....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Wiederholungsklausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. N. Berger

21. April 2017, 10:30 – 12:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**
Sei n eine natürliche Zahl größer 1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ genau 2^n Teilmengen hat.

LÖSUNG:

Induktionsanfang $n = 1$*:* **[1/2]**
Eine einelementige Menge besitzt $2^1 = 2$ Teilmengen **[1/2]** ,
nämlich die leere Menge $\emptyset$ und sich selbst. **[1]**

Induktionsschritt $n \to n + 1$*:* **[1/2]**
Nach IV hat die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ genau 2^n Teilmengen, sagen wir $M_1, \dots, M_{2^n}$,
und das sind zugleich genau diejenigen Teilmengen von $M := \{1, 2, \dots, n + 1\}$ **[1]** ,
die $n + 1$ nicht als Element enthalten. **[1]**
Die Mengen $M_{2^n+1} = M_1 \cup \{n + 1\}$, $M_{2^n+2} = M_2 \cup \{n + 1\}$, ..., $M_{2^n+2^n} = M_{2^n} \cup \{n + 1\}$ **[1]** sind 2^n Teilmengen von M. **[1]** Außerdem sind das genau diejenigen Teilmengen von M, die $n + 1$ als Element enthalten **[1]** – denn aus jeder solchen Teilmenge kann man $n + 1$ entfernen, wodurch man eine Teilmenge von $\{1, 2, \dots, n\}$ bekommt.
Also stellen die (paarweise verschiedenen) 2^{n+1} Mengen M_1, ..., $M_{2^{n+1}}$ alle Teilmengen von M dar. **[1/2]**

2. **Komplexe Zahlen** **[4 Punkte]**

Geben Sie alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 = \frac{4\mathrm{i}-2}{3-\mathrm{i}}$ an!

LÖSUNG:

Es ist $\frac{4\mathrm{i}-2}{3-\mathrm{i}} \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{(4\mathrm{i}-2)(3+\mathrm{i})}{10} = -1 + \mathrm{i} \overset{\textbf{[1]}}{=} \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{i}} \overset{!}{=} z^2$.
Nach Vorlesung existieren 2 Lösungen $z_1 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{3}{8}\pi\mathrm{i}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{11}{8}\pi\mathrm{i}}$. **[2]**

3. **Infimum und Supremum** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie Infimum und Supremum der Mengen M_1 und M_2.
Entscheiden Sie, ob jeweils Minimum und Maximum existiert und geben Sie diese ggf. an.

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x^4 + x^2 \leq 0\}$,

(b) $M_2 := f([-1,0])$, wobei $f : [-1,0] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} |x| \,, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ x \;, & \text{sonst} \end{array} \right\}$.

LÖSUNG:

(a) $x^4 + x^2 \leq 0 \iff x = 0$. So ist $M_1 = \{0\}$. **[1]**
$\Rightarrow \sup M_1 = \max M_1 = \inf M_1 = \min M_1 = 0$, da M_1 1-elementige Menge. **[2]**

(b) $M_2 = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cup ([-1,0] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ **[1]**
$\Rightarrow \sup f([-1,0]) = 1 = \max f([-1,0])$ **[1]**, da $1 \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ größtes Element **[1]**
und $\inf f([-1,0]) = -1$, da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt. **[1]**
Es existiert kein Minimum, da $-1 \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **[1]**

4. **Reihen** **[8 Punkte]**

Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{20}-1)$ auf Konvergenz und auf absolute Konvergenz.

LÖSUNG:

Es gilt die Konvergenz, wegen dem Leibnizkriterium: **[1]**

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{20} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty}(\sqrt[k]{20}-1) = 0$ **[1]**

da $1 \leq \sqrt[k+1]{20} \leq \sqrt[k]{20}$, so ist $(\sqrt[k]{20}-1)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend **[1]**

Es gilt nicht die absolute Konvergenz, **[1]**

denn $|(-1)^{k+1}(\sqrt[k]{20}-1)| = \sqrt[k]{20}-1$ und

$20 \geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \iff \sqrt[k]{20}-1 \geq \frac{1}{k}$, denn $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to \mathrm{e}$ **[2]**

$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{20}-1) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, divergiert da harmonische Reihe divergent **[2]**

5. **Stetige und differenzierbare Funktionen** **[6 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, $F(\frac{1}{2}) = 1$. Beweisen Sie: es gibt ein $t \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(t) = 2$.

LÖSUNG:

F ist als Stammfunktion von f differenzierbar auf $[0,1]$. **[1]**
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung **[1]**
gibt es ein $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ **[1]** mit $F'(\xi) \overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0} \overset{\textbf{[1]}}{=} 2$.
Somit ist $f(\xi) = F'(\xi) = 2$ und $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. **[1]**

6. **Ableitungen der Umkehrfunktion** **[6 Punkte]**

Sei $f : (-2, 0) \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare, streng monoton steigende und surjektive Funktion mit $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 2$, $f''(-1) = 3$. Wie lautet die Umkehrfunktion und ihre erste und zweite Ableitung im Punkt 1?
HINWEIS: Gesucht ist $f^{-1}(1)$, $(f^{-1})'(1)$ und $(f^{-1})''(1)$.

LÖSUNG:

f ist injektiv, da streng monoton steigend, also bijektiv.
Für die Umkehrfunktion gilt offenbar $f^{-1}(1) = -1$. **[1]**
Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt allgemein $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ und speziell $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{2}$. **[2]**
Für die zweite Ableitung gilt

$$(f^{-1})''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \overset{\textbf{[1]}}{=} -\frac{1}{(f'(f^{-1}(y)))^2} f''(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) \overset{\textbf{[1]}}{=} -\frac{f''(f^{-1}(y))}{(f'(f^{-1}(y)))^3}\,.$$

Für $y = 1$ also

$$(f^{-1})''(1) = -\frac{f''(-1)}{(f'(-1))^3} = -\frac{3}{2^3} = -\frac{3}{8}\,. \quad [\mathbf{1}]$$