A. 0050

MZ Physik, Stbgl. Prüfung, 16.2.06. -1- A

1. Aufg.

1. $Q(-1) = -1 + 7 - 6 = 0$, $Q(-2) = -8 + 14 - 6 = 0$
$Q(3) = 27 - 21 - 6 = 0$ (1)

Grad $P = 3 \Rightarrow Q$ hat höchstens 3 versch. N. S. (1)
$\Rightarrow -1, -2, 3$ sind genau die N. S. von Q

2. $$R(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-3}$$ (3)

$\Leftrightarrow$ $A(z+2)(z-3) + B(z+1)(z-3) + C(z+1)(z+2)$
$= 6z^2 + 4z - 6$

$z = -1$: $A(-4) = 6 - 4 - 6 = -4 \Rightarrow A = 1$
$z = -2$: $B \cdot 5 = 24 - 8 - 6 = 10 \Rightarrow B = 2$ (2)
$z = 3$: $C \cdot 20 = 54 + 12 - 6 = 60 \Rightarrow C = 3$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{2}{z+2} + \frac{3}{z-3}$$ (1)

3. $$\int_0^2 \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}\,dx = \int_0^2 R(x)\,dx \overset{2.}{=}$$

$$= \int_0^2 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^2 \frac{dx}{x+2} + 3\int_0^2 \frac{dx}{x-3}$$ (1)

$$= \ln(x+1)\Big|_0^2 + 2\ln(x+2)\Big|_0^2 + 3\ln|x-3|\Big|_0^2$$ (1)

$= \ln 3 - \ln 1 + 2(\ln 4 - \ln 2) + 3(\ln 1 - \ln 3)$
$= -2\ln 3 + 2(2\ln 2 - \ln 2) =$ (1)
$= 2\ln 2 - 2\ln 3$
$(a = 2,\ b = -2)$

$\boxed{11}$

M2 Physik, Stlgl. Prüfung 16.2.06 -2- A

2. Aufg.

$z = x + iy$

$z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 5 + 12i$

$\Leftrightarrow$

$x^2 - y^2 = 5$ und $2xy = 12$ (1)

$\Downarrow$

$y = \frac{6}{x}$

$x^2 - \frac{36}{x^2} = 5$ (1)

$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(5 \pm \underbrace{\sqrt{25+144}}_{169})$

$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}(5 \pm 13)$ (1)

$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 2$ (1)

$\Rightarrow z = \pm(3 + 2i)$ (1)

(Es sind Lösungen. Probe oder Gl. 2. Grades nach Theorie 2 Lösungen).

$|z| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ (1)

tan (Polarwinkel z) $= \frac{2}{3}$ (1)

Variante zu $|z|$ und Polarwinkel (1), falls nicht vergeben | 17

$|z|^2 = |5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$

Sei $\alpha :=$ Polarwinkel von z. Dann ist 2α der Polarwinkel von $5 + 12i$. $\frac{12}{5} = \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\Rightarrow \tan^2\alpha + \frac{5}{6}\tan\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + 4}\right)$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{12}(-5 \pm 13) \rightarrow \frac{8}{12} = \frac{2}{3} > 0$

(2), falls z nicht berechnet wurde

Variante Aufg. 2

$a := 5 + 12i$

Gesucht $z \in \mathbb{C}$, $z^2 = a$

$\alpha :=$ Polarwinkel von z, $\beta :=$ Polarwinkel von a.

$|z|^2 = |a| = \sqrt{25 + 144} = 13 \Rightarrow |z| = \sqrt{13}$

$\tan \beta = \frac{12}{5}$

$z^2 = a \Rightarrow 2\alpha = \beta$, wegen $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, und $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

eine der beiden Lösungen

$$\frac{12}{5} = \tan \beta = \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Formelsammlung

$$\Rightarrow 1 - \tan^2 \alpha = \frac{5}{6} \tan \alpha$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \frac{5}{6} \tan \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} + 4}\right) = \frac{1}{12}\left(-5 \pm \sqrt{169}\right)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{12}(13 - 5) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \text{ da } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{Im} z}{\sqrt{13 - \operatorname{Im}^2 z}} = \frac{y}{\sqrt{13 - y^2}} = \frac{2}{3}$$

$y := \operatorname{Im} z$

$$\Rightarrow 3y = 2\sqrt{13 - y^2} \Rightarrow 9y^2 = 4(13 - y^2)$$

$$\Rightarrow 13 y^2 = 4 \cdot 13 \Rightarrow y = 2$$

$$x = \sqrt{13 - y^2} = 3$$

$z = \pm(3 + 2i)$ Lösung.

HM2 Physik, Stdgl. Pr. 16.2.06 -J- A

3. Aufg.

1. $g'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$, $g''(x) = 2 + \frac{2}{x^3}$, $g'''(x) = -\frac{6}{x^4}$ (1)

2. $g'(x) < 0$ für $x < 0$ $\Rightarrow$ g streng mon. fallend (1)

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ (1)

4. g streng mon. fallend (1)
$\Rightarrow$ g besitzt Umkehrfunktion f

(a) $D = g(]-\infty, 0[) =]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$, nach Nr. 3 und ZWS für stetige Funktionen. (1)
$f(D) =]-\infty, 0[$ (= Def. Menge) (1)

(b) $f(0) = -1$, da $g(-1) = 1 + \frac{1}{-1} = 0$ (1)

(c) $f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{g'(f(0))} = \frac{1}{g'(-1)} = -\frac{1}{3}$ (1)

$f''(x) = \frac{-g''(f(x))f'(x)}{(g'(f(x)))^2} = -g''(f(x))(f'(x))^3$ (1)

$\Rightarrow f''(0) = -\underbrace{g''(-1)}_{=0}(f'(0))^3 = 0$ (1)

$f'''(0) = -g'''(\underbrace{f(0)}_{=-1})(f'(0))^4 - 3g''(\overbrace{f(0)}^{=-1})(f'(0))^2 \overbrace{f''(0)}^{=0}$ oder $\overbrace{}^{=0}$

$= 6\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$ (1)

11

4. Aufg.

1. $|f(x)-f(y)| = \left|\frac{2+x}{5+x} - \frac{2+y}{5+y}\right| =$

$$= \left|\frac{10+5x+2y+xy-10-2x-5y-xy}{(5+x)(5+y)}\right|$$

$$= \left|\frac{3x-3y}{(5+x)(5+y)}\right| \le 3\,\frac{|x-y|}{\underbrace{(5+x)}_{\ge 2}\,\underbrace{(5+y)}_{\ge 2}} \le \frac{3}{4}|x-y| \qquad (3)$$

, da $x,y \ge -3$

$\forall x,y \in [-3,3]$

$\Rightarrow L = \frac{3}{4}$

2. Für $x \in [-3,3]$ gilt

$$\left|\frac{x+2}{x+5}\right| = \frac{|x+2|}{\underbrace{x+5}_{\ge 2}} \le |x+2|\cdot\frac{1}{2} \le (|x|+2)\cdot\frac{1}{2} \le \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow |f(x)| \le \frac{5}{2}$

$\Rightarrow f(x) \in [-3,3]$ (2)

3. $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2+x}{5+x} = x$

$\Leftrightarrow 2+x = x^2+5x \Leftrightarrow x^2+4x-2=0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(-4 \pm \sqrt{\underbrace{16+8}_{24=4\cdot 6}}\right) = -2 \pm \sqrt{6}$ (1)

$-2-\sqrt{6} < -2-1 < -3 \Rightarrow -\sqrt{2}-\sqrt{6} \notin [-3,3]$ (1)

$0 < \underbrace{\sqrt{6}}_{>2} - 2 < 3-2 = 1 \Rightarrow \sqrt{6}-2 \in [-3,3]$ (1)

Also $\bar{x} = \sqrt{6}-2$ eindeutig bestimmt durch $f(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{x} \in [-3,3]$

HM2 Physik, Stetigk. Pr. 16.2.06 - 5 - A

4. Folgt aus 2. (1)

5. $|x_n - \tilde{x}| = |f(x_{n-1}) - f(\tilde{x})|$ (2)

$\leq L\,|x_{n-1} - \tilde{x}| \leq \frac{3}{4}\,|x_{n-1} - \tilde{x}| \leq$

$\leq \ldots \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |x_0 - \tilde{x}| \leq 6\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (2)

insgesamt n-malige Ausführung

6. Aus 5. folgt:

$|x_n - \tilde{x}| \leq 6\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (1)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$ (1)

15

Variante zu 1. und 2.

$f'(x) = \frac{5+x-2-x}{(5+x)^2} = \frac{3}{(5+x)^2} > 0,$ (1)

$\Rightarrow$ f streng mon. wachsend.

$f(-3) = \frac{-1}{2} > -3,\quad f(3) = \frac{5}{8} < 3$ (1)

$\Rightarrow$ f monoton wachsend $\quad f([-3,3]) \subset [-3,3]$

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \underset{\text{M.W.}}{=} |f'(\xi)| = \frac{3}{\underbrace{(5+\xi)^2}_{\geq 2}} \leq \frac{3}{4} \quad \forall |x| \leq 3$ (2)

M.W., $-3 < \xi < 3$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \frac{3}{4}|x-y|$, also $L = \frac{3}{4}$ (1)