....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Diplomvorprüfung
HÖHERE MATHEMATIK II
Analysis 1 für Physiker

8. September 2008, 15:00 – 16:30 Uhr

PD Dr. W. Aschbacher, Prof. Dr. H. Spohn

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Aufgabe 1. Varia **[3 Punkte]**

(a) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ Seien $a, b \in \mathbb{K}$. Dann existiert ein eindeutiges $x \in \mathbb{K}$ mit $a \cdot x = b$.
- ☒ Die 0 ist eindeutig bestimmt durch die Eigenschaft, dass $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$.
- ☒ Die Aussage $1 + 1 \neq 0$ kann nicht mit Hilfe der Körperaxiome bewiesen werden.
- ☐ Es existieren Körper, in denen $1 = 0$ gilt.

(b) Sei $D \subset \mathbb{R}$ der Definitionsbereich von $f : D \to \mathbb{R}$, und sei $x_0 \in D$. Welche Aussagen sind äquivalent zur Stetigkeit von f im Punkt $x_0 \in D$?

- ☐ $\forall\delta{>}0\ \exists\epsilon{>}0\ \forall x{\in}D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- ☒ $\forall\delta{>}0\ \exists\epsilon{>}0\ \forall x{\in}D : |x - x_0| < \epsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta$
- ☐ $\exists x{\in}D\forall\delta{>}0\ \forall\epsilon{>}0\ : |x - x_0| < \epsilon \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta$
- ☒ $\forall\epsilon{>}0\ \exists\delta{>}0\ \forall x{\in}D : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

(c) Sei $D \subset \mathbb{R}$, ξ ein Häufungspunkt von D, $\|g\|_D = \sup_{x\in D} |g(x)|$ für beschränkte Funktionen $g : D \to \mathbb{R}$ und (f_n) eine reellwertige Funktionenfolge auf D. Welche Aussagen sind richtig?

- ☒ (f_n) konvergiert gleichmässig auf D. $\iff$ $\forall\, \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m, n > N : \|f_m - f_n\|_D < \epsilon$
- ☒ (f_n) konvergiert auf D gleichmässig gegen f. $\iff$ $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_D = 0$
- ☒ (f_n) konvergiert gleichmässig auf D und $\lim_{x\to\xi} f_n(x)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$.
  $\implies \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to\xi} f_n(x) = \lim\limits_{x\to\xi} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$
- ☒ Sei jedes f_n stetig in ξ und $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_D = 0$. $\implies$ f ist stetig in ξ.

LÖSUNG

(a) Beh Genau die zweite und die dritte Aussage ist richtig.

Bew Die erste Aussage ist falsch. Dazu betrachten wir z.Bsp. $a = 0$ und $b \neq 0$. Dann existiert kein $x \in \mathbb{K}$, das diese Gleichung erfüllt, denn $0 = 0 \cdot x = b \neq 0$. Die zweite Aussage ist richtig (Aufgabe 1 1.(a)). Die dritte Aussage ist richtig (Aufgabe 1 3.). Die vierte Aussage ist falsch (bereits in Körperaxiom (KM3) enthalten, siehe Aufgabe 1). **[1 Punkt]**

☐

(b) Beh Genau die zweite und die vierte Aussage ist richtig.

Bew Die zweite und die vierte Aussage ist die Definition der Stetigkeit. Die erste und die dritte Aussage ist offensichtlicherweise falsch. **[1 Punkt]**

☐

(c) Beh Alle Aussagen sind richtig.

Bew Die Aussagen sind in den Aufgaben 67 (a), 70 (a), 70 (b) und der Vorlesung enthalten.

[1 Punkt]

☐

Aufgabe 2. Reihen, stetige Fortsetzbarkeit **[5 Punkte]**

(a) Welchen Wert besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)}$?

☐ $\frac{10}{9}$ ☐ $\frac{5}{9}$ ☒ $\frac{3}{4}$ ☐ $\frac{5}{2}$ ☐ 1

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sinh n}$?

☐ $= -\infty$ ☐ $\in (-\infty, 0)$ ☐ $= 0$ ☒ $\in (0, \infty)$ ☐ $= +\infty$ ☐ undefiniert

(c) Wie gross ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(n\tfrac{\pi}{2})\, x^n$?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2 ☐ ∞

(d) Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{nz}}{n}$?

☐ $z = 0$ ☐ $z = 1 + 3\pi\mathrm{i}$ ☒ $z = -\pi + 2\mathrm{i}$ ☐ $z = 2 - \frac{\mathrm{i}}{2}$ ☒ $z = \pi\mathrm{i}$

(e) Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^{\sqrt{x}}$. Durch welchen Wert ist f bei $x = 0$ stetig fortsetzbar?

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ nicht stetig fortsetzbar ☒ 1 ☐ 2 ☐ 0

LÖSUNG

(a) Beh $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{3}{4}$

Bew Wir berechnen die Reihe durch “Teleskopzerlegung”,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right)\right] \to \frac{3}{4} \quad \text{für } N \to \infty.$$

[1 Punkt]

☐

(b) Beh Der Grenzwert dieser Reihe liegt in $(0, \infty)$.

Bew Gemäss Leibnizscher Regel aus der Vorlesung konvergiert die Reihe. Ferner gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sinh n} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sinh 1} - \frac{1}{\sinh 2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{\sinh 3} - \frac{1}{\sinh 4}\right)}_{>0} + \ldots > 0.$$

[1 Punkt]

☐

(c) Beh Der Konvergenzradius ist $R = 1$.

Bew Mit $a_n = \sin^2(n\pi/2)$ haben wir $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = 1$. Somit besitzt die Folge $\sqrt[n]{|a_n|}$ die Häufungspunkte 0 und 1, und der Konvergenzradius ist

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$$

[1 Punkt]

☐

(d) Beh Die Reihe konvergiert für $z = \pi\mathrm{i}$ und $z = -\pi + 2\mathrm{i}$.

Bew Die harmonische Reihe ($z = 0$) divergiert. Die alternierende harmonische Reihe ($z = \pi\mathrm{i}$) konvergiert. Für $\operatorname{Re} z < 0$ ist $|\mathrm{e}^z| < 1$, die Reihe konvergiert also absolut. Für $\operatorname{Re} z > 0$ ist $|\mathrm{e}^z| > 1$, die Reihe ist also nicht konvergent. **[1 Punkt]**

☐

(e) Beh f ist durch den Wert 1 stetig nach $x = 0$ fortsetzbar.

Bew Ähnlich wie in Aufgabe 53 (b) haben wir

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\sqrt{x}\log x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\log x} = \mathrm{e}^0 = 1,$$

denn nach der Regel von de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-1/2}} = -2 \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} = 0.$$

[1 Punkt]

☐

Aufgabe 3. Integration **[5 Punkte]**

Untersuchen Sie die Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ ☒ divergent ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\,\frac{\log x}{x}$ ☐ divergent ☐ 1 ☐ 2 ☒ $\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ ☒ divergent ☐ 1 ☐ 2π ☐ $\frac{3}{2}$

LÖSUNG

(a) Beh $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$ ist divergent.

Bew Wir schätzen folgendermassen ab,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} &= \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} + \int_1^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} \geq \int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}} + \int_1^\infty \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{2x^3}} \\ &= \underbrace{\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}}_{\geq 0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}}_{=+\infty}.\end{aligned}$$

[1 Punkt]

☐

(b) Beh $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\,\frac{\log x}{x} = \frac{1}{2}$

Bew Wir integrieren einmal partiell,

$$\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\,\frac{\log x}{x} = \underbrace{\left[(\log x)^2\right]_1^{\mathrm{e}}}_{=1} - \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x\,\frac{\log x}{x},$$

woraus die Behauptung folgt. **[2 Punkte]**

☐

(c) Beh $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$ ist divergent.

Bew Aus der Abschätzung $\log x \leq x-1$ für alle $x>0$ folgt

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\log x} \geq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} = +\infty.$$

[2 Punkte]

☐

Aufgabe 4. Inhomogenes Differentialgleichungssystem **[4 Punkte]**

Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Propagator e^{tA}. Welche Form hat er bei $t = 1$?

$$\square \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & \mathrm{e} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & 2\mathrm{e} \\ 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & \mathrm{e} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix} \quad \boxtimes \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & 2\mathrm{e} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix}$$

Hinweis: Schreiben Sie $A = D + N$ für ein diagonales D und ein nilpotentes N, sodass D und N kommutieren.

(b) Wie lautet die erste Komponente von $x(t)$ bei $t = 1$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = [0, 0, 1]^T$?

$$\square \ \frac{3\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}} \qquad \square \ \frac{7\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{3\mathrm{e}} \qquad \boxtimes \ \frac{5\mathrm{e}}{2} - \frac{1}{2\mathrm{e}} \qquad \square \ \frac{5\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{3\mathrm{e}}$$

LÖSUNG

(a) Beh $\quad \mathrm{e}^{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & 2\mathrm{e} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e} \end{bmatrix}$

Bew Wir benutzen den Hinweis, schreiben

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D + N \quad \text{mit} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

und stellen fest, dass $[D, N] = 0$. Daraus folgt, dass

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,(D+N)} = \mathrm{e}^{tD}\mathrm{e}^{tN} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 2t\,\mathrm{e}^t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix},$$

wobei wir im dritten Schritt benutzt haben, dass $\mathrm{e}^{tN} = 1 + tN$. Einsetzen von $t = 1$ liefert die Behauptung. **[2 Punkte]**

$\square$

(b) Beh $\quad (x(t))_1 = \dfrac{5\mathrm{e}}{2} - \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$

Bew Die Lösung des inhomogenen Systems lautet

$$x(t) = \mathrm{e}^{tA}\,x(0) + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\,A}\,b(s)\,\mathrm{d}s,$$

woraus in unserem Fall,

$$x(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t & 0 & 2t\,\mathrm{e}^t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{(t-s)} & 0 & 2(t-s)\,\mathrm{e}^{(t-s)} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}s.$$

Es ergibt sich also für die erste Komponente von $x(t)$,

$$(x(t))_1 = 2t\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-2s}\,\mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t \left[\mathrm{e}^{-2s}\right]_0^t = 2t\,\mathrm{e}^t + \sinh t.$$

Einsetzen von $t = 1$ liefert die Behauptung. **[2 Punkte]**

$\square$

Aufgabe 5. Fourierkoeffizienten **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Funktion definiert durch $f(x) = x^2$ für $x \in [-\pi, \pi]$ mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(a) Wie lautet der Fourierkoeffizient $\hat{f}(0)$?

☐ $\frac{\pi^2}{4}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ $\frac{\pi^2}{2}$ ☒ $\frac{\pi^2}{3}$ ☐ $\frac{2\pi}{3}$

(b) Wie lautet der Fourierkoeffizient $\hat{f}(1)$?

☒ -2 ☐ 1 ☐ π ☐ $-\pi$ ☐ 2

(c) Welches Abfallverhalten hat $\hat{f}(n)$ für $n \to \infty$?

☒ $O(n^{-1})$ ☒ $O(n^{-2})$ ☒ $o(n^{-1})$ ☐ $o(n^{-2})$

LÖSUNG

(a) Beh $\hat{f}(0) = \frac{\pi^2}{3}$

Bew Wir können die Fourierkoeffizienten auch folgendermassen schreiben,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dann erhalten wir für $\hat{f}(0)$,

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{6\pi}(\pi^3 - (-\pi)^3) = \frac{\pi^2}{3}.$$

[1 Punkt]
☐

(b) Beh $\hat{f}(1) = -2$

Bew Wir berechnen nun $\hat{f}(n)$ für $n \neq 0$ mittels zweimaliger partieller Integration,

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[x^2\, \frac{\mathrm{i}}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{\mathrm{i}}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{n\pi} \left[x\, \frac{\mathrm{i}}{n}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{\mathrm{i}}{n\pi}\frac{\mathrm{i}}{n} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \mathrm{d}x}_{=0} = \frac{2(-1)^n}{n^2}.$$

Daraus erhalten wir also $\hat{f}(1) = -2$. **[2 Punkte]**
☐

(c) Beh $\hat{f}(n) = O(n^{-1}), O(n^{-2}), o(n^{-1})$, aber $\hat{f}(n) \neq o(n^{-2})$

Bew Dies folgt aus obiger Formel $\hat{f}(n) = 2(-1)^n/n^2$. **[1 Punkt]**
☐

Aufgabe 6. Homogenes Differentialgleichungssystem **[5 Punkte]**
Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0)$, indem Sie eine Basis aus Hauptvektoren von A benutzen.

LÖSUNG

Beh $\quad x(t) = \begin{bmatrix} 2e^t(e^t - 1) \\ e^{2t} \end{bmatrix}$

Bew Wir berechnen das charakteristische Polynom von A,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbf{1}) = (1-\lambda)^2.$$

A hat also den doppelten Eigenwert $\lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = 1$. **[1 Punkt]**
Wir bestimmen einen Eigenvektor zum Eigenwert λ,

$$(A - \lambda\mathbf{1})\, x_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1 = 0, \quad \text{also z.Bsp.} \quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1/2 Punkt]
[1/2 Punkt]

Da der Kern von $(A - \lambda\mathbf{1})$ eindimensional ist, bestimmen wir einen Hauptvektor der Stufe 2 zum Eigenwert λ,

$$(A - \lambda\mathbf{1})\, x_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_2 = x_1, \quad \text{also z.Bsp.} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

[1/2 Punkt]
[1/2 Punkt]

Die Vektoren $\{x_1, x_2\}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$, und deshalb können wir die Anfangsbedingung $x(0)$ bzgl. dieser Basis entwickeln,

$$x(0) = c_1 x_1 + c_2 x_2,$$

[1/2 Punkt]

wobei $c_1 = 1$ und $c_2 = 2$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = e^{tA} x(0) = c_1 e^{tA} x_1 + c_2 e^{tA} x_2 = c_1 e^{t\lambda} x_1 + c_2 e^{t\lambda}(x_2 + t\, \underbrace{(A - \lambda\mathbf{1}) x_2}_{= x_1})$$
$$= e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^t \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} e^t(1+2t) \\ e^t \end{bmatrix}.$$

[3/2 Punkte]
□

Erklärung:
[1 Punkt] für die Eigenwerte,
[1/2 Punkt] für die Eigenvektorgleichung,
[1/2 Punkt] für den Eigenvektor,
[1/2 Punkt] für die Hauptvektorgleichung,
[1/2 Punkt] für den Hauptvektor,
[1/2 Punkt] für die Entwicklung der Anfangsbedingung,
[3/2 Punkte] für das Anwenden des Propagators.

Aufgabe 7. Taylorreihe **[3 Punkte]**

Sei die Funktion $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}\,,$$

und sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ihre Taylorreihe mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

(a) Wie lauten die Koeffizienten a_n?

- ☐ $a_0 = 1,\ a_1 = -2,\ a_2 = 2,\ a_3 = -2,\ a_4 = 2,\ a_5 = -2$
- ☐ $a_0 = 0,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -3,\ a_4 = 4,\ a_5 = -5$
- ☒ $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 2,\ a_3 = -2,\ a_4 = 2,\ a_5 = -2$
- ☐ $a_0 = 1,\ a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -2,\ a_4 = 2,\ a_5 = -2$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ e ☐ ∞

(c) Wie lauten die Koeffizienten der Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ einer Stammfunktion von f?

- ☐ $b_n = a_n$
- ☐ $b_n = n\,a_n$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☒ $b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_n = (n+1)a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$
- ☐ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$

LÖSUNG

(a) Beh Die dritte Aussage ist richtig.

Bew Wir benutzen die geometrische Reihe,

$$f(x) = \frac{1+x^2}{1-(-x)} = (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=2}^{\infty}(-x)^n = 1-x+2x^2-2x^3+2x^4-2x^5+\cdots\,.$$

[1 Punkt]

☐

(b) Beh Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist $R = 1$.

Bew Da der Betrag fast aller Koeffizienten gleich 2 ist, folgt

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2}{2} = 1.$$

[1 Punkt]

☐

(c) Beh Die dritte Aussage ist richtig.

Bew Auf dem Konvergenzintervall besitzt die Taylorreihe eine Stammfunktion, z.Bsp. (die Stammfunktion ist nur bis auf eine Konstante bestimmt), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$. **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 8. Konkavität **[4 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f konkav ist, falls der Graph der Funktion f unterhalb jeder ihrer Tangenten liegt, d.h. beweisen Sie die folgende Implikation:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ f(b) \leq f(a) + (b-a)f'(a) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ist konkav.}$$

Hinweis: Setzen Sie $a = (1-\alpha)x + \alpha y$. [Zur Erinnerung: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst *konkav*, falls $f((1-\alpha)x + \alpha y) \geq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$ für alle $\alpha \in [0,1]$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}$.]

LÖSUNG

<u>Beh</u> $\forall a, b \in \mathbb{R} \ : \ f(b) \leq f(a) + (b-a)f'(a) \quad \Longrightarrow \quad f$ ist konkav.

<u>Bew</u> Seien $\alpha \in [0,1]$ und $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig, und setze $a = (1-\alpha)x + \alpha y$. Wir wollen zeigen, dass

$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \leq f(a).$$

[1 Punkt]

Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(a) + (x-a)f'(a), \\ f(y) &\leq f(a) + (y-a)f'(a). \end{aligned}$$

[1 Punkt]

Berechnen wir nun $(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$, erhalten wir **[1 Punkt]**

$$(1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \leq f(a) + \underbrace{[(1-\alpha)(x-a) + \alpha(y-a)]}_{=0} f'(a) = f(a).$$

[1 Punkt]

□

Erklärung:

[1 Punkt] für das Aufstellen der Behauptung,
[1 Punkt] für die beiden Bedingungen, die aus der Voraussetzung folgen,
[1 Punkt] für das Addieren der beiden Bedingungen,
[1 Punkt] für das Ausrechnen der Klammer.

Aufgabe 9. Limes Superior **[4 Punkte]**

Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen mit nichtnegativen Gliedern. Zeigen Sie, dass

$$\limsup(a_n b_n) \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n).$$

Hinweis: Benutzen Sie die "ϵ-Charakterisierung" des Limes Superior aus den Übungen.

LÖSUNG

<u>Beh</u> Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen mit nichtnegativen Gliedern. Dann gilt $\limsup(a_n b_n) \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n)$.

<u>Bew</u> Wir kürzen folgendermassen ab,

$$a := \limsup a_n, \quad b := \limsup b_n, \quad c := \limsup(a_n b_n).$$

Nach Aufgabe 29 (a) ist eine Zahl a genau dann der Limes Superior der beschränkten reellen Folge (a_n), falls zu jedem $\epsilon > 0$ gilt, dass $a_n > a - \epsilon$ für unendlich viele n und $a_n > a + \epsilon$ für höchstens endlich viele n ("ϵ-Charakterisierung").
Sei $\delta > 0$ beliebig und $\epsilon > 0$ derart, dass $(a+b)\epsilon + \epsilon^2 = \delta$. **[1 Punkt]**
Wenden wir die ϵ-Charakterisierung auf a und b an, gilt für fast alle n,

$$a_n \leq a + \epsilon, \quad b_n \leq b + \epsilon.$$

[1 Punkt]

Daraus folgt, dass

$$a_n b_n \leq (a+\epsilon)(b+\epsilon) = ab + [(a+b)\epsilon + \epsilon^2] = ab + \delta$$

für fast alle n. **[1 Punkt]**
Wir wollen nun zeigen, dass $c \leq ab$. *Annahme*: $c > ab$. Aus der ϵ-Charakterisierung von c folgt unter dieser Annahme, dass

$$a_n b_n > c - (c - ab)/2 = ab + (c - ab)/2$$

für unendlich viele n. Da δ beliebig war, können wir $\delta < (c - ab)/2$ wählen und erhalten einen Widerspruch. **[1 Punkt]**

□

Erklärung:
[1 Punkt] für den Zusammenhang von ϵ und δ,
[1 Punkt] für das Anwenden der ϵ-Charakterisierung auf a und b,
[1 Punkt] für das Multiplizieren,
[1 Punkt] für den Widerspruchbeweis.

Aufgabe 10. Dominierte Konvergenz **[3 Punkte]**
Formulieren Sie präzise den Satz von der dominierten Konvergenz aus der Vorlesung.

LÖSUNG

Satz von der dominierten Konvergenz (aus der Vorlesung)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ($a = -\infty$ und $b = \infty$ sind zugelassen).
(1) $f, f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ sind (stückweise) stetig. **[1/2 Punkt]**
(2) f_n konvergiert punktweise gegen f. **[1/2 Punkt]**
(3) Es ex. eine (stückweise) stetige Funktion $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ und $\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x < \infty$. **[1 Punkt]**

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

[1 Punkt]