



Diplomvorprüfung Experimentalphysik 4

Wintersemester 2004/2005

1. März 2005

13:00 - 14:30 PH HS1

Hinweis: Um ein sehr gutes Ergebnis zu erzielen, müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden. Bitte vergessen Sie nicht, jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.

Aufgabe 1 LS-Kopplung im Mehrelektronensystem

- a. Notieren Sie die vollständigen Elektronenkonfigurationen für Kohlenstoff $^{12}_6\text{C}$ und Stickstoff $^{14}_7\text{N}$ im Grundzustand. (1 Punkt)
- b. Welche Spin-Konfigurationen sind für Kohlenstoff $^{12}_6\text{C}$ und Stickstoff $^{14}_7\text{N}$ möglich, und wieviele Niveaus gibt jeweils es aufgrund der Feinstrukturaufspaltung? (2 Punkte)
- c. Begründen sie mit Hilfe der Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge, ob folgende Übergänge im Kohlenstoff $^{12}_6\text{C}$ möglich sind:

$$3^1\text{F}_3 \rightarrow 2^1\text{D}_2$$

$$2^1\text{S}_0 \rightarrow 2^3\text{P}_1$$

$$2^1\text{S}_0 \rightarrow 2^1\text{D}_2$$

(3 Punkte)

- d. Nennen Sie den Grundzustand für Kohlenstoff $^{12}_6\text{C}$, und begründen Sie dies anhand der Hundschen Regeln. (3 Punkte)
- e. Wie lautet die Z-Abhängigkeit der LS-Kopplung, und was passiert für schwere Kerne? (1 Punkt)

Aufgabe 2 : Positronium

Analog zum Wasserstoffatom gibt es ein durch die Coulombanziehung gebundenes System aus einem Elektron (e^-) und einem Positron (e^+), dem Antiteilchen des Elektrons: Positronium.

- a. Berechnen Sie, ausgehend von den Bohrschen Postulaten, den Bohr-Radius für den Grundzustand des Positroniums. Vergleichen Sie die Größe von Positronium mit der Größe eines Wasserstoffatoms. (4 Punkte)
- b. Wie groß ist in diesem Modell die Ionisierungsenergie von Positronium im Vergleich zur Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)
- c. Betrachten Sie Positronium als ein gebundenes System zweier spinloser punktförmiger Teilchen mit Massen m_1 und m_2 , Ladungen q_1 und q_2 und Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Stellen Sie den zugehörigen Hamilton-Operator auf. (1 Punkt)

d. Führen Sie Relativ- und Schwerpunktkoordinaten

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{bzw.} \quad \vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

ein. Wie lautet der Hamilton-Operator in diesen Koordinaten und welchen Ansatz verwenden Sie zur Lösung der entsprechenden zeitunabhängigen Schrödingergleichung?

(2 Punkte)

e. Leiten Sie mit Hilfe dieses Ansatzes die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die Relativbewegung ab.

(2 Punkte)

f. Skizzieren Sie in Stichpunkten, wie aus dieser Gleichung die eindimensionale Schrödingergleichung für den Betrag des Abstandes der beiden Teilchen $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ hergeleitet werden kann. Aus welchen Anteilen setzt sich das in dieser Gleichung vorkommende effektive Potential zusammen? Skizzieren Sie die r -Abhängigkeit dieser Anteile und des resultierenden effektiven Potentials für $l > 0$.

(4 Punkte)

g. Was erwarten Sie bezüglich der relativen Größe der Aufspaltung durch die Spin-Bahn- bzw. Spin-Spin-Kopplung (Fein- bzw. Hyperfeinstrukturaufspaltung im H-Atom) im Vergleich zum Wasserstoffatom? In wieviele Niveaus spaltet der Zustand mit $n = 0$, $l = 0$ auf? Geben Sie die spektroskopische Bezeichnung dieser Niveaus an.

(3 Punkte)

Aufgabe 3 Streuprozesse und Ununterscheidbarkeit

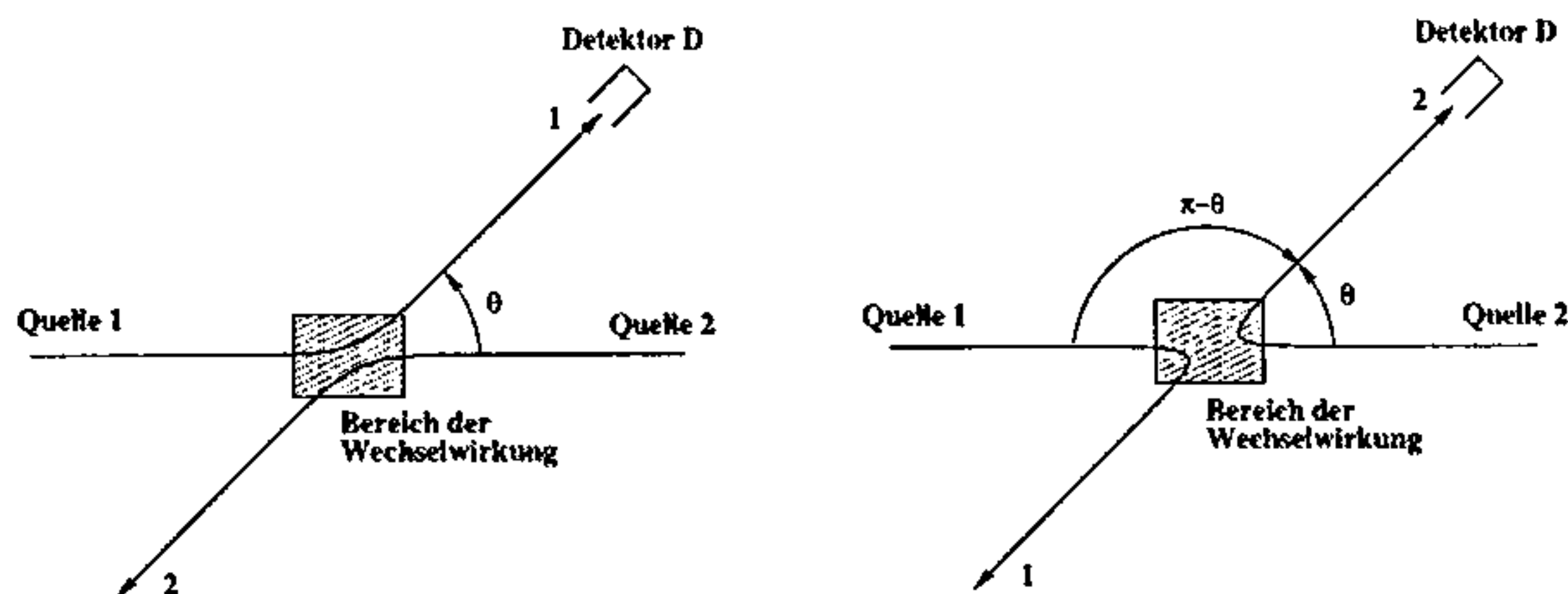


Abbildung 1: Streuprozess im Schwerpunktsystem

Bei der Rutherford-Streuung werden α -Teilchen an einer Goldfolie gestreut und unter verschiedenen Streuwinkeln θ nachgewiesen. Der Prozess sei hier vereinfacht als elastische Streuung an punktförmigen Goldkernen betrachtet.

a. Der Wirkungsquerschnitt für Streuung unter Rückwärtswinkeln, $\theta \in [\pi/2, \pi]$, betrage $\sigma_{\text{rück}} = 17.1 \text{ barn}$ ($1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$). Wie groß ist die zugehörige Reaktionsrate, wenn 10.000 α -Teilchen pro Sekunde auf eine $1 \mu\text{m}$ dünne Goldfolie treffen? Nehmen Sie an, dass Mehrfachstreuung vernachlässigbar ist. Die Dichte von Gold beträgt 19.3 g/cm^3 und die Masse eines Goldatoms $3.3 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$.

(3 Punkte)

b. Wie hängt der Wirkungsquerschnitt σ , abgesehen von Vorfaktoren, mit der Streuamplitude f zusammen?

(1 Punkt)

c. Wie lautet die Streuwinkel-Abhängigkeit von f speziell bei Rutherford-Streuung? Skizzieren Sie den Verlauf des differentiellen Wirkungsquerschnittes $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$.

(2 Punkte)

- d. Für die Kollision von α -Teilchen im Schwerpunktsystem (s. Abb. 1) gelte dieselbe Winkelabhängigkeit der Streuamplitude. Berechnen Sie die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts. Beachten Sie, dass α -Teilchen Bosonen mit $S=0$ sind. (3 Punkte)

Aufgabe 4 Hyperfeinaufspaltung und anomaler Zeeman-Effekt

Ein Wasserstoffatom befinde sich in einem externen Magnetfeld \vec{B} .

- Zeichnen Sie das Energieniveauschema für die Hyperfeinaufspaltung der Energieniveaus $2p_{3/2}$ und $2s_{1/2}$ für verschwindendes externes Feld $|\vec{B}| = 0$. Beschriften Sie die Niveaus eindeutig mit den relevanten Quantenzahlen. (3 Punkte)
- Zeichnen Sie ein weiteres Energieniveauschema, das die Aufspaltung derselben Energieniveaus für den Fall eines sehr schwachen externen Magnetfelds ($\vec{\mu}_F \cdot \vec{B} < \text{Wechselwirkungsenergie der Hyperfeinaufspaltung}$) zeigt und beschriften Sie die Niveaus eindeutig mit den relevanten Quantenzahlen. (3 Punkte)
- Zeichnen Sie sowohl für den Fall $|\vec{B}| = 0$ als auch für $|\vec{B}| > 0$ alle erlaubten elektrischen Dipolübergänge für die Absorption ein. (2 Punkte)
- Was ändert sich im Energieniveauschema, wenn das Magnetfeld so vergrößert wird, dass $\vec{\mu}_F \cdot \vec{B}$ größer ist Wechselwirkungsenergie der Hyperfeinaufspaltung? Nehmen Sie dabei an, daß \vec{B} dabei hinreichend klein bleibt, sodaß die Quantenzahl j des Gesamtdrehimpulses des Elektrons eine gute Quantenzahl ist. (2 Punkte)

Aufgabe 5 Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

- a. Führen Sie die Maxwell'sche Verteilung für die Teilchenanzahl pro Geschwindigkeitsintervall,

$$n(v, T)dv = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_B T} dv$$

in eine Verteilung $n(E, T)dE$ über.

- Berechnen Sie die mittlere Energie $\langle E \rangle$ (Integraltafel im Anhang). (4 Punkte)
- Welcher Anteil der Teilchen hat eine Energie, die nicht mehr als $\pm 1\%$ vom Energiemittelwert abweicht? (3 Punkte)

(Hinweis: In diesem Bereich kann $n(E, T)$ als konstant angenommen werden.)

Aufgabe 6 Molekülbindung

Für die Bindung zweier Elektronen an zwei Kerne A und B lautet der Ansatz für die symmetrische Wellenfunktion in Molekülorbital-Näherung

$$\Psi^{\text{symm}}(r_1, r_2) = c [\Phi_A(r_1) + \Phi_B(r_1)] \cdot [\Phi_A(r_2) + \Phi_B(r_2)].$$

- Zerlegen Sie diese Wellenfunktion in einen Anteil ionischer und einen Anteil kovalenter Bindung. (4 Punkte)
- Wie ist die relative Spinstellung der Elektronen in diesem Fall? Welches Prinzip liegt dem zugrunde? (2 Punkte)

Handwritten notes:

$$m \frac{3}{2} = m \sqrt{m}$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \theta$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$$

$$F = J + 1$$

$$J = J + 1$$

Aufgabe 7 Rotationsanregungen

Im Kochsalzmolekül $^{23}\text{Na}^{35}\text{Cl}$ haben die Atome einen Gleichgewichtsabstand von $r_0 = 5.6 \text{ \AA}$.

- Wie groß ist das Trägheitsmoment I des Moleküls? (1 Punkt)
- Wie groß sind die Energien der niedrigsten Rotationszustände? (2 Punkte)
- Die lineare Rückstellkraft des harmonischen Potenzials zwischen den Kernen ist gegeben durch die Konstante $c = 3.78 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$. Wie groß sind die Energieabstände zwischen den Schwingungszuständen? (2 Punkte)

Mathematische Formeln

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{r^2 \hbar^2}$$

(Winkelanteil geschrieben mit quantenmechanischem Drehimpulsoperator \tilde{L})

Integrale:

$$\int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$$

Trigonometrische Funktionen:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Physikalische Konstanten

Größe	Symbol, Gleichung	Wert
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$2.9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Plancksche Konstante	h	$6.6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Red. Plancksche Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$1.0546 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Elektr. Elementarladung	e	$1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ VsA}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ AsV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Avogadro-Konstante	N_A oder L	$6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	σ	$5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$
Wiensche Verschiebungskonstante	b	$2.8978 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$
Elektronruhemasse	m_e	$9.1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0.5110 \text{ MeV}/c^2$
Neutronruhemasse	m_n	$1.6749 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 939.57 \text{ MeV}/c^2$
Atomare Masseneinheit	u	$1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$I = \frac{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2}{2} \quad \text{für } r_1 = r_2 = r_0$$

$$I = \mu r_0^2$$

$$\frac{m_1 r_1^2}{2}$$