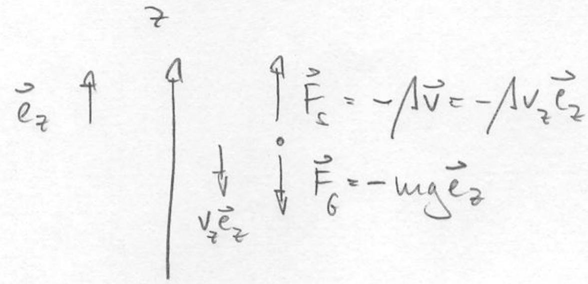
1 fallender Punkt mit Reibung



Masse m, Erdbeschleunigung g

Stokes'sche Reibungskraft

$$\vec F_s = -\beta \vec v \qquad \beta > 0$$

Luftreibung: $\beta = \beta_L > 0$

Gewichtskraft

$$\vec F_G = -mg\,\vec e_z$$

a) Bewegungsgleichung

eindimensionale Bewegung in z-Richtung: $\vec r = z\,\vec e_z \qquad \vec v = v_z \vec e_z = \dot z \vec e_z$

1 $$m\ddot{\vec r} = \vec F = \vec F_G + \vec F_S$$

$$m\ddot z \vec e_z = -mg\,\vec e_z - \beta v_z \vec e_z$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot z = -mg - \beta \dot z$$

$$\ddot z = -g - \frac{\beta}{m}\dot z \qquad \ddot z = \dot v_z \qquad \dot z = v_z$$

1
(2) $$\boxed{\dot v_z = -g - \frac{\beta}{m} v_z}$$ $\rightsquigarrow$ eigentlich nur eine Dgl 1. Ordnung!

b) Lösung der Bewegungsgleichung durch Integration

Separation der Variablen $\qquad v = v_z$

1 $$\frac{\dot v}{g + \frac{\beta}{m} v} = -1$$ Integrieren über die Zeit $\int dt'$ von $t=0$ bis $t'=t$

1 $$\int_0^t dt' \frac{\dot v(t')}{g + \frac{\beta}{m} v(t')} = \int_0^t dt'(-1) = -t' \Big|_{t'=0}^{t'=t} = -t + 0 = -t$$

1 $$= \frac{m}{\beta}\int_0^t dt' \frac{\dot v(t')}{\frac{mg}{\beta} + v(t')} = \frac{m}{\beta}\log\left(\frac{mg}{\beta} + v(t')\right)\Bigg|_{t'=0}^{t'=t}$$

$$= \frac{m}{\beta}\left[\log\left(\frac{mg}{\beta} + v(t)\right) - \log\left(\frac{mg}{\beta} + v(0)\right)\right]$$

1 $$= \frac{m}{\beta} \log\left[\frac{\frac{mg}{\beta} + v(t)}{\frac{mg}{\beta} + v(0)}\right] = -t$$

1 Anpassen an die Anfangsbedingung $v(0) = v_0$ und Auflösen nach $v(t)$:

$$\log\left[\frac{\frac{mg}{\beta} + v(t)}{\frac{mg}{\beta} + v_0}\right] = -\frac{\beta}{m} t$$ Exponentieren:

$$\frac{\frac{mg}{\beta} + v(t)}{\left(\frac{mg}{\beta} + v_0\right)} = \exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right)$$

1

(6) $$\boxed{v(t) = -\frac{mg}{\beta} + \left(v_0 + \frac{mg}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right)}$$

d) Maximalgeschwindigkeit: für $t \to \infty$

1 $$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\beta}{m}t} = 0$$

daher

1 $$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{mg}{\beta} = v_E$$ Maximalgeschwindigkeit,

die erreicht werden kann!

(2) (setzt voraus, dass natürlich nicht anfänglich $|v_0| > |v_E|$ und die Geschwindigkeit damit exponentiell abnimmt ...)

---

c) für $\frac{\beta}{m} t \ll 1$ Entwickeln $\exp\left(-\frac{\beta}{m} t\right) = 1 - \frac{\beta}{m} t + O\left(\left(\frac{\beta}{m} t\right)^2\right)$

Einsetzen:

$$v(t) \approx -\frac{mg}{\beta} + \left(v_0 + \frac{mg}{\beta}\right)\left(1 - \frac{\beta}{m} t\right) = -\frac{mg}{\beta} + v_0 + \frac{mg}{\beta} - gt$$

1 $$= v_0 - gt \quad \checkmark$$

für kurze Zeiträume ($t \ll \frac{m}{\beta}$) findet man

also $v(t) = v_0 - gt$

1 ⇝ Lösung der Bewegungsgleichung $\dot{v} = -g$ ohne Reibungsterm ✓

—

2

e) Eintauchen mit Geschwindigkeit $-v_E = \dot{z}$ in Flüssigkeit mit Reibungskoeffizienten $\beta_F \gg \frac{mg}{v_E}$

⇝ vernachlässige Erdbeschleunigung

⇝ setze $g = 0$ (gilt natürlich streng genommen nur, solange die Geschwindigkeit $v \approx v_E$ groß ist!)

Bewegungsgleichung:

$$\exp(-x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \ldots + \ldots$$

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_S$$

$$m \ddot{z} \vec{e}_z = -\beta v_z \vec{e}_z = -\beta \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\ddot{z} = -\frac{\beta}{m} \dot{z} \qquad \dot{v} = -\frac{\beta}{m} v$$

Lösung wiederum durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\dot{v}}{v} = -\frac{\beta}{m} \qquad \text{Integrieren } \int_{t_E}^{t} dt' \qquad v(t_E) = v_E$$

1 $$\int_{t_E}^{t} dt' \frac{\dot{v}(t')}{v(t)} = \int_{t_E}^{t} dt' \left(-\frac{\beta}{m}\right) = \left(-\frac{\beta}{m}\right) t' \Big|_{t_E}^{t} = -\frac{\beta}{m}(t - t_E)$$

$$= \log(v(t')) \Big|_{t_E}^{t} = \log(v(t)) - \log(v(t_E)) = \log\left(\frac{v(t)}{v(t_E)}\right)$$

1 $v(t_E) = v_E$

$$\downarrow$$

$$= \log\left(\frac{v(t)}{v_E}\right)$$

Auflösen nach $v(t)$: Exponentieren und Umstellen

1 $$\frac{v(t)}{v_E} = \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t - t_E)\right) \qquad v(t) = v_E \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t - t_E)\right)$$

$$\dot z(t) = v(t) = v_E \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t-t_E)\right) \qquad \beta = \beta_F$$

$$z(t) = \int_{t_E}^{t} dt'\, \dot z(t') = v_E \int_{t_E}^{t} dt' \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t'-t_E)\right)$$

1 $$= z(t) - z(t_E) = v_E\left(-\frac{m}{\beta}\right)\exp\left(-\frac{\beta}{m}(t'-t_E)\right)\Bigg|_{t'=t_E}^{t'=t}$$

$z(t_E) = z_E$
$$= v_E\left(-\frac{m}{\beta}\right)\left[\exp\left(-\frac{\beta}{m}(t-t_E)\right) - \underbrace{\exp\left(-\frac{\beta}{m}(t_E-t_E)\right)}_{=1}\right]$$

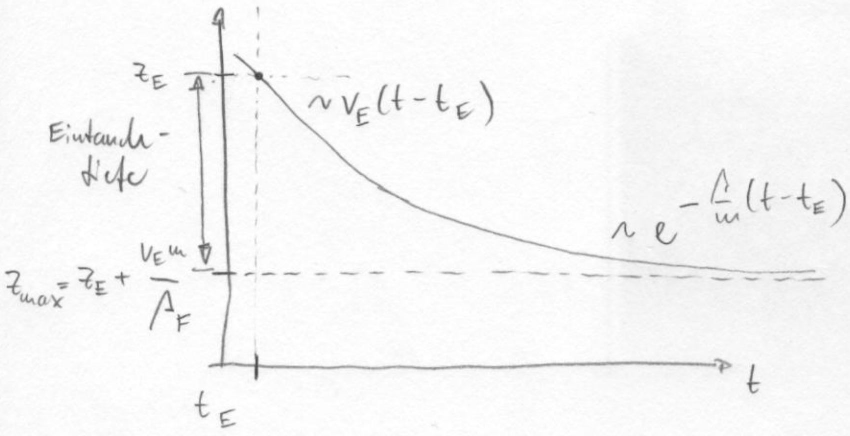
$$= \frac{v_E m}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t-t_E)\right)\right)$$

1 $$z(t) = z_E + \frac{v_E m}{\beta}\left[1 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}(t-t_E)\right)\right]$$

zur Erinnerung: $v_E = -\frac{mg}{\beta_L} < 0$, damit auch $z(t) < z_E$ für $t > t_E$

Überprüfung der Randbedingung: $z(t_E) = z_E + \frac{v_E m}{\beta}\left[1 - e^0\right] = z_E$ ✓

2 Skizze:



für $(t-t_E)\frac{\beta}{m} \ll 1$ $\quad \exp(-x) = 1 - x + \dots$

$$z(t) \simeq z_E + \frac{v_E m}{\beta}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{\beta}{m}(t-t_E) + \dots\right)\right)$$

$$\simeq z_E + \frac{v_E m}{\beta}\left(\frac{\beta}{m}(t-t_E) + \dots\right)$$

$$\simeq z_E + v_E(t-t_E) + \dots$$

⇩ wächst linear mit der Geschwindigkeit $v_E < 0$

$$\frac{v_E m}{\beta_F} = -\frac{mg}{\beta_L}\frac{m}{\beta_F} = -\frac{m^2}{\beta_L \beta_F} g$$

für $(t-t_E)\frac{\beta}{m} \gg 1$

$$z(t) = z_{max} - \frac{m v_E}{\beta}\exp\left(-\frac{\beta}{m}(t-t_E)\right)$$

⟶ nähert sich exponentiell an die Asymptote z_{max} an.

1 $$\boxed{\lim_{t\to\infty} z(t) = z_E + \frac{v_E m}{\beta_F} = z_{max}}$$

maximale Eintauchtiefe ist

8 $$z_{max} - z_E = \frac{v_E m}{\beta_F}$$

2-1

2 Massenpunkt mit Masse m im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = -\alpha \vec{r} \qquad \alpha > 0$

$$= -\alpha r \vec{e}_r$$

a) Bestimmen des Potentials $U(r)$

Nach Vorlesung: für Zentralkraft $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{e}_r$ gilt

$$U(r) - U(r_0) = -\int_{r_0}^{r} dr' \, f(r') \qquad f(r) = -\alpha r$$

$$= -\int_{r_0}^{r} dr' (-\alpha r') = \frac{1}{2}\alpha (r')^2 \Big|_{r_0}^{r} = \frac{1}{2}\alpha r^2 - \frac{1}{2}\alpha r_0^2$$

2 $\Rightarrow U(r) = \frac{1}{2}\alpha r^2$ (bis auf eine frei wählbare Integrationskonstante)

Explizite Probe: $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(r)$

$$\vec{\nabla} r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right)^T \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)^T = \frac{1}{r}\vec{r} = \vec{e}_r$$

1.5 $$-\vec{\nabla}U(r) = -\left(\frac{d}{dr}U(r)\right)(\vec{\nabla} r) = -U'(r)\,\vec{e}_r = -\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{2}\alpha r^2\right)\vec{e}_r = -\alpha r \vec{e}_r$$

$$= -\alpha \vec{r} = \vec{F}(\vec{r}) \quad ✓$$

0.5 $\rightarrow$ Zentralpotential

4

b) Drehimpuls: $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\, \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

1

ebene Polarkoordinaten: $\vec{r} = r\vec{e}_r \qquad \dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{l} = m\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = m r \vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)$$

2 $$= m r^2 \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_{=0} + m r^2 \dot{\varphi} \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi)}_{=\vec{e}_z} = m r^2 \dot{\varphi}\vec{e}_z$$

$= \vec{e}_z$ da $\perp$ auf $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$, und $\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r$

3

da $\parallel$ Vektoren / Kreuzprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet

$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \rightarrow \vec{a}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{a} = 0$

c) Bewegungsgleichung:

1 $$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\alpha\vec{r}$$

Erhaltung des Drehimpulses: zu zeigen $\frac{d}{dt}\vec{l} = 0$

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\right) = m\left[\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{}+\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}\right]$$

= 0 da Kreuzprodukt von Vektor mit sich selbst verschwindet

$$= \vec{r}\times\left(m\ddot{\vec{r}}\right) \underset{\uparrow}{=} \vec{r}\times\left(-\alpha\vec{r}\right)$$

Einsetzen der Bewegungsgleichung

2 $$= -\alpha\,(\underbrace{\vec{r}\times\vec{r}}_{\substack{=0\\ \text{s.o.}}}) = 0$$ was zu zeigen war!

3

d) Energieerhaltung ausgehend von der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} = -\alpha\vec{r}$$

nach Anleitung: Skalarprodukt mit der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ bilden

1 $$m\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = -\alpha\,\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$$

Erkennen, dass dies eine totale Ableitung darstellt:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \frac{1}{2}\left(\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}}+\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}\right) = \dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right) = \frac{1}{2}\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}\right) = \vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$$

1 $$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}\alpha\vec{r}^2\right] = 0$$ Integration:

$$\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2+\frac{1}{2}\alpha\vec{r}^2 = E$$

E Integrationskonstante

$$\underbrace{\frac{1}{2}m\vec{v}^2}_{E_{kin}} + \underbrace{U(r)}_{E_{pot}} = E$$ ⇝ Gesamtenergie des Systems!

1

3 Damit ist gezeigt $\frac{d}{dt}(E) = 0$ → Energie zeitlich konstant

→ Energie erhalten!

e) Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r})$$

1 $\vec{r} = r\vec{e}_r \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

1 $\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\vec{e}}_\varphi$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}(-\dot{\varphi}\vec{e}_r)$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$= \vec{F}(\vec{r}) = -\alpha r\vec{e}_r$$

Bewegungsgleichungen in Komponenten (Koeff von $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$)

1 $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -\alpha r$

1 $m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0$

Drehimpuls $\vec{l} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \qquad |\vec{l}| = l = mr^2\dot{\varphi}$

Drehimpulserhaltung: $\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi})\vec{e}_z = \qquad (\frac{d}{dt}\vec{e}_z = 0)$

$$= m(2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi})\vec{e}_z = mr(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_z = 0$$

(schon gezeigt, Drehimpulserhaltung!)

daher: $r\,[m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})] = 0$

$\rightsquigarrow$ zweite Gleichung ist bloss Drehimpulserhaltung und wird gelöst durch

1 $$\boxed{l = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}}$$

Das nun in die erste Gleichung einsetzen, um $\dot{\varphi}$ zu eliminieren

$$\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2} \qquad mr\dot{\varphi}^2 = mr\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2 = mr\frac{l^2}{m^2r^4} = \frac{l^2}{mr^3}$$

Radialgleichung:

1 $$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 = \boxed{m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = -\alpha r}$$ entkoppelte Gl. für Radialkoordinate!

(6)

$$\boxed{l = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}}$$ Gl. für Winkelkoordinate.

f) Lösung der Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r für den Spezialfall $|\vec{l}| = l = 0$

dann Bewegungsgleichung:

1 $$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \alpha r = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{r} + \alpha r = 0}$$

(wir ignorieren jetzt einmal Problem mit der Singularität der Parameterisierung für $r=0$ und erlauben $-\infty < r < \infty$ statt $0 \leq r < \infty$ nur positiv)

$\rightsquigarrow$ eindim. harmonischer Oszillator! (harmonische Schwingung)

1 Lösungsansatz $$r(t) = Ce^{\lambda t} + C^* e^{-\lambda t}$$
$$\dot{r}(t) = \lambda(Ce^{\lambda t} - C^* e^{-\lambda t})$$
$$\ddot{r}(t) = \lambda^2(Ce^{\lambda t} + C^* e^{-\lambda t})$$

$$\left(\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\right)\left(Ce^{\lambda t} + C^* e^{-\lambda t}\right) \equiv 0$$

1 $$\rightarrow \left(\lambda^2 + \frac{\alpha}{m}\right) = 0 \qquad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{\alpha}{m}} = \pm i\omega \qquad \omega = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

1 Anpassen an die Anfangsbedingungen $r(t=0) = r_0 \qquad \dot{r}(t=0) = v_{r0}$

$$r(t) = Ce^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t} \qquad r(0) = C + C^* = 2\,\mathrm{Re}(C)$$
$$\dot{r}(t) = i\omega(Ce^{i\omega t} - C^* e^{-i\omega t}) \qquad \dot{r}(0) = i\omega(C - C^*) = i\omega\, 2i\,\mathrm{Im}(C) = -2\omega\,\mathrm{Im}(C)$$

$$\left.\begin{aligned} r(0) &= 2\,\mathrm{Re}(C) = r_0 \rightarrow \mathrm{Re}(C) = \tfrac{1}{2}r_0 \\ \dot{r}(0) &= -2\omega\,\mathrm{Im}(C) = v_{r0} \rightarrow \mathrm{Im}(C) = -\frac{1}{2\omega}v_{r0} \end{aligned}\right\} \quad C = \frac{1}{2}\left(r_0 - i\frac{v_{r0}}{\omega}\right)$$

Check: $C + C^* = \frac{1}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_0 = r_0$ ✓

$$i\omega(C - C^*) = i\omega\left[-i\frac{v_{r0}}{2\omega} - \left(i\frac{v_{r0}}{2\omega}\right)\right] = i\omega\left(-i\frac{v_{r0}}{\omega}\right) = v_{r0} \quad ✓$$

alternativ:

$$r(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad r(0) = A = r_0$$
$$\dot{r}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \qquad \dot{r}(0) = \omega B = v_{r0}$$
$$B = \frac{v_{r0}}{\omega}$$

---

(4) $\Rightarrow \quad A = r_0 \qquad B = \dfrac{v_{r0}}{\omega}$

g) $E = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 + U(r) = \text{const.}$ Energieerhaltung

$= \frac{1}{2} m (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)^2 + U(r)$

$= \frac{1}{2}(m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$

$l = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}$ Drehimpulserhaltung $\dot{\varphi} = \frac{l}{mr^2}$

Einsetzen in Energieerhaltung:

$E = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2 \left(\frac{l}{mr^2}\right)^2 + U(r)$

$= \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$

1 $\quad \frac{1}{2} m\dot{r}^2 = E - U(r) - \frac{l^2}{2mr^2} = \frac{1}{2m}\left(2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right)$

$\dot{r} = \left[\frac{\cancel{2}}{m} \frac{1}{\cancel{2}m}\left[2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right]\right]^{1/2} =$

$= \frac{1}{m}\left[2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}$

1 $\quad = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{mr^2}$

$\Rightarrow \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{mr^2} = \frac{1}{m}\left[2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}$

1 $\quad \frac{dr}{d\varphi}\frac{l}{r^2}\frac{1}{\left[2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}} = 1$

Jetzt beide Seiten bezüglich φ integrieren $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi'$

$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' \frac{dr}{d\varphi'}\frac{l}{r^2}\frac{1}{\left[2m(E-U(r)) - \frac{l^2}{r^2}\right]^{1/2}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \varphi - \varphi_0$

1 $\quad = \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} dr' \frac{l}{r'^2}\frac{1}{\left[2m(E-U(r')) - \frac{l^2}{r'^2}\right]^{1/2}}$ ✓

4

h)

$$\varphi = \frac{1}{2} \arccos \frac{\frac{mE}{\ell} - \frac{\ell}{r^2}}{\left(\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m\right)^{1/2}}$$

Auflösen nach der Bahnkurve $r(\varphi)$

$$\cos(2\varphi) = \frac{\left(\frac{mE}{\ell} - \frac{\ell}{r^2}\right)}{\left(\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m\right)^{1/2}}$$

$$\frac{mE}{\ell} - \frac{\ell}{r^2} = \left(\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m\right)^{1/2} \cos(2\varphi)$$

$$\frac{\ell}{r^2} = \frac{mE}{\ell} - \left(\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m\right)^{1/2} \cos(2\varphi)$$

$$r^2 = \frac{\ell}{\left(\frac{mE}{\ell}\right) - \left(\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m\right)^{1/2} \cos(2\varphi)} = \frac{\left(\frac{\ell^2}{mE}\right)}{1 - \left(1 - \frac{\alpha m}{(mE)^2} \ell^2\right)^{1/2} \cos(2\varphi)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\ell^2}{mE}\right)}{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{m}\left(\frac{\ell}{E}\right)^2\right)^{1/2} \cos(2\varphi)}$$

1 $$r(\varphi) = \left[\frac{\left(\frac{\ell^2}{mE}\right)}{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{m}\left(\frac{\ell}{E}\right)^2\right)^{1/2} \cos 2\varphi}\right]^{1/2}$$

Kreisbahn: $r(\varphi) = R_0 = \text{const.}$ ~~nur~~ darf nicht von φ abhängen!

Damit: Vorfaktor muß verschwinden:

1 $$\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m \overset{!}{=} 0 \quad \text{für Kreisbahn}$$

1 $$\left(\frac{E}{\ell}\right)^2 = \frac{\alpha}{m} \to E^2 = \ell^2 \frac{\alpha}{m} \qquad \boxed{E = \ell\left(\frac{\alpha}{m}\right)^{1/2} = \ell\omega}$$

mit ω aus Teil f) für eine Kreisbahn

$$m^2 E^2 = m\alpha \ell^2 = m^2 \ell^2 \frac{\alpha}{m} = m^2 \ell^2 \omega^2$$

$$R_0 = \frac{\ell}{\sqrt{mE}} = \frac{\ell}{(m^2 \ell^2 \omega^2)^{1/4}} = \left(\frac{\ell^2}{m^2 \omega^2}\right)^{1/4}$$

$$= \left(\frac{\ell}{m\omega}\right)^{1/2} \quad \text{(nicht verlangt!)}$$

3