Probeklausur Experimentalphysik 3
Lösung

Prof. Dr. L. Fabbietti
Wintersemester 2019/20
20. Januar 2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Eine Glühbirne strahlt gleichmäßig kugelförmige, elektromagnetische Wellen ab. Welche Kraft übt eine 100-Watt-Lampe mit einem Wirkungsgrad von 20 % auf eine in 1 m Abstand aufgehängte kreisrunde, absorbierende Foliescheibe (Durchmesser 3 cm)aus?

(b) Wie groß sind die Amplituden des elektischen und magnetischen Feldes? Was ändert sich, wenn die Folie alle einfallende Strahlung reflektiert?

(c) Ein gepulster Laser sende einen 1000-MW-Puls von 200 ns Dauer auf ein kleines Objekt der Masse 10 mg, das an einem 4 cm langen, dünnen Faden aufgehängt ist. Die Strahlung werde komplett absorbiert. Wie groß ist der maximale Auslenkwinkel des Pendels?

Lösung

(a) Die Energie der Lampe im Abstand r wird gleichmäßig auf der Kugeloberfläche von $4\pi r^2$ verteilt. Auf der Gesamtoberfläche haben wir die Intensität

$$I = \frac{100\ \mathrm{W} \cdot 0,2}{4\pi r^2} = 1,59155\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}. \tag{1}$$

[2]

Der Strahlungsdruck ist also

$$P_S = \frac{I}{c} \approx 5,3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{Pa}. \tag{2}$$

[1]

Die Folienoberfläche beträgt 0,0007069 m^2 (man nimmt einfach die Kreisscheibe). Unter der Annahme, dass die Kraft senkrecht einwirkt gilt:

$$F_S = P_S \cdot \pi R^2 = 3,746 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{N}. \tag{3}$$

[1]

Die Felder erhält man über die Definition des Poyntingvektors:

$$I = \langle|\vec{S}|\rangle = \frac{1}{2}\frac{E_0 B_0}{\mu_0}. \tag{4}$$

Aufgrund der Maxwellgleichungen sind E und B über $E = cB$ verbunden. Mit $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m erhält man

$$P_S = \frac{I}{c} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \tag{5}$$

$$\Rightarrow B_0 = \sqrt{2\mu_0 P_S} = 1,15 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{T} \tag{6}$$

$$\Rightarrow E_0 = cB_0 = 34,64\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \tag{7}$$

[3]

Wird alle einfallende Strahlung reflektiert, so verdoppelt sich die Kraft F.

[1]

(b) Der durch den Laserstrahl verursachte Impuls lautet

$$p = \frac{W}{c} = \frac{1000\ \mathrm{MW} \cdot 200\ \mathrm{ns}}{c} \approx 0,667\ \cdot 10^{-6}\ \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{8}$$

Dieser Impuls wird aufgrund der totalen Absorption vollständig auf die Masse übertragen. Daraus resultiert die Geschwindigkeit

$$v = p/m = 6,67 \cdot 10^{-2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{9}$$

[2]

Die kinetische Energie verwandelt sich vollständig in potentielle Energie beim Maximum der Auslenkung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgl(1 - \cos\theta) \tag{10}$$

Man erhält:

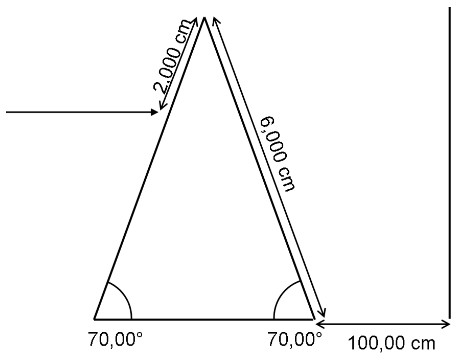
$$\cos\theta = 1 - \frac{v^2}{2gl} \quad \Rightarrow \quad \theta \approx 6,1^\circ. \tag{11}$$

[2]

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Ein Lichtstrahl trifft auf ein gleichschenkliges Prisma (siehe untenstehende Abbildung). Das Prisma besteht aus Flintglas mit einem wellenlängenabhängigen Brechungsindex. Für rotes Licht beträgt der Brechungsindex $1,603$ und für violettes Licht $1,645$. In einer Entfernung von 100 cm hinter dem Prisma befindet sich ein Schirm, auf dem das am Prisma gebrochene Licht wieder aufgefangen wird. Zunächst betrachten wir den Fall einer roten Lichtquelle.

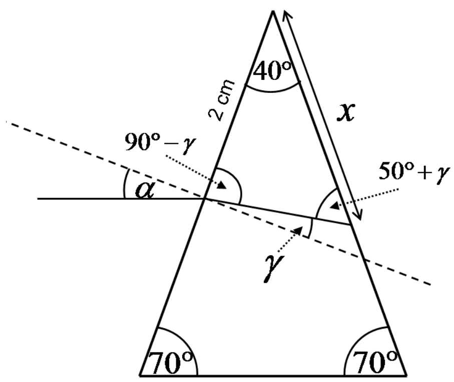
(a) An welcher Position des zweiten Schenkels des Prismas verlässt der Lichtstrahl das Prisma wieder (Abstand zur Spitze)? (Ersatzlösung: 2,1 cm)



(b) An welcher Position trifft der rote Lichtstrahl auf den Schirm?

(c) Nun verwenden wir eine Lichtquelle, die weißes Licht aussendet. Bekanntlich zerlegt das Prisma das weiße Licht so, dass das ganze Farbspektrum auf dem Schirm sichtbar wird. Wie breit ist das sichtbare Spektrum in der gegebenen Anordnung auf dem Schirm? Gehen sie vereinfachend davon aus, dass das Licht das Prisma am selben Punkt verlässt.

Lösung



(a)

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1} = 1,603 \quad ; \quad \alpha = 20^\circ$$

$$\gamma = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{1,603}\right) = 12,32^\circ$$

[**2**]

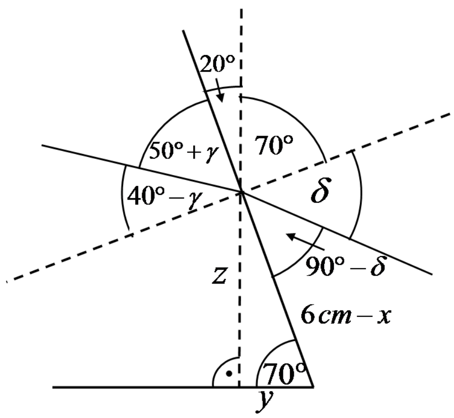
Sinussatz:

$$\frac{\sin(90,00^\circ - \gamma)}{\sin(50,00^\circ + \gamma)} = \frac{x}{2,000 \text{ cm}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sin(77,68^\circ)}{\sin(62,32^\circ)}) \cdot 2,000 \text{ cm} = 2,206 \text{ cm}$$

[**2**]

(b) Betrachte die zweite Grenzfläche



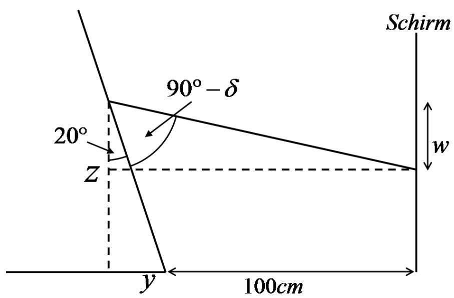
$$\frac{\sin(40,00^\circ - \gamma)}{\sin\delta} = \frac{n_{Luft}}{1,603} \Rightarrow \delta = \arcsin\left(\frac{1,603 \cdot \sin 27,68^\circ}{1}\right) = 48,13^\circ$$

[**2**]

$$\cos 70,00^\circ = \frac{y}{6,000\text{ cm} - x} \Rightarrow y = \cos 70,00^\circ \cdot (6,000\text{ cm} - 2,206\text{ cm}) = 1,298\text{ cm}$$

Ersatzlösung: 1,334 cm

[**1**]



$$\tan(110,00^\circ - \delta) = \frac{100,00\text{ cm} + y}{w} \Rightarrow w = \frac{100,00\text{ cm} + 1,298\text{ cm}}{\tan(110,00^\circ - 48,13^\circ)} = 54,16\text{ cm}$$

Ersatzlösung: 54,175 cm

[**2**]

(c) Führe analoge Rechnung mit $n = 1,645$ durch:

$$\gamma' = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{1,645}\right) = 12,00^\circ$$

$$\delta' = \arcsin\left(\frac{1,645 \cdot \sin(40,00^\circ - 12,00^\circ)}{1}\right) = 50,56^\circ$$

$$\Rightarrow w' = \frac{100,00 \text{ cm} + 1,298 \text{ cm}}{\tan(110,00^\circ - 50,56^\circ)} = 59,81 \text{ cm}$$

$\Rightarrow$ Breite des Spektrums:

$$59,81 \text{ cm} - 54,16 \text{ cm} = 5,65 \text{ cm}$$

[4]

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Die Transmissionsachsen zweier Polarisationsfolien seien gekreuzt, so dass kein Licht sie durchdringt. Eine dritte Folie werde so zwischen die ersten beiden gestellt, dass ihre Transmissionsachse mit der ersten einen Winkel θ bildet. Unpolarisiertes Licht der Intensität I_0 treffe auf die erste Folie.

(a) Geben Sie eine allgemeine Formel an, die den Zusammenhang von der durchgelassenen Intensität mit I_0 und θ beschreibt. *Hinweis*: $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$

(b) Berechnen Sie die Intensität des Lichts nach Durchgang durch alle drei Folien für $\theta = 45^\circ$

(c) für $\theta = 30^\circ$

Jetzt wird die mittlere Folie durch ein Quarz-Plättchen ersetzt. Dessen optische Achse hat einen Winkel $\theta = 45^\circ$.

(d) Berechnen Sie die Dicke(n) des Plättchens bei der die Intensität für die Wellenlänge $\lambda = 589$ nm maximal wird. Für diese Wellenlänge sind $n_\text{o} = 1,5443$ und $n_\text{ao} = 1,5534$.

Sie entfernen das Quarz-Plättchen und haben jetzt mehrere Polarisationsfolien zur Verfügung, die sie benutzen.

(e) Wieviele Filter sind insgesamt mindestens nötig, um mehr als 30 % des einfallenden Lichtes I_0 durch die Anordnung zu transportieren?

Lösung

(a) Die von der ersten Polarisationsfolie durchgelassene Intensität ist $I_1 = \frac{I_0}{2}$. Für die weiteren Folien gilt die Beziehung $I_{n+1} = I_n \cos^2\theta$. Wenn die Transmissionsachse der mittleren Folie mit der Achse der ersten den Winkel θ bildet, dann bildet sie mit der Achse der letzten Folie den Winkel $90^\circ - \theta$. Es ist aber $\cos(90^\circ - \theta) = -\sin\theta$ und $\cos^2(90^\circ - \theta) = \sin^2\theta$. Also gilt

$$I_3 = I_2 \sin^2\theta = I_1 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta$$

[3]

(b) Für $\theta = 45^\circ$ ergibt sich $I_3 = \frac{I_0}{8}$, da $\sin 90^\circ = 1$.

[1]

(c) Für $\theta = 30^\circ$ erhalten wir $I_3 = 3\frac{I_0}{32}$, da $\sin^2 60^\circ = \frac{3}{4}$.

[**1**]

(d) Die durchgelassene Intensität wird maximal, wenn wir ein $\lambda/2$-Plättchen haben, welches die Polarisationsrichtung des Lichtes um 90° dreht. Es muss gefordert werden, dass

$$\phi = 2\pi\frac{d}{\lambda}(n_{\text{ao}} - n_{\text{o}}) = (2k+1)\pi$$

[**2**]

Daraus ergibt sich die notwendige Dicke d der Platte zu

$$d = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{n_{\text{ao}} - n_{\text{o}}}(2k+1)$$

Einsetzen der Zahlenwerte gibt

$$d = (2k+1) \cdot 32,4\mu\text{m}$$

[**1**]

(e) Damit beträgt die Intensität nach n Filtern:

$$I_n = \frac{I_0}{2}\left(\cos^2(\alpha_i)\right)^n \tag{12}$$

[**1**]

mit

$$\alpha_i = \frac{90°}{n}. \tag{13}$$

[**1**]

Eingesetzt in den Ausdruck für I_n ergibt sich für $n = 5$ das erste Mal ein Ergebnis über 30 %:

$$\frac{I_5}{I_0} = \frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{90°}{5}\right)\right)^5 = 0,305 \tag{14}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir schauen uns eine Übergangsmatrix bei Matrixformalismus genauer an. Es sollen verschiedene Situationen untersucht werden, bei denen jeweils eines der vier Elemente der Übergangsmatrix verschwindet:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

(a) Zeigen Sie, dass alle Strahlen, die unter dem selben Winkel in das System eintreffen, das System am selben Ort verlassen, wenn gilt $A = 0$. Das heißt, dass anfänglich parallele Strahlen zu einem einzigen Punkt fokussiert werden.

(b) Was sind jeweils die besonderen Eigenschaften von Systemen, bei denen $B = 0$, $C = 0$ oder $D = 0$ ist?

Lösung

(a) Die Transformationsregel für den Fall $A = 0$ lautet

$$r_2 = Ar_1 + B\alpha_1 = B\alpha_1 \tag{16}$$

Somit folgt, dass alle Strahlen, die unter dem gleichen Winkel einfallen, das optische System am gleichen Ort verlassen;

$$r_2(r_1, \alpha_1) = r_2(\alpha_1). \tag{17}$$

[**2**]

(b) **B=0:**
Der Abstand zur optischen Achse für ein- und ausfallenden Strahl ist gleich.

C=0:

[**2**]

Der Winkel, unter dem die Strahlen das System verlassen, ergibt sich gemäß des Snellius'schen Brechungsgesetz in linearer Näherung:

$$n\alpha_1 = n'\alpha_2 \tag{18}$$

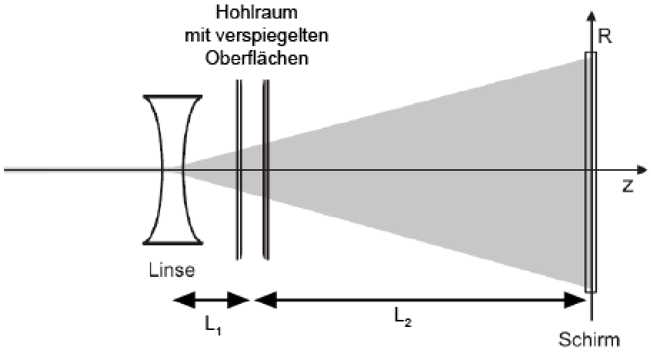
[**2**]

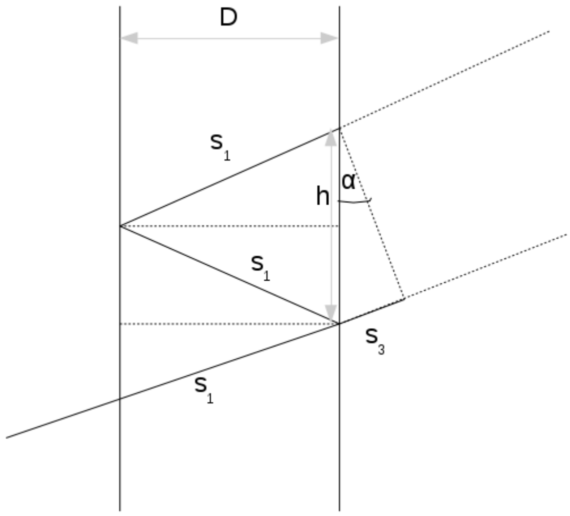
D=0:
Alle Strahlen, welche mit gleichem Abstand zur optischen Achse in das System einfallen, verlassen das System unter dem selben Winkel.

[**2**]

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Ein kohärenter Lichtstrahl der Wellenlänge $\lambda = 632,8$ nm propagiere in z-Richtung. Der Strahl wird durch eine dünne Konkavlinse aufgeweitet (siehe Abbildung). Anschließend passiert er einen Hohlraum der Dicke $D = 500\lambda$ mit verspiegelten, parallel ausgerichteten Oberflächen. Nun trifft er auf einen Schirm. Der Abstand zwischen Linse und Hohlraum ist $L_1 = 2$ cm und der Abstand zwischen Hohlraum und Schirm ist $L_2 = 8$ cm. Berechnen Sie die Positionen R_N der ersten zwei Intensitätsmaxima außerhalb der Achse.





Lösung

Das Prinzip entspricht dem Fabry-Perot-Interferometer. Für die Wege und Wegunterschiede gilt:

$$\cos\alpha = \frac{D}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad s_1 = \frac{D}{\cos\alpha} \tag{19}$$

$$\sin\alpha = \frac{h/2}{s_1} \quad \Leftrightarrow \quad h = 2s_1\sin\alpha = 2D\tan\alpha \tag{20}$$

$$\sin\alpha = \frac{s_3}{h} \quad \Leftrightarrow \quad s_3 = 2D\tan\alpha\sin\alpha \tag{21}$$

$$\Delta s = 2s_1 - s_3 = \frac{2D}{\cos\alpha}\left(1-\sin^2\alpha\right) = 2D\cos\alpha \tag{22}$$

[**1**]

Für den Strahl vom Mittelpunkt der Linse bis zum Schirm gilt:

$$\tan\alpha = \frac{R_x}{L_1+L_2}. \tag{23}$$

Für Interferenzmaxima gilt

$$\Delta s = 2D\cos\alpha = m\lambda, \tag{24}$$

[2]

also ist für $\alpha = 0°$ mit $D = 500\lambda$ $m_0 = 1000$.

[1]

$\cos\alpha$ wird für wachsende α kleiner, daher gilt für das n-te Interferenzmaximum:

$$\Delta s = (m - 0 - N)\lambda \tag{25}$$

und somit

$$R_N = (L_1 + L_2)\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{(1000 - N)\lambda}{1000\lambda}\right)\right) = (L_1 + L_2)\tan\left(\cos^{-1}\left(1 - \frac{N}{1000}\right)\right) \tag{26}$$

[2]

$$N = 1: \qquad R_1 = 0,45 \text{ cm}$$
$$N = 2: \qquad R_2 = 0,63 \text{ cm}$$

[2]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Findige Studenten sind dabei, möglichst viel Information auf ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt zu bekommen. Wie klein dürfen sie die Schrift maximal machen, wenn man sie ohne technische Hilfsmittel lesen können soll. Wie klein kann man den Buchstaben E machen, wenn das Kriterium zur Erkennbarkeit ist, dass die drei horizontalen Linien noch getrennt werden können? Nehmen Sie einen Pupillendurchmesser von 3 mm und einen Leseabstand von 25 cm an. Nehmen Sie das Licht an mit dem Sie die kleinste Größe erhalten.

Lösung

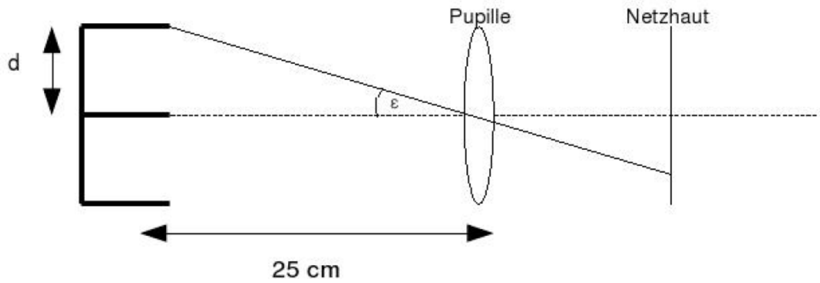
Mit dem Durchmesser D der Pupille gilt gemäß dem Rayleigh Kriterium der Auflösung für den Winkel ϵ (unter dem man zwei benachbarte Striche noch getrennt auflösen kann):

$$\epsilon = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{27}$$

[1]

Setzt man für $\tan(\epsilon) \approx \epsilon = \frac{d}{l}$ an, so erhält man:

[1]



$$\frac{d}{l} = 1.22\frac{\lambda}{D} \tag{28}$$

$$\rightarrow d = \frac{1.22\lambda l}{D} \approx 40,7\ \mu\text{m} \tag{29}$$

[**1**]

Hierbei wurde für die Wellenlänge ein Wert von 400 nm eingesetzt, was blauem Licht entspricht. Der Buchstabe E muss also mindestens etwa

$$2d = 81\ \mu\text{m} \tag{30}$$

groß gedruckt werden.

[**2**]

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Blaues Licht der Wellenlänge $\lambda = 430\text{nm}$ falle auf eine Photozelle, deren lichtelektrische Schicht eine Quanteneffizienz von $\eta = \frac{n_e}{n_{ph}} = 0,14$ hat (n_e: Anzahl rausgelöster Elektronen pro Zeiteinheit, n_{ph}: Anzahl eintreffender Photonen pro Zeiteinheit).

(a) Welche Austrittsarbeit W_A hat das Material der lichtelektrischen Schicht, wenn durch ein Gegenfeld der Spannung $U_B = 0,94$ V der Strom vollständig unterdrückt werden kann?

(b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Photoelektronen, wenn keine Gegenspannung angelegt ist.

(c) Wie groß ist die Strahlungsleistung des auf die Photozelle fallenden blauen Lichts, wenn ein maximaler Photoelektronenstrom von $I = 0,5$ mA fließt?

(d) Ab welcher Wellenlänge tritt kein Strom auf, wenn Sie annehmen, dass die lichtelektrische Schicht aus Cäsium besteht, dessen Austrittsarbeit $W_A = 2,14$ eV beträgt?

Lösung

(a)

$$\frac{hc}{\lambda} = eU + W_A \tag{31}$$
$$\rightarrow W_A = \frac{hc}{\lambda} - eU = 1,94 \text{ eV} \tag{32}$$

[2]

(b)

$$E_e = \frac{hc}{\lambda} - W_A = \frac{1}{2}mv^2 \tag{33}$$
$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda} - W_A\right)} = 5,8 \cdot 10^5 \quad \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{34}$$

[2]

(c) Zwischen n_e und dem Photostrom I gilt der Zusammenhang:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = en_e \tag{35}$$

Maximaler Photostrom bedeutet, dass alle freigeschlagenen Elektronen die Kathode erreichen. Es gilt daher für die Strahlungsleistung:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = n_{ph}E_{ph} = \frac{n_e}{\eta}E_{ph} = \frac{I}{e\eta}\frac{hc}{\lambda} \approx 10,3 \quad \text{mW} \tag{36}$$

[3]

(d) Hier muss die Photonenenergie kleiner als die Austrittsarbeit sein:

$$\frac{hc}{\lambda} \leq W_A \tag{37}$$
$$\rightarrow \lambda \geq \frac{hc}{W_A} = 579 \text{ nm} \tag{38}$$

[2]

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\text{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34}\text{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8\text{ms}^{-1}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{kg}$
Stefan Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3}\text{mK}$