....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Studienbegleitende Fachprüfung
Mathematik für Physik 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

9. Februar 2009, 9:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **11** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 + k} = \frac{n}{n+1}$$

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $(a+ib)^{-1}$ an, $a, b \in \mathbb{R}$. **[2]**

$$\frac{1}{a+ib} = \boxed{} + i \boxed{}$$

(b) Geben Sie $(-1+i)^6$ in Polardarstellung, $r\, e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an. **[4]**

$r =$

$\phi =$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$. **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☐ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{3}\right)^n$? **[2]**

☐ -4 ☐ -3 ☐ 0 ☐ $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☐ ∞ ☐ undefiniert

(c) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n)^n}$? **[3]**

☐ $=-\infty$ ☐ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ undefiniert

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{2^n} x^n$.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\neq 1}} \frac{\log x}{x^2-1}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar? **[2]**

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

6. **Grenzwert eines Integrals** **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Berechnen Sie $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)dt$.

7. Maximales Volumen **[10 Punkte]**

Aus einer Kugel mit Radius R soll ein Zylinder mit maximalem Volumen geschnitten werden.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen der Höhe h und dem Radius r des Zylinders, wenn der Rand von Boden und Deckel des Zylinders jeweils in der Kugeloberfläche liegen?

(b) Wie groß ist das Volumen des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h?

(c) Bestimmen Sie, mit Begründung, die Höhe des Zylinders, dessen Volumen maximal ist.

8. **Integration** [**6 Punkte**]

(a) Bestimmen Sie [**2**]

$$\int xe^{-x^2}\,dx =$$

(b) Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2} dx$ ist [**2**]

☐ konvergent, ☐ absolut konvergent, ☐ nicht konvergent.

(c) Das Integral $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ ist [**2**]

☐ konvergent, ☐ absolut konvergent, ☐ nicht konvergent.

9. **Integration** **[6 Punkte]**

Für welche Werte von $a, \mu \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|x-a|} dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.

10. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

(a) Wie lautet die Taylorentwicklung zweiter Ordnung von f um den Entwicklungspunkt $a = 2$? **[5]**

$f(x) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\mathcal{O}\big((x-2)^3\big)$

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $a = 2$? **[3]**

☐ 0 ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ e ☐ ∞ ☐ existiert nicht

11. **Fourierreihen** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und 2π-periodisch, mit den Fourierkoeffizienten $\hat{f}_k$, wobei $\hat{f}_0 = 0$. Sei F eine Stammfunktion von f. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten $\hat{F}_k$ von F gilt:

$$\hat{F}_k = \frac{\hat{f}_k}{ik} \quad \text{für } k \neq 0.$$