Zentrum Mathematik	Technische Universität München

Prof. Dr. Noam Berger
PD Dr. G. Witterstein

MA9202, Analysis 1
Probeklausur

WS 2016/17
Blatt PK

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\prod_{k=0}^{n}\left(1+x^{2^k}\right)=\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und für alle $x\neq 1$ gilt.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

   (a) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}$.

$\operatorname{Re}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}\right)=$	$\operatorname{Im}\left(\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-1}\right)=$

   (b) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen $z=x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ und $z^3=1$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

   (a) Bestimmen Sie den Grenzwert von $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

   (b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit des festen Parameters $c\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$, ob die folgende Reihe konvergiert, und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{c^k}{(c+1)^{k+1}}$.

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

   Bestimmen Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty}k!\,z^k$.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[7 Punkte]**

   (a) Es sei $a\in\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$ und $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ gegeben durch $f(x):=a^x$.

   (i) Zeigen Sie, dass f im Fall $a>1$ streng monoton wachsend und im Fall $a<1$ streng monoton fallend ist.

   (ii) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

   (b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ bei $x=1$ stetig fortsetzbar?

6. **Zwischenwertsatz** **[7 Punkte]**

   Es sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine 2π-periodische stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $f(x_0)=f(x_0+\pi)$.
   Hinweis: Man betrachte die Funktion $F(x)=f(x)-f(x+\pi)$.

7. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**

   Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int\limits_1^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

   (a) Die Funktion f ist

   ☐ stetig ☐ 2π-periodisch ☐ streng monoton steigend ☐ streng monoton fallend ?

   Begründen Sie Ihre Antwort! Hinweis: Es kann mehr als eine korrekte Antwort geben.

   (b) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f im Entwicklungspunkt 1.