# Klausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2019/20
10. Februar 2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

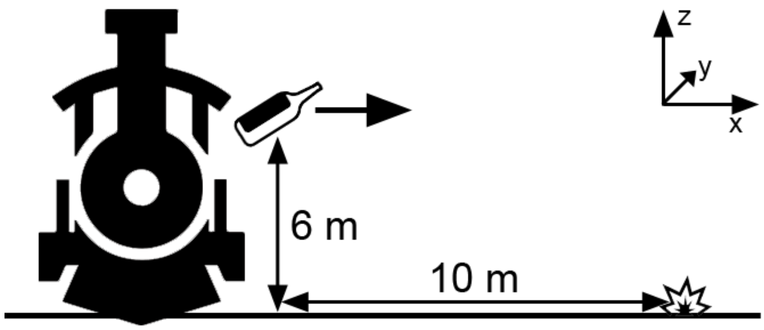
## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Auf dem Nachhauseweg von einem Fußballspiel wirft ein angetrunkener Fan eine Bierflasche rechtwinklig und parallel zum Boden aus einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug. Diese Flasche fällt auf eine 6 m tiefer gelegene Wiese und schlägt 24 m vom Abwurfpunkt (in Fahrtrichtung gemessen) sowie 10 m senkrecht dazu auf. Berechnen Sie folgende Geschwindigkeiten:

(a) die des fahrenden Zuges $v_{Zug}$ (Ersatzlösung: 80 km/h)

(b) die Abwurfgeschwindigkeit mit der der Fan die Flasche aus dem Fenster wirft (Ersatzlösung: 10 m/s)

(c) den Gesamtbetrag der Auftreffgeschwindigkeit der Flasche am Boden




## Lösung

(a) Die Bierflasche fällt auf eine 6 m tiefer gelegene Wiese. Dabei wurde sie praktischerweise rechtwinklig und horizontal aus dem Zug geworfen. Aus diesem Grund können wir über die

Gleichung für den freien Fall die Zeit berechnen, die die Bierflasche bis zu ihrem Auftreffen braucht. Es gilt:

$$h(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2, \tag{1}$$

dabei sind $h(t_A)$ die besagten 6 m, $g = 9,81$ m/s$^2$ ist die Schwerebeschleunigung. Umstellen nach $t$ und Einsetzen liefert:

$$t_A = \sqrt{\frac{2h(t_A)}{g}} = 1,1 \text{ s} \tag{2}$$

[**2**]

Die Bierflasche trifft $s_A = 24$ m in Fahrtrichtung gemessen vom Abwurfort entfernt auf. Die Geschwindigkeit des Zuges kann mit dieser Information und der gerade berechneten Flugdauer der Flasche über eine einfache Bewegungsgleichung berechnet werden:

$$s = v \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad v = \frac{s}{t}. \tag{3}$$

Einsetzen von $t_A = 1,1$ s und $s_A = 24$ m ergibt die Geschwindigkeit des Zuges:

$$v_{\text{Zug}} = 21,8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 78,5 \ \frac{\text{km}}{\text{h}}. \tag{4}$$

[**2**]

(b) Die Abwurfgeschwindigkeit berechnet sich aus der Flugdauer $t_f = t_A$ und der Auftreffentfernung $x = 10$ m nach

$$v_x = \frac{x}{t_f} = \frac{10 \text{ m}}{1,1 \text{ s}} = 9,1 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}, \tag{5}$$

wobei die Geschwindigkeit der Flasche senkrecht zur Fahrtrichtung $v_x$ als konstant angenommen wird.

[**1**]

(c) Die Auftreffgeschwindigkeit auf der Wiese $v_z$ berechnet sich gemäß der Bewegungsgleichung über

$$v = -g \cdot t. \tag{6}$$

Einsetzen liefert einen Betrag der Geschwindigkeit von:

$$v_z = -g \cdot t_f = 10,8 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 38,3 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{7}$$

$$|v_{Ges}| = \sqrt{v_x^2 + v_{Zug}^2 + v_z^2} = 26 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{8}$$

[**3**]

## Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine Feder mit Federkonstante $k$ ist am Punkt ($x_0$,0) aufgehängt. Nun wird die Feder diagonal in x- und y-Richtung ausgelenkt.

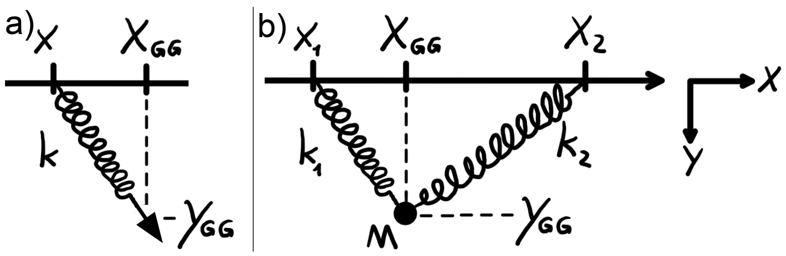
(a) Zeigen Sie, dass die Komponenten der Federkraft in x- und y-Richtung sich wie $F_x = -k\Delta x = -k(x - x_0)$ und $F_y = -k\Delta y$ verhalten.

Jetzt werden zwei Federn mit den Federkonstanten $k_1$ und $k_2$ an den Aufhängepunkten ($x_1$,0) und ($x_2$,0) befestigt. Am unteren Ende der Federn hängt die Masse $M$ (siehe Skizze). Es wirkt die Gravitation.

(b) An welchem Punkt $P_{\mathrm{GG}} = (x_{\mathrm{GG}}, y_{\mathrm{GG}})$ ist die Masse im Gleichgewicht?
Hinweis: Nehmen Sie für beide Federn die Ruhelänge $l_0 = 0$ m an.

(c) Nähern sie $x_{GG}, y_{GG}$ für $k_1 >> k_2$ und vereinfachen sie für $k = k_1 = k_2$?

(d) Für den Fall $k_1 = k_2$ wird die Masse in y-Richtung ausgelenkt. Mit welcher Kreisfrequenz $\omega$ schwingt das System?




## Lösung

(a) Längenänderung der Feder

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \tag{9}$$

$$|\vec{F}_{Ges}| = -k\Delta s \tag{10}$$

$\vec{F}_{Ges}$ ist parallel (und entgegengesetzt) zu $\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|}|\vec{F}_{Ges}| = -k\Delta x \qquad F_y = -k\Delta y \tag{11}$$

**[2]**

(b) Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein typisches Kräftegleichgewicht in zwei Dimensionen. Auf den Massenpunkt wirken die zwei Federkräfte und die Gravitationskraft

$$\vec{F}_{\mathrm{k}_1} = -k_1 \cdot \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y \end{pmatrix}, \vec{F}_{\mathrm{k}_2} = -k_2 \cdot \begin{pmatrix} x - x_2 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{F_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ Mg \end{pmatrix}$$

Das Vorzeichen in $F_G$ ist $+$, weil die y-Achse noch unten sei. Im Gleichgewicht ($x = x_{GG}$ und $y = y_{GG}$) gilt:

$$0 = \sum F_y = -Mg - k_1 y_{\mathrm{GG}} - k_2 y_{\mathrm{GG}} \Rightarrow y_{GG} = \frac{Mg}{k_1 + k_2}$$

$$0 = \sum F_x = -k_1 x_{\mathrm{GG}} + k_1 x_1 - k_2 x_{\mathrm{GG}} + k_2 x_2 = k_1 x_1 + k_2 x_2 - (k_1 + k_2) x_{GG} \Rightarrow x_{GG} = \frac{k_1 x_1 + k_2 x_2}{k_1 + k_2}$$

[**5**]

(c) $k_1 >> k_2$

$$x_{\mathrm{GG}} = \frac{k_1 x_1}{k_1} = x_1 \quad y_{\mathrm{GG}} = -\frac{Mg}{k_1} \tag{12}$$

$k_1 = k_2 = k$

$$x_{\mathrm{GG}} = \frac{k x_1 + k x_2}{k + k} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y_{\mathrm{GG}} = -\frac{Mg}{2k} \tag{13}$$

[**2**]

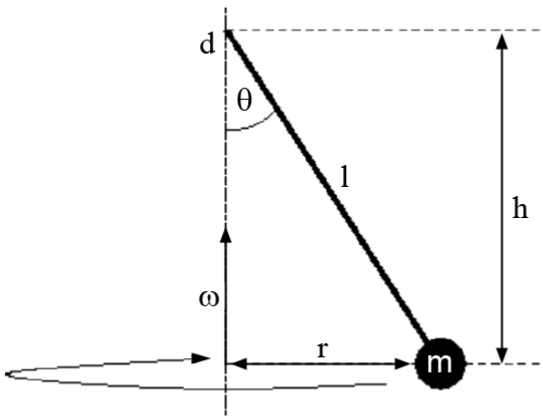
(d)

$$\ddot{y} - \frac{2k}{M} y = -g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2k}{M}} \tag{14}$$

[**1**]

## Aufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Masse $m$ dreht sich mit Winkelgeschwindigkeit $\omega$ um eine vertikale Drehachse $d$. Der masselose Stab der Länge $l$ ist über ein Gelenk frei von der Drehachse auslenkbar (Der Winkel zwischen Stab und Achse sei $\theta$). Bestimmen Sie die wirkenden Kräfte. Zeigen Sie, dass die vertikale Höhe $h$ nur von $g$ und $\omega$ abhängt.




## Lösung

Es wirken drei Kräfte auf die Masse $m$, deren Summe im stationären Fall ($\theta = \text{const.}$) null ist:

$$\vec{F_Z} + \vec{F_G} + \vec{F_S} = 0 \tag{15}$$

Die Kräfte sind gegeben durch:

$$|\vec{F_Z}| = m\omega^2 r = m\omega^2 l \sin\theta \tag{16}$$
$$|\vec{F_G}| = mg \tag{17}$$

[**2**]

wobei $F_G$ nach unten und $F_Z$ horizontal nach außen zeigt. Die Komponenten von $F_Z$ und $F_G$ parallel zum Stab heben sich mit $F_S$ auf. Die senkrechten Komponenten sind entgegengesetzt und heben sich auf für $\theta = \text{const.}$:

$$F_Z^{\perp} = m\omega^2 l \sin\theta\cos\theta \tag{18}$$
$$F_G^{\perp} = mg\sin\theta \tag{19}$$

Duch Gleichsetzen erhält man

$$l\cos\theta = \frac{g}{\omega^2} \tag{20}$$

Die Höhe $h$ ist gegeben durch $h = l\cos\theta$. Einsetzen ergibt

$$h = \frac{g}{\omega^2} \tag{21}$$

[**3**]

Damit ist $h$ nicht von $l$ abhängig, was zu zeigen war.

## Aufgabe 4 (8 Punkte)

Die Masse $m$ sei an einem Ende eines masselosen starren Stabs befestigt. Dieser ist an seinem anderen Ende fest mit dem Mittelpunkt eines homogenen Zylinders (Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}MR^2$) mit Radius $R$ und Masse $M$ verbunden. Der Zylinder rollt ohne zu rutschen. Die Masse $m$ wird um kleine Winkel $\theta$ ausgelenkt.

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Gesamtsystems bei Rotation um den Auflagepunkt C.

(b) Bestimmen Sie das Drehmoment des Systems für kleine Auslenkungen und stellen Sie die Differentialgleichung auf.

(c) Was ist die Eigenfrequenz des Systems?

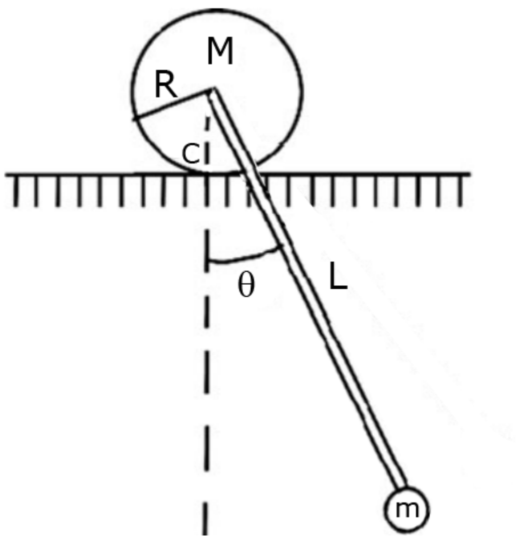
## Lösung

(a) In der Abbildung ist C der Kontaktpunkt, um den die Massen $M$ und $m$ rotieren. Es gilt:

$$I_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right) + md^2 \tag{22}$$

mit trigonometrischem Phythagoras $d^2 = L^2 + R^2 - 2LR\cos\theta \approx (L-R)^2$ oder für kleine Winkel gleich $d^2 \approx (L-R)^2$

$$I_C = \frac{3MR^2}{2} + m(L-R)^2. \tag{23}$$




[**4**]

(b) Da der Punkt C gleichzeitig der Punkt verschwindender Geschwindigkeit ist, besitzt die Bewegungsgleichung die Form $\Sigma M_C = I_C \cdot \ddot{\theta}$ mit $I_C$ dem Trägheitsmoment der Massen $M$ und $m$ bezüglich C.

$$\vec{M_C} = \vec{r} \times \vec{F} = -mg(L-R)\sin\theta \vec{e_z} \approx -mg(L-R)\theta \tag{24}$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher:

$$\left(\frac{3MR^2}{2} + m(L-R)^2\right)\ddot{\theta} = -mg(L-R)\theta \tag{25}$$

[**3**]

(c)

$$\ddot{\theta} + \frac{mg(L-R)}{\frac{3MR^2}{2} + m(L-R)^2}\theta = 0. \tag{26}$$

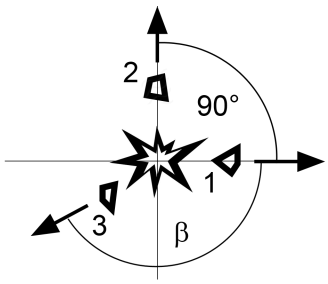
Daraus liest man ab:

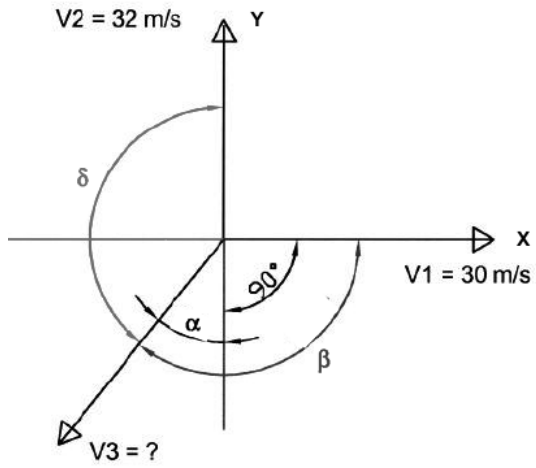
$$\omega = \sqrt{\frac{mg(L-R)}{\frac{3MR^2}{2} + m(L-R)^2}} \tag{27}$$

[**1**]

## Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein ruhender Kessel zerbricht nach einer Explosion in drei Teile. Davon haben zwei Teile die gleiche Masse $m$ und fliegen senkrecht zueinander mit $v_1 = 30$ m/s und $v_2 = 32$ m/s weg. Das dritte Stück hat die dreifache Masse $3m$. In welche Richtung (Winkel $\beta$) und mit welchem Geschwindigkeitsbetrag bewegt sich dieses Stück?




## Lösung

Die Größen $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = 3m$, $v_1 = 30$ m/s und $v_2 = 32$ m/s sind bekannt, gesucht sind $v_3$ und $\alpha$.

Zur Lösung dieser Aufgabe benötigt man den Impulserhalungssatz, nach dem die Summe aller Impulse in einem geschlossenen System verschwinden muss. Für dieses Problem ist also

$$\vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} = 0 \tag{28}$$

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + m_3\vec{v_3} = 0 \tag{29}$$

$$m \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \end{pmatrix} + 3m \cdot \begin{pmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \end{pmatrix} = 0 \tag{30}$$

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 32 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -3 \cdot \begin{pmatrix} v_{3x} \\ v_{3y} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Nun kann man komponentenweise nach den Geschwindigkeiten $v_{3x}$ und $v_{3y}$ auflösen:

$$v_{3x} = -10,00 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_{3y} = -10,66 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{32}$$

[**3**]

Die Gesamtgeschwindigkeit erhält man durch die Betragsbildung:

$$|\vec{v_3}| = \sqrt{(-10)^2 + (-10,66)^2}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 14,62\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{33}$$

Die Bewegungsrichtung erhält man über den Winkel $\alpha$:

$$\tan\alpha = \frac{v_{3x}}{v_{3y}} = \frac{-10}{-10,66} = 0,93808 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 43,17°. \tag{34}$$

[**3**]

Der Winkel zwischen Teil 1 und Teil 3 beträgt

$$\beta = \alpha + 90° = 43,17° + 90° = 133,17°; \quad \beta = \angle(\vec{v_1}, \vec{v_3}) \tag{35}$$

[**1**]

und zwischen Teil 2 und 3:

$$\delta = 180° + 90° = 180° - 43,17° = 136,83°; \quad \delta = \angle(\vec{v_2}, \vec{v_3}) \tag{36}$$

## Aufgabe 6 (9 Punkte)

Ein Elefant der Masse $m = 5000\,\mathrm{kg}$ steht mit einem Bein auf einem Quader aus Beton (die drei anderen Beine stehen auf dem Boden). Der Quader ist 5 cm breit, 5 cm lang und 4 cm hoch. Nehmen Sie an, dass das Gewicht des Elefanten gleich verteilt ist.

(a) Ein Material bricht, wenn seine Druckfestigkeit überschritten wird. Bricht der Beton- oder der Stahl-Quader?

| Werkstoff | $E$ [GN/m$^2$] | $\mu$ | Druckfestigkeit [MN/m$^2$] |
|---|---|---|---|
| Beton | 23 | 0,20 | 17 |
| Stahl | 200 | 0,28 | 520 |

(b) Berechnen Sie die kleinste Fläche die der Betonquader haben darf, damit er unter der Last nicht bricht.

(c) Berechnen Sie die Volumenänderung des Beton- und Stahl-Quaders.

## Lösung

(a) Der Block würde zusammenbrechen, wenn der Druck die Druckfestigkeit übersteigt. Nachdem der Elefantenfuß aber lediglich einen Druck von

$$\Delta p = \frac{1250\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{5\,\mathrm{cm} \cdot 5\,\mathrm{cm}} = 4{,}9\,\mathrm{MPa} < 17\,\mathrm{MPa} < 520\,\mathrm{MPa} \tag{37}$$

aufbringt, reichen beide Materialien aus, um das Elefantenbein auszuhalten.

[**3**]

(b) Ein Druck gleich der Druckfestigkeit von Beton wird bei gleicher Kraft erzeugt, wenn die Fläche des Quaders

$$A_{\text{grenz}} = \frac{F}{\Delta p_{\text{grenz}}} = \frac{1250\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{17\,\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}} \tag{38}$$

$$= 7{,}21\,\text{cm}^2 \tag{39}$$

unterschreitet.

[**2**]

(c) Der Kompressionsmodul berechnet sich über

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{40}$$

womit für die Volumenänderung der Ausdruck

$$\Delta V = V \cdot \frac{\Delta p \cdot 3(1-2\mu)}{E} \tag{41}$$

folgt, wobei der Druck über den Quotienten aus der angreifenden Kraft (einem Viertel der Gewichtskraft des Elefanten) und der Querschnittsfläche des Quaders berechnet wird. Setzt man die entsprechenden Werte ein, so erhält man

$$\Delta V_{\text{Beton}} = -38{,}4\,\text{mm}^3 \tag{42}$$

$$\Delta V_{\text{Stahl}} = -3{,}2\,\text{mm}^3 \tag{43}$$

[**4**]

## Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Zahnrad aus Bronze wiegt an der Luft 45 g. In Benzin (Dichte $\rho_1 = 0,75 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ getaucht wiegt es 41 g.

(a) Bestimmen Sie die Dichte von Bronze. (Ersatzlösung: $\rho_{Bronze} = 9 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

(b) Wie viel Gramm Kupfer (Dichte $\rho_2 = 8,9 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) und Zinn ($\rho_3 = 7,2 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) sind darin enthalten?

## Lösung

(a) Die Auftriebskraft ist gleich der Gewichtskraftdifferenz, d.h.

$$V \cdot \rho_1 g = (m - m')g. \tag{44}$$

Die Dichte der Bronze ist gegeben durch

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m\rho_1}{m - m'} = 8,44 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{45}$$

[**3**]

(b) Es gilt aber außerdem

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_2 + V_3}, \tag{46}$$

wobei

$$V_{2,Kupfer} = \frac{m_2}{\rho_2} \tag{47}$$

und

$$V_{3,Zinn} = \frac{m - m_2}{\rho_3}. \tag{48}$$

[**2**]

Es ist einerseits

$$V_2 + V_3 = \frac{m}{\rho}, \tag{49}$$

aber andererseits gilt auch

$$V_2 + V_3 = \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m - m_2}{\rho_3}. \tag{50}$$

Gleichsetzen dieser beiden Gleichungen und Umformen führt auf

$$\frac{m_2\rho_3 + m\rho_2 - m_2\rho_2}{\rho_2\rho_3} = \frac{m}{\rho} \tag{51}$$

bzw.

$$m_2(\rho_3 - \rho_2) + m\rho_2 = \frac{\rho_2\rho_3 m}{\rho} \tag{52}$$

und somit

$$m_2 = \frac{m\rho_2(\rho_3 - \rho)}{\rho(\rho_3 - \rho_2)} \tag{53}$$

[**3**]

Einsetzen der Zahlenwerte liefert für die Mase $m_2$ des Kupfers

$$m_2 = 34,6 \text{ g}$$

bzw.

$$76,9\ \%,$$

und für die Masse $m_3$ des Zinns:

$$m_3 = 10,4 \text{ g}$$

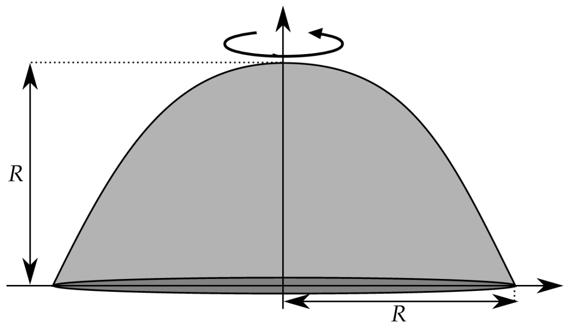
bzw.

$$23,1\ \%,$$

[**2**]

## Aufgabe 8 (7 Punkte)

Betrachten Sie eine parabolische Linse aus homogenem Material mit Dichte $\rho$, die auf der Unterseite durch eine Ebene und oben durch eine auf dieser Ebene senkrecht stehenden Achse rotierte Parabel begrenzt ist. Der Radius der Grundfläche sei $R$, die Höhe der Linse sei ebenfalls $R$ und die Masse $M$.




Berechnen Sie das Trägheitsmoment bei Rotation um die Symmetrieachse in Abhängigkeit von $R$ und der Masse $M$.

## Lösung

Die Grundfläche liege in der $x$-$y$-Ebene und die Symmetrieachse auf der $z$-Achse. Die Höhe der Linsenoberseite in Abhängigkeit des Radius $\bar{r}$ (aus den Zylinderkoordinaten) ist gegeben durch eine Parabel

$$z = b - a\bar{r}^2$$

mit $z(0) = R$ und $z(R) = 0$ folgt

$$b = R, \qquad a = \frac{1}{R}$$

damit gilt

$$z = R - \frac{1}{R}\bar{r}^2$$

Für die Masse gilt

$$\begin{aligned}
M &= \int_V \rho \mathrm{d}^3 x \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r} \int_0^{R-\frac{1}{R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z \\
&= 2\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}\bar{r} \left( R\bar{r} - \frac{1}{R}\bar{r}^3 \right) \\
&= \frac{1}{2}\pi\rho R^3
\end{aligned}$$

**[4]**

Der Abstand zur Drehachse ($z$-Achse) ist gleich der Zylinderkoordinate $\bar{r}$. Das Trägheitsmoment ist somit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_V \rho \bar{r}^2 \, \mathrm{d}^3 x = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{R-\frac{1}{R}\bar{r}^2} \mathrm{d}z\, \bar{r}^2 \\
&= \rho 2\pi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}^3 \left( R - \frac{1}{R}\bar{r}^2 \right) \\
&= \rho 2\pi \left( R \frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{R}\frac{1}{6} R^6 \right) \\
&= \frac{\pi}{6} \rho R^5 = \frac{1}{3} M R^2
\end{aligned}
$$

[**3**]