Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. A. Ruffing

08.07.2002

Semestralklausur Analysis 2 für Physiker

Bearbeitungszeit: 90 min **Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt!**

Aufgabe 1 — 6 Punkte

1. Was versteht man unter einem Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V?
2. Was versteht man unter einer Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V?
3. Es sei M eine nichtleere Menge. Wann nennt man eine Abbildung

$$f : M \times M \to \mathbb{R}$$

eine Metrik auf M?

Aufgabe 2 — 12 Punkte

1. Es sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = 5x^2 + 50y^2 + 500z^2 + 2xy - 4yz$$

Ist es möglich, zwei voneinander verschiedene Punkte $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ zu finden, an denen f ein globales Minimum annimmt?

2. Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ diejenige Ebene, die durch die drei Punkte

$$(1, -1, 2), \quad (3, 5, -6), \quad (-1, -1, 4)$$

geht. Ermittle mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorenmethode denjenigen Punkt $x \in E$ mit kleinster Entfernung zum Ursprung.

3. Untersuche, ob man für hinreichend nahe bei 0 liegende reelle Zahlen x, y die Gleichung

$$e^{y^2 \sin x} + x^6 y^2 - 3y - 1 = 0$$

in der Form $y = f(x)$ mit einer Funktion f auflösen kann, die in einer Umgebung der 0 definiert ist.

Aufgabe 3 **11 Punkte**

In dieser Aufgabe bezeichnen e_1, e_2, e_3 die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^3$, die in x-Richtung, y-Richtung bzw. z-Richtung zeigen.

1. Gegeben sei die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto F(x,y,z)$ mit

$$F(x,y,z) := \left(\tfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} + \sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\right) \tfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Finde eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{grad}(f) = F$.

2. Wie muss die stetig partiell nach allen drei Variablen differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschaffen sein, so dass für

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto F(x,y,z) := (x-y)\, e_1 + (y^2 - x^2)\, e_2 + f(x,y,z)\, e_3$$

die Beziehung $\operatorname{div}(F) = 0$ gilt?

Aufgabe 4 **11 Punkte**

1. Berechne mit einer geeigneten Substitution den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \tfrac{2x}{x^2+2x+2}\, dx$$

2. Berechne die Ableitung der Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto F(x,y) := \int_0^{e^{x^2+y^2}} \tfrac{1}{1+t^2}\, dt + 4 \int_0^{e^{-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2}} \tfrac{t^3}{1+t^8}\, dt$$

3. Berechne die folgenden Integrale:

$J_1 := \int_A (x^6y^2 - x^7y^3)\, dx\, dy \qquad J_2 := \int_A (x^6y^2 - x^7y^3)\, dy\, dx \qquad A := [0,1] \times [0,1]$

Man begründe das Ergebnis.

Es können maximal 40 Punkte erreicht werden.

Halten Sie bitte Ihren Lichtbildausweis und
Ihren Studentenausweis zur Kontrolle bereit!

KLAUSUREINSICHTSTERMIN 30.07.2002 Raum 1237 13:00-15:00