Nachklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Simmel
Wintersemester 2011/2012
4. April 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

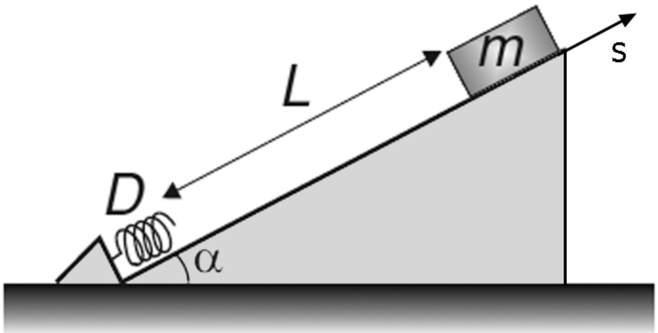
- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten. Gesamtpunktzahl: 40.

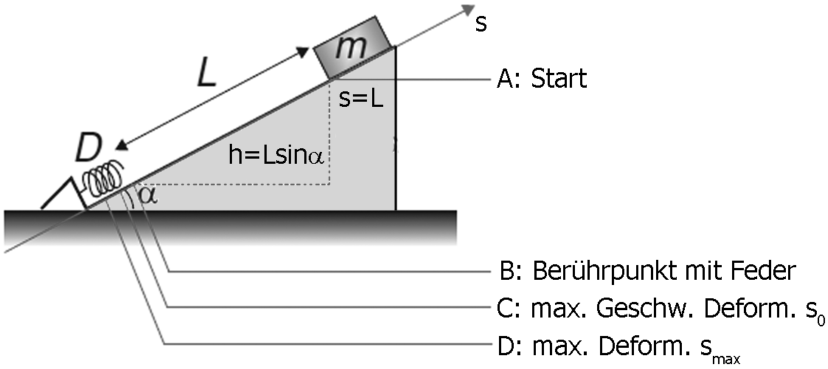
Hinweise: g = $9{,}81\text{m/s}^2$; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$; Erdradius $R = 6380km$; Erdmasse $M = 5{,}97 \cdot 10^{24}kg$; $\int x^{-2}dx = -x^{-1} + c$; allg. Gaskonstante R = $8{,}31$J/mol$\cdot$K; 1 Bar = 10^5Pa, $0°$K = $-273°$C;

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein Körper mit Masse m gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel α auf eine am Ende der schiefen Ebene befestigte Feder zu (Federkonstante D). Die Entfernung zwischen Federanfang und Startpunkt des Körpers ist L, die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers sei 0.



a. Berechnen Sie die Geschwindigkeit (Betrag) des Körpers, wenn er die Feder berührt.
b. Bestimmen Sie den maximalen Geschwindigkeitbetrag (v_{max}) des Körpers und die zugehörige Deformation (s_0) der Feder.
c. Berechnen Sie die maximale Deformation (s_{max}) der Feder.



Lösung

Energieerhaltung:

$$E_{\text{pot}} + E_{kin} + E_{\text{Feder}} = const. = E_0$$

Es gilt für

Punkt A

$$mgL\sin\alpha + 0 + 0 = E_0$$

Punkt B

$$0 + \frac{1}{2}mv^2 + 0 = E_0$$

Punkt C

$$mg(-s_0\sin\alpha) + \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}Ds_0^2 = E_0$$

Punkt D

$$mg(-s_{\max}\sin\alpha) + 0 + \frac{1}{2}Ds_{\max}^2 = E_0$$

Nun zu den Teilaufgaben

a. Um die Geschwindigkeit in Punkt B zu bestimmen, reicht ein Energieansatz:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL\sin\alpha \Rightarrow |v| = \sqrt{2gL\sin\alpha}$$

[**2**]

b. Die höchste Geschwindigkeit hat die Masse in Punkt C, wobei hier die Beschleunigung durch die Feder gerade die Beschleunigung im Schwerefeld aufhebt:

$$F_g + F_{\text{Feder}} = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha - Ds_0 = 0$$
$$\Rightarrow s_0 = \frac{mg\sin\alpha}{D}$$

[**1**]

$$\Rightarrow mg\left(-\frac{mg\sin^2\alpha}{D}\right)+\frac{1}{2}mv_{max}^2+\frac{1}{2}D\left(\frac{mg\sin\alpha}{D}\right)^2=mgL\sin\alpha$$

$$\Rightarrow v_{\max}=\sqrt{\frac{mg^2\sin^2\alpha}{D}+2gL\sin\alpha}=\sqrt{g\sin\alpha\left(2L+\frac{mg\sin\alpha}{D}\right)}$$

[2]

c. Die maximale Deformation ist im Punkt D gegeben:

$$mg(-s_{\max}\sin\alpha)+\frac{1}{2}Ds_{\max}^2=mgL\sin\alpha$$

$$\Rightarrow s_{\max}=\frac{mg\sin\alpha}{D}\left(1+\sqrt{1+\frac{2LD}{mg\sin\alpha}}\right)$$

[2]

Die negative Lösung ist hierbei nicht relevant, da die Feder nur gestaucht und nicht gedehnt wird.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Spaceshuttle $m = 111\text{t}$ umkreist die Erde in einer Höhe von $h = 230\text{km}$ über dem Erd*boden*.

a. Berechnen Sie Umlaufgeschwindigkeit und -periode so, dass im Spaceshuttle „Schwerelosigkeit“ (Kräftegleichgewicht) herrscht.

   Hinweis: Beachten Sie, dass die Erdbeschleunigung g NUR auf der Erdoberfläche $9{,}81\text{m/s}^2$ beträgt.

b. Berechnen Sie die Höhe (vom Erdboden aus) der geostationären Umlaufbahn (d.h. das Spaceshuttle behält relativ zur Erdoberfläche seine Position bei).

c. Wie viel potentielle Energie gewinnt das Spaceshuttle im Gravitationsfeld der Erde, wenn es von der geostationären Umlaufbahn zum Mond $h_{\text{Mond}} = 4\cdot 10^5\text{km}$ fliegt?

   Hinweis: Die Gravitation des Mondes ist zu vernachlässigen.

Lösung

v sei die Umlaufgeschwindigkeit, T Umlaufperiode, R Erdradius, M Erdmasse.

a. Die Zentripetalkraft muss der Gravitationskraft entsprechen

$$\frac{mv^2}{R+h}=G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}=7{,}8\text{km/s}$$

$$\omega=\frac{v}{R+h}=\frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow T\approx 87\text{min}$$

[2]

b. Geostationäre Umlaufbahn bedeutet, dass die Umlaufzeit einen Tag beträgt, also 86400s.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{GM}{R+h_{\text{geo}}}} &= \frac{2\pi(R+h_{\text{geo}})}{T_{\text{geo}}} \\ \Leftrightarrow h_{\text{geo}} &= \sqrt[3]{\frac{GMT_{\text{geo}}^2}{4\pi^2}} - R \\ &\approx 36000\text{km}\end{aligned}$$

[2]

c. Die Energie, die benötigt wird, um das Spaceshuttle von der geostationären Umlaufbahn zum Mond zu fliegen, ist einfach die Arbeit, die benötigt wird, die Masse des Spaceshuttles vom Radius $r_1 = 36000\text{km}$ zum Radius $r_2 = 400000\text{km}$ zu bewegen. Da das Gravitationsfeld ein konservatives Zentralkraftfeld ist, ist der Weg ohne Bedeutung und es ergibt sich

$$\begin{aligned}W &= \int_{r_1}^{r_2} F_G ds \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left(-G\frac{mM}{r^2}\right) ds \\ &= -GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} \\ &= GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \\ &= 6,7\cdot 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}\cdot 6\cdot 10^{24}\text{kg}\cdot 1,1\cdot 10^5\text{kg}\left(\frac{1}{3,6\cdot 10^7\text{m}} - \frac{1}{40\cdot 10^7\text{m}}\right) \\ &\approx 10^{12}\text{J}\end{aligned}$$

[2]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Massepunkt mit dem Gewicht $m_1 = 1200\text{kg}$ bewegt sich kräftefrei mit einer Geschwindigkeit $v_1 = 60\text{km/h}$ in x-Richtung und stößt mit einem weiteren Massepunkt (Gewicht $m_2 = 9000\text{kg}$) unter einem Winkel von 90° zusammen. Zum Zeitpunkt Stoßes hat dieser die Geschwindigkeit $v_2 = 40\text{km/h}$.

a. Stellen Sie die Impulsvektoren der beiden Massepunkte $\vec{p_1}$ und $\vec{p_2}$ vor dem Stoß auf.

b. Vergleichen Sie Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Massepunkte vor dem Stoß mit Richtung und Geschwindigkeit des Schwerpunktes der Massepunkte nach dem Zusammenstoß. (1 Satz)

c. Mit welcher Geschwindigkeit $v_s = |\vec{v_s}|$ entfernt sich der Schwerpunkt der Massepunkte nach dem Stoß vom Ort des Zusammenstoßes?

d. Unter welchem Winkel bezüglich der anfänglichen Bewegungsrichtung des ersten Massepunktes bewegt sich der Schwerpunkt der Massepunkte nach dem Stoß?

Lösung

a. Die Impulsvektoren sind

$$\begin{aligned}\vec{p_1} &= m_1\vec{v_1}\\ &= \begin{pmatrix}1200\text{kg}\cdot 60\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}}\\ 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} 10^4\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\\ \vec{p_2} &= m_2\vec{v_2}\\ &= \begin{pmatrix}0\\ 9000\text{kg}\cdot 40\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix} 10^4\,\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\end{aligned}$$

[**1**]

b. Die Impulserhaltung besagt, dass Geschwindigkeit und Richtung des Schwerpunktes des System vor und nach dem Stoß gleich sind.

[**1**]

c.

$$\begin{aligned}\vec{p_s} &= \vec{p_1}+\vec{p_2} = \begin{pmatrix}2\\10\end{pmatrix} 10^4\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\text{s}\\ \Rightarrow \vec{v_s} &= \frac{\vec{p_s}}{m_1+m_2} = \begin{pmatrix}1,96\\9,80\end{pmatrix}\text{m/s}\\ |\vec{v_s}| &= \sqrt{(1,96\text{m/s})^2+(9,8\text{m/s})^2} = 10\text{m/s}\end{aligned}$$

[**2**]

d.

$$\tan\alpha_s = \frac{p_{s_y}}{p_{s_x}} = \frac{9,8}{1,96} \Rightarrow \alpha_s = 78,7^\circ$$

[**1**]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein dünner Bleistift der Länge $l = 20\text{cm}$ wird auf seine Spitze gestellt und dann sanft losgelassen. Er fällt ohne zu rutschen auf die Unterlage.

Mit welcher Winkelgeschwidigkeit $\dot{\varphi}_0$ in Grad pro Sekunde trifft er auf die horizontale Unterlage auf?

Hinweis: Das Trägheitsmoment eines um sein Ende rotierenden Stabes ist $\Theta = \frac{1}{3}ml^2$.

Lösung

Die Bewegungsgleichung der Drehbewegung der Spitze lautet

$$M = \Theta_{\mathrm{sp}}\ddot{\varphi}$$

Energieansatz:

$$\begin{aligned} E_{potAnfang} &= E_{rotEnde} \\ mgh &= \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2, \quad h = \frac{l}{2}(1-\cos\varphi) \end{aligned}$$

[2]

Beim Aufprall auf die Horizontale gilt speziell ($\varphi = \varphi_0 = 90°, \cos\varphi_0 = 0$)

$$\begin{aligned} mg\frac{l}{2} &= \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}_0^2 \\ \Rightarrow mgl &= \frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi_0}^2 \end{aligned}$$

[1]

$$\Rightarrow \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9,81}{0,2}}\mathrm{s}^{-1} = 12,13\mathrm{s}^{-1} = 12,13\frac{180°}{\pi}\mathrm{s}^{-1} = 695°/\mathrm{s}$$

[1]

Aufgabe 5 (9 Punkte)

In der Antarktis gibt es einen Antarktis-Park, ein beliebter Zeitvertreib für Pinguine. Eine besondere Attraktion ist eine scheibenförmige Eisscholle (Fläche A, Eisdicke D, Eisdichte ρ_E), die im Meer schwimmt (Wasserdichte ρ_W).

a. Welcher Anteil der Eisdicke D befindet sich oberhalb der Wasseroberfläche?

b. Mit größtem Vergnügen springen Pinguine auf der Eischolle so auf und ab, dass die Scholle anfängt zu schwingen. Mit welcher Periode T müssten die Pinguine springen, um die Scholle in der Resonanzfrequenz anzuregen (Masse der Pinguine und Reibung werden vernachlässigt)?

c. Wie groß müsste die Gesamtmasse der Pinguine auf der Eisscholle sein, damit ihr Gewicht die Scholle völlig untertaucht? (Wir nehmen an, dass sie nicht mehr springen.)

d. Aufgrund der globalen Erwärmung schmilzt die Eisscholle. Wie ändert sich dadurch der Wasserspiegel des Meeres? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Temperatur des Meerwassers wird als unverändert angenommen. Die Pinguine werden für diesen Teil der Aufgabe nicht berücksichtigt. Sie haben sich längst aus dem Staub (aus dem Schnee?) gemacht.

Lösung

a. Masse Eis: $M_E = \rho_E A D$

Masse verdrängten Wassers: $M_W = \rho_W A(D - x)$, wobei x die Höhe der Eisschicht ist, die aus dem Wasser ragt. Aus $M_E g = M_W g$ folgt

[**1**]

$$\frac{x}{D} = \frac{V_{E\,\text{außen}}}{V_E} = \frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_W}$$

[**1**]

b. Die x-Achse zeige nach oben, die einwirkenden Kräfte sind der Auftrieb durch das verdrängte Wasser nach oben und das Gewicht des Eises nach unten.

$$M_E \ddot{x} = \rho_W A g(D - x) - \rho_E A g D$$
$$\ddot{x} + \frac{\rho_W A g}{M_E} x = \frac{\rho_W - \rho_E}{M_E} A D g = g \frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_E}$$
$$\omega^2 = \frac{\rho_W A g}{M_E} = \frac{\rho_W g}{\rho_E D}$$

[**2**]

Damit ist die Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_E D}{\rho_W g}}$

[**1**]

c.

$$\rho_E A D g + m g = \rho_W A D g$$

[**1**]

Damit ist die Masse der Pinguine $m = (\rho_W - \rho_E) A D$.

[**1**]

d. Nach dem Schmelzen nimmt das Eis folgendes Volumen ein:

$$V = \frac{M_E}{\rho_W} = \frac{\rho_E}{\rho_W} A D$$

[**1**]

Dies ist das Wasservolumen, das die Eisscholle verdrängt hat. Somit ändert sich der Meeresspiegel beim Schmelzen nicht.

[**1**]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Eine Stahlflasche von 50L Volumen ist für einen Maximaldruck von 200 Bar zugelassen. Die Flasche wird mit Stickstoff (welches als Distickstoffmolekül N_2 vorliegt und als ideales Gas betrachtet wird) gefüllt. *Hinweis*: Atomgewicht von $^{14}N = 14$

a. Welche Masse Stickstoff darf eingefüllt werden, wenn mit Temperaturen bis zu 50°C zu rechnen ist und die Flasche nicht über den Toleranzbereich kommen soll?

b. Wie hoch ist der Druck in der Flasche bei $T = 20°\text{C}$, wenn der Maximaldruck bei 50°C erreicht wird?

c. Wie groß ist die Kraft, die bei 200 Bar auf die kreisrunde Ventilöffnung (Radius 2mm) wirkt?

Lösung

a. Mit M als der molaren Masse

$$\begin{aligned} pV &= nRT \\ \Rightarrow n &= \frac{pV}{RT} = \frac{200 \cdot 10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{8,314 \cdot (50 + 273)} \text{mol} = 372,4\text{mol} \\ m &= nM = 372,4 \cdot 28 \frac{\text{mol} \cdot \text{g}}{\text{mol}} = 10,427\text{kg} \end{aligned}$$

[**2**]

b.

$$p = \frac{nRT}{V} = \frac{372,4 \cdot 8,314 \cdot 293}{50 \cdot 10^{-3}} \text{J/m}^3 = 181,43\text{Bar}$$

[**1**]

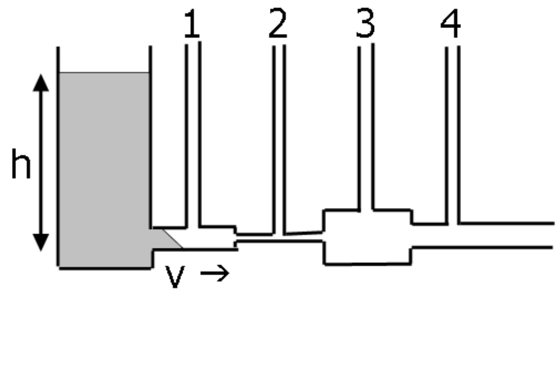
c.

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow F = pA = 200 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 0,002^2\text{N} = 251,2\text{N}$$

[**1**]

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Durch die Bernoulli-Gleichung $\rho g h + \frac{\rho}{2} v^2 = const.$ wird der Zusammenhang von hydrostatischem und hydrodynamischem Druck in einer stationären Strömung unter Vernachlässigung von Reibungsphänomenen beschrieben.



a. Der Wasserpegel des Vorratsbehälters (siehe Schema) sei $h = 40\text{cm}$ und das Gefäß so groß, dass der hydrostatische Druck in diesem zeitlich konstant bleibt. Das Wasser fließe unterhalb von Rohr 1 mit einer Geschwindigkeit von $v = 2\text{m/s}$ aus.

   Wie hoch ist der Wasserpegel in Rohr 1?

b. Beschreiben Sie auch qualitativ die Steighöhen in den übrigen Rohren (2-4) relativ zu Rohr 1, die Sie aus der Betrachtung der Bernoulli-Gleichung unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Rohrquerschnitte erhalten. Die Querschnitte $A_1 : A_2 : A_3 : A_4$ verhalten sich wie $1 : 0,5 : 2 : 1$.

Lösung

a.

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \rho g h = 1\text{g/cm}^3 \cdot 10\text{m/s}^2 \cdot 0,4\text{m} = 4000\text{Pa} \\
p_1 &= \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 p_0 \\
\Rightarrow & 1\text{g/cm}^3 \cdot 10\text{m/s} \cdot h_1 + \frac{1\text{g}}{2\text{cm}^3} \cdot 4\text{m}^2/\text{s}^2 = 4000\text{Pa} \\
\Rightarrow & 1\text{g/cm}^3 \cdot 10\text{m/s} \cdot h_1 = 2000\text{Pa} \Rightarrow h_1 = 0,5 \cdot h
\end{aligned}
$$

[**3**]

b.

$$
\begin{aligned}
A_2 &= 0,5 \cdot A_1 \Rightarrow v_2 > v_1 \Rightarrow h_2 < h_1 \\
A_3 &= 2 \cdot A_1 \Rightarrow v_3 < v_1 \Rightarrow h_3 > h_1 \\
A_4 &= A_1 \Rightarrow v_4 = v_1 \Rightarrow h_4 = h_1
\end{aligned}
$$

[**2**]