1 Kurzaufgaben (13 Punkte)

a) Betrachten Sie die kartesischen Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$ und des Impulsvektors $\vec{p}$ eines Teilchens als generalisierte Koordinaten und Impulse. Berechnen Sie für einen konstanten Vektor $\vec{a}$ die Poisson-Klammern

$$\left\{(\vec{a}\cdot\vec{r})^2;\vec{p}\right\}.$$

b) Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil mit Gesamtlänge l und Masse m hänge auf einem Nagel, so dass die beiden hängenden Teile die Länge $\frac{l}{2}$ haben. Nach einer infinitesimal kleinen Verschiebung aus dem instabilen Gleichgewicht bewege sich das Seil reibungsfrei im homogenen Schwerefeld. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Seiles unmittelbar nach dem vollständigen Abgleiten vom Nagel.

c) Betrachten Sie den vertikalen Fall einer Masse m im homogenen Schwerefeld $g\vec{e}_z$ unter Berücksichtigung der Reibungskraft $F_R = -Kv^3\vec{e}_v$. Formulieren Sie die Differentialgleichung für die vertikale Geschwindigkeit der Masse und bestimmen Sie die stationäre (zeitunabhängige) Geschwindigkeit, die die Masse für große Zeiten erreicht.

d) Ein Sportler hat die Jahresbestleistung im Hochsprung von h_1. Wie hoch könnte dieser Sportler auf dem Mond mit sechsmal kleinerer Schwerebeschleunigung als auf der Erde springen?

e) Ein mathematisches Pendel hat die Schwingungsperiode $T = 1\,\mathrm{s}$. Wie groß ist die Schwingungsperiode des Pendels in einer Rakete, die mit einer Beschleunigung von $3g$ vertikal von der Erdoberfläche startet.

2 Zug (11 Punkte)

Zwei Eisenbahnwaggons mit Massen m_1 und m_2 sind mit einer masselosen Kupplung derart verbunden, dass der Abstand der Schwerpunkte l beträgt. Die Waggons bewegen sich reibungsfrei entlang der x-Achse. Am zweiten Waggon wird mit der zeitabhängigen Kraft $\vec{F}(t) = \alpha t\vec{e}_x$ für $t \geq 0$ mit $\alpha = \text{const.} > 0$ gezogen.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung für die Koordinaten der Schwerpunkte der Waggons x_1 und x_2 und geben Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ an.

b) Bestimmen Sie die Zwangskraft und die Lösung für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

c) Die Kupplung löst sich, falls die Zwangskraft den kritischen Wert F_c^* übersteigt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Kupplung gelöst wird. Wie ändert sich das Ergebnis, falls am ersten Waggon mit $\vec{F}(t) = -\alpha t\vec{e}_x$ gezogen wird?

3 Frosch (11 Punkte)

Betrachten Sie, am Ufer stehend, einen Frosch der Masse m, der am Ende eines auf dem Wasser ruhenden Seerosenblattes der Masse M mit Durchmesser L sitzt. Reibungseffekte seien vernachlässigbar.

a) Der Frosch springt unter dem Winkel α zur Horizontalen und landet am gegenüberliegenden Ende des Blattes.

   i) Bestimmen Sie die Bahnkurve von Frosch (Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$) und Blatt (Koordinate $X(t)$).

   ii) Bestimmen Sie die Sprungdauer t_s und die Anfangsgeschwindigkeiten des Frosches und des Blattes unmittelbar nach dem Sprung.

b) Wie groß ist die Verschiebung des Blattes, wenn der Frosch vom einen Ende des Blattes zum anderen kriecht?

4 Satellitenmanöver (9 Punkte)

Ein Erdsatellit der Masse m bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius R_1. Durch zwei Bremsmanöver kann der Satellit auf eine andere Kreisbahn mit Radius $R_2 < R_1$ gebracht werden: Nach einer kurzen Bremsung bewegt sich der Satellit auf einer elliptischen Bahn mit Aphelabstand R_1 und Perihelabstand R_2; die zweite Bremsung im Perihel führt auf die neue Kreisbahn mit Radius R_2.

a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des Satelliten auf den Kreisbahnen?

b) Bestimmen Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Satelliten v_{min} und v_{max} auf der elliptischen Bahn.

c) Betrachten Sie den Fall, dass R_2 gleich dem Erdradius ist. Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen der Umlaufperiode T_1 und der Zeit, bis der Satellit nach dem ersten Bremsmanöver auf der Erde landet.

5 Perle auf Schraubenlinie (4 Punkte)

Betrachten Sie die Bewegung einer Perle der Masse m auf der unendlichen Schraubenlinie, die in Zylinderkoordinaten durch $\rho = R$ und $z = b\varphi$ mit Konstanten R und b gegeben ist. Es wirke das homogene Schwerefeld $-g\vec{e}_z$. Vernachlässigen Sie Reibungseffekte.

a) Betrachten Sie den Winkel φ als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die kinetische Energie und die Lagrange-Funktion des Systems.

b) Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung und bestimmen Sie die Lösung.