....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Semestrale
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

24. Dezember 2010

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Folgen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen.

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

☐ $\sqrt{e}$ ☒ $+\infty$[2] ☐ e ☐ 0 ☐ 1 ☐ konvergiert nicht

(ii) $b_n = \frac{2^n}{5^{n/2}} - \frac{2n^2+1}{5n^2+4n+2}$

☒ $-\frac{2}{5}$[2] ☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ konvergiert nicht

(iii) $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$

☐ $+\infty$ ☐ 1 ☒ 0[2] ☐ 1 ☐ konvergiert nicht

Lösung:

(i) Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

(ii) Der erste Term geht gegen 0, da $2 < \sqrt{5} \approx 2.24$ ist,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^{n/2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n = 0.$$

Der zweite Term konvergiert gegen $-\frac{2}{5}$,

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{2n^2+1}{5n^2+4n+2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{2+n^{-2}}{5+4n^{-1}+2n^{-2}} = -\tfrac{2}{5}.$$

Da die beide Summanden getrennt konvergieren ist der Limes der Summe gleich die Summe der Limiten, also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{5^{n/2}} - \frac{2n^2+1}{5n^2+4n+2}\right) = 0 - \tfrac{2}{5} = -\tfrac{2}{5}.$$

(iii) Die Summe $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$ nimmt die Werte -1 und 0 an, je nachdem ob n ungerade oder gerade ist, ist also insbesondere beschränkt. Daher gilt

$$0 \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

2. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die unten stehenden Potenzreihen bzw. Funktionen konvergieren.

(i) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

☐ $(-1, +1)$ ☒ $[-1, +1)$[2] ☐ $[-1, +1]$ ☐ $(-1, +1]$ ☐ konvergiert nirgends

(ii) $g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\, x^k$

☒ $\mathbb{R}$[2] ☐ $(-1, +1)$ ☐ $\{0\}$ ☐ $[-1, +1]$ ☐ konvergiert nirgends

(iii) $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n\ |x|^n$

☒ $(-1/4, +1/4)$[2] ☐ $(-4, +4)$ ☐ $[-1/4, +1/4]$ ☐ $[-4, +4]$ ☐ $\mathbb{R}$

Lösung:

(i) Der Konvergenzradius ρ_f der Reihe ist 1, denn

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 = \tfrac{1}{\rho_f}.$$

Am linken Rand, $x = -1$, konvergiert die Reihe nach dem Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen. Für $x = 1$ divergiert die Reihe, da $\frac{1}{n}$ nicht summierbar ist. Daher konvergiert f auf $[-1, +1)$.

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

und die rechte Seite konvergiert bekanntermaßen für alle $x \in \mathbb{R}$ gegen e^x.

(iii) Nach dem Wurzelkriterium erhalten wir als Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\, x^n$ ist $\rho_h = \frac{1}{4}$, da

$$\sqrt[n]{|(-4)^n|} = 4 \xrightarrow{n\to\infty} 4 = \frac{1}{\rho_h}.$$

An beiden Rändern konvergiert h nicht, da $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ nicht konvergiert. Somit ist das Konvergenzgebiet $(-1/4, +1/4)$.

3. **Reihen** **[7 Punkte]**

Geben Sie den Reihenwert von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+6k+8}$$

an.

Lösung:

Wir zerlegen die Summanden in Ihre Partialbrüche: der Nenner hat die Nullstellen $k = -4$ und $k = -2$ [1], denn

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-8} = -3 \pm 1.$$

Eingesetzt in den Partialbruchansatz ergibt dies

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2+6k+8} &= \frac{1}{(k+2)(k+4)} = \frac{a}{k+2} + \frac{b}{k+4} = \frac{a(k+4)+b(k+2)}{(k+2)(k+4)} \\ &= \frac{(a+b)k+2(2a+b)}{(k+2)(k+4)}\end{aligned}$$

und wir schließen $b = -a$ und $2a = 1$, das heißt $a = 1/2 = -b$ [1].

Die Partialsummen [1] konvergieren gegen $\frac{5}{12}$, denn

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+6k+8} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+4}\right) \overset{[1]}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+4} \\ &\overset{[1]}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+4} = \frac{5}{12} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+4} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+4} \\ &\overset{[1]}{=} \frac{5}{12} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)\end{aligned}$$

und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+6k+8} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{2(n+3)} - \frac{1}{2(n+4)}\right) \overset{[1]}{=} \frac{5}{12}.$$

4. **Kurvendiskussion** **[13 Punkte]**

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})}$.

(i) Überprüfen Sie, ob f in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist. Begründen Sie!

(ii) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

(iii) Bestimmen Sie erste und zweite Ableitung von f.

(iv) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema von f. Sind die Extrema lokal oder global?

Lösung:

(i) Aus

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

folgt auch

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0} e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} \overset{[1]}{=} 0 \neq \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} \overset{[1]}{=} +\infty.$$

Da sich links- und rechtsseitiger Grenzwert unterscheiden, kann f bei $x = 0$ nicht stetig fortgesetzt werden [1].

Alternativ: Es reicht aus, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = +\infty$ zu zeigen und dann daraus zu schließen, dass f in $x = 0$ nicht stetig fortsetzbar ist.

(ii) Aus

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

folgt

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} = +\infty \qquad [1]$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} = 0. \qquad [1]$$

(iii) Wir berechnen erste und zweite Ableitung:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} \qquad [1]$$

$$f''(x) = \frac{1}{4^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} - \frac{1}{4} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})}$$
$$= \left(x^4 - 2x^2 + 8x + 1\right) \frac{e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})}}{16x^4} \qquad [1]$$

(iv) Um die kritischen Punkte auszurechnen, setzen wir die erste Ableitung 0:

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})} \overset{!}{=} 0 \qquad [1]$$

Da der letzte Faktor > 0 ist, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0,$$

also $x_c = \pm 1$ [1]; Der Funktionswert an den kritischen Punkten ist $f(\pm 1) = e^{\pm\frac{1}{2}}$ [1] Wir setzen $x_c = \pm 1$ in die zweite Ableitung ein und erhalten

$$\begin{aligned} f(1) &= \left(1 - 2 + 8 + 1\right) \frac{e^{+\frac{1}{2}}}{16} > 0 \qquad [1] \\ f(-1) &= \left(1 - 2 - 8 + 1\right) \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{16} < 0 \end{aligned}$$

Also ist $(+1, e^{+\frac{1}{2}})$ ein lokales Minimum und $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ ein lokales Maximum [1].

Da $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 < e^{+\frac{1}{2}} = f(+1)$ und $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty > e^{-\frac{1}{2}} = f(-1)$, sind die Extrema nur lokale, aber nicht globale Extrema [1].

5. **Potenzreihen** **[7 Punkte]**

Stellen Sie

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

als Potenzreihe dar und geben Sie den Konvergenzradius an. *Hinweis:* Cauchy-Produkt

Lösung:

Wir benutzen die geometrische Reihe

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad [1]$$

und die Cauchy-Produktformel um $f(x)$ umzuschreiben als

$$f(x) \overset{[1]}{=} \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \overset{[1]}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 \overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)}_{=n+1} x^n$$

$$\overset{[1]}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n.$$

Aus dem Wurzelkriterium ergibt sich

$$1 \xleftarrow{n\to\infty} \sqrt[n]{n} \leq \sqrt[n]{n+1} \leq \sqrt[n]{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad [1]$$

das heißt der Konvergenzradius ist 1 [1].

6. **Gleichmäßige Konvergenz** **[11 Punkte]**

Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$.

(i) Geben Sie die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ an, gegen die die f_n punktweise konvergieren.

(ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert.

(iii) Sei $\tilde{f}_n : [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ die Einschränkung von f_n auf das Intervall $[0, 1/2]$. Geben Sie die Grenzfunktion $\tilde{f}$ an und zeigen Sie, dass $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\tilde{f}$ konvergiert.

Lösung:

(i) Für $x \neq 1$ konvergiert $f_n(x)$ gegen 0, denn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0. \qquad [1]$$

Für $x = 1$ ist $f_n(1) = 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \qquad [1]$$

Die Grenzfunktion ist daher gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}. \qquad [1]$$

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} \left\|f - f_n\right\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} \left|f(x) - f_n(x)\right| \overset{[1]}{\geq} \sup_{x\in[0,1)} \left|f(x) - f_n(x)\right| \overset{[1]}{=} \sup_{x\in[0,1)} \left|f_n(x)\right| \\ &= \sup_{x\in[0,1)} x^n \overset{[1]}{=} 1 \end{aligned}$$

und somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen f [1].

(iii) Offensichtlich ist die Grenzfunktion $\tilde{f}$ die Einschränkung der Grenzfunktion f auf das Intervall $[0, 1/2]$, also die Nullfunktion, $\tilde{f} : [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ [1]. Wir setzen das in die Supremumsnorm ein und erhalten

$$\left\|\tilde{f} - \tilde{f}_n\right\|_\infty = \sup_{x\in[0,1/2]} \left|\tilde{f}(x) - \tilde{f}_n(x)\right| \overset{[1]}{=} \sup_{x\in[0,1/2]} x^n \overset{[1]}{=} \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

$(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen $\tilde{f}$ [1].

7. **Stetige Bilder** **[6 Punkte]**

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten!

(i) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☐ Wahr ☒Falsch [1]
Gegenbeispiel: $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ [1]

(ii) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☐ Wahr ☒Falsch [1]
Gegenbeispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ [1]

(iii) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☒Wahr [1] ☐ Falsch
Satz vom Maximum und Minimum. [1]
Alternativ: stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, also auch beschränkt.

Lösung:

Siehe oben.

8. **Stetige Funktionen** **[7 Punkte]**

Die Temperaturverteilung eines dünnen Metallrings entlang seines Umfangs kann als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es immer zwei entgegengesetzte Punkte auf dem Ring gibt, die exakt die gleiche Temperatur haben.

Hinweis: Man betrachte $f(x) - f(x + \pi)$ auf $[0, \pi]$.

Lösung:

Wir betrachten die Funktion $F : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$ [1]. Es ist $F(0) = f(0) - f(\pi)$ und $F(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = -F(0)$ [1]. Entweder sind beide Randwerte also Null, oder Sie haben unterschiedliches Vorzeichen [2]. Da F wie f stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle x_0 von F in $[0, \pi]$ [2]. Somit gilt $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$ [1].