# Klausur zur Quantenmechanik II

WS 2009/10

Dienstag, 9. Februar 2010, HS1, Physik Department, TU München

---

Die Klausur besteht aus **3 Aufgaben**.
Bitte bearbeiten Sie **jede Aufgabe** auf einem **separaten** Blatt!

Bitte geben Sie auf **allen** Blättern
**Ihren Namen** an!

Sie haben zur Bearbeitung **90 Minuten** Zeit.

Insgesamt können **100 Punkte** erreicht werden.

## Viel Erfolg!

---

## Aufgabe K1 (20 Punkte)

Ein nichtrelativistisches Teilchen mit Masse $m$ und Impuls $\hbar\vec{k} = \vec{p} = p\vec{e}_z$ werde gestreut an einem kugelsymmetrischen Potential

$$V(r) \quad = \quad \frac{-Ze^2}{r}\exp(-\mu r)$$

mit $\mu > 0$.

a) (6 Punkte) Die Lösung des Streuproblems für ein solches Potential (mit asymptotisch auslaufenden Kugelwellen) ist gegeben durch

$$\psi^{(+)}(\vec{k};\vec{r}) \quad = \quad e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\,\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}V(r')\psi^{(+)}(\vec{k};\vec{r}\,').$$

Entwickeln Sie diesen Ausdruck für $|\vec{r}\,| \to \infty$ für ein Potential mit endlicher Reichweite und zeigen Sie, dass in führender Ordnung der Entwicklung gilt:

$$\begin{aligned}\psi^{(+)}(\vec{k};\vec{r}) \quad &\cong \quad e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{e^{i\,kr}}{r}\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' e^{-i\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'}V(r')\psi^{(+)}(\vec{k};\vec{r}\,'), \quad \vec{k}\,' = k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}\\ &= e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{e^{i\,kr}}{r}f_{\vec{k}}(\vartheta,\varphi).\end{aligned}$$

*Hinweis*: $(1+x)^n = 1 + nx + \ldots$

b) (2 Punkte) Was ist die Bornsche Näherung für die Streuamplitude? Geben Sie $f_{\vec{k}}(\vartheta,\varphi)$ in Bornscher Näherung an.

c) (10 Punkte) Berechnen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in Bornscher Näherung als Funktion des Streuwinkels $\vartheta$ mit $\vec{k}\cdot\vec{k}\,' = k^2\cos\vartheta$.
*Hinweis*: $1 - \cos\vartheta = 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}$.

d) (2 Punkte) Betrachten Sie den Grenzfall mit $\mu \to 0$. Welcher physikalische Streuprozess wird durch dieses Ergebnis beschrieben? Wie verhält sich der differentielle Wirkungsquerschnitt in diesem Fall für kleine Streuwinkel $\vartheta$? Worauf ist dieses Ergebnis zurückzuführen?

## Aufgabe K2 (40 Punkte)

Gegeben sei ein System von $N$ nichtrelativistischen Fermionen in einem Volumen $\mathcal{V}$, *die sich durch Wirkung eines äußeren Magnetfeldes alle im gleichen Spinzustand* $\nu = +\frac{1}{2}$ *befinden.* Zwischen den Fermionen wirke eine Zweiteilchenwechselwirkung, welche den Spin unverändert lässt und gegeben sei durch

$$V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -V_0\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\exp(-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|), \quad V_0 > 0,\ \mu \geq 0.$$

Es gebe kein weiteres äußeres Potential. Benutzen Sie im Folgenden das Hartree-Fock-Verfahren, um näherungsweise die Grundzustandsenergie dieses Systems zu bestimmen. Als Basiszustände verwende man ebene Wellen $|\vec{p}\rangle$.

a) (4 Punkte) Stellen Sie ausgehend von der allgemeinen Form des Hamiltonoperators in Hartree-Fock-Näherung

$$\hat{H}_{\mathrm{HF}} = \sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta=1}^{N}\left\{\langle\alpha|\hat{t}|\beta\rangle + \sum_{\lambda=1}^{N}\left[\langle\lambda,\alpha|\hat{V}|\lambda,\beta\rangle - \langle\lambda,\alpha|\hat{V}|\beta,\lambda\rangle\right]\right\} a_\alpha^+ a_\beta$$

die (formalen) Hartree-Fock-Gleichungen für diesen Fall auf.

b) (10 Punkte) Bestimmen Sie zuerst die Matrixelemente für das Hartree-Potential

$$\langle\vec{p}_1|U_{\mathrm{H}}|\vec{p}_2\rangle = \sum_{\vec{p}_3\in F}\langle\vec{p}_3,\vec{p}_1|\hat{V}|\vec{p}_3,\vec{p}_2\rangle.$$

Was ist die physikalische Bedeutung dieses Potentials?
*Hinweise*: Werten Sie das Matrixelement aus mit Hilfe der Näherung

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\int \mathrm{d}^3r_1 V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \approx \frac{1}{\mathcal{V}}\int \mathrm{d}^3r V(|\vec{r}\,|).$$

$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n \exp(-x) = n!$ $\quad \int \mathrm{d}^3r \exp(-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot\vec{r}) = \mathcal{V}\delta_{\vec{p}_1,\vec{p}_2}$.

c) (12 Punkte) Bestimmen Sie die Matrixelemente für das Fock-Austauschpotential

$$\langle\vec{p}_1|U_{\mathrm{F}}|\vec{p}_2\rangle = \sum_{\vec{p}_3\in F}\langle\vec{p}_3,\vec{p}_1|\hat{V}|\vec{p}_2,\vec{p}_3\rangle.$$

Führen Sie die Summe über $\vec{p}_3$ noch nicht aus. *Hinweise*: Benutzen Sie, dass aufgrund der Impulserhaltung $\vec{p}_1+\vec{p}_3 = \vec{p}_2+\vec{p}_3$ und daher $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$ ist. Verwenden Sie die Näherung

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\int \mathrm{d}^3r_1 \exp[-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_2)]V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \approx \frac{1}{\mathcal{V}}\int \mathrm{d}^3r \exp[-\frac{i}{\hbar}\vec{q}\cdot\vec{r}]V(|\vec{r}\,|).$$

d) (4 Punkte) Geben Sie jetzt den gesamten Hamiltonoperator in Hartree-Fock-Näherung mit den von Ihnen berechneten Matrixelementen an. Vergleichen Sie den Hartree-Term mit dem Fock-Term bei verschwindendem Impulsübertrag $\vec{q} = \vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{0}$. Betrachten Sie den Grenzwert $\mu \to 0$ und zeigen Sie, dass als Beitrag der Wechselwirkung verbleibt

$$\sum_{\vec{p}_1\in F}\sum_{\vec{p}_2\in F}\left\{\frac{4\pi V_0\hbar^2}{\mathcal{V}}\sum_{\substack{\vec{p}_3\in F\\ \vec{p}_3\neq\vec{p}_1}}\frac{1}{(\vec{p}_1-\vec{p}_3)^2}\delta_{\vec{p}_1,\vec{p}_2}\right\} a_{\vec{p}_1}^+ a_{\vec{p}_2}.$$

Warum sind die Impulseigenzustände zur Lösung der Hartree-Fock-Gleichungen geeignet?

e) (10 Punkte) Bestimmen Sie im Grenzfall $\mu \to 0$ die Hartree-Fock-Einteilchenenergien $\varepsilon_{\mathrm{HF}}(\vec{p})$ und berechnen Sie die Hartree-Fock-Energie $E_{\mathrm{HF}}$ und die Energie $E_0$ des Grundzustands in Hartree-Fock-Näherung. Führen Sie dazu die verbleibenden Impulssummen aus. Drücken Sie das Ergebnis durch die Fermi-Energie $\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m}$, den Fermi-Impuls $p_F$, die Teilchenzahl $N$ und $V_0$ aus. *Hinweise*: Ersetzen Sie für den kinetischen Term für den Grenzfall großer Volumina $\mathcal{V}$ näherungsweise $\sum_{\vec{p}} \to \mathcal{V}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi\hbar)^3}$. Benutzen Sie, dass näherungsweise gilt

$$\sum_{\vec{p}_1\in F}\sum_{\substack{\vec{p}_3\in F\\ \vec{p}_3\neq\vec{p}_1}}\frac{1}{(\vec{p}_1-\vec{p}_3)^2} \to \left(\frac{\mathcal{V}}{(2\pi\hbar)^3}\right)^2 6\pi p_F \frac{4\pi}{3}p_F^3.$$

**Aufgabe K3** (40 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines freien Dirac-Teilchens mit Masse $m$ und Ladung $e$ ist gegeben durch $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$. *Hinweis*: Verwenden Sie im Folgenden rationalisierte Einheiten, d.h. $\hbar = 1$ und $c = 1$.

a) (5 Punkte) Berechnen Sie den Kommutator $[H, \vec{L}]$, wobei $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Bahndrehimpulsoperator ist. Was bedeutet das Ergebnis?

b) (5 Punkte) Berechnen Sie den Kommutator $[H, \frac{1}{2}\vec{\Sigma}\,]$ mit dem Dirac-Spinoperator für das relativistische Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen. Was bedeutet dieses Ergebnis?

c) (2 Punkte) Aufgrund der Rotationsinvarianz der freien Dirac-Gleichung erwartet man, dass der Drehimpuls erhalten ist. Wie lässt sich das mit dem Ergebnis aus a) und b) vereinbaren? Wie lautet der erhaltene Drehimpuls?

Das Dirac-Teilchen bewege sich nun in einem zeitlich und räumlich konstanten magnetischen Feld $\vec{B} = B_0\,\vec{e}_z$ mit zugehörigem Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}$. Für das elektrische Potential gelte $\phi = 0$.

d) (6 Punkte) Wie lautet jetzt der Dirac-Hamiltonoperator, der die Bewegung des Teilchens im Magnetfeld beschreibt? Leiten Sie aus der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung $H\psi = E\psi$ mit dem Ansatz $\psi = \binom{\varphi}{\chi}$ das gekoppelte Gleichungssystem für die zweikomponentigen Spinoren $\varphi$ und $\chi$ ab.

e) (10 Punkte) Eliminieren Sie die $\chi$-Komponenten und zeigen Sie, dass $\varphi$ im nichtrelativistischen Grenzfall der folgenden Pauli-Gleichung genügt ($W = E - m$):

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 - e\,\vec{\sigma} \cdot \vec{B}\right]\varphi = W\varphi.$$

f) (8 Punkte) Zeigen Sie, dass mit dem angegebenen Vektorpotential gilt $\vec{A} \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{L}$. Bestimmen Sie den entsprechenden Wechselwirkungsterm in der Pauli-Gleichung aus e).

g) (4 Punkte) Bestimmen Sie aus dem Vergleich der Kopplungsterme mit $\vec{L} \cdot \vec{B}$ und $\vec{S} \cdot \vec{B}$ mit dem nicht-relativistischen Spinoperator $\vec{S}$ den Spin-$g$-Faktor des Teilchens.

*Hinweise*:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \epsilon^{ijk}\epsilon^{lmk} = \delta^{il}\delta^{jm} - \delta^{im}\delta^{jl}$$

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\,\epsilon^{ijk}\sigma^k, \quad \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\,\delta^{ij}\mathbb{1}, \quad (\vec{a} \cdot \vec{\sigma})\left(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$