Technische Universität München
Physik-Department
Institut für Theoretische Physik

SS 2000

Vordiploms-Klausur Quantenmechanik SS 2000
Prof. Dr. A. J. Buras

Wichtige Hinweise:

a) Lesen Sie sich die Aufgaben vollständig und in Ruhe durch.

b) Ergebnisse werden **nur** gewertet, wenn sie als solche kenntlich gemacht sind (zweimal unterstreichen).

c) Lösungswege müssen ordentlich und logisch aufgeschrieben werden.

d) Jede Aufgabe muß auf ein gesondertes Blatt geschrieben werden (dies gilt nicht für Teilaufgaben).

Aufgabe 1.

i) Ist die Identität $e^{A+B} = e^A \; e^B$ für beliebige Operatoren gültig? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii) Beweisen Sie, daß der Impulsoperator hermitesch ist. Es ist ausreichend, den Beweis im 1-dimensionalen Fall für $\hat{p}$ in der Ortsdarstellung zu führen.

iii) Beschreiben Sie **kurz** das Energie-Spektrum des Wasserstoff-Atoms,

- ohne relativistische Korrekturen,
- mit relativistischen Korrekturen für den Fall $n = 2$.
- Diskutieren Sie insbesondere das Spektrum für den Fall $n = 2$, wenn nur Spin-Bahn-Kopplung vorliegt.

iv) Beweisen Sie, daß der Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ einem Triplett zuzuordnen ist.

v) Welcher Zustand des Multipletts (Triplett oder Singlett) eines He-Atoms im ersten angeregten Zustand ist energetisch niedriger? Geben Sie eine physikalische Begründung.

Aufgabe 2.: Eindimensionale Schrödingergleichung.

In dem 1-dimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden bei $x = 0$ und $x = L$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \in (0, L) \\ \infty & \text{für} \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

befinde sich ein Teilchen der Masse m im Anfangszustand:

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{ik_0 x} \left(\Theta(x) - \Theta(x - L)\right) \qquad \text{mit } k_0 = \text{const.} \tag{2}$$

i) Untersuchen Sie den unendlich tiefen Potentialtopf, d.h. bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen normierten Eigenfunktionen.

ii) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Impulses und der Energie im Zustand (2).

iii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Energiemessung zur Zeit t die Grundzustandsenergie ergeben?

Aufgabe 3.

Berechnen Sie mit Hilfe der Unschärferelation eine untere Schranke für die Energieeigenwerte des eindimensionalen harmonischen Oszillators.

Aufgabe 4.: Störungstheorie.

Gegeben sei das folgende 1-dimensionale Modellsystem mit:

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \exp\left[-\lambda \left(\frac{x}{x_0}\right)\right] - m\omega^2 x_0^2 \sin\left[\lambda \left(\frac{x}{x_0}\right)^3\right].$$

Betrachten Sie dieses System als gestörten harmonischen Oszillator wobei $|\lambda| << 1$ und x_0 eine charakteristische Länge des Systems ist. $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

i) Berechnen Sie die Energiekorrektur bis zur 1. Ordnung in λ.

ii) Berechnen Sie die Korrektur zu den ungestörten Zuständen bis zur 1. Ordnung in λ.

iii) Berechnen Sie die Energiekorrektur zur Ordnung λ^2.

Hinweis

- Beachten Sie in Teilaufgabe iii), daß **alle** Terme in λ bis zur gewünschten Ordnung berücksichtigt werden müssen.
- $$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{i p}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{i p}{m\omega}\right)$$