....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

21. Februar 2019, 10:30 – 12:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Volumenberechnung** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie das Volumen der Menge

$$M := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^4 \le 4\big\} \subseteq \mathbb{R}^3\,.$$

LÖSUNG:

Die Menge ist ein Normalbereich, daher ist

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M \mathrm{d}^3x \overset{\textbf{[2]}}{=} \int_{x^2+y^2\le 4} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{-\sqrt[4]{4-x^2-y^2}}^{\sqrt[4]{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}z \overset{\textbf{[1]}}{=} \int_{x^2+y^2\le 4} 2\sqrt[4]{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{Polarkoord. }\textbf{[2]}}{=} \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, 2r(4-r^2)^{1/4} \overset{\textbf{[2]}}{=} 2\pi\big[-\tfrac{4}{5}(4-r^2)^{5/4}\big]_0^2 = \frac{8}{5}\pi\cdot 4^{5/4} = \frac{32\sqrt{2}}{5}\pi. \quad \textbf{[1]}$$

Alternativ: Nach dem Cavalierischen Prinzip ist

$$\mathrm{vol}(M) \overset{\textbf{[2]}}{=} 2\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{vol}_2(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le 4-z^4\})\mathrm{d}z \overset{\text{Kreisscheibe}\textbf{[3]}}{=} 2\int_0^{\sqrt{2}} \pi\big(\sqrt{4-z^4}\big)^2 \mathrm{d}z$$

$$\overset{\textbf{[1]}}{=} 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(4-z^4)\mathrm{d}z \overset{\textbf{[1]}}{=} 2\pi\big[4z-\tfrac{z^5}{5}\big]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi(4\sqrt{2}-\tfrac{(\sqrt{2})^5}{5}) = \frac{32}{5}\pi\sqrt{2}. \quad \textbf{[1]}$$

2. **Flächeninhalt und Kurvenintegral** **[14 Punkte]**

Gegeben sei die Fläche

$$A := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \in [0,1],\, z = 1 - x^2 - y^2\right\},$$

mit einem Normalenfeld, das in die negative z-Richtung zeigt.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von A.

(b) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Vektorfelds

$$v(x,y,z) = (2-y, x-1, 1)$$

entlang der Randkurve ∂A.

LÖSUNG:

(a) Parametrisierung $\Phi(r,\phi) = \begin{pmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \\ 1-r^2 \end{pmatrix}$, $r \in (0,1)$, $\phi \in [0, 2\pi]$. **[2]**

Gramsche Determinante: **[4]**

$$\sqrt{g(r,\phi)} = |\partial_r \Phi(r,\phi) \times \partial_\phi \Phi(r,\phi)| = \left| \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2r^2\cos\phi \\ 2r^2\sin\phi \\ r \end{pmatrix} \right| = r\sqrt{1+4r^2}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_2(A) &= \int_A \mathrm{d}S = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sqrt{g(r,\phi)} = 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,\mathrm{d}r = 2\pi \left[\tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{3}(1+4r^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \tfrac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) \qquad \textbf{[4]} \end{aligned}$$

(b) Wegen der Orientierung der Fläche nach unten, wird die Randkurve im Uhrzeigersinn durchlaufen. Wird die Randkurve von A also durch $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$ parametrisiert, so ist

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} v(r) \cdot \mathrm{d}r &= -\int_0^{2\pi} v(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\mathrm{d}t = -\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2-\sin t \\ \cos t - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} \big(-2\sin t + \sin(t)^2 + \cos(t)^2 - \cos(t)\big)\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \cos(t)\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 0 + 0 - 2\pi = -2\pi. \quad \textbf{[4]} \end{aligned}$$

3. **Fragen zur Funktionentheorie** **[13 Punkte]**

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)\sin(z)}$ besitzt eine konvergente Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt 0 auf den Kreisringen **[2]**

☒ $K_{0,1}(0)$, ☐ $K_{0,\pi}(0)$, ☒ $K_{1,\pi}(0)$, ☐ $K_{\pi,\infty}(0)$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest und $f(z) = \frac{1}{\sin(z)^n}$ mit der Laurentreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ auf $K_{0,\pi}(0)$. Dann gilt **[2]**

☒ $c_{-2n^2} = 0$, ☒ $c_{-n} \neq 0$, ☐ $c_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ☐ $c_{-k} \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

(c) Sei $g : B_2(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(\frac{1}{n}) = \frac{2+n}{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, warum $g(\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ ist.

(d) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|g(z)| \leq |z|$ und $g(1) = \mathrm{i}$. Begründen Sie, warum $g(\mathrm{i}) = -1$ ist.

LÖSUNG:

(a) f hat Pole bei ± 1 und für $z \in \pi\mathbb{Z}$.

(b) f hat einen Pol n-ter Ordnung im Ursprung und $2n^2 > n$ für $n \in \mathbb{N}$.

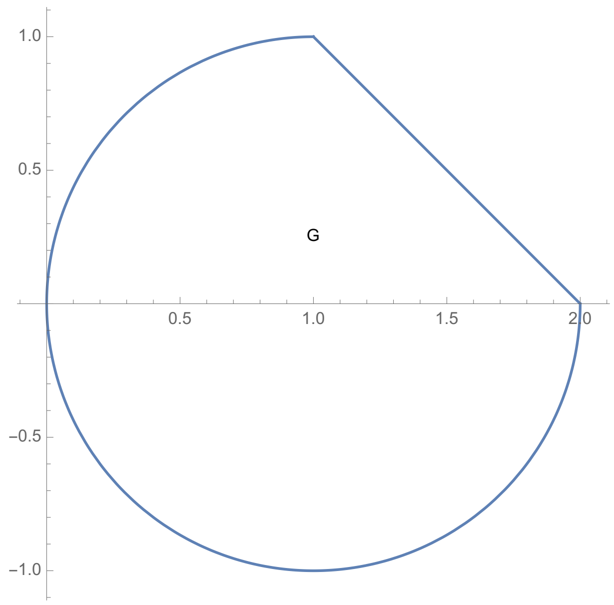
(c) $g(\frac{1}{n}) = \frac{2+n}{2n-1} = \frac{\frac{2}{n}+1}{2-\frac{1}{n}}$, **[1]**
Für die Funktion $h(z) = \frac{2z+1}{2-z}$ gilt also $g(\frac{1}{n}) = h(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. **[1]**
Da beide Funktionen auf $B_2(0)$ holomorph sind,
sind sie nach dem Identitätssatz dort gleich. **[1]**
Somit ist $g(\mathrm{i}) = h(\mathrm{i}) = \frac{2\mathrm{i}+1}{2-\mathrm{i}} = \mathrm{i}$. **[1]**

(d) $h(z) = \frac{g(z)}{z}$ ist beschränkt, $|h(z)| \leq 1$, **[1]**
die isolierte Singularität von h im Ursprung **[1]**
ist nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz also hebbar. **[1]**
Nach Liouville ist die analytische Fortsetzung von h also konstant, **[1]**
$\frac{g(z)}{z} = c \in \mathbb{C}$. Wegen $g(1)/1 = \mathrm{i}$ folgt $c = \mathrm{i}$, bzw., $g(z) = \mathrm{i}z$, also $g(\mathrm{i}) = -1$. **[1]**

4. **Komplexe Kurvenintegrale** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) \leq 2,\ \big(\mathrm{Re}(z-1)\big)^2 + \big(\mathrm{Im}(z-1)\big)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge G **[2]**



(b) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂G durch zwei Kurvenstücke an. **[4]**

$\gamma_1(t) = \ 2 + t(-1+\mathrm{i}),\ t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = \quad 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi]$

(c) Berechnen Sie (mit kurzer Begründung) den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{\partial G} \frac{z^3}{(2z-1-\mathrm{i})(2z-3-3\mathrm{i})}\mathrm{d}z$.

$\int\limits_{\partial G} \frac{z^3}{(2z-1-\mathrm{i})(2z-3-3\mathrm{i})}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{\frac{1+\mathrm{i}}{2}}\big(\frac{z^3}{(2z-1-\mathrm{i})(2z-3-3\mathrm{i})}\big) = 2\pi\mathrm{i}\frac{(\frac{1+\mathrm{i}}{2})^3}{2(2(\frac{1+\mathrm{i}}{2})-3-3\mathrm{i})}$

$= \pi\mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{i})^3}{8(-2-2\mathrm{i})} = -\pi\mathrm{i}\frac{(1+\mathrm{i})^2}{16} = \frac{\pi}{8}$, **[4]**

wegen Residuensatz,
denn der Integrand ist holomorph bis auf die Pole $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ und $3\frac{1+\mathrm{i}}{2}$
und ∂G umschließt nur $\frac{1+\mathrm{i}}{2}$. **[2]**

5. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Sei $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + a^2}$ mit $a > 0$.

(a) Wo in der komplexen Ebene verläuft der Hilfsweg zur Berechnung des Integrals $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k > 0$? **[2]**

☐ In der rechten Halbebene. ☐ In der oberen Halbebene.
☐ In der linken Halbebene. ☒ In der unteren Halbebene.

(b) Welchen Wert hat $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$ für $k > 0$? **[3]**

$-\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-ka}$

(c) Welchen Wert hat $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x$ für $k < 0$? **[3]**

$\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{ka}$

LÖSUNG:

(a) $e^{-\mathrm{i}kz}$ fällt für negative Imaginärteile von z exponentiell ab, wenn $k > 0$ ist.

(b) Hier wird untenrum integriert: Für $k > 0$ ist
$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{-\mathrm{i}a}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{z^2+a^2}\right) = -2\pi\mathrm{i}\frac{-\mathrm{i}a\mathrm{e}^{ka}}{-2\mathrm{i}a} = -\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{kc}$.

(c) Für $k < 0$ ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}_{\mathrm{i}a}\left(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}}{z^2+a^2}\right) = 2\pi\mathrm{i}\frac{\mathrm{i}a\mathrm{e}^{kc}}{2\mathrm{i}a} = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{ka}$.

6. **Fouriertransformation in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$** **[7 Punkte]**

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und damit auch $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie elementar, dass $\widehat{f'}(k) = \mathrm{i}k\widehat{f}(k)$ für alle $k \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\widehat{h}$ für $h(x) = xf'(x)$.
HINWEIS: Für $g(x) = xf(x)$ ist bekannterweise $\widehat{g}(k) = \mathrm{i}(\widehat{f})'(k)$.

LÖSUNG:

(a) Mit partieller Integration ergibt sich:

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f'}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f'(x)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= 0 - 0 + \mathrm{i}k \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{i}k\widehat{f}(k), \qquad \textbf{[3]}$$

denn $f(x) \overset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ für jede Schwartz-Funktion f. **[1]**

(b) $\widehat{h}(k) \overset{\text{Hinweis}}{=} \mathrm{i}(\widehat{f'})'(k) = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\widehat{f}'(k) \overset{\text{(a)}}{=} \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(\mathrm{i}k\widehat{f}(k)) = -\widehat{f}(k) - k(\widehat{f})'(k).$ **[3]**

7. **Hilbertraum** **[14 Punkte]**

Die Funktionen $\chi_{[a,b]} \in L^2(\mathbb{R})$ sind für $a < b$ gegeben durch $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(a) Zeigen Sie, dass $(\chi_{[n,n+1]})_{n\in\mathbb{Z}}$ eine orthonormale Familie aber keine ONB von $L^2(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass $\left| \int_{[a,b]} \psi(x)\mathrm{d}x \right| \le \sqrt{b-a} \Big(\int_{[a,b]} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}$ ist.
HINWEIS: Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[n,n+1]} \psi(x)\mathrm{d}x = 0$.

LÖSUNG:

(a) Dies ist eine orthonormale Familie, denn für $m, n \in \mathbb{Z}$ ist
$\langle \chi_{[m,m+1]}, \chi_{[n,n+1]} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[m,m+1]}(x)\chi_{[n,n+1]}(x)\mathrm{d}x = \int\limits_m^{m+1} \chi_{[n,n+1]}(x)\mathrm{d}x = \delta_{m,n}$. **[2]**
Für $f = \chi_{[0,\frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2},1]} \in L^2(\mathbb{R})$ gilt aber offenbar $\langle f, \chi_{[n,n+1]} \rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. **[2]**
Also liegt keine ONB vor. **[1]**

(b) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung besagt für $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$: **[1]**

$$|\langle \phi, \psi \rangle| \le \|\phi\|_2 \|\psi\|_2.$$

Somit gilt für $a \le b$ wegen $\chi^2_{[a,b]} = \chi_{[a,b]}$: **[4]**

$$\begin{aligned} \Big| \int\limits_{[a,b]} \psi(x)\mathrm{d}x \Big| &= \Big| \int\limits_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x)(\chi_{[a,b]}\psi)(x)\mathrm{d}x \Big| = \langle \chi_{[a,b]}, \chi_{[a,b]}\psi \rangle \le \|\chi_{[a,b]}\|_2 \|\chi_{[a,b]}\psi\|_2 \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}} |\chi_{[a,b]}(x)|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}} \|\chi_{[a,b]}\psi\|_2 = \sqrt{b-a} \Big(\int\limits_{[a,b]} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(c) $x \mapsto |\psi(x)|^2$ ist integrierbar. **[1]**
Somit ist $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty$. **[1]**
Daher muss $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$ sein, **[1]**
da die Summanden einer konvergenten Reihe eine Nullfolge bilden. Mit (a) folgt nun **[1]**

$$0 \le \Big| \int\limits_n^{n+1} \psi(x)\mathrm{d}x \Big| \le \sqrt{1} \sqrt{\int\limits_n^{n+1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x} \to 0,$$

also auch $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+1} \psi(x)\mathrm{d}x = 0$.

Alternativ: Die Funktionenfolge $\phi_n(x) := |\psi(x)|^2 \chi_{n,n+1}(x)$ konvergiert offensichtlich punktweise für jedes $x \in \mathbb{R}$ gegen 0. Wegen $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist $|psi(x)|^2$ eine integrierbare Majorante. Somit gilt mit majorisierter Konvergenz:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_n^{n+1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \phi_n(x)\mathrm{d}x \int\limits_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \phi_n(x)\mathrm{d}x = 0,$$

Also ist auch $\Big| \int\limits_n^{n+1} \psi(x)\mathrm{d}x \Big| \le \sqrt{\int\limits_n^{n+1} |\psi(x)|^2 \mathrm{d}x}$. eine Nullfolge