Probeklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti
Sommersemester 2014
12.Juni 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Betrachten Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung eines freien Teilchens:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cdot\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

Gehen Sie von der folgenden stationären Lösung der DGl. aus:

$$\Psi(x,t) = \Phi(x)\cdot\Theta(t) = \Phi(x)\cdot e^{i(\omega+i\Gamma/(2\hbar))t}$$

Wie hängt das Betragsquadrat der Wellenfunktion von der Zeit und dem Ort ab? Was ist die physikalische Bedeutung dieser Zeitabhängigkeit?

Lösung:

Der Imaginärteil der Zeitabhängikeit der Wellenfunktion hat keinen Einfluß auf das Betragsquadrat der Lösung. Der Realteil erzeugt einen exponentiellen zeitlichen Abfall der Wellenfunktion:

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\Phi(x)|^2\cdot e^{-i(\omega t)}\cdot e^{i(\omega t)}\cdot e^{-(2\,\cdot\,\Gamma/2\,\cdot\,\hbar)t} = |\Phi(x)|^2\cdot e^{-t/\tau}$$

[**1**]

Diese Lösung repräsentiert eine räumliche Wahrscheinlichkeitsverteilung, die an allen Orten x mit der gleichen exponentiellen Zeitabhängighkeit abfällt. Die *räumliche Form* der Lösung ist also zeitlich konstant. Es handelt sich aber um einen Zustand mit einer endlichen Lebensdauer. Die Zerfallskonstante ist $\tau = \Gamma/\hbar$. Man bezeichnet Γ als die *Zerfallsbreite* des Zustandes.

[**1**]

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Das Deuteron besteht aus einem Proton und einem Neutron und ist das einfachste gebundene System von Nukleonen. Das Potential zwischen Proton und Neutron kann durch einen Potentialtopf der Tiefe $-V_0$ und der Breite r_0 (Zentralpotential) beschrieben werden. Für ein Zentralpotential ist die Wellenfunktion seperabel:

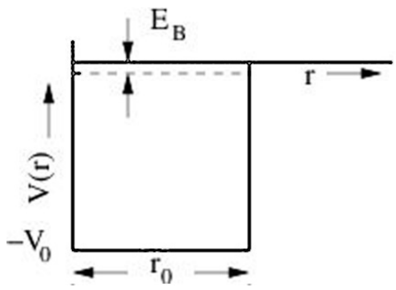
$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

Dieser Ansatz kann aber auf die Lösung des Radialteils reduziert werden:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2u}{dr^2} + (V(r) - E)u = 0 \tag{1}$$

mit

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_n \cdot m_p}{m_n + m_p} \approx \frac{m_p}{2} \equiv \frac{m}{2} \\ u(r) &= r \cdot R(r) \end{aligned}$$



Hinweis: Schauen Sie sich auch die Aufgabenteile e) und f) an.

(a) Wie lautet die zeitunabhängige Schrödingergleichung für $r < r_0$ bzw. $r > r_0$ mit der Bindungsenergie E_B des Deuterons?

Lösung

Die Schrödingergleichung lässt sich umformen:

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2}(V(r) - E)u = \frac{d^2u}{dr^2} + k^2u = 0$$

Daraus erhält man durch einfaches Einsetzen von $V(r)$ die Schrödingergleichung für $r < r_0$ und $r > r_0$:

$$\begin{aligned} r < r_0 : V(r) &= -V_0 \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2}(V_0 - E_B)u = 0 \\ r > r_0 : V(r) &= 0 \qquad \Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2}E_B u = 0 \end{aligned}$$

[**1**]

(b) Machen Sie einen Lösungsansatz u_i für $r < r_0$ und u_a für $r > r_0$ mit den entsprechenden Randbedingungen.

Lösung

Beide Gleichungen werden durch den Ansatz

$$\begin{aligned} u(r) &= \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr} && (2) \\ &= \alpha(\cos kr + i \sin kr) + \beta(\cos kr - i \sin kr) && (3) \end{aligned}$$

gelöst. Dabei ist k ersichtlich $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{-m[V(r) - E]}$.

[**1**]

- $r < r_0$:

  Setzt man die hier gültige Randbedingung $u_i(0) = 0$, die sich ergibt, wenn man fordert, dass $R(r) = u(r)/r$ nicht divergiert, in Gleichung (2) ein, erhält man $u_i(0) = \alpha + \beta = 0$. Und damit

  $$u_i(r) = 2\alpha i \sin k_i r = A_i \sin k_i r$$

  mit $k_i = \frac{1}{\hbar}\sqrt{m(V_0 - E_B)}$.

  [**1**]

- $r > r_0$:

  Hier ist $k_a = \frac{i}{\hbar}\sqrt{mE_B}$ und die Randbedingung $u_a(\infty) = 0$, da das Potential keine unendliche Reichweite hat. Einsetzen in Gleichung (3) ergibt

  $$u_a(r) = \alpha e^{ik_a r} = A_a e^{-\frac{r}{R_0}}$$

  wobei $R_0 = \frac{i}{k_a} = \frac{\hbar}{\sqrt{mE_B}}$.

  [**1**]

(c) Schätzen Sie die Tiefe $-V_0$ des Potentials mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen für $r = r_0$ ab. Die Bindungsenergie des Deuterons ist $E_B = 2.225$MeV und die Breite des Potentials $r_0 \approx 1.4\,\text{fm}$. *Hinweis:* Nähern Sie die Endgleichung. $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) << 1$.

Lösung

Die Stetigkeitsbedingung für $r = r_0$ lautet:

$$\begin{aligned} u_i(r_0) = u_a(r_0) \\ u_i'(r_0) = u_a'(r_0) \end{aligned}$$

[**1**]

Daraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_i \cdot \sin(k_i r_0) &= A_a \cdot e^{-\frac{r_0}{R_0}} && (4) \\ k_i \cdot A_i \cdot \cos(k_i r_0) &= -\frac{A_a}{R_0} \cdot e^{-\frac{r_0}{R_0}} && (5) \end{aligned}$$

[1]

Durch Division von Gleichung (4) und (5) erhält man

$$k_i \cdot \cot(k_i r_0) = -\frac{1}{R_0}$$

Daraus ergibt sich durch einsetzen von k_i und R_0

$$\cot\left(\sqrt{\frac{m(V_0 - E_B)r_0^2}{\hbar^2}}\right) = -\sqrt{\frac{E_B}{V_0 - E_B}} \tag{6}$$

[1]

Die Bindungsenergie des Deuterons ist mit $E_B = 2.225MeV$ bekannt. Die Reichweite des Potentials ist $r_0 \approx 1.4\,fm$. Setzt man diese Werte in Gleichung (6) ein, erhält man eine Potentialtiefe von $V_0 \approx 50MeV$.

Die Potentialtiefe kann auch einfach aus Gleichung (6) genähert werden: $E_B \ll V_0$, d.h. dass die rechte Seite $\ll 1$. Damit muss der cot auf der linken Seite etwa 0 werden. Dies ist für $\frac{\pi}{2}$ der Fall.

$$\frac{mV_0 r_0^2}{\hbar^2} \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$
$$V_0 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$

Diese einfache Abschätzung liefert also eine Beziehung zwischen der Tiefe des Potentials und dessen Reichweite: $V_0 \approx 100/r_0^2$ (V_0 in MeV, r_0 in fm). Für $r_0 = 1.4\,fm$ erhält man $V_0 \approx 50$ MeV.

[1]

(d) In welchem Abstand $r = R_0$ ist $u(r)$ auf $\frac{1}{e}$ abgefallen?

Lösung

Im Außenraum ist $u_a = A_a e^{-\frac{r}{R_0}}$ die Lösung. R_0 wurde in b. bereits berechnet: $R_0 = -\frac{\hbar}{\sqrt{mE_B}}$. Einsetzen von 2.225 MeV ergibt den Wert 4.3 fm. Dieser Abstand ist deutlich größer als die Reichweite der Kernkraft und wird häufig als Radius des Deuterons bezeichnet.

[1]

(e) Der Grundzustand des Deuteriums ist in zwei Hyperfein-Niveaus mit $F = \frac{1}{2}$ und $F = \frac{3}{2}$ aufgespalten. Welchen Wert muss entsprechend die dem Deuteron zugeordnete Kernspinquantenzahl I haben?

Lösung:

Der Grundzustand des Deuteriums ist – vom Standpunkt der Elektronenkonfiguration her gesehen – der gleiche wie der des normalen Wasserstoffatoms, d. h. $L = 0$, $S = J = \frac{1}{2}$. Da $\vec{I}$ und $\vec{J}$ zu $\vec{F}$ koppeln und damit $|j - i| \leq f \leq j + i$ gilt, kann I lediglich 1 sein. Also stehen im Deuterium die Spins von Proton und Neutron parallel.

(f) In welche Hyperfeinzustände spaltet dann das $p_{3/2}$-Niveau des Deuteriums auf?

[**1**]

Lösung:

Mit $j = \frac{3}{2}$ ($l = 1$, $s = \frac{1}{2}$) lässt uns

$$|j - i| \quad \leq f \leq \quad j + i \tag{7}$$

drei Möglichkeiten: $f = \frac{1}{2}$, $f = \frac{3}{2}$ und $f = \frac{5}{2}$.

[**1**]

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator kennengelernt. Nun soll der dreidimensionale harmonische Oszillator betrachtet werden.

(a) Stellen Sie die drei Eigenwertgleichungen des dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten auf, geben Sie die dazugehörigen Energieeigenwerte an und bestimmen Sie die Gesamtenergie. Gehen Sie aus, dass es sich um einen spärischen harmonischen Oszillator handelt, d.h. $\omega_x = \omega_y = \omega_z$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right]\psi_x(x) &= E_x\psi_x(x) \\
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right]\psi_y(y) &= E_y\psi_y(y) \\
\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2\right]\psi_z(z) &= E_z\psi_1(z)
\end{aligned}$$

[**1**]

Für die Energie gilt

$$E = E_x + E_y + E_z$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$\begin{aligned} E_i &= \hbar\omega\left(n_i+\frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad i=x,y,z & (8)\\ \Rightarrow E &= \hbar\omega\left(N+\frac{3}{2}\right) \quad \text{mit} \quad N=n_x+n_y+n_z & (9) \end{aligned}$$

[1,5]

(b) Wie lautet die Schrödingergleichung des sphärischen Oszillators in Kugelkoordinaten?

Lösung:

Mit

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2}\frac{1}{\hbar^2}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2}\frac{1}{\hbar^2} \end{aligned}$$

und

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{l\,m}(\vartheta,\varphi)=l(l+1)\hbar^2 Y_{l\,m}(\vartheta,\varphi)$$

erhält man

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)\right]\psi(r)=E\psi(r).$$

[1,5]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

(a) Wie lauten die drei Bohrschen Postulate?

Lösung

- In einem Atom bewegt sich ein Elektrion nach den Gesetzen der klassischen Mechanik auf diskreten Kreisbahnen mit den Energien E_n.
- Die Bewegung des Elektrons erfolgt strahlungslos. Beim Überang des Elektrons von einem stationären Zustand mit Energie E_a in einen stationären Zustans niedrigerer Energie E_e wird ein Photon der Frequenz

  $$\nu=\frac{E_a-E_e}{h}$$

  emittiert
- Der Drehimpuls eines Elektrons in einem stationären Zustand nimmt nur diskrete Werte

  $$mvr=\frac{nh}{2\pi}=n\hbar$$

  an, wobei n eine natürliche Zahl ist.

[1,5]

(b) Von welchen Quantenzahlen hängen im Bohrschen Atommodell die Energien der stationären Zustände ab? Wieviele Energieniveaus sind für Hauptquantenzahl n=4 möglich?

Lösung

Im Bohrschen Atommodell sind die Energieniveaus bei gleicher Hauptquantenzahl n für die Drehimpulsquantenzahl l und die magnetische Quantenzahl m entartet. Die Energie hängt also nur von n ab. Für jedes n kann l Werte von 0 bis $n-1$ annehmen. Zusätzlich kann für jedes l m die Werte von $-l \dots 0 \dots l$ annehmen. Das ergibt für jedes n $\sum_0^{n-1} 2l+1 = n^2$ Zustände, bei $n = 4$ also 16.

[1,5]

(c) An einem nackten Bleikern $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$ wird ein negatives Pion gebunden ($\mathrm{m}_\pi = 140\,\mathrm{MeV/c^2}$). Berechnen Sie den Bohrschen Radius dieses Systems und vergleichen Sie ihn mit dem Radius des Bleikerns ($\mathrm{r_A} = 1.3 \cdot \sqrt[3]{\mathrm{A}}\,\mathrm{fm}$)

Lösung

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z_{Blei}} &= 82 \\
\mathrm{m}_{Blei} &\approx 208 \cdot \mathrm{m_{Proton}} \\
\mu &= \frac{\mathrm{m}_{Blei} \cdot \mathrm{m}_\pi}{\mathrm{m}_{Blei} + \mathrm{m}_\pi} \approx \mathrm{m}_\pi \\
r_0 &= \frac{\epsilon_0 h^2}{Z\pi\mu e^2} = 2.3 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} \\
r_{\mathrm{Pb}} &= 1.3 \cdot \sqrt[3]{208} \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m} = 7.7 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

Das Pion befindet sich also innerhalb des Atomkerns! Da das Pion mit dem Kern auch über die starke Kernkraft wechselwirkt, können mit pionischen Atomen Untersuchungen zur Kernstruktur durchgeführt werden.

[2]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sie beobachten das Linienspektrum eines Ein-Elektron-Systems. Sie messen die drei grössten und die kleinste Wellenlänge einer Serie.

Serie [nm]
468.135
320.012
273.072
204.854

(a) Um welche Systeme handelt es sich?

(b) Welche Übergänge werden beobachtet?

(*Hinweis: Die reduzierte Masse kann dabei immer mit der Elektronenmasse gleichgesetzt werden.*)

Lösung:

In Ein-Elektron-Systemen kann die Übergangsenergie zwischen zwei Zuständen mit den Hauptquantenzahlen n_1 und n_2 durch die Formel

$$\mathrm{E}_n = 13.6 \cdot \mathrm{Z}^2 \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \mathrm{eV} \tag{10}$$

beschrieben werden. 13.6 eV ist dabei die Ionisationsenergie des Wasserstoffatoms. Die Kernladung geht also quadratisch in die Energie ein und damit skaliert die Wellenlänge über $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\mathrm{E}}$ mit $1/\mathrm{Z}^2$. Da n_2 (der Endzustand) festgehalten ist, und für die kleinste beobachtete Wellenlänge (die größte Energie) $n_1 = \infty$ gilt (also Einfang eines freien Elektrons), ist es am einfachsten, n_2 und Z über diese Linie kleinster Wellenlänge zu bestimmen. Wir berechnen zunächst deren Energie:

$$\Delta E = \frac{2\pi \cdot 197\mathrm{eVnm}}{204.85\mathrm{nm}} = 6,042\mathrm{eV} \tag{11}$$

[2]

Daraus folgt:

$$6,042\mathrm{eV} = Z^2 \cdot 13.6\mathrm{eV} \cdot \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \tag{12}$$

oder

$$\frac{Z^2}{n_2^2} = \frac{6,042\mathrm{eV}}{13.6\mathrm{eV}} = 0.444 \tag{13}$$

bzw.

$$\frac{Z}{n_2} = 0.667 = \frac{2}{3} \tag{14}$$

(Das ist natürlich unrealistisch genau.) Es liegt also nahe, es mit den Werten $Z = 2$ und $n_2 = 3$ zu versuchen. Also mit:

$$\Delta E = 4 \cdot 13,6eV \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n_1^2} \right) \tag{15}$$

Damit berechnen sich Übergangsenergien und Wellenlängen zu ($\hbar c = 197\,\mathrm{MeVfm} = 197\,\mathrm{eVnm}$):

n_2	Energie [eV]	λ [nm]
4	2.644	468.1
5	3.868	320.0
6	4.533	273.0
∞	6.044	204.8

Bei Serie 1 handelt es sich also um ein He^+ System, es werden Übergänge auf das Niveau $n = 3$ beobachtet.

[**2**]

Aufgabe 6 (10 Punkte)

(a) Erläutern Sie den Zeeman-Effekt.

Lösung

Befinden sich Atome in einem äusseren Magnetfeld, erfolgt eine Aufspaltung der Energieniveaus, die Entartung in der magnetischen Quantenzahl m wird aufgehoben. Ursache hierfür ist die gequantelte räumliche Einstellung der Hüllendrehimpulse des Atoms zur Richtung des Magnetfeldes.

[**1**]

(b) Wie kann dieser Effekt semiklassisch erklärt werden? Und durch welche Formel wird der Öffnungswinkel beschrieben?

Lösung

Ein Elektron auf einer Kreisbahn um den Atomkern (Drehimpuls $\vec{l}$) kann als Kreisstrom beschrieben werden. Dessen magnetisches Moment ist dann $\vec{\mu}_l = -\frac{\mu_\mathrm{B}}{\hbar}\vec{l}$ mit dem Bohrschen Magneton μ_B. Dieses magnetische Moment präzediert um die Magnetfeldrichtung auf einem Kegelmantel, dessen Öffnungswinkel mit von den Quantenzahlen l und m des Elektronniveaus abhängt.

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}}$$

[**2**]

(c) Wie gross ist die Aufspaltung der Unterzustände?

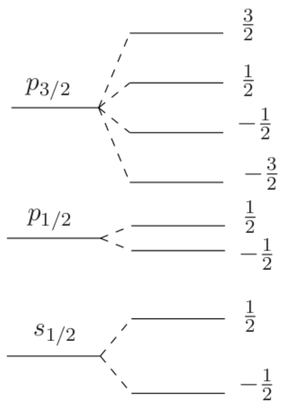
Lösung

Die Unterzustände spalten mit $\Delta \mathrm{E} = \mu_\mathrm{B} \mathrm{B}_\mathrm{Z}$ auf.

[**0,5**]

(d) Skizierren Sie ein Aufspaltungsbild der Na-D-Linien (Übergang von $3^2P_{1/2}$ und $3^2P_{3/2}$ auf $3^2S_{1)/2}$ für ein schwaches Magnetfeld. Bestimmen Sie die Magnetfeldstärke, bei der das unterste Zeeman-Niveau des Terms $3^2P_{3/2}$ mit dem obersten Niveau des Terms $3^2P_{1/2}$ zusammenfallen würde, wenn die Bedingungen für den anomalen Zeemaneffekt noch erfüllt wären.

Lösung



[1,5]

Wie man der Abb. der Na-D-Linien entnehmen kann, interessiert uns, bei welcher Magnetfeldstärke das Energieniveaus $3^2P_{3/2}$ mit $m_j = -3/2$ mit dem Niveau $3^2P_{1/2}$ mit $m_j = 1/2$ zusammenfallen würden. Zusatzenergie V_{m_j} im äußeren Magnetfeld kann man mit Hilfe folgender Gleichung ausrechen:

$$
\begin{aligned}
V_{m_j} &= -(\mu_j)_z = m_j\, g_j\, \mu_B\, B_0 \\
g_j &= 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} \\
g_j &= \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } ^2P_{1/2} \\ \frac{4}{3} & \text{für } ^2P_{3/2} \end{cases}
\end{aligned}
$$

[1,5]

Energiedifferenz ΔE zwischen den Zuständen $^2P_{1/2}$ und $^2P_{3/2}$ ist:

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= hc\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right) \\
\Delta E &= V_{1/2}(1, 1/2) - V_{-3/2}(1, 3/2) = \frac{7}{3}\,\mu_B B_0
\end{aligned}
$$

[1]

Für die Magnetfeldstärke erhalten wir:

$$
B_0 = \frac{3}{7}\,\frac{hc}{\mu_B}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)
$$

[0,5]

(e) Wie groß ist die Frequenzdifferenz zwischen jeweils den beiden äußeren Zeemankomponenten der D_1 und D_2 Linie in einem Magnetfeld der Stärke 1T?

Lösung

Für D_1:

Oberste Linie: $V_{1/2}(1, 1/2) - V_{-1/2}(0, 1/2) = \mu_B B_0 \left(\frac{1}{2}\frac{2}{3} - (-1)\frac{1}{2}2 \right) = \frac{4}{3}\mu_B B_0$

Unterste Linie: $V_{-1/2}(1, 1/2) - V_{1/2}(0, 1/2) = \mu_B B_0 \left(-\frac{1}{2}\frac{2}{3} - \frac{1}{2}2 \right) = -\frac{4}{3}\mu_B B_0$

Gesamtunterschied: $\Delta\nu = \frac{8}{3}\frac{\mu_B B_0}{h} = 37.3\ GHz$

[1,5]

Für D_2:

Oberste Linie: $V_{1/2}(1, 3/2) - V_{-1/2}(0, 1/2) = \mu_B B_0 \left(\frac{1}{2}\frac{4}{3} - (-1)\frac{1}{2}2 \right) = \frac{5}{3}\mu_B B_0$

Unterste Linie: $V_{-1/2}(1, 3/2) - V_{1/2}(0, 1/2) = \mu_B B_0 \left(-\frac{1}{2}\frac{4}{3} - \frac{1}{2}2 \right) = -\frac{5}{3}\mu_B B_0$

Gesamtunterschied: $\Delta\nu = \frac{10}{3}\frac{\mu_B B_0}{h} = 46.7\ GHz$

[1]

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung spaltet im Cäsium der Zustand mit den Quantenzahlen $n = 6$, $L = 1$ in zwei Niveaus mit paralleler bzw. antiparalleler Kopplung von Bahndrehimpuls und Spin auf: $J = L \pm \frac{1}{2} \ \rightarrow\ J = \frac{1}{2}$ und $J = \frac{3}{2}$. Die Differenz der beiden Wellenlängen ist $\Delta\lambda = 42.2$ nm, die kurzwellige Linie hat $\lambda = 852.1$ nm. Berechnen Sie daraus die Spin-Bahn-Kopplungskonstante α.

Lösung

Die Großschreibung von L, J und S suggeriert, dass es sich um den Drehimpulse der Atomhülle und nicht nur eines einzelnen Elektrons handelt. Daher verwendet die Lösung l, s und j.

Betrachten wir nun die Aufspaltung der Energieniveaus etwas genauer: Anstelle der Abschätzung $(\vec{s} \cdot \vec{l}) = s_z \cdot l_z$ wollen wir nun beide Modifikationen mittels dem Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ betrachten. In unserem Fall ist $l = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $j = l \pm s$. Wir nutzen die Vektoridentität

$$\Delta E = \alpha \frac{\vec{l} \cdot \vec{s}}{\hbar^2}$$

$$\vec{l}\vec{s} = \frac{1}{2}\left(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2\right) \tag{16}$$
$$= \frac{1}{2}\hbar^2\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) \tag{17}$$

[**2**]

Unsere Zahlen eingesetzt erhalten wir

$$\vec{l}\vec{s} = \frac{1}{2}\hbar^2 \qquad \text{für } j = \tfrac{3}{2} \tag{18}$$
$$\vec{l}\vec{s} = -\hbar^2 \qquad \text{für } j = \tfrac{1}{2} \tag{19}$$

[**1**]

Die Energieniveaus $E_{n,l,s}$ ergeben sich damit zu

$$E_{n,j} = E_n + \frac{a}{2}\left(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right) \tag{20}$$
$$E_{n,\frac{3}{2}} = E_n + \frac{a}{2} \tag{21}$$
$$E_{n,\frac{1}{2}} = E_n - a \tag{22}$$

[**1**]

Damit erhält man den Wert a aus der Energieaufspaltung. Der energiereichere Zustand ist der mit der kürzeren Wellenlänge bei der Abregung, d. h.

$$\Delta E = \frac{3}{2}a \tag{23}$$
$$= \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} - \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda} \tag{24}$$
$$= 2\pi\hbar c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right) \tag{25}$$
$$= 0.069 \text{ eV} \tag{26}$$
$$a = 0.046 \text{ eV} \tag{27}$$

[**1**]

Das Z aus der Formel ist übrigens eine effektive Kernladung, die von der Abschirmung und damit von (in erster Linie dem Radialanteil) der Wellenfunktion des jeweiligen Zustands abhängig ist. Einfaches Einsetzen der Protonenzahl von Cs führt also nicht zu dem gewünschten Ergebnis.

Konstanten

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\text{Js} \qquad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C} \qquad m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{As/Vm} \qquad \alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11}\text{m} \qquad \mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24}\text{JT}$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3} = 1,10 \cdot 10^{7}\text{m}^{-1}$$