Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

WS 02/03

HÖHERE MATHEMATIK 2 FÜR PHYSIK

(Analysis 1)

Studienbegleitende Pruefung B
Mittwoch, 12.02.2003, 10 : 00 – 11 : 30 *Uhr*.
Arbeitszeit : 90 *Minuten*

1. Aufgabe. Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2\arctan x - 3x$.

1. Warum ist g streng monoton fallend?
2. Wie lautet $g(0)$?
3. Man bestimme $D := g(\mathbb{R})$.
4. Warum existiert die Umkehrfunktion $f := g^{-1}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$?
5. Man berechne $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ und $f'''(0)$.

[8 Pkte.]

2. Aufgabe. Man faktorisiere das Polynom $P(X) = X^8 - 16$ über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$. Die im Ergebnis auftretenden komplexen Zahlen sind in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ zu schreiben.

[8 Pkte.]

3. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \frac{\cos 2x^2 - 1}{x^4}$$

für $x \neq 0$ und $f(0) = -2$.

1. Man berechne
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) + 2}{x} .$$
Warum ist die Funktion f in 0 differenzierbar? Wie lautet $f'(0)$?
2. Warum ist f differenzierbar?
3. Warum ist f stetig?
4. Man gebe eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 an, die für reelle Argumente $x \in \mathbb{R}$ die Funktion f darstellt.
5. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe aus Nr. 4?
6. Man bestimme die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt 0, also $T_{f,0}$.
7. Man ermittle die Taylorreihe der Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$F(x) := \int_0^x f(t)\, dt .$$
8. Wie lauten $f^{(n)}(0)$, für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

[16 Pkte.]

4. Aufgabe. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Treppenfunktion $\varphi_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi_n \left|\right] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] = \left(\frac{k}{n}\right)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ und $\varphi_n(0) = 0$ gegeben.

1. Man berechne
$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$$
für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Man ermittle
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx\ .$$

3. Man zeige für $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$:
$$\left|\varphi_n(x) - x^2\right| \le \frac{2n+1}{n^2}\ .$$

4. Man zeige, dass die Folge (φ_n) gleichmäßig gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, konvergiert.

5. Man berechne
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
auf zwei verschiedene Weisen.

[12 Pkte.]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.