Theoretische Physik 1 (Mechanik)
1. Klausur
SS 2008, Technische Universität München

Montag, 19. Mai 2008, 10:15–11:45, HS 1/HS 2

Die Klausur besteht aus **2 Aufgaben**. Die Aufgabenstellung umfasst **2** Seiten.
Es gibt insgesamt **50 Punkte**.
Bitte geben Sie auf **allen zusätzlichen** Blättern **Ihren Namen** an!

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Ein punktförmiger Körper der Masse m fällt in einer eindimensionalen Bewegung entlang der z-Achse unter dem Einfluß des homogenen Gravitationsfeldes mit konstanter Erdbeschleunigung g. Die durch die Luftreibung ausgeübte Kraft wird nach Stokes geschwindigkeitsabhängig angesetzt als $\vec{F}_S = -\beta_L \vec{v}$, wobei $\beta_L > 0$ der Reibungskoeffizient von Luft ist.

a) (2 P) Stellen Sie die Bewegunggleichung auf.

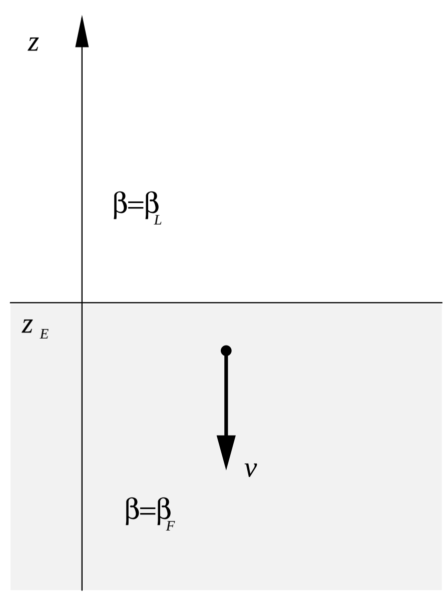
b) (6 P) Bestimmen Sie aus der Bewegungsgleichung die Geschwindigkeit $v(t)$ mit der Anfangsbedingung $v(t=0) = v_0$. *Hinweise*: Trennen Sie die Variablen!

$$\int dx \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx) + \text{const.}$$

c) (2 P) Diskutieren Sie mit der Lösung für $v(t)$ aus Teil b) den Grenzfall schwacher Reibung für kurze Zeiten ($t\beta/m \ll 1$) und vergleichen Sie mit der freien Fallbewegung ohne Reibung!
Hinweis: $\exp(-x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \ldots \pm$.

d) (2 P) Wie groß ist die Maximalgeschwindigkeit v_E, die der Körper erreichen kann?

e) (8 P) Der Körper falle nun mit dieser Geschwindigkeit in eine Flüssigkeit mit einem so hohen Reibungskoeffizienten $\beta_F \gg mg/v_E$, dass die Schwerkraft vernachlässigbar wird (setze $g = 0$) (siehe Abb.). Die Oberfläche der Flüssigkeit an der Position z_E werde im Moment t_E mit der Eintauchgeschwindigkeit $v(t=t_E) = v_E < 0$ passiert. Skizzieren Sie $z(t)$ in der Flüssigkeit und berechnen Sie die maximale Eintauchtiefe.



(Bitte wenden!)

Aufgabe 2 (30 Punkte)

Ein Massenpunkt mit Masse m bewege sich unter dem Einfluß eines Kraftfeldes der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) \quad = \quad -\alpha\,\vec{r}, \quad \text{mit} \quad \alpha > 0.$$

a) (4 P) Bestimmen Sie das zugehörige Potential $U(r)$. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis explizit: Zeigen Sie, dass sich die angegebene Kraft aus dem von Ihnen bestimmten Potential ergibt. Wie bezeichnet man ein solches Potential?

b) (3 P) Geben Sie die Definition des Drehimpulses an. Wie lautet der Ausdruck für den Drehimpuls in ebenen Polarkoordinaten?

c) (3 P) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass für die angegebene Kraft der Drehimpuls erhalten ist.

d) (3 P) Zeigen Sie ausgehend von den Bewegungsleichungen, dass auch die Energie eine Erhaltungsgrösse ist. *Hinweis*: Bilden Sie dazu das Skalarprodukt der Bewegungsgleichung mit der Geschwindigkeit und integrieren Sie!

e) (6 P) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten auf. Benutzen Sie die Erhaltung des Drehimpulses $\vec{\ell}$, um die Gleichungen für die Radialkoordinate r und die Winkelkoordinate φ zu entkoppeln. *Hinweis*: Bestimmen Sie ausgehend von der Darstellung $\vec{r} = r\vec{e}_r$ die Ableitungen $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$ in ebenen Polarkoordinaten!

f) (4 P) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Radialkoordinate r für den Spezialfall $\ell = |\vec{\ell}\,| = 0$ mit den Anfangsbedingungen $r(t=0) = r_0$ und $\dot{r}(t=0) = v_{r0}$. Um welchen Typ von Bewegung handelt es sich in diesem Fall?

g) (4 P) Mittels der Erhaltung der Energie E und des Erhaltung des Drehimpulses ℓ kann die Bahnkurve $r(\varphi)$ bestimmt werden. Zeigen Sie mit Hilfe der Identität

$$\frac{dr(\varphi)}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}$$

für die Bahnkurve und Trennung der Variablen, dass gilt

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} \frac{dr'}{r'^2} \frac{\ell}{\sqrt{2m\left(E - U(r')\right) - \frac{\ell^2}{r'^2}}}.$$

h) (3 P) Für das vorliegende Potential ergibt sich nach Integration mit geeigneter Wahl der Anfangsbedingungen (nicht nachrechnen!)

$$\varphi = \frac{1}{2}\arccos\frac{\frac{mE}{\ell} - \frac{\ell}{r^2}}{\sqrt{\left(\frac{mE}{\ell}\right)^2 - \alpha m}}$$

Bestimmen Sie daraus explizit $r(\varphi)$. Welche Bedingung muss die Energie E erfüllen, damit die Bahn kreisförmig ist?