....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. R. König

23. Februar 2018, 8:00 – 9:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

LÖSUNG:

Induktionsanfang: $(n = 1)$: $\sum_{k=0}^{1-1} k^3 = 0^3 = 0 = \frac{(1-1)^2 \cdot 1^2}{4}$ **[2]**

Induktionsschritt: $(n \to n + 1)$:

$$\sum_{k=0}^{(n+1)-1} k^3 \overset{\textbf{[1]}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 + n^3$$

$$\overset{\text{I.V.}\textbf{[2]}}{=} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{n^2}{4}\big((n-1)^2 + 4n\big)$$

$$\overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{n^2}{4}(n+1)^2 \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{((n+1)-1)^2(n+1)^2}{4}.$$

2. **Maximum/Minimum, Infimum/Supremum einer Menge** **[12 Punkte]**
Gegeben sei $M := \{\cos(\pi \frac{k}{n}) \mid k, n \in \mathbb{N}, k \leq n\} \subset \mathbb{R}$

(a) Kreuzen Sie genau die wahren Aussagen an. **[2]**

☐ $-2 \in M$ ☒ $-1 \in M$ ☒ $0 \in M$ ☐ $1 \in M$ ☐ $2 \in M$

(b) Geben Sie, wenn möglich, eine Folge an, die in M enthalten ist und gegen -1 konvergiert.

$-1 = \cos(\pi) \in M,\ x_n := -1 \to -1 \quad (n \to \infty)$ **[1]**

(c) Geben Sie, wenn möglich, eine Folge an, die in M enthalten ist und gegen 1 konvergiert.

$M \ni \cos(\frac{\pi}{n}) =: x_n \to 1\ (n \to \infty)$ **[2]**

(d) Wie lauten jeweils Minimum/Maximum und Infimum/Supremum der Menge M?

- $\min M$ **[1]**

☐ $= -\infty$ ☒ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

- $\inf M$ **[1]**

☐ $= -\infty$ ☒ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

- $\max M$ **[1]**

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☐ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☒ ist nicht definiert

- $\sup M$ **[1]**

☐ $= -\infty$ ☐ $= -1$ ☐ $= 0$ ☒ $= 1$ ☐ $= 2$ ☐ $= \infty$ ☐ ist nicht definiert

(e) Entscheiden Sie mit kurzer Begründung, ob die folgende Aussage wahr ist:

Für jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $f|_M : M \to \mathbb{R}$ ihr Supremum an.

Die Aussage ist falsch. **[1]**
$f : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist stetig, **[1]**
$\sup f(M) = \sup M = 1$, aber $1 \notin f(M) = M$ **[1]**

Lösung:

s.o.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[8 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-n^2}\right)$ **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=-\frac{1}{2}$ ☐ $=0$ ☒ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ ist nicht definiert

(b) Schreiben Sie die Reihe $\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^3+\cdots$ mit dem Summenzeichen und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 5 \qquad \textbf{[3]}$$

(c) Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n(-1)^n}{n^2}$ ist **[3]**

- bestimmt divergent: ☐ Ja ☒ Nein
- konvergent: ☒ Ja ☐ Nein
- absolut konvergent: ☐ Ja ☒ Nein

LÖSUNG:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4-n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-(n^4-n^2)}{n^2+\sqrt{n^4-n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$

(b) Dies ist eine geometrische Reihe, die Basis des Summanden $\frac{5}{6}$ ist vom Betrag kleiner als eins. Die Reihe ist also absolut konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}}=5.$

(c) Die Reihe ist konvergent als Summe zweier konvergenter Reihen, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ und der alternierenden harmonischen Reihe, also nicht bestimmt divergent. Da Summen und Differenzen absolut konvergenter Reihen wieder absolut konvergent sind, gilt: wäre die Reihe absolut konvergent, dann müsste auch die alternierende harmonische Reihe absolut konvergent sein. Widerspruch.

4. **Potenzreihen** **[12 Punkte]**

Geben Sie mit Begründung alle $x \in \mathbb{R}$ an, für die die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} x^{2n}$ konvergiert.

LÖSUNG:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^4} x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ mit } a_k = \begin{cases} \frac{3^{k/2}}{(k/2)^4} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$ **[3]**

Somit ist $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{3^{1/2}}{\sqrt[k]{(k/2)^4}} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$. **[2]**

Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{3^{1/2}}{\sqrt[k]{(k/2)^4}} = \sqrt{3} \lim_{k\to\infty} \frac{(\sqrt[k]{2})^4}{(\sqrt[k]{k})^4} = \sqrt{3}$ hat $\sqrt[k]{|a_k|}$ die Häufungspunkte 0 und $\sqrt{3}$. **[2]**

Also ist $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt{3}$. **[1]**

Der Konvergenzradius ist also $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **[1]**

Somit konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und divergiert für $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$. **[1]**

Für $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ lautet die Reihe $p(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Diese Reihe konvergiert (sogar absolut), da der Exponent im Nenner $4 > 1$ ist. Insgesamt erhalten wir: Die Potenzreihe konvergiert genau dann, wenn $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ gilt. **[2]**

5. **Grenzwerte von Funktionen** **[5 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log x}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -2 ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☒ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Welchen Wert hat $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{\log x}\right)^2$?

$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{\log x}\right)^2 = \ 4$ **[1]**

(c) Geben Sie an, für welches $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei **[2]**

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{für } x = 1, \\ \dfrac{x^2-x}{x^2+x-2} & \text{für } x \neq 1. \end{cases}$$

☐ $c = -3$ ☐ $c = -1$ ☐ $c = -\frac{1}{3}$ ☐ $c = 0$ ☒ $c = \frac{1}{3}$ ☐ $c = 1$ ☐ $c = 3$ ☐ für kein $c \in \mathbb{R}$

LÖSUNG:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log x} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = 2.$

(b) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2-1}{\log x}\right)^2 = \left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\log x}\right)^2 = 2^2 = 4.$

(c) Zähler und Nenner sind als Polynome stetig differenzierbar und haben bei $x = 1$ den Wert 0. Die l'Hospitalsche Regel ergibt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-x}{x^2+x-2} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

6. **Taylorentwicklung** **[11 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$.

(a) Wie lautet das Taylorpolynom sechster Ordnung von f im Entwicklungspunkt 0? **[3]**

$$(T_0^6 f)(x) = \qquad x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-2, 2]$ gilt:

$$\left|f(x) - (T_0^6 f)(x)\right| \le \frac{1}{5}.$$

LÖSUNG:

(a) Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots$$

die Taylorreihe von $f(x)$. Das Taylorpolynom erhält man durch Abschneiden.

(b) Nach dem Satz von Taylor (f ist sogar unendlich oft differenzierbar) **[1]**
gilt für das Restglied der Taylorentwicklung, dass $(R_0^6 f)(x) = f(x) - (T_0^6 f)(x) = \frac{x^7}{7!} f^{(7)}(\xi)$ für ein ξ zwischen 0 und x. **[2]**
Wegen $f^{(7)}(x) = f'''(x) = -\cos(x)$ gilt immer $|f^{(7)}(x)| \le 1$. **[2]**
Somit gilt für $x \in [-2, 2]$, dass

$$|(R_0^6 f)(x)| \le \frac{|x|^7}{7!} \sup_{\xi \in [-2,2]} |f^{(7)}(\xi)| \le \frac{2^7}{7!} = \frac{2^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{8}{315} \le \frac{8}{40} = \frac{1}{5}.$$

[3]

7. **Integration** **[11 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie die Ableitung von $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ an.

(c) Berechnen Sie $I_1 := \int\limits_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

(d) Berechnen Sie $I_2 := \int\limits_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ unter Verwendung von $I_0 := \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Hinweis: In (d) partielle Integration mit Hinblick auf (b).

Lösung:

(a) Die Ableitung ist $\frac{\mathrm{d}}{dx}\mathrm{e}^{-x^2} = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$ **[1]**

(b) Wegen (a) ist eine Stammfunktion von $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2}$ gegeben durch $x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$. **[2]**

(c) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{1}]}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_0^b xe^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{\text{(b)}\,[\mathbf{1}]}{=} \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^b = \frac{1}{2} - \lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{2}e^{-b^2} \overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{1}{2}$.

(d) Durch geeignetes aufspalten des Integranden kann man (b) verwenden

$$\int\limits_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{1}]}{=} \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \underbrace{x}_{f(x)}\underbrace{x\mathrm{e}^{-x^2}}_{g'(x)}\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{2}]}{=} \lim_{b\to\infty} \left(\left[x(-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2})\right]_0^b - \int\limits_0^b 1 \cdot (-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2})\mathrm{d}x \right)$$

$$\overset{[\mathbf{1}]}{=} 0 + \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \overset{[\mathbf{1}]}{=} \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

8. **Matrixexponential** **[11 Punkte]**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Matrix A^n für $n \in \mathbb{N}_0$. **[3]**

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie die Matrix $B(t) = \exp(tA)$ für $t \in \mathbb{R}$. **[5]**

$$\begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **[3]**

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}(t) - B_{12}(t) \\ B_{21}(t) - B_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)\mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

(a) $A^0 = I_2,\ A^1 = A,\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ldots, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathrm{e}^{tA} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \begin{pmatrix} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} & \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-n)\frac{t^n}{n!} \\ 0 & \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & -t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$,

da $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-n)\frac{t^n}{n!} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} = -t\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = -t\mathrm{e}^t$ ist.

(c) Eine Lösung ist $x(t) = \mathrm{e}^{tA}x(0) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.