Klausur in Experimentalphysik 4

Prof. Dr. S. Schönert

Sommersemester 2016

25.7.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Vertauschungsrelationen der Komponenten des 3D Ortsoperators $\mathbf{r}$ und der Komponenten des 3D Impulsoperators $\mathbf{p}$ in kartesischen Koordinaten, d. h. $[x, x]$, $[x, p_x]$, $[p_x, p_x]$ usw..

(b) Mit welcher Genauigkeit kann man jeweils zwei der oben genannten Größen gleichzeitg messen? Begründen Sie kurz.

Lösung

(a) Für die Ortskomponenten untereinander haben wir $[x, y] = xy - yx = 0$ etc., also allgemein

$$[r_i, r_j] = 0\,. \tag{1}$$

Für Impulskomponenten untereinander

$$[p_x, p_y] = -\hbar^2 \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \right) = 0 \tag{2}$$

etc. wegen Vertauschbarkeit der Ableitungen. Insgesamt:

$$[p_i, p_j] = 0\,. \tag{3}$$

Für die gemischten Terme:

$$[r_i, p_j] = -i\hbar \left(r_i \frac{\partial}{\partial r_j} - \frac{\partial}{\partial r_j} r_i \right) = -i\hbar \left(r_i \frac{\partial}{\partial r_j} - r_i \frac{\partial}{\partial r_j} - \delta_{ij} \right) = i\hbar\delta_{ij}\,. \tag{4}$$

[**3**]

(b) Für die gemischten Terme haben wir in Analogie zum eindimensionalen Fall $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$:

$$\Delta r_i \Delta p_j \geq \delta_{ij} \frac{\hbar}{2}\,. \tag{5}$$

In allen anderen Fällen verschwinden die Kommutatoren immer, d.h. beide Größen können scharf gemessen werden.

[**2**]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein auf einer Seite offener Potentialtopf, in welchem sich ein Teilchen mit Energie E befindet:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & : x < 0 \\ 0 & : 0 \leq x < a \\ V_0 & : x \geq a \end{cases}$$

mit $V_0 > 0$ und $0 < E < V_0$.

(a) Welches sind die Rand- und Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion?

(b) Machen Sie die Ansätze für die Wellenfunktionen in den Bereichen $x < a$ und $x > a$. Denken Sie an die Normierbarkeit.

(c) Stellen Sie die Gleichungen auf, mit denen sich die Konstanten Ihrer Ansätze festlegen lassen.

Lösung:

(a) Randbedingung: $\Psi(0) = 0$

Anschlussbedingungen: $\Psi(a)$ und $\Psi'(a)$ müssen stetig sein.

[1,5]

(b) Die Ansätze für die Wellenfunktionen in den drei Bereichen sind:

$$\begin{cases} \Psi_1(x) = 0 & : x < 0 \\ \Psi_2(x) = A \exp^{ikx} + B \exp^{-ikx} & : 0 < x \leq a \\ \Psi_3(x) = C \exp^{-\kappa x} & : x \geq a \end{cases}$$

mit $\kappa > 0$, da im Bereich 3 nur eine exponentiell abfallende Funktion erlaubt ist.

[1,5]

(c)

$$0 = A + B \tag{6}$$
$$A \exp^{ika} + B \exp^{-ika} = C \exp^{-\kappa a} \tag{7}$$
$$Aik \exp^{ika} - Bik \exp^{-ika} = -C\kappa \exp^{-\kappa a} \tag{8}$$
$$\tag{9}$$

[1]

Außerdem müsste man die Schrödingergleichung aufstellen um E und k zu bestimmen.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) = E\Psi(x) \tag{10}$$

in Bereich 2 und

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V_0\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{11}$$

in Bereich 3.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Die Energien E_n des Wasserstoffatoms hängen nur von den Hauptquantenzahlen n ab. Sie ergeben sich aus den Randbedingungen des Radialanteils, der wiederum über das effektive Potential V_{eff} bestimmt wird:

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

mit $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. Obwohl dieses Potential von der Drehimpulsquantenzahl l abhängt, gilt dies nicht für die bezüglich l entarteten Energien E_n. Vergleichen Sie E_n und V_{eff} für die erlaubten l.

Hinweis: Berechnen sie dazu die Position r_{min} und den Wert des Minimums V_{eff} des effektiven Potentials in Abhängigkeit von l. Vergleichen Sie das Potential $V_{eff}(r_{min})$ für die Zustände mit maximalem Drehimpuls $l = n-1$ mit der Energie E_n.

Lösung

$$V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0 r} + \frac{l(l+1)}{r^2}\right)$$

$$\partial_r V_{eff}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(+\frac{2}{a_0 r^2} - 2\frac{l(l+1)}{r^3}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{a_0 r^2} - \frac{2l(l+1)}{r^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a_0} - \frac{l(l+1)}{r} = 0 \Rightarrow r_{min} = a_0 l(l+1)$$

[1,5]

$$V_{eff}(r_{min}) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{2}{a_0^2 l(l+1)} + \frac{l(l+1)}{(a_0 l(l+1))^2}\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{1}{a_0^2 l(l+1)}\right) = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2 l(l+1)}$$

für $l = n-1$:

$$V_{eff}(r_{min}) = -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2(n-1)n} < -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2 n^2} = E_n \Rightarrow V_{eff}(r_{min}) < E_n$$

[1,5]

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Die Wellenlängen der beiden Natrium-D-Linien betragen 589, 593nm für die D1-Linie und 588, 996nm für die D2-Linie. Das entspricht den Übergängen zwischen den Niveaus $3^2P_{1/2}$ und $3^2S_{1/2}$ (D1-Linie), sowie zwischen $3^2P_{3/2}$ und $3^2S_{1/2}$ (D2-Linie).

(a) Warum ist in Mehrelektronenatomen die l-Entartung der Zustände aufgehoben?

(b) In einem schwachen Magnetfeld spalten die Niveaus aufgrund des anomalen Zeeman-Effekts auf. Berechnen Sie den jeweiligen Landé-Faktor, skizzieren Sie die Aufspaltung und beschriften Sie die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl (die Skizze muss nicht maßstabsgetreu sein, aber etwaige Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Größe der Aufspaltung sollten qualitativ erkennbar sein).

(c) Bei welchem minimalen Magnetfeld würden sich die Zeeman-aufgespaltenen Komponenten der P-Zustände überschneiden, vorausgesetzt, dass die Spin-Bahn-Kopplung erhalten bliebe?

(d) Skizzieren Sie nun die Aufspaltung der Zustände in einem Magnetfeld, das so stark ist, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgebrochen ist und beschriften Sie wiederum die einzelnen Unterniveaus mit der entsprechenden Quantenzahl (ebenfalls nicht maßstabsgetreu, aber wieder sollten Unterschiede/Gemeinsamkeiten in der Aufspaltung qualitativ erkennbar sein).

(e) Zeichnen Sie in das Schema aus der zweiten und vierten Teilaufgabe die möglichen optischen Dipolübergänge ein und charakterisieren Sie die Linien anhand der Polarisation der emittierten Strahlung. Wie viele unterschiedliche Linien erhält man im Spektrum im schwachen/starken Magnetfeld?

Lösung

(a) Die l-Entartung ist eine Besonderheit des Coulombpotenzials und gilt somit für $V(r) \propto 1/r$. In Mehrelektronenatomen befindet sich das jeweilige Elektron in einem effektiven Potenzial, das aus der Wechselwirkung mit den anderen Elektronen und dem Kern resultiert. Sehr weit entfernt vom Kern gilt für z.B. Alkaliatome $V(r) \propto 1/r$, sehr nahe am Kern ist hingegen $V(r) \propto Z/r$. Das mittlere, effektive Potenzial ist dann kein Coulombpotenzial mehr (vgl. Abbildung 1) und die Unterschalen besitzen nicht mehr die gleiche Energie.

[**1**]

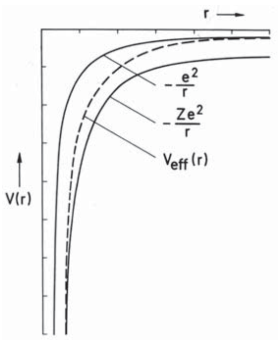


Abbildung 1: Effektives Potenzial im Mehrelektronenatom.

(b) Abbildung 2 zeigt die Aufspaltung der Zustände im schwachen Magnetfeld. Man beachte

- Die Aufspaltung ist für ein gegebenes Ausgangsniveau äquidistant.
- Die Größe der Aufspaltung hängt vom Landé-Faktor ab und beträgt $\Delta E = m_j g_j \mu_B B$

Zustand	g_j
$3^2\mathrm{S}_{1/2}$	2
$3^2\mathrm{P}_{1/2}$	2/3
$3^2\mathrm{P}_{3/2}$	4/3

[1,5]

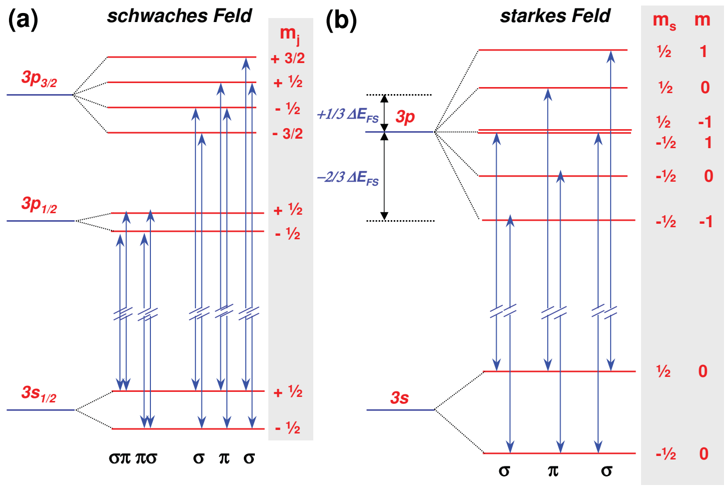


Abbildung 2: Abbildung (a) zeigt die Aufspaltung der Zustände von Natrium im schwachen Magnetfeld (anomaler Zeeman-Effekt). Abbildung (b) zeigt die Aufspaltung im starken Magnetfeld (Paschen-Back-Effekt). Spin und Bahndrehimpuls entkoppeln und richten sich unabhängig voneinander im Magnetfeld aus.

[4,5]

(c) Der energetische Abstand der P-Zustände beträgt

$$\Delta E = hc\left(\frac{1}{\lambda_{D2}} - \frac{1}{\lambda_{D1}}\right) = 2,13\text{meV}$$

[1]

Wenn sich die tiefste bzw. die höchste Linie der beiden P-Zustände überschneiden, gilt außerdem

$$\Delta E = (m_j g_j + m_{j'} g_{j'})\,\mu_B B = \left(\frac{3}{2}\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3}\right)\mu_B B$$

also $B = 15,8\text{T}$. Bei dieser Feldstärke erwartet man allerdings, dass die Spin-Bahn-Kopplung aufgebrochen wird und der Paschen-Back-Effekt auftritt.

[1]

(d) Siehe Abbildung 2.

(e) Zu beachten sind die Auswahlregeln für Dipolübergänge

$$\begin{aligned}\Delta l &= \pm 1\\ \Delta m_j &= 0, \pm 1\\ \Delta j &= 0, 1 \quad (j = 0 \not\leftrightarrow j = 0)\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Übergänge, die in Abbildung 2 eingezeichnet sind. Für $\Delta m_j = \pm 1$ erhält man zirkular (σ) polarisierte Strahlung und für $\Delta m_j = 0$ linear (π) polarisierte Strahlung. Im schwachen Magnetfeld beobachtet man 10 unterschiedliche Linien im Spektrum, im starken Magnetfeld sind es nur drei.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

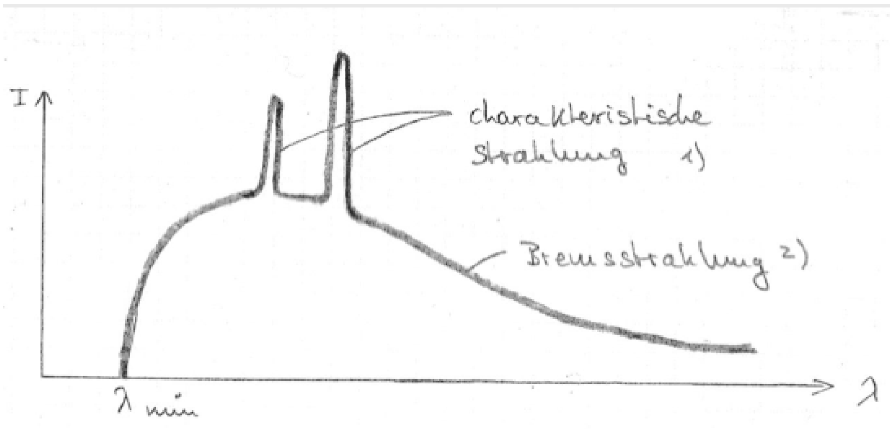
Ein Metall wird mit Elektronen beschossen, die eine Beschleunigungsspannung durchlaufen haben. Dabei entsteht auf zwei verschiedene Arten Röntgenstrahlung.

(a) Skizzieren Sie als Funktion der Wellenlänge λ die typische Intensitätsverteilung der Strahlung $I(\lambda)$ und beschriften Sie die beiden Anteile der emittierten Strahlung.

(b) Erklären Sie kurz, wie diese beiden Anteile entstehen und wie sie jeweils von der Spannung U abhängen. Welche Bedeutung hat die dabei auftretende Grenzwellenlänge und welchen Wert hat sie bei einer Beschleunigungsspannung von $U = 50\text{kV}$?

Lösung:

(a) Röntgenspektrum:



[**2**]

(b)
1. Auftreffende, hochenergetische Elektronen können tiefliegende Elektronen der Metallatome ionisieren (z.B. aus der K-Schale). Diese Zustände werden von höher liegenden Elektronen (z.B. aus L-Schale) wieder besetzt. Dabei wird Röntgenstrahlung mit für das Atom charakteristischer Wellenlänge emittiert, unabhängig von U.

2. Durch Kollision mit den Metallatomenkernen werden die auftreffenden Elektronen abgebremst. Beschleunigte (gebremste) Ladungen strahlen elektromagnetische Strahlung ab (breites Spektrum, fast unabhängig von der Metallsorte). $\lambda_{min} \hat{=} \nu_{max} \hat{=}$ höchste Photonenenergie, wenn die gesamte kinetische Energie $E_{kin} = eU$ des auftreffenden Elektrons einem einzigen Photon übertragen wird:

[**1**]

$$eU = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \lambda_{min} = \frac{hc}{eU} = 0,0242\text{nm} \quad (13)$$

[1]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

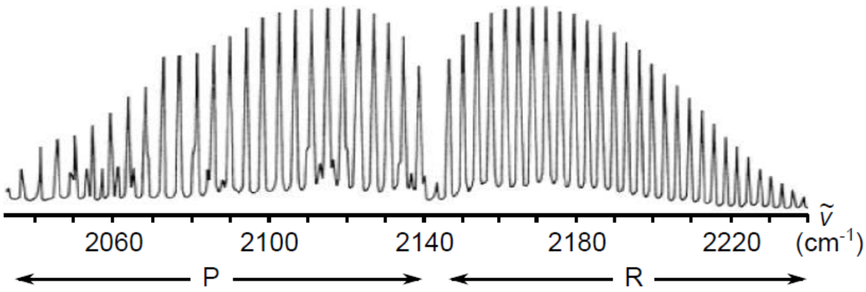
Betrachten Sie das unten abgebildete Absorbtionsspektrum von Kohlenmonoxid-Gas ($^{12}_{6}C^{16}_{8}O$) bei Raumtemperatur. Gezeigt sind die verschiedenen Rotationsübergänge um den Vibrationsübergang $\nu = 0 \rightarrow \nu = 1$ innerhalb des elektronischen Grundzustandes. Die fehlende Linie bei $\tilde{\nu} = 2143\mathrm{cm}^{-1}$ entspricht dem Rotationsübergang $k = 0 \rightarrow k = 0$

(a) Bestimmen Sie aus der Frequenz der fehlenden Linie die Federkonstante D des Moleküls.

(b) Nennen Sie die Formeln für die Übergänge für den R-Zweig und den P-Zweig und ordnen Sie diese den Zweigen den dazugehörigen Rotationsübergänge zu.

(c) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment I des Moleküls.

(d) Wie kommen die nach aussen abnehmenden Intensitäten zustande?



Lösung

(a)

$$\Delta E = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{D}{\mu}} = hc\tilde{\nu}$$

$$\mu = \frac{m_O m_C}{m_O + m_C} = \frac{16u \cdot 12u}{16u + 12u} = 6,8u$$

$$D = (2\pi c\tilde{\nu})^2\mu = 1855\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

[2]

(b)

$$\Delta E_{J,J+1} = \frac{\hbar^2}{\mu R^2}(J+1) \tag{14}$$

$$\Delta E_{J,J-1} = -\frac{\hbar^2}{\mu R^2}J \tag{15}$$

R-Zweig:$\Delta J = +1$ P-Zweig:$\Delta J = -1$

[1,5]

(c)

$$\Delta E_{Rot} = \frac{\Delta\left|\vec{J}^2\right|}{2I} = \frac{1}{2I}(\hbar^2 J''(J''+1) - \hbar^2 J'(J'+1)) = \frac{52\hbar^2}{2I} = hc(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}')$$

$$I = \frac{52\hbar^2}{2hc\Delta\nu} = 1,68 \cdot 10^{-46}\ \mathrm{kgm}^2$$

[1,5]

(d) Die Intensitäten spiegeln die Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Besetzung der Energieniveaus und den damit möglichen Übergängen wieder.

$$\frac{N_J}{N_0}(2J+1)\exp\left(-\frac{\Delta E_{J0}}{k_B T}\right)$$

[1]

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Ein einfaches, auf Einstein zurückgehendes Modell für einen Festkörper ist ein System aus N identischen quantenmechanischen Oszillatoren (mit Energieniveaus $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$). Ein Makrozustand wird durch seine Gesamtenergie $E = Mq$, die in Einheiten von $q = \hbar\omega$ auf die Oszillatoren verteilt wird, charakterisiert. Die Multiplizität (Entartungsgrad) ist gegeben durch:

$$\Omega = \frac{(M+N-1)!}{M!(N-1)!} = \frac{N}{N+M}\binom{N+M}{N} \tag{16}$$

(a) Zeigen Sie für große N und M:

$$\Omega(N,M) \approx \left(\frac{N+M}{N}\right)^N \left(\frac{N+M}{M}\right)^M \qquad \text{Stirlingformel}: N! \approx \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{\mathrm{e}}\right)^N \tag{17}$$

(b) Berechnen Sie die Entropie eines Einstein-Festkörpers als Funktion von N und M in der Näherung aus (a).

(c) Berechnen Sie die Temperatur T und drücken Sie sie als Funktion der Energie aus.

(d) Invertieren Sie die Temperatur-Energie Beziehung und berechnen Sie die Wärmekapazität ${}^{\partial E}/_{\partial T}$.

Lösung

(a) Wenn sowohl N als auch M groß sind:

$$\frac{N}{N+M}\frac{(N+M)!}{M!N!} \approx \frac{N}{N+M}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N+M}{NM}}\frac{(N+M)^{N+M}}{N^N M^M} \tag{18}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N}{M(N+M)}}\left(\frac{N+M}{N}\right)^N\left(\frac{N+M}{M}\right)^M \tag{19}$$

$$\approx \left(\frac{N+M}{N}\right)^N\left(\frac{N+M}{M}\right)^M . \tag{20}$$

[1,5]

(b)

$$S = k_\mathrm{B}\ln\Omega = k_\mathrm{B}\left[(N+M)\ln(N+M) - N\ln N - M\ln M\right] \tag{21}$$

[1]

(c) Es ist:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial E} . \tag{22}$$

Da $E = q(M + N/2)$ und somit $M = E/q - N/2$ ist $\partial_E M = 1/q$. Damit findet man

$$\frac{1}{T} = \frac{k_\mathrm{B}}{q}\left[\frac{N}{N+M} + \ln(N+M) + \frac{M}{N+M} - \ln M - \frac{M}{M}\right] \tag{23}$$

$$= \frac{k_\mathrm{B}}{q}\ln\left(\frac{N+M}{M}\right) = \frac{k_\mathrm{B}}{q}\ln\left(\frac{E/q+N/2}{E/q-N/2}\right) . \tag{24}$$

Und folglich:

$$T(E) = \frac{q}{k_\mathrm{B}} \left[\ln \left(\frac{2E + qN}{2E - qN} \right) \right]^{-1} . \tag{25}$$

[**3**]

(d) Invertieren der Relation $T(E)$:

$$\left(\frac{2E + qN}{2E - qN} \right) = \mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} \tag{26}$$

$$E(T) = \frac{qN}{2} \frac{\mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} + 1}{\mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} - 1} = qN \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} - 1} + \frac{1}{2} \right) . \tag{27}$$

Es ist:

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} = -\frac{q}{k_\mathrm{B}T^2} \mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} . \tag{28}$$

Damit lässt sich berechnen:

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = k_\mathrm{B} N \left(\frac{q}{k_\mathrm{B}T} \right)^2 \frac{\mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T}}{\left(\mathrm{e}^{q/k_\mathrm{B}T} - 1 \right)^2} . \tag{29}$$

[**2,5**]

Konstanten

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \mathrm{Js}$$
$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \mathrm{C}$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \mathrm{As/V/m}$$
$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}$$
$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 h^3} = 1,10 \cdot 10^7 \mathrm{m}^{-1}$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \mathrm{kg}$$
$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \mathrm{kg}$$
$$\alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$
$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \mathrm{N/A}^2$$
$$A = 5,9 \cdot 10^{-6} \mathrm{eV}$$