....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Semestrale
Lineare Algebra 1
Prof. Dr. F. Roesler

19. Februar 2007, 10:15 – 11:45 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: keine

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Aufgabe 1 Lineare Abbildung [ca. 8 Punkte]
Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(i) Geben Sie $\ker f$ an.

(ii) Geben Sie $\operatorname{rg} f$ und eine Basis von $\operatorname{im} f$ an.

(iii) Untersuchen und *begründen* Sie, ob die Abbildung injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

Lösung

(i) $\ker f$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems kann natürlich jedes beliebige Verfahren benutzt werden. Beispielsweise kann man 'per Hand' lösen, da zwei der Gleichungen sehr leicht umformbar sind: wir erhalten also drei Gleichungen mit vier Unbekannten:

$$-x_1 + 4x_3 = 0 \qquad \text{(i)}$$
$$-3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{(ii)}$$
$$-4x_1 + x_2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Aus Gleichung (i) folgt $x_1 = 4x_3$; Gleichung (iii) impliziert $x_2 = 4x_1 = 16x_3$. Gleichung (ii) vereinfacht sich dann zu

$$-3 \cdot (4x_3) + 16x_3 - 4x_3 + x_4 = 0 \implies x_4 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Der Kern dieser Abbildung ist also

$$\ker f = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) Da $\dim \mathbb{R}^4 = 4 = \dim \operatorname{im} f + \dim \ker f = \operatorname{rg} f + 1$ hat f vollen Rang, $\operatorname{rg} f = 3$. Andererseits ist $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ und somit $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$. Entweder können wir also drei der vier Spaltenvektoren als

Basis für $\operatorname{im} f$ wählen oder benutzen die kanonischen Basisvektoren für $\mathbb{R}^3$.

$$\operatorname{im} f = \mathbb{R}^4 = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) Da $\operatorname{im} f = \mathbb{R}^3$ und $\ker f \neq \{0\}$ ist f surjektiv, aber nicht injektiv. Somit ist f auch nicht bijektiv.

Aufgabe 2 [ca. 6 Punkte]

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Beweisen Sie: zu $v_0, v_1 \in V$ mit $v_0 \neq v_1$ existiert eine Gerade in V (d.h. eine Nebenklasse $p+U$ mit $p \in V$ und einem eindimensionalen Unterraum $U \leq V$), die v_0 und v_1 enthält.

(ii) Zeigen Sie, dass die Gerade in (i) *eindeutig* bestimmt ist.

Lösung

(i) Durch $G := p + U$ mit $p := v_0$ und $U := \mathbb{K}(v_1 - v_0)$ wird das Gewünschte geleistet. Denn:

(1) Nach Voraussetzung ist $v_1 - v_0 \neq 0$, also $\mathbb{K}(v_1 - v_0)$ tatsächlich ein eindimensionaler Unterraum und damit G eine Gerade in V;

(2) Es ist $v_0 = 1 \cdot v_0 + 0 \cdot (v_1 - v_0) \in G$ und $v_1 = 1 \cdot v_0 + 1 \cdot (v_1 - v_0) \in G$.

(ii) Sei auch $G' := p' + U'$ eine Gerade in V, die v_0 und v_1 enthält. Zu zeigen ist $G' = G$.

Wegen $v_0, v_1 \in G'$ gibt es $u_0', u_1' \in U'$ mit

$$\begin{aligned} v_0 &= p' + u_0', \\ v_1 &= p' + u_1'. \end{aligned}$$

Es folgt $v_1 - v_0 = u_1' - u_0' \in U'$. Da U' eindimensional ist, muss $U' = \mathbb{K}(v_1 - v_0) = U$ sein.

Weiter folgt:

$$G' \;=\; p' + U' \;=\; (v_0 - u_0') + U' \;\overset{(*)}{=}\; v_0 + U' \;=\; v_0 + U \;=\; G\,.$$

Der Schritt $(*)$ beruht dabei auf der Nebenklassenaddition.

(Ausführlich: $(v_0 - u_0') + U' = (v_0 + U') + \underbrace{(-u_0' + U')}_{=U'} = (v_0 + U') + U' = v_0 + U'$.)

Aufgabe 3 Basisdarstellung [ca. 8 Punkte]
Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum, der durch die Funktionen

$$\begin{aligned} f_1 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_1(x) = 1 \\ f_2 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_2(x) = x \\ f_3 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_3(x) = \sin x \\ f_4 &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto f_4(x) = \cos x \end{aligned}$$

aufgespannt wird. Der formelle Ableitungsoperator ist die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_1) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_2) = f_1,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_3) = f_4,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_4) = -f_3$$

definiert ist. Weiterhin definieren wir die Abbildung $H : V \longrightarrow V$ durch

$$f \mapsto \left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 f + f = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)\right) + f$$

(i) Zeigen Sie, dass $b := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ eine Basis von V ist.

(ii) Geben Sie die darstellende Matrix $\left[\frac{H(b)}{b}\right] = M_b^b(H)$ von H bezüglich b an.

(iii) Geben Sie $\ker H$ an.

Lösung

(i) Eine Basis ist ein Erzeugendensystem aus linear unabhängigen Vektoren, das heißt es bleibt zu zeigen, dass $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ linear unabhängig sind. Wir müssen überprüfen, ob aus

$$\sum_{j=1}^{4} \alpha_j f_j = 0$$

immer $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, 3, 4$ folgt.

Das ist aber hier der Fall, denn der Nullvektor ist die Nullfunktion und die Gleichung muss auch *punktweise* erfüllt sein. Setzt man $x = -\pi, 0, \pi/2, \pi$ ein, so erhält man ein lineares Gleichungssystem, dass nur die triviale Lösung hat und die Vektoren sind linear unabhängig.

(ii) Es ist klar, dass $H(f_1) = f_1$ und $H(f_2) = f_2$. $H(f_3)$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned} H(f_3) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 (f_3) + f_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_4) + f_3 = -f_3 + f_3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Analog dazu erhalten wir auch $H(f_4) = 0$. Daher ist die Matrix zu H in der Basis $b := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ gegeben durch

$$\left[\frac{H(b)}{b}\right] = M_b^b(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Aus der Matrixdarstellung von H folgt sofort, dass $\ker H = {\phi_b}^{-1}\left(\ker M_b^b(H)\right) = \langle {\phi_b}^{-1}(e_3), {\phi_b}^{-1}(e_4)\rangle = \langle f_3, f_4\rangle$ ist.

Andererseits können wir das auch explizit lösen.

$$
\begin{aligned}
H(f) &\overset{!}{=} 0 \\
H\left(\textstyle\sum_{j=1}^4 \alpha_j f_j\right) &= \sum_{j=1}^{4} \alpha_j H(f_j) = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 \cdot 0 + \alpha_4 \cdot 0 = 0
\end{aligned}
$$

Da die Basisvektoren f_j linear unabhängig sind, müssen $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 = 0$ sein und f_3 und f_4 spannen $\ker H$ auf.

Aufgabe 4 Lineares Gleichungssystem auf endlichen Körpern mit Parameter [ca. 4 Punkte]
Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in $\mathbb{F}_5 := \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\overline{16} \cdot x_1 + \bar{2} \cdot x_2 = \overline{99}$$
$$\overline{14} \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 = \overline{-1}$$

Geben Sie die Lösungsmengen für alle Werte von $\mu \in \mathbb{F}_5$ an. Untersuchen Sie, für welche Werte von μ das Gleichungssystem keine Lösung hat.

Lösung Wir fangen an indem wir die Multiplikationstabelle für $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ aufschreiben.

	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Wir schreiben zuerst das Gleichungssystem um, indem wir die einfachstmöglichen Repräsentanten (also $\bar{0}$ bis $\bar{4}$) wählen.

$$\bar{1} \cdot x_1 + \bar{2} \cdot x_2 = \bar{4} \tag{i}$$
$$\bar{4} \cdot x_1 + \mu \cdot x_2 = \bar{4} \tag{ii}$$

Aus (i) erhalten wir $x_1 = \bar{4} - \bar{2} \cdot x_2 = \bar{4} + \bar{3} \cdot x_2$. Eingesetzt in (ii) liefert das

$$\bar{4} \cdot (\bar{4} + \bar{3} \cdot x_2) + \mu \cdot x_2 = \bar{4}$$

Hieraus folgt

$$\bar{1} + \bar{2} \cdot x_2 + \mu \cdot x_2 = \bar{4} \implies (\mu + \bar{2}) \cdot x_2 = \bar{3}$$

und somit letztendlich

$$x_2 = \bar{3} \cdot (\mu + \bar{2})^{-1}$$
$$x_1 = \bar{4} + \bar{3} \cdot \bar{3} \cdot (\mu + \bar{2})^{-1} = \bar{4} + \bar{4} \cdot (\mu + \bar{2})^{-1}$$

falls das Inverse existiert. Die Lösungsmenge ist daher für $\mu \neq \bar{3}$ gegeben durch

$$\{(\bar{4} + \bar{4} \cdot (\mu + \bar{2})^{-1}, \bar{3} \cdot (\mu + \bar{2})^{-1})\}$$

Für $\mu = \bar{3}$ ist $\mu + \bar{2}$ nicht invertierbar und das Gleichungssystem hat keine Lösung.
Da der Körper endlich ist, können wir alle Lösungen explizit angeben.

Parameter	*Lösungsmenge*
$\mu = \bar{0}$	$\{(x_1, x_2)\} = \{(\bar{1}, \bar{4})\}$
$\mu = \bar{1}$	$\{(x_1, x_2)\} = \{(\bar{2}, \bar{1})\}$
$\mu = \bar{2}$	$\{(x_1, x_2)\} = \{(\bar{0}, \bar{2})\}$
$\mu = \bar{3}$	$\emptyset$
$\mu = \bar{4}$	$\{(x_1, x_2)\} = \{(\bar{3}, \bar{3})\}$

Aufgabe 5 Rang einer linearen Abbildung [ca. 4 Punkte]
Sei $f : V \longrightarrow W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung zwischen zwei $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit $\operatorname{rg} f = n$.

(i) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}} W \geq n$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{K}} V \geq n$ gilt.

Lösung

(i) Da $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f$ und $\operatorname{im} f \subseteq W$ ein Unterraum von W ist, so folgt $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f = n \leq \dim_{\mathbb{K}} W$. Es müssen also mindestens n linear unabhängige Vektoren in W existieren.

(ii) Mit der Dimensionsformel gilt

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{K}} V &= \dim_{\mathbb{K}} \ker f + \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f = \dim_{\mathbb{K}} \ker f + \operatorname{rg} f \\ &= \dim_{\mathbb{K}} \ker f + n \geq n\end{aligned}$$

Alternativ kann man das auch 'zu Fuß' beweisen. Da $\operatorname{rg} f = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{im} f = n$, können wir n linear unabhängige Bildvektoren $\{b_1, \ldots, b_n\} = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ finden, die die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_n\}$ haben.

Wir zeigen nun, dass die Urbilder $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ebenfalls linear unabhängig sein müssen. Sei also $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j$ eine Linearkombination der Urbildvektoren. Wir zeigen nun, dass aus $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0$ immer $\alpha_j = 0$ folgt, $j = 1, \ldots, n$.

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j = 0 \in V \implies f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = f(0) = 0 \in W$$

Da f linear ist, können wir die Summe aus der Funktion ziehen.

$$f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) = 0$$

Da die Bildvektoren $\{f(v_j)\}_{1 \leq j \leq n}$ linear unabhängig sind, folgt sofort $\alpha_j = 0 \ \forall j = 1, \ldots, n$ und die Urbilder sind ebenfalls linear unabhängig. Da V mindestens n linear unabhängige Vektoren besitzt, muss $\dim_{\mathbb{K}} V \geq n$ gelten.

Aufgabe 6 [ca. 4 Punkte]

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Wie immer bezeichne f^k für $k \in \mathbb{N}$ die k-malige Hintereinanderausführung von f und für $k = 0$ die Identität auf V. Zeigen Sie:

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad f\left(\ker(f^k)\right) \subseteq \ker(f^{k-1}).$$

(Hinweis: Es ist einfacher, diese Aussage *nicht* per Induktion zu beweisen.)

Lösung Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt für alle $v \in V$:

$$\begin{aligned} & v \in f\left(\ker(f^k)\right) \\ \Rightarrow\; & \exists\, w \in \ker(f^k):\ f(w) = v \\ \Rightarrow\; & \exists\, w \in V:\ f^k(w) = 0 \wedge f(w) = v \\ \Rightarrow\; & 0 = f^k(w) = f^{k-1}(f(w)) = f^{k-1}(v) \\ \Rightarrow\; & v \in \ker(f^{k-1}). \end{aligned}$$

Also ist $f\left(\ker(f^k)\right) \subseteq \ker(f^{k-1})$.
Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ zutrifft, ist die Aussage damit bewiesen.

Aufgabe 7 [6 Punkte]

Kreuzen Sie an, ob die nachfolgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründungen sind nicht verlangt. (Für jedes richtige Kreuz gibt es 1 Punkt, **für jedes falsche Kreuz 1 Punkt Abzug.** Wenn Sie bei einer Aussage nichts ankreuzen, gibt es dafür 0 Punkte. Bei mehr falschen als richtigen Antworten wird die Aufgabe insgesamt mit 0 Punkten bewertet.)

Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(-3,1,4) = (1,2)$ und $f(2,2,0) = (0,1)$.	☐ wahr ☐ falsch
Sind R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf einer Menge M, so wird auch durch $xRy \ :\Leftrightarrow\ xR_1y \vee xR_2y \qquad (x,y \in M)$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.	☐ wahr ☐ falsch
Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat über allen Körpern denselben Rang.	☐ wahr ☐ falsch
Im Vektorraum der 2×2-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ ist $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) : \ a+b-c=0 \right\}$ ein Untervektorraum.	☐ wahr ☐ falsch
Ist U ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gilt für alle $v,w \in V$: $v \in U \wedge w \notin U \ \Rightarrow\ v+w \notin U\,.$	☐ wahr ☐ falsch
Für Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ zwischen Mengen gilt: $\psi \circ \varphi$ bijektiv $\ \Rightarrow\ \psi$ injektiv $\wedge\ \varphi$ surjektiv	☐ wahr ☐ falsch

Lösung

Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(-3,1,4) = (1,2)$ und $f(2,2,0) = (0,1)$.	☐ wahr ☒ falsch

Begründung (nicht gefordert): Eine lineare Abbildung ist durch die Bilder einer Basis des Urbildraums eindeutig bestimmt. Ergänzt man $(-3,1,4)$ und $(2,2,0)$ durch einen Vektor u zu einer Basis des $\mathbb{R}^3$, so werden durch je zwei verschiedene Bilder $f(u)$ zwei verschiedene lineare Abbildungen mit der obigen Eigenschaft festgelegt. (Es gibt also unendlich viele davon.)

Sind R_1 und R_2 Äquivalenzrelationen auf einer Menge M, so wird auch durch $$xRy \;:\Leftrightarrow\; xR_1y \vee xR_2y \qquad (x,y \in M)$$ eine Äquivalenzrelation auf M definiert.	☐ wahr ☒ falsch

Begründung (nicht gefordert): R ist im Allgemeinen nicht transitiv. Gegenbeispiel: sei $M = \{a,b,c\}$ mit den R_1-Äquivalenzklassen $\{\{a,b\},\{c\}\}$ und den R_2-Äquivalenzklassen $\{\{a\},\{b,c\}\}$. Dann ist aRb (weil aR_1b) und bRc (weil bR_2c), aber $a\not Rc$ (da weder aR_1c noch aR_2c).

Die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat über allen Körpern denselben Rang.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): Über jedem Körper liefert z.B. Addieren der dritten Zeile zur ersten die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

und hier kann man an den Spalten den Rang 3 ablesen. (In jedem Körper sind 1 und -1 ungleich 0.) Alternativ kann man die Determinante berechnen, die ist nämlich -1. Da in jedem Körper -1 invertierbar ist, muss auch die Matrix invertierbar sein und deren Rang ist 3.

Im Vektorraum der 2×2-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$ ist $$\left\{ \begin{pmatrix} a\,b \\ c\,d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) :\; a+b-c=0 \right\}$$ ein Untervektorraum.	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): Die Menge enthält die Nullmatrix (ist also insbesondere nicht leer) und ist abgeschlossen gegenüber Addition von Negativen und Multiplikation mit Skalaren.

Ist U ein Untervektorraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, so gilt für alle $v,w \in V$: $$v \in U \wedge w \notin U \;\Rightarrow\; v+w \notin U\,.$$	☒ wahr ☐ falsch

Begründung (nicht gefordert): Angenommen, die Aussage wäre falsch. Dann gäbe es $v \in U$, $w \in V \setminus U$ mit $v+w \in U$. Nach den Unterraumeigenschaften folgte $w = (v+w) - v \in U$, Widerspruch!

Für Menge X,Y,Z und Abbildungen $\varphi : X \to Y$ und $\psi : Y \to Z$ gilt: $$\psi \circ \varphi \text{ bijektiv } \Rightarrow \psi \text{ injektiv} \wedge \varphi \text{ surjektiv}$$	☐ wahr ☒ falsch

Begründung (nicht gefordert): Als Gegenbeispiel nehme man etwa $X, Z := \{1\}$ und $Y := \mathbb{N}$ und für φ und ψ jeweils die passende konstante Abbildung auf 1. Dann ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\{1\}}$ bijektiv, aber weder ψ injektiv noch φ surjektiv.