Probeklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. R. Kienberger
Sommersemester 2020
17.07.2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Fünf gleiche Punktladungen q sind gleichmäßig auf einem Halbkreis mit dem Radius R verteilt. Geben Sie die Kraft auf die Testladung q_0 im Kreismittelpunkt an.

Lösung

Aus Symmetriegründen ist die y-Komponente der resultierenden Kraft auf die Ladung q_0 null. Wir müssen also nur die Kraft zwischen q_0 und der Ladung q auf der Verlängerung der x-Achse sowie die x-Komponenten der Kräfte zwischen q_0 und den beiden schrägen Ladungen q bei 45° betrachten. Damit gilt für die resultierende Kraft:

$$\vec{F}_{q_0} = \vec{F}_{q(Achse),q_0} + 2 \cdot \vec{F}_{q(45^\circ),q_0} \tag{1}$$

[2]

Für die Kraft längs der Achse gilt:

$$\vec{F}_{q(Achse),q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \hat{x} \tag{2}$$

und für die schräg gerichteten Kräfte gilt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \vec{F}_{q(45^\circ),q_0} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \cos(45^\circ) \cdot \hat{x} && (3) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \hat{x} && (4) \end{aligned}$$

Die Gesamtkraft auf die Ladung q_0 ergibt sich damit zu:

$$\vec{F}_{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r^2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) \cdot \hat{x} \tag{5}$$

[2]

Aufgabe 2 (11 Punkte)

(a) Berechnen Sie das elektrostatische Feld **innerhalb** einer nichtleitenden Vollkugel mit Radius R, die eine homogen verteilte Gesamtladung Q trägt.

(b) Im Folgenden sei nun der Nullpunkt des Potentials $\phi = 0$ im **Mittelpunkt** der Kugel definiert.

(i) Bestimmen Sie das elektrische Potential $\phi(r)$ innerhalb der Kugel.

(ii) Wie groß ist die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt auf der Oberfläche und dem Mittelpunkt der Kugel?

(iii) Welcher der beiden Punkte liegt auf einem höheren Potential, wenn Q positiv ist?

(c) Nun sei der Nullpunkt im Unendlichen definiert, also $\phi(\infty) = 0$. Wiederholen sie die Aufgaben (i) und (ii) aus (b) für diese neue Eichung. Warum unterscheiden sich die beiden Ergebnisse für (i), nicht aber für (ii)?

Lösung

(a) Die Ladungsdichte ist

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{6}$$

und die eingeschlossene Ladung innerhalb einer Gauß'schen Fläche des Radius $r < R$ ist dann

$$q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{R^3} \tag{7}$$

Für dieses Feld gilt dann:

$$\int \vec{E}d\vec{A} = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \tag{8}$$

[3]

(b) Es sei nun $\phi = 0$ bei $r = 0$.

(i) Die Abhängigkeit des Potentials erhält man über

$$\phi(r) - \underbrace{\phi(0)}_{\text{Nullpunkt}} = -\int_0^r E dr \tag{9}$$

$$\phi(r) - 0 = -\int_0^r \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} dr \tag{10}$$

$$\phi(r) = -\frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{11}$$

[2]

(ii) Da $\phi(0) = 0$, ist für jedes mit dem Ergebnis aus (i) berechnete Potential gerade die Potentialdifferenz zum Mittelpunkt, für $r = R$ folgt:

$$\phi(R) = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{12}$$

[**1**]

(iii) Alle Punkte außerhalb des Ursprungs haben ein negatives Potential, also ist der Ursprung der Punkt des höchsten Potentials.

[**1**]

(c) Hier müssen wir zur Bestimmung des Potentials anders vorgehen. Wir kennen die Formel für die Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten, im Speziellen gilt hier deshalb:

$$\phi(R) - \phi(r) = -\int_r^R E dr = -\int_r^R \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} dr = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) \tag{13}$$

Die linke Seite erhält aber auch das bekannte Potential auf der Oberfläche einer Punktladung, nämlich $\phi(R)$, also ist

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \phi(r) = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(R^2 - r^2\right) \qquad \phi(r) = \frac{Q\left(3R^2 - r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{14}$$

Die Potentialdifferenz zum Ursprung ist

$$\phi(R) - \phi(0) = \frac{2Q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{15}$$

Das Potential innerhalb der Kugel ist also anders als das in (a) ermittelte, die Differenz zwischen Oberfläche und Ursprung aber gleich. Dies liegt lediglich an der Definition des Nullpunkts. Die Angabe eines absoluten Potentials ist direkt von diesem abhängig, bei einer Differenz kürzen sich die Eichfaktoren jedoch heraus.

[**4**]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sie haben einen Plattenkondensator in dem sich ein Dielektrikum befindet. Leiten Sie einen Ausdruck für die induzierte Oberflächenladungsdichte σ' auf der Oberfläche eines Dielektrikums in Abhängigkeit von σ_0 (Flächenladungsdichte auf dem Kondensator) und ε_r her. Zeigen Sie damit weiter, dass sie Polarisation $\left|\vec{P}\right| = \sigma'$.

Lösung

Die folgenden Betrachtungen gelten für Kondensatoren, bei denen das elektrische Feld parallel zur Oberfläche des Kondensators und des Dielektrikums ist. $\vec{E}_0$, q_0 und σ_0 gelten für den Plattenkondensator ohne Dielektrikum. Mit dem Satz von Gauß stellt man fest:

$$E_0 A = \frac{q_0}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \tag{16}$$

Das Nettofeld $\vec{E}'$ im Dielektrikum wird von der Gesamtladung $q_0 - q'$ induziert, also gilt

$$E' = \frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} \tag{17}$$

Weiterhin gilt

$$E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \tag{18}$$

[3]

Gleichsetzen und Auflösen ergibt schließlich

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma_0 \tag{19}$$

Dieser Ausdruck ist $< \sigma_0$ für $\varepsilon_r > 1$, wie es der Fall sein sollte.

Um $\left|\vec{P}\right| = \sigma'$ zu zeigen, benötigt man den folgenden Ansatz:

$$\left|\vec{P}\right| = \varepsilon_o \chi \left|\vec{E}'\right| = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left|\vec{E}'\right| = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\sigma_0 - \sigma'}{\varepsilon_0} \tag{20}$$

Auflösen ergibt dann

$$\left|\vec{P}\right| = \sigma' \tag{21}$$

[3]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Ein Kondensator C_1 der Kapazität 20 μF ist auf 1000 V aufgalden. Nun wird er durch Leitungen (mit Widerstand R) mit einem zweiten ungeladenen Kondensator C_2 der Kapazität 10 μF parallel verbunden.

(a) Wie groß waren Ladung und Energie von C_1 vor der Verbindung mit C_2 und wie groß sind sie danach?

(b) Wie groß sind Spannung, Gesamtladung und Gesamtenergie der beiden Kondensatoren gemeinsam nach dem Verbinden? Wie erklärt man die Energiedifferenz?

Lösung

(a) Vor dem Verbinden gilt:

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 = 0,02 \text{ C} \tag{22}$$

und

$$E_1 = \frac{1}{2} C_1 \cdot U_1^2 = 10 \text{ J} \tag{23}$$

Nach dem Verbinden fließt soviel Ladung auf den zweiten Kondensator, bis an beiden Kondensatoren dieselbe Spannung U_2 anliegt. Es gilt:

$$Q_1' + Q_2 = Q_1 \tag{24}$$

sowie

$$U_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1'}{C_1} \tag{25}$$

Daraus erhält man

$$Q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} Q_1 = 0.013 \text{ C} \tag{26}$$

und schließlich folgt dann $E_1' = 4,4$ J.

[**5**]

(b)

$$U_2 = \frac{Q_1'}{C_1} = 667 \text{ V} \tag{27}$$

Die Gesamtladung bleibt unverändert! Zur Berechnung der Gesamtenergie benötigt man noch die in C_2 gespeicherte Energie:

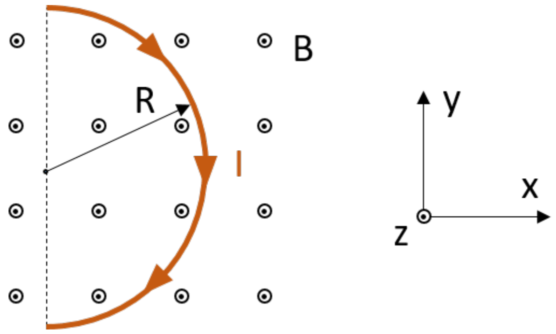
$$E_2 = \frac{1}{2} C_2 U_2^2 = 2,22 \text{ J} \tag{28}$$

Die Gesamtenergie E beträgt somit 6,66 J und ist geringer als die zu Beginn im Kondensator C_1 gespeicherte Energie. Die Differenz ging als Joul'sche Wärme im Leitungswiderstand verloren.

[**3**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein halbkreisförmiger Draht mit Radius R wird vom Strom I durchflossen und befindet sich in einem homogenen Magnetfeld mit Betrag B senkrecht zur Stromrichtung (siehe Abbildung). Berechnen Sie den Betrag und die Richtung der Kraft, die auf den Draht wirkt.



Hinweis: Sie können $q\vec{v} = I\vec{l}$ annehmen:

Lösung

Es gilt die Lorentzkraft:

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) = I(\vec{l} \times \vec{B}) \tag{29}$$

Auf ein Segment des Drahtes mit der Länge $d\vec{l}$ wirkt also eine Kraft $d\vec{F}$. Das Differential der Kraft ist damit gegeben durch:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \tag{30}$$

Für das Magnetfeld gilt $\vec{B} = B\vec{e}_z$ und als Parametrisierung des Weges nehmen wir:

$$d\vec{l} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \qquad \theta \in [0, \pi] \tag{31}$$

[3]

Damit ergibt sich für das Differential der Kraft:

$$d\vec{F} = IRd\theta \begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} B = IRB \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta \tag{32}$$

und man erhält als Gesamtkraft auf das Leiterstück:

$$\vec{F} = IRB \int_0^\pi d\theta \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = -IRB \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{33}$$

[3]

Damit ist der Betrag der Kraft $F = 2IRB$ und wirkt in negative x-Richtung.

[1]

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Zwei Raumschiffe A und B starten zur gleichen Zeit auf der Erde und fliegen in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit v zu Punkten in der gleichen Entfernung L. Sobald die Raumschiffe ihre jeweiligen Zielpunkte erreicht haben, senden sie ein Funksignal zur Erde, das dort zur Zeit T nach dem Start der Raumschiffe empfangen wird.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit des Raumschiffes relativ zur Erde aus der Entfernung L und der Signalankunftszeit T bestimmen lässt:

$$\frac{v}{c} = \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-1} \tag{34}$$

(b) Berechnen Sie für $L = 1$ Lichttag und $T = 8/3$ Tage mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ankunftszeiten der beiden Raumschiffe an ihrem Zielpunkten betrachtet vom Inertialsystem von A.

Lösung

(a) Das Raumschiff bewegt sich mit Geschwindigkeit v im Syste der Erde. Es erreicht den Zielpunkt also zur Zeit $t_0 = L/v$ und sendet dann sein Signal aus. Dieses bewegt sich mit Lichtgeschwindigkeit und braucht für die Strecke also die Zeit $t_1 = L/c$. Somit gilt

$$T = L\left(\frac{1}{v} + \frac{1}{c}\right) \tag{35}$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \frac{1}{\frac{T}{L} - \frac{1}{c}} = c \cdot \left(\frac{cT}{L} - 1\right)^{-1} \tag{36}$$

was zu zeigen war.

[2]

(b) Beide Ereignisse finden im Bezugssystem der Erde zum gleichen Zeitpunkt statt:

$$t = \frac{L}{v} = \frac{5}{3}d \tag{37}$$

Mit dem Ergebnis aus (a) folgt:

$$\beta = \frac{v}{c} = \left(\frac{\frac{8}{3}d \cdot c}{1cd} - 1\right)^{-1} = \frac{3}{5} \tag{38}$$

also ist

$$\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} = \frac{5}{4} \tag{39}$$

[3]

Da in das Bezugssystem von Raumschiff A transformiert werden soll, ist

$$\beta = \frac{v_A}{c} = +\frac{5}{3} \tag{40}$$

Die beiden Raumschiffe befinden sich an den Positionen $x_A = L$ und $x_B = -L$. Es folgt

$$t'_A = \gamma \left(t - \frac{\beta L}{c} \right) = \frac{5}{4} \left(\frac{5}{3} d - \frac{3}{5} d \right) = \frac{4}{3} d \tag{41}$$

und für Raumschiff B

$$t'_B = \gamma \left(t + \frac{\beta L}{c} \right) = \frac{17}{16} d. \tag{42}$$

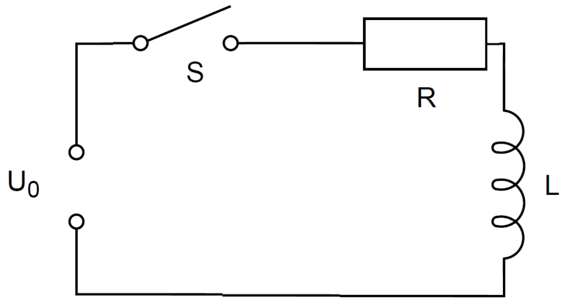
[**4**]

Aufgabe 7 (12 Punkte)

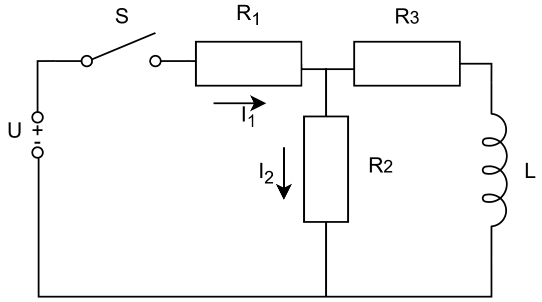
Durch Schließen eines Schalters S zum Zeitpunkt $t = 0$ wird an den untenstehenden Schaltkreis eine konstante Spannung U_0 angelegt.

(a) Bestimmen Sie einen Ausdruck für den Strom $I(t)$, der durch den Schaltkreis fließt.

(b) Nach welcher Zeit ist der Strom auf 1/e seines Endwertes angestiegen?



Jetzt wird die Schaltung erweitert. Die Spannung sei $U = 100$ V. Weiterhin ist $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ und $R_3 = 30\ \Omega$.



(c) Berechnen Sie I_1 und I_2 unmittelbar nach dem Schließen des Schalters S,

(d) lange Zeit später,

(e) unmittelbar nach dem erneuten Öffnen von S,

(f) lange nach dem erneuten Öffnen von S

Lösung

(a) Mit den Kirchhoffschen Regeln erhält man die folgende Differentialgleichung:

$$U_0 = I \cdot R - U_{ind} = I \cdot R - L\frac{dI}{dt} \tag{43}$$

Der Lösungsansatz lautet

$$I(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + I_0 \tag{44}$$

Es gilt die Anfangsbedingung $I(0) = 0$, also

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{45}$$

[4]

(b) 63% bedeutet, dass der Strom auf $1/e$ abgefallen ist verglichen mit dem Endwert. Also:

$$\frac{R}{L}t = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{R} \tag{46}$$

[1]

(c) In der neuen Schaltung wird in der Spule eine Gegenspannung induziert, sodass der anfängliche Strom durch die Spule Null ist. Es folgt:

$$I_1 = I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} = 3,33 \text{ A} \tag{47}$$

[2]

(d) Lange Zeit nach dem Öffnen sind alle Ströme konstant, folglich kann die Spule durch einen Draht (Leiter) ersetzt werden. Der Strom in R_3 ist $I_1 - I_2$. Aus der Maschenregel folgt:

$$U - I_1R_1 - I_2R_2 = 0 \quad \text{und} \quad U - I_1R_1 - (I_1 - I_2)R_3 = 0 \tag{48}$$

Lösen dieses Gleichungssystems liefert

$$I_1 = \frac{U(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 4,55 \text{ A} \tag{49}$$

$$I_2 = \frac{UR_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} = 2,73 \text{ A} \tag{50}$$

[3]

(e) Die linke Masche ist nun unterbrochen. Da hier keine Spule vorhanden ist, sinkt der Strom I_1 sofort auf Null. Der Strom durch R_3 ändert sich nur geringfügig, da sich in seiner Masche eine Spule befindet, die das sinkende Feld aufrecht zu erhalten versucht. Unmittelbar nach dem Öffnen ist der Strom durch R_3 so groß wie vor dem Öffnen:

$$I_1 - I_2 = 1,82 \text{ A} \tag{51}$$

[2]

(f) Keine Spannungsquellen mehr: Der Strom ist überall Null.

[1]

Konstanten

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$$
$$e = 1,60 \cdot 10^{-19}\text{C}$$
$$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$$

$$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \mathrm{mkgs}^{-2}\mathrm{A}^{-2}$$
$$c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$$
$$m_U = 1,66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$$