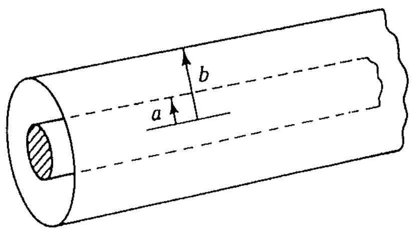
THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. W. Zwerger
ELEKTRODYNAMIK

Wintersemester 2005/2006
7. Februar 2006
2. KLAUSUR

Aufgabe 1: TEM-Moden in einem Koaxial-Leiter (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Koaxial-Leiter mit zwei unendlich langen, perfekt leitenden Zylinderfächen (s. Skizze). Eine elektromagnetische Welle im Vakuum zwischen den beiden Zylinderfächen, die sich entlang der z-Achse ausbreitet, wird beschrieben durch den Ansatz

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(x,y) \\ \mathbf{B}(x,y) \end{Bmatrix} \exp i\,(kz - \omega(k)t)\,.$$



a) Berechnen Sie die Dispersion $\omega(k)$ von TEM-Moden, also Moden in denen $E_z = B_z \equiv 0$, aus den Maxwell-Gleichungen im Vakuum. Welchen Vorteil haben TEM-Moden gegenüber den üblichen TE- oder TM-Moden in gewöhnlichen Wellenleitern?

b) Zeigen Sie, dass die Felder $\mathbf{E}(x.y)$ und $\mathbf{B}(x,y)$ aufeinander senkrecht stehen und denselben Betrag haben.

c) Berechnen Sie $\mathbf{E}(x.y)$ und $\mathbf{B}(x,y)$ explizit in Polarkoordinaten s,φ unter der Annahme, dass die Felder unabhängig vom Winkel φ sind, aus den Gleichungen $\nabla\cdot\mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{B} = 0$.

Hinweis: Die Richtung der Felder ist durch die Randbedingungen bei $s = a$ und $s = b$ festgelegt. Die Divergenz in Polarkoordinaten hat die Form

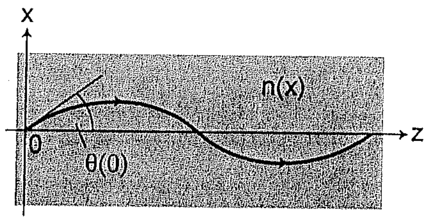
$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(sE_s) + \frac{1}{s}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\,.$$

Aufgabe 2: Lichtstrahlen in einer Glasfaser (6 Punkte)

Eine Glasfaser längs der z-Achse besitze einen Brechungsindex $n(x)$, der mit zunehmendem Abstand x vom Zentrum monoton abnimmt. Lichtstrahlen in der xz-Ebene, die durch den Ursprung mit Anfangswinkel $\theta(0)$ zur z-Achse verlaufen, bleiben dann innerhalb eines Zylinders um die z-Achse mit einem Radius $x_{\max}$, der durch die Gleichung $\bar{n} := n(x_{\max}) = n(0)\cos(\theta(0))$ bestimmt ist (s. Übungen, Aufgabe 32).

Die Trajektorie $x(z)$ eines Lichtstrahls erfüllt die Gleichung

$$\bar{n}^2\frac{d^2x}{d^2z} = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(n(x))^2\,.$$



a) Bestimmen Sie die Periode $2\Delta z$ (Δz ist der Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Kreuzungen der z-Achse) der Trajektorie für einen allgemein vorgegebenen Brechungsindex $n(x)$ aus der Analogie zur gebundenen Bewegung eines klassischen Teilchens mit Energie $E < 0$ in einem Potential $V(x)$.

b) Skizzieren Sie das Potential $V(x)$ und zeigen Sie, dass die Masse des äquivalenten Teilchens den Wer $m = -2E$ hat.

c) Welche Abhängigkeit muss der Brechungsindex $n(x)$ vom Abstand x von der Achse besitzen, damit Lichtstrahlen die unter verschiedenen Anfangswinkeln $\theta(0)$ durch den Ursprung laufen, nach jeweils einer Periode wieder zusammen bleiben?

Hinweis: Die Umkehrfunktion $x(V)$ des Potentials lässt sich bei eindimensionaler Bewegung mit Masse $m = -2E$ aus der Periodendauer $T(E)$ durch das Integral

$$x(V) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_0}^{V} dE \frac{T(E)}{\sqrt{-E(V-E)}}$$

berechnen, wobei $V_0 < 0$ der Wert des symmetrischen Potentials bei $x = 0$ ist. Dabei ist die Substitution $u = \sqrt{-E}$ nützlich.

Aufgabe 3: Dipolstrahlung eines Atomkerns (6 Punkte)

Der Grundzustand nichtdeformierter Atomkerne kann näherungsweise durch eine homogen geladene Kugel mit Radius R_0 und Gesamtladung Ze beschrieben werden. Angeregte Zustände entstehen durch Schwingungen des Flüssigkeitstropfens. Im einfachsten Fall kann dies durch einen nicht rotationsinvarianten, oszillierenden Radius

$$R(\theta, t) = R_0 \left(1 + \epsilon \cos\theta \cos(\omega t)\right)$$

beschrieben werden, mit θ als Winkel zur z-Achse.

a) Zeigen Sie, dass dieses Modell für kleine Abweichungen $\epsilon \ll 1$ von der perfekten Kugelgestalt die Inkompressibilität von Kernmaterie berücksichtigt, d.h. das Volumen des angeregten Atomkerns ist bis auf Korrekturen von der Ordnung ϵ^2 gleich dem der perfekten Kugel.

b) Berechnen Sie das zeitabhängige Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ des Atomkerns in erster Ordnung in ϵ und bestimmen Sie daraus die zeitlich gemittelte abgestrahlte Leistung $d\bar{P}$ pro Raumwinkelelement $d\Omega$ und die gesamte abgestrahlte Leistung $\bar{P}$ in allen Richtungen.