THEORETISCHE PHYSIK
Prof. Dr. W. Zwerger
ELEKTRODYNAMIK

Wintersemester 2010/2011
23. Februar 2011
KLAUSUR

Aufgabe 1: Meissner-Effekt (5 Punkte)

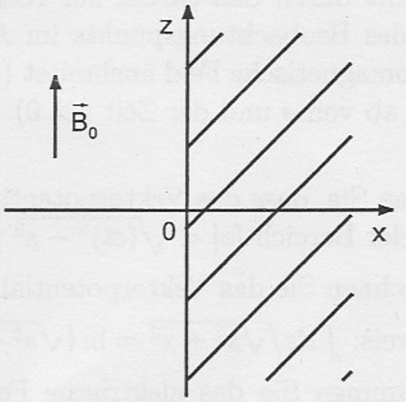
Die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ in einem Supraleiter hängt für stationäre Ströme mit dem Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ über die London-Gleichung

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = -\frac{n_s e^2}{m_e c}\mathbf{A}(\mathbf{x}) \qquad (\nabla \cdot \mathbf{A} = 0)$$

zusammen. Dabei ist n_s die superfluide Dichte der Ladungsträger, e die Elementarladung und m_e die Elektronenmasse.

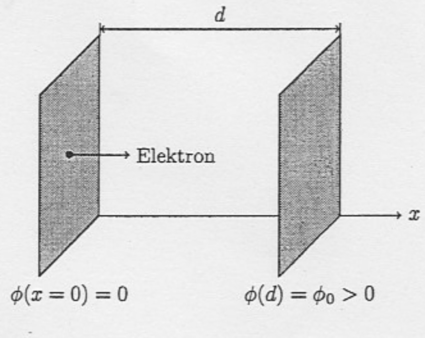
a) Leiten Sie aus dem Ampère'schen Gesetz unter Verwendung von rot rot = grad div $- \nabla^2$ eine Differentialgleichung für das statische Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ in einem Supraleiter ab.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für die z-Komponente des Magnetfeldes für einen Supraleiter im Halbraum $x > 0$, mit der Randbedingung, dass im angrenzenden Vakuum $x < 0$ ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ vorhanden sei. Bestimmen Sie die charakteristische Eindringtiefe λ des Feldes als Funktion der superfluiden Dichte n_s und berechnen Sie λ konkret für $n_s = 10^{23}\,\mathrm{cm}^{-3}$ $(e^2/m_e c^2 \simeq 10^{-13}\,\mathrm{cm})$.



Aufgabe 2: Vakuumdiode (8 Punkte)

In einer Vakuumdiode treten Elektronen aus einer heißen Kathode aus, die sich bei $x = 0$ befinde und das Potential $\phi(0) = 0$ habe (siehe Skizze). Sie werden dann auf die Anode bei $x = d$ mit dem Potential $\phi_0 > 0$ hin beschleunigt. Die Elektronen bauen im Zwischenraum zwischen den beiden Elektronen eine Raumladungsdichte $\rho(x)$ auf, die das elektrische Feld an der Kathode zum Verschwinden bringt. In diesem stationären Zustand fließt ein räumlich und zeitlich konstanter Strom mit Stromdichte $-j$, $j > 0$. Die Oberfläche der Platten sei unendlich groß, d.h. alle Grössen hängen nur von der Koordinate x ab.



a) Wie lautet die Poissongleichung für das Potential $\phi(x)$ zwischen den beiden Platten bei gegebener Raumladungsdichte $\rho(x)$?

b) Welche Geschwindigkeit $v(x)$ besitzt ein Elektron an einem beliebigen Punkt x ($0 \le x \le d$) an dem das Potential den Wert $\phi(x)$ hat, wenn es mit Anfangsgeschwindigkeit Null bei $x = 0$ startet?

c) Im stationären Zustand ist die Stromdichte $j = -\rho(x)v(x)$ unabhängig von x. Leiten Sie mit den Ergebnissen aus den beiden vorhergehenden Teilaufgaben daraus eine Differentialgleichung für $\phi(x)$ bei einem gegebenem Wert von j ab, in der $\rho(x)$ und $v(x)$ nicht mehr vorkommen.

d) Bestimmen Sie die räumliche Abhängigkeit des Potentials $\phi(x)$ explizit durch Integration der Differentialgleichung.

Hinweis: Multiplizieren Sie die Differentialgleichung mit $\phi'(x)$, um das erste Integral zu erhalten und verwenden Sie, daß bei $x = 0$ sowohl $\phi(x)$ als auch $E = -\phi'(x)$ verschwinden. Das zweite Integral ist dann elementar ausführbar.

Aufgabe 3: Retardiertes Potential (7 Punkte)

In einem unendlich langen geraden Draht entlang der z-Achse werde zur Zeit $t = 0$ ein konstanter Strom mit Stärke I_0 eingeschaltet, d.h. $\mathbf{I}(t) = I_0\theta(t) \cdot \mathbf{e}_z$, wobei $\theta(t)$ gleich Eins ist für $t > 0$ und Null für $t \leq 0$. Das resultierende Vektorpotential

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int dz \, \frac{\mathbf{I}(t_r)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

ist bestimmt durch den Strom zur retardierten Zeit $t_r = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$ und den Abstand $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \sqrt{s^2 + z^2}$ des Beobachtungspunkts im Abstand $s > 0$ vom Draht von dem Punkt z, von dem aus sich das elektromagnetische Feld ausbreitet (das Problem ist zylindersymmetrisch um die z-Achse, d.h. $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ hängt nur ab von s und der Zeit $t > 0$).

a) Zeigen Sie, dass das Vektorpotential für Abstände $s \geq ct$ identisch verschwindet und dass für $s < ct$ nur der Bereich $|z| < \sqrt{(ct)^2 - s^2}$ zum Integral beiträgt.

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\mathbf{A}$ explizit als Funktion des Abstands s und der Zeit t.

Hinweis: $\int dz/\sqrt{s^2 + z^2} = \ln\left(\sqrt{s^2 + z^2} + z\right)$.

c) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}(s, t) = -\partial_t \mathbf{A}(s, t)/c$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}(s, t) = \nabla \wedge \mathbf{A}(s, t)$ und verifizieren Sie, dass sich im Grenzfall $t \to \infty$ die bekannten statischen Felder eines (neutralen) stromdurchflossenen Drahts ergeben.

Hinweis: Für $\mathbf{A} = \mathbf{A}(s, t)$ gilt in Zylinderkoordinaten s, φ, z

$$\nabla \wedge \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial s} \cdot \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_\varphi) \cdot \mathbf{e_z}\,.$$