....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

10. Februar 2015, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum_{k=0}^{n-1} k^4 \leq \frac{1}{5}n^5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

LÖSUNG:

Induktionsbeginn $(n = 1)$: $\sum_{k=0}^{0} k^4 = 0^4 = 0 \leq \frac{1}{5} = \frac{1^5}{5}$ **[2]**

Induktionsschritt $(n \to n + 1)$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^4 &\overset{\textbf{[1]}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} k^4 + n^4 \\
&\overset{\text{I.V.}\textbf{[2]}}{\leq} \frac{n^5}{5} + n^4 \\
&\overset{\text{Binom.}\textbf{[2]}}{\leq} \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} n^k \\
&\overset{\textbf{[1]}}{=} \frac{1}{5}(n + 1)^5
\end{aligned}
$$

2. **Komplexe Zahlen** **[8 Punkte]**

(a) Geben Sie den Wert von $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ für $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ als Bruch an.

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}} \qquad \textbf{[3]}$$

(b) Bestimmen Sie Real– und Imaginärteil von $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}$.

$$\operatorname{Re}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}\right) = -\frac{4}{25} \qquad \textbf{[1]}$$

$$\operatorname{Im}\left(\tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}}\right) = \frac{3}{25} \qquad \textbf{[1]}$$

(c) Geben Sie Betrag und Argument von $\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}$ an.

$$\left|\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{8} \qquad \textbf{[1]}$$

$$\arg\left(\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5}\right) = -\frac{3}{4}\pi \qquad \textbf{[2]}$$

LÖSUNG:

(a) Nach der geometrischen Summenformel ist

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = e^{\mathrm{i}x} \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}$$

(b) $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{4+3\mathrm{i}} = -\frac{1}{4+3\mathrm{i}} = -\frac{4-3\mathrm{i}}{25} = -\frac{4}{25} + \mathrm{i}\frac{3}{25}$.

(c) $\frac{1}{(-\mathrm{i}+1)^5} = \frac{1}{(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^5} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3}{4}\pi}$.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)$. **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☐ $=\frac{1}{3}$ ☒ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) Gegen welchen Wert ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ eigentlich oder uneigentlich konvergent? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -4 ☐ -3 ☐ 0 ☐ $\frac{3}{7}$ ☐ $\frac{4}{7}$ ☒ ∞ ☐ keiner der angegebenen Werte

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n^2}$ ist **[2]**

☒ konvergent ☒ absolut konvergent ☐ bestimmt divergent ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+n^2}-n^2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4+n^2-n^4}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)}=\frac{1}{2}$.

(b) Die Terme der Reihe bilden keine Nullfolge, also nicht konvergent. Alle Terme sind positiv, also bestimmt divergent gegen ∞.

(c) Wegen $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in\frac{\pi}{2}}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ ist die Reihe absolut konvergent, alsoauch konvergent.

4. **Potenzreihen** **[7 Punkte]**

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\, x^{2n}$.

LÖSUNG:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}\, x^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ mit } a_k = \begin{cases} \frac{(k/2)^2}{2^{k/2}} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$ **[2]**

Somit ist $\sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{\sqrt[k]{k/2}^2}{2^{1/2}} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$. **[1]**

Wegen $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k/2}^2}{2^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hat $\sqrt[k]{|a_k|}$ die Häufungspunkte 0 und $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **[2]**

Also ist $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **[1]**

Der Konvergenzradius ist also $\sqrt{2}$. **[1]**

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^3}$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☒ $-\frac{1}{3}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ bei $x = 1$ stetig fortsetzbar? **[2]**

☐ -1 ☒ $-\frac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

LÖSUNG:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{1-x^3} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^2} = -\frac{1}{3}$.

(b) Zähler und Nenner sind als Polynome stetig differenzierbar und haben bei $x = 1$ den Wert 0. Die l'Hospitalsche Regel ergibt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2x - 3}{2x} = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

6. **Integration** **[5 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das folgende Integral für alle $x \in \mathbb{R}$. (HINWEIS: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$) **[3]**

$$\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t = \quad (1+x^2)\arctan(x) - x$$

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das Integral $\int_1^\infty x^\alpha \mathrm{d}x$ absolut konvergent? **[2]**

$$\alpha \in \quad (-\infty, -1)$$

LÖSUNG:

(a) $\int_0^x 2t \arctan(t) \mathrm{d}t = \left[t^2 \arctan(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2} \mathrm{d}t = x^2 \arctan(x) - \int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2} \mathrm{d}t$
$= x^2 \arctan(x) - \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = x^2 \arctan(x) - x + \left[\arctan(t)\right]_0^x = (x^2+1)\arctan(x) - x.$

(b) Der Integrand ist positiv, also sind Konvergenz und absolute Konvergenz äquivalent. Wir berechnen $\int_1^x t^\alpha \mathrm{d}t \overset{\alpha \neq -1}{=} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^x = -\frac{1}{1+\alpha} + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \to \begin{cases} -\frac{1}{1+\alpha} \in \mathbb{R} & \text{für } \alpha < -1, \\ \infty & \text{für } \alpha > -1. \end{cases}$
Für $\alpha = -1$ ist das uneigentliche Integral bekanntermaßen nicht konvergent.

7. **Eine gewöhnliche Differentialgleichung** **[9 Punkte]**
Bestimmen Sie eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $\dot{x} = \sqrt{1+x}$ mit $x(0) = 0$ für $t \geq 0$ und skizzieren Sie diese.
LÖSUNG:

Wir suchen eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$: **[1]**

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{1+x} + C. \qquad [\mathbf{1}]$$

und lösen $2\sqrt{1+x} + C = t$ nach x auf:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= \frac{t-C}{2} \\ \overset{t \geq C}{\Longleftrightarrow} \qquad 1+x &= \frac{(t-C)^2}{4} \\ x &= \frac{(t-C)^2}{4} - 1 \qquad [\mathbf{2}] \end{aligned}$$

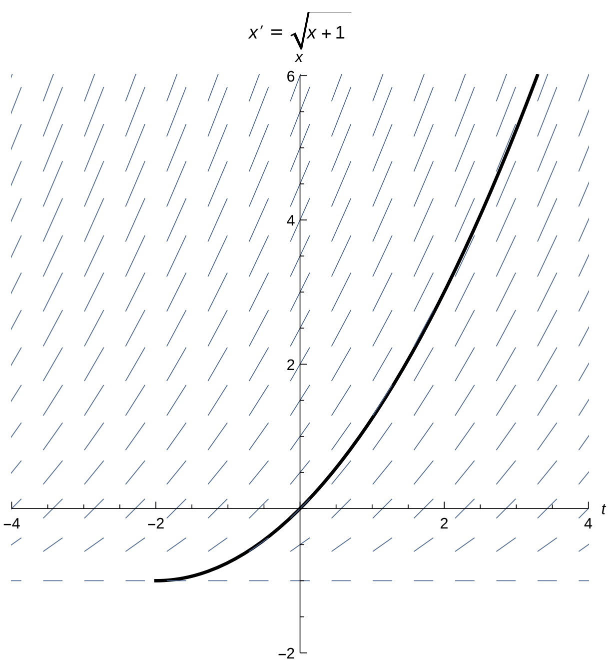
Um C zu bestimmen setzen wir $x(0) = 0$ ein:

$$0 = \frac{C^2}{4} - 1, \quad \Longleftrightarrow \quad C = \pm 2. \qquad [\mathbf{1}]$$

Damit die Bedingung $t > C$ für $t = 0$ erfüllt sein kann, bleibt nur die Möglichkeit, dass $C = -2$ ist.**[1]**
Als Lösung erhalten wir für $t \geq -2$

$$x(t) = \tfrac{1}{4}(t+2)^2 - 1. \qquad [\mathbf{1}]$$

Skizze: **[2]**



8. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x^2)$.

(a) Wie lautet das Taylorpolynom sechster Ordnung von f um den Entwicklungspunkt 0? **[3]**

$T_6 f(x;0) =$	$x^2 - \frac{1}{6}x^6$

(b) Zeigen Sie, dass $T_4 f(x;0) - f(x) = o(x^5)$.

LÖSUNG:

(a) Es ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(x^2)^{2k+1} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \mp \cdots$$

die Taylorreihe von $f(x)$. Das Taylorpolynom erhält man durch Abschneiden.

(b) Nach dem Satz von Taylor (f ist unendlich oft differenzierbar) **[1]**
gilt für $x \to 0$, dass $f(x) = T_5 f(x;0) + \mathcal{O}(x^6)$. **[1]**
Wegen $T_5 f(x;0) = T_4 f(x;0) = x^2$ **[1]**
gilt somit $T_4 f(x;0) - f(x) = \mathcal{O}(x^6)$ **[1]**
somit gilt auch $T_4 f(x;0) - f(x) = o(x^5)$. **[1]**

Wird der Limes $x \to \infty$ betrachtet, so berechnet man
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{|T_4 f(x;0) - f(x)|}{x^5} \overset{[1]}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|x^2 - \sin(x^2)|}{x^5} \overset{[1]}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{|\sin(x^2)|}{x^5} \overset{[1]}{=} 0$,
da $|\sin x^2| \leq 1$. **[1]**
Somit gilt $T_4 f(x;0) - f(x) = o(x^5)$. **[1]**

9. **Fourierkoeffizienten** **[9 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π–periodisch mit $f(x) = 1$ für $x \in (-\pi, 0]$ und $f(x) = -1$ für $x \in (0, \pi]$.

(a) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\widehat{f}(k)$.

(b) Für welche $x \in [-\pi, \pi]$ konvergiert die Fourierreihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ gegen $f(x)$?

LÖSUNG:

(a)

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi}\Big(\big[\tfrac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\big]_{-\pi}^{0} - \big[\tfrac{1}{-\mathrm{i}k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\big]_{0}^{\pi}\Big) = \frac{1}{2\pi}\big(-\tfrac{1}{\mathrm{i}k} + \tfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi}}{\mathrm{i}k} - \tfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi}}{-\mathrm{i}k} + \tfrac{1}{-\mathrm{i}k}\big) = \frac{(-1)^k - 1}{\mathrm{i}\pi k},$$

[4]

wobei $(*)$ nur für $k \neq 0$ gilt. Für $k = 0$ erhalten wir $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$ **[1]**

Insgesamt also **[1]**

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade,} \\ \frac{2\mathrm{i}}{\pi k} & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(b) f ist stückweise stetig differenzierbar. Nach dem Satz aus der Vorlesung konvergiert die Fourierreihe von f an jedem Stetigkeitspunkt von f gegen f selbst. **[1]**

An den Unstetigkeitsstellen von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nämlich $x \in \pi\mathbb{Z}$, ist $f(x) \neq \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+)$. Dort konvergiert die Fourierreihe also nicht gegen f. Somit gilt für $x \in [-\pi, \pi]$, dass $\mathcal{F}_f(x) = f(x)$ genau dann, wenn $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. **[2]**