Nachklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2018/19
17. April 2019

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Bei der Vierschanzentournee gleitet ein Skispringer (Masse 70 kg) reibungsfrei die Anlaufspur der Sprungschanze hinunter, wobei sich sein Startpunkt 30 m über der Absprungkante befindet.

(a) Wie groß ist seine Absprunggeschwindigkeit an der Absprungkante?

(b) Der 5 m hohe Schanzentisch hat eine horizontale Absprungfläche. Der Springer landet schließlich auf dem geneigten Absprunghügel der Schanze an einem Punkt, der 25 m vertikal tiefer liegt als der Fußpunkt des Schanzentisches. Fertigen Sie eine Skizze der Bewegungssituation an.
Wie lange ist der Springer in der Luft und wie groß ist die horizontale Sprungweite?

(c) Nach der Landung habe der Springer noch eine Geschwindigkeit von konstanten 36 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$, mit der er den restlichen Aufsprunghügel hinunterfährt. Dabei übersieht er einen Fotoreporter (Masse 110 kg), der im Weg steht und mit dem er vollständig inelastisch zusammenstößt. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich Springer und Reporter nach dem Zusammenstoß weiter?

Lösung

(a) Die Geschwindigkeit ergibt sich aus der Energieerhaltung:

$$E = m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v_H = \sqrt{2gh} = 24,5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}(= 88\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}) \tag{1}$$

[2]

(b) Die vertikale Gesamtstrecke beträgt

$$s = 5\mathrm{m} + 25\ \mathrm{m} = \frac{1}{2}gt_f^2 \tag{2}$$

[1]

Daraus erhält man die Flugdauer t_f:

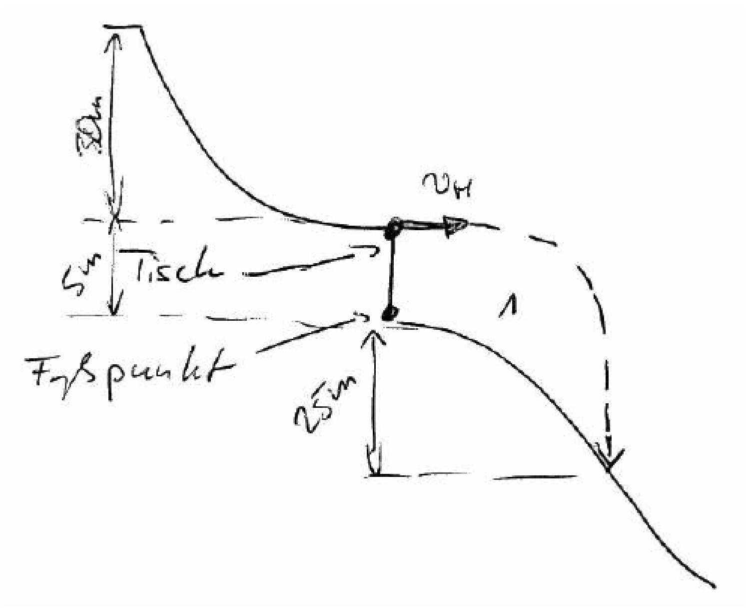
$$t_f = \sqrt{\frac{2s}{g^2}} = 2,45 \text{ s} \tag{3}$$

[**1**]

Die Sprungweite beträgt damit

$$x_H = v_H \cdot t_f = 60 \text{ m} \tag{4}$$

[**1**]



[**3**]

(c) Nach dem Impulserhaltungssatz entspricht der Impuls des Springers vor dem Stoß gleich dem Gesamtimpuls von Spinger und Reporter nach dem Stoß, die sich dann mit derselben Geschwindigkeit bewegen (vollkommen inelastischer Stoß):

$$m_S \cdot v_S = (m_S + m_R) \cdot v_{beide} \quad \Rightarrow \quad v_{beide} = \frac{m_S \cdot v_S}{m_S + m_R} = 3,9 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} (= 14 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}) \tag{5}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

In Garching wird eine Kugel auf 100 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ beschleunigt und unter einem Winkel von $\alpha = 30°$ zur Horizontalen nach oben abgeschossen.

(a) Stellen sie eine mathematische Beschreibung der Bewegung auf.

(b) Berechnen Sie welche maximale Höhe, Flugweite und Flugzeit die Kugel hat?

(c) Die Kugel fliege anfangs genau nach Norden. Verwenden Sie als Geschwindigkeit $\bar{v}$ die horizontale Komponente der Geschwindigkeit aus Teil a) (Ersatzwert $\bar{v}$: 90 m/s).
Um welchen Versatz weicht der Aufschlagpunkt von der geraden Linie nach Norden ab? (Garching befindet sich auf $48,3°$ nördlicher Breite)

Lösung

(a) Die Trajektorie entspricht einer Parabel.
In horizontaler Richtung findet eine lineare Bewegung statt:

$$s(t) = v_s \cdot t = v\cos(30°) \cdot t = 100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot t = 86,6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t \tag{6}$$

[**1**]

In vertikaler Richtung findet ein freier Fall mit der Anfangsgeschwindigkeit v_h statt:

$$\begin{aligned} h(t) &= v_h \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 &(7)\\ &= v \cdot \sin(30°) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 &(8)\\ &= 50\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 4,9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 &(9) \end{aligned}$$

[**1**]

Auflösen von $s(t)$ nach t und einsetzen in $h(t)$ liefert die Parabelgleichung:

$$h(s) = \tan(30°) \cdot s - \frac{g \cdot s^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(30°)} \stackrel{!}{=} 0 \tag{10}$$

[**1**]

Andere Beschreibungen (z.B. vektoriell) sind auch möglich.

(b) Daraus erhält man

$$s = \tan(30°) \cdot \frac{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2(30°)}{g} = \frac{2 \cdot (100\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \cdot \sin(30°)\cos(30°)}{9,81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 882,8\ \mathrm{m} \tag{11}$$

[**1**]

Die maximale Höhe h_M wird zum Zeitpunkt t_M erreicht:

$$\begin{aligned} v_h &= g \cdot t_M &(12)\\ h_M &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_M^2 = \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_h}{g}\right)^2 = 127,4\ \mathrm{m} &(13) \end{aligned}$$

[**1**]

Für die Flugzeit t_F gilt:

$$h(t = t_F) = v_h \cdot t_F - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_F^2 \overset{!}{=} 0 \tag{14}$$

$$v_h \cdot t_F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_F^2 \tag{15}$$

$$t_F = 0 \quad \text{oder} \quad t_F = \frac{2 \cdot v_h}{g} = \frac{2 \cdot 100 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sin(30°)}{9,81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}} = 10,2 \ \mathrm{s} \tag{16}$$

[**1**]

(c) Das kartesische Koordinatensystem wird so gewählt, dass die z-Achse der Erdachse enspricht. Dabei entspricht Richtung Norden der positiven z-Richtung. Garching befindet sich in der x-z-Ebene.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Erde ist

$$\vec{\omega} = \frac{d\phi}{dt}\vec{e}_z = \frac{2\pi}{23\mathrm{h}\ 56\mathrm{min}\ 4\mathrm{s}}\vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,29 \cdot 10^{-5} \ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \tag{17}$$

[**1**]

Die mittlere Geschwindigkeit des Kugel entspricht seiner Geschwindigkeit in horizontaler Richtung:

$$|\bar{v}| = v_s = 86,6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{18}$$

[**1**]

Im obigen definierten Koordinatensystem entspricht die horizontale Bewegung Richtung Norden dem folgenden Richtungsvektor (Garching liegt auf 48,3° nördlicher Breite):

$$\vec{v} = 86,6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(48,3°) \\ 0 \\ \cos(48,3°) \end{pmatrix} \tag{19}$$

[**1**]

Für die Coriolisbeschleunigung gilt:

$$\vec{a}_c = -2 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -2 \cdot 86,6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7,29 \cdot 10^{-5} \ \frac{1}{\mathrm{s}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(48,3°) \\ 0 \\ \cos(48,3°) \end{pmatrix} \tag{20}$$

$$= -2 \cdot 86,6 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7,29 \cdot 10^{-5} \ \frac{1}{\mathrm{s}} \cdot (-\sin(48,3°)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0094 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

[**2**]

Diese Coriolisbeschleunigung wirkt während der gesamten Flugdauer t_F. Damit:

$$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a}_c \cdot t_F^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,0094 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (10,2 \ \mathrm{s})^2 \cdot \vec{e}_y = 0,49 \ \mathrm{m} \cdot \vec{e}_y \tag{22}$$

[**1**]

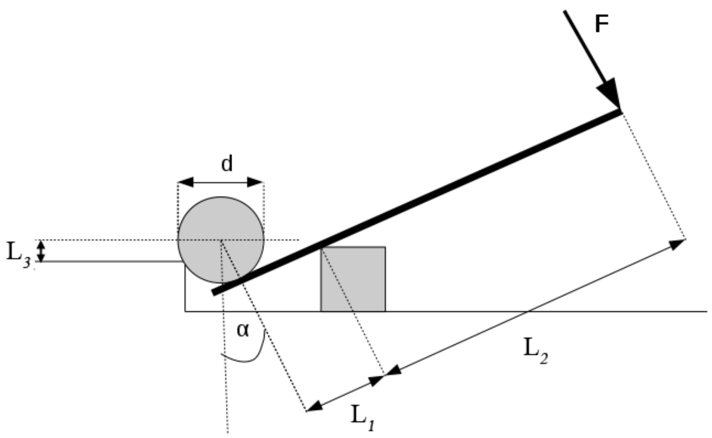
Der Aufschlagpunkt weicht also von der geraden Linie Richtung Norden um 0,49 m nach Osten ab.

Anmerkungen:

- Wir betrachten in dieser Aufgabe zur Vereinfachung nur die Auswirkungen der Corioliskraft aufgrund der Horizontalen Bewegung entlang der Erdoberfläche. Die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten der Wurfparabel werden nicht berücksichtigt. Bei genauer Berechnung ergibt sich für beide betrachteten Fälle eine zusätzliche Abweichung von $0,08$ m Richtung Westen.
- Ebenso wird vernachlässigt, dass die Corioliskraft immer senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht. Dadurch ergäbe sich eigentlich eine Bewegung entlang einer Kreisbahn. Für die hier auftretenden geringen Ablenkungswinkel gegenüber der Geraden ist dieser Effekt allerings verschwindend klein.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Zwei Arbeiter heben mit einer Brechstange einen Zylinder auf einen Absatz hinauf. Die Gewichtskraft des Zylinders beträgt $3,6$ kN, die Abstände Ł$_1 = 110$ mm, $L_2 = 1340$ mm, $L_3 = 30$ mm, $d = 120$ mm und der Winkel $\alpha = 30°$. Ermitteln Sie für die gezeichnete Stellung



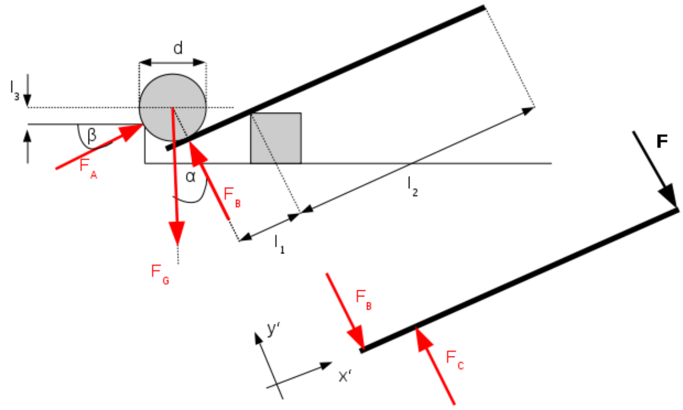
(a) die Kraft F_A, mit der sich der Zylinder an der Absatzkante abstützt,

(b) die Kraft F_B, mit der der Zylinder auf die Brechstange drückt,

(c) die Kraft F, die der Arbeiter am Ende der Brechstange aufbringen muss, (Ersatzwert: $F_B = 3$kN)

(d) die Kraft F_C an der Auflagestelle der Stange auf der Kante des untergelegten Balkens,

(e) die Komponenten der Kraft $F_{C,x}$ (waagrecht) und $F_{C,y}$ (rechtwinklig) der Kraft F_C.



Lösung

(a) Für den Winkel β, unter dem die Kraft F_A angreift gilt (siehe Abbildung):

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{30}{60}\right) = 30° \tag{23}$$

Also ist $\alpha = \beta$ und die Kraft F_A ist parallel zur Brechstange. Am Ort der Kugel muss ein Momentengleichgewicht herrschen:

$$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_A \cdot \frac{d}{2} + F_G \cdot \frac{d}{2} \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F_C \cdot \sin\alpha = 1,8 \text{ kN} \tag{24}$$

[**3**]

(b) Außerdem herrscht am Ort der Kugel ein Kräftegleichgewicht:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A \cos\alpha - F_B \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow F_B = \frac{F_A}{\tan\alpha} = 3,118 \text{ kN} \tag{25}$$

[**2**]

(c) An der Brechstange herrscht ebenfalls ein Momentengleichgewicht:

$$\Sigma M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_B \cdot l_1 + F \cdot l_2 = 0 \quad \Rightarrow F = F_B \cdot \frac{l_1}{l_2} = 256 \text{ N} \tag{26}$$

[**2**]

(d) Die Kräfte in y'-Richtung verschwinden (siehe Abbildung):

$$\Sigma F_{y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad -F_B + F_c - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_C = F_B + F = 3,374 \text{ kN} \tag{27}$$

[**2**]

(e) Für die Komponenten von F_C in x- und y-Richtung gilt:

$$F_{C,x} = F_C \sin\alpha = 1,686 \text{ kN} \tag{28}$$
$$F_{C,y} = F_C \cos\alpha = 2,922 \text{ kN} \tag{29}$$

[**3**]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Wir schreiben das Jahr 2020. Die erste bemannte Marssonde befindet sich im Landeanflug. Aufgrund eines Missverständnises landet die Besatzung nicht auf dem Mars selbst, sondern auf dem Marsmond Deimos. Die Gravitation auf Deimos ist ziemlich schwach, denn die Masse beträgt nur $2 \cdot 10^{14}$ kg bei einem Durchmesser von $d = 13$ km. Mit den Worten „Dies ist ein großer Schritt für die Menschheit...“springt der erste Astronaut horizontal aus dem Raumschiff. Zu seiner großen Überraschung landet er nicht auf dem Boden, sondern beginnt eine Umrundung des Marsmondes.

(a) Wie lange dauert es, bis der Astronaut den Mond Deimos umrundet hat und zum Raumschiff zurückkehrt? Nehmen Sie an, dass der Astronaut auf einer Kreisbahn wenige Meter über der Mondoberfläche bewegt und Deimos kugelförmig ist. Beim Absprung habe er lediglich eine Horizontalgeschwindigkeit.

(b) Welche Horizontalgeschwindigkeit hatte der Astronaut? Geben Sie das Ergebnis in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

Lösung

(a) Auf der Kreisbahn gilt:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2} \tag{30}$$

mit $R = \frac{d}{2}$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$ wird dies zu

$$4\pi^2 R^3 = GMT^2 \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{31}$$

[2]

Mit Zahlenwerten:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(6,5 \cdot 10^3)^3 \text{ m}^3}{7 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{14} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}\text{kg}}} = 2\pi \cdot 10^3\sqrt{\frac{6,5^3}{14}} \text{ s} = 27,8 \cdot 10^3 \text{ s} \tag{32}$$

Also ist

$$T = 7,73 \text{ h}$$

[1]

(b) Für die Geschwindigkeit gilt

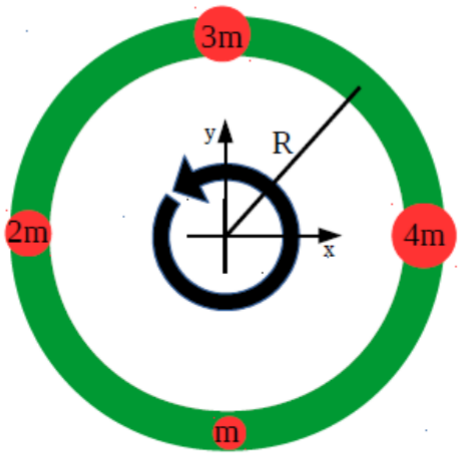
$$v = \omega \cdot R = \frac{2\pi R}{T} = \frac{\pi d}{T} = \frac{\pi \cdot 13 \text{ km}}{7,73 \text{ h}} = 5,3 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{33}$$

[2]

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Auf einem masselosen Adventskranz (Radius R) seien 4 punktförmige Kerzen der Massen $m, 2m, 3m$ und $4m$ (für die passende Brenndauer) gemäß der Abbildung befestigt.

(a) Der Kranz befindet sich in Ruhe. Wo befindet sich der Schwerpunkt des Massensystems?



(b) Welches Trägheitsmoment ergibt sich für eine Drehung um den Kranzmittelpunkt mit Drehachse senkrecht zur Kranzebene?

(c) Welches Trägheitsmoment hat der Kranz bei einer Drehung um seinen Schwerpunkt?

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse von Aufgabe b) und c) mit Hilfe des Satz von Steiner.

Lösung

(a) Für den Ortsvektor des Schwerpunkts gilt:

$$\vec{R}_{Sp} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix} + 2m \cdot \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} + 3m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} + 4m \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}}{m + 2m + 3m + 4m} \tag{34}$$

$$= \frac{R}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{35}$$

[**2**]

(b) Für das Trägheitsmoment bezüglich des Kranzmittelpunktes gilt:

$$J_M = \sum m_i \cdot (\vec{r}_i)^2 \tag{36}$$

$$= m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix}^2 + 2m \cdot \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix}^2 + 3m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}^2 + 4m \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}^1 \tag{37}$$

$$= m \cdot \left(1R^2 + 2R^2 + 3R^2 + 4R^2\right) \tag{38}$$

$$= 10 \cdot m \cdot R^2 \tag{39}$$

[**2**]

(c) Das Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts ist:

$$J_{Sp} = \sum m_i \cdot (\vec{r}_{i,Sp})^2 \tag{40}$$
$$= \sum m_i \cdot \left(\vec{r}_i - \vec{R}_{Sp}\right)^2 \tag{41}$$
$$= m \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R/5 \\ R/5 \end{pmatrix}\right)^2 + 2m \cdot \left(\begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R/5 \\ R/5 \end{pmatrix}\right)^2 \tag{42}$$
$$+ 3m \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R/5 \\ R/5 \end{pmatrix}\right)^2 + 4m \cdot \left(\begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R/5 \\ R/5 \end{pmatrix}\right)^2 \tag{43}$$
$$= m \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{R^2}{5} + \left(R + \frac{R}{5}\right)^2\right) + 7 \cdot \left(\frac{R^2}{5} + \left(R - \frac{R}{5}\right)^2\right)\right) \tag{44}$$
$$= m \cdot R^2 \cdot (2 \cdot \frac{3}{25} + 3 + \frac{6}{5} + 2 \cdot \frac{7}{25} + 7 - \frac{14}{5}) \tag{45}$$
$$= 9,2 \cdot m \cdot R^2 \tag{46}$$

[**3**]

(d) Und mit dem Satz von Steiner:

$$J_{Sp} = J_M - m_{ges} \cdot (\vec{r}_{Sp,M})^2 \tag{47}$$
$$= 10 \cdot m \cdot R^2 - 10 \cdot m \cdot \begin{pmatrix} R/5 \\ R/5 \end{pmatrix}^2 \tag{48}$$
$$= 10 \cdot m \cdot \left(R^2 - 2 \cdot \frac{R^2}{25}\right) \tag{49}$$
$$= 9,2 \cdot m \cdot R^2 \tag{50}$$

Vergleicht man beide Ergebnisse, so sieht man den Satz von Steiner bestätigt.

[**2**]

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Betrachten Sie das Pendel im unten stehenden Bild. Ein senkrecht stehender drehbar gelagerter Stab (Länge $l = 16$ cm, sehr dünn) mit der Punktmasse $m = 200$ g am oberen Stabende wird im Abstand a vom Drehpunkt von einer Feder (Federkonstante $k = 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) gehalten. Es wirkt die Schwerkraft.

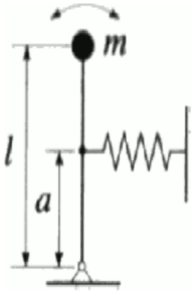
(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel φ des Stabes auf (ohne sie zu lösen). Betrachten Sie kleine Auslenkungen, d.h. verwenden Sie $\sin\varphi \approx \varphi$.

(b) Wie groß muss a mindestens sein, damit der Stab (bei kleiner Auslenkung) eine harmonische Schwingung ausführt?

Lösung

(a) Für kleine Auslenkungen x wirkt das rücktreibende Drehmoment der Feder

$$T = -Fa = -kxa \tag{51}$$



(vgl. Abbildung.) Diesem is das von der Gewichtskraft mg verursachte Drehmoment

$$mgl \sin \varphi \tag{52}$$

entgegengerichtet. Also ist das resultierende Drehmoment

$$T = -kxa + mgl \sin \varphi \tag{53}$$

Mit

$$x = a \sin \varphi \tag{54}$$

und der Näherung für kleine Auslenkungen

$$\sin \varphi \approx \varphi \tag{55}$$

sowie

$$T = J\ddot{\varphi} \tag{56}$$

mit dem Trägheitsmoment

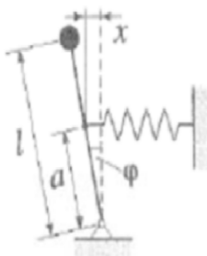
$$J = ml^2 \tag{57}$$

folgt

$$\left(-ka^2 + mgl\right) \varphi = ml^2 \ddot{\varphi} \tag{58}$$

oder

$$\ddot{\varphi} + \frac{ka^2 - mgl}{ml^2} \varphi = 0 \tag{59}$$



[**5**]

(b) Aus dem Vergleich mit der Normalform der Bewegungsgleichung für Drehschwingungen

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \tag{60}$$

folgt für die Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \frac{g}{l}} \tag{61}$$

Aus der Forderung $\omega_0^2 > 0$ erhält man schließlich

$$a > \sqrt{\frac{mgl}{k}} = 5,6 \text{ cm} \tag{62}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (8 Punkte)

In der Antarktis gibt es einen Antarktis-Park, ein beliebter Zeitvertreib für Pinguine. Eine besondere Attraktion ist eine scheibenförmige Eisscholle (Fläche A, Eisdicke D, Eisdichte ρ_E), die im Meer schwimmt (Wasserdichte ρ_W).

(a) Welcher Anteil der Eisdicke D befindet sich oberhalb der Wasseroberfläche?

(b) Mit größtem Vergnügen springen Pinguine auf der Eischolle so auf und ab, dass die Scholle anfängt zu schwingen. Mit welcher Periode T müssten die Pinguine springen, um die Scholle in der Resonanzfrequenz anzuregen (Masse der Pinguine und Reibung werden vernachlässigt)?

(c) Wie groß müsste die Gesamtmasse der Pinguine auf der Eisscholle sein, damit ihr Gewicht die Scholle völlig untertaucht? (Wir nehmen an, dass sie nicht mehr springen.)

(d) Aufgrund der globalen Erwärmung schmilzt die Eisscholle vollständig. Wie ändert sich dadurch der Wasserspiegel des Meeres? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung. Die Temperatur des Meerwassers wird als unverändert angenommen. Die Pinguine werden für diesen Teil der Aufgabe nicht berücksichtigt. Sie haben sich längst aus dem Staub (aus dem Schnee?) gemacht.

Lösung

(a) Masse Eis: $M_E = \rho_E A D$

Masse verdrängten Wassers: $M_W = \rho_W A(D - x)$, wobei x die Höhe der Eisschicht ist, die aus dem Wasser ragt. Aus $M_E g = M_W g$ folgt

[**1**]

$$\frac{x}{D} = \frac{V_{E\,\text{außen}}}{V_E} = \frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_W}$$

[**1**]

(b) Die x-Achse zeige nach oben, die einwirkenden Kräfte sind der Auftrieb durch das verdrängte Wasser nach oben und das Gewicht des Eises nach unten.

$$\begin{aligned} M_E\ddot{x} &= \rho_W Ag(D-x) - \rho_E AgD \\ \ddot{x} + \frac{\rho_W Ag}{M_E}x &= \frac{\rho_W - \rho_E}{M_E}ADg = g\frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_E} \\ \omega^2 &= \frac{\rho_W Ag}{M_E} = \frac{\rho_W g}{\rho_E D} \end{aligned}$$

[**2**]

Damit ist die Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_E D}{\rho_W g}}$

[**1**]

(c)

$$\rho_E ADg + mg = \rho_W ADg$$

[**1**]

Damit ist die Masse der Pinguine $m = (\rho_W - \rho_E)AD$.

[**1**]

(d) Nach dem Schmelzen nimmt das Eis folgendes Volumen ein:

$$V = \frac{M_E}{\rho_W} = \frac{\rho_E}{\rho_W}AD$$

[**1**]

Dies ist das Wasservolumen, das die Eisscholle verdrängt hat. Somit ändert sich der Meeresspiegel beim Schmelzen nicht.

[**1**]

Aufgabe 8 (11 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen mit einem Korrekturterm dritter Ordnung.

$$m\gamma\dddot{x} + m\ddot{x} - \kappa x = 0$$

Betrachten Sie den Fall $\gamma = \frac{1}{\omega}$, wobei $\omega^2 = \frac{\kappa}{2m}$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung auf die Form

$$\dddot{x} + \omega\ddot{x} - 2\omega^3 x = 0$$

gebracht werden kann

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und begründen Sie an Hand der allgemeinen Lösung, welches Verhalten für große Zeiten erwartet wird.

(c) Lösen Sie die Differentalgleichung für die Anfangswerte $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = -x_0\omega$ und $\ddot{x}(0) = 0$.

Lösung

(a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
m\gamma\dddot{x} + m\ddot{x} - \kappa x &= 0 \\
\gamma\dddot{x} + \ddot{x} - \frac{\kappa}{m}x &= 0 \\
\frac{1}{\omega}\dddot{x} + \ddot{x} - 2\omega^2 x &= 0 \\
\dddot{x} + \omega\ddot{x} - 2\omega^3 x &= 0
\end{aligned}
$$

[**1**]

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^3 + \omega\lambda^2 - 2\omega^3$$

[**1**]

Eine Nullstelle ist $\lambda = \omega$ und mit Polynom-Division gilt

$$(\lambda^3 + \omega\lambda^2 - 2\omega^3) : (\lambda - \omega) = \lambda^2 + 2\omega\lambda + 2\omega^2$$

quadratische Ergänzung gibt

$$= (\lambda + \omega)^2 + \omega^2$$

[**2**]

und damit

$$\lambda = -\omega \pm \mathrm{i}\omega$$

Damit ist das Fundamentalsystem

$$\left\{\mathrm{e}^{\omega t}, \mathrm{e}^{-(1+\mathrm{i})\omega t}, \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})\omega t}\right\}$$

[**1**]

Ein alternatives (reelles) Fundamentalsystem erhält man, indem die letzten beiden Elemente durch Summe und Differenz ersetzt werden

$$\left\{\mathrm{e}^{\omega t}, \mathrm{e}^{-\omega t}\cos\omega t, \mathrm{e}^{-\omega t}\sin\omega t\right\}$$

Die allgemeine Lösung lautet damit

$$x(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right)$$

Für generische jedoch ist $A \neq 0$ und damit dominiert für große Zeiten immer der exponentiell anwachsende Term.

[**1**]

(c)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A\omega\mathrm{e}^{\omega t} - \omega\mathrm{e}^{-\omega t}\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) + \mathrm{e}^{-\omega t}\left(C\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right) \\
\ddot{x}(t) &= A\omega^2\mathrm{e}^{\omega t} + \omega^2\mathrm{e}^{-\omega t}\left(B\cos\omega t + C\sin\omega t\right) - 2\omega\mathrm{e}^{-\omega t}\left(C\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t\right) \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\omega t}\left(-B\omega^2\cos\omega t - C\omega^2\sin\omega t\right)
\end{aligned}
$$

[**3**]

und somit

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B \\ \dot{x}(t) &= (A - B + C)\omega \\ \ddot{x}(t) &= (A - 2C)\omega^2 \end{aligned}$$

[**1**]

Aus den Anfangswerten folgt somit $A = C = 0$ und $B = x_0$ und damit

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\omega t} \cos \omega t$$