Klausur zur Theoretischen Physik 3: QUANTENMECHANIK

Harald Friedrich, T.U. München

Montag, 11.07.2005 **Lösungen**

1. (a) $\hat{P}_k|\psi_k\rangle = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_k\rangle = |\psi_k\rangle$, $\hat{P}_k|\psi_n\rangle = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_n\rangle = 0$ für alle $n \neq k$. Alle Zustände der orthonormalen Basis $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle \ldots$ sind Eigenzustände von $\hat{P}_k$, einer zum Eigenwert 1 (nämlich $|\psi_k\rangle$) und alle anderen zum Eigenwert 0.

$$(\hat{P}_k)^2 = |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| = |\psi_k\rangle 1 \langle\psi_k| = \hat{P}_k \;,$$

$$(\hat{P}_k)^{m-1} = \hat{P}_k \Rightarrow (\hat{P}_k)^m = \hat{P}_k(\hat{P}_k)^{m-1} = \hat{P}_k\hat{P}_k = (\hat{P}_k)^2 = \hat{P}_k \;.$$

Für ein beliebiges $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, $|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_n\rangle$, gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \hat{P}_k|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\psi_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_n|\psi_k\rangle\delta_{k,n} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k|\psi_k\rangle = |\psi\rangle \;.$$

(b) $\hat{x}\;,\quad \hat{p}\;,\quad \hat{L}_x\;,\quad \hat{S}_y\;.$

2. (a) Sei $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle, \ldots$ die Basis von Eigenzuständen von $\hat{B}$, $\hat{B}|\psi_n\rangle = \beta_n|\psi_n\rangle$. Für gegebenes n ist $\hat{B}\hat{A}|\psi_n\rangle = \hat{A}\hat{B}|\psi_n\rangle = \beta_n\hat{A}|\psi_n\rangle$, so dass auch für $|\tilde{\psi}_n\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}|\psi_n\rangle$ gilt, $\hat{B}|\tilde{\psi}_n\rangle = \beta_n|\tilde{\psi}_n\rangle$. Da der Eigenwert β_n von $\hat{B}$ nicht entartet ist, muss $|\tilde{\psi}_n\rangle$ ein Vielfaches von $|\psi_n\rangle$ sein, $|\tilde{\psi}_n\rangle = \hat{A}|\psi_n\rangle = \alpha_n|\psi_n\rangle$, mit geeignetem α_n. Alle $|\psi_n\rangle$ sind nicht nur Eigenzustände von $\hat{B}$, sondern auch von $\hat{A}$.

   (b) Für eine beliebige Wellenfunktion $\psi(x)$ gilt

$$\hat{p}\hat{x}^n\psi(x) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\psi(x)\right) = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\left(nx^{n-1}\psi(x) + x^n\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$
$$= \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}n\hat{x}^{n-1} + \hat{x}^n\hat{p}\right)\psi(x) \Rightarrow \left(\hat{p}\hat{x}^n - \hat{x}^n\hat{p}\right)\psi = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}n\hat{x}^{n-1}\psi \quad \text{für alle } \psi \;.$$

$$[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}\;. \quad [\hat{p}^2,\hat{x}] = \hat{p}[\hat{p},\hat{x}] + [\hat{p},\hat{x}]\hat{p} = 2\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\hat{p}\;;$$

$$[\hat{p}^{n-1},\hat{x}] = (n-1)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\hat{p}^{n-2} \Rightarrow [\hat{p}^n,\hat{x}] = [\hat{p}\hat{p}^{n-1},\hat{x}] = \hat{p}[\hat{p}^{n-1},\hat{x}] + [\hat{p},\hat{x}]\hat{p}^{n-1}$$
$$= (n-1+1)\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\hat{p}^{n-1}\;; \qquad \text{also ist :} \qquad [\hat{p}^n,\hat{x}] = \frac{\hbar}{\mathrm{i}}n\hat{p}^{n-1} \quad .$$

3. (a) $\langle z|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(z^m(z^*)^n/\sqrt{m!n!}\right)\langle m|n\rangle$

$$= \mathrm{e}^{-|z|^2}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^m(z^*)^n}{\sqrt{m!n!}}\delta_{m,n} = \mathrm{e}^{-|z|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(|z|^2\right)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{e}^{+|z|^2} = 1\ .$$

(b) $$\hat{b}|z\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n{-}1\rangle = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z^*)^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n{-}1\rangle$$

$$\overset{n-1\to n}{=}\mathrm{e}^{-|z|^2/2}z^*\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^*)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = z^*|z\rangle\ . \quad \langle z|\hat{b}^\dagger\hat{b}|z\rangle = z\langle z|z\rangle z^* = |z|^2\ ,$$

$$\langle z|\hat{b}\hat{b}^\dagger|z\rangle = \langle z|\hat{b}^\dagger\hat{b}+1|z\rangle = |z|^2+1\ .$$

(c) $\hat{x} = (\beta/\sqrt{2})\left(\hat{b}^\dagger+\hat{b}\right)\ ,\quad \hat{p} = (\mathrm{i}\hbar/\beta\sqrt{2})\left(\hat{b}^\dagger-\hat{b}\right)$

$$\langle z|\hat{b}^\dagger\pm\hat{b}|z\rangle = \langle z|\hat{b}^\dagger|z\rangle \pm \langle z|\hat{b}|z\rangle = \langle z|\hat{b}|z\rangle^* \pm \langle z|\hat{b}|z\rangle = z\pm z^*\ .$$

$$\langle z|\hat{x}|z\rangle = \frac{\beta}{\sqrt{2}}(z+z^*) = \sqrt{2}\,\beta\,\Re(z)\ ,\quad \langle z|\hat{p}|z\rangle = \frac{\mathrm{i}\hbar}{\beta\sqrt{2}}(z-z^*) = -\sqrt{2}\,\frac{\hbar}{\beta}\,\Im(z)\ .$$

$$\langle z|\hat{x}^2|z\rangle = \frac{\beta^2}{2}\langle z|\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger{+}\hat{b}^\dagger\hat{b}{+}\hat{b}\hat{b}^\dagger{+}\hat{b}\hat{b}|z\rangle = \frac{\beta^2}{2}\left(z^2+|z|^2+|z|^2+1+(z^*)^2\right)$$

$$= \frac{\beta^2}{2}\left(1+(z+z^*)^2\right) \Rightarrow (\Delta x)^2 = \langle z|\hat{x}^2|z\rangle - \langle z|\hat{x}|z\rangle^2 = \frac{\beta^2}{2}\ .$$

$$\langle z|\hat{p}^2|z\rangle = -\frac{\hbar^2}{2\beta^2}\langle z|\hat{b}^\dagger\hat{b}^\dagger{-}\hat{b}^\dagger\hat{b}{-}\hat{b}\hat{b}^\dagger{+}\hat{b}\hat{b}|z\rangle = -\frac{\hbar^2}{2\beta^2}\left(z^2-|z|^2-|z|^2-1+(z^*)^2\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2\beta^2}\left(1-(z-z^*)^2\right) \Rightarrow (\Delta p)^2 = \langle z|\hat{p}^2|z\rangle - \langle z|\hat{p}|z\rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\beta^2}\ .$$

Also: $\Delta x = \beta/\sqrt{2}$ und $\Delta p = \hbar/(\sqrt{2}\beta)$, unabhängig vom Wert von z.

(d) $\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-|z_0|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left((z_0^*)^n/\sqrt{n!}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega(n+1/2)t}|n\rangle$

$$= \mathrm{e}^{-|z_0|^2/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z_0^*)^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\mathrm{e}^{-|z_0|^2/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t})^*\right)^n}{\sqrt{n!}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\rangle.$$

Für $t=\frac{\pi}{2\omega}$ ist $\langle\hat{x}\rangle = \beta\sqrt{2}\,\Re(\mathrm{i}z_0) = 0$, für $t=\frac{\pi}{\omega}$ ist $\langle\hat{x}\rangle = \beta\sqrt{2}\,\Re(-z_0) = -z_0\beta\sqrt{2}$, und für $t=\frac{2\pi}{\omega}$ ist $z_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ wieder z_0 und $\langle\hat{x}\rangle = \beta\sqrt{2}\,\Re(z_0) =$

$+z_0\beta\sqrt{2}$, wie bei $t = 0$. $\langle\hat{x}\rangle$ oszilliert mit der Periode $T = 2\pi/\omega$ zwischen den äußeren Umkehrpunkten $\pm z_0\beta\sqrt{2}$.

Der klassische harmonische Oszillator oszilliert mit derselben Periode zwischen den klassischen Umkehrpunkten $\pm x_0$,

$$E = V(x_0) = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\frac{x_0}{\beta}\right)^2 \Rightarrow x_0 = \beta\sqrt{\frac{E}{\hbar\omega/2}}$$

Für $E = \langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega\left(|z_0|^2 + \frac{1}{2}\right)$ [vgl. Teilaufgabe (b)] ist $x_0 = \sqrt{2}\beta\sqrt{|z_0|^2 + \frac{1}{2}}$. Bis auf den Term $\frac{1}{2}$, der für große z_0 immer unwichtiger wird, entsprechen der maximale und minimale Wert von $\langle\hat{x}\rangle$ den klassischen Umkehrpunkten. Der kohärente Zustand ist ein Wellenpaket minimaler Unschärfe, dessen Ortserwartungswert der klassischen Zeitentwicklung folgt. (Analoges lässt sich für den Impulserwartungswert zeigen.)

4. $\hat{V}_{LS} = \frac{(\hbar\omega)^2}{2\mu c^2}\hat{\vec{L}}\cdot\hat{\vec{S}}/\hbar^2 = \frac{(\hbar\omega)^2}{4\mu c^2}\left(\hat{\vec{J}}^2 - \hat{\vec{L}}^2 - \hat{\vec{S}}^2\right)/\hbar^2$, und die Matrix hiervon in den zu gutem Gesamtdrehimpuls gekoppelten ungestörten Eigenzuständen $|n,l,j,m\rangle$ ist,

$$\langle n,l,j,m|\hat{V}_{LS}|n',l',j',m'\rangle = \frac{(\hbar\omega)^2}{4\mu c^2}\left(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right)\delta_{n,n'}\delta_{j,j'}\delta_{l,l'}\delta_{m,m'}.$$

Die Zustände $|n,l,j,m\rangle$ sind Eigenzustände von $\hat{V}_{LS}$ und damit auch vom gesamten Hamiltonoperator (keine Störungstheorie notwendig).

Hauptquantenzahl 0 (Grundzustand): $n = 0$, $l = 0$, $j = \frac{1}{2}$, $m = \pm\frac{1}{2}$, ungestörte Energie $\frac{3}{2}\hbar\omega$, Entartungsgrad: "$n_\mathrm{E} = 2$". Keine Energieverschiebung.

Wir führen den (kleinen) dimensionslosen Parameter $\alpha = \hbar\omega/(4\mu c^2)$ ein.

Hauptquantenzahl 1: ungestörte Energie, $\left(1 + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$, $n_\mathrm{E} = 6$ für das ungestörte Niveau. $\hat{V}_{LS}$ führt zu einer Aufspaltung in zwei Energieniveaus:

$$n = 0\,,\quad l = 1\,,\quad j = \frac{1}{2}\,,\quad m = \pm\frac{1}{2}\,,\quad \Delta E = -2\alpha\hbar\omega\,, n_\mathrm{E} = 2$$

$$n = 0\,,\quad l = 1\,,\quad j = \frac{3}{2}\,,\quad m = \pm\frac{3}{2}\,,\quad \pm\frac{1}{2}\,,\quad \Delta E = +1\alpha\hbar\omega\,,\quad n_\mathrm{E} = 4$$

Hauptquantenzahl 2: ungestörte Energie $\left(2+\frac{3}{2}\right)\hbar\omega$, $n_{\mathrm{E}} = 12$ für das ungestörte Niveau. $\hat{V}_{LS}$ führt zu einer Aufspaltung in drei Energieniveaus:

$$n=1\,,\quad l=0\,,\quad j=\frac{1}{2}\,,\quad m=\pm\frac{1}{2}\,,\quad \Delta E=0\,,\qquad n_{\mathrm{E}}=2$$

$$n=0\,,\quad l=2\,,\quad j=\frac{3}{2}\,,\quad m=\pm\frac{3}{2}\,,\quad \pm\frac{1}{2}\,,\quad \Delta E=-3\alpha\hbar\omega\,,\quad n_{\mathrm{E}}=4$$

$$n=0\,,\quad l=2\,,\quad j=\frac{5}{2}\,,\quad m=\pm\frac{5}{2}\,,\quad \pm\frac{3}{2}\,,\quad \pm\frac{1}{2}\,,\quad \Delta E=+2\alpha\hbar\omega\,,\quad n_{\mathrm{E}}=6$$