Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. Friedrich Roesler
Anna Katharina Binder, Tobias Kamke

Wintersemester 2005/2006
Semestralklausur

Semestralklausur
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
für Lehramt an Berufsschulen

08.02.2006

Aufgabe 1: (5+2 Punkte)
Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die Vektoren $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ seien linear unabhängig.

~~(a)~~ Zeigen Sie, daß die durch

$$w_1 := v_1 + 2v_2 + 3v_3 + v_4, \quad w_2 := v_2 + 2v_4, \quad w_3 := 2v_1 + v_2 + v_3 + v_4$$

definierten Vektoren w_1, w_2, w_3 linear unabhängig sind.

~~(b)~~ Kann man einen Vektor w_4 aus $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ finden, so daß $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$0 = a \cdot 0 = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \quad \underline{a}$$
$$= \alpha_1(v_1 + 2v_2 + 3v_3 + v_4) + \_ + \alpha_3(2v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$
$$\boxed{0 = (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3)v_1 + (2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)v_2 + (3\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3)v_3 + (\alpha_1 + \alpha_2)v_4}$$

Aufgabe 2: (5+5 Punkte)
~~(a)~~ Bestimmen Sie eine Basis des von

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \cancel{0} \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

erzeugten Unterraumes des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^4$.

~~(b)~~ Zeigen Sie:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

$$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3 = 0$$
$$(\alpha_1 + \beta_1)w_1 + (\alpha_2 + \beta_1)w_2 + (\alpha_3 + \beta_1)w_3 = 0$$

Aufgabe 3: (3 Punkte)
Es seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und die Abbildung $f : V \longrightarrow W$ linear. Außerdem seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $w_1, \ldots, w_n \in W$ gegeben mit $f(v_i) = w_i$ für $i = 1, \ldots n$. Die Vektoren $w_1, \ldots w_n$ seien linear un abhängig. Folgt daraus die un lineare Abhängigkeit der $v_1, \ldots v_n$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: (3+3 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind Unterräume der angegebenen Vektorräume?

(a) $M_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x_1 = 4x_2 + 7x_3}\} \subset \mathbb{R}^3$.

~~(b)~~ $M_2 := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$. $\quad 0 = -x_1 + 4x_2 + 7x_3$

Aufgabe 5: (2+2+2+2 Punkte)
U sei ein Unterraum des K-Vektorraums V.

(a) Ist folgende Aussage richtig oder falsch? Es gilt für alle $v \in V, w \in V$

$$v \notin U, w \notin U \Longrightarrow v + w \notin U$$

Begründung oder Gegenbeispiel.

(b) Ist folgende Aussage richtig oder falsch? Es gilt für alle $v \in V, w \in V$

$$v \notin U, w \in U \Longrightarrow v + w \notin U$$

Begründung oder Gegenbeispiel.

(c) Was ist richtig? Ist B ein Erzeugendensystem eines K-Vektorraums V, so ist jeder Vektor aus V durch $\left\{\begin{array}{l}\text{mindestens}\\ \text{genau}\\ \text{höchstens}\end{array}\right\}$ eine Linearkombination von Vektoren aus B darstellbar.

(d) Was ist richtig? Ist B eine linear unabhängige Teilmenge eines K-Vektorraums V, so ist jeder Vektor aus V durch $\left\{\begin{array}{l}\text{mindestens}\\ \text{genau}\\ \text{höchstens}\end{array}\right\}$ eine Linearkombination von Vektoren aus B darstellbar.

Aufgabe 6: (3+3 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ auf Injektivität und Surjektivität.

(b) Es sei K ein Körper und $a \in K$. Untersuchen Sie – in Abhängigkeit von a – die Abbildung $g : K \longrightarrow K, x \longmapsto a \cdot x$ auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 7: (8 Punkte)
Es sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie: Die Anzahl der Elemente in U teilt die Anzahl der Elemente in G.

Bitte beachten Sie: Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen. Zum Bestehen der Klausur sind 17 Punkte erforderlich. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!