....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Wiederholungsklausur
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

18. April 2011, 8:30–10:00 Uhr, MI HS 1

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Parameterabhängiges Integral** **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}s \, \frac{e^{-xs}}{\sqrt{1+s^2}},$$

die als parameterabhängiges Integral definiert ist.

(i) Überprüfen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $f(x)$ konvergiert.

(ii) Zeigen Sie, dass f monoton fallend ist.

2. **Taylor-Entwicklung** **[8 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

(i) Setzen Sie f stetig in 0 fort. Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Wie lauten die ersten drei nichtverschwindenden Terme der Taylor-Entwicklung der stetigen Fortsetzung von f um $x = 0$. Welche Ordnung hat der Fehlerterm?

$$f(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathcal{O}(x^{\square})$$

(iii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylor-Reihe um $x = 0$.

☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$

3. **Ableitung der Umkehrfunktion des Sinus Hyperbolicus** **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sinh x = \frac{1}{2}\big(e^{+x} - e^{-x}\big)$.

(i) Begründen Sie, wieso sinh invertierbar ist. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} := (\sinh)^{-1}$.

(ii) Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} = (\sinh)^{-1}$.

4. **Diverse Integrale** **[9 Punkte]**

Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen:

(i)

$$\int \mathrm{d}x\,(x-5)\,\sqrt{x-5} =$$

(ii) Für $a > 0$, bestimmen Sie

$$\int_1^a \mathrm{d}x\,x^n\,\ln x =$$

(iii)

$$\int \mathrm{d}x\,\frac{1}{x\,(1+(\ln x)^2)} =$$

5. **Rekursionen mit Integralen** **[12 Punkte]**

Wir definieren $F_n(x) = \int \mathrm{d}x \, \sin^{2n}(x)$.

(i) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{2n+2} F_n(x) - \frac{1}{2n+2} \sin^{2n+1}(x) \, \cos(x).$$

(ii) Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \, \sin^{2n}(x) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}.$$

6. **Folgen** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie das Verhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen:

(i) $a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$

- ☐ konvergiert nach dem Integralkriterium nicht
- ☐ konvergiert nach dem Integralkriterium
- ☐ konvergiert nicht, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist
- ☐ konvergiert, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut summierbar ist
- ☐ konvergiert nicht, da $\left(\frac{1}{k \ln k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ wie $(1/k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 geht

(ii) $b_n = (n^2 + 7n + 4)\, e^{-n}$

☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{2}{e}$ ☐ 0

(iii) $c_n = \frac{e^{-n}\, 2^{n^2}}{7^n}$

☐ $\frac{2}{7e}$ ☐ $+\infty$ ☐ $\frac{2}{7}$ ☐ 0 ☐ 1

(iv) $d_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$

☐ $+\infty$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 3 ☐ 0 ☐ 1

7. **Potenzreihen** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die Konvergenzradien für folgende Potenzreihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}\, x^n$

☐ 2 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 1

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n(n+1)(n+2)}{3^n}\, x^n$

☐ $+\infty$ ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ 3

8. **Folgen und Häufungspunkte** **[12 Punkte]**

Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen oder widerlegen Sie (mit Begründung):

(i) Für die Menge der Häufungspunkte $\mathrm{HP}(a)$ gilt: $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \in \mathrm{HP}(a)$

☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$

☐ Wahr ☐ Falsch

(iii) Ist b eine konvergente Folge, dann gilt: $\limsup\limits_{n\to\infty}\big(a_n + b_n\big) = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$.

☐ Wahr ☐ Falsch