Prof. Dr. H. Friedrich
Physik-Department T30a

Technische Universität München

Probeklausur zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Montag, 20.07.2009 Hörsaal 1 10:15 - 11:45

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Geben Sie möglichst kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

(a) Begründen Sie, warum das Kraftfeld **(1 P)**

$$\vec{F}(\vec{r}) = c_0\vec{r}\left(e^{-r^2/a_0^2} - \frac{r^4}{b_0^4}\right) \qquad a_0, b_0, c_0 \text{ konstant, konservativ ist.}$$

Lösung: Es handelt sich um eine radiale Kraft, die sich aus einem Potential der Form $f(r)$ gemäß $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla f(r) = -\vec{r}/r\frac{df}{dr}$ ableitet.

(b) Eine Schallplatte dreht sich auf einem Plattenspieler im Uhrzeigersinn (von oben betrachtet). Eine Ameise bewegt sich vom Zentrum radial nach außen. In welche Richtung wird die Ameise durch die Coriolis-Kraft vom geraden Weg abgedrängt? **(1 P)**

Lösung: Die Coriolis-Kraft ist gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})\,,$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des "Teilchens" im bewegten Bezugssystem ist. Da $\vec{\omega}$ nach unten zeigt, wird die Bewegung durch die Coriolis-Kraft immer nach links abgelenkt.

(c) Bei einer kanonischen Transformation der Hamilton-Funktion $H(\vec{r}, \vec{p})$ eines Systems auf neue Koordinaten Q_1, Q_2, Q_3 und Impulse P_1, P_2, P_3 können die drei Komponenten des Drehimpulses $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ nicht die drei neuen Impulsvariablen sein. Warum? **(1 P)**

Lösung: Falls die Komponenten des Drehimpulses L_i die neuen Impulsvariablen wären, dann würde für die Poisson-Klammern gelten

$$\{L_i, L_j\} = 0\,. \tag{1}$$

Poisson-Klammern sind gegenüber kanonischen Transformationen invariant. Bezüglich der ursprünglichen Koordinaten $\vec{r}, \vec{p}$ ist aber

$$\{L_i, L_j\} \neq 0\,,$$

im Widerspruch zu (1).

(d) Ein Wasser-Molekül wird als ein System aus drei Massenpunkten beschrieben, die untereinander mit Hook'schen Federn verbunden sind. Wieviele unabhängige Eigenschwingungen gibt es in diesem System? **(1 P)**

Lösung: Insgesamt gibt es bei 3 Massenpunkten $3 \times 3 = 9$ Freiheitsgrade. Das Molekül hat dann 3 Freiheitsgrade der Rotation und 3 Translationsfreiheitsgrade. Damit gibt es 3 unabhängige Eigenschwingungen.

(e) In einem System aus N Massenpunkten m_i wechselwirken die Teilchen über ein Zweiteilchen-Potential

$$U(\vec{r_1}, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} u(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)\,.$$

Nennen Sie zwei Größen, die durch Hinzufügen eines äußeren Potentials

$$U_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} m_i g z_i$$

nicht mehr erhalten sind. **(2 P)**

Lösung: Nicht mehr erhalten sind die x-und y Komponenten des Drehimpulses sowie die z Komponente des Impulses.

(f) Ein Massenpunkt rollt unter dem Einfluss der Schwerkraft auf der inneren Fläche einer Kugelschale und bleibt stets unterhalb des Äquators. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? **(2 P)**

Lösung: Die Energie und die z-Komponente des Drehimpulses sind erhalten.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

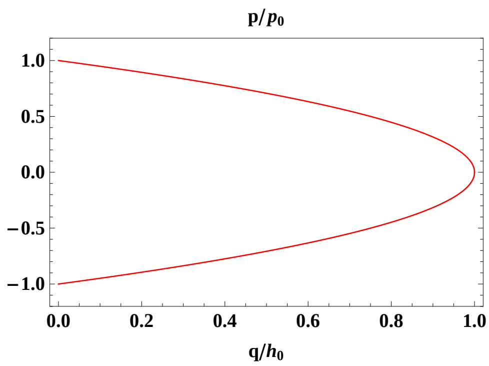
Ein Tennisball hüpft elastisch zwischen der Höhe $h = h_0$ und dem Boden ($h = 0$).

(a) Wie hängt die Periode der Bewegung von der Höhe h_0 ab? **(2 P)**

Lösung: Das Gravitationspotential eine lineare Funktion der Höhe, $U(z) = mgz$ (g : Erdbeschleunigung), und damit eine homogene Funktion vom Grad $\alpha = 1$. Die Fallzeiten wachsen demnach mit der Wurzel der Fallhöhe an.

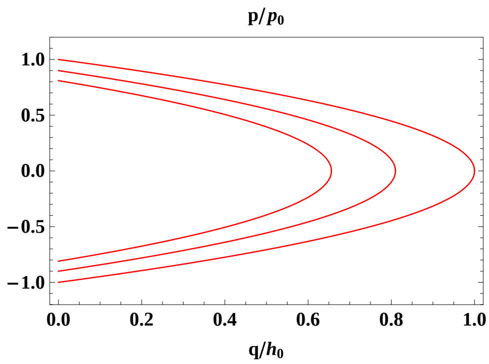
(b) Skizzieren Sie die Bahn der Bewegung im Phasenraum. **(2 P)**

Lösung: Aus dem Energiesatz folgt, dass sich der Impuls schreiben läßt als $p = p_0\sqrt{1 - q/h_0}$.



(c) Wie sieht die Trajektorie im Phasenraum aus, wenn der Ball bei jeder Bodenberührung 19% seiner kinetischen Energie verliert? **(2 P)**

Lösung: Ein Verlust von 19% bedeutet, dass die Energie nach dem Aufprall nur noch 81% der Energie von vor dem Aufprall beträgt. die maximale Höhe ist $h_0 = E/(mg)$ und nimmt damit um den Faktor 0.81 ab. Der Maximalimpuls verringert sich damit um den Faktor $\sqrt{0.81} = 0.9$.



Aufgabe 3 (9 Punkte)

(a) Berechnen Sie für einen Kreisring mit Masse M, Radius R und vernachlässigbarem Querschnitt das Trägheitsmoment um die Achse der Rotationssymmetrie. Was ergibt sich hieraus für das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders (Masse M, Radius R) um die Achse der Rotationssymmetrie? **(2 P)**

Lösung: Mit der Massendichte $M/(2\pi R)$ hat man

$$I = \frac{M}{2\pi R} R^2 \int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{M}{2\pi R} R^3 2\pi = MR^2 \,.$$

Der Hohlzylinder hat das gleiche Trägheitsmoment $I = MR^2$.

(b) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment I einer dünnen, homogenen Kreisscheibe mit Masse M und Radius R um die Achse der Rotationssymmetrie gegeben ist durch $I = MR^2/2$. Was ergibt sich hieraus für das Trägheitsmoment eines homogenen Zylinders (Masse M, Radius R) um die Achse der Rotationssymmetrie? **(3 P)**

Lösung: Mit der Massendichte $M/(\pi R^2)$ hat man

$$I = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r d\varphi dr = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi \frac{1}{4} R^4 = \frac{1}{2} MR^2 \,.$$

Der homogene Zylinder hat das gleiche Trägheitsmoment $I = MR^2/2$.

(c) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment I einer homogenen Kugel der Masse M und Radius R gegeben ist durch $(2/5)MR^2$. **(4 P)**

Lösung: Hier ist die Massendichte gegeben durch $M/(\pi R^3 4/3)$, der senkrechte Abstand eines Massenelements zur Symmetrieachse ist $r \sin\theta$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^\theta r^2 \sin^2\theta r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr \\ &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 2\pi \frac{1}{5} R^5 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \,. \end{aligned}$$

Mit der Subsitution $u = \cos\theta$ findet man

$$\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) \sin\theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3} \,.$$

Damit ist

$$I = \frac{2}{5} MR^2 \,.$$

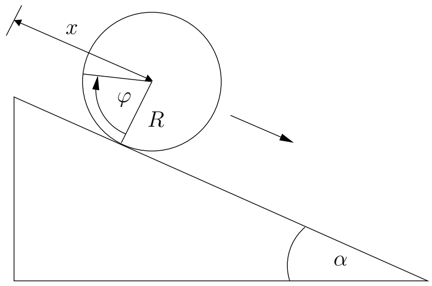
Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein rotationssymmetrischer Körper mit Radius R und Trägheitsmoment I um die Achse der Rotationssymmetrie rollt unter dem Einfluss der Gravitationsbeschleunigung g eine schiefe Ebene mit Neigungswinkel α herunter (siehe Zeichnung).

(a) Wie hängt die Strecke x, die der Schwerpunkt zurücklegt, mit dem Rotationswinkel φ zusammen? Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems als Funktion von x und $\dot{x}$ auf und geben Sie die Bewegungsgleichungen an. **(4 P)**

Lösung: Die zurückgelegte Strecke hängt mit dem Rotationswinkel über die Beziehung

$$x = R\varphi$$



zusammen. Die kinetische Energie ist

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2\,.$$

Mit der Zwangsbedingung $x = R\varphi$ ist $\dot{\varphi} = \dot{x}/R$. Die potentielle Energie ist

$$U = -Mg\sin\alpha x\,,$$

die Lagrange-Funktion ist damit gegeben durch

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{x}^2}{R^2} + Mg\sin\alpha x\,.$$

Es ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = (M + \frac{I}{R^2})\ddot{x}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = Mg\sin\alpha\,.$$

Die Bewegungsgleichung ist dann

$$(M + \frac{I}{R^2})\ddot{x} = Mg\sin\alpha\,.$$

(b) Wie groß ist die effektive Beschleunigung g' für: **(6 P)**
(i) einen Hohlzylinder (Masse M)
(ii) einen homogenen Zylinder (Masse M)
(iii) eine homogene Kugel (Masse M)

Lösung: Die effektive Beschleunigung ist

$$\ddot{x} = g' = \frac{M}{(M + \frac{I}{R^2})}g\sin\alpha\,.$$

(i) Für den Hohlzylinder ist $I = MR^2$, also $g' = \frac{1}{2}g\sin\alpha$.

(ii) Für den homogenen Zylinder ist $I = MR^2/2$, also $g' = \frac{2}{3}g\sin\alpha$.

(i) Für die homogene Kugel ist $I = 2MR^2/5$, also $g' = \frac{5}{7}g\sin\alpha$.

Die Kugel rollt damit am schnellsten, der Hohlzylinder ist am langsamsten.