1 Quickies (8 Punkte)

a) Ein Komet mit Masse m, Energie $E > 0$ und Drehimpuls $\vec{L} = L\vec{e}_z$ bewegt sich im radialsymmetrischen Potential $V(r) = -\frac{\beta}{r^2}$. Bei welchen Werten des Parameters β kann der Komet ins Zentrum stürzen?

b) $L(q, \dot{q})$ sei die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen Systems. Geben Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen an und zeigen Sie, dass die Größe

$$E = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L$$

eine Erhaltungsgröße ist.

c) Ein Auto der Masse m wird aus dem Stand mit konstanter *Leistung* P beschleunigt. Bestimmen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung des Autos jeweils als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie Reibungseffekte.

d) In einem System aus N Massenpunkten m_i wechselwirken die Teilchen über ein Zweiteilchenpotential

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} v\left(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|\right).$$

Nennen Sie zwei Größen, die durch Hinzufügen eines äußeren Potentials $V_{\text{ext}} = \sum_i m_i g z_i$ nicht mehr erhalten sind.

2 Raketenflug (6 Punkte)

Eine Rakete der Gesamtmasse m_0 transportiert einen Satelliten der Masse m_{s} und startet von der Erdoberfläche. Die Bewegungsgleichung der Rakete im Schwerefeld ($g = \text{const.}$) lautet

$$m(t)\dot{v}_z = -m(t)g - \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}t}u_{\text{g}}, \tag{1}$$

wobei $m(t) = m_0 - (m_0 - m_{\text{s}})\frac{t}{t_{\text{B}}}$ die zeitabhängige Masse der Rakete für $0 \leq t \leq t_{\text{B}}$ mit der Brenndauer t_{B} ist und u_{g} die konstante, relative Geschwindigkeit der austretenden Gase ist.

a) Geben Sie die Bedingung an, dass die Rakete abhebt.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit t für $0 \leq t \leq t_{\text{B}}$ und speziell die Endgeschwindigkeit bei $t = t_{\text{B}}$.

c) Geben Sie den Ausdruck für die erste kosmische Geschwindigkeit eines Körpers, der sich reibungsfrei auf einer Kreisbahn knapp über der Erdoberfläche bewegt, in Abhängigkeit der Erdbeschleunigung und des Erdradius R_{E} an.

d) Schätzen Sie unter Vernachlässigung der Erdbeschleunigung ($g = 0$) die Nutzlast m_{s}, die die Rakete der Masse $m_0 = 2 \cdot 10^6\,\text{kg}$ mit $u_{\text{g}} = 2 \cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf die erste kosmische Geschwindigkeit bringen kann.

3 Zwangskräfte (9 Punkte)

Ein Pinguin der Masse m gleitet aus dem Stand reibungslos auf der Außenseite eines Iglu (Halbkugel mit Radius R) im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Nehmen Sie an, dass die Bewegung in der x-z-Ebene stattfindet und der Startpunkt infinitesimal nah zum höchsten Punkt des Iglu ist.

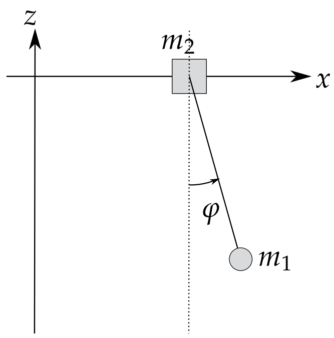
a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten unter der Zwangsbedingung $r = R$.

b) Bestimmen Sie aus dem Energieerhaltungssatz die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ als Funktion von φ.

c) Der Kontakt geht verloren, wenn die Zwangskraft nach Innen gerichtet wäre. Bestimmen Sie den kritischen Winkel φ_c, bei dem der Pinguin den Kontakt mit dem Iglu verliert.

Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt $\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$.

4 Pilgerschrittpendel (11 Punkte)



Betrachten Sie ein Pendel der Masse m_1 und der Länge l, das an einer reibungsfrei auf Schienen gelagerten Masse m_2, die sich nur entlang der x-Achse bewegen kann, befestigt ist. Die Koordinaten der Pendelmasse seien x_1 und z_1, die der Masse m_2 seien x_2 und $z_2 = 0$. Die x-Koordinate des Schwerpunkts der beiden Massen werde mit x_s bezeichnet.

a) Bestimmen Sie x_1, z_1 und x_s als Funktionen von x_2 und dem Winkel φ, den das Pendel mit der z-Achse bildet.

b) Betrachten Sie nun x_s und φ als generalisierten Koordinaten und bestimmen Sie x_1, z_1 und x_2 als Funktionen von x_s und φ.

c) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems $L(x_s, \varphi, \dot{x}_s, \dot{\varphi})$ auf und zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion im Falle kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ auf die Form

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_s^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} l^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m_1 g l^2 \varphi^2 + m_1 g l \tag{2}$$

reduziert.

d) Formulieren Sie für den Fall kleiner Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ die Euler-Lagrange-Gleichungen für x_s und φ und geben Sie die Lösung an.

5 Billard (4 Punkte)

Eine Billardkugel der Masse m mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ trifft eine ruhende Billardkugel der gleichen Masse. Zeigen Sie, dass nach einem nicht-zentralen, elastischen Stoß der Winkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der Kugeln 90° beiträgt. Vernachlässigen Sie Reibung und Rotation der Kugeln.