Nachklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. S. Schönert
Sommersemester 2015
24. September 2015

Dr. Carsten Rohr (carsten.rohr@ph.tum.de)

Aufgabe A (6 Punkte)

(a) Wodurch zeichnet sich die Edelgaskonfiguration aus?

(b) Was ist der experimentell sichtbare Unterschied zwischen dem normalen und anormalen Zeemaneffekt?

(c) Nennen Sie 2 Effekte die die Feinstruktur verursachen?

(d) Was ist ein stationärer Zustand?

(e) Warum sind bei der L-S-Kopplung L und S keine guten Quantenzahlen mehr?

(f) Nennen Sie 2 Hundsche Regeln.

(g) Was ist Entropie?

(h) Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein System sich im Quantenzustand s mit Energie ϵ_s befindet.

(i) Was versteht man unter dem chemischen Potential?

Lösung

(a) Durch vollständig gefüllte Elektronenschalen einer Nummer n.

[0,5]

(b) Eine ungerade Anzahl an Linien (Normal) und eine gerade Anzahl an Linien (Anormal).

[0,5]

(c) Relativistische Korrektur, Spin-Bahn-Kopplung, Darwin Term (Zitterbewegung)

[1,5]

(d) Ein stationärer Zustand ist eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung. Sein Erwartungswert ändert sich nicht mit der Zeit.

[0,5]

(e) In L und S sind die Eigenwerte entartet, in J ist diese aufgehoben.

[0,5]

(f) 1.Volle Schalen und Unterschalen haben den Gesamtdrehimpuls Null.

2. Der Gesamtspin $\boldsymbol{S}$ nimmt den maximal möglichen Wert an, die Spins der einzelnen Elektronen $\boldsymbol{s}_i$ stehen also möglichst parallel.

3. Erlaubt das Pauli-Prinzip mehrere Konstellationen mit maximalem Gesamtspin $\boldsymbol{S}$, dann werden die Unterzustände mit der Magnetquantenzahl m_l so besetzt, dass der Gesamt-Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}$ maximal wird.

4. Ist eine Unterschale höchstens zur Hälfte gefüllt, dann ist der Zustand mit minimaler Gesamtdrehimpulsquantenzahl J am stärksten gebunden. Bei mehr als halbvollen Unterschalen ist es umgekehrt.

[1]

(g) Logarithmus der Anzahl der Zustände, die für das System erreichbar sind. $\sigma = \log g$

[0,5]

(h) Boltzmann: $P(\epsilon_s) = \frac{\exp(-\epsilon_s/\tau)}{Z}$; Z: Zustandssumme

[0,5]

(i) Die freie Energie, die man benötigt, ein Teilchen aus dem System zu entfernen

[0,5]

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie in einem myonischen Atom ($m_\mu = 207 m_e$) die Bindungsenergie und den Bahnradius eines Myons im Grundzustand im Feld eines Protons ($Z = 1$)

(b) Geben Sie die Energie des Photons an, das beim Übergang vom angeregten ($n = 2$)-Zustand in den Grundzustand emittiert wird.

(c) Dieses Photon wird mit einem Detektor nachgewiesen, der eine Auflösung von $\frac{\Delta E}{E} = 5\%$ besitzt. Lässt sich damit der Einfluss der Kernbewegung nachweisen?

Lösung

(a) Allgemein gilt

$$E_n = \frac{Z^2 e^4 \mu}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} = \frac{Z^2 e^4 m_\mathrm{e}}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{\mu}{m_\mathrm{e}} \frac{1}{n^2} = 13,6\mathrm{eV} \cdot Z^2 \frac{\mu}{m_\mathrm{e}} \frac{1}{n^2}$$

und

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{Z e^2 \mu} n^2 = \frac{4\pi\epsilon\hbar^2}{Z e^2 m_\mathrm{e}} \frac{m_\mathrm{e}}{\mu} n^2 = 0,529 \cdot 10^{-10}\mathrm{m} \cdot \frac{1}{Z} \frac{m_\mathrm{e}}{\mu} n^2.$$

Unter Vernachlässigung der Kernbewegung erhält man mit $\mu = m_\mu = 207 m_\mathrm{e}$ und $Z = 1$

$$E_n = \frac{2815}{n^2}\mathrm{eV} \qquad\qquad r_n = 2,56 \cdot 10^{-13}\mathrm{m}$$

Unter Berücksichtigung der Kernbewegung ergibt sich mit $\mu = \frac{m_p m_\mu}{m_\mu + m_p} = 186 m_e$

$$E_n = \frac{2530}{n^2}\text{eV} \qquad\qquad r_n = 2,84 \cdot 10^{-13}\text{m}$$

[2]

(b) Die Übergangsenergie ist

$$\Delta E = 13,6\text{eV} \cdot Z^2 \frac{\mu}{m_e}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Unter Vernachlässigung der Kernbewegung erhält man mit $\mu = m_\mu = 207 m_e$ und $Z = 1$

$$\Delta E = 2111\text{eV}$$

wohingegen unter Berücksichtigung der Kernbewegung mit $\mu = \frac{m_p m_\mu}{m_\mu + m_p} = 186 m_e$

$$\Delta E = 1898\text{eV}$$

erhalten wird.

[1,5]

(c) Die Berücksichtigung der Kernbewegung führt zu einer Korrektur der Übergangsenergie von 213eV. Bei einer Energieauflösung von 5% (entsprechend 106eV) ist dies nachweisbar.

[0,5]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Die Feinstrukturaufspaltung wird bei wasserstoffähnlichen Ionen wie beim neutralen Wasserstoff näherungsweise beschrieben durch

$$E_{FS} = \frac{E_n}{n}(\alpha Z)^2 \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)$$

(a) In wieviele Energieniveaus spalten die Terme des doppelt ionisierten Lithiums mit den Hauptquantenzahlen $n = 3$ und $n = 4$ durch die Feinstruktur-Wechselwirkung auf?

(b) Geben Sie die Verschiebung (in eV) an für die in (a) bestimmten Niveaus beim doppelt ionisierten Lithium mit $n = 3$.

(c) Zeigen Sie, dass der Korrekturwert für keinen der möglichen Werte von n und j verschwindet, sondern immer zu einer Absenkung gegenüber dem unkorrigierten Energieniveau führt.

Lösung

(a) Bei wasserstoffähnlichen Systemen hängt die Energie der elektronischen Zustände nur von n und $j = |l \pm \frac{1}{2}|$ ab. Für $l > 1$ gilt $l - \frac{1}{2} = (l-1) + \frac{1}{2}$. Für $l = 0$ ist nur $j = \frac{1}{2}$ möglich. Da $l_{\max} = n - 1$ gibt es zu gegebenem n gerade n verschiedene j-Werte, und zwar

$$j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, n - \frac{1}{2}.$$

Die Terme zu $n = 3$ und $n = 4$ spalten somit in 3 bzw. 4 Energieniveaus auf.

n	j	$\frac{1}{j+1} - \frac{3}{4n}$	$\frac{E_{\mathrm{FS}}}{\mathrm{eV}}$
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-1,63 \cdot 10^{-3}$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-5,43 \cdot 10^{-4}$
	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{12}$	$-1,81 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 1: Werte für doppelt ionisiertes Lithium.

[1,5]

(b) Für doppelt ionisiertes Lithium mit $Z = 3$, $E_n = -13,6\frac{Z^2}{n^2}\mathrm{eV}$ und $\alpha = \frac{1}{137{,}036}$ ergibt sich

$$E_{\mathrm{FS}} = -13,6\mathrm{eV} \cdot \frac{3^4\alpha^2}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right) = -0,05866\mathrm{eV} \cdot \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)$$

Für die Feinstrukturkorrektur erhält man dann die Werte aus Table 1.

[2]

(c) Für wasserstoffähnliche Systeme gilt

$$l_{\max} = n - 1 \qquad s = \frac{1}{2} \qquad j_{\max} = l + \frac{1}{2} = n - \frac{1}{2}$$

Da für $j < j_{\max}$ gilt $\frac{1}{j} > \frac{1}{j_{\max}}$ ergibt sich

$$\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} > \frac{1}{j_{\max}+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} = \frac{1}{n} - \frac{3}{4n} = \frac{1}{4n} > 0$$

Damit ist E_{FS} für alle erlaubten Werte von n und j immer ungleich Null und mit $E_n < 0$ negativen, d.h. die Energieniveaus werden abgesenkt.

[1,5]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Strahl von Silberatomen (Masse: $107.9u$) im Grundzustand ($5^2\mathrm{S}_{1/2}$) fliegt mit einer Geschwindigkeit von 500m/s durch ein inhomogenes Magnetfeld (Stern-Gerlach-Versuch). Der Feldgradient von $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z} = 10^3\mathrm{T/m}$ steht senkrecht zur Flugrichtung der Atome. In Flugrichtung besitzt das Magnetfeld eine Ausdehnung von 4cm. Ein Auffangschirm ist 10cm hinter dem Ende des Magnetfeldes aufgestellt. Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Moments in Richtung des Magnetfeldes, wenn die gemessene Aufspaltung auf dem Schirm 2mm beträgt. Wie verhält sich das Ergebnis zum Bohrschen Magneton? Entspricht dieses Ergebnis Ihrer Erwartung für das gebundene Elektron?

Hinweis: Das magnetische Moment des Silberatoms im Grundzustand ist in guter Näherung identisch mit dem Spin des äußeren 5s-Elektrons.

Lösung

Ein magnetisches Moment $\vec{\mu}$ besitzt im Magnetfeld $\vec{B}$ eine Wechselwirkungsenergie

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

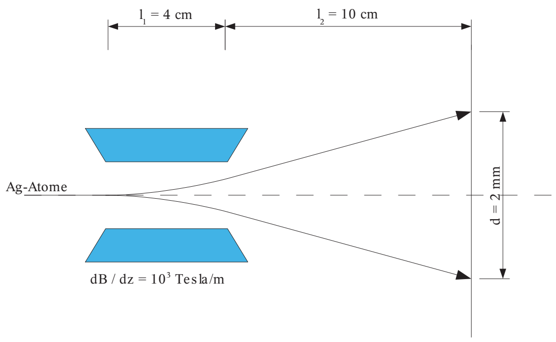

Abbildung 1: Skizze zum Stern-Gerlach-Versuch

Die Kraft ergibt sich aus dem Gradienten

$$\vec{F} = -\nabla V$$

Wenn das magnetische Feld ausschließlich einen Gradienten in z-Richtung besitzt, so wirkt die Kraft lediglich in z-Richtung:

$$F_z = \mu_z \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$$

Der Atomstrahl bewege sich anfänglich in x-Richtung. Da die Kraft nur in z-Richtung wirkt, bleibt die ursprüngliche Komponente $v_x = 500\mathrm{m/s}$ unverändert. Ein Atom legt die Strecken l_1 und l_2 (siehe Figure 1) in den Zeiten

$$t_1 = \frac{l_1}{v_x} = 8 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}$$
$$t_2 = \frac{l_2}{v_x} = 2 \cdot 10^{-4}\mathrm{s}$$

[1,5]

zurück. Während es sich im Magnetfeld befindet, erfährt es eine Beschleunigung

$$a_z = \frac{F_z}{M}.$$

Beim Austritt aus dem Magneten hat es somit die Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung von

$$v_z = a_z t_1$$

Insgesamt legt es in z-Richtung den Weg

$$z = \frac{1}{2} a_z t_1^2 + v_z t_2 = \frac{1}{2} a_z t_1^2 + a_z t_1 t_2 = \left(\frac{1}{2} t_1^2 + t_1 t_2 \right) a_z$$

zurück. Der erste Term entsprich der beschleunigten Bewegung im Magnetfeld, der zweite Term dem freien Flug hinter dem Magnetfeld. Dieser zurückgelegte Weg entspricht der halben Aufspaltung:

$$z = \frac{d}{2}$$

Die Beschleunigung kann damit berechnet werden zu

$$a_z = \frac{d}{2(\frac{1}{2}t_1^2 + t_1 t_2}) = 52083,3\text{m/s}^2$$

[1,5]

Die z-Komponente des magnetischen Moments ist damit

$$\langle \mu_z \rangle = \frac{F}{\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}} = \frac{M a_z}{\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}} = 9,32 \cdot 10^{-24}\text{Am}^2 = 1,0053\mu_B$$

[**1**]

wobei als Masse für ein Silberatom $M = 1,79 \cdot 10^{-25}$kg eingesetzt wurde. Da das Elektron $5^2\mathrm{S}_{1/2}$-Zustand keinen Drehimpuls hat, trägt zum magnetischen Moment des Silberatoms nur der Spin des äußeren Elektrons bei, d.h. man erwartet

$$\langle \mu_{s,z} \rangle = \frac{1}{2}|g_e|\mu_B = \frac{1}{2}2,00232\mu_B = 1,00116\mu_B$$

was im Rahmen der Messgenauigkeit dem Messergebnis entspricht.

[**1**]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Energieniveaus heliumähnicher Atome mit einem Elektron im Grundzustand ($n = 1$) und dem anderen Elektron in einem angeregten Zustand ($n > 1$) können durch

$$E_n = -13,6 \left(Z^2 + \frac{(Z-1)^2}{n^2} \right) \text{eV} \tag{1}$$

ausgedrückt werden.

(a) Berechnen Sie die Energieniveaus des Heliumatoms für $n = 2, 3, 4$ und vergleichen Sie mit den experimentellen Werten für die über alle Unterzustände gemittelten Energien $E_2 = -58,31\text{eV}$,$E_3 = -56,01\text{eV}$ und $E_4 = -55,25\text{eV}$.

(b) Bei der obigen Formel wird offensichtlich angenommen, dass das innere 1s-Elektron eine der Z Kernladungen vollständig abschirmt. Diskutieren Sie die Plausibilität dieser Annahme.

(c) Wie hängt der Unterschied zwischen Rechnung und Experiment qualitativ von n ab und was ist der Grund dafür?

Lösung

(a) Siehe Table 2.

[1,5]

n	(1)	Differenz zu Werten
2	$-57,8\text{eV}$	$0,51\text{eV}$
3	$-55,91\text{eV}$	0.1eV
4	-55.25eV	0eV

Tabelle 2: Vergleich zu experimentellen Werten.

(b) Im Bohrschen Atommodell befindet sich das Elektron auf der zweiten Bahn viermal weiter vom Kern entfernt als das Elektron auf der ersten Bahn. Man kann also grob annehmen, dass es eine anziehende Ladung von Z Protonen und einem Elektron $Z-1$ effektive Protonen sieht. Dies entspricht dem zweiten Term. Das Elektron auf der 1s-Schale hingegen sieht die komplette Kernladung. Es wird durch das äußere Elektron kaum beeinflusst, denn nur die Ladungsdichte innerhalb der Elektronenbahn trägt zum elektrischen Feld bei.

[**1,5**]

(c) Die Elektronen bewegen sich nicht auf festen Bahnen, sondern haben eine räumlich ausgedehnte Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Insbesondere s-Orbitale überlappen immer mit dem Kern. Ein 2s-Elektron hat also immer noch eine gewisse Wahrscheinlichkeit, sich am Kernort aufzuhalten und zumindest teilweise dem unabgeschirmten Kernpotenzial ausgesetzt zu sein. Diese Wahrscheinlichkeit wird mit steigendem n immer geringer, so dass die Annahme der vollständigen Abschirmung einer Kernladung durch das 1s-Elektron bei hohem n immer besser wird.

[**1**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Der Zeeman-Effekt beschreibt die Aufspaltung der – ohne Magnetfeld entarteten – magnetischen Unterzustände im Magnetfeld und die daraus resultierende Verschiebung der Emissionslinien beim Übergang zwischen zwei derartig verschobenen Niveaus.

(a) Geben Sie die für die Quantenzahlen J und m_j geltenden Auswahlregeln für die Emission elektrischer Dipolstrahlung an.

(b) Wieviele unterschiedliche Linien sind beim Übergang von einem $\mathrm{p}_{1/2}$- bzw. einem $\mathrm{p}_{3/2}$-Niveau ins $\mathrm{s}_{1/2}$-Niveau eines Einelektronensystems im Magnetfeld zu beobachten? Skizzieren Sie die Niveau-Schemata und tragen Sie die Übergänge ein.

(c) Welcher Landé-Faktor ergibt sich für die beiden Ausgangs- und das Zielniveau? Um welche Energie sind damit die einzelnen Niveaus in einem Magnetfeld von $0,1\text{T}$ verschoben? Verwenden Sie wo nötig die Näherung $g_s = 2$.

Lösung

(a) $\Delta J \in \{-1, 0, 1\}$, wobei $J = 0 \rightarrow J = 0$ verboten ist und $\Delta m_j \in \{-1, 0, 1\}$

[**1**]

(b) In Figure 2 sieht man anschaulich, dass beim Übergang vom $p_{1/2}$-Niveau in das $s_{1/2}$-Niveau sechs verschiedene Übergangsenergien zu finden sind. Für $p_{1/2} \rightarrow s_{1/2}$ existieren

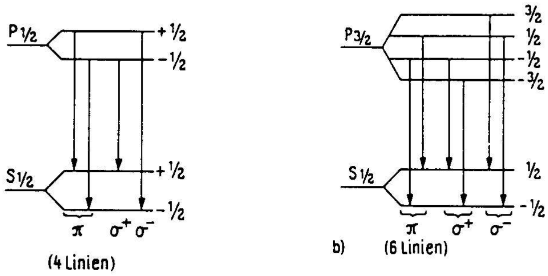

Abbildung 2: Niveau-Schemata

zwei Ausgangs-Subniveaus und zwei Ziel-Subniveaus. Keiner der Übergänge ist durch Auswahlregeln verboten, also gibt es vier Übergänge. Für $p_{3/2} \to s_{1/2}$ existieren vier Ausgangs-Subniveaus und zwei Ziel-Subniveaus. Übergänge von $j = 0 \to j = 0$ liegen gar nicht vor, und nur $m = \frac{3}{2} \to m = -\frac{1}{2}$ sowie $m = -\frac{3}{2} \to m = \frac{1}{2}$ verletzen die Regel $|\Delta m_j| \leq 1$. Dementsprechend verbleiben sechs Übergänge.

[2]

(c) Der Landé-Faktor g_j ist

$$g_j = 1 + \frac{1}{2}\frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{j(j+1)}$$

Für Werte siehe Table 3. Für die Energie gilt

$$\Delta E = E(B \neq 0) - E(B = 0) = \mu_B B m_j g_j = 5{,}8 \cdot 10^{-5}\text{eV/T} \cdot 0{,}1\text{T} \cdot m_j g_j$$

siehe Table 4.

	l	s	j	g_j
$p_{1/2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$p_{3/2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
$s_{1/2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

Tabelle 3: Werte des Landé-Faktors

[2]

[2]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Atome des Kochsalzmoleküls NaCl sind in einem Gleichgewichtsabstand von $r_0 = 5{,}6\text{Å}$ gebunden. Die relativen Atomgewichte sind $A_{\text{Na}} = 23$ und $A_{\text{Cl}} = 35$.

(a) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Moleküls?

(b) Wie groß ist die Rotationsenergie in eV für die Drehimpulsquantenzahl $j = 1$? Hinweis: Betrachten Sie das Molekül als starren Rotor.

	m_j	g_j	$\Delta E(\frac{1}{\mu_B B})$	$\Delta E(10^{-6}$ eV)
$s_{1/2}$	$\frac{1}{2}$	2	1	5.8
	$-\frac{1}{2}$	2	-1	-5.8
$p_{1/2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1.9
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-1.9
$p_{3/2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	2	11.6
	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	-3.9
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-3.9
	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	-2	-11.6

Tabelle 4: Werte für die Energie

(c) Die Konstante der Bindungskraft (Federkonstante) zwischen dem Na-Atom und dem Cl-Atom beträgt $C = 3,78 \cdot 10^3 \text{kg/s}^2$. Welche Frequenzen kann das Molekül abstrahlen, wenn Sie folgende Übergänge zwischen gekoppelten Rotations- (j) und Schwingungszuständen (v) betrachten: $(v_2 = 1; j_2 = 0,1) \to (v_1 = 0; j_1)$? Bestimmen Sie die möglichen Werte von j_1 und skizzieren Sie das Termschema der sich daraus ergebenden Übergänge. Hinweis: Schwingungs- und Rotationszustände sollen nicht miteinander wechselwirken.

Lösung

(a) Es gilt $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$, weiterhin $m_1 r_1 = r_2 m_2$. Setze $r = r_1 + r_2$. Dann $r_1(1 + \frac{m_1}{m_2}) = r$ und $r_2(1 + \frac{m_2}{m_1}) = r$. Somit

$$I = m_1 r^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 + m_2 r^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = r^2 \mu$$

wobei μ die reduzierte Masse sei. Das Trägheitsmoment beträgt also

$$I = (5,6 \cdot 10^{-10})^2 \text{m}^2 \frac{23 \cdot 35}{23 + 35} 1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg} = 7,27 \cdot 10^{-45} \text{Js}^2$$

[2]

(b) Es gilt

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) = \frac{(6,58 \cdot 10^{-16} \text{eVs})^2 \cdot 2}{2 \cdot 7,27 \cdot 10^{-45} \text{Js}^2 \cdot 6,24 \cdot 10^{18} \text{eV/J}} = 9,5 \mu\text{eV}$$

[1]

(c) Die Energie von Schwingungszuständen ist gegeben durch $E_v = \hbar\omega_0(v + \frac{1}{2})$. Dabei ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{\mu}} = \sqrt{\frac{3,78 \cdot 10^3 \text{kg/s}^2}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{kg}} \frac{23 + 35}{23 \cdot 35}} = 4 \cdot 10^{14} \text{Hz}$$

Die Energieniveaus der Schwingung sind gleichabständig mit $\Delta E_v = \hbar\omega_0 = 2,6 \cdot 10^{-1} \text{eV} \gg \Delta E_{\text{rot}}$. Unabhängig von der Schwingung kann das Molekül noch rotieren. Da die Rotationsenergie sehr viel kleiner ist als die Schwingungsenergie, spalten die Schwingungsniveaus in mehrere Rotationsunterniveaus auf. Übergänge mit $\Delta j = 0$ sind verboten, d.h.

$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I}|(j_2+1)j_2 - j_1(j_1+1)| = \frac{\hbar^2}{I}j$$

wobei $j \geq 1$. Unter Vernachlässigung von Wechselwirkungen addieren sich die Energieniveaus von Rotation und Schwingung:

$$\Delta E = \hbar\omega_0 \pm j\frac{\hbar^2}{I}$$

Die möglichen Frequenzen sind $\omega_{j\pm} = \omega_0 \pm j\frac{\hbar}{I}$, abermals mit $j \geq 1$. Zusammenfassend: Es gibt für $(v = 1, j_2 \in \{0,1\}) \to (v = 0, j_1)$ nur zwei mögliche Übergänge, die mit der Dipolauswahlregel für die Rotation verträglich sind. Nämlich $(1,1) \to (0,0)$ und $(1,0) \to (0,1)$. Damit ergibt sich für die beiden Frequenzen, nach denen gefragt war

$$w_{1\pm} = 4 \cdot 10^{14}\text{Hz} \pm 1,45 \cdot 10^{10}\text{Hz}$$

[3]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Man berechne die Fermi-Energie und die mittlere Energie der Valenzelektronen im Kupfer ($T = 0$). Ferner finde man die zur Fermi-Energie gehörende Wellenlänge und Geschwindigkeit der Elektronen. Welche Temperatur müsste das Elektronengas nach der klassischen Statistik haben, um die oben berechnete mittlere Energie zu erreichen? ($A = 64u$, $\rho = 9\text{g/cm}^3$)

Hinweis: $E_F^{T=0} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$

Lösung

Kupfer ist einwertig, d.h. jedes Atom liefert *ein* Valenzelektron

$$n = \frac{N_A}{A}\rho = 8,5 \cdot 10^{22} 1/\text{cm}^3$$

$$E_{\text{F}} = 7,0\text{eV}$$

$$E_{\text{m}} = \frac{3}{5}E_{\text{F}} = 4,2\text{eV}$$

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{F}}}{m}} = 1,6 \cdot 10^8\text{cm/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = 4,5 \cdot 10^{-8}\text{cm}$$

[3]

Die klassische Temperatur ist

$$\overline{E}_{\text{Maxwell}} = E_{\text{m}} = \frac{3}{5}E_{\text{F}} = \frac{3}{2}kT$$

wobei $T = 3,2 \cdot 10^4\text{K}$.

[1]

Konstanten

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34}\mathrm{Js}$$
$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{As/V/m}$$
$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}$$
$$a = 1,159 \cdot 10^{-22}\mathrm{J} \cdot \frac{Z^4}{n^6}$$
$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3} = 1,10 \cdot 10^7\mathrm{m}^{-1}$$
$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$$
$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\mathrm{kg}$$
$$\alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$
$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24}\mathrm{N/A}^2$$
$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}\mathrm{Mol}^{-1}$$
$$k_B = 1,38 \cdot 10{-}23\mathrm{J/K}$$