Probeklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. M. Rief

Wintersemester 2009/10

12.1.2010

Musterlösung

Für die Probeklausur gilt: Mit 14 der insgesamt möglichen 40 Punkte hätte man sicher bestanden. Für eine 1,0 ist es nicht notwendig, alle Aufgaben bearbeitet zu haben.

Aufgabe 1:

(a) Die Schwerebeschleunigung an der Oberfläche der Erde ist

$$G\frac{m_E}{R_E^2} \tag{1}$$

[1]

und hat den bekannten Wert $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, also ist

$$m_E = \frac{g}{G}R_E^2 = 5.97\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \tag{2}$$

[1]

(b) Aus der Gleichheit von Gravitationskraft

$$F_G = G\frac{m_E m_S}{r_{SE}^2} \tag{3}$$

und Zentripetalkraft

$$F_Z = m_E\frac{v_E^2}{r_{SE}} \tag{4}$$

[1]

für die Erde auf ihrer Umlaufbahn ergibt sich

$$G\frac{m_S}{r_{SE}} = v_E^2 = \left(\frac{2\pi r_{SE}}{T_E}\right)^2 \tag{5}$$

Also ist die Sonnenmasse:

$$m_S = \frac{1}{G}\frac{4\pi^2 r_{SE}^3}{T_E^2} = 2.1\cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \tag{6}$$

[1]

(c) Wieder gilt Gleichheit von Gravitationskraft und Zentripetalkraft, diesmal für den Jupiter auf seiner Umlaufbahn:

$$G\frac{m_S}{r_{SJ}} = v_J^2 = \left(\frac{2\pi r_{SJ}}{T_J}\right)^2 \tag{7}$$

[1]

Aufgelöst nach r_{SJ}:

$$r_{SJ}^3 = \frac{Gm_S T_J^2}{4\pi^2} \tag{8}$$

woraus sich mit dem in Teil (a) berechneten Wert der Sonnenmasse ergibt:

$$r_{SJ} = 770\cdot 10^6\,\mathrm{km} \tag{9}$$

[1]

Alternativ: Das 3. Keplersche Gesetz lautet (für Kreisbahnen)

$$\frac{T^2}{r^3} = \text{const.} \tag{10}$$

[1]

bzw.

$$\frac{T_J^2}{r_J^3} = \frac{T_E^2}{r_E^3} \tag{11}$$

Also

$$r_J = \left(\frac{T_J}{T_E}\right)^{2/3} r_E = 780 \cdot 10^6 \,\text{km} \tag{12}$$

[1]

Aufgabe 2:

(a) Die Funktion $r(t)$ ist durch die Angabe direkt gegeben:

$$r(t) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{T} t \tag{13}$$

[1]

Die Funktion $\varphi(t)$ folgt aus $r(t)$ über die Drehimpulserhaltung. (Drehimpulserhaltung gilt, da die Kraft des Seils auf die Masse eine Zentralkraft ist, d.h. nur in radialer Richtung wirkt.) Also:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = \text{const.} \tag{14}$$

und daher

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{r^2(t)} \tag{15}$$

wobei $l := L/m$. Also:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{l}{(r_1 + \alpha t)^2} \tag{16}$$

wobei $\alpha := (r_2 - r_1)/T$. Integration ergibt:

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\alpha}\frac{l}{r_1 + \alpha t} + C \tag{17}$$

Wegen $\varphi(0) = 0$ ist

$$C = \frac{1}{\alpha}\frac{l}{r_1} \tag{18}$$

und daher

$$\varphi(t) = \frac{l}{\alpha}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1 + \alpha t}\right) \tag{19}$$

[3]

(b) Die Kraft, die im Seil wirken muss, um diese Form der Bahn zu erzwingen, erhält man indem man diese Bahnkurve in die Gleichung für die Beschleunigung in Polarkoordinaten einsetzt:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi \tag{20}$$

Die Transversalkomponente der Kraft verschwindet, da es sich bei der Seilkraft um eine Zentralkraft handelt. (Man kann das natürlich explizit nachrechnen, indem man die Bahnkurve einsetzt.) **[1]**

Für die Radialkomponente der Kraft braucht man:

$$\ddot{r}(t) \;=\; 0 \quad , \quad r(t) \;=\; r_1 + \alpha t \quad , \quad \dot{\varphi}^2(t) \;=\; \frac{l^2}{(r_1 + \alpha t)^4} \tag{21}$$

also

$$F \;=\; m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \;=\; -\frac{ml^2}{(r_1 + \alpha t)^3} \tag{22}$$

[1]

Aufgabe 3:

(a) Bezüglich dem im Wagen mitbewegten Beobachter gilt

$$m_1 \;=\; 0.1\,\mathrm{kg} \qquad , \qquad v_1 \;=\; 1\,\mathrm{m/s} \tag{23}$$

$$m_2 \;=\; 0.05\,\mathrm{kg} \qquad , \qquad v_2 \;=\; -5\,\mathrm{m/s} \tag{24}$$

Zusätzlich weiß man aus der Angabe, dass die m_2 nach dem Stoß ruht, also

$$v_2' \;=\; 0 \tag{25}$$

Damit kann man den Impulssatz

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' \;=\; m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{26}$$

[1]

auflösen nach

$$v_1' \;=\; \frac{1}{m_1}\big(m_1 v_1 + m_2 v_2\big) \;=\; -1.5\,\mathrm{m/s} \tag{27}$$

[1]

(b) Die verlorengegangene kinetische Energie ist also

$$Q \;=\; E - E' \;=\; \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 \;=\; 0.5625\,\mathrm{J} \tag{28}$$

[1]

(c) Transformation der Geschwindigkeiten auf das ruhende System ergibt:

$$\bar{v}_1 \;=\; v_1 + v \;=\; 6\,\mathrm{m/s} \tag{29}$$

$$\bar{v}_2 \;=\; v_2 + v \;=\; 0 \tag{30}$$

$$\bar{v}_1' \;=\; v_1' + v \;=\; 3.5\,\mathrm{m/s} \tag{31}$$

$$\bar{v}_2' \;=\; v_2' + v \;=\; 5\,\mathrm{m/s} \tag{32}$$

[1]

Damit Überprüfung der Impulserhaltung im ruhenden System:

$$\bar{p} \;=\; m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 \;=\; 0.6\,\mathrm{kgm/s} \tag{33}$$

$$\bar{p}' \;=\; m_1 \bar{v}_1' + m_2 \bar{v}_2' \;=\; 0.6\,\mathrm{kgm/s} \tag{34}$$

Also

$$\bar{p}' = \bar{p} \tag{35}$$

d.h. die Impulserhaltung gilt auch bezüglich dem ruhenden System. **[1]**

(d) Die verlorengegangene kinetische Energie vom ruhenden System aus gesehen ist:

$$\bar{Q} = \bar{E} - \bar{E}' = \frac{1}{2}m_1\bar{v}_1^2 - \frac{1}{2}m_1\bar{v}_1'^2 - \frac{1}{2}m_2\bar{v}_2'^2 = 0.5625\,\mathrm{J} \tag{36}$$

hat also denselben Wert wie im System des Eisenbahnwagens. **[1]**

Aufgabe 4:

Da auf das betrachtete System nur innere Kräfte wirken, treffen sich die beiden Wagen im Schwerpunkt des Systems. **[1]**

Dessen konstante Lage X ist gegeben durch

$$m_1x_1 + m_2x_2 = (m_1 + m_2)X \tag{37}$$

[1]

mit $m_1 = m_P + M_P$, $m_2 = m_S + M_S$. Legen wir den Nullpunkt der x-Achse in den Startpunkt des Professors, dann gilt also: $x_1 = 0$, $x_2 = d_0$, $X = d$. Damit können wir die Schwerpunktsgleichung nach m_1 auflösen:

$$m_1 = \frac{m_2(d_0 - d)}{d} = \frac{(75\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg})(30\,\mathrm{m} - 10\,\mathrm{m})}{10\,\mathrm{m}} = 200\,\mathrm{kg} \tag{38}$$

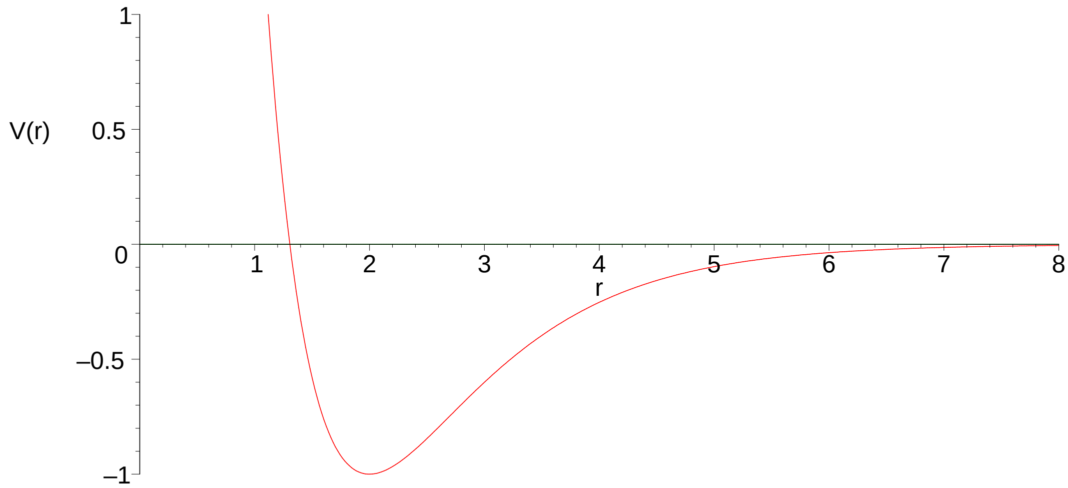
Also ist die Masse des Professors $m_P = m_1 - M_P = 100\,\mathrm{kg}$. **[1]**

Aufgabe 5:

(a) Das Morse-Potential

$$V(r) = E_0\left(\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2 - 1\right) \tag{39}$$

mit den Parameterwerten $E_0 = 1$, $r_0 = 2$, $a = 1$ sieht folgendermaßen aus:



[1]

r_0 ist der Abstand der Atome, für den die potentielle Energie des Moleküls minimal ist. **[1]**

(b) Um das Potential

$$V(r) \;=\; E_0\left(\left(1-e^{-a(r-r_0)}\right)^2-1\right) \tag{40}$$

um r_0 zu entwickeln, schreibt man es am besten auf $\rho := r - r_0$ um

$$V(\rho) \;=\; E_0\big(1-e^{-a\rho}\big)^2 - E_0 \tag{41}$$

und entwickelt dies um $\rho = 0$:

$$\bar{V}(\rho) \;=\; V(0) \;+\; \rho V'(0) \;+\; \frac{1}{2}\rho^2 V''(0) \tag{42}$$

[1]

Aus

$$V(\rho) \;=\; E_0\big(1-e^{-a\rho}\big)^2 - E_0 \tag{43}$$

$$V'(\rho) \;=\; 2aE_0 e^{-a\rho}\big(1-e^{-a\rho}\big) \tag{44}$$

$$V''(\rho) \;=\; 2a^2E_0 e^{-a\rho}\big(2e^{-a\rho}-1\big) \tag{45}$$

folgt

$$V(0) \;=\; -E_0 \tag{46}$$

$$V'(0) \;=\; 0 \tag{47}$$

$$V''(0) \;=\; 2a^2E_0 \tag{48}$$

also

$$\bar{V}(\rho) \;=\; -E_0 + a^2E_0\rho^2 \tag{49}$$

[1]

Dies ist also das „quadratische Ersatzpotential“ in der Umgebung von $\rho = 0$, d.h. für kleine Werte von $|r - r_0|$. Gemäß der Angabe ist die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen von ρ äquivalent zur Bewegung einer Masse $\frac{m}{2}$ in diesem Ersatzpotential. D.h.

$$\frac{m}{2}\ddot{\rho} \;=\; -\bar{V}'(\rho) \tag{50}$$

also

$$\frac{m}{2}\ddot{\rho} \;=\; -2a^2E_0\rho \tag{51}$$

bzw.

$$\ddot{\rho} + \frac{4a^2E_0}{m}\rho \;=\; 0 \tag{52}$$

[1]

Vergleicht man dies mit der allgemeinen Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators

$$\ddot{\rho} + \omega^2\rho \;=\; 0 \tag{53}$$

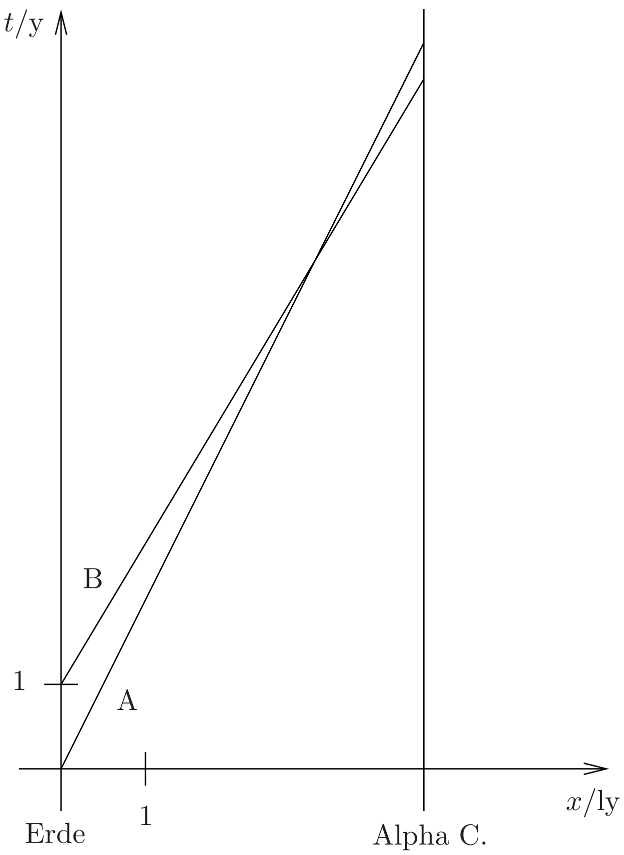
dann kann man die Frequenz ablesen:

$$\omega \;=\; 2a\sqrt{\frac{E_0}{m}} \tag{54}$$

[1]

Aufgabe 6:

(a)



[2]

(b) Die Bewegung von A wird beschrieben durch

$$x_A(t) \ = \ v_A t \tag{55}$$

und die von B durch

$$x_B(t) \ = \ v_B(t - \tau) \tag{56}$$

Dabei sind x und t die Koordinaten im gemeinsamen Ruhsystem von Erde und Alpha Centauri, v_A bzw. v_B die Geschwindigkeiten von A bzw. B und τ die Startzeit von B. Gleichsetzen ergibt den Zeitpunkt ihres Zusammentreffens:

$$v_A t \ = \ v_B(t - \tau) \tag{57}$$

also

$$t \ = \ \frac{v_B \tau}{v_B - v_A} \ = \ \frac{\tau}{1 - v_A/v_B} \ = \ 6\,\mathrm{y} \tag{58}$$

[1]

Der Ort des Zusamentreffens ist also

$$x \ = \ v_A t \ = \ 3\,\mathrm{ly} \tag{59}$$

[1]

(c) Die Lorentz-Transformation vom ungestrichenen System (Ruhsystem von Erde und Alpha

Centauri) ins gestrichene System (Ruhsystem von A) lautet

$$t' \;=\; \gamma_A \left(t - \frac{v_A}{c^2}x\right) \quad , \quad x' \;=\; \gamma_A \left(x - v_A t\right) \tag{60}$$

Um Zahlenwerte einzusetzen schreibt man dies am besten in der Form

$$t' \;=\; \gamma_A \left(t - \frac{v_A}{c}\frac{x}{c}\right) \quad , \quad x' \;=\; \gamma_A \left(x - \frac{v_A}{c}ct\right) \tag{61}$$

Denn mit $v_A/c = 0.5$, $\gamma_A = 1/\sqrt{1-(v_A/c)^2} \approx 1.15$ und

$$t = 6\,\mathrm{y} \quad , \quad x = 3\,\mathrm{ly} \tag{62}$$

[1]

erhält man so

$$t' \;=\; 1.15...\,(6\,\mathrm{y} - 0.5\cdot 3\,\mathrm{y}) \;\approx\; 5.17\,\mathrm{y} \tag{63}$$
$$x' \;=\; 1.15...\,(3\,\mathrm{ly} - 0.5\cdot 6\,\mathrm{ly}) \;=\; 0\,\mathrm{ly} \tag{64}$$

Auf der Uhr von A ist also die Zeit $t' = 5.17\,\mathrm{y}$ vergangen. **[1]**
(Die Berechnung von x' war nicht verlangt und ist nur der Vollständigkeit halber angeführt.)

(d) Hier geht es um die Frage, wie groß die Differenz der t''-Koordinaten der Ereignisse E_1 = „B startet“ und E_2 = „B kommt bei Alpha Centauri an“ ist, wobei das zweigestrichene System das Ruhsystem von B ist. Dazu bestimmt man zuerst die Koordinaten der Ereignisse bezüglich des ungestrichenen Systems. E_1 ist klar:

$$E_1: \qquad t_1 = 1\,\mathrm{y} \quad , \quad x_1 = 0\,\mathrm{ly} \tag{65}$$

Für E_2 löst man

$$x_B(t) \;=\; v_B(t-\tau) \;\stackrel{!}{=}\; d \tag{66}$$

mit $d = 4.3\,\mathrm{ly}$ nach t auf und erhält:

$$E_2: \qquad t_2 = \frac{49}{6}\,\mathrm{y} \quad , \quad x_2 \;=\; 4.3\,\mathrm{ly} \tag{67}$$

[1]

Mit

$$t_1'' \;=\; \gamma_B \left(t_1 - \frac{v_B}{c}\frac{x_1}{c}\right) \quad , \quad t_2'' \;=\; \gamma_B \left(t_2 - \frac{v_B}{c}\frac{x_2}{c}\right) \tag{68}$$

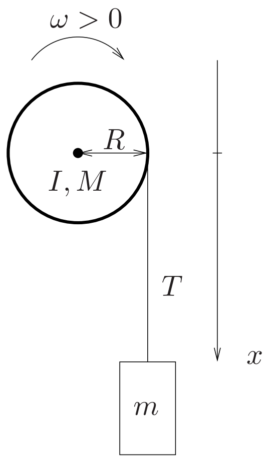
und $v_B/c = 0.6$, $\gamma_B = 1/\sqrt{1-(v_B/c)^2} = 1.25$ ergibt sich:

$$t_1'' \;=\; 1.25\,(1\,\mathrm{y} - 0.6\cdot 0\,\mathrm{y}) \;=\; 1.25\,\mathrm{y} \quad , \quad t_2'' \;=\; 1.25\left(\tfrac{49}{6}\,\mathrm{y} - 0.6\cdot 4.3\,\mathrm{y}\right) \;\approx\; 7\,\mathrm{y} \tag{69}$$

Also vergeht auf der Uhr von B zwischen den beiden Ereignissen die Zeit $t_2'' - t_1'' \approx 5.75\,\mathrm{y}$. **[1]**

Aufgabe 7:

Die Seilspannung sei T und die positive x-Achse zeige vertikal nach unten. Die Vorzeichenkonventionen für ω ist so wie in der Skizze gezeigt. Es sind andere Konventionen möglich, diese müssen aber konsistent sein.



Dann hat man eine Bewegungsgleichung für die Rotation des Zylinders, eine Bewegungsgleichung für die lineare Beschleunigung der angehängten Masse und eine Zwangsbedingung durch den Faden, die die beiden Bewegungsgleichungen verknüpft:

$$I\dot{\omega} = RT \tag{70}$$
$$m\ddot{x} = mg - T \tag{71}$$
$$\ddot{x} = R\dot{\omega} \tag{72}$$

[1]

(Die Vorzeichen sind korrekt im Sinne der gewählten Konvention, z.B. führt eine positive Fadenspannung zu einer positiven Winkelbeschleunigung.) Dies sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten $\dot{\omega}$, $\ddot{x}$ und T. Elimination von $\ddot{x}$ führt auf

$$I\dot{\omega} = RT \tag{73}$$
$$mR\dot{\omega} = mg - T \tag{74}$$

Multiplikation der zweiten Gleichung mit r und Addition zur ersten Gleichung liefert eine Gleichung für $\dot{\omega}$

$$(I + mR^2)\dot{\omega} = mgR \tag{75}$$

also

$$\dot{\omega} = \frac{mgR}{I + mR^2} = \frac{g/R}{1 + M/2m} \tag{76}$$

[1]

Für die lineare Beschleunigung folgt

$$\ddot{x} = R\dot{\omega} = \frac{g}{1 + M/2m} \tag{77}$$

[1]

und für die Seilspannung

$$T = \frac{I\dot{\omega}}{R} = \frac{Mg/2}{1 + M/2m} \tag{78}$$

[1]

Die Tragekraft F ist schließlich die Summe aus Seilspannung und Gewichtskraft des Zylinders:

$$F = \frac{Mg/2}{1 + M/2m} + Mg \tag{79}$$

[1]