Name:		Tutorgruppe:	

MA9202 Mathematik für Physiker 2 (Analysis 1), Prof. Dr. S. Warzel
Probeklausur, 23.12.2014, 14:15-15:45

Hilfsmittel: ein selbsterstelltes DIN-A4 Blatt.
Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästen werden nur die Resultate **in diesen Kästen** berücksichtigt.
Aufgaben ohne Kästen lösen Sie bitte auf dem bereitgestellten Bearbeitungsbogen.

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**

   Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \frac{n}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. **Komplexe Zahlen** **[7 Punkte]**

   Schreiben Sie $\log\left(\sqrt{\mathrm{e}^{\pi+7\pi\mathrm{i}}}\right)$ in Polardarstellung.

3. **Konvergenz von Folgen und Reihen** **[10 Punkte]**

   (a) Berechnen Sie den Wert der Reihe: $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-2(-3)^n}{4^n} = \qquad}$

   (b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(-1+\frac{1}{n})^n}$?

   ☐ $= -\infty$ ☐ $\in (-\infty, 0)$ ☐ $= 0$ ☐ $\in (0, \infty)$ ☐ $= +\infty$ ☐ undefiniert

   (c) Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$?

   ☐ 0 ☐ $\frac{1}{\pi}$ ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ e ☐ π ☐ ∞

   (d) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine relle Zahlenfolge mit $|x_{n+1} - x_n| \leq r\,|x_n - x_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $r \in [0, 1)$ ist. (x_n) ist

   ☐ eine Cauchy-Folge ☐ divergent ☐ konvergent ☐ monoton fallend

4. **Zwischenwertsatz** **[7 Punkte]**

   (a) Zeigen Sie, dass für eine stetige Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ die Gleichung $f(x) = x$ immer eine Lösung hat. Hinweis: Man betrachte $f(x) - x$.

   (b) Geben Sie mit Skizze eine Funktion $f : [0, 1] \to [0, 1]$ an, für die $f(x) \neq x$ für alle $x \in [0, 1]$ gilt.

5. **Ableitung der Umkehrfunktion** **[17 Punkte]**

   (a) Sei $f : (a, b) \to (c, d)$ mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, und $-\infty \leq c < d \leq \infty$ eine zweimal differenzierbare bijektive Funktion mit $f' > 0$. Begründen Sie, dass die Umkehrfunktion f^{-1} zweimal differenzierbar ist und drücken Sie die zweite Ableitung von f^{-1} an der Stelle $y \in (c, d)$ durch Ableitungen von f an geeigneter Stelle aus.

   (b) Zeigen Sie, das $f : (0, \mathrm{e}) \to (-\infty, \frac{1}{\mathrm{e}})$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ den Bedingungen von (a) genügt und berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f^{-1} im Punkt 0.

6. **Integration** **[7 Punkte]**

Berechnen Sie

(a) $\int\limits_0^x \frac{t^{2013}}{1+t^{2014}}\,\mathrm{d}t$, (b) $\int\limits_0^x \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$.

7. **Funktionenfolgen** **[10 Punkte]**

Für die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \arctan(nx)$ gilt:

(a) (f_n) konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit

$f(x) =$

(b) ☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f stetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f.
☐ Weil f unstetig ist, konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig gegen f.

(c) Berechnen Sie die Ableitungen $f_n'(x)$ und skizzieren Sie sie.

$f_n'(x) =$

Viel Erfolg!