Klausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. M. Rief
Sommersemester 2011
19. August 2011
Musterlösung

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Auf jedem abgegebenen Blatt muss der Name stehen. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zwölf identische Punktladungen $+q > 0$ sind äquidistant auf einem Kreis mit Radius R positioniert (siehe Abbildung 1). Im Mittelpunkt des Kreises befindet sich eine Ladung $+Q > 0$.

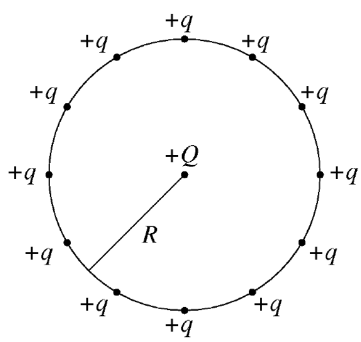


Abbildung 1: Anordnung der Ladungen.

a) Bestimmen Sie die Größe und Richtung der Kraft, die auf die Ladung $+Q$ wirkt.

Lösung:

Aus Symmetriegründen ist die Gesamtkraft auf $+Q$ im Kreismittelpunkt gleich Null. Die (abstoßende) Kraft, die auf $+Q$ im Kreismittelpunkt von irgendeiner Ladung +q auf dem Ring ausgeübt wird, wird durch die (ebenfalls abstoßende) Kraft der ihr auf dem Ring gegenüberliegenden identischen Ladung aufgehoben. [2]

b) Nun wird die Punktladung, die sich bei 3 Uhr befindet, entfernt. Geben Sie die Größe und Richtung der Kraft, die auf die Ladung $+Q$ wirkt, an.

Lösung:

Entfernt man die Ladung bei 3 Uhr, so ist die Ladung bei 9 Uhr nicht mehr ausbalanciert. Daher wirkt auf $+Q$ eine Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{R^2} \tag{1}$$

[2] nach rechts.

Diese Aufgabe lässt sich elegant lösen, indem man zu der Anordnung aus dem Aufgabenteil a) lediglich eine Ladung $-q$ bei 3 Uhr hinzufügt. Die gesuchte Kraft ergibt sich damit aus der Kraft, die die hinzugefügte negative Ladung auf $+Q$ ausübt (der Rest bewirkt gemäß Aufgabenteil a) keine Kraft). Damit kehrt sich das Vorzeichen in obiger Gleichung um (Anziehung). Die Kraft wirkt aber ebenfalls vom Kreismittelpunkt weg nach rechts zu 3 Uhr.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein Dielektrikum mit relativer Permittivitätszahl ϵ_r wird so in einen Plattenkondensator eingeschoben, dass es einen Teil des Raumes zwischen den Platten ausfüllt (siehe Abbildung 2). Durch Anlegen der Spannung U wird der Kondensator aufgeladen, wobei die Ladung q fließt. Anschließend wird der Kondensator von der Spannungsquelle getrennt.

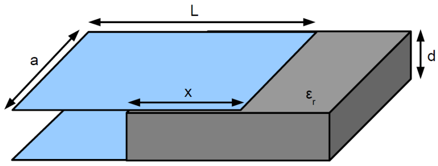


Abbildung 2: Teilweise von einem in grau dargestelltem Dielektrikum ausgefüllter Plattenkondensator (blau).

a) Wie groß ist die Potentialdifferenz zwischen den Platten in Abhängigkeit von x?

Lösung:

Man betrachtet den Kondensator als Parallelschaltung zweier Kondensatoren, einen mit Länge $L-x$ und Permittivität ϵ_0 und einen mit Länge x und Permittivität $\epsilon_0\epsilon_r$. Dann gilt:

$$U = \frac{q}{C_{gesamt}} \tag{2}$$

mit

[1]

$$\begin{aligned} C_{gesamt} &= C_0 + C_{diel.} \\ &= \epsilon_0\frac{(L-x)a}{d} + \epsilon_0\epsilon_r\frac{xa}{d} \\ &= \frac{\epsilon_0 a}{d}(L - x + \epsilon_r x) \end{aligned} \tag{3}$$

Damit erhält man für die anliegende Spannung bei gegebener Ladung q:

[1]

$$U = \frac{qd}{\epsilon_0 a}\,\frac{1}{L + x(\epsilon_r - 1)} \tag{4}$$

b) Berechnen Sie die Arbeit, die notwendig ist, um das Dielektrikum voll in den Kondensator einzuschieben.

Lösung:

Da sich die Ladungsverteilung beim Verschieben des Dielektrikums ändert, bietet es sich an, mit den im System gespeicherten Energien zu rechnen.
Während das Dielektrikum in den Kondensator geschoben wird ändert sich die Kapazität der gedachten parallelen Anordnung der zwei Kondensatoren, die Ladung bleibt Konstant. Die in einem Kondensator gespeicherte Energie lässt sich durch q und C ausdrücken.
Allgemein gilt:

$$W_{el} = \frac{1}{2}\, CU^2 = \frac{1}{2}\, \frac{q^2}{C} \tag{5}$$

Die Gesamtenergie zu Beginn ergibt sich mit Gleichung 3 zu:

$$\begin{aligned} W_{el}(x = x_0) &= \frac{1}{2}\, \frac{q^2}{C(x_0)} \\ &= \frac{1}{2}\, q^2\, \frac{d}{\epsilon_0 a}\, \frac{1}{L + x_0(\epsilon_r - 1)} \qquad (6) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a}\, \frac{1}{L + x_0(\epsilon_r - 1)} \qquad [1] \end{aligned}$$

Wenn sich das Dielektrikum voll im Kondensator befindet beträgt die Gesamtenergie:

$$W_{el}(x = L) = \frac{1}{2}\, \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a}\, \frac{1}{\epsilon_r L} \tag{7}$$

Die aufzubringende Arbeit ergibt sich aus der Energiedifferenz:

$$\begin{aligned} \Delta W_{el} &= W_{el}(x = L) - W_{el}(x = x_0) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a}\, \frac{1}{\epsilon_r L} - \frac{1}{2} \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a}\, \frac{1}{L + x_0(\epsilon_r - 1)} \qquad (8) \\ &= \frac{1}{2}\, \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{\epsilon_r L} - \frac{1}{L + x_0(\epsilon_r - 1)} \right) \qquad [1] \end{aligned}$$

Es gilt $\Delta W_{el} < 0$, das System verrichtet also Arbeit.

c) Wie groß ist die Polarisationsladung im Dielektrikum, nachdem das Dielektrikum vollständig in den Kondensator hineingeschoben wurde?

Lösung:

Für die Polarisation gilt:

$$P = \frac{Q_P}{La} = \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{U}{d} \tag{9}$$

Auflösen nach der Polarisationsladung Q_P ergibt:

$$Q_P = La\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{U}{d} \tag{10}$$

Durch Einsetzen von Gleichung 4 für $x = L$ vereinfacht den Ausdruck zu

[1]

$$\begin{aligned} Q_P &= La\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\frac{1}{d}\frac{qd}{\epsilon_0 a}\ \frac{1}{\epsilon_r L} \\ Q_P &= q\ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

d) Lösen Sie die Teilaufgaben a), b) und c) für einen Plattenkondensator mit $L = a = 20\text{cm}$ und $d = 2\text{mm}$. Als Dielektrikum werde Teflon ($\epsilon_r = 2$) verwendet. Zu Anfang sei das Dielektrikum halb in den Kondensator eingeschoben. Die Ladung q sei 10^{-7}C. Verwenden Sie für die Dielektrizitätskonstante im Vakuum $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}\frac{\text{As}}{\text{Vm}}$.

Lösung:

Die Potentialdifferenz lautet:

[1]

$$\begin{aligned} U &= \frac{qd}{\epsilon_0 a}\ \frac{1}{L + x(\epsilon_r - 1)} \\ &= \frac{10^{-7}\text{C} \cdot 0,002\text{m}}{8,854 \times 10^{-12}\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0,2\text{m} \cdot (0,2\text{m} + 0,1\text{m}(2-1))} = 376,5\text{V} \end{aligned} \tag{12}$$

Die notwendige Arbeit, um das Dielektrikum vollständig in den Kondensator einzuschieben beträgt:

$$\begin{aligned} \Delta W_{el} &= \frac{1}{2}\ \frac{q^2 d}{\epsilon_0 a}\ \left(\frac{1}{\epsilon_r L} - \frac{1}{L + x_0(\epsilon_r - 1)}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(10^{-7})^2\text{C}^2 \cdot 0,002\text{m}}{8,854 \times 10^{-12}\frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0,2\text{m}}\ \left(\frac{1}{2 \cdot 0,2\text{m}} - \frac{1}{0,2\text{m} + 0,1\text{m} \cdot (2-1)}\right) \\ &= -4,71 \times 10^{-6}\text{J} \end{aligned} \tag{13}$$

[1] Die Arbeit ist negativ, wird also, wie bereits in Teilaufgabe b) gezeigt frei.

Die Polarisationsladung im Dielektrikum beträgt:

[1]

$$\begin{aligned} Q_P &= q\ \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \\ &= 10^{-7}\text{C} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \quad = 5 \times 10^{-8}\text{C} \end{aligned} \tag{14}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Eine Quelle sendet Teilchen mit der Masse m und Ladung q aus. Durch ein Blendensystem wird ein Teilchenstrahl ausgewählt. Die Masse der Teilchen kann mit Hilfe von parallelen $E-$ und $B-$Feldern die auf die Länge l beschränkt sind, bestimmt werden. Dazu wird der Teilchenstrahl senkrecht zu den Feldlinien in die Felder geschickt und unmittelbar danach auf einem Film nachgewiesen, der senkrecht zur ursprünglichen Flugrichtung der Teilchen aufgestellt ist (siehe Abbildung 3).

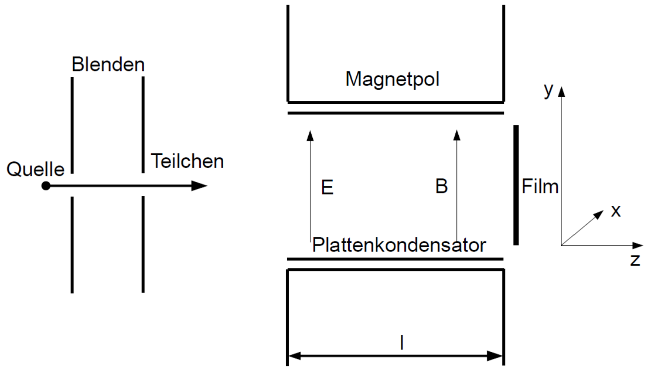


Abbildung 3: Anordnung von elektrischem und magnetischem Feld zur Ablenkung bewegter, geladener Teilchen.

a) Berechnen Sie die Beschleunigungen, denen die Teilchen der Ladung q und Geschwindigkeit v in $x-$ bzw. $y-$Richtung unterworfen sind.

Hinweis: Nehmen Sie die wirkenden Beschleunigungen als konstant über die Länge l an!

Lösung:

Das Magnetfeld bewirkt eine Beschleunigung in x-Richtung. Also ist:

$$F_{Lorentz} = -qvB = -ma_x, \tag{15}$$ [1]

und daher:

$$a_x = -\frac{qvB}{m} \tag{16}$$

Entsprechend wirkt das elektrische Feld in y-Richtung:

$$a_y = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m} \tag{17}$$ [1]

b) Auf welcher Kurve in der $(x, y)-$Filmebene liegen die Auftreffpunkte von Teilchen gleicher Masse und unterschiedlicher Geschwindigkeiten?

Lösung:

In x-Richtung ist die Bewegungsgleichung:

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 \tag{18}$$

und in y-Richtung:

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{19}$$

Die Zeit, nach der ein Teilchen auf dem Schirm auftrifft, ist gegeben durch:

$$t = \frac{l}{v} \tag{20}$$ [1]

Setzt man nun t und die Werte für a_x (16) und a_y (17) in die Gleichungen (18) und (19) ein, so erhält man:

[1]
$$x = -\frac{1}{2}\,\frac{qvB}{m}\,\left(\frac{l}{v}\right)^2,\; y = \frac{1}{2}\,\frac{qE}{m}\,\left(\frac{l}{v}\right)^2 \tag{21}$$

Damit kann y als Funktion von x dargestellt werden:

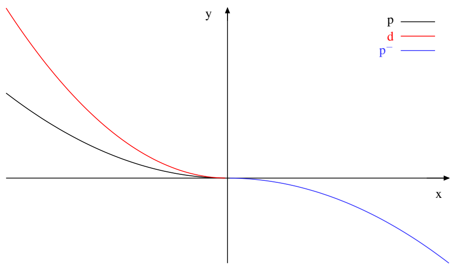
$$\frac{1}{v} = -2\,\frac{mx}{qBl^2} \longrightarrow y = \frac{1}{2}\,\frac{qE}{m}\,\frac{4m^2x^2}{q^2B^2l^4}\,l^2 \tag{22}$$

also:

[1]
$$y(x) = 2\,\frac{m}{q}\,\frac{E}{B^2l^2}\,x^2 \tag{23}$$

c) Skizzieren Sie qualitativ die Kurven, auf denen Protonen, Antiprotonen und Deuteronen (^{2}H-Kerne) auf den Film auftreffen. Wie können Sie auf dem Schirm einen hochenergetischen Protonenstrahl von einem niederenergetischen unterscheiden?

Lösung:



[2]

Hochenergetische Protonen haben höhere kinetische Energie, ihre durch die Beschleunigung der Felder erhaltenen Geschwindigkeiten in y- und x-Richtung werden also klein im Verhältnis zur Geschwindigkeit in z-Richtung sein. Damit werden sie den Schirm näher am Nullpunkt schwärzen.

Niederenergetische Protonen werden auf dem eingezeichneten Strahl weiter entfernt vom Nullpunkt (der durch einen gar nicht ausgelenkten Strahl, z.B. von Neutronen charakterisiert wird) die Fotoplatte schwärzen.

[1] Einzeichnen der beiden Bereiche in die Skizze genügt hier auch.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Die Feldlinien des Erdmagnetfelds verlaufen außer am Äquator nicht parallel zur Erdoberfläche, sondern dringen – wie in der Vorlesung demonstriert – in den Erdkörper ein.

Dieser sogenannte „Inklinationswinkel“ soll mit Hilfe einer flachen Spule, die eine Fläche $A = 0.01\text{m}^2$ umschließt und $N = 10000$ Windungen besitzt, gemessen werden. Die Spule sei um eine in der Spulenebene liegende Achse drehbar gelagert und rotiert mit einer Drehzahl von 3000U/min.

Zur Messung der Horizontal- und Vertikalkomponente des Erdmagnetfeldes zeigt die Drehachse der Spule einmal horizontal in Ost-West-Richtung und einmal vertikal, also senkrecht zur Erdoberfläche. Bei der horizontalen Stellung der Drehachse beträgt der Maximalwert der induzierten Spannung $U_h = 1.75\text{V}$, bei vertikaler Stellung beträgt er $U_v = 1.5\text{V}$. Gehen Sie davon aus, dass das Magnetfeld keine Komponente in Ost-West-Richtung besitzt.

a) Wie groß ist der Betrag B des Erdmagnetfelds?

Lösung:

Aus der Gleichung für die induzierte Spannung

$$U_{ind} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{24}$$

und der Formel für den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_A \mathbf{B}\mathrm{d}\mathbf{A} = BA\cos(\omega t) \tag{25}$$

lässt sich der Betrag des Magnetfeldes B berechnen, denn aus Gleichung (25) folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -BA\omega\sin(\omega t) \tag{26}$$ [1]

Das Maximum ist erreicht für $\sin(\omega t) = 1$, gleichbedeutend mit $\mathbf{B}\perp\mathbf{A}$. Das Maximum der induzierten Spannung ist somit gegeben durch

$$U_{ind}^{max} = NBA\omega, \tag{27}$$ [1]

wobei $A = 0,01\text{m}^2$, $N = 1000$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = 314,159\text{s}^{-1}$, also $T = 0,02\text{s}$. Liegt das Magnetfeld nun also genau in der Meridianebene, wovon laut Angabe ausgegangen wird, so benutzt man den Maximalwert der induzierten Spannung bei horizontaler Stellung der Drehachse:

$$B = \frac{U}{NA\omega} = \frac{1,75}{10000 \times 0,01 \times 314,16}\text{T} = 5,57 \times 10^{-5}\text{T} \tag{28}$$ [1]

b) Wie groß sind die Vertikalkomponente B_v und die Horizontalkomponente B_h des Erdmagnetfeldes?

Lösung:

Die Horizontalkomponente wird über die in Vertikalstellung der Drehachse induzierte Spannung berechnet:

$$B_h = \frac{1,5}{10000 \times 0,01 \times 314,16}\,\frac{\text{V}}{\text{m}^2\text{s}^{-1}} = 4,78 \times 10^{-5}\text{T} \tag{29}$$ [1]

Die Vertikalkomponente ist dann einfach zu ermitteln:

$$B_v = \sqrt{B^2 - B_h^2} = 2,86 \times 10^{-5}\text{T} \tag{30}$$ [1]

c) Welchen Inklinationswinkel β zur Erdoberfläche hat das Magnetfeld am Ort der Spule?

Lösung:

Der gesuchte Winkel ergibt sich aus geometrischen Überlegungen:

$$B_h = B\cos(\beta) \tag{31}$$

Also:

[1]
$$\beta = \arccos\left(\frac{B_h}{B}\right) = 31^\circ \tag{32}$$

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Gegeben seien die beiden elektromagnetischen Wellen

$$\mathbf{E}_1(t,\mathbf{r}) = E\mathbf{e}_z\cos(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) \quad , \quad \mathbf{E}_2(t,\mathbf{r}) = E\mathbf{e}_z\cos(\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}) \tag{33}$$

mit $\omega = |\mathbf{k}_1|\,c = |\mathbf{k}_2|\,c$. (Die zugehörigen $B-$Felder spielen im Folgenden keine Rolle.) Beide Wellen haben also dieselbe Amplitude, Wellenlänge, Frequenz und Polarisation und unterscheiden sich einzig durch ihre Ausbreitungsrichtungen $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, die beide in der $xy-$Ebene liegen sollen. Betrachten Sie nun das Überlagerungsfeld $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

a) Warum ist mit $\mathbf{E}_1$ und $\mathbf{E}_2$ auch $\mathbf{E}$ eine Lösung der Maxwell-Gleichungen?

Lösung:

Aufgrund der Linearität der Maxwell-Gleichungen ist die Summe zweier Lösungen wieder eine
[1] Lösung.

b) Schreiben Sie das Überlagerungsfeld $\mathbf{E}$ in einer Form, aus der seine Gestalt und seine zeitliche Entwicklung besser erkennbar ist.

Hinweis: Verwenden Sie $\cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)\right)$.

Lösung:

Das Überlagerungsfeld ist:

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = E\mathbf{e}_z\left(\cos(\omega t - \mathbf{k}_1\mathbf{r})\right) + \cos(\omega t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}) \tag{34}$$

Verwendet man nun die angegebene Identität $\cos(\phi_1)+\cos(\phi_2) = 2\cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)\right)\cos\left(\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2)\right)$ dann wird dies zu

[1]
$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = 2E\mathbf{e}_z\cos\left(\frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)\right)\cos\left(\omega t - \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\mathbf{r}\right). \tag{35}$$

Das Überlagerungsfeld ist also von der Form

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z A(\mathbf{r})\cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r}) \tag{36}$$

Es handelt sich also im Wesentlichen um eine ebene Welle $\cos(\omega t - \mathbf{k}'\mathbf{r})$, die sich in Richtung des Wellenzahlvektors $\mathbf{k}' = \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$ bewegt und die mit dem zeitlich unveränderlichen räumlichen Faktor $A(\mathbf{r})$ amplitudenmodeliert ist. [1]

c) Es sei nun $\mathbf{k}_1 = k\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{k}_2 = k\mathbf{n}_2$ mit
$\mathbf{n}_1 = (\cos(45°), \sin(45°), 0)$,
$\mathbf{n}_2 = (\cos(45°), -\sin(45°), 0)$
$k = 2\pi/\lambda$, $\lambda = 1\text{m}$.
Schreiben Sie das zugehörige $\mathbf{E}$ in der Form b). Zur Zeit $t = 0$ hat $\mathbf{E}$ bei $\mathbf{r} = 0$ ein Maximum. In welche Richtung bewegt sich dieses Maximum? Wohin ist das Maximum nach einer Schwingungsperiode $T = 2\pi/\omega$ gewandert? Vergleichen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Maximum gewandert ist, mit der Lichtgeschwindigkeit. Ist das Ergebnis ein Grund zur Beunruhigung? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

Konkret ist nun

$$\mathbf{k}_1 = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k}_2 = \frac{k}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

und $k = \frac{2\pi}{m}$. Die erste Teilwelle breitet sich also in Richtung der Winkelhalbierenden in der xy-Ebene aus, die zweite senkrecht dazu ebenfalls in der xy-Ebene. Dann ist das Überlagerungsfeld gemäß b):

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 2E\mathbf{e}_z \cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right) \cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}x\right) \tag{38}$$ [1]

Es besteht im Wesentlichen aus der in x-Richtung laufenden Welle $\cos\left(\omega t - \frac{k}{\sqrt{2}}x\right)$, deren Amplitude allerdings nicht wie bei einer „normalen" Welle konstant, sondern mit dem Faktor $\cos\left(\frac{k}{\sqrt{2}}y\right)$ in y-Richtung moduliert ist. Zusammen ergibt das ein „Eierkartonmuster", das in positive x-Richtung wandert und das in Abbildung (4) für $t = 0$ dargestellt ist.

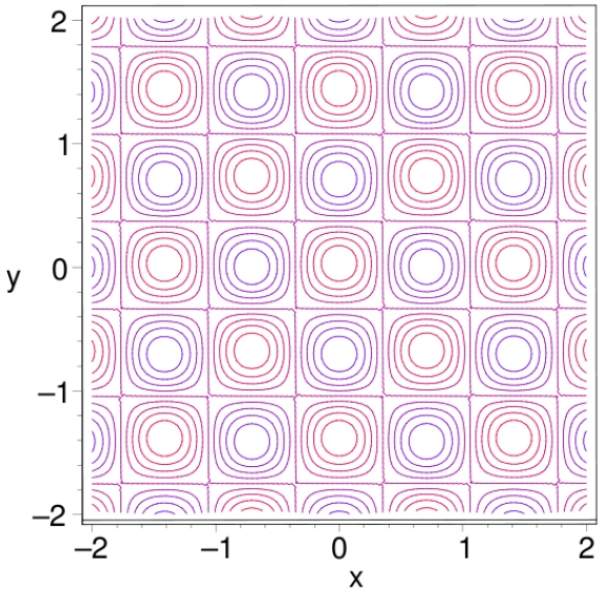
[1] 

Abbildung 4: $\mathbf{E}(t=0)$, Gebiete mit $E_z > 0$ sind in rot, Gebiete mit $E_z < 0$ in blau dargestellt

Die Wellenlänge der laufenden Welle ergibt sich aus $k' = \frac{k}{\sqrt{2}}$ zu $\lambda' = \sqrt{2}\lambda$, so wie man es auch in der Abbildung sehen kann. Obwohl also beide Teilwellen die Wellenlänge 1 m haben, ist dieWellenlänge des Überlagerungsfeldes um den Faktor $\sqrt{2}$ größer. Die Phasengeschwindigkeit der laufenden Welle ist dementsprechend:

[1]
$$v = \frac{\omega}{k'} = \sqrt{2}\,\frac{\omega}{k} = \sqrt{2}\;c \tag{39}$$

Das kann man auch an der Abbildung erkennen: Das Maximum, das sich zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$, $y = 0$ befindet, ist nach einer Schwingungsperiode an den Ort $x = \sqrt{2}$ m, $y = 0$ gewandert. Diese Ausbreitung des Maximums mit „Überlichtgeschwindigkeit“ ist jedoch völlig unproblematisch, da es sich nur um einen rein geometrischen Effekt handelt: Wenn sich zwei gegeneinander geneigte Geraden („Wellenfronten“) mit Lichtgeschwindigkeit senkrecht zu sich selbst bewegen, dann bewegt sich ihr Schnittpunkt (an dem sich im Beispiel der Welle das Maximum befindet) mit
[1] Überlichtgeschwindigkeit. Dabei wird aber keine Energie oder Information Übertragen.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Die Lufttemperatur über einem großen See sei -2°C, während das Wasser im See eine Temperatur von 0° hat. Wie lange dauert es, bis sich im See eine 10cm dicke Eisschicht gebildet hat? Nehmen Sie an, dass hierbei nur die Wärmeleitung ($\lambda_{Eis} = 2,3$W/mK) als Wärmetransportmechanismus eine Rolle spielt. Die spezifische Schmelzwärme von Eis beträgt $3,3 \times 10^5$J/kg und die Dichte von Eis ist $\rho_{Eis} = 920$kg/m^3.

Hinweis: Die Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen.

Lösung:

Es gibt den Wärmestrom:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{x} A \, \Delta T \tag{40}$$ [1]

Um die Masse m Wasser zum Gefrieren zu bringen, muss man ihr die Wärmemenge

$$Q = mS \tag{41}$$

entziehen, wobei S die speziefische Schmelzwärme ist. Ableiten nach der Zeit ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \dot{m} = \frac{\dot{Q}}{S} \tag{42}$$ [1]

für die Masse $\mathrm{d}m$ an Wasser die durch den Wärmestrom $\dot{Q}$ pro Zeiteinheit $\mathrm{d}t$ gefriert. Diese Masse wird zu Eis und erhöht das Volumen der Eisdecke gemäß:

$$\dot{V} = \frac{\dot{m}}{\rho_{Eis}}. \tag{43}$$

Die Zunahme der Dicke der Eisdecke ergibt sich schließlich durch:

$$\dot{x} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{m}}{\rho_{Eis} A} \tag{44}$$

Alles zusammen ergibt:

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\lambda}{\rho_{Eis} S x} \, \Delta T \tag{45}$$ [1]

Das ist eine Differentialgleichung, die sich durch Trennung der Variablen einfach lösen lässt:

$$\begin{aligned} x\mathrm{d}x &= \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} \mathrm{d}t \\ \int x\mathrm{d}x &= \int \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} \mathrm{d}t \qquad (46) \\ \frac{1}{2} x^2 &= \frac{\lambda \Delta T}{\rho_{Eis} S} t \end{aligned}$$ [3]

Auflösen nach t und Einsetzen der Werte liefert:

$$t = \frac{\rho_{Eis} x^2 S}{2 \lambda \Delta T} \approx 3,8\mathrm{d} \ (3\mathrm{d} : 19\mathrm{h} : 40\mathrm{min}). \tag{47}$$ [1]

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Betrachten Sie den in der Abbildung 5 dargestellten Kreisprozess. Im T-S-Diagramm stellt er eine Ellipse dar. Die höhere Temperatur T_0 ist 1000°C, die niedrigere Temperatur T_U ist 100°C, die Entropiedifferenz $S_1 - S_0$ beträgt 1.5kJ/K. Der Prozess verläuft vollkommen reversibel.

Hinweis: Die Fläche einer Ellipse ist $ab\pi$, mit a und b als große und kleine Halbachse.

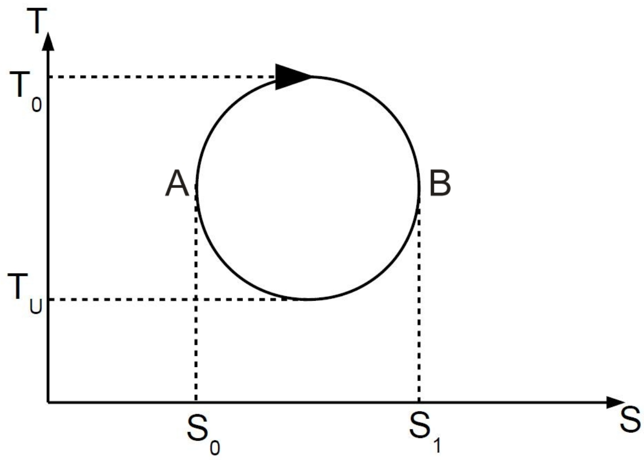


Abbildung 5: T-S-Diagramm eines Kreisprozesses.

a) Wie groß ist die Wärmemenge, die beim Übergang von A nach B aufgenommen wird?

Lösung

Die aufgenommene Wärme wird berechnet durch:

[1]
$$\delta Q_{rev} = T \mathrm{d}S \tag{48}$$

und ist im $T - S$ Diagramm die Fläche unter der Kurve zwischen A und B:

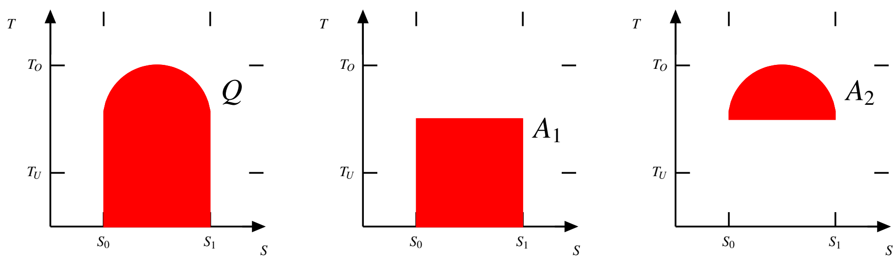


Abbildung 6: Die aufgenommene Wärme Q (links) entspricht der Fläche unter der Kurve von A nach B. Um diese zu berechnen wird die Fläche in ein Rechteck A_1 (mitte) und eine halbe Ellipse A_2 (rechts) aufgeteilt.

Also ist:

$$\delta Q = A_1 + A_2 \tag{49}$$

wobei

[1]
$$\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{T_O - T_U}{2} + T_U\right)(S_1 - S_0), \\ A_2 &= \frac{(S_1 - S_0)}{2}\ \frac{(T_O - T_U)}{2}\ \pi \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{50}$$

Für δQ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta Q &= (S_1 - S_0)\left(\left(\frac{T_0 - T_1}{2} + T_U\right) + \frac{\pi}{8}(T_O - T_U)\right) \\ &= 1,5\frac{\text{kJ}}{\text{K}}\left(\frac{(1273-373)}{2} + 373\right)\text{K} + \frac{\pi}{8}900\text{K} = 1765\text{kJ}\end{aligned} \tag{51}$$ [1]

b) Wie groß ist die pro Umlauf umgesetzte Arbeit? Wird sie dem Kreisprozess zugeführt oder von ihm abgegeben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Laut 1. HS gilt für Kreisprozesse:

$$dU = \delta Q + \delta W = 0 \tag{52}$$

Da hier Nettoaufnahme von Wärme vorliegt, muss Nettoabgabe von Arbeit erfolgen. Der Kreisprozess verrichtet also Arbeit. (Auch gültig ist die Erklärung, dass der Prozess rechtslaufend ist.) [1]

Die Arbeit entspricht hier der Kreisfläche, also: [1]

$$\delta W = -\delta Q = -\pi\frac{S_1 - S_0}{2}\frac{T_O - T_U}{2} = -\frac{\pi}{4} \times 1,5\frac{\text{kJ}}{K} \times 900\text{K} = -1060\text{kJ} \tag{53}$$ [1]

c) Wie groß ist der Wirkungsgrad?

Lösung:

$$\eta = \left|\frac{\delta W}{\delta Q}\right| = \frac{1060\text{kJ}}{1765\text{kJ}} = 0,6 \tag{54}$$ [1]

d) Welcher Wirkungsgrad ließe sich mit zwei Wärmereservoirs der Temperaturen $T_0 = 1000°\text{C}$ und $T_U = 100°\text{C}$ theoretisch maximal erreichen? Warum erreicht der gegebene Kreisprozess diesen Wirkungsgrad nicht?

Lösung:

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_U}{T_O} = 1 - \frac{373\text{K}}{1273\text{K}} = 0,71. \tag{55}$$ [1]

Der angegebene Kreisprozess nimmt Wärme auch bei $T < T_0$ auf und gibt sie auch bei $T > T_U$ ab. Daher muss η kleiner sein, als η_{Carnot}. [1]