**Aufgabe 1** (ca. 6 Punkte): Es seien die beiden Untervektorräume

$$\begin{aligned} U &:= \langle (1,2,1),(-1,-1,3) \rangle \quad \text{und} \\ W &:= \langle (2,5,9),(1,1,0) \rangle \end{aligned}$$

des $\mathbb{R}$–Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Dimensionen von $U \cap W$ und $U + W$.

b) Bestimmen Sie einen zu $U$ komplementären Untervektorraum $U' \subseteq \mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 2** (ca. 4 Punkte): Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

Für jedes $a \in G$ ist

$$\iota_a : \begin{cases} G & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & a^{-1} \cdot x \cdot a \end{cases}$$

ein Automorphismus von $G$.

**Aufgabe 3** (ca. 8 Punkte): Es sei $V$ ein $K$-Vektorraum. Weiter sei $\varphi \in \hat{V} \setminus \{\hat{0}\}$ (d.h. $\varphi$ ist eine lineare Abbildung von $V$ nach $K$, aber nicht die Nullabbildung $\hat{0} : V \rightarrow K, \vec{v} \mapsto 0$).

Zeigen Sie:

3 a) Es gibt ein $\vec{a} \in V$ mit $\varphi(\langle \vec{a} \rangle) = K$.

Es sei nun $\vec{a} \in V$ mit $\varphi(\langle \vec{a} \rangle) = K$ gewählt.

3 b) Es gilt $Ker(\varphi) \cap \langle \vec{a} \rangle = \{\vec{0}\}$.

2 c) Es gilt $V = Ker(\varphi) + \langle \vec{a} \rangle$.

**Aufgabe 4** (ca. 6,5 Punkte): Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen von „Ja" oder „Nein". Begründungen brauchen Sie nicht anzugeben. Falsche Antworten führen zu Minuspunkten.

| | | |
|---|---|---|
| | Die Gruppen $S_3$ und $\mathbb{Z}_6$ sind isomorph. | ☐ Ja ☒ Nein |
| 1) | Für die Einheitengruppe $(\mathbb{Z}_6^*, \cdot)$ des primen Restklassenringes $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ gilt $\lvert\mathbb{Z}_6^*\rvert = 3$. | ☒ Ja ☐ Nein |
| | Das Vektorprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w}$ ist kommutativ. | ☐ Ja ☒ Nein |
| 2) | Die Gruppe $S_4$ enthält einen Normalteiler $N$ mit $\lvert S_4/N\rvert = 2$. | ☒ Ja ☐ Nein |
| 3) | Die Gruppe $S_3$ enthält eine zur Kleinschen Vierergruppe isomorphe Untergruppe. | ☐ Ja ☒ Nein |
| | Es gilt: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5, & 4, & 2 \end{pmatrix} \in A_5$. | ☒ Ja ☐ Nein |
| | Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Sind $a, b \in K$ und $a \cdot b = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$. | ☒ Ja ☐ Nein |

1) $\cancel{\bar{0}}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \cancel{\bar{5}}$

2) Satz von Lagrange: $\underset{24}{|S_4|} = \underset{12}{|N|} \cdot \underset{2}{|S_4/N|}$

3) $\underset{6}{|S_3|} = \underset{4}{|U_{S_3}|} \cdot |S_3/U| \Rightarrow ↯$

**Aufgabe 5** (ca. 8,5 Punkte): Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen von „Ja" oder „Nein". Begründungen brauchen Sie nicht anzugeben. Falsche Antworten führen zu Minuspunkten.

| | | |
|---|---|---|
| Für die zwei Geraden $A_1 = (1,2) + \mathbb{R}(4,5)$ und $A_2 = (2,2) + \mathbb{R}(-2,5)$ im $\mathbb{R}^2$ gilt $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| Jede Gerade $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$. | ☐ Ja | ☒ Nein |
| Es ist $M := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a,b,c,d \in \mathbb{R}, a+b+c+d = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^{2\times 2}$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| 1 Es ist $\{\exp : x \mapsto e^x,\ \sin : x \mapsto \sin(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear unabhängig. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| 2) Die beiden $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4/U$ für $U = \langle(1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle$ sind isomorph. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist $U := \{\vec{x} = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| 3) Jeder Untervektorraum eines $K$-Vektorraumes $V$ hat ein Komplement in $V$. | ☒ Ja | ☐ Nein |

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ seien nun die Vektoren $\vec{a} = (1,0,\sqrt{2})$, $\vec{b} = (0,1,\sqrt{3})$, $\vec{c} = (0,0,\sqrt{5})$ gegeben. Es gilt:

| | | |
|---|---|---|
| Es ist $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ linear unabhängig. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| Es ist $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| Es ist $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| Der Vektor $(\pi, 1, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3$ ist eine Linearkombination von $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$. | ☒ Ja | ☐ Nein |

1) $a \cdot e^x + b \sin x = 0$, sei $x = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 0$

2) Dim $\mathbb{R}^2$ = Dim $\mathbb{R}^4$ − Dim $U$

3) $V = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow$ Bew.

**Aufgabe 6** (ca. 7 Punkte): Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen von „Ja" oder „Nein". Begründungen brauchen Sie nicht anzugeben. Falsche Antworten führen zu Minuspunkten.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | Der Kern der linearen Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x+y) \end{cases}$ hat die Dimension 1. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| | Sind $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Menge eines $K$-Vektorraumes $V$ und $\varphi$ ein injektiver Endomorphismus von $V$, so ist auch $\{\varphi(\vec{a}); \vec{a} \in A\}$ linear unabhängig. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| 1/ | Es gibt eine lineare Abbildung $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\psi((1,3)) = (2,1)$, $\psi((2,0)) = (1,1)$, $\psi((5,3)) = (4,3)$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| | Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\varphi: \begin{cases} \mathbb{Q}^2 & \rightarrow & \mathbb{Q}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (y, 3x+2y) \end{cases}$ bzgl. der kanonischen Basis von $\mathbb{Q}^2$. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| 2) | Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$ ist eine Linearform. | ☐ Ja | ☒ Nein |
| 3) | Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - y$ ist eine Linearform. | ☒ Ja | ☐ Nein |
| | Es seien $(M, \mathfrak{D})$ ein Austauschsystem, $N \subseteq M$ und $\mathfrak{E} := \{T \cap N; T \in \mathfrak{D}\}$. Dann ist auch $(N, \mathfrak{E})$ ein Austauschsystem. | ☐ Ja | ☐ Nein |

1/ $1a + 3b = 2 \quad 2a = 1 \quad 5a + 3b = 4$
$1c + 3d = 1 \quad 2c = 1 \quad 5c + 3d = 3$

2) $\varphi(\lambda x) = |\lambda x| \neq \lambda |x|$

3) $\varphi(\lambda \vec{p} + \mu \vec{q}) = (\lambda p_x + \mu q_x) - (\lambda p_y + \mu p_y) = \lambda (p_x - p_y) +$
$+ \mu (q_x - q_y) = \lambda \varphi(\vec{p}) + \mu \varphi(\vec{q})$

Aufgabe 1

U+W

$$\cancel{\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 9 \end{matrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -Z4 \\ +Z4 \\ +2\cdot Z2 \\ \phantom{0} \end{matrix} \rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \phantom{0} \\ \cdot \frac{1}{3} \\ -Z2^* \\ -15\cdot Z1^*)\cdot\frac{1}{3} \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -Z3 \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ -Z3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(U+W) = 3$$

$$\dim(U+W) + \dim(U\cap W) = \dim(U) + \dim(W)$$

$$\dim(U\cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

6/6

b) $U' = \langle (1,0,0) \rangle$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Da $f$ injektiv und surjektiv ist, ist $f$ bijektiv.
Weiter ist $f$ ein Homomorphismus. Aus diesen Eigenschaften ~~folgt das $f$ ein A~~ und der Tatsache, das $f: G \to G$ ist folgt, dass $f$ ein Automorphismus ist.

# Aufgabe 2

Automorph. = bij. Endomorph

$z_a =: f$

~~Endomorph ist~~

z.z. $f(b \cdot c) = f(b) \cdot f(c)$ ; $b, c \in G$

$f(b \cdot c) = a^{-1} \cdot (b \cdot c) \cdot a = a^{-1} \cdot b \cdot a \cdot a^{-1} \cdot c \cdot a = f(b) \cdot f(c)$

$\Rightarrow$ Homomorphismus, da $f: G \to G$ ist $f$ Endomorphismus

z.z. $f$ injektiv ($\Leftrightarrow \forall b, c \in G : f(b) = f(c) \Rightarrow b = c$)

$b, c \in G$

Sei $f(b) = f(c) \Rightarrow a^{-1} \cdot b \cdot a = a^{-1} \cdot c \cdot a \quad / a \cdot$

$b \cdot a = c \cdot a \quad / \cdot a^{-1}$

$b = c$

$\Rightarrow f$ injektiv

z.z. $f$ surjektiv ($\Leftrightarrow \forall b \in G \ \exists c \in G : f(c) = b$)

$a, b, c \in G$

~~Annahme: Es existiert kein $f(c)$ so dass gilt $f(c) = b$~~

~~$f(c) = a^{-1} c a$~~

$f(c) = b$

$\Rightarrow a^{-1} \cdot c \cdot a = b \quad / a \cdot$

$c \cdot a = a \cdot b \quad / \cdot a^{-1}$ 2/4

$c = \underbrace{a \cdot \underbrace{b \cdot a^{-1}}_{\in G}}_{\in G} \Rightarrow \forall b \in G \ \exists c \in G : f(c) = b$

$\Rightarrow f$ surjektiv

## Aufgabe 3

$f: \begin{cases} V \to K \\ \end{cases}$ linear

a) Da $f$ nicht die Nullabb. existiert mindestens ein $v \in V$ : $f(v) \neq 0$

Da $K$ von einem beliebigen Element $\neq 0$ erzeugt wird

folgt das $f(\langle v \rangle) = K$ $\quad v := \vec{a}$ $\quad$ 2/3

z.B. $\vec{a}$ so, dass $\varphi(\vec{a}) = 1$ $\longrightarrow$ für beliebiges $t \in K$ gilt dann

~~gilt~~ $\varphi(t \cdot \vec{a}) = t \cdot \varphi(\vec{a}) = t$

$\Rightarrow \varphi(\langle \vec{a} \rangle) = \{ \underbrace{\varphi(t\vec{a})}_{=t} \mid t \in K \}$

$= K$ ■

b) $\operatorname{Kern} f := \{ \vec{b} \mid f(\vec{b}) = 0 \}$

~~da~~ $\quad$ ~~$f(\langle \vec{a} \rangle) \neq 0$ (siehe a))~~

$f(\langle \vec{a} \rangle) = K$ $\quad$ 0

~~$\operatorname{Kern} f \cap \langle \vec{a} \rangle =$~~

(c) 0

(d)

~ 75 min

# Aufgabe 4

1) $S_3 \cong \mathbb{Z}_6$ Isomorph (= es existiert ein bij. Homomorph.)

$|S_3| = 3! = 6$ $\varphi : \{ S_3 \to \mathbb{Z}_6$

$|\mathbb{Z}_6| = 6$

$\cancel{S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right.}$

$S_3 = \{ id, (12), (13), (23), (231), (321) \}$

$\mathbb{Z}_6 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5} \}$

$id \mapsto \bar{0}$

$(12) \mapsto \bar{1}$

$\big(id \circ (12)\big)(x) = id(\bar{1}) = \bar{1}$

$id(x) \cdot (12)(x) = \bar{0} \cdot \bar{1} = \bar{0}$

? $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

$\Rightarrow$ **Nein**

3) Nein ✓

2,4

5) Nein

$S_3 = \{ id, (12), (23), (13), (213), (312) \}$ $|S_3| = 6$

kleinsche Vierergruppe $= \{e, a, b, c\}$ Mächtigkeit 4

6) Ja

~~Fehlstände~~

Anzahl der Elemente ist: 5 ✓

Fehlstände sind: 3

$A_5 :=$ Untergruppe der $S_5$ mit ungeraden Fehlständen

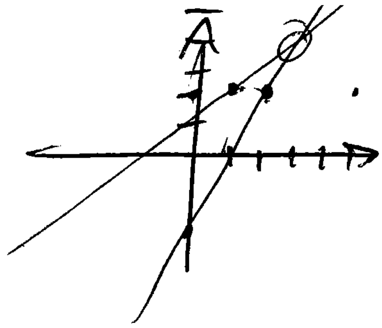
7) Ja ✓

2) Was ist Einheitengruppe?

4) Lagrange?

2/6,5

# Aufgabe 5



1) Ja ✓ 1/1

$A_1 = A_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{L} \neq \emptyset$$

2) Nein 1/1

Nur Geraden ~~mit~~ die durch Null gehen

3) Ja ✓ 1/1

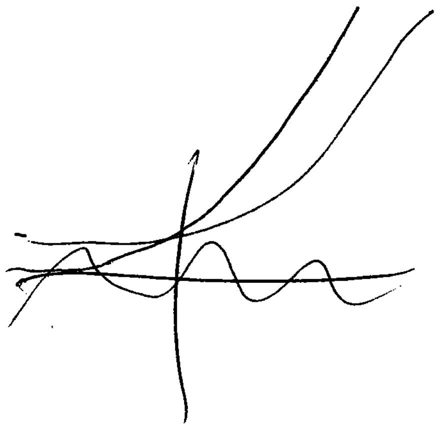
$0 \in$

$U \neq \emptyset$ ✓

$v + w \in U$ ✓

$a \cdot w \in U$ ✓

4) Ja ✓ 1/1



$\lambda e^x + \mu \cdot \sin(x) = 0$ $\qquad x = 0 \Rightarrow \lambda + 0 = 0$

$\lambda = 0$

$\Rightarrow \mu \cdot \sin(x) = 0$ $\qquad$ sinus nicht Nullfkt $\Rightarrow$ $\mu = 0$ muss gelten

6) Ja 1/1

$\sigma \in U$

$u + \sigma$

$v + w \in U$

$a \cdot v \in U$

7) Nein

gilt nur für endlich erzeugte VR

8) Ja

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

9) Ja

10) Ja

11) Ja

1,5

$$(\pi, 1, \sqrt{7}) = \pi \vec{a} + \vec{b} +$$

$$\pi\sqrt{2} + \sqrt{3} + t \cdot \sqrt{5} = \sqrt{7}$$

$$t = \frac{\sqrt{7} - \pi\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

8,5/8,5)

$$\sum = 22,5 > 17$$

# Aufgabe 6

1) Ja ✓ 1/1

$f \Leftrightarrow A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \dim(\ker(f)) = 1 \to H = \{(-\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \to \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

✓ 1/1

3) Nein

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3b \\ c+3d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2} + 3b = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} + 3d = 1 \Rightarrow d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+3b \\ 5c+3d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$5 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \stackrel{!}{=} 4$ ✓

$\frac{5}{2} + \frac{2}{3} = \frac{15}{6} + \frac{4}{6} = \frac{19}{6} = 3$ ↯

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & -6 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

4) Ja ✓ 1/1

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y\\3x+2y\end{pmatrix}$$

Was folgt für andere Basis?

5) Nein ✓ 1/1

Linearform : $\mathbb{R}^n \to K$

linear

$$f(x+y) = |x+y| \overset{?}{=} |x| + |y|$$

$$|2| + |-3| = 5$$

$$|2-3| = +1$$

6) Ja ✓ 1/1

~~$f(a+b) = b-a$~~

$$f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix} = x_1+y_1-x_2-y_2$$ ✓

2) Ja ✓ 1/1 (wegen injektivität!)

$A = \{b_1, b_2, b_3\}$

$$f:\begin{cases}V \to V\\ x \mapsto \vec{0}\end{cases}$$

Homomorph.

$$f(b_1+b_2) = 0 = 0+0 = f(b_1) + f(b_2)$$

7/7

## Vektorraum $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$

$\vec{0} \in$ abelsche Gruppe $(V,+)$, Körper $(K,+,\cdot)$

$\forall \lambda,\mu \in K, \forall \vec{x},\vec{y} \in V \quad (\lambda+\mu)\cdot\vec{x} = \lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

$\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

$\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x}) = (\lambda\mu)\cdot\vec{x}$

$1\cdot\vec{x} = \vec{x}$

## Unter Vektorraum $\mathcal{U} \leq V$

$\mathcal{U} \neq \emptyset, \ \mathcal{U}+\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}, \ K\cdot\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$

## Durchschnittsabgeschlossenes System $(M, \mathcal{S})$

$M \in \mathcal{S}, \ \forall \mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}: \mathcal{T} \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{T\in\mathcal{T}} T \in \mathcal{S}$

## Hüllenoperator $\overline{\phantom{x}}$

$\overline{\phantom{x}}: \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M); \ X \mapsto \overline{X}$

$\forall Y, X \subseteq M: \quad X \subseteq \overline{X}$

$\overline{X} = \overline{\overline{X}}$

$X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$

Sei $(M,\mathcal{S})$ DAS $\Rightarrow \forall X \subseteq M: \overline{X} := \bigcap_{X\subseteq T\in\mathcal{S}} T \ (\in \mathcal{S})$ ist Hüllenoper.

und $\mathcal{S} = \{\overline{X}; X \subseteq M\}$

## Erzeugendensystem $X \subseteq M$

Sei $(M,\mathcal{S})$ DAS, $X \subseteq M$, $D \in \mathcal{S}$

$X$ erzeugt $D$, wenn $\overline{X} = D$

## Linear unabhängig

Sei $(M,\mathcal{S})$ DAS, $X \subseteq M$

$X$ unabh. wenn $\forall Y \subset X: \overline{Y} \neq \overline{X} \Rightarrow \overline{Y} \subset \overline{X}$

## Dimensionssatz

~~$\dim(V) =$~~ $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

## Darstellungsmatrix

~~${}_B S(\varphi)_E = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$ ${}_B S(\varphi)_E \cdot \vec{e}_1 = x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3$~~

1. $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, $\varphi(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \vec{?}$

$\Rightarrow {}_B S(\varphi)_E = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} =$ Lsg von $\left(\vec{b}_1 \vec{b}_2 \vec{b}_3 \middle| \varphi(\vec{e}_1)\right)$ u. $\left(\vec{b}_1 \dots \middle| \varphi(\vec{e}_2)\right)$

denn $x_1 \cdot \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + x_3 \vec{b}_3 = \varphi(\vec{e}_1)$, $y_1 \cdot \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2 + y_3 \vec{b}_3 = \varphi(\vec{e}_2)$

2. ${}_{E}S(\varphi)_{E} = A$

$E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \qquad B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

$\Rightarrow$ Ab ${}_{B}S(\varphi)_{B} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & \vdots \\ x_3 & y_3 & \vdots \end{pmatrix}$ Lsg von $A\vec{b}_1 = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + x_3\vec{b}_3$, $A\vec{b}_2 = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + \dots$

$\text{Ker}\, A_1 = \{x \mid A \cdot x = 0\}$ = Lsg von $(A \| 0)$

Inverse von $A = A^{-1}$; $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lsg von $\left(A \middle| \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right)$

Sei $\varphi: V \to W$ linear

und $\dim V < \infty$

$\Rightarrow \dim V = \dim(\text{Bild}(\varphi)) + \dim(\text{Ker}(\varphi))$

$V = W_1 \oplus W_2 \Leftrightarrow V = W_1 + W_2 \wedge W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$\Leftrightarrow$

$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2 \wedge V = W_1 + W_2$

Halbgruppe $(G,\circ)$
Assoziativ,

kommutative/abelsche ~~Halb~~gruppe $(G,\circ)$
Assoziativ, Kommutativ

Gruppe $(G,\circ)$
Halbgruppe, $\forall x \exists y,\ y\cdot x = e$

Untergruppe $(U,\circ)$
$U \neq \emptyset,\ U\cdot U \subseteq U,\ U^{-1} \subseteq U$

Ring $(R,+,\cdot)$
$(R,+)$ abelsche Gruppe, $(R,\cdot)$ assoziativ, Distributivges.
- Nullteilerfrei, wenn $\forall a,b$ aus $a\cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ nulltf. $\Leftrightarrow$ m Primzahl

Unterring $(U,+,\cdot)$
~~$(U,+) \leq (R,+)$~~, $a+b \in U$, $-a \in U$, $a\cdot b \in U$ $\forall a,b$

Körper $(K,+,\cdot)$
$(K,+)$ abelsche Gruppe, $(K^*,\cdot)$ abelsche Gruppe, Distributivg.
- nulltfr., komm. Ring, endl. viele Elt., e = Körper

Nebenklasse $G/U$
$a\cdot U$ mit $U \leq G,\ a \in G$
$a \in U \Leftrightarrow U = a\cdot U$

Satz von Lagrange
$|G| = |U| \cdot |G/U|$

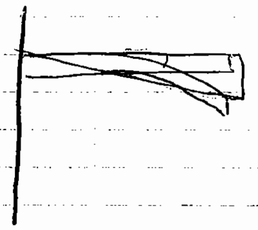
Homomorphiesatz:
$\varphi: \begin{cases} V \to W \\ x \mapsto \varphi(x) \end{cases}$ Hom. $\Rightarrow \exists \bar{\varphi}: \begin{cases} V/\ker\varphi \to e(V) \\ x+\ker\varphi \mapsto \varphi(x) \end{cases}$ Isomo.

4Z. Isomorph.s.
$\pi \begin{cases} U \to G/N \\ x \mapsto xN \end{cases}$ $\quad$ Bild $\pi = UN/N$, $\ker\pi = U \cap N$ $\overset{\text{Hom.Satz}}{\Rightarrow}$ $G/N = UN/N \overset{?}{=} U/U\cap N = U/\{e\} \cong U$

Normalteiler $U \trianglelefteq G$
$\forall a \in G:\ U\cdot a = a\cdot U \Leftrightarrow a^{-1}\cdot U\cdot a \subseteq U$

Faktorgruppe $(G/U,\cdot)$
genau dann, wenn $U \trianglelefteq G$

Kern ~~Kerf~~
$\ker\varphi := \{x,\ \varphi(x) = e\} \trianglelefteq G$
$f: a \mapsto a\cdot\ker\varphi$ Epimorph.
$g: a\cdot\ker\varphi \mapsto \varphi(a)$ Isomorph.
$\varphi = \cancel{f\circ g}\ g\circ f$



## M-Aufgaben

1.1 Jedes hom. LGS hat mind. 1 Lsg.

1.2 Jedes hom. LGS mit 2 Lsg. hat unendl. viele

2.1 Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \circ \vec{v} = \lambda$