(1+1+4+3+1)

Aufgabe 1

Wir betrachten die folgende Matrix mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$,

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 4-a & 0 \\ a & \sqrt{8} & -a \\ 0 & a-4 & \sqrt{8} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

und die durch A beschriebene lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ ; \ x \mapsto Ax$.

a) Zeigen Sie, dass $v = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ unabhängig vom Parameter a stets ein Eigenvektor von f ist und geben Sie den dazugehörigen Eigenwert an.

b) Beweisen Sie, dass im Fall $a = 2$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von f existiert. (*Hinweis:* Es ist nicht verlangt, eine solche Basis explizit anzugeben!)

c) Wir betrachten den Fall $a = 4$. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall nicht diagonalisierbar ist und geben Sie eine Jordan-Normalform von f an.

d) Zeigen Sie, dass das charakteristische Polynom $\chi_f(\lambda)$ genau dann über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt, wenn gilt: $0 \leq a \leq 4$. Geben Sie in diesem Fall die Eigenwerte von f an.

e) Wir betrachten den Fall $0 < a < 4$. Zeigen Sie, dass f in diesem Fall diagonalisierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) Es gilt $Av = \sqrt{8} \cdot v$ und damit ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert $\sqrt{8}$ von f.

b) Für $a = 2$ ist die Matrix A symmetrisch, daraus folgt die Behauptung.

c) Im Fall $a = 4$ ist $\chi_f(\lambda) = (\sqrt{8} - \lambda)^3$, es gibt also nur den einen Eigenwert $\lambda = \sqrt{8}$ mit algebraischer Vielfachheit $a_f(\sqrt{8}) = 3$. Wegen

$$\operatorname{Rang}(A - \sqrt{8} \cdot \mathbb{1}_3) = \operatorname{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

ist die geometrische Vielfachheit $g_f(\sqrt{8}) = 2$. Damit ist f nicht diagonalisierbar und die JNF J besteht aus 2 Jordan-Blöcken, zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{8} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}.$$

d)

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} \sqrt{8}-\lambda & 4-a & 0 \\ a & \sqrt{8}-\lambda & -a \\ 0 & a-4 & \sqrt{8}-\lambda \end{pmatrix} = (\sqrt{8}-\lambda)^3 + 2(\sqrt{8}-\lambda)a(a-4) \\ &= (\sqrt{8}-\lambda)((\sqrt{8}-\lambda)^2 + 2a(a-4)) = (\sqrt{8}-\lambda)(\lambda^2 - 2\sqrt{8}\lambda + 8 + 2a(a-4)) \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen also bei $\lambda = \sqrt{8}$ und

$$\lambda_\pm = \sqrt{8} \pm \sqrt{8 - 8 - 2a(a-4)} = \sqrt{8} \pm \sqrt{2a(4-a)}$$

und das charakteristische Polynom zerfällt genau dann in Linearfaktoren, wenn gilt $a(4-a) \geq 0$.

Für $a < 0$ ist $(4-a) > 0$ und somit $a(4-a) < 0$.

Für $a > 4$ ist $(4-a) < 0$ und somit $a(4-a) < 0$.

Für $0 \leq a \leq 4$ sind beide Terme nicht negativ und somit $a(4-a) \geq 0$.

e) In diesem Fall hat f drei paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_- < \lambda < \lambda_+$ und ist somit diagonalisierbar.

(2+1+2+3+2)

Aufgabe 2

Es sei $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine fest gewählte Matrix. Wir betrachten den $\mathbb{C}$-Vektorraum $V = \mathbb{C}^{n\times n}$ aller $(n \times n)$ Matrizen über $\mathbb{C}$ und die Abbildung

$$f : V \to V \; ; \; A \mapsto AX - XA.$$

a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

b) Beweisen Sie: $\mathrm{Lin}\{\mathbb{1}_n, X\} \subset \mathrm{Kern}(f)$.

c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Begründen Sie Ihre Antworten!

d) Wir betrachten nun den speziellen Fall $n = 2$ und $X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die darstellende Matrix ${}_B[f]_B$ von f bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ von V mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e) Berechnen Sie für $n = 2$ und $X = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ die Spur und die Determinante von f.

Lösung zu Aufgabe 2:

a) $f(\lambda A + B) = (\lambda A + B)X - X(\lambda A + B) = \lambda AX + BX - \lambda XA - XB = \lambda f(A) + f(B)$.

b) $f(\mathbb{1}_n) = \mathbb{1}_n X - X\mathbb{1}_n = X - X = 0$ und $f(X) = XX - XX = 0$.

c) Wegen *b)* ist $\mathrm{Kern}(f) \neq \{0\}$ und damit f nicht injektiv. Da $f : V \to V$ ein Endomorphismus ist kann f damit auch nicht surjektiv sein.

d) Für $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$ gilt

$$f(A) = AX - XA = \begin{pmatrix} ia_2 & ia_1 \\ ia_4 & ia_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ia_3 & ia_4 \\ ia_1 & ia_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(a_2 - a_3) & i(a_1 - a_4) \\ i(a_4 - a_1) & i(a_3 - a_2) \end{pmatrix}$$

und somit

$${}_B[f]_B = \begin{pmatrix} 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & i & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Aus der darstellenden Matrix oben ergibt sich $\mathrm{Spur}(f) = 0$ und $\det(f) = 0$.

(1+2+4+3)

Aufgabe 3

Wir betrachten den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x|y\rangle = {}^t x \cdot y$ und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ,$$

welche einen Untervektorraum $U = \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ aufspannen.

a) Zeigen Sie: $\dim(U) = 3$.

b) Folgern Sie $\dim(U^\perp) = 1$ und geben Sie eine Basis $\{v_4\}$ von $U^\perp$ an.

c) Stellen Sie den Vektor $w = {}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ als $w = w_U^{\|} + w_U^{\perp}$ mit $w_U^{\|} \in U$ und $w_U^{\perp} \in U^\perp$ dar.

d) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ an, dessen Lösungsraum der affine Teilraum $X = w + U \subset \mathbb{R}^4$ ist.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Die drei Vektoren stehen paarweise orthogonal und sind damit linear unabhängig.

b) Wegen $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$ folgt $\dim(U) = 1$. Ferner ist $v_4 := {}^t\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu v_1, v_2, v_3 und somit $\{v_4\}$ eine Basis von $U^\perp$

c) Es ist $w_U^{\perp} = w_{\mathrm{Lin}\{v_4\}}^{\|} = \frac{\langle v_4|w\rangle}{||v_4||^2} \cdot v_4 = 2v_4$ und damit

$$w_U^{\perp} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_U^{\|} = w - w_U^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

d) Nach Konstruktion ist $A = {}^t v_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und wegen $w \in X$ gilt $b = Aw = 8$.

(10)

Aufgabe 4

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründungen sind in dieser Aufgabe nicht verlangt!

Aussage	wahr	falsch
$\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y > 0\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist eine Äquivalenzrelation.		x
Für $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_4$ gilt $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.	x	
$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1$.		x
Für alle $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gilt: ${}^t((AB)^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1} \cdot \left({}^tB\right)^{-1}$	x	
$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid {}^tx \cdot x = 1\} \subset \mathbb{R}^4$ ist ein Untervektorraum.		x
Sind U und V Untervektorräume im $\mathbb{R}^4$ mit $\dim(U) \geq 1$ und $\dim(V) \geq 2$, so gilt: $\dim(U \cap V) \geq 1$		x
Sind U und V Untervektorräume im $\mathbb{R}^4$ mit $\dim(U) \leq 1$ und $\dim(V) \leq 2$, so gilt: $\dim(U + V) \leq 3$	x	
Die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ \phi(x,y) := x + y$ ist bilinear.		x
Die Bilinearform $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,;\ \psi(x,y) = {}^tx \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot y$ ist indefinit.		x
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform und B und C seien Basen von V. Dann gilt: Ist die Grammatrix $G_B(\varphi)$ invertierbar, so ist auch die Matrix $G_C(\varphi)$ invertierbar.	x	