Musterlösung DVP-Klausur ExPhysik 2
SoSe 2008

Aufgabe 1

(a) Das Gaußsche Gesetz lautet

$$\int_F d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{1}$$

wobei F die Oberfläche des betrachteten Volumens und Q die in ihm befindliche Gesamtladung ist. Wendet man dies auf eine einzelne Kondensatorplatte an, die die Ladung Q trägt, dann erhält man unter Vernachlässigung von Inhomogenitäten:

$$2L^2 E_1 \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{2}$$

Dabei ist E_1 der Betrag der Feldstärke. Der Faktor 2 kommt daher, dass die einzelne Platte auf beiden Seiten ein gleichstarkes Feld erzeugt. Die zweite Platte mit der Ladung $-Q$ erzeugt ein vom Betrag her gleichgroßes Feld E_2, das sich im Zwischenraum zum Feld der ersten Platte addiert. Also

$$E \;=\; E_1 + E_2 \;=\; \frac{1}{2\varepsilon_0 L^2} Q + \frac{1}{2\varepsilon_0 L^2} Q \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0 L^2} Q \tag{3}$$

Daraus ergibt sich die Spannung zwischen den beiden Platten:

$$U \;=\; Ed \;=\; \frac{d}{\varepsilon_0 L^2} Q \tag{4}$$

U ist also proportional zu Q, und die Kapazität ist

$$C \;=\; \frac{Q}{U} \;=\; \varepsilon_0 \frac{L^2}{d} \tag{5}$$

(b) Die Differentialgleichung für die Entladung des Kondensators lautet

$$R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q \;=\; 0 \tag{6}$$

mit der Lösung

$$Q(t) \;=\; Q_0 e^{-t/RC} \tag{7}$$

und

$$\dot{Q}(t) \;=\; -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} \tag{8}$$

Daraus folgt die im Widerstand verbratene Leistung

$$P(t) \;=\; R\dot{Q}^2(t) \;=\; \frac{Q_0^2}{RC^2}\, e^{-2t/RC} \tag{9}$$

Die gesamte dissipierte Energie ist also

$$W \;=\; \int_0^\infty dt\, P(t) \;=\; \frac{Q_0^2}{RC^2} \underbrace{\left[-\frac{RC}{2} e^{-2t/RC}\right]_0^\infty}_{=RC/2} \;=\; \frac{Q_0^2}{2C} \tag{10}$$

und das ist dasselbe wie die im Kondensator enthaltenen Feldenergie:

$$W \;=\; \frac{1}{2} C U_0^2 \;=\; \frac{1}{2C} Q_0^2 \tag{11}$$

Aufgabe 2

(a) Das Amperesche Gesetz in differentieller Form lautet für zeitabhängige Felder:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} \;=\; \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{12}$$

(2. Maxwell-Gleichung) Integriert man dies über eine Fläche F, dann erhält man

$$\int_F d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} \;=\; \int_F d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} + \int_F d\boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{13}$$

Wendet man nun auf der linken Seite den Satz von Stokes an, dann wird dies zu

$$\int_{\partial F} d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} \;=\; \int_F d\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{J} + \int_F d\boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{14}$$

wobei ∂F der Rand von F ist.

(b) Die Ladungserhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \;=\; 0 \tag{15}$$

ausgedrückt. Betrachtet man nun die beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen mit noch unbekanntem Verschiebungsstrom $\boldsymbol{X}$, also

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} \;=\; \rho \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{X} \;=\; \boldsymbol{J} \tag{17}$$

und addiert die Zeitableitung der ersten zur Divergenz der zweiten, dann erhält man:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{X} \tag{18}$$

Da die Divergenz einer Rotation verschwindet und man partielle Ableitungen vertauschen darf, bedeutet dies

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} \;=\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{X} \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{19}$$

damit die Kontinuitätsgleichung erfüllt ist. Der noch unbekannte Verschiebungsstrom $\boldsymbol{X}$ darf also nicht null sein, sondern muss

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{X} \;=\; -\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{20}$$

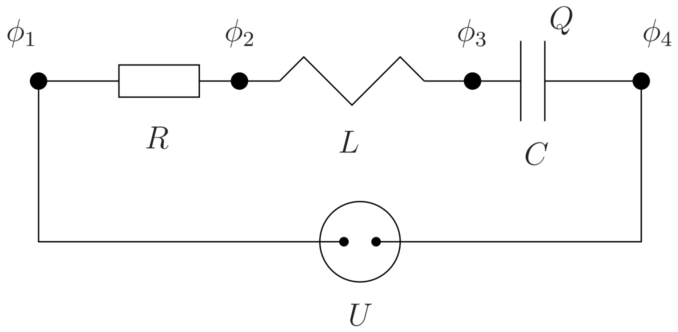
erfüllen. Dies ist durch die Wahl

$$\boldsymbol{X} \;=\; -\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{21}$$

gewährleistet. (Dies Wahl ist allerdings nicht eindeutig, man kann zu $\boldsymbol{X}$ ein beliebiges divergenzfreies Vektorfeld addieren, dann ist die Ladungserhaltung immer noch gegeben.)

Aufgabe 3

(a)



Aus der Abbildung (Konvention: Q ist die Ladung auf der rechten Kondensatorplatte) entnimmt man die vorzeichenrichtigen Gleichungen:

$$\phi_1 - \phi_2 \;=\; -R\dot{Q} \tag{22}$$

$$\phi_2 - \phi_3 \;=\; -L\ddot{Q} \tag{23}$$

$$\phi_3 - \phi_4 \;=\; -\frac{1}{C}Q \tag{24}$$

$$\phi_4 - \phi_1 \;=\; U_0 e^{i\omega t} \tag{25}$$

(Das Vorzeichen der letzten Gleichung ist strenggenommen durch die Aufgabenstellung nicht festgelegt. Wir wählen es so, dass sich die angegebene dynamische Gleichung ergibt.) Also durch Addition der 4 Gleichungen („Maschenregel“):

$$0 \;=\; -R\dot{Q} - L\ddot{Q} - \frac{1}{C}Q + U_0 e^{i\omega t} \tag{26}$$

also

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q \; = \; U_0 e^{i\omega t} \tag{27}$$

(b) Ansatz für $Q(t)$:

$$Q(t) \; = \; A e^{i\omega t} \tag{28}$$

ergibt

$$\big(-\omega^2 LA + i\omega RA + \frac{1}{C}A \big) e^{i\omega t} \; = \; U_0 e^{i\omega t} \tag{29}$$

also

$$A \; = \; \frac{U_0}{-L\omega^2 + iR\omega + \frac{1}{C}} \tag{30}$$

Die Amplitude von Q ist der Absolutbetrag von $|A|$, also

$$|A| \; = \; \frac{U_0}{\sqrt{\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2}} \tag{31}$$

Dies wird maximal, wenn der Nenner bzw. der Ausdruck unter der Wurzel minimal wird:

$$\frac{d}{d(\omega^2)} \left[\left(L\omega^2 - \tfrac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2 \right] \; = \; 2\left(L\omega^2 - \tfrac{1}{C}\right) L + R^2 \; \stackrel{!}{=} \; 0 \tag{32}$$

also

$$\omega_{res}^2 \; = \; \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2} \tag{33}$$

(c) Die eingeschwungene Lösung zur Anregungsfrequenz ω ist in reeller Form

$$Q(t) \; = \; |A(\omega)| \cos(\omega t + \varphi) \tag{34}$$

mit einer nicht weiter interessierenden Phase φ. Die Leistung am Widerstand ist also

$$P = R\dot{Q}^2 \; = \; R|A(\omega)|^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \tag{35}$$

Diese ist offenbar dann maximal, wenn

$$|A(\omega)|^2 \omega^2 \tag{36}$$

maximal ist, also wenn

$$\frac{d}{d(\omega^2)} \left[\frac{\omega^2}{\left(L\omega^2 - \frac{1}{C}\right)^2 + R^2\omega^2} \right] \; \stackrel{!}{=} \; 0 \tag{37}$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{1}{X}\left[\left(\tfrac{1}{C}-L\omega^2\right)^2+R\omega^2\ -\ \omega^2\left(2\left(\tfrac{1}{C}-L\omega^2\right)(-L)+R^2\right)\right] \tag{38}$$

$$= \ \frac{1}{X}\left(\tfrac{1}{C}-L\omega^2\right)\left(\tfrac{1}{C}+L\omega^2\right)\ \overset{!}{=}\ 0 \tag{39}$$

Da $\omega^2 > 0$ ergibt sich also für die Maximalfrequenz

$$\omega^2_{max} \ = \ \frac{1}{LC} \tag{40}$$

(d) Die Anregungsfrequenz mit maximaler Leistungsabsorption ist also die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems. Sie liegt etwas höher als die Resonanzfrequenz des gedämpften Systems. Da ist plausibel, da in die Leistungsaufnahme nicht nur die Amplitude der Schwingung eingeht sondern auch ihre Geschwindigkeit. Zwar nimmt für $\omega > \omega_{res}$ die Amplitude schon wieder ab (aber nur sehr langsam, in zweiter Ordnung, da Maximum bei ω_{res}), allerdings wird das überkompensiert durch die Zunahme an Geschwindigkeit der Schwingung. Daher ist zu erwarten, dass die Frequenz mit maximaler Leistungsabsorption höher liegt als die Resonanzfrequenz.

Aufgabe 4

(a) Der Poynting-Vektor $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ stellt die Energiestromdichte im elektromagnetischen Feld dar. Seine Richtung ist die Richtung des Energiestroms, sein Betrag gibt an, wieviel elektromagnetische Energie pro Sekunde durch eine auf $\boldsymbol{S}$ senkrecht stehende Einheitsfläche hindurchströmt.

(b) Verwendet man in der angegebenen Identität

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \ = \ \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} \tag{41}$$

die Maxwellschen Gleichungen

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} \ = \ -\dot{\boldsymbol{B}} \quad , \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} \ = \ \boldsymbol{J}+\dot{\boldsymbol{D}} \tag{42}$$

dann erhält man

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \ = \ -\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} - \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} \tag{43}$$

Bildet man andererseits die Zeitableitung der Energiedichte $w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E})$:

$$\dot{w} \ = \ \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}}+\dot{\boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}) \tag{44}$$

und benutzt, dass aus der Linearität des Mediums folgt, dass

$$\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \frac{\dot{\boldsymbol{B}}}{\mu}\cdot\boldsymbol{B} \;=\; \dot{\boldsymbol{B}}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{\mu} \;=\; \dot{\boldsymbol{B}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{45}$$

und

$$\boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} \;=\; \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} \;=\; \boldsymbol{E}\cdot\varepsilon\dot{\boldsymbol{E}} \;=\; \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} \tag{46}$$

dann ist die Zeitableitung der Energiedichte also

$$\dot{w} \;=\; \boldsymbol{H}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} \tag{47}$$

Daher:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}) \;=\; -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} - \dot{w} \tag{48}$$

Integriert man dies über das Volumen V mit der Oberfläche F:

$$\int\limits_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\,dV \;=\; -\int\limits_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,dV - \int\limits_V \dot{w}\,dV \tag{49}$$

dann erhält man mit dem Satz von Stokes und der Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration:

$$\int\limits_F \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})\cdot d\boldsymbol{A} \;=\; -\int\limits_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\,dV - \frac{d}{dt}\int\limits_V w\,dV \tag{50}$$

Aufgabe 5

Das Trägheitsmoment der 1dimensionalen Nadel bezüglich ihres Schwerpunkts ist

$$\Theta \;=\; \int\limits_{-L/2}^{L/2} dx\,\frac{M}{L}\,x^2 \;=\; 2\frac{M}{L}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{L/2} \;=\; \frac{1}{12}ML^2 \tag{51}$$

Die Bewegungsgleichung für die Schwingungen lautet

$$\dot{\boldsymbol{L}} \;=\; \boldsymbol{N} \tag{52}$$

Das B-Feld zeige o.B.d.A. in x-Richtung, und die Richtung von $\boldsymbol{m}$, d.h. der Nadel, sei parametrisiert durch ihren Winkel zur Richtung des B-Feldes, also zur x-Achse:

$$\boldsymbol{m} \;=\; m(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \tag{53}$$

Das wirkende Drehmoment ist dann

$$\boldsymbol{N} \;=\; \boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B} \;=\; -mB\sin\varphi\boldsymbol{e}_z \tag{54}$$

Der Drehimpuls der Nadel ist

$$\boldsymbol{L} \;=\; \Theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \tag{55}$$

Also ist die Bewegungsgleichung der Nadel

$$\Theta\ddot{\varphi} \;=\; -mB\sin\varphi \tag{56}$$

Für kleine Auslenkungen gilt $\sin\varphi \approx \varphi$, also

$$\Theta\ddot{\varphi} \;+\; mB\varphi \;=\; 0 \tag{57}$$

Daraus folgt die Schwingungsdauer

$$T \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mB}} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{12mB}} \tag{58}$$

Aufgabe 6

(a) Die einlaufende Wärmeleistung ist gegeben durch die Temperaturdifferenz aus Ofentemperatur T_1 und der gesuchten Temperatur T der warmen Seite der Carnot-Maschine:

$$\dot{Q}_{in} \;=\; \frac{\lambda A}{d}(T_1 - T) \;=:\; \kappa(T_1 - T) \tag{59}$$

Außerdem hat die Maschine den Carnot-Wirkungsgrad, es gilt also für die mechanische Leistung:

$$P \;=\; \eta\dot{Q}_{in} \;=\; \left(1 - \frac{T_2}{T}\right)\kappa(T_1 - T) \tag{60}$$

Laut Hinweis soll diese Leistung maximal sein. Das bestimmt die gesuchte Temperatur T per

$$\frac{dP}{dT} \;=\; \left(+\frac{T_2}{T^2}\right)\kappa(T_1 - T) \;+\; \left(1 - \frac{T_2}{T}\right)\kappa(-1) \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{61}$$

also

$$\frac{T_1 T_2}{T^2} - \frac{T_2}{T} - 1 + \frac{T_2}{T} \;=\; 0 \tag{62}$$

und so:

$$T \;=\; \sqrt{T_1 T_2} \tag{63}$$

Zahlenwerte:

$$T \;=\; \sqrt{1173\,\mathrm{K}\cdot 283\,\mathrm{K}} \;=\; 576\,\mathrm{K} \;=\; 303\,^\circ\mathrm{C} \tag{64}$$

(b) Daraus ergibt sich die mechanische Leistung

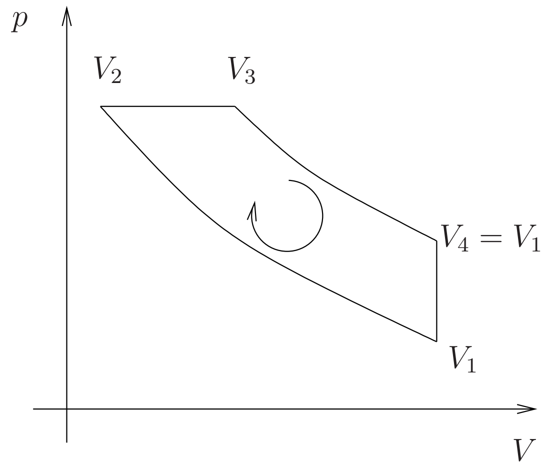
$$P = \left(1 - \frac{T_2}{T}\right) \frac{\lambda A}{d}(T_1 - T) \tag{65}$$

$$= \left(1 - \frac{283\,\mathrm{K}}{576\,\mathrm{K}}\right) \cdot \frac{30\,\mathrm{W/Km} \cdot 1\,\mathrm{m}^2}{0.01\,\mathrm{m}} \cdot (1173\,\mathrm{K} - 576\,\mathrm{K}) \tag{66}$$

$$= 9.11 \cdot 10^5\,\mathrm{W} = 1239\,\mathrm{PS}... \tag{67}$$

Aufgabe 7

(a)



(b) Wir bezeichnen mit W_{ij} die Arbeit, die die Maschine beim Schritt von Zustand i nach Zustand j verrichtet und mit Q_{ij} die Wärmemenge, die beim Schritt von Zustand i nach Zustand j in die Maschine hineinfließt. Der Energieerhaltungssatz für einen vollständigen Zyklus lautet also

$$W_{12} + W_{23} + W_{34} - Q_{23} - Q_{41} = 0 \tag{68}$$

Dabei ist schon berücksichtigt, dass $W_{41} = Q_{12} = Q_{34} = 0$ ist. Vorzeichenmäßig gilt:

$$W_{12} < 0 \quad , \quad W_{23} > 0 \quad , \quad W_{34} > 0 \quad , \quad Q_{23} > 0 \quad , \quad Q_{41} < 0 \tag{69}$$

Der Wirkungsgrad ist nun der Quotient aus Gesamtarbeit und der im Schritt $2 \to 3$ hineingesteckten Wärme:

$$\eta = \frac{W_{12} + W_{23} + W_{34}}{Q_{23}} \tag{70}$$

Wegen der obigen Energieerhaltungsgleichung ist dies

$$\eta = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{|Q_{23}|} \tag{71}$$

Q_{41} ergibt sich aus der Änderung der inneren Energie des Gases per

$$\Delta E_{41} = Q_{41} - W_{41} \tag{72}$$

Da $W_{41} = 0$ ist, folgt wegen $E = \frac{3}{2}pV$:

$$Q_{41} = \Delta E_{41} = \frac{3}{2}(p_1 - p_4)V_1 < 0 \tag{73}$$

Q_{23} entsprechend:

$$\Delta E_{23} = Q_{23} - W_{23} \tag{74}$$

also

$$Q_{23} = \Delta E_{23} + W_{23} = \frac{3}{2}p_2(V_3 - V_2) + p_2(V_3 - V_2) = \frac{5}{2}p_2(V_3 - V_2) > 0 \tag{75}$$

Daher:

$$\eta = 1 - \frac{\frac{3}{2}(p_4 - p_1)V_1}{\frac{5}{2}p_2(V_3 - V_2)} = 1 - \frac{3}{5}\frac{(p_4 - p_1)V_1}{p_2(V_3 - V_2)} \tag{76}$$

Wir eliminieren nun alle Drücke durch p_1 und die Volumina mit Hilfe der Adiabatengleichung für das 1atomige ideale Gas:

$$pV^{5/3} = \text{const.} \tag{77}$$

Also:

$$p_2 = p_1 \frac{V_1^{5/3}}{V_2^{5/3}} \tag{78}$$

$$p_4 = p_3 \frac{V_3^{5/3}}{V_1^{5/3}} \tag{79}$$

$$p_3 = p_2 \tag{80}$$

Setzt man dies ein, dann erhält man:

$$\eta = 1 - \frac{3}{5}\frac{\left(p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3}\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{5/3} - p_1\right)V_1}{p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{5/3}(V_3 - V_2)} \tag{81}$$

$$= 1 - \frac{3}{5}\frac{\left(\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{5/3} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{5/3}\right)V_1}{V_3 - V_2} \tag{82}$$

$$= 1 - \frac{3}{5}\left(\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{5/3} - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{5/3}\right) \Big/ \left(\frac{V_3}{V_1} - \frac{V_2}{V_1}\right) \tag{83}$$