Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Note:

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Semestralklausur
WS 2003/04

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1
& Mathematik für Physiker 1
Prof. Dr. Gregor Kemper
09.02.2004

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von: .... bis: ....

Vorzeitig abgegeben um: ....

Besondere Bemerkungen:

Bitte beachten Sie: Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. Die Klausur hat 6 Aufgaben. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zunächst jeweils auf das Blatt mit der Aufgabe und benutzen Sie erst dann die Zusatzblätter.
Zum Bestehen der Klausur sind ca. 17 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!

Ich bin mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses (Matrikelnummer und Note) im Internet einverstanden.

....
Unterschrift

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektor

II ....
Zweitkorrektor

Aufgabe 1 (ca. 7 Punkte):

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ -3x & - & 2y & + & (2\alpha-6)z & = & \alpha-9 \\ \alpha x & + & y & + & (2\alpha-4)z & = & \alpha+2 \end{array}$$

über $\mathbb{R}$ (i) keine Lösung (ii) genau eine Lösung (iii) unendlich viele Lösungen?

(b) Bestimmen Sie für $\alpha = 1$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ aus (a).

Aufgabe 2 (ca. 6 Punkte): Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $\varphi : G \to G, x \mapsto x^2$ ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 3 (ca. 8 Punkte): Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum $V := \mathbb{R}^{2\times 2}$, und es sei

$$S := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

die „Standardbasis" von V. (Sie brauchen nicht zu beweisen, dass S eine Basis von V ist.) Es sei ferner $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(X) := X + X^T$, wobei X^T die transponierte Matrix bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_S(\varphi)$.

(c) Bestimmen Sie je eine Basis für Kern(φ) und Bild(φ).

(d) Ergänzen Sie eine Basis von Bild(φ) zu einer Basis von V (eine Begründung brauchen Sie nicht anzugeben).

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte): Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ seien Unterräume U_1 und U_2 gegeben durch

$$U_1 = \langle(-1,2,3),(-1,5,5)\rangle,$$
$$U_2 = \langle(2,-2,1),(-1,3,-2)\rangle.$$

Bestimmen Sie die Dimensionen $\dim(U_1)$, $\dim(U_2)$, $\dim(U_1+U_2)$ und $\dim(U_1\cap U_2)$.

Aufgabe 5 (ca. 7 Punkte): Es sei V der $\mathbb{R}$–Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$.

(a) Geben Sie ein Beispiel für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ mit der Eigenschaft $\varphi\circ\varphi = \mathrm{id}_V$, aber $\varphi \neq \mathrm{id}_V$ und $\varphi \neq -\mathrm{id}_V$ an (eine Begründung brauchen Sie nicht anzugeben).

(b) Es sei nun $\psi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\psi\circ\psi = \mathrm{id}_V$, aber $\psi \neq \mathrm{id}_V$ und $\psi \neq -\mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: Es gibt eine Basis $B = \{b_1,b_2\}$ von V mit $\psi(b_1) = b_1$ und $\psi(b_2) = -b_2$.

Aufgabe 6 (ca. 5 Punkte): Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen von „Ja" oder „Nein". Begründungen brauchen Sie nicht anzugeben.

Sind die folgenden Aussagen richtig?	
Jeder Modul über einem kommutativen Ring hat eine Basis.	☐ Ja ☒ Nein
Jeder Vektorraum hat eine Basis.	☒ Ja ☐ Nein
Die Menge $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$–Vektorraums $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☒ Nein
Die Menge $\{(x,y)\in\mathbb{F}_2^2 \mid x^2+y=\bar{0}\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{F}_2$–Vektorraums $\mathbb{F}_2^2$.	☒ Ja ☐ Nein
Eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums enthält niemals den Nullvektor.	☐ Ja ☒ Nein
Die Komposition $g\circ f$ zweier injektiver Abbildungen $f : A\to B$ und $g : B\to C$ (mit A,B,C Mengen) ist immer injektiv.	☒ Ja ☐ Nein
In jedem kommutativen Ring ist das Produkt zweier Elemente nur dann gleich 0, wenn mindestens eines dieser Elemente gleich 0 ist.	☐ Ja ☒ Nein
Die Vereinigung zweier Unterräume eines Vektorraums ist stets wieder ein Unterraum.	☐ Ja ☐ Nein
Der Durchschnitt zweier Unterräume eines Vektorraums ist stets wieder ein Unterraum.	☐ Ja ☐ Nein
Eine Matrix $A\in K^{n\times n}$ (K ein Körper, $n\in\mathbb{N}$) ist genau dann invertierbar, wenn die Abbildung $\varphi_A : K^n\to K^n, x\mapsto A\cdot x$ surjektiv ist.	☐ Ja ☒ Nein