DVP in HM III (Analysis 2) für Physik — 10.09.2007

Prüfer: Prof. Dr. P. Rentrop — 14:30 – 16:00 Uhr

Übersicht der Klausuraufgaben zum Abtrennen

Aufgabe 1 (ca. 5 P)

Man löse mittels Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y''(x) + 4\,y'(x) + 4\,y(x) = x\ \mathrm{e}^{-2\,x}\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = -2\ .$$

Aufgabe 2 (ca. 6 P)

Man zeige, dass sich

$$f(x,y,z) := 1 - z + \mathrm{e}^{-2z}\cos(x-y) = 0$$

in der Umgebung des Punktes $P := (\pi\,,\,0\,,\,0)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x,y)$ darstellen lässt.

Man berechne $\operatorname{grad} g(\pi, 0)$ und bestimme Normalenvektor und Tangentialebene im Punkt P der durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ definierten Fläche.

Aufgabe 3 (ca. 14 P)

Gegeben ist $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) := (x^2 - y^2 + 3)\ \mathrm{e}^{x^2+y^2}$.

Man bestimme

a) alle stationären Stellen von f sowie deren Typ,

b) die Extrema von $g(t) := f\big(2\,\cos t\,,\,2\,\sin t\big)\,,\ t \in [\,0\,,\,2\,\pi\,]$,

c) die Punkte in $K := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x^2 + y^2 \le 4\big\}$, in denen $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ (bzgl. K globale) Maxima bzw. Minima annimmt, sowie die Werte in diesen Punkten.

Aufgabe 4 (ca. 4 P)

Zu den Messdaten $(x_j, y_j)\,,\ j = 1,\ldots,4$ mit

x_j	-2	-1	1	2
y_j	1.5	0	1	2.5

bestimme man die Ausgleichsparabel $p(x) = a_1\,x + a_2\,x^2$, d.h. $a_1\,,\ a_2 \in \mathbb{R}$, so dass $\displaystyle\sum_{j=1}^{4}\big(p(x_j) - y_j\big)^2$

minimal ist.

Aufgabe 5 (ca. 7 P)

Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{V}_p(\underline{x}) := \begin{pmatrix} p\,y\,z + 2\,x \\ x\,z - 2\,y \\ x\,y \end{pmatrix}$, $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit festem Parameter $p \in \mathbb{R}$.

a) Man zeige: Das Vektorfeld $\underline{V}_p$ besitzt **nur** für $p = 1$ ein Potential.

b) Man bestimme für $p = 1$ das zu $\underline{V}_1$ gehörige Potential.

c) Für das Vektorfeld $\underline{V}_p$ berechne man die Arbeit $\displaystyle\int_C < \underline{V}_p(\underline{x})\,, d\underline{x} >$ längs C: $\underline{s}\,(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ in Abhängigkeit von p.

Aufgabe 6 (ca. 7 P)

Man bestimme die Lösung des inhomogenen linearen Anfangswertproblems 1. Ordnung mit **variablen** Koeffizienten

$$y'(x) - \frac{2\,x}{x^2+1}\,y(x) = 1\,, \quad y(0) = 1\,.$$