Probeklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Pfeiffer

Sommersemester 2014

18. Juni 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Plattenkondensator der Kapazität $C = 475\text{pF}$ wird auf eine Spannung $U = 127\text{V}$ aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt.

(a) Wie groß ist die Ladung Q des Kondensators?

(b) Wie groß ist die Energie des elektrischen Felds im Kondensator?

(c) Wie groß werden C, U und Q, wenn ein Dielektrikum mit der relativen Permittivität $\epsilon_r = 7,5$ zwischen die Platten geschoben wird?

Lösung

(a)

$$Q = CU = 475 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot 127\text{V} = 6,03 \cdot 10^{-8}\text{C}$$

[1]

(b)

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}475 \cdot 10^{-12}\text{F} \cdot (127\text{V})^2 = 3,83 \cdot 10^{-6}\text{J}$$

[1]

(c)

$$\hat{C} = \epsilon_r C = 7,5 \cdot 475 \cdot 10^{-12}\text{F} = 3,56 \cdot 10^{-9}\text{F}$$

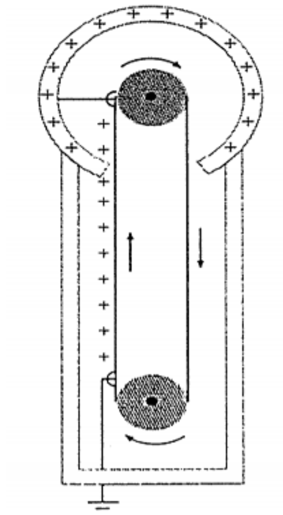
$$\hat{U} = \frac{U}{\epsilon_r} = \frac{127\text{V}}{7,5} = 16,9\text{V}$$

$$\hat{Q} = Q = 6,03 \cdot 10^{-8}\text{C}$$

[3]

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Beim elektrostatischen van-de-Graaf-Generator wird zur Erzeugung sehr hoher Spannungen mit einem isolierenden Band Ladung auf eine isoliert aufgehängte Metallhohlkugel (Radius $R = 1,5m$) gebracht. Die Kugel trage die Ladung $Q = 1,0 \cdot 10^{-4}$ C.



(a) Leiten Sie über den Satz von Gauß die Feldstärke $E(r)$ als Funktion des Abstandes r vom Kugelmittelpunkt her. Unterscheiden Sie dabei die Bereiche innerhalb und außerhalb der Kugel.

Lösung

Ladungen maximieren den Abstand voneinander $\Rightarrow$ sitzen außen an der Kugeloberfläche. $\vec{E}$-Feld-Linien zeigen radial nach außen.

Gaußscher Satz:

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{Ladung im Integrationsgebiet}} \quad \text{, mit } \rho = \text{ Ladungsdichte.}$$

Wähle für beide Fälle eine Kugel mit Radius r als Integrationsgebiet V (Koordinatenursprung in der Mitte der Metallhohlkugel).
Es gilt: $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$. Hier ist $\epsilon = \epsilon_0$.

$$\Rightarrow \oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \text{ mit } \partial V = \text{ Randfläche von } V$$

.

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{A} \overset{\vec{E}||\vec{A}, \text{ da } \vec{E}\text{-Feld radialsymm.}}{=} \oint_{\partial V} E \cdot dA = E \oint_{\partial V} dA = E \cdot 4\pi r^2$$

[1]

- für $r < R$ gilt:

$$\int_V \rho dV = 0 \text{ (keine Ladungen innerhalb der Metallhohlkugel)}$$

$$\text{mit Gauß folgt: } E \cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E(r) = 0$$

[1]

- für $r \geq R$ gilt:

$$\int_V \rho \, dV = Q$$

$$\text{mit Gauß folgt: } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot Q \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

[1]

(b) Welche Feldstärke herrscht (außen) direkt an der Kugeloberfläche?

Lösung

$$E(R) = \frac{1,0 \cdot 10^{-4} C}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} (1,5m)^2} = 4,0 \cdot 10^5 V/m$$

[1]

(c) Wie groß ist das Potential $\varphi(r)$ innerhalb und außerhalb der Kugel? Das Potential an einem Ort r ist dabei definiert als die Arbeit, die nötig ist, um eine positive Probeladung von einem Referenzpunkt R_{ref} an den Ort r zu bringen.

$$\varphi(r) = -\int_{R_{ref}}^{r} E d\widetilde{r}$$

Setzen Sie den Referenzpunkt ins Unendliche.

Lösung

Bezugspunkt $R_{ref} = \infty$.
Für $r \geq R$ gilt:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} E \, d\widetilde{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{\widetilde{r}^2} d\widetilde{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\widetilde{r}}\right]_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = 9,0 \cdot 10^5 Vm \frac{1}{r}$$

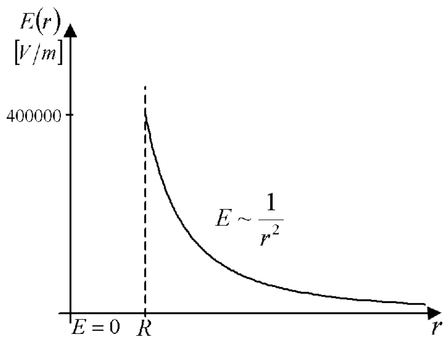
Für $r < R$ ist $\varphi(r)$ konstant, da wegen $E(r) = 0$ das Verschieben einer Probeladung innerhalb der Metallhohlkugel keine Arbeit kostet.

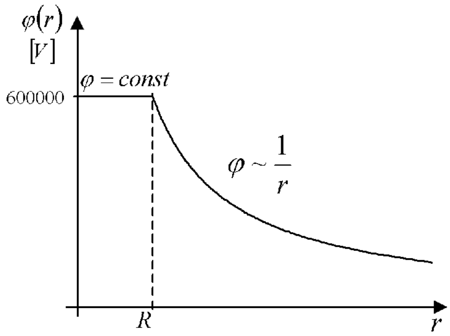
$$\varphi(r < R) \overset{Stetigkeit}{=} \varphi(r = R) = 9,0 \cdot 10^5 Vm \frac{1}{1,5m} = 6,0 \cdot 10^5 V$$

[2]

(d) Skizzieren Sie die Verläufe von $E(r)$ und $\varphi(r)$.

Lösung





[2]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei folgendes statisches Feld gegeben.

$$\vec{E}\,(x,y,z) = E_0 \begin{pmatrix} x^2 y \\ z\cos(y) \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie die Divergenz des Feldes.

Lösung

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot E_0 \begin{pmatrix} x^2 y \\ z\cos(y) \\ x^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (\partial_x(x^2 y) + \partial_y(z\cos(y)) + \partial_z(x^2+y^2+z^2))E_0 = (2xy - z\sin(y) + 2z)E_0$$

[1,5]

(b) Berechnen Sie die Rotation des Feldes.

Lösung

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0(x^2 y) \\ E_0(z\cos(y)) \\ E_0(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix} =$$

$$E_0 \begin{pmatrix} \partial_y(x^2+y^2+z^2) - \partial_z(z\cos(y)) \\ \partial_z(x^2 y) - \partial_x(x^2+y^2+z^2) \\ \partial_x(z\cos(y)) - \partial_y(x^2 y) \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} 2y - \cos(y) \\ -2x \\ -x^2 \end{pmatrix}$$

[1,5]

(c) Berechnen Sie $\Delta\vec{E}\,(x,y,z)$.

Lösung

Laplace-Operator wird auf jede Komponente des Feldes angewendet

$$\Delta\vec{E}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} \Delta(E_0(x^2 y)) \\ \Delta(E_0(z\cos(y))) \\ \Delta(E_0(x^2+y^2+z^2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)(E_0(x^2 y)) \\ (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)(E_0(z\cos(y))) \\ (\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)(E_0(x^2+y^2+z^2)) \end{pmatrix} =$$

$$= E_0 \begin{pmatrix} 2y \\ -z\cos(y) \\ 6 \end{pmatrix}$$

[2]

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Eine altmodische Herdplatte besteht aus 3 Heizelementen von denen das erste 500 Watt Nennleistung hat und die beiden anderen nur jeweils 250 Watt. (Nennleistung ist die Heizleistung bei Nennspannung 230V.)

(a) Wie müssen die Heizelemente verschaltet werden, um die minimale Heizleistung zu nutzen und wie groß ist diese?

Lösung

Alle Widerstände in Serie.

$$R1 = \frac{U^2}{P1} = 212\Omega$$
$$R2 = \frac{U^2}{P2} = 106\Omega$$
$$R = 530\Omega$$
$$P = \frac{U^2}{R} = 100W$$

[2]

(b) Wie müssen die Heizelemente verschaltet werden, um die maximale Heizleistung zu nutzen und wie groß ist diese?

Lösung

Alle Widerstände parrallel, P = 1000 W

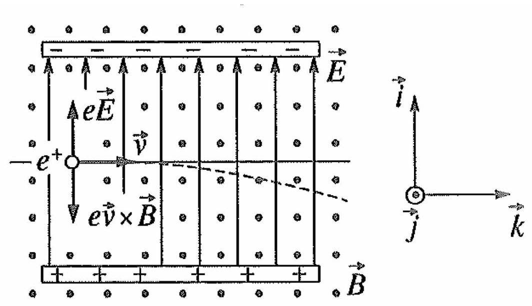
[**1**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein Protonenstrahl wird im Vakuum aus einem feldfreien Raum in einen Raum der Länge l = 0.50m geschossen, in dem ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E_0\vec{x}$ und ein homogenes magnetisches Feld $\vec{B} = B_0\vec{y}$ jeweils senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor $\vec{v} = v_0\vec{z}$ gerichtet sind. $E_0 = 10\frac{kV}{m}, B_0 = 0.01T, m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}kg$ (Protonenmasse). Keine Gravitation berücksichtigen.

(a) Zeichnen Sie in eine Skizze Felder, Kräfte und Flugbahn des Teilchens, sowie das zugehörige Koordinatensystem, schematisch ein. .

Lösung



[**2**]

(b) Bei welcher Geschwindigkeit passieren die Protonen den Raum geradlinig ?

Lösung

Die Protonen beschreiben eine geradlinige Bahn, wenn die Summe aller Kräfte senkrecht zur Flugrichtung Null ist.

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B} = 0$$

[**1**]

Da alle Vektoren in die gleiche Richtung zeigen kann man nun mit Beträgen rechnen.

$$F = 0 = E_0 + v_0 B_0; \quad v_0 = \frac{E_0}{B_0} = 10^6 \frac{m}{s}$$

[**1**]

(c) Innerhalb welchen Geschwindigkeitsintervalls Δv werden die Teilchen noch durch einen Schlitz der Breite b = 5mm am Ende der Feldregion durchgelassen?

Lösung

Weicht nun die Geschwindigkeit um Δv ab, so wirkt eine Kraft:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e(\vec{v} + \vec{\Delta v}) \times \vec{B} \neq 0$$

$$\vec{F} = (eE_0 - e(v + \Delta v)B_0)\vec{x} \neq 0$$

$$\vec{F} = -e\Delta v B_0 \vec{x}$$

[**1**]

mit

$$a = F/m_p$$

$$t \approx \frac{l}{v_0}$$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{eB_0 l^2}{2m_p v^2}\Delta v$$

[**1**]

mit $\Delta x = 2.5mm$ darf also die Geschwindigkeit nicht um mehr als

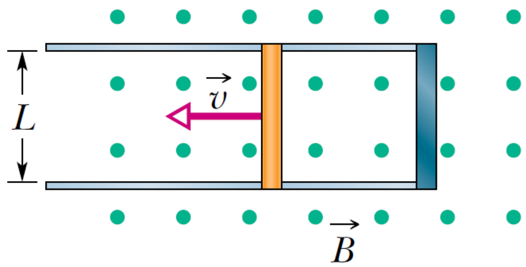
$$\Delta v = \frac{2m_p v^2 \Delta x}{eB_0 l^2} = 2.1 \cdot 10^{-4}\frac{m}{s}$$

als etwa 2% abweichen.

[**1**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Ein leitfähiger Stab hat die Länge L und wird mit konstanter Geschwindigkeit v reibungslos über horizontale, leitfähige Schienen gezogen, so dass der Stab ständig Kontakt mit den Schienen hat. Die beiden Schienen sind an einem Ende leitend verbunden. Ein homogenes, aus der Papierebene heraus zeigendes Magnetfeld B erfüllt den gesamten Bereich, in dem der Stab sich bewegt. Es gilt L = 10 cm, v = 5,0m/s und B = 1,2 T.



(a) Welche Spannung wird in dem Stab induziert und wie rum?

Lösung

Induktionsgesetz

$$U = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$U = BL\frac{dx}{dt} = BLv = 1.2.T \cdot 0.1m \cdot 5\frac{m}{s} = 0.60V$$

[1,5]

(b) Welcher Strom fließt in der Schleife? Nehmen Sie dabei an, dass der Widerstand des Stabes 0.4 Ω und der Widerstand im Rest des Stromkreises vernachlässigbar ist.

Lösung

$$I = 0.6V/0.4\Omega = 1.5A$$

[**1**]

(c) Mit welcher Leistung wird in dem Stab Wärme erzeugt?

Lösung

$$P = I^2 \cdot R = 0.90W$$

[**1**]

(d) Welche Kraft muss auf den Stab ausgeübt werden, damit er seine Bewegung beibehält?

Lösung

$$F = q \cdot (v \times B)$$

Einfaches Bild, dass eine Ladung q in dt ueber die Strecke L läuft mit $I = \frac{dq}{dt}$ gilt dann.

$$qv = IL$$

andere Herleitung für q v :

$$q = \rho LA$$

$$I = \frac{dq}{dt} = \rho\frac{dx}{dt}A$$

$$I = \frac{q}{V}vA$$

und damit wieder

$$qv = IL$$

$$F = IBL = 1.5A \cdot 0.1m \cdot 1.2T = 0.18N$$

[1,5]

(e) Welche Leistung erbringt diese äußere Kraft?

Lösung

$$P = F \cdot v = 0.18N \cdot 5m/s = 0.9W$$

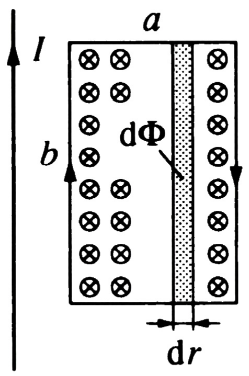
[1]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Eine rechteckige Leiterschleife mit den Seiten a = 6cm und b = 20cm, deren Seite b sich im Abstand $r_o = 1cm$ parallel zu einem langen, geraden, vertikalen Draht befindet, wird mit konstanter Geschwindigkeit $v = 2.5\frac{m}{s}$ nach rechts vom Draht wegbewegt. Durch den Draht fließt ein Strom von $I = 10A$ von unten nach oben.

(a) Zeichnen Sie den Versuchsaufbau schematisch.

Lösung



[1]

(b) Wie groß ist die in der Schleife induzierte Spannung zum Zeitpunkt t = 0.1 s?

Lösung

Der Magnetische Fluß $d\Phi$ durch einen infinitesimalen Streifen $dA = bdr$ der Schleife (r Abstand vom Draht) ist mit der magnetischen Feldstärke $H = I/2\pi r$ in der Umgebung des Drahtes:

$$d\Phi = BdA = \frac{\mu_o Ib}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

H kann man aus dem Ampere Gesetz herleiten:

$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \int \vec{j} d\vec{A}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

[1,5]

Nach Integration über die Schleife erhält man den gesamten Fluß:

$$\Phi = \frac{\mu_o I b}{2\pi} \int \frac{dr}{r} = \frac{\mu_o I b}{2\pi} ln \frac{r_2}{r_1}$$

[**1**]

mit $r_1 = r_0 + s$, und $r_2 = ((r_0 + a) + s)$, wobei s = vt, die zum Zeitpunkt t zurückgelegete Strecke in radialer Richtung ist. Damit folgt für die Induktionsspannung in der Schleife:

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_o I b}{2\pi} \frac{d}{dt} \left(ln \frac{vt + r_0 + a}{vt + r_0} \right) = \frac{\mu_o I a b v}{2\pi(vt + r_0)(vt + r_0 + a)}$$

Für t = 0.1s ist $U_{ind} = 0.72\mu V$

[1,5]

(c) Welchen Umlaufsinn hat der Induktionsstrom in der Schleife?

Lösung

Nach der rechten Hand Regel ist das vom Strom erzeugt Feld rechts vom Draht in die Zeichenebene gerichtet. Da mit zunehmendem Abstand das Feld abnimmt, wirkt der induzierte Strom dieser Abnahme entgegen, d.h. er stärkt das Feld. So wird die Leiterschleife im Uhrzeigersinn vom Strom durchflossen.

[**1**]