................
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| $\Sigma$ | | |

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Probeklausur
# Mathematik 4 für Physiker
# (Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

15. Februar 2017, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

I ................ Erstkorrektur

II ................ Zweitkorrektur

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **69 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

# Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Volumenberechnung** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie für $a > 0$ das Volumen des von der zylindrischen Fläche

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = 2ax, 0 \le x \le 1\}$$

aus dem Rotationsparaboloid

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + z^2 \le 4ax, 0 \le x \le 1\}$$

herausgeschnittenen Körpers in $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Das Ergebnis hängt von $2a\alpha := \min\{1, 2a\}$ ab.
Lösung:

Wir integrieren die charakteristische Funktion des Gebiets.
Wir setzen $2a\alpha = \min\{1, 2a\}$ und erhalten **[2]**

$$V = 4\int_0^{2a\alpha}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\int_0^{\sqrt{4ax-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 4\int_0^{2a\alpha}\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \sqrt{4ax - y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Nun benutzen wir **[2]**

$$\begin{aligned}\int \sqrt{b^2 - y^2}\mathrm{d}y &= b^2\int \cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = b^2 \cos\varphi \sin\varphi + b^2\int \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{b^2}{2}(\varphi + \cos\varphi\sin\varphi) = \frac{y}{2}\sqrt{b^2 - y^2} + \frac{b^2}{2}\arcsin\frac{y}{b},\end{aligned}$$

wobei wir $y = b\sin\varphi$ gesetzt haben. Schlussendlich erhalten wir **[4]**

$$\begin{aligned}V &= 2\int_0^{2a\alpha}\left(x\sqrt{4a^2 - x^2} + 4ax\arcsin\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(2a)^3(1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}) + 4ax^2\arcsin\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{4a}}\Bigg|_0^{2a\alpha} + 2a\int_0^{2a\alpha}\frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}}\mathrm{d}x \\ &= (2a)^3\left(\frac{2}{3}(1 - (1 - \alpha^2)^{3/2}) + 2\alpha^2\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \alpha)} + \int_0^{\arcsin(\alpha)}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\right) \\ &= (2a)^3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}(4\alpha^2 - 3\alpha + 4)\sqrt{1 - \alpha^2} + \frac{1}{2}\arcsin\alpha + 2\alpha^2\arcsin\frac{1}{2}(1 - \alpha)\right).\end{aligned}$$

Für $a \le \frac{1}{2}$ vereinfacht sich das zu **[0], nicht nötig für volle Punktzahl**

$$V = (2a)^3\left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

2. **Oberflächenintegral** **[8 Punkte]**

Gegeben sei das Vektorfeld

$$v(x, y, z) = (x + y + \sqrt{z}, x - y - z^{5/2}, z + 2)$$

auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie das Oberflächenintegral

$$\int_S \langle v(x, y, z), \nu(x, y, z)\rangle \mathrm{d}S$$

über die Rotationsfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 = e^{-2z} \ \text{ und } \ 0 \le z \le 1\},$$

wobei $\nu$ das von der Rotationsachse weg zeigende Einheitsnormalenfeld sei.
HINWEIS: $S$ ist nicht der Rand einer geschlossenen, kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^3$.
LÖSUNG:

Wir ergänzen $S$ mit **[2]**

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 \le 1, z = 0\} \qquad \text{und}$$
$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 \le e^{-2}, z = 1\}$$

zu einer geschlossenen, kompakten Fläche. Der Satz von Gauß gibt uns dann die Identität **[2]**

$$\int_{S \cup S_1 \cup S_2} \langle v, \nu \rangle \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div} v \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = |V|,$$

wobei das Einheitsvektorfeld $\nu$ stetig auf $S_1$ und $S_2$ fortgesetzt wurde und $V$ das von $S$ eingeschlossene Vektorfeld bezeichnet. Es gilt **[3], 1 pro Integral**

$$\int_{S_1} \langle v, \nu \rangle \ \mathrm{d}S = -2|S_1| = -2\pi,$$
$$\int_{S_2} \langle v, \nu \rangle \ \mathrm{d}S = 3|S_2| = 3\pi e^{-2},$$
$$|V| = \pi \int_0^1 e^{-2z} \mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2}),$$

und somit **[1]**

$$\int_S \langle v, \nu \rangle \ \mathrm{d}S = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-2}) + 2\pi - 3\pi e^{-2} = \frac{5\pi}{2} - \frac{7\pi}{2} e^{-2}.$$

3. **Oberflächenintegral** **[9 Punkte]**

Berechnen Sie $\int_S \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x)\rangle dS$ jeweils einmal direkt und einmal unter Verwendung des Satzes von Stokes, für

(a) $S$ die obere Hälfte der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^3$, $\nu$ nach oben und $F(x) = (-y, x, 0)$.

(b) $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \big| x^2 + y^2 = 1, 0 < z < 1\}$, $\nu$ nach außen und $F(x) = (yz, x^2, 1)$.

LÖSUNG:

(a) Ohne den Satz von Stokes berechnen wir **[2]**

$$\int_S \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \Big|_{\theta=0}^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

Mit dem Satz von Stokes erhalten wir (am Rand gilt $z = 0$, $\theta = \pi/2$) **[2]**

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S = \int_{\partial S} F \cdot \mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \mathrm{d}\varphi = 2\pi.$$

(b) Ohne den Satz von Stokes berechnen wir **[2]**

$$\int_S \langle \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2x - z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \mathrm{d}S = \int_0^1 \left( \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}z = \pi.$$

Mit dem Satz von Stokes müssen wir zunächst die Randkurve parametrisieren. Diese besteht aus einem Kreis $\gamma_1$ in der Ebene $z = 0$ und einem Kreis $\gamma_2$ in der Ebene $z = 1$. Beim Durchlaufen des oberen Kreises gegen den Uhrzeigersinn liegt die Menge rechts, daher müssen wir das Vorzeichen ändern. **[1]**.

Insgesamt erhalten wir **[2]**

$$\begin{aligned}
\int_S \langle \operatorname{rot} F(x), \nu(x)\rangle \mathrm{d}S &= \int_{\gamma_1} F \cdot \mathrm{d}r - \int_{\gamma_2} F \cdot \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ \cos^2\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \mathrm{d}\varphi - \int_0^{2\pi} \langle \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos^2\varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \mathrm{d}\varphi \\
&= 0 + \pi = \pi.
\end{aligned}$$

4. **Uneigentliches Integral** **[10 Punkte]**

Berechnen Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{\alpha x}+1} \mathrm{d}x, \qquad \alpha > 1.$$

HINWEIS: Betrachten Sie einen Weg um den Rand des Rechtecks $K := [-R, R] \times [0, \frac{2\pi i}{\alpha}]$.

LÖSUNG:

Wir nennen das zu berechnende Integral $I$ und folgen dem Hinweis. Der Rand des Rechtecks kann durch die 4 Teilkurven **[1]**

$$\gamma_1 : [0, 2R] \to \mathbb{C}, \gamma_1(t) := -R + t, \qquad \gamma_2 : \left[0, \frac{2\pi i}{\alpha}\right] \to \mathbb{C}, \gamma_2(t) := R + ti,$$
$$\gamma_3 : [0, 2R] \to \mathbb{C}, \gamma_3(t) := R + \frac{2\pi i}{\alpha} - t, \qquad \gamma_4 : \left[0, \frac{2\pi i}{\alpha}\right] \to \mathbb{C}, \gamma_4(t) := -R + \frac{2\pi i}{\alpha} - ti$$

parametrisiert werden.

Sei $f(z) = \frac{e^z}{e^{\alpha z}+1}$. Die Singularitäten von f erfüllen **[1]**

$$e^{\alpha z} = -1 = e^{\pi i + 2\pi i k} \Rightarrow z = \frac{\pi i}{\alpha} + \frac{2\pi k}{\alpha} i$$

für $k \in \mathbb{Z}$. Der einzige Pol im Inneren des Rechtecks ist also $z_0 = \frac{\pi i}{\alpha}$. Dies ist ein einfacher Pol, da er eine einfache Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers ist. Das Residuum ist **[2]**

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{(z-z_0)e^z}{e^{\alpha z}+1} = \lim_{z \to z_0} \left( \frac{(z-z_0)e^z}{\alpha e^z} + \frac{e^z}{\alpha e^{\alpha z}} \right) = \frac{e^{z_0}}{\alpha e^{\alpha z_0}} = \frac{e^{\pi i/\alpha}}{\alpha e^{\pi i}} = -\frac{e^{\pi i/\alpha}}{\alpha}.$$

Mit dem Residuensatz folgt **[1]**

$$\int_{\partial K} f \mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_0} f = -\frac{2\pi i}{\alpha} e^{\pi i/\alpha}.$$

Weiters gilt **[4], 1 pro Wegabschnitt**

$$\int_{\gamma_1} f(z) \mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x) dx \underset{R \to \infty}{\to} I,$$
$$\int_{\gamma_3} f(z) \mathrm{d}z \underset{z = x + \frac{2\pi i}{\alpha}, dz = dx}{=} -\int_{-R}^{R} \frac{e^x e^{2\pi i/\alpha}}{e^{\alpha x} e^{2\pi i} + 1} \mathrm{d}x \underset{R \to \infty}{\to} -e^{2\pi i/\alpha} I,$$
$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) \mathrm{d}z \right| \le L(\gamma_2) \max_{\gamma_2} |f| \le \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\max_{\gamma_2} |e^z|}{\min_{\gamma_2} |e^{\alpha z}+1|} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\max |e^R e^{ti}|}{\min |e^{\alpha R} e^{\alpha t i} + 1|}$$
$$\le \frac{2\pi}{\alpha} \frac{e^R}{e^{\alpha R} - 1} \underset{R \to \infty}{\to} 0, \qquad (\alpha > 1)$$
$$\left| \int_{\gamma_4} f(z) \mathrm{d}z \right| \le L(\gamma_4) \max_{\gamma_4} |f| \le \frac{2\pi}{a} \frac{\max_{\gamma_4} |e^z|}{\min_{\gamma_4} |e^{\alpha z}+1|} = \frac{2\pi}{\alpha} \frac{\max |e^{-R} e^{ti}|}{\min |1 + e^{-\alpha R e^{\alpha t i}}|}$$
$$\le \frac{2\pi}{\alpha} \frac{e^{-R}}{1 - e^{-\alpha R}} \underset{R \to \infty}{\to} 0.$$

Insgesamt erhalten wir also für $R \to \infty$

$$-\frac{2\pi i}{\alpha} e^{\pi i/\alpha} = \int_{\partial K} f(z) dz \to (1 - e^{2\pi i/\alpha}) I$$

und somit **[1]**

$$I = -\frac{2\pi i}{\alpha} \frac{e^{\pi i/\alpha}}{1 - e^{2\pi i/\alpha}} = -\frac{\pi}{\alpha} \frac{2i}{e^{-\pi i/\alpha} - e^{\pi i/\alpha}} = \frac{\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.$$

5. **Holomorphe Funktion** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien $a > 0$, $b > 0$ Konstanten, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$|f(z)| < a\sqrt{|z|} + b.$$

Zeigen Sie, dass $f$ konstant ist.
HINWEIS: Gehen Sie wie im Beweis des Satzes von Liouville vor und betrachten Sie die Taylorkoeffizienten von $f$.
LÖSUNG:

Wir folgen dem Hinweis und entwickeln $f$ in eine überall konvergente Potenzreihe, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Für die Koeffizienten gilt **[2]**

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z.$$

Für $k \geq 1$ folgt: **[4]**

$$|a_k| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} \mathrm{d}z \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z|^{k+1}} \mathrm{d}z \leq \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{a\sqrt{|z|} + b}{|z|^2} \mathrm{d}z \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \frac{a\sqrt{R} + b}{R^2} \underset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Also gilt $|a_k| = 0$ für $k \geq 1$. Daraus folgt, dass $f(z) = a_0$ konstant. **[2]**

6. **Eigenschaften holomorpher Funktionen** **[10 Punkte]**
Sei $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$. Geben Sie jeweils eine holomorphe Funktion mit den folgenden Eigenschaften an, oder begründen Sie warum es keine solche geben kann:

(a) $f : \mathbb{C} \to B$ mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. **[3]**

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. **[2]**

(c) $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+4n^2}$ für $n \in \mathbb{Z}$. **[2]**

(d) $f : B \to \mathbb{C}$ mit $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+2|n|}$ für $n \in \mathbb{Z}$. **[3]**

LÖSUNG:

(a) $f$ ist ganz und beschränkt. Nach Liouville muss $f$ also konstant sein. Aus $f(0) = 0$ folgt also $f(1) = 0 \neq 1$ Es gibt also keine solche Funktion.

(b) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist surjektiv. Für $x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ folgt $|\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}| = e^x > 0$, also $exp^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ und für $z \neq 0$ gilt $\exp(\ln|z| + \mathrm{i}\arg(z)) = z$.

(c) Für $z = \frac{1}{n}$ gilt $f(z) = \frac{1}{1+4\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2}{z^2+4}$. Die auf $B$ holomorphe Funktion $f(z) = \frac{z^2}{z^2+4}$ erfüllt also die Bedingungen.

(d) Für $z = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ muss gelten $f(z) = \frac{1}{1+2\frac{1}{z}} = \frac{z}{2+z}$. Diese auf $B$ holomorphe Funktion ist nach dem Identitätssatz die einzige mit dieser Eigenschaft. Es gilt aber $f(-1) = -1 \neq \frac{1}{3} = \frac{1}{1+2|-1|}$. Es gibt also keine solche Funktion.

7. **Fouriertransformation** **[8 Punkte]**

(a) Beweisen Sie für $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $g(x) := e^{ik_0x}f(x)$ die Identität $\widehat{g}(k) = \widehat{f}(k - k_0)$.

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte von $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\cos x$, $x \in \mathbb{R}$?

(c) Sei nun mit dem $g$ aus (b) die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

(i) Welche Aussagen gelten für $h$? **[2]**

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ $h$ ist stetig, ☒ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$? **[2]**

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

LÖSUNG:

(a)

$$\sqrt{2\pi}\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-k_0)x}dx = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(k - k_0)$$

**[2]**

(b) Die Fouriertransformierte von $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ist $e^{-\frac{1}{2}k^2}$. Mit (a) erhält man

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2}(\widehat{e^{ix}e^{-\frac{1}{2}x^2}} + \widehat{e^{-ix}e^{-\frac{1}{2}x^2}}) = \frac{1}{2}(e^{-\frac{1}{2}(k-1)^2} + e^{-\frac{1}{2}(k+1)^2})\left( = e^{-\frac{1}{2}(k^2+1)}\cosh(2k)\right).$$

**[2]**

(c) Die Funktion $h$ ist unstetig bei 0, aber wegen des exponentiellen Abfalls für $x \to \infty$ sowohl integrierbar, als auch quadratintegrierbar.

(d) $\widehat{h}$ ist als Fouriertransformierte einer $L^1$-Funktion stetig, da $h \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist auch $\widehat{h}$ keine Schwartz-Funktion. $\widehat{h}$ ist keine $L^1$-Funktion, sonst müsste $h$ fast überall gleich einer stetigen Funktion sein, was wegender Unstetigkeitsstelle unmöglich ist. $\widehat{h}$ ist aber genauso wie $h$ in $L^2$.

8. **Maßtheorie und Konvergenzsätze für Integrale** **[8 Punkte]**

Sei $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}\chi_{(0,1)}(x)$ und $\{r_n \in \mathbb{Q} | n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Berechnen Sie folgende Limes und Integrale:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}dx$. b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx$. c) $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx$, mit $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$

LÖSUNG:

(a) Für $x \in (0, +\infty)$ gilt die Abschätzung $|\sin(x)| \leq x$.

Daraus folgt **[1]**

$$\frac{|n\sin\left(\frac{x}{n}\right)|}{x(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Folge von Funktionen wird also von der Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ majorisiert, die integrierbar ist. Der Satz der majorisierten Konvergenz ist deswegen anwendbar. **[1]**Da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

erhalten wir **[1]**

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{+\infty} \frac{n\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Die Funktionen $f_n(x) = n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx$ werden durch die Funktion $\frac{C}{\sqrt{x}}$ **[2]**majorisiert, mit $C = \sup\limits_{t\in(0,\infty)} te^{-t}$.

Das folgt aus

$$nxe^{-n^2x^2} \leq nxe^{-nx} \leq C.$$

Die Funktion $\frac{C}{\sqrt{x}}$ ist integrierbar und so gilt der Satz der dominierten Konvergenz. Die Funktionen $f_n$ konvergieren punktweise gegen 0, es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}dx = 0.$$

(c) Definiere die Funktionen $g_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f(x-r_n)}{2^n}$. Da $f(x) \geq 0$ gilt **[1]**$g_N(x) \leq g_{N+1}(x)$ und nach dem Satz der monotonen Konvergenz **[1]**

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_N(x)dx.$$

Da **[1]**

$$\int_R f(x-r_n)dx = \int_R f(x) = 2.$$

Wir haben also **[1]**

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 4.$$