....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik 4 für Physik
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

09. April 2010, 8:30 – 10:00 Uhr, MI HS 1

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4-Seiten

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Zirkulation eines Vektorfeldes** **[6 Punkte]**

Es bezeichne $K_r(a) := \left\{\zeta \in \mathbb{R}^2 \mid |\zeta - a| \leq r\right\}$ die offene Kreisscheibe mit Radius r um den Punkt $a \in \mathbb{R}^2$. Sei

$$M := K_{10}(1,0) \setminus \left(K_1(-3,0) \cup K_1(0,0) \cup K_1(0,3)\right)$$

und ∂M der positiv orientierte Rand von M. Berechnen Sie die Zirkulation des Vektorfeldes

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} y + x^3 \cos(x^2) \\ e^{y^2} + 2x \end{pmatrix}$$

entlang ∂M.

2. **Fluss durch eine Oberfläche** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche

$$S := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

welche in Richtung positiver z-Achse orientiert sei.

3. **Residuenkalkül** **[7 Punkte]**

Gegeben sei $f(z) = \tan z + e^z$.

(a) f hat bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$,

☐ hebbare Singularitäten. ☐ Pole 1. Ordnung. ☐ Pole 2. Ordnung.
☐ Pole -1. Ordnung. ☐ wesentliche Singularitäten. ☐ keine Singularitäten.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$:

$\mathrm{Res}_{z_n}(f) =$

(c) Bestimmen Sie

$\int_{|z|=\pi} f(z)\,\mathrm{d}z =$

(d) Welchen Konvergenzradius hat die Taylor-Reihe von f um $z = 0$?

$R =$

4. **Fourier-Transformation** **[8 Punkte]**

Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ eine Funktion, die sich auf den Streifen $S_r := \big\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < r\big\}$, $r > 0$, zu $f : S_r \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph fortsetzen lässt. Weiterhin nehmen wir an, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\big|f(z)\big| < \varepsilon$ für alle $\big|\mathrm{Re}\, z\big| > R_\varepsilon$ gilt. Begründen Sie sorgfältig, dass die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < r$ die Gleichung

$$\hat{f}(k) = \frac{e^{ka}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\, f(x + ia)\,\mathrm{d}x$$

erfüllt.

5. **Komplexe Wegintegrale** **[5 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion

$$f(z) := \prod_{k=0}^{2010} \frac{1}{z-2k}.$$

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq -1$ den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

6. **Die freie Schrödinger-Gleichung** **[7 Punkte]**

Sei $g(x,t)$ eine distributionswertige Lösung der eindimensionalen freien Schrödinger-Gleichung

$$i\partial_t g(x,t) = -\tfrac{1}{2}\partial_x^2 g(x,t)$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, g(x,t)\, \mathrm{d}x = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

(a) Welcher partiellen Differentialgleichung gehorcht

$$f(x,t) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y)\, g(y,t)\, \mathrm{d}y, \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

und welche Anfangsbedingung $f(x,0)$ erfüllt f?

(b) Bestimmen Sie

$$\hat{g}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\, g(x,t)\, \mathrm{d}x.$$

7. **Hilbert-Raum-Theorie** **[8 Punkte]**

Gegeben sei der Hilbert-Raum $L^2([-\pi,+\pi])$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Geben Sie eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ und für alle $k \in I$ Normierungsfaktoren $n_k \in \mathbb{R}$ an, so dass $\{e_k\}_{k\in I} = \{n_k e^{ikx}\}_{k\in I}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([-\pi,+\pi])$ bildet:

$I =$	$n_k =$

(b) Drücken Sie die Norm von $f \in L^2([-\pi,+\pi])$ mittels der Basiskoeffizienten $c_k(f) := \langle e_k, f\rangle$ aus:

$\|f\| =$

(c) Sei $f : [-\pi,+\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(+\pi) = f(-\pi)$. Zeigen Sie, dass $c_k(f') = +ikc_k(f)$.