Zentrum Mathematik
der Technischen Universität München
apl. Prof. Dr. D. Castrigiano
Dr. G. Zumbusch

9.9.2003
14:30-16:00 Uhr

Diplomvorprüfung

Mathematik für Physik 3

1. Aufgabe. Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 - 2y^3 + 6xy$.

1. Man berechne $\mathbf{grad} f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. Man zeige, dass $(0, 0)$und $(1, -1)$ **genau** die stationären Punkte von f sind.
3. Für jeden der beiden stationären Punkte von f entscheide man jeweils, ob eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder ein Sattelpunkt vorliegt. **[12 Punkte]**

2. Aufgabe. Sei $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 3 \sin t$. Man berechne die Länge des Graphen von f ($graph(f) \subset \mathbb{R}^2$), wenn $\mathbb{R}^2$ mit der Norm $\|\cdot\|_1$ versehen wird. **[8 Punkte]**

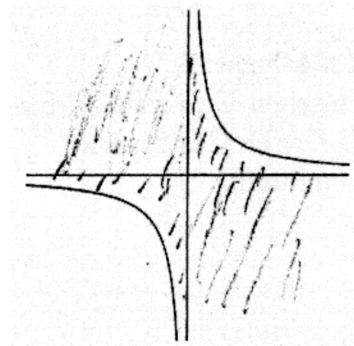
Bitte wenden

3. Aufgabe. Für $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - ty > 0\}$ und $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f\,(t, y) = \frac{y}{1 - ty}$$

sei die Differentialgleichung

$$y' = f\,(t, y) \qquad (\star)$$



gegeben. Die nebenstehende Skizze der Menge D darf ohne Beweis verwendet werden.

1. Man berechne $\partial_y f(t, y)$.
2. Warum ist $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ bezüglich y lokal Lipschitz-stetig?
3. Man zeige, dass f bezüglich y in $]-\infty, 0] \times [0, \infty[$ Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist.
4. Man bestimme das maximale Lösungsintervall J und die Lösung $\psi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ der durch $(\star)$ und $y(0) = 0$ gegebenen Anfangswertaufgabe.
5. Warum gibt es zu der durch $(\star)$ und $y(0) = a$ mit $a > 0$ gegebenen Anfangswertaufgabe ein maximales Lösungsintervall I und eine Lösung $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$?
   (a) Warum gilt $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in I$?
   (b) Warum ist φ auf I streng monoton steigend?
   (c) Warum gilt $0 < \varphi(t) \leq a$ für alle $t \in I \cap]-\infty, 0]$?
   (d) Man zeige $I =]-\infty, c[$ mit $c > 0$ und

$$\lim_{t \to c, t < c} t\varphi\,(t) = 1\ .$$

Hinweis: Was sagt die Theorie über den Graphen der Lösungsfunktion φ?

[24 Punkte]

Hinweis: Für das Bestehen der Prüfung sind 17 der 44 erreichbaren Punkte erforderlich. Ab 37 Punkten wird mit Note 1,0 bewertet.