Klausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2018/19
11. Februar 2019

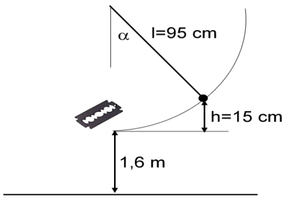
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Ein Fadenpendel der Länge $l = 95$ cm wird um 15 cm angehoben und dann losgelassen. Im tiefsten Punkt der Bahn wird der Pendelkörper ($m = 150$ g) durch eine Rasierklinge vom Faden getrennt und fällt auf den $1,6$ m tiefer gelegenen Boden.



(a) Berechnen Sie den Auftreffpunkt r_x des Körpers

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_A betragsmäßig und vektoriell beim Auftreffen auf dem Erdboden, sowie den Auftreffwinkel.

(c) Nun wird die Rasierklinge entlang des Kreises, auf dem die Kugel sich am Seil bewegt, um einmal $\alpha = +15°$ und dann um $\alpha = -15°$ verschoben. Zeichnen Sie für beide Fälle die Flugbahn der Kugel ein.

Lösung

(a) Mit $h_1 = 15$ cm ergibt sich mit der Energieerhaltung

$$E_{pot} = E_{kin} \tag{1}$$

$$m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 \tag{2}$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = 1,72 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{3}$$

[**2**]

für den Zeitpunkt, zu dem die Rasierklinge den Pendelkörper vom Faden trennt. Da dies im unteren Bahnpunkt des Kreises, auf dem sich die Kugel bis zu diesem Zeitpunkt bewegt hat, geschieht, zeigt der Geschwindigkeitsvektor in horizontale Richtung. Damit ergibt sich mit $h_2 = 1,6$ m die Bewegungsgleichung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + h_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

[**1**]

Für das Auftreffen des Körpers auf den Boden gilt $r_y = 0$, dies geschieht zum Zeitpunkt t_t, also

$$-\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + +h_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_t = \sqrt{\frac{2 \cdot h_2}{g}} = 0,57 \text{ s} \tag{5}$$

[**2**]

Der Körper bewegt sich nur in der Pendelebene weiter, der horizontale Abstand r_x beim Auftreffen ist damit gegeben durch

$$r_x(t_t) = v_1 \cdot t_t = 0,98 \text{ m}. \tag{6}$$

[**1**]

(b) Für die Geschwindigkeit zur Zeit t_t gilt:

$$\vec{v}(t_t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t_t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ -g \cdot t_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,72 \\ -5,59 \end{pmatrix} \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{7}$$

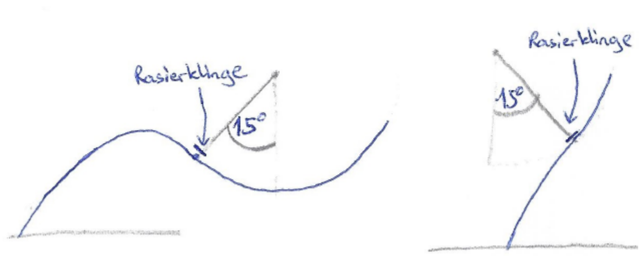
[**2**]

Und für den Betrag der Geschwindigkeit gilt

$$|\vec{v}(t_t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5,85 \frac{\text{m}}{\text{s}} \qquad \alpha = 17,07° \tag{8}$$

[**2**]

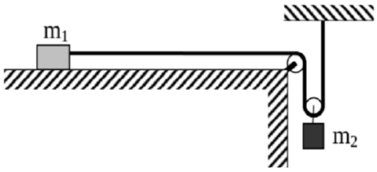
(c) In der Abbildung sieht man links die Verschiebung der Rasierklinge um $+15°$ und rechts bei einer Verschiebung von $-15°$:



[**2**]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Werte der Beschleunigung der beiden hier gezeigten Massen $m_1 = 2$ kg und $m_2 = 1$ kg und die Seilspannung $|\vec{s}|$. Stellen Sie dazu zuerst die auf die Massen wirkenden Kräfte auf. Die Seil hat eine konstante Länge.



Lösung

Für m_1 gilt: $m_1 \cdot a_1 = s$ und für m_2 gilt $m_2 \cdot a_2 = m_2 \cdot g - 2s$. Weiterhin gilt, dass, wenn m_1 sich um eine Distanz d verschiebt, m_2 sich um $d/2$ in der Höhe bewegt (lose Rolle). Daraus ergibt sich, dass $a_1 = 2a_2$ sein muss. Das System von drei Gleichungen mit drei Unbekannten (a_1, a_2, s) lässt sich lösen: $a_1 = s/m_1$, einsetzen in $m_2 \cdot a_1/2 = m_2 \cdot g - 2s$ ergibt:

$$\frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{s}{2} = m_2 \cdot g - 2s \tag{9}$$

[**4**]

bzw. mit anschließendem Umformen:

$$m_2 \cdot s = 2m_1 m_2 \cdot g - 4m_1 m_2 \cdot s \tag{10}$$

$$m_2 \cdot s + 4m_2 \cdot s = 2m_1 m_2 \cdot g \tag{11}$$

$$s = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + 4m_1} g = 4,36\text{N} \tag{12}$$

[**2**]

so dass

$$a_1 = \frac{s}{m_1} = g\frac{2m_2}{m_2 + 4m_1} = 2,18\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = g\frac{m_2}{m_2 + 4m_1} = 1,09\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

[**4**]

Aufgabe 3 (11 Punkte)

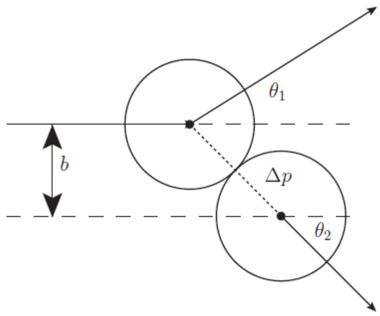
Beim Billard stoße eine Kugel mit Geschwindigkeit v_1 elastisch auf eine ruhende Kugel gleichen Gewichts, und werde in einem Winkel $\theta_1 = 30°$ zur ursprünglichen Bahn abgelenkt.

(a) Skizzieren Sie schematisch den Streuvorgang und beschriften Sie relevante Größen.

(b) Welche Geschwindigkeitsvektoren haben die Kugeln nach dem Stoß?

(c) Unter welchem Winkel läuft die gestoßene Kugel aus?

Lösung



(a) **[2]**

(b) Geschwindigkeiten vor und nach (’) dem Stoß:

$$\vec{v}_1 = (v_1, 0), \quad \vec{v}_2 = (0,0), \qquad \vec{v}_1' = (v_1' \cos\theta_1, v_1' \sin\theta_1), \quad \vec{v}_2' = (v_{2x}', v_{2y}') \tag{16}$$

Unbekannt: v_1', v_{2x}', v_{2y}'

Impulserhaltung in x-Richtung:

$$mv_1 = mv_1' \cos\theta_1 + mv_{2x}' \quad \Leftrightarrow \quad v_{2x}' = v_1 - v_1' \cos\theta_1 \tag{17}$$

[1]

Impulserhaltung in y-Richtung:

$$0 = mv_1' \sin\theta_1 + mv_{2y}' \quad \Leftrightarrow \quad v_{2y}' = -v_1' \sin\theta_1 \tag{18}$$

[1]

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m{v'}_1^2 + \frac{1}{2}m\left({v'}_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) \tag{19}$$

[1]

Kürzen von $\frac{m}{2}$ und Einsetzen der Impulserhaltung:

$$v_1^2 = {v'}_1^2 + (v_1 - {v'}_1 \cos\theta_1)^2 + {v'}_1^2 \sin^2\theta_1 \tag{20}$$

[1]

Umformen und Ausnutzen von $\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 = 1$:

$${v'}_1^2 = v_1 v_1' \cos\theta_1 \tag{21}$$

Lösung von $v'_1 = 0$ entspricht zentralem Stoß. Wir wollen $v'_1 \neq 0$:

$$\Rightarrow v'_1 = v_1 \cos\theta_1 \tag{22}$$

$$\vec{v}'_1 = \left(v_1 \cos^2\theta_1, v_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1\right) = v_1 \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \tag{23}$$

$$\vec{v}'_2 = \left(v_1 \sin^2\theta_1, -v_1 \sin\theta_1 \cos\theta_1\right) = v_1 \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \tag{24}$$

[**3**]

(c)

$$\cos\theta_2 = \frac{\vec{e}_x \cdot \vec{v}'_2}{|\vec{v}'_2|} = \frac{v_2 \sin^2\theta_1}{v_1 \sin\theta_1} = \sin\theta_1 = \frac{1}{2} \tag{25}$$

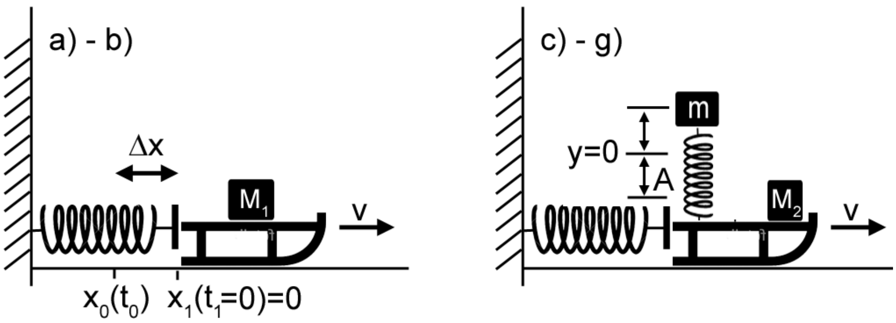
Da die Kugel eine negative y-Geschwindigkeitskomponente hat, ist auch θ_2 negativ:

$$\theta_1 = -60°$$

[**2**]

Aufgabe 4 (14 Punkte)

Eine Masse M_1 sei auf einem Schlitten befestigt, der reibungsfrei in x-Richtung gleiten kann. Der Schlitten wird gegen eine Feder (Federkonstante k_1) gedrückt und staucht diese um Δx. Zum Zeitpunkt t_0 wird der Wagen losgelassen.



(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v ab dem Zeitpunkt t_1, wo der Schlitten den Kontakt mit der Feder verlässt.

(b) Berechnen Sie die Dauer des Kontakts ($t_{\text{kontakt}} = t_1 - t_0$) mit der Feder.

Auf dem Schlitten wird nun eine kleine Masse m an einer zweiten vertikalen Feder (Federkonstante k_2) befestigt. Die Masse M_2 auf dem Schlitten wird so angepasst, dass $M_1 = m + M_2$ gilt. Die kleine Masse m schwingt mit Amplitude A und Periodendauer T in y-Richtung um $y = 0$, und habe zum Zeitpunkt t_1 die maximale Auslenkung in positive y-Richtung.

(c) Geben Sie k_2, die Federkonstante der zweiten Feder an.

(d) Stellen Sie eine Gleichung auf, welche alle Anteile der Gesamtenergie E des Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > t_1$ berücksichtigt. Vernachlässigen Sie die Gravitation. Finden Sie einen Ausdruck für die Auslenkung in y-Richtung.

(e) Berechnen Sie die Gesamtenergie E.

(f) Geben Sie eine Gleichung $\vec{r}(t)$ für $t > t_1$ an, welche die Position der Masse m in Abhängigkeit der Zeit angibt.

(g) Machen Sie einen Ansatz zur Berechnung des zurückgelegten Weges der Masse m nach einer Periodendauer T. (Lösen Sie den Ansatz nicht)

Lösung

(a) Aus der Energieerhaltung folgt:

$$\frac{1}{2}M_1 v^2 = \frac{1}{2}k_1 \Delta x^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}}\Delta x \tag{26}$$

[2]

(b) Aus der Bewegungsgleichung folgt

$$M_1 \ddot{x} = k_1 x \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1}{M_1}} \quad \Rightarrow T_{Feder} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M_1}{k_1}} \tag{27}$$

Für $t_{\text{kontakt}} = t_1 - t_0$ gilt

$$t_{\text{kontakt}} = \frac{1}{4}T_{Feder} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{M_1}{k_1}} \tag{28}$$

[3]

(c) Die Federkonstante der zweiten Feder erhält man aus

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}} \quad \Rightarrow \quad k_2 = \frac{(2\pi)^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \tag{29}$$

[2]

(d) Die Gesamtenergie setzt sich zusammen aus:

$$E = E_{kin_{M_2}} + E_{pot_{M_2}} + E_{kin_m} + E_{pot_m} = \frac{1}{2}M_2 v_x^2 + 0 + \frac{1}{2}M_2 v_x^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2 \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2}M_1 v_x^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2 = \frac{1}{2}M_1 v_x^2 + \frac{1}{2}k_2 y_{max}^2, \tag{31}$$

[1]

Alternativ:

$$y(t) = A \cdot \cos\left((t) \cdot \frac{2\pi}{T}\right) \tag{32}$$

$$\dot{y}(t) = \frac{2\pi}{T}A\sin\left((t)\frac{2\pi}{T}\right) \tag{33}$$

[**1**]

Damit folgt:

$$E = \frac{1}{2}M_1 v^2 + \frac{1}{2}A^2\left(k_2\cos^2\phi + \frac{4\pi^2 m}{T^2}\sin^2\phi\right) \tag{34}$$

[**1**]

mit $\phi \equiv (t)\frac{2\pi}{T}$.

(e) Aus der Energieerhaltung folgt:

$$E = \frac{1}{2}M_1 v^2 + \frac{1}{2}A^2 k_2 \tag{35}$$

[**1**]

(f) Aus dem Superpositionsprinzip folgt:

$$r(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} v\cdot t \\ A\cos\phi \end{pmatrix} \tag{36}$$

[**1**]

(g) Ansatz

$$s = \int_{t_1}^{t_1+T} |\dot{r}|dt = \int_{t_1}^{t_1+T} dt\sqrt{v^2 + \frac{k_2}{m}A^2\sin^2\phi} \tag{37}$$

[**2**]

Aufgabe 5 (14 Punkte)

Im MPI für Plasmaphysik befindet sich ein **zylinderförmiges** Schwungrad, welches $m = 220$t wiegt und mit einer Kreisfrequenz von1650 Umdrehungen/min rotiert. Das Schwungrad wird auf 1270 Umdrehungen/min abgebremst über einen Zeitraum von $\Delta t = 10$ s. Dabei stellt das Schwungrad konstant eine Leistung von $P_1 = 155$ MW zur Verfügung.

(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J des Schwungrads. (Ersatzlösung: $J = 250000$kgm^2)

(b) Berechnen Sie die Abmessungen des Schwungrads (Länge und Radius). Das Schwungrad besteht aus Eisen mit einer Dichte von $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7,7\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$.

Das Schwungrad wird nun 30 min lang von 0 Umdrehungen auf 1650 Umdrehungen/min mit einer neuen konstanter Leistung P_2 beschleunigt.
Berechnen Sie:

(c) Eine Gleichung für $\omega(t)$ und die Leistung P_2.

(d) Die Strecke s die ein Punktes auf der Aussenseite des Zylinders (Schwungrads) während des gesamten Beschleunigungsvorgangs zurücklegt.

Lösung

(a) Die Energieänderung des Schwungrades beim Abbremsvorgang beträgt

$$\Delta E = P \cdot \Delta t = 155\ \mathrm{MW} \cdot 10\ \mathrm{s} = 1550\ \mathrm{MJ}, \tag{38}$$

[2]

wobei eine Verringerung der Kreisfrequenz statt findet:

$$w_1 = 2\pi f_1 = 172,79\ \frac{1}{\mathrm{s}} \quad \rightarrow \quad w_2 = 2\pi f_2 = 132,99\ \frac{1}{\mathrm{s}} \tag{39}$$

Die Veränderung der Energie entspricht der Änderung der Rotationsenergie, also:

$$\Delta E = \frac{1}{2} J \left(\omega_1^2 - \omega_2^2\right) \quad \Rightarrow \quad J = \frac{2\Delta E}{\omega_1^2 - \omega_2^2} = 254880\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \tag{40}$$

[3]

(b) Den Radius r des Schwungrades erhält man aus der Definition für das Trägheitsmoment eines (Voll)zylinders:

$$J = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2 \cdot J}{m}} = 1,52\ \mathrm{m} \tag{41}$$

[2]

Die Länge L des Schwungrades erhält man aus der Beziehung zwischen Masse und Dichte:

$$m = V \cdot \rho = \pi r^2 \cdot L \cdot \rho \quad \Rightarrow L = \frac{m}{\pi \cdot R^2 \cdot \rho} = 3,94\ \mathrm{m} \tag{42}$$

[2]

Anmerkung: $\rho = 7,7\ \mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^{-3} = 7700\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$

(c) Wie in Teilaufgabe (a) gilt:

$$\Delta E = P_2 \cdot \Delta t = \frac{1}{2} J \Delta\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega = \sqrt{\frac{2P_2 t}{J}} = \omega(t) \tag{43}$$

[1]

wobei P_2 gegeben ist durch:

$$P_2 \cdot t_2 = \frac{1}{2} I \omega_2^2 \quad \Rightarrow P_2 = \frac{I \cdot 2\pi^2 \cdot f_2^2}{t_2} = 2,11\ \mathrm{MW} \tag{44}$$

[2]

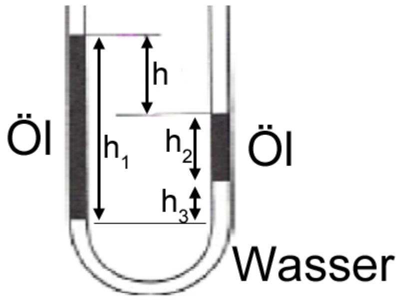
(d) Die zurückgelegte Strecke s erhält man aus

$$s = \int_0^{t_2} \omega(t')dt' \cdot R = \sqrt{\frac{2 \cdot P_2}{J}} R \int_0^{t_2} \sqrt{t'}dt' = 315\mathrm{km} \tag{45}$$

[2]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein beiderseits offenes U-Rohr mit der inneren Querschnittsfläche $A = 1\ \text{cm}^2$ wird zunächst mit Wasser (Dichte $\rho_1 = 1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) gefüllt. Danach wird die eine Seite mit $50\ \text{cm}^3$ und die andere Seite mit $10\ \text{cm}^3$ Öl (Dichte $\rho_2 = 0{,}78\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) befüllt. Welche Niveaudifferenz h stellt sich ein?



Lösung

Der Schweredruck der Flüssigkeitssäulen über dem gemeinsamen Niveau N muss im linken und im rechten Rohr gleich sein:

$$\rho_2 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_3 \tag{46}$$

[1]

Division durch die Fallbeschleunigung g ergibt

$$\rho_2 h_1 = \rho_2 h_2 + \rho_1 h_3 \tag{47}$$

Über den Zusammenhang

$$h_1 = h + h_2 + h_3 \tag{48}$$

[1]

können wir die Unbekannte h_3 aus Gleichung 48 ersetzen und nach h auflösen:

$$h = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)(h_1 - h_2) \tag{49}$$

[1]

Die Höhen h_1 und h_2 können wir über die Füllmengen $V_1 = 50\ \text{cm}^3$ und $V_2 = 10\ \text{cm}^3$ bestimmen:

$$h_1 = \frac{V_1}{A}, \quad h_2 = \frac{V_2}{A} \tag{50}$$

[1]

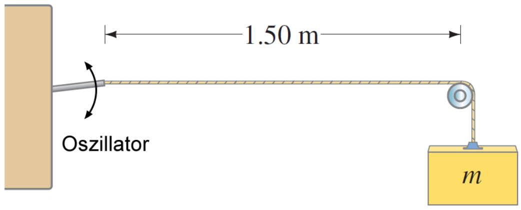
Damit erhalten wir das Ergebnis

$$h = \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\frac{V_1 - V_2}{A} = 8{,}8\ \text{cm} \tag{51}$$

[1]

Der Höhenunterschied beträgt also $h = 8{,}8$ cm.

Aufgabe 7 (8 Punkte)



(a) Ein Ende einer waagrechten Schnur ist an einem mechanischen 60-Hz-Oszillator mit kleiner Amplitude befestigt. Die Schnur hat eine Massendichte μ von $3,9 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}}$. Im Abstand $l = 1,50$ m vom Oszillator entfernt läuft die Schnur über eine Rolle, und am Ende der Schnur werden Massen angehängt. Wie groß müssen diese Massen sein, um

   (i) einen Wellenbauch

   (ii) fünf Wellenbäuche

   einer stehenden Welle zu erzeugen? Nehmen Sie an, dass die Schnur am Oszillator einen Wellenknoten bildet.

(b) Durch Verschieben der Rolle kann die Länge l von 10 cm bis 1,5 m verändert werden. Wie viele stehende Wellen können erzeugt werden, wenn die aufgehängte Masse $m = 0,08$ kg beträgt?

Lösung

(a) Damit die Schnur eine bestimmte Anzahl an Wellenbäuchen aufweisen kann, muss sie als stehende Welle schwingen (mit einer Frequenz von 60 Hz). Dabei gilt für die Frequenz und die Geschwindigkeit der stehenden Wellen:

$$f_n = \frac{n \cdot v}{2L}, \quad \text{und} \quad v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}, \tag{52}$$

[2]

wobei F_T die Seilspannung ist, die dem Gewicht mg der Masse am Ende der Schnur entspricht. Mit diesen Formeln lassen sich nun die Massen für eine bestimmte Anzahl von Wellenbäuchen bestimmen:

(i) $n = 1$:

$$f_n = \frac{nv}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{mg}{\mu}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{4L^2 f_n^2(\mu)}{n^2 g} \tag{53}$$

$$m_1 = \frac{4 \cdot (150\ \text{m})^2 (60\ \text{Hz})^2 (3,9 \cdot 10^{-4}\ \text{kg/m})}{1^2 (9,80\ \text{m/s}^2)} = 1,289\text{kg} \approx 1,3\ \text{kg} \tag{54}$$

[2]

(ii) $n = 5$:

$$m_5 = \frac{m_1}{5^2} = 5,2 \cdot 10^{-2}\ \text{kg} \tag{55}$$

[**1**]

(b) Die Frequenz beträgt 60 Hz, die Seilspannung in der Schnur beträgt $F_T = mg$ und die Geschwindigkeit der Wellen in der Schnur kann durch

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} \tag{56}$$

[**1**]

bestimmt werden. Die Wellenlängen der Wellen in der Schnur sind daher gegeben durch

$$\lambda = \frac{v}{f} = 0,7473 \text{ m}. \tag{57}$$

[**1**]

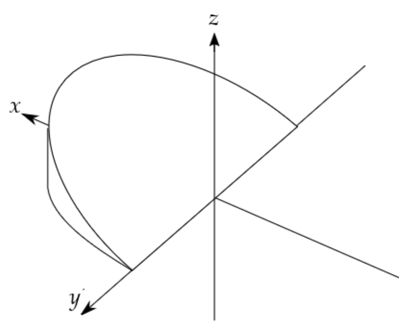
Die Länge der Schnur muss ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge sein, damit sich an beiden Enden Knoten befinden. Innerhalb der Gesamtlänge von $1,50$ m kann man daher vier unterschiedliche Wellen erzeugen:

$$L = 0,37 \text{ m}, L = 0,75 \text{ m}, L = 1,12 \text{ m}, L = 1,49 \text{ m}$$

[**1**]

Aufgabe 8 (7 Punkte

Aus einem homogenen zylindrischen Stab mit Radius R sei ein Keil (Masse M) geschnitten, der durch die Ebenen $z = 0$ und $z = \frac{h}{R}x$ begrenzt wird, wobei die z-Achse die Symmetrieachse des ursprünglichen Zylinders ist. Bestimmen Sie durch Integration das Trägheitsmoment des Keils um die z-Achse. Berechnen Sie dazu zuerst das Volumen des Keils.



Lösung

(a) Wir verwenden Zylinderkoordinaten $(\bar{r}, \varphi, z)$. Die Gleichung für die obere Begrenzungsebene des Keils lautet darin

$$z = \frac{h}{R}x = \frac{h}{R}\bar{r}\cos\varphi.$$

[**1**]

Das Volumen des Keils ist damit

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r} \int_0^{\frac{h}{R}\bar{r}\cos\varphi} \mathrm{d}z\, 1 \\
&= \frac{h}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\, \cos\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r}^2 \\
&= \frac{h}{R} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} R^3 = \frac{2}{3} h R^2 .
\end{aligned}
$$

[**3**]

(b) Das Trägheitsmoment des Keils ist damit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r} \int_0^{\frac{h}{R}\bar{r}\cos\varphi} \mathrm{d}z\, \rho\bar{r}^2 \\
&= \frac{\rho h}{R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\, \cos\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r}^4 \\
&= \frac{\rho h}{R} \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} R^5 = \frac{2}{5} \rho h R^4 = \frac{3}{5} M R^2 .
\end{aligned}
$$

[**3**]