Technische Universität München

Musterlösung der Elektrodynamikklausur

vom 24. Februar 2010

1 Aufgabe 1: Multiple choice

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ gilt für die Coulomb-Eichung.

b) Für einen raumartigen Abstand können zwei Ereignisse nicht so transformiert werden, dass sie nur zeitlich getrennt sind.

c) An der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika ist die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung D_n stetig.

d) Trifft unter Totalreflektion eine elektromagnetische Welle im Medium 1 auf eine planare Grenzfläche des unendlich dicken Mediums 2 mit nierigerem Brechungsindex, so gilt:

- Es ist richtig, dass die transmittierte Welle exponentiell mit dem Abstand zur Grenzfläche abklingt
- Es ist richtig, dass die reflektierte Welle zur einfallenden Welle phasenverschoben ist.
- Es ist falsch, dass der Energiefluss der Welle im Medium 2 proportional zum Cosinus des Winkels θ_i ist (Totalreflektion!)

e) Zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transformationen entlang der gleichen Richtung mit Geschwindigkeiten v_1 und v_2 lassen sich als eine Transformation mit

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{(v_1 v_2)^2}{c^2}}$$

darstellen.

f) Die Grösse $(\vec{E} + c\vec{B})(\vec{E} - c\vec{B})$ ist unter einer Lorentztransformation invariant.

2 Aufgabe 2: Kondensator

Für einen Kondensator mit Ladung Q und Fläche F gilt:

$$\sigma = \frac{Q}{F}$$

damit gilt zwischen den Platten: $D_x = \sigma$ und somit

$$E_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon(x)} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 (1 + \tilde{\epsilon}|x|)}$$

Die Potentialdifferenz Φ erhält man mit:

$$\begin{aligned} \Phi = \int_{x_1}^{x_2} E_x \, dx = \int_{x_1}^{x_1+d} \frac{\sigma}{\epsilon_0(1 + \tilde{\epsilon}|x|)} \, dx = \\ = \int_{x_1}^{0} \frac{\sigma}{\epsilon_0(1 - \tilde{\epsilon}x)} \, dx + \int_{0}^{x_1+d} \frac{\sigma}{\epsilon_0(1 + \tilde{\epsilon}x)} \, dx = \\ = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \tilde{\epsilon}} [ln(1 - \tilde{\epsilon}x_1) + ln(1 + \tilde{\epsilon}(x_1 + d))] \end{aligned}$$

Für die Kapazität erhält man dann:

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{F \cdot \epsilon_0 \tilde{\epsilon}}{[ln(1 - \tilde{\epsilon}x_1) + ln(1 + \tilde{\epsilon}(x_1 + d))]}$$

3 Aufgabe 3: Draht

a)
Die beiden Felder lauten:

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho}\vec{e}_\rho$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{2\pi\rho}\vec{e}_\vartheta$$

Auf das Teilchen wirkt dann die Kraft:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

b)
Da ϑ konstant ist erhalten wir durch die Ausführung des Kreuzprodukts in der Lorentzkraft mit $\vec{F} = m\vec{a}$:

$$\ddot{\rho} = \frac{q}{m}(E_\rho - \dot{z}B_\vartheta) = \frac{q}{m}\left(\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\rho} - \dot{z}\frac{\mu_0 j}{2\pi\rho}\right)$$

$$\ddot{\vartheta} = 0$$

$$\ddot{z} = \frac{q}{m}(E_z + \dot{\rho}B_\vartheta) = \frac{q}{m}\dot{\rho}\frac{\mu_0 j}{2\pi\rho}$$

c)
Nun soll die ρ-Abhängigkeit der Felder vernachlässigt werden, wir können also $E_\rho = E_0$ und $B_\vartheta = B_0$ schreiben und erhalten:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\rho} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{B_0 q}{m}\begin{pmatrix} \frac{E_0}{B_0} - \dot{z} \\ \dot{\rho} \end{pmatrix}$$

Setzt man $\omega := \frac{B_0 q}{m}$ kann man die gekoppelte DGL durch folgende Substitution lösen:

$$g := \frac{E_0}{B_0} - \dot{z}$$

$$h := \dot{\rho}$$

Durch einsetzen erhält man dann:

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ -\dot{g} \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

und damit $\ddot{g} = -\omega g$. Die Gleichung wird mit den Ansätzen

$$g(t) = \tilde{A}\sin(\omega t) + \tilde{B}\cos(\omega t)$$

$$h(t) = -\tilde{A}\cos(\omega t) + \tilde{B}\sin(\omega t)$$

gelöst. Damit erhält man:

$$\rho(t) = -\frac{\tilde{A}}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{\tilde{B}}{\omega}\cos(\omega t) + \tilde{C}$$

$$z(t) = \frac{\tilde{A}}{\omega}\cos(\omega t) - \frac{\tilde{B}}{\omega}\sin(\omega t) + \frac{E_0}{B_0}\cdot t + \tilde{D}$$

Die Konstanten $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ und $\tilde{D}$ bestimmt man mit den Anfangsbedingungen:

$$\rho(0) = \rho_0 \Rightarrow \tilde{C} = \rho_0 + \frac{B_0}{\omega}$$

$$z(0) = z_0 \Rightarrow \tilde{D} = z_0$$

$$\dot{\rho}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{A} = 0$$

$$\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow \tilde{B} = \frac{E_0}{B_0}$$

Damit haben wir das Endergebnis:

$$\rho(t) = \frac{E_0}{\omega B_0}(1 - \cos(\omega t)) - \rho_0$$

$$z(t) = \frac{E_0}{\omega B_0}(\omega t - \sin(\omega t))$$

d)
E und B können als konstant genähert werden, wenn die Amplitude $\frac{E_0}{\omega B_0} << r$ ist.

4 Aufgabe 4: Metamaterial

a) Es gilt:

$$\vec{k} \times \vec{E} = \omega \mu \mu_0 \vec{H}$$

Somit gilt für den Poynting-Vektor:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\omega \mu \mu_0} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{\omega \mu \mu_0} [\vec{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \underbrace{(\vec{k} \cdot \vec{E})}_{=0}]$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{E^2}{\omega \mu \mu_0} \vec{k} < 0$$

$\vec{k}$ ist also antiparallel zu $\vec{S}$, da $\mu < 0$.

b)
Den Brechungsindex erhält man nun durch:

$$k^2 = \omega^2 \mu^2 \mu_0^2 \frac{|S|^2}{E^4} = \omega^2 \mu^2 \mu_0^2 \frac{E^2 H^2}{E^4} =$$

$$= \omega^2 \mu \mu_0 \epsilon \epsilon_0 = \frac{\omega^2}{c_0^2} \mu \epsilon$$

$$\Rightarrow n = - \underbrace{\sqrt{\mu \epsilon}}_{>0}$$

c)
Das Snellius-Gesetz besagt

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_t} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin\alpha_t = \frac{1}{n_2}\sin\alpha_i,$$

wobei hier sehr wichtig ist, dass der resultierende Winkel negativ ist!

d)
Die Stetigkeitsbedingung für das E-Feld, mit $\vec{n}$ als den Normaleneinheitsvektor der Grenzfläche, lautet:

$$(\vec{E}_{0,i} + \vec{E}_{0,r} - \vec{E}_{0,t}) \times \vec{n} = 0$$

Für das H-Feld ist sie:

$$\left[\frac{1}{\mu_1}(\vec{k_i} \times \vec{E}_{0,i} + \vec{k_r} \times \vec{E}_{0,r}) - \frac{1}{\mu_2}(\vec{k_t} \times \vec{E}_{0,t})\right] \times \vec{n} = 0$$

Da die Welle senkrecht polarisiert ist, vereinfacht sich das ganze zu:

$$E_{0,i} + E_{0,r} - E_{0,t} = 0$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_i \underbrace{(E_{0,i} - E_{0,r})}_{2E_{0,i}-E_{0,t}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{0,t}\cos\alpha_t = 0$$

$$2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{0,i}\cos\alpha_i = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}}\cos\alpha_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}\cos\alpha_t\right) E_{0,t}$$

$$\frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\mu_2\cos\alpha_i}{\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\mu_2\cos\alpha_i - \sqrt{\epsilon_2\mu_2}\mu_1\cos\alpha_t}$$

Mit dem Brechungsindex aus der Teilaufgabe b) $n_2 = -\sqrt{\epsilon_2\mu_2}$ und dem Snellius-Gesetz lässt sich dies nochmals vereinfachen:

$$\frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} = \frac{2n_1\mu_2\cos\alpha_i}{n_1\mu_2\cos\alpha_i + n_2\mu_1\cos\alpha_t}$$

$$\frac{E_{0,t}}{E_{0,i}} = \frac{2n_1\cos\alpha_i}{n_1\cos\alpha_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha_i}} = \frac{2\cos\alpha_i}{\cos\alpha_i - \frac{1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha_i}}$$

Wobei im letzten Schritt noch $n_1 = 1$ und $\mu_1 = 1$ eingesetzt wurde.