MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. S. Warzel
Probeklausur, 23.12.2014, 14:15-15:45

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt.
Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt.
Aufgaben ohne Kästen lösen Sie bitte auf dem bereitgestellten Bearbeitungsbogen.

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:

Induktionsbeginn ($n = 1$): $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ **[2]**

Induktionsschritt ($n-1 \to n$): Für $n \geq 2$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} \overset{\mathbf{[2]}}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} + \frac{1}{n^2+n} \overset{\text{I.V.}\mathbf{[2]}}{=} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} \overset{\mathbf{[1]}}{=} \frac{n^2-1+1}{n(n+1)} \overset{\mathbf{[1]}}{=} \frac{n}{n+1}$$

2. **Komplexe Zahlen** **[7 Punkte]**

Schreiben Sie $\log\left(\sqrt{e^{\pi+7\pi i}}\right)$ in Polardarstellung.

LÖSUNG:

Es ist

$$\begin{aligned} e^{\pi+7\pi i} &= e^{\pi+\pi i} = -e^{\pi}, \qquad [\mathbf{2}] \\ \sqrt{e^{\pi+7\pi i}} &= ie^{\pi/2}, \qquad [\mathbf{2}] \\ \log\left(\sqrt{e^{\pi+7\pi i}}\right) &= \log(e^{\pi/2} i) = \log(e^{\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad [\mathbf{3}] \end{aligned}$$

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[10 Punkte]**

(a) Berechnen Sie den Wert der Reihe: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \frac{25}{21}}$ **[2]**

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1+\frac{1}{n})^n}$? **[2]**

☐ $= -\infty$ ☐ $\in (-\infty, 0)$ ☐ $= 0$ ☐ $\in (0, \infty)$ ☐ $= +\infty$ ☒ undefiniert

(c) Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$? **[3]**

☐ 0 ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☒ $\frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ e ☐ π ☐ ∞

(d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine relle Zahlenfolge mit $|x_{n+1} - x_n| \leq r\,|x_n - x_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $r \in [0, 1)$ ist. (x_n) ist **[3]**

☒ eine Cauchy-Folge ☐ divergent ☒ konvergent ☐ monoton fallend

LÖSUNG:

(a) Summe zweier konvergenter geometrischer Reihen:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) - 2\left(\frac{1}{1+\frac{3}{4}} - 1\right) = \frac{4}{3} - 1 - 2\left(\frac{4}{7} - 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{6}{7} = \frac{25}{21}$

(b) $\left|\frac{1}{(-1+\frac{1}{n})^n}\right| = \frac{1}{(1-\frac{1}{n})^n} \to \mathrm{e} \neq 0$ ist keine Nullfolge, also ist die Reihe divergent. Da die Summanden alternierendes Vorzeichen haben divergiert die Reihe auch nicht bestimmt gegen $\pm\infty$. Der Grenzwert ist undefiniert.

(c) Quotientenkriterium: $\left|\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}/(n+1)!}{n^n x^n/n!}\right| = \frac{(n+1)^n}{n^n}|x| = (1+\frac{1}{n})^n|x| \to \mathrm{e}|x|$. Die Reihe ist also konvergent für $|x| < \frac{1}{\mathrm{e}}$ und divergent für $|x| > \frac{1}{\mathrm{e}}$. Der Konvergenzradius ist $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $|x_{n+1} - x_n| \leq r^n|x_1 - x_0|$, denn der Induktionsanfang ist erfüllt und

$$|x_{n+1} - x_n| \leq r\,|x_n - x_{n-1}| \leq r r^{n-1}|x_1 - x_0| = r^n|x_1 - x_0|.$$

Also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| \leq |x_1 - x_0| \sum_{n=0}^{\infty} r^n = |x_1 - x_0|\frac{1}{1-r} \leq \infty$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ ist also absolut konvergent. Ihre Teilsummen sind $x_{n+1} - x_0$. somit ist auch (x_n) konvergent und damit auch eine Cauchy-Folge.

4. **Zwischenwertsatz** **[8 Punkte]**

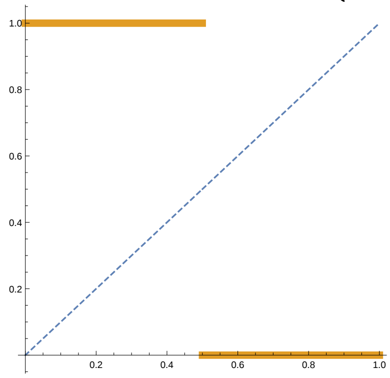
(a) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ die Gleichung $f(x) = x$ immer eine Lösung hat. HINWEIS: Man betrachte $f(x) - x$.

(b) Geben Sie mit Skizze eine Funktion $f : [0,1] \to [0,1]$ an, für die $f(x) \neq x$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

LÖSUNG:

(a) Wir betrachten die Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x) - x$, die auch stetig ist. **[1]**
$f(x) = x$ ist somit gleichbedeutend mit $F(x) = 0$.
Nun ist $F(0) = f(0) \geq 0$ und $F(1) = f(1) - 1 \leq 0$, da f Werte in $[0,1]$ hat. **[2]**
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $F(x_0) = 0$, d.i., $f(x_0) = x_0$. **[2]**

(b) $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$ **[2]**



[1]

5. **Ableitung der Umkehrfunktion** **[17 Punkte]**

(a) Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, und $-\infty \leq c < d \leq \infty$ eine zweimal differenzierbare bijektive Funktion mit $f' > 0$. Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion f^{-1} zweimal differenzierbar ist und drücken Sie die zweite Ableitung von f^{-1} an der Stelle $y \in (c,d)$ durch Ableitungen von f an geeigneter Stelle aus.

(b) Zeigen Sie, das $f : (0,\mathrm{e}) \to (-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}})$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ den Bedingungen von (a) genügt und berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f^{-1} im Punkt 0.

LÖSUNG:

(a) Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion ist $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} > 0$. **[1]**
Da f^{-1} und f' differenzierbar sind, ist auch f^{-1} als Kombination differenzierbarer Funktionen differenzierbar. **[2]**
Außerdem ist

$$(f^{-1})''(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = -\frac{1}{\big(f'(f^{-1}(y))\big)^2} f''(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = -\frac{f''(f^{-1}(y))}{\big(f'(f^{-1}(y))\big)^3}.$$

[4]

(b) f ist auf $(0,\infty)$ beliebig oft differenzierbar. **[1]**
$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} > 0$ für $x \in (0,\mathrm{e})$. **[1]**
Außerdem ist $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x}\ln x = -\infty$ und $\lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} f(x) = \lim\limits_{x\uparrow \mathrm{e}} \frac{\ln x}{x} \stackrel{\text{stetig}}{=} \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. D.h. f ist bijektiv. **[2]**
Schließlich gilt wegen $f(1) = 0$, dass $f^{-1}(0) = 1$. **[1]**
Somit erhalten wir mit $f'(1) = 1$ und $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ln x)2x}{x^4} = -\frac{3}{x^3} + \frac{2\ln x}{x^3}$, also $f''(1) = -3$, **[2]** dass

$$f^{-1}(0) = 1, \qquad (f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = 1, \qquad (f^{-1})''(0) = -\frac{f''(f^{-1}(0))}{\big(f'(f^{-1}(0))\big)^3} = -\frac{f''(1)}{\big(f'(1)\big)^3} = 3.$$

[2]
Das Taylorpolynom lautet also $T_n f^{-1}(0;x) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2$. **[1]**

6. **Integration** **[7 Punkte]**

Berechnen Sie

(a) $\int\limits_0^x \frac{t^{2013}}{1+t^{2014}}\,\mathrm{d}t$, (b) $\int\limits_0^x \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$.

LÖSUNG:

(a) Mit Substitution: $g(t) = 1 + t^{2014}$, $g'(t) = 2014t^{2013}$,

$$\int\limits_0^x \frac{t^{2013}}{1+t^{2014}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2014}\int\limits_0^x \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t = \Big[\frac{\log g(t)}{2014}\Big]_0^x = \frac{\log(1+x^{2014})}{2014}.$$

[3]

(b) Partielle Integration ergibt

$$F(x) = \int\limits_0^x \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=f'}\underbrace{\sin t}_{=g}\,dt = \big[\mathrm{e}^t \sin t\big]_0^x - \int\limits_0^x \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=f}\underbrace{\cos t}_{=g'}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \sin x - \int\limits_0^x \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=f'}\underbrace{\cos t}_{=g}\,dt$$
$$= \mathrm{e}^x \sin x - \big[\mathrm{e}^t \cos t\big]_0^x + \int\limits_0^x \underbrace{\mathrm{e}^t}_{=f}\underbrace{(-\sin t)}_{=g'}\,dt = 1 + \mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) - F(x).$$

Wir erhalten also $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x)$. **[4]**

7. Funktionenfolgen **[10 Punkte]**

Für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ gilt:

(a) (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit **[3]**

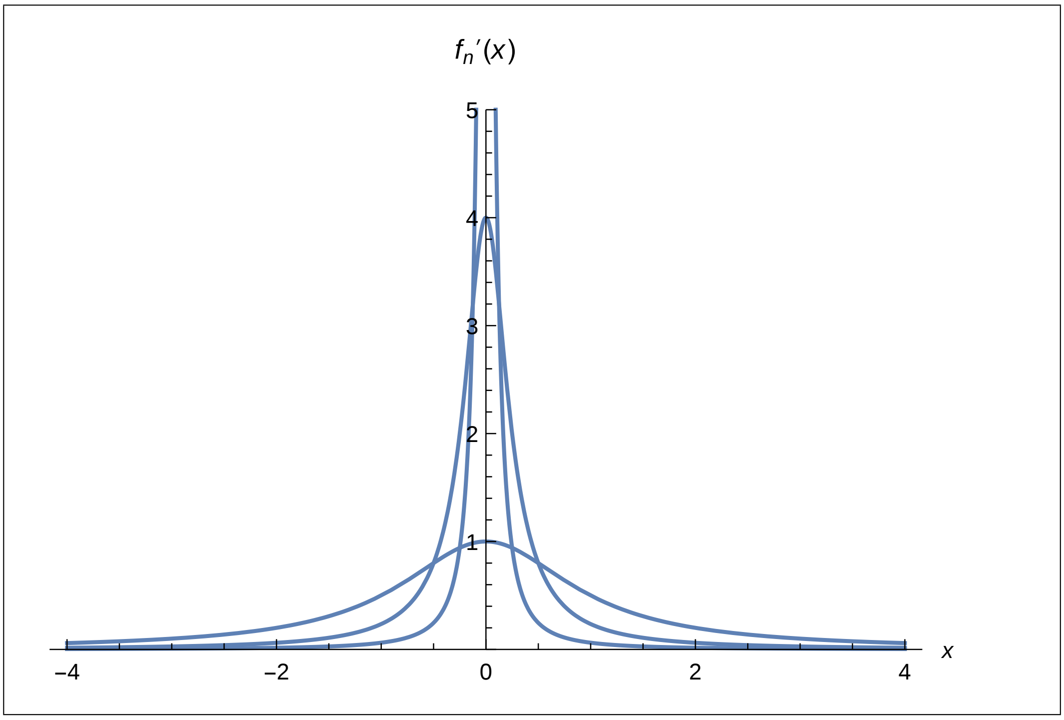
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

(b) ☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☒ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

[2]

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $f_n'(x)$ und skizzieren Sie sie. **[2]**

$$f_n'(x) = \frac{n}{1+(nx)^2}$$



[3]

LÖSUNG:

(a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \arctan(nx) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0\,. \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$

(b) Wäre die Konvergenz sogar gleichmäßig, so müßte f stetig sein. Da dies nicht der Fall ist, kann die Konvergenz nicht gleichmäßig sein.

(c) s.o.