Probeklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. L. Fabbietti, Dr. B. Ketzer

Sommersemester 2013

25.Juni 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig hand- oder computerbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. *Hinweis*: $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} Js, m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} kg, e = 1,6 \cdot 10^{-19} C, m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} kg, \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} As/Vm, \alpha = 7,3 \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 1 (3 Punkte)

$Nx\exp({-x^2}/{2\sigma^2})$ sei die Wellenfunktion eines Teilchens.

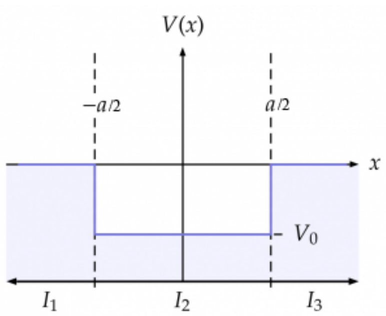
(a) Normieren Sie diese Wellenfunktion mithilfe

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}, a > 0 \tag{1}$$

(b) An welchen Ort befindet sich das Teilchen am wahrscheinlichsten? Wo liegt der Erwartungswert des Teilchenorts?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Wir wollen das eindimensionale Kastenpotenzial der Breite a und Tiefe V_0 etwas genauer analysieren.



(a) Wir machen den Ansatz

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{\alpha x} & \text{in Zone } I_1 \\ B\sin(kx) + C\cos(kx) & \text{in Zone } I_2 \\ De^{-\alpha x} & \text{in Zone } I_3 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass aus der Stetigkeitsbedingung von ψ bei $\pm a/2$ schon folgt, dass $A = \pm D$ und entweder $B = 0$ oder $C = 0$ folgt. Es kann also nur exakt symmetrische oder exakt antisymmetrische Lösungen für $\psi(x)$ geben.

(b) Wir wollen nun versuchen, den endlichen Potenzialtopf als Modell für das Wasserstoffatom zu interpretieren. Als Abschätzung für a haben wir den gemessenen Atomdurchmesser $d = 0,1$nm und für die Bindungsenergie E die gemessene Ionisierungsenergie von $-13,6$eV zur Verfügung. Mit der Schrödingergleichung können wir nun α bestimmen. Wie groß ist in dieser Abschätzung die Wahrscheinlichkeit, das Elektron des Wasserstoffatoms in einem Abstand von 10nm (100 Atomdurchmessern) zum Kern vorzufinden im Vergleich zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei $a/2$?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachten Sie das H-Atom in nichtrelativistischer Näherung.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle r \rangle$ für den $1s$ Zustand vergleichen Sie diesen mit $r_{\max}$. $r_{\max}$ sei dabei der Radius für die radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $P_{n,l}(r)\,\mathrm{d}r = |R_{n,l}|^2 r^2\,\mathrm{d}r$ am größten ist. Diskutieren Sie die Ergebnisse für $l = n - 1$.

Hinweis: Jeder Zustand wird ohne Beachtung des Spin durch die drei Quantenzahlen (n, l, m) charakterisiert, und entspricht der Eigenfunktion

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$$

wobei

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2}{na_0}\right)^2 \frac{(n-l-1)!}{2n((n+1)!)}} \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) \cdot \left(\frac{2r}{na_0}\right)^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right), a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$$

und $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ jeweils die zugeordneten Laguerre-Polynome und die Kugelflächenfunktionen sind. Speziell ist

$$\psi_{10\mathrm{m}}(r, \vartheta, \varphi) = \underbrace{\frac{2}{\sqrt{a_0^2}} \cdot e^{-\frac{r}{a_0}}}_{R_{10}(r)} \cdot Y_{0m}(\vartheta, \varphi)$$

(b) Zeigen Sie, dass die $1s$-Wellenfunktion ($n = 1$, $l = m = 0$) und die $2s$-Wellenfunktion ($n = 2$, $l = m = 0$) des Wasserstoffatoms orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeichnen Sie qualitativ von $n = 1$ bis $n = 3$ das Termschema von Wasserstoff($_1$H) ohne und mit Feinstruktur, letzteres also unter Berücksichtigung von Spin-Bahn-Kopplung und anderen relativistischen Korrekturen. Benennen Sie die Niveaus.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Die Natrium-D-Linien emittieren Licht der Wellenlänge $589,5932$nm (D1) und $588,9965$nm (D2). Diese charakteristischen Spektrallinien entstehen beim Übergang des Elektrons von $3^2P_{1/2}$(D1) bzw. $3^2P_{3/2}$(D2) auf $3^2S_{1/2}$.

(a) Skizzieren Sie die Aufspaltung der Energieniveaus in einem schwachen Magnetfeld und geben Sie diese in Einheiten von $\mu_B B$, wobei $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}\text{Am}^2$ ist, an. Zeichnen Sie alle erlaubten Übergänge unter Berücksichtigung der Auswahlregeln $\Delta l = \pm 1, \Delta j = 0, \pm 1, \Delta m_j = 0, \pm 1$ ein.

(b) Wie stark muss das Magnetfeld sein, damit der energetische Abstand des niedrigsten Zustands des $3^2P_{3/2}$ und des höchsten Zustands von $3^2P_{1/2}$ 90% der Feinstrukturaufspaltung ($\Delta E_{\text{FS}} = 3 \cdot 10^{-22}\text{J}$) beträgt?

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die quantenmechanische Untersuchung des Wasserstoffatoms ist sehr allgemein und hat eigentlich nie eine Einschränkung auf Elektron-Proton-Paare gemacht. Die Ergebnisse sollten sich also ohne Weiteres auf andere gebundene Teilchenpaare übertragen lassen.

(a) Untersuchen Sie, was passiert, wenn das Elektron durch ein π^--Meson ersetzt wird, das eine 273 mal größere Masse als ein Elektron hat. Wie groß ist die sich ergebende Energie des Grundzustandes? Spielt die Korrektur bezüglich der effektiven Masse in diesem System eine größere oder eine kleinere Rolle als im Wasserstoffatom?

(b) Gebundene Zustände können auch bei einem Elektron-Positron-Paar erhalten werden. Berechnen Sie auch hier die Grundzustandsenergie.

(c) Mesonen und Positronen sind instabil; daher können die atomartigen Gebilde sehr leicht zerfallen. Es ist daher auch nicht möglich, makroskopische Mengen dieser Substanzen herzustellen. Wie kann überhaupt nachgewiesen werden, dass sich solche gebundenen Zustände bilden?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Beim Stern-Gerlach-Versuch durchfliegt ein Strahl von Wasserstoffatomen im Grundzustand inhomogenes Magnetfeld eines Elektromagneten.

(a) Warum benötigt man ein inhomogenes Magnetfeld? Zeigen Sie, dass ein homogenes Feld keine Kraft auf einen magnetischen Dipol ausübt.

(b) Der Magnetfeldgradient führt zu einer Kraft $F = \mu\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}$ auf die Atome. μ ist dabei das magnetische Moment, welches dem eines Elektronenspins entspricht. Berechnen Sie die seitliche Ablenkung der Atome über eine Strecke von 10cm, wenn die Geschwindigkeit des Atomstrahl 1000m/s und der Magnetfeldgradient 100T/m beträgt.

(c) Man stellt im Falle wasserstoffartiger Atome fest, dass es aufgrund des Magnetfelds zu einer Aufspaltung in zwei Teilstrahlen kommt. Es ist sicherlich klar, dass man dieses klassisch nicht erklären kann und dass es offenbar auf eine Quantisierung des Drehimpulses hindeutet. Weshalb kann man aus dem Stern-Gerlach-Versuch auf die Existenz des Spins schließen? Warum kann man die Beobachtung nicht einfach mit dem Bahndrehimpuls erklären?

(d) Gibt es immer eine Aufspaltung in genau zwei Teilstrahlen, unabhängig vom Atom und Anregungszustand? Begründen Sie.

(e) Was passiert mit Atomen, die sich in einem Überlagerungszustand aus spin-up und spin-down befinden? In welchen Zustand sind sie nach der Stern-Gerlach-Apparatur?