

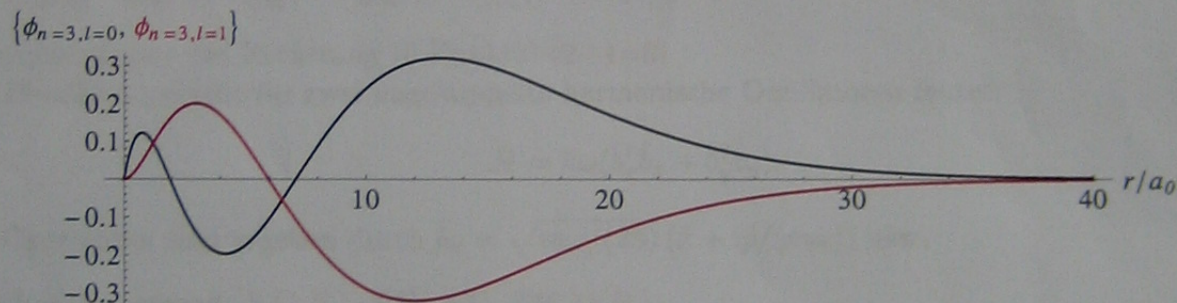
Theoretische Physik 3 (Quantenmechanik)

Sommersemester 2011

Lösung und Erwartungshorizont zur Hauptklausur am 16. August 2011

H.1 Diverses (14 Punkte) (7 aus 9 Möglichkeiten auswählen, je 2 Punkte)

- (a) Es genügt $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ (je 1 P. für den ortsabhängigen und den zeitabhängigen Anteil)
- (b) Der Hamiltonoperator \hat{H} ist nicht explizit zeitabhängig (1 P.) und der Operator \hat{O} kommutiert mit dem Hamiltonoperator (1 P.).
- (c) $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \frac{4}{7} E_1 + \frac{3}{7} E_2$ (1 P.), $|\psi(t)\rangle = e^{-iE_1 t/\hbar} \sqrt{4/7} |\psi_1\rangle - e^{-iE_2 t/\hbar} \sqrt{3/7} |\psi_2\rangle$ (1 P.).
- (d) Im Schrödingerbild verändern sich die Zustände mit der Zeit (0.5 P.), beschrieben durch die Schrödingergleichung. Im Heisenbergbild verändern sich die Operatoren mit der Zeit (0.5 P.), beschrieben durch $\frac{d}{dt} \hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{O}(t)] + \partial_t \hat{O}(t)$. Der Erwartungswert einer Observablen hat zu jeder Zeit in beiden Bildern den gleichen Wert (1 P.).
- (e) $|\psi\rangle = (3!)^{-1/2} [|\psi_a(x_1)\rangle \otimes |\psi_b(x_2)\rangle \otimes |\psi_c(x_3)\rangle + |\psi_a(x_2)\rangle \otimes |\psi_b(x_3)\rangle \otimes |\psi_c(x_1)\rangle + |\psi_a(x_3)\rangle \otimes |\psi_b(x_1)\rangle \otimes |\psi_c(x_2)\rangle]$ (2P. für die vollständige ausgeschriebene Lösung ODER der Begriff Slaterdeterminante gibt 1P. und die Angabe der Matrix auch 1P.)
- (f) Die Radialquantenzahl $n_{rad} = n - l - 1$ (0.5 P.) bestimmt die Anzahl der Knoten (0.5 P.). Daraus folgt, dass für das Beispiel $n = 3$ ist (0.5 P.). Für den Fall der p -Welle genügt es, wenn der Graph einen Knoten hat (0.5 P.), bei $r = 0$ mit null beginnt und asymptotisch verschwindet.



- (g) Darwin Term - endliche Ausdehnung des Atomkerns wechselwirkt mit der s -Welle, die auch nahe des Kerns lokalisiert ist.
 L - S -Kopplung - Kopplung des Bahndrehimpulses an den Spin des Elektrons.
 Energiekorrektur - nächste Ordnung der relativistischen Energie.
 (je 0.5 P., max 1 P.)
 Die Energiekorrekturen hängen ab von der Hauptquantenzahl n (0.5 P.) und der Gesamtdrehimpulsquantenzahl j (0.5 P.). Die einzelnen Korrekturen hängen auch ab von der Bahndrehimpulsquantenzahl l (eigentlich kein P., 0.5 P. falls es die einzige Antwort ist).
- (h) Die Gesamtwellenfunktion muss antisymmetrisch sein unter Teilchenvertauschung. Der Singulett Zustand ist antisymmetrisch, die Triplett zustände sind symmetrisch unter Teilchenvertauschung. Deswegen ist die Ortsraumwellenfunktion des Singulettzustands symmetrisch (1 P.) und die der Triplettzustände antisymmetrisch (1 P.) unter Teilchenvertauschung. (es gibt auch Punkte auf Teile der Begründung, falls das Ergebnis fehlt.)
- (i) $e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{a}}$ Translation um den Vektor \vec{a} (1 P.).
 $e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \varphi}$ Drehung um den Winkel φ um die z -Achse (1 P.).

H.2 Spin-Spin-Kopplung (11 Punkte) (2+2+4+3=11)

Das Positronium ist ein Zwei-Teilchen-System aus einem Elektron und einem Positron (Antiteilchen des Elektrons), dessen gebundene Zustände denen des Wasserstoffatoms ähneln. Betrachten Sie nur die Spin-Freiheitsgrade des Systems, die unter Einwirkung eines externen magnetischen Feldes durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben werden:

$$\hat{H} = A \hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 + \frac{eB}{mc} (\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}). \quad (1)$$

A ist eine positive Konstante und $\hat{\vec{S}}_1$ ($\hat{\vec{S}}_2$) der Spin-Operator des Elektrons (Positrons). Der Gesamtspin ist $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$.

(a) $|00\rangle = 1/\sqrt{2} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|10\rangle = 1/\sqrt{2} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$, $|11\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, $|1-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$ (je 0.5 P.)

(b) $S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2} (S^2 - S_1^2 - S_2^2)$, $E_{S=0} = -\frac{3}{4} \hbar^2 A$, $E_{S=1} = \frac{1}{4} \hbar^2 A$, $A = 8.41 \times 10^{-4} \frac{\text{eV}}{\hbar^2}$ (je 0.5 P.)

(c)

$$\frac{eB}{mc} \begin{pmatrix} \langle 00| \\ \langle 1-1| \\ \langle 10| \\ \langle 11| \end{pmatrix} (\hat{S}_{1z} - \hat{S}_{2z}) \begin{pmatrix} |00\rangle \\ |1-1\rangle \\ |10\rangle \\ |11\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar eB}{mc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Störmatrix in der Basis, Reihenfolge wie oben (2 P.). Diagonalelemente verschwinden, deswegen keine Störung in erster Ordnung (1 P.). Außerdem verschwinden im entarteten Unterraum auch die Nicht-Diagonalelemente, deswegen ist die Diagonalisierung trivial und alle Störungen in erster Ordnung verschwinden (1 P.).

(d) $E_{|00\rangle}^{(2)} = \frac{4e^2 B^2}{\hbar^2 m^2 c^2}$, $E_{|10\rangle}^{(2)} = -\frac{4e^2 B^2}{\hbar^2 m^2 c^2}$, $E_{|1\pm 1\rangle}^{(2)} = 0$ (je 1 P.)

H.3 Störungsrechnung bei Entartung (6 Punkte) (2+4=6)

Der Hamiltonoperator für zwei ungekoppelte harmonische Oszillatoren lautet:

$$\hat{H} = \hbar\omega (\hat{b}_x^\dagger \hat{b}_x + \hat{b}_y^\dagger \hat{b}_y).$$

Die Operatoren sind gegeben durch $\hat{b}_x = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} (\hat{x} + i\hat{p}/(m\omega))$ usw.

(a) Entartungsgrad: 3 (1 P.), $|02\rangle$, $|11\rangle$, $|20\rangle$ (1 P.)

(b) $(\hat{b}_x)^\dagger = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} (\hat{x} - i\hat{p}_x/(m\omega))$, $\hat{b}_x = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} (\hat{x} + i\hat{p}_x/(m\omega))$, $(\hat{b}_y)^\dagger = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} (\hat{y} - i\hat{p}_y/(m\omega))$, $\hat{b}_y = \sqrt{m\omega/(2\hbar)} (\hat{y} + i\hat{p}_y/(m\omega))$ Damit erhält man für den Ortsoperator:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} ((\hat{b}_x)^\dagger + \hat{b}_x), \quad \hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{b}_x^2 + (\hat{b}_x^\dagger)^2 + 2(\hat{b}_x^\dagger)\hat{b}_x + 1)$$

(1 P.)

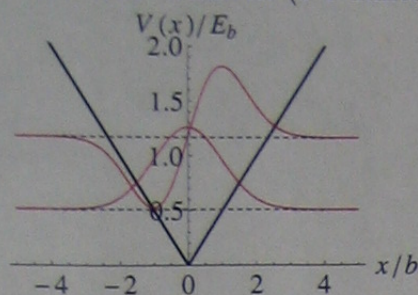
Daraus folgt für den Gesamtoperator, wobei man nur Kombinationen mitnimmt, welche den Unterraum nicht verlassen.

$$\begin{pmatrix} \langle 20| \\ \langle 11| \\ \langle 02| \end{pmatrix} \hat{x}^2 \hat{y}^2 \begin{pmatrix} |20\rangle \\ |11\rangle \\ |02\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(1.5 P.)

$E_{N=2,1}^{(1)} = 9\lambda \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$, $E_{N=2,2}^{(1)} = 9\lambda \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$, $E_{N=2,3}^{(1)} = 1\lambda \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}$ (je 0.5 P.).

H.4 Variationsverfahren (9 Punkte) (2+4+3=9)



Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einer räumlichen Dimension unter dem Einfluss eines linearen Potentials,

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad V(x) = \frac{\hbar^2}{2mb^2} \frac{|x|}{b}.$$

In Einheiten der Energie $E_b = \hbar^2/(mb^2)$ sind die niedrigsten zwei Energieeigenwerte $E_0 \approx 0.509 E_b$ und $E_1 \approx 1.169 E_b$.

(a) Siehe Skizze, Grundzustand: achsensymmetrisch, keine Knoten, asymptotisch abfallend; angeregter Zustand: antisymmetrisch, ein Knoten, Asymptotik (insgesamt 2 P.).

(b) $\langle \varphi_0 | \hat{T} | \varphi_0 \rangle = \frac{\hbar^2}{4m\alpha^2}$, $\langle \varphi_1 | \hat{T} | \varphi_1 \rangle = \frac{3\hbar^2}{4m\beta^2}$, $\langle \varphi_0 | \hat{V} | \varphi_0 \rangle = \frac{\hbar^2 \alpha}{2mb^3 \sqrt{\pi}}$, $\langle \varphi_1 | \hat{V} | \varphi_1 \rangle = \frac{\hbar^2 \beta}{mb^3 \sqrt{\pi}}$ (je 1 P.)

(c) $\alpha = b\pi^{1/6}$, $\tilde{E}_0 = \frac{3}{4}\pi^{-1/3} E_b = \frac{3}{4} \cdot 0.683 E_b = 0.51225 E_b$, $\beta = b \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/3}$, $\tilde{E}_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/3} E_b = \frac{3}{2} \cdot 0.782 E_b = 1.173 E_b$ (je 0.5 P.)

Beide Energien können nach oben abgeschätzt werden, da beides "Grundzustände" sind jeweils in einem Unterraum mit gleicher Parität. (1 P.)