mb^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\frac{m}{M}} \frac{a}{\sqrt{2}} \,. \tag{2}$$

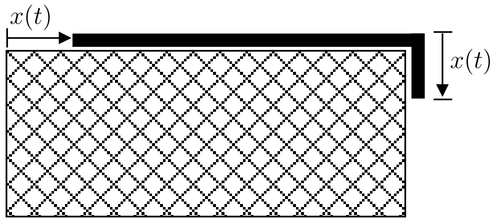
Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein eindimensionales, biegsames Seil der Länge S mit homogener Massendichte $\lambda = M/S$ rutscht reibungsfrei auf einer horizontalen Tischplatte. Zur Zeit t_0 ruht das Seil, aber ein Teil der Länge $x(t_0) = x_0$ ($< S$) hängt jenseits der Tischkante vertikal herab. Anschließend zieht es die Schwerkraft herunter (siehe Skizze).

(a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion als Funktion von x und $\dot{x}$ auf. **(3 P)**

Lösung: Die kinetische Energie des Seils ist

$$T = \frac{1}{2} S \lambda \dot{x}^2 \,. \tag{3}$$



Wählt man den Nullpunkt der potentiellen Energie auf Höhe des Tisches, dann ist die potentielle Energie

$$U = -g \int_0^x \lambda z \mathrm{d}z = -\frac{1}{2} g \lambda x^2 \,. \tag{4}$$

Die Lagrange-Funktion lautet demnach

$$L = T - U = \frac{1}{2} S \lambda \dot{x}^2 + \frac{1}{2} g \lambda x^2 \,. \tag{5}$$

(b) Geben Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ an. **(1 P)**

Lösung: Es ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = S \lambda \ddot{x} \,, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = g \lambda x \,. \tag{6}$$

Die Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ für $x(t)$ ist damit

$$S \ddot{x} = g x \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{g}{S} x \,. \tag{7}$$

(c) Bestimmen Sie $x(t)$ für die oben genannten Anfangsbedingungen ($x < S$). **(3 P)**

Lösung: Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$x(t) = A \exp\left[\sqrt{\frac{g}{S}}(t - t_0)\right] + B \exp\left[-\sqrt{\frac{g}{S}}(t - t_0)\right] \,, \tag{8}$$

wobei A und B aus den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = 0$ zu bestimmen sind. Man findet

$$A + B = x_0 \,, \quad A - B = 0 \,, \quad \Rightarrow \quad A = B = x_0/2 \,, \tag{9}$$

also

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} \left(\exp\left[\sqrt{\frac{g}{S}}(t - t_0)\right] + \exp\left[-\sqrt{\frac{g}{S}}(t - t_0)\right] \right) \\ &= x_0 \cosh\left[\sqrt{\frac{g}{S}}(t - t_0)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Diese Lösung gilt nur, solange $x(t) < S$ ist.