**Aufgabe 1: Phasenverschiebung durch Gravitation (6 Punkte)**

Ein Teilchen mit Energie $E = \hbar^2 k^2/2m$ bewege sich im Gravitationspotential $V(z) = mgz$ von einem Punkt A bei $x = 0$, $z = 0$ zu einem Punkt D bei $x = l$ und $z = h$ auf jeweils geraden Wegen entweder über den Punkt B mit $x = 0$, $z = h$ oder über den Punkt C bei $x = l$, $z = 0$.

a) Berechnen Sie den Unterschied $\varphi_{BD} - \varphi_{AC}$ in der Phasendifferenz $\varphi_{BD}$ bzw. $\varphi_{AC}$ der stationären Wellenfunktion $\psi(x) = |\psi| \exp i\varphi(x)$ bei der Bewegung entlang der Wege BD und AC als Funktion von $m, g, l, h$ und dem Wellenvektor $k = 2\pi/\lambda$ in $x$-Richtung des bei A einfallenden Teilchens unter der Annahme, dass die Wellenfunktion jeweils eine ebene Welle ist und $E \gg mgh$ gilt.

Hinweis: Beachten Sie, dass der Wellenvektor bei fester Gesamtenergie $E$ von $z$ abhängt. Die Phasendifferenz $\varphi_{BD}$ ist definiert durch $\varphi_{BD} = [\varphi(x = l) - \varphi(x = 0)]_{z=h}$ und analog für $\varphi_{AC}$ bei $z = 0$.

b) Bestimmen Sie die Periodizität $\Delta h$ in der Höhendifferenz $h$, nach der sich das am Punkt D ergebende Interferenzmuster proportional zu $\cos(\varphi_{ABD} - \varphi_{ACD})$ wiederholt. Wie gross ist $\Delta h$ für Neutronen mit Wellenlänge $\lambda = 1.4$ Å und $l = 5$ cm ? (Verwenden Sie $(2\pi\hbar)/m_n \approx 4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}$).

Hinweis: Da die Gesamtenergie $E$ und das Potential auf den Abschnitten AB und CD identisch sind, fallen die Änderungen der Phase auf diesen Abschnitten in der gesamten Phasendifferenz $\varphi_{ABD} - \varphi_{ACD}$ der beiden Wege heraus.

Bemerkung: Die Rechnung ist die Grundlage für das berühmte, sogenannte 'COW'-Experiment von Colella, Overhauser und Werner, Phys. Rev. Lett. **34**, 1472 (1975).

**Aufgabe 2: GHZ-Zustände, reduzierte Dichtematrix (6 Punkte)**

Ein einfaches Beispiel für einen maximal verschränkten Zustand von $N \geq 2$ Spins ist der sogenannte Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ)-Zustand

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow\rangle^{\otimes N} + |\downarrow\rangle^{\otimes N} \right) \quad \text{mit} \quad |\uparrow\rangle^{\otimes N} = |\uparrow\uparrow \ldots \uparrow\rangle$$

a) Weisen Sie für den konkreten Fall $N = 2$ explizit nach, dass $|\mathrm{GHZ}\rangle$ ein Eigenzustand von $\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ ist. Folgern Sie daraus, dass der GHZ-Zustand auch ein Eigenzustand von $\vec{S}^2_{tot}$ des totalen Spins $\vec{S}_{tot} = \hbar\,(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)/2$ mit Spin $S = N/2 = 1$ ist. Ist $|\mathrm{GHZ}\rangle$ auch ein Eigenzustand von $S_{z,tot}$?

Hinweis: Verwenden Sie die Beziehungen $\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle$ , $\sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle$ sowie $\sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle$ , $\sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$ und $\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ , $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$.

b) Berechnen Sie die reduzierte Dichtematrix

$$\rho_1 = \mathrm{Sp}_1\, |\mathrm{GHZ}\rangle\langle\mathrm{GHZ}|$$

bei der Bildung der Spur über einen der beiden Spins. Beschreibt $\rho_1$ einen reinen Zustand ?

**Aufgabe 3: Zweidimensionales Wasserstoffatom (8 Punkte)**

Die Bindung zwischen einem Elektron und einem Loch ('Exziton') in einem Halbleiter 'quantum-well' kann man in guter Näherung durch die Relativbewegung zweier Teilchen mit Ladung $q_{1,2} = \pm e/\sqrt{\epsilon}$ ($\epsilon$ ist die statische Dielektrizitätskonstante des Trägermaterials) und üblicher Coulomb-Wechselwirkung $V(r) = q_1 q_2/r$ beschreiben, wobei die Bewegung nun aber in einer Ebene stattfindet. Die reduzierte Masse $\mu$ definiert einen effektiven Bohr-Radius $a_B = \epsilon\hbar^2/\mu e^2$.

a) Wie lautet die stationäre Schrödingergleichung für die Wellenfunktion $\psi(r, \varphi)$ gebundener Zustände im Potential $V(r)$ mit Energien $E = -E_b = -\hbar^2\kappa^2/2\mu$?

Hinweis: Verwenden Sie $a_B$ und $\kappa$ als Parameter und die Darstellung

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

des Laplace-Operators in Polarkoordinaten $r, \varphi$.

b) Welche Werte kann die Quantenzahl $m$ im Separationsansatz $\psi(r, \varphi) = \psi(r) \cdot \exp(im\varphi)$ annehmen und was ist ihre physikalische Bedeutung ?

c) Machen Sie für die (nichtnormierte und $\varphi$-unabhängige) Wellenfunktion des Grundzustands den Ansatz $\psi_0(r) = \exp -r/l$ und verifizieren Sie, dass dies für ein geeignetes $l$ tatsächlich eine Lösung ist.

Hinweis: Einsetzen in die Schrödingergleichung legt aus der Identität von rechter und linker Seite für alle $r$ sowohl $l$ als auch die Energie fest.

d) Wie gross ist die Bindungsenergie des Grundzustands in Einheiten der effektiven Rydberg-Energie Ry$= \hbar^2/2\mu a_B^2$ ?