Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

WS 02/03

HÖHERE MATHEMATIK 2 FÜR PHYSIK

(Analysis 1)

Studienbegleitende Pruefung A
Mittwoch, 12.02.2003, 10 : 00 – 11 : 30 *Uhr*.
Arbeitszeit : 90 *Minuten*

1. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \arctan x - 4x$.

1. Warum ist f streng monoton fallend?
2. Wie lautet $f(0)$?
3. Man bestimme $D := f(\mathbb{R})$.
4. Warum existiert die Umkehrfunktion $g := f^{-1}$, $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$?
5. Man berechne $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ und $g'''(0)$.

[8 Pkte.]

2. Aufgabe. Man faktorisiere das Polynom $P(X) = X^8 - 16$ über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{R}$. Die im Ergebnis auftretenden komplexen Zahlen sind in der Form $a+ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ zu schreiben.

[8 Pkte.]

3. Aufgabe. Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \frac{\cos 2x^2 - 1}{x^4}$$

für $x \neq 0$ und $g(0) = -2$.

1. Man berechne
$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + 2}{x} .$$
Warum ist die Funktion g in 0 differenzierbar? Wie lautet $g'(0)$?
2. Warum ist g differenzierbar?
3. Warum ist g stetig?
4. Man gebe eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 an, die für reelle Argumente $x \in \mathbb{R}$ die Funktion g darstellt.
5. Welchen Konvergenzradius hat die Potenzreihe aus Nr. 4?
6. Man bestimme die Taylorreihe von g mit Entwicklungspunkt 0, also $T_{g,0}$.
7. Man ermittle die Taylorreihe der Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$G(x) := \int_0^x g(t)\, dt .$$
8. Wie lauten $g^{(n)}(0)$, für $n = 0, 1, 2, 3, ...$.

[16 Pkte.]

4. Aufgabe. Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Treppenfunktion $\varphi_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi_n \left|\right]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\left] = \left(\frac{k}{n}\right)^2\right.$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ und $\varphi_n(0) = 0$ gegeben.

1. Man berechne
$$\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx$$
für $n = 1, 2, 3, \ldots$.

2. Man ermittle
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,dx\ .$$

3. Man zeige für $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$:
$$\left|\varphi_n(x) - x^2\right| \leq \frac{2n+1}{n^2}\ .$$

4. Man zeige, dass die Folge (φ_n) gleichmäßig gegen $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, konvergiert.

5. Man berechne
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$
auf zwei verschiedene Weisen.

[12 Pkte.]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.