Nachklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2015
22. September 2015

Zugelassene Hilfsmittel:

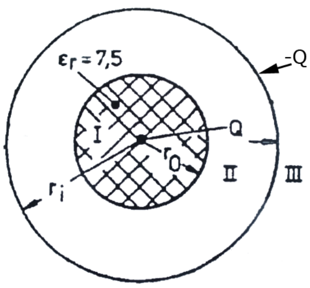
- 1 Beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Im Zentrum einer Glasvollkugel ($\varepsilon_r = 7,5$) vom Radius $r_0 = 1$m befindet sich eine Punktladung $Q = 1$nC. Die Glaskugel ist in einer metallenen Hohlkugel des Radius $r_1 = 2$m,welche mit $-Q$ geladen ist, eingeschlossen. Zwischen der Glaskugel und der Metallhohlkugel befindet sich Luft ($\varepsilon_r = 1$).

Berechnen Sie den Betrag der elektrischen Feldstärke in den Bereichen I, II und III und skizzieren Sie $|\vec{E}|$ in Abhängigkeit von r.



Lösung:

Mithilfe des Satz von Gauß lässt sich allgemein das elektrische Feld $|\vec{E}|$ der Punktladung Q ermitteln:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 4\pi r^2 |\vec{E}| \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1}$$

Für das elektrische Feld im Dielektrikum gilt dann:

$$|\vec{E}_D| = \frac{|\vec{E}|}{\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \tag{2}$$

[**1**]

Das elektrische Feld in den einzelnen Bereichen kann dann wie folgt berechnet werden:

Bereich I ($0 < r \leqslant r_0$):

$$|\vec{E}_{\mathrm{I}}| = \frac{1\mathrm{nC}}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 7,5 \cdot r^2} = \frac{1,198}{r^2}\mathrm{Vm} \tag{3}$$

mit $\varepsilon_r = 7,5$

[**1**]

Bereich II ($r_0 < r \leqslant r_1$):

$$|\vec{E}_{\mathrm{II}}| = 7,5 \cdot |\vec{E}_{\mathrm{I}}| = \frac{8,988}{r^2}\mathrm{Vm} \tag{4}$$

mit $\varepsilon_r = 1$

[**1**]

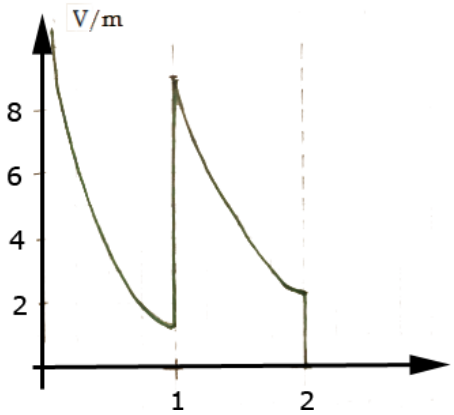
Bereich III ($r > r_1$):

Mithilfe des Satz von Gauß, kann man sich überlegen, dass die eingeschlossene Ladung im Bereich $r > r_1$ insgesamt Null ist. Im Bereich III verschwindet also das E-Feld.

$$|\vec{E}_{\mathrm{III}}| = 0\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \tag{5}$$

Mit den Werten für r_0 und r_1 lassen sich die Werte für das E-Feld an den Grenzflächen berechnen und es ergibt sich der folgende Graph.

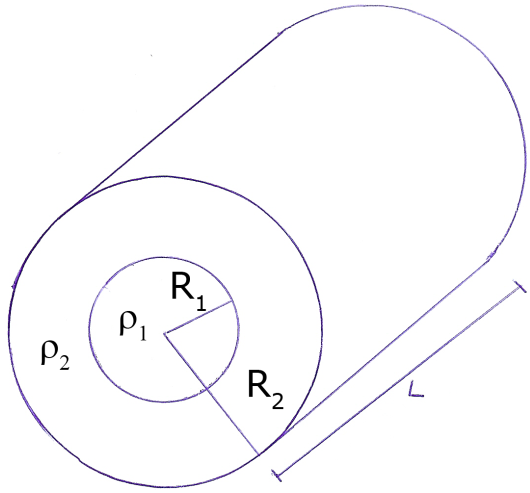
[**1**]



[**1**]

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Das abgebildete Kabel der Länge L besteht aus einem Draht mit Radius R_1 und spezifischem Widerstand ρ_1, der mit einem Material mit spezifischen Widerstand ρ_2 ummantelt ist. Der Außenradius des Kabels sei R_2.



Berechnen Sie den Widerstand des Kabels, wenn an den Kabelenden eine Spannung angelegt wird.

Lösung

Zuerst werden die Teilwiderstände von Draht und Ummantelung separat berechnet. Hierzu verwendet man

$$R = \frac{\rho L}{A},$$

wobei A die Querschnittsfläche des jeweiligen Leiters bezeichnet.
Man erhält damit für den Draht im Inneren

$$R_1 = \frac{\rho_1 L}{R_1^2 \pi}$$

und für die Ummantelung

$$R_2 = \frac{\rho_2 L}{(R_2^2 - R_1^2)\,\pi}.$$

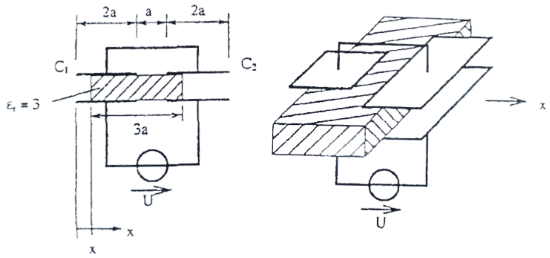
Draht und Ummantelung sind parallel geschaltet, deshalb erhält man schließlich für den Gesamtwiderstand des Kabels:

$$R = \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right]^{-1} = \left[\frac{R_1^2 \pi}{\rho_1 L} + \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right)\pi}{\rho_2 L}\right]^{-1}$$

[**2**]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Die Abbildung zeigt zwei in Reihe geschaltene Kondensatoren C_1 und C_2, sowie eine verschiebbare dielektrische Platte mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 3$. Die minimalen Kapazitäten (kein Dielektrikum, vollständig mit Luft gefüllt) sind $C_{1,\mathrm{min}}$ und $C_{2,\mathrm{min}}$.



(a) Geben Sie die Kapazitäten C_1 und C_2 als Funktion der Lagekoordinate x der dielektrischen Platte ($x =$ Position der linken Kante, mit $0 \leqslant x \leqslant 2a$) im Verhältnis zu $C_{1,\min}$ bzw. $C_{2,\min}$ an.

(b) Berechnen Sie die Kondensatorspannungen U_1 und U_2 in Abhängigkeit von $C_1(x)$ und $C_2(x)$.

(c) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil (b) die gesamte in der Schaltung gespeicherte Energie W in Abhängigkeit von $C_1(x)$ und $C_2(x)$.

Lösung:

(a) Durch die Verschiebung der dielektrischen Platte lässt sich jede der Kapazitäten C_1 und C_2 als Parallelschaltung eines mit Luft und eines mit Dielektrikum gefüllten Kondensators betrachten:

$$C_1(x) = \frac{2a-x}{2a}\varepsilon_r C_{1,\min} + \frac{x}{2a}C_{1,\min} = \frac{6a-3x+x}{2a}C_{1,\min} = \frac{3a-x}{a}C_{1,\min} \tag{6}$$

$$C_2(x) = \frac{x}{2a}\varepsilon_r C_{2,\min} + \frac{2a-x}{2a}C_{2,\min} = \frac{3x+2a-x}{2a}C_{2,\min} = \frac{x+a}{a}C_{2,\min} \tag{7}$$

[**2**]

(b) In einer Reihenschaltung tragen die beiden Kondensatoren C_1 und C_2 die gleiche Ladung Q. Mit $U = U_1 + U_2$ und $C = \frac{Q}{U}$ folgt dann:

$$Q = C_1 U_1 = C_2 U_2 \tag{8}$$

$$U_2 = U - U_1 \tag{9}$$

Damit folgt für die Spannungen $U_1(x)$ und $U_2(x)$:

$$U_1(x) = \frac{C_2(x)}{C_1(x) + C_2(x)}U \tag{10}$$

$$U_2(x) = U - U_1(x) = \frac{C_1(x)}{C_1(x) + C_2(x)}U \tag{11}$$

[**2**]

(c)

$$W = \frac{1}{2}C_1(x)U_1(x)^2 + \frac{1}{2}C_2(x)U_2(x)^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1(x)C_2(x)^2 + C_2(x)C_1(x)^2}{(C_1(x)+C_2(x))^2}U^2 \tag{12}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{(C_1(x)+C_2(x))C_1(x)C_2(x)}{(C_1(x)+C_2(x))^2}U^2 = \frac{1}{2}\frac{C_1(x)C_2(x)}{C_1(x)+C_2(x)}U^2$$

[**1**]

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Das Elektron ($m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$kg) im Wasserstoffatom bewegt sich klassisch gesehen in einem Abstand $r = 0,529 \cdot 10^{-10}$ um den einfach positiv geladenen Kern.

(a) Welches Magnetfeld resultiert am Ort des Kerns aus der klassischen Kreisbewegung? **Hinweis:** Berechnen Sie hierzu zunächst die Stromstärke, die zu der Kreisbewegung korrespondiert.

(b) Berechnen Sie das durch die Kreisbewegung des Elektrons hervorgerufene magnetische Moment μ.

Lösung:

(a) Für die Stromstärke gilt auf einer Kreisbahn:

$$I = \frac{Q}{T} = \frac{e\omega}{2\pi} \tag{13}$$

Die Umlaufkreisfrequenz ω erhält man durch Gleichsetzen der Coulombkraft des Kerns mit der Zentripetalkraft des Elektrons:

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e\omega^2 r \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r^3}} \tag{14}$$

Mit dem Ampere'schen Gesetz lässt sich nun das Magnetfeld B berechnen:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \approx 12,5\text{T} \tag{15}$$

[**2**]

(b)

$$\mu = I\cdot A = I\cdot\pi r^2 = 9,27\cdot 10^{-24}\text{Am}^2 \tag{16}$$

[**1**]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ein Strahl ionisierter Borisotope ^{10}B ($m_{10} = 1,66 \cdot 10^{-26}$kg) und ^{11}B ($m_{11} = 1,83 \cdot 10^{-26}$kg) durchläuft die Beschleunigungsspannung $U = 100$kV. Danach gelangen die (einfach positiv geladenen) Ionen in ein zu ihrer Geschwindigkeit senkrecht gerichtetes Magnetfeld mit $B = 1,5$T, werden darin um 180° abgelenkt und treffen senkrecht auf die Fotoplatte.

(a) Skizzieren Sie den Aufbau dieses Massenspektrometers mit Flugbahn der Ionen und berechnen Sie die Geschwindigkeiten, mit denen die Ionen auf die Fotoplatte treffen.

(b) Wie groß ist der Abstand der Auftreffpunkte von ^{10}B und ^{11}B auf der Fotoplatte?

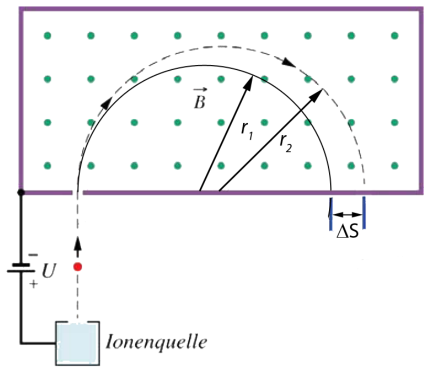
Lösung:

(a) Da die magnetische Kraft nur senkrecht zur Bewegungsrichtung wirkt, ist die Geschwindigkeit der Ionen an der Fotoplatte mit der Geschwindigkeit durch die Beschleunigungsspannung gleich.

$$\frac{1}{2}mv^2 = Uq \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Uq}{m}} \tag{17}$$

Für die Geschwindigkeiten erhält man also $v_{10} = 1,39 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $v_{11} = 1,32 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

[1,5]



[1]

(b) Da beide Ionen einen Halbkreis durchlaufen, ist der Abstand der Auftreffpunkte gerade $\Delta s = 2 \cdot (r_{11} - r_{10})$. Die Radien r_{10} und r_{11} erhält man durch Gleichsetzen der Zentripetalkraft mit der Lorentzkraft:

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \tag{18}$$

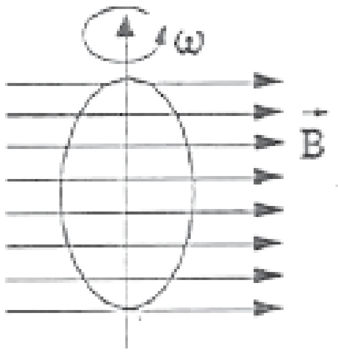
Mit $r_{10} = 9,6$cm und $r_{11} = 10,0$cm folgt dann für den Abstand der Auftreffpunkte

$$\Delta s = 0,8\text{cm} \tag{19}$$

[1,5]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Ein Metallring rotiert mit $\omega = 1000 rad/\text{s}$ um eine vertikale Achse. Der Radius des Ringes ist $a = 20\text{cm}$. Zur Zeit $t = 0$ steht die Flächennormale des Kreises senkrecht zu einem Magnetfeld, welches ab der Zeit $t > 0$ exponentiell abnimmt: $B = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. $\tau = 0,02\text{s}, B_0 = 0.1\text{T}$. Der Widerstand des Ringes ist $R = 0,01\Omega$.



(a) Geben Sie allgemein den magnetischen Fluss durch den Drahtring als Funktion der Zeit an.

(b) Geben Sie allgmein die im Ring induzierte Spannung als Funktion der Zeit an.

(c) Berechnen Sie den induzierten Strom im Ring für $t = 0$.

(d) Berechnen Sie die Zeit t_0, nach der die Spannung zum ersten Mal Null wird.

Lösung

(a)

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi a^2 \sin(\omega t)$$

[1]

(b)

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \pi a^2 \left(\frac{\sin(\omega t)}{-\tau} + \omega \cos(\omega t) \right) = \frac{B_0 \pi a^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\sin(\omega t) - \omega\tau \cos(\omega t) \right)$$

[1]

(c)

$$I_{ind} = \frac{U_{ind}}{R}$$

$$I_{ind}(0) = \frac{U_{ind}(0)}{R} = -\frac{\pi a^2 B_0 \omega}{R} = -1257\text{A}$$

[**1**]

(d)

$$U_{ind} = 0 \Rightarrow \sin(\omega t_0) - \tau\omega\cos(\omega t_0) = 0$$
$$\frac{\sin(\omega t_0)}{\cos(\omega t_0)} = \tau\omega$$
$$\omega t_0 = \arctan(\tau\omega) \Rightarrow t_0 = 1,52 \cdot 10^{-3}\mathrm{s}$$

[**1**]

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Gegeben sei ein Schwingkreis bestehend aus einer Reihenschaltung einer Spule mit Induktivität L und einem Kondensator mit Kapazität C.

(a) Leiten Sie einen Ausdruck für die Eigenfrequenz f des Schwingkreises her. Stellen Sie dazu die Differentialgleichung für die Ladung auf dem Kondensator als Funktion der Zeit auf und lösen Sie diese mit einem passenden Ansatz.

(b) Nun schalten Sie einen Widerstand R dazu. Welche Eigenfrequenz f besitzt der Schwingkreis jetzt? Stellen Sie hierzu wiederum die Differentialgleichung auf und lösen Sie diese mit dem Ansatz $Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(wt)$.

Lösung

(a) Es liegt keine externe Spannung am Schwingkreis an. Die Spannung, die am Kondensator abfällt, ist gegeben als $U_C = \frac{1}{C}Q$, die Spannung an der Spule als $U_L = L\dot{I} = L\ddot{Q}$. Daraus erhält man die Differentialgleichung:

$$U_L + U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \tag{20}$$

Wir wählen als allgemeinen Ansatz

$$Q(t) = Ae^{iwt} + Be^{-iwt} \tag{21}$$

wobei w die Kreisfrequenz der auftretenden Schwingung ist und A und B Konstanten sind. Setzt man den Ansatz in die DGL ein, erhält man

$$-w^2 + \frac{1}{LC} = 0 \tag{22}$$

also ergibt sich für die Kreisfrequenz w und für die gesuchte Frequenz f:

$$w = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{23}$$

[**3**]

(b) Die am Widerstand abfallende Spannung ist $U_R = RI = R\dot{Q}$, daraus erhält man die modifizierte DGL

$$U_L + U_R + U_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \tag{24}$$

Wir wählen als Ansatz:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\cos(wt) \tag{25}$$
$$\dot{Q}(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\left(-\alpha\cos(wt) - w\sin(wt)\right) \tag{26}$$
$$\ddot{Q}(t) = Q_0 e^{-\alpha t}\left(\alpha^2\cos(wt) + 2w\alpha\sin(wt) - w^2\cos(wt)\right) \tag{27}$$

[**2**]

Nun setzen wir den Ansatz und seine Ableitungen in die Differentialgleichung ein, kürzen durch die gleichen Vorfaktoren und sortieren nach den $\sin(wt)$ und $\cos(wt)$ Terme:

$$\left(L\alpha^2 - Lw^2 - R\alpha + \frac{1}{C}\right)\cos(wt) + (2Lw\alpha - Rw)\sin(wt) = 0 \tag{28}$$

Dieser Ausdruck kann nur dann immer gleich null sein, wenn jeder der Vorfaktoren gleich null ist. Also erhält man

$$2Lw\alpha - Rw = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{R}{2L} \tag{29}$$
$$L\alpha^2 - Lw^2 - R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \quad \Rightarrow w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{30}$$
$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{31}$$

[**2**]

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Ein Objekt bewegt sich mit relativistischer Geschwindigkeit v entlang der x-Achse im Labor-System. In diesem Labor-System sind in gleichen Abständen d entlang der x-Achse Markierungen angebracht. Jedes Mal, wenn das Objekt einer dieser Markierungen passiert sendet es einen Lichtimpuls aus, der sich in positive x-Richtung ausbreitet. Diese Lichtimpulse werden von einem Detektor D registriert, der ebenfalls auf der x-Achse sitzt (weit entfernt vom Ursprung).

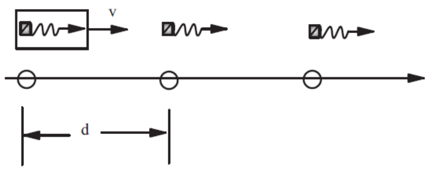
(a) Skizzieren sie die Situation mit dem bewegten Objekt, den Markierungen und dem Detektor. Es soll ersichtlich werden, an welchen Stellen das Objekt einen Lichtimpuls aussendet.

(b) Mit welcher Frequenz ν registriert der Detektor die Lichtimpulse? Drücken Sie das Ergebnis mit d, v und der Lichtgeschwindigkeit c aus.

[*Hinweis:* Erreicht ein Lichtimpuls den Detektor zum Zeitpunkt t_1 und der nächste Lichtimpuls erreicht den Detektor zum Zeitpunkt t_2, dann ist die Frequenz ν umgekehrt proportional zur Zeitdifferenz: $\nu = 1/(\Delta t) = 1/(t_2 - t_1)$. Sie können sich jeden Lichtimpuls als ein kleines Teilchen mit der Lichtgeschwindigkeit c vorstellen. Finden Sie einen Ausdruck für die Zeitdifferenz zweier aufeinanderfolgenden Lichtimpulse, also wenn das Objekt $x = 0$ und anschließend $x = d$ passiert.]

(c) Drücken Sie Ihre Antwort für ν aus Teilaufgabe b) in Abhängigkeit von $\nu_0 = \frac{v}{d}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ für $\gamma >> 1$ aus. [Weder ν noch β sollen in Ihrer Antwort auftauchen. Sie dürfen nähern und Terme der Ordnung $\frac{c-v}{c}$ vernachlässigen.]

Lösung



(a) [**1**]

(b) Wir bezeichnen die Emissionszeiten als T. Seien 1 und 2 zwei aufeinanderfolgende Orte und R der Abstand zu unserem Detektor.

Bei der Emission des Lichtimpulses von Ort 1 gilt:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 0 \\
T_2 &= \frac{d}{v} \\
t_1 &= T_1 + \frac{R}{c} \\
t_2 &= T_2 + \frac{R-d}{c} \\
\Delta t = t_2 - t_1 &= T_2 - T_1 + \frac{R-d}{c} - \frac{R}{c} = \frac{d}{v} - \frac{d}{c} = \frac{d}{v} \cdot (1-\beta) \\
\Rightarrow \nu &= \frac{1}{\Delta t} = \frac{v}{d} \cdot \frac{1}{1-\beta} = \nu_0 \cdot \frac{1}{1-\beta}
\end{aligned}$$

[**1,5**]

Alternativer Lösungsweg: Verwendung der Formel für die Doppler-Verschiebung:

$$\nu = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \overline{\nu_0}$$

ABER $\overline{\nu_0}$ ist nicht $\frac{v}{d}$, da im Bezugssystem von dem bewegten Objekt die Distanz d kontrahiert wir zu $\frac{d}{\gamma}$.

$$\overline{\nu_0} = \frac{v}{\frac{d}{\gamma}} = \frac{v \cdot \gamma}{d}$$

$$\Rightarrow \nu = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \gamma = \nu_0 \cdot \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\nu_0}{1-\beta}$$

(c) Im nächsten Schritt bestimmt man $\frac{1}{1-\beta}$ in der Näherung $\gamma >> 1$.

$$\gamma >> 1 \Rightarrow \beta \to 1$$
$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{1}{(1-\beta)(1+\beta)} \approx \frac{1}{2(1-\beta)}$$
$$\gamma >> 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\beta} \approx 2\gamma^2$$
$$\nu \approx \nu_0 \cdot (2\gamma^2)$$

[**1,5**]

Konstanten

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \qquad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{As/Vm} \qquad \mu = 12.57 \cdot 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$$