Probeklausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. L. Fabbietti, Dr. B. Ketzer
Wintersemester 2012/2013
10. Januar 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Erklären Sie, warum ein Teil des Lichts des Himmels polarisiert ist. In welche Richtung ist das Licht polarisiert? Wann ist dieser Effekt am stärksten und warum?

(b) Überlegen Sie sich wie die Brillen in einem moderneren 3D-Film, funktionieren, bei dem der 3D-Effekt auch dann erhalten bleibt wenn der Betrachter seinen Kopf zur Seite neigt.

(c) Erklären Sie die Begriffe zeitliche und räumliche Kohärenz.

Lösung

(a) Das Licht des Himmels entsteht durch Streuung. Bei Sonnenauf- oder Sonnenuntergang ist das Licht, welches senkrecht zur Ebene aus Einfalls- und Beobachtungsrichtung ankommt, linear senkrecht zur Sonnenstrahlrichtung polarisiert. Andere Polarisationsrichtungen erreichen das Auge nicht, da die durch diese Richtungen angeregten Dipole nicht in Richtung senkrecht zur Erdoberfläche abstrahlen.

[2]

(b) Auf die Leinwand werden zwei Bilder mit gegensätzlich polarisiertem Licht (Rechts-,Linkszirkular oder Lineares Licht im 90° Winkel) projeziert. Die 3D Brillen sind letztendlich Polarisationsfilter (zusammengesetzte), die jeweils nur eine Bildsorte ins Auge lassen, die dann im Gehirn in ein 3D-Bild zusammengeführt wird. Beim zirkular polarisiertem Licht wird das Licht durch $\lambda/4$ Plättchen in lineares Licht umgewandelt und dann durch Linearfilter gefiltert, deshalb kann man seinen Kopf drehen.

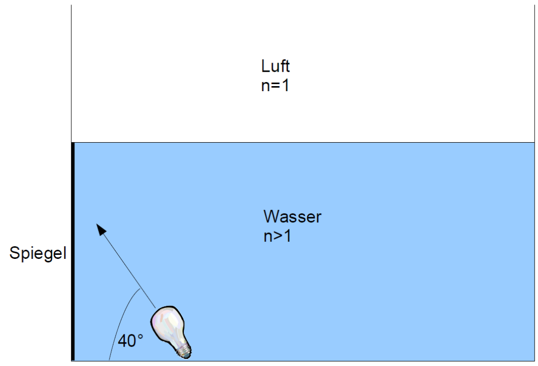
[2]

(c) Die Begriffe zeitliche und räumliche Kohärenz beschreiben das Wissen über die Phase bei Wellen zu unterschiedlichen Zeitpunkten (gleicher Ort) bzw. bei Teilwellen an unterschiedlichen Orten (gleicher Zeitpunkt). Diese Begriffe werden bei realen Lichtquellen relevant, die zeitlich begrenztes Licht aussenden und damit eine gewisse spektrale Breite haben bzw. räumlich ausgedehnt sind und deshalb eine Unschärfe in ihrer Ausbreitungsrichtung haben.

[2]

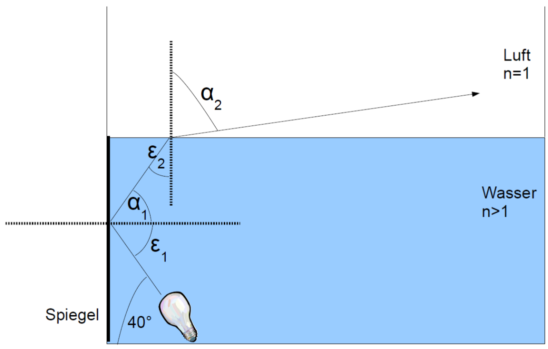
Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Brechzahl n in einem Medium ist eine Funktion der Frequenz. Es liegt also Dispersion vor. Im folgenden soll ein Wasserbecken indirekt beleuchtet werden. Dazu wird eine Lampe am Beckenboden angebracht. Das Licht fällt auf einen Spiegel, der an einer Seite des Beckens angebracht ist. Der Winkel zwischen Lichtstrahl und Beckenboden beträgt 40°. Vom Spiegel trifft der Lichtstrahl auf die glatte Wasser-Luft Grenzfläche. Die Brechzahl der Luft sei für alle Frequenzen n_L=1.000. Für Wasser sei die Brechzahl abhängig von der Frequenz, für rotes Licht $n_R = 1.295$ und für grünes Licht $n_G = 1.300$.



(a) Übernehmen Sie die Zeichnung und skizzieren Sie qualitativ den Strahlengang (mit Winkeln).

Lösung:



[**2**]

(b) Bestimmen Sie die Lichtgeschwindigkeiten c_R für rotes und c_G für grünes Licht im Wasser.

Lösung:

Die Lichtgeschwindigkeit als Funktion des Brechungsindex n ist gegegeben durch:

$$c(n) = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{n} \tag{1}$$

Daraus ist sofort ersichtlich, dass

$$c_R = 2.32 \cdot 10^8 \text{m/s} \tag{2}$$

$$c_G = 2.31 \cdot 10^8 \text{m/s} \tag{3}$$

[**1**]

(c) Berechnen Sie für rotes Licht alle Ein- und Ausfallswinkel, die an den optischen Grenzflächen auftreten. Geben Sie alle vier Winkel explizit an.

Lösung:

Die Ein- und Ausfallwinkel für rotes Licht sind gegeben durch:

$$\epsilon_1 = 40^\circ \quad \text{(am Spiegel)} \tag{4}$$

$$\alpha_1 = 40^\circ \quad \text{(Einfallswinkel = Ausfallwinkel)} \tag{5}$$

$$\epsilon_2 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \tag{6}$$

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_R}{n_{\text{Luft}}} \sin(\epsilon_2)\right) = 82.76^\circ \tag{7}$$

[**2**]

(d) Blaues Licht wird an der Wasser-Luft Grenzfläche totalreflektiert und läuft dann an der Grenzfläche entlang (Ausfallswinkel 90°). Bestimmen Sie die Brechzahl n_B für blaues Licht.

Lösung:

Aus Teil c) ist bekannt, dass

$$\epsilon_2 = 50^\circ \tag{8}$$

Der Ausfallwinkel α_2 ist bei Totalreflektion 90°, wie angegeben. Daher beträgt $\sin(\alpha_2)$=1 und für die Brechzahl von blauem Licht ergibt sich:

$$n_B = \frac{n_L}{\sin(\epsilon_2)} = 1.305 \tag{9}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachten Sie ein Gaußsches Wellenpaket

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i(kx-\omega t)} dk,$$

wobei

$$F(k) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-(k-k_0)^2\sigma^2}{2}\right]$$

eine Gauß-Funktion ist, zentriert um $k = k_0$ und mit einer Varianz σ^{-2}.

(a) Wie breitet sich dieses Wellenpaket in einem dispersionsfreien Medium mit $\omega = vk$ aus (Erklärung)?

(b) Wie breitet sich dieses Wellenpaket in einem Medium mit linearer Dispersionsrelation $\omega = v_g k + \alpha$ aus (die Phasengeschwindigkeit ist in diesem Beispiel nicht konstant)?

Lösung

(a) In einem dispersionsfreien Medium kann man $\xi = x - vt$ als neue Variable in einem mitbewegten Koordinatensystem einführen und man erhält $f(x,t) = f(\xi, 0)$. Das Wellenpaket breitet sich also unverändert mit der Geschwindigkeit v aus.

[**1**]

(b) Setzt man die angegebene Dispersionrelation in die Gleichung für $f(x,t)$ ein, so erhält man

$$f(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{i[kx-t(v_g k+\alpha)]} dk. \tag{10}$$

Ersetzt man wieder $\xi = x - v_g t$, folgt

$$f(x,t) = e^{-i\alpha t} f(\xi, 0) = e^{-i\alpha t} f(x - v_g t, 0). \tag{11}$$

[**1**]

Man sieht, dass sich das Wellenpaket mit einer unveränderten Einhüllenden mit der Geschwindigkeit $v_g = d\omega/dk$, der *Gruppengeschwindigkeit*, fortbewegt. Die Phase der einzelnen Partialwellen ändert sich jedoch während der Ausbreitung, d. h. sie bewegen sich relativ zur Einhüllenden.

[**1**]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Transmissionsachsen zweier Polarisationsfolien seien gekreuzt, so dass kein Licht sie durchdringt. Eine dritte Folie werde so zwischen die ersten beiden gestellt, dass ihre Transmissionsachse mit der ersten einen Winkel θ bildet. Umpolarisiertes Licht der Intensität I_0 treffe auf die erste Folie. Geben Sie eine allgemeine Formel an, die den Zusammenhang von der durchgelassenen Intensität mit I_0 und θ beschreibt.

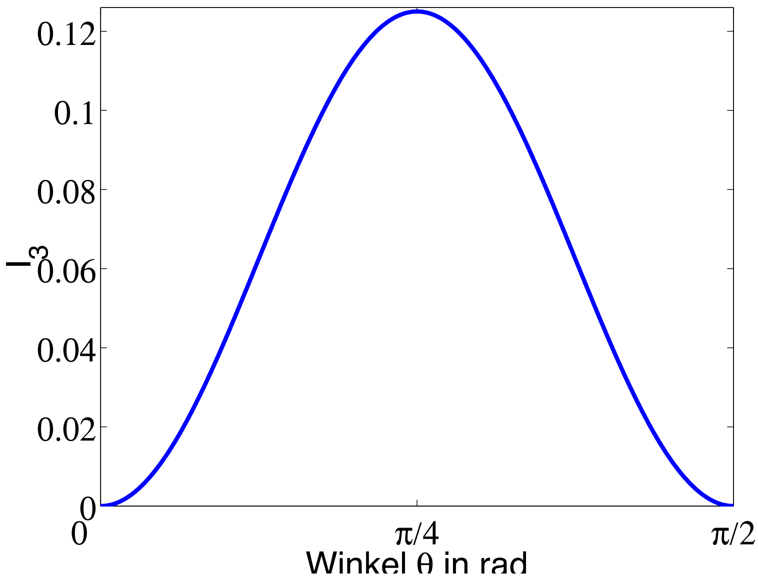
(a) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion.

(b) Berechnen Sie die Intensität des Lichts nach Durchgang durch alle drei Folien für $\theta = 45°$

(c) für $\theta = 30°$

Hinweis: $\sin\phi\cos\phi = \frac{1}{2}\sin 2\phi$

Lösung



(a) [**1**]

Die von der ersten Polarisationsfolie durchgelassene Intensität ist $I_1 = \frac{I_0}{2}$. Für die weiteren Folien gilt die Beziehung $I_{n+1} = I_n \cos^2\theta$. Wenn die Transmissionsachse der mittleren Folie mit der Achse der ersten den Winkel θ bildet, dann bildet sie mit der Achse der letzten Folie den Winkel $90° - \theta$. Es ist aber $\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$ und $\cos^2(90° - \theta) = \sin^2\theta$. Also gilt

$$I_3 = I_2 \sin^2\theta = I_1 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{I_0}{8}\sin^2 2\theta$$

[**1**]

(b) Für $\theta = 45°$ ergibt sich $I_3 = \frac{I_0}{8}$, da $\sin 90° = 1$.

[**1**]

(c) Für $\theta = 30°$ erhalten wir $I_3 = 3\frac{I_0}{32}$, da $\sin^2 60° = \frac{3}{4}$.

[**1**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Der Brechungsindex von Luft bei $T = 300\text{K}$ und Druck $p = 1\text{atm}$ beträgt $n = 1.0003$ in der Mitte des sichtbaren Spektrums. Nehmen Sie bei $T = 300\text{K}$ eine isotherme Atmosphäre an. Berechnen Sie den Faktor, um den die Erdatmosphäre dichter sein müsste, damit die Krümmung eines horizontalen Lichtstrahls der Erdkrümmung auf Meereshöhe entspräche. Dies würde bedeuten, dass man bei wolkenlosem Himmel die ganze Nacht lang einen romantischen Sonnenuntergang beobachten könnte. Allerdings wäre das Bild der Sonne stark vertikal gestaucht.

Hinweis: Der Brechungsindex n habe die Eigenschaft, dass $n - 1$ proportional zur Dichte sei. In dieser isothermen Atmosphäre gilt die barometrische Höhenformel:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{8700\text{m}}\right), \tag{12}$$

wobei $\rho(h)$ die Dichte sei, ρ_0 die Dichte auf Meereshöhe und h die Höhe über der Meereshöhe ist, sodass gilt

$$n(r) - 1 = \rho \exp\left(-\frac{r - R}{8700\text{m}}\right), \tag{13}$$

wobei ρ der Dichtekoeffizient ist. Der Erdradius ist gegeben durch $R = 6400 \times 10^3\text{m}$. Denken Sie an das Fermatsche Prinzip.

Lösung:

Es ist also bekannt, dass

$$n(r) - 1 = \rho \exp\left(-\frac{r - R}{8700\text{m}}\right), \tag{14}$$

wobei $R = 6400 \times 10^3\text{m}$ ist, also der Erdradius, und ρ der Dichtekoeffizient von Luft. Dann ist

$$n(r) = 1 + \rho \exp\left(-\frac{r - R}{8700\text{m}}\right) \tag{15}$$

$$\frac{dn(r)}{dr} = n'(r) = -\frac{1}{8700\text{m}} \rho \exp\left(-\frac{r - R}{8700\text{m}}\right) \tag{16}$$

[1]

Es ist ebenfalls bekannt, dass die Luft so dicht ist, dass die Lichtkrümmung der Erdkrümmung auf Meereshöhe entspricht (siehe Abbildung).

Die optische Weglänge von A nach B ist

$$l = n(r) r \theta \tag{17}$$

[1]

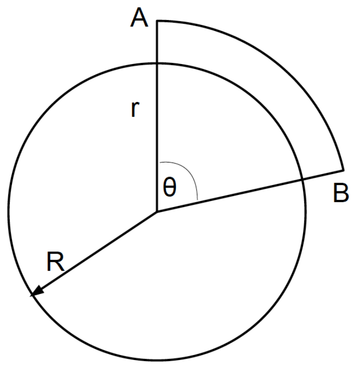


Abbildung 1: Krümmung des Lichts.

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass die optische Weglänge von A nach B ein Extremum sein sollte. Daher hat man

$$\frac{dl}{dr} = \left(n'(r)r + n(r)\right)\theta = 0, \tag{18}$$

[**1**]

das bedeutet also

$$n'(r) = \frac{-n(r)}{r} \tag{19}$$

[**1**]

Setzt man Gleichung (19) in Gleichung (16) ein, so erhält man

$$\frac{1}{8700\text{m}}\rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700\text{m}}\right) = \frac{n(r)}{r} \tag{20}$$

Auf Meereshöhe beträgt $r = R = 6400 \times 10^3$m. Zusammen mit den Gleichungen (15) und (20) hat man dann

$$\frac{\rho \cdot 6400 \cdot 10^3\text{m}}{8700\text{m}} = 1 + \rho \tag{21}$$

[**1**]

und damit

$$\rho = 0,00136\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{22}$$

Auf Meereshöhe und bei bei $T = 300$K und Druck $p = 1$atm ist

$$n_0 - 1 = \rho_0 = 0,0003\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{23}$$

[1]

Damit erhalten wir schließlich das Ergebnis:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 4,53 \tag{24}$$

Das bedeutet, dass die Atmosphäre um einen Faktor von 4.53 dichter sein müsste, um die gewünschte Lichtkrümmung zu erhalten.

[1]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Licht der Wellenlänge $\lambda = 589,3$nm in Luft treffe so auf eine Scheibe Kalkspat ($N_o = 1,65836, N_{ao} = 1,48643$), dass der ordentliche und außerordentliche Strahl sich in die gleiche Richtung ausbreiten.

(a) Wann ist dies der Fall?

(b) Wie groß ist die Phasendifferenz δ der beiden Strahlen nach Durchlaufen der Schichtdicke $d = 2\lambda$?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Anzahl der Wellenlängen, die die jeweiligen Strahlen im Kalkspat zurücklegen müssen.

Lösung

(a) Wenn Licht senkrecht auf die Oberfläche eines doppelbrechenden Kristalls trifft und dabei gleichzeitig senkrecht zur optischen Achse des Systems steht, dann breiten sich der ordentliche und der außerordentliche Strahl in dieselbe Richtung, aber mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus. Daher entsteht eine Phasendifferenz, die von der Dicke des Kristalls und der Wellenlänge abhängt.

[2]

(b) Die Wellenlänge des ordentlichen Strahls ist gerade $\lambda_o = {}^{\lambda}/_{n_o}$ und die des außerordentlichen Strahls gerade $\lambda_{ao} = {}^{\lambda}/_{n_{ao}}$. Die Anzahl der Wellenlängen die in den Kristall passen, ist dann eine Funktion der Dicke des Kristalls. $N_o = {}^{d}/_{\lambda_o}$ und $N_{ao} = {}^{d}/_{\lambda_{ao}}$. Die Phasendifferenz $\delta(d) = 2\pi(N_o - N_{ao}) = 2\pi(n_o - n_{ao}){}^{d}/_{\lambda}$. Nun müssen nur noch die Zahlenwerte eingesetzt werden:

[1]

$$\delta = \frac{2\pi(1,65836 - 1,48643)2\lambda}{\lambda} \approx 2,16 \tag{25}$$

[1]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Brennweite einer dicken bikonvexen Linse aus Kronglas SK 1 und den Krümmungsradien 20cm und −20cm. Die Linse sei 4cm dick und befinde sich in Luft ($n_L = 1, N_{KG} = 1,616$).

Lösung

Um die Brennweite einer Linse zu bestimmen, setzt man $g = \infty$. Dann entsteht das Bild in der Brennebene, also $b = f$. An der ersten Oberfläche gilt die Gleichung für eine brechende Kugelfläche (mit $n_1 = 1$)

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r_1}$$

[**1**]

mit $n = 1,616016$ und $r_1 = 20\text{cm}$. Man formt nach b um und erhält $b = \frac{nr_1}{(n-1)} \approx 52,8\text{cm}$. Das Bild entsteht also $52,8\text{cm}$ rechts von der Oberfläche. Diese ist 4cm von der zweiten Oberfläche enthält, so dass $g' = -48,8\text{cm}$ gilt.

[**1**]

Für die zweite Brechung gilt daher

$$-\frac{n}{48,8\text{cm}} + \frac{1}{b'} = \frac{1-n}{r_2} \Leftrightarrow b' = \frac{r_2 \cdot 48,8\text{cm}}{(1-n)\cdot 48,8\text{cm} + nr_2}$$

mit $r_2 = -20\text{cm}$.

[**1**]

Daraus folgt, dass die Brennweite F den Wert

$$F = b' \approx 15,75\text{cm}$$

hat.

[**1**]

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Auf einer Wasserpfütze ($n_W = 1,3$) schwimme eine dünne Ölschicht der Dicke d. Man betrachtet die Schicht und das darin reflektierte Sonnenlicht unter einem Winkel α zur Normalen.

(a) Zeigen Sie, dass die optische Wegdifferenz zwischen dem an der Grenzfläche Luft-Öl einfach reflektierten Strahl und dem an der Grenzfläche Öl-Wasser einfach reflektierten Lichtstrahl

$$\Delta s = 2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha} \tag{26}$$

beträgt und skizzieren Sie die Strahlengänge.

(b) Geben Sie die Bedingung für konstruktive Interferenz zwischen den beiden reflektierten Lichtstrahlen an, wenn das Öl einen Brechungsindex von $n_{\text{Öl}} = 1,6$ bzw. $n_{\text{Öl}} = 1,2$ hat.

(c) Berechnen Sie die minimale Dicke d der Ölschicht für $n_{\text{Öl}} = 1,6$, so dass das reflektierte Sonnenlicht bei Betrachtung unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ grün ($\lambda = 500\text{nm}$) erscheint.

Lösung

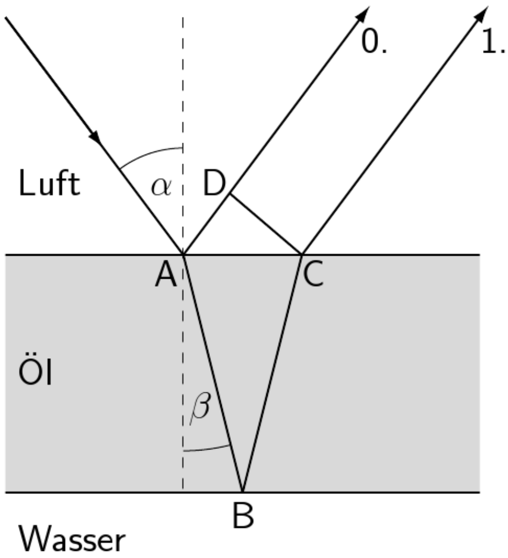


Abbildung 2: Skizze zu Aufgabe 7

[1]

(a) Die optische Wegdifferenz beträgt $\Delta s = n_{\text{Öl}}(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD}$. Mit $\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos\beta}$ und $\overline{AD} = \overline{AC}\sin\alpha$ folgt unter Verwendung von $\tan\beta = \overline{AC}/2d$ für die Wegdifferenz

$$\Delta s = \frac{2n_{\text{Öl}}d}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\sin\alpha$$

An dieser Stelle wird das Snelius'sche Brechungsgesetz $\sin\alpha = n_{\text{Öl}}\sin\beta$ benutzt und es ergibt sich

$$= \frac{2n_{\text{Öl}}d}{\cos\beta} - \frac{2n_{\text{Öl}}d\sin^2\beta}{\cos\beta} = 2n_{\text{Öl}}d\cos\beta$$

[1]

Nun wird der Kosinus wieder in einen Sinus umgewandelt und anschließend der Winkel β mittels erneuter Anwendung des Brechungsgesetzes in α transformiert. Es ergibt sich

$$= 2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha}$$

also zusammengefasst die gewünschte Beziehung 26.

[1]

(b) Für $n_{\text{Öl}} = 1,6$ muss man einen Phasensprung bei A an der Grenzfläche Luft-Öl berücksichtigen, da dieser größer ist als der Brechungsindex von Wasser. Die Phasendifferenz ergibt somit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s - \pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

[**1**]

$$\Delta\phi = m2\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

Und man erhält eine Wegdifferenz von

$$\Delta s = (m + 1/2)\lambda$$

[**1**]

Für $n_{\text{Öl}} = 1,2$ ergibt sich ein zusätzlicher Phasensprung bei B an der Grenzfläche Öl-Wasser, welcher ebenfalls zu berücksichtigen ist. Die Phasendifferenz beträgt hier ebenfalls

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = m2\pi, \quad m \in \mathbb{N}$$

und es ergibt sich

$$\Delta s = (m + 1)\lambda$$

[**1**]

(c) Benutzt man die vorangegangene Aufgabe, so ergibt sich

$$2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha} = \Delta s = (m + 1/2)\lambda$$

[**1**]

Da nach der minimalen Dicke gefragt ist, muss $m = 0$ betrachtet werden. Zusammen mit $\alpha = 45°$ und $\lambda = 500\text{nm}$ kann man die Dicke zu

$$d = \frac{(m + 1/2)\lambda}{2\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha}} \tag{27}$$

bestimmt werden.

[**1**]