2. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Back
Wintersemester 2021/22
25. Januar 2022

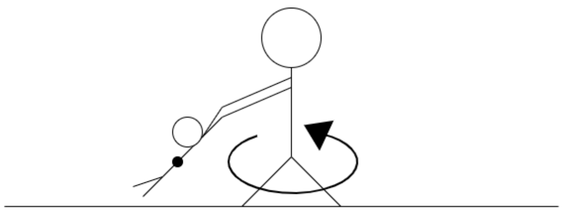
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Ein Mann steht am Rand eines Wasserbeckens in einem Freibad und wirbelt sein Kind, wie unten gezeigt, im Kreis herum. Der Schwerpunkt des Kindes ist $r = 86\,\mathrm{cm}$ senkrecht von der Drehachse entfernt und eine Umdrehung dauert $T = 1.5\,\mathrm{s}$. Betrachten Sie das Kind im folgenden vereinfacht als punktförmiges Teilchen.



(a) Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ lässt der Vater das Kind los. Berechnen Sie die horizontale Flugweite des Kindes bis zum Auftreffen auf der Wasseroberfläche, wenn sich diese $3\,\mathrm{m}$ unterhalb des Beckenrandes befindet.

(b) Nehmen Sie an, dass das Kind bei $1\,\mathrm{m}$ Eintauchtiefe vollständig abgebremst ist. Nehmen sie an, dass im Wasser keine Graviation auf das Kind wirkt (Kind hat die gleiche Dichte wie Wasser). Wie stark ist die konstante Gesamtbeschleunigung, die das Wasser auf das Kind ausübt (in Einheiten von g).

Lösung

(a) Die tangentiale Geschwindigkeit des Kindes zum Zeitpunkt t_0 lautet:

$$v_x = \omega \cdot r \qquad \text{mit } \omega = \frac{2\pi}{T} \tag{1}$$

Daraus folgt:

$$v_x = \frac{2\pi}{T} \cdot r = \frac{8}{7}\pi = 3.6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{2}$$

[3]

Der Ortsvektor des Kindes $\vec{r}(t)$ lautet damit:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } y_0 = 3\,\text{m} \tag{3}$$

Die Fallzeit beträgt also:

$$y(t_F) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 = 0 \tag{4}$$

$$\Rightarrow t_F = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} = 0.782\,\text{s} \tag{5}$$

Schließlich folgt für die Flugweite:

$$x(t_F) = v_x \cdot t_F = 2.815\,\text{m} \tag{6}$$

[**3**]

(b) Der Eintauchwinkel α zur Senkrechten ist gegeben durch (siehe Abbildung):

$$\alpha = \arctan\left(\left.\frac{v_x}{v_y}\right|_{t=t_F}\right) = \arctan\left(\frac{v_x}{-gt_F}\right) = 25.14° \tag{7}$$

Für die Beschleunigung in y-Richtung folgt damit:

$$a_y = \frac{\Delta v}{t_b} = \frac{v_y}{t_b} \quad \Rightarrow \quad t_b = \frac{v_y}{a} \tag{8}$$

[**2**]

Folglich gilt:

$$y(t) = \frac{1}{2}at_b^2 + v_y(t_F)t_b \stackrel{!}{=} -y_t \qquad \text{mit } t_b = \frac{v_y}{a} \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}\frac{v_y^2}{a} + \frac{v_y^2}{a} = -y_t \tag{10}$$

$$\frac{3}{2}\frac{v_y^2}{a} = -y_t \tag{11}$$

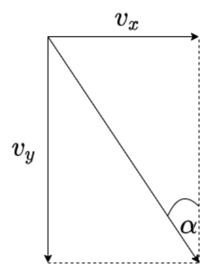
$$\Rightarrow a = -\frac{3}{2}\frac{v_y^2}{y_t} = -88.24\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \tag{12}$$

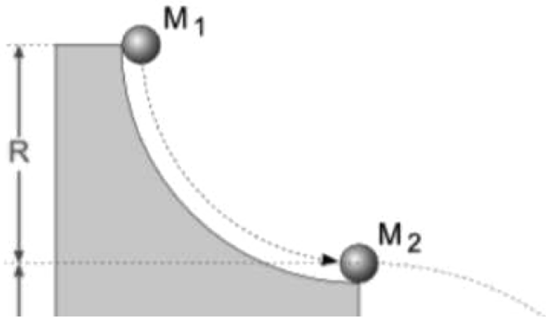
wobei verwendet wurde, dass $v_y(t_F) = -gt_F = -7.67\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Schließlich folgt für die Gesamtbeschleunigung:

$$\cos\alpha = \frac{a_y}{a_{ges}} \quad \Rightarrow \quad a_{ges} = \frac{a_y}{\cos\alpha} = -97.47\,\text{m}\,\text{s}^{-2} = -10g \tag{13}$$

[**4**]





Aufgabe 2 (13 Punkte)

Die oben liegende Kugel mit Masse M_1 folgt der Bahn und stößt mit der Masse M_2, siehe Abbildung. Die Massen sind Punktmassen.

(a) Gehen Sie zunächst vom zentralen elastischen Stoß aus. Welche Erhaltungsgrößen gelten? Leiten Sie her, dass die zweite Kugel direkt nach dem Stoß die Geschwindigkeit $v_2' = \sqrt{8gR} \cdot \frac{M_1}{M_1+M_2}$ besitzt.

(b) Wie groß muss das Massenverhältnis $\frac{M_1}{M_2}$ sein, um die erste Kugel bis auf ihre halbe Anfangshöhe zurückgleiten zu lassen?

(c) Rechnen Sie nun mit dem zentralen (total) inelastischen Stoß. Wie schnell ist die Kugel jetzt beim Abflug?

(d) Wie viel Energie ΔE geht in diesem Fall beim Stoß verloren?

Lösung

Im Folgenden seien $v_1,\ v_2$ die Geschwindigkeiten der Kugeln vor und $v_1',\ v_2'$ die Geschwindigkeiten der Kugeln nach dem Stoß. Beachten Sie, dass diese auch negativ sein können.

(a) Beim elastischen Stoß gelten die Impulserhaltung:

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v_1' + M_2 v_2' \tag{14}$$

und die Energieerhaltung:

$$\frac{M_1}{2} v_1^2 + \frac{M_2}{2} v_2^2 = \frac{M_1}{2} v_1'^2 + \frac{M_2}{2} v_2'^2 \tag{15}$$

[2]

Die Formeln lassen sich umstellen zu:

$$M_1(v_1 - v_1') = M_2(v_2' - v_2) \tag{16}$$

und:

$$\frac{M_1}{2}(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = \frac{M_2}{2}(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) \tag{17}$$

Daraus ergeben sich:

$$v_1' = \frac{(M_1 - M_2)v_1 + 2M_2v_2}{M_1 + M_2} \quad \text{und} \quad v_2' = \frac{(M_2 - M_1)v_2 + 2M_1v_1}{M_1 + M_2} \tag{18}$$

Setzt man nun die Anfangsbedingungen:

$$\frac{M_1}{2}v_1^2 = M_1gR \quad \text{und} \quad v_2 = 0 \tag{19}$$

ein (Erdbeschleunigung g), so folgt:

$$v_1' = \sqrt{2gR} \cdot \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} \quad \text{und} \quad v_2' = \sqrt{8gR} \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{20}$$

[**3**]

(b) Um die halbe Starthöhe (über der Endhöhe h) zu erreichen, muss die erste Kugel die Energie $\frac{M_1}{2}v_1'^2 = M_1 g \frac{R}{2}$ aufbringen, d.h. die Anfangsgeschwindigkeit muss $v_1' = -\sqrt{gR}$ sein. Das Minus ergibt sich rein physikalisch: Die Kugel bewegt sich rückwärts! Setzt man dies gleich des zuvor berechneten Ausdrucks für v_1', so wird:

$$\sqrt{2} \cdot \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1} = 1 \tag{21}$$

Nach längerem Umstellen kommt man auf:

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} \approx 0.17 \tag{22}$$

[**4**]

(c) Nach einem total inelastischen Stoß haben beide Kugeln dieselbe Geschwindigkeit. Der Impulserhaltungssatz lautet hier also:

$$M_1v_1 + M_2v_2 = (M_1 + M_2)v' \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{M_1v_1 + M_2v_2}{M_1 + M_2} \tag{23}$$

Setzt man v_1 und v_2 wie im ersten Aufgabenteil ein, ergibt sich:

$$v' = \sqrt{2gR} \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2} \tag{24}$$

Das ist die halbe Geschwindigkeit vom elastischen Fall.

[**2**]

(d) Da die Geschwindigkeiten vor und nach dem inelastischen Stoß nun bekannt sind, lässt sich daraus die „veloren gegangene“Energie ΔE während des Stoßes berechnen:

$$\Delta E = \frac{M_1}{2}v_1^2 + \frac{M_2}{2}v_2^2 - \frac{M_1 + M_2}{2}v'^2 \tag{25}$$

Es ergibt sich schließlich:

$$\Delta E = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} gR \tag{26}$$

Dies entspricht der kinetischen Energie, die ein Körper der reduzierten Masse aus M_1 und M_2 hätte, wenn er wie M_1 die „Startbahn“hinunter glitte.

[**2**]

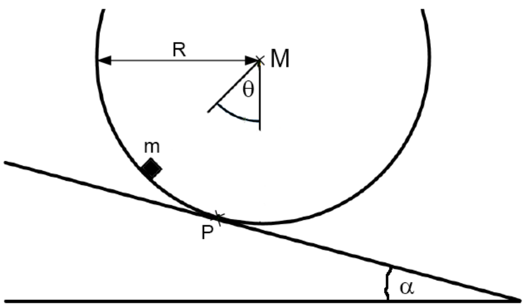
Aufgabe 3 (12 Punkte)

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel α liegt ein Hohlzylinder mit Masse M und Radius R. In diesem Zylinder befindet sich ein ortsfester Block der Masse m (siehe Abbildung). Der Zylinder kann nur auf der Ebene rollen und nicht rutschen.

(a) Fertigen Sie eine Zeichnung an, in der Sie die wirkenden Kräfte und Hebelarme für die Drehmomente einzeichnen, wenn sich der Zylinder um den Auflagepunkt P drehen kann.

(b) Stellen Sie vektoriell die Kräfte $\vec{F_i}$ und Hebelarme $\vec{r_i}$ auf und bestimmen Sie daraus die um den Auflagepunkt wirkenden Drehmomente $\vec{D}_i$.

(c) Die Masse m sei so groß gewählt, dass der Zylinder die Ebene hinaufrollt. Bestimmen Sie den Winkel θ zur Vertikalen (siehe Abbildung) bei dem der Zylinder in Ruhe liegen bleibt (in Abhängigkeit von α, M und m).

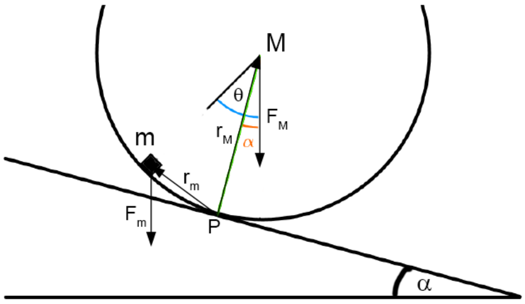


Lösung

(a) [**4**]

(b)

$$\vec{F}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$



Und der Hebel r_m kann aufaddiert werden:

$$\vec{r}_M = \begin{pmatrix} R \cdot \sin(\alpha) \\ R \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_m = \begin{pmatrix} R \cdot \sin(\alpha) \\ R \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \cdot \sin(\theta) \\ -R \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot (\sin(\alpha) - \sin(\theta)) \\ R \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und im Kreuzprodukt:

$$\vec{D}_M = \vec{r}_M \times \vec{F}_M = \begin{pmatrix} R \cdot \sin(\alpha) \\ R \cdot \cos(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \cdot M \cdot g \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\vec{D}_m = \vec{r}_m \times \vec{F}_m = \begin{pmatrix} R \cdot (\sin(\alpha) - \sin(\theta)) \\ R \cdot (\cos(\alpha) - \cos(\theta)) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \cdot m \cdot g (\sin(\theta) - \sin(\alpha)) \end{pmatrix}$$

[**6**]

(c) Bilanzgleichung für das Drehmoment:

$$R \cdot M \cdot g \sin(\alpha) = R \cdot m \cdot g (\sin(\theta) - \sin(\alpha)) \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow (M + m) \sin\alpha = m \sin\theta \tag{28}$$

$$\Rightarrow \theta = \arcsin\left(\left(\frac{M+m}{m}\right) \sin\alpha\right) \tag{29}$$

[**2**]

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein 1000 m breiter Fluss fließt mit einer Geschwindigkeit von $2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in einer geographischen Breite von 55° (Nord) von Süd nach Nord. Wie groß ist der Pegelunterschied zwischen dem westlichen und dem östlichen Ufer?

Hinweis: Die Flussoberfläche stellt sich so ein, dass sie senkrecht zur wirkenden Gesamtkraft steht.

Lösung

Der Flussquerschnitt und das Kräftedreieck bilden ähnliche Dreiecke (b = Flussbreite, h = Pegelunterschied):

$$\frac{h}{b} = \frac{F_c}{F_g} = \frac{a_c}{a_g} \tag{30}$$

Nun brauchen wir die Radialgeschwindigkeit des Flusses senkrecht zur Drehachse ($\vec{\omega}$):

$$a_c = |2\vec{v} \times \vec{\omega}| = 2(v \cdot \sin(55°))\omega \tag{31}$$

Hierbei ist die Drehgeschwindigkeit der Erde $\omega = \frac{2\pi}{1\ \mathrm{d}}$ mit einem Sterntag 1 d = 23.93 h:

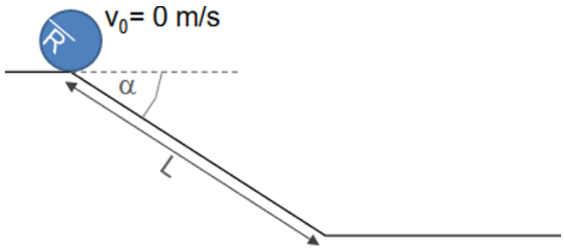
$$h = b \cdot \frac{a_c}{a_g} = b \cdot \frac{2(v \cdot \sin(55°))\omega)}{g} = 2.4\,\mathrm{cm} \tag{32}$$

Dabei ist der Wasserstand im Osten höher.

[**4**]

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Ein leeres Bierfass mit Masse $m = 12\,\mathrm{kg}$ und Radius $R = 18\,\mathrm{cm}$ wird oberhalb einer Rampe, die $\alpha = 30°$ geneigt ist und eine Länge von $L = 5\,\mathrm{m}$ hat (siehe Bild), aus dem Stand losgelassen und rollt die Rampe hinunter. Der Rollreibungskoeffizient $\mu_{\mathrm{Roll}} = 0.02$ gilt auf allen Flächen.



(a) Welchen Geschwindigkeitsbetrag $|\vec{v}_1|$ hat das Fass am Ende der Rampe (Rollreibung muss berücksichtigt werden)?

(b) Welche Strecke L_2 rollt das Fass vom Ende der Rampe bis zum Stillstand?

(c) Würde ein mit Flüssigkeit der Masse $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$ gefülltes Fass weiter, gleich weit oder weniger weit rollen? Gehen Sie davon aus, dass sich das Wasser im Fass nicht mitdreht und keine Reibung im Fass herrscht. Begründen Sie über Rechnung.

Lösung

Das Trägheitsmoment beträgt

$$T = mR^2 \tag{33}$$

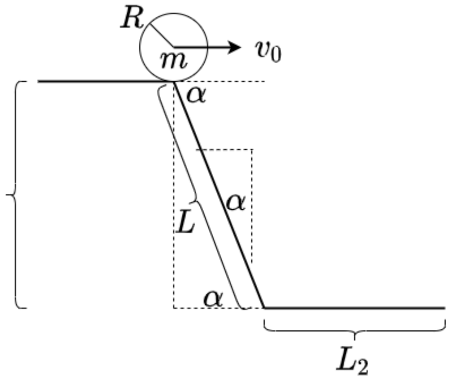
(a) Die Geschwindigkeit $|\vec{v}_1|$ am Ende der Rampe lässt mit dem Energieerhaltungssatz berechnen:

$$\frac{m}{2}|\vec{v}_1|^2 + \frac{T}{2}|\vec{\omega}_1|^2 + \mu_{\mathrm{Roll}} \cdot |\vec{N}| \cdot L = mgh, \tag{34}$$

[**2**]

wobei gilt (siehe Abbildung):

$$|\vec{\omega}_1| \cdot R = |\vec{v}_1|, \qquad |\vec{N}| = mg \cdot \cos\alpha = 10.1\,\mathrm{N}, \qquad h = L \cdot \sin\alpha = 2.5\,\mathrm{m} \tag{35}$$



Damit erhält man:

$$\underbrace{\left(\frac{m}{2}+\frac{T}{2R^2}\right)}_{=m}|\vec{v}_1|^2 = mgh - \mu_{\text{Roll}}\cdot|\vec{N}|\cdot L = 294\,\text{J} - 10\,\text{J} = 284\,\text{J} \tag{36}$$

und schließlich:

$$|v_1| = \sqrt{\frac{mgh-\mu_{\text{Roll}}\cdot|\vec{N}|\cdot L}{\frac{m}{2}+\frac{T}{2R^2}}} = \sqrt{gh - g\mu_{\text{Roll}}\cdot\cos\alpha\cdot L} = 4.86\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \tag{37}$$

[**4**]

(b) Auch der Rollweg L_2 hinter der Rampe lässt sich mit dem Energieerhaltungssatz lösen:

$$\frac{m}{2}|v_1|^2 + \frac{T}{2}|\vec{\omega}_1|^2 = m|v_1|^2 = \mu_{\text{Roll}}\cdot m\cdot g\cdot L_2 \tag{38}$$

Aufgelöst nach L_2 erhält man:

$$L_2 = \frac{|v_1|^2}{\mu_{\text{Roll}}\cdot g} = 120.7\,\text{m} \tag{39}$$

[**2**]

(c) Unter der Annahme, dass das Fass nun mit Flüssigkeit der Masse $m_2 = 50\,\text{kg}$ gefüllt ist liefert der Energieerhaltungssatz für die Geschwindigkeit $|\vec{v}_1|$ (Vorgehen wie bei Teilaufgabe (a)):

$$m|\vec{v}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\vec{v}_1|^2 = (m+m_2)(g\cdot h - \mu_{\text{Roll}}\cdot L\cdot g\cdot\cos\alpha) \tag{40}$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{\frac{m+m_2}{m+\frac{m_2}{2}}}\sqrt{g\cdot h - \mu_{\text{Roll}}\cdot L\cdot g\cdot\cos\alpha} = 6.3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{41}$$

Für die Strecke L_2 ergibt sich dann (Vorgehen wie bei Teilaufgabe (b)):

$$m|\vec{v}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\vec{v}_1|^2 = (m+m_2)\mu_{\text{Roll}}\cdot g\cdot L_2 \tag{42}$$

$$L_2 = \frac{g\cdot h - \mu_{\text{Roll}}\cdot L\cdot g\cdot\cos\alpha}{\mu_{\text{Roll}}\cdot g} = 120.7\,\text{m} \tag{43}$$

Folglich rollt das mit Flüssigkeit gefüllte Fass gleich weit wie das Leere.

[**4**]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zwei homogene Zylinderscheiben ($m,\ r_1,\ \omega_1$ und $m,\ r_2,\ \omega_2$) rotieren parallel zueinander um dieselbe Achse. Nun werden die beiden Scheiben entlang der Achse aneinander geschoben, bis sie sich berühren und durch Reibung ihre Winkelgeschwindigkeiten komplett angleichen.

(a) Wie groß ist dann die neue Winkelgeschwindigkeit ω?

(b) Welcher Bruchteil der Anfangsenergie geht verloren?

Tipp: Was ist hier eine Erhaltungsgröße?

Lösung

(a) Der Drehimpuls bleibt erhalten, die Rotationsenergie wegen der Reibung nicht.

$$\omega = \frac{L}{J} = \frac{L_1 + L_2}{J_1 + J_2} = \frac{J_1\omega_1 + J_2\omega_2}{J_1 + J_2} = \frac{r_1^2\omega_1 + r_2^2\omega_2}{r_1^2 + r_2^2} \tag{44}$$

[**2**]

(b)

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{E_0 - E_1}{E_0} = 1 - \frac{E_1}{E_0} \tag{45}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{2}(J_1 + J_2)\omega^2}{\frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2} \tag{46}$$

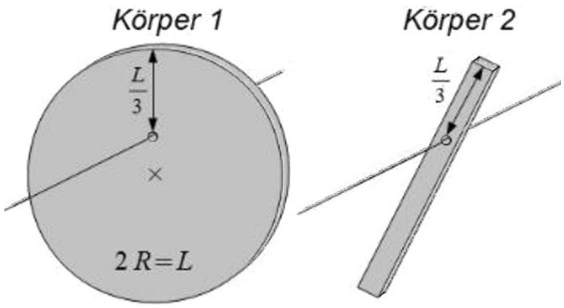
$$= 1 - \frac{(r_1^2 + r_2^2)\omega^2}{r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2} \tag{47}$$

$$= \frac{r_1^2 r_2^2 \cdot (\omega_1 - \omega_2)^2}{(r_1^2\omega_1^2 + r_2^2\omega_2^2)(r_1^2 + r_2^2)} \tag{48}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Im Folgenden sind verschiedene flache, homogene Körper drehbar an einer Achse im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g aufgehängt.



(a) Stellen Sie die Differentialgleichung für den Auslenkungswinkel eines beliebigen aufgehängten starren Körpers mit Masse M und Trägheitsmoment I_A bezüglich der Drehachse auf. Lösen Sie die Differentialgleichung in der Kleinwinkelnäherung mit Hilfe eines Exponentialansatzes und leiten Sie die Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{\frac{Mgd_s}{I}}$ her, wobei d_s der Abstand des Aufhängepunkts vom Schwerpunkt sei.

(b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment I_1 einer Scheibe ($I_S = \frac{1}{8}ML^2$ bzgl. ihres Schwerpunktes) bezüglich einer Drehachse, die $\frac{1}{3}L$ vom Rand entfernt ist. Geben Sie die Schwingungsdauer T des Scheibenpendels an.

(c) Berechnen Sie explizit durch Integration das Trägheitsmoment I_2 eines Stabes der Länge L und Masse M (Körper 2) bezüglich der Drehachse, die $\frac{1}{3}L$ von einem Ende entfernt ist. Geben Sie die Schwingungsdauer T des Stangenpendels an.

Lösung

(a) Im Folgenden wird mit skalaren Größen gerechnet da $D \parallel L$.

Die Bewegungsgleichung lautet:

$$D = \dot{L} = (\dot{I\omega}) = I\dot{\omega} = I\ddot{\varphi} \tag{49}$$

Durch die Gewichtskraft wird das Drehmoment ausgeübt:

$$|\vec{D}| = |\vec{r} \times \vec{F}_G| = dMg\sin\varphi \quad \xrightarrow{\varphi \text{ klein}} \quad dMg\varphi \tag{50}$$

Die DGL für das rücktreibende Drehmoment lautet also:

$$-dMg\varphi = I\ddot{\varphi} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\varphi} = -\frac{dMg}{I}\varphi \tag{51}$$

Zur Lösung dieser DGL wird der Exponentialansatz verwendet:

$$\varphi(t) = Ae^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi}(t) = -A\omega^2 e^{i\omega t} \tag{52}$$

Einsetzen in die DGL liefert für ω:

$$\omega^2 = \frac{dMg}{I} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{dMg}{I}} \tag{53}$$

[**4**]

(b) Analog zu Aufgabe (b) folgt mit dem Satz von Steiner:

$$I_2 = I_{\text{Scheibe}} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{11}{72}ML^2 \tag{54}$$

Und für die Schwingungsdauer T_2 erhält man:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{11}{72}ML^2}{Mg\left(\frac{L}{6}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{11L}{12g}} \tag{55}$$

[**2**]

(c) Allgemein gilt:

$$I = \int r_\perp^2 \, dm \tag{56}$$

Für homogene Körper bedeutet dies:

$$I = \rho \int_V r_\perp^2 \, dV \tag{57}$$

Weiterhin gilt:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \tag{58}$$

Unter der Annahme, dass sich der Drehpunkt in der Stabmitte befindet und unter Verwendung einer Liniendichte $\rho = \frac{M}{L}$ folgt:

$$I_{\text{Stab}} = 2\rho \int_0^{L/2} z^2 dz = 2\rho\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}\frac{M}{L}L^3 = \frac{1}{12}ML^2 \tag{59}$$

Der Abstand zwischen Schwerpunkt und Drehpunkt beträgt $d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$. Damit folgt für I_1 mit dem Satz von Steiner:

$$I_1 = I_{\text{Stab}} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}ML^2 \tag{60}$$

Für die Schwingungsdauer T_1 gilt damit:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{9}ML^2}{Mg\frac{L}{6}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \tag{61}$$

[**6**]

Aufgabe 8 (11 Punkte)

Ein waagrecht fliegendes Projektil mit Masse m dringe mit Geschwindigkeit v_0 in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß ein. In diesem Gefäß wirkt eine Reibungskraft, die entweder proportional zum Betrag der Geschwindigkeit v ist (Stokes-Reibung) oder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v^2 ist (Newton-Reibung).

(a) Stellen Sie in beiden Fällen die Bewegungsgleichung auf und bestimmen daraus eine Differentialgleichung für v.

(b) Lösen Sie jeweils die Differentialgleichung für v.

(c) Wie weit dringt das Projektil jeweils maximal in das Gefäß ein?

Lösung

Stokes-Reibung

(a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$$

die Differentialgleichung für $v = \dot{x}$ ist somit

$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v$$

[2]

(b) Die Differentialgleichung ist die definierende Gleichung der Exponentialfunktion und somit ist die Lösung

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right),$$

wobei wir die Integrationskonstante v_0 genannt haben, da es sich um den Wert bei $v(0)$ handelt.

[1]

(c) Die maximale Eindringtiefe ist

$$l = \int_0^\infty v_0 \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}\,\mathrm{d}t = \frac{mv_0}{\gamma}.$$

[2]

Newton-Reibung

(a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x}^2$$

die Differentialgleichung für $v = \dot{x}$ ist somit

$$\dot{v} = -\frac{\kappa}{m}v^2$$

[2]

(b) Die Differentialgleichung ist trennbar. Die Lösung ist implizit gegeben durch

$$t = -\frac{m}{\kappa}\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{m}{\kappa}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Auflösen nach v liefert

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\kappa v_0}{m}t}.$$

[**2**]

(c) Das Integral für die Eindringtiefe

$$l = \int_0^\infty \frac{v_0}{1 + \frac{\kappa v_0}{m} t} \, \mathrm{d}t \to \infty$$

wächst über alle Grenzen, so dass das Projektil theoretisch beliebig weit eindringt. Allerdings ist die Annahme, die Reibung sei exakt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit für hinreichend kleine Geschwindigkeiten nicht mehr erfüllt – hier dominiert dann die Stokes-Reibung, die das Projektil schließlich stoppt.

[**2**]