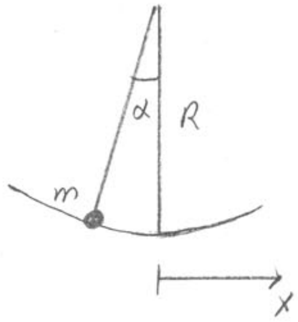
Musterlösung Probeklausur

1. Bewegung im Zylinder



rücktreibende Kraft:

$$F_R = -F_G \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{\approx \tan\alpha = \frac{x}{R} \text{ für } \alpha \ll 1} \approx -mg\frac{x}{R}$$

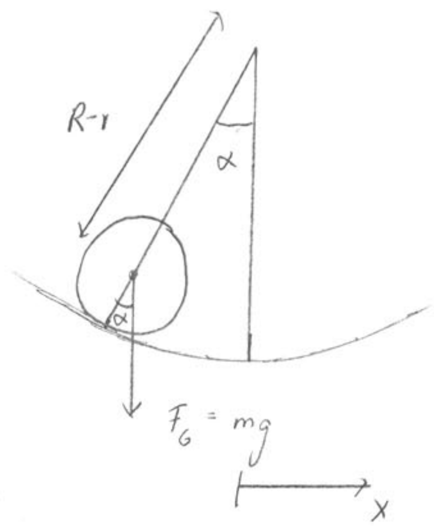
("−" wegen Kraft entgegen der Auslenkung)

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -mg\frac{x}{R}$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega^2} x = 0$$

$\Rightarrow$ Eigenfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$

2. Bewegung in Zylinder 2



Idee: an jedem Punkt der Rollbewegung findet eine Drehung um den Auflagepunkt statt.

Trägheitsmoment: mit Satz von Steiner

$$J = mr^2 + J_s = mr^2 + \frac{2}{5}mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$$

Drehmoment:
$$M = -F_G \cdot r \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{\approx \tan\alpha = \frac{x}{R-r} \text{ für } \alpha \ll 1} \approx -F_G \cdot r \cdot \frac{x}{R-r} = -mgr\,\frac{x}{R-r}$$

Aus der Bewegungsgleichung $J\ddot{\varphi} = M$ erhält man mit $\ddot{x} = \ddot{\varphi} r$:

$$J\,\frac{\ddot{x}}{r} = -mgr\,\frac{x}{R-r}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{5}mr\ddot{x} = -mgr\,\frac{x}{R-r}$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{5g}{7(R-r)}}_{\omega^2}x = 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenfrequenz: } \omega = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

3. 2003 - Odyssee im Weltraum

Strategie: nehme beliebigen Massenpunkt m

1. Messung: Eigenfrequenz der Schwingung an der Feder

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad \Rightarrow \quad m \text{ bekannt}$$

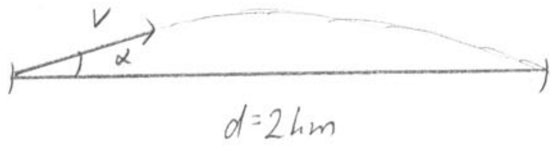
2. Messung: Auslenkung der Feder durch Gravitationskraft mg^* auf diesem Planeten

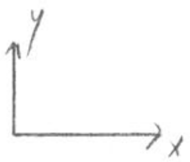
$$mg^* = D\,\Delta x \quad \Rightarrow \quad g^*$$

Es gilt: $g^* = \gamma \frac{M}{R^2}$ mit M, R Masse und Radius des Planeten

$$\Rightarrow \quad M = \frac{R^2 g^*}{\gamma}$$

4. Zielschiessen





Es gilt: $v_x = v\cos\alpha = \text{const}$

$v_y = v\sin\alpha - gt$

Beim Einschlag zur Zeit t_I gilt $v_y = -v\sin\alpha$ (Symmetrie der Bahn)

$\Rightarrow \quad v_y(t_I) = v\sin\alpha - gt_I = -v\sin\alpha$

$gt_I = 2v\sin\alpha$

aus Bewegung in x-Richtung: $d = v\cos\alpha \, t_I$

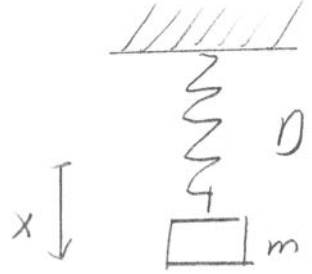
$$\Rightarrow \quad \frac{gd}{v\cos\alpha} = 2v\sin\alpha$$

$$\frac{gd}{v^2} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{dg}{v_0^2} \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \cancel{1{,}12}^{\circ} \; 0{,}56^{\circ}$$

(die zweite Lösung $\alpha = \cancel{88{,}88}^{\circ}$ $89{,}44^{\circ}$ ist wenig realistisch)

5. Gedämpftes Pendel



wirkende Kräfte:

(i) Federkraft : $F_F = -Dx$

(ii) Stokesreibung : $F_S = -6\pi\eta r\dot{x}$

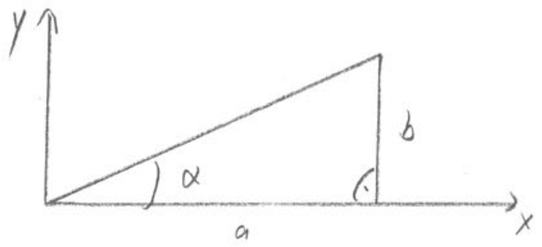
(r Radius der Kugel)

(iii) Newtonreibung: $F_N = -\frac{1}{2} c_w \rho A \dot{x}^2 \cdot \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$

(ρ: Dichte der Luft, A Querschnittsfläche
c_w: Luftwiderstandsbeiwert)

$\Rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = -Dx - 6\pi\eta r\dot{x} - \frac{1}{2} c_w \rho A \dot{x}^2 \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|}$.

6. Schwerpunkt



Es gilt: $\tan\alpha = \frac{b}{a}$

Gesamtmasse: $M = \frac{ab}{2}\rho$

Schwerpunkt: $$\vec{R}_s = \int_0^a \int_0^{x\tan\alpha} \rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dy\, dx =$$

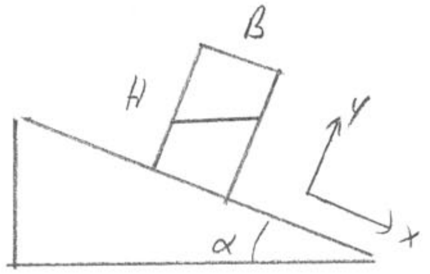
$$= \frac{\rho}{M} \int_0^a \begin{pmatrix} [xy]_0^{x\tan\alpha} \\ [\frac{1}{2}y^2]_0^{x\tan\alpha} \end{pmatrix} dx = \frac{\rho}{M} \int_0^a \begin{pmatrix} x^2\tan\alpha \\ \frac{1}{2}x^2\tan^2\alpha \end{pmatrix} dx =$$

$$= \frac{\rho}{M} \begin{pmatrix} [\frac{1}{3}x^3\tan\alpha]_0^a \\ [\frac{1}{6}x^3\tan^2\alpha]_0^a \end{pmatrix} = \frac{\rho}{M} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a^3\tan\alpha \\ \frac{1}{6}a^3\tan^2\alpha \end{pmatrix} = \leftarrow a\tan\alpha = b$$

$$= \frac{\rho}{M} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}a^2 b \\ \frac{1}{6}ab^2 \end{pmatrix} \underset{M = \frac{\rho ab}{2}}{=} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{1}{3}b \end{pmatrix}$$

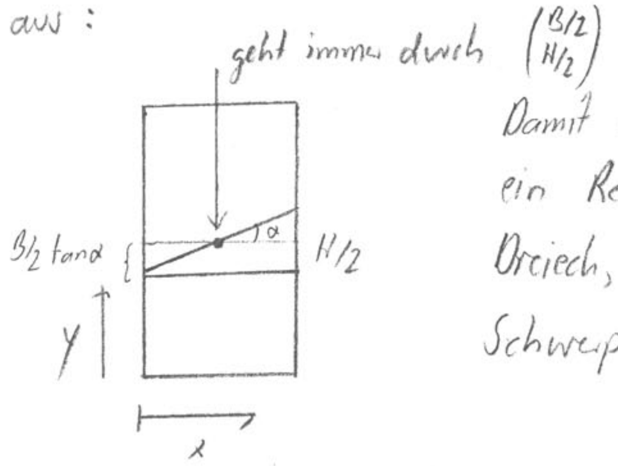
7. Tetra-Pak

Das Problem wird in 2 Dimensionen betrachtet (dritte ist hier egal)



im Folgenden sei immer
$\tan\alpha < \frac{H}{B}$
(sonst läuft das Wasser nur in eine Ecke)

In dem so definierten Koordinatensystem sieht der Tetra-Pak wie folgt aus:



Damit reduziert man das Problem auf ein Rechteck und ein rechtwinkliges Dreieck, für die man jeweils den Schwerpunkt kennt.

Rechteck: Schwerpunkt bei: $\vec{R_\square} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} B \\ \frac{1}{4}(H - B\tan\alpha) \end{pmatrix}$ Fläche: $A_\square = B \cdot \frac{1}{2}(H - B\tan\alpha)$

Dreieck: Schwerpunkt bei $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} B \\ \underbrace{\frac{1}{2}H - \frac{1}{2}B\tan\alpha}_{\text{Unterseite}} + \underbrace{\frac{1}{3}B\tan\alpha}_{\frac{1}{3}\text{ Höhe}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} B \\ \frac{1}{2}H - \frac{1}{6}B\tan\alpha \end{pmatrix}}_{= \vec{R_\Delta}}$

Fläche: $\frac{1}{2} B^2 \tan\alpha = A_\Delta$

Gesamtfläche: $A_{Ges} = A_\square + A_\Delta = \frac{1}{2} HB$

Damit ergibt sich der Gesamtschwerpunkt als gewichteter Mittelwert der Schwerpunkte von Rechteck und Dreieck.

(für $m = 0$!)

$$\vec{R_S} = \frac{1}{A_{Ges}} \left(\vec{R_\Pi} A_\Pi + \vec{R_\Delta} A_\Delta \right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} HB} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} B \cdot \frac{1}{2} B (H - B\tan\alpha) \\ \frac{1}{8} B (H - B\tan\alpha)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} B^3 \tan\alpha \\ \frac{1}{2} B^2 \tan\alpha \left(\frac{1}{2} H - \frac{1}{6} B\tan\alpha\right) \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} HB} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} B^2 H + \frac{1}{12} B^3 \tan\alpha \\ \frac{1}{8} BH^2 + \frac{1}{24} B^3 \tan^2\alpha \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} B + \frac{1}{6} \frac{B^2}{H} \tan\alpha \\ \frac{1}{4} H + \frac{1}{12} \frac{B^2}{H} \tan^2\alpha \end{pmatrix}$$

(für $m \neq 0$ müßte man nochmal das gewichtete Mittel berechnen)

$K = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Tetra-Pak kippt nun wenn der Schwerpunkt in der Angabe rechts vom Punkt K liegt, d.h. hier, wenn $\beta < \alpha$ ist.

Grenzfall : $\beta = \alpha$ $\qquad \tan\beta = \tan\alpha$

$$\tan\beta = \frac{\frac{1}{2} B - \frac{1}{6} \frac{B^2}{H} \tan\alpha}{\frac{1}{4} H + \frac{1}{12} \frac{B^2}{H} \tan^2\alpha} \overset{!}{=} \tan\alpha$$

$\Rightarrow$ führt zu Gleichung 3. Ordnung in $\tan\alpha$ und ist nicht so ohne weiteres zu lösen

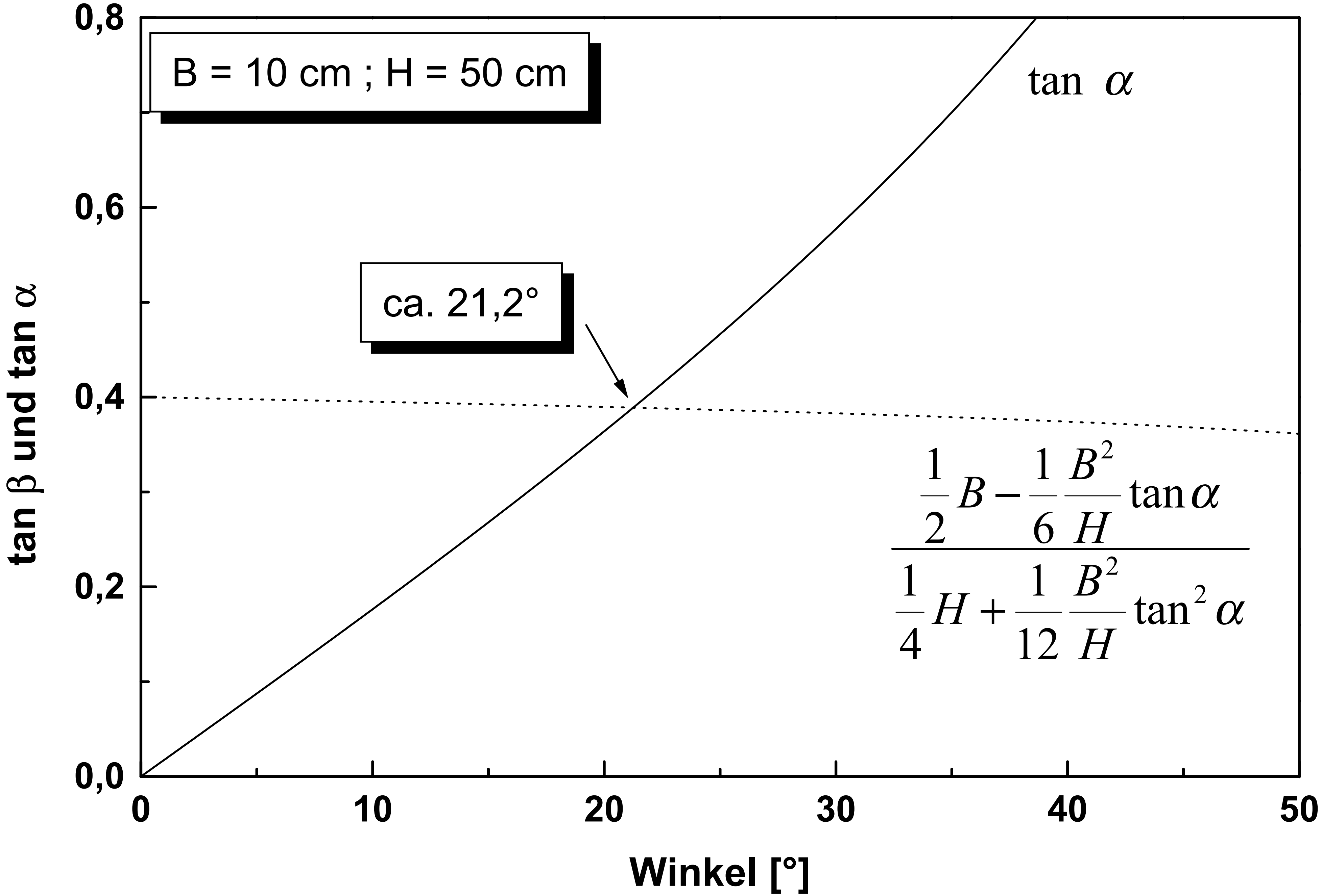
---

Wann beginnt der Körper zu gleiten:

Grenzfall: Hangabtriebskraft = Reibungskraft

$= m \cdot g \cdot \sin\alpha \qquad = \mu \cdot F_{Normal} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$

$\Rightarrow \mu = \tan\alpha \qquad \Rightarrow \alpha = 14{,}04°$



B = 10 cm ; H = 50 cm
tan α
ca. 21,2°
$\dfrac{\frac{1}{2}B-\frac{1}{6}\frac{B^2}{H}\tan\alpha}{\frac{1}{4}H+\frac{1}{12}\frac{B^2}{H}\tan^2\alpha}$
tan β und tan α
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
0
10
20
30
40
50
Winkel [°]