

Experimentalphysik III

Freischuss-Klausur

20. Februar 2003, MI HS 1, 14:15-15:45

Aufgabe 1: Maxwell-Gleichungen [$\sim 11/80$ Punkte]

- (i) In einem isolierenden Medium lauten die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

Interpretieren Sie die Gleichungen physikalisch (ohne Formeln)!

- (ii) Wie verändern sich diese Gleichungen in Anwesenheit von ruhenden oder bewegten Ladungen?
- (iii) Welche zwei wichtigen Materialkonstanten sind mit \mathbf{D} und \mathbf{B} über welche beiden Gleichungen verbunden?
- (iv) Was hat das Ganze mit der Lichtgeschwindigkeit c zu tun? Was bedeutet das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle in einem Medium? Wieso sind dafür die in (iii) erwähnten Materialkonstanten relevant? Geben Sie bitte sowohl eine Formel als auch eine physikalische Interpretation an. Wie groß ist c ?

Lösung 1: Maxwell-Gleichungen [$\sim 11/80$ Punkte]

- (i) Das erste Gesetz (Elektrostatik) besagt physikalisch, dass elektrische Ladungen Quellen bzw. Senken des elektrischen Felds sind. Die zweite Gleichung (Magnetostatik) besagt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Die beiden letzten Gleichungen führen zum Wellenverhalten elektromagnetischer Strahlung: Zeitliche Änderung des Magnetfelds erzeugt zeitliche Änderung des elektrischen Felds erzeugt zeitliche Änderung des Magnetfelds erzeugt...
- (ii) Im Unterschied zum Vakuum oder isolierenden Medium muss im allgemeinen Fall eine Ladungsdichte ρ und ein fließender Strom \mathbf{j} in den Maxwell-Gleichungen berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\end{aligned}$$

- (iii) Der Verschiebungsstrom ist über die Dielektrizitätskonstante mit dem elektrischen Feld verbunden: $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Die magnetische Induktion ist über die Permeabilität mit dem Magnetfeld verbunden: $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$. ε_0 ist die elektrische Feldkonstante, μ_0 die Vakuumpermeabilität. ε und μ sind die entsprechenden materialspezifischen Konstanten.
- (iv) Die letzten beiden Gleichungen entsprechen einer Gleichung für eine sich ausbreitende Welle. In einer Wellengleichung steckt die Wellengeschwindigkeit v . Vergleicht man die aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitete Gleichung mit einer Wellengleichung, findet man $v_{\text{Ph}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} c$. Der Brechungsindex ist gerade das Verhältnis von c zu v : $n = \frac{c}{v_{\text{Ph}}} = \sqrt{\varepsilon}$. Größe von c : $c = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Aufgabe 2: Polarisation [$\sim 13/80$ Punkte]

Unpolarisiertes Licht der Wellenlängen $\lambda_1 = 656 \text{ nm}$ und $\lambda_2 = 405 \text{ nm}$ fällt auf eine Kron-
glasplatte.

- Wie groß ist der Reflexionsgrad ρ der Platte bei senkrechtem Einfall des Lichts für beide Wellenlängen?
- Bei welchen Einfallswinkeln θ_{lp} ist das reflektierte Licht vollständig linear polarisiert? Erklären Sie kurz den zugrundeliegenden Effekt und zeichnen Sie eine Skizze!
- Betrachten Sie nun den umgekehrten Strahlengang (Kronglas \rightarrow Luft). Bei welchen Einfallswinkeln ist das an der Grenzfläche Kronglas-Luft ins Glas zurück reflektierte Licht vollständig linear polarisiert? Wie groß sind hier die Grenzwinkel der Totalreflexion?
- Welche Werte haben in allen Fällen die Brechungswinkel ϑ ?

Lösung 2: Polarisation [13 Punkte]

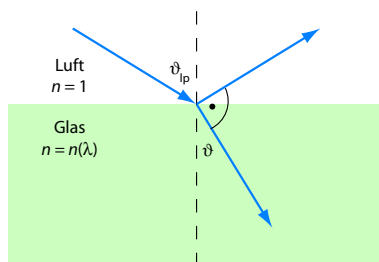


Abbildung 1: Zu Aufgabe 2.

In der Skizze ist eine kleine Übersicht zum Brewster-Winkel gezeichnet. Wer die Farben Rot und Violett nicht zuordnen konnte, erhält einen Punkt Abzug. Folgefehler werden nicht berücksichtigt.

- Aus dem Anhang entnehmen wir die Formel für den Reflexionsgrad. α und β sind beide 0 Grad, also entfällt der Kosinusterm. Weiterhin ist $n_1 = 1$. Welche Formel man benutzt ist egal, weil beide aus

Symmetriegründen sowieso das Gleiche ergeben (müssen). Man erhält als Formel:

$$\rho = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2$$

$\lambda_1 = 656 \text{ nm}$ liegt im Roten, man nimmt daher den unter der Tabelle angegebenen Brechungsindex $n = 1.5076$. Die andere Wellenlänge liegt im Violett mit $n = 1.5236$. Man erhält als Lösung: $\rho_{\text{rot}} \approx 4.1\%$ und $\rho_{\text{violett}} \approx 4.3\%$.

- (ii) Das reflektierte Licht ist vollständig linear polarisiert, wenn gebrochener und reflektierter Strahl aufeinander senkrecht stehen (siehe Skizze). Hier brauchen wir das Brewstersche Gesetz: $\tan \vartheta_{lp} = n_2/n_1 = n$. Man erhält sofort $\vartheta_{lp,rot} \approx 56.44^\circ$ ($\tan \vartheta_{lp,rot} = 1.5076$) und $\vartheta_{lp,violett} \approx 56.72^\circ$ ($\tan \vartheta_{lp,rot} = 1.5236$).
- (iii) Dann ist natürlich $\tan \vartheta_{lp} = \frac{1}{n}$. Im Rotlichtbereich ergibt sich $\vartheta_{lp,rot} \approx 33.56^\circ$ und im Violett $\vartheta_{lp,violett} \approx 33.28^\circ$. Der Grenzwinkel der Totalreflektion ist gegeben als $\sin \vartheta_{gr} = 1/n$. Damit ergibt sich $\vartheta_{gr,rot} \approx 41.55^\circ$ und $\vartheta_{gr,violett} \approx 41.02^\circ$.
- (iv) Der Brechungswinkel ϑ muss mit ϑ_{lp} addiert 90° ergeben. Also: $\vartheta = 90^\circ - \vartheta_{lp}$. Es ergeben sich also folgende Winkel: in (ii) $\vartheta_{rot} \approx 33.56^\circ$, $\vartheta_{violett} \approx 33.28^\circ$, und in (iii) $\vartheta_{rot} \approx 56.44^\circ$, $\vartheta_{violett} \approx 56.72^\circ$.

Aufgabe 3: Totalreflexion [$\sim 6/80$ Punkte]

Untersuchen Sie, wie ein dünner Diäthylätherfilm auf einer Plexiglasfläche den kritischen Winkel der Totalreflektion beeinflusst. Beantworten Sie dazu folgende Fragen:

- (a) Betrachten Sie zunächst die Situation ohne Diäthyläther-Film. Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion θ_k für die Plexiglas-Luft-Grenzfläche.
- (b) Nun befinde sich ein dünner Diäthyläther-Film direkt auf dem Plexiglas. Wie groß ist der kritische Winkel der Totalreflexion θ_k für die Plexiglas-Diäthyläther-Grenzfläche?
- (c) Gibt es einen Bereich von Einfallswinkeln, die größer sind als der in (a) bestimmte kritische Winkel der Totalreflexion θ_k für die Plexiglas-Luft-Grenzfläche, unter denen Licht aus dem Glas in den Diäthyläther-Film und anschließend in die Luft austreten kann? Argumentieren Sie sorgfältig.

Lösung 3: Totalreflexion [6 Punkte]

Aus dem Anhang: $n_{\text{Plexiglas}} = 1.491$ und $n_{\text{Diäthyläther}} = 1.3529$.

- (a) Für den Übergang Plexiglas/Luft gilt $\theta_k \approx 42.1^\circ$.
- (b) Plexiglas-Diäthyläther-Grenzfläche: $\theta_k = \arcsin(1.3529/1.491) \approx 65.1^\circ$
- (b) Wenn nun ein Diäthylätherfilm vorhanden ist, kann Licht im Bereich 42.1° und 65.1° das Plexiglas verlassen und in den Diäthyläther gelangen. Kommt dieses Licht jetzt auch in die Luft? Das Snelliussche Brechungsgesetz liefert uns für den steilsten Winkel von 42.1° : $1.491 \cdot \sin 42.1^\circ = 1.3529 \cdot \sin \theta$, also $\theta \approx 47.6^\circ$. Dieser Winkel ist dann auch der Einfallswinkel, unter dem das Licht auf die Grenzfläche Diäthyläther/Luft trifft. Snellius besagt $1.3529 \cdot \sin 47.6^\circ = 1 \cdot \sin \psi$ mit $\psi \approx 87.5^\circ$, also sehr nahe 90° . Dies bedeutet, dass es einen solchen Bereich nicht gibt (bzw. dieser Bereich kleiner als 0.1° ist).

Aufgabe 4: Geometrische Optik [$\sim 6/80$ Punkte]

Ein Basketballspieler der Größe 2.10 m möchte einen Spiegel, in dem er sich ganz sehen kann, wenn er 1 Meter vor dem Spiegel steht. Wie hoch muss der Spiegel mindestens sein, wenn der Spiegel an einer beliebigen Stelle an der Wand aufgehängt werden kann? Argumentieren Sie sorgfältig.

Lösung 4: Geometrische Optik [6 Punkte]

Um sich ganz im Spiegel sehen zu können, müssen die Strahlen, die von den Fuß- und Haarspitzen ausgehen und am Spiegel reflektiert werden, das Auge des Basketballspielers treffen. Für die Reflexion gilt: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Wir bezeichnen die Haarspitzenhöhe als H , die Augenhöhe als A , die Füße stehen bei 0. Die Oberkante des Spiegels sei bei SO , die Unterkante bei SU . Die Strahlen von den Füßen treffen den Spiegel bei SU und gehen ins Auge. Also gilt $\frac{1}{2}\overline{OA} = \overline{(SU)A}$. Die Strahlen von den Haarspitzen treffen SO und dann das Auge, also $\frac{1}{2}\overline{AH} = \overline{A(SO)}$. Nun folgt sofort: Spiegelgröße = $\overline{(SU)(SO)} = \overline{(SU)A} + \overline{A(SO)} = \frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{OH} = 1.05 \text{ m}$. Die Entfernung zum Spiegel spielt also gar keine Rolle.

Aufgabe 5: Diaprojektor [$\sim 11/80$ Punkte]

Zur Erinnerung: Ein Projektor besteht aus Lichtquelle, Kondensor und Objektiv. Der Kondensor dient dazu, das Objektiv optimal auszuleuchten. Das Objektiv bildet dann das Dia auf die Leinwand ab. Zur Vereinfachung darf angenommen werden, dass Kondensor und Objektiv aus dünnen Linsen bestehen, und dass sich das Dia unmittelbar hinter dem Kondensor befindet.

Ein Projektor soll nun ein Kleinbild-Dia ($24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$) in einer Entfernung von 3 m vom Objektiv auf eine Leinwand der Größe $1.25 \text{ m} \times 1.25 \text{ m}$ abbilden. Dabei sollen die Leinwand und die Halogenlampe optimal ausgenutzt werden. Die leuchtende Fläche der Halogenlampe beträgt $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$. Das Objektiv hat einen Durchmesser von 30 mm.

- (i) Zeichnen Sie eine Prinzip-Skizze des Projektors und erklären Sie in Stichworten anhand der Hauptstrahlen durch die Linsenmitte die Funktionsweise.
- (ii) Wie weit ist das Dia vom Objektiv entfernt und welche Brennweite f_{Objektiv} hat das Objektiv?
- (iii) Wie weit ist die Lampe vom Kondensor entfernt und welche Brennweite $f_{\text{Kondensor}}$ hat dieser?
- (iv) Welchen Durchmesser muss der Kondensor mindestens haben?

Lösung 5: Diaprojektor [11 Punkte]

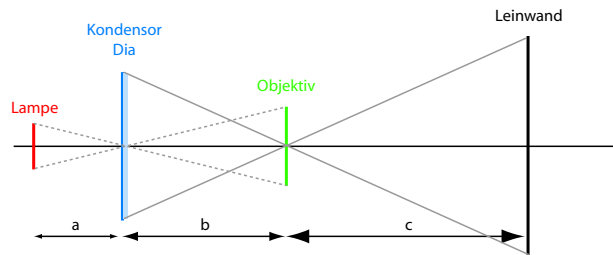


Abbildung 2: Diaprojektor.

Das Bild des Dias soll die gesamte Leinwand ausfüllen. Das Bild der Lampe soll die Objektivöffnung voll ausleuchten.

- (i) Siehe Skizze und ihre Erläuterung.
- (ii) Die Objektgröße beträgt 36 mm, die Bildgröße 1.25 m. Die Bildweite c beträgt 3 m. Das Verhältnis von Bildgröße zu Objektgröße ist gleich dem Verhältnis der Bildweite zum Abstand Objektiv-Dia (b). Daraus folgt $b = 3 \text{ m} \cdot 36 \text{ mm} / 1250 \text{ mm} = 8.64 \text{ cm}$. Damit können wir nun die Brennweite des Objektivs f_{Objektiv} ausrechnen: $\frac{1}{f_{\text{Objektiv}}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \Leftrightarrow f_{\text{Objektiv}} = \frac{b \cdot c}{b + c} \approx 84 \text{ mm}$.
- (iii) Das Bild der Diagonalen der Lampe muss gleich dem Objektivdurchmesser sein. Hier muss wieder das Verhältnis der Bildgröße (30 mm) zur Objektgröße $\sqrt{2} \text{ cm}$ gleich dem Verhältnis des Abstands Kondensor-Objektiv (86.4 mm) zum gesuchten Abstand Lampe-Kondensor a sein. Daraus ergibt sich für diesen $a = 40.7 \text{ mm}$. Wie oben ergibt sich für die Brennweite $f_{\text{Kondensor}} = \frac{a \cdot b}{a + b} \approx 27.7 \text{ mm}$.
- (iv) Das Dia soll ja voll ausgeleuchtet sein. Sein Durchmesser beträgt $d = \sqrt{24^2 + 36^2} \text{ mm} = 43.3 \text{ mm}$. Dies muss auch der Durchmesser des Kondensors sein.

Aufgabe 6: Lloydscher Spiegel [$\sim 8/80$ Punkte]

Erläutern Sie an Hand einer Skizze das Prinzip des Lloydschen Spiegels. Sie kennen den Lloydschen Spiegel etwa nicht? Dann überlegen Sie sich, wie Sie mit Hilfe eines Spiegels, einer Lichtquelle und eines (!) Spalts zwei kohärente Lichtquellen erzeugen können, die auf einem Schirm ein Interferenzmuster erzeugen. Fertigen Sie eine Skizze an und erläutern Sie die Bedingung der Interferenz. Welche Auswirkung auf das Interferenzmuster hat die Tatsache, dass der Spiegel optisch dichter ist als die umgebende Luft? Wie ist die Intensität an der Stelle, an der die Verlängerung des Spiegels die Leinwand kreuzt? Noch eine Frage: Was geschieht eigentlich mit der Energie der Lichtwellen, wenn sie destruktiv interferieren?

Lösung 6: Lloydscher Spiegel [8 Punkte]

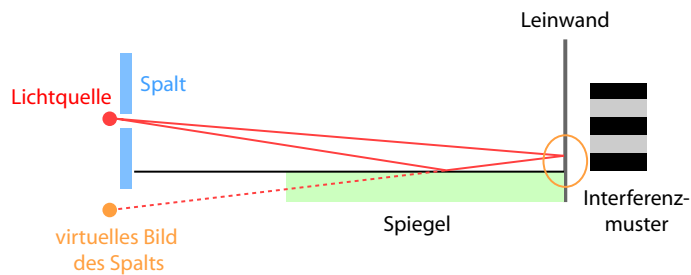


Abbildung 3: Zu Aufgabe 6.

Die richtige Skizze gibt schon mal. Licht vom Spalt interferiert mit Licht, das vom Spiegel reflektiert wird. Dieses Licht scheint aus einer virtuellen Lichtquelle zu stammen. Daher sind beide Lichtquellen kohärent. Bei der Reflexion tritt ein Phasensprung am Spiegel (optisch dichteres

Medium) von π (180°) auf. Dies führt dazu, dass der erste Interferenzstreifen direkt über dem Spiegel (der Weg von beiden Quellen ist gleich weit) dunkel ist, destruktive Interferenz statt findet. Was passiert mit der Energie bei der destruktiven Interferenz? Die Energie steckt in der Intensitätsverteilung, über die integriert werden muss. Punkten destruktiver Interferenz entsprechen ja auch Punkte konstruktiver Interferenz mit „erhöhter“ Energie.

Aufgabe 7: Newtonsche Ringe [$\sim 7/80$ Punkte]

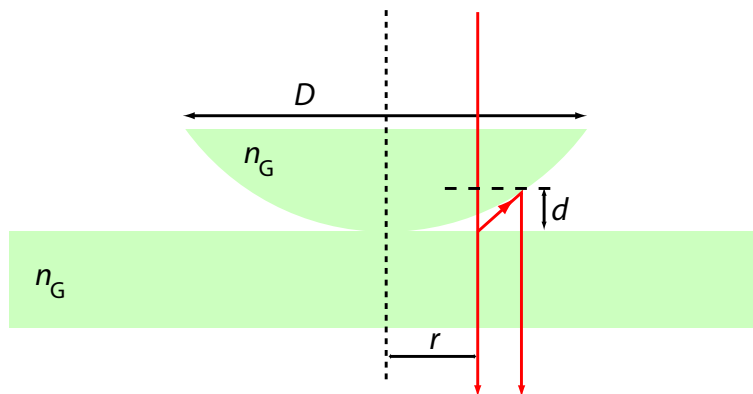


Abbildung 4: Zu Aufgabe 7. Auch zwischen den Gläsern sollen die Lichtstrahlen vertikal verlaufen.

Feucht eingeglaste Dias zeigen bei Projektion farbige Newtonsche Ringe. Sie sollen im Folgenden modelliert werden.

Eine plankonvexe Linse mit Radius $R = 5\text{ m}$ liegt auf einer ebenen Glasplatte und wird senkrecht von oben mit einem parallelen Lichtbündel einer Na-Dampflampe

($\lambda = 589.3\text{ nm}$) bestrahlt. Der Zwischenraum ist mit Wasser gefüllt. Das Glas der Linse und der Platte sei Kronglas SK 1. Man erhält im durchgehenden gelben Licht Newtonsche Ringe.

- Wie groß ist der optische Gangunterschied zwischen den beiden skizzierten Strahlen? Ist an der Berührstelle von Linse und Platte hell oder dunkel?
- Berechnen Sie die Formel für die Radien r der Newtonschen Ringe unter der Annahme, dass $d \ll R$. Wieviele Ringe erhält man maximal, wenn der Durchmesser der Linse $D = 5\text{ cm}$ beträgt?

Lösung 7: Newtonsche Ringe [7 Punkte]

- (i) Der Gangunterschied Δ beträgt $\Delta = 2nd + \lambda$. Der Phasensprung um λ entsteht wegen der zweimaligen Reflexion am optisch dichteren Medium. Im Zentrum entsteht ein heller Fleck wegen $\Delta = \lambda$, also positive Interferenz.
- (ii) Gleichphasige Überlagerung findet statt, wenn $\Delta = k\lambda$ mit $k = 1, 2, 3, \dots$. Daraus folgt: $d = \frac{(k-1)\lambda}{2n}$. Näherungsweise gilt $(R-d)^2 + r^2 = R^2$, also $r^2 \approx 2Rd$. Wir erhalten für $r = \sqrt{(k-1)R\lambda/n}$. r soll nun kleiner gleich $D/2$ sein. Es folgt $k \leq \frac{nD^2}{4R\lambda} + 1$. Wenn wir richtig einsetzen, ergibt sich $k \leq 282.7$. Da zu $k = 1$ der zentrale Fleck gehört, erhält man 281 Ringe.

Aufgabe 8: Doppelbrechung [$\sim 6/80$ Punkte]

Kalkspat enthält in parallelen Ebenen angeordnete Carbonatgruppen (CO_3^{2-}). Die durch diese Carbonatgruppen hervorgerufene Polarisierung im äußeren Feld \mathbf{E} ist größer, wenn \mathbf{E} senkrecht zu den CO_3 -Ebenen steht, als wenn \mathbf{E} parallel zu den CO_3 -Ebenen verläuft. Dies verursacht die starke Doppelbrechung im Kalkspat. (i) Was bedeuten die unterschiedlichen Polarisierungen für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten einer parallel (v_{\parallel}) und einer senkrecht (v_{\perp}) zu den CO_3 -Ebenen polarisierten Welle? (Welche Geschwindigkeit ist größer und warum?) (ii) Die Polarisierung kommt durch die Verschiebung der Elektronenhüllen der Sauerstoffatome zustande. Erklären Sie, warum die Polarisierung im äußeren Feld \mathbf{E} größer ist, wenn \mathbf{E} senkrecht zu den CO_3 -Ebenen steht, als wenn \mathbf{E} parallel zu den CO_3 -Ebenen verläuft. Betrachten Sie dazu eine Carbonatgruppe. (iii) Warum spielt Polarisierung auf Grund der Verschiebung der Atome gegeneinander keine Rolle?

Lösung 8: Doppelbrechung [6 Punkte]

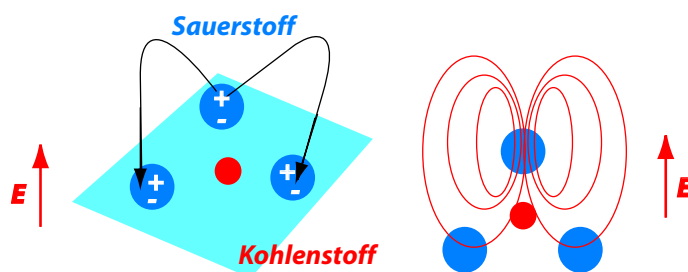


Abbildung 5: Zu Aufgabe 8.

- i) Eine geringere Polarisierbarkeit führt zu einer kleineren Dielektrizitätskonstanten ϵ , also einem kleineren Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$. Dadurch folgt eine höhere Geschwindigkeit wegen $n \propto \frac{1}{v_{\text{ph}}}$, also $v_{\parallel} > v_{\perp}$. (ii) Wenn \mathbf{E} aus der Ebene heraus guckt, ist die Polarisierung geringer. Das

Feld jedes anderen polarisierten Sauerstoffatoms verkleinert nämlich das Feld seiner Nachbarsauerstoffe. Das induzierte Feld zeigt nach unten, \mathbf{E} nach oben. In der Ebene ist

dies anders: Zwei Dipolmomente zweier Sauerstoffatome verstärken das Feld eines dritten Sauerstoffatoms. (iii) Die Masse der Atome ist zu schwer, sie können der Frequenz des Lichts nicht folgen.

Aufgabe 9: Laser [$\sim 5/80$ Punkte]

Das erste Experiment, in dem die Bandbreite eines Lasers ($\text{Pb}_{0.88}\text{Sn}_{0.12}\text{Te}$ -Diodenlaser) bestimmt wurde, datiert von 1969. Der Laser arbeitete bei $\lambda = 10600 \text{ nm}$ und wurde mit einem CO_2 -Laser überlagert, wobei Bandbreiten von nur 54 kHz beobachtet wurden. Berechnen Sie die entsprechende Frequenzkonstanz und Kohärenzlänge für den Blei-Zinn-Tellurid-Laser. Beachten Sie, dass Kohärenzzeit mal Bandbreite in der Größenordnung von 1 liegen.

Lösung 9: [5 Punkte]

Die Bandbreite $\Delta\nu$ beträgt $\Delta\nu = 54 \times 10^3 \text{ Hz}$. Die Frequenzkonstanz wird ja wohl das Verhältnis der Bandbreite zur Frequenz sein. $c = \lambda\nu$, also erhalten wir als Frequenzstabilität $\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{54 \times 10^3 \cdot 10600 \times 10^{-9}}{3 \times 10^8} = 1.91 \times 10^{-9}$.

Die Kohärenzlänge ist mit der Kohärenzzeit verbunden, in der die Welle sinusförmig wohldefiniert ist $\Delta\ell_c = c\Delta t_c$. Wie angegeben gilt $\Delta t_c \cdot \Delta\nu \approx 1$, also $\Delta\ell_c \approx c/\Delta\nu \approx 5.55 \times 10^3 \text{ m}$.

Aufgabe 10: Auflösungsvermögen [$\sim 7/80$ Punkte]

Unter welchem kleinsten Winkelabstand können zwei Sterne gerade noch getrennt werden, wenn die Beobachtung durch ein Fernrohr der Öffnung 3 m im violetten Spektralbereich durchgeführt wird (Winkel in Winkelsekunden)? Über welchen Winkel würde sich das geometrisch optische Bild eines „mittleren“ Sterns erstrecken? (Als „mittleren“ Stern nehme man einen Stern von Sonnengröße im Abstand von 10 Lichtjahren an. Die Sonne erscheint unter dem Winkel 32 Minuten , der Abstand Erde-Sonne beträgt 8 Lichtminuten .)

Lösung 10: Auflösungsvermögen [7 Punkte]

Durch die Begrenzung des Lichtbündels am Linsenrand (oberer Spiegelrand) entsteht ein Beugungsbild der punktförmigen Lichtquelle, welches in der Brennebene beobachtet wird (Beugung an kreisförmiger Öffnung).

Die Intensitätsverteilung in der Beugungsfigur ist gegeben durch

$$I(\varphi) = I_0 \left(\frac{2J_1(\alpha)}{\alpha} \right)^2, \quad (\mathbf{1 \text{ Punkt}}) \text{ mit } \alpha = \frac{2\pi R \sin \varphi}{\lambda}.$$

J_1 ist die Bessel-Funktion 1. Ordnung, R der Radius der Öffnung, λ die Wellenlänge und φ der Winkel gegen die optische Achse. α ist im Anhang angegeben. Aus der numerischen Auswertung der Bessel-Funktion erhält man den Intensitätsverlauf. Aus der Tabelle ($\pi \cdot 1.220 \approx 3.8317$) erhält man, dass das erste Minimum bei $\sin \varphi_1 = 1.220 \frac{\lambda}{2R}$ auftritt.

Entsteht nun neben diesem Beugungsbild ein zweites, so können - wegen der Linienbreite - die beiden Hauptmaxima etwa gerade noch getrennt werden, wenn der Winkelabstand nicht kleiner als φ_1 ist, also (violett $\approx 400 \text{ nm}$) $\sin \varphi_1 = 1.22 \cdot \frac{400 \text{ nm}}{3 \text{ m}}$, also $\varphi_1 = 3.355 \cdot 10^{-2}$ Winkelsekunden (1 Grad ist unterteilt in 60 Winkelminuten, diese wiederum in 60 Winkelsekunden).

Zur geometrisch optischen Abbildung: Nähert man den Tangens durch sein Argument an, weil wir es hier mit sehr kleinen Winkeln zu tun haben, so gilt für den Winkel φ , unter dem ein mittlerer Stern erscheint: $\varphi = 32 \cdot 60 \text{ Winkelsekunden} \cdot \frac{r_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Stern}}}$. Dabei ist

$$\frac{r_{\text{Sonne}}}{r_{\text{Stern}}} = \frac{8 \text{ Lichtminuten}}{10 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ Lichtminuten}}. \text{ Also ist } \varphi \approx 2.9 \times 10^{-3} \text{ Winkelsekunden.}$$

Das Beugungsscheibchen ist also viel größer als das geometrisch optische Bild.