Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. S. Ulbrich

Wintersemester 2001/2002
31. Januar 2002
14.15–15.45 Uhr

Höhere Mathematik 2 für Physik (Analysis 1)

Semestralklausur

Hinweise:

1) Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
2) Zum Bestehen der Klausur sind ca. 17 Punkte erforderlich, für die Note 1,0 etwa 37 Punkte.
3) Als Hilfsmittel sind zugelassen: Bücher, Skripten, eigene Aufzeichnungen, Formelsammlungen.
4) Taschenrechner und andere elektronische Geräte sind verboten! Schalten Sie Ihr Handy ab.
5) Antworten sind so ausführlich zu begründen, daß die Lösung nachvollziehbar ist.
6) Ergebnisse von Tutor- und Hausaufgaben dürfen (mit Quellenangabe!) ohne erneute Herleitung verwendet werden.

Aufgabe 1. [ca. 5 Punkte]
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}\, z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 2. [ca. 8 Punkte]
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4 + 2n^3} - n^2}{\sqrt{n^2+1}}, \; n \in \mathbb{N},$ b) $b_n = \sqrt{n} \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n}\right), \; n \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 3. [ca. 8 Punkte]
Gegeben sei die induktiv definierte Folge

$$x_0 := 2, \quad x_{n+1} := \left(\frac{3}{4}x_n + \frac{1}{2x_n^3}\right) =: f(x_n), \; n \in \mathbb{N}_0.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(\frac{3}{4}x + \frac{1}{2x^3}\right)$$

für $x \geq \sqrt[4]{2}$ monoton wächst und folgern Sie, daß $f(x) \geq \sqrt[4]{2}$ gilt für alle $x \geq \sqrt[4]{2}$.

b) Zeigen Sie, daß $x_n \geq \sqrt[4]{2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und daß die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fällt.

c) Weisen Sie nach, daß die Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4. [ca. 5 Punkte]
Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

BITTE WENDEN !

Aufgabe 5. [ca. 6 Punkte]
Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeigen Sie, daß $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie f.
b) Konvergiert $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 6. [ca. 7 Punkte]
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle \lim_{x\searrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{\ln(1+x)}$, b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos(x)} - \frac{2}{x^2} \right)$.

Aufgabe 7. [ca. 5 Punkte]
Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{1+x^2}\right).$$

a) Weisen Sie nach, daß f ein Maximum und ein Minimum annimmt.
b) Geben Sie an, wo die Minima und wo die Maxima von f liegen.

VIEL ERFOLG!