Theoretische Physik 1 (Mechanik)
Diplomvorprüfung
SS 2008, Technische Universität München

Mittwoch, 17. September 2008, 10:00–11:30, MW0001, MW2001, MI HS 1

Die Klausur besteht aus **4 Aufgaben**. Die Aufgabenstellung umfasst **4** Seiten.

Es gibt insgesamt **80 Punkte**.

Bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem separaten Blatt!

Bitte geben Sie auf **allen zusätzlichen** Blättern **Ihren Namen** an!

Viel Erfolg!

(Bitte wenden!)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

a) (**3P**) Nennen Sie drei äquivalente Bedingungen dafür, dass ein Kraftfeld konservativ ist.

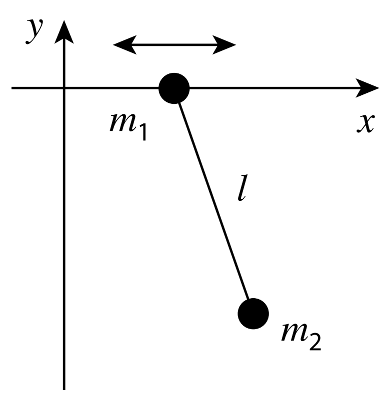
b) (**3P**) Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r})$ für $r \neq 0$.

c) (**3P**) Berechnen Sie das geschlossene Wegintegral entlang eines Kreises in der x-y-Ebene mit dem Radius $r_0 > 0$ und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung. Wie hängt das Ergebnis von r_0 ab? *Hinweis*: Parametrisieren Sie den Integrationsweg mittels ebener Polarkoordinaten.

d) (**1P**) Interpretieren Sie die Ergebnisse aus b) und c): Ist das Kraftfeld konservativ? Gibt es einen Widerspruch zwischen den Ergebnissen aus Teilaufgaben b) und c)?

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Ein ebenes Pendel der Masse m_2 sei im homogenen Schwerefeld $g > 0$ so aufgehängt, dass sich der Aufhängepunkt mit Masse m_1 reibungsfrei entlang einer horizontalen Achse bewegen kann. Der Verbindungsstab der Länge l sei masselos.



a) (**5P**) Wählen Sie geeignete generalisierte Koordinaten und stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf.

b) (**5P**) Leiten Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen ab.

c) (**3P**) Geben Sie die Erhaltungsgrößen des Systems an.

d) (**8P**) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen aus Teilaufgabe b) für kleine Auslenkungen und lösen Sie das sich ergebende System von Differentialgleichungen. Bestimmen Sie explizit die Lösungen für die beiden Grenzfälle $m_1 \to \infty$ und $m_1 \to 0$. *Hinweise*: $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\tan x \approx x$ für $x \ll 1$.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Potential der Form

$$U(r) = -\frac{c}{r^\alpha},$$

wobei gelte $\alpha c > 0$, $\alpha \neq 0$ und $\alpha < 2$.

a) (**2P**) Bestimmen Sie die zugehörige Kraft $\vec{F}(r)$ aus dem Potential $U(r)$.

b) (**3P**) Geben Sie die Definition des Drehimpulses an. Wie lautet der Ausdruck für eine Bewegung in der x-y-Ebene (gegeben durch die Bedingung $\theta = \pi/2$ in Kugelkoordinaten) in ebenen Polarkoordinaten (r, φ)?

c) (**5P**) Stellen Sie die Lagrangefunktion für die Bewegung des Teilchens im Potential auf. Wieviele unabhängige Koordinaten sind zur Beschreibung dieser Bewegung notwendig? Geben Sie eine Begründung, wenn Sie weniger als drei Koordinaten verwenden. Welche Erhaltungsgrößen gibt es?

d) (**3P**) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab. Eliminieren Sie aus der Bewegungsgleichung für r die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ mit Hilfe einer Erhaltungsgröße.

e) (**3P**) Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Dreimpuls, die sich ergibt, wenn sich das Teilchen auf einer stabilen *Kreisbahn* mit festem Radius r_0 bewegt.

f) (**2P**) Zeigen Sie, dass für die Kreisfrequenz ω_0 des Umlaufs auf dieser Bahn gilt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\alpha}{m r_0^{\alpha+2}}}.$$

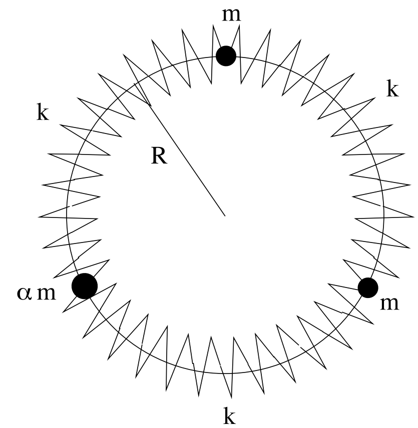
g) (**5P**) Untersuchen Sie nun zusätzlich die Stabilität dieser Kreisbahn. Betrachten Sie dazu kleine Schwingungen um die Kreisbahn in *radialer* Richtung: Wie lautet die Bewegungsgleichung für diese radiale Bewegung im Fall *kleiner* Schwingungen? *Hinweis*: Führen Sie eine Taylorentwicklung bis zum ersten relevanten Term durch. Eine hilfreiche Beziehung ist
$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{1}{2}a(a-1)x^2 + \ldots$ für $|x| < 1$.

h) (**2P**) Bestimmen Sie die Kreisfrequenz ω_R der radialen Schwingung als Funktion von r_0. *Hinweis*: Drücken Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe e) gefundenen Beziehung den Drehimpuls als Funktion von r_0 aus.

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Drei Massenpunkte können sich reibungsfrei auf einem Kreisring mit Radius R bewegen und sind durch drei identische Federn mit Federkonstante k miteinander verbunden (siehe Abb.). Zwei der Massenpunkte haben die gleiche Masse, $m_1 = m_2 = m$, während der dritte die Masse $m_3 = M = \alpha m$, $\alpha > 0$ hat. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) (**6P**) Stellen Sie die Lagrangefunktion für dieses System auf. Verwenden Sie als verallgemeinerte Koordinaten die Winkel φ_i ($i = 1, 2, 3$), die als Auslenkungen aus einer durch gleiche Federspannung bestimmten Lage definiert seien.

b) (**4P**) Stellen Sie daraus die Bewegungsgleichungen für dieses System auf.

c) (**7P**) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen aus den Bewegungsgleichungen.
Hinweis: Die charakteristische Gleichung der aus den Bewegungsgleichungen folgenden Matrix mit den noch zu bestimmenden Größen β und λ kann faktorisiert werden gemäß

$$\det \begin{pmatrix} 2\beta - \lambda & -\beta & -\beta \\ -\beta & 2\beta - \lambda & -\beta \\ -\beta & -\beta & 2\beta - \alpha\lambda \end{pmatrix} = \lambda(3\beta - \lambda)\left[\alpha\lambda - \beta\left(\alpha + 2\right)\right].$$

Volle Punktzahl für die Lösung gibt es nur bei vollständiger Angabe des Rechenweges!

d) (**6P**) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenschwingungen und skizzieren Sie die Schwingungsformen.

e) (**2P**) Welche Symmetrie weist dieses System auf? Welche Erhaltungsgröße gibt es aufgrund dieser Symmetrie? Welche Eigenschwingung ist mit dieser Erhaltungsgröße assoziiert, und wie groß ist die zugehörige Eigenfrequenz?