Vordiploms Klausur QM I / September 2000

Aufgabe 1

i) $e^{A+B} = e^A e^B$ nur gültig wenn $[A,B]=0$ ✓

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$

Betrachte: $e^{\alpha(A+B)} = 1 + \alpha(A+B) + \frac{\alpha^2}{2}(A+B)^2 + \dots \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$e^{\alpha A} e^{\alpha B} = \left(1+\alpha A + \frac{\alpha^2}{2}A^2 + \dots\right)\left(1+\alpha B + \frac{\alpha^2}{2}B^2 + \dots\right)$$

$$= 1 + \alpha(A+B) + \frac{\alpha^2}{2}\left(A^2 + 2AB + B^2\right) +$$

$$= 1 + \alpha(A+B) + \frac{\alpha^2}{2}\left(A^2 + AB + BA + B^2\right) + \dots$$

3P

max. 10 min

$\rightsquigarrow$ bereits Abweichung bei Ordnung α^2 ✓

ii) $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$

zu zeigen $\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \langle\hat{p}\psi|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle = \int dx\, \psi^* \hat{p}\psi = -i\hbar\int dx\, \psi^*\frac{\partial}{\partial x}\psi$$

$$\underset{\text{part. Int}}{=} i\hbar\int dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*\right)\psi = i\hbar\int dx\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)^*\psi$$

$$= \int dx\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi\right)^*\psi = \langle\hat{p}\psi|\psi\rangle$$

2P

5min

iv) $\vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2S_{1z}S_{2z} + S_{1+}S_{2-} + S_{1-}S_{2+}$

$$\vec{S}^2\underbrace{\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)}_{|\psi\rangle} = 2\frac{3}{4}\hbar^2|\psi\rangle - 2\frac{\hbar^2}{4}|\psi\rangle + \hbar^2|\psi\rangle$$

$$= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)\hbar^2|\psi\rangle = 2\hbar^2|\psi\rangle$$

$$\vec{S}^2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \underbrace{2}_{\hat{=}S(S+1)}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \rightsquigarrow \underline{\underline{S=1}}$$

3P

max. 10 min

v) Der Triplettzustand liegt stets energetisch niedriger als der Singulettzustand. Ursache ist die elektrostatische WW beider Elektronen (Austausch-WW)

5 min

2P

Aufgabe 2

i) Wellenfunktion ist ungleich Null im offenen Intervall $(0,L)$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + E\,\psi(x) = 0$$

$$\rightsquigarrow \psi(x) = A e^{iKx} + B e^{-iKx} \checkmark \qquad K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\psi(x=0) = 0 = A + B \checkmark \quad \rightsquigarrow \quad \underline{\psi(x) = 2iA \sin Kx} \checkmark$$

$$\psi(x=L) = 0 = 2iA \sin KL \checkmark \quad \rightsquigarrow \quad \sin KL = 0 \quad \text{bzw. } KL = n\pi$$

$$\underline{\underline{E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{n^2\pi^2}{L^2}}} \checkmark$$

Normierung: $$\int_0^L dx\, \psi^* \psi = 4|A|^2 \int_0^L dx\, \sin^2 Kx$$

$$= 4|A|^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4K}\sin 2Kx \right|_0^L \checkmark$$

$$= 4|A|^2 \left(\frac{L}{2} - \underbrace{\frac{1}{4K}\sin 2KL}_{=0} \right) = 1$$

$$\rightsquigarrow \underline{\underline{|A|^2 = \frac{1}{2L}}} \checkmark \qquad \text{Phase nicht bestimmbar} \qquad \underline{8p}$$

o.B.d.A : $$\underline{\underline{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x}} \checkmark \qquad x \in [0,L] \qquad \underline{10\,\text{min}}$$

ii) $$\langle H \rangle = \int_0^L dx\, \psi^*(x,t=0)\, H\, \psi(x,t=0) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx\, \psi^* \frac{d^2}{dx^2} \psi$$

$$\frac{d}{dx}\psi = \sqrt{\frac{2}{L}}\, \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x} + \sqrt{\frac{2}{L}}\, iK_0 \sin\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi = -\sqrt{\frac{2}{L}}\, \frac{\pi^2}{L^2} \sin\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x} + \sqrt{\frac{2}{L}}\, \frac{\pi}{L}\, iK_0 \cos\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x}$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{L}}\, iK_0 \frac{\pi}{L} \cos\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x} - \sqrt{\frac{2}{L}}\, K_0^2 \sin\frac{\pi x}{L}\, e^{iK_0 x}$$

$$\langle \hat H\rangle = -\frac{2}{L}\int_0^L dx\left[-\frac{\pi^2}{L^2}\sin^2\frac{\pi x}{L} + \frac{2i\pi}{L}k_0\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L} - k_0^2\sin^2\frac{\pi x}{L}\right]\frac{\hbar^2}{2m}$$

$$= -2\int_0^\pi dy\left[-\frac{\pi}{L^2}\sin^2 y + \frac{2i}{L}k_0\sin y\cos y - \frac{k_0^2}{\pi}\sin^2 y\right]\frac{\hbar^2}{2m}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{L^2} + k_0^2\right)\frac{\hbar^2}{2m} = E_1 + \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$$ ✓

$$\langle \hat p\rangle = -i\hbar\int_0^L dx\,\psi^*\frac{d}{dx}\psi = -i\hbar\,\frac{2}{L}\int_0^L dx\left[\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi x}{L} + ik_0\sin^2\frac{\pi x}{L}\right]$$

$$= -i\hbar\,2\int_0^\pi dy\left[\frac{1}{L}\cos y\sin y + i\frac{k_0}{\pi}\sin^2 y\right]$$

$$= -i\hbar\, i\, k_0^2 = \underline{\underline{\hbar k_0}}$$ ✓

6P

10min

iii) $\psi(x,t=0) = \sum_n c_n\psi_n(x)$ ✓

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n\psi_n(x)\underbrace{e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}}_{\text{Zeitentwicklung für }\psi_n(x)}$$ ✓

$\left|c_1 e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right|^2$ Wkl. zur Zeit t die Grundzustandsenergie zu messen $\Rightarrow |c_1|^2$

$$c_1 = \int_0^L dx\,\psi(x,t=0)\,\psi_1(x)$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L dx\,\sin^2\frac{\pi x}{L}\,e^{ik_0 x} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi dy\,\sin^2 y\,e^{\overbrace{\frac{ik_0 L}{\pi}}^{=a} y}$$

10min

= Bronstein Nr 461

$$= \left[\frac{e^{ay}\sin y}{a^2+4}(a\sin y - 2\cos y)\Big|_0^\pi + \frac{2}{a^2+4}\int_0^\pi e^{ax}dx\right]\frac{2}{\pi}$$

5P

$$= \frac{4}{a^3+4a}\frac{1}{\pi}\left(e^{a\pi}-1\right) = \frac{2}{-k_0^2L^2+4}\left(e^{ik_0L}-1\right)$$ ✓

$$\curvearrowright \underline{\left|\frac{2}{4-k_0^2L^2}\left(e^{ik_0L}-1\right)e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right|^2}$$

Aufgabe 3

$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \Rightarrow \Delta x \geq \langle x^2 \rangle$

$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ im Grundzustand

harmonischer Oszillator: Symmetrie $\langle x\rangle = \langle p \rangle = 0$ ✓

$$\leadsto \left.\begin{aligned}(\Delta x)^2 &\leq \langle x^2\rangle \\ (\Delta p)^2 &\leq \langle p^2\rangle\end{aligned}\right\} \ \langle x^2\rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$ ✓

$$E = \langle H \rangle = \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \frac{1}{2} m\omega^2 \langle x^2\rangle$$
$$\geq \frac{1}{2m}\langle p^2\rangle + \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar^2}{4\langle p^2\rangle}$$ ✓

- Minimum in Abhängigkeit von $\langle p^2 \rangle$ ✓

$$0 = \frac{d}{d\langle p^2\rangle}\langle H\rangle = \frac{1}{2m} - \frac{1}{8} m\omega^2\hbar^2 \frac{1}{\langle p^2\rangle^2}$$

$$\leadsto \langle p^2\rangle_{min} = \frac{1}{2} m\omega\hbar$$ ✓

$$\rightarrow E \geq \frac{1}{4}\omega\hbar + \frac{1}{4}\omega\hbar = \frac{\hbar\omega}{2}$$ ✓

- Bem: ob das Minimum $E_{min} = \frac{\hbar\omega}{2}$ angenommen wird, ist fraglich, da $\langle H \rangle$ und $\langle p^2\rangle$ von einander abhängig sind !

8p

15 ~~20~~ min

Aufgabe 4

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \exp\Big[-\lambda \overbrace{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}}^{\equiv 1/x_0} x\Big] - \overset{m\omega^2 x_0^2}{\downarrow} \sin\Big[\lambda \cancel{\sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}\, x^3}\Big] \qquad \left(\frac{x}{x_0}\right)^3$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \lambda \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}\, x^3 + \lambda^2 \frac{1}{4} \frac{m^2\omega^3}{\hbar} x^4 - \lambda \sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}\, x^3$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \underbrace{\left[-\lambda \frac{3}{2}\sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}\, x^3 + \lambda^2 \frac{1}{4} \frac{m^2\omega^3}{\hbar} x^4\right]}_{\text{Störung zum harmonischen Oszillatorpotential}} \equiv H_1 \quad ✓$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^+) \quad ✓$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right) \qquad p = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\,(a - a^+) \quad ✓$$

$$H_1 = -\lambda\, \hbar\omega\, \frac{3}{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} (a + a^+)^3 + \lambda^2 \hbar\omega \frac{1}{16} (a + a^+)^4$$

$$= -\lambda \frac{3\hbar\omega}{4\sqrt{2}} (a + a^+)^3 + \lambda^2 \frac{\hbar\omega}{16} (a + a^+)^4 \quad ✓$$

4p

10 min

i) $$E_n^{(1)} = -\langle n^{(0)} | \underbrace{\frac{3\hbar\omega}{4\sqrt{2}} (a + a^+)^3}_{\lambda\text{-prop Teil von } H_1} | n^{(0)} \rangle = 0 \ ✓$$

da sich Erzeuger und Vernichter nicht abpaaren ✓ 2p

ii) $$|n^{(1)}\rangle = \sum_{\substack{m \\ n \neq m}} |m^{(0)}\rangle \frac{\langle m^{(0)} | \tilde{H}_1 | n^{(0)} \rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$\tilde{H}_1$ ist λ-proportionale Teil von H_1

$$a|n^{(0)}\rangle = \sqrt{n}\, |n^{(0)} - 1\rangle \ ; \quad a^+ |n^{(0)}\rangle = \sqrt{n+1}\, |n^{(0)} + 1\rangle$$

$$(a + a^+)^3 = (a^2 + a a^+ + a^+ a + a^{+2})(a + a^+)$$

$$= a^3 + a^2 a^+ + a a^+ a + a a^{+2} + a^+ a^2 + a^+ a a^+ + a^{+2} a + a^{+3} \quad ✓$$

$$\langle m^{(0)}|(a+a^{\dagger})^3|n^{(0)}\rangle = \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\delta_{m(n-3)} + (n+1)\sqrt{n}\,\delta_{m(n-1)} + n\sqrt{n}\,\delta_{m(n-1)} + (n+2)\sqrt{n+1}\,\delta_{m(n+1)} + \sqrt{n}(n-1)\,\delta_{m(n-1)} + \sqrt{n+1}(n+1)\,\delta_{m(n+1)} + n\sqrt{n+1}\,\delta_{m(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{m(n+3)}$$

$$= \sqrt{n(n-1)(n-2)}\,\delta_{m(n-3)} + 3n\sqrt{n}\,\delta_{m(n-1)} + \sqrt{n+1}\,(3n+3)\,\delta_{m(n+1)} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,\delta_{m(n+3)}$$ ✓

$$E_n^{(0)} - E_m^{(0)} = \hbar\omega(n-m)$$

$$\Rightarrow |n^{(1)}\rangle = -\frac{3}{4\sqrt{2}}\left[\frac{\sqrt{n(n-1)(n-2)}}{3}|n-3^{(0)}\rangle + \frac{3n\sqrt{n}}{1}|n-1^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{n+1}(3n+3)}{1}|n+1^{(0)}\rangle - \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}{3}|n+3^{(0)}\rangle\right]$$

4P

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\sqrt{n(n-1)(n-2)}\,|n-3^{(0)}\rangle + 9n\sqrt{n}\,|n-1^{(0)}\rangle - 9(n+1)\sqrt{n+1}\,|n+1^{(0)}\rangle - \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}\,|n+3^{(0)}\rangle\right]$$

15min

iii) hier müssen zwei Teile betrachtet werden, ✓ um ein vollständiges λ^2 - Resultat zu erhalten

a) $$E_n^{(2)a} = \sum_{\substack{m \\ n\neq m}} \frac{|\langle m^{(0)}|\tilde{H}_1|n^{(0)}\rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$|\langle m^{(0)}|\tilde{H}_1|n^{(0)}\rangle|^2 = \hbar^2\omega^2\frac{9}{32}\Big(n(n-1)(n-2)\,\delta_{m(n-3)} + 9n^3\,\delta_{m(n-1)} + 9(n+1)^3\,\delta_{m(n+1)} + (n+1)(n+2)(n+3)\,\delta_{m(n+3)}\Big)$$

$$E_n^{(2)a} = \hbar\omega\frac{3}{32}\Big(n(n-1)(n-2) + 27n^3 - 27(n+1)^3 - (n+1)(n+2)(n+3)\Big)$$

$$= \hbar\omega\frac{3}{32}\left(-3n^2 + 2 - 81n^2 - 81n - 27 - 6n^2 - 11n - 6\right)$$

3P

$$= -\hbar\omega\frac{3}{32}\left(90n^2 + 90n + 33\right)$$

b) ein ebenfalls λ^2-proportionaler Term ergibt sich aus:

$$E_n^{(2)b} = \langle n^{(0)} | \tilde{\tilde{H}}_1 | n^{(0)} \rangle \checkmark$$

$\tilde{\tilde{H}}_1$ ist λ^2-proportionaler Teil von H_1

Resultat kann auch ohne Rechnung sofort hingeschrieben werden ↓

$$(a+a^+)^4 = (a+a^+)^3 (a+a^+)$$
$$= a^4 + a^2 a^+ a + a a^+ a^2 + a a^{+2} a + a^+ a^3 + a^+ a a^+ a$$
$$+ a^{+2} a^2 + a^{+3} a + a^3 a^+ + a^2 a^+ a^+ + a a^+ a a^+ + a a^{+3}$$
$$+ a^+ a^2 a^+ + a^+ a a^{+2} + a^{+2} a a^+ + a^{+4}$$

= nur Terme mit gleicher Anzahl von a^+ und a sind interessant.

$$= a a^{+2} a + a^+ a a^+ a + a^{+2} a^2 + a^2 a^{+2} + a^+ a^2 a^+ + a a^+ a a^+ \checkmark$$

$$\langle n^{(0)} | (a+a^+)^4 | n^{(0)} \rangle = n(n+1) + n^2 + \sqrt{n(n-1)(n-1)n} + \sqrt{(n+1)(n+2)(n+1)(n+2)}$$
$$+ n(n+1) + (n+1)^2 \checkmark$$

$$E_n^{(2)b} = \hbar\omega \frac{1}{16} \left(n^2 + n + n^2 + n^2 - n + n^2 + 3n + 2 + n^2 + n + n^2 + 2n + 1 \right)$$
$$= \hbar\omega \frac{1}{16} \left(6n^2 + 6n + 3 \right) \checkmark$$

5P

$$\leadsto E_n^{(2)} = E_n^{(2)a} + E_n^{(2)b} = -\hbar\omega \left(\frac{129}{16} n^2 + \frac{129}{16} n + \frac{89}{32} \right)$$

20 min

Aufgabe		Zeit/min	Punkte
1	i)	10	3
	ii)	5	2
	iii)	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$
	iv)	10	3
	v)	5	2
2	i)	10	8
	ii)	10	6
	iii)	10	5
3		15	8
4	Vorbereitung	10	4
	i) ii)	15	6
	iii)	20	8
		2 h	55

2h 10min 60 → Klausur $\hat{=} \approx 140\%$