Probeklausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. C. Pfleiderer
Sommersemester 2017
12.06.2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

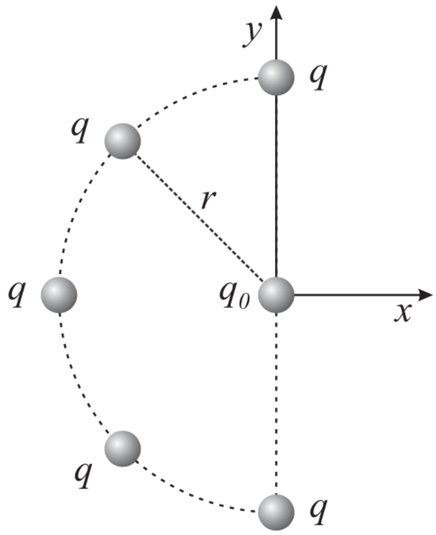
Aufgabe 1 (7 Punkte)

Auf einem Halbkreis mit Radius r sind entsprechend der Zeichnung gleiche Ladungen q gleichmäßig verteilt.

(a) Berechnen Sie die Kraft F, die auf die Ladung q_0 im Zentrum des Halbkreises wirkt.

(b) Berechnen Sie $\vec{F}$ für $r = 10\text{cm}$, $q = 3\text{nC}$ und $q_0 = 5\text{nC}$.

(c) Ordnen Sie sechs Ladungen (drei positive Ladungen $q_+ = +e$ und drei negative Ladungen $q_- = -e$) auf einem Kreis so an, dass auf eine siebte Ladung im Zentrum des Kreises eine resultierende Kraft mit dem Betrag Null wirkt. Überprüfen Sie die Auswahl der Geometrie dann mithilfe einer passenden vektoriellen Gleichung.
Hinweis: Stellen Sie eine der negativen Ladungen auf der positiven y-Achse. Wählen Sie jeweils die einfachste Geometrie.



Lösung

(a)

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\\sqrt{2}/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{2}/2\\-\sqrt{2}/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right] \tag{1}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} \tag{2}$$

[**3**]

(b) Einsetzen der Werte ($r = 10$cm, $q = 3$nC und $q_0 = 5$nC) liefert:

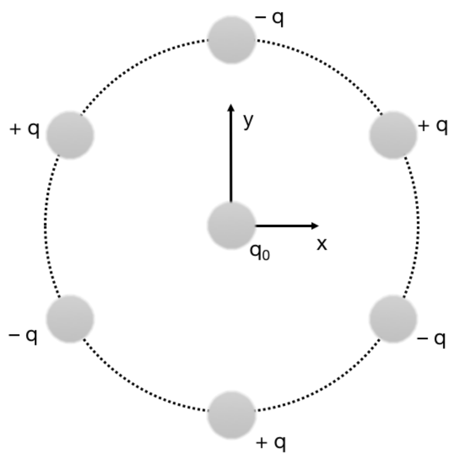
$$\vec{F} = \begin{pmatrix}3,25 \cdot 10^{-5}\text{N}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}325\mu\text{N}\\0\end{pmatrix} \tag{3}$$

[**1**]

(c) Stellt man drei Ladungen mit dem gleichen Vorzeichen auf einem gleichseitigen Dreieck, so erfährt die Ladung in der Mitte keine Kraft. Bei den betrachteten sechs Ladungen lassen sich also zwei Gruppen aus jeweils drei gleichnamiger Ladungen bilden. Diese ordnet man auf den Eckpunkten eines Sechseckes, wie in der Abbildung gezeigt. Dabei soll eine negative Ladung auf der positiven y-Achse sein.
Zum Überprüfen der Auswahl stellt man noch folgende Gleichung auf.

$$\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left[\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\-1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix}\right] = \vec{0} \tag{4}$$

[**3**]



Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein Geiger-Müller-Zählrohr sei ein leitender Hohlzylinder mit einem Innenradius von $1,5\,\text{cm}$. In der Mitte sei ein Draht mit der Länge $12\,\text{cm}$ und dem Radius $0,02\,\text{cm}$. Der äußere Zylinder ist koaxial zum Draht und gleich lang. Berechnen sie:

(a) die Kapazität des Rohres mit Hilfe des Gausschen Satzes.

(b) die lineare Ladungsdichte (Längenladungsdichte) auf dem Draht, wenn zwischen ihm und der Außenwand eine Spannung von $1,2\,\mathrm{kV}$ herrscht.

Lösung

(a) Das Geiger-Müller-Zählrohr wird als Zylinderkondensator aufgefasst, die Abmessungen sind $l = 12\,\mathrm{cm}$, $r_1 = 0,02\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 1,5\,\mathrm{cm}$. Für die Kapazität gilt:

$$C = \frac{Q}{U} \tag{5}$$

[**1**]

Für eine beliebige Ladung Q_{in} auf dem mittleren Draht folgt das elektrische Feld aus dem Satz von Gauß. Es gilt für den Bereich $r_1 < r < r_2$:

$$\oint_S \vec{\mathbf{E}}\,\mathrm{d}\vec{\mathrm{A}} = 2\pi r l E = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{in}}{2\pi r l \epsilon_0}$$

[**3**]

Aus Symmetriegründen zeigt das elektrische Feld radial nach außen.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{Q_{in}}{2\pi r l \epsilon_0}\vec{e_r}$$

Die Spannung folgt aus dem Integral des elektrischen Feldes:

$$U = \int_{r_1}^{r_2} \vec{\mathbf{E}}\mathrm{dr} = \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 l}\ln(r)|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q_{in}}{2\pi\epsilon_0 l}\ln(r_2/r_1)$$

[**2**]

Damit folgt für die Kapazität

$$C = \frac{Q_{in}2\pi l\epsilon_0}{Q_{in}ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi l\epsilon_0}{ln(r_2/r_1)} = 1,55\,\mathrm{pF} \tag{6}$$

[**1**]

(b) Für die lineare Ladungsdichte gilt:

$$\lambda = \frac{Q}{l} = \frac{CU}{l} = 15,5\,\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}} \tag{7}$$

[**2**]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Eine Scheibe mit dem Radius r_S trägt eine Flächenladungverteilung $\sigma = \sigma_0 r_S / r$. Die Dicke der Scheibe vernachläsigbar.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung der Scheibe.

(b) Ermitteln Sie das Potenzial auf der Achse der Scheibe in einem Abstand x von ihrem Mittelpunkt.

Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)$

Lösung

(a) Wir können die Gesamtladung q bestimmen, indem wir die Scheibe in Ringe mit dem Radius r und mit der Dicke dr zerlegen und dann von $r = 0$ bis $r = r_S$ integrieren. Die Ladung dq' auf einem dieser Ringe ist

$$\mathrm{d}q' = 2\pi r \sigma \mathrm{d}r = 2\pi r(\sigma_0 r_S/r)\mathrm{d}r = 2\pi\sigma_0 r_S \mathrm{d}r \tag{8}$$

Integration:

$$q = 2\pi\sigma_0 r_S \int_0^{r_S} \mathrm{d}r = 2\pi\sigma_0 r_S^2 \tag{9}$$

[**4**]

(b) Ein ringförmiges Element mit der Ladung d$q' = 2\pi r\sigma$dr erzeugt auf der Achse der Scheibe das Potential

$$\mathrm{d}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q'}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi\sigma_0 r_S \mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} \tag{10}$$

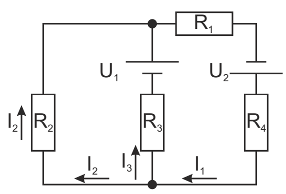
Die Integration von $r = 0$ bis $r = r_S$ ergibt

$$\phi = 2\pi\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sigma_0 r_S \int_0^{r_S}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma_0 r_S \ln\frac{r_S+\sqrt{x^2+r_S^2}}{x} \tag{11}$$

[**4**]

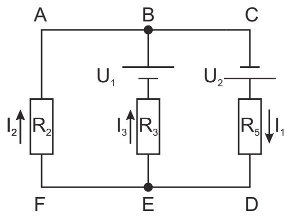
Aufgabe 4 (7 Punkte)

In der gezeigten Schaltung sind die Spannungen $U_1 = 5$V und $U_2 = 12$V, sowie die Widerstände $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$ und $R_4 = 4\Omega$ bekannt. Welche Stromstärke I_2 fließt durch den Widerstand R_2?



Lösung

Da die Widerstände R_1 und R_4 seriell im gleichen Zweig liegen, können sie durch einen Widerstand R_5 ersetzt werden: $R_5 = R_1 + R_4 = 5\Omega$. Es ergibt sich ein vereinfachtes Schaltungsbild:



Der Strom I_1 verzweigt sich im Punkt E in die Ströme I_2 und I_3. Entsprechend gilt die Knotenregel im Punkt E. Der Stromkreis besteht aus drei Maschen. Zwei Innere: [ABEF] und [BCDE], sowie die Äußere [ACDF]. Wir können zwei auswählen. Die Berücksichtigung der Dritten liefert eine redundante Information.
Die Kirchhoff'schen Regeln ergeben:

- Knotenpunkt E: $I_1 = I_2 + I_3$
- Masche [BCDE]: $U_1 + U_2 = I_1R_5 + I_3R_3 = (I_2 + I_3)R_5 + I_3R_3$
- Masche [ABEF]: $-U_1 = -I_3R_3 + I_2R_2$

[3]

Werte einsetzen in Masche [BCDE]: $5\text{V} + 12\text{V} = 17\text{V} = (I_2 + I_3)5\Omega + I_3 3\Omega$
Teilen durch 1Ω: $17\text{A} = 5I_2 + 8I_3$
Analog Masche [ABEF]: $-5\text{A} = 2I_2 - 3I_3 \Rightarrow I_3 = \frac{2}{3}I_2 + \frac{5}{3}\text{A}$
Einsetzen in Masche [BCDE]: $17\text{A} = 5I_2 + \frac{16}{3}I_2 + \frac{40}{3}\text{A}$
Mit 3 multiplizieren und zusammenziehen:
$\Rightarrow 31I_2 = 11\text{A} \Rightarrow I_2 = 355\text{mA}$

[4]

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Durch eine Zylinderspule mit 2000 Windungen, einer Querschnittsfläche von 4cm^2 und einer Länge von 30 cm fließt ein Strom von 4 A.

(a) Berechnen sie allgemein das magnetische Feld im Inneren einer Spule mit n Windungen und der Länge l durch das Amperesche Gesetz (beachten Sie die Windungszahl). Das Feld im Inneren kann als konstant angenommen werden (vernachlässigen Sie Randeffekte). Wie groß ist B innerhalb der Spule?

(b) Berechnen Sie die Energiedichte des Magnetfeldes mit Hilfe der Beziehung $\omega = B^2/(2\mu_0)$.

(c) Berechnen Sie die in der Spule gespeicherte magnetische Energie.

(d) Geben Sie daraus die magnetische Energie pro Volumen Einheit innerhalb der Spule an. Vergleichen Sie das Resultat mit Ihrem Ergebnis der Teilaufgabe b.

Lösung

(a) Die senkrechten Wege liefern keinen Beitrag, da sie senkrecht auf dem Magnetfeld stehen. Außerhalb verschwindet der Integrand für alle Integrale. Damit bleibt nur noch das Integral innerhalb der Spule entlang der Achse. Durch die n Windungen muss der fließende Strom durch die umschlossene Flächen n-mal gezählt werden. Damit folgt aus Ampere:

$$\int_{P1}^{P2} \vec{\mathbf{B}}\mathbf{d}\vec{\mathbf{S}} = Bl = \mu_0 nI \tag{12}$$

damit folgt:

$$B = \mu_0 \frac{nI}{l} \tag{13}$$

$$B = \mu_0 \frac{n}{l} I = (4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-2}) \frac{2000}{0,3\mathrm{m}} \cdot 4\mathrm{A} = 33.5\mathrm{mT} \tag{14}$$

[**3**]

(b)

$$\omega_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(33.5\mathrm{mT})^2}{2 \cdot 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-2}} = 447\mathrm{Jm}^{-3} \tag{15}$$

[**1**]

(c) Die in der Spule gespeicherte magnetische Energie ist $E_{mag} = \frac{1}{2}LI^2$. Mit der Windungszahl n und der Länge l gilt für die Selbstinduktivität

$$L = \mu_0 \left(\frac{n}{l}\right)^2 Al \tag{16}$$

Dies setzen wir ein und erhalten

$$\begin{aligned} E_{mag} &= \frac{1}{2}\mu_0 \left(\frac{n}{l}\right)^2 AlI^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{N} \cdot \mathrm{A}^{-2} \left(\frac{2000}{0,3\mathrm{m}}\right)^2 \\ &\cdot 4 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \cdot 0,3\mathrm{m} \cdot (4\mathrm{A})^2 = 53,6\mathrm{mJ} \end{aligned} \tag{17}$$

[**3**]

(d) Es ergibt sich

$$\frac{E_{mag}}{Al} = \frac{53,6\mathrm{mJ}}{4 \cdot 10^{-4}\mathrm{m}^2 \cdot 0,3\mathrm{m}} = 447\mathrm{Jm}^{-3} \tag{18}$$

[**9**]

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Zwei kurze, große Spulen (N Windungen, Radius R), welche parallel zur $x-y$-Ebene ausgerichtet sind werden allgemin als Helmholtzspulen bezeichnet. Werden die beiden Spulen gegensinning von einem Strom I durchflossen wird das als Maxwellspulenpaar bezeichnet. Die Mittelpunkte der Spulen liegen bei $z_1 = +h$ und $z_2 = -h$.

(a) Berechnen sie das resultierende Magnetfeld in z-Richtung, welches von den beiden gegensinning durchflossenen Spulen erzeugt wird mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes.

(b) Zeichen sie qualitativ das resultierende Magnetfeld in z-Richtung. Was fällt für den Bereich zwischen den beiden Spulen auf?

Lösung

(a) Das Magnetfeld einer Spule mit N Windungen kann über das Biot-Savart-Gesetz bestimmt werden.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 IN}{4\pi}\frac{d\vec{s}\times(\vec{r}-\vec{s})}{|\vec{r}-\vec{s}|^3} \tag{19}$$

[1]

Für die Spule bei $z = +h$ wird folgende Parametrisierung gewählt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} R\cos(\phi) \\ R\sin(\phi) \\ +h \end{pmatrix}$$

$$d\vec{s} = \begin{pmatrix} -R\sin(\phi) \\ R\cos(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

[2]

Da nur das Magnetfeld in z-Richtung ($\vec{r} = z\vec{e_z}$) benötigt wird folgt:

$$(\vec{r}-\vec{s})\times d\vec{s} = \begin{pmatrix} -(z-h)R\cos(\phi) \\ -(z-h)R\sin(\phi) \\ R^2 \end{pmatrix} d\phi$$

$$|\vec{r}-\vec{s}| = \sqrt{R^2 + (z-h)^2}$$

[2]

Wird dies in das Biot-Savart-Gesetz eingesetzt und integriert ergibt sich für das resultierende Magnetfeld der oberen Spule

$$\vec{B_1} = -\frac{\mu_0 IN}{2}\frac{R^2}{(R^2+(z-h)^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_z}$$

[1]

Die x- und y-Komponente fallen aufgrund der Integration des Sinus beziehungsweise Kosinus über ein Intervall von $[0, 2\pi]$ weg.
Das Magnetfeld der unteren Spule ergibt sich analog durch ersetzen von h durch $-h$, sowie I durch $-I$ zu:

$$\vec{B_2} = \frac{\mu_0 IN}{2}\frac{R^2}{(R^2+(z+h)^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e_z}$$

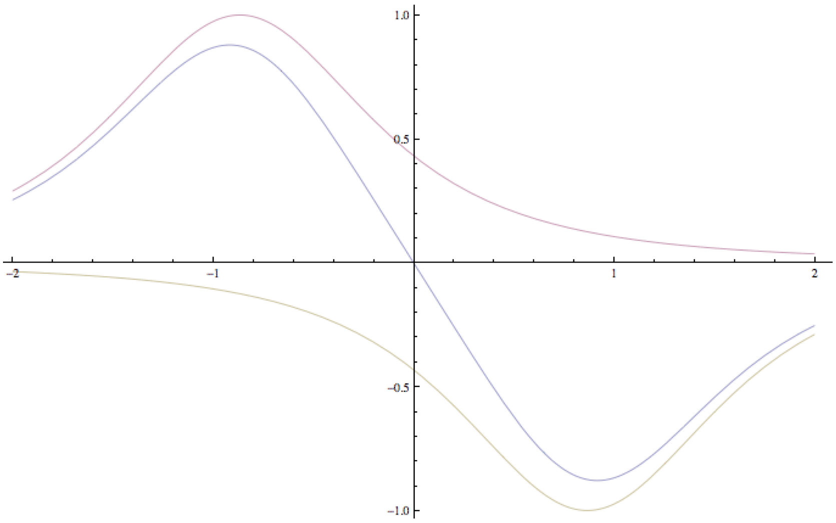
[1]

Das resultierende Magnetfeld dieser Anordnung folgt aus dem Superpositionsprinzip.

$$\vec{B} = \vec{B_1} + \vec{B_2} = \frac{\mu_0 INR^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + (z+h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(R^2 + (z-h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{e_z}$$

[**1**]

(b) Abbildung (b) zeigt qualitativ das resultierende Magnetfeld des Maxwellspulenpaars (in blau) als Überlagerung der beiden Magnetfelder der einzelnen Spulen (in rot und gelb).



[**1**]

Für den Bereich zwischen den Spulen fällt auf, dass das Magnetfeld annähernd linear abfällt beziehungsweise ansteigt von Spule zu Spule. Das Maxwellspulenpaar ist also besonders gut geeignet einen konstanten Feldgradienten zu erzeugen.

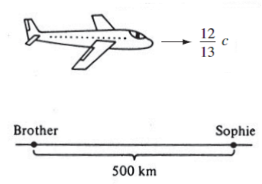
[**1**]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Sophie Zabar, eine Hellseherin, schreit genau in dem Moment auf als sich ihr Zwillingsbruder, 500 km entfernt, mit dem Hammer auf den Daumen schlägt. Ein skeptischer Wissenschaftler beobachtet beide Ereignisse (Unfall des Bruders und Sophies Aufschrei) als er sich in einem Flugzeug, welches sich mit einer Geschwindigkeit von $v = \frac{12}{13}c$ nach rechts bewegt (siehe Abbildung). Welches Ereignis ist laut dem Wissenschaftler zuerst passiert? Wie viel früher ist es passiert?

Lösung

Der Unfall des Bruders passiert in beiden Bezugssystemen (ungestri 1chene Größen in Sophies Bezugssystem, gestrichene in dem des Wissenschaftlers) im Ursprung zur Zeit $t_1 = t_1' = 0$. In Sophies Bezugssystem ereignet sich ihr Aufschrei am Ort $x_2 = 500\,\text{km}$ zur Zeit $t_2 = 0$. Da wir



uns nun im Bezugssystem des Wissenschaftlers befinden, wird eine Lorentztransformation der Zeit durchgeführt.

$$\bar{t'} = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \tag{20}$$

[**1**]

Für die Zeit von Sophies Aufschrei im Bezugssystems des Wissenschaftlers ergibt sich

$$\bar{t'_2} = -\gamma\frac{v}{c^2}x_2 = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{c^2}x_2 = -4,0\text{ms}$$

[**1**]

Diese Zeit ist negativ und somit schreit Sophie laut dem Wissenschaftler auf vor dem Unfall ihres Bruders.

[**2**]

Konstanten

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$

$e = 1.60 \cdot 10^{-19}\text{C}$

$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\text{kg}$

$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}\text{mkgs}^{-2}\text{A}^{-2}$

$c = 3 \cdot 10^8\text{m/s}$