....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Probeklausur
Mathematik 4 für Physik
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

23. Dezember 2009, 10:15 – 11:45 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Zirkulation** **[8 Punkte]**

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Zirkulation von F entlang des im mathematisch positiven Sinne orientierten Einheitskreises in der xy-Ebene.

Lösung:

Wir können den Satz von Stokes anwenden: sei E die Einheitskreisscheibe um 0 mit Rand ∂E. Dann gilt

$$\int_{\partial E} F(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_E \operatorname{rot} F \cdot n \, \mathrm{d}S.$$

Die Rotation von F hat nur eine Komponente in z-Richtung, nämlich

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x - y^2 \\ x^2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Die Kreisscheibe wird am besten in Polarkoordinaten parametrisiert,

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor muss nach der rechte Handregel in positive z-Richtung zeigen, also

$$\begin{aligned} n(r,\varphi) = \partial_r \psi \wedge \partial_\vartheta \psi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ +r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Zirkulation kann also als Oberflächenintegral ausgedrückt werden, nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\partial E} F(r) \cdot \mathrm{d}r = \int_E \operatorname{rot} F \cdot n \, \mathrm{d}S &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, 2r^2 \left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir benutzt, dass $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\varphi = 0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \cos\varphi$ ist.

Alternativ kann die Zirkulation auch direkt berechnet werden: diesmal parametrisieren wir ∂E über

$$\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus

$$\dot\gamma(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial E} F(r) \cdot \mathrm{d}r &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \dot{\gamma}(\varphi) \cdot F\big(\gamma(\varphi)\big) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin^2\varphi \\ \cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \big(-\sin\varphi \, \cos\varphi + \sin^3\varphi + \cos^3\varphi\big) \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \big(-\sin\varphi \, \cos\varphi + \sin\varphi - \sin\varphi \, \cos^2\varphi + \cos\varphi - \sin^2\varphi \, \cos\varphi\big) \\
&= \Big[-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi - \cos\varphi + \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi + \sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\Big]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

2. **Fluss durch Oberfläche** **[10 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = (2-z)^2,\ 0 \le z \le 2\}$ die Mantelfläche des Kegels K mit kreisförmigem Querschnitt dessen Kegelspitze bei $(0,0,2)$ liegt. S sei so orientiert, dass die Normalenvektoren nach außen zeigen. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2y \\ (1-z)(x^2+y^2) \end{pmatrix},$$

durch S.

Lösung:

Um den Satz von Gauß anwenden zu können, müssen wir die Oberfläche mit einem Deckel

$$D := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 2\}$$

schließen. Mit dem Satz von Gauß gilt dann

$$\int_{S\cup D} F\cdot n\,\mathrm{d}S = \int_S F\cdot n\,\mathrm{d}S + \int_D F\cdot n\,\mathrm{d}S = \int_K \operatorname{div} F\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

F ist divergenzfrei,

$$\operatorname{div} F = \partial_x(xy^2) + \partial_y(x^2y) + \partial_z\big((1-z)\,(x^2+y^2)\big) = y^2+x^2-(x^2+y^2) = 0,$$

und somit muss die rechte Seite verschwinden. Daraus folgt dann

$$\int_S F\cdot n\,\mathrm{d}S = -\int_D F\cdot n\,\mathrm{d}S.$$

Analog zu Aufgabe 1 benutzen wir die Parmetrisierung

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Normalenvektor

$$n(r,\varphi) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

muss aber diesmal nach unten, also in negative z-Richtung zeigen. Eingesetzt in das Integral ergibt das

$$\begin{aligned}
\int_D F\cdot n\,\mathrm{d}S &= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\, F\big(\psi(r,\varphi)\big)\cdot n(r,\varphi) \\
&= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{pmatrix} r^3\sin^2\varphi\,\cos\varphi \\ r^3\sin\varphi\,\cos^2\varphi \\ (1-0)(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \\
&= \int_0^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\,(-r^3) = -2\pi\tfrac{2^4}{4} = -8\pi.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int_K F\cdot n\,\mathrm{d}S = -\int_D F\cdot n\,\mathrm{d}S = +8\pi.$$

3. **Differenzialformen** **[6 Punkte]**

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ein Vektorfeld.

(a) Geben Sie die zu v assoziierte 1-Form $v^* \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ an:

$$\boxed{v^* = \sum_{j=1}^{n} v_j \, \mathrm{d}x_j}$$

(b) Unter welcher Bediungung an v ist v^* eine exakte Differentialform?

> v muss ein Gradientenfeld sein: das heißt, es muss eine glatte Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ exisitieren, so dass $v = \nabla f$ gilt. Dann ist
>
> $$v^* = (\nabla f)^* = \sum_{j=1}^{n} \partial_j f \, \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}f.$$

(c) Sei $n = 3$ und betrachten Sie das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie:

$$\mathrm{d}v^* = \boxed{\text{y}} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \boxed{0} \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \boxed{0} \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z$$

Lösung:

(a) Das folgt aus der Definition von v^*.

(b) Siehe Kasten.

(c) Aus

$$v^* = x \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}y + z \, \mathrm{d}z$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v^* &= \partial_y x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + \partial_z x \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \partial_x (xy) \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y + \\ &\qquad + \partial_z (xy) \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + \partial_x z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z + \partial_y z \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ &= y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

4. **Holomorphe Funktionen** **[4 Punkte]**

Sei $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x,y) = y^2 - x^2$. Geben Sie eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, sodass

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert.

$v(x,y) = -2xy$

Lösung:

Man sieht, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(z^2\right) &= \mathrm{Re}\left((x+iy)^2\right) = \mathrm{Re}\left(x^2 + i^2 y + i2xy\right) = x^2 - y^2 \\ &= -u(x,y)\end{aligned}$$

gilt. Daher können wir $v(x,y) = -\mathrm{Im}\left(z^2\right) = -2xy$ wählen.

5. **Laurent-Reihen** **[7 Punkte]**

(a) Geben Sie die Laurent-Reihe von

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$

um $z = 0$ an:

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} z^{2n}}$$

(b) Geben Sie den größtmöglichen Kreisring K an, für den die Laurent-Reihe

$$L(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^n + 1}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert.

$$K := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \boxed{\quad 1 \quad} < \left| z - \boxed{\quad -1 \quad} \right| < \boxed{\quad \alpha \quad} \right\}$$

Lösung:

(a) Wir setzen die Taylorreihe für $\cos z$ ein und erhalten

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}}{z^2} \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+2)!} z^{2n}.$$

(b) Die Laurent-Reihe hat bei $z = -1$ eine wesentliche Singularität. Sie konvergiert auf der Kreisscheibe um -1 mit innerem Radius r und äußerem Radius $R \geq r$, wobei $R, r = \infty$ sein können. Der Konvergenzradius ρ der Reihe

$$L_1(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{\alpha^n + 1} (z+1)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{-n} + 1} (z+1)^n$$

ist gleich dem Inversen von $r = {}^1\!/\!_\rho$. Da $\alpha > 1$ gilt

$$r = \rho^{-1} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha^{-n} + 1}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\alpha^n}{\alpha^n + 1}} = 1.$$

Der innere Radius ist also 1. Der äußere Radius ist gleich dem Konvergenzradius der Reihe

$$L_2(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n + 1} (z+1)^n,$$

der auch über das Wurzelkriterium bestimmt werden kann:

$$R^{-1} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\alpha^n + 1}} = \frac{1}{\alpha}$$

Daher konvergiert die Reihe auf der Kreisscheibe

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < \left| z - (-1) \right| < \alpha \right\}.$$

6. **Singularitäten** **[9 Punkte]**

(a) Welchen Typ von Singularität hat $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ bei $z = 0$?

☒ hebbar ☐ Pol 1. Ordnung ☐ Pol 2. Ordnung ☐ Pol -1. Ordnung ☐ wesentliche

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \pi.$$

Lösung:

(a) Mit dem Satz von l'Hôpital gilt

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{(\sin z)'}{(z)'} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1.$$

Somit ist $z = 0$ eine hebbare Singularität.

(b) Wir verküpfen über $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$ das ursprüngliche Integral mit

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} \, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x} \, \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} \, \mathrm{d}x + \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+ix}}{x} \, \mathrm{d}x} \right). \end{aligned}$$

Wir schreiben $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}$ als komplexes Integral. Ganz analog zu Aufgabe 39 (c) können wir die beiden Wegstrecken über zwei Halbkreise in der oberen Halbebene mit Radius r und $1/r$ zu einem geschlossenen Weg ergänzen. Für jedes $r > 0$ wird die Singularität im Ursprung ausgespart und das Wegintegral verschwindet,

$$\int_{[-r,-1/r]} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} - \int_{\gamma(1/r)} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} + \int_{[+1/r,+r]} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\gamma(r)} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} = 0.$$

Hier bezeichnet $\gamma(\rho)$, $\rho \in \{1/r, r\}$ den positiv orientierten Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius ρ. Deshalb müssen wir das Integral über den kleineren Halbkreis auch *abziehen*, wir laufen ja eigentlich im Uhrzeigersinn statt gegen den Uhrzeigersinn.

Das Integral über den größeren Halbkreis verschwindet für große r,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma(r)} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} \right| \leq \int_0^\pi \mathrm{d}t \, \left| ire^{it} \frac{e^{ire^{it}}}{re^{it}} \right| &= \int_0^\pi \mathrm{d}t \, \left| e^{ir\cos t} \right| \left| e^{i^2 r \sin t} \right| \\ &= \int_0^\pi \mathrm{d}t \, e^{-r\sin t} \xrightarrow{r \to \infty} 0. \end{aligned}$$

Hier haben wir wieder dominierte Konvergenz benutzt, denn wir können den Integranden unabhängig von r abschätzen. Der Integrand geht punktweise bis auf die Ränder gegen 0 und daher muss auch das Integral im Limes großer r verschwinden.

Nun zum kleinen Halbkreis: dieses Integral liefert den eigentlichen Beitrag. Auch hier können Limes-Bildung und Integration wegen dominierter Konvergenz vertauscht werden,

$$\left| \int_{\gamma(1/r)} \mathrm{d}z \, \frac{e^{iz}}{z} \right| \leq \int_0^\pi \mathrm{d}t \, \left| i\tfrac{1}{r} e^{it} \frac{e^{i\frac{1}{r}e^{it}}}{\frac{1}{r}e^{it}} \right| = \int_0^\pi \mathrm{d}t \, e^{-\sin t/r} \xrightarrow{r \to \infty} \int_0^\pi \mathrm{d}t \cdot 1 = \pi.$$

Somit ist

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^\pi \mathrm{d}t \, i\tfrac{1}{r} e^{it} \frac{e^{i\frac{1}{r}e^{it}}}{\frac{1}{r}e^{it}} = i \int_0^\pi \mathrm{d}t \, \lim_{r \to \infty} e^{i\frac{1}{r}e^{it}} = i \int_0^\pi \mathrm{d}t \cdot 1 = i\pi.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\left(\int_{-r}^{-1/r} \mathrm{d}x\,\frac{e^{ix}}{x} + \int_{+1/r}^{+r} \mathrm{d}x\,\frac{e^{ix}}{x}\right) &= \lim_{r\to\infty}\left(\int_{\gamma(1/r)} \mathrm{d}z\,\frac{e^{iz}}{z} - \int_{\gamma(r)} \mathrm{d}z\,\frac{e^{iz}}{z}\right) \\ &= i\pi.\end{aligned}$$

Ziehen wir uns auf das ursprüngliche Integral zurück, erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2i}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+ix}}{x}\,\mathrm{d}x}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(i\pi - \overline{i\pi}\right) = \pi.\end{aligned}$$

7. **Komplexes Wegintegral** **[4 Punkte]**

Sei γ ein Weg in der komplexen Ebene, der einmal den vollen Kreis um den Ursprung mit Radius $R > 0$ im Gegenuhrzeigersinn durchlaufe. Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \mathrm{d}z \, \mathrm{Re}\,(z) \, \mathrm{Im}\,(z).$$

Lösung:

Mit $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, sieht man, dass

$$\mathrm{Re}\,(z) \, \mathrm{Im}\,(z) = xy = \tfrac{1}{2} \mathrm{Im}\,(z^2)$$

ist. $\frac{1}{2}z^2$ ist eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Daher gilt

$$\int_\gamma \mathrm{d}z \, \mathrm{Re}\,(z) \, \mathrm{Im}\,(z) = \int_\gamma \mathrm{d}z \, \tfrac{1}{2} \mathrm{Im}\,(z^2) = \mathrm{Im} \int_\gamma \mathrm{d}z \, \tfrac{1}{2} z^2 = 0$$

für jede beliebige geschlossene und stückweise stetig differenzierbare Kurve γ.