....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

25. Februar 2014, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Volumenberechnung** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$.

2. **Transformationsformel** **[13 Punkte]**

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^+)^2$ gegeben durch $\Phi(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$.

(a) Geben Sie die Jacobi-Determinante von Φ auf $(\mathbb{R}^+)^2$ an:

$\det J_\Phi(u, v) =$

(b) Wie lautet die Umkehrabbildung von Φ auf $(\mathbb{R}^+)^2$?

$\Phi^{-1}(x, y) =$

(c) Skizzieren Sie die Menge $M := \Phi([0, 1]^2)$.

(d) Wie lautet die Transformationsformel für das Integral einer stetigen Funktion $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ über die Menge $M \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$ mit der Transformation Φ?

(e) Geben Sie den Wert von $\int\limits_M f(x)\mathrm{d}^2x$ für $f(x, y) = \ln(\frac{y}{x})$ an.

$$\int\limits_M f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

3. **Oberflächenintegrale** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 + 2u \\ 2uv \\ v^2 + 2v \end{pmatrix}$.

(a) Für welche Werte von u und v ist $\Phi'(u,v)$ surjektiv?

Für $(u,v) \in$

(b) Geben Sie für $(u,v) \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils eine Basis des Tangential- und des Normalraums für das Flächenstück $M := \Phi(B_1(0))$ im Punkt $\Phi(u,v)$ an.

$T_{\Phi(u,v)}M = \operatorname{span}\Big(\qquad \Big)$	$N_{\Phi(u,v)}M = \operatorname{span}\Big(\qquad \Big)$

(c) Sei nun $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1–Vektorfeld mit $\operatorname{rot} F(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$. Begründen Sie, warum das Wegintegral von F entlang der Randlinie von M gleich Null ist.

4. **Komplexe Kurvenintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z,\ (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 1)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge G

(b) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂G durch zwei Kurvenstücke an.

$\gamma_1(t) =$	$\gamma_2(t) =$

(c) Berechnen Sie (mit kurzer Begründung) den Wert des Integrals $\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{6z-3-2i} \mathrm{d}z$.

$\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{6z-3-2i} \mathrm{d}z =$

5. **Residuen** **[9 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{\tan z}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) f hat bei $z = 0$

☐ keine Singularität, ☐ eine hebbare Singularität, ☐ einen Pol erster Ordnung,
☐ einen Pol höherer Ordnung, ☐ eine wesentliche Singularität.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = \frac{\pi}{2}$.

$\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(f) =$

(c) Wie lautet der Hauptteil $H_{f,\frac{\pi}{2}}(z)$ der Laurententwicklung von f in einer Umgebung von $z = \frac{\pi}{2}$?

$H_{f,\frac{\pi}{2}}(z) =$

(d) Welchen Konvergenzbereich $B \subset \mathbb{C}$ hat die Laurentreihenentwicklung von f im Entwicklungspunkt $z = \frac{\pi}{2}$?

$B =$

(e) Welchen Wert hat das komplexe Wegintegral $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2 + 2e^{-it}$?

$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z =$

6. **Residuenkalkül** **[11 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{z}{z^2+c^2}$ mit $c > 0$.

(a) Wo in der komplexen Ebene verläuft der Hilfsweg zur Berechnung des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x$?

☐ In der rechten Halbebene. ☐ In der oberen Halbebene.

☐ In der linken Halbebene. ☐ In der unteren Halbebene.

(b) Welchen Wert hat das Integral $I_1 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x$?

$I_1 =$

(c) Welchen Wert hat das Integral $I_2 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x$?

$I_2 =$

(d) Berechnen Sie nun das Integral $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+c^2}\mathrm{d}x$.

7. **Fouriertransformation** **[10 Punkte]**

(a) Wie wurde in der Vorlesung die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiert?

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Gauß-Kurve $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$?

(c) Beweisen Sie, dass die Faltung $f_1 * f_2$ zweier Gauß-Kurven, $f_j(x) = \exp(-\frac{x^2}{2t_j})$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, wieder eine Gauß-Kurve ist.

(d) Sei nun $h := f_1 * f_2$.

(i) Welche Aussagen gelten für h?

☐ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ h ist stetig, ☐ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$?

☐ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h}$ ist stetig, ☐ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☐ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

8. **Hilbertraum** **[8 Punkte]**

In der gesamten Aufgabe ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge von Vektoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(a) Zeigen Sie, dass b_n für $n \to \infty$ keinen Grenzwert haben kann.

(b) Geben Sie mindestens eine der vier in der Vorlesung behandelten Charakterisierungen dafür an, dass $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB (orthonormale Basis) von $\mathcal{H}$ ist.

(c) Geben Sie explizit ein Beispiel für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine orthonormale Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die **keine** ONB von $\mathcal{H}$ ist und beweisen dies mit Hilfe von (b).