Name	
Vorname	
Matrikelnummer	

Studiengang ______

Hörsaal ______ Reihe ______ Platz ______

Unterschrift ______

Mit dieser Unterschrift bestätigt der/die Kandidat/-in die Richtigkeit der obigen Angaben

Note

	1	2	N
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
Σ			

Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Testklausur zur Analysis 1 für Physiker

3. Februar 2014, 90 Minuten

Prüfer: Prof. Dr.-Ing. R. Callies

Hinweise

Überprüfen Sie die Angabe:
Es sind 9 Aufgaben auf den Seiten 1 bis 9.

Ergebnisse ohne Rechenweg werden nicht gewertet.
Ausnahme: Es wird explizit auf die Begründung verzichtet.
Zum Bestehen der Klausur sind etwa 17 Punkte nötig.

Jede Aufgabe ist in dem unmittelbar anschließenden Platz zu bearbeiten.
Schreiben Sie die Ergebnisse in die eingerahmten Kästen, falls diese vorhanden sind!

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Bemerkungen:

Erstkorrektur

Nachkorrektur

Zweitkorrektur

Aufgabe 1 (ca. 4 P) **Seite 1**

I
II

Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $\alpha + i\beta$ dar, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a)
$$\frac{2}{1+3i} + \frac{4i}{3-i}$$

b)
$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000}$$

Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z in der Form $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

c)
$$\mathrm{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0, \quad w := 2 + i$$

d)
$$\frac{|z-i|}{|z+i|} = 1$$

---

a)
$$\frac{2}{1+3i} + \frac{4i}{3-i} = \frac{2(1-3i) + 4i(3+i)}{10} = \boxed{-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i}$$

b)
$$\frac{1+i}{1-i} = i \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1000} = \boxed{1}$$

c)
$$\mathrm{Re}(z \cdot \bar{w}) = 0, \quad w = 2 + i, \quad \boxed{z = \alpha - 2i\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

Denn:
$$(\alpha + i\beta)(2 - i) = (2\alpha + \beta) + i(2\beta - \alpha)$$

d)
$$\frac{|z-i|}{|z+i|} = 1, \quad \boxed{z = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

Denn:
$$|\alpha + i\beta - i| = |\alpha + i\beta + i| \Rightarrow \alpha^2 + (\beta - 1)^2 = \alpha^2 + (\beta + 1)^2 \Rightarrow \beta = 0$$

Aufgabe 2 (ca. 2 P)

I
II

a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$||x| - 5| < 1$$

b) Man berechne die Ableitung nach x an den Stellen, an denen die Funktion differenzierbar ist, von

$$f(x) := \cos(\sin(\cos(x^2)))$$

Zu (a):

Fall 1: $x \geq 0$

$$|x| = x \quad \Rightarrow \quad |x-5| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in]4, 6[$$

Fall 2: $x < 0$

$$|x| = -x \quad \Rightarrow \quad |x+5| < 1 \quad \Rightarrow \quad x \in]-6, -4[$$

Zu (b):

$$\begin{aligned} f(x) &:= \cos(\sin(\cos(x^2))) \\ f'(x) &:= 2x \sin(\sin(\cos(x^2))) \cdot \cos(\cos(x^2)) \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

I
II

Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,, \quad b_n := -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Man zeige, daß die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergieren, ihr Cauchy-Produkt aber nicht.

Die beiden Reihen sind gleich ($k := n-1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+2}}{\sqrt{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Es bleibt also nur die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zu untersuchen. Da die a_n positiv sind und eine monoton fallende Nullfolge bilden (zu zeigen!), ist das Leibnizkriterium anwendbar und sichert die Konvergenz.

Für das Cauchy-Produkt gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,, \quad c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}a_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} = (-1)\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}$$

Für $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt

$$(n-k+1)(k+1) = \underbrace{(n-k)}_{\leq n} \cdot \underbrace{k}_{\leq n} + (n+1) \leq n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

Also erhält man

$$|c| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

Somit bilden die $\{c_n\}$ keine Nullfolge und die Reihe divergiert.

Aufgabe 4 (ca. 4 Punkte) **Seite 4**

I
II

a) Betrachtet werde die rekursiv definierte Folge $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ mit

$$a_{n+1} := \frac{3+3a_n}{3+a_n}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \qquad a_1 := 1\,.$$

Unter der Annahme, daß die Folge konvergiert (diese Konvergenz muß nicht gezeigt werden), berechne man den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und begründe die Wahl.

Lösung:

Grenzwert: $a =$
Begründung:

b) Man berechne den Grenzwert b der Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ (ohne l'Hospital) mit

$$b_n := 2n - 1 - \sqrt{4n^2 - 3n - 3}\,.$$

Lösung:

Grenzwert: $b =$

Zu a) Grenzwertberechnung:

$$\begin{aligned} a &= \frac{3+3a}{3+a} \\ &\Rightarrow a^2 + 3a - 3a - 3 = a^2 - 3 = 0 \\ &\Rightarrow a_{1,2} = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wahl: $a = \sqrt{3}$

Begründung:

Verkürzte Induktion: Mit $a_n > 0$ ist auch $a_{n+1} > 0$ und der Nenner kann nicht Null werden.

Bemerkung:

Übersieht man den Fall $a_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, so gibt es auf die Begründung keinen Punkt.

Zu b)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(2n-1)^2 - \left(\sqrt{4n^2-3n-3}\right)^2}{(2n-1) + \sqrt{4n^2-3n-3}} = \frac{4n^2 - 4n + 1 - 4n^2 + 3n + 3}{(2n-1) + \sqrt{4n^2-3n-3}} \\ &= \frac{n \cdot (4/n - 1)}{n(2 - 1/n + \sqrt{4 - 4/n - 3/n^2})} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (ca. 6 P) **Seite 5**

I
II

Gegeben sei für $x > -3$ die Funktion $f(x) := \ln \frac{(3+x)^2}{4}$.

a) Man zeige mit vollständiger Induktion: die k-te Ableitung von $f(x)$ ist gegeben durch

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(k-1)!}{(3+x)^k} \quad , \quad k \in \mathbb{N}\,.$$

b) Man gebe die Taylorreihe von $f(x)$ um $x_0 = -1$ an und bestimme deren Konvergenzradius R.

---

a) I.A.: $k = 1:$ $\quad f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{4}{(3+x)^2} \cdot \frac{2(3+x)}{4} = \frac{2}{3+x} = (-1)^0 \cdot \frac{2 \cdot 0!}{(3+x)^1} \quad \checkmark$

I.V.: $\quad f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(k-1)!}{(3+x)^k}$

I.S.:

$$k \to k+1: \quad f^{(k+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(k)}(x) \overset{I.V.}{=} \frac{d}{dx}\left[(-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(k-1)!}{(3+x)^k}\right]$$
$$= (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(k-1)!}{(3+x)^{k+1}} \cdot (-k) = (-1)^k \cdot \frac{2\,k!}{(3+x)^{k+1}} \quad \checkmark$$

b) $T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k \quad ; \qquad x_0 = -1$

$f(-1) = \ln 1 = 0\,, \quad f^{(k)}(-1) = (-1)^{k-1} \cdot \frac{2\,(k-1)!}{2^k} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{2^{k-1}}$ für $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{T_f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k\,2^{k-1}}\,(x+1)^k \left(= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{(k+1)\,2^k}\,(x+1)^{k+1} \right)}$$

Konvergenzradius (mit Quotientenkriterium):

$$a_k := \frac{(-1)^{k-1}\,(x+1)^k}{k\,2^{k-1}}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(-1)^k\,(x+1)^{k+1}\;k\,2^{k-1}}{(k+1)\,2^k\;(-1)^{k-1}\,(x+1)^k}\right| = \left|\frac{(x+1)\,k}{2\,(k+1)}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{|x+1|}{2}$$

$\Rightarrow$ Konvergenz für $\frac{|x+1|}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1| < 2$

$\Rightarrow$ Konvergenzradius $\boxed{R = 2}$

Aufgabe 6 (ca. 4 P) **Seite 6**

I
II

a) Gegeben sei die Reihe

$$S := \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}.$$

Welche Aussage ist richtig? Bitte nur eine Antwort ankreuzen ohne Begründung.

- ☐ Die Reihe ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
- ☐ Die Reihe ist absolut konvergent.
- ☐ Die Reihe ist divergent.

b) Gegeben sei die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und die Folge der Partialsummen$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$b_n := \left(\frac{1}{5}\right)^n, \quad s_n := \sum_{k=0}^{n} b_k \ .$$

Welche Aussage ist richtig? Bitte nur eine Antwort ankreuzen ohne Begründung.

- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1.25$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0.80$
- ☐ $s_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{5}{4}}$

c) Wie lautet der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} k^5 5^k x^k$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Zu (a):
Quotientenkriterium

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 \cdot 2^n}{n^2 \cdot 2^{n+1}}\right| = \left|\frac{(n^2+2n+1)}{n^2 \cdot 2}\right| \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{2} < 1\,;$$

damit ist die Reihe absolut konvergent.

Zu (b):
Geometrische Reihe mit $x = 1/5$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{5}\right)} \to \frac{1}{4/5} = \frac{5}{4} \quad \text{für } n \to \infty$$

Zu (c):
Wurzelkriterium:

$$\sup \sqrt[k]{k^5 5^k x^k} = \sup(\sqrt[k]{k})^5 \cdot (5x) = 1 \cdot 5x \overset{!}{\leq} 1 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 7 (ca. 4 P) **Seite 7**

I
II

Bestimmen Sie den Wert des folgenden Integrals

$$\int_0^1 \cos(\arcsin x)\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Substitution:

$$x =: \sin y\,, \quad \mathrm{d}x = \cos y \mathrm{d}y$$

Dies führt auf

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(\arcsin x)\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2} \cos y \frac{\sin y}{\cos y} \cos y\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos y \sin y\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 2\cos y \sin y\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2y)\, \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{4}\cos(2y)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (ca. 6 P)

I
II

a) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x \to 0+} (x \sin(\ln x)) = 0$ ist.

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \sin(\ln x)\, dx\,.$$

---

a)

$$\lim_{x \to 0+} |x \sin(\ln x)| = \lim_{x \to 0+} |x| \underbrace{|\sin(\ln x)|}_{\leq 1} \leq \lim_{x \to 0+} |x| = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x \to 0+} (x \sin(\ln x)) = 0$$

b) Sei $a \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
I(a) \quad &:= \quad \int_a^1 1 \cdot \sin(\ln x)\, dx \overset{\text{p.I.}}{=} [x \cdot \sin(\ln x)]_a^1 - \int_a^1 1 \cdot \cos(\ln x)\, dx \\
&\overset{\text{p.I.}}{=} \quad -a \sin(\ln a) - [x \cdot \cos(\ln x)]_a^1 - \int_a^1 1 \cdot \sin(\ln x)\, dx \\
&= \quad -a \sin(\ln a) - 1 + a \cos(\ln a) - I(a)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad I(a) \quad = \quad \frac{1}{2}\left(-a \sin(\ln a) - 1 + a \cos(\ln a)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \int_0^1 \sin(\ln x)\, dx \quad = \quad \lim_{a \to 0+} I(a) \quad = \quad \lim_{a \to 0+} \frac{1}{2}\left(-a \sin(\ln a) - 1 + a \cos(\ln a)\right) \quad = \quad -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 9 (ca. 4 P)

I
II

Untersuchen Sie das folgende Integral auf Konvergenz und berechnen Sie **gegebenenfalls** den Grenzwert:

$$\int_0^\infty e^{-5x}(3x+2)\,\mathrm{d}x\,.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^R e^{-5x}(3x+2)\,\mathrm{d}x &\overset{p.I.}{=} -\frac{1}{5}e^{-5R}(3R+2)+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\int_0^R 3e^{-5x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{5}e^{-5R}(3R+2)+\frac{2}{5}-\frac{3}{25}\left(e^{-5x}\Big|_0^R\right) \\
&= -\frac{1}{5}e^{-5R}(3R+2)+\frac{2}{5}-\frac{3}{25}(e^{-5R}-1) \\
&\xrightarrow{R\to\infty} \frac{2}{5}+\frac{3}{25}=\frac{13}{25}
\end{aligned}$$