Musterlösung Semestrale Ex 1 2008

Aufgabe 1

(a) Es gilt das Gravitationsgesetz in der Form, dass der Müllsack am Ort z als „effektive Erdmasse“ $M(z)$ nur den Anteil der gesamten Erdmasse innerhalb der Sphäre $r = |z|$ sieht:

$$m\ddot{z} \;=\; -G\frac{mM(z)}{z^2}\frac{z}{|z|} \tag{1}$$

(vorzeichenrichtig: für positive z zeigt die Kraft nach unten, für negative z nach oben) mit

$$M(z) \;=\; \frac{4\pi}{3}\rho|z|^3 \tag{2}$$

also

$$m\ddot{z} \;=\; -Gm\rho\frac{4\pi}{3}\frac{|z|^3 z}{z^2|z|} \;=\; -Gm\frac{4\pi}{3}\rho z \tag{3}$$

Wegen $\frac{4\pi}{3}\rho = \frac{M}{R^3}$ kann man dies durch die gesamte Erdmasse M und den Erdradius R ausdrücken:

$$m\ddot{z} \;=\; -Gm\frac{M}{R^3}z \tag{4}$$

Also handelt es sich also bei der Bewegung von z um eine harmonische Oszillation mit der Kreisfrequenz

$$\omega^2 \;=\; G\frac{M}{R^3} \tag{5}$$

(b) Die Schwingungsperiode des Müllsacks ist gemäß (a)

$$T_M \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{6}$$

Die Umlaufsgeschwindigkeit des Satelliten folgt aus der Gleichheit von Zentripetalkraft und Gewichtskraft:

$$m\frac{v^2}{R} \;=\; GmM\frac{1}{R^2} \tag{7}$$

also

$$v \;=\; \sqrt{\frac{GM}{R}} \tag{8}$$

Es folgt für die Umlaufsdauer

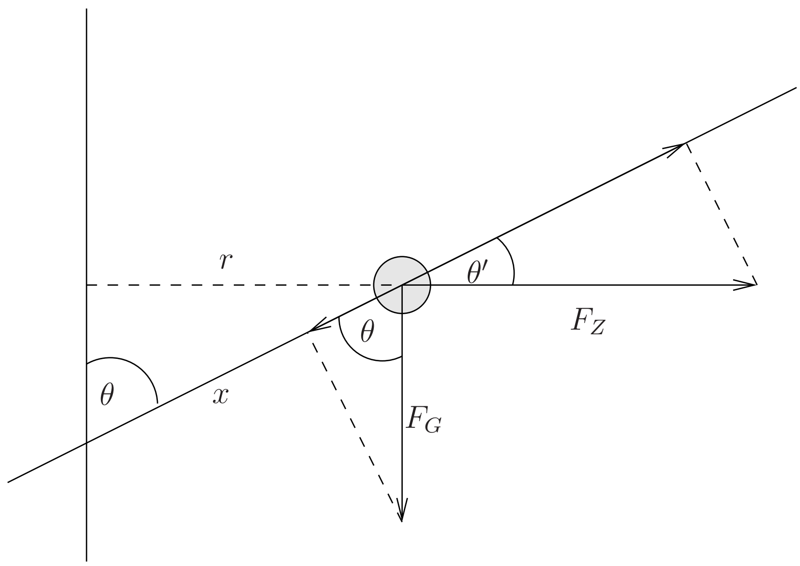
$$T_S \;=\; \frac{2\pi R}{v} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{9}$$

Also $T_M = T_S$.

Aufgabe 2

Wir setzen uns in das mitrotierende System. In die Richtung von x wirken dann zwei Kräfte auf die Erbse: Eine Komponente der Gewichtskraft und eine Komponente der Zentrifugalkraft. Der reibungsfreie Stab trägt keine Kräfte in x-Richtung bei, ebensowenig die Coriolis-Kraft, da sie proportional zu $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}$ ist und daher senkrecht auf dem Stab steht.

Die Gewichtskraft hat den Betrag $F_G = mg$, die Zentrifugalkraft den Betrag $F_Z = \Omega^2 x \sin\theta$ (Radius der Kreisbahn ist nicht x sondern $x \sin\theta$).



Die Gesamtkraft auf die Erbse entlang ihrer Bewegungsrichtung ist dann

$$\begin{aligned} F &= -F_G \cos\theta + F_Z \cos\theta' && (10)\\ &= -mg\cos\theta + m\Omega^2 x \sin\theta \cos\theta' && (11)\\ &= -mg\cos\theta + m\Omega^2 x \sin^2\theta && (12) \end{aligned}$$

wegen $\theta' = 90° - \theta$. Die Bewegungsgleichung für x ist also

$$\boxed{\ddot{x} = -g\cos\theta + \Omega^2 x \sin^2\theta} \qquad (13)$$

Aufgabe 3

(a) Die Massen haben zu Beginn den Abstand der Ruhelänge der Feder, L. Die Bewegungsgleichungen lauten

$$m\ddot{x}_1 = k(x_2 - x_1 - L) \tag{14}$$
$$m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - L) \tag{15}$$

(Konvention: Die linke Masse bekommt Index 1 und die x-Koordinaten sind nach rechts positiv. Der Kraftstoß wirke auf die Masse 1 in positive x-Richtung.) Um die Bewegungsgleichungen zu lösen, muss man auf die Idee kommen, Schwerpunkt- und Relativkoordinaten X und r einzuführen:

$$X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad , \quad r = x_2 - x_1 \tag{16}$$

Die Bewegungsgleichungen dafür erhält man als Summe bzw. Differenz der Bewegungsgleichungen für x_1 und x_2:

$$\ddot{X} = 0 \tag{17}$$
$$m\ddot{r} = -2kr + 2kL \tag{18}$$

Die Schwerpunktsgleichung hat die Lösung

$$X(t) = V_0 t + X_0 \tag{19}$$

mit

$$V_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)) \tag{20}$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$x_1(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = \frac{\Delta p}{m} \tag{21}$$
$$x_2(0) = L \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0 \tag{22}$$

erhält man

$$X(t) = \frac{\Delta p}{2m} t + \frac{L}{2} \tag{23}$$

Die Gleichung für die Relativbewegung

$$m\ddot{r} + 2kr = 2kL \tag{24}$$

hat die allgemeine homogene Lösung

$$r_h(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{25}$$

mit $\omega = \sqrt{2k/m}$. Eine spezielle inhomogene Lösung rät man leicht: $r_s(t) = L$. Also

$$r(t) \;=\; a\cos\omega t + b\sin\omega t + L \tag{26}$$

Einarbeiten der Anfangsbedingungen:

$$r(0) \overset{!}{=} L \quad \Rightarrow \quad a = 0 \tag{27}$$

$$\dot{r}(0) \overset{!}{=} -\frac{\Delta p}{m} \quad \Rightarrow \quad b \;=\; -\frac{\Delta p}{m\omega} \tag{28}$$

Also

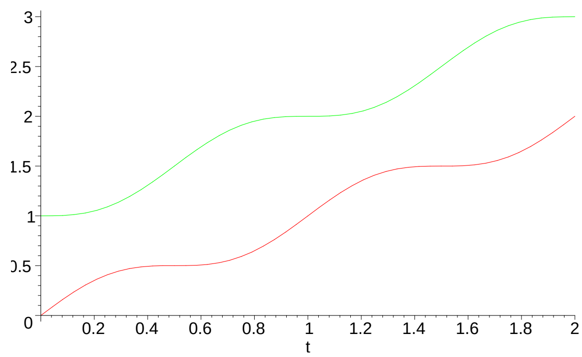
$$r(t) \;=\; L - \frac{\Delta p}{m\omega}\sin\omega t \tag{29}$$

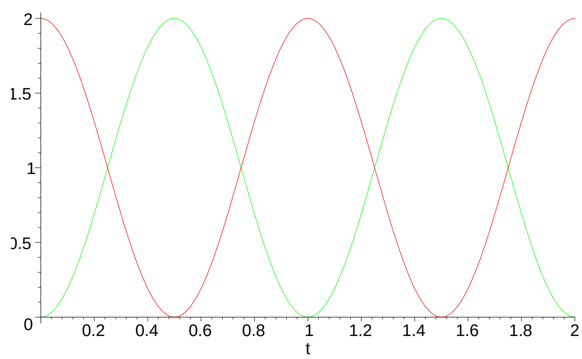
Im Ganzen

$$x_1(t) \;=\; X(t) - \frac{r(t)}{2} \;=\; \frac{\Delta p}{2m}t + \frac{\Delta p}{2m\omega}\sin\omega t \tag{30}$$

$$x_2(t) \;=\; X(t) + \frac{r(t)}{2} \;=\; L + \frac{\Delta p}{2m}t - \frac{\Delta p}{2m\omega}\sin\omega t \tag{31}$$

(b)





Aufgabe 4

(a) Die „einfachste Annahme“ bedeutet, dass man sich keine Gedanken über rausschwappendes Wasser, reingezogene Blasen etc. machen soll, sondern das ganze so betrachten, als wäre das Ausflussrohr sauber mit einem beweglichen Kolben verschlossen, der mit dem Atmosphärendruck p_A dem Ausfließen entgegensteht. Dann kann man für den Druck auf der Höhe des Ausflussrohres einfach hinschreiben

$$p \;=\; p_T + \rho g H \tag{32}$$

und die Bedingung für Auslaufen ist $p > p_A$ also

$$\boxed{p_T \;>\; p_A - \rho g H} \tag{33}$$

(b) An einem allgemeinen Punkt im Ausflussrohr gilt die Bernoulli-Formel

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 \;=\; p_T + \rho g H \tag{34}$$

(auf der rechten Seite taucht keine Geschwindigkeit auf, da die Geschwindigkeit des Wassers imBehälter vernachlässigt werden soll) also ist der Druck

$$p \;=\; p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{35}$$

also dort klein, wo die Geschwindigkeit groß ist. Zur Blasenbildung kommt es an der Stelle mit dem niedrigsten Druck, also an der Stelle mit der höchsten Geschwindigkeit. Nun gilt die Kontinuitätsgleichung

$$A_1 v_1 \;=\; A_2 v_2 \;=\; A_3 v_3 \tag{36}$$

also

$$D_1^2 v_1 \;=\; D_2^2 v_2 \;=\; D_3^2 v_3 \tag{37}$$

Daher ist

$$v_1 \;=\; v_3 \quad , \quad v_2 \;=\; \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3 \;<\; v_3 \tag{38}$$

d.h. die Geschwindigkeit ist bei 2 am größten, der Druck dort am kleinsten, also entstehen dort die Blasen. (Die Zusatzbedingung $p_T > p_D$ soll verhindern, dass als Antwort kommt: Blasenbildung findet am Wasserspiegel statt, wenn $p_T < p_D$ ist.)

Um den kritischen Wert für den treibenden Druck p_T zu bestimmen, berechnet man zuerst die Austrittsgeschwindigkeit v_3 mit Bernoulli:

$$p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \;=\; p_T + \rho g H \tag{39}$$

p_3 ist gleich dem Außendruck p_A wegen der „einfachst möglichen Annahme“. Also

$$v_3 \;=\; \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_T + \rho g H - p_A)} \tag{40}$$

Daraus bekommt man mit Kontinuitätsgleichung v_2:

$$v_2 \;=\; \frac{D_3^2}{D_2^2} v_3 \tag{41}$$

und daraus mit Bernoulli den Druck bei 2:

$$p_2 \;=\; p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho v_2^2 \tag{42}$$

Dieser soll nun kleiner gleich p_D sein. Alles eingesetzt führt diese Bedingung auf:

$$p_T + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \frac{D_3^4}{D_2^4}\frac{2}{\rho}(p_T + \rho g H - p_A) \;\leq\; p_D \tag{43}$$

was durch korrektes Auflösen nach p_T ergibt:

$$\boxed{p_T \;\geq\; \frac{D_3^4 p_A - D_2^4 p_D}{D_3^4 - D_2^4} - \rho g H} \tag{44}$$

Aufgabe 5

Die Oberflächenenergie der Seifenblase ist

$$E = 2A\sigma \tag{45}$$

(Faktor 2 wegen innerer und äußerer Grenzfläche Luft-Seife.) Diese verteile sich nun als kinetische Energie vollständig (da die Oberflächenenergie der Tröpfchen vernachlässigt werden soll) auf N Tröpfchen mit den Massen m_n und gleichen Geschwindigkeiten v:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} m_n v^2 = 2A\sigma \tag{46}$$

Also

$$\frac{1}{2} v^2 \sum_{n=1}^{N} m_n = \frac{1}{2} m v^2 = 2A\sigma \tag{47}$$

Die Unbekannten m_n und N fallen also raus und es bleibt übrig:

$$v = \sqrt{\frac{4A\sigma}{m}} = \sqrt{\frac{16\pi r^2 \sigma}{m}} \tag{48}$$

Einsetzen der angegebenen Werte ergibt:

$$\boxed{v = 6{,}01590785911\ldots \text{ m/s}} \tag{49}$$

Aufgabe 6

(a) Um den gewünschten Zusammenhang zu zeigen, gehen wir so vor, dass wir v, L und c als gegeben betrachten und die (irdische) Ankunftszeit des Lichtsignals berechnen: Die Bewegung des Raumschiffs A wird beschrieben durch

$$x = vt \tag{50}$$

Also kommt es zur Zeit $t_0 = L/v$ an seinem Ziel an. Zu diesem Zeitpunkt wird ein Lichtstrahl zur Erde zurückgeschickt, der dort also zur Zeit

$$T = t_0 + \frac{L}{c} = \frac{L}{v} + \frac{L}{c} = L\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) \tag{51}$$

ankommt. Löst man dies nun nach v auf, dann erhält man

$$\frac{1}{v} = \frac{T}{L} - \frac{1}{c} \tag{52}$$

also

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = \frac{c}{\frac{cT}{L} - 1} \tag{53}$$

q.e.d. Für Raumschiff B gilt natürlich dasselbe, da es dieselbe Entfernung zurücklegt.

(b) Als erstes berechnen wir mit Hilfe von Teil (a) die Geschwindigkeit von A. L ist dabei 1 Lichttag und cT ist 8/3 Lichttage, also

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{8/3\,\mathrm{LT}}{1\,\mathrm{LT}} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5} \tag{54}$$

Und den zugehörigen γ-Faktor rechnen wir auch schon mal vorsichtshalber aus:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{5}{4} \tag{55}$$

Dann kommt die Lorentz-Transformation: Das erste Ereignis, um das es geht (nämlich die Ankunft von A bei L) hat im Erdsystem die Raumzeit-Koordinaten

$$t_A = \frac{L}{v} \quad , \quad x_A = L \tag{56}$$

Die Lorentz-Transformation für die Zeitkoordinate lautet

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{57}$$

also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_A = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c}\frac{L}{c}\right) \tag{58}$$

Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_A = \gamma\left(\frac{c}{v} - \frac{v}{c}\right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{59}$$

also

$$\boxed{t'_A = \frac{4}{3}\,\text{Tage}} \tag{60}$$

Das andere Ereignis ist die Ankunft von B bei $-L$ mit den Koordinaten im Erdsystem

$$t_B = \frac{L}{v} \quad , \quad x_B = -L \tag{61}$$

Also hat das Ereignis im Inertialsystem von A die Zeitkoordinate

$$t'_B = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{v}{c}\frac{(-L)}{c}\right) \tag{62}$$

Mit $L = c \cdot 1$ Tag folgt:

$$t'_B = \gamma\left(\frac{c}{v} + \frac{v}{c}\right) \cdot 1 \text{ Tag} = \frac{5}{4}\left(\frac{5}{3} + \frac{3}{5}\right) \cdot 1 \text{ Tag} \tag{63}$$

$$\boxed{t'_B = \frac{17}{6}\,\text{Tage}} \tag{64}$$

Aufgabe 7

(a) Da keine Reibung zwischen den Zylindern herrscht, gibt es keinen Drehimpulsübertrag, die Rotationswinkelgeschwindigkeit beider Zylinder ist also beim Stoß erhalten. Weiterhin gilt Impuls- und Energieerhaltung (der Stoß selber ist elastisch):

$$mv_0 = mv_1' + mv_2' \tag{65}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2 \tag{66}$$

Es gibt zwei Lösungen: $(v_1' = v_0, v_2' = 0)$ und $(v_1' = 0, v_2' = v_0)$. Nur die zweite ist physikalisch sinnvoll. Also gilt unmittelbar nach dem Stoß:

$$v_1' = 0 \quad , \quad \omega_1' = \omega_0 \tag{67}$$

$$v_2' = v_0 \quad , \quad \omega_2' = 0 \tag{68}$$

Dabei ist $\omega_0 = v_0/r$, da der Zylinder 1 am Anfang ja ohne zu rutschen rollen soll. Die Zylinder haben also ihre Geschwindigkeiten ausgetauscht, aber ihre Winkelgeschwindigkeiten beibehalten.

(b) Translationsbeschleunigung und Winkelbeschleunigung ergeben sich aus

$$m\dot{v} = F \quad , \quad \Theta\dot{\omega} = -Fr \tag{69}$$

Das Minuszeichen von $-Fr$ ist eine Folge der Konvention, dass das VZ von ω so gewählt sein soll, dass die Rollbedingung die Form $v = \omega r$ und nicht $v = -\omega r$ haben soll. Dieses VZ ist entscheidend für Teil (c). Trotzdem sollte hier volle Punktzahl auch ohne das VZ gegeben werden.

Für das Verhältnis beider Beschleunigungen gilt also

$$\frac{\dot{v}}{\dot{\omega}} = -\frac{F/m}{Fr/\Theta} = -\frac{\Theta}{mr} = -\frac{r}{2} \tag{70}$$

(c) Der Zylinder 1 setzt sich nun wieder in Bewegung, wobei seine Winkelgeschwindigkeit durch die Bodenreibung abnimmt und seine Geschwindigkeit zunimmt. Während dieses ganzen Vorgangs gilt nach (b)

$$\dot{v} = -\frac{r}{2}\dot{\omega} \tag{71}$$

also

$$\Delta v = -\frac{r}{2}\Delta\omega \tag{72}$$

Es ist die Endgeschwindigkeit v_1'' gesucht, bei der ω_1 so weit gesunken ist, dass die Rollbedingung wieder erfüllt ist. Also haben wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten v_1'' und ω_1'':

$$v_1'' - v_1' = -\frac{r}{2}(\omega_1'' - \omega_1') \tag{73}$$

$$v_1'' = \omega_1'' r \tag{74}$$

Einsetzen der bekannten Größen (Anfangsbedingungen) $v_1' = 0$, $\omega_1' = v_0/r$ und Elimination von ω_1'' ergibt

$$v_1'' = -\frac{r}{2}\left(\frac{v_1''}{r} - \frac{v_0}{r}\right) \tag{75}$$

also

$$\boxed{v_1'' = \frac{1}{3}v_0} \tag{76}$$

Für den Zylinder 2 gilt das analoge System

$$v_2'' - v_2' = -\frac{r}{2}(\omega_2'' - \omega_2') \tag{77}$$

$$v_2'' = \omega_2'' r \tag{78}$$

wobei die Anfangsbedingungen hier andere sind, nämlich $v_2' = v_0$, $\omega_2' = 0$. Das führt analog auf

$$\boxed{v_2'' = \frac{2}{3}v_0} \tag{79}$$

Uff!....