Aufgaben

1. Stetige Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen

Sei X ein metrischer Raum.

(a) Charakterisieren Sie die Eigenschaft, dass $A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge ist mit Hilfe konvergenter Folgen.

(b) Sei Y ein weiterer metrischer Raum, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung und $B \subseteq Y$ eine abgeschlossene Menge. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist.

LÖSUNG:

(a) A ist genau dann abgeschlossen, wenn jede konvergente Folge $(x_n) \subseteq A$ ihren Grenzwert in A hat. **[1]**

(b) Beweis: Sei $(x_n) \subseteq f^{-1}(B)$ eine konvergente Folge, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$.
Zu zeigen ist: $x \in f^{-1}(B)$. Da f stetig ist gilt $f(x_n) \to f(x) \in B$, da B abgeschlossen. Daraus folgt $x \in f^{-1}(B)$. **[3]**
Alternative: max. **[2]** Punkte falls verwendet wurde, dass Urbilder offener Mengen offen sind, und abgesclossene Mengen Komplemente offener Mengen sind.

2. Differenzierbarkeit

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen $\partial_x f(0,0)$ und $\partial_y f(0,0)$?

(b) Wie lautet die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0)$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung? Begründen Sie kurz.

(d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

LÖSUNG:

Pro Teilaufgabe ein Punkt.

(a) $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^3}{h\cdot h^2} = 1$. $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$.

(b) $\partial_v f(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{t^3v_1^3-t^3v_1v_2^2}{t(t^2v_1^2+t^2v_2^2)} = v_1\frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$.

(c) Nein, wäre f im Ursprung differenzierbar, so hieße das, dass

$$\partial_{(1,1)} f(0) = f'(0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x f(0) & \partial_y f(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1.$$

Aber nach (b) ist $\partial_{(1,1)} f(0) = 1 \cdot \frac{1-1}{1+1} = 0$. Widerspruch.

(d) f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig als Kombination stetiger Funktionen. f ist im Ursprung stetig, denn sei (x_n, y_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$, dann ist

$$|f(x_n,y_n) - f(0,0)| = \frac{|x_n(x_n^2 - y_n^2)|}{x_n^2 + y_n^2} \leq |x_n|\frac{|x_n^2| + |y_n^2|}{x_n^2 + y_n^2} = |x_n| \to 0 = f(0,0) \text{ für } n \to \infty.$$

3. Taylorentwicklung

Sei $f \in C^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit einem stationären Punkt bei $(0, \frac{\pi}{2})$ und ${\partial_1}^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = 1$, $\partial_1 \partial_2 f(0, \frac{\pi}{2}) = {\partial_2}^2 f(0, \frac{\pi}{2}) = -1$.

(a) Der Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ist für f ein

☐ lokales Maximum ☒ Sattelpunkt ☐ lokales Minimum

(b) Sei nun $h(\phi) = f(\phi \cos \phi, \phi \sin \phi)$. Wie lautet die Taylorentwicklung von h im Punkt $\phi = \frac{\pi}{2}$ bis zur zweiten Ordnung?

$$\boxed{h(\phi) = f(0, \tfrac{\pi}{2}) + 0 \cdot (\phi - \tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\pi^2}{4} + \pi - 1)(\phi - \tfrac{\pi}{2})^2 + \mathcal{O}\big((\phi - \tfrac{\pi}{2})^3\big)}$$

(c) $\frac{\pi}{2}$ ist für h ein

☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt ☒ lokales Minimum.

LÖSUNG:

(a) Im stationären Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ ist die Hessematrix von f, $H_f(0, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ hyperbolisch, da die Determinante $= -2 < 0$ ist. **[1]**

(b) Mit der Kettenregel ist

$$h'(\phi) = (\cos \phi - \phi \sin \phi)\partial_x f + (\sin \phi + \phi \cos \phi)\partial_y f,$$

wobei f und seine partiellen Ableitungen immer bei $(\phi \cos \phi, \phi \sin \phi)$ ausgewertet werden.
Somit ist $h'(\frac{\pi}{2}) = 0$, da $h(\frac{\pi}{2}) = f(0, \frac{\pi}{2})$, also der stationäre Punkt von f mit verschwindendem Gradienten.
Weiter ist

$$\begin{aligned} h''(\phi) \quad = \quad & (-\sin \phi - \sin \phi - \phi \cos \phi)\partial_x f + (\cos \phi - \phi \sin \phi)^2 \partial_x \partial_x f \\ & +2(\cos \phi - \phi \sin \phi)(\sin \phi + \phi \cos \phi)\partial_y \partial_x f \\ & +(2 \cos \phi - \phi \sin \phi)\partial_y f + (\sin \phi + \phi \cos \phi)^2 \partial_y \partial_y f. \end{aligned}$$

Ausgewertet bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ ergibt das

$$\begin{aligned} h''(\tfrac{\pi}{2}) \quad &= \quad 0 + (-\tfrac{\pi}{2})^2 \partial_x \partial_x f + 2(-\tfrac{\pi}{2})\partial_y \partial_x f + 0 + 1^2 \partial_y \partial_y f \\ &= \quad \tfrac{\pi^2}{4} + \pi - 1. \end{aligned}$$

[2]

(c) Da offenbar $h''(\frac{\pi}{2}) > 0$ besitzt h dort ein lokales Minimum. **[1]**

4. Kurvenintegral

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $\gamma \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$, $t \mapsto \gamma(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich gemäß des 2. Newtonschen Gesetzes $F(\gamma(t)) = m\,\ddot{\gamma}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $\gamma(t_0) = (0, 0, 0)$ nach $\gamma(t_1) = (1, 1, 1)$ bewege und bei $\gamma(t_0)$ die Geschwindigkeit $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ und bei $\gamma(t_1)$ den Geschwindigkeitsbetrag $\|\dot{\gamma}(t_1)\| = 2$ besitze. Berechnen sie die von F geleistete Arbeit, d.h., das Kurvenintegral von F entlang der Teilchenbahn γ.

LÖSUNG:

Beh Die Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien.

Bew Wir integrieren die Kraft entlang des Weges,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F(r) \cdot \mathrm{d}r &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \ddot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\dot{\gamma}(t)\|^2 \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(\|\dot{\gamma}(t_1)\|^2 - \|\dot{\gamma}(t_0)\|^2) = 2.
\end{aligned}$$

[4]

5. Lokale Extrema

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u, v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in	☒ x_1	☐ x_2	☒ x_3	☐ x_4	☒ x_5
(b) f besitzt eine lokales Maximum in	☐ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☒ x_5
(c) f besitzt eine lokales Minimum in	☒ x_1	☐ x_2	☐ x_3	☐ x_4	☐ x_5
(d) f besitzt einen Sattelpunkt in	☐ x_1	☐ x_2	☒ x_3	☐ x_4	☐ x_5

LÖSUNG:

Jede Teilaufgabe ein Punkt.

(a) Beh x_1, x_3 und x_5 sind kritische Punkte von f.
Bew Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(u, v) = (u(3u + 2), v(3v + 2)) = (0, 0),$$

woraus folgt, dass x_1, x_3 und x_5 kritische Punkte sind. x_2 und x_4 sind keine kritischen Punkte.

☐

(b) Beh f besitzt in x_5 ein lokales Maximum.
Bew Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(u, v) = \begin{pmatrix} 6u + 2 & 0 \\ 0 & 6v + 2 \end{pmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_1, x_3 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwert $2 > 0$, $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$ und $H_f(x_5)$ den doppelten Eigenwert $-2 < 0$. Also hat f in x_5 ein lokales Maximum.

(c) Beh f besitzt in x_1 ein lokales Minimum.
Bew $H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwerte $2 > 0$.

(d) Beh f besitzt in x_3 einen Sattelpunkt.
Bew $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$.

6. Implizit definierte Funktionen

Gegeben sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} x + y + \sin z &= 0, \\ 3\sin x - 2\tan y - z &= 0. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass man dieses Gleichungssystem im Ursprung lokal gleichzeitig nach y und z auflösen kann und berechnen Sie die erste Ableitung der so implizit definierten Funktion $x \mapsto g(x)$ im Punkt $x = 0$.

(b) Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems werde im Ursprung lokal als Kurve im $\mathbb{R}^3$ durch x parametrisiert. Geben Sie mit Hilfe von (a) den Einheitstangentialvektor an diese Kurve im Ursprung an.

LÖSUNG:

(a) Das Gleichungssystem entspricht der Gleichung $f(x, y, z) = 0 \in \mathbb{R}^2$ mit der stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y + \sin z \\ 3\sin x - 2\tan y - z \end{pmatrix}$.

Es gilt $f(0, 0, 0) = 0$ und $Df(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. **[1]**

Die Untermatrix der Jacobi-Matrix von f,

$$\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist invertierbar. **[1]**

Somit sind die Gleichungen nach y und z im Ursprung lokal auflösbar. Die so implizit definierte Funktion $g :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2$ hat im Ursprung die Ableitung

$$Dg(x) = -\left(\tfrac{\partial f}{\partial(y,z)}(0, 0, 0)\right)^{-1} \tfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

[1]

(b) Die Lösungskurve wird in einer Umgebung des Ursprungs parametrisiert durch

$$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}$$

mit der implizit definierten Funktion $g(x) = (g_1(x), g_2(x))$ aus (a) und $g_1'(0) = 4$, $g_2'(0) = -5$. Somit ist der Einheitstangentialvektor im Ursprung

$$T = \frac{\gamma'(0)}{\|\gamma'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

[1]

7. Lagrangemultiplikator

Es sei $P = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ein regulärer Punkt von $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ mit $f(P) = 0$. Wir nehmen an, dass die Gleichungen $f_1(x, y, z) = 0$ lokal in P nach z aufgelöst werden kann, was die implizit definierte Funktion $\tilde{z}(x, y)$ ergibt.

(a) Wie lautet der Gradient von $\tilde{z}$ im Punkt (x_0, y_0)?

(b) Sei nun $h \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, so dass die in einer Umgebung von (x_0, y_0) definierte Funktion $\tilde{h}(x, y) = h(x, y, \tilde{z}(x, y))$ einen stationären Punkt in (x_0, y_0) hat. Zeigen Sie, dass dann $\nabla h(P) = \lambda \nabla f(P)$ gilt und bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

(a) Nach dem Satz über implizite Funktionen ist wegen $\tilde{z}(x_0, y_0) = z_0$

$$\nabla \tilde{z}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x \tilde{z}(x_0, y_0) \\ \partial_y \tilde{z}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = -\partial_z f(P)^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x f(P) \\ \partial_y f(P) \end{pmatrix},$$

wobei $\partial_z f(P) \neq 0$ vorausgesetzt ist. **[1]**

(b) $\nabla \tilde{h}(x_0, y_0) = 0$ bedeutet

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x \tilde{h}(x_0, y_0) = \partial_x h(P) \cdot 1 + \partial_y h(P) \cdot 0 + \partial_z h(P) \cdot \partial_x \tilde{z}(x_0, y_0) \\ &= \partial_x h(P) - \partial_z h(P) \frac{\partial_x f(P)}{\partial_z f(P)}, \\ 0 &= \partial_y \tilde{h}(x_0, y_0) = \partial_x h(P) \cdot 0 + \partial_y h(P) \cdot 1 + \partial_z h(P) \cdot \partial_y \tilde{z}(x_0, y_0) \\ &= \partial_y h(P) - \partial_z h(P) \frac{\partial_y f(P)}{\partial_z f(P)}. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\nabla h(P) = \begin{pmatrix} \partial_x h(P) \\ \partial_y h(P) \\ \partial_z h(P) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \partial_x f(P) \\ \partial_y f(P) \\ \partial_z f(P) \end{pmatrix} = \lambda \nabla f(P)$$

mit $\lambda = \frac{\partial_z h(P)}{\partial_z f(P)}$. **[3]**