

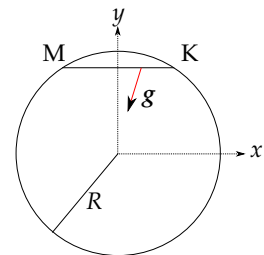
1 Quickies (10 Punkte)

Beantworten Sie die Fragen und geben Sie eine möglichst kurze Erklärung (Zwischenrechnung).

- Ein Massenpunkt m sei durch zwei Federn der Federkonstante k mit zwei Wänden verbunden. Die Federn seien auf einer Linie. Betrachten Sie kleine Auslenkungen des Massenpunktes aus der Gleichgewichtslage entlang der Verbindungslinie und geben Sie die Eigenfrequenz an.
- Ein Körper gleite reibungslos in der x - y -Ebene auf einer rotierenden Scheibe vom Zentrum zum Rand. In welche Richtung wird der Körper durch die Corioliskraft im mit der Scheibe mitgedrehten Koordinatensystem abgedrängt, falls sich die Scheibe (von oben gesehen) im Uhrzeigersinn dreht?
- Betrachten Sie das System Erde-Mond mit dem Massenverhältnis $M_{\text{Erde}}/m_{\text{Mond}} = 81$. Der Abstand zwischen diesen Himmelskörpern ist $R_{\text{EM}} = 380\,000$ km. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Systems und dem Erdmittelpunkt.
- Ein Tennisball springt elastisch auf einer horizontalen Platte. Wie hängt die Periode T der Bewegung von der maximalen Höhe h_{max} ab, die der Ball erreicht?
- Gegeben sei die Lagrange-Funktion $L = \frac{1}{2}m \left(1 + \frac{q^2}{b^2}\right) \dot{q}^2 - mg\frac{q^2}{2b}$. Bestimmen Sie die Hamilton-Funktion des Systems $H(p, q)$.

2 Tunnel (10 Punkte)

Zwischen München und Köln soll ein geradliniger Tunnel der Länge $L = 500$ km gegraben werden, in welchem Güterwagen zwischen den beiden Städten verkehren. Ein solcher Wagen bewege sich reibungslos unter dem Einfluss der Schwerkraft $F = mg$. Betrachten Sie die Erde als eine ideale Kugel mit Radius $R = 6400$ km.



- Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ im Falle $L \ll R$, $|g| \approx g = \text{const.}$
- Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung an.
- Wie lange dauert die Fahrt von München nach Köln für einen Wagen mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$?
- Wie groß sind die mittlere und die maximale Geschwindigkeit des Wagens?

3 Schiefe Ebene (10 Punkte)

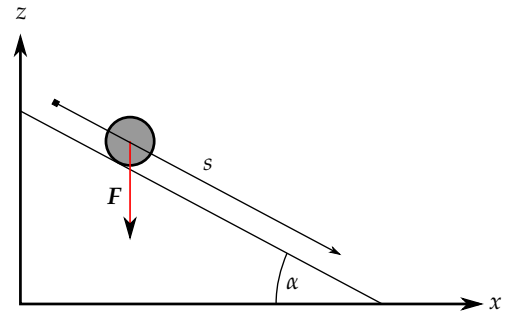
Eine Scheibe gleite reibungslos unter dem Einfluss der homogenen Schwerkraft $F = -mge_z$ auf einer schiefen Ebene

$$z = ax + by.$$

- Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) unter dieser Zwangsbedingung.
- Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten mittels der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingung.
- Eliminieren Sie λ aus den Bewegungsgleichungen und geben Sie die Lösungen an.

4 Rollender Zylinder (10 Punkte)

Ein Zylinder mit Masse M , Radius R und Trägheitsmoment Θ_y um die Zylinderachse rollt ohne Schlupf im homogenen Schwerfeld ($F = -Mge_z$) eine um den Winkel α geneigte schiefe Ebene hinab. Betrachten Sie den Fall, dass die Zylinderachse immer parallel zur y -Achse bleibt und sich der Schwerpunkt nur in der x - z -Ebene bewegt.



- Betrachten Sie die Strecke $s(t)$, die sich der Schwerpunkt längs der Ebene bewegt hat, als generalisierte Koordinate und drücken Sie die Geschwindigkeiten \dot{x}_S, \dot{z}_S des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigkeit des Zylinders ω durch \dot{s} aus.
- Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems $L(s, \dot{s})$ auf und formulieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange-Gleichung 2. Art) für $s(t)$.
- Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $\dot{s}(0) = 0$ an. Was rollt unter gleichen Bedingungen schneller: ein Hohlzylinder oder ein Vollzylinder mit gleicher Masse M und gleichem äußeren Radius R ?