
Nachklausur in Experimentalphysik 4

Prof. Dr. S. Schönert
Sommersemester 2016
11.10.2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

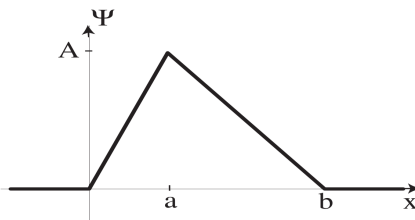
Zum Zeitpunkt $t = 0$ beschreibe folgende Wellenfunktion die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens in einer Dimension:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a} & 0 \leq x \leq a \\ A \frac{b-x}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad A \in \mathbb{C} \quad (1)$$

wobei A , a und b Konstanten sind.

- Skizzieren Sie $\Psi(x, 0)$ qualitativ als Funktion von x .
- Normieren Sie Ψ , d.h. finden Sie A in Abhängigkeit von a und b .
- Wo hält sich das Teilchen bei $t = 0$ mit der größten Wahrscheinlichkeit auf (Bestimmen Sie aus der Skizze)?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen links von a zu finden?
- Bestimmen Sie den Erwartungswert von x .

Lösung



(a) [1]

(b) Wir normieren Ψ auf 1.

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx = \frac{|A|^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx + \frac{|A|^2}{(b-a)^2} \int_a^b (b-x)^2 dx \quad (2)$$

$$= |A|^2 \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \frac{1}{(b-a)^2} \left(-\frac{(b-x)^3}{3} \right) \Big|_a^b \right\} \quad (3)$$

$$= |A|^2 \left\{ \frac{a}{3} + \frac{b-a}{3} \right\} = |A|^2 \frac{b}{3} \quad (4)$$

Damit also $A = \sqrt{3/b}$, wobei natürlich noch eine beliebige komplexe Phase gewählt werden kann.

[1,5]

(c) Aus der Skizze ersichtlich bei $x = a$.

[0,5]

(d)

$$P = \int_{-\infty}^a |\Psi|^2 dx = \frac{|A|^2}{a^2} \int_0^a x^2 dx = \frac{a}{b} \quad (5)$$

[1]

(e)

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\Psi|^2 dx = \frac{|A|^2}{a^2} \int_0^a x^3 dx + \frac{|A|^2}{(b-a)^2} \int_a^b x(b-x)^2 dx \quad (6)$$

$$= \frac{3}{b} \left\{ \frac{1}{a^2} \left(\frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^a + \frac{1}{(b-a)^2} \left(b^2 \frac{x^2}{2} - 2b \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_a^b \right\} \quad (7)$$

$$= \frac{3}{4b(b-a)^2} \{ a^2(b-a)^2 + 2b^4 - 8b^4/3 + b^4 - 2a^2b^2 + 8a^3b/3 - a^4 \} \quad (8)$$

$$= \frac{3}{4b(b-a)^2} \{ b^4/3 - a^2b^2 + 2a^3b/3 \} = \frac{1}{4(b-a)^2} (b^3 - 3a^2b + 2a^3) \quad (9)$$

$$= \frac{2a+b}{4} \quad (10)$$

[1]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m mit kinetischer Energie E nähert sich von links einer „Potentialklippe“ der Größe $V_0 < 0$ bei $x = 0$, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

Wie hoch ist die Reflexionswahrscheinlichkeit wenn $E = V_0/3$?

Lösung

Wir rechnen wie beim Auftreffen eines Teilchens auf eine Potentialbarriere.

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ilx} & x > 0 \end{cases} \quad (12)$$

Mit

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (13)$$

$$l = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}. \quad (14)$$

Wegen Kontinuität von ψ bei $x = 0$:

$$A + B = C. \quad (15)$$

Wegen Kontinuität von ψ' bei $x = 0$:

$$ik(A - B) = ilC. \quad (16)$$

[2]

Damit:

$$A + B = \frac{k}{l}(A - B) \quad (17)$$

$$\Rightarrow A \left(1 - \frac{k}{l}\right) = -B \left(1 + \frac{k}{l}\right) \quad (18)$$

$$\Rightarrow \frac{B}{A} = - \left(\frac{1 - k/l}{1 + k/l} \right) \quad (19)$$

und schließlich:

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2 = \left(\frac{l - k}{l + k} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E + V_0} - \sqrt{E}}{\sqrt{E + V_0} + \sqrt{E}} \right)^2 \quad (20)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{1 + V_0/E} - 1}{\sqrt{1 + V_0/E} + 1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{1 + 3} - 1}{\sqrt{1 + 3} + 1} \right)^2 = \frac{1}{9}. \quad (21)$$

[2]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

- (a) Stellen Sie die drei Eigenwertgleichungen des dreidimensionalen harmonischen Oszillator in kartesischen Koordinaten auf und geben Sie die Energieeigenwerte des Oszillators an.
- (b) Gehen Sie nun davon aus, dass es sich um einen spärlichen harmonischen Oszillator handelt, d.h. $\omega_x = \omega_y = \omega_z$. Wie lautet die Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten?

- (c) Die Schrödingergleichung kann durch einen schon bekannten Separationsansatz gelöst werden.

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

Die radiale Wellenfunktion enthält ein Polynom vom Grad $2(n-1) + l$. Wie lauten die korrespondierenden Energien E_N mit $N = 2(n-1) + l$ der totalen Wellenfunktion?

- (d) Die Energien hängen also von den beiden Quantenzahlen l und n ab, und gleiche Energiewerte können für verschiedene Kombinationen (n, l) resultieren, d.h. sie sind entartet. Berechnen Sie E_N für $N = 0, 1, 2, 3, 4$ und geben Sie die dazu verwendeten Werte n und l an. Wie groß ist der jeweilige Entartungsgrad? Gehen Sie davon aus, dass Sie jedes Energieniveau mit Fermionen besetzen wollen und berücksichtigen Sie deshalb das Pauli-Prinzip.

Lösung:

- (a)

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 \right] \psi_x(x) &= E_x \psi_x(x) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 \right] \psi_y(y) &= E_y \psi_y(y) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \right] \psi_z(z) &= E_z \psi_z(z) \end{aligned}$$

Für die Energie gilt

$$E = E_x + E_y + E_z$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$E_i = \hbar \omega \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit } i = x, y, z \quad (22)$$

$$\Rightarrow E = \hbar \omega \left(N + \frac{3}{2} \right) \quad \text{mit } N = n_x + n_y + n_z \quad (23)$$

[2]

- (b) Mit

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} \frac{1}{\hbar^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{r^2} \frac{1}{\hbar^2} \end{aligned}$$

und

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

erhält man

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} - U(r) \right] \psi(r) = E \psi(r).$$

[1,5]

(c)

$$E_N = (2(n-1) + l)\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega$$

[0,5]

- (d) Die Drehimpuls-Quantenzahl l wird üblicherweise nicht mit Zahlen $0, 1, 2, \dots$ bezeichnet, sondern mit den Buchstaben s, p, d, f, g, \dots

| N | $E_N(\hbar\omega)$ | (n, l) | $\sum_{nl} 2(2l+1)$ | Total |
|---|--------------------|------------|---------------------|-------|
| 0 | 3/2 | 1s | 2 | 2 |
| 1 | 5/2 | 1p | 6 | 8 |
| 2 | 7/2 | 2s, 1d | 12 | 20 |
| 3 | 9/2 | 2p, 1f | 20 | 40 |
| 4 | 11/2 | 3s, 2d, 1g | 30 | 70 |

Jedes Niveau ist $2(2l+1)$ -fach entartet. Zu jedem Wert von l gibt es $2l+1$ verschiedene Werte von m . Zu jedem Zahlenpaar l, m gibt es zwei verschiedene Spinnmöglichkeiten "up" und "down".

[2]

Aufgabe 4 (6 Punkte)

- (a) Was ist die physikalische Ursache für den Unterschied zwischen normalen und anomalen Zeemann Effekt? Geben Sie drei experimentelle Unterschiede zwischen den beiden Zeemann-Effekten an.
- (b) In wieviele Terme spaltet ein $l = 3$ Niveau beim normalem Zeemann Effekt auf? Wie groß ist der Energieunterschied zwischen den benachbarten Niveaus?
- (c) Wie viele verschiedene Linien sind beim Übergang $l = 3 \rightarrow l = 2$ beim normalen Zeemann-Effekt messbar?
- (d) Kann man den Spin des Photons mit Hilfe des normalen Zeemann Effekts bestimmen und wenn ja wie?

Lösung

- (a) Sowohl beim normalen als auch beim anomalen Zeeman-Effekt geht es um die Aufspaltung der Spektrallinien (entspricht den Energieniveaus) in einem externen Magnetfeld.

Beim **normalen Zeeman-Effekt** wird **nur der Bahndrehimpuls** für die Aufspaltung berücksichtigt, da der Spin aufgrund der Aufhebung durch zwei Elektronen null ist.

Beim **anomalen Zeemann-Effekt** hingegen, werden **Spin und Bahndrehimpuls** der Elektronen berücksichtigt. Je nach Ausrichtung führt dies zu verschiedenen Energieniveaus.

Unterschiede:

- Gerade Anzahl (anormal) vs. ungerade Anzahl (normal) von aufgespaltenen Linien
- Mittlere Linien bleibt auf Ausgangsniveau (normal) oder alle Linien sind verschoben (anormal)

- Äquidistante Aufspaltung (Normal) vs. unterschiedlich große Aufspaltung (anormal)

[2]

- (b) Für den normalen Zeeman-Effekt gilt $s = 0$, also folgt $j = l$. Die z-Richtung des Gesamtdrehimpulses hat somit

$$-j \leq m_j \leq j \Rightarrow 2j + 1 \text{ Möglichkeiten} \quad (24)$$

sich auszurichten. Für $l = j = 3$ gibt es somit **7 verschiedene Energieniveaus**.

Der Energieunterschied zwischen 2 Niveaus beträgt allgemein

$$\Delta E = g_j \cdot \mu_B \cdot |\vec{B}|, \quad (25)$$

wobei sich der Landé-Faktor mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)} \quad (26)$$

und $s = 0$ zu $g_j = 1$ ergibt und somit ein **Energieunterschied** von

$$\Delta E = \mu_B \cdot |\vec{B}| \quad (27)$$

folgt. Der Energieunterschied zwischen den benachbarten aufgespalteten Niveaus ist somit identisch.

[1,5]

- (c) Für die optischen Übergänge muss die Auswahlregel $\Delta m_j = -1, 0, 1$ berücksichtigt werden. Somit gibt es von $l = 3$ nach $l = 2$ 9 Übergänge, jedoch sind nur **3 verschiedene Linien** messbar, da die Energieteile immer gleich weit voneinander entfernt sind.

[1]

- (d) Im Gesamtsystem Elektron-Photon gilt die **Drehimpulserhaltung**. Bei einem Übergang mit $\Delta m_j = \pm 1$ muss das Photon also den Spin 1 besitzen, denn das Photon hat keinen intrinsischen Bahndrehimpuls. Bei einem Übergang mit $\Delta m_j = 0$ kann man sich das Photon als Überlagerung von zwei entgegengesetzt zirkular polarisierten Photonen vorstellen. Für $\Delta \mathbf{m}_j = \pm 1$ sind die Photonen **zirkular polarisiert** (σ -Übergänge) und für $\Delta \mathbf{m}_j = 0$ sind die Photonen **linear polarisiert** (π -Übergänge).

[1,5]

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Die Atome des Kochsalzmoleküls NaCl sind in einem Gleichgewichtsabstand von $r_0 = 5,6 \text{ \AA}$ gebunden. Die relativen Atomgewichte sind $A_{\text{Na}} = 23$ und $A_{\text{Cl}} = 35$.

- (a) Wie groß ist das Trägheitsmoment des Moleküls?
- (b) Wie groß ist die Rotationsenergie in eV für die Drehimpulsquantenzahl $j = 1$? Hinweis: Betrachten Sie das Molekül als starren Rotor.

- (c) Die Konstante der Bindungskraft (Federkonstante) zwischen dem Na-Atom und dem Cl-Atom beträgt $C = 3,78 \cdot 10^3 \text{ kg/s}^2$. Welche Frequenzen kann das Molekül abstrahlen, wenn Sie folgende Übergänge zwischen gekoppelten Rotations- (j) und Schwingungszuständen (v) betrachten: $(v_2 = 1; j_2 = 0, 1) \rightarrow (v_1 = 0; j_1)$? Bestimmen Sie die möglichen Werte von j_1 und skizzieren Sie das Termschema der sich daraus ergebenden Übergänge. Hinweis: Schwingungs- und Rotationszustände sollen nicht miteinander wechselwirken.

Lösung

- (a) Es gilt $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$, weiterhin $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Setze $r = r_1 + r_2$. Dann $r_1(1 + \frac{m_1}{m_2}) = r$ und $r_2(1 + \frac{m_2}{m_1}) = r$. Somit

$$I = m_1 r^2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 r^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 = r^2 \mu$$

wobei μ die reduzierte Masse sei. Das Trägheitsmoment beträgt also

$$I = (5,6 \cdot 10^{-10})^2 \text{ m}^2 \frac{23 \cdot 35}{23 + 35} 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 7,27 \cdot 10^{-45} \text{ Js}^2$$

[2]

- (b) Es gilt

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} j(j+1) = \frac{(6,58 \cdot 10^{-16} \text{ eVs})^2 \cdot 2}{2 \cdot 7,27 \cdot 10^{-45} \text{ Js}^2 \cdot 6,24 \cdot 10^{18} \text{ eV/J}} = 9,5 \mu\text{eV}$$

[1]

- (c) Die Energie von Schwingungszuständen ist gegeben durch $E_v = \hbar \omega_0 (v + \frac{1}{2})$. Dabei ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{\mu}} = \sqrt{\frac{3,78 \cdot 10^3 \text{ kg/s}^2}{1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} \frac{23 + 35}{23 \cdot 35}} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Die Energieniveaus der Schwingung sind gleichabständig mit $\Delta E_v = \hbar \omega_0 = 2,6 \cdot 10^{-1} \text{ eV} \gg \Delta E_{\text{rot}}$. Unabhängig von der Schwingung kann das Molekül noch rotieren. Da die Rotationsenergie sehr viel kleiner ist als die Schwingungsenergie, spalten die Schwingungsniveaus in mehrere Rotationsunterniveaus auf. Übergänge mit $\Delta j = 0$ sind verboten, d.h.

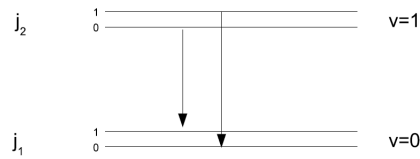
$$\Delta E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I} |(j_2 + 1)j_2 - j_1(j_1 + 1)| = \frac{\hbar^2}{I} (j + 1)$$

wobei $j \geq 1$. Unter Vernachlässigung von Wechselwirkungen addieren sich die Energieniveaus von Rotation und Schwingung:

$$\Delta E = \hbar \omega_0 \pm (j + 1) \frac{\hbar^2}{I}$$

Die möglichen Frequenzen sind $\omega_{j\pm} = \omega_0 \pm j \frac{\hbar}{I}$, abermals mit $j \geq 1$. Zusammenfassend: Es gibt für $(v = 1, j_2 \in \{0, 1\}) \rightarrow (v = 0, j_1)$ nur zwei mögliche Übergänge, die mit der Dipolauswahlregel für die Rotation verträglich sind. Nämlich $(1, 1) \rightarrow (0, 0)$ und $(1, 0) \rightarrow (0, 1)$. Damit ergibt sich für die beiden Frequenzen, nach denen gefragt war

$$w_{1\pm} = 4 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \pm 1,45 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$



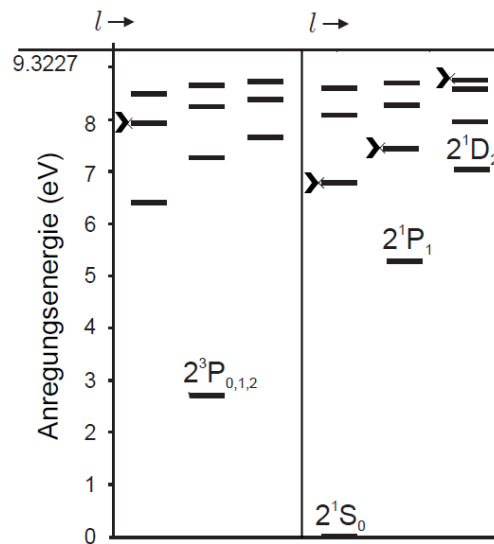
(d)

[3]

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Beryllium hat, wie Helium, eine $2s^2$ Konfiguration der Valenzelektronen. Dementsprechend verhält es sich in vielerlei Hinsicht zu He wie die Alkaliatome zu H.

- Was kennzeichnet Singulett- und Triplett- Zuständen (3 Unterschiede)? Welche Komponente der Wellenfunktion liegt als Singulett (Triplett) vor, wenn ein Zustand als Singulettzustand (Triplettzustand) bezeichnet wird?
- Die Abbildung zeigt einen Teil des Termschemas für Be (ohne Feinstruktur). Die Elektronenkonfiguration des Grundzustands ist $1s^2 2s^2$. In welchem der beiden Bereiche in der Abbildung sind die He-artigen Triplett- bzw. Singulettzweige gezeichnet? Begründen Sie. Geben Sie die spektroskopische Notation aller der mit Pfeil markierten Zustände an.
- Ist ein Übergang zwischen 2^1P_1 und 5^3S_1 möglich? Begründen Sie ihre Antwort.
- Im Termschema finden sich die Zustände 2^1D_2 und $2^3P_{0,1,2}$. Welche Quantenzahlen können Sie daraus ablesen? Zeichnen Sie die die Elektronenkonfiguration in Pauling-Schreibweise?



Lösung

(a) Singulett:

- Gesamtspin ist $S = 0$ (Spins antiparallel) \Rightarrow keine ungepaarten Elektronen
- Spektrallinien nicht aufgespalten
- gerade Elektronenanzahl
- Multiplizität $2S + 1 = 1$
- Ortswellenfunktion symmetrisch

Triplett:

- Gesamtspin ist $S = 1 \Rightarrow$ 2 ungepaarte Elektronen
- Multiplizität ist $2S + 1 = 3$
- aufgespaltene Spektrallinien
- Spinkomponente der Ortswellenfunktion ist antisymmetrisch

[1,5]

- (b)
- Singulett: rechts, da dort $S = 0$
 - Triplett: Links, da dort $S = 1$

$2^1P_1 : n = 2, L = 1, S = 0$ Spektroskopische Notation der Zustände von links nach rechts:
 $4^3S_1, 3^1S_0, 3^1P_1, 5^1D_2$

[3]

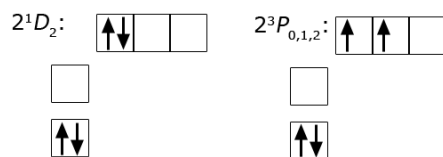
- (c) Nein der Übergang ist nicht möglich (Singulett - Triplett- Übergang). Das ist erkennbar an der 1 und der 3 in der Multiplizität der Zustände und dem Verbot von Spinflips.

[0,5]

(d)

$$2^1D_2 : n = 2, 2S + 1 = 1 \Rightarrow S = 0, L = 2, J = 2,$$

$$2^3P_{0,1,2} : n = 2, 2S + 1 = 3 \Rightarrow S = 1, L = 1, J = 0, 1, 2$$



[2]

Aufgabe 7 (3 Punkte)

- (a) Ermitteln Sie die Entropie σ eines Satzes von N harmonischen Oszillatoren mit der Frequenz ω als Funktion der gesamten Quantenzahl n .

Verwenden Sie die Entartungsfunktion $g(N, n) = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!}$ für das System von Oszillatoren, sowie die Stirling Näherung $\ln N! \approx N \ln N - N$. Nähern Sie $N - 1$ durch N .

- (b) U soll die Gesamtenergie $n\hbar\omega$ der Oszillatoren bezeichnen. Drücken Sie die Entropie als $\sigma(U, N)$ aus. Zeigen Sie, dass die Gesamtenergie bei der Temperatur τ durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$U = \frac{N\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B\tau) - 1}$$

Lösung

- (a)

$$\sigma(N, n) = k_B \ln g(N, n) = k_B \ln \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!} \approx k_B \ln \frac{(N+n)!}{n!N!} \quad (28)$$

$$= k_B \ln(N+n)! - k_B \ln(n!) - k_B \ln(N!) \quad (29)$$

$$\approx k_B [(N+n) \ln(N+n) - N - n - n \ln n + n - N \ln N + N] \quad (30)$$

$$= k_B [(N+n) \ln(N+n) - n \ln n - N \ln N] \quad (31)$$

[1]

- (b) Mit der Gesamtenergie $U = n\hbar\omega$ ist die Entropie in Abhängigkeit von U :

$$\sigma(N, U) = k_B \left[\left(N + \frac{U}{\hbar\omega} \right) \ln \left(N + \frac{U}{\hbar\omega} \right) - \frac{U}{\hbar\omega} \ln \frac{U}{\hbar\omega} - N \ln N \right]$$

Bei der Temperatur τ gilt

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{d\sigma}{dU} \right)_N = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \left(N + \frac{U}{\hbar\omega} \right) - \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \frac{U}{\hbar\omega} = \frac{k_B}{\hbar\omega} \ln \left(\frac{N\hbar\omega}{U} + 1 \right)$$

$$U = \frac{N\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B\tau) - 1}$$

[2]

$$\hbar = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$R_\infty = \frac{m_e e^4}{8c\epsilon_0^2 \hbar^3} = 1,10 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ As/V/m}$$

$$\alpha = 7.3 \cdot 10^{-3}$$

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} \frac{\hbar^2}{m_e} = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ N/A}^2$$

$$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$A = 5,9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$$