Semestrale in HM II (Analysis 1) für Physik) 02.02.2007

Prüfer: Prof. Dr. P. Rentrop 8:30 – 10:00 Uhr

Übersicht der Klausuraufgaben zum Abtrennen

Aufgabe 1 (ca. 11 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| + 1\right)$.

a) Man bestimme den Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$ von f und zeige, dass $f(x) \geq 0$ ist in $\mathcal{D}_f$.

b) Für welche $x \in \mathcal{D}_f$ ist f differenzierbar, für welche **nicht** differenzierbar (Begründung) ?

c) In welchen Teilintervallen von $\mathcal{D}_f$ ist f streng monoton steigend oder streng monoton fallend?

d) Man berechne $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

e) Man stelle f in einer sorgfältigen Skizze dar.

Aufgabe 2 (ca. 8 Punkte)

Gegeben ist die Folge (Logistik-Gleichung)

$$a_{n+1} = g(a_n) = \frac{3}{2} a_n (1 - a_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{mit Startwert } a_0 = \frac{1}{2}.$$

a) Man zeige: $0 \leq a_n \leq \frac{3}{8}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

b) Man zeige: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist monoton.
Hinweis: Man betrachte $a_{n+1} - a_n = g(a_n) - g(a_{n-1})$.

c) Man berechne alle Fixpunkte a^* der Logistik-Gleichung, d.h. alle a^* mit $a^* = g(a^*)$.
Welcher der Fixpunkte ist Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (kurze Begründung)?

Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte)

Man löse mittels Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$(1 + 2x)\, y'(x) + 2\, y(x) - 1 = 0, \quad y(0) = 0$$

und bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe.

Aufgabe 4 (ca. 14 Punkte)

Es sind nur die Ergebnisse anzugeben!

a) Man gebe alle Lösungen $x \in [\,0\,,\,2\,\pi\,[$ (einzelne Werte bzw. Bereiche) an von

a1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

Hinweis: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

a2) $\cos(2\,x) + 3\,\sin x = 2\,.$

b) Man gebe Real- und Imaginärteil, Betrag und Phase an von

b1) $$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{10},$$

Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,,$

b2) allen Wurzeln/Nullstellen der Gleichung $z^2 + 4\,\mathrm{i} = 0\,.$

c) Man gebe die Konvergenzradien an von

c1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(4\,n+5)\,5^n}}\,x^n$$

c2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^n x^n\,.$$

d) Man gebe die folgenden Grenzwerte an:

d1) $$\lim_{x\to 0} \left[2\,\ln|\,x\,| - \ln\left(\sin\left(2\,x^2\,\right)\right)\right],$$

d2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x + 4\,x}{\cos x + 2\,x}\,.$$