....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. D. Castrigiano

18. Februar 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Teilaufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = 1 + \cos t + i \sin t.$$

Berechnen Sie (mit Begründung) $\int_\gamma f(z)dz$ für

(a) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$, (b) $f(z) = \cos z$, (c) $f(z) = \frac{z^7}{z^2-1}$.

LÖSUNG:

(a) $\dot\gamma(t) = -\sin t + i\cos t$, $f(\gamma(t)) = \sin t$. Nach Definition des komplexen Wegintegrals ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\dot\gamma(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin t(-\sin t + i\cos t)dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t\, dt = -\pi.$$

[3]

(b) Die Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt $\int_\gamma f(z)dz = 0$. **[2]**

(c) $f(z) = \frac{g(z)}{z-1}$ mit $g(z) = \frac{z^7}{z+1}$ holomorph auf einer Umgebung der Kreisscheibe. Nach der Cauchyschen Integralformel ist

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-1}dz = 2\pi i g(1) = \pi i,$$

oder mit Residuensatz. **[3]**

2. **Residuen** **[12 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{z}{(e^z-1)^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass f außer bei $2i\pi\mathbb{Z}$ keine weiteren Pole besitzt.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Ordnung aller Pole von f.

(c) Berechnen Sie das Residuum von f bei $z = 0$.

(d) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

LÖSUNG:

(a) Zähler und Nenner sind ganze Funktionen. Der Nenner ist 0, genau dann, wenn $1 = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Daraus folgt $\sin y = 0$, bzw., $y \in \pi\mathbb{Z}$. Damit der Realteil positiv ist, muss $y \in 2\pi\mathbb{Z}$ gelten, also $\cos y = 1$ und damit $x = 0$. **[3]**

(b) $e^z - 1 = z + \frac{1}{2}z^2 + \cdots$ besitzt bei $z = 0$ eine einfache Nullstelle. Somit hat $(e^z - 1)^2$ eine doppelte Nullstelle bei $z = 0$ und wegen der Periodizität auch bei $2i\pi\mathbb{Z}$. Da der Zähler nur bei $z = 0$ eine einfache Nullstelle hat, ergibt sich für f ein einfacher Pol bei $z = 0$ und Pole zweiter Ordnung bei $z \in 2i\pi\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. **[4]**

(c) Da bei $z = 0$ ein einfacher Pol vorliegt, ist

$$\operatorname{Res}_0(f) = \lim_{z\to 0} z \frac{z}{(e^z - 1)^2} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z}\right)^2} = 1,$$

da $\frac{d}{dz}(e^z - 1)|_{z=0} = 1$. **[3]**

(d) Die nächstliegenden Pole von f sind bei $\pm 2\pi i$. Somit ist der Konvergenzradius des Nebenteils von f bei 0 gleich 2π. **[2]**

3. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx$ für $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

LÖSUNG:

Der rationale Anteil des Integranden, $\frac{1}{z+i\eta}$ geht für große $|z|$ gegen 0. Die einzige einfache Nullstelle liegt bei $-i\eta \notin \mathbb{R}$. Als Integrationsweg wählen wir den Rand des unteren Halbkreises, dessen Radius gegen ∞ strebt, denn dort ist die Exponentialfunktion klein. **[3]**

Nach Kap. 24 (25) gilt dann für $\eta > 0$ liegt der Pol innerhalb des Integrationsweges, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, somit **[3]**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx = -2\pi i \operatorname{Res}_{-i\eta}\left(\frac{e^{-ix}}{x+i\eta}\right) = -2\pi i e^{-\eta}.$$

Für $\eta < 0$ ist die Funktion holomorph innerhalb des Integrationswegs, also **[2]**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx = 0.$$

4. **σ-Subadditivität von Maßen** **[6 Punkte]**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für die Mengen $A_n, B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gelte $\mu(B_n \setminus A_n) = c_n$.
Man zeige für $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, dass gilt

$$\mu(B \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}\mu(B \setminus A) \quad &= \quad \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus A\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus A)\right) \overset{A_n \subset A}{\leq} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus A_n)\right) \\ &\overset{\sigma\text{-Subadd.}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.\end{aligned}$$

[0,2,2,2,0]

5. **Bildmaß und Maß mit Dichte** **[8 Punkte]**
Gegeben ist die Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq 0$ und $h(0) = -\infty$. $\mu = h(\lambda^2)$ sei das zugehörige Bildmass.

(a) Warum ist h messbar?

(b) Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

(c) Bestimmen Sie eine Dichte ρ, so dass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

LÖSUNG:

(a) $h^{-1}([-\infty, a]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(x^2 + y^2) \leq a\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq e^a\} = \tilde{U}_{e^{a/2}}(0)$. Diese kompakten Kreisscheiben sind $\mathcal{B}^2$-messbar für alle $a \in \mathbb{Q}$, also ist h messbar. **[2]**

(b) Für kompakte Intervalle $[a, b]$, $a \leq b$ gilt

$$\begin{aligned}\mu([a,b]) &= \lambda^2(h^{-1}([a,b])) = \lambda^2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \ln(x^2+y^2) \leq b\}) \\ &= \lambda^2(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : e^a \leq x^2+y^2 \leq e^b\}) = \lambda^2(\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \in [e^{a/2}, e^{b/2}]\}) \\ &= \pi(e^b - e^a).\end{aligned}$$

[3]

(c) Für die Dichte $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss gelten

$$\pi(e^b - e^a) = \mu([a,b]) = (\rho\lambda^1)([a,b]) = \int_{[a,b]} \rho \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_a^b \rho(x)dx$$

für alle $a < b$. Ableiten nach b ergibt $\pi e^b = \rho(b)$. Die Dichte $\rho(x) = \pi e^x$ erfüllt also die Gleichung $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **[3]**

6. **Lebesgue-Integrierbarkeit** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \frac{e^{-ix}}{x+i\eta}$, $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Wie ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx$ definiert?

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx := \lim_{a \to -\infty} \lim_{b \to \infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx}$$

LÖSUNG:

(a) f ist nicht Lebesgue-integrierbar, da $|f(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+\eta^2}}$, und damit **[2]**

$$\int |f| \mathrm{d}\lambda^1 \geq 2 \int\limits_{|\eta|}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2x^2}} dx = \infty.$$

[2]

Die Ungleichung gilt, da $\frac{1}{\sqrt{x^2+\eta^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{x^2+x^2}}$ für $|x| \geq |\eta|$. **[2]**

(b) Das Integral ist als uneigentliches Regelintegral definiert: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx := \lim\limits_{a \to -\infty} \lim\limits_{b \to \infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx$. **[2]**

7. **Fluss durch eine Oberfläche** **[20 Punkte]**

Gegeben Sie die Menge $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ und das Vektorfeld $F(x,y,z) = (-y, x, yz)$ mit $G(x,y,z) = \operatorname{rot} F(x,y,z) = (z, 0, 2)$.

(a) Bestimmen Sie den Fluss $g_{\partial B}$ von G durch den Rand von B.

(b) Bestimmen Sie den Fluss g_S von G durch das Flächenstück

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = z, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4\}$$

mit von der z-Achse wegzeigender Flächennormale.

(c) Berechnen Sie $f_\gamma := \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$.

$$\boxed{f_\gamma = \pi}$$

(d) Geben Sie den Fluss g_{K_1} von G durch das Flächenstück

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z, x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

an, wobei die Flächennormale vom Ursprung wegzeigt. Hinweis: Spur γ = Rand K_1.

$$\boxed{g_{K_1} = f_\gamma = \pi}$$

(e) Geben Sie den Fluss g_{K_2} von G durch das Flächenstück

$$K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z, x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

an, wobei die Flächennormale vom Ursprung wegzeigt.

$$\boxed{g_{K_2} = g_{K_1} - g_S = 4\pi}$$

Lösung:

(a) Nach dem Satz von Gauss ist $\int_{\partial B} \operatorname{rot} F \cdot d\mathcal{O} = \int_B \operatorname{div} \operatorname{rot} F \, \mathrm{d}\lambda^3 = 0$, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$. **[3]**

(b) Eine Parametrisierung von S ist $\Phi(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$ mit $r \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$, $\phi = [0, 2\pi]$. **[2]**

Es ist

$$\partial_r \Phi(r,\phi) \times \partial_\phi \Phi(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\phi \\ r\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\cos\phi \\ -r\sin\phi \\ r \end{pmatrix},$$

[2]

also ist die Flächennormale nach innen gerichtet. Damit **[1]**

$$g_S = -\int_S G \cdot \mathrm{d}\mathcal{O} = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\cos\phi \\ -r\sin\phi \\ r \end{pmatrix} d\phi dr = -\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2r - r^2\cos\phi) d\phi dr$$

$$= -2\pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} 2r\, dr = -2\pi \left[r^2\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}} = 2\pi(\tfrac{1}{2} - 2) = -3\pi.$$

[5]

(c) $\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ \frac{1}{2}\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(\sin^2 t + \cos^2 t) = \pi.$ **[3]**

(d) γ ist eine Parametrisierung des Randes von K_1 mit mathematischer Durchlaufrichtung bezüglich der Flächennormalen. Nach dem Satz von Stokes ist $g_{K_1} = \int_{K_1} G \cdot \mathrm{d}\mathcal{O} = \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x} = f_\gamma = \pi$. **[2]**

(e) Für die Oberflächenintegrale gilt unter Berücksichtigung der Orientierung $g_{\partial B} = -g_{K_1} + g_S + g_{K_2}$. **[2]**

8. **Hilbertraum** **[10 Punkte]**

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Hilbertraum H, d.h. $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine orthogonale Folge (x_n) an mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$.

(d) Gilt (a) in jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt?

☒ Ja ☐ Nein

(e) Gilt (b) in jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt?

☒ Ja ☐ Nein

LÖSUNG:

(a) Sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Für festes $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\langle x_m, x \rangle = \langle x_m, \lim_{n\to\infty} x_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_m, x_n \rangle = 0,$$

[2]

da das Skalarprodukt stetig und die Folge für $n > m$ identisch 0 ist. Somit ist

$$\langle x, x \rangle = \langle \lim_{m\to\infty} x_m, x \rangle = 0,$$

also $x = 0$. **[2]**

(b) Nach Pythagoras ist für $n \neq m$

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 = 2.$$

(x_n) ist also kein Cauchyfolge und damit auch nicht konvergent. **[2]**

(c) $e^{(k)} \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $e_j^{(k)} = \delta_{jk}$ ist ONB von ℓ^2. $x_n = \frac{1}{n} e^{(n)}$ ist offenbar Nullfolge, da $\|x_n\| = \frac{1}{n} \to 0$. **[2]**

(d) Im Beweis von (a) wurde die Vollständigkeit nirgends benutzt, also ja. **[1]**

(e) Im Beweis von (b) wurde die Vollständigkeit nirgends benutzt, also ja. **[1]**