Aufgabe 1 (Quickies (10 Punkte))**.** Beantworten Sie die Fragen und geben Sie eine möglichst kurze Erklärung.

a) Gegeben sei die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 R^2 \sin^2\theta) - mgR\cos\theta$. Welche Größe ist neben der Energie eine Erhaltungsgröße?

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion und die Hamilton-Funktion eines eindimensionalen Oszillators an.

c) Skizzieren Sie das Phasenraumdiagramm eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators mit schwacher Dämpfung.

d) In welcher Richtung (von oben gesehen) präzediert schneller, schwerer Kreisel im homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$?

e) Berechnen Sie die Poisson-Klammer $\{p_1, L_3\}$, die aus der ersten kartesischen Komponente des Impules $\boldsymbol{p}$ und der dritten Komponente des Drehimpulses $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ eines Massenpunktes gebildet ist.

Lösung. a) φ ist eine zyklische Variable, weshalb für den zugehörigen kanonisch-konjugierten Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Somit ist p_φ eine Erhaltungsgröße.

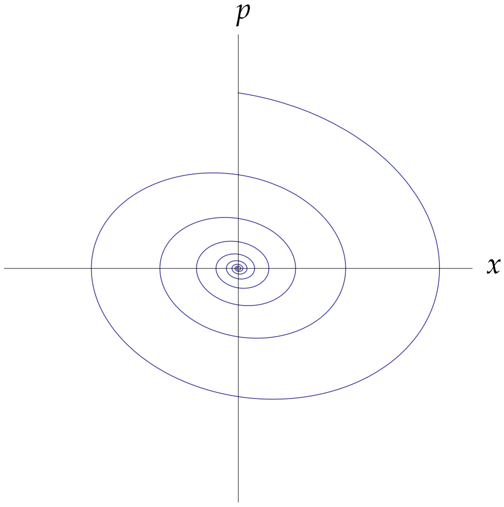
b) Die Lagrange-Funktion des Oszillators mit Potential $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x$ lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \text{const.},$$

woraus sich der kanonische-konjugierte Impuls $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ ergibt. Dies liefert die Hamilton-Funktion

$$H = p\dot{x} - L = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \text{const.}$$

c) Das Phasendiagramm eines harmonischen Oszillators ohne Reibung ist eine Ellipse. Im Falle schwacher Dämpfung, geht durch die Reibung Energie verloren, so dass sich im Phasendiagramm eine Spirale, die zum Koordinatenursprung läuft, ergibt.



d) Das auf den Kreisel wirkende Drehmoment ist (Ursprung im Auflagepunkt)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}_\mathrm{S} \times \boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{e}_\varphi,$$

daher präzediert der Kreisel gegen den Uhrzeigersinn, falls $\boldsymbol{L}$ parallel zu $\boldsymbol{r}_\mathrm{S}$ ist, und im Uhrzeigersinn, falls $\boldsymbol{L}$ antiparallel zu $\boldsymbol{r}_\mathrm{S}$ ist. Insgesamt ergibt sich eine Präzession in der gleichen Richtung wie der Drehsinn des Kreisels.

e) Es gilt

$$\{p_1, L_3\} = \sum_j \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_j} \frac{\partial L_3}{\partial p_j} - \frac{\partial p_1}{\partial p_j} \frac{\partial L_3}{\partial x_j} \right) \qquad = -\frac{\partial L_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial \left(x_1 p_2 - x_2 p_1 \right)}{\partial x_1} = -p_2.$$

□

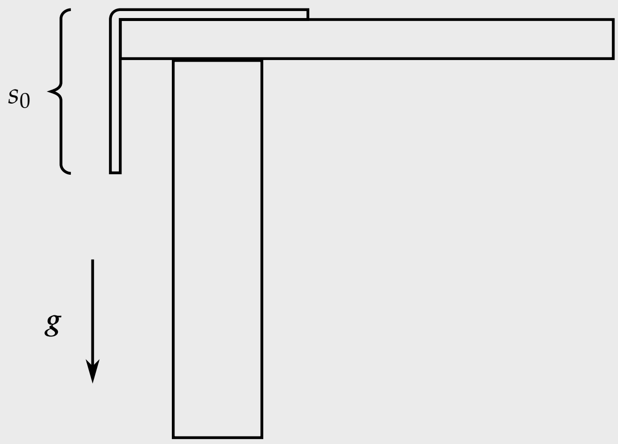
Aufgabe 2 (Seil (10 Punkte))**.** Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil (Gesamtlänge l und Masse M) hängt zu einem Teil der Länge s_0 über die Kante eines Tisches. Es wird in dieser Lage zur Zeit $t = 0$ losgelassen und fängt an, unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes $\boldsymbol{g} = -g\boldsymbol{e}_z$ reibungsfrei über die Tischkante abzugleiten.

a) Betrachten Sie die hängende Länge des Seiles $s(t)$ als generalisierte Koordinate und geben Sie die potentielle und kinetische Energie des Seils an. Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems $L(s, \dot{s})$ auf. Die Tischoberfläche liege bei $z = 0$.

b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $s(t)$ und geben Sie die Lösung für den Fall $s(0) = s_0$, $\dot{s}(0) = 0$ an.

c) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Seils, wenn das hintere Seilende die Tischkante ereicht hat?

Hinweis: Es gilt $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.



Lösung. a) Nur der hängende Teil des Seils mit der Masse $M\frac{s}{l}$ und dem Schwerpunkt bei $z_S = -\frac{s}{2}$ trägt zur potentielle Energie

$$V = -M\frac{s}{l}g\frac{s}{2}$$

bei (der Rest liegt bei $z = 0$). Der Geschwindigkeitsbetrag aller Teile des Seiles ist gleich, also $\dot{s}$, weshalb für die kinetische Energie gilt:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{s}^2.$$

Daher ergibt sich die Lagrange-Funktion zu

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}Mgs^2/l.$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lauten daher

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} = \frac{\partial L}{\partial s}$$
$$M\ddot{s} = M\frac{g}{l}s.$$

Diese werden gelöst durch die hyperbolischen Funktionen cosh und sinh, wobei mit den Anfangsbedingungen und der Abkürzung $\gamma = \sqrt{\frac{g}{l}}$ schließlich gilt:

$$s(t) = s_0 \cosh \gamma t.$$

c) Der Zeitpunkt t_c, bei dem das Seilende die Tischkante erreicht, ist gegeben durch

$$s(t_\mathrm{c}) = s_0 \cosh \gamma t_\mathrm{c} = l.$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_c ist gegeben durch

$$\dot{s}(t_\mathrm{c}) = \gamma s_0 \sinh \gamma t_\mathrm{c} = \gamma s_0 \sqrt{\cosh^2(\gamma t_\mathrm{c}) - 1} = \gamma \sqrt{l^2 - s_0^2}.$$

□

Aufgabe 3 (Asteroid (10 Punkte))**.** Ein Asteroid der Masse m bewege sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne (Masse $M \gg m$). Der kürzeste Abstand zur Sonne sei gleich dem Radius der (kreisförmigen) Erdbahn r_min und der größte Abstand sei gleich dem Radius der Jupiterbahn $r_\mathrm{max} = 5r_\mathrm{min}$. Vernachlässigen Sie alle Effekte der Planeten auf die Asteroidenbahn.

a) Welche Erhaltungsgrößen gibt es für den Asteroiden?
b) Bestimmen Sie das Verhältnis der maximalen zur minimalen Bahngeschwindigkeit des Asteroiden.
c) Bestimmen Sie den Bahndrehimpuls L des Asteroiden als Funktion von r_max und r_min. Was ist der Bahndrehimpuls der Erde?
d) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit des Asteroiden in Einheiten der Bahngeschwindigkeit der Erde.
e) Wieviele Jahre beträgt die Periode der Bewegung des Asteroiden?

Lösung. a) Erhaltungsgrößen sind

Energie $E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{\gamma M m}{r}$,

Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}$ und

Lenzscher Vektor $= \frac{\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{L}}{\alpha} - \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.

b) Im Perihel und Aphel stehen $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ aufeinander senkrecht. Im sonnennächsten Punkt ist das Potential am kleinsten, weshalb dort die maximale Geschwindigkeit auftritt – und umgekehrt am sonnenfernsten Punkt die minimale Geschwindigkeit. Der Betrag des Drehimpulses ergibt sich daher jeweils aus dem Produkt der Beträge zu

$$L = |\boldsymbol{L}| = m r_{\max} v_{\min} = m r_{\min} v_{\max}.$$

Damit folgt für das Verhältnis der extremalen Geschwindigkeiten

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}} = 5.$$

c) Aus der Energieerhaltung gilt für die Energie E bei Perihel und Aphel

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{\gamma M m}{r_{\min}} &= \frac{L^2}{2mr_{\max}^2} - \frac{\gamma M m}{r_{\max}} \\ \frac{L^2}{2m}\left(\frac{1}{r_{\min}^2} - \frac{1}{r_{\max}^2}\right) &= \gamma M m \left(\frac{1}{r_{\min}} - \frac{1}{r_{\max}}\right). \end{aligned}$$

Damit folgt für den Bahndrehimpuls

$$L = m\sqrt{2\gamma M \frac{r_{\min} r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}}.$$

Der Bahndrehimpuls der Erde ergibt sich daraus durch $r_{\max} = r_{\min}$, da die Erdbahn kreisförmig mit Radius $r_{\min}$ ist und lautet

$$L_{\mathrm{E}} = m_{\mathrm{E}} \sqrt{\gamma M r_{\min}}.$$

d) Unter Verwendung der Ergebnisse aus Aufgabenteil b) und c) erhalten wir

$$\frac{v_{\max}}{v_{\mathrm{E}}} = \frac{\frac{L}{m}}{\frac{L_{\mathrm{E}}}{m_{\mathrm{E}}}} = \sqrt{\frac{2r_{\max}}{r_{\min} + r_{\max}}} = \sqrt{\tfrac{5}{3}}.$$

e) Aus dem dritten Keplerschen Gesetz folgt

$$\frac{T^2}{T_{\mathrm{E}}^2} = \frac{a^3}{a_{\mathrm{E}}^3} = \left(\frac{r_{\min} + r_{\max}}{2r_{\min}}\right)^3 = 3^3.$$

Da die Periode der Erde um die Sonne 1 Jahr beträgt, ergibt sich damit die Periode des Asteroiden zu

$$T = 3\sqrt{3} T_{\mathrm{E}}.$$

Die Periode ist also etwa 5 Jahre.

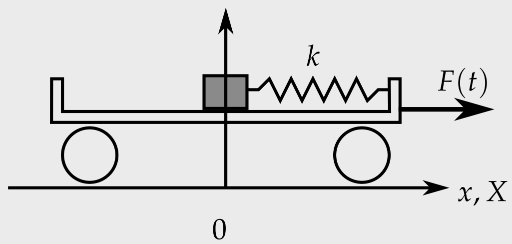
□

Aufgabe 4 (Masse auf Wagen (10 Punkte))**.** Ein Wagen der Masse M gleite reibungsfrei entlang der x-Achse unter dem Einfluss einer zeitabhängigen Kraft $F(t)$. Auf dem Wagen gleite reibunglos eine Masse m, die durch eine Feder (Federkonstante k) mit dem Wagen verbunden ist. Beide Körper können sich nur entlang der x-Achse bewegen.
Betrachten Sie die Auslenkungen des Wagens $X(t)$ und der Masse $x(t)$ im Laborsystem, in dem im ruhenden Wagen die Gleichgewichtslage der Masse im Ursprung liegt.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $X(t)$.
b) Führen Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinate ein

$$x_S = \frac{mx + MX}{m + M}, \qquad x_R = x - X$$

und geben Sie die Bewegungsgleichungen dafür an.
c) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichungen für x_S und x_R mit den Anfangsbedingungen $x(0) = X(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, $\dot{X}(0) = 0$ für den Fall verschwindender äußerer Kraft $F = 0$ an.
d) Wie muss die zeitabhängige Kraft $F(t)$ lauten, damit sich der Wagen mit *konstanter* Beschleunigung $\ddot{X} = a$ bewegt? Gehen Sie dazu von den Bewegungsgleichungen für x und X sowie den Anfangsbedingungen $x(0) = X(0) = 0$, $\dot{x}(0) = \dot{X}(0) = 0$ aus.



Lösung. a) Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus dem Newtonschen Gesetz über die an dem Körper jeweils angreifenden Kräfte.

$$m\ddot{x} = -k(x - X), \tag{1}$$
$$M\ddot{X} = -k(X - x) + F. \tag{2}$$

b) Die Bewegungsgleichung für die Schwerpunktskoordinate $x_S = \frac{mx+MX}{m+M}$ ergibt sich aus der Summe der Bewegungsgleichungen (1) und (2) zu

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = (m + M)\ddot{x}_S = F.$$

Um die Bewegungsgleichung für die Relativkoordinate $x_R = x - X$ zu erhalten, multiplizieren wir (1) mit $\frac{1}{m}$ und (2) mit $\frac{1}{M}$ und bilden die Differenz. Damit gilt

$$\ddot{x}_R = \ddot{x} - \ddot{X} = -k(\frac{1}{m} + \frac{1}{M})x_R - \frac{F}{M}.$$

c) Im Fall verschwindender äußerer Kraft $F = 0$ ist die Bewegung des Schwerpunkts frei und die Relativbewegung folgt einem harmonischen Oszillator mit der Frequenz $\omega = \sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$. Daher gilt

$$x_S(t) = x_S(0) + \dot{x}_S(0)t = \frac{m}{m+M}v_0 t,$$
$$x_R(t) = \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t,$$

d) Für die Relativkoordinate gilt

$$m\ddot{x}_R = m\ddot{x} - m\ddot{X}.$$

Unter Verwendung der Bewegungsgleichungen (1) und der Bedingung $\ddot{X} = a$ erhalten wir daraus

$$m\ddot{x}_R = -kx_R - ma = -k(x_R + \frac{am}{k})$$

Dies ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der verschobenen Koordinate $u = x_R + \frac{am}{k}$:

$$m\ddot{u} = -ku.$$

Daher lautet die Lösung, welche die Anfangsbedingungen erfüllt

$$x_R + \frac{am}{k} = \frac{am}{k}\cos\omega_0 t,$$

wobei wir die Frequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ eingeführt haben. Aus (2) erhalten wir damit die erforderliche, zeitabhängige Kraft

$$F(t) = Ma - kx_R = Ma + ma(1 - \cos\omega_0 t).$$

□

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe (3 Punkte))**.** Ein Fadenpendel mit der Masse m und der Länge l bewege sich im homogenen Schwerefeld $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ in der x-z-Ebene. Welche Geschwindigkeit muss der Massenpunkt des Pendels in der Gleichgewichtslage mindestens haben, damit eine Kreisbewegung des Pendels möglich ist?

Lösung. Die Geschwindigkeiten des Pendels in der oberen Position und in der Gleichgewichtslage des Pendels werden mit v_+ und v_- bezeichnet. In der oberen Position muss die Zentrifugalkraft größer sein als die Schwerkraft, um das Pendel auf der Kreisbahn zu halten. Daher gilt

$$F_G = mg \leq \frac{mv_+^2}{l} = F_Z.$$

Außerdem gilt die Energieerhaltung, so dass

$$E_- = \frac{1}{2}mv_+^2 = \frac{1}{2}mv_-^2 - 2mgl = E_+.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\frac{v_-^2}{l} \geq 5g.$$

□