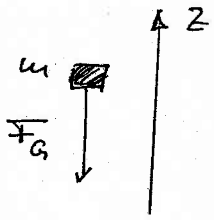
Freier Fall:

$$m\ddot{z} = F_G = -mg$$



$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \ddot{z}(t)\,dt = -g(t-t_0) + v_0$$

$$\ddot{z}(t) = \int_{t_0}^{t} \dot{z}(t) = -g\int_{t_0}^{t} dt\,(t-t_0) + v_0(t-t_0) + z_0$$

$$= -\frac{1}{2}g(t-t_0)^2 + v_0(t-t_0) + z_0$$

Konservatives Kraftfeld:

1. Das Wegintegral über jeden geschlossenen Pfad C verschwindet $\oint_C d\vec{r}\cdot\vec{F} = 0$

   $\Leftrightarrow$ Das Wegintegral $\int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{F}$ ist unabhängig vom gewählten Pfad

2. Die Rotation des Feldes $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$ verschwindet: $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$.

3. Man kann ein Potential $U(\vec{r})$ so bestimmen, daß $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.

Drehimpulserhaltung:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{l} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p}) = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}} \qquad \vec{p} = m\cdot\dot{\vec{r}}$$

$$= \underbrace{m(\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}})}_{0} + \vec{r}\times(m\ddot{\vec{r}})$$

$$= 0 + \vec{r}\times\vec{F}$$

im Zentralpotential: $\vec{F} \propto \vec{r}$

(genauer: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\frac{\partial}{\partial r}U(r)\,\vec{e}_r$

$$\Rightarrow \vec{r}\times\vec{F} = -r\cdot\frac{\partial}{\partial r}U(r)\,\underbrace{\vec{e}_r\times\vec{e}_r}_{0}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{l} = 0$, der Drehimpuls ist im Zentralpotential erhalten

Zusätzlich (konservative Kräfte): Energieerhaltung

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + U(r)$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{mr^2} + U(r)$$

Euler Lagrange $\Leftrightarrow$ Newton

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$V = U(x)$$

1-dimensionale Bewegung

eine generalisierte Koordinate $q = x$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q)$$

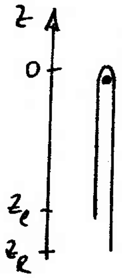
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}$$

Euler Lagrange: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow m\ddot{q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0$

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial}{\partial x}U(x) = F_x \qquad \text{Newton}$$

Rutschendes Seil über Stange



Zwei relevante Koordinaten z_L, z_R

Eine Zwangsbedingung $|z_L| + |z_R| - \ell = 0$

wegen Vorzeichenwahl $z_L + z_R + \ell = 0$

a) generalisierte Koordinate:

$$q = z_R$$
$$z_L = -\ell - q$$

potentielle Energie

links: $$V_L = \sum_{\substack{\text{Seilstücke} \\ \text{links } i}} \Delta m_i g \cdot h_i = \sum_i \Delta z_i \kappa g z_i = \int_{z_L}^{0} dz\, \kappa g z = \frac{1}{2} \kappa g z^2 \Big|_{z_L}^{0} = -\frac{1}{2} \kappa g z_L^2 = -\frac{1}{2} \kappa g (\ell + q)^2$$

ebenso rechts: $$V_R = -\frac{1}{2} \kappa g z_R^2 = -\frac{1}{2} \kappa g q^2$$

gesamt: $$V = V_L + V_R = -\frac{1}{2} \kappa g \left(q^2 + (\ell + q)^2\right)$$

Kinetische Energie:

das gesamte Seil rutscht mit Geschwindigkeit $\dot{z}_R = \dot{q}$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{z}_R^2 = \frac{1}{2} \kappa \ell \dot{q}^2$$

Lagrange Funktion:

$$L = T - V = \underline{\underline{\frac{1}{2} \kappa \ell \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \kappa g \left(q^2 + (\ell + q)^2\right)}}$$

Ableitung der Lagrange Funktion:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = kl\dot q \; ; \; \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = kl\ddot q$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}kg\left(2q + 2(l+q)\right) = 2kg\,q + kgl$$

<u>Euler Lagrange</u>: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

$$\rightarrow \quad kl\ddot q - 2kgq - kgl = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot q - 2\frac{g}{l}q = g}$$

mit $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$ $\qquad \ddot q - \omega^2 q = g$

Vorgegebene Lösung: $q(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \frac{l}{2}$

check: $\dot q(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$

$\ddot q(t) = A\omega^2 e^{\omega t} + B\omega^2 e^{-\omega t} = \omega^2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$

mit dieser Lösung ist also

$$\ddot q - \omega^2 q = \omega^2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) - \omega^2(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} - \tfrac{l}{2}) =$$

$$= \omega^2\frac{l}{2} = \frac{2g}{l}\cdot\frac{l}{2} = g \qquad \square$$

→ Dieses $q(t)$ löst die Differentialgleichung und hat 2 Integrationskonstanten A und B → allgemeine Lösung

---

Einschub: Und wie findet man diese Lösung?

Löse die homogene DGL: $\ddot q - 2\frac{g}{l}q = 0$ $\quad \rightarrow \quad q_H(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

Finde eine spezielle Lsg der inhomogenen DGL $\ddot q - 2\frac{g}{l}q = g$ $\quad \rightarrow \quad q_0(t) = -\frac{l}{2}$

Gesamte Lösung: $q(t) = q_H(t) + q_0(t)$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{\Delta Z_0}{2} e^{\omega t} + \frac{\Delta Z_0}{2} e^{-\omega t} - \frac{\ell}{2}$$

$$= \Delta Z_0 \cosh \omega t - \frac{\ell}{2} \qquad \left(\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

<u>Zeitpunkt an welchem das Seil die Stange verlässt</u>

$$q(t_E) = -\ell$$

$$\Delta Z_0 \cosh \omega t_E - \frac{\ell}{2} = -\ell$$

$$\rightarrow t_E = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arcosh}\left(\frac{-\ell}{2\Delta Z_0}\right)$$

<u>Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt</u>

$$\dot{q}(t_E) = \omega \cdot \Delta Z \sinh \omega t_E = \underline{\underline{\omega \cdot \Delta Z \sinh \operatorname{Arcosh}\left(\frac{-\ell}{2\Delta Z_0}\right)}}$$

$$= \omega \cdot \Delta Z \cdot \sqrt{\frac{\ell^2}{4 \Delta Z_0^2} - 1} = \qquad \operatorname{sh} \operatorname{Ach} x = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{\frac{g\ell}{2} - (\omega \Delta Z)^2}}}$$

Energieerhaltungssatz

Anfangszustand: $V_{pot}^i = V_\ell + V_r = -\frac{1}{2} \kappa g \left((\ell + z_R)^2 + z_R^2\right)$

$T_{kin}^i = 0$

Endzustand: $V_{pot} = \int_{-\ell}^{0} dz \, \kappa g z = -\frac{1}{2} \kappa g \ell^2$

$T_{kin}^i = \frac{1}{2} \kappa \ell \dot{z}_R^2$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \kappa g \left((\ell + z_R)^2 + z_R^2\right) = -\frac{1}{2} \kappa g \ell^2 + \frac{1}{2} \kappa \ell \dot{z}_R^2$$

$$\dot{z}_R = \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left((\ell + z_R)^2 + z_R^2\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left(\left(\frac{\ell}{2} + \Delta z_0\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} - \Delta z_0\right)^2\right)\right)^{1/2}$$

$$= \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2} + 2\Delta Z_0^2\right)\right)^{1/2} = \underline{\underline{\left(\frac{g\ell}{2} - (\omega \Delta Z_0)^2\right)^{1/2}}}$$

- Bestimme Integrationskonstanten:

$$q(0) = A + B - \frac{\ell}{2} \overset{!}{=} z_{R0}$$
$$\dot{q}(0) = A - B = 0 \quad \Rightarrow A = B$$
$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(z_{R0} + \frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{2}\Delta z_0$$

$$\Rightarrow q(t) = \Delta z_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} - \frac{\ell}{2} = \underline{\underline{\Delta z_0 \cosh \omega t - \frac{\ell}{2}}}$$

d) Abgleiten: $q(t_E) = -\ell$

$$\Delta z_0 \cosh \omega t_E - \frac{\ell}{2} = -\ell \quad \Rightarrow \quad t_E = \frac{1}{\omega} \operatorname{Arcosh} \frac{-\ell}{2\Delta z_0}$$

Geschwindigkeit $\dot{q}(t) = \Delta z_0 \omega \sinh \omega t$

$$\dot{q}(t_E) = \Delta z_0 \omega \sinh\left(\operatorname{Arcosh} \frac{-\ell}{2\Delta z_0}\right) =$$
$$= \Delta z_0 \omega \sqrt{\frac{\ell^2}{4\Delta z_0^2} - 1} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{g\ell}{2} - \frac{2g}{\ell}\Delta z_0^2}}}$$

e) Energieerhaltung:

Anfangszustand: $V_{pot}^i = V_L^i + V_R^i = -\frac{1}{2}\kappa g\left(z_{R0}^2 + (\ell + z_{R0})^2\right)$

$T_{kin}^i = 0$

Endzustand: $V_{pot}^E = \int_{-\ell}^{0} dz\, \kappa g z = -\frac{1}{2}\kappa g \ell^2$

$T_{kin}^E = \frac{1}{2}\kappa \ell \dot{z}_R^2$

$$\Rightarrow -\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{\kappa} g\left(z_{R0}^2 + (\ell + z_{R0})^2\right) = -\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{\kappa} g \ell^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{\kappa}\ell \dot{z}_R^2$$

$$\dot{z}_R = \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left((\ell + z_{R0})^2 + z_{R0}^2\right)\right)^{1/2}$$
$$= \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left(\left(\frac{\ell}{2} + \Delta z_0\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} - \Delta z_0\right)^2\right)\right)^{1/2}$$
$$= \left(g\ell - \frac{g}{\ell}\left(\frac{\ell^2}{2} + 2\Delta z_0^2\right)\right)^{1/2} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{g\ell}{2} - \frac{2g}{\ell}\Delta z_0^2}}}$$

siehe oben!

Teilchen im Magnetfeld

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = e\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad \vec{B} = \begin{pmatrix}0\\0\\B_0\end{pmatrix} \qquad B_0 > 0$$

a) $$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{pmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\B_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}v_y B_0\\-v_x B_0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = e\dot{y}B_0 & \text{i)}\\ m\ddot{y} = -e\dot{x}B_0 & \text{ii)}\\ m\ddot{z} = 0 & \text{iii)}\end{cases}$$

Integration Gl i) $m\dot{x} = eyB_0 + v_{x0} = yB_0 + v_0$ ~~$\Rightarrow$ in iii)~~

Integration Gl ii) $m\dot{y} = -exB_0 + v_{y0} = -xB_0$ ~~$\Rightarrow$ in i)~~

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\dot{x} &= \omega y + v_0\\ \dot{y} &= -\omega x\end{aligned}}$$

$\rightarrow$ in ii)

mit $\omega = \frac{eB_0}{m}$

$\rightarrow$ in i)

b) $$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\cancel{e}\omega x B_0\\ m\ddot{y} &= -(\cancel{e}\omega y + v_0)B_0\\ m\ddot{z} &= 0\end{aligned} \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x &= 0\\ \ddot{y} + \omega^2 y + \omega v_0 &= 0\\ \ddot{z} &= 0\end{aligned}}$$

c) ~~$x(t) = A\cdot\cos(\omega t + \phi_0)$~~ ~~$x(0) = A\cdot\cos\phi_0 \overset{!}{=} 0$~~

~~$\dot{x}(0) = -A\omega\sin\phi_0 \overset{!}{=} v_0$~~

$x(t) = A\cdot\cos\omega t + B\cdot\sin\omega t$ $\qquad x(0) = A \overset{!}{=} 0$

$\dot{x}(0) = B\cdot\omega \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow B = v_0/\omega$

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t}}$$

$y(t) = -\frac{v_0}{\omega}(1-\cos\omega t) = \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t - \frac{v_0}{\omega}$

$\dot{y} = -v_0\sin\omega t \qquad \dot{y}(0) = 0$

$\ddot{y} = -v_0\omega\cos\omega t$

in DGL: $-v_0\omega\cos\omega t + \omega^2\left(\frac{v_0}{\omega}\cos\omega t - \frac{v_0}{\omega}\right) + \omega v_0 =$

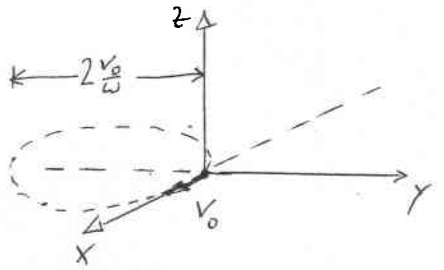
$= -v_0\omega + v_0\omega = 0 \quad \square$

$y(t)$ ist Lösung $\qquad y(0) = 0 \quad \checkmark$

$\ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z}(t) = v_{z0} = 0 \qquad z(t) = z_0 = 0$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \frac{v_0}{\omega}\begin{pmatrix}\sin\omega t\\ \cos\omega t - 1\\ 0\end{pmatrix}$$

d) Die Kurve beschreibt eine Kreisbahn in der (x-y) Ebene



Kreisbahn, verschoben um $-\frac{v_0}{\omega}$ vom Ursprung

Periode T: $\omega T = 2\pi$

$$\underline{\underline{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}}}$$

e) $v_z(t=0) \neq 0 \Rightarrow$ $v_z = \text{const} = v_{z0}$

$z(t) = v_{z0} \cdot t$ gleichförmige Bewegung in z-Richtung, kein Einfluß auf (x-y) Bewegung $\rightarrow$ Schraubenlinie.

f) Verrichtete Arbeit

$$W = \int_1^2 d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} dt \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} eB =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \, (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})\, eB = 0$$

oder $m\dot{\vec{v}} = e\, \vec{v} \times \vec{B}$ $\quad | \cdot \vec{v}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \vec{v}^{\,2}\right) = e \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{0}$$

$\rightarrow$ Kinetische Energie (totale Energie!) ist erhalten.

K8