Theoretische Physik 1 (Mechanik)
Diplomvorprüfung
WS 2008/2009, Technische Universität München

Donnerstag, 19. März 2009, 10:00–11:30, MI HS1

Die Klausur besteht aus **3 Aufgaben**. Die Aufgabenstellung umfasst **6 Seiten**.

Es gibt insgesamt **80 Punkte**.

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt!

Bitte geben Sie auf **allen zusätzlichen** Blättern **Ihren Namen** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (35 Punkte)

Ein Stern der Masse m nahe dem galaktischen Zentrum der Milchstraße bewegt sich auf einer geschlossenen Bahn um ein massives Objekt im Zentrum. Wir nehmen an, dass dabei ein Gravitationspotential der Form

$$U(r) = -G\frac{mM_{\mathrm{MBH}}}{r} = -\frac{k}{r}$$

wirkt, wobei $M_{\mathrm{MBH}} \gg m$ die Masse des Zentralkörpers ist.

a) (4 Punkte) Geben Sie die Erhaltungsgrößen bei dieser Bewegung an. Drücken Sie diese explizit in ebenen Polarkoordinaten aus. Warum verläuft die Bewegung in einer Ebene?

b) (3 Punkte) Beweisen Sie ausgehend von den Bewegungsgleichungen, dass der Drehimpuls bei dieser Bewegung erhalten ist.

c) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass auch die Energie eine Erhaltungsgröße ist.
Hinweis: Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichungen mit $\dot{\vec{r}}$ und identifizieren Sie totale Ableitungen nach der Zeit!

d) (6 Punkte) Zeigen Sie unter der Ausnutzung der Erhaltungsgrößen, dass gilt

$$\varphi - \varphi_0 \quad = \quad \int_{r_0}^{r} dr' \frac{\ell}{r'^2\sqrt{2\mu\left(E + \frac{k}{r'}\right) - \frac{\ell^2}{r'^2}}}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie für eine Parametrisierung der Bahnkurve $r(\varphi)$ die totale Ableitung nach der Zeit,

$$\frac{d}{dt}r(\varphi) = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

und trennen Sie die Variablen r und φ, nachdem Sie die Drehimpulserhaltung ausgenutzt haben.

e) (6 Punkte) Führen Sie die Integration aus, um die Parametrisierung $r(\varphi)$ der Bahnkurve zu erhalten und zeigen Sie, dass

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \tilde{\varphi}_0)}.$$

Bestimmen Sie die dabei auftretenden Konstanten p und ε, und zeigen Sie, dass der Bahnparameter p und die Exzentrizität ε gegeben sind durch

$$p = \frac{\ell^2}{k\mu} \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu k^2}}.$$

Hinweise: Substitutieren Sie im Integral $x = \frac{1}{r'}$. Nützlich ist hier das unbestimmte Integral

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2 - (x-b)^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

f) (4 Punkte) Leiten Sie das zweite Keplersche Gesetz her: Zeigen Sie, dass der Radiusvektor vom Zentralkörper zum umlaufenden Stern in gleichen Zeitintervallen Δt gleiche Flächen ΔA durchläuft. Geben Sie an, durch welche physikalischen Größen die Änderungsrate $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ bestimmt wird! Berechnen Sie die Umlaufzeit T durch Integration über eine volle Periode!
Hinweise: Der Flächeninhalt eines durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks ist $A_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$. Der Flächeninhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist $A = \pi ab$. Die Halbachsen können mithilfe der Bahnparameter bestimmt werden zu

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

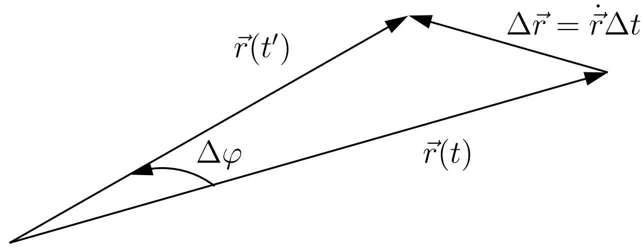

BILD 1: *Radiusvektor $\vec{r}(t)$ zu den Zeiten t und $t' = t + \Delta t$.*

g) (4 Punkte) Beweisen Sie das dritte Keplersche Gesetz: Zeigen Sie, dass für das Verhältnis der dritten Potenz der Umlaufzeit T zum Quadrat der großen Halbachse a der geschlossenen Bahn gilt

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_{\text{MBH}}}{4\pi^2}.$$

Entwickeln Sie dabei die reduzierte Masse μ für den gegebenen Fall $m \ll M_{\text{MBH}}$ in der kleinen Größe $\frac{m}{M_{\text{MBH}}}$. Was ist der führende Term? Wie hängt das Ergebnis von der Masse des den Zentralkörper umkreisenden Sterns ab?

(Bitte wenden!)

h) (5 Punkte) Nach langandauernden Beobachtungen ist es Astronomen am MPI in Garching gelungen, die Bahn des Sterns S2 mit einer Umlaufdauer von 15 Jahren ($T = 15$ a) um das galaktische Zentrum genau zu vermessen [*S. Gillessen* et al., *arXiv:0810.4674*] . Unter Berücksichtigung der Entfernung zum galaktischen Zentrum läßt sich aus den Messungen schließen, dass die große Halbachse seiner Bahn eine Ausdehnung von etwa $a \approx 1.5 \times 10^{14}$ m $\approx 4.8 \times 10^{-3}$ parsec hat. Schätzen Sie damit die Masse des Zentralkörpers im galaktischen Zentrum ab! Zum Vergleich: Die Masse der Sonne ist etwa $M_\odot \approx 2 \times 10^{30}$ kg. Um welche Art von Objekt dürfte es sich in Anbetracht der von Ihnen berechneten Masse handeln?
Hinweis: $G/(4\pi^2)$
$\approx 1.7 \times 10^{12}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}
$\approx 1.1 \times 10^{-16}$ parsec$^3 M_\odot^{-1}$a^{-2},
$(4\pi^2)/G$
$\approx 5.9 \times 10^{11}$ m^{-3}kg s^2
$\approx 8.8 \times 10^{15}$ parsec$^{-3} M_\odot$a^2.
Es genügt, das Ergebnis auf zwei signifikante Stellen anzugeben.

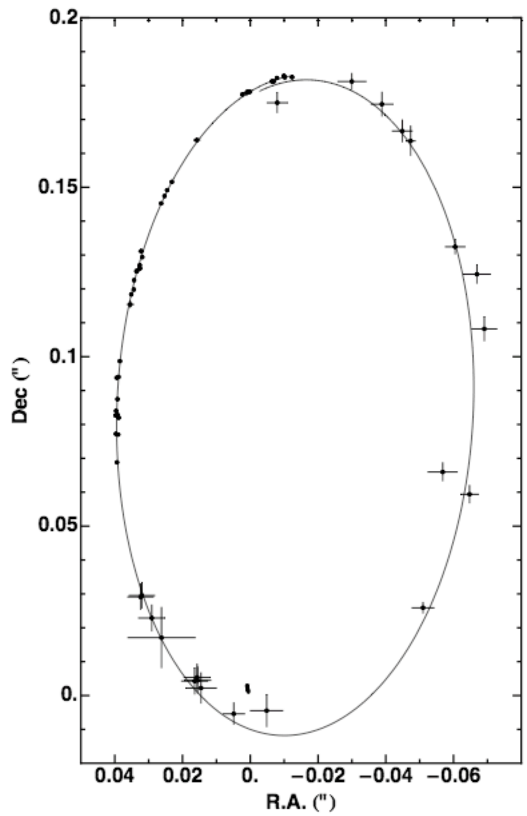

Bild 2: *Daten aus der Bahnbeobachtung des Sterns S2 mit einer daran angepaßten Keplerbahn. Position und Geschwindigkeit des Zentralkörpers waren freie Parameter. Aufgrund der Eigenbewegung des Zentralkörpers ist die Bahn am Apozentrum nicht ganz geschlossen. Aus* G. Gillessen *et al.*, arXiv:0810.4674 [astro-ph].

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung q bewegt sich in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E} = (0, E_0, 0))^T$ und einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Auf das Teilchen wirkt dann die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right),$$

wobei $\vec{v}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist.

a) (4 Punkte) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Teilchens in kartesischen Koordinaten an.

b) (2 Punkte) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Punkt $\vec{r}(0) = \vec{r}_0 = (0, 0, 0)^T$ und habe die Geschwindigkeit $\vec{v}(0) = (v_0, 0, 0)^T$. Für welche Werte der Anfangsgeschwindigkeit v_0 erfährt das Teilchen *keine* Beschleunigung durch die Wirkung der beiden Felder?

c) (10 Punkte) Wie lautet die Lösung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$ der Bewegungsgleichung mit den in Aufgabe b) angegebenen Anfangsbedingungen (für allgemeines v_0)?
Hinweise: Man zeigen, dass die Bewegung in y-Richtung durch eine inhomogene Differentialgleichung des Typs

$$\ddot{y} + \omega^2 y = C$$

beschrieben wird. Man berechne die Konstanten ω und C. Mithilfe der Substitution $y(t) = u(t) + C/\omega^2$ kann man dann die allgemeine reelle Lösung dieser Differentialgleichung bestimmen.

d) (4 Punkte) Welche Bahnkurve beschreibt das Teilchen für den speziellen Fall $v_0 = 0$? Skizzieren Sie die Kurve! Wie nennt man diese Kurvenform?

(Bitte wenden!)

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Drei gleiche Massenpunkte der Masse m, die sich nur entlang der x-Achse bewegen können, sind durch zwei Federn mit den Federkonstanten k_1 und k_2 und den Ruhelängen ℓ_1 und ℓ_2 miteinander verbunden (siehe BILD 3). Es wirken keine weiteren Kräfte.

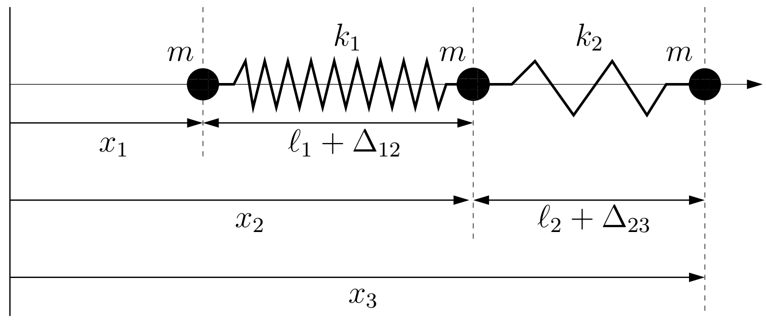

BILD 3

a) (5 Punkte) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf. Verwenden Sie dabei als verallgemeinerte Koordinaten

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = x_2 - \ell_1, \quad q_3 = x_3 - \ell_2 - \ell_1.$$

b) (3 Punkte) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen des Systems.

c) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems.

d) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Normalkoordinaten zur Eigenfrequenz $\omega = 0$. Welcher Bewegung entspricht das? Was ist die zugehörige Erhaltungsgröße, und aus welcher Symmetrie des Systems folgt sie?

e) (7 Punkte) Bestimmen Sie nun die beiden anderen Normalkoordinaten im Grenzfall $k_2 \ll k_1$. Entwickeln Sie dazu nach dem kleinen Parameter $\epsilon = k_2/k_1$. Skizzieren Sie die zugehörigen Bewegungen der Massenpunkte (zu einem festen Zeitpunkt, mit Angabe der Geschwindigkeiten durch Pfeile). Interpretieren Sie das Ergebnis!
Hinweis: $(1+x)^n = 1 + nx + \dots$ für $x \ll 1$.