1. Probeklausur in Experimentalphysik 1

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Wintersemester 2015/16
8. Dezember 2015

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Kind schießt zum Zeitpunkt $t = 0$ von einem Balkon der Höhe $y_1(0) = 20\text{m}$ einen Ball '1' horizontal mit einer Geschwindigkeit $v_{x1}(0) = 10\text{m/s}$. Ein anderes Kind, das auf dem Erdboden in einer horizontalen Entfernung von $x_2(0) = 5\text{m}$ steht, wirft zum gleichen Zeitpunkt einen weiteren Ball '2' senkrecht in die Höhe, so dass beide Bälle sich in der Luft treffen.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an, die das durch die Aufgabenstellung vorgegebene kartesische Koordinatensystem (x, y), die Bahnkurven der Bälle sowie alle für die Bewegung relevanten Größen zeigt.

(b) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_c, an dem sich die Bälle treffen.

(c) Bestimmen Sie die Anfangsgeschwindigkeit $v_{y2}(0)$ des Balles '2', so dass sich die Bälle treffen.

(d) Ermitteln Sie die Beträge $v_1(t_c)$ und $v_2(t_c)$ der Geschwindigkeiten der beiden Bälle, wenn sie aufeinander treffen.

(e) Ermitteln Sie den Winkel α, den die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Bälle einschließen, wenn sie aufeinander treffen.

Lösung

(a) **[1,5]**

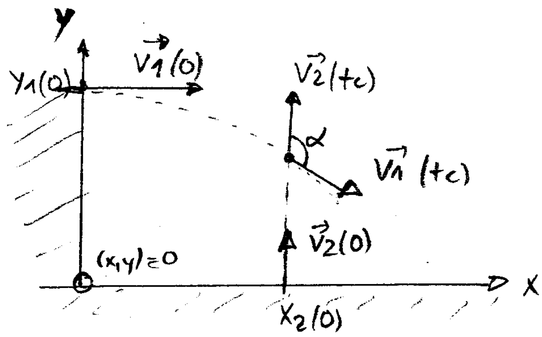
(b) Zeitpunkt des Zusammentreffens:

$$x_1(t_c) = x_2(t_c) \qquad \text{und} \qquad x_1(t_c) = x_2(t_c) \Longrightarrow v_x1(0) \cdot t_c = x_2(0) \Longrightarrow t_c = \frac{x_2(0)}{v_{x1}(0)} = 0,5\text{s}$$

[1]

(c)

$$y_1(0) - \frac{1}{2}gt_c^2 = v_{y2}(0) \cdot t_c - \frac{1}{2}gt_c^2 \Longrightarrow v_{y2}(0) = \frac{y_1(0)}{t_c} = 40\text{m/s}$$



[1]

(d)

$$v_{x1}(t_c) = v_{x1}(0) = 10\text{m/s} \tag{1}$$
$$v_{y1}(t_c) = -gt_c = -4,91\text{m/s} \tag{2}$$
$$v_1(t_c) = \sqrt{v_{x1}(t_c)^2 + v_{y1}(t_c)^2} = 11,1\text{m/s} \tag{3}$$
$$v_2(t_c) = v_{y2}(0) - gt_c = 35,1\text{m/s} \tag{4}$$

[1,5]

(e)

$$\tan(180° - \alpha) = \frac{|v_{x1}(t_c)|}{|v_{y1}(t_c)|} = 2,04 \Longrightarrow \alpha = 180° - 63,9° = 116,2°$$

[1]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

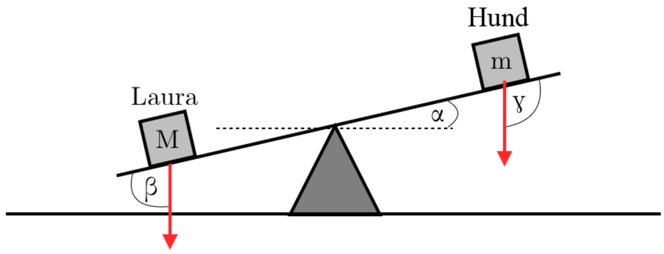
Laura (Masse $M = 65$kg) und ihr Hund (Masse $m = 20$kg) sitzen auf einer Wippe. Beide haben zunächst den gleichen Abstand $s_0 = 2$m von der Mitte. Die Wippe ist um den Winkel $\alpha = 30°$ geneigt, mit Lauras Ende nach unten.
Sie möchten die Wippe in dieser Position **ins Gleichgewicht** bringen.

(a) Welche Gesamtmasse an Steinen müssten Sie zur Position des Hundes dazulegen?

(b) Zu welchen Abstand vom Mittelpunkt müsste der Hund verschoben werden? (Die Steine wurden wieder entfernt.)

(c) Mit welcher Kraft müssen Sie Laura vertikal nach oben drücken? (Der Hund ist wieder im Abstand s_0.)

(d) Sie bringen eine Spiralfeder mit Federkonstante k^* an der Aufhängung der Wippe anbringen. Eine solche Spiralfeder übt ein Drehmoment von $D_F = k^* \cdot \alpha$ aus. Hierbei ist α im Bogenmaß angegeben. Wie groß muss die Federkonstante k^* sein?



Lösung

Wir können uns geometrisch von den folgenden Zusammenhängen für die Winkel überzeugen:

$$\beta = 90° - \alpha \qquad\qquad \gamma = 90° + \alpha \tag{5}$$

Dann gilt

$$\sin\beta = \sin(-\alpha + 90°) = \cos\alpha \qquad\qquad \sin\gamma = \sin(90° + \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \tag{6}$$

Im Folgenden sollen nur die Beträge der auftretenden Drehmomente betrachtet werden, da alle entlang der Achse durch die Aufhängung senkrecht zur Zeichenebene verlaufen.
Auf Laura wirkt die Gewichtskraft $\vec{F_L} = -Mg \cdot \vec{e_z}$. Diese übt auf die Wippe ein Drehmoment D_L aus. Es gilt:

$$D_L = |\vec{r} \times \vec{F_L}| = s_0 \cdot Mg \cdot \sin\beta = s_0 \cdot Mg \cdot \cos\alpha \tag{7}$$

Die Gewichtskraft auf den Hund übt ein Drehmoment

$$D_{Ci} = s_0 \cdot mg \cdot \sin\gamma = s_0 \cdot mg \cdot \cos\alpha \tag{8}$$

aus.

(a) Wird das Hundegewicht durch die Steine erhöht, ergibt sich als Bedingung für ein Gleichgewicht $D_L = D_H^{'}$, wobei $D_H^{'}$ das Drehmoment mit veränderter Masse ist. Es ergibt sich mit m_s der Masse der Steine:

$$s_0 \cdot Mg \cdot \cos\alpha = s_0 \cdot (m + m_s)g \cdot \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad m_s = M - m = 45\text{kg} \tag{9}$$

So schwere Steine können Sie nicht heben, sie sucht weiter nach anderen Methoden...

[**1**]

(b) Nun wurde anstelle der Masse der Abstand der Wippe von s_0 auf s verändert. Als Gleichgewichtsbedingung ergibt sich

$$s_0 \cdot Mg \cdot \cos\alpha = s \cdot mg \cdot \cos\alpha \qquad \Rightarrow \qquad s = s_0 \frac{M}{m} = 6,5\text{m} \tag{10}$$

So lang ist die Wippe leider nicht, Sie müssen nach anderen Methoden suchen...

[**1**]

(c) Sie üben nun eine Kraft F_C auf Laura senkrecht nach oben aus. Dies bewirkt ein zusätzliches Drehmoment:

$$D_{Cl} = s_0 \cdot F_c \cdot \sin\gamma = s_0 \cdot F_c \cdot \cos\alpha \tag{11}$$

Dieses Drehmoment wirkt im Uhrzeigersinn, also in die gleiche Richtung wie D_H. Als neue Gleichgewichtsbedingung ergibt sich

$$D_L = D_{Cl} + D_H \tag{12}$$

Das bedeutet (es wurde bereits mit $\cos\alpha$ gekürzt):

$$s_0 \cdot Mg = s_0 \cdot F_C + s_0 \cdot mg \qquad \Rightarrow \qquad F_C = (M - m)g = 45\text{kg} \cdot g = 450\text{N} \tag{13}$$

Sie müssen erkennen, dass sie eine so große Kraft nicht aufbringen können und überlegen weiter...

[**1,5**]

(d) Nun wirkt als zusätzliches Drehmoment das Moment der Feder D_F. Für ein Gleichgewicht muss gelten

$$D_L = D_H + D_F \tag{14}$$

Das führt auf die folgende Gleichung

$$s_0 \cdot M \cdot \cos\alpha = s_0 \cdot m \cdot \cos\alpha + k^* \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot \alpha \;\Rightarrow\; k^* = s_0(M - m)g \cdot \frac{\cos\alpha}{\alpha} \cdot \frac{180°}{\pi} \tag{15}$$

Als Ergebnis erhält man

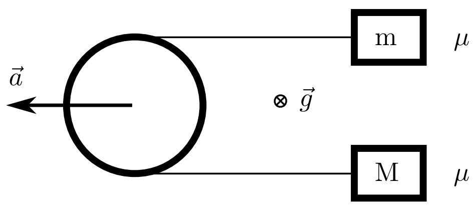
$$k^* = 2700 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi}\text{Nm} \approx 1489\text{Nm} \tag{16}$$

Begeistert von dieser Möglichkeit rennen Sie zum nächsten Spiralfedern-Fachhandel.

[**1,5**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine idealisierte Atwoodsche Fallmaschine (masselose Rolle und masseloser, undehnbarer Faden) mit zwei Massen M und m liege zunächst flach auf einem horizontalen Tisch. Der statische **und** der kinematische Reibungskoeffizient zwischen den Massen und dem Tisch sei jeweils μ. Die Rolle werde mit einer konstanten Beschleunigung $\vec{a}$ nach links beschleunigt. Gravitation wirke mit $\vec{g}$ senkrecht zur Tischoberfläche.



(a) Berechnen Sie die Position der beiden Masse in Bezug zu deren Startpositionen in Abhängigkeit von der Zeit wenn die Blöcke rutschen!

(b) Was ist die maximale Beschleunigung $\vec{a}$ für die der Block der Masse M in Ruhe bleiben wird? Gibt es eine Beschleunigung $\vec{a}$ bei der sich nur ein Block nach rechts bewegen wird? Berechnen und Begründen Sie?

Lösung:

(a) Da die Rolle selbst beschleunigt wird, können Koordinaten nicht in Bezug auf die Rolle ausgedrückt werden, sofern keine Koordinatentransformation in das ruhende System durchgeführt wird. Wir werden von Anfang an im ruhenden System (relativ zum Tisch) arbeiten. Die Seilspannung werde mit T bezeichnet. Für hinreichend große Beschleunigungen (beide Massen bewegen sich) wirken auf beide Massen jeweils die Seilspannung sowie die jeweilige Reibung. Die Bewegungsgleichungen sind daher

$$m\ddot{x}_1 = T - \mu m g \tag{17}$$
$$M\ddot{x}_2 = T - \mu M g \tag{18}$$

[1]

Der Faden ist nicht dehnbar. Die Länge L des Fadens ergibt sich aus

$$x_p - x_1 + x_p - x_2 + \pi R = L = \text{const} \tag{19}$$

Für die Beschleunigungen finden wir daher durch zweimaliges zeitliches Ableiten

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = 2\ddot{x}_p = 2a \tag{20}$$

Wir nutzen die Bewegungsgleichungen und lösen auf

$$2a = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{T}{m} - \mu g + \frac{T}{M} - \mu g = \frac{m+M}{mM}T - 2\mu g \tag{21}$$

[1]

Die Seilspannung ist daher

$$T = \frac{2mM}{m+M}(a + \mu g) \tag{22}$$

Demnach sind die Beschleunigungen der beiden Massen

$$\ddot{x}_1 = \frac{2M}{m+M}a + \frac{M-m}{m+M}\mu g \tag{23}$$
$$\ddot{x}_2 = \frac{2m}{m+M}a + \frac{m-M}{m+M}\mu g \tag{24}$$

[1,5]

Die Position erhalten wir durch zweimaliges Integrieren, wobei wir ausnutzen, dass Anfangsposition und -geschwindigkeit der beiden Massen als Null angenommen werden können

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{m+M}a + \frac{M-m}{m+M}\mu g\right)t^2 \tag{25}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{2m}{m+M}a + \frac{m-M}{m+M}\mu g\right)t^2 \tag{26}$$

[1]

(b) Damit sich beide Massen bewegen, müssen die Beschleunigungen beider Massen positiv sein. Masse M wird sich daher nicht bewegen, falls

$$0 \geq \ddot{x}_2 = \frac{2m}{m+M}a + \frac{m-M}{m+M}\mu g \tag{27}$$

Umstellen der Gleichung nach der Beschleunigung liefert

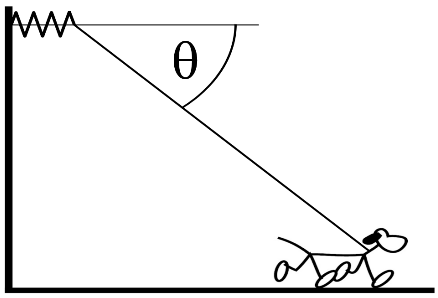
$$a \leq \frac{M-m}{2m}\mu g \tag{28}$$

Da Reibungskräfte nur Gegenkräfte sein können gibt es keine positive Beschleunigung, für die sich einer der beiden Blöcke nach rechts bewegen wird.

[1,5]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein Hund der Masse M sei am Ende einer Feder mit Federkonstanten k und Masse m in der Höhe h angeleint. Die Feder sei entlang eines horizontalen Balkens dehnbar. Die Leine ist undehnbar. Der Winkel zwischen Leine und horizontalem Balken θ werde als konstant angenommen. Zwischen dem Hund und dem Untergrund wirke ein Reibungskoeffizient μ.
Nun nähere sich ein Postbote der Anordnung. Der Hund beginnt an der Leine zu ziehen.



(a) Zeichnen Sie die entsprechenden Kraftdiagramme für die Feder und den Hund. Beachten Sie hierbei insbesondere die Rolle der Reibungskraft zwischen dem Hund und dem Untergrund.

(b) Der Hund ziehe mit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ entlang der Horizontalen an der Leine. Bis zu welcher Entfernung kann sich der Postbote der Wand nähern ohne vom Hund erreicht zu werden?

(c) Jetzt ziehe der Hund mit der maximal möglichen Kraft an der Leine. Bis zu welcher Entfernung kann sich der Postbote jetzt der Wand nähern ohne vom Hund erreicht zu werden?

Lösung:

(a) **[2]**

(b) Wenn der Hund mit konstanter Kraft $\vec{F}$ entlang der Horizontalen zieht, wirken folgende Kräfte auf den Hund:

$$F - T\cos\theta = 0 \qquad \text{(horizontal)} \tag{29}$$

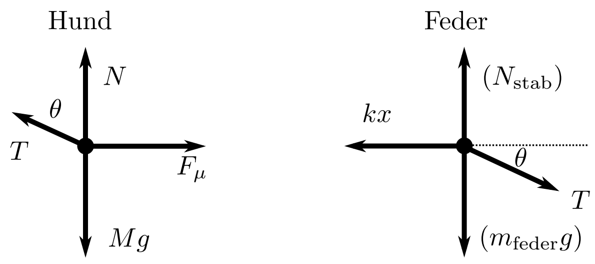


Abbildung 1: Kraftdiagramme

wobei N die Normalkraft des Untergrundes auf den Hund und T die Seilspannung der Leine. Auf die Feder wirkt die Kraft

$$T\cos\theta - kx = 0 \qquad \text{(horizontal)} \tag{30}$$

Wir sehen daher, dass die Auslenkung der Feder gegeben ist durch

$$x = \frac{T\cos\theta}{k} = \frac{F}{k} \tag{31}$$

Zusätzlich muss die Länge der Leine in horizontaler Richtung, $h/\tan\theta$, berücksichtigt werden. Der minimale Abstand d des Postboten von der Wand sollte demnach

$$d = \frac{F}{k} + \frac{h}{\tan\theta} \tag{32}$$

[**2**]

(c) Die maximale Kraft, mit der der Hund in horizontaler Richtung ziehen kann, ist identisch zur Reibungskraft $F_\mu = \mu N$. Die auf den Hund wirkenden Kräfte sind daher

$$N + T\sin\theta - Mg = 0 \qquad \text{(vertikal)} \tag{33}$$
$$F\mu - T\cos\theta = 0 \qquad \text{(horizontal)} \tag{34}$$

[**1**]

Die Kraft auf die Feder ist wie bisher

$$T\cos\theta - kx = 0 \qquad \text{(horizontal)} \tag{35}$$

Wir sehen daher, dass

$$T\cos\theta = kx \quad \Rightarrow \quad T = \frac{kx}{\cos\theta} \qquad \text{und} \tag{36}$$
$$F_\mu = T\cos\theta = \mu N \quad \Rightarrow \quad N = \frac{T\cos\theta}{\mu} = \frac{kx}{\mu} \tag{37}$$

[**1**]

Die Federausdehnung x ist daher

$$\frac{kx}{\mu} + \frac{kx\sin\theta}{\cos\theta} = Mg \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\mu Mg}{k(1+\mu\tan\theta)}$$

womit der minimale Postbotenabstand d gegeben ist durch

$$d = \frac{h}{\tan\theta} + \frac{\mu M g}{k(1+\mu\tan\theta)}$$

[**1**]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ein Seil, hat die Länge $l_0 = 40\text{m}$ und ist an einem Baukran der Höhe $h_0 = 100\text{m}$ befestigt. Ein Mensch mit der Masse $m = 70\text{kg}$ ist am anderen Ende befestigt. Das Seil hat eine Federkonstante von $k = 40\text{N/m}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ springt der Mensch vom Baukran.

a) Nach welcher Fallstrecke x_2 kompensieren sich gerade die Schwerkraft auf den Menschen und die elastische Kraft des Seils?

b) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max}, die der Springer erreicht?

c) Ein zweiter Mensch springt danach mit dem selben Seil und schwingt nach dem Sprung mit $0,7\text{Hz}$ auf und ab. Welche Masse hat der zweite Springer?

Lösung:

(a) Die elastische Kraft wird durch das Hookesche Gesetz beschrieben. Dann gilt

$$mg = (x_2 - l_0)k \tag{38}$$

wobei $(x_2 - l_0)$ natürlich die Dehnung des Seils darstellt. Nach x_2 aufgelöst ergibt sich

$$x_2 = \frac{mg}{k} + l_0 = \frac{70\text{kg} \times 9.81\text{m/s}^2}{40\text{N/m}} + 40\text{m} = 57.2\text{m} \tag{39}$$

[**1**]

(b) Die maximale Geschwindigkeit wird an dem Ort erreicht, an dem die Schwerkraft gleich der elastischen Kraft des Seils ist. Dann ergibt sich durch die Energieerhaltung, dass die frei gewordene potentielle Energie gleich der Summe der kinetischen Energie und der Energie, die in der Dehnung steckt, ist:

$$mgx_2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \left(\int_{l_0}^{x_2} (x_2 - l_0)kdx\right) \tag{40}$$

$$= \frac{1}{2}mv_{max}^2 + \frac{1}{2}(x_2 - l_0)^2 k \tag{41}$$

[**1**]

Aufgelöst nach v_{max} ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{max}^2 &= \frac{2}{m}\left(mgx_2 - \frac{1}{2}k(x_2 - l_0)^2\right) && (42)\\ &= \frac{2}{m}\left(mg\left(\frac{mg}{k} + l_0\right) - \left(\frac{mg}{k}\right)^2\frac{k}{2}\right) && (43)\\ &= \frac{2mg^2}{k} + 2gl_0 - \frac{mg^2}{k} && (44)\\ &= \frac{mg^2}{k} + 2gl_0 && (45)\\ v_{max} &= 30.9\mathrm{m/s} && (46) \end{aligned}$$

[**1**]

(c)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow m = \frac{k}{\frac{\omega^2}{4\pi^2}} = 2,09\mathrm{kg} \qquad (47)$$

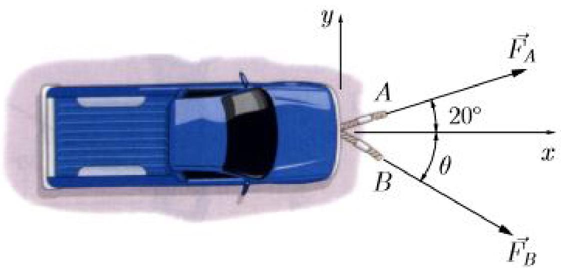
Eigentlich war die Kreisfrequenz in der Aufgabenstellung gemeint:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow m = \frac{k}{\omega^2} = 82\mathrm{kg} \qquad (48)$$

[**1**]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein Pickup-Wagen soll mit Hilfe zweier Seile in Richtung der x-Achse gezogen werden (siehe Abbildung). Dazu ist eine resultierende Kraft von 950N in axialer Richtung erforderlich.



(a) Setzt man $\theta = 50°$, wie groß ist dann F_B zu wählen?

(b) Welcher optimale Wert ist für θ zu wählen, damit F_B möglichst gering wird?

Lösung

(a) Kräftebilanzen am Aufhängepunkt:

$$\sum F_H = 950\mathrm{N} : F_A \cos 20° + F_B \cos 50° = 950\mathrm{N}$$

$$\sum F_V = 0 : F_A \sin 20° - F_B \sin 50° = 0$$

$$F_A = F_B \cdot \frac{\sin 50°}{\sin 20°}$$

$$F_B \left(\frac{\sin 50°}{\sin 20°} \cdot \cos 20° + \cos 50° \right) = 950\text{N}$$

$$F_B = \frac{950\text{N}}{\cot 20° \cdot \sin 50° + \cos 50°} = 345,8\text{N}$$

[**3**]

(b) Analog zum vorherigen Ergebnis gilt für einen allgemeinen Winkel θ :

$$F_B = \frac{950\text{N}}{\cot 20° \cdot \sin \theta + cos\theta}$$

Für minimales F_B muss der Nenner maximal werden. Differenzieren des Nenners und anschließendes Nullsetzen der Ableitungsfunktion liefert:

$$\frac{d}{d\theta}(\cot 20 \cdot ° \cdot \sin \theta + \cos \theta) = \cot 20° \cos \theta - \sin \theta = 0$$

$$\tan \theta = \cot(90° - \theta) = \cot 20°$$

$$\theta = 70°$$

[**2**]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

In Garching (befindet sich auf dem $48,3°$ Breitengrad) wird eine Kugel ($m = 2\text{kg}$) mit 100m/s unter einem Winkel von 30° abgeschossen. Die Kugel werde genau nach Norden abgeschossen. Im folgenden soll **nur die horizontale Komponente der Geschwindigkeit** der Kugel beachtet werden. Berechnen Sie die Kraft und Richtung mit der die Kugel von ihrer geraden Flugbahn abgelenkt wird. Was ändert sich, wenn die Abschussrichtung nach Westen zeigt?

Lösung

Winkelgeschwindigkeit der Erde:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} \cdot e_z = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60s} \cdot e_z = 7,27 \cdot 10^{-5} \frac{1}{s} \cdot e_z$$

[**1**]

Geschwindigkeit der Kugel in nördliche Richtung:

$$\cos 30° = \frac{v_n}{v_{Ges}}$$

$$|v_n| = 50\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

[**1**]

Da sich Garching auf dem $48,3°$ Breitengrad befindet, kann die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit in vektorieller Form geschrieben werden.

$$v_n = 50\sqrt{3}\frac{m}{s} \cdot (-\sin(48.3°) \cdot e_x + \cos(48.3°) \cdot e_z)$$

Die Kraft in westliche Richtung ist durch die Corioliskraft gegeben.

$$ma_c = -2m \cdot (\omega \times v_n) = 0,0188 \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2} \cdot e_y$$

[**1**]

Wirft man die Kugel in westliche Richtung so zeigt die horizontale Komponente von v in die negative x-Richtung und ω in positive z-Richtung. Nach der Rechten-Hand-Regel wirkt die Corioliskraft vom Werfenden aus gesehen nach oben. Die Kugel wird deshalb nicht seitlich abgelenkt.

[**1**]