(2+2+2+4)

Aufgabe 1

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4;\ x \mapsto Ax$, welche (bezüglich der Standardbasis) gegeben ist durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von A lautet $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 \cdot (\lambda - 2)^2$.

a) Geben Sie die Eigenwerte von f und ihre algebraischen Vielfachheiten an.

b) Berechnen Sie die geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von f.

c) Geben Sie eine Jordan-Normalform J von f an.

d) Bestimmen Sie eine zugehörige Jordan-Basis $\mathcal{B}$ zur angegebenen Normalform.

Zu a): Die Eigenwerte von f sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A, also

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 2$$

mit algebraischen Vielfachheiten

$$a_f(0) = 2 \quad \text{und} \quad a_f(2) = 2.$$

Zu b): Es gilt $g_f(\lambda) = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda E_4)$ und wir berechnen

$$A - 0 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad g_f(0) = 1,$$

sowie

$$A - 2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad g_f(2) = 2.$$

Zu c): Zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ haben wir wegen $g_f(0) = 1$ genau einen Block, der wegen $a_f(0) = 2$ die Ausdehung 2 hat. Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ haben wir wegen $g_f(2) = 2$ genau zwei Blöcke, die wegen $a_f(2) = 2$ jeweils die Ausdehnung 1 haben. Es ergibt sich

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu d): Wir bestimmen eine Jordan-Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ zur zweiten angegebenen Jordan-Normalform. Zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ benötigen wir eine Basis des Eigenraumes aus Eigenvektoren (v_1, v_2). Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und erhalten die freien Parameter $\lambda := x_4$ und $\mu := x_3$. Daraus errechnen wir

$$x_2 = x_3 = \mu \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{2x_4 + x_3 - 3x_2}{2} = \lambda - \mu.$$

Es folgt $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und wir wählen $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ ist der Eigenraum nur eindimensional. Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und erhalten den freien Parameter $\lambda := x_4$. Daraus errechnen wir

$$x_3 = x_4 = \lambda \quad \text{und} \quad x_2 = x_3 = \lambda \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{2x_4 - x_3 + x_2}{2} = \lambda.$$

Es folgt, dass zum Beispiel $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Eigenraum zum Eigenwert 0 aufspannt. Den letzten Basisvektor v_4 der Jordan-Basis finden wir durch Lösung der Gleichung $(A - 0 \cdot E_4)v_4 = v_3$. Wir berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und finden zum Beispiel die Lösung $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2+1+2+1+2+2)

Aufgabe 2

Im Euklidischen $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt betrachten wir die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren u, v und w eine Ebene aufspannen. Diese Ebene nennen wir H. Stellen Sie ferner den Vektor w als Linearkombination von u und v dar.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht auf der Ebene H steht.

c) Begründen Sie, warum durch die Vorschriften

$$f(u) := v \quad , \quad f(v) := w \quad \text{und} \quad f(d) := d$$

eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eindeutig definiert ist.

d) Geben Sie die darstellende Matrix $[f]_{\mathcal{B}}$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (u, v, d)$ an.

e) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $[f]_{\mathcal{E}}$ von f bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^3$.

Hilfe: Sie dürfen die Gleichung $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ verwenden.

f) Zeigen Sie, dass f eine Drehung ist (also orthogonal mit $\det(f) = 1$).

Zu a): Wir berechnen

$$\dim(\operatorname{Lin}(u, v, w)) = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \ldots = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Damit spannen u, v, w in der Tat eine Ebene auf. Wir lesen ferner ab, dass $w = -u - v$.

Zu b): Wir berechnen $\langle d|u \rangle = 0$ und $\langle d|v \rangle = 0$, also steht d senkrecht auf H.

Zu c): Die drei Vektoren u, v, d sind linear unabhängig, denn es gilt

$$\operatorname{Rang} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = \operatorname{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Die drei Vektoren u, v, d stellen also eine Basis des $\mathbb{R}^3$ dar und durch die Vorgabe von Werten auf den Elementen einer Basis ist eine lineare Abbildung eindeutig definiert.

Zu d): Wegen $f(u) = v$ und $f(v) = w = -u - v$ und $f(d) = d$ lautet die darstellende Matrix

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zu e): Nach der Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned}
[f]_{\mathcal{E}} &= {}_{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}} \cdot {}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \ldots \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Zu f): Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt $A^t A = E_3$ und $\det(A) = 1$, ist also eine Drehmatrix.

(2+2+2+4)

Aufgabe 3

Es seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^{n\times n}$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Es sei ferner $M \in V$ eine fest gewählte und invertierbare Matrix. Wir betrachten dann die Abbildung

$$f : V \to V;\; f(X) = M^{-1}XM.$$

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Untersuchen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

c) Es sei nun $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $f(X)$ für $X = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -18 & 7 \end{pmatrix}$.

d) Es sei wieder $K = \mathbb{R}$, aber n beliebig und $M \in V$ sei eine orthogonale Matrix. Auf V definiert $\langle X|Y\rangle := \mathrm{Spur}({}^tX \cdot Y)$ ein Skalarprodukt (dies soll nicht gezeigt werden). Rechnen Sie nach, dass für alle $X, Y \in V$ gilt:
$$\langle f(X)|f(Y)\rangle = \langle X|Y\rangle,$$
das heißt, dass f eine orthogonale Abbildung ist.

Zu a): Für alle $X, Y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f(X + \lambda Y) = M^{-1}(X + \lambda Y)M = M^{-1}XM + \lambda M^{-1}YM = f(X) + \lambda f(Y).$$

Damit ist f eine lineare Abbildung.

Zu b): Wegen
$$f(X) = Y \quad\iff\quad M^{-1}XM = Y \quad\iff\quad X = MYM^{-1}$$
ist f sowohl injektiv als auch surjektiv.

Zu c): Wir berechnen

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ -18 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zu d): Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle f(X)|f(Y)\rangle &= \mathrm{Spur}({}^tf(X) \cdot f(Y)) \\
&= \mathrm{Spur}({}^t(M^{-1}XM) \cdot M^{-1}YM) \\
&= \mathrm{Spur}({}^tM \cdot {}^tX \cdot {}^tM^{-1} \cdot M^{-1} \cdot Y \cdot M) \\
&= \mathrm{Spur}(M^{-1} \cdot {}^tX \cdot M \cdot M^{-1} \cdot Y \cdot M) \\
&= \mathrm{Spur}(M^{-1} \cdot {}^tX \cdot Y \cdot M) \\
&= \mathrm{Spur}({}^tX \cdot Y) \\
&= \langle X|Y\rangle.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass M orthogonal ist (${}^tM = M^{-1}$), sowie die Tatsache, dass die Spur invariant unter Konjugation ist ($\mathrm{Spur}(M^{-1}AM) = \mathrm{Spur}(A)$).

Aufgabe 4

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründungen sind in dieser Aufgabe nicht verlangt!

Aussage	wahr	falsch
$\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : a = bc\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.		x
Für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_4$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.	x	
Für jede Gruppe G und alle $a, b \in G$ gilt stets: $(ab)^{-1}b = a^{-1}$.		x
$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle\vert\, x + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum.	x	
Ist $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ linear, so folgt $\dim(\operatorname{Kern}(f)) > \dim(\operatorname{Bild}(f))$.	x	
Für die beiden Untervektorräume $U = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ und $V = \operatorname{Lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}^3$ gilt: $\dim(U \cap V) = 2$		x
Die Bilinearform $\gamma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ \gamma(x,y) = {}^t x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot y$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.		x
$\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} \right)$ ist eine Orthonormalbasis des unitären Vektorraums $\mathbb{C}^3$ mit seinem Standardskalarprodukt.	x	
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ ist normal.	x	
$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ ist orthogonal.		x

Erklärungen zu Aufgabe 4

1. Die Relation $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : a = bc\}$ ist nicht symmetrisch, also keine Äquivalenzrelation.

2. Die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist gerade, denn sie ist das Produkt von zwei Transpositionen (1 und 4 werden vertauscht und 2 und 3 werden vertauscht) es gilt also $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

3. Es gilt $(ab)^{-1}b = b^{-1}a^{-1}b$. In einer abelschen Gruppe könnte man nun a^{-1} mit b vertauschen und das Ergebnis ist a^{-1}. Da aber nicht jede Gruppe abelsch ist, gilt dies nicht in jeder Gruppe und die Aussage ist somit falsch.

4. Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ ist der Kern der linearen Abbildung ${}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \mapsto x + y + z$ und ist somit ein Untervektorraum.

5. Nach der Dimensionsformel gilt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = 5$. Da $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist, gilt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq 2$. Damit ist $\dim(\mathrm{Kern}(f)) \geq 3$ und somit gilt stets $\dim(\mathrm{Kern}(f)) > \dim(\mathrm{Bild}(f))$.

6. Der Schnitt der beiden angegebenen Untervektorräume U und V wird nur von dem einen Vektor ${}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ aufgespannt und es gilt somit $\dim(U \cap V) = 1 \neq 2$.

7. Die Signatur der darstellenden Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist $(1,1)$, die Matrix ist also nicht positiv definit, die Bilinearform γ ist also kein Skalarprodukt.

8. Die Vektoren $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$ sind paarweise orthogonal und haben alle die Länge 1, sie bilden also eine Orthonormalbasis.

9. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ ist symmetrisch, also normal.

10. Die Spaltenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ haben nicht die Länge 1, sind also nicht normiert, die Matrix ist also nicht orthogonal.