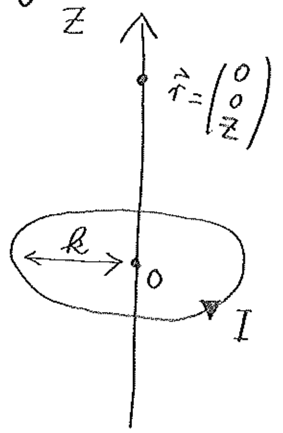
Zwischenklausur Elektrodynamik WS 13/14

Aufgabe 1:



kreisförmige Drahtschleife vom Radius R, im Ursprung zentriert.

a) Das Magnetfeld auf der z-Achse folgt aus dem Biot-Savart-Gesetz:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_L d\vec{r}\,' \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

Der Draht wird gegen den Uhrzeigersinn parametrisiert durch

$$\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi, \quad \varphi = 0 .. 2\pi$$

Mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ folgt

$$\vec{r}-\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{R^2+z^2}$$

Und damit

$$d\vec{r} \times (\vec{r}-\vec{r}\,') = R\,d\varphi \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = R\,d\varphi \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ R \end{pmatrix}$$

Es folgt für das Magnetfeld auf der z-Achse:

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{k}{(k^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z\cos\varphi \\ z\sin\varphi \\ k \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 0 \text{ nach} \\ \swarrow \ \varphi\text{-Integration} \\ \leftarrow 2\pi \end{matrix}$$

$$= \frac{\mu_0 I k^2}{2(k^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

b) Das magnetische Dipolmoment der Leiterschleife ist

$$\vec{m} = I F \vec{n} = I \pi k^2 \vec{e}_z .$$

Damit folgt für das magnetische Dipolfeld der Leiterschleife

$$\vec{B}_{dip}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3}\left(3\hat{r}\ \vec{m}\cdot\hat{r} - \vec{m}\right)$$

auf der z-Achse mit $\vec{r} = (0,0,z)$, $\hat{r} = \pm\vec{e}_z$:

$$\vec{B}_{dip}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi|z|^3} I\pi k^2 \left(3\vec{e}_z - \vec{e}_z\right) = \frac{\mu_0 I k^2}{2|z|^3}\vec{e}_z$$

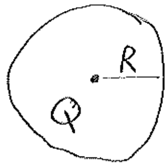
Für große Entfernungen von der Drahtschleife $|z| \gg k$ folgt für das Ergebnis aus (a):

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I k^2}{2(z^2)^{3/2}}\vec{e}_z + \mathcal{O}(|z|^{-5}) \quad \checkmark$$

c) Bei großen Abständen ist das Magnetfeld $\vec{B}$ einer lokalisierten Stromverteilung immer durch das Dipolfeld mit dem magnetischen Moment $\vec{m}$ gegeben.
Es folgt für das Dipolfeld in der xy-Ebene mit $\vec{r} = (x,y,0)$, $\vec{m}\cdot\hat{r} = 0$:

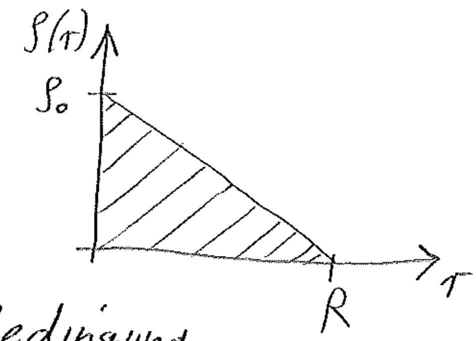
$$\vec{B}_{dip}(x,y,0) = \frac{-\mu_0 I k^2}{4\ (x^2+y^2)^{3/2}}\vec{e}_z$$

Aufgabe 2: Inhomogen geladene Kugel



a) Wir wählen als Ansatz für die radialsymmetrische Ladungsdichte

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$$



Die Konstante ρ_0 erhält man aus der Bedingung, dass die Gesamtladung Q sein soll:

$$Q = \int d^3r\, \rho(r) = \int d\Omega \int_0^\infty dr\, r^2 \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) \Theta(R-r)$$

$$= 4\pi \rho_0 \int_0^R dr\, r^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right) = 4\pi \rho_0 \left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \rho_0 R^3 \quad \Rightarrow \quad \rho_0 = \frac{3Q}{\pi R^3}$$

Also: $\boxed{\rho(r) = \frac{3Q}{\pi R^4} (R-r)\, \Theta(R-r)}$

b) Aufgrund der sphärischen Symmetrie der Ladungsverteilung gilt für das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\, \vec{e}_r$ in Kugelkoordinaten.

Wir verwenden den physikalischen Satz von Gauß

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial V} d\vec{F} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V d^3r'\, \rho(\vec{r}\,')$$

und wählen als Volumen eine Kugel vom Radius r.

Dann ist das vektorielle Oberflächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{F} = r^2\, d\Omega\, \vec{e}_r \,.$$

Mit $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$ folgt aus dem Gauß'schen Satz:

$$\int d\Omega\, r^2 E(r) = 4\pi r^2 E(r) \overset{!}{=} \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r dr'\, r'^2 \rho(r')$$

$\underline{r > R:}$ $\quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$ $\quad$ (siehe (a))

$\underline{r < R:}$ $\quad E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0 r^2} \frac{3Q}{\pi R^4} \int_0^r dr'\, r'^2 (R - r')$

$$= \frac{3Q}{\pi\varepsilon_0 R^4} \frac{1}{r^2}\left(\frac{Rr^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^4}(4Rr - 3r^2)$$

c) Die elektrostatische Energiedichte ist $w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r})$, damit folgt für die Arbeit:

$$W = \int d^3r\, w(\vec{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2} 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 E(r)^2$$

$$= 4\pi \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \left\{ \int_0^R dr\, r^2 \frac{(4Rr - 3r^2)^2}{R^8} + \int_R^\infty dr\, r^2 \frac{1}{r^4} \right\}$$

Substitution: $\quad r = sR$, $dr = R\,ds$

$$\Rightarrow W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left\{ \int_0^1 ds\, s^2 (4s - 3s^2)^2 + \underbrace{\int_1^\infty ds\, 1/s^2}_{-1/s\big|_1^\infty = +1} \right\}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left\{ \underbrace{\frac{17}{35} + 1}_{\frac{52}{35}} \right\} \Rightarrow \boxed{W = \frac{13 Q^2}{70\pi\varepsilon_0 R}}$$

NR: $\int_0^1 ds\, s^2 (4s - 3s^2)^2 = \int_0^1 ds\, s^2 (16s^2 - 24s^3 + 9s^4)$

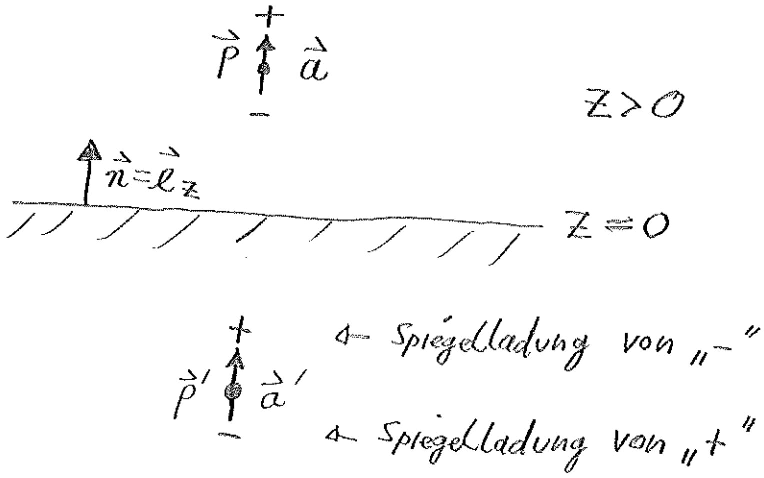
$$= 16\frac{s^5}{5} - 24\frac{s^6}{6} + 9\frac{s^7}{7}\Big|_0^1 = \underbrace{\frac{16}{5} - \frac{24}{6}}_{\frac{96-120}{30} = -24/30} + \frac{9}{7} = -\frac{4}{5} + \frac{9}{7}$$

$$= \frac{-28 + 45}{35} = \frac{17}{35}$$

Aufgabe 3:

Elektrischer Dipol $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$ bei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ vor geerdeter Metallplatte in xy-Ebene

a) Um die Randbedingung zu erfüllen plaziert man einen Spiegeldipol an der Stelle $\vec{a}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ mit dem Dipolmoment $\vec{p}' = +\vec{p}$! (siehe Skizze)



Damit folgt für das Potential im oberen Halbraum $z > 0$:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} + \frac{\vec{p}' \cdot (\vec{r} - \vec{a}')}{|\vec{r} - \vec{a}'|^3} \right\}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{z - a}{[x^2 + y^2 + (z-a)^2]^{3/2}} + \frac{z + a}{[x^2 + y^2 + (z+a)^2]^{3/2}} \right\}$$

Auf der Platte ist das Potential (mit $z = 0$)

$$\Phi(x, y, 0) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ \frac{-a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \right\}$$

$$= 0 \checkmark$$

b) Die influenzierte Flächenladungsdichte auf der Metallplatte ist

$$\sigma = \varepsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E} \Big|_{Fläche}$$

also mit $\vec{n} = + \vec{e}_z$ auf der Fläche $z = 0$;

$$\sigma(x,y) = \varepsilon_0 E_z(x,y,0)$$

$$= -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \Phi(x,y,z)\Big|_{z=0}$$

Mit $\dfrac{\partial}{\partial z} \dfrac{z \pm a}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{3/2}}$

$$= \frac{1}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{3/2}} + \frac{-\frac{3}{2}2(z\pm a)(z\pm a)}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2-2(z\pm a)^2}{[x^2+y^2+(z\pm a)^2]^{5/2}}$$

folgt für die Flächenladungsdichte

$$\sigma(x,y) = \frac{-p}{4\pi} \frac{x^2+y^2-2a^2}{[x^2+y^2+a^2]^{5/2}} (\overset{+a}{1} + \overset{-a}{1}) = \frac{p}{2\pi} \frac{2a^2-x^2-y^2}{[a^2+x^2+y^2]^{5/2}}$$

Bemerkung:

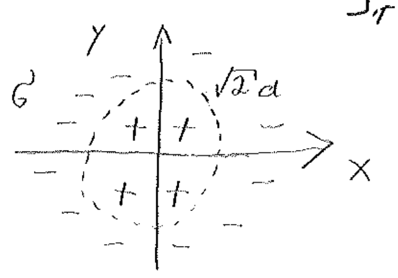
Die gesamte influenzierte Ladung ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \sigma(x,y) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, r \frac{p}{2\pi} \frac{2a^2-r^2}{(a^2+r^2)^{5/2}}$$

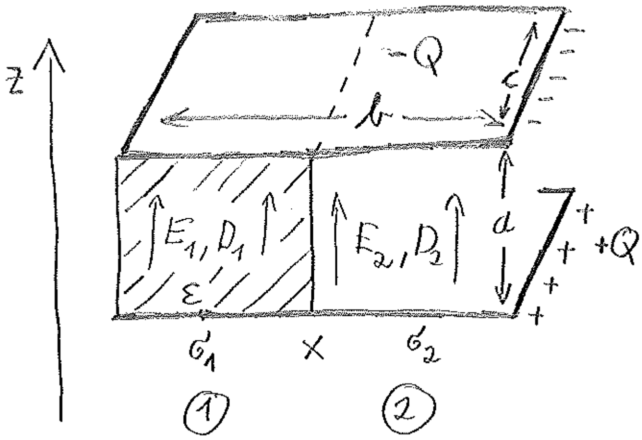
| Polarkoordinaten $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$= p \int_0^{\infty} dr \frac{3a^2-(a^2+r^2)}{(a^2+r^2)^{5/2}} = p\Big[3a^2 \tfrac{-2}{3}(a^2+r^2)^{-3/2} + 2(a^2+r^2)^{-1/2}\Big]_{r=0}^{\infty}$$

$$= p(2a^2 a^{-3} - 2a^{-1}) = 0$$



Aufgabe 4:



a) Streufelder können vernachlässigt werden, und damit die Felder im Bereich 1 bzw. 2 als homogen angenommen werden, d.h. (mit E_1, E_2, D_1, D_2 konstant)

$$\vec{E}_1 = E_1 \vec{e}_z \quad , \vec{E}_2 = E_2 \vec{e}_z \; , \vec{D}_1 = D_1 \vec{e}_z \; , \vec{D}_2 = D_2 \vec{e}_z \; .$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\vec{E}$ sind stetig. An der Grenzfläche Medium/Vakuum bei x hat $\vec{E}$ nur eine Tangentialkomponente ($\propto \vec{e}_z$) und es folgt:

$$E_1 = E_2 \; .$$

Weiter gilt im Medium bzw. im Vakuum

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1 \quad , D_2 = \varepsilon_0 E_2$$

und es folgt für die dielektrischen Verschiebungen

$$D_1 = \varepsilon D_2 \; .$$

b) Die Normalkomponente von $\vec{D}$ springt um die freie Flächenladungsdichte:

$$\sigma = \vec{n} \cdot \vec{D} \big|_{\text{Fläche}}$$

wobei der Normalenvektor auf der unteren Platte $\vec{n} = \vec{e}_z$ ist. Es folgt also

$$\sigma_1 = D_1 \quad , \sigma_2 = D_2 \; .$$

[Auf der oberen Platte gilt dementsprechend mit $\vec{n} = -\vec{e}_z$: $\sigma_1 = -D_1$, $\sigma_2 = -D_2$]

c) Die untere Platte trägt die Gesamtladung Q, damit muss gelten

$$Q \overset{!}{=} \int dF\,\sigma = xc\,\sigma_1 + (b-x)c\,\sigma_2$$

$$= c(x\varepsilon + b - x)\varepsilon_0 E_1$$

$\sigma_1 = D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1$

$\sigma_2 = D_2 = \varepsilon_0 E_2 = \varepsilon_0 E_1$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = \frac{Q/c}{\varepsilon_0 (x\varepsilon + b - x)} = \frac{Q/c}{\varepsilon_0 [b + (\varepsilon - 1)x]}$$

$$\Rightarrow D_1 = \frac{\varepsilon Q/c}{b + (\varepsilon-1)x}, \quad D_2 = \frac{Q/c}{b + (\varepsilon - 1)x}$$

d) Die elektrostatische Feldenergie ist

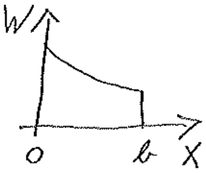
$$W(x) = \frac{1}{2}\int dV\, \vec{D}\cdot\vec{E} = \frac{1}{2} axc\, D_1 E_1 + \frac{1}{2} a(b-x)c\, D_2 E_2$$

$$= \frac{1}{2} ac \frac{Q^2/c^2}{\varepsilon_0 [b + (\varepsilon-1)x]^2} (\varepsilon x + b - x)$$

$$\Rightarrow W(x) = \frac{Q^2 a}{2c\varepsilon_0 [b + (\varepsilon - 1)x]}$$

Feldenergie nimmt mit wachsendem x <u>ab</u>.

$(\varepsilon > 1)$



e) Kraft, mit der das Dielektrikum in den Kondensator gezogen wird:

$$F = -\frac{dW}{dx} = \frac{Q^2 a(\varepsilon - 1)}{2c\varepsilon_0 [b + (\varepsilon-1)x]^2} > 0$$