Technische Universität München
Physik Department E12
Prof. Dr. R. Krücken

# Semestrale zur Experimentalphysik 4

05. August 2009
08:30 Uhr, MW2001

Hinweise:
**Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt und beschriften Sie jedes Blatt mit Name und Matrikelnummer.** *Die Bearbeitungszeit beträgt* **90 Minuten**. *Um ein sehr gutes Ergebnis zu erzielen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Als Hilfsmittel sind nur ein* **Stift**, *ein* **Lineal** *und ein* **nicht programmierbarer Taschenrechner** *erlaubt. Die erreichbare Gesamtpunktzahl beträgt* **ca. 97 Punkte** *aus* **7 Aufgaben**. *Die Angabe (einschl. Formelsammlung) umfasst* **7 Seiten**. *Die Seite 5 ist leer. Formeln aus der Vorlesung, den Übungen und der* **Formelsammlung am Ende der Angabe** *müssen nicht hergeleitet werden, außer wo dies explizit Teil der Aufgabenstellung ist.* **Bitte geben Sie alle Nebenrechnungen und die Angabe mit ab!**

## Aufgabe 1 : Kastenpotential (ca. 11 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionales Kastenpotential mit einer Breite von $a = 1 \cdot 10^{-15}$ m, d.h. für das Potential gilt:

$$V = \begin{cases} 0 & : \quad 0 \leq x \leq a \\ \infty & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

a. Leiten sie den allgemeinen Ausdruck für die Energieniveaus in diesem Potential her und bestimmen Sie die Nullpunktsenergie eines in diesem Potential eingeschlossenen Protons. Skizzieren Sie die Lösung. (*ca. 9 Punkte*)

b. Nehmen Sie nun an, das Potential hätte eine endliche Höhe. Was bedeutet dies qualitativ für das Teilchen? (*ca. 2 Punkte*)

## Aufgabe 2 : Zeemann-Effekt (ca. 24 Punkte)

Hinweis: Im Folgenden sollen nur elektronische Zustände betrachtet werden (kein Kernspin).

a. Erläutern Sie das Zustandekommen des normalen Zeemann-Effektes. In welchen Fällen reduziert sich der anomale auf den normalen Zeemann-Effekt und worin liegen deren Unterschiede? (*ca. 6 Punkte*)

b. Welche guten Quantenzahlen sind zusätzlich zur Hauptquantenzahl $n$ und zur Spinquantenzahl $s$ notwendig zur vollständigen Beschreibung der Zustände beim anomalen Zeeman–Effekt und beim Paschen–Back–Effekt? (*ca. 2 Punkte*)

c. Betrachten Sie nun zwei angeregte Zustände in Natrium ($Z = 11$) mit den spektroskopischen Symbolen $3^2D_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$. Für die Energieniveaus gilt $E(3^2\mathrm{D}_{3/2}) > E(3^2\mathrm{P}_{1/2})$.

- Leiten Sie *allgemein* den Landé–Faktor für $LS$–Kopplung her. Hinweis: Gehen Sie vom Erwartungswert des magnetischen Momentes $\langle \mu_j \rangle$ aus und nähern Sie $g_s \approx 2$ (Ergebnis: siehe Formelsammlung).
- Geben Sie den Landé–Faktor für reinen Bahn– bzw. reinen Spinmagnetismus an.
- Berechnen Sie den Landé–Faktor für die beiden gegebenen Zustände.

(*ca. 10 Punkte*)

d. Es wird ein schwaches Magnetfeld angelegt. Zeichnen Sie das Termschema für die beiden Zustände aus Aufgabe c (schematische Skizze!). Tragen Sie in die Skizze die bei elektrischer Dipolstrahlung erlaubten Zeeman–Übergänge ein. Geben Sie explizit die relevanten Auswahlregeln an. (*ca. 3 Punkte*)

e. Wie lautet die Formel für die Verschiebung der Zeeman–Niveaus gegenüber den Energieniveaus ohne Magnetfeld? Geben Sie für $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$ die Energiedifferenz zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Zeeman–Niveau des $3^2D_{3/2}$–Zustandes an.

(*ca. 3 Punkte*)

## Aufgabe 3 : Lithiummoleküle (ca. 8 Punkte)

Lithium kommt als zwei Isotopen vor, $^6$Li und $^7$Li, mit jeweils 3 Protonen und 3 bzw. 4 Neutronen. Der Gleichgewichtsabstand $r_0$ in den Molekülen H$^6$Li und H$^7$Li sei gleich groß. Die Frequenz $\nu$ entspreche dem Übergang zwischen den Rotationszuständen $j = 1$ und $j = 0$. Experimentell wird zwischen den beiden Molekülsorten ein Frequenzunterschied $\Delta\nu$ von $\Delta\nu = \nu(\mathrm{H}^6\mathrm{Li}) - \nu(\mathrm{H}^7\mathrm{Li}) = 1 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ beobachtet. Die Moleküle sollen als starre Rotatoren betrachtet werden.

a. Berechnen Sie den Gleichgewichtsabstand $r_0$. (*ca. 6 Punkte*)

b. Berechnen Sie für beide Molekülsorten die Energie des Übergangs von $j = 1$ nach $j = 0$. (*ca. 2 Punkte*)

## Aufgabe 4 : Hochionisiertes Zirkonium (Zn) (ca. 19 Punkte)

In dieser Aufgabe wird wasserstoffartiges Zirkonium ($^{90}_{40}\mathrm{Zn}^{39+}$) betrachtet.

a. Berechnen Sie nach dem Bohr'schen Atommodell den Bahnradius und die Gesamtenergie im Grundzustand für

(i) ein Elektron (*ca. 4 Punkte*)

(ii) ein negatives Myon $\mu^-$ (*ca. 4 Punkte*)

im Feld eines Zirkonium-Kerns.

b. Nehmen Sie nun an, ein Anti-Proton werde von einem Zirkonium-Kern eingefangen.

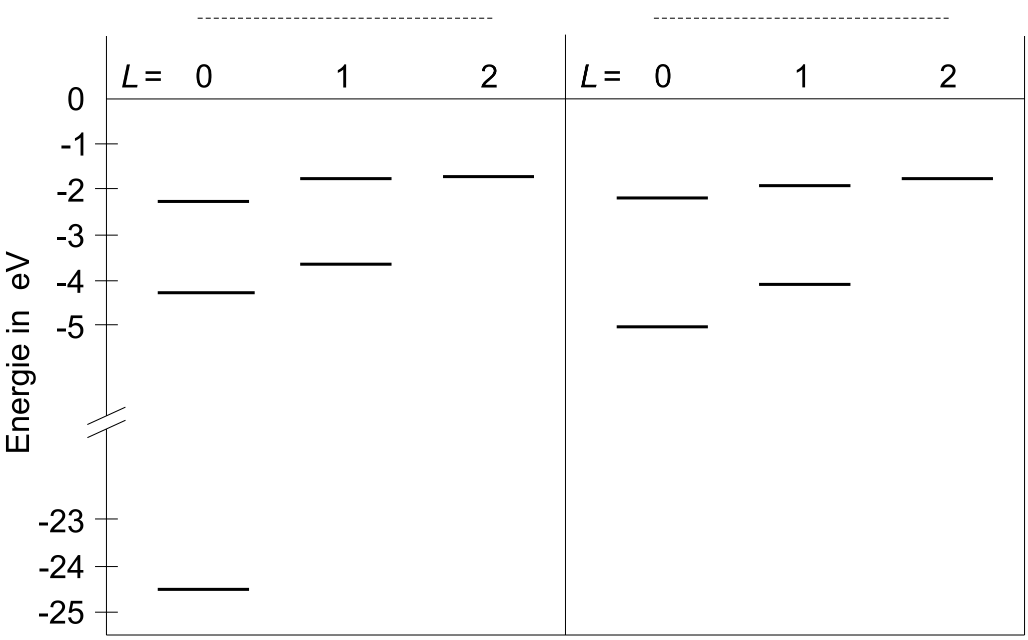
(i) Welche ist die tiefste Bohr'sche Bahn, auf der das Anti-Proton den Kern noch nicht berührt? (*ca. 5 Punkte*)

(ii) Wie groß ist die Bindungsenergie für diese Bahn? (*ca. 2 Punkte*)

c. Wie groß ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Elektrons und eines Myons im 1s-Zustand innerhalb des (Volumens des) Zirkonium-Kerns? Verwenden Sie die radiale Wellenfunktion $R_{10}(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}r}$ mit $\alpha = \frac{2Z}{a_0}$. (*ca. 4 Punkte*)

## Aufgabe 5 : Helium–Atom (ca. 13 Punkte)

a. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Termschema des Helium–Atoms für die niedrigsten Energieniveaus: (Hinweis: Es handelt sich beim He–Atom um ein 2–Elektronen–System mit zwei getrennten Termschemata.)




Gegeben sind die Energien der einzelnen Energieniveaus sowie der jeweilige Drehimpuls $L$. Mögliche Aufspaltungen der Energieniveaus durch Feinstruktur sind nicht eingezeichnet. Beschriften Sie die Energieniveaus vollständig mit den entsprechenden, spektroskopischen Symbolen. Welches der beiden Termschemata gehört zum Triplett–, welches zum Singulett–Helium? (Beschriften Sie die gestrichelten Linien.) (*ca. 5 Punkte*)

b. Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem Triplett– und Singulett–System des Helium–Atoms. Welches der beiden Systeme weist für $L \neq 0$ Feinstrukturaufspaltung auf? Begründen Sie Ihre Antwort. (*ca. 3 Punkte*)

c. Warum gibt es keinen $1^3S_1$-Zustand? Geben Sie für diesen (hypothetischen) Zustand für beide Elektronen alle relevanten Quantenzahlen an. (*ca. 3 Punkte*)

d. Warum werden die Übergänge $2^1S_0 \rightarrow 1^1S_0$ und $2^3S_1 \rightarrow 1^1S_0$ nicht beobachtet? (*ca. 2 Punkte*)

## Aufgabe 6 : Hyperfeinstruktur (ca. 13 Punkte)

Das $^{12}$C-Atom hat einen Kernspin $I = 0$, das $^{14}$N-Atom einen von $I = 1$.

a. Geben Sie die Elektronenkonfiguration und das spektroskopische Symbol des jeweiligen Grundzustandes der Kerne an. (*ca. 4 Punkte*)

b. In welche Hyperfeinniveaus spalten die Grundzustände dieser Atome auf? Geben Sie jeweils die relevanten Quantenzahlen an. (*ca. 4 Punkte*)

c. Die Wellenlänge des Überganges zwischen den zwei Hyperfeinniveaus des $1S_{1/2}$ Grundzustandes im Wasserstoff ist $\lambda = 21\,cm$. Berechnen Sie die Stärke des Magnetfeldes am Kern, das durch die Elektronen erzeugt wird. (*ca. 5 Punkte*)

## Aufgabe 7 : Thorium-Quelle (ca. 9 Punkte)

Thorium 229 ist ein $\alpha$-Strahler mit einer Teilchenenergie von 4,85 MeV. Zehn Prozent der von 5 g $^{229}$Th emittierten $\alpha$-Teilchen werden zu einem punktförmigen parallelen Strahl gebündelt und auf eine $4\,\mu$m dicke Goldfolie ($Z_{Au} = 79$) gelenkt. Ein Detektor mit einer kreisförmigen Öffnung (r=15 mm) befindet sich in 2 m Abstand vom Auftreffpunkt des $\alpha$-Strahls unter einem Winkel von 60° zur Strahlachse.

a. Erklären Sie in ein bis zwei Sätzen den Begriff differentieller Wirkungsquerschnitt $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$. (*ca. 1 Punkt*)

b. Die Luminosität $\mathcal{L}$ ist das Produkt aus Strahlfluss $\Phi$ und Anzahl der Targetteilchen im Strahlquerschnitt. Berechnen Sie die Luminosität $\mathcal{L}$ des oben beschriebenen Aufbaus. (*ca. 5 Punkte*)

c. Wie groß ist die Zählrate im Detektor? Verwenden Sie zur Berechnung eine Luminosität von $\mathcal{L} = 10^{30}\,\frac{1}{\mathrm{s\cdot cm^2}}$. (*ca. 3 Punkte*)

*Hinweise*: Der Ausdruck für die Aktivität eines radioaktiven Stoffes kann aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz ($N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ mit $\lambda = \ln 2/t_{1/2}$) hergeleitet werden. Die Zählrate $\dot{N}$ setzt sich aus der Luminosiẗt $\mathcal{L}$, dem Wirkungsquerschnitt $\sigma$ und dem abgedeckten Raumwinkel $\Delta\Omega$ zusammen: $\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma \cdot \Delta\Omega$. Der Streuquerschnitt kann auf der gesamten Detektoroberfläche als konstant angenommen werden.

**Leere Seite**

## Hinweis

*Es werden nicht alle angegebenen Formeln und Konstanten zur Lösung der Prüfungsaufgaben benötigt.*

## Physikalische Konstanten

| Größe | Symbol, Gleichung | Wert |
|---|---|---|
| Vakuumlichtgeschwindigkeit | $c$ | $2{,}9979 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}$ |
| Plancksche Konstante | $h$ | $6{,}6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} = 4{,}1357 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}$ |
| Red. Plancksche Konstante | $\hbar = h/2\pi$ | $1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$ |
| Elektr. Elementarladung | $e$ | $1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$ |
| Boltzmann-Konstante | $k_\mathrm{B}$ | $1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK}^{-1} = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVK}^{-1}$ |
| Magnetische Feldkonstante | $\mu_0$ | $4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{VsA}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ |
| Elektrische Feldkonstante | $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$ | $8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV}^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ |
| Elektronruhemasse | $m_\mathrm{e}$ | $9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0{,}5110\,\mathrm{MeV}/c^2$ |
| (Anti-)Protonruhemasse | $m_{\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}$ | $1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938{,}2720\,\mathrm{MeV}/c^2$ |
| Neutronruhemasse | $m_\mathrm{n}$ | $1{,}6749 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939{,}5653\,\mathrm{MeV}/c^2$ |
| Atomare Masseneinheit | amu | $1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ |
| Avogadro-Zahl | $N_A$ | $= 6.023 \cdot 10^{23}$ |
| Bohr'scher Radius | $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e}$ | $5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ |
| Bohr'sches Magneton | $\mu_B$ | $9{,}2741 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{JT}^{-1} = 5{,}7884 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVT}^{-1}$ |
| Kernmagneton | $\mu_K$ | $= 5{,}0508 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J/T} = 3{,}152 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{MeV/T}$ |
| Magnetisches Moment des Protons: | $\mu_P$ | $2{,}79\mu_K$ |
| Feinstrukturkonstante | $1/\alpha$ | $137{,}036$ |
| Rydbergsche Konstante | $R_\infty$ | $13{,}6057\,\mathrm{eV}$ |

## Material-, Teilchen- und Kerneigenschaften

Dichte von Gold: $\rho_{Au} = 19{,}32\,\mathrm{g/cm}^3$
Molmasse von Gold: $M_{Au} = 197{,}0\,\mathrm{g/mol}$
Halbwertszeit von Thorium 229: $t_{1/2} = 7880\,\mathrm{a}$
Molmasse von Thorium 229: $M_{Th} = 229{,}0\,\mathrm{g/mol}$
Myon: Ladung $q = -e$, $m_\mu = 207\,m_\mathrm{e}$
Anti-Proton: $q = -e$, Radius $R_{\bar{\mathrm{p}}} = 10^{-15}$ m
Zirkonium-Kern: $Z = 40$, $R_{\mathrm{Zn}} = 5{,}3 \cdot 10^{-15}$ m, $m_{\mathrm{Zn}} = 90 \cdot m_\mathrm{p}$

## Physikalische Formeln

### Rutherfordsche Streuformel

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

### Definition des Landé–Faktors

$$\langle\mu_j\rangle = \mu_\mathrm{B}\, g_j \sqrt{j(j+1)}$$

### Landé-Faktor für LS-Kopplung

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

**Winkel zwischen Hüllen- und Kerndrehimpuls (Hyperfeinstruktur)**

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{I},\vec{J})\right) = \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{I(I+1)}}$$

**Fermi-Dirac-Verteilung**

$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{\exp\frac{E-E_F}{k_B T} + 1}$$

**Schrödingergleichung**

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\vec{r},t\right) = -\left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V\left(\vec{r},t\right)\right]\psi\left(\vec{r},t\right)$$

**Energiezustände im unendlich hohen Potentialtopf der Breite $l$**

$$E_n = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot m \cdot l^2} \cdot n^2 = E_0 \cdot n^2$$

**Doppler-Verbreiterung**

$$\delta\omega_D = 7.16 \times 10^{-7} \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{T/M\,[mol/(gK)]}$$

**Matrixelement für Dipolmoment $e\vec{r}$**

$$M_{ik} = \int \Psi_i^*\left(e\vec{r}\right)\Psi_k dxdydz \tag{1}$$

**Einstein-Koeffizient für spontane Emission**

$$A_{ik} = \frac{2}{3}\frac{\omega_{ik}^3}{\epsilon_o\, h\, c^3}|M_{ik}|^2 \tag{2}$$

**Einstein-Koeffizient für Absorption**

$$B_{ik} = \frac{2}{3}\frac{e^2\,\pi^2}{\epsilon_o\, h^2}|M_{ik}|^2 \tag{3}$$

## Mathematische Formeln

**Integrale**

$$\begin{aligned}\int_0^R r^2 e^{-\alpha r} dr &= -e^{-\alpha R}\left(\frac{R^2}{\alpha} + \frac{2R}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3}\right) + \frac{2}{\alpha^3}\\ \int_0^\infty r^2 e^{-\alpha^2 r^2} dr &= \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}\end{aligned}$$