Klausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Wintersemester 2016/17
13. Februar 2017

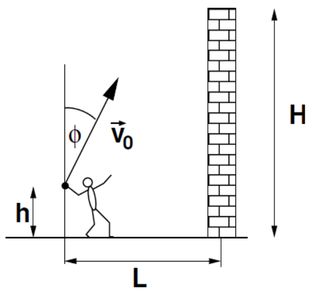
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Romeo gelingt es, sich der $H = 20\text{m}$ hohen Mauer, hinter der er Julia vermutet, bis auf $L = 10\text{m}$ zu nähern. Er will Julia eine Nachricht auf einem Stück Papier zukommen lassen, indem er das Papier um einen Stein wickelt und diesen über die Mauer wirft. Er gibt dem Stein eine Anfangsgeschwindigkeit mit Betrag $|\vec{v_0}| = 20\text{m/s}$ mit, wobei er ihn in einer Höhe $h = 1,8\text{m}$ loslässt.



(a) Wählen Sie geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts der Flugkurve des Steins in Abhängigkeit vom Abwurfwinkel ϕ an (siehe Skizze!).

(b) Welchen Abwurfwinkel ϕ_0 muss Romeo wählen, damit der Scheitelpunkt direkt über der Mauer liegt?

Hinweis: Die trigonometrische Gleichung $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin(2\phi)$ könnte nützlich sein.

Ersatzlösung: $\phi_0 = 12°$.(Diese Lösung zum Weiterrechnen in den nächsten Teilaufgaben benutzen, falls ihr Aufgabe b) nicht lösen konntet)

(c) Berechnen Sie, ob es Romeo schafft, die Nachricht über die Mauer zu werfen?

Lösung:

(a) Die Flugkurve des Steins ist eine Wurfparabel mit Anfangswerten $\vec{r}(0) = \vec{0}$ und $\vec{v}(0) = \vec{v_0}$:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_{0,x}t \\ v_{0,z}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v_{0,x} = |\vec{v}_0| \sin\phi, v_{0,z} = v_0 \cos\phi. \tag{1}$$

Am Scheitelpunkt ist $z(t)$ maximal, d.h.

$$\left.\frac{\mathrm{d}z(t)}{dt}\right|_{t=t_m} = 0 = v_{0,z} - gt_m \Rightarrow t_m = \frac{v_{0,z}}{g} \tag{2}$$

[1]

und damit

$$x_S = x(t_m) = \frac{v_{0,x}v_{0,z}}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin\phi\cos\phi = \frac{v_0^2}{2g}\sin(2\phi) \tag{3}$$

[1]

$$z_S = z(t_m) = \frac{v_{0,z}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_{0,z}^2}{g} = \frac{v_{0,z}^2}{2g} \tag{4}$$

[1]

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_S \\ z_S \end{pmatrix} = \frac{v_0^2}{2g} \begin{pmatrix} \sin(2\phi) \\ \cos^2\phi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

[1]

(b) Aus der Bedingung $x_S = L$ folgt für den gesuchten Abwurfwinkel ϕ_0:

$$\frac{v_0^2 \sin(2\phi_0)}{2g} = L \Rightarrow \sin(2\phi_0) = \frac{2gL}{v_0^2} = 0,4905 \Rightarrow \phi_0 = 14,7°. \tag{6}$$

[2]

(c) Die Scheitelhöhe beim Abwurf mit ϕ_0 beträgt

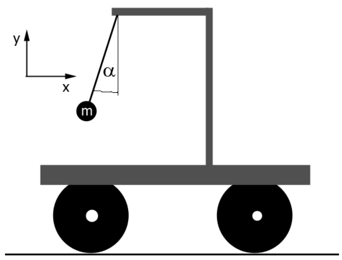
$$z_{S,0} = \frac{v_0^2}{2g}\cos^2\phi_0 = 19,1\text{m}, \tag{7}$$

da der Abwurf in $h = 1,8$m erfolgt, erreicht der Stein eine Höhe $20,9$m über dem Boden. Romeo schafft es also den Stein über die Mauer zu werfen.

[2]

Aufgabe 2 (13 Punkte)

An einem Ständer, der auf einem Wagen befestigt ist, hängt ein Pendel der Masse m. Fertigen Sie **jeweils** ein Zeichnung mit den wirkenden und resultierenden Kräften die auf die Masse m wirken an (groß genug und beschriften). Bestimmen Sie die den Betrag der **Spannung** F des Fadens und den **Winkel** α, den der Faden mit der y-Achse bildet:



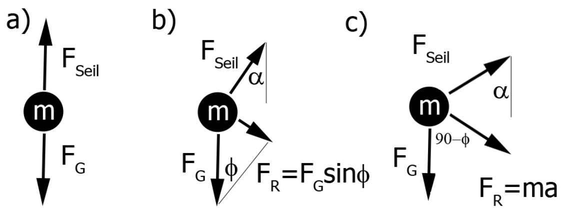
(a) wenn sich der Wagen auf einer waagrechten Ebene gleichförmig bewegt

(b) wenn der Wagen eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel ϕ frei in positive x- Richtung herabrollt

(c) wenn der Wagen mit der Gesamtbeschleunigung a die Ebene hinabrollt

Hinweis: Vernachlässigen Sie Startvorgänge und gehen Sie davon aus, dass sich der Wagen in dieser Bewegung befindet. $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

Lösung:



[3]

(a)

$$\alpha = 0 \qquad F = mg$$

[2]

(b)

$$\sum F_x = F_s \sin\alpha = mg\sin\phi\cos\phi \qquad \sum F_y = F_s\cos\alpha - mg = -mg\sin^2\phi \Rightarrow F_s\cos\alpha = -mg\cos^2\phi$$

[2]

F_x geteilt durch F_y

$$\frac{F_s\sin\alpha}{F_s\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{mg\sin\phi\cos\phi}{-mg\cos^2\phi} = -\tan\phi \Rightarrow \alpha = -\phi$$

[**1**]

$$\Rightarrow F_s \sin\alpha = mg\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow F_s = mg\cos\alpha$$

[**1**]

$\alpha = -\phi$ d.h. der Faden steht senkrecht auf der schiefen Ebene. ϕ wird von der Horizontalen aus positiv gezählt.

(c)

$$\sum F_x = F_s \sin\alpha = ma\cos\phi \qquad \sum F_y = F_s\cos\alpha - mg = -ma\sin\phi$$

[**2**]

F_x geteilt durch F_y

$$\frac{F_s\sin\alpha}{F_s\cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{a\cos\phi}{g - a\sin\phi}$$

[**1**]

$$\Rightarrow F_s = \frac{ma\cos\phi}{\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{a\cos\phi}{g-a\sin\phi}\right)\right)}$$

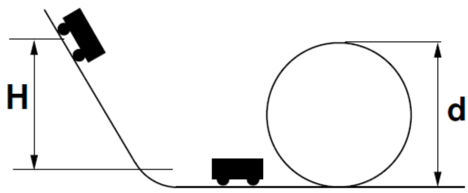
[**1**]

oder alternativ:

$$F = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ag\cos(90^\circ - \phi)} = m\sqrt{g^2 + a^2 - 2ag\sin(\phi)} \tag{8}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

In einer Achterbahn bleibt ein Wagen vor einem kreisförmigen Looping mit Durchmesser $d = 20\text{m}$ liegen. Durch einen Stoß mit einem zweiten Wagen gleicher Masse soll das Hindernis beseitigt werden. Beide Wagen bleiben nach dem Stoß verbunden und fahren zusammen durch den Looping.



(a) Wie groß muss die Geschwindigkeit am höchsten Punkt des Loopings mindestens sein, damit die Wagen nicht von der Schiene fallen?

Ersatzlösung: $v = 15\,\text{m/s}$. (Diese Lösung zum Weiterrechnen in den nächsten Teilaufgaben benutzen, falls ihr Aufgabe a) nicht lösen konntet)

(b) Aus welcher Höhe H muss der zweite Wagen losfahren?

Lösung:

(a) Damit die Wagen nicht abstürzen, muss die Zentrifugalkraft größer sein als die Gewichtskraft ($M = 2m$ ist die Masse von 2 Wagen):

$$\frac{Mv^2}{\frac{d}{2}} \geq Mg \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{dg}{2}} = 9,9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{9}$$

[2]

(b) Energieerhaltung:

$$E_{\mathrm{kin,unten}} = E_{\mathrm{kin,oben}} + \Delta E_{\mathrm{pot}} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Mv'^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + Mgd \tag{11}$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{v^2 + 2gd} = \sqrt{\frac{5}{2}gd} = 22,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{12}$$

[3]

Der Stoß zwischen beiden Wagen ist vollständig inelastisch. Impulserhaltung ergibt für die Geschwindigkeit v_2 des zweiten Wagens unmittelbar vor dem Stoß:

$$mv_2 = Mv' = 2m\sqrt{\frac{5}{2}gd} \Rightarrow v_2 = \sqrt{10gd}. \tag{13}$$

[2]

Die Höhe H ergibt sich aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgH \Rightarrow H = \frac{v_2^2}{2g} = 5d = 100\mathrm{m}. \tag{14}$$

(mit der Ersatzlösung $H = 125\mathrm{m}$).

[2]

Aufgabe 4 (12 Punkte)

An einer Feder (k=10$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$) hängt ein Körper mit 400 g Masse.

(a) Um wie viel cm wird die unbelastete Feder bis zur Gleichgewichtslage ausgedehnt?

Die Masse wird nun um 10 cm aus der Gleichgewichtslage nach unten gezogen und dann losgelassen.

(b) Wie lange dauert eine Schwingung?

(c) Geben Sie die Bewegungsgleichungen s(t) und v(t) an.

(d) Zeichnen Sie die Diagramme zu $s(t)$ und $v(t)$ quantitativ und genügend groß.

(e) Berechnen Sie die größte und die kleinste Kraft, die an der Feder zieht. Zeichnen Sie das Diagramm für $F(t)$ und beschriften Sie es.

Lösung

(a) In der Gleichgewichtslage gilt Kräftegleichgewicht

$$F_F = F_g \to k \cdot s_0 = mg \to s_0 = \frac{mg}{k} = 0,3924\mathrm{m} \tag{15}$$

[2]

(b)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,4\pi\mathrm{s} \approx 1,26\mathrm{s} \tag{16}$$

[2]

(c)

$$s(t) = -10\mathrm{cm} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{0,4\pi\mathrm{s}}t\right) = -10\mathrm{cm} \cdot \cos\left(\frac{5t}{1\mathrm{s}}\right) \tag{17}$$

$$v(t) = s(t)' = 50\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}} \cdot \sin\left(\frac{5t}{1\mathrm{s}}\right) \tag{18}$$

[2]

(e) Die maximale Kraft ist gegeben durch

$$F_{max} = k \cdot (s_0 + s) = 10\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (0,3924 + 0,1)\mathrm{m} = 4,924\mathrm{N} \tag{19}$$

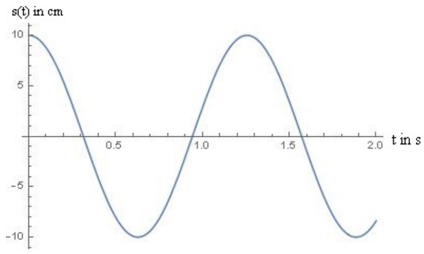
[2]

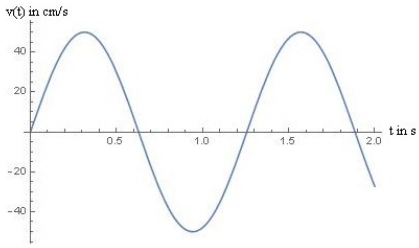
Die minimale Kraft ist

$$F_{min} = k \cdot (s_0 - s) = 2,924\mathrm{N} \tag{20}$$

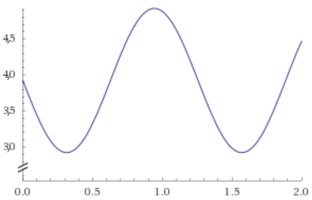
[1]

[1]





(d) [**2**]



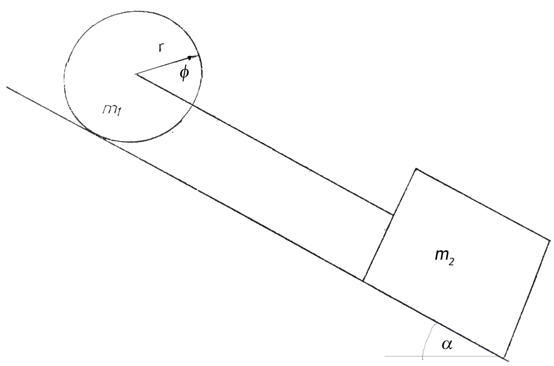
Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine Walze besteht aus einem Vollzylinder der Masse m_1. Der Vollzylinder habe den Radius r. An der Achse des Zylinders ist mit einem Seil die Masse m_2 befestigt. Das gesamte System befindet sich auf einer schiefen Ebene. Die Ebene ist um den Neigungswinkel α gegen die Waagerechte geneigt. Die Reibungszahl zwischen der Masse m_2 und der Unterlage sei μ. Das Trägheitsmoment der Zylinders um seine Achse ist $\frac{1}{2}mr^2$.

(a) Wie groß ist die Beschleunigung des Gesamtsystems, wenn die Walze rollt, ohne zu gleiten? Bestimmen Sie hierzu die Trägheitskraft der Walze F_T. Leiten Sie diese her, indem Sie das Drehmoment der Walze um ihren Auflagepunkt bestimmen.

(b) Wann muss sich die Masse unterhalb oder oberhalb der Walze befinden, damit das Seil während der Bewegung gespannt ist? Begründen Sie mit Rechnung.

Hinweis: Die Walze rollt. Es wirkt keine Rollreibungskraft.



Lösung:

(a) Bewegt sich der Schwerpunkt der Walze mit der Beschleunigung a, so gilt für die Trägheitskraft F_T

$$rF_T = -I_0\ddot{\phi} \tag{21}$$

[1]

$$\ddot{\phi} = \frac{a}{r} \qquad I_0 = \frac{1}{2}m_1r^2 + m_1r^2 = \frac{3}{2}m_1r^2 \tag{22}$$

[2]

$$F_T = -\frac{3}{2}ma \tag{23}$$

[1]

Hierbei sind $\ddot{\phi}$ die Winkelgeschwindigkeit und I_0 Das Trägheitsmoment bezüglich des Unterstützungspunktes.

Ist F die Seilspannung zwischen Walze und Block so gilt für die Kräfte, die auf die einzelnen Komponenten der Konstruktion wirken:

Für die Walze:

$$\frac{3}{2}m_1a = m_1g\sin(\alpha) + F \tag{24}$$

[1]

Für die Masse m_2:

$$m_2a = m_2g(\sin(\alpha) - \mu m_2g\cos(\alpha)) - F \tag{25}$$

[1]

Also

$$a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin(\alpha) - \mu m_2\cos(\alpha)}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} \qquad a = g\frac{(\frac{2}{3}m_1 + m_2)\sin(\alpha) - \mu m_2\cos(\alpha)}{m_1 + m_2} \tag{26}$$

[1]

(b) Damit ergibt sich für die Seilspannung:

$$F = m_2g\frac{\frac{m_1}{2}\sin(\alpha) - \frac{3}{2}m_2\mu\cos(\alpha))}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} \tag{27}$$

[1]

Falls nun $\tan(\alpha) \geq \mu(3 + 2m_2/m_1)$, dann ist $F \geq 0$, d.h. das Seil ist bei der gezeichneten Anordnung gespannt.

[1]

Falls gilt $\tan(\alpha) \leq \mu(3 + 2m_2/m_1)$, dann müssen Walze und Block vertauscht werden, damit das Seil gespannt ist.

[1]

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Das menschliche Blut strömt aus dem Herzen in die Aorta. Diese verzweigt sich weiter in mehrere großen Arterien und schließlich in viele kleine Kapillaren.

Die Aorta hat einen typischen Durchmesser von $d_A = 2,5\text{cm}$ und transportiert einen Blutfluss von $\frac{dV}{dt} = 5,0\text{dm}^3/\text{min}$. Eine typische Kapillare hat einen Durchmesser von $d_K = 6,0 \cdot 10^{-6}\text{m}$ und das Blut fließt darin mit einer Geschwindigkeit von $v_K = 0,50\text{mm/s}$.

(a) Bestimmen Sie aus dem Blutfluss die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}_A$, mit der das Blut durch die Aorta fließt. Vernachlässigen Sie dabei die Gravitation.

(b) Rechnen Sie anhand der Angaben aus, wie viele Kapillaren es im menschlichen Körper gibt!

Lösung

(a)

$$V = A \cdot l = Avt = \frac{d^2\pi}{4}vt \Rightarrow \dot{V} = \frac{d^2\pi}{4}v$$

$$v_A = \frac{4}{\pi d^2} \cdot \dot{V} = \frac{4}{\pi \cdot (0,025\text{m})^2} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-3}\text{m}^3}{60\text{s}} = 0,17\text{m/s}$$

[**4**]

(b) A_A ist die Querschnittsfläche der Aorta und A_K die *aller* Kapillaren, durch die Blut fließt: $A_K = N\pi r_K^2 = N\pi d_K^2/4$, wobei N die Zahl der Kapillaren ist. Die Kontinuitätsgleichung liefert

$$v_A A_A = v_K A_K \Rightarrow v_A \cdot \pi d_A^2/4 = v_K \cdot N\pi d_K^2/4$$

$$N = \frac{v_A d_A^2}{v_K d_K^2} = 5,9 \cdot 10^9 = 5,9 Milliarden$$

[**4**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Wir betrachten **stehende** Schallwellen in einer geschlossenen Luftsäule, welche die Form eines schlanken Torus (Ring) hat ($\Delta r \ll r_0$)

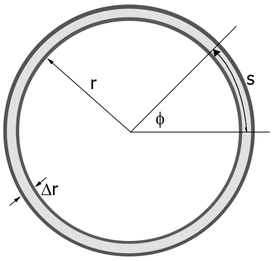
(a) Geben Sie die allgemeine Wellengleichung an, die eine Auslenkung in s-Richtung beschreibt.

(b) Lösen Sie die Lösung der Wellengleichung allgemein. Überlegen Sie sich dazu wie Sie das System über den Winkel ϕ beschreiben können und was die Randbedingung des Systems ist.

Lösung:

(a) Die gesuchte Wellengleichung ist

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} {v_0}^2 \tag{28}$$



[2]

(b) Es ist einfacher eine direkt vom Winkel ϕ abhängige Wellenfunktion einzuführen:

$$\psi(\phi, t) = \Psi(s, t) \tag{29}$$

wobei $s = r_0\phi$

[1]

Damit folgt dann:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}{r_0}^2; \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} \tag{30}$$

Setzt man nun (2) in (3) ein, so folgt:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{{v_0}^2}{{r_0}^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{31}$$

[1]

Das Problem ist rotationssymmetrisch und somit gilt die Periodizitätsbedingung:

$$\psi(\phi + 2\pi, t) = \psi(\phi, t) \tag{32}$$

Es ergibt sich als allgemeine Lösung der Wellengleichung ($k' = \frac{k}{r_0}$:

[1]

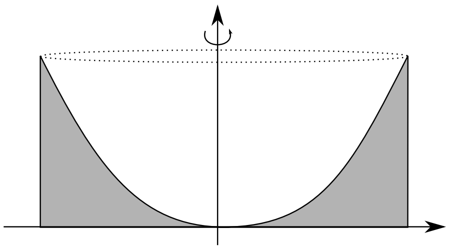
$$\psi(\phi, t) = a\cos(k'\phi - \omega t + \alpha), \quad (\omega \geq 0) \tag{33}$$

[1]

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Parabolspiegel, der aus einem homogenen Zylinder mit Radius R und Höhe h gefertigt ist. In der Mitte sei das Material beliebig dünn.

Berechnen Sie die Masse M in Abhängigkeit von ρ, R und h, sowie Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse.



Lösung

Die Zylinderfläche liege in der x-y-Ebene und die Symmetrieachse auf der z-Achse. Die Höhe der Spiegelfläche in Abhängigkeit des Radius $\bar{r}$ (aus den Zylinderkoordinaten) ist gegeben durch eine Parabel

$$z = a\bar{r}^2$$

mit $z(R) = h$ folgt $a = \frac{h}{R^2}$ und somit

$$z = \frac{h}{R^2}\bar{r}^2$$

[**1**]

Für die Masse gilt

$$\begin{aligned}
M &= \int_V \rho \mathrm{d}^3 x \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{\frac{h\bar{r}^2}{R^2}} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \frac{h\bar{r}^3}{R^2} \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho R^2 h
\end{aligned}$$

[**4**]

Der Abstand zur Drehachse ist gerade

$$r_\perp^2 = \bar{r}^2.$$

Das Trägheitsmoment ist somit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_V \rho r_\perp^2 \,\mathrm{d}^3x \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r} \int_0^{\frac{h\bar{r}^2}{R^2}} \mathrm{d}z \,\bar{r}\bar{r}^2 \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r} \,\frac{h\bar{r}^2}{R^2}\bar{r}^3 \\
&= \frac{2\pi\rho h}{R^2} \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r}^5 \\
&= \frac{2\pi\rho h}{R^2}\frac{1}{6}R^6 \\
&= \frac{\pi}{3}\rho h R^4 \\
&= \frac{2}{3}MR^2
\end{aligned}
$$

[**3**]