Fakultät für Physik Technische Universität München Bernd Kohler & Daniel Singh Blatt 1 - Lösung WS 2014/2015 23.03.2015

Ferienkurs Experimentalphysik 1

 (\bigstar) - leicht $(\bigstar\bigstar)$ - mittel $(\bigstar\bigstar)$ - schwer

Aufgabe 1: Verständnisfragen

- a) Unter welcher Voraussetzung kann zur Berechnung der Geschwindigkeit die Formel $v_x = \frac{x}{t}$ verwendet werden?
- b) Warum ist jede Kreisbewegung auch die gleichförmige eine beschleunigte Bewegung?
- c) Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Bahngleichung y(x) und der Ort-Zeit-Funktion y(t).
- d) Inwiefern ist das 1. Newton'sche Gesetz ("Trägheitsgesetz") im 2. Newton'schen Gesetz ("Bewegungsgesetz" $F = m \cdot a$) enthalten?
- e) Es wird ein System von Punktmassen betrachtet, die sich in einer waagrechten Ebene bewegen können. Sie stoßen zusammen, laufen auseinander usw. Es wirkt nur die Schwerkraft. Die Bewegung wird durch keine Reibungswirkungen beeinflusst. Gilt für dieses System der Impulserhaltungssatz? Begründen Sie Ihre Antwort.
- f) Die in der vorherigen Frage beschriebene Ebene wird um den Winkel α gegen die Waagrechte geneigt. Geben Sie auch für diesen Fall an, ob der Impulssatz gilt. Begründen Sie Ihre Antwort.
- g) Unter welchen Umständen treten im Inneren eines fahrenden Straßenbahnwagens Coriolis-Kräfte auf? Wie zeigen sich diese?

Lösung:

- a) Es gilt allgemein $v_x = \frac{dx}{dt}$. Nur wenn $x_0 = 0$ und $v_x = const.$, d.h. bei einer **gleichförmigen Bewegung** gilt $v_x = \frac{x}{t}$.
- b) Selbst wenn die Bahnbeschleunigung verschwindet $(a_s = 0)$, ist bei der Kreisbewegung stets eine Radialbeschleunigung a_r vorhanden $(a_r \neq 0)$. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt zwar konstant, ihre Richtung ändert sich jedoch fortwährend $(v_1 = v_2, \text{ aber } \vec{v_1} \neq \vec{v_2})$.
- c) Die Bahngleichung y(x) stellt die Bahn des bewegten Körpers in der x,y-Ebene dar. Sie gibt keine Auskunft über den zeitlichen Ablauf der Bewegung.
 - Die Ort-Zeit-Funktion y(t) gibt zu jeder Zeit t die y-Koordinate eines bewegten Körpers an. Sie beschreibt einen eindimensionalen Bewegungsablauf. Ihre grafische Darstellung im y(t)-Diagramm hat nichts mit der Bahn des bewegten Körpers zu tun.
- d) Das Trägheitsprinzip gilt, wenn F = 0 ist (keine äußere Kraft wirkt). Für diesen Fall ist die Bewegungsgleichung $0 = m \cdot a$. Da aber m nicht Null sein kann (in der klassischen Mechanik), ist nur a = 0 möglich. Das bedeutet, dass der Körper mit der Masse m sich entweder geradlinig gleichförmig bewegt oder sich in Ruhe befindet (=Trägheitsgesetz).
- e) Der Impulserhaltungssatz gilt. Es wirken keine äußeren Kräfte, da die Schwerkraft keine Komponente in der waagrechten Ebene hat. Die Schwerkraft selbst wird durch die Zwangskraft der Unterlage kompensiert.
- f) Der Impulserhaltungssatz gilt nicht. Die auf die geneigte Ebene entfallende Schwerkraftkomponente (Hangabtriebskraft) ist eine äußere Kraft.
- g) Coriolis-Kräfte treten auf, wenn der Wagen eine Kurve durchfährt und der Fahrgast (oder ein Gegenstand) sich zugleich im Wagen horizontal bewegt. Der Fahrgast spürt die Coriolis-Kraft senkrecht zu der von ihm eingeschlagenen Bewegungsrichtung, er wird also beim Geradeausgehen behindert. Dabei spielt seine Bewegungsrichtung keine Rolle. Diese Kraft wirkt stets in einer Rechtskurve des Wagens nach links und in einer Linkskurve des Wagens nach rechts.

Aufgabe 2: Ort - Geschwindigkeit - Beschleunigung (\bigstar)

Ein Massenpunkt befindet sich zur Zeit t=0 im Koordinatenursprung und bewegt sich anschließend mit der Beschleunigung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \\ a_z \cdot \frac{t}{T} \end{pmatrix},\tag{1}$$

dabei sind a_x , a_y und a_z konstant.

Berechnen Sie den Ort $\vec{r}(T)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(T)$ des Massenpunktes zur Zeit t = T in Abhängigkeit von a_x , a_y , a_z und T.

Lösung:

Um die Geschwindigkeit zu erhalten, muss die Beschleunigung einmal integriert werden. Um den Ort zu erhalten, muss ein weiteres Mal integriert werden.

Die Anfangsbedingungen sind gegeben durch $\vec{r}(t=0)=0$ und $\vec{v}(t=0)=0$. Damit ergibt sich für den Geschwindigkeitsvektor:

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x dt' = a_x \cdot t$$

$$v_y(t) = v_y(0) + \int_0^t a_y \cdot \sin\left(\frac{\pi t'}{T}\right) dt' = \frac{a_y T}{\pi} \cdot \left[-\cos\left(\frac{\pi t'}{T}\right)\right]_0^t = a_y \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right)\right]$$

$$v_z(t) = v_z(0) + \int_0^t a_z \cdot \frac{t'}{T} dt' = \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot \frac{t^2}{T}$$

Für den Einträge des Ortsvektors erhalten wir:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t a_x \cdot t' dt' = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \frac{a_y T}{\pi} \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{\pi t'}{T}\right) \right] dt' = \frac{a_y T}{\pi} \cdot \left\{ t - \left[\frac{T}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi t'}{T}\right)\right]_0^t \right\}$$

$$= a_y \cdot \frac{T}{\pi} \cdot \left[t - \frac{T}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) \right]$$

$$z(t) = z(0) + \int_0^t \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot \frac{t'^2}{T} dt' = \frac{1}{6} \cdot a_z \cdot \frac{t^3}{T}$$

Wir müssen nun nur noch t = T einsetzen und erhalten schließlich den gesuchten Orts-

und Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{r}(T) = T^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{a_x}{2} \\ \frac{a_y}{\pi} \\ \frac{a_z}{6} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}(T) = T \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ \frac{2a_y}{\pi} \\ \frac{a_z}{2} \end{pmatrix}$$
 (2)

Aufgabe 3: Stein fällt in Brunnen (★)

Ein Stein fällt in einen Brunnen. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist Null. Ein Zeitintervall $\Delta t=1$ s nach dem Beginn des freien Falls wird eine zweiter Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{z0}'=20\,\mathrm{m/s}$ hinterhergeworfen. Der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt. $(g=10\,\mathrm{m/s^2})$

- a) Berechnen Sie die Zeit t_1 , die nach Bewegungsbeginn des ersten Steines vergeht, bis dieser vom zweiten Stein überholt wird.
- b) In welcher Tiefe z_1 findet der Überholvorgang statt?
- c) Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegung beider Steine im z(t)-Diagramm!

Lösung:

a) Beide Steine führen eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung nach unten (in positive z-Richtung) aus. Die Ort-Zeit-Funktion lautet für den ersten Stein:

$$z = \frac{1}{2}gt^2\tag{3}$$

Für den zweiten Stein gilt

$$z' = \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2 + v'_{z0}(t - \Delta t)$$
 (4)

wobei der spätere Start dadurch berücksichtigt ist, dass $\Delta t > 0$ von der Zeit abgezogen wurde. Beim Überholvorgang, der zur Zeit t_1 stattfindet, sind beide Steine am gleichen Ort: $z_1 = z_1'$. Daraus folgt:

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g(t_1 - \Delta t)^2 + v_{z0}'(t_1 - \Delta t)$$
 (5)

Diese Gleichung muss nun nach t_1 aufgelöst werden.

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}gt_1^2 - gt_1\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 + v_{z0}'t_1 - v_{z0}'\Delta t \tag{6}$$

$$t_1 \cdot (v'_{z0} - g\Delta t) = (v'_{z0} - \frac{1}{2}g\Delta t) \cdot \Delta t \tag{7}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{v'_{z0} - \frac{1}{2}g\Delta t}{v'_{z0} - g\Delta t} \cdot \Delta t = 1.5 \,\mathrm{s}$$
(8)

Das Problem ist nur sinnvoll lösbar, wenn $v'_{z0} > g\Delta t$, d. h., die Startgeschwindigkeit des zweiten Steins muss größer sein als die Geschwindigkeit, die der erste Stein bis dahin erreicht hat.

- b) $z_1 = \frac{1}{2}gt_1^2 = 11 \,\mathrm{m}$
- c) Beide Kurven sind, weil der Ort von der Zeit abhängt, Parablen. Beide sind wegen $\ddot{z} = \ddot{z}' = g > 0$ nach oben geöffnet. Der Scheitel von

$$z = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{(Stein 1)} \tag{9}$$

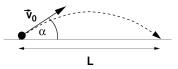
liegt im Koordinatenursprung und die zughörige Parabel muss durch den Punkt (t_1, z_1) gehen. Die zweite Parabel

$$z' = v'_{z0}(t - \Delta t) + \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2$$
 (Stein 2)

geht durch den gleichen Punkt. Sie beginnt aber zur Zeit $\Delta t < t_1$ am Ort $z_0' = 0$ mit positiver Steigung $(v_{z0}' > 0)$. $GRAFIK\ ERG\ddot{A}NZEN$

Aufgabe 4: Golf auf dem Mond ($\bigstar \bigstar$)

Um das Leben auf dem Mond angenehmer zu gestalten, soll ein Golfplatz errichtet werden. Dazu ist es notwendig zu wissen, wie weit Golfbälle auf dem Mond fliegen können. Hinweis: Vernachlässigen Sie Reibungseffekte sowie die Krümmung der Mondoberfläche bei Ihren Rechnungen. Die Beziehung $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)$ könnte hilfreich sein.



a) Der Mond hat 1,23 % der Erdmasse und 27,3 % des Erdradius. Berechnen Sie daraus die Fallbeschleunigung g_M auf der Mondoberfläche.

Ersatzlösung: $g_M = 2 \,\mathrm{m/s^2}$

- b) Geben Sie die Flugweite L eines Golfballs in Abhängigkeit vom Abschlagwinkel α und dem Betrag v_0 der Anfangsgeschwindigkeit an. Zeigen Sie, dass L für α = 45° maximal wird.
- c) Berechnen Sie die maximale Flugweite für $v_0 = 50 \,\mathrm{m/s}$. Welche maximale Höhe H über dem Boden erreicht der Ball dabei?

Lösung:

a) Die Fallbeschleunigung ist durch die Gravitationskraft zwischen Mond (Masse M_M) bzw. Erde (Masse M_E) und einem Objekt mit der Masse m gegeben:

$$m \cdot g_M = G \frac{m \cdot M_M}{R_M^2}$$
 und $m \cdot g_E = G \frac{m \cdot M_E}{R_E^2}$ (11)

$$\Rightarrow g_M = g_E \cdot \frac{M_M}{M_E} \cdot \frac{R_E^2}{R_M^2} = 9.81 \,\text{m/s}^2 \cdot \frac{0.0123}{0.273^2} = 1.62 \,\text{m/s}^2$$
 (12)

b) Wir zerlegen die Flugbahn des Golfballes (Wurfparabel) in x- und y-Komponente. Die Anfangsbedingungen sind x(t=0)=0 und y(t=0)=0:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \tag{13}$$

$$y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g_M \cdot t^2 \tag{14}$$

Die Flugzeit t_F ist durch die Bedingung $y(t_F) = 0$ gegeben, damit folgt:

$$t_F = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin \alpha}{g_M} \tag{15}$$

Wir setzen nun t_F in die Gleichung für x(t) ein und erhalten

$$x(t_F) = L = \frac{v_0^2}{g_M} \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g_M} \cdot \sin(2\alpha)$$
 (16)

Offensichtlich wird L maximal wenn $\sin(2\alpha)$ maximal wird und dies ist der Fall für $2\alpha = 90^{\circ}$, also $\alpha = 45^{\circ}$.

c) Für die maximale Flugweite setzen wir $\alpha=45^\circ$ und $v_0=50\,\mathrm{m/s}$ in Gleichung 16 ein und erhalten

$$L_{max} = \frac{v_0^2}{g_M} = 1,54 \,\text{km} \tag{17}$$

Am Scheitelpunkt ist die Geschwindigkeit in y-Richtung null, also

$$\dot{y}(t_S) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad t_S = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g_M}$$
 (18)

und damit folgt die Höhe am Scheitelpunkt (=maximale Höhe über dem Boden) zu

$$y(t_S) = H = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot q_M} = \frac{v_0^2}{4 \cdot q_M} = 386 \,\mathrm{m}$$
 (19)

Aufgabe 5: Gleichförmige Kreisbewegung (★★)

Ein Auto fährt geradlinig mit der Geschwindigkeit $v_0 = 96$ km/h auf der Autobahn. Die Räder haben den Durchmesser $d = 2r_2 = 58$ cm

- a) Welche Radialbeschleunigung a_r hat die Ventilkappe das Rades, die sich im Abstand $r_1 = 14,5 \,\mathrm{cm}$ von der Achse befindet?
- b) In welcher Zeit t_1 ändert sich die Richtung der Tangentialgeschwindigkeit dieser Kappe um den Winkel $\varphi_1 = 60^{\circ}$? (Hierbei soll die Drehung um die mitbewegte Achse des Rades betrachtet werden.)
- c) Angenommen, die Ventilkappe löse sich gerade beim Durchgang im oberen Punkt. In welcher Richtung würde sie sich unmittelbar nach dem Lösen bewegen und wie groß wäre die Geschwindigkeit v_K ?

Lösung:

a) Die Radialbeschleunigung der Ventilkappe ist

$$a_r = \omega^2 r_1 \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{v_0}{r_2}$$
 (20)

also

$$a_r = \left(\frac{v_0}{r_2}\right)^2 \cdot r_1 = 1,20 \times 10^3 \,\mathrm{m/s^2}$$
 (21)

Das ist das 122-fache der Erdbeschleunigung g.

b) Der Zusammenhang zwischen Drehwinkel φ und Zeit t folgt aus der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \tag{22}$$

die hier konstant ist. Diese Gleichung wird integriert:

$$\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \omega \cdot \int_0^{t_1} dt \tag{23}$$

Als Grenzen wurden die zusammengehörigen Werte der Variablen eingesetzt. Damit ist $\varphi_1 = \omega t_1$. Mit $\omega = \frac{v_0}{r_2}$ erhalten wir weiter

$$t_1 = \frac{r_2 \cdot \varphi_1}{v_0} = 1,15 \times 10^{-2} \,\mathrm{s} \tag{24}$$

c) Die Führung auf der Kreisbahn hört im oberen Punkt auf. Die Bahngeschwindigkeit der Kappe zeigt in diesem Punkt in Fahrtrichtung. In diese Richtung wird sie auch weggeschleudert. Um die Gesamtgeschwindigkeit der Kappe in diesem Punkt zu ermitteln, muss zur Fahrtgeschwindigkeit v_0 noch die Umlaufgeschwindigkeit $v_1 = \omega r_1$ der Kappe addiert werden:

$$v_K = v_0 + r_1 \omega$$
, wobei $\omega = \frac{v_0}{r_2}$ (25)

$$v_K = v_0 \cdot \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) = 1,5v_0 = 143 \,\text{km/h}$$
 (26)

Aufgabe 6: Der Nord-Süd-Pol-Express (★)

Sie bauen eine Strecke für Schnellzüge die in einem Kreis einmal um die Erde und dabei über beide Pole geht. Nun fährt ein Schnellzug mit konstant 360 km/h auf dieser Strecke. Vernachlässigen sie Reibung. Der Zug hat eine Masse von 400 t.

- a) An welcher/-n Stelle(n) ist die seitwärts auf die Schienen wirkende Kraft am größten, wo am kleinsten?
- b) Was ist der Wert der Kraft, an der/-n Stelle(n), an denen die Kraft minimal wird?
- c) Berechnen sie den Betrag der Kraft, die die Schienen maximal seitwärts auf den Zug ausüben müssen! In welche Richtung wirkt die Kraft?

d) Wie schnell dürfte der Zug fahren, wenn die Schienen seitwärts maximal eine Kraft von 10kN auf den Zug ausüben können, ungeachtet davon ob das geht?

Lösung:

- a) An den Polen ist die Seitwärtskraft (Corioliskraft) am größten am Äquator ist sie minimal.
- b) Am Äquator wird die Corioliskraft gleich 0.

c)
$$|F_C| = 2 \cdot 400000kg \cdot 100 \frac{m}{s} \frac{2\pi}{3600 \cdot 24s} = 5,8kN$$
 (27)

d)
$$v_{max} = \frac{10000N \cdot 3600 \cdot 24s}{2 \cdot 400000kq \cdot 2\pi} = 172 \frac{m}{s}$$
(28)

Aufgabe 7: Der Äquator-Express (★)

Nun wollen sie ihr Streckennetz um eine Strecke erweitern. Die geplante Strecke führt um den Äquator. Der Zug hat wieder die Masse 400 t. Der Radius der Erde am Äquator ist 6378 km.

- a) Gibt es eine Geschwindigkeit, bei der man im Zug Schwerelosigkeit erlebt? Wenn ja, berechnen Sie sie! Vernachlässigen sie die Drehung der Erde hierfür!
- b) Kann man die Schwerkraft des Mondes im Zug simulieren? Wenn ja, bei welcher Geschwindigkeit?
- c) Jetzt überlegen Sie, was man beachten muss, wenn man die Drehung der Erde nicht mehr vernachlässigt! (Tipp: Die Geschwindigkeit des Zuges wird relativ zur Erdoberfläche gemessen.)

Lösung:

a) Ja, wenn die Zentrifugalkraft gleich der Erdanziehungskraft ist.

$$G\frac{mM}{r^2} = mg = \frac{mv^2}{r} \tag{29}$$

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9, 8 \cdot 6378 \cdot 10^3} \frac{m}{s} = 7901 \frac{m}{s}$$
 (30)

b) Ja das geht. Hierfür muss die Erdanziehung abzüglich der Zentrifugalkraft die Anziehung des Mondes ergeben.

$$mg_M = mg_E - \frac{mv^2}{r} \tag{31}$$

$$v = \sqrt{r(g_E - g_M)} = \sqrt{6378 \cdot 10^3 (9.8 - 1.6)} \frac{m}{s} = 7232 \frac{m}{s}$$
 (32)

c) Man muss die Geschwindigkeit der Erde am Äquator (ca. $464\frac{m}{s}$) bei ostwärtiger Fahrt von der berechneten Geschwindigkeit subtrahieren und bei westwärtiger Fahrt dazu addieren um die Geschwindigkeit des Zuges relativ zur Erdoberfläche zu bekommen.

Aufgabe 8: $Rammb\ddot{a}r (\bigstar \bigstar)$

Mit einem Rammbär der Masse $m_1 = 450 \,\mathrm{kg}$ wird ein Pfahl der Masse $m_2 = 400 \,\mathrm{kg}$ in den Boden gerammt. Das Rammen von Pfählen wird als unelastischer Stoß zwischen Rammbär und Pfahl betrachtet. Der Rammbär fällt aus der Höhe $h = 1,20 \,\mathrm{m}$ auf den Pfahl. Beim letzten Schlag sinkt der Pfahl noch um die Strecke $s = 1,0 \,\mathrm{cm}$ ein.

Wie groß ist dabei die mittlere Widerstandskraft des Bodens?

Lösung:

Der Rammbär fällt aus der Höhe h auf den Pfahl und erreicht dabei die Geschwindigkeit v_1 , die sich durch Anwendung des **Energieerhaltungssatzes** bestimmen lässt.

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 = m_1 \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \tag{33}$$

Damit findet zwischen Rammbär und Pfahl, der anfangs ruht $(v_2 = 0)$ ein inelastischer Stoß statt, nach welchem sich beide Körper mit der gemeinsamen Geschwindigkeit u weiter bewegen. Hierfür gilt der **Impulserhaltungssatz**

$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u \tag{34}$$

aus dem sich u bestimmen lässt:

$$u = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 2,57 \,\text{m/s}$$
 (35)

Schließlich werden durch die konstante Widerstandskraft F des Bodens Rammbär und Pfahl auf der Strecke s bis zur Ruhe abgebremst. Beim Abbremsen wird die gesamte kinetische Energie E_{kin} , die der Rammbär und der Pfahl nach dem Stoß hatten, in Bremsarbeit, das heißt in Arbeit gegen die Kraft F, umgewandelt. Da sich der Rammbär und Pfahl dabei auch in Richtung der Schwerkraft um die Strecke s bewegen, wird zusätzlich potentielle Energie ΔE_{pot} in Bremsarbeit umgewandelt. Für die Bremsarbeit W gilt damit

$$W = E_{kin} + \Delta E_{pot} \tag{36}$$

$$F \cdot s = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2 + (m_1 + m_2) \cdot g \cdot s \tag{37}$$

Setzt man in diese Formel die bereits ermittelte Geschwindigkeit u ein und löst nach F auf, so ergibt sich die Widerstandskraft des Bodens

$$F = \frac{m_1^2 \cdot g \cdot h}{s \cdot (m_1 + m_2)} + (m_1 + m_2) \cdot g = 288 \,\text{kN}$$
 (38)