Klausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2015
23. Juli 2015

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

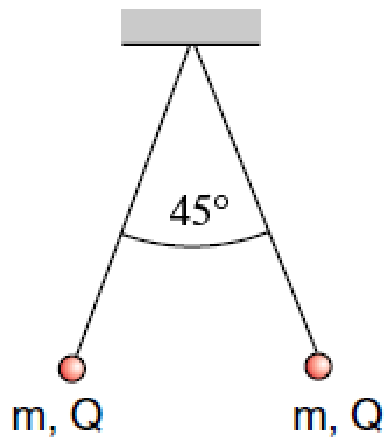
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zwei Kugeln mit gleichen elektrischen Ladungen und je einer Masse von $m = 0,3$kg werden im Vakuum an einem Punkt mit zwei isolierten Fäden von je $l = 0,2$m Länge am gleichen Punkt aufgehängt. Sie werden gleich stark elektrostatisch aufgeladen und die Fäden bilden danach einen Winkel von 45°.

(a) Wie groß sind die Ladungen auf den Kugeln?

(b) Zeichnen Sie für die gegebene Situation die Feldlinien der geladenen Kugeln.



Lösung:

(a) Durch die beiden Dreiecke in der Skizze erhält man

$$\tan\left(\frac{45°}{2}\right) = \frac{|F_C|}{|F_G|} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgr^2} \quad (1)$$

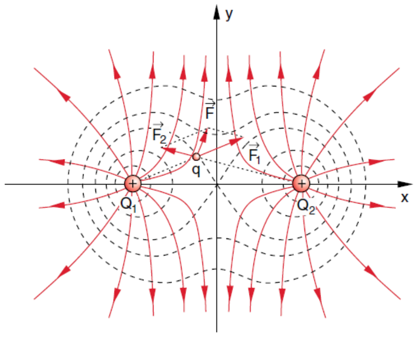
und

$$\sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \frac{r}{2l} \Rightarrow r = \sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\cdot 2l \tag{2}$$

Da wir auf die Ladung q kommen wollen, ergibt sich

$$q = 4l\sin\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)} = 1,78\mu\text{C} \tag{3}$$

[2,5]

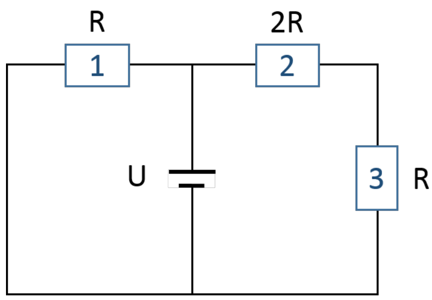


(b)

[0,5]

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Betrachten Sie die in der Abbildung gezeigte Anordnung von 3 Widerständen und einer Spannungsquelle U.



(a) Wie groß ist der Strom durch den Widerstand 3?

(b) Zeigen Sie, dass die gesamte Leistung der Stromquelle in Wärme umgewandelt wird.

Lösung

(a) Für die Reihenschaltung von Widerstand R_2 und R_3 Berechnen wir zunächst den Ersatzwiderstand R_{23}

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 3R \tag{4}$$

Man erhält eine Parallelschaltung von Widerstand R_1 und dem Ersatzwiderstand R_{23}. Die anliegende Spannung an jedem der Widerstände ist demnach gleich U, daraus lässt sich der Strom berechnen:

$$U = R_1 I_1 \quad \Rightarrow I_1 = \frac{U}{R} \tag{5}$$

$$U = R_{23} I_{23} \quad \Rightarrow I_{23} = \frac{U}{3R} \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

[1,5]

(b) Die gesamte Wärmeleistung ist

$$P_W = \sum_i P_i = R_1 I_1^2 + R_{23} I_{23}^2 \tag{8}$$

$$= \frac{U^2}{R} + \frac{U^2}{3R} = \frac{4U^2}{3R} \tag{9}$$

Die Leistung der Stromquelle ist

$$P_U = UI = U(I_1 + I_{23}) \tag{10}$$

$$= U\left(\frac{U}{R} + \frac{U}{3R}\right) = \frac{4U^2}{3R} \tag{11}$$

[1,5]

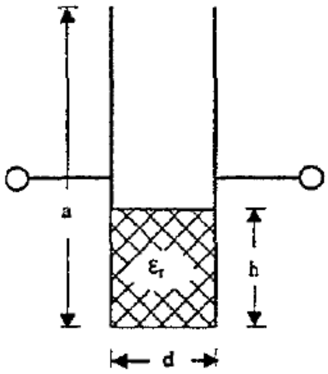
Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zwei planparallele, quadratische Kondensatorplatten mit der Kantenlänge a sind bis zu einer Höhe h in eine dielektrische Flüssigkeit mit der Dielektrizitätszahl ε_r getaucht. Der Plattenabstand sei d.

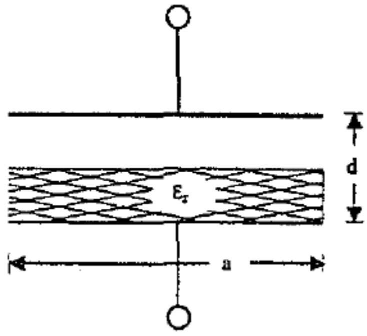
(a) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators in Abhängigkeit von der Eintauchtiefe h.

Der Plattenkondensator sei nun zu Hälfte mit einer dielektrischen Flüssigkeit ($\varepsilon_r = 2$) gefüllt und mit der Ladung $Q = 1{,}48 \cdot 10^{-12}$ aufgeladen. Die Kantenlänge betrage $a = 1$cm und der Plattenabstand $d = 1$mm.

(b) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators der Anordnung in vertikaler (C_V) und horizontaler (C_H) Lage (siehe Abbildung).



i) vertikal



ii) horizontal

Lösung:

(a) Der gefüllte Anteil des Kondensators hat die Kapazität C_G:

$$C_G = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{ah}{d} \tag{12}$$

Der leere Anteil des Kondensators hat die Kapazität C_L:

$$C_L = \varepsilon_0 \frac{a(a-h)}{d} \tag{13}$$

Die Kapazitäten liegen parallel zueinander. Damit berechnet sich die Gesamtkapazität C zu :

$$C = C_G + C_L = \frac{\varepsilon_0 a}{d} \cdot (a + h(\varepsilon_r - 1)) \tag{14}$$

[1,5]

(b) Mit $A = 1\text{cm}^2$ folgt für

i) die vertikale Anordnung (Parallelschaltung der gefüllten und leeren Kondensatoranteile):

$$C_{LV} = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} \tag{15}$$

$$C_{GV} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{2d} \tag{16}$$

$$C_V = C_{LV} + C_{GV} = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(1 + \varepsilon_r) = 1,33\text{pF} \tag{17}$$

[1,5]

ii) die horizontale Anordnung (Reihenschaltung der gefüllten und leeren Kondensatoranteile):

$$C_{LH} = \varepsilon_0 \frac{2A}{d} \tag{18}$$

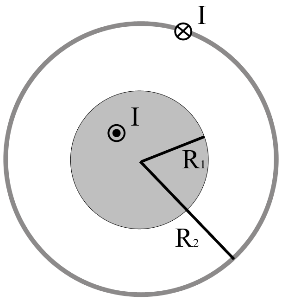
$$C_{LV} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{2A}{d} \tag{19}$$

$$C_H = \left(\frac{1}{C_{LH}} + \frac{1}{C_{GH}}\right)^{-1} = \frac{C_{LH}C_{GH}}{C_{LH} + C_{GH}} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} = 1,18\text{pF} \tag{20}$$

[1,5]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Das abgebildete unendlich lange Koaxialkabel besteht aus einem massiven Metalldraht mit Radius R_1 als Innenleiter und einem Hohlzylinder mit Radius R_2 als Außenleiter. Die Dicke des Zylindermantels sei vernachlässigbar klein. Ein elektrischer Strom der Stromstärke I fließe nun zunächst im Innenleiter aus der Zeichenebene heraus und anschließend im Außenleiter wieder in die Zeichenebene hinein. Beide Ströme seien homogen über den jeweiligen Leiter verteilt.



(a) Berechnen Sie die Stärke des erzeugten Magnetfeldes $B(r)$ für die Bereiche $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ und $R_2 < r$ in Abhängigkeit des Abstandes r von der Mittelachse des Kabels.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf von $B(r)$.

Lösung

(a) Zur Berechnung des Magnetfeldes wird das Amperesche Gesetz verwendet:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_A \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{A}, \text{ mit der elektrischen Stromdichte } \vec{j}.$$

Es handelt sich um ein zylindersymmetrisches Problem, bei dem die $\vec{B}$-Feld-Linien tangential zum Zylindermantel orientiert sind. Als Integrationsgebiet A wird deshalb eine runde

Querschnittsfläche mit Radius r gewählt, deren Mittelpunkt auf der Mittelachse des Koaxialkabels liegt, und es gilt:

$$\oint_{\partial A} \vec{B} \cdot d\vec{s} \overset{\vec{B}||d\vec{s}}{=} \oint_{\partial A} B\ ds = B \oint_{\partial A} ds = B \cdot 2\pi r$$
$$\int_A \mu_0 \vec{j} \cdot d\vec{A} \overset{\vec{j}||d\vec{A}}{=} \int_A \mu_0 j\ dA = \mu_0 I_{innerhalb}$$
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{innerhalb}}{2\pi r}$$

[0,5]

- Für $r < R_1$ gilt:

$$I_{innerhalb} = j\pi r^2 = \frac{I}{R_1^2} r^2$$
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} r$$

[1]

- Für $R_1 < r < R_2$ gilt:

$$I_{innerhalb} = I \text{ (nur Strom im Innenleiter liegt innerhalb von A)}$$
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

[1]

- Für $R_2 < r$ gilt:

$$I_{innerhalb} = 0 \text{ (Ströme in Innen- und Außenleiter heben sich auf)}$$
$$\Rightarrow B(r) = 0$$

[0,5]

(b)

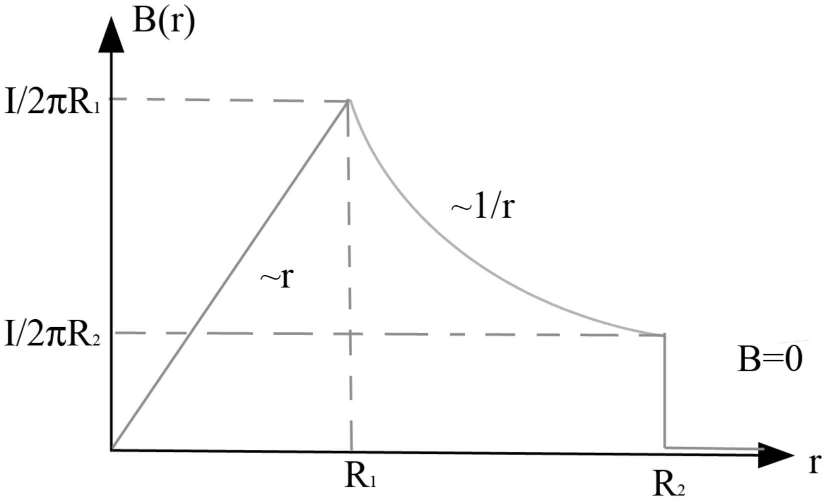
[1]

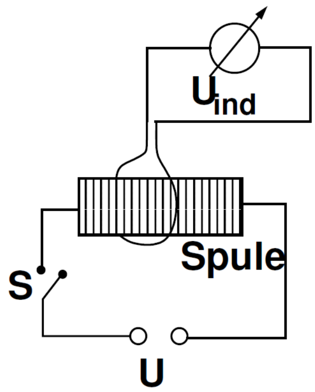
Aufgabe 5 (7 Punkte)

Betrachten Sie die dargestellte Spule mit $N = 1000$ Windungen, Querschnittsfläche $A = 2\ \text{cm}^2$, Länge $l = 6\text{cm}$ und ohmschen Widerstand $R = 10\ \Omega$.

(a) Welche Induktivität L hat die Spule?

(b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird Schalter S geschlossen und damit eine Spannung $U = 12$ V angelegt. Zeigen Sie, dass das Magnetfeld in der Spule danach den zeitlichen Verlauf $B(t) = B_0 [1 - \exp(-Rt/L)]$ hat, und berechnen Sie B_0.





(c) Welche Spannung $U_{ind}(t)$ wird an einer um die Spule gelegten Induktionsschleife gemessen? Zeigen Sie, dass der Maximalwert dieser Spannung nur von U_0 und N abhängt.

(d) Hängt $|U_{ind}|$ davon ab, wie die Ebene der Induktionsschleife relativ zur Spulenachse orientiert ist? Begründen Sie.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass $\vec{B}$ innerhalb der Spule parallel zu deren Längsachse und homogen ist und außerhalb der Spule verschwindet.

Lösung

(a) Induktivität einer Spule:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} = 0,0042 \text{ H}$$

[**1**]

(b) Die Kirchhoffsche Maschenregel ergibt

$$U_0 = IR - U_{ind} = IR + L\dot{I}.$$

Die Lösung des homogenen Teils dieser DGL ($U_0 = 0$) ergibt (mit einer noch unbekannten Konstanten A_1)

$$I_h(t) = A_1 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L}t\right).$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist

$$I_i(t) = A_2.$$

[1,5]

Durch Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL erhält man für die Konstante $A_2 = U_0/R$. Die gesamte Lösung der DGL ergibt sich durch Addition von homogener und inhomogener Lösung:

$$I(t) = A_1 \cdot \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{U_0}{R}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung $I(0) = 0$ erhält man $A_1 = -\frac{U_0}{R}$ und damit

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right].$$

Das Magnetfeld im Inneren der Spule ist:

$$B(t) = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I(t)}{l} = \frac{\mu_0 \cdot N}{l} \cdot \frac{U_0}{R}\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 N U_0}{Rl} = 0,025 \text{ T}$$

[2]

(c) Induktionsspannung in Schleife:

$$|U_{ind}| = \dot{\phi} = A\dot{B} = AB_0\frac{R}{L}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)$$

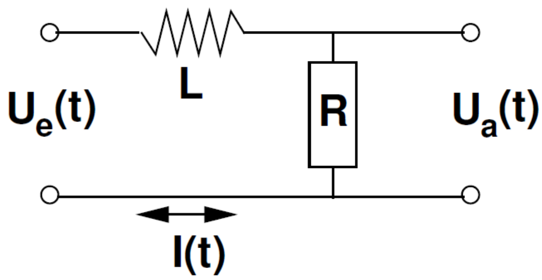
Die maximal induzierte Spannung ist:

$$U_{ind,0} = A \cdot \frac{\mu_0 N U_0}{Rl} \cdot \frac{Rl}{\mu_0 N^2 A} = \frac{U_0}{N}$$

[1,5]

(d) Nein. Bei der Berechnung des magnetischen Flusses betrachtet man $\dot{\phi} = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$. Verkippt man die Schleife, so wird zwar der Winkel zwischen den Vektoren größer (und damit das Skalarprodukt kleiner), aber es liegt auch eine größere Fläche im Bereich des Magnetfeldes. Diese beiden Effekte heben sich auf. Am einfachsten sieht man das, wenn man die effektive Fläche (also die Fläche senkrecht zum Magnetfeld) betrachtet: sie ist durch die Fläche der Spule gegeben und bleibt auch bei Verkippung konstant.

[1]



Aufgabe 6 (6 Punkte)

Betrachten Sie den skizzierten Frequenzfilter, der aus einem ohmschen Widerstand R und einer Induktivität L aufgebaut ist. Die Eingangsspannung sei $U_e(t) = U_{e,0} \exp(i\omega t)$.

(a) Begründen Sie ohne Rechnung, ob der Frequenzfilter als Hoch- oder Tiefpassfilter wirkt.

(b) Geben Sie $I(t)$ und $U_a(t)$ als komplexwertige Funktionen von t an.

(c) Bestimmen Sie das Verhältnis $U_a(t)/U_e(t)$ des Filters und berechnen Sie daraus jeweils als Funktion von ω das Amplitudenverhältnis $U_{a,0}/U_{e,0}$ und die Phasenverschiebung φ von Ausgangs- und Eingangsspannung. Skizzieren Sie beide Funktionen und geben Sie deren Grenzwerte für $\omega \to 0$ und $\omega \to \infty$ an.

Lösung

(a) Der komplexe Widerstand der Spule $Z_L = i\omega L$ ist proportional zu ω. Bei großen Frequenzen fällt daher an der Spule eine große und am ohmschen Widerstand eine kleine Spannung ab, bei kleinen Frequenzen umgekehrt. Es handelt sich folglich um einen Tiefpass.

[**1**]

(b) Aus der Eingangsspannung

$$U_e(t) = U_{e,0} \exp(i\omega t)$$

und dem komplexen Gesamtwiderstand $Z = R + Z_L = R + i\omega L$ folgen der komplexe Strom $I(t)$ und die komplexe Ausgangsspannung $U_a(t)$:

$$I(t) = \frac{1}{Z} \cdot U_e(t) = \frac{1}{R + i\omega L} \cdot U_e(t)$$

$$U_a(t) = R \cdot I(t) = \frac{R}{R + i\omega L} \cdot U_e(t)$$

[**1,5**]

(c) Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu

$$\frac{U_a(t)}{U_e(t)} = \frac{R}{R + i\omega L}.$$

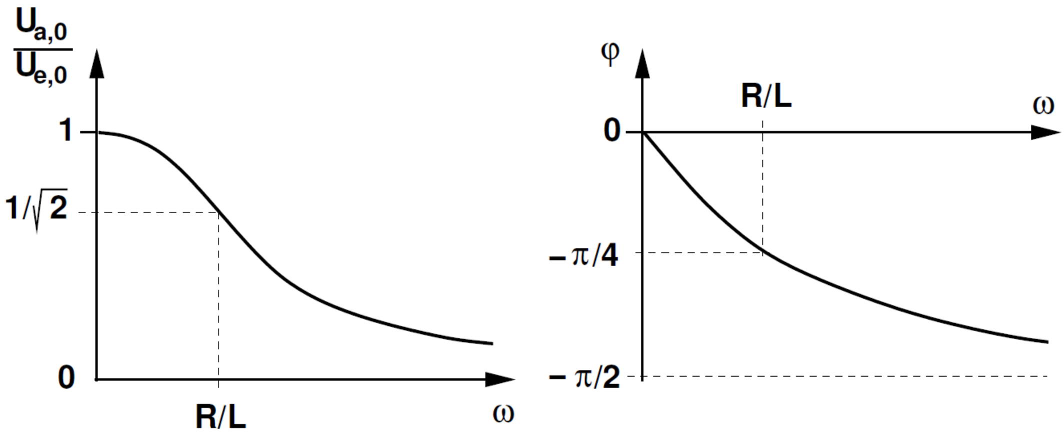
Das Amplitudenverhältnis ist der Betrag der Übertragungsfunktion, also

$$\frac{U_{a,0}(t)}{U_{e,0}(t)} = \left| \frac{R}{R + i\omega L} \right| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Die Phasenverschiebung ist gegeben durch die Phase der Übertragungsfunktion:

$$\tan\varphi = \frac{Im\,(U_a(t)/U_e(t))}{Re\,(U_a(t)/U_e(t))} = -\frac{\omega L}{R} \Rightarrow \varphi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

[2,5]



[1]

Aufgabe 7 (5 Punkte)

A und B seien Zwillinge. A reise mit einer Geschwindigkeit von 0,6c zum Stern Alpha Centauri (Abstand zur Erde: 4 Lichtjahre) und kehre sofort zur Erde zurück. Jeder Zwilling sende dem anderen im Abstand von 0,01 Jahren (im jeweiligen Ruhesystem gemessen) Lichtsignale.

(a) Mit welcher Frequenz erhält B Signale, wenn A sich von ihm weg bewegt

(b) Mit welcher Frequenz erhält B Signale, wenn A sich auf ihn zu bewegt?

(c) Wie viele Signale sendet A auf seiner gesamten Reise aus?

(d) Wie viele Signale sendet B während der Reise von A aus?

Lösung

(a) Ein von A gemessenes Zeitintervall Δt_A hat für B die Dauer $\Delta t_B = \gamma \Delta t_A$. Zudem entfernt sich A zwischen den Signalen um die Strecke $v\Delta t_B$. Für diesen zusätzlichen Weg benötigt das Lichtsignal die Zeit $\frac{v}{c}\Delta t_B$. Wenn A jeweils nach $\Delta t_A = 0,01a$ ein Signal sendet, so empfängt B ein Signal nach jeweils

$$\begin{aligned}\Delta T &= \Delta t_B + \frac{v}{c}\Delta t_B \\ &= \gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\Delta t_A \\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}\Delta t_A = 0,02a\end{aligned}$$

Jahren. Die Frequenz beträgt deshalb 50 Signale pro Jahr.

[1,5]

(b) Der Unterschied im gemessenen Zeitintervall bleibt der gleiche. Allerdings verringert sich die Strecke zwischen dem Abschicken der Signale um $\frac{v}{c}\Delta t_B$. Also empfängt B ein Signal nach jeweils

$$\begin{aligned}\Delta T &= \Delta t_B - \frac{v}{c}\Delta t_B \\ &= \gamma\left(1-\frac{v}{c}\right)\Delta t_A \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}\Delta t_A = 0,005a\end{aligned}$$

Jahren. Die Frequenz beträgt deshalb 200 Signale pro Jahr.

[1,5]

(c) Für A beträgt die Entfernung zu Alpha Centauri $l' = \frac{l}{\gamma} = 3,2$ Lj. Somit ist die gesamte Reisezeit für A $\frac{2l'}{0,6c} = 10,66$ Jahre. Zwilling A sendet alle 0,01 Jahre ein Signal aus, somit sendet er insgesamt 1066 Signale (lässt sich auch mit Zeitdilatation rechnen).

[1]

(d) Für B dauert die Reise von A $\frac{2l}{0,6c} = 13,33$ Jahre. Sendet er alle 0,01 Jahre ein Signal aus, ergibt das eine Gesamtzahl von 1333 Signalen.

[1]

Konstanten

$$e = 1.6\cdot 10^{-19}\text{C} \qquad m_e = 9.11\cdot 10^{-31}\text{kg}$$

$$\epsilon_0 = 8.85\cdot 10^{-12}\text{As/Vm} \qquad \mu = 12.57\cdot 10^{-7}\text{N/A}^2$$