Aufgabenübersicht

Aufgabe 1: Wir betrachten die folgende Matrix mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$,

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 4-a & 0 \\ a & \sqrt{8} & -a \\ 0 & a-4 & \sqrt{8} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

und die durch A beschriebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $x \mapsto Ax$.

a) Zeigen Sie, dass $v = {}^t\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ unabhängig vom Parameter a stets ein Eigenvektor von f ist und geben Sie den dazugehörigen Eigenwert an.

b) Beweisen Sie, dass im Fall $a = 2$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von f existiert. (*Hinweis:* Es ist nicht verlangt, eine solche Basis explizit anzugeben!)

c) Wir betrachten den Fall $a = 4$. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall nicht diagonalisierbar ist und geben Sie eine Jordan-Normalform von f an.

d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(\lambda)$ genau dann über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, wenn gilt: $0 \leq a \leq 4$. Geben Sie in diesem Fall die Eigenwerte von f an.

e) Wir betrachten den Fall $0 < a < 4$. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2: Es sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine fest gewählte Matrix. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ aller $(n \times n)$ Matrizen über $\mathbb{C}$ und die Abbildung

$$f : V \to V \; ; \; A \mapsto AX - XA.$$

21232

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Beweisen Sie: $\mathrm{Lin}\{\mathbb{1}_n, X\} \subset \mathrm{Kern}(f)$.

c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

d) Wir betrachten nun den speziellen Fall $n = 2$ und $X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_B[f]_B$ von f bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ von V mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnen Sie für $n = 2$ und $X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ die Spur und die Determinante von f.

Aufgabe 3: Wir betrachten den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x|y\rangle = {}^t x \cdot y$ und die Vektoren

1243

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

welche einen Untervektorraum $U = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ aufspannen.

a) Zeigen Sie: $\dim(U) = 3$.

b) Folgern Sie $\dim(U^\perp) = 1$ und geben Sie eine Basis $\{v_4\}$ von $U^\perp$ an.

c) Stellen Sie den Vektor $w = {}^t\begin{pmatrix}2 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}$ als $w = w_U^{\parallel} + w_U^{\perp}$ mit $w_U^{\parallel} \in U$ und $w_U^{\perp} \in U^\perp$ dar.

d) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ an, dessen Lösungsraum der affine Teilraum $X = w + U \subset \mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 4: Ankreuzaufgabe