1. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Back

Wintersemester 2021/22

30. November 2021

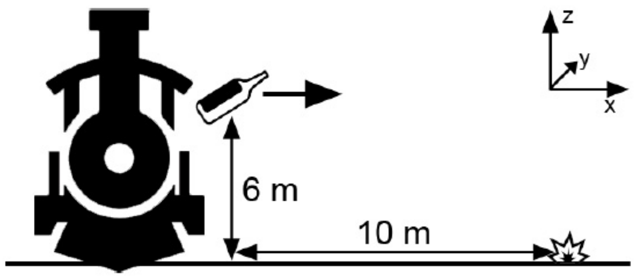
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Nach einem Fußballspiel fährt ein angetrunkener Fan mit dem Zug nach Hause. Er wirft seine Bierflasche rechtwinklig und horizontal aus dem fahrenden Zug. Die Flasche fällt auf eine 6m tiefer gelegene Wiese. Sie schlägt 24m vom Abwurfpunkt (in der x-y-Ebene), sowie 10m von den Gleisen entfernt auf. *Hinweis:* Der Zug fährt in y-Richtung, der Boden ist die x-y-Ebene, die Höhe ist die z-Richtung.



(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit des fahrenden Zuges v_y (Ersatzlösung: 80 km/h).

(b) die Abwurfgeschwindigkeit mit der der Fan die Flasche aus dem Fenster wirft (Ersatzösung: 10 m/s)

(c) den Gesamtbetrag der Auftreffgeschwindigkeit der Flasche am Boden

Lösung

(a) Die Bierflasche fällt auf eine 6m tiefer gelegene Wiese. Dabei wurde sie praktischerweise rechtwinklig und horizontal aus dem Zug geworfen. Aus diesem Grund können wir über die Gleichung für den freien Fall die Zeit berechnen, die die Bierflasche bis zu ihrem Auftreffen braucht. Es gilt:

$$y = \sqrt{(24\text{m})^2 - x^2} = 21,82\text{m}$$

$$z(t) = z(t_0) - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

Wobei $z(t_0) = 6\text{m}$ die Anfangshöhe und g die Erdbeschleunigung sind.

Zum Auftreffzeitpunkt t_A befindet sich die Flasche bei $z(t_A) = 0$

$$0 = z(t_A) = z(t_0) - \frac{1}{2}gt_A^2 \tag{2}$$

$$t_A = \sqrt{\frac{2z(t_0)}{g}} = 1,1\text{s} \tag{3}$$

Die Bierflasche trifft bei $S_y = 24m$ in Fahrrichtung gemessen vom Abwurfort entfernt auf. Die Geschwindigkeit des Zuges kann mit dieser Information und der gerade berechneten Flugdauer der Flasche über eine einfache Bewegungsgleichung berechnet werden:

$$v_y = \frac{s_y}{t_A} = \frac{21,82\text{m}}{1,1\text{s}} = 19,84\frac{\text{m}}{\text{s}} = 71,4\frac{\text{km}}{h} \tag{4}$$

[4]

(b) Die Abwurfgeschwindigkeit berechnet sich aus der Flugdauer t_A und der Auftreffentfernung s_x

$$v_x = \frac{s_x}{t_A} = \frac{10\text{m}}{1,1} = 9,1\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{5}$$

wobei die Geschwindigkeit als konstant angesehen wird.

[1]

(c) Die Auftreffgeschwindigkeit berechnet sich gemäß der Bewegungsgleichung über

$$v_{zA}(t_A) = -gt_A = -10,8\frac{m}{s} = 38,8\frac{\text{km}}{\text{h}} \tag{6}$$

$$|V_{Ges}| = \sqrt{v_x^2 + v_{Zug}^2 + v_z^2} = 24\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{7}$$

[2]

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Die Fußballspielerin Andrea Abseits ist im Strafraum gefoult worden und darf einen Elfmeter schießen. Sie möchte den Ball genau ins linke obere Eck platzieren.Dabei befindet sie sich in 11m Entferung mittig vor dem Tor, welches die Maße 2,44 m auf 7,32 m hat.
Unter der Annahme, dass der Ball den **höchsten Punkt** seiner Bahn genau an der Ecke des Tores erreicht:

(a) Wie lang hat der Torwart Zeit zu reagieren, wenn er 0,2s braucht, um sich in Position zu bringen?

(b) Mit welcher absoluten Geschwindigkeit muss der Ball gespielt werden (Ersatzergebnis: $v_0 = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$)?

(c) Unter welchen Winkeln (horizontal und vertikal) muss der Ball gespielt werden?

(d) Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Anstiegswinkel muss der Ball gespielt werden, damit der Torwart nur 0,3s Zeit hat zu reagieren. Der Ball treffe wieder ins Eck, braucht aber dort nicht den höchsten Bahnpunkt erreichen.

Lösung

(a) Im Folgenden bezeichnen wir die Höhe des Tores mit $h = 2,44\mathrm{m}$ und dessen Breite mit $b = 7,32\mathrm{m}$. Die Elfmeterdistanz nennen wir d. Wir berechnen zunächst die Zeit, die der Ball benötigt, um im oberen linken Toreck im Scheitel seiner Flugbahn anzukommen:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \tag{8}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{9}$$

$$= 0,705\mathrm{s} \tag{10}$$

$$t_R = t - 0,2\mathrm{s} = 0,505\mathrm{s} \tag{11}$$

[**2**]

(b) Aus der Bedingung, dass sich der Ball im Toreck im Scheitel seiner Flugbahn befinden soll, lässt sich die notwendige Anfangsgeschwindigkeit in z-Richtung v_z bestimmen.Legt man das Koodinatensystem so, dass in x-Richtung d und in y-Richtung $\frac{b}{2}$ zurückggelegt werden muss, so ergibt sich insgesamt

$$v_z = \sqrt{2gh} \tag{12}$$

$$v_x = \frac{d}{t} \tag{13}$$

$$v_y = \frac{b}{2t} \tag{14}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh + \frac{d^2g}{2h} + \frac{b^2g}{8h}} \tag{15}$$

$$= 17,83\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{16}$$

[**3**]

(c) Bezeichnen wir den Winkel in der Spielfeldebene ϕ und den Anstiegswinkel θ. Es gilt:

$$\tan(\phi) = \frac{b}{2d} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan(\frac{b}{2d}) \tag{18}$$

$$= 18,4^\circ \tag{19}$$

$$v_0 \cos(\theta) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_0}\right) \tag{21}$$

$$= 22,8^\circ \tag{22}$$

[**4**]

(d) Für den vom Ball in der xy-Ebene zurückgelegten Weg $s = \sqrt{d^2 + \frac{b^2}{4}}$ gilt:

$$s = v_0 \cos(\theta) t_{ges} \tag{23}$$

Mit $t_{ges} = t_r + 0,2\,\mathrm{s}$. Für den in z-Richtung zurückgelegten Weg gilt:

$$h = v_0 \sin(\theta) t_{ges} - \frac{1}{2} g t_{ges}^2 \tag{24}$$

Wir formen die zwei obigen Gleichungen um:

$$v_0 \sin(\theta) t_{ges} = h + \frac{1}{2} g t_{ges}^2 v_0 \cos(\theta) t_{ges} = s \tag{25}$$

und teilen die erste durch die zweite. Somit erhalten wir:

$$\tan(\theta) = \frac{1}{s}\left(h + \frac{1}{2} g t_{ges}^2\right) \tag{26}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{1}{s}\left(h + \frac{1}{2} g t_{ges}^2\right)\right) \tag{27}$$

$$= 17,5^\circ \tag{28}$$

Für den Betrag der Geschwindigkeit folgt somit

$$v_0 = \frac{s}{\cos(\theta) t_{ges}} \tag{29}$$

$$= 24,3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{30}$$

[**4**]

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Ein Stein der Masse $m = 0,2$kg wird an einer $0,5$m langen Schnur mit 2 Umdrehungen pro Sekunde in $h = 2$m Höhe (Aufhängungspunkt) in einer horizontalen Kreisbahn herumgeschleudert. Die **Schwerkraft** ist zu vernachlässigen.

(a) Wie groß ist die kinetische Energie des Steins?

(b) Welche Kraft muss man aufbringen, um den Stein an der Schnur zu halten?

(c) Bei welcher Umdrehungsfrequenz würde die Schnur reißen, wenn sie 100N aushält bevor sie reißt?

(d) Wie weit würde er dann fliegen?

(e) Wie ändern sich die Ergebnisse der ersten vier Teilaufgaben bei Berücksichtigung der Schwerkraft? (8 Punkte)

Hinweis zu (e): Bestimmen Sie die Änderung des Radius der Kreisbahn.

Lösung

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}mv^2 && (31)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\omega^2 && (32)\\ &= \frac{1}{2}mr^2\frac{4\pi^2}{T^2} && (33)\\ &= \frac{2}{5}\pi^2\frac{\text{m}^2\text{kg}}{\text{s}^2} && (34)\\ &= 3,9\text{J} && (35) \end{aligned}$$

[2]

(b) Es gilt für F_z die Kraft, die aufgebracht werden muss

$$\begin{aligned} F_z &= mr\omega^2 && (36)\\ &= 15,8\text{N} && (37) \end{aligned}$$

[2]

(c) Es gilt für ν die Umdrehungsfrequenz, bei der die Schnur reißt

$$100\text{N} = mr\omega^2 = 4\pi^2 mr\nu^2 \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \nu = \sqrt{\frac{100\text{N}}{0,2\text{kg}4\pi^2 0,5\text{m}}} = 5\text{Hz} \tag{39}$$

[2]

(d) Da die Schwerkraft vernachlässigt ist, fliegt der Stein tangential weg und landet nicht auf dem Boden.

[1]

(e) Die Kreisbahn ist immer noch in der Horizontalen, nur der Radius verringert sich, da die Schwerkraft $\vec{F}_g$ den Stein nach unten zieht: Die Schnur bildet einen Winkel α mit der Horizontalen. Der neue Radius der Kreisbahn r' ergibt sich aus den beiden Beziehungen im rechtwinkligen Kräftedreieck, denn damit gilt $\tan\alpha = {}^{F_g}/_{F_z}$ und $\cos\alpha = {}^{r'}/_{r}$. Es kann eingesetzt werden

$$\tan\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r'} = \frac{mg}{m\omega^2 r\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{40}$$

was $\sin\alpha = {}^{g}/_{(\omega^2 r)}$ liefert. Damit gilt

$$\alpha = \arcsin\frac{g}{\omega^2 r} \tag{41}$$

$$= 7,1^\circ \tag{42}$$

[2]

Was ergibt, dass $r' = r\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{F_{Ges}^2}} = 0,49\text{m}$. Damit ist die kinetische Energie

$$E'_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mr'^2\omega^2 \tag{43}$$

$$= \frac{1}{2}m(r\cos\alpha)^2\omega^2 = E_{Kin}\cos^2\alpha \tag{44}$$

$$= \frac{1}{2}mr'^2\frac{4\pi^2}{T^2} \tag{45}$$

$$= 3,9\text{J} \tag{46}$$

[1]

Für (b) bestimmt man die resultierende Kraft $\vec{F}$ als

$$\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_z \tag{47}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 r' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

$$= m\begin{pmatrix} \omega^2 r' \\ g \end{pmatrix} \tag{49}$$

Der Betrag der resultierenden Kraft liefert das Ergebnis

$$|\vec{F}| = m\sqrt{\omega^4 r'^2 + g^2} = 15,8\text{N} \tag{50}$$

Alternativ:

$$mr'\omega^2 = mr\cos\alpha\omega^2 = F_S\cos\alpha \Rightarrow |\vec{F}| = 15,8\text{N} \tag{51}$$

[2]

Die Umdrehungsfrequenz, bei der die Sehne reißt, kann man sich geometrisch überlegen

$$\frac{r'}{r} = \frac{F_Z}{F_{Ges}} = \frac{mr'\omega^2}{F_{Ges}} \Longrightarrow \omega_{mitSchwerkraft} = \sqrt{\frac{F_{Ges}}{mr}} = \omega_{ohneSchwerkraft} \tag{52}$$

[1]

Bei Reißen der Schnur wird der Stein tangential, das heißt horizontal, mit der Bahngeschwindigkeit v aus der Kreisbahn geworfen. Die Flugweite s ergibt sich hier einfach aus der horizontalen Bewegung mit v während der Fallzeit aus der Höhe h' (horizontaler Wurf):

$$h' = h - \delta h \tag{53}$$

$$= h - r\sin\alpha \tag{54}$$

Des weiteren gilt $h' = {}^1\!/_2 g t^2$, also

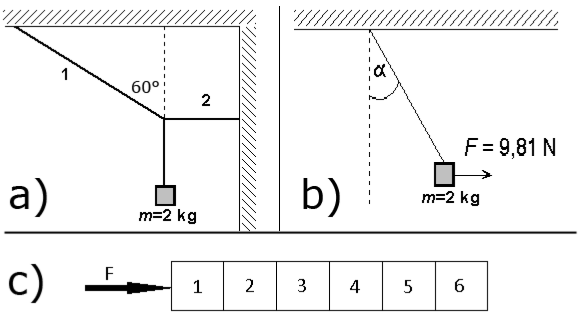
$$t = \sqrt{\frac{2(h - r\sin\alpha)}{g}} = 0,63\text{s} \tag{55}$$

Es gilt auch

$$s = v't = \omega r' t = \omega r \cos\alpha t = 9,8\text{m} \tag{56}$$

[**2**]

Aufgabe 4 (11 Punkte)



(a) Eine Masse m=2 kg wird durch 3 Seilstücke gehalten (Bild a). Wie groß ist die Spannung im Seilstück 2?

(b) Ein Körper der Masse m=2kg hängt an einem masselosen Seil an der Decke. Eine horizontale Kraft von 9,81N zieht ihn in eine Gleichgewichtslage (Bild b). Wie groß ist der Winkel α zwischen Seil und der Senkrechten, wenn sich die Anordnung auf dem Mars befindet? [Marsdurchmesser: $d = 6772,4$ km, Dichte: 3,933 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$]

(c) Sechs gleiche Würfel mit der Masse 1kg liegen auf einem ebenen glatten Tisch. Eine konstante Kraft F=1N wirkt auf den ersten Würfel in Richtung des eingezeichneten Vektors (Bild c). Geben sie die Größe der resultierenden Kraft F_i an, die jeweils auf einen Würfel wirkt. Welche Kraft $F_{4,5}$ übt außerdem der Würfel 4 auf Würfel 5 aus?

Lösung:

(a) Die Gewichtskraft teilt sich auf in die Kraft in Seilstück 1 und 2. Durch Geometrie ergibt sich für die Kraft F_2:

$$F_2 = \tan(60°) F_g = 34\text{N} \tag{57}$$

[**3**]

(b) Um den Winkel zu berechnen muss zuerst die Gravitationskraft auf dem Mars berechnet werden.

$$F = \frac{m M_{Mars}}{r_{Mars}^2} G = m g_{Mars} \tag{58}$$

$$\rightarrow g_{Mars} = \frac{MG}{r_{Mars}^2} \tag{59}$$

Die Masse berechnet sich über die Dichte und den Durchmesser:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = 3,933 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \frac{4}{3}\pi (\frac{6772,4 \cdot 10^3}{2})^3 m^3 = 6,4 \cdot 10^{23}\mathrm{kg} \tag{60}$$

$$\rightarrow g = \frac{6,4 \cdot 10^{23} \cdot 6,674 \cdot 10^{-11}}{(\frac{6772400}{2})^2} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 3,73 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \tag{61}$$

[3]

Der Winkel kann nun Geometrisch berechnet werden.

$$\tan(\alpha) = \frac{F}{F_g} \rightarrow \alpha = \arctan(\frac{F}{F_g}) = \arctan(\frac{9,81\mathrm{N}}{2\mathrm{kg} \cdot 3,73 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}) = 52,7^\circ \tag{62}$$

[2]

(c) Da die Massen der 6 Würfel gleich sind, wirkt auf jeden Würfel die Gleiche resultierende Kraft

$$F_i = \frac{1}{6}F = \frac{1}{6}\mathrm{N} \tag{63}$$

Damit bei Würfel 6 noch die Kraft F_i ankommt, muss auf Würfel 5 die Kraft von 2 Würfeln ankommen (seine eigene + die des 6. Würfels).

$$F_{4,5} = \frac{2}{6}F = \frac{1}{3}\mathrm{N} \tag{64}$$

[3]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

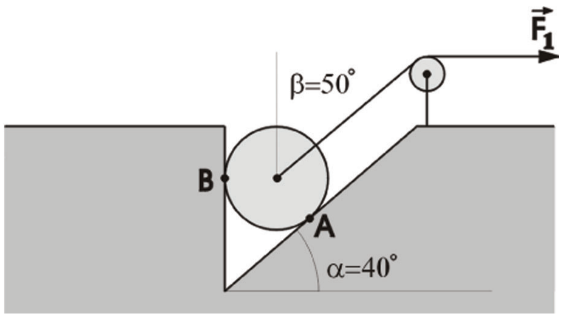
Eine Walze mit der Masse 500 kg liegt in einem Graben zwischen einer senkrechten Wand und einer schrägen Böschung. An der Walze ist ein Seil befestigt, über das über eine Führungsrolle die Zugkraft $\vec{F}_1$ angreift.

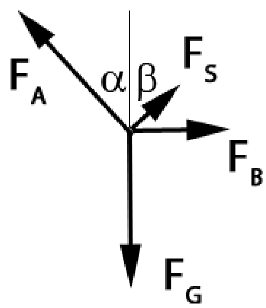
(a) Zeichnen sie ein Kräftediagramm mit der auf die Walze wirkenden Kräfte und beschriften Sie ihr Diagramm.

(b) Berechnen Sie wie groß die Normalkräfte an den Punkten A und B sind, wenn $F_1 = 1000$ N ist? ($\alpha = 40°$, $\beta = 50°$)

Lösung

(a) **[2]**





(b) Da die Walze sich nicht bewegt müssen die Summe aller Kräfte null sein.

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

[**1**]

Die wirkenden Kräfte sind die Gravitation $\vec{F}_G$, die zwei Normalkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$, sowie die Seilkraft $\vec{F}_S$.

$$\sum F_x = F_S \sin\beta - F_A \sin\alpha + F_B = 0 \tag{65}$$

$$\sum F_y = F_S \cos\beta + F_A \cos\alpha - F_G = 0 \tag{66}$$

[**2**]

$$F_A = \frac{F_G - F_S \cos\beta}{\cos\alpha} = 5564\text{N} \qquad F_B = F_A \sin\alpha - F_S \sin\beta = 2810\text{N}$$

[**2**]

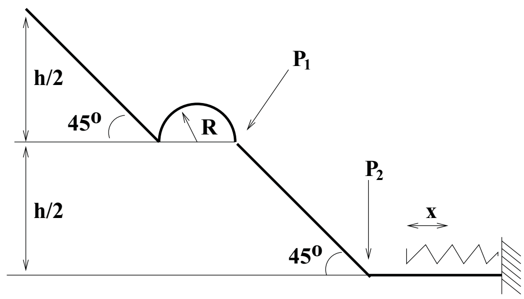
Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein punktförmiger Schlitten mit Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0\text{m/s}$ und totaler Masse $m_1 = 1000\text{kg}$ gleitet reibungsfrei einen Hang der Steigung $\phi = 45°$ hinunter. Auf halber Höhe $\frac{h}{2}$ fährt er über eine halbkreisförmige Bodenwelle mit Radius $R = 10\text{m}$.

(a) Der Schlitten startet in der Höhe h. Es stellt sich heraus, dass er am höchsten Punkt der Bodenwelle den Bodenkontakt gerade nicht verliert. Berechnen Sie daraus die Starthöhe h (Ersatzergebnis: $h = 35\text{m}$).

(b) Am Ende des Hügels befindet sich auf horizontaler Ebene eine ideale Feder mit Federkonstanten $k = 6000\text{N/m}$. Um welche Strecke x wird die Feder maximal zusammengedrückt, wenn der Schlitten in der Höhe h gestartet ist?

(c) Welche maximale Höhe h_1 erreicht der Schlitten, wenn er von der Feder zurückkatapultiert wird?



Lösung

(a) Damit der Bodenkontakt nicht verloren geht, muss am höchsten Punkt des Hügels die Zentripetalkraft genau durch die Schwerkraft kompensiert werden, d.h.

$$\frac{m_1 v_{\mathrm{H}}^2}{R} = m_1 g \Rightarrow v = \sqrt{gR} = 10\text{m/s}$$

[2]

Die Geschwindigkeit v_{H} kann aus dem Energieerhaltungssatz erhalten werden:

$$m_1 g h = m_1 g \left(\frac{h}{2} + R\right) + \frac{1}{2} m_1 v_{\mathrm{H}}^2$$
$$\Leftrightarrow m_1 g \left(\frac{h}{2} - R\right) = \frac{1}{2} m_1 v_{\mathrm{H}}^2 = \frac{1}{2} m_1 g R$$

womit man erhält

$$h = 3R = 30\text{m}$$

[2]

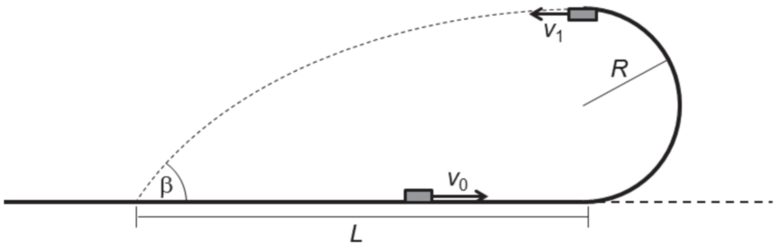
(b) Wieder verwenden wir den Energieerhaltungssatz

$$m_1 g h = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{2 m_1 g h}{k}} = 10\text{m}$$

[2]

(c) Da der Schlitten reibungsfrei gleitet, muss die gesamte Energie wieder zurückgegeben werden, d.h. er kommt zu seinem Ausgangspunkt zurück, also $h_1 = h$.

[1]



Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Schlitten tritt in einen halben Looping mit Radius $R = 10$ m ein, worin er reibungslos gleitet.

(a) Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mindestens sein, damit der Wagen den obersten Punkt des Loopings überhaupt erreichen kann, ohne vorher abzustürzen?

(b) Mit welcher Geschwindigkeit v_1 tritt der Wagen aus dem halben Looping aus, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 25$ m/s beträgt?

(c) In welcher Entfernung L trifft der nach dem Austritt aus dem Looping frei fallende Schlitten für die unter (b) gegebenen Anfangsgeschwindigkeit 25 m/s auf dem Boden auf?

(d) Unter welchem Winkel β trifft der fallende Schlitten für die unter (b) gegebenen Anfangsgeschwindigkeit v_0 auf dem Boden auf?

Lösung

(a) Damit der höchste Punkt erreicht werden kann, muss die Normalbeschleunigung größer als die Erdbeschleunigung sein, also:

$$\frac{v_1^2}{R} \geq g \tag{67}$$

[1]

Die Geschwindigkeit v_0 ergibt sich aus der Energieerhaltung (mit $h = 2R$ mit $R = 10$ m am höchsten Punkt):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg \cdot 2R \tag{68}$$

$$v_1^2 = v_0^2 - 4gR \tag{69}$$

Einsetzen in obige Bedingung liefert:

$$\frac{v_0^2}{R} - 4g \geq g \quad \Rightarrow \quad v_0 \geq \sqrt{5gR} = 22,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{70}$$

[2]

(b) Einfaches Einsetzen von $v_0 = 25$ m/s liefert:

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 4gR} = 15,3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{71}$$

[1]

(c) In vertikaler Richtung lässt sich die Bewegung wie ein freier Fall beschreiben:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 \tag{72}$$

Mit $s = 2R$ erhält man durch Umstellen die Zeit bis zum Auftreffen auf den Boden:

$$2R = \frac{1}{2} g t_A^2 \quad \Rightarrow \quad t_A = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{73}$$

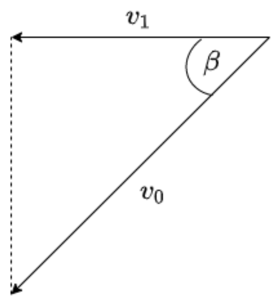
Die während dieser Zeit zurückgelegte horizontale Strecke beträgt:

$$L = v_1 \cdot t_A = \sqrt{v_0^2 - 4gR} \cdot 2\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\sqrt{\frac{v_0^2 R}{g} - 4R^2} = 2R\sqrt{\frac{v_0^2}{gR} - 4} = 30,8\ \mathrm{m} \tag{74}$$

[**3**]

(d) Beim Aufprall hat der Schlitten die horizontale Geschwindigkeitskomponente v_1 (gleichförmige horizontale Bewegung) und die Gesamtgeschwindigkeit muss aufgrund der Energieerhaltung v_0 betragen. Daraus folgt für den Winkel β (siehe Skizze):

$$\cos\beta = \frac{v_1}{v_0} = \sqrt{1 - \frac{4gR}{v_0^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 52,4^\circ \tag{75}$$



[**3**]

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Betrachten Sie den harmonischen Oszillator mit $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, der entlang der x-Achse zwischen x_{min} und x_{max} schwingt.

Die Schwingungsdauer eines beliebigen Oszillators der Masse m im Potenzial $V(x)$ ist durch das folgende Integral gegeben:

$$T = 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\,\mathrm{d}x,$$

wobei E die Gesamtenergie und ist $x_{\min}$ und $x_{\max}$ die minimale und maximale Auslenkung sind.

(a) Bestimmen Sie die Grenzen der Integration aus $E = V(x_{\min}) = V(x_{\max})$.

(b) Bestätigen Sie durch explizite Integration, dass $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

Lösung

(a) Die minimale/maximale Auslenkung ergibt sich aus

$$E = V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$
$$x_{\text{max/min}} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$$

[2]

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} T &= 2\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{2E}}\int_{-\sqrt{\frac{2E}{k}}}^{\sqrt{\frac{2E}{k}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{2E}x^2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{\frac{k}{2E}}x$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{\frac{k}{2E}}$, $u(x_{\text{max/min}}) = \pm 1$ erhalten wir

$$= 2\sqrt{\frac{m}{2E}}\sqrt{\frac{2E}{k}}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

Mit der Substitution $u = \sin v$, $\frac{\partial u}{\partial v} = \cos v$, $\sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$, wobei der Sinus in diesem Intervall streng monoton steigt – also bijektiv ist –, erhalten wir

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos v}{\sqrt{1-\sin^2 v}}\,\mathrm{d}v$$

Da $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ und Cosinus im betrachteten Interval nicht negativ ist, gilt

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1\,\mathrm{d}v = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

[4]