Klausur Analysis 3 – HM 4 (Physik), 24.01.2003

Es gibt insgesamt 44 Punkte. Davon sind 4 Punkte zusätzliche Punkte.

Aufgabe 1 (2+1+2 Punkte)

Das „Gibbsche Potential“ G wird durch

$$G = U + pV - TS$$

gegeben, wobei das totale Differential der inneren Energie U durch

$$dU = -pdV + TdS \tag{1}$$

definiert ist. Alle vorkommenden Funktionen seien zweimal stetig differenzierbar.

a) Man leite eine Formel für dG ab, in der U nicht vorkommt.

b) Unter der Voraussetzung $dT = 0$ (, das heißt T ist konstant,) zeige man $dG = Vdp$.

c) Man zeige, daß aus (1) folgt: $dT \wedge dS = -dV \wedge dp$.

(Bemerkung: p bezeichnet hier den Druck, V das Volumen, T die absolute Temperatur und S die Entropie eines idealen Gases.)

Aufgabe 2 (2+6 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung $2xyy' + y^2 - \frac{1}{x} = 0, \quad x > 0.$

a) Man zeige, daß die Differentialgleichung exakt ist.

b) Man löse die Differentialgleichung mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{2xy^2}{1-x^2}$, $y(0) = 1$, und bestimme das größte Intervall, auf dem die Lösung zu dem gegebenen Anfangswert existiert.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Man berechne die Lösungsmenge des Systems

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (3+4+3+4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

a) Man zeige: Ist $Re f + Im f$ konstant, so ist f konstant.

b) Man beweise die folgende Aussage oder widerlege sie durch Angabe eines Gegenbeispiels: Ist k eine geschlossene doppelpunktfreie stückweise stetig differenzierbare Kurve in G, so ist $\int_k f(z)dz = 0$.

c) Sei $k : [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto t(1 + i)$. Man berechne $\int_k z\bar{z}dz$.

d) Man berechne $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2+1} dz$.