# VORDIPLOMS-KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK I

A. Buras, B. Borasoy, T. Hemmert Sommersemester 2003

**Schreiben Sie bitte Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes von Ihnen verwendete Blatt Papier.**

**Bitte beginnen Sie für jede der 11 Aufgaben eine neue Seite.**

**Es stehen 90 Minuten zur Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung.**

**26 Punkte genügen bereits zum Bestehen der Klausur. (Auch um mit 1,0 zu bestehen, müssen nicht alle Aufgaben bearbeitet werden.)**

**Wir wünschen viel Erfolg !**

**Aufgabe 1.** (2 P)

Was sind die Energieeigenwerte des eindimensionalen Hamiltonoperators mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases} ? \qquad \text{Begründung?}$$

**Aufgabe 2. Kommutatoren** (5 P)

Berechnen Sie die Kommutatoren $[x, p_x]$ (1 P) und $[L_i, L_j]$ (4 P) . (Letzteres, indem Sie den $\epsilon_{ikl}$-Tensor benutzen.)

**Aufgabe 3. Kopplung zweier Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen** (4 P)

Gegeben sei ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen. Geben Sie mit Begründung die normierten Eigenzustände zum Gesamtspin 0 und 1 an.

**Aufgabe 4.** (3 P)

Gegeben sei ein Operator $A$ mit $[A, L_x] = 0 = [A, L_y]$. Berechnen Sie $[A, L_z]$.

**Aufgabe 5.** (4 P)

Sei $\psi_{lm}$ Eigenzustand von $\boldsymbol{L}^2$ und $L_z$ mit $\boldsymbol{L}^2\psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\psi_{lm}$ und $L_z\psi_{lm} = \hbar m\psi_{lm}$. Nehmen Sie an, daß $L_\pm\psi_{lm} = a_\pm\psi_{l,m\pm1}$ mit $L_\pm \equiv L_x \pm iL_y$. Berechnen Sie $|a_\pm|$.

**Aufgabe 6.** (4 P)

Es seien drei Operatoren $\sigma_i$, $i = 1, 2, 3$, gegeben, die den Kommutatorrelationen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ genügen. Weiterhin gelte $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = id$, $id$ = Einheitsoperator. Zeigen Sie, daß für den Antikommutator gilt: $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\, id$.
(Benutzen Sie dafür nicht eine explizite Form der Operatoren $\sigma_i$.)

**Aufgabe 7. Paritätsoperator** (2 P)

Was sind die möglichen Eigenwerte des Paritätsoperator? Begründung?

**Aufgabe 8. Kugelsymmetrische Potentiale** (5 P)

Gegeben sei der dreidimensionale Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse $m$ und mit kugelsymmetrischen Potentialen $V(|\boldsymbol{r}|)$ und $W(|\boldsymbol{r}|)$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(|\boldsymbol{r}|) + W(|\boldsymbol{r}|)\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$$

mit $\mathbf{L}$: Bahndrehimpuls, $\mathbf{S}$: Spin des Teilchens. Zeigen Sie, daß die Operatoren $H, \mathbf{J}^2, J_z$ ein gemeinsames System von Eigenfunktionen haben, wobei $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ der Gesamtdrehimpuls des Teilchens ist.

**Aufgabe 9. Potentialkasten** (11 P)

Gegeben sei ein Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden und Breite $L$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq -L/2 \\ V_0 < 0 & \text{für} \quad -L/2 < x < L/2 \\ \infty & \text{für} \quad L/2 \leq x \end{cases} .$$

a) Berechnen Sie die Lösungen (ohne Normierungsfaktor) und Energieeigenwerte der stationären Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse $m$. (4 P)

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Teilchen in dem Zustand

$$\psi(x) = \begin{cases} N\left[2\sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{L}x\right)\right] & \text{für} \quad -L/2 < x < L/2 \\ 0 & \text{für} \quad L/2 \leq |x| \end{cases}$$

Berechnen Sie $N$. (3 P)

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert eine Paritätsmessung für den Zustand $\psi$ zum Zeitpunkt $t = 0$ die Parität $+1$? (2 P)

d) Wie wahrscheinlich ist es, daß eine anschließende zweite Paritätsmessung zum Zeitpunkt $T > 0$ wieder die Parität $+1$ ergibt? (2 P)

**Aufgabe 10.: Harmonischer Oszillator mit Störterm** (8 P)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit einem zu $\alpha$ proportionalen **linearen (!)** Störterm.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 + \alpha \frac{1}{2} m\,\omega^2 x \qquad (1)$$

Die Auf- und Absteigeoperatoren, $a^\dagger, a$, sind gegeben durch

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\,\hbar}} \left( x + \frac{i\,p}{m\omega} \right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\,\hbar}} \left( x - \frac{i\,p}{m\omega} \right).$$

a) Betrachten Sie (1) als gestörten harmonischen Oszillator mit Störparamter $\alpha$.

   i) Berechnen Sie die Energiekorrekturen 1. Ordnung. (2 P)

   ii) Berechnen Sie die Zustandsvektoren $|n\rangle^{(1)}$ 1. Ordnung. (3 P)
   (Hinweis: $a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$ , $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$)

b) Geben Sie nun die exakten Energieeigenwerte von (1) an. (3 P)

**Aufgabe 11.: Helium Atom** (4 P)

a) Wie lautet der Hamilton Operator für ein neutrales Helium Atom ? Erläutern Sie kurz die Bedeutung der auftretenden Terme. (Hinweis: Sie können zur Vereinfachung die Spin-Bahn Wechselwirkung und die Bewegung des Kerns vernachlässigen.) (2P)

b) Beschreiben Sie kurz die 3 niegrigsten Energiezustände von a) und begründen Sie deren Reihenfolge. (2P)

****** Es gibt insgesamt 52 Punkte. ******