....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 3
(Analysis 2)

Prof. Dr. M. Wolf

7. August 2012, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: keine

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **84 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Topologie** **[10 Punkte]**

Sei X ein nichtleerer topologischer Raum. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, heißt *lokal konstant*, wenn es zu jedem $x \in X$ eine Umgebung von x gibt, auf der f konstant ist. Zeigen Sie:

(a) Ist X zusammenhängend, so ist jede lokal konstante Funktion konstant.

(b) Es gibt lokal konstante Funktionen, die nicht beschränkt sind.

LÖSUNG:

(a) Sei $x \in X$ und $c := f(x) \in \mathbb{R}$. Sei $A := f^{-1}(\{c\})$ und $B := f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{c\}$.
Dann ist $A \cup B = X$ **[1]**
und $A \cap B = \emptyset$. **[1]**
A ist offen, da es zu jedem $y \in A$ eine offene Umgebung U von y gibt,
so dass $f(U) = \{f(y)\} = \{c\}$, also $U \subseteq A$. **[2]**
B ist offen, da es zu jedem $y \in B$ eine offene Umgebung U von y gibt,
so dass $f(U) = \{f(y)\} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{c\}$, also $U \subseteq B$. **[2]**
Da X zusammenhängend ist, muss entweder A oder B gleich der leeren Menge sein. Da $x \in A$ also $A \neq \emptyset$ folgt $B = \emptyset$ und damit $A = X$, d.h., f ist konstant gleich c auf ganz X. **[2]**

(b) $\mathbb{Z} \ni n \to n \in \mathbb{Z}$. **[2]**

2. **Differenzierbarkeit** **[10 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq 0, \\ 0 & \text{für } (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Wie lauten die partiellen Ableitungen im Ursprung?

$\partial_x f(0,0) = 0$ **[1]**	$\partial_y f(0,0) = -1$ **[1]**

(b) Wie lautet die Richtungsableitung in Richtung $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ im Ursprung?

$\partial_v f(0,0) = v_2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$ **[2]**

(c) Ist f differenzierbar im Ursprung? **[2]**

☐ Ja ☒ Nein

(d) Zeigen Sie, dass f eine stetige Funktion ist.

f ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig als Kombination stetiger Funktionen. **[1]**
f ist im Ursprung stetig, den sei (x_n, y_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$, dann ist **[1]**

$$|f(x_n,y_n) - f(0,0)| = \frac{|y_n(x_n^2 - y_n^2)|}{x_n^2+y_n^2} \leq |y_n| \frac{|x_n^2| + |y_n^2|}{x_n^2+y_n^2} = |y_n| \to 0 = f(0,0) \text{ für } n \to \infty.$$

[2]

LÖSUNG:

(a) $\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$. $\partial_y f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-h^3}{h^2} = -1$.

(b) $\partial_v f(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{t^3 v_1^2 v_2 - t^3 v_2^3}{t(t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2)} = v_2 \frac{v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2}$.

(c) Nein, wäre f im Ursprung differenzierbar, so hieße das, dass

$$\partial_{(1,1)} f(0) = f'(0)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_x f(0) \, \partial_y f(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -1.$$

Aber nach (b) ist $\partial_{(1,1)} f(0) = 1 \cdot \frac{1-1}{1+1} = 0$. Widerspruch.

(d) s.o.

3. **Ableitung einer Matrixfunktion** **[10 Punkte]**

Zeigen Sie, dass die Ableitung der Funktion $f(A) = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ an der Stelle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A invertierbar, gegeben ist durch

$$f'(A)(B) = -A^{-1}((BA^{-1})^{\mathrm{T}} + BA^{-1})(A^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

Hinweis: Für $g(A) = A^{-1}$ ist $g'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$, Produktregel, Kettenregel.

Lösung:

$f(A) = g \circ h(A)$ mit $h(A) = A^{\mathrm{T}}A$ differenzierbar, da quadratisch. **[1]**

Nach der Produktregel ist $h'(A)(B) = B^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}B$. **[2]**

Mit der Kettenregel erhält man

$$\begin{aligned}
f'(A)(B) &= (g \circ h)'(A)(B) \\
&\overset{\textbf{[2]}}{=} g'(h(A))(h'(A)(B)) \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} -h(A)^{-1}h'(A)(B)h(A)^{-1} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} -(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(B^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}B)(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} -A^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}B)A^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} -A^{-1}((A^{\mathrm{T}})^{-1}B^{\mathrm{T}} + BA^{-1})(A^{\mathrm{T}})^{-1} \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} -A^{-1}((BA^{-1})^{\mathrm{T}} + BA^{-1})(A^{\mathrm{T}})^{-1}
\end{aligned}$$

4. **Taylorentwicklung** **[10 Punkte]**

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei viermal stetig differenzierbar und der Punkt $x^* = (1,0)$ sei ein stationärer Punkt von f mit $f(x^*) = 3$. Weiter sei

$$\partial_1^2 f(x^*) = \partial_1\partial_2 f(x^*) = 1,\ \partial_2^2 f(x^*) = 2 \text{ und } \partial_1\partial_2^2 f(x^*) = \partial_2^3 f(x^*) = -1,$$

alle anderen dritten partiellen Ableitungen verschwinden in x^*.

(a) Der Punkt x^* ist ein **[2]**

☒ lokales Minimum ☐ lokales Maximum ☐ Sattelpunkt

von f.

(b) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung von f im Entwicklungspunkt x^* bis zur dritten Ordnung? **[6]**

$$\boxed{f(x,y) = 3 + \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)y + y^2 - \tfrac{1}{2}(x-1)y^2 - \frac{1}{6}y^3 \qquad +R_3(x,y)}$$

(c) Welche Eigenschaften folgen daraus für das Restglied $R_3(x,y)$? **[2]**

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} R_3(x,y) = 0$ ☒ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} R_3(x,y) = 0$

☒ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R_3(x,y)}{\|(x-1,y)\|^3} = 0$ ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R_3(x,y)}{\|(x-1,y)\|^4} = 0$

LÖSUNG:

(a) Die Hessematrix $H_f(1,0) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ ist positiv definit, da $\det H_f(1,0) = 2 > 0$ und $\operatorname{tr} H_f(1,0) = 3 > 0$, also lokales Minimum.

(b) Formel für die Taylorentwicklung

(c) $R_3(x,y) = \mathcal{O}(\|(x,y) - x^*\|^4)$ für $(x,y) \to x^*$ bedeutet, dass $\frac{R_3(x,y)}{\|(x-1,y)\|^4}$ in einer Umgebung von $(1,0)$ beschränkt ist, also folgt $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{R_3(x,y)}{\|(x-1,y)\|^\beta} = 0$ nur für $\beta = 0,1,2,3$.

Bewertung:

zu (a) klar

zu (b)
- jeder richtige Term ein Punkt
- nur ein Punkt Abzug, wenn statt $(x-1)$ nur x verewendet wird
- Abweichungen davon sind möglich wenn sie **einheitlich** für alle Arbeiten angewendet werden

zu (c) 2 Punkte wenn genau die richtigen Aussagen angekreuzt sind sonst 0.

5. **Implizite Funktionen** **[12 Punkte]**

Gegeben ist die Funktion $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_1(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^3 - z$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$. Im Punkt $P = (1, 1, -1)$ gilt $f(P) = (0, 0)$. Die Gleichung $f(x, y, z) = \binom{0}{0}$ soll in einer Umgebung von P nach y und z aufgelöst werden um die Funktionen $\tilde{y}(x)$ und $\tilde{z}(x)$ zu erhalten.

(a) Wie lautet die Jacobimatrix von f im Punkt P?

$$f'(P) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$ **[2]**

(b) Die Invertierbarkeit welcher Matrix M muss überprüft werden, um den Satz über implizite Funktionen im Punkt P anwenden zu können?

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} \partial_y f_1(P) & \partial_z f_1(P) \\ \partial_y f_2(P) & \partial_z f_2(P) \end{pmatrix} \right)$$ **[2]**

(c) Berechnen Sie die zum Punkt P gehörenden ersten Ableitungen von $\tilde{y}$ und $\tilde{z}$.

$$\tilde{y}'(1) = \frac{2}{5}$$ **[2]**

$$\tilde{z}'(1) = -\frac{3}{5}$$ **[2]**

(d) Geben Sie die Taylorentwicklungen der Funktionen $\tilde{y}(x)$ und $\tilde{z}(x)$ im Punkt $x = 1$ bis zur ersten Ordnung an.

$$\tilde{y}(x) = 1 + \frac{2}{5}(x - 1) + \mathcal{O}(|x - 1|^2)$$ **[2]**

$$\tilde{z}(x) = -1 - \frac{3}{5}(x - 1) + \mathcal{O}(|x - 1|^2)$$ **[2]**

LÖSUNG:

(a) Es ist $\operatorname{grad} f_1(x, y, z) = (3x^2, -3y^2, 3z^2 - 1)$ und damit $\operatorname{grad} f_1(1, 1, -1) = (3, -3, 2)$, $\operatorname{grad} f_2(x, y, z) = (2x, 2y, -4z)$, also $\operatorname{grad} f_2(P) = (2, 2, 4)$.

(b) Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt für die implizit definierte Funktion $\binom{\tilde{y}}{\tilde{z}}(x)$

$$\begin{pmatrix} \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}'(1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(y, z)}(P)\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}(P) = -\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{-20} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\tilde{y}(1) = 1$ und $\tilde{z}(x) = -1$ lauten die Linearisierungen der beiden Funktionen

$$\tilde{y}(x) = 1 + \frac{2}{5}(x - 1) + \mathcal{O}(|x - 1|^2), \quad \tilde{z}(x) = -1 - \frac{3}{5}(x - 1) + \mathcal{O}(|x - 1|^2).$$

Bewertung:

- Jeder falsche Eintrag in den Matrizen ist ein Punkt Abzug bis zu 0 Punkte.
- Folgefehler werden berücksichtigt. Wenn die Matrix in (a) nicht korrekt ist, gibt es in (b) Punkte, sowohl, wenn die Matrix in (b) korrekt ist, als auch, wenn sie konsistent mit (a) ist. Entsprechendes gilt für (b) und (c) und auch für (c) und (d).
- In (c) und (d) gibt es bei kleinen Fehlern (falsches Vorzeichen, falscher Zähler, falscher Nenner, x statt $(x - 1)$) jeweils noch einen Punkt.

6. **Extrema mit Nebenbedingungen** **[14 Punkte]**
Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x,y) = 2xy + \frac{3}{2}x^2$ eingeschränkt auf die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 5\}$ ihr Maximum im Punkt $(2,1)$ annimmt.
LÖSUNG:

K ist kompakt und f ist stetig, also nimmt die Funktion f auf K ihr Maximum an. **[2]**
$K = g^{-1}(\{0\})$ für $g(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Für $(x,y) \in K$ folgt $\nabla g(x,y) = (2x, 2y) \neq 0$, 0 ist also regulärer Wert von g. **[1]**
Nach dem Satz über Extrema mit Nebenbedingungen gilt also: Ist (x,y) ein Extremwert von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass das Gleichungssytem

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. **[2]**
Dies bedeutet

$$\begin{aligned} 2y + 3x &= 2\lambda x \\ 2x &= 2\lambda y \\ x^2 + y^2 &= 5 \end{aligned}$$

[1]
Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt $2y = (2\lambda - 3)x = (2\lambda - 3)\lambda y$, bzw.,

$$0 = ((2\lambda - 3)\lambda - 2)y = (2\lambda^2 - 3\lambda - 2)y.$$ **[2]**

1. Fall: $y = 0$. Dann folgt $x = \lambda y = 0$ im Widerspruch zu $g(x,y) = 0$. Keine Lösung. **[1]**
2. Fall: $2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$, bzw., $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = 2$ oder $= -\frac{1}{2}$. **[1]**
(a) $\lambda = 2$, $x = 2y$. Aus $0 = g(2y, y) = 5y^2 - 5$ folgt $y = \pm 1$. Also sind $P_{1,2} = \pm(2,1)$ zwei Kandidaten für das Maximum mit $f(P_{1,2}) = 10$. **[1]**
(b) $\lambda = -\frac{1}{2}$, $y = -2x$. Aus $0 = g(x, -2x) = 5x^2 - 5$ folgt $x = \pm 1$. Also sind $P_{3,4} = \pm(1, -2)$ zwei weitere Kandidaten für das Maximum mit $f(P_{3,4}) = -\frac{5}{2}$. **[1]**
Wegen $f(2,1) \geq f(P_i)$, $i = 1,2,3,4$, folgt, dass f sein absolutes Maximum 10 in $(2,1)$ annimmt. **[2]**

7. **Vektorfelder** **[8 Punkte]**

(a) Zeigen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, dass

$$\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f \, \nabla \times F.$$

(b) Berechnen Sie $\nabla \times G(x)$ für $x \neq 0$ mit $G(x_1, x_2, x_3) = \|x\|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

LÖSUNG:

(a) komponentenweise gilt

$$(\nabla \times (fF))_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \partial_j (fF_k) = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} (\partial_j f) F_k + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} f (\partial_j F_k) = (\nabla f \times F)_i + f(\nabla \times F)_i,$$

woraus $\nabla \times (fF) = \nabla f \times F + f \, \nabla \times F$ folgt. **[4]**

(b) Es ist $\operatorname{grad} \|x\|^2 = 2x$ und $\operatorname{rot} \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **[2]**

Somit ist **[2]**

$$\operatorname{rot} G(x) = \operatorname{grad} \|x\|^2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2^2 - x_3^2 \\ x_3 - x_1 x_2 \\ x_1 x_3 - x_2 \end{pmatrix}.$$

8. **Separierbare Differentialgleichungen** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$ mit $f(t,x) = te^{t+x}$.

(a) Geben Sie ein erstes Integral (Konstante der Bewegung) für die Differentialgleichung an.

$F(x,t) = -e^{-x} + (1-t)e^t$	**[3]**

(b) Geben Sie eine maximale Lösung $x : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung mit dem Anfangswert $x(0) = 0$ an.

$I =]-\infty, 1[$	**[1]**	$x(t) = \ln \frac{1}{(1-t)e^t}$	**[3]**

(c) Welche Eigenschaften besitzt die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die hinreichend sind für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen obiger Differentialgleichung? **[2]**

- ☐ f ist stetig
- ☐ f ist erstes Integral
- ☒ f ist stetig differenzierbar
- ☐ f ist lipschitzstetig
- ☒ f ist lokal lipschitzstetig

(d) Ist die maximale Lösung des AWP $\dot{x} = f(t,x)$, $x(0) = 0$ eindeutig bestimmt? **[1]**

☒ Ja ☐ Nein

LÖSUNG:

(a) Trennung der Variablen liefert

$$\dot{x}e^{-x} = te^t.$$

Somit ist $F(t,x) = \int e^{-x}dx - \int te^t dt = -e^{-x} - te^t + \int 1 \cdot e^t dt = -e^{-t} + (1-t)e^t$ eine Konstante der Bewegung.

(b) Auflösen der Gleichung $F(t,x) = F(0,x(0)) = 0$ nach x ergibt $x(t) = \ln \frac{1}{(1-t)e^t}$ mit der richtigen Anfangsbedingung. Der Definitionsbereich der maximalen Lösung ist der Bereich, wo das Argument des Logarithmus positiv ist, also für $t \in]-\infty, 1[$.

(c) stetige Differenzierbarkeit und die daraus folgende lokale Lipschitzstetigkeit sind hinreichend für die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Stetigkeit genügt i.A. nicht. f ist weder erstes Integral noch lipschitzstetig.

(d) aus lokaler Eindeutigkeit von Lösungen folgt schon die Eindeutigkeit maximaler Lösungen.

Bewertung

- in den Kästchen ergeben kleine Fehler jeweils einen Punkt Abzug. In (b) werden keine Folgefehler berücksichtigt.
- In (c) gibt es nur 2 Punkte wenn alles richtig ist, sonst gibt es 0.