Klausur Theoretische Physik 3
im Sommersemester 2018 bei Prof. Knap

Diese Klausur basiert auf Gedanken und wurde direkt im Anschluss der Klausur aufgeschrieben. Alle relevanten, gegebenen Informationen sind hier hoffentlich ebenfalls enthalten

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Betrachte ein System aus zwei Spin-1/2-Teilchen. Es gilt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Der Gesamtspinoperator ist $\hat{\mathbf{\Sigma}}$ und die Komponenten sind

$$\hat{\Sigma}_\alpha = \hat{S}_\alpha \otimes \hat{\mathbb{1}} + \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{S}_\alpha$$

wobei $\hat{S}_\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma_\alpha$.
Die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ sind $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$. Zugehörige Eigenwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$.

a)

Zeige, dass

$$\hat{\mathbf{\Sigma}}^2 = \hat{\mathbf{S}}^2 \otimes \hat{\mathbb{1}} + \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\mathbf{S}}^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{3} \hat{S}_\alpha \otimes \hat{S}_\alpha$$

b)

Das System ist im Zustand $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$.
Berechne:

$$\hat{\Sigma}_z|\Psi\rangle$$
$$\hat{\mathbf{\Sigma}}^2|\Psi\rangle$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es ist der eindimensionale Potentialtopf gegeben durch das Potential

$$\hat{V} = \begin{cases} \varepsilon \cosh\left(\frac{\pi}{L}x\right) & \text{für} |x| < \frac{L}{2} \\ \infty & \text{für} |x| \geq \frac{L}{2} \end{cases}$$

wobei $L \in \mathbb{R}_+$ und $\varepsilon \cosh\left(\frac{\pi}{L}x\right)$ eine Störung mit $\varepsilon \ll 1$ ist.

a)

Zeige, dass die Wellenfunktionen

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right) & \text{für } n = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right) & \text{für } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Eigenzustände des ungestörten Potentialtopfs sind.
Berechne das Energiespektrum.

b)

Berechne die Verschiebung der Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie.
Hinweis: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cosh(x) \cos^2(x) \mathrm{d}x = \frac{4}{5} \sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)$

c)

Welche Zustände liefern einen Beitrag zur Korrektur der Grundzustandswellenfunktion?
Hinweis: Betrachten Sie die Parität.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Ein positiv geladenes Wasserstoffatom kann durch folgendes Potential modelliert werden:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 b}{m}\big(\delta(x+L) + \delta(x-L)\big)$$

mit $b > 0$. Die Energie des Teilchens ist $E = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} < 0$. Als Ansatz zur Lösung wird gewählt:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \exp(-k|x|) & \text{für } |x| > L \\ A\cosh(kx) & \text{für } |x| < L, \text{gerade Parität} \\ B\sinh(kx) & \text{für } |x| < L, \text{ungerade Parität} \end{cases}$$

a)

Begründe welche Parität der Grundzustand hat.

b)

Berechne die Konstante A über die Stetigkeit bei $|x| = L$. Die Normierung der Wellenfunktion wird nicht beachtet.

c)

Stelle die transzendente Gleichung für k bei gerader Parität auf. Nutze dabei die Eigenschaft der Ableitung von Wellenfunktionen bei Delta Potentialen für $|x| = L$.

d)

Gibt es gebundene Zustände für die Wellenfunktionen gerader Parität? Nutze die Gleichung aus c).

Hinweis: $\tanh(x) \approx x$ für kleine x und $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$.