................
Note

| Name | Vorname |
|---|---|
| | |

| Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach) |
|---|---|---|
| | | |

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Probeklausur
# HÖHERE MATHEMATIK II
## Analysis 1 für Physiker

18. Dezember 2007, 15:15 – 16:45 Uhr

Prof. Dr. H. Spohn, PD Dr. W. Aschbacher

Hörsaal: ............ Reihe: ............ Platz: ............

### Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| $\Sigma$ | | |

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

**Aufgabe 1. Definitionen** **[4 Punkte]**

(a) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu "$M \subseteq \mathbb{R}$ *ist nach oben unbeschränkt.*"?

☒ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in M : y > x$ ☐ $\forall x \in M\ \exists y \in \mathbb{R} : y < x$ ☐ $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall\, y \in M : x \geq y$

**[1 Punkt]**

(b) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu "$M \subseteq \mathbb{R}$ *ist abgeschlossen.*"?

☒ $\mathbb{R} \setminus M$ ist offen. ☐ $M \subseteq \overline{M}$ ☒ $M = \overline{M}$ ☐ $M$ ist kompakt und beschränkt.

**[1 Punkt]**

(c) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu "$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar im Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}$."?

☒ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

☒ $f$ ist stetig im Punkt $x_0$, und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert.

☐ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, sodass für $\varphi(\varepsilon) = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) - c\varepsilon$ gilt, dass $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi(\varepsilon) = 0$.

**[1 Punkt]**

(d) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu *"Die Funktionenfolge $f_n \in C([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f \in C([a,b])$."*?

☐ $\forall\, x \in [a,b] : \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

☒ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b]\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

☐ $\forall\, x \in [a,b]\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

**[1 Punkt]**

**Aufgabe 2. Konvergenz** **[5 Punkte]**

(a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$$

☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☒ $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{11}{12}$ ☐ $\frac{13}{6}$

**[1 Punkt]**

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log(n+5)}$ ?

☐ $=-\infty$ ☒ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ undefiniert

**[1 Punkt]**

(c) Wie gross ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n}\,x^n$$

☐ $0$ ☒ $1$ ☐ $\mathrm{e}$ ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\infty$

**[1 Punkt]**

(d) Für welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe absolut?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2z}$$

☐ $\operatorname{Im} z>0$ ☒ $\operatorname{Re} z>0$ ☐ $|z|<1$ ☐ $\operatorname{Im} z<0$ ☐ $\operatorname{Re} z\leq 0$

**[1 Punkt]**

(e) Durch welchen Wert ist die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, bei $x=0$ stetig fortsetzbar?

☐ $-1$ ☐ nicht stetig fortsetzbar ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ $2$ ☐ $0$

**[1 Punkt]**

LÖSUNG

(a) Beh $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)=\frac{5}{6}$

Bew Wir schreiben die Reihe als die Summe von zwei geometrischen Reihen,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}-1=\frac{5}{6}.$$

$\square$

(b) Beh Der Reihenwert liegt in $(-\infty,0)$

Bew Sei $(a_n)$ die Folge der Summanden $a_n:=(-1)^n/(n\log(n+5))$. Die Reihe konvergiert gemäss Leibniz-Kriterium aus der Vorlesung, da die Folge $(|a_n|)$ eine positive, streng monoton fallende Nullfolge ist. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\underbrace{a_1+a_2}_{<0}+\underbrace{a_3+a_4}_{<0}+\ldots<0,$$

da $a_1=-1/\log 6<0$ und $(|a_n|)$ streng monoton fällt. $\square$

(c) <u>Beh</u> Der Konvergenzradius ist $R = 1$.

<u>Bew</u>

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^n}}{\sqrt{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\sqrt{\mathrm{e}}} = 1$$

□

(d) <u>Beh</u> Genau dann ist die Reihe absolut konvergent, falls $\operatorname{Re} z > 0$.

<u>Bew</u> Es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2 \operatorname{Re} z} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n^2 \operatorname{Im} z}.$$

Die Reihe ist also genau dann absolut konvergent, falls

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 \operatorname{Re} z}$$

konvergiert. Falls $\operatorname{Re} z \leq 0$, ist $(e^{-n^2 \operatorname{Re} z})$ keine Nullfolge und kann deshalb nicht konvergieren (siehe Lösung der Aufgabe 34). Falls $\operatorname{Re} z > 0$, ist

$$0 < \mathrm{e}^{-n^2 \operatorname{Re} z} \leq \mathrm{e}^{-n \operatorname{Re} z} = \left(\mathrm{e}^{-\operatorname{Re} z}\right)^n .$$

Da $0 < \mathrm{e}^{-\operatorname{Re} z} < 1$ für $\operatorname{Re} z > 0$, ist die geometrische Reihe eine konvergente Majorante. □

(e) <u>Beh</u> $f$ ist durch $1/2$ stetig nach $x = 0$ fortsetzbar.

<u>Bew</u> Wir berechnen den Grenzwert, indem wir zweimal die Regel von de l'Hospital benutzen (was erlaubt ist).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

□

**Aufgabe 3. Limes Superior** **[3 Punkte]**

Gegeben seien die zwei Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$ mit

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 1, \quad a_{n+4} = a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}_0, \quad \text{und } b_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Welche Aussagen treffen zu?

(a) $\limsup a_n$ ☐ $\infty$ ☐ $-2$ ☐ $0$ ☐ $2$ ☒ $3$

**[1 Punkt]**

(b) $\limsup a_n + \limsup b_n$ ☐ $\infty$ ☐ $-2$ ☒ $4$ ☐ $2$ ☐ $-\infty$

**[1 Punkt]**

(c) $\limsup(a_n + b_n)$ ☐ $\infty$ ☐ $-2$ ☐ $4$ ☒ $2$ ☐ $-\infty$

**[1 Punkt]**

**Aufgabe 4. Induktion** **[4 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}.$$

LÖSUNG

<u>Beh</u> $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Bew</u>

*Induktionsbeginn* $(n = 1)$: $\displaystyle\frac{(-1)^2}{1} \overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \frac{1}{1}$

*Induktionsschritt* $(n \to n + 1)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

□

*Erklärung:*
**[1 Punkt]** für den Induktionsbeginn,
**[1 Punkt]** für das Zerlegen,
**[1 Punkt]** für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
**[1 Punkt]** für das Zusammenfassen.

**Aufgabe 5. Stetigkeit** **[6 Punkte]**

Sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{1+x+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Beweisen Sie unter Anwendung der $\varepsilon\delta$-Definition der Stetigkeit, dass $f \in C([0,1])$.

LÖSUNG

Beh $f \in C([0,1])$

Bew Seien $a, x \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f(a) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \sqrt{1+a+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \sqrt{1+x+t^2}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \left| \int_0^1 \left( \sqrt{1+a+t^2} - \sqrt{1+x+t^2} \right) \mathrm{d}t \right| \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{\leq} \int_0^1 \left| \sqrt{1+a+t^2} - \sqrt{1+x+t^2} \right| \mathrm{d}t \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \int_0^1 \frac{\sqrt{1+a+t^2} + \sqrt{1+x+t^2}}{\sqrt{1+a+t^2} + \sqrt{1+x+t^2}} \left| \sqrt{1+a+t^2} - \sqrt{1+x+t^2} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\left|1+a+t^2 - (1+x+t^2)\right|}{\sqrt{1+a+t^2} + \sqrt{1+x+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{=} \int_0^1 \frac{|a-x|}{\sqrt{1+a+t^2} + \sqrt{1+x+t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\textbf{[1 Punkt]}}{\leq} \frac{1}{2}\,|a-x|\,.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass $\sqrt{1+a+t^2} + \sqrt{1+x+t^2} \geq 2$.
Dann existiert also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, z.Bsp. $\delta = 2\varepsilon$, sodass $|f(a) - f(x)| < \epsilon$, falls $|a-x| < \delta$.
**[1 Punkt]**

$\square$

*Erklärung:*

**[1 Punkt]** für die Linearität des Integrals,
**[1 Punkt]** für das Hineinziehen des Betrages,
**[1 Punkt]** für das Erweitern mit der 1,
**[1 Punkt]** für das Zusammenfassen des Zählers,
**[1 Punkt]** für die Abschätzung,
**[1 Punkt]** für die Definition der Stetigkeit.

**Aufgabe 6. Grenzwerte** **[3 Punkte]**

Bestimmen Sie die Grenzwerte für $n \to \infty$.

(a) $\sqrt[n]{n}$ ☐ divergent ☐ e ☒ 1 ☐ $\pi$

**[1 Punkt]**

(b) $\dfrac{\sin n}{n^2}$ ☐ divergent ☒ 0 ☐ $\pi$ ☐ 1

**[1 Punkt]**

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k^3-1}$ ☒ divergent ☐ 1 ☐ e ☐ $\sqrt{2}$

**[1 Punkt]**

LÖSUNG

(a) Beh $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Bew Siehe Übungsblatt 03, Aufgabe 12 (c). ☐

(b) Beh $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n^2} = 0$

Bew Wir haben eine gegen Null strebende Majorante,

$$\left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \to 0.$$

☐

(c) Beh $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k^3-1} = +\infty$

Bew Da $2k^3 - 1 \leq 2k^3$, haben wir eine divergente Minorante,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2k^3-1} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty.$$

☐

**Aufgabe 7. Entwicklungskoeffizienten** **[3 Punkte]**

Stellen Sie die Funktion

$$f(x) = \sinh(x)\cosh(x)$$

durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ auf ganz $\mathbb{R}$ dar. Wie lauten die Entwicklungskoeffizienten $a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$ ?

$$\boxed{a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}\,\frac{2^{n-1}}{n!}}$$

**[3 Punkte]**

LÖSUNG

Beh $\quad a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}\,\dfrac{2^{n-1}}{n!}$

Bew Wir setzen die Definitionen ein und finden

$$\sinh(x)\cosh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{2x} - e^{-2x}\right) \qquad (= \sinh(2x)/2)$$

Einsetzen der Exponentialreihen liefert

$$e^{2x} - e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!} - \frac{(-2)^n}{n!}\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,\frac{1-(-1)^n}{n!}\,x^n.$$

□

**Aufgabe 8. Stetige Bilder** **[4 Punkte]**

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $f \in C(M)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

(b) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

(c) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

LÖSUNG

(a) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel zur Aussage:

$$f : (0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

**[1 Punkt]**

(b) Die Aussage ist *falsch*. Gegenbeispiel zur Aussage:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

**[1 Punkt]**

(c) Die Aussage ist *wahr*. Z.Bsp. Übungsblatt 08, Aufgabe 51 (a): Das stetige Bild einer kompakten Menge ist kompakt. **[2 Punkte]**

*Erklärung:*
**[1 Punkt]** für ein Gegenbeispiel,
**[1 Punkt]** für ein Gegenbeispiel,
**[2 Punkte]** für einen Satz.

**Aufgabe 9. Monotone Konvergenz** **[4 Punkte]**
Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende, beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ gegen ihr Supremum konvergiert.

LÖSUNG

<u>Beh</u> Eine beschränkte, monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert gegen ihr Supremum.

<u>Bew</u> Sei $\alpha := \sup\{a_n\}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert aufgrund der Schrankeneigenschaft und der Minimalitätseigenschaft des Supremums (siehe Übungsblatt 05, Aufgabe 28) ein $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$\alpha - \varepsilon \overset{\textbf{[1 Punkt]}}{<} a_n \overset{\textbf{[1 Punkt]}}{\leq} \alpha.$$

Aufgrund der Monotonie folgt dann

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \ldots \leq \alpha, \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

d.h. dass fast alle Elemente der Folge in der $\varepsilon$-Umgebung des Supremums liegen, was Konvergenz bedeutet. **[1 Punkt]**

□

*Erklärung:*
**[1 Punkt]** für die Schrankeneigenschaft,
**[1 Punkt]** für die Minimalitätseigenschaft,
**[1 Punkt]** für das Anwenden der Monotonie,
**[1 Punkt]** für die Definition der Konvergenz.

**Aufgabe 10. Mittelwertsatz** **[4 Punkte]**

Formulieren Sie präzise den Mittelwertsatz aus der Vorlesung.

LÖSUNG

*Mittelwertsatz* (aus der Vorlesung)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ist die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ differenzierbar, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, sodass

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

*Erklärung:*
**[1 Punkt]** für den Definitionsbereich als kompaktes Intervall,
**[1 Punkt]** für die Differenzierbarkeit,
**[1 Punkt]** für die Existenz eines $\xi$ im *offenen* Intervall,
**[1 Punkt]** für die Gleichung.