TU MÜNCHEN
DIPLOMVORPRÜFUNG PHYSIK
KLAUSUR ZUR THEORETISCHEN PHYSIK (MECHANIK)

---

9. September 2002 — H. Grießhammer, Th. Hemmert, P. Ring — Zeit: 90 Minuten

Auf jedem Blatt sollte der *eigene Name* und die *Matrikelnummer* stehen.

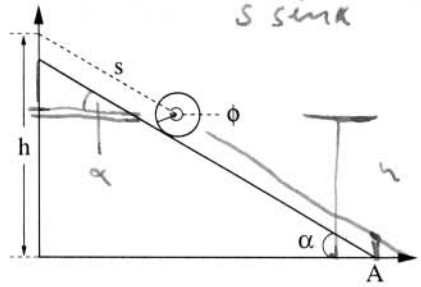
******* Bitte jede Aufgabe auf ein gesondertes Blatt. *******

Lesbar schreiben freut die Korrektoren!

$mg(h - s\sin\alpha)$

$s \sin\alpha$

1. **(8P)** EINEN ABHANG HERUNTERROLLEN: Ein homogener Zylinder (Masse M, Radius R, Länge l) rollt reibungslos im homogenen Schwerefeld der Erde eine Schiene der Höhe h mit Neigungswinkel α herab (siehe Abb.). Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment des Zylinders I bezüglich der für das Problem relevanten Achse.

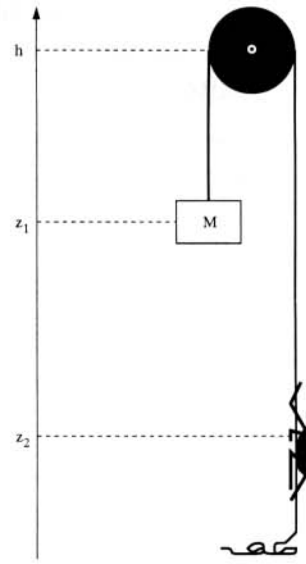
b) Welche Zwangsbedingung verknüpft s und ϕ beim Rollen ohne Gleiten?

c) Wie lautet die kinetische Energie des Zylinders?

d) Wie lautet seine potentielle Energie U (unter der Vereinbarung, daß $U = 0$ ist, wenn die Zylinder ~~Kugel~~ den Punkt A erreicht hat)?

e) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Zylinder am Punkt A ein?

2. **(16P)** ATWOODS AFFE: Ein Affe der Masse m klettert im homogenen Schwerefeld der Erde ein masseloses Seil hoch, das über eine in der Höhe h befestigte, masselose und unendlich dünne Seilrolle führt. An anderen Ende des Seils hängt ein Gewicht der Masse M. Am Seil legt der Affe die Strecke $s(t)$ zurück. Dabei ist $s(t)$ eine vorgegebene Funktion der Zeit t. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Stück Seil zwischen Affe und Gewicht die Länge l. Siehe Abbildung. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems Affe-Gewicht auf, wobei z_1 die Höhe des Gewichtes über dem Erdboden sei, und z_2 die des Affen.

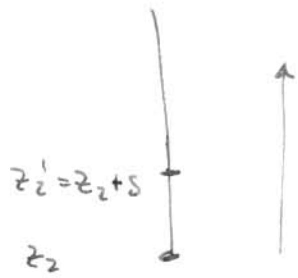
b) Formulieren Sie die Zwangsbedingung und zeigen Sie, daß sich die Lagrangefunktion schreiben läßt als

$$L(z_1, \dot{z}_1, t) = \frac{M}{2}\,\dot{z}_1^2 + \frac{m}{2}\,(\dot{z}_1 - \dot{s})^2 - Mg\,z_1 - mg\,\big(c + s(t) - z_1\big)\ .$$

Bestimmen Sie die Konstante c.

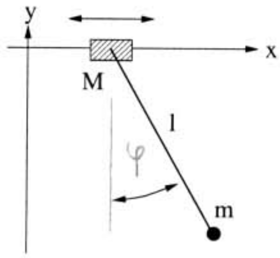
? c) Integrieren Sie die resultierende Euler-Lagrange Gleichung.

? d) Ist die Energie in diesem System erhalten? Begründung!



Fortsetzung nächste Seite

3. **(16P)** Pendel an der Laufkatze: Ein ebenes Pendel der Masse m hängt an einem starren, masselosen Seil der Länge l im homogenen Schwerefeld der Erde. Das Pendel ist an einer Masse M aufgehängt, die sich reibungsfrei auf einer horizontalen Achse bewegen kann, siehe Skizze. Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Geben Sie die verallgemeinerten Koordinaten für das Problem an und drücken Sie die Koordinaten von M ($\vec{r}_M$) und von m ($\vec{r}_m$) durch diese aus.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

c) Finden Sie heraus, welche der verallgemeinerten Koordinaten aufgrund von Symmetrien des Systems zyklisch sind. Berechnen Sie die dazugehörigen Konstanten der Bewegung. Erläutern Sie deren physikalische Bedeutung.

d) Berechnen Sie das Verhalten der Lagrangefunktion unter Galilei-Transformationen entlang der x-Achse, $x \to x + v\,t$, $v = \text{const.}$ Zeigen Sie, daß daraus der Schwerpunktssatz folgt:

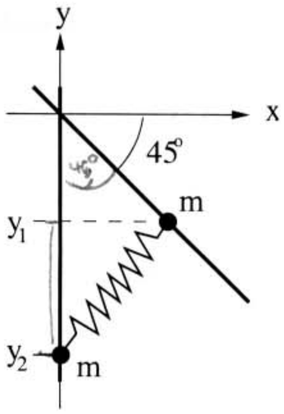
$$t\,P = (m+M)\,X + \text{const.}\ ,$$

wobei P und $X = x_M + \frac{m}{M+m}\,l\sin\varphi_m$ die x-Komponenten von Schwerpunktsimpuls und Schwerpunktskoordinate sind.

e) Identifizieren Sie die Form der Bahnkurve des Pendelendpunktes m, wenn der Schwerpunkt des Systems keine Bewegung in x-Richtung ausführt.

Hinweis: Nutzen Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und d) aus.

4. **(20P)** Tit for Tat: Zwei punktförmige Körper gleicher Masse m bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde reibungsfrei auf einer Vertikalen, bzw. auf einer um $\frac{\pi}{4}$ geneigten Geraden, siehe Abbildung. Sie sind mit einer idealen Feder mit Federkonstante k verbunden, die im entspannten Zustand Länge $l = 0$ hat. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in den Variablen y_1, y_2 auf, den vertikalen Komponenten der Koordinaten der Massenpunkte.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab.

c) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.

d) Es ist nun sinnvoll, neue Koordinaten ξ_1, ξ_2 zu wählen, die nur die Auslenkung der Massen aus der Gleichgewichtslage beschreiben. Zeigen Sie, daß mit dieser Wahl die Lagrangefunktion dann lautet:

$$L = \frac{m}{2}\left[2\,\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right] - \frac{k}{2}\left(2\,\xi_1^2 - 2\,\xi_1\,\xi_2 + \xi_2^2\right)$$

e) Welche Eigenfrequenzen besitzt das System?

f) Wie lautet die allgemeine Lösung? Interpretieren Sie die Normalschwingungen.

g) Geben Sie die Lösung an, wenn zur Zeit $t = 0$ beide Massen im Koordinatenursprung ruhen.

Viel Erfolg!