Nachklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2017/18
27. März 2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Ein Ball trifft mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ (Betrag: $|v| = 35\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$) unter einem Winkel von $\alpha = -15°$ auf dem Boden auf und wird ohne Energieverlust reflektiert.

(a) Welche Höhe Δz über den Boden erreicht der Ball maximal?

(b) Welche Strecke Δx parallel zum Erdboden legt der Ball zurück, bevor er das nächste Mal auf den Boden auftrifft?

(c) Unter welchem Winkel relativ zum Erdboden trifft er das nächste Mal auf?

Lösung

(a) Für die Bewegung in z-Richtung nach dem Aufprall gilt:

$$z(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_z(t = 0) \cdot t. \tag{1}$$

[1]

Dabei ist $v_z(t = 0)$ die Geschwindigkeit des Balls in z-Richtung zum Zeitpunkt $t = 0$ und wird durch

$$v_z(t = 0) = |\vec{v}| \cdot \sin(15°) = 9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{2}$$

[1]

beschrieben. Die maximale Höhe des Balls entspricht dem Maximum der Bahnkurve $z(t)$, welches sich durch Nullsetzen der Ableitung ergibt:

$$\frac{dz}{dt} = -g \cdot t + v_z(t = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_z(t = 0)}{g} = 0,93\ \mathrm{s} \tag{3}$$

$$\Delta z_{max} = z(0,93\ \mathrm{s}) = 4,2\ \mathrm{m}. \tag{4}$$

[2]

(b) Die Bahnkurve in x-Richtung lautet:

$$v = v_x(t=0) \cdot t = |\vec{v}| \cdot \cos(15°) \cdot t \tag{5}$$

Die Zeit, die zwischen zwei Auftreffpunkten liegt, ist doppelt so groß, wie die Zeit, zu der das Maximum (siehe (a)) erreicht wird:

$$\Delta x = v_x(t=0) \cdot (2 \cdot 0,93 \text{ s}) = 63 \text{ m}. \tag{6}$$

[3]

(c) Da der Flug symmetrisch ist, beträgt der zweite Auftreffwinkel ebenfalls 15°, genau wie der erste Auftreffwinkel.

[1]

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein Karussell dreht sich mit 0,5 Umdrehungen pro Sekunde um eine Achse, die um $\alpha = 45°$ gegenüber der Horizontalen geneigt ist. Die Fahrgäste befinden sich in einem Abstand von $R = 5$ m zur Drehachse.

(a) Berechnen Sie nur den Betrag der Zentrifugalkraft $|\vec{F}_Z|$, die auf einen Menschen der Masse $m = 65$ kg wirkt.

(b) Bestimmen Sie den gesamten Kraftvektor $\vec{F}_{Ges}$ einschließlich der Gewichtskraft, der auf diesen Menschen in seinem Bezugssystem am höchsten Punkt der Drehbewegung wirkt. Wählen Sie hierzu ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen z-Achse senkrecht zum Erdboden und y-Achse senkrecht zu $\vec{F}_Z$ steht.

(c) An welcher Stelle der Drehbewegung ist $|\vec{F}_{Ges}|$ maximal? Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

Lösung

(a) Die Zentrifugalkraft beträgt

$$|\vec{F}_Z| = m \cdot \omega^2 \cdot R = m \cdot (2\pi f)^2 \cdot R = 65 \text{ kg} \cdot \left(2\pi \frac{0,5}{\text{s}}\right) \cdot 5 \text{ m} = 3200 \text{ N}. \tag{7}$$

[2]

(b) Der Vektor der Gewichtskraft lautet:

$$\vec{F}_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} \tag{8}$$

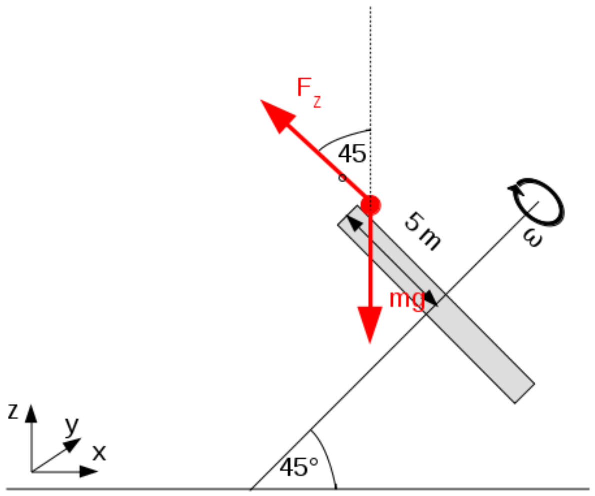
Wie in der Abbildung zu erkennen ist, hat der Vektor der Zentrifugalkraft die Form:

$$\vec{F}_Z = \begin{pmatrix} -m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha \\ 0 \\ -m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{9}$$

Damit beträgt der Vektor der Gesamtkraft:

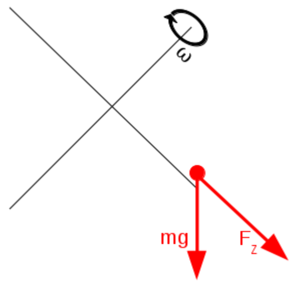
$$\vec{F}_{Ges} = \begin{pmatrix} -m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \sin\alpha \\ 0 \\ m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot \cos\alpha - m \cdot g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2260 \\ 0 \\ 1625 \end{pmatrix} \mathrm{N} \tag{10}$$

[3]



(c) $|\vec{F}_{Ges}|$ ist am untersten Punkt der Drehbewegung am größten.

[1]



[2]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein Schlitten fährt eine geneigte Ebene der Höhe H und dem Neigungswinkel α hinunter und gleitet dann weiter auf einer horizontalen Ebene. Der Gleitreibungskoeffizient habe auf der gesamten Strecke den konstanten Wert μ. Bestimmen Sie die Strecke s, die der Schlitten, in Abhängigkeit der Variablen, bis zum vollständigen Stillstand auf der horizontalen Ebene zurücklegt.

Lösung

Es sei $W_{R,1} = l \cdot F_R$ die Reibungsarbeit im Teilbereich 1 (auf der schiefen Ebene), wobei l die Länge der schiefen Ebene ist und $W_{R,2} = s \cdot F_R$ die Reibungsarbeit im Teilbereich 2 (auf der Horizontalen) mit s der Strecke, die der Schlitten auf der Horizontalen bis zum Stillstand gleitet.

$$E_{pot} = E_{kin,1} + W_{R,1} \tag{11}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + l \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \tag{12}$$
$$= \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{H}{\sin\alpha} \cdot \mu \cdot mg \cdot \cos\alpha \tag{13}$$
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{\mu}{\tan\alpha}\right)} \tag{14}$$

[**4**]

Im horizontalen Teilbereich gilt dann:

$$E_{kin,1} = W_{R,2} \tag{15}$$
$$\frac{1}{2}mv_1^2 = s \cdot \mu \cdot mg \tag{16}$$
$$\Rightarrow s = H\left(\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\mu}\right) \tag{17}$$

[**2**]

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Ein übermütiger Cowboy möchte sich eine Saloontür mit einem Revolverschuss öffnen. Die Schwingtür (Masse M, Breite b) werde ganz am Rand, d.h. im Abstand b vom Scharnier, getroffen und die Kugel (Masse m, Geschwindigkeit v) bleibe stecken.

(a) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment der Tür (homogener Quader) bezüglich der Drehachse (Ergebnis: $\frac{Mb^2}{3}$).

(b) Leiten Sie einen Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit ω her, mit der die Tür unmittelbar nach dem Einschlag aufschwingt.

(c) Um wie viel Grad öffnet sich die Tür maximal bei einer Winkelrichtgröße D^* (Rotationsfederkonstante) der Scharnierfeder?

Zahlenwerte: $M = 10$ kg, $b = 0,6$ m, $m = 10$ g, $v = 500\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $D^* = 1,2$ Nm

Lösung

(a) Unter der Annahme, dass die die Dicke der Saloontür deutlich kleiner ist als deren Höhe und Breite, gilt für das Trägheitsmoment:

$$\Theta_T = \int r^2 dm = \int_0^b r^2 h \cdot d \cdot \rho dr = \frac{dh\rho b^3}{3} = \frac{Mb^2}{3} \tag{18}$$

[**3**]

(b) Für den Drehimpuls der Revolverkugel um das Scharnier gilt

$$\vec{L}_K = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L_K = m \cdot v \cdot b. \tag{19}$$

Nach dem Einschlag der Kugel schwingt die Tür mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf. Das Trägheitsmoment der Kugel um das Scharnier $\Theta_K = mb^2$ kann gegenüber dem Trägheitsmoment der Saloontür vernachlässigt werden. Es gilt also für das Gesamtsystem Drehtür-Kugel nach dem Einschlag $\Theta_{T+K} \approx \Theta_T$. Das Drehmoment des Systems ist daher in guter Näherung $|\vec{L}_{T+K}| = \Theta_T \cdot \omega$. Aus der Drehimpulserhaltung

$$|\vec{L}_{T+K}| = \Theta_T \cdot \omega = L_K = m \cdot v \cdot b \tag{20}$$

[**2**]

folgt dann

$$\omega = \frac{L_K}{\Theta_T} = \frac{3 \cdot m \cdot v \cdot b}{Mb^2} = \frac{3mv}{Mb}. \tag{21}$$

[**2**]

(c) Die maximale Türöffnung ergibt sich aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}\Theta_T\omega^2 = \frac{1}{2}D^*\phi_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad \phi_{max} = \omega\sqrt{\frac{\Theta_T}{D^*}} = \frac{3mv}{Mb} \cdot \sqrt{\frac{Mb^2}{3D^*}} = mv \cdot \frac{3}{MD^*} \tag{22}$$

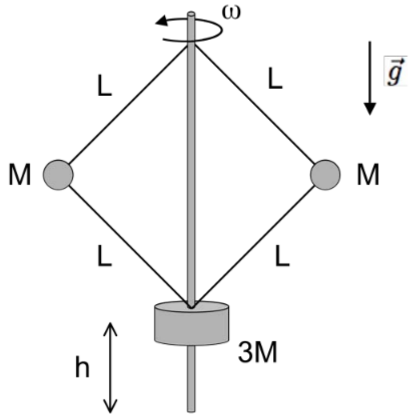
Der Maximale Auslenkwinkel ist unabhängig von b. Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man:

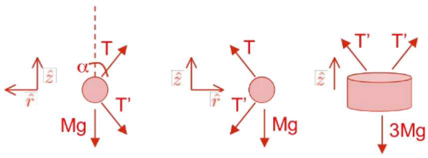
$$\phi_{max} = 2,5 \text{ rad} = 2,5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 143^\circ. \tag{23}$$

[**4**]

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Ein Fliehkraftregler ist ein Bauteil, das häufig in Dampfmaschinenen zur Regulierung der Drehzahl verwendet wird. Ein Fliehkraftregler besteht aus einer rotierenden Achse, die über masselose Stangen der Länge L mit zwei Scharnieren der Masse M verbunden ist (siehe Abbildung). Am unteren Ende der Achse sind die Stangen mit einem Block der Masse $3M$ verbunden. Dieser Block kann auf der Achse nach oben und unten gleiten. Die Achse rotiere mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.
Bestimmten Sie die Höhe des Blocks über seiner Ruheposition (die Position, die er besitzt, falls der Regler nicht rotiert) in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit ω. Machen Sie dazu eine drei Zeichnungen der Käfte, die auf die drei Massen wirken. Stellen Sie danach Bewegungsgleichungen für die Massen auf. Beachten Sie die Symmetrie der Situation. Die Scharniere können sich in zwei Dimensionen bewegen.





Lösung

Es wirken die folgenden Kräfte auf die Scharniere und den Block:

[**3**]

Der Winkel zwischen den Stangen und der Vertikalen sei α. Dann gilt für die Höhe des Blocks über seiner Ruheposition:

$$h = 2L \cdot (1 - \cos\alpha) \tag{24}$$

[**1**]

und der radiale Abstand der Scharniere von der Achse in der Mitte ist durch

$$R = L \cdot \sin\alpha \tag{25}$$

[**1**]

gegeben.

In Zylinderkoordinaten sind die Bewegungsgleichungen für beide Scharniere identisch und lauten in r-Richtung:

$$M\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -ML\sin\alpha\omega^2 = -T\sin\alpha - T'\sin\alpha \tag{26}$$

[**1**]

und in z-Richtung:

$$M\ddot{z} = T\cos\alpha - T'\cos\alpha - Mg = 0. \tag{27}$$

[**1**]

Aus der Gleichung in r-Richtung erhält man

$$T = ML\omega^2 - T'. \tag{28}$$

[**1**]

Eingesetzt in die Gleichung für z liefert das

$$2T' = ML\omega^2 - \frac{Mg}{\cos\alpha}. \tag{29}$$

[**1**]

Die Bewegungsgleichung in z-Richtung für den Block lautet damit:

$$3M\ddot{z} = 2T'\cos\alpha - 3Mg = \left(ML\omega^2\cos\alpha\right) - 3Mg - Mg = 0, \tag{30}$$

[**1**]

woraus folgt

$$\cos\alpha = \frac{4g}{L\omega^2} \tag{31}$$

[**1**]

und damit lautet die Höhe

$$h = 2L \cdot \left(1 - \frac{4g}{L\omega^2}\right) \tag{32}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (8 Punkte)

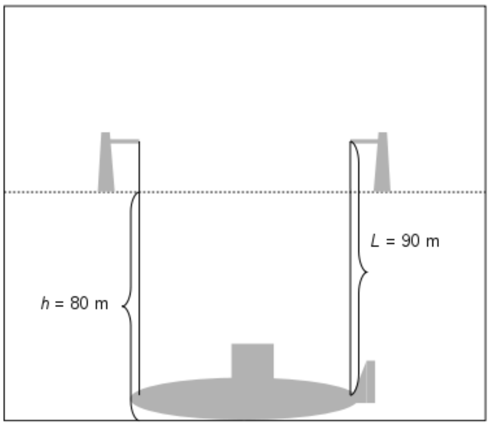
Das Wrack eines (luftgefüllten) U-Bootes mit Volumen $V = 40$ m^3 und Gesamtmasse $m = 60000$ kg soll vom Grund des Meeres (Wassertiefe: 80 m) hochgehoben werden. Dazu werden zwei Stahlseile jeweils mit Länge $L = 90$ m und Radius $r = 2$ cm (entspannter Zustand) am U-Boot befestigt, die dann von zwei Kränen langsam nach oben gezogen werden.

(a) Welche Zugspannung σ muss mind. auf ein Stahlseil wirken, während es das U-Boot hochhebt?

(b) Wie groß ist die Dehnung der Stahlseile während des Hochhebens?

(c) Welchen Radius hat ein Stahlseil während des Hochhebens? Die Länge und der Radius des Seils sind mit einer Genauigkeit von 10^{-5} angegeben.

Stahl: E-modul $E = 2 \cdot 10^{11}$ Pa, Poissonzahl: $\mu = 0,3$, Dichte von Wasser: $\rho = 1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$



Lösung

(a) Die Zugspannung entspricht der Gesamtkraft (Gewichtskraft abzüglich Auftriebskraft) pro Fläche:

$$\sigma = \frac{F_{Ges}}{A} = \frac{mg - \rho \cdot V \cdot g}{2\pi r^2}. \tag{33}$$

Mit den Zahlenwerten folgt:

$$\sigma = 8,16 \cdot 10^7 \text{ Pa}. \tag{34}$$

[**3**]

(b) Es sei L_1 die Länge des Stahlseils während des Hochhebens.
Es gilt:

$$E \cdot \frac{\Delta L}{L} = \sigma \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E} = 0,04 \text{ m}. \tag{35}$$

Daraus folgt:

$$L_1 = L + \Delta L = 90,04 \text{ m}. \tag{36}$$

[**2**]

(c) Es sei r_1 der Radius des Stahlseil während des Hochhebens.
Es gilt:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \cdot \frac{\Delta L}{L} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \mu \cdot \frac{\Delta L}{L} \cdot r = 2,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}. \tag{37}$$

Daraus folgt:

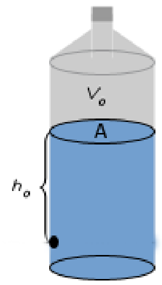
$$r_1 = r - \Delta r = 0,019997 \text{ m} \tag{38}$$

[**3**]

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Eine Flasche mit Querschnittsfläche $A = 3,8 \cdot 10^{-3}$ m^2 enthält Wasser unter Atmosphärendruck (1 atm). Die Flasche wird luftdicht versiegelt, wobei ein Luftvolumen von $V_0 = 1,5 \cdot 10^{-4}$ m^3 eingeschlossen wird. Nun wird die Flasche auf die Zugspitze gebracht, wo der Luftdruck nur noch 0,88 atm beträgt. In die Seite der Flasche wird dort im Abstand $h_0 = 10$ cm unter der Wasseroberfläche ein Loch gebort. *Hinweis:* 1 atm $= 1,013 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

(a) Wie hoch ist die Ausströmgeschwindigkeit des Wassers durch das Loch unmittelbar nachdem das Loch in die Flasche gebohrt wurde?
(b) Wie hoch ist der Luftdruck in der Flasche? Geben Sie das Ergebnis als Funkion der Höhe h des Wasserspiegels über dem Loch an. Hinweis: Für ein ideales Gas gilt: $p \cdot V = konst.$
(c) Wie hoch ist die Ausströmgeschwindigkeit des Wassers durch das Loch als Funktion der Höhe h des Wasserspiegels über dem Loch?



Lösung

(a) Der Druck innerhalb der Flasche entspricht dem Atmosphärendruck; $P_0 = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

Der Außendruck entspricht dem Luftdruck auf Höhe der Zugspitze; P_1 = 0,88 atm $= 0,89 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$.

Das Gesetz von Bernoulli lautet:

$$P_0 + \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho v_0^2 = P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2. \tag{39}$$

Zum Zeitpunkt, an dem das Loch gebohrt wird, gilt $v_0 \approx 0$, $h_1 = 0$, somit vereinfacht sich diese Gleichung zu:

$$P_0 + \rho g h_0 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2, \tag{40}$$

woraus folgt:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,(P_0 - P_1)}{\rho} + 2gh_0} \tag{41}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 0,12 \text{ atm} \cdot 1,013 \cdot 10^5 \ \frac{\mathrm{Pa}}{\mathrm{atm}}}{10^3 \ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} + 2 \cdot 9.81 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 0,11 \text{ m}} \tag{42}$$

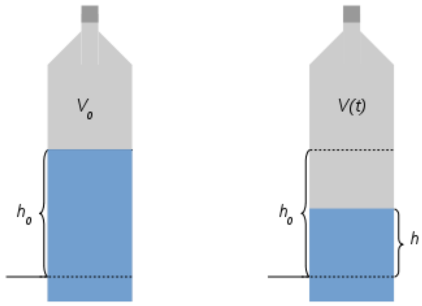
$$= 5,1 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{43}$$

[3]

(b) Unter der Annahme, dass es sich bei Luft um ein ideales Gas handelt, gilt der Zusammenhang:

$$P_0 \cdot V_0 = P(t) \cdot V(t), \tag{44}$$

wobei $P(t)$ der Druck und $V(t)$ das Luftvolumen innerhalb der Flasche zum Zeitpunkt t sind (siehe Abbildung). Mit h der Höhe des Wassers innerhalb der Flasche gilt für $V(t)$:



$$V(t) = A(h_0 - h) + V_0. \tag{45}$$

Daraus folgt für $P(t)$:

$$P(t) = P_0 \cdot \frac{V_0}{V(t)} = \frac{P_0 \cdot V_0}{A(h_0 - h) + V_0} \tag{46}$$

$$\tag{47}$$

[3]

(c) Unter Verwendung des Ergebnisses aus Teilaufgabe (b) folgt für die Gleichung von Bernoulli:

$$\frac{P_0 \cdot V_0}{A(h_0 - h) + V_0} + \rho g h_0 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2. \tag{48}$$

Daraus ergibt sich v_1 zu:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot \frac{\left(P_0\left(\frac{V_0}{A(h_0-h)+V_0} - P_1\right) + gh\right)}{\rho}} \tag{49}$$

[2]

Mathematische Ergänzung (12 Punkte)

Ein waagrecht fliegendes Projektil mit Masse m dringe mit Geschwindigkeit v_0 in ein mit Flüssigkeit gefülltes Gefäß ein, in dem eine Reibungskraft wirkt, die entweder proportional zum Betrag der Geschwindigkeit v ist (Stokes-Reibung) oder proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v^2 ist (Newton-Reibung).

(a) Stellen Sie in beiden Fällen die Bewegungsgleichung auf und bestimmen daraus eine Differentialgleichung für v.

(b) Lösen Sie jeweils die Differentialgleichung für v.

(c) Wie weit dringt das Projektil jeweils maximal in das Gefäß ein?

Lösung

Stokes-Reibung

(a) Die Bewegungsgleichung lautet
$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}$$
die Differentialgleichung für $v = \dot{x}$ ist somit
$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m}v$$
[2]

(b) Die Differentialgleichung ist die definierende Gleichung der Exponentialfunktion und somit ist die Lösung
$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\gamma}{m}t\right),$$
wobei wir die Integrationskonstante v_0 genannt haben, da es sich um den Wert bei $v(0)$ handelt.

[2]

(c) Die maximale Eindringtiefe ist
$$l = \int_0^\infty v_0 \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{m}t}\,\mathrm{d}t = \frac{mv_0}{\gamma}.$$
[2]

Newton-Reibung

(a) Die Bewegungsgleichung lautet
$$m\ddot{x} = -\kappa\dot{x}^2$$
die Differentialgleichung für $v = \dot{x}$ ist somit
$$\dot{v} = -\frac{\kappa}{m}v^2$$
[2]

(b) Die Differentialgleichung ist trennbar. Die Lösung ist implizit gegeben durch
$$t = -\frac{m}{\kappa}\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{m}{\kappa}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right).$$
Auflösen nach v liefert
$$v(t) = \frac{v_0}{1 + \frac{\kappa v_0}{m}t}.$$
[3]

(c) Das Integral für die Eindringtiefe

$$l = \int_0^\infty \frac{v_0}{1 + \frac{\kappa v_0}{m} t} \, \mathrm{d}t \to \infty$$

wächst über alle Grenzen, so dass das Projektil theoretisch beliebig weit eindringt. Allerdings ist die Annahme, die Reibung sei exakt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit für hinreichend kleine Geschwindigkeiten nicht mehr erfüllt – hier dominiert dann die Stokes-Reibung, die das Projektil schließlich stoppt.

[**1**]