
DVP-Klausur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. F. v. Feilitzsch

4.9.2008

Musterlösung

Aufgabe 1: (6 Punkte)

- a) Die Luminosität ist das Produkt aus der Teilchenstromdichte und der Anzahl der im Strahl stehenden Streuzentren. ($L = j_N n_t d_t A_b$). Die Luminosität hat also dieselbe Einheit wie die Teilchenstromdichte: $1/\text{m}^2\text{s}$. Wenn man die Dicke des (dünnen) Targets verdoppelt, dann verdoppelt sich die Streurrate, obwohl der Teilchenstrom gleichgeblieben ist. Also legt der Teilchenstrom allein die Streurrate nicht eindeutig fest.
- b) Die Streurrate $d\dot{N}$ in ein Raumwinkelement $d\Omega$ ist „trivialerweise“ proportional zur Luminosität L des Strahls und zum Raumwinkelement des Detektors. Der verbleibende nichttriviale Faktor, der für das Streuzentrum charakteristisch ist, ist der differentielle Streuquerschnitt

$$d\dot{N} = L \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{L} \frac{d\dot{N}}{d\Omega} \quad (1)$$

c)

$$d\dot{N} = L 2\pi b |db| = L 2\pi b(\vartheta) \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| d\vartheta \quad (2)$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{L} \frac{d\dot{N}}{d\Omega} = \frac{b(\vartheta)}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \quad (4)$$

- d) Man geht von einem bestimmten mikroskopischen Modell bzw. von bestimmten Parameterwerten aus, leitet daraus mit Hilfe der anerkannten Theorie den erwarteten Streuquerschnitt her und überprüft diesen in einem Streuexperiment. Auf diese Weise kann man die zugrundegelegten Modell- bzw. Parameterannahmen verifizieren oder falsifizieren.

Aufgabe 2: (7 Punkte)

- a) Die Schrödinger-Gleichung ist die Grundgleichung, die Bewegungsgleichung der Quantenmechanik, sie bestimmt die zeitliche Entwicklung eines quantenmechanischen Systems. Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ist die Eigenwertgleichung für den Energieoperator (Hamilton-Operator).
- b) 1. Die stationären Zustände sind die Energie-Eigenzustände, d.h. die Zustände mit scharfer Energie. Sind sie bekannt, dann kann man aus der Wellenfunktion des Systems die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Energie-Messwerte berechnen.
2. Die stationären Zustände haben eine einfache Zeitentwicklung: Multiplikation mit dem Phasenfaktor $e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t}$. Durch Entwicklung nach den stationären Zuständen kann man die zeitliche Entwicklung eines beliebigen Zustandes berechnen.

- c) Die Wellenfunktion enthält alle Information über das betrachtete quantenmechanische System. Das Absolutquadrat der Ortswellenfunktion ergibt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit(-sdichte) eines Teilchen.
- d) Die Wahrscheinlichkeit erhält man durch das Absolutquadrat des Skalarprodukts der Wellenfunktion mit der entsprechenden Eigenfunktion des Drehimpulses, im beschriebenen Fall $l(l+1)\hbar^2 = 6\hbar^2$ und $m\hbar = \hbar$, also $l = 2$ und $m = 1$, also mit Y_{21} :

$$w_z = \left| \int d^3x Y_{21}^*(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right|^2 \quad (5)$$

Bei der Messung des Drehimpulses um die x -Achse muss man die entsprechend gedrehte Kugelflächenfunktion verwenden:

$$w_x = \left| \int d^3x Y_{21}^*(R^{-1}\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \right|^2 \quad (6)$$

wobei R eine beliebige Drehmatrix ist, die die z -Achse auf die x -Achse dreht, für die also gilt $R\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x$.

Aufgabe 3: (10 Punkte)

- a) Wir betrachten die drei Abschnitte getrennt:

$x < 0$:

Setzt man den Ansatz für diesen Bereich in die Schrödinger-Gleichung ein, dann erhält man:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-k^2 e^{ikx} - k^2 \rho e^{-ikx} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2) \varphi(x) \stackrel{!}{=} E \varphi(x) \quad (7)$$

Die SGL lässt sich also erfüllen, wenn

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (8)$$

bzw.

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (9)$$

$0 < x < a$:

Setzt man den Ansatz für diesen Bereich in die Schrödinger-Gleichung ein, dann erhält man:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U \right) \varphi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \kappa^2 + U \right) \varphi(x) \stackrel{!}{=} E \varphi(x) \quad (10)$$

also

$$E = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} + U \quad (11)$$

bzw.

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)} \quad (12)$$

$x > a$:

Setzt man den Ansatz für diesen Bereich in die Schödinger-Gleichung ein, dann erhält man:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}\right) \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(-k^2 \tau e^{ik(x-a)}\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (-k^2) \varphi(x) \stackrel{!}{=} E \varphi(x) \quad (13)$$

Die SGL lässt sich also erfüllen, wenn

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (14)$$

bzw.

$$k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \quad (15)$$

Dies ist konsistent mit dem Ergebnis für $x < 0$.

b) Für die 4 Unbekannten A, B, ρ, τ erhält man 4 lineare Gleichungen aus den 4 Anschlussbedingungen für die Stetigkeit der Wellenfunktion und ihrer Ableitung:

$$\begin{aligned} x = 0 : & \quad \begin{vmatrix} 1 + \rho & = & A + B \\ ik - ik\rho & = & -\kappa A + \kappa B \end{vmatrix} \\ x = a : & \quad \begin{vmatrix} Ae^{-\kappa a} + Be^{\kappa a} & = & \tau \\ -\kappa Ae^{-\kappa a} + \kappa Be^{\kappa a} & = & ik\tau \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Aus dem ersten Gleichungspaar kann man ρ eliminieren, aus dem zweiten τ . Man erhält so 2 Gleichungen für A, B :

$$\begin{vmatrix} (1 - iq)e^{-\kappa a} A + (1 + iq)e^{\kappa a} B & = & 0 \\ (1 + iq)A + (1 - iq)B & = & 2 \end{vmatrix} \quad (16)$$

(Abkürzung $q := \kappa/k$) und kann diese nach A, B auflösen:

$$\begin{aligned} A &= \frac{-2(1 + iq)}{(1 - iq)^2 e^{-2\kappa a} - (1 + iq)^2} \\ B &= \frac{2(1 - iq)}{(1 - iq)^2 - (1 + iq)^2 e^{2\kappa a}} \end{aligned}$$

Damit erhält man τ :

$$\tau = Ae^{-\kappa a} + Be^{\kappa a} = \frac{-4iq}{(1 - iq)^2 e^{-\kappa a} - (1 + iq)^2 e^{\kappa a}} \quad (17)$$

Erweitert man den Bruch mit k^2 , dann erhält man das angegebene Resultat:

$$\tau = \frac{-4ik\kappa}{(k - i\kappa)^2 e^{-\kappa a} - (k + i\kappa)^2 e^{\kappa a}} \quad (18)$$

c) Tunneleffekt. Er tritt auf z.B. beim radioaktiven α -Zerfall, bei den Fusionsprozessen im Innern der Sonne, beim Rastertunnelmikroskop.

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Die Energie des emittierten Photons beim Übergang $n_1 \rightarrow n_2$ ist gegeben durch

$$\Delta E = Z^2 R_y \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (19)$$

Diese Gleichung kann man auf Wellenlänge umrechnen per

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar ck = \hbar c \frac{2\pi}{\lambda} \quad (20)$$

also

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (21)$$

Bei einer Serie von Spektrallinien ist der Endzustand n_2 fest, während der Anfangszustand n_1 variiert. Es ist von Vorteil, mit der kürzesten Wellenlänge zu beginnen, da diese (größte Energie) dem Anfangszustand $n_1 = \infty$ entspricht. Für diesen Fall ergibt sich:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \quad (22)$$

also

$$\left(\frac{Z}{n_2} \right)^2 = \frac{2\pi\hbar c}{R_y} \frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi \cdot 197 \text{ eV nm}}{13.6 \text{ eV}} \cdot \frac{1}{568.46 \text{ nm}} = 0.1601 \quad (23)$$

bzw.

$$\frac{Z}{n_2} = 0.4001 \dots \approx \frac{2}{5} \quad (24)$$

Es liegt daher nahe, es mit den Werten $Z = 2$ und $n_2 = 5$ zu versuchen. Also mit:

$$\frac{1}{\lambda} = 4 \cdot \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (25)$$

Daraus ergibt sich für die drei größten Wellenlängen, also $n_1 = 6, 7, 8$:

$$4 \cdot \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} \right) = \frac{1}{1861.65 \text{ nm}} \quad (26)$$

$$4 \cdot \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} \right) = \frac{1}{1161.37 \text{ nm}} \quad (27)$$

$$4 \cdot \frac{R_y}{2\pi\hbar c} \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{8^2} \right) = \frac{1}{933.47 \text{ nm}} \quad (28)$$

was genau den angegebenen Werten entspricht.

(Anmerkung: Würde man beispielsweise $Z = 4$, $n_2 = 10$ probieren, dann würde man ebenfalls diese Wellenlängen finden, allerdings wären sie dann nicht die drei größten der Serie.)

Bei dem Atom handelt es also um einfach ionisiertes Helium He^+ , die beobachteten Übergänge sind

$$\infty \rightarrow 5 \quad , \quad 8 \rightarrow 5 \quad , \quad 7 \rightarrow 5 \quad , \quad 6 \rightarrow 5 \quad (29)$$

Aufgabe 5: (9 Punkte)

a) Das $3d$ -Niveau hat $n = 3$ und $l = 2$. Wegen $j = l \pm \frac{1}{2}$ gibt es zwei neue Niveaus, nämlich

$$3d_{3/2} \quad , \quad 3d_{5/2} \quad (30)$$

Um die Energieverschiebung zu bestimmen, muss man den Wert von $H_{LS} = a\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ für die neuen Niveaus nl_j berechnen. Laut Hinweis kann man dies durch l, s, j ausdrücken, und zwar so:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (31)$$

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2) \quad (33)$$

Für die neuen Niveaus gilt

$$\mathbf{J}^2 = j(j+1)\hbar^2 \quad (34)$$

$$\mathbf{L}^2 = l(l+1)\hbar^2 \quad (35)$$

$$\mathbf{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 \quad (36)$$

(eigentlich: die neuen Niveaus sind Eigenzustände von $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ mit diesen Eigenwerten). Also ergibt sich für die Energiekorrektur:

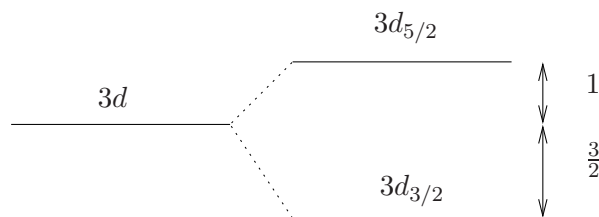
$$\Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)) \quad (37)$$

Die beiden neuen Niveaus haben also

$$3d_{3/2} : \quad \Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}a\hbar^2 \quad (38)$$

$$3d_{5/2} : \quad \Delta E = \frac{a\hbar^2}{2}\left(\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\right) = +1a\hbar^2 \quad (39)$$

Skizze:



Die Dimension des $3d$ -Niveaus ist wegen $l = 2$ und $s = \frac{1}{2}$:

$$d(3d) = (2s+1)(2l+1) = 10 \quad (40)$$

Die beiden neuen Niveaus haben die Dimensionen

$$d(3d_{3/2}) = 2j+1 = 4 \quad , \quad d(3d_{5/2}) = 2j+1 = 6 \quad (41)$$

also zusammen ebenfalls 10.

b) Dies ist der anomale Zeeman-Effekt.

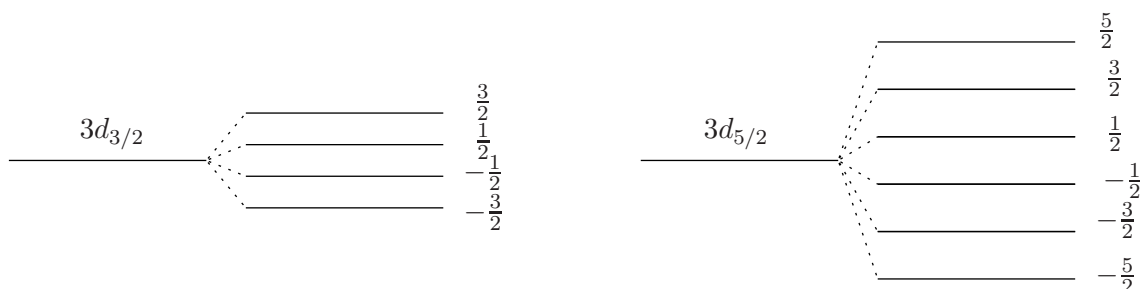
Die Landé-Faktoren für die beiden Niveaus aus a) sind:

$$g_J(3d_{3/2}) = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = \frac{4}{5} \quad (42)$$

$$g_J(3d_{5/2}) = 1 + \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} - 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2}} = \frac{6}{5} \quad (43)$$

Da die Größe der Aufspaltung proportional zu g_J ist, liegen die Niveaus in die $3d_{5/2}$ aufspaltet um den Faktor $6/4 = 3/2$ weiter auseinander als die Niveaus in die $3d_{3/2}$ aufspaltet.

Skizze:



Die magnetische Quantenzahl m_j hat die jeweils eingetragenen Werte, die Dimension aller Unterniveaus ist 1.

Aufgabe 6: (7 Punkte)

Die Basisfunktionen des Zustandsraums der gegebenen Elektronenkonfiguration sind aufgebaut aus Produkten von $N = z_1 + \dots + z_\nu$ 1Elektronen-Basisfunktionen. Dabei gehört zu jedem Term $n_\alpha l_\alpha^{z_\alpha}$ der Konfiguration (also zu jeder Unterschale) ein Faktor, der selbst ein Produkt ist der Form

$$\underbrace{\varphi_{n_\alpha l_\alpha m_1 r_1}(\mathbf{x}_1) \dots \varphi_{n_\alpha l_\alpha m_{z_\alpha} r_{z_\alpha}}(\mathbf{x}_{z_\alpha})}_{z_\alpha \text{ Stück}} \quad (44)$$

In diesem Produkt sind n_α und l_α fest, während die m und r variieren. Das Gesamtprodukt muss man noch antisymmetrisieren da es sich um identische Fermionen handelt, daher dürfen 1) keine zwei Faktoren in allen Indizes übereinstimmen (Pauli) und 2) alle Faktoren mit permutierten Indizes werden als einer gezählt (Identität). Jeder „Doppelindex“ mr kann nun prinzipiell $2(2l_\alpha + 1)$ Werte annehmen. Es gibt also soviel verschiedene Basisfunktionen wie es Möglichkeiten gibt, $2(2l_\alpha + 1)$ Werte auf z_α Indizes zu verteilen – und zwar 1) ohne Wiederholung und 2) ohne Berücksichtigung der Anordnung. Die Anzahl dieser Möglichkeiten ist gegeben durch

$$\binom{2(2l_\alpha + 1)}{z_\alpha} \quad (45)$$

Betrachtet man nun alle Terme der Konfiguration, so ist klar, dass man die zugehörigen Vielfachheiten miteinander multiplizieren muss, um die Gesamtvielfachheit zu bekommen, also

$$d = \binom{2(2l_1 + 1)}{z_1} \cdot \binom{2(2l_2 + 1)}{z_2} \cdot \dots \cdot \binom{2(2l_\nu + 1)}{z_\nu} \quad (46)$$

Eine vollständig gefüllte Unterschale, d.h. $z_\alpha = 2(2l_\alpha + 1)$, braucht nicht berücksichtigt zu

werden, da sie zu d nur einen Faktor 1 beiträgt wegen

$$\binom{2(2l_\alpha + 1)}{2(2l_\alpha + 1)} = 1 \quad (47)$$

Aufgabe 7: (11 Punkte)

a) Die (stationären) 1Teilchenzustände im 1dimensionalen Potentialtopf der Länge L sind

$$\varphi_n(x) = \sin(k_n x) \quad (48)$$

(ohne Normierung) mit

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (49)$$

(Dies sind die eindeutigen Lösungen der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen im Potential 0 mit der Bedingung, dass die Wellenfunktion am Rand verschwinden soll.)

Die zugehörige Energie ist

$$\varepsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m} k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 \quad (50)$$

Im 2dimensionalen Fall setzen sich die entsprechenden Lösungen der Schrödinger-Gleichung aus den 1dimensionalen Lösungen produktmäßig zusammen. D.h. man hat für jede Flächenrichtung x, y einen k -Wert:

$$k_x = n_x \frac{\pi}{L}, \quad k_y = n_y \frac{\pi}{L} \quad (51)$$

und die zugehörige Energie ist

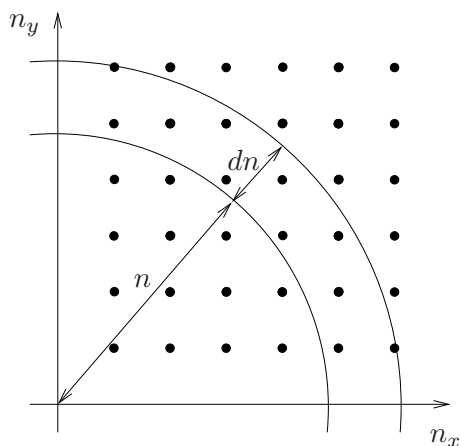
$$\varepsilon := \varepsilon_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 \quad (52)$$

wobei wir die Abkürzung

$$n := \sqrt{n_x^2 + n_y^2} \quad (53)$$

eingeführt haben.

Wieviele 1Teilchenzustände, also Wertetripel (n_x, n_y, n_z) gehören nun zu einem Energiewert ε bzw. zu einem Energieintervall $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$?



Der Abbildung entnimmt man, dass es im n -Intervall $[n, n + dn]$

$$g(n)dn = \frac{1}{4}2\pi n dn = \frac{\pi}{2}n dn \quad (54)$$

Paare (n_x, n_y) gibt. Berücksichtigt man, dass es zusätzlich noch die beiden Spineinstellungen $m_s = \pm \frac{1}{2}$ gibt, dann hat man also insgesamt

$$g(n) dn = \pi n dn \quad (55)$$

1Teilchenzustände im Intervall $[n, n + dn]$.

Wegen

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{L^2} n^2 \quad (56)$$

ist

$$n = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{L}{\pi} \sqrt{\varepsilon} \quad (57)$$

und

$$dn = \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{L}{\pi} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon \quad (58)$$

Also ist die auf ε statt auf n bezogene 1Elektronen-Zustandsdichte:

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \pi \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{L}{\pi} \sqrt{\varepsilon} \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{L}{\pi} \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} d\varepsilon = \frac{mL^2}{\pi\hbar^2} d\varepsilon \quad (59)$$

und wegen $A = L^2$

$$g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{mA}{\pi\hbar^2} d\varepsilon \quad (60)$$

(unabhängig von ε).

Die Fermi-Energie bei $T = 0$ erhält man nun aus der Normierungsbedingung

$$\int_0^{\varepsilon_{F0}} d\varepsilon g(\varepsilon) \stackrel{!}{=} N \quad (61)$$

da bei $T = 0$ alle Zustände von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \varepsilon_{F0}$ einfach besetzt sind. Also:

$$\varepsilon_{F0} \cdot \frac{mA}{\pi\hbar^2} = N \quad (62)$$

und so

$$\varepsilon_{F0} = \frac{\pi\hbar^2 N}{mA} \quad (63)$$

b) Die Fermi-Temperatur T_F ist gegeben durch

$$kT_F = \varepsilon_{F0} \quad (64)$$

also

$$T_F = \frac{1}{k} \frac{\pi\hbar^2 N}{mA} \quad (65)$$

Die Masse des ^3He -Atoms in MKSA-Einheiten ist:

$$m = \frac{2809 \text{ MeV}}{(299.8 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2} = \frac{2809 \cdot 10^6 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(299.8 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2} = 5.007 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \quad (66)$$

und damit

$$T_F = \frac{1}{1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}} \cdot \frac{\pi \cdot (1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2 \cdot 1}{5.007 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot (10^{-9} \text{ m})^2} = 0.5 \text{ K} \quad (67)$$

[Auf dem Angabenblatt war ein falscher Wert für die Boltzmann-Konstante angegeben, nämlich $1.381 \cdot 10^{-21} \text{ J/K}$. Daher ist das Ergebnis $T_F = 0.005 \text{ K}$ ebenfalls als gültig zu bewerten.]

c) Die Energie ergibt sich aus

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon g(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon) = \frac{mA}{\pi \hbar^2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_{F0})/kT} + 1} = \frac{N}{\varepsilon_{F0}} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \varepsilon_{F0})/kT} + 1} \quad (68)$$

Gemäß der angegebenen Integralnäherung ist dies

$$E = \frac{N}{\varepsilon_{F0}} \left(\int_0^{\varepsilon_{F0}} d\varepsilon \varepsilon + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \right) \quad (69)$$

$$= \frac{1}{2} N \varepsilon_{F0} + \frac{\pi^2}{6} \frac{N k^2 T^2}{\varepsilon_{F0}} \quad (70)$$

Die spezifische Wärme pro Flächeneinheit ist also

$$C = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{E}{A} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{2} \frac{N}{A} \varepsilon_{F0} + \frac{\pi^2}{6} \frac{N k^2 T^2}{A \varepsilon_{F0}} \right) = \frac{\pi^2}{3} \frac{N k^2 T}{A \varepsilon_{F0}} \quad (71)$$

Verwendet man die Gleichung für ε_{F0} , dann folgt

$$C = \frac{\pi^2}{3} \frac{N k^2 T}{A} \frac{mA}{\pi \hbar^2 N} = \frac{\pi}{3} \frac{m k^2 T}{\hbar^2} \quad (72)$$

unabhängig von N/A .