
Nachklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti

Sommersemester 2014

25. September 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Leiten Sie den Radius r_n der n -ten Bohrschen Bahn, sowie die zugehörige Bindungsenergie E_n in einem wasserstoffartigen Atom mit Kernladungszahl Z und der reduzierten Masse μ her. Benutzen Sie dafür die Quantisierungsbedingung für den Drehimpuls $\ell = n\hbar$.

Lösung

Da die Zentripetalkraft der Coulombkraft entsprechen muss, muss gelten:

$$\frac{\mu v^2}{r} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (1)$$

[1]

Die Geschwindigkeit v kann mithilfe der Quantisierungsbedingung eliminiert werden:

$$\ell = \mu v_n r_n = n\hbar \Rightarrow v_n = \frac{n\hbar}{\mu r_n}$$

[1]

Einsetzen in (1) ergibt

$$\frac{n^2 \hbar^2}{\mu r_n^3} = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2}.$$

Durch Auflösen nach r_n erhält man für den Radius der n -ten Bohrschen Bahn

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\mu Z e^2} n^2 \quad (2)$$

[1]

Die Bindungsenergie ist die Summe von kinetischer und potenzieller Energie:

$$E_n = \frac{1}{2}\mu v_n^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{n^2\hbar^2}{2\mu r_n^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r_n}$$

Erneutes Einsetzen von r_n aus (2) ergibt schließlich

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

[1]

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei eine rechteckige Potentialsenke der Breite $b > 0$ und der Tiefe $-V_0$ mit $V_0 > 0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich I)} \\ -V_0 & x \in [0, b] \text{ (Bereich II)} \\ 0 & x > b \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

Eine ebene Materiewelle der Energie $E > 0$ und Masse m treffe von links auf diese Senke. Der Betrag des Wellenvektors in den drei Bereichen sei mit k_I , k_{II} und k_{III} bezeichnet.

- Die Energie E des Teilchens sei fest vorgegeben. Berechnen Sie die Tiefe V_0 der Senke in Abhängigkeit der Energie E , sodass Folgendes gilt: $k_{II} = 4 \cdot k_I$.
- Die Senkentiefe erfülle nun die Bedingung aus der ersten Teilaufgabe (d.h. $k_{II} = 4k_I$). Geben Sie für alle drei Bereiche I, II und III die zugehörigen, resultierenden Ortswellenfunktionen $\phi_I(x)$, $\phi_{II}(x)$ und $\phi_{III}(x)$ mit allgemeinen Amplitudenkoeffizienten an.
- Stellen Sie die Anschlussbedingungen auf, welche die Ermittlung der Amplitudenkoeffizienten aus der zweiten Teilaufgabe erlauben.
- Betrachten Sie zusätzlich den Spezialfall $\lambda_I = \frac{1}{2}b$, wobei λ_I die Materiewellenlänge im Bereich I bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit T , mit der das Teilchen die Potentialsenke überwindet.

Lösung

- Für die kinetische Energie E_{kin} gilt allgemein

$$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE_{\text{kin}}}$$

Für die Bereiche I und III gilt

$$k_I = k_{III} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE},$$

denn $V = 0$ und für den Bereich II

$$k_{II} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)}$$

[1,5]

wegen $V = -V_0$. Mit der Bedingung $k_{II} = 2k_I$ folgt also

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E + V_0)} \stackrel{!}{=} \frac{4}{\hbar} \sqrt{2mE} \Leftrightarrow E + V_0 = 16E \Leftrightarrow V_0 = 15E$$

[1]

- (b) Im Bereich I gibt es die einfallende und eine rücklaufende/reflektierte Welle. Die Amplitude der einlaufenden Welle kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf 1 normiert werden:

$$\phi_I(x) = Ae^{ik_I x} + e^{-ik_I x}$$

Im Bereich II gibt es ebenfalls einen nach rechts und einen nach links laufenden Anteil, außerdem gilt $k_{II} = 4k_I$. Also

$$\phi_{II}(x) = Be^{4ik_I x} + Ce^{-4ik_I x}.$$

Im Bereich III existiert nur ein nach rechts laufender Anteil und es gilt $k_{III} = k_I$, womit

$$\phi_{III}(x) = De^{-ik_I x}$$

[1,5]

- (c) An den Potenzialübergängen muss sowohl die Wellenfunktion $\phi(x)$ als auch die erste Ableitung $\phi'(x)$ stetig sein. Für die Stelle $x = 0$ muss also $\phi_I(0) = \phi_{II}(0)$, also

$$1 + A = B + C \quad (3)$$

gelten. Weiterhin $\phi'_I(0) = \phi'_{II}(0)$, also

$$ik_I - ik_I A = 4ik_I B - 4ik_I C \Rightarrow 1 - A = 4B - 4C \quad (4)$$

[1]

- (d) Für die Stelle $x = b$ erhält man analog die Bedingungen

$$\begin{aligned} Be^{4ik_I b} + Ce^{-4ik_I b} &= De^{ik_I b} \\ 4ik_I Be^{4ik_I b} - 4ik_I Ce^{-4ik_I b} &= ik_I De^{ik_I b} \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die letzte Gleichung zu

$$4Be^{4ik_I b} - 4Ce^{-4ik_I b} = De^{ik_I b} \quad (6)$$

umgeformt werden kann. Dann bilden (3), (4), (5) und (6) das gesuchte Gleichungssystem.

[1]

Es gilt

$$k_I = \frac{2\pi}{\lambda_I} = \frac{4\pi}{b} \Rightarrow k_I b = 4\pi$$

Die in (5) und (6) vorkommenden Exponentialfunktionen reduzieren sich damit jeweils zu einem Faktor 1 (wegen $e^{ik\pi} = 1, \forall k \in 2\pi \cdot \mathbb{Z}$). Man erhält also ein System von vier Gleichungen

$$\begin{cases} 1 + A = B + C \\ 1 - A = 4B - 4C \\ B + C = D \\ 4B - 4C = D \end{cases}$$

Addition der ersten beiden Gleichungen liefert $2 = 5B - 3C$, Addition des Vierfachen der dritten zur letzten $B = \frac{5}{8}D$ und Subtraktion von der letzten von viermal der dritten $C = \frac{3}{8}D$. Eingesetzt in die letzte Gleichung ergibt dies

$$2 = \frac{25}{8}D - \frac{9}{8}D = 2D \Rightarrow D = 1$$

Für die Transmissionswahrscheinlichkeit T gilt einfach (da $k_{\text{II}} = k_{\text{I}}$)

$$T = |D|^2 = 1.$$

Unter den gegebenen Bedingungen $k_{\text{II}} = 4k_{\text{I}}$ und $\lambda_{\text{I}} = \frac{1}{2}b$ wird das Teilchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 100% über die Mulde transmittiert.

[2]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung der – ohne Magnetfeld entarteten – magnetischen Unterzustände im Magnetfeld und die daraus resultierende Verschiebung der Emissionslinien beim Übergang zwischen zwei derartig verschobenen Niveaus.

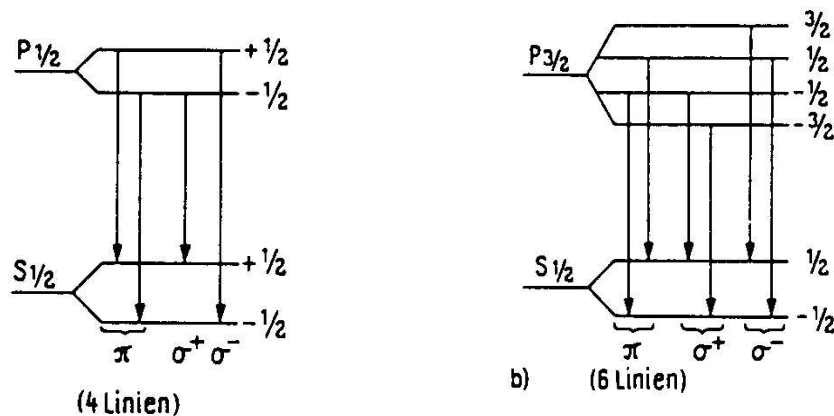
- Geben Sie die für die Quantenzahlen J und m_j geltenden Auswahlregeln für die Emission elektrischer Dipolstrahlung an.
- Wieviele unterschiedliche Linien sind beim Übergang von einem $p_{1/2}$ - bzw. einem $p_{3/2}$ -Niveau ins $s_{1/2}$ -Niveau eines Einelektronensystems im Magnetfeld zu beobachten? Skizzieren Sie die Niveau-Schemata und tragen Sie die Übergänge **und** deren Polarisierung ein.
- Welcher Landé-Faktor ergibt sich für die beiden Ausgangs- und das Zielniveau? Um welche Energie sind damit die einzelnen Niveaus in einem Magnetfeld von 0,1T verschoben? Verwenden Sie wo nötig die Näherung $g_s = 2$.

Lösung

- $\Delta J = \pm 1, 0$
 - wobei $J = 0 \rightarrow J = 0$ verboten ist
 - $\Delta m_j = \pm 1, 0$

[1,5]

(b) [3]



	l	s	j	g_j
$p_{1/2}$	1	$1/2$	$1/2$	$2/3$
$p_{3/2}$	1	$1/2$	$3/2$	$4/3$
$s_{1/2}$	0	$1/2$	$1/2$	2

[1]

- $p_{1/2} \rightarrow s_{1/2}$: Es existieren zwei Ausgangs-Subniveaus und zwei Ziel-Subniveaus. Keiner der Übergänge ist durch Auswahlregeln verboten, also gibt es vier Übergänge.
- $p_{3/2} \rightarrow s_{1/2}$: Es existieren vier Ausgangs-Subniveaus und zwei Ziel-Subniveaus. Übergänge von $J = 0 \rightarrow J = 0$ liegen gar nicht vor, und nur $m = 3/2 \rightarrow m = -1/2$ sowie $m = -3/2 \rightarrow m = 1/2$ verletzen die Regel $|\Delta m_j| \leq 1$. Dementsprechend verbleiben sechs Übergänge.

(c) Der Landé-Faktor ist

$$g_j = 1 + \frac{1}{2} \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)}$$

[0,5]

In der Tabelle sind die Werte von g_j für die drei Zustände zu finden. Für die Energie gilt

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(B \neq 0) - E(B = 0) \\ &= \mu_B B m_j g_j \\ &= 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV/T} \cdot 0,1 \text{ T} \cdot m_j g_j \end{aligned}$$

[1]

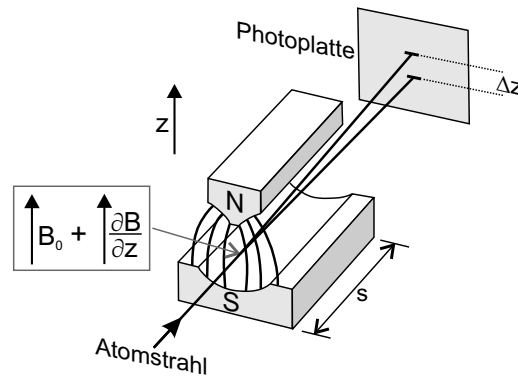
Die numerischen Ergebnisse sind in Punkt (c) aufgelistet.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Beim Stern-Gerlach-Experiment wird ein kollimierter Atomstrahl durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt, welches aus einer Überlagerung von homogenem Feld B_0 und Feldgradient

	m_j	g_j	$\Delta E(1/\mu_B B)$	$\Delta E(10^{-6} \text{eV})$
$s_{1/2}$	$1/2$	2	1	5,8
	$-1/2$	2	-1	-5,8
$p_{1/2}$	$1/2$	$2/3$	$1/3$	1,9
	$-1/2$	$2/3$	$-1/3$	-1,9
$p_{3/2}$	$3/2$	$4/3$	2	11,6
	$1/2$	$4/3$	$2/3$	-3,9
	$-1/2$	$4/3$	$-2/3$	-3,9
	$-3/2$	$4/3$	-2	-11,6

[2]



$\partial B/\partial z$ besteht. Sowohl homogener Feldanteil als auch Feldgradient weisen beide in z -Richtung, der Feldgradient habe überall entlang der z -Achse den gleichen Wert. Auf einer Photoplatte wird der Auftreff-Ort der Atome analysiert.

Hinweis: Verwenden Sie die z -Achse als Quantisierungsachse des Systems.

Betrachten Sie im Folgenden nur elektronische Zustände, d.h. vernachlässigen Sie eventuell vorhandene Kerndrehimpulse und deren Kopplung an die Elektronenhülle.

- Zunächst wird ein Strahl aus Wasserstoffatomen im elektronischen Grundzustand in die Apparatur eingeschossen. Es zeigen sich auf dem Schirm zwei getrennte Auftreff-Orte, die einen Abstand Δz voneinander besitzen (siehe Abbildung). Erklären Sie, warum es gerade zwei Auftreff-Orte gibt. Wie kommt die Kraft zustande, welche die Ablenkung der Teilstrahlen verursacht?
- Es werden nun Wasserstoffatome mit der gleichen Geschwindigkeit wie in der ersten Teilaufgabe eingeschossen, allerdings befinden sich diese Atome im angeregten $2p_{3/2}$ -Zustand. Wie viele Auftreff-Orte erwarten Sie insgesamt, wenn wir (unrealistischerweise) davon ausgehen, dass die angeregten Zustände bis zum Schirm nicht zerfallen? Berechnen Sie die Abstände zwischen diesen Orten auf dem Schirm in Einheiten der in der ersten Teilaufgabe definierten Länge Δz und machen Sie anhand einer Skizze die Lage dieser Orte zueinander deutlich. Tragen Sie in die Skizze auch die Auftreff-Orte der Atome im Grundzustand ein.

Hinweis: Das Magnetfeld sei nicht so stark, dass die Spin-Bahn-Kopplung der Elektronenhülle zerstört wird.

- Nun wird die Stern-Gerlach-Apparatur für ein Gemisch aus Ortho- und Parahelium im

jeweiligen elektronischen Grundzustand verwendet. In welche Teilstrahlen (Quantenzahlen) werden die beiden Helium-Komponenten jeweils aufgespalten? Inwieweit ist es möglich, diese beiden unterschiedlichen Helium-Zustände zu trennen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

- (a) Im elektronischen Grundzustand hat das Elektron im Wasserstoffatom den Zustand $1s$. Der Bahndrehimpuls ist somit $l = 0$ und der Gesamtdrehimpuls ist gleich dem Spindrehimpuls $j = s = 1/2$.

Der Elektronenspin hat zwei Möglichkeiten sich im äußeren Magnetfeld (B_0) entlang der z -Achse einzustellen: $m_s = \pm 1/2$.

Dies führt zu der Aufspaltung in zwei Teilstrahlen mit jeweils einem Auftreffpunkt. Die ablenkende Kraft entsteht aus dem Zusammenwirken von magnetischem Moment, welches mit dem Spindrehimpuls verbunden ist und dem Gradienten des Magnetfelds $\partial B/\partial z$:

$$F_{\text{Stern-Gerlach}} = \mu_{s,z} \cdot \frac{dB}{dz} = -m_s g_s \mu_B \frac{dB}{dz} \quad [1]$$

- (b) Ein Elektron im $2p_{3/2}$ -Zustand hat die Quantenzahlen $l = 1$, $s = 1/2$ und $j = 3/2$.

Für $j = 3/2$ existieren vier Möglichkeiten ($m_j = \pm 1/2$, $m_j = \pm 3/2$), wie sich der Gesamtdrehimpuls \vec{j} im Magnetfeld ausrichten kann. Da diese Zustände alle unterschiedliche z -Projektionen ihrer magnetischen Momente besitzen, erwartet man also vier getrennte Auftreff-Orte auf der Photoplatte.

Die Ablenkung auf dem Schirm ist proportional zur Kraft im Magnetfeldgradienten:

$$F_{\text{Stern-Gerlach}} = \mu_{j,z} \frac{dB}{dz} = -m_j g_j \mu_B \frac{dB}{dz}$$

Man benötigt also den Landé-Faktor g_j :

$$g_{j=3/2}(l=1, s=1/2) = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 \cdot 2}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}} = 1 + \frac{9-4}{15} = \frac{4}{3}$$

Der Abstand zwischen den beiden Auftreff-Orten bei reiner Spinaufspaltung (für $s = 1/2$, $l = 0$) beträgt auf der Photoplatte Δz , für die Kraft im Magneten gilt dabei (siehe erste Teilaufgabe):

$$\begin{aligned} |F_{\text{Stern-Gerlach}}(j=s=1/2, l=0, m_j=m_s=\pm 1/2)| &= \left| -m_s g_s \mu_B \frac{dB}{dz} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mu_B \cdot \frac{dB}{dz} = \mu_B \frac{dB}{dz} \end{aligned}$$

Für die beiden p -Zustände mit $j = 3/2$ und $m_j = \pm 1/2$ erhält man

$$\begin{aligned} |F_{\text{Stern-Gerlach}}(j=3/2, l=1, m_j=\pm 1/2)| &= \left| -m_j g_j \mu_B \frac{dB}{dz} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \mu_B \cdot \frac{dB}{dz} = \frac{2}{3} \mu_B \frac{dB}{dz} \end{aligned}$$

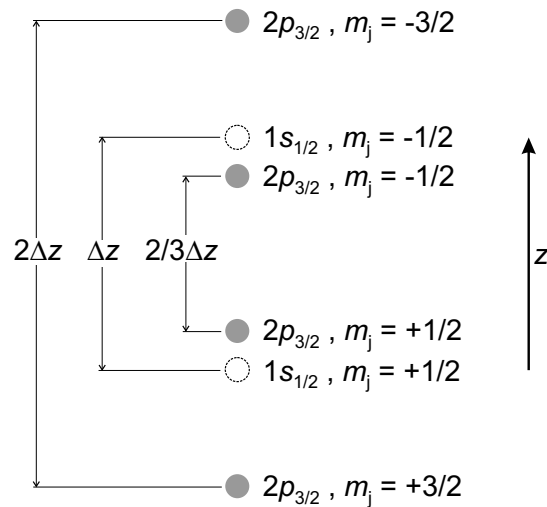


Abbildung 1: zu Aufgabe 11. Der Grundzustand aus der ersten Teilaufgabe ist gestrichelt

Diese beiden Zustände haben einen Abstand von $\frac{2}{3}\Delta z$.

Für die beiden p -Zustände mit $j = 3/2$ und $m_j = \pm 3/2$ ergibt sich:

$$|F_{\text{Stern-Gerlach}}(j = 3/2, l = 1, m_j = \pm 3/2)| = \left| -m_j g_j \mu_B \frac{dB}{dz} \right| = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \mu_B \cdot \frac{dB}{dz} = 2\mu_B \frac{dB}{dz}$$

Als Abstand erhält man also $2\Delta z$. Auf der Photoplatte erhält man das Ergebnis aus Abbildung 1

[2,5]

[1,5]

- (c) Beim Parahelium haben die beiden Elektronen entgegengesetzte Spinrichtung, der Gesamtspin beträgt $S = 0$. Beide Elektronen haben den Zustand $1s$, der Gesamtbahndrehimpuls beträgt $L = 0$.

Für den Gesamthüllendrehimpuls gilt somit $J = 0$, das magnetische Moment verschwindet ($\mu_J = 0$) und der Parahelium-Strahl wird im Magneten nicht abgelenkt (und natürlich auch nicht aufgespalten).

[1]

Beim Orthohelium sind die Spins der beiden Elektronen parallel gerichtet, der Gesamtspin ist $S = 1$. Ein Elektron ist im $1s$ -, das andere im $2s$ -Zustand, der Gesamtbahndrehimpuls ist hier ebenfalls $L = 0$.

Der Gesamthüllendrehimpuls ist gleich dem Gesamtspin $J = S = 1$. Es gibt drei Möglichkeiten, wie sich \vec{J} im Magnetfeld ausrichten kann ($m_J = 0, \pm 1$). Das Orthohelium wird in drei Teilstrahlen aufgespalten, wobei jedoch der Strahl mit $m_J = 0$ ($\Rightarrow \mu_{J,z} = 0$) nicht abgelenkt wird.

[1]

Mit Hilfe der Stern-Gerlach-Apparatur ist es also möglich, die beiden $m_J = \pm 1$ -Zustände des Orthoheliums in jeweils reiner Form abzutrennen, der $m_J = 0$ -Zustand des Orthoheliums kann jedoch nicht vom Parahelium getrennt werden.

[1]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Welche LS-Terme (Spektroskopische Notation) gehören zu den folgenden Konfigurationen (Grundzustände **und** angeregte Zustände)?

- $1s^2 2s 2p$
- $1s^2 2s^2 2p^6 3p 3d$

Beachten Sie das Pauliprinzip.

Lösung

Gefüllte Schalen tragen nicht zum Gesamtdrehimpuls bei und müssen daher nicht in Betracht gezogen werden. Die zu koppelnden Elektronen befinden sich jeweils in unterschiedlichen Unterschalen, so dass das Paulinprinzip bereits erfüllt ist.

$1s^2 2s 2p$ Wesentlich sind die Elektronen $2s 2p$ mit $l_1 = 0$, $s_1 = 1/2$, $l_2 = 1$, $s_2 = 1/2$. Dann ist $L = 1$ sowie $S = 0, 1$. Es gibt also die Terme 1P und 3P .

[1]

$1s^2 2s^2 2p^6 3p 3d$ Wesentlich sind die Elektronen $3p 3d$ mit $l_1 = 1$, $s_1 = 1/2$, $l_2 = 2$, $s_2 = 1/2$. Damit ist $L = 1, 2, 3$ sowie $S = 0, 1$. Es gibt also nur die Terme 1P , 3P , 1D , 3D , 1F und 3F .

[2]

Aufgabe 7 (11 Punkte)

Ein nicht dehnbarer, luftdichter Plastiksack mit einem Maximalvolumen $V_{\max} = 18 \text{ dm}^3$ ist in $h = 20 \text{ m}$ Tiefe ($p_1 = 3 \text{ bar}$) in einem Wasserreservoir festgemacht.

Der Plastiksack ist dort nicht prall, sondern nur bis zu einem Volumen $V_1 = 5.0 \text{ dm}^3$ mit Stickstoff gefüllt. Das Füllgas hat die Temperatur $T_1 = 4^\circ \text{C}$ des umgebenden Wassers.

Die Verankerung wird gelöst und der Plastiksack steigt zu Oberfläche hoch. Dort herrscht der Luftdruck $p_0 = 1.0 \text{ bar}$, die Wassertemperatur ist $T_2 = 24^\circ \text{C}$.

- Nach einiger Zeit hat das Füllgas im schwimmenden Plastiksack an der Wasseroberfläche die Wassertemperatur T_2 der Umgebung angenommen. Warum ist der Sack dann nicht prall gefüllt? (kurze Begründung)
- Welche Stoffmenge n des Stickstoffgases enthält der Plastiksack?

Betrachten Sie für den Wärmeaustausch des Füllgases mit der Umgebung zwei – idealisierte – Grenzfälle

- (c) Das Gas im Plastiksack behält (1) beim Aufsteigen zunächst die Temperatur T_1 bei und erwärmt sich (2) erst an der Wasseroberfläche, bei dem dort herrschenden Druck, auf die Temperatur T_2 .

Welche Wärme Q_{12} nimmt bei diesen Prozessen das Füllgas aus dem Wasser auf?

- (d) Der Plastiksack steigt so rasch auf, dass dabei (1) das Füllgas keine Wärme aus dem Wasser aufnimmt und (2) erst nach einiger Zeit an der Oberfläche die Temperatur T_2 annimmt.

Welche Wärme Q_{12}^* wird bei diesen Prozessen insgesamt vom Füllgas aufgenommen?

Nehmen Sie Stickstoff als ideales zweiatomiges Gas an.

Lösung

- (a) Aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases und der Forderung $p_2 = p_0$ folgt

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_2}{T_2} \quad (7)$$

und damit für das Volumen

$$V_2 = \frac{p_1 T_2}{p_0 T_1} V_1 = \frac{2.96 \text{ bar} \cdot 297 \text{ K}}{1 \text{ bar} \cdot 277 \text{ K}} 5 \text{ dm}^3 \quad (8)$$

$$= 15.86 \text{ dm}^3 \quad (9)$$

Weil $V_2 < V_{\max}$ ist der Plastiksack nicht prall gefüllt.

[1]

- (b) Die Stoffmenge n enthält man aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases für den Anfangszustand „1“.

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = \frac{2.96 \text{ e5 N/m}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8.31 \text{ Nm/mol/K} \cdot 277 \text{ K}} \quad (10)$$

$$= 0.64 \text{ mol} \quad (11)$$

[1]

- (c) 1. Teilprozess:

Aufstieg bei konstanter Temperatur – isotherme Wärmeaufnahme bei T_1 ; Ausdehnung des Füllgases

$$Q_{\text{isotherm}} = n R_m T_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad (12)$$

$$= 0.64 \text{ mol} \cdot 8.31 \text{ Nm/mol/K} \cdot 277 \text{ K} \cdot \ln \left(\frac{15.86 \text{ dm}^3}{5.0 \text{ dm}^3} \right) = 1473 \text{ J} \cdot 1.154 \quad (13)$$

$$= 1700 \text{ J} \quad (14)$$

[1,5]

2. Teilprozess:

Isobare Erwärmung von T_1 auf T_2

$$Q_{\text{isobar}} = nC_{\text{mp}}(T_2 - T_1) \quad (15)$$

Die molare isobare Wärmekapazität C_{mp} bestimmt sich aus den Freiheitsgraden eines idealen zweiatomigen Gases. Nimmt man für ein zweiatomiges Stickstoff-Molekül an, dass im betrachteten Temperaturbereich auch die Freiheitsgrade der Rotation angeregt sind, dann ist

$$f_{\text{ges}}(\text{N}_2) = f_{\text{trans}} + f_{\text{rot}} = 3 + 2 = 5 \quad (16)$$

Die molare isobare Wärmekapazität $C_{\text{mp}}(\text{N}_2)$ bestimmt sich aus $f_{\text{ges}}(\text{N}_2)$ zu

[2]

$$C_{\text{mp}} = \frac{f_{\text{ges}}(\text{N}_2) + 2}{2} R_{\text{m}} = \frac{7}{2} \cdot 8.31 \text{ J/mol/K} = 29.10 \text{ J/mol/K} \quad (17)$$

Damit wird

$$Q_{\text{isobar}} = nC_{\text{mp}}(T_2 - T_1) = 0.64 \text{ mol} \cdot 29.10 \text{ J/mol/K} \cdot (297 - 276) \text{ K} \quad (18)$$

$$= 2072 \text{ J} \quad (19)$$

Die bei Aufsteigen und Aufwärmen insgesamt zugeführte Wärme ist damit

$$Q_{12} = Q_{\text{isotherm}} + Q_{\text{isobar}} = 1700 \text{ J} + 372 \text{ J} \quad (20)$$

$$= 2072 \text{ J} \quad (21)$$

[1]

(d) 1. Teilprozess:

Rasches Aufsteigen ohne Wärmeaustausch – isentrope Abkühlung auf T_{Zw}

Bei einem isentropen Prozess in einem adiabaten System wird keine Wärme ausgetauscht, also

$$Q_{\text{isentrope}}^* = 0 \text{ J} \quad (22)$$

[0,5]

2. Teilprozess:

Isobare Erwärmung von T_{Zw} auf T_2

$$Q_{\text{isobar}}^* = nC_{\text{mp}}(T_2 - T_{Zw}) \quad (23)$$

Man muss zunächst die Temperatur T_{Zw} bestimmen, die sich nach dem Aufsteigen einstellt. Die Isoentropengleichung, die Druck und Temperatur miteinander verknüpft, liefert für die Zustände „1“ und „3“

$$p_1^{1-\kappa} T_1^\kappa = p_{Zw}^{1-\kappa} T_{Zw}^\kappa \quad (24)$$

[1]

dabei gilt

$$p_{Zw} = p_0 \quad (25)$$

Der Isoentropenexponent $\kappa(N_2)$ ergibt sich aus der Zahl der Freiheitsgrade eines Moleküls (bestimmt in Teilaufgabe (c)) zu

$$\kappa(N_2) = \frac{f_{\text{ges}}(N_2) + 2}{f_{\text{ges}}(N_2)} = \frac{7}{5} = 1.40 \quad (26)$$

[1]

Damit wird

$$T_{Zw} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} T_1 = \left(\frac{2.96\text{bar}}{1.00\text{bar}}\right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} 277\text{K} = 0.733 \cdot 277\text{K} \quad (27)$$

$$= 203\text{K} \quad (28)$$

[1]

Die molare isobare Wärmekapazität $C_{mp}(N_2)$ bestimmt sich aus der Anzahl der Freiheitsgrade (bestimmt in Teilaufgabe (c)) zu

$$C_{mp}(N_2) = \frac{f_{\text{ges}}(N_2) + 2}{2} R_m = \frac{7}{2} \cdot 8.31\text{J/mol/K} = 29.10\text{J/mol/K} \quad (29)$$

Damit wird die für den isobaren Prozess $3 \rightarrow 2$ zugeführte Wärme

$$Q_{\text{isobar}}^* = nC_{mp}(T_2 - T_1) = 0.064\text{mol} \cdot 29.10\text{J/mol/K} \cdot (297 - 203)\text{K} \quad (30)$$

$$= 1751\text{J} \quad (31)$$

Die insgesamt aufgenommene Wärme ist also

$$Q_{12}^* = Q_{\text{isoentrop}}^* + Q_{\text{isobar}}^* = (0 + 1751)\text{J} \quad (32)$$

$$= 1751\text{J} \quad (33)$$

[1]

Konstanten

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\text{Js}$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$$

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{As/V/m}$$

$$\alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 5.3 \cdot 10^{-11}\text{m}$$

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9.27 \cdot 10^{-24}\text{JT}$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 \hbar^3} = 1.10 \cdot 10^7\text{m}^{-1}$$

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{J/K}$$

$$R_M = 8.31\text{J/Mol/K}$$

$$N_A = 6.02 \cdot 10^{23}\text{Mol}^{-1}$$

$$1\text{bar} = 1024\text{hPa}$$