Technische Universität München
Physik Department
Theoretische Physik T30a
Prof. Dr. Harald Friedrich

Elektrodynamik
Sommersemester 2009
Diplomvorprüfung DVP 2
18. September 2009

Lösungen der Diplomvorprüfung DVP 2 zur Theoretischen Physik II – Elektrodynamik

Aufgabe 1 – **Multiple Choice**

Geben Sie zu jeder Frage *eine* Antwort an. Richtige Antworten werden mit plus einem, falsche mit minus einem Punkt bewertet. **8P.**

1. Wie lautet die SI-Einheit der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums ϵ_0?

   (a) V s/(A m) (b) A/(V m) (c) A s/(V m)

2. Kann ein statisches elektrisches Feld im Vakuum ein lokales Extremum besitzen (Earnshaw-Theorem)?

   (a) prinzipiell ja (b) prinzipiell nein (c) nur bei passender Wahl des Feldes

3. Ist die Coulomb-Kraft konservativ?

   (a) ja (b) nein

4. Wie verlaufen die elektrischen Feldlinien relativ zu den Äquipotentialflächen?

   (a) parallel (b) gemäß dem Snelliusschen Brechungsgesetz (c) senkrecht

5. Wie verläuft das elektrische Feld in einem Zylinderkondensator aus zwei koaxialen Zylindern (Zylinderkoordinaten mit (ρ, ϕ, z))?

   (a) $\propto 1/\rho$ (b) $\propto \ln(\rho)$ (c) $\propto \rho^2$

6. Was besagt die Lenzsche Regel?

   (a) Das ursprüngliche elektrische Feld ist so gerichtet, dass die Ursache seiner Entstehung abgeschwächt wird.
   (b) Das induzierte elektrische Feld ist so gerichtet, dass die Ursache seiner Entstehung abgeschwächt wird.
   (c) Das induzierte elektrische Feld ist so gerichtet, dass die Ursache seiner Entstehung erhalten bleibt.

7. Wann nennt man ein Medium dispersiv?

   (a) Wenn die Lichtgeschwindigkeit im Medium der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit entspricht.
   (b) Wenn die Lichtgeschwindigkeit im Medium von der Frequenz abhängt.
   (c) Wenn die Lichtgeschwindigkeit im Medium nicht von der Frequenz abhängt.

8. Ist das elektrische Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung q im Bezugssystem eines ruhenden Beobachters radial und isotrop bzgl. der Position der Punktladung?

   (a) Es ist radial und isotrop. (b) Es ist radial, aber nicht isotrop. (c) Es ist weder radial noch isotrop.

Aufgabe 2 – **Elektrostatik: Geladener Stab**

a) Die Dichte des geladenen Stabes ist:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} \lambda\, \delta(x)\, \delta(y) & , |z| \leq a, \\ 0 & , |z| > a. \end{cases} \tag{1}$$

Das Potential bestimmt sich über das Integral:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2}$$

zu:

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x'\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y'\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z'\frac{\delta(x')\delta(y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z'\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{z-a}^{z+a}\mathrm{d}\bar{z}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+\bar{z}^2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{z+a+\sqrt{\rho^2+(z+a)^2}}{z-a+\sqrt{\rho^2+(z-a)^2}}\right] \qquad (3)
\end{aligned}$$

mit $\rho^2 = x^2 + y^2$ (Zylinderkoordinaten), $\bar{z} = z - z'$ und dem angegebenem Hilfsintegral.

b) Für den ersten Grenzwert $a \gg \rho, z$ betrachtet man zunächst das Argument des Logarithmus und entwickelt Zähler und Nenner getrennt bis zur ersten nichtverschwindenden Ordnung. Sowohl im Zähler als auch im Nenner teilt man durch a, damit gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{a}+1+\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}+\frac{2z}{a}+1} &\sim \frac{z}{a}+1+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}+\frac{2z}{a}\right) = 2+\frac{2z}{a}+\frac{\rho^2}{2a^2}+\frac{z^2}{2a^2}\sim 2, \\
\frac{z}{a}-1+\sqrt{\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{2z}{a}+1} &\sim \frac{z}{a}-1+1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}-\frac{2z}{a}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2z}{a}\right)^2 = \frac{\rho^2}{2a^2}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde $\sqrt{1+x} \sim 1 + x/2 - x^2/8$ verwendet. Für das Potential folgt also:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{4a^2}{\rho^2}\right] = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{x^2+y^2}{l_0^2}\right] + 2\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{2a}{l_0^2}\right] = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\ln\left[\frac{x^2+y^2}{l_0^2}\right] + \text{const.}, \qquad (4)$$

also das bekannte Potential eines unendlich langen, geladenen Drahtes (l_0 ist eine beliebige Länge).

Der zweite Grenzwert sollte letztlich das Potential einer Punktladung ergeben. Dazu führt man eine Taylor-Entwicklung von $\Phi(\vec{r})$ um $a = 0$ durch. Der Term nullter Ordnung verschwindet, da das Argument gegen 1 strebt, die erste Ordnung ergibt – nach etwas mühseliger erster Ableitung via der Quotientenregel – den folgenden Ausdruck für die Entwicklung:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\frac{2a}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}, \qquad (5)$$

mit der Gesamtladung des Stabes $q = \lambda\, 2a$.

Aufgabe 3 **– Elektrostatik: Kapazität eines Kugelkondensators**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die innere Kugelschale als Leiter $\mathcal{L}_1$ bezeichnet und trage die Ladung $+Q$. Die äussere Schale sei der Leiter $\mathcal{L}_2$ und habe die Ladung $-Q$. Die Spannung zwischen beiden Leitern ist daher allgemein:

$$U = \Phi_{\mathcal{L}_1} - \Phi_{\mathcal{L}_2} = \int_{\mathcal{L}_1}^{\mathcal{L}_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \qquad (6)$$

und hier im Speziellen:

$$U = \int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right]. \qquad (7)$$

Die Kapazität des Kugelkondensators ist also:

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}. \qquad (8)$$

Aufgabe 4 – **Magnetostatik: Helmholtz-Spulen**

a) Als Achse zwischen den beiden Kreisringen zeichnet man die z-Achse aus. Das Magnetfeld eines einzelnen Kreisrings $\mathcal{C}$ ist nach Bio-Savart mit $\vec{j}\mathrm{d}V' = I\mathrm{d}\vec{l}$ gegeben durch:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \tag{9}$$

Man parametrisiert den Pfad entlang des Kreisrings über den Winkel ϕ zu $\mathrm{d}\vec{l} = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)\, R\mathrm{d}\phi$ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$). Damit gilt $\vec{r} - \vec{r}' = (x - R\cos(\phi), y - R\sin(\phi), z)$ und somit erhält man für das Magnetfeld auf der Achse (bei $x = 0$ und $y = 0$) zunächst $B_x = 0$ und $B_y = 0$, da die Integrale über $\sin$ bzw. $\cos$ über eine volle Periode verschwinden. Das Feld auf der Achse in z-Richtung ist gegeben durch:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \mathrm{d}\phi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} I R^2 \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{10}$$

Das gesamte Magnetfeld auf der Symmetrieachse zweier identischer, gleichsinnig vom Strom I durchflossener Kreisringe im Abstand d ist daher:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0}{2} I R^2 \left\{ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d - z)^2]^{3/2}} \right\}. \tag{11}$$

b) Damit das Feld bei $z = d/2$ möglichst homogen wird, müssen möglichst viele Ableitungen von B_z verschwinden. Die erste Ableitung verschwindet aufgrund der Symmetrie des Problems automatisch:

$$\left.\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}z}\right|_{z=\frac{d}{2}} = -\frac{3\mu_0}{2} I R^2 \left.\left\{ \frac{z}{(R^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{d - z}{[R^2 + (d - z)^2]^{5/2}} \right\}\right|_{z=\frac{d}{2}} = 0. \tag{12}$$

Die zweite Ableitung lautet:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z=\frac{d}{2}} &= -\frac{3\mu_0}{2} I R^2 \left.\left\{ \frac{1}{(R^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{1}{[R^2 + (d - z)^2]^{5/2}} - \frac{5z^2}{(R^2 + z^2)^{7/2}} - \frac{5(d - z)^2}{[R^2 + (d - z)^2]^{7/2}} \right\}\right|_{z=\frac{d}{2}} \\ &= -\frac{3\mu_0}{2} I R^2 \frac{1}{\left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{7/2}} \left\{ 2\left[R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right] - 10\left(\frac{d}{2}\right)^2 \right\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Dieser Ausdruck verschwindet für $2R^2 = 8\left(\frac{d}{2}\right)^2$, d.h. bei $d = R$. Diese Anordnung nennt man "Helmholtz-Spulen".

Aufgabe 5 – **Relativistik: Lichtuhr**

a) Im Ruhesystem K' des Spiegelsystems sind zwei Ereignisse interessant. Das Aussenden und das Empfangen des Lichtstrahls auf einen einzigen (o.B.d.A. den unteren) Spiegel bezogen. Diese Ereignisse werden durch die Vierervektoren $X_1' = (0, 0, 0, 0)$ und $X_2' = (c_0 T', 0, 0, 0)$ beschrieben, besitzen also den raumzeitlichen Abstand $\Delta X' = (c_0 T', 0, 0, 0)$. Im Laborsystem K gilt $X_1 = X_1'$ und $X_2 = (c_0 T, vT, 0, 0)$, hier also der raumzeitliche Abstand $\Delta X = (c_0 T, vT, 0, 0)$. Die Transformationseigenschaften der Raumzeit-Koordinaten liefern den Zusammenhang $c_0 \Delta t = \gamma(c_0 \Delta t' + \vec{\beta} \cdot \Delta \vec{x}')$, was im vorliegenden Fall mit $\Delta \vec{x}' = \vec{0}$ bedeutet. Das Ergebnis ist: $T = \gamma T'$.

b) Der Effekt ist als Zeitdilatation bekannt.

c) Interessant ist nun noch die geometrische Alternative in Kombination mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Betrachtet man das Bild der Angabe, so legt der Strahl im Ruhesystem K auch eine Strecke in Bewegungsrichtung – also senkrecht zur Verbindungsachse der Spiegel – zurück. Diese Strecke hat die

Länge vT und man definiert die Hälfte als $x = vT/2$. Die Zeit T kann mit Hilfe von x und dem Satz von Pythagoras zu:

$$T = \frac{2\sqrt{l^2 + x^2}}{c_0} \tag{14}$$

angegeben werden. Daher folgt:

$$x = v\frac{T}{2} = \frac{v}{c_0}\sqrt{l^2 + x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{\frac{v^2}{c_0^2} l^2}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}. \tag{15}$$

Dies liefert für die Zeit T den Ausdruck:

$$T = \frac{2x}{v} = \frac{\frac{2l}{c_0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}} = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}, \tag{16}$$

also das bekannte Ergebnis aus a).