Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. K. Buchner
Dr. W. Aschbacher

SS 2004
1.9.2004
Analysis II

# Diplomvorprüfung: Lösungen

**Aufgabe 1** [ca. 7]
**(a)** Ja. Das Newtonsche Gravitationsfeld $x/|x|^3$: Es lebt auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (nicht sternförmig), besitzt aber dennoch das Potential $1/|x|$. [1]

**(b)** Sei $V$ ein endlichdimensionaler, reeller Vektorraum und $\alpha \in T_p^0(V)$. Dann ist $A : T_p^0(V) \to \Lambda^p(V)$ definiert durch

$$(A\alpha)(x_1, ..., x_p) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \mathrm{sign}(\pi)\ \alpha(x_{\pi(1)}, ..., x_{\pi(p)}), \quad x_1, ..., x_p \in V.$$

Dabei bezeichnet $S_p$ die Permutationsgruppe und $\mathrm{sign}$ ist die Signumsfunktion. [2]

**(c)** Positive Definitheit der reell-symmetrischen Matrix $A$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R},\, a_{ij} = a_{ji},$$

wird durch die strikte Positivität aller Abschnittsdeterminanten ausgedrückt:

$$D_1 := \det a_{11} = a_{11} > 0, \quad D_2 := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad D_3 := \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} > 0, ...$$
$$..., D_n := \det A > 0$$

$A$ ist definitionsgemäss negativ definit, falls $-A$ positiv definit ist, d.h.

$$D_1 < 0, \quad D_2 > 0, \quad D_3 < 0, ..., (-1)^n D_n > 0$$

[2]

**(d)**
Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Kuben der grossen Achsen. [2]

**Aufgabe 2** [ca. 8]
**(a)** Wir diskutieren das Verhalten im Ursprung und im Unendlichen getrennt.
Im Ursprung:

$$\int_0^1 x^x e^{-x^2}\ dx = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_\epsilon^1 e^{x \log x} e^{-x^2}\ dx \le \lim_{\epsilon \downarrow 0} (1 - \epsilon) = 1$$

Dabei haben wir $e^{x \log x} e^{-x^2} \le 1$ benutzt. [1]

Im Unendlichen:

$$\begin{aligned} \int_1^\infty x^x e^{-x^2}\ dx &= \int_1^\infty e^{-x^2\left(1 - \frac{\log x}{x}\right)}\ dx \le \int_1^\infty e^{-\left(1-\frac{1}{e}\right)x^2}\ dx \le \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx \\ &\le \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Dabei haben wir $\log x \leq x/e$ und $1 - 1/e \geq 1/2$ benutzt. [2]

**(b)** Wir nehmen die Substitution $y := \sqrt{x}$ vor. Dies führt uns zu einem rationalen Integranden:

$$\int_0^1 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\ dx = 2\int_0^1 \frac{y(y-1)}{y+1}\ dy$$

[1]

Da der Nennergrad grösser ist als der Zählergrad, dividieren wir die Polynome:

$$y^2 - y = (y-2)(y+1) + 2$$

Wir finden daher

$$2\int \frac{y(y-1)}{y+1}\ dy = y^2 - 4y + 2\log(y+1) = x - 4\sqrt{x} + 4\log(\sqrt{x}+1)$$

[1]

und somit

$$\int_0^1 \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}\ dx = \left[x - 4\sqrt{x} + 4\log(\sqrt{x}+1)\right]_0^1 = -3 + 4\log 2.$$

[1]

**(c)** Da $1 + x^3 \leq 2x^3$ auf der Halbgeraden $[1, \infty[$, divergiert das Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\ dx \geq \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\ dx + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \infty$$

[2]

**Aufgabe 3** [ca. 5]
Sei $\mathbb{R}_+ := ]0, \infty[$. Wir setzen $f : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) := x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} - xyz.$$

Aus $f(1, -1, z) = 0$, folgt $z = 0$. [1]

Da $f \in C^1(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ und

$$f_{,z}(1, -1, 0) = 1 \neq 0,$$

[1]

liefert der Satz über implizite Funktionen die Existenz einer eindeutigen, stetig differenzierbaren Lösung der Form $z = g(x, y)$, und die Ableitung berechnet sich zu [1]

$$\begin{aligned}
\nabla g(x, y) &= -\left(f_{,z}(x, y, z)\right)^{-1}\ \nabla f(x, y, z) \\
&= -\frac{1}{(2n+1)z^{2n} - xy}\left((2n+1)x^{2n} - yz, (2n+1)y^{2n} - xz\right),
\end{aligned}$$

[1]

sodass also

$$\nabla g(1, -1) = -(2n+1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1]

**Aufgabe 4** [ca. 4]
Sei $\mathbb{R}_+ := ]0, \infty[$. Wir definieren $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x, y, z) := x^p y^q z^r, \quad g(x, y, z) := x + y + z - a.$$

Da $J_g(x,y,z) = [1,1,1]$ können wir uns auf die Untersuchung des Lagrangeschen Gleichungssystems $\nabla F = 0$ beschränken, wobei $F := f + \lambda g$ ist: [1]

$$\begin{aligned} px^{p-1}y^q z^r + \lambda &= 0 \\ qx^p y^{q-1} z^r + \lambda &= 0 \\ rx^p y^q z^{r-1} + \lambda &= 0 \\ x + y + z &= a \end{aligned}$$

[1]

Aus der ersten und der zweiten Gleichung folgern wir $py = qx$ und $pz = rx$ aus der ersten und der dritten. Eingesetzt in die vierte erhalten wir

$$x(p+q+r) = a,$$

sodass schliesslich

$$x = \frac{pa}{p+q+r}, \quad y = \frac{qa}{p+q+r}, \quad z = \frac{ra}{p+q+r}.$$

[1]

Die Funktion $f$ verschwindet auf dem Rand der beschränkten Nebenbedingungsmenge $g(x,y,z) = 0$, woraus folgt, dass wir die Maximalstelle von $f$ gefunden haben. [1]

**Aufgabe 5** [ca. 4]
Das folgende Potential $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erfüllt $A = -\nabla\phi$:

$$\phi(x) := -\int_0^{|x|} g(r)\ dr.$$

**Aufgabe 6** [ca. 5]
Sei $\gamma \in C^1([t_0, t], \mathbb{R}^3)$ mit $\gamma(t_0) = x_0$ und $\gamma(t) = x$. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \operatorname{grad} v(y) \cdot dy &= \int_{t_0}^t \operatorname{grad} v(\gamma(s)) \cdot \dot\gamma(s)\ ds = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} v(\gamma(s))\ ds = v(\gamma(t)) - v(\gamma(t_0)) \\ &= v(x) - v(x_0) \end{aligned}$$

[3]

Sei $\gamma$ nun stückweise $C^1$, $\gamma \oplus_{j=1}^n \gamma_j$. Dann folgt aus obiger Rechnung, dass ($x_n := x$)

$$\int_\gamma \operatorname{grad} v(y) \cdot dy = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \operatorname{grad} v(y) \cdot dy = \sum_{j=1}^n (v(x_j) - v(x_{j-1})) = v(x) - v(x_0).$$

[2]

**Aufgabe 7** [ca. 7]
**(a)** Die Paramatrisierung $f : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ lautet

$$f(\theta,\varphi) := R\,(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$

woraus [1]

$$f_{,\theta} \times f_{,\varphi} = R^2\,(\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\theta), \quad f \cdot (f_{,\theta} \times f_{,\varphi}) = R^3 \sin\theta.$$

Wir finden also: [2]

$$\int_{\partial B_R(0)} A \cdot dF = \frac{g(R)}{R} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot (f_{,\theta} \times f_{,\varphi}) \; d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2 \, g(R)$$

[2]

**(b)** Es bezeichne $\partial E$ die Oberfläche des Ellipsoides $E$. Da $\operatorname{div} B = 1$ ist, folgt aus dem Satz von Gauss, dass

$$\int_{\partial E} B \cdot dF = \int_E \operatorname{div} B \; d^3x = \int_E d^3x = \frac{4\pi}{3} \, abc.$$

[2]