Technische Universität München
Zentrum Mathematik, Wintersemester 2002/03
Prof. Dr. Dr. hc. H.-J. Kroll, Dr. S. de Vries

Semestralklausur Lineare Algebra 1, WS 2002/03; Gruppe A

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Prüfer: .... Datum: ....

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Note:

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
$\sum$		

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: .... bis: .....

Vorzeitig abgegeben um: .....

Besondere Bemerkungen:

I .... Erstkorrektur

II .... Zweittkorrektur bzw. Übungsleitung

Bitte beachten Sie: Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. Die Klausur hat 5 Aufgaben und besteht aus 10 Blättern. Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen.
Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen!
Bitte antworten Sie zunächst auf dem Blatt mit der Aufgabe und seiner Rückseite und erst dann auf den Zusatzblättern.
Zum Bestehen der Klausur sind ca. 17 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (ca. 6 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

a) Seien $(U_1, \cdot)$ und $(U_2, \cdot)$ Untergruppen einer Gruppe $(G, \cdot)$.
   (i) Ist $(U_1 \cap U_2, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$?
   (ii) Ist $(U_1 \cup U_2, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$?

b) Es sei $(H, \cdot)$ eine Halbgruppe mit neutralem Element e. Wenn es zu $a \in H$ ein Element $b \in H$ mit $ab = e$ gibt und zu b ein $c \in H$ mit $bc = e$, dann gilt auch $ba = e$.

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte): Es sei V ein K-Vektorraum mit $\operatorname{Dim} V = n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

a) Für alle $U \in L$ gilt $\operatorname{Dim} U \leq n$.
b) Es sei $A \subseteq V$ mit $|A| > n$. Dann ist A linear abhängig.
c) Es sei $S \subset V$ linear unabhängig mit $|S| = n$. Dann ist S eine Basis von V.

Aufgabe 3 (ca. 12 Punkte): Es sei $a, b \in K = \mathbb{Q}$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3b & 3b & 2b \\ 3a & 2a+b & 2a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie den Kern von $A_\ell : K^3 \to K^3, x \mapsto Ax$ für den Fall $a = b = 1$.

b) Berechnen Sie die Inverse von A für den Fall $a = 2$, $b = 1$.

c) Für welche Werte von a, b hat A den

(i) Rang 3 ?

(ii) Rang 2 ?

(iii) Rang 1 ?

Hinweis: Geben Sie die Rechenschritte/Umformungen an, andernfalls werden falsche Antworten mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 4 (ca. 10 Punkte): Es sei K ein unendlicher kommutativer Körper und $a_0, a_1, \ldots \in K$ verschieden. Weiterhin seien

$$n_0(x) := 1 \text{ und } n_i(x) := \prod_{j=0}^{i-1}(x - a_j) \qquad \forall i \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie: $n_i(a_k) \begin{cases} = 0 & \text{falls } 0 \leq k \leq i-1 \\ \neq 0 & \text{falls } i \leq k \end{cases}.$

   Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $V_n := \{f \in K[x] \mid f = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}\, f \leq n\}$ der $(n+1)$-dimensionale Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

b) Zeigen Sie, daß für jedes $n \geq 0$ die Menge $N_n := \{n_0, n_1, \ldots, n_n\}$ eine Basis des V_n ist.

c) Es sei $K = \mathbb{Q}$ und $a_i = i$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Stellen Sie das Polynom $f = 1 - x + 3x^2 \in V_{100}$ bezüglich der Basis N_{100} des V_{100} dar.

d) Es sei $K = \mathbb{Q}$, $a_i = i$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{D} : V_3 \to V_2$ sei die lineare Abbildung $\sum_{i=0}^{n} b_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} i b_i x^{i-1}$. Geben Sie die darstellende Matrix $F_{N_2,N_3}(\mathcal{D})$ an.

Aufgabe 5 (ca. 7 Punkte): Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für $A \subset V$ sei

$$\operatorname{aff}(A) := \left\{ \sum_{v \in U} v\lambda_v \colon U \subset A, |U| \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^U, \text{ und } \sum_{v \in U} \lambda_v = 1 \right\}.$$

Zeigen Sie für $A, B \subset V$:

a) $A \subset \operatorname{aff}(A)$

b) $\operatorname{aff}(A) = \operatorname{aff}(\operatorname{aff}(A))$

c) $A \subset B$ impliziert $\operatorname{aff}(A) \subset \operatorname{aff}(B)$

Bemerkung: Also ist aff (**affine Hülle**) ein Hüllenoperator.