**Theoretische Physik 2: ELEKTRODYNAMIK, DVP-Klausur**

Freitag, 19.09.2008, 13:00 – 14:30 **Lösungen**

1. (i): (a) ; (ii): (b) ; (iii): (d) ; (iv): (b) ; (v): (c)

2. (a) Da das Potenzial asymptotisch stärker abfällt als $1/r$, muss das Monopolmoment, d.h. die Gesamtladung, verschwinden. Höhere (sphärische) Multipolmomente verschwinden wegen der Radialsymmetrie sowieso; da das Potenzial asymptotisch schneller abfällt als jede Potenz von $r$, gibt es keine nicht-verschwindende Multipolmomente irgendwelcher Ordnung.

   (b) Aus $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho = -\epsilon_0 \Delta\Phi$ folgt

$$\rho_>(r) = -\epsilon_0 \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] = -\frac{e_0}{\pi a_0^3} \, \mathrm{e}^{-2r/a_0} \,, \quad r > 0 \,.$$

$$Q_> = \int \rho_> \mathrm{d}^3 r = -4\pi \frac{e_0}{\pi a_0^3} \int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-2r/a_0} \mathrm{d}r = -e_0 \,.$$

   (c) Mit dem Beitrag $\rho_0(r) = e_0 \delta(\vec{r})$ für eine Punktladung mit Ladung $e_0$ ist die gesamte Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0(r) + \rho_>(r)$, und die Gesamtladung ist $\int \rho_0 \mathrm{d}^3 r + \int \rho_> \mathrm{d}^3 r = e_0 - e_0 = 0$, im Einklang mit (a).
   [Die Darstellung $\Phi(r) = \Phi_0(r) + \Phi_>(r)$

$$\text{mit} \quad \Phi_0(r) = \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 \, r} \,, \quad \Phi_>(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{e_0}{r} \left( \mathrm{e}^{-2r/a_0} - 1 \right) + \frac{e_0}{a_0} \mathrm{e}^{-2r/a_0} \right]$$

   zerlegt das Potenzial in einen Beitrag $\Phi_0$ von der Punktladung bei $\vec{r} = 0$ und einen überall regulären Rest $\Phi_>$.]

3. (a) Aus den Maxwellgleichungen folgt

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \mathrm{i}\vec{k} \times \vec{E}_0 \mathrm{e}^{\cdots} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mathrm{i}\omega \vec{B}_0 \mathrm{e}^{\cdots} \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) $E'_{0,x} = E_{0,x} = E_0 \,, \quad E'_{0,y} = \gamma \left( E_{0,y} - v B_{0,z} \right) = \mathrm{i}\gamma E_0 \,,$

$$E'_{0,z} = \gamma \left( E_{0,z} + v B_{0,y} \right) = \gamma\beta E_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}'_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\gamma \\ \gamma\beta \end{pmatrix}$$

$$k^\mu = \begin{pmatrix} \omega/c_0 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \quad , \quad k'^{\,\mu} = \begin{pmatrix} \omega'/c_0 \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\omega/c_0 \\ -\gamma\beta\omega/c_0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{k}\,' = \begin{pmatrix} -\gamma\beta\omega/c_0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -\gamma\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $\omega' = \gamma\omega$.

(c) Der Realteil von $\vec{E}_0'$ ist

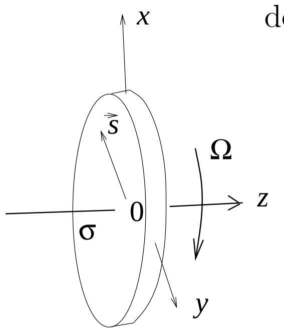
$$E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma\beta \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Einheitsvektor in dieser Richtung ist } \hat{e}' = \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma\beta \end{pmatrix}$$

Offensichtlich ist $\vec{k}\,' \cdot \hat{e}' = 0$.

(d) Da $\vec{k}\,' \times \hat{e}'$ auf $\vec{k}\,'$ und $\hat{e}'$ senkrecht steht, ist dies die $y$-Richtung in K':

$$\vec{k}\,' \times \hat{e}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma k \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E'_{0,y} = \mathrm{i}\gamma E_0 \, , \quad \vec{E}_0{}' \cdot \hat{e}' = \gamma E_0 \, . \quad \text{QED}$$

4.




OBdA lege die $z$-Achse auf die Symmetrieachse und den Koordinatenursprung in die Mitte der Scheibe. $\vec{j}(\vec{r}\,') = \delta(z')\,\sigma\Omega\,\hat{e}_z \times \vec{s}$; dabei ist $\vec{s}$ die Projektion von $\vec{r}\,'$ auf die $x$-$y$-Ebene.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, \mathrm{d}^3 r'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma\,\Omega \int \frac{(\vec{s} - \vec{r}) \times (\hat{e}_z \times \vec{s})}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \, \mathrm{d}^2 s$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma\,\Omega \int \frac{\vec{s} \cdot (\vec{s} - \vec{r})\,\hat{e}_z - \hat{e}_z \cdot (\vec{s} - \vec{r})\,\vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|^3} \, \mathrm{d}^2 s = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma\,\Omega \int \frac{s^2 \hat{e}_z + z\vec{s}}{(z^2 + s^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}^2 s \, .$$

Beim Integral über den Winkel $\phi = \arctan(s_y/s_x)$ verschwindet der Beitrag proportional zu $\vec{s}$, also ist

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sigma\,\Omega\,\hat{e}_z\,2\pi \int_0^\infty \frac{s^2}{(z^2 + s^2)^{3/2}} \, s\mathrm{d}s = \frac{\mu_0 \sigma}{2} \,\Omega\,\hat{e}_z \left( \frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right)$$