Aufgabe 1 (ca. 8 Punkte)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die eingerahmten Felder ein.

Begründungen brauchen Sie bei dieser Aufgabe nicht anzugeben.

(a) Die zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix} \in Mat(3,3,\mathbb{R})$$

inverse Matrix ist

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3A & 16 & -15 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Geben Sie die Determinante und den Rang der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -6 & 0 \\ \frac{1}{0} & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in Mat(5, 5, \mathbb{R})$$

an.

$$det(B) = \boxed{-16}$$
 Rang $(B) = \boxed{5}$.

(c) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 11 \end{pmatrix} \in Mat(3,3,\mathbb{R})$$

hat drei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Geben Sie die Eigenwerte λ_1 , λ_2 , λ_3 von C an und einen Vektor v_3 mit ganzzahligen Einträgen, so dass v_3 Eigenvektor von C zum positiven Eigenwert λ_3 ist.

$$\lambda_1 = \boxed{-3}$$
 $\lambda_2 = \boxed{-1}$
 $\lambda_3 = \boxed{5}$
 $\nu_3 = \boxed{0}$

Aufgabe 2 (ca. 7 Punkte)

Tragen Sie Ihre Ergebnisse in die eingerahmten Felder ein.

Begründungen brauchen Sie bei dieser Aufgabe nicht anzugeben.

(a) Der Untervektorraum

$$U := \operatorname{spann}\left(\begin{pmatrix} -1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\\-2\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\-1\\1 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

hat die Dimension

$$\dim(U) = \boxed{2}$$
.

(b) Geben Sie eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ an, so dass das lineare Gleichungssystem

$$x_1$$
 + $3x_3$ = -1
 $-x_1$ + x_2 + $(\alpha - 6)x_3$ = 2
 x_2 + $2x_3$ = 1

über R unendlich viele Lösungen hat.

$$\alpha = \boxed{5}$$

(c) Es sei $G = S_6 = \operatorname{Aut}(\{1,2,3,4,5,6\})$ mit der üblichen Verknüpfung \circ . Die Untergruppe $U := \{\pi \in S_6 \mid \pi(1) = 1, \pi(3) = 3\}$ hat die Kardinalität

$$#U = \boxed{24}$$
.

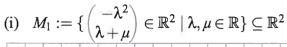
(d) Wieviele eindimensionale Untervektorräume hat der \mathbb{Z}_5 -Vektorraum \mathbb{Z}_5^3 ?

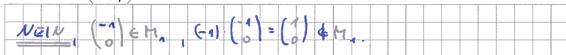
$$\#\{W\subseteq\mathbb{Z}_5^3\,|\,W \text{ eindimensionaler Untervektorraum von }\mathbb{Z}_5^3\}=\boxed{\mathbf{31}}$$
 .

Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte)

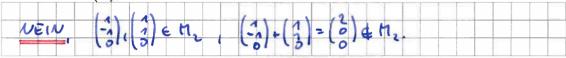
Beantworten Sie folgende Fragen jeweils entweder mit "Ja" oder "Nein" und geben Sie jeweils eine sehr kurze Begründung an. Minuspunkte werden nicht vergeben.

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume der angegebenen R-Vektorräume?





(ii)
$$M_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| = |x_2| \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$



(iii)
$$M_3 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_2 - x_1 \} \subseteq \mathbb{R}^3$$

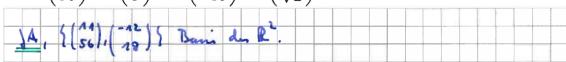


(iv)
$$M_4 := \{ f \in Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(-1) = 1 \} \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

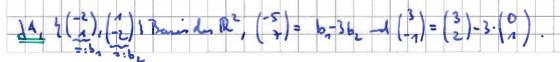


(b) Gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften?

(i)
$$\varphi(\begin{pmatrix} 11\\56 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \pi\\3 \end{pmatrix}$$
, $\varphi(\begin{pmatrix} -12\\18 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2\\\sqrt{2} \end{pmatrix}$



(ii)
$$\varphi(\begin{pmatrix} -2\\1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3\\2 \end{pmatrix}$$
, $\varphi(\begin{pmatrix} 1\\-2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$, $\varphi(\begin{pmatrix} -5\\7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3\\-1 \end{pmatrix}$



(iii)
$$\varphi(\begin{pmatrix} -2\\4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2\\-2 \end{pmatrix}, \ \varphi(\begin{pmatrix} 0\\0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1\\1 \end{pmatrix}$$

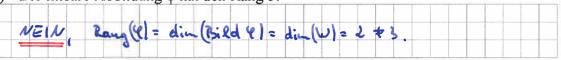


Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte)

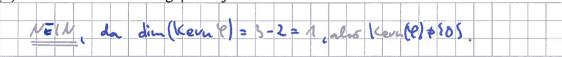
Beantworten Sie folgende Fragen jeweils entweder mit "Ja" oder "Nein" und geben Sie jeweils eine sehr kurze Begründung an. Minuspunkte werden nicht vergeben.

(a) Es seien V und W Vektorräume über \mathbb{Q} mit dim V=3, dim W=2 und $\varphi:V\to W$ eine surjektive lineare Abbildung. Sind die folgenden Aussagen richtig?

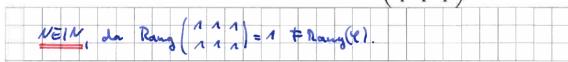
(i) Die lineare Abbildung φ hat den Rang 3.



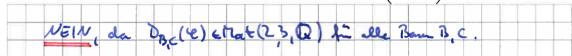
(ii) Die lineare Abbildung φ ist bijektiv.



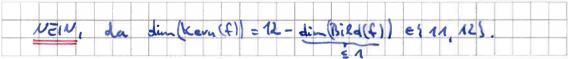
(iii) Es gibt Basen B und C von V bzw. W mit $D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.



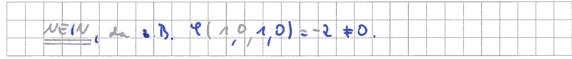
(iv) Es gibt Basen B und C von V bzw. W mit $D_{B,C}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.



- (b) Sind die folgenden Aussagen richtig?
 - (i) Es gibt eine Linearform f auf \mathbb{R}^{12} mit dim(Kern(f)) = 10.



(ii) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 (-1)^i x_i$ ist eine alternierende Multilinearform auf dem \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R} .



(iii) Für jeden endlichdimensionalen \mathbb{C} -Vektorraum V gibt es eine surjektive lineare Abbildung: $V^{**} \to V$.



Aufgabe 5 (ca. 8 Punkte)

Es sei $V = \operatorname{spann}(\sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos) \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei

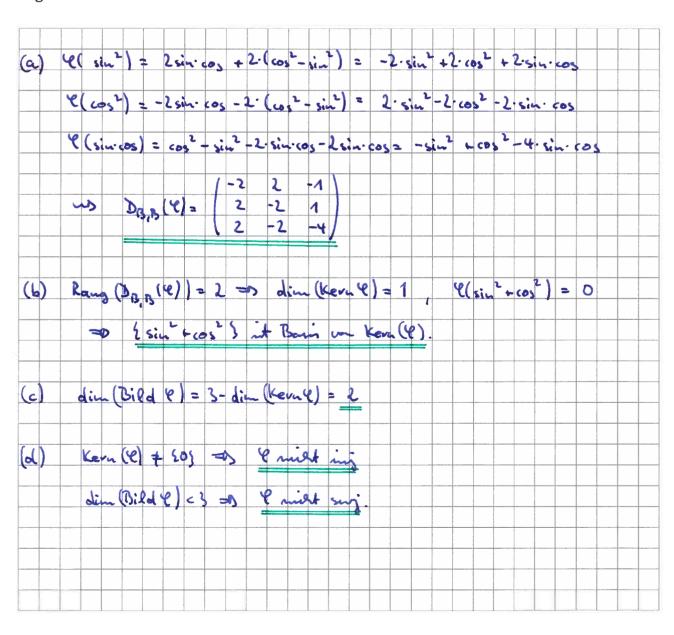
$$\sin^2 : x \mapsto (\sin x)^2,$$

 $\cos^2 : x \mapsto (\cos x)^2,$
 $\sin \cdot \cos : x \mapsto (\sin x) \cdot (\cos x).$

Es sei die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ gegeben durch $\varphi(f): x \mapsto f'(x) + f''(x)$ für $f \in V$.

- (a) Es ist $B := \{\sin^2, \cos^2, \sin \cdot \cos\}$ eine Basis des \mathbb{R} -Vektorraums V (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Geben Sie die Darstellungsmatrix $D_{B,B}(\varphi)$ an.
- (b) Geben Sie eine Basis für Kern(φ) an.Zur Kontrolle: Kern(φ) wird von einem Element von V aufgespannt.
- (c) Geben Sie die Dimension dim(Bild(φ)) an.
- (d) Ist φ injektiv? Ist φ surjektiv?

Begründen Sie Ihre Antworten!



Aufgabe 6 (ca. 3 Punkte)

Es seien K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor von φ ist.

Beweisen Sie: Es gibt ein $\lambda \in K$ mit $\varphi = \lambda \cdot id_V$.

