1	2

Aufgabe 1. (Punkte: 6)

Gegeben sei die Menge von 2×2–Matrizen $M := \left\{ \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z} \right\}$.

1. Zeigen Sie, dass die Menge M zusammen mit dem Matrizenprodukt eine **kommutative** Gruppe ist.
2. Geben Sie einen Isomorphismus $\varphi : (M, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +)$ an und weisen Sie die Isomorphie-Eigenschaften für φ nach.

---

1) Nachweis der Gruppenaxiome oder Untergruppenkriterium zu $GL(2,\mathbb{R})$

- Für $x = 0$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M$ das neutrale Element (s.u.) $\Rightarrow M \neq \emptyset$

- $(M, \cdot)$ abgeschlossen: Für $\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{-(x+y)} \end{pmatrix} \in M, \text{ da } x+y \in \mathbb{Z} \quad (*)$$

- $(*) \Rightarrow$ zu $\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$ ist mit $y = -x \in \mathbb{Z}$ $\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$ das Inverse in M

- $(*) \Rightarrow \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$, d.h. $(M, \cdot)$ ist kommutativ, da $(\mathbb{Z}, +)$ kommutativ

- $(M, \cdot)$ assoziativ (geerbt von Matrizenmultiplikation)

2) $\varphi : \begin{cases} (M, \cdot) \to (\mathbb{Z}, +) \\ \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \mapsto x \end{cases}$ ist bijektiv nach Definition von φ.

da zu $x \in \mathbb{Z}$ $\exists_1 \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \in M$ mit $\varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\right) = x$

φ ist Homomorphismus, da für $x, y \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{-(x+y)} \end{pmatrix}\right) = x + y = \varphi\left(\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} e^y & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}\right)$$

1	2

Aufgabe 2. (Punkte: 12)

Multiple choice-Aufgaben zu Permutationen

Alle Elemente $f \in S_3$ der Permutationsgruppe $(S_3, \circ)$ lassen sich in Werteschreibweise $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix}$ oder in Zykelschreibweise $(a\ f(a)\ \ldots)$ mit $a \in \{1,2,3\}$ darstellen.

$U = \{id, (1\ 2)\}$ sei als eine Untergruppe der S_3 gegeben.

Kreuzen Sie bitte jeweils die richtige Aussage bzw. Antwort an. Begründungen werden nicht gewertet.

Lösung von $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ ist in S_3:	☒ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{2008} =$	☐ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$	☒ $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$	☐ $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$
Mit welchem Element $x \in S_3$ wird $\{id, (1\ 2\ 3), x\}$ zu einer Untergruppe von S_3?	☐ $x = (1\ 3)$	☐ $x = (2\ 3\ 1)$	☒ $x = (3\ 2\ 1)$
Wieviele verschiedene Untergruppen besitzt die S_3 ?	☐ 3	☐ 4	☒ 6
Welche Nebenklassen sind mit $[(1\ 2\ 3)]_U$ identisch ?	☐ $[(1\ 3\ 2)]_U$	☐ $[(2\ 3)]_U$	☒ $[(1\ 3)]_U$
Wieviele Elemente besitzt die Faktorgruppe S_3/U ?	☒ 3	☐ 4	☐ 6

Wertung: Für jede der 6 Teilaufgaben (Zeilen):
2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
Punktabzug bei falscher Beantwortung,
0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

Aussage: Für $x \in S_3$ setze $[x]_U := x \circ U$

- $x = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1} \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ (oder ausprobieren)
- $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{2008} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}^{2007} \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = id \circ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, da „3 teilt 2007"
- $\{id, (123), x\}$ muss Inverses zu (123) enthalten, also $(3\ 2\ 1)$
  bzw. enthält $(123)^2 = (132) = (3\ 2\ 1)$ und $(123)^3 = id$.
- Untergruppen von S_3 sind:
  $\{\ \}$, $\{id, (12)\}$, $\{id, (13)\}$, $\{id, (23)\}$, $\{id, (1\ 23), (3\ 21)\}$, S_3 also 6
- $[(1\ 2\ 3)]_U = (1\ 2\ 3) \circ \{id, (12)\} = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3) \circ (1\ 2)\} = \{(1\ 2\ 3), (1,3)\}$
- $|S_3/U| = |S_3|/|U| = 6/2 = 3$

1	2

Aufgabe 3. (Punkte: 8)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ einer linearen Abbildung

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto y = Ax$ und der Vektor $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie den Kern von f.
2. Geben Sie $dim(Bild(f))$ und eine Basis des Bildes von f an.
3. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von α alle Urbilder von b, d.h. alle Lösungen von $Ax = b$.

---

1) Ansatz: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

Wähle $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$, $x_4 = \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow x_2 = \lambda - 2\mu \wedge x_1 = -(\lambda - 2\mu) - \lambda - \mu = -2\lambda + \mu$

$\Rightarrow x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist Kern(f)

2) $dim(Kern(f)) + dim(Bild(f)) = dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow dim(Bild(f)) = 4 - 2 = \underline{2}$

$\Rightarrow$ Basis von Bild(f) ist z.B. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

3) LGS: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array}\right) \Rightarrow$

Fallunterscheidung:

$\alpha \neq 1 \Rightarrow$ keine Lösung

$\alpha = 1 \Rightarrow$ Wähle $x_3 = \lambda$, $x_4 = \mu \Rightarrow x_2 = 1 + \lambda - 2\mu \wedge$

$x_1 = 2 - (1 + \lambda - 2\mu) - \lambda - \mu = 1 - 2\lambda + \mu$

Struktur

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]_{Kern(f)} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{Kern(f)}$

mögliche spezielle Lösungen

Aufgabe 4. (Punkte: 8)

1	2

Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben.

1. Bestimme α so, dass $span(v_1, v_2, v_3)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 ist, und begründen Sie Ihr Ergebnis.
2. Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit
$f(v_1) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ gibt. Begründen Sie Ihr Ergebnis.
3. Sei nun $\alpha = 0$ gewählt. Bestimmen Sie das Bild von $v = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$ unter der linearen Abbildung f aus 2.

---

1) Der Span ist immer ein Untervektorraum. Offensichtlich sind v_1 und v_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim span(v_1, v_2, v_3) \geq 2$

$\Rightarrow \dim span(v_1, v_2, v_3) = 2 \Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ linear abhängig $\Leftrightarrow$

<u>1. Weg:</u> $\det(v_1, v_2, v_3) = \det\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&\alpha\\0&1&1\end{pmatrix} = 2+0+2-0-\alpha-0 = 4-\alpha \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underline{\alpha = 4}$

<u>2. Weg:</u> Ansatz: $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\\alpha\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \wedge \lambda_2 = 1 \wedge \underline{\alpha = 4}$

2) Für $\alpha \neq 4$ sind v_1, v_2, v_3 <u>linear unabhängig</u> und bilden daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$, deren <u>Bilder</u> $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ eine lineare Abbildung <u>eindeutig bestimmen</u>.

Für $\alpha = 4$ gilt $f(v_3) = f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \nexists f$ für $\alpha = 4$

3) <u>Ansatz</u> $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\2&2&0&4\\0&1&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&2&-2&0\\0&1&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&2&2\end{array}\right)$

$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_2 = \lambda_1 = 1 \Rightarrow f(v) = f(v_1) + f(v_2) + f(v_3) = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}}$

1	2

Aufgabe 5. (Punkte: 10)

Multiple choice-Aufgaben zu Abbildungen
Welche Eigenschaften treffen auf die angegebenen Abbildungen f zu ?
Kreuzen Sie bitte **alle** richtigen Aussagen an. Begründungen werden nicht gewertet.

$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ x+1 \end{pmatrix} \end{cases}$	☐ linear ☒ nicht linear	☒ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☒ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$	☒ linear ☐ nicht linear	☒ injektiv ☐ nicht injektiv	☒ surjektiv ☐ nicht surjektiv
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$	☐ linear ☒ nicht linear	☐ injektiv ☒ nicht injektiv $f(x_1,x_2)=f(-x_2,-x_1)$	☐ surjektiv ☒ nicht surjektiv $\nexists$ Urbild von $\binom{-1}{0}$
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_1 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $Kern(A) = \{0\}$	☒ linear ☐ nicht linear	☒ injektiv ☐ nicht injektiv	☐ surjektiv ☒ nicht surjektiv $\mathbb{R}^4$?
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ mit $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $Kern(A) = \{0\}$	☐ linear ☒ nicht linear	☒ injektiv ☐ nicht injektiv	☒ surjektiv ☐ nicht surjektiv

Wertung: Für jede der 5 Teilaufgaben (Zeilen):
2 Punkte bei korrekter Beantwortung,
Punktabzug bei falscher Beantwortung,
0 Punkte bei Nichtbearbeitung.

1	2

Aufgabe 6. (Punkte: 8)

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^{n\times n}$ der $n\times n$–Matrizen ($n>1$) sei

$$U=\{A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid a_{ij}=-a_{ji} \text{ für alle } 1\le i,j\le n\}$$

1. Zeigen Sie: U ist ein Untervektorraum von $(\mathbb{R}^{n\times n},+,\cdot)$.
2. Zeigen Sie: $A=(a_{ij})\in U \Rightarrow a_{ii}=0$ für alle $1\le i\le n$.
3. Bestimmen Sie für $n=3$ eine Basis von U.
4. Geben Sie $dim(U)$ in Abhängigkeit von $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ an.
5. Zeigen Sie: Für $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$ gilt: $A\in U \Rightarrow det(A)=0$.
   Hinweis: Betrachten Sie $det(A^T)$!

---

1) Untervektorraumkriterium mit $A\in U \Leftrightarrow A^T=-A$

- $U\neq\emptyset$, da Nullmatrise $0\in U$ und für $A,B\in U$, $\lambda\in\mathbb{R}$ gilt:
- $+$ abgeschlossen: $(A+B)^T = A^T+B^T = -A-B = -(A+B) \Rightarrow A+B\in U$
- $\cdot$ abgeschlossen: $(\lambda\cdot A)^T = \lambda\cdot A^T = \lambda\cdot(-A) = (-\lambda A) = -(\lambda A) \Rightarrow \lambda A\in U$

alternativ mit $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in U$, $\lambda\in\mathbb{R}$

- $(a_{ij}+b_{ij}) = (a_{ij})+(b_{ij}) = (-a_{ji})+(-b_{ji}) = (-(a_{ji}+b_{ji}))$ ✓
- $(\lambda a_{ij}) = \lambda(a_{ij}) = \lambda\cdot(-a_{ji}) = (-\lambda a_{ji})$ ✓

2) $A=(a_{ij})\in U \Leftrightarrow a_{ij}=-a_{ji}\ \forall i,j\in\{1,\dots,n\}$ insbesondere für $j=i$

$\Rightarrow a_{ii}=-a_{ii}\ \forall i\in\{1,\dots,n\} \Rightarrow a_{ii}=0\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$

3) $n=3$, $A\in U \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix}0&\alpha&\beta\\-\alpha&0&\gamma\\-\beta&-\gamma&0\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

offensichtlich

$\mathcal{B}$ spannt U auf und ist linear unabhängig.

$\Rightarrow$ Basis von U: $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right)$

4) Wesentliche Einträge in $A\in U$ nur oberhalb der Hauptdiagonalen

$\Rightarrow \dim(U)=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}$

5) $\det(A)=\det(A^T)\underset{A\in U}{=}\det(-A)=(-1)^n\det(A)\underset{n\text{ ungerade}}{=}-\det(A)\Rightarrow \det(A)=0$

1	2

Aufgabe 7. (Punkte: 8)

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Begründen Sie, warum A invertierbar ist. Die Bestimmung von A^{-1} ist dabei nicht verlangt!
2. Zeigen Sie, dass v_1 ein Eigenvektor von A ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert λ_1.
3. Bestimmen Sie einen Eigenvektor v_2 von A zum Eigenwert $\lambda_2 = -5$.
4. Bestimmen Sie den fehlenden Eigenwert $\lambda_3 \notin \{\lambda_1, \lambda_2\}$ von A.
5. Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A an.

---

1) $\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = 3\cdot(-9-16) = -75 \neq 0$ bzw $Rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} = Rg\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3-\frac{16}{3} \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ Beh.

2) $A\cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+8+2 \\ 12+8 \\ 16-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 5}$

3) $(A-(-5)E)v_2 = 0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{v_2 = \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}, \mu \in \mathbb{R}$

4) <u>1. Weg</u>: $\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3 = \det(A) = -75 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3}$ (mit $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -5$)

<u>2. Weg</u>: $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \text{Spur}(A) = 3 \Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3}$

<u>3. Weg</u>: $\chi_A(\lambda) = \det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_3 = 3}$ ($\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+5)$ wird nicht benötigt!)

5) Basis aus Eigenvektoren: $\underline{B = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$

offensichtlich EV zu EW $\lambda_3 = 3$