2. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2018/19
15. Januar 2019

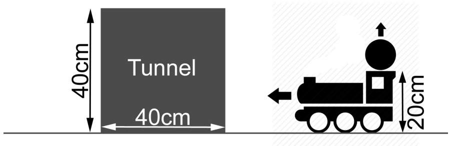
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sheldon Cooper ist seit jeher von Zügen begeistert. In seiner Kindheit baute er einen Aufsatz für seine Spielzeugeisenbahn (Höhe $h_0 = 20\text{cm}$), welche einen kleinen Ball während der Fahrt mit der Geschwindigkeit $v_{Ball} = 4,5 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht nach oben schießt. Eine klassische Spielzeugeisenbahn hat eine Geschwindigkeit von $v_{Zug} = 0,6 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



(a) Wie weit hat sich der Zug horizontal fortbewegt, wenn der Ball wieder auf ihm landet?

Jetzt wird ein 40 cm langer und 40 cm hoher Tunnel auf die Gleise gestellt (siehe Abbildung) und das gleiche Experiment wiederholt.

(b) In welchem Bereich (zwei Werte) vor dem Tunnel muss der Ball abgeschossen werden, damit er hinter dem Tunnel auf der Eisenbahn landet?

(c) Wie langsam darf der Zug höchstens fahren, damit der Ball genau noch über den Tunnel fliegt?

Lösung

(a) Die Geschwindigkeit v_B und die Position r_B des Balls sind gegeben durch

$$v_B(t) = \begin{pmatrix} v_{Zug} \\ v_{Ball} - gt \end{pmatrix}, \quad r_B(t) = \begin{pmatrix} v_{Zug} \cdot t \\ h_0 + v_{Ball}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

[2]

wobei v_{Zug} die Geschwindigkeit des Zugs und v_{Ball} die senkrechte Geschwindigkeit des Balls ist. Wir benötigen den Zeitpunkt t_1, zu dem sich der Ball wieder auf der Höhe h_0 des Zuges befindet.

$$h_0 = h_0 + v_B t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad t_1 \neq 0 \Rightarrow t_1 = \frac{2v_B}{g} = 0,917\text{s}$$

$$\Rightarrow s_{Zug}(t_1) = v_{Zug} t_1 = 0,55\text{m}$$

[2]

(b) Damit der Ball hinter dem 40 cm hohen Tunnel auf der Eisenbahn landet muss gelten:

$$r_{By} = 40 \text{ cm} \overset{!}{=} h_0 + v_{Ball} t' - \frac{1}{2} g \cdot t'^2 \quad \Leftrightarrow \quad t'^2 + (40 \text{ cm} - h_0)\frac{2}{g} - \frac{2v_{Ball}}{g} t' = 0 \tag{2}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung in t' (Flugzeit des Balles) mit den Lösungen

$$t' = \frac{v_{Ball}}{g} \pm \sqrt{\frac{v_{Ball}^2}{g^2} - (40 \text{ cm} - h_0)\frac{2}{g}} \tag{3}$$

[2]

Der minimale Abstand vor dem Tunnel beträgt damit

$$x_{min} = v_{Zug} \cdot t'_- = 2,82 \text{ cm} \tag{4}$$

und der maximale Abstand vor dem Tunnel

$$x_{max} = v_{Zug} \cdot t'_+ - L_{Tunnel} = 12,2 \text{ cm} \tag{5}$$

[2]

(c) Da t' unabhänig von v_Z ist entspricht $\Delta t' \cdot v_{Zug,min}$ der Länge des Tunnels:

$$(t'_+ - t'_-) \cdot v_{Zug,min} = L_{Tunnel} \tag{6}$$

also

$$v_{Zug,min} = \frac{L_{Tunnel}}{t'_+ - t'_-} = 0,486 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{7}$$

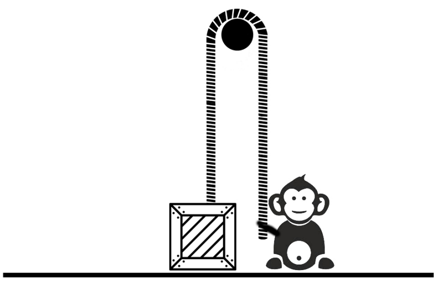
[2]

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Ein Affe der Masse $m = 10$ kg klettert ein Seil hinauf, das reibungslos über einen Ast läuft und an einer auf dem Boden stehenden Kiste der Masse $M = 15$ kg befestigt ist.

(a) Bestimmen Sie die Beschleunigung, die der Affe beim Klettern mindestens erreichen muss, damit die Kiste vom Boden angehoben wird.

(b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung der angehobenen Kiste (Starthöhe h_0), wenn der Affe zu klettern aufhört und sich am Seil festhält. Ermitteln Sie außerdem die Zugspannung (Kraft) im Seil.



Lösung

(a) Bei der minimalen Beschleunigung des Affen muss ein Kräftegleichgewicht auf das Seil mit der Normalkraft auf die Kiste $F_N = 0$ N herrschen, also

$$F_{a_A} + F_{g_A} = F_{g_K} \tag{8}$$

$$m \cdot a + m \cdot g = M \cdot g \tag{9}$$

$$a = \frac{(M-m) \cdot g}{m} = 4{,}91\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{10}$$

[3]

(b) Die beschriebene Situation entspricht dem Prinzip einer Atwoodschen Fallmaschine.

Kräfte auf den Affen: $F_A = m \cdot g - T = m \cdot a_A$

Kräfte auf die Kiste: $F_K = M \cdot g - T = M \cdot a_K$

Da das Seil eine konstante Länge hat gilt außerdem: $a_A = -a_K$

[3]

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$T = m \cdot g + m \cdot a_K = M \cdot g - M \cdot a_K \tag{11}$$

$$a_K = \frac{M-m}{M+m} \cdot g = 1{,}96\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{12}$$

[1]

Die Kiste bewegt sich also gleichmäßig beschleunigt gemäß folgender Gleichung nach unten:

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_K \cdot t^2 - h_0 = 0{,}98 \cdot t^2 - h_0 \tag{13}$$

[1]

Für die Zugspannung im Seil gilt:

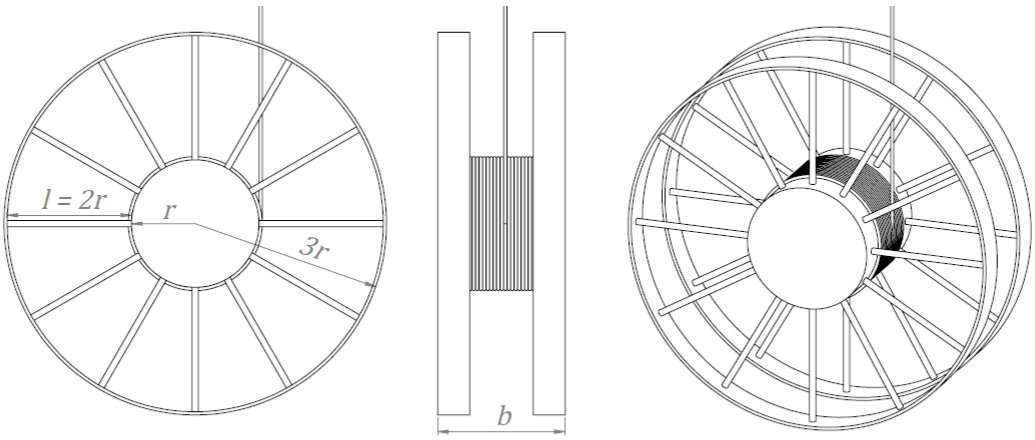
$$T = m \cdot g + m \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right) \cdot g \tag{14}$$

$$= 2 \cdot \frac{M \cdot m}{M+m} \cdot g = 117{,}72\ \mathrm{N} \tag{15}$$

[1]

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Ein Jojo besteht aus einem Vollzylinder (Radius r, Breite b und Masse $8m_0$) und zwei Seitenrädern. Die Seitenräder bestehen jeweils aus 12 Speichen (jeweils Länge $l_0 = 2r$, Masse m_0, $J = \frac{1}{12}ml^2$) und einem Ring welcher die Masse $4m_0$ und den Radius $R = 3r$ hat.



(a) Berechnen Sie das Trägheitsmoment J_0 der Anordnung bezüglich der Rotationsachse des Jojos.

(b) Um den mittleren Zylinder wird ein Faden gewickelt und das Jo-Jo losgelassen. Berechnen Sie die Schwerpunktsbeschleunigung a_{SP} des JoJos.

(c) Berechnen Sie die Zeit, bis das Jojo an seinen Ursprungsort zurückgekehrt ist.

Lösung

(a) Das Gesamtträgheitsmoment ist die Summe aus den Einzelträgheitsmomenten:

$$J_0 = J_{\text{Nabe}} + 2J_{\text{Felge}} + 24J_{\text{Speiche}} \tag{16}$$

Die einzelnen Trägheitsmomente sind:

$$J_{\text{Nabe}} = \frac{1}{2}m_{\text{Nabe}}r_{\text{Nabe}}^2 = \frac{1}{2}8m_0r^2 = 4m_0r^2 \tag{17}$$

$$J_{\text{Felge}} = m_{\text{Felge}}r_{\text{Felge}}^2 = 4m_0(3r)^2 = 36m_0r^2 \tag{18}$$

$$J_{\text{Speiche}} = \frac{1}{12}m_{\text{Speiche}}l_{\text{Speiche}}^2 + m_{\text{Speiche}}\left(\frac{l_{\text{Speiche}}}{2} + r_{\text{Nabe}}\right)^2 \tag{19}$$

$$= \frac{1}{12}m_0(2r)^2 + m_0(2r)^2 = \frac{13}{3}m_0r^2 \tag{20}$$

[4]

Bei dem Trägheitsmoment der Speiche wurde der Satz von Steiner ausgenutzt, da sich die Speiche um den Nabenmittelpunkt dreht.
Damit ergibt sich das Gesamtträgheitsmoment zu

$$J_0 = 4m_0r^2 + 2 \cdot 36m_0r^2 + 24 \cdot \frac{13}{3}m_0r^2 = 180m_0r^2 \tag{21}$$

[1]

(b) Die Gesamtenergie des Systems beträgt

$$E = E_{pot} + E_{kin} + E_{rot} \tag{22}$$

[1]

Die Gesamtmasse des Jo-Jos ist:

$$m_{ges} = m_{\text{Nabe}} + 2m_{\text{Felge}} + 24m_{\text{Speiche}} = (8 + 2 \cdot 4 + 24)m_0 = 40m_0 \tag{23}$$

[1]

Damit sind die Energien gegeben:

$$E_{pot} = m_{ges}gh = 40m_0gh \tag{24}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_{ges}v^2 = 20m_0v^2 \tag{25}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J_0\omega^2 = 90m_0r^2\omega^2 \tag{26}$$

Da sich der Faden des Jo-Jos von der Nabe abrollt, gilt folgender Zusammenhang.

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{27}$$

[1]

und somit ist die Gesamtenergie gegeben durch

$$E = 40m_0gh + 20m_0v^2 + 90m_0v^2 = 40m_0gh + 110m_0v^2 \tag{28}$$

[1]

Da von außen keine Kraft wirkt, ist die Energie konstant ($\frac{dE}{dt} = 0$)und wegen $\frac{dh}{dt} = v$ und $\frac{dv}{dt} = a_{SP}$:

$$0 = 40m_0gv + 220m_0va_{SP} \tag{29}$$

Damit ist

$$a_{SP} = -\frac{2}{11}g \tag{30}$$

[2]

Anmerkung:
Die Beschleunigung ist also geringer als im freien Fall, da die frei werdende potentielle Energie nicht nur in Bewegungs- sondern auch in Rotationsenergie umgewandelt werden muss. Die resultierende Schwerpunktsbeschleunigung a_{SP} hängt weder von der Gesamtmasse des Jo-Jos, noch von seinen Ausmaßen (weder m_0 noch r tauchen in der Formel auf)

ab, sondern ist ausschließlich durch die Geometrie des Jo-Jos gegeben.

Alternativweg: Die Gesamtmasse des Jo-Jos ist:

$$m_{ges} = m_{\text{Nabe}} + 2m_{\text{Felge}} + 24m_{\text{Speiche}} = (8 + 2 \cdot 4 + 24)m_0 = 40m_0 \tag{31}$$

Das Trägheitsmoment um den Berührpunkt des Seiles ist:

$$J_{Ges} = J_0 + m_{Ges}r^2 = 180m_0r^2 + 40m_0r^2 = 220m_0r^2 \tag{32}$$

Das Drehmoment um diesen Punkt ist:

$$\vec{D} = \vec{r} \times M\vec{g} = r^2Mg \tag{33}$$

Da sich der Faden des Jo-Jos von der Nabe abrollt, gilt folgender Zusammenhang.

$$\omega = \frac{v}{r} \tag{34}$$

Damit ist die Beschleunigung des Schwerpunktes:

$$a_{Sp} = \dot{v_{Sp}} = r\dot{\omega} = r\frac{D}{J_{Ges}} = \frac{r^2 40m_0g}{220m_0r^2} = \frac{2}{11}g \tag{35}$$

(c) Die Länge der Schnur sei L. Da die Beschleunigung konstant ist, gilt:

$$h(t) = \frac{1}{2}a_{SP}t^2 = -\frac{1}{11}gt^2 \tag{36}$$

Das Ende der Schnur ist erreicht, wenn $h(t_{\text{unten}}) = -L$. Damit ist

$$t_{\text{unten}} = \sqrt{\frac{11L}{t}} \tag{37}$$

Das Zurückkommen dauert ebenso lang. Damit ist:

$$T_{ges} = 2t_{\text{unten}} = \sqrt{\frac{44L}{g}} \tag{38}$$

[3]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Die Mittelpunkte zweier Kugeln mit Radius r und Masse m befinden sich im Weltall in Ruhe in einem Abstand d, fernab dem Einfluss anderer gravitativer Kräfte.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit prallen die Kugeln aufeinander?

(b) Berechnen Sie den Zahlenwert für $r = 2,5$ cm, $m = 1$ kg und $d = 10$ m.

(c) Wie groß ist die Geschwindigkeit für $r = 1740$ km, $m = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg und $d = 380000$ km?

Hinweis: Die Gravitationskonstante beträgt $G = 6,6708 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{m}^3}{\text{kgs}^2}$

Lösung

(a) Das Gravitationspotential für zwei gleiche Massen m beträgt

$$V(r) = -\frac{Gm^2}{r_{12}} \tag{39}$$

[1]

Zu Beginn ist der Abstand zwischen den Kugeln $r_{12} = d$, beim Aufprall $r_{12} = 2r$. Die frei werdende potentielle Energie ist damit

$$\Delta E_{pot} = Gm^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d} \right) \tag{40}$$

[1]

Alternativ:

$$F_G = G\frac{mm}{r^2} \tag{41}$$

Die frei werdende potentielle Energie ΔE_{pot}

$$\Delta E_{pot} = -\int_a^{2r} F dr = -\int_a^{2r} G\frac{mm}{r^2} dr = \left[G\frac{mm}{r^2} \right]_d^{2r} = Gm^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d} \right) \tag{42}$$

Diese wird in kinetische Energie umgewandelt. Aufgrund der Impulserhaltung muss gelten $v_1 = -v_2 = v$ und damit:

$$E_{kin} = 2\left(\frac{m}{2} v^2 \right) \tag{43}$$

[1]

Da die Massen anfangs in Ruhe waren gilt $\Delta E_{pot} = E_{kin}$:

$$Gm^2 \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{d} \right) = mv^2 \tag{44}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{Gm \left(\frac{1}{2d} - \frac{1}{d} \right)} \tag{45}$$

hierbei ist v die Geschwindigkeit eines Körpers. Der Aufprall geschieht daher mit einer Geschwindigkeit von $2v$.

[2]

(b) Mit $G = 6,6708 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ ergibt sich:

$$v = \sqrt{6,6708 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{0,05} - \frac{1}{10} \right) \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 3,6 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{46}$$

Der Aufprall erfolgt mit der Relativgeschwindigkeit $7,3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

[1]

(c)

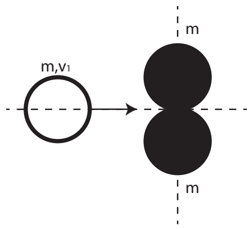
$$v = \sqrt{6,6708 \cdot 10^{-11} \cdot 7,35 \cdot 10^{22} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 1740000} - \frac{1}{380000000}\right) \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 1182 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{47}$$

Der Aufprall erfolgt mit der Relativgeschwindigkeit 2362 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

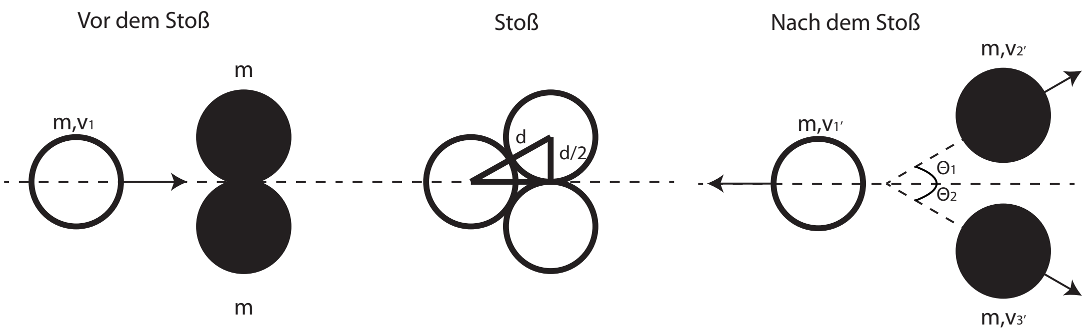
[1]

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Eine weiße Billardkugel bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_1 = 1\mathrm{m/s}$ genau auf den Mittelpunkt von zwei ruhenden schwarzen Billardkugeln zu. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten (Betrag und Richtung) der drei Kugeln nach dem Zusammentreffen. *Hinweis:* Die Billardkugeln sind alle drei gleich groß und haben die gleiche Masse



Lösung



Wir betrachten zunächst die Impulserhaltung in der Richtung senkrecht zur Anfangsgeschwindigkeit v_1 von der weißen Kugel.

$$\begin{aligned} p_{\perp,\mathrm{vorher}} &= p_{\perp,\mathrm{nachher}} \\ 0 &= m v_{2'} \sin\theta_1 - m v_{3'} \sin\theta_2 \end{aligned}$$

[1]

Aus Symmetriegründen gilt $v_{2'} = v_{3'}$. Daraus folgt: $\Longrightarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta$.

[1]

Da alle Kugeln gleich groß sind kann man den Winkel ausrechnen:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\frac{d}{2}}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

[1]

Wegen der Impulserhaltung parallel zur der Bewegungsrichtung von der weißen Kugel gilt:

$$\begin{aligned} p_{\parallel,\mathrm{vorher}} &= p_{\parallel,\mathrm{nachher}} \\ m\,v_1 &= m\,v_{1'} + 2\,m\,v_{2'}\cos\theta \end{aligned}$$

[1]

Wir eliminieren m und erhalten

$$v_1 = v_{1'} + 2\,v_{2'}\cos\theta \tag{48}$$

Das es sich um einen elastischen Stoß handelt, gilt außerdem die Energieerhaltung.

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{kin,vorher}} &= E_{\mathrm{kin,nachher}} \\ \frac{1}{2}\,m\,v_1^2 &= \frac{1}{2}\,m\,v_{1'}^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\,m\,v_{2'}^2\right) \\ v_1^2 &= v_{1'}^2 + 2\,v_{2'}^2 \qquad (49) \end{aligned}$$

[1]

Aus Gleichung (**??**) erhalten wir:

$$v_{1'} = v_1 - 2\,v_{2'}\,\cos\theta \tag{50}$$

eingesetzt in (**??**) ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_1^2 &= (v_1 - 2\,v_{2'}\,\cos\theta)^2 + 2\,v_{2'}^2 \\ v_1^2 &= v_1^2 - 4\,v_1\,v_{2'}\,\cos\theta + 4\,v_{2'}^2\,\cos^2\theta + 2\,v_{2'}^2 \\ 0 &= 2\,v_{2'}\cdot\left[v_{2'}\cdot\left(1 + 2\,\cos^2\theta\right) - 2\,v_1\,\cos\theta\right] \\ &\iff \\ [v_{2'} = 0] \quad &\vee \quad v_{2'} = v_1\cdot\frac{2\,\cos\theta}{1 + 2\,\cos^2\theta} \end{aligned}$$

[1]

Nach Einsetzen in (**??**):

$$\begin{aligned} v_{1'} &= v_1\cdot\frac{1 - 2\cos^2\theta}{1 + 2\cos^2\theta} \\ v_{2'} &= v_1\cdot\frac{2\cos\theta}{1 + 2\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$$\cos(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_{1'} = -\frac{v_1}{5} = -0,20\mathrm{m/s}$$

$$v_{2'} = v_{3'} = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_1 = 0,69\mathrm{m/s}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

In Stanley Kubricks Film *2001: A Space Odysey* besteht der Mannschaftsbereich des Raumschiffs Discovery aus einem rotierenden Ring, um Schwerebeschleunigung zu simulieren.

(a) Mit welcher Winkelgeschwindigkeit muss ein Ring von 160 m Umfang rotieren, damit sich die Besatzung wie auf der Erde fühlt?

(b) In einer Filmszene joggt der Astronaut David Bowman mit $v = 5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ den Ring entlang, um sich fit zu halten. Welche zusätzliche Kraft (zur simulierten Gravitation) wirkt dabei auf ihn und wie stark ist sie? Welche Laufrichtung ist anstrengender?

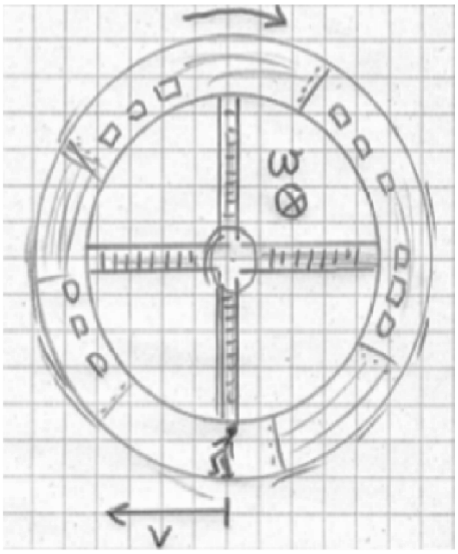
(c) Diskutieren Sie die wirkenden Kräfte für den Fall, dass die Geschwindigkeit des joggenden Astronauten gerade gleich der Umlaufgeschwindigkeit des Rings ist, aber in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Nehmen Sie dabei

  (i) den Standpunkt des Astronauten und

  (ii) den des Bordcomputers HAL

ein, der sich im nicht-rotierenden Teil des Raumschiffs befindet.

Lösung



(a) Damit die Besatzung sich wie auf der Erde fühlt, muss die Schwerebeschleunigung g hergestellt werden. Damit gilt für die Zentrifugalbeschleunigung:

$$|\vec{a}_Z| = \omega^2 r = \omega^2 \cdot \frac{U}{2\pi} \equiv g \tag{51}$$

mit $U = 160$ m dem Umfang des Rings. Nach ω aufgelöst erhält man

$$\omega = \sqrt{2\pi \cdot \frac{g}{U}} = \sqrt{2\pi \cdot \frac{9,8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{160\ \text{m}}} = 0,6\ \text{s}^{-1} \tag{52}$$

[2]

(b) Die durch die Corioliskraft hervorgerufene Beschleunigung beträgt

$$\vec{a}_C = 2\vec{v} \times \vec{\omega}. \tag{53}$$

Bei Bewegung in Rotationsrichtung wirkt diese Beschleunigung nach außen; damit ist das Joggen anstrengender. Bei Bewegung entgegen der Rotationsrichtung wirkt die Beschleunigung nach innen und das Laufen sollte leichter fallen.

Mit $|\vec{v}| = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ergibt sich

$$|\vec{a}_C| = 2 \cdot 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,6\ \text{s}^{-1} = 6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx 0,6g \tag{54}$$

[2]

(c) (i) Aus Sicht des Astronauten:

$$|\vec{F}| = \frac{mv^2}{r} + m\omega^2 r - 2mv\omega = m\omega^2 r + m\omega^2 r - 2m\omega^2 r = 0 \tag{55}$$

(ii) Sicht von HAL: Die Kraft verschwindet (Stillstand).

[2]

Mathematische Ergänzung (5 Punkte)

Eine Rakete der Gesamtmasse m_0 transportiert eine Nutzlast der Masse m_s und startet von der Erdoberfläche. Die Bewegungsgleichung im Schwerefeld ($g = \text{const.}$) lautet

$$m(t)\dot{v}_z = -m(t)g - \frac{\mathrm{d}\,m}{\mathrm{d}t}u_\text{g},$$

wobei $m(t) = m_0 - (m_0 - m_\text{s})\frac{t}{t_\text{B}}$ die zeitabhängige Masse der Rakete für $0 \leq t \leq t_\text{B}$ mit der Brenndauer t_B ist und u_g die konstante, relative Geschwindigkeit der austretenden Gase ist.

(a) Geben Sie die Bedingung an, dass die Rakete abhebt.

(b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Rakete als Funktion der Zeit t für $0 \leq t \leq t_\text{B}$ und speziell die Endgeschwindigkeit bei $t = t_\text{B}$.

Lösung

(a) Damit die Rakete abhebt, muss die Beschleunigung am Anfang nach oben weisen, also $\dot{v}(0) > 0$. Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{(m_0 - m_\text{s})}{t_\text{B}}u_\text{g} > m_0 g.$$

[2]

(b) Die Differentialgleichung lässt sich durch Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\, v_z}{\mathrm{d}t} &= -g - \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}\, m}{\mathrm{d}t} u_\mathrm{g} \\
v_z &= u_\mathrm{g} \ln \frac{m_0}{m(t)} - gt' \Big|_0^t \\
v(t_\mathrm{B}) &= u_\mathrm{g} \ln \frac{m_0}{m_\mathrm{s}} - g t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

[3]