2. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Pfleiderer

Wintersemester 2016/17

17. Januar 2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

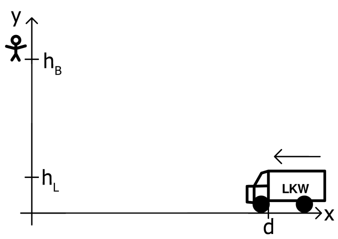
Aufgabe 1 (8 Punkte)

James Bond wird von Schurken auf einen $h_\mathrm{B} = 20$m hohen Balkon verfolgt. Nur durch einen beherzten Sprung nach unten kann er sich retten, denn zufälligerweise fährt direkt unter dem Balkon ein Lastwagen mit einer Ladung Daunenfederkissen vorbei. Er springt genau im richtigen Moment ab und landet auf den Kissen.

(a) Wenn die Ladehöhe des LKWs $h_\mathrm{L} = 4,0$m und seine Geschwindigkeit $v_\mathrm{L} = 60$km/h beträgt, wie weit war dann die Ladefläche des LKW im Moment von Bonds Absprung noch vom Balkon entfernt?

(b) Die Daunenfedern bremsen Bond innerhalb von $t_\mathrm{B} = 0{,}3$s gleichmäßig ab. Wenn Bond-Darsteller Daniel Craig Beschleunigungen von über 5 g nicht verträgt, sollte er sich in dieser Szene dann doublen lassen?

Lösung



(a) Zur Zeit $t = 0$:

LKW	$x(t=0) = d$	$y = h_L$
JB	$x = 0$	$y(t=0) = h_B$

Zur Zeit $t = \tau$ gilt (Zusammentreffen):

LKW	$x(\tau) = 0$	$y = h_L$
JB	$x = 0$	$y(\tau) = h_L$

JB bewegt sich in y-Richtung, der LKW in x-Richtung. Wir nehmen den idealen Fall an und vernachlässigen Reibungseffekte.

LKW:

$$x(t) = \underbrace{x_0}_{=d} + \underbrace{v_{x_0}}_{=-v_L} t + \frac{1}{2}\underbrace{a_x}_{=0} t^2$$

$$x(t) = d - v_L t$$

[**1**]

JB:

$$y(t) = \underbrace{y_0}_{=h_B} + \underbrace{v_{y_0}}_{=0} t + \frac{1}{2}\underbrace{a_y}_{=-g} t^2$$

$$y(t) = h_B - \frac{g}{2}t^2$$

$$y(\tau) = h_L = h_B - \frac{g}{2}\tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2(h_B - h_L)}{g}}$$

$$x(\tau) = 0 = d - v_L\tau = d - v_L\sqrt{\frac{2(h_B - h_L)}{g}}$$

$$d = v_L\sqrt{\frac{2(h_B - h_L)}{g}} = \frac{60}{3,6}\mathrm{m/s}\sqrt{\frac{2 \cdot (20\mathrm{m} - 4\mathrm{m})\mathrm{s}^2}{9,81\mathrm{m}}} = 30\mathrm{m}$$

[**4**]

(b) Während des Falls erreicht JB die Endgeschwindigkeit v_E, die innerhalb von t_B abgebremst wird.

$$v_E = |\dot{y}(\tau)| = |\underbrace{a}_{-g}\tau| = g\sqrt{\frac{2(h_B - h_L)}{g}} = \sqrt{2g(h_B - h_L)}$$

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_E}{t_B} = \frac{\sqrt{2g(h_B - h_L)}}{t_B} = 59\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \approx 6g$$

Craig wird vermutlich bei einem Espresso der Szene seines Doubles zuschauen.

[**3**]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Nach ihrer Fertigstellung unterzogen die Bauingenieure die neue Brücke über die Hamburger Norder-Elbe einem Großversuch. Unter der Last eines in der Mitte der Brücke zu diesem Zweck angehängten Gewichts von $m = 100$ t bog sich die Brücke den Messungen zufolge in der Mitte um $5,0\,\mathrm{cm}$ durch. Als schließlich die Verbindung der Brücke mit dem Gewicht schlagartig gelöst wurde, geriet die Brücke wie erwartet in harmonische Schwingungen. Die Frequenz der Schwingung betrug $f = 0,62\mathrm{Hz}$. Ein Beobachter, der sich mitten auf der Brücke befand, berichtete, er habe das Gefühl gehabt, die Brücke habe sich um ca. einen Meter gehoben und gesenkt.

(a) Wie groß war die Amplitude, mit der sich der Augenzeuge bewegt hat in Wirklichkeit? Wie groß war seine maximale Geschwindigkeit?

(b) Wie groß war die maximale Beschleunigung? Wie groß ist der Anteil im Vergleich zur Gewichtskraft?

(c) Wie groß ist die Gesamtenergie, die mit der beschriebenen Schwingbewegung der Brücke verbunden ist?

(d) Ein Steinchen der Masse $2,0\,\mathrm{g}$ liegt neben dem Beobachter. Bleibt dieses Steinchen am Boden liegen? Und wenn nicht, wie hoch wird es im Vergleich zur unausgelenkten Brücke geschleudert?

Lösung

(a)

$$m = 100\mathrm{t};\ x_0 = -0,05\mathrm{m}$$

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) = x_0 \cos(2\pi f t)$$

(da zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt: $x(0) = -0,05\mathrm{m}$ und $\dot{x}(0) = 0$)
$\Longrightarrow$ Amplitude der Bewegung des Augenzeugen ebenfalls $0,05\mathrm{m}$

$$\dot{x}(t) = -2\pi f x_c \sin(2\pi f t)$$

$\Longrightarrow$ maximale Geschwindigkeit $v_{max} = -2\pi f x_0 = -2\pi \cdot 0,62\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot -0,05\mathrm{m} = 0,19\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

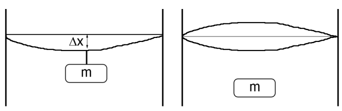
[3]

(b)

$$\ddot{x}(t) = -4\pi^2 f^2 x_0 \cos(2\pi f t)$$

wird maximal für $\cos(2\pi f t) = 1$, also z.B. für $t = 0$
maximale Beschleunigung $a_{max} = -4\pi^2 f^2 x_0 = -4\pi^2 \left(0,62\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot -0,05\mathrm{m} = 0,76\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ Dies entspricht etwa $(\pm)7,7\%$ des Ortsfaktors.

[3]



(c) Während das Gewicht angehängt ist herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen der Gewichtskraft des angehängten Gewichtes und der Federkraft der Brücke. Daraus lässt sich die Federkonstante D der Brücke bestimmen.

$$D = \frac{F}{x_0} = \frac{mg}{x_0}$$

Da wir das Gewicht der Brücke nicht haben, betrachten wir den Punkt der maximalen Auslenkung der Feder (Brücke). An dem gilt:

$$E_{max} = E_{pot} = \frac{1}{2}Dx_0^2 = \frac{1}{2}mgx_0 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 10^3\text{kg} \cdot 9,81\frac{\text{N}}{\text{kg}} \cdot 0,05\text{m} = 2,5 \cdot 10^4\text{J}$$

[3]

(d) a_{max} und a_{min} gelten für das Steinchen genauso. Da $|a_{min}| < |g|$ ist, bleibt das Steinchen am Boden liegen.

[1]

Aufgabe 3 (9 Punkte)

An dem dargestellten Kran wird eine Last (F_L) von 15 kN angehängt. Wie groß sind die Auflagekräfte (F_A und F_B) am Boden des Krans?
Das Gegengewicht F_G des Krans, das Gewicht des Auslegers F_C, das gesamte Eigengewicht des Krans F_E und die Längen $a - d$ haben folgende Werte:

Lösung:

Die einzigen Unbekannten sind die Kräfte F_A und F_B. Um eine der beiden Kräfte ausrechnen zu können, legen wir also den Drehpunkt in den jeweilig anderen Auflagepunkt legen. Zudem gilt Drehmomentengleichgewicht, da sich nichts bewegen darf.

$$\sum M = 0 \qquad \sum F_y = 0 \tag{1}$$

Berechnung von F_A durch Drehpunkt bei F_B

[2]

$$0 = M_A + M_L + M_C + M_G + M_E = F_A(a+a) - F_L(d+a) - F_C(c+a) + F_G(b-a) - F_E a \tag{2}$$

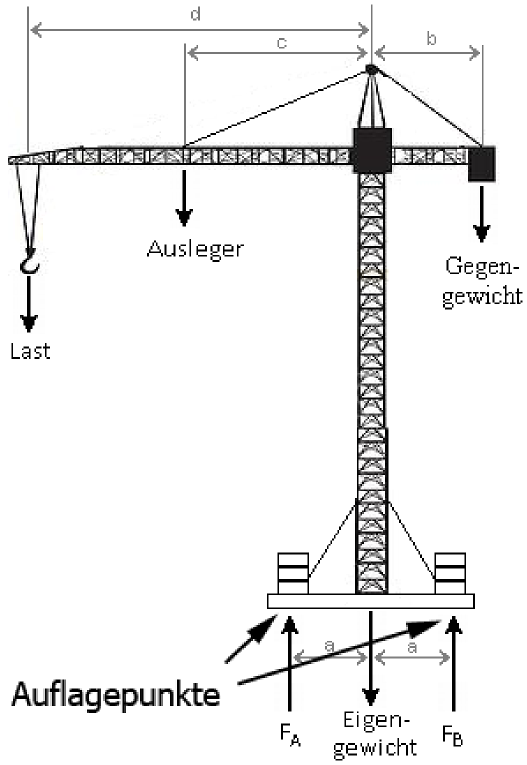
[2]

$$F_A = \frac{F_L(d+a) + F_C(c+a) - F_G(b-a) + F_E a}{a+a} = 46\text{kN} \tag{3}$$

Berechnung von F_B durch Drehpunkt bei F_A

[1]

$F_G = 30$ kN
$F_C = 6$ kN
$F_E = 20$ kN
a=1 m
b=1,2 m
c=1,5 m
d=3,2 m



$$0 = M_B + M_G + M_C + M_L = F_B(a + a) - F_G(a + b) + F_C(c - a) + F_L(d - a) - F_E a \quad (4)$$

[**2**]

$$F_B = \frac{F_G(a + b) - F_C(c - a) - F_L(d - a) + F_E a}{a + a} = 25\text{kN} \quad (5)$$

[**1**]

Man kann stattdessen natürlich auch alternativ ein Kräftegleichgewicht als eine der Gleichungen aufstellen.

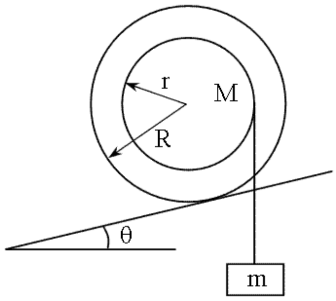
$$-F_G - F_C - F_E - F_L + F_A + F_B = 0 \quad (6)$$

[**1**]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Ein Jojo mit angehängtem Gewicht befindet sich auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht und bewegt sich nicht.

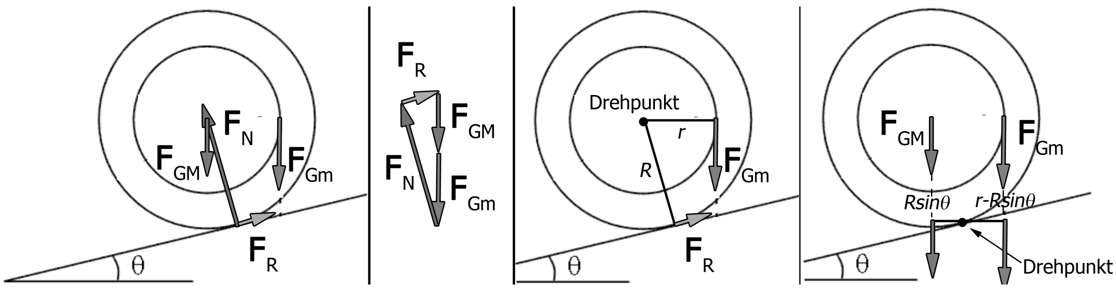
Das Jojo ($M = 3$kg) besteht aus einem inneren Zylinder mit Radius $r = 5$cm. An dessen Enden sind zwei Scheiben mit größerem Radius $R = 6$cm angebracht. Auf dem inneren Zylinder ist



ein Faden aufgewickelt, an dem ein Gewicht der Masse $m = 4,5$kg befestigt ist. Das Jojo liegt auf einer Ebene auf, die um den Winkel θ gegen die Waagrechte gekippt ist. Machen Sie eine Zeichnung in der Sie die Kräfte eintragen die auf das Jojo wirken (mit richtigen Ansatzpunkten). Wie groß muss θ sein, damit sich das System in Ruhe befindet?

Hinweis: Das Jojo kann nicht rutschen. Das Jojo kann sich um verschiedene Punkte „nicht drehen“. Wählen Sie einen aus.

Lösung:



[2]

Die vier am Jojo angreifenden Kräfte sind: die Gewichtskraft des Jojo im Schwerpunkt $\vec{F}_{GM}$, die Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$ am Rand der kleinen Rolle, die Normalkraft am Auflagepunkt $\vec{F}_N$ und die Reibungskraft $\vec{F}_R$ am Auflagepunkt, damit das Jojo nicht rutscht. Da sich das Jojo nicht bewegt muss ein Kräftegleichgewicht herrschen.

$$\sum_i F_i = 0 \Rightarrow \vec{F}_{GM} + \vec{F}_{Gm} + \vec{F}_N + \vec{F}_R = 0 \tag{7}$$

[1]

Das System befindet sich in Ruhe, alle angreifenden Drehmomente müssen sich zu 0 addieren. Die beiden offensichtlichen Wahlen als Drehpunkt sind der Mittelpunkt des Jojo und der Auflagepunkt. Hier wählen wir den Mittelpunkt als Drehpunkt

$$\sum_i D_i = 0 \tag{8}$$

[1]

Es wirken nur noch zwei Kräfte um Drehmomente zu erzeugen: die Reibungskraft $\vec{F}_R$ und die Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$.

$$D_{Gm} = mgr \tag{9}$$

[1]

Die Reibungskraft kompensiert gerade den Anteil der Gewichtskräfte, die eine Hangsabtriebskraft erzeugen:

$$F_H = (M+m)g\sin\theta \Rightarrow D_R = F_H R = (M+m)gR\sin\theta \tag{10}$$

[1]

Beide Drehmomenten sind entgegen gerichtet. Es muss gelten $D_{Gm} = D_R$, und somit folgt:

$$R(M+m)g\sin\theta = mgr \Rightarrow \sin\theta = \frac{mr}{(M+m)R} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ \tag{11}$$

[2]

Alternativ:

Wir wählen den Auflagepunkt als Drehpunkt. Die beiden wirkenden Drehmomente werden von der Gewichtskraft des Jojo im Schwerpunkt $\vec{F}_{GM}$ und der Seilkraft der kleinen Masse $\vec{F}_{Gm}$ erzeugt.

Damit ergibt sich ein Drehmoment $\vec{F}_{Gm}$ der kleinen Masse mit verkürztem Hebelarm zu

$$D_{Gm} = mg(r - R\sin\theta) \tag{12}$$

Damit ergibt sich ein Drehmoment $\vec{F}_{GM}$ der Jojomasse mit verkürztem Hebelarm zu

$$D_{GM} = MgR\sin\theta \tag{13}$$

Damit sich die Momente aufheben, muss gelten $D_{GM} = D_{Gm}$, und somit folgt:

$$RMg\sin\theta = mgr \Rightarrow \sin\theta = \frac{mr}{(M+m)R} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ \tag{14}$$

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Ein Pendel besteht aus zwei identischen gleichförmigen dünnen Stäben der Länge L und der Masse m. Die beiden Stäbe sind rechtwinklig fest verbunden und bilden ein T (siehe Abbildung). Das umgekehrte T ist an seinem freien Ende aufgehängt und kann so Schwingungen ausführen.

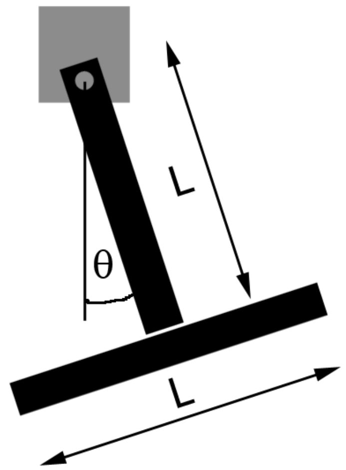
(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I des Pendels um seine Aufhängung.

(b) Geben Sie die kinetische und potentielle Energie des Pendels in Abhängigkeit des Auslenkungswinkels θ an.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Pendels auf.

(d) Bestimmen Sie die Periode des Pendels für kleine Auslenkungen.

Hinweis: Trägheitsmoment eines Stabes: $I = \frac{mL^2}{12}$ um seinen Mittelpunkt



Lösung:

(a) Der Trägheitsmoment eines dünnen Stabes der Länge L und der Masse m beträgt

$$I = \frac{mL^2}{12} \tag{15}$$

Mit Hilfe des Satzes von Steiner gilt dann für den Trägheitsmoment des vertikalen Stabes:

$$I_V = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2})\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2 \tag{16}$$

[**1**]

Anwendung des Steinerschen Satzes auf den horizontalen Stab ergibt ein Trägheitsmoment des Stabes bezüglich des Befestigungspunktes

$$I_H = \frac{1}{12}mL^2 + mL^2 = \frac{13}{12}mL^2 \tag{17}$$

[**1**]

Daher ergibt sich für das Gesamtträgheitsmoment des Systems

$$I = \left(\frac{1}{3} + \frac{13}{12}\right)mL^2 = \frac{17}{12}mL^2 \tag{18}$$

[**1**]

(b) Die kinetische Energie des Systems ist gegeben durch

$$E_{kin} = \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{19}$$

[**1**]

Bei einem Auslenkungswinkel von θ hebt sich der Schwerpunkt des vertikalen Stabes um

$$\Delta h_V = L\left(1-\cos\theta\right)/2 \tag{20}$$

[**1**]

und der Schwerpunkt des horizontalen Stabes um

$$\Delta h_H = L\left(1-\cos\theta\right) \tag{21}$$

[**1**]

Daraus folgt für die potentielle Energie

$$E_{pot} = \frac{3mgL}{2}\left(1-\cos\theta\right) \tag{22}$$

[**1**]

(c) Die Bewegungsgleichung des Pendels erhält man aus der Bedingung, dass die Gesamtenergie des Systems konstant ist:

$$E_{Ges} = \frac{17}{24}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{3mgL}{2}\left(1-\cos\theta\right) = konst. \tag{23}$$

Differenziert man diese nach der Zeit, so folgt:

$$\frac{dE_{Ges}}{dt} = \frac{17}{12}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d\theta^2}{dt^2}\right) + \frac{3mgL}{2}\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \tag{24}$$

Stellt man diese Gleichung um nach $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ergibt sich

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = -\frac{18g}{17L}\sin\theta \tag{25}$$

Alternativ:

$$\vec{D} = I\ddot{\vec{\theta}} \tag{26}$$

[**1**]

$$\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{G1} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{G2} = -L/2\sin\theta mg - L\sin\theta mg = -\frac{3}{2}\sin\theta mgL = \frac{17}{12}mL^2\ddot{\theta} \tag{27}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{18g}{17L}\sin\theta \tag{28}$$

[**3**]

(d) Für kleine Auslenkungen können wir die Kleinwinkelnäherung verwenden ($\sin\theta \approx \theta$). Damit vereinfacht sich die Bewegungsgleichung zu:

$$\ddot{\theta} = -\frac{18g}{17L}\theta \tag{29}$$

[**1**]

Das ist die Gleichung eines harmonischen Oszillators mit Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \left(\frac{18}{17}\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

[**1**]

, sodass die Periode bei kleinen Auslenkungen

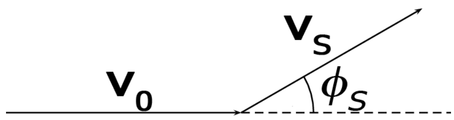
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{17L}{18g}} \tag{31}$$

beträgt.

[**1**]

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Beim Eisstockschießen trifft der weiße Eisstock eines Spielers mit $v_0 = 4,50\text{m/s}$ auf einen sich in Ruhe befindenden silbernen Eisstock. Beide Eisstöcke haben die gleiche Masse und stoßen elastisch. Nach dem Stoß bewege sich der silberne Eisstock unter einem Winkel von $\phi_s = 36,0°$ zur Einfallsrichtung des weißen Eisstocks (siehe Abbildung).

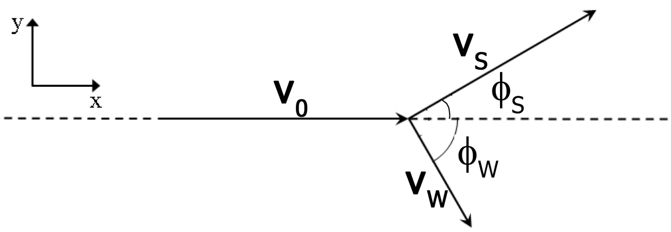


(a) Bestimmen Sie die Bewegungsrichtung des weißen Eisstocks nach dem Stoß, d. h. bestimmen Sie die Winkelablenkung ϕ_w des weißen Eisstocks gegenüber der Einfallsrichtung

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_s und v_w beider Eisstöcke nach dem Stoß mittels Erhaltungssatz/sätzen.

(c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_s und v_w über Geometrie.

Lösung:



(a) Impulserhaltung:

$$\vec{p_0} = \vec{p_s} + \vec{p_w}$$

$$m\,\vec{v_0} = m\,\vec{v_s} + m\,\vec{v_w}$$
$$\vec{v_0} = \vec{v_s} + \vec{v_w}$$

[**1**]

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}mv_w^2$$
$$v_0^2 = v_s^2 + v_w^2$$

[**1**]

Pythagoras: $a^2 = b^2 + c^2$
$\rightarrow 90,0°$ Winkel zwischen $\vec{v_s}$ und $\vec{v_w}$

$$\text{Winkelsumme im Dreieck: } \phi_s + \phi_w + 90,0° = 180°$$

[**1**]

$$\phi_s + \phi_w = 90,0° \quad \rightarrow \quad \phi_w = 90,0° - 36,0° = 54,0°$$

Der weiße Eisstock wird um $\phi_w = 54,0°$ in die <u>entgegengesetzte</u> Richtung abgelenkt wie der silberne Eisstock.

[**1**]

(b) Gesucht: $v_s = |\vec{v_s}|$ und $v_w = |\vec{v_w}|$
Impulserhaltungssatz:
x-Richtung: $mv_0 = mv_{sx} + mv_{wx}$
y-Richtung: $0 = v_{sy} + v_{wy}$

[**2**]

$$v_{sy} = \sin\phi_s \cdot v_s \quad ; \quad v_{wy} = -\sin\phi_w \cdot v_w$$
$$\rightarrow v_s = v_w \cdot \frac{\sin\phi_w}{\sin\phi_s}$$
$$v_w = v_s \frac{\sin\phi_s}{\sin\phi_w}$$
$$\rightarrow v_0^2 = v_w^2 \cdot \frac{\sin^2\phi_w}{\sin^2\phi_s} + v_w^2 = v_w^2\left(1 + \frac{\sin^2\phi_w}{\sin^2\phi_s}\right)$$
$$v_w = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2\phi_w}{\sin^2\phi_s}}} = 2,65\text{m/s}$$

[**2**]

$$v_0^2 = v_s^2 \cdot \frac{\sin^2 \phi_s}{\sin^2 \phi_w} + v_s^2 = v_s^2 \left(1 + \frac{\sin^2 \phi_s}{\sin^2 \phi_w}\right)$$

$$v_s = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{\sin^2 \phi_s}{\sin^2 \phi_w}}} = 3,64 \mathrm{m/s}$$

[**1**]

(c) Aus a) und b) ist bekannt:

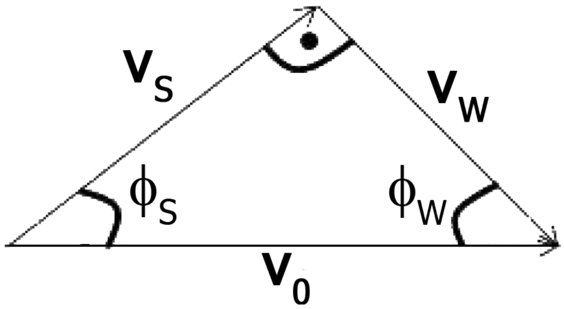
$$\vec{v_0} = \vec{v_s} + \vec{v_w}$$

[**1**]

$$\sin \phi_w = \frac{v_s}{v_0} \quad ; \quad v_s = v_0 \sin \phi_w = 3,64 \mathrm{m/s}$$

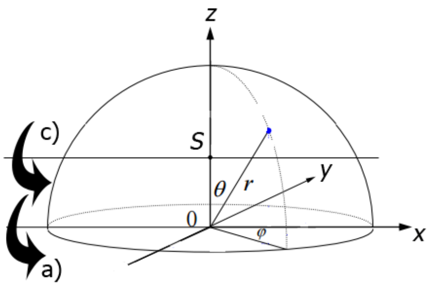
$$\sin \phi_s = \frac{v_w}{v_0} \quad ; \quad v_w = v_0 \sin \phi_s = 2,65 \mathrm{m/s}$$

[**2**]



Aufgabe 7 (9 Punkte)

Betrachten Sie eine homogene Halbkugel mit Radius R und Masse M.



(a) Berechnen Sie explizit durch Integration in Zylinderkoordinaten das Trägheitsmoment der Halbkugel bezüglich einer Achse in der flachen Seitenfläche durch den Kugelmittelpunkt (z.B. die x-Achse).

(b) Für jede Koordinate x_i des Schwerpunkts gilt

$$x_i = \frac{1}{V} \int_V x_i \, \mathrm{d}^3 x$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts, wenn die Halbkugel mit dem Kugelmittelpunkt im Ursprung auf der x-y-Ebene liegt.
Hinweis: aus Symmetriegründen müssen Sie nur eine Koordinate tatsächlich ausrechnen, verwenden Sie dazu an das Problem angepasste Koordinaten. Volumen der Halbkugel: $V = \frac{2}{3}\pi R^3$

(c) Bestimmen Sie jetzt das Trägheitsmoment der Halbkugel I_{CM} bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt bei $z = \frac{3}{8}R$ geht und parallel zur flachen Seitenfläche ist.

Lösung

(a) Das Trägheitsmoment der Halbkugel ist die Hälfte des Trägheitsmoments der Vollkugel mit der gleichen Dichte ϱ

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2} \int_V \varrho (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}^3 x \\
&= \frac{\varrho}{2} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \mathrm{d}\bar{r} \, \bar{r}^2 \, \bar{r} \\
&= \frac{\varrho}{2} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z 2\pi \left[\frac{\bar{r}^4}{4} \right]_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \\
&= \frac{\pi\varrho}{4} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z (R^2 - z^2)^2 \\
&= \frac{\pi\varrho}{2} \int_0^{R} \mathrm{d}z (R^2 - z^2)^2 \\
&= \frac{\pi\varrho}{2} \left(R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) \\
&= \frac{4\pi\varrho}{15} R^5 = \frac{2}{5} M R^2
\end{aligned}$$

Das ist *gleich* dem Trägheitsmoment der Vollkugel derselben Masse, da es für das Trägheitsmoment nicht relevant ist, wenn Masse auf einem Kreis um die Rotationsachse verschoben wird.

[**4**]

(b) Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt bei $x = y = 0$. Die Integration für die

z-Koordinate kann in Kugelkoordinaten erfolgen mit $z = r\cos\vartheta$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{V}\int_V z\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\int_0^R \mathrm{d}r\, r^2\sin\vartheta r\cos\vartheta \\
&= \frac{2\pi}{V}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\vartheta\,\sin\vartheta\cos\vartheta\int_0^R \mathrm{d}r\, r^3 \\
&= \frac{2\pi}{V}\frac{R^4}{4}\left[-\frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi R^4}{4V} = \frac{3}{8}R
\end{aligned}$$

Alternativ können auch Zylinderkoordinaten verwendet werden

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r}z \\
&= \frac{2\pi}{V}\int_0^R\mathrm{d}z\,z\left[\frac{\bar{r}^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \\
&= \frac{\pi}{V}\int_0^R\mathrm{d}z\,z(R^2-z^2) \\
&= \frac{\pi}{V}\left(\frac{R^2}{2}R^2-\frac{R^3}{3}\right) \\
&= \frac{\pi R^4}{4V} = \frac{3}{8}R
\end{aligned}$$

[**3**]

(c) Das soeben berechnete Trägheitsmoment ist das „verschobene“ Trägheitsmoment I. Das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt ist entsprechend des Satzes von Steiner reduziert:

$$I_{\mathrm{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 - M\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{320}MR^2.$$

[**2**]