Technische Universität München
Physik-Department

Theoretische Physik T70
B. Garbrecht, Wenyuan Ai

Klausur zu Theoretische Physik 2 (Elektrodynamik)

Wintersemester 2016/17

Name:

16.02.2017

Aufgabe 1:
Kurze Fragen

15 Punkte

(a) (2 P.) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Vakuum an.
(b) (2 P.) Leiten Sie die Kontinuitätsgleichung aus dem Prinzip der Ladungserhaltung mit Hilfe des Satzes von Gauß her.
(c) (1 P.) Wie lautet der metrische Tensor im Minkowski-Raum? Wie verhält dieser sich unter Lorentz-Transformationen, und welche Gleichung erfüllen diese Transformationen damit?
(d) (2 P.) Notieren Sie die Lorentz-Vektoren x^μ, x_μ, ∂_μ und ∂^μ unter Verwendung von t, $\mathbf{x}$, $\frac{\partial}{\partial t}$, c und ∇. Achten Sie dabei insbesondere auf die Vorzeichen der einzelnen Komponenten.
(e) (1,5 P.) Notieren Sie die Viererstromdichte j^μ und die Kontinuitätsgleichung in kovarianter Form. Drücken Sie dabei j^μ sowie Ableitungsoperatoren explizit in ihren Komponenten aus.
(f) (2 P.) Zeigen Sie, daß das Ampèresche Gesetz der Magnetostatik im Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung steht (wenn zeitabhängige Ladungsverteilungen angenommen werden). Durch welchen Term wird dies behoben? Zeigen Sie die Konsistenz mit dem Gauß'schen Gesetz.
(g) (2 P.) Ein unbekanntes Teilchen zerfällt in zwei masselose Teilchen (z.B. Photonen). Deren Impulse messen wir als

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \times 125 \frac{\mathrm{GeV}}{c}, \qquad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times 125 \frac{\mathrm{GeV}}{c}.$$

Wie groß ist die Ruhemasse des Teilchens? (Hinweis: Geben Sie die Ruhemasse in GeV/c^2 an. Sie können diese Aufgabe lösen, auch wenn Ihnen die Einheit GeV nicht geläufig ist.)
(h) (2,5 P.) Leiten Sie her, wie sich die Normalkomponente des elektrischen Feldes beim Durchgang durch eine Flächenladungsdichte σ verhält.

Aufgabe 2:
Geladener Draht vor Metallplatte

10 Punkte

Ein dünner, gerader und unendlich langer Draht mit der homogenen Ladung pro Länge λ sei entlang der z-Achse $x = y = 0$ orientiert.
(a) (3 P.) Bestimmen Sie das elektrische Feld.
(b) (2 P.) Der Draht sei nun bei $x = x_0 > 0$, $y = 0$ plaziert (d.h. wieder parallel zur z-Achse), und in der Ebene $x = 0$ befinde sich eine leitende, geerdete Platte. Bestimmen Sie das Feld im Halbraum mit dem Draht (d.h. $x > 0$).
(c) (2,5 P.) Bestimmen Sie die auf der Platte influenzierte Flächenladungsdichte. (Hinweis: Aufgabe 1 (h) benutzen)
(d) (2,5 P.) Berechnen Sie explizit die insgesamt influenzierte Ladung (pro Längeneinheit in z-Richtung).

Aufgabe 3:
Dipolpuls

18 Punkte

Ein elektrischer Dipol am Ort $\mathbf{x} = 0$ habe das Zeitverhalten $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 f\left(\frac{t}{\tau}\right)$. Dabei sei τ so gewählt, daß zu den Zeiten von Interesse größenordnungsmäßig $f'(t/\tau) \sim f(t/\tau)$ gilt, wobei $f'(\xi) = \frac{d}{d\xi} f(\xi)$ ist.

(a) (2 P.) Drücken Sie $\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t)$ durch ein Integral über die Stromdichte aus.

(b) (4 P.) Bestimmen Sie das Vektorpotential am Ort $\mathbf{x}$ in Lorenz-Eichung. Berechnen Sie daraus die magnetische Flußdichte. Geben Sie schließlich den führenden Beitrag in der Fernfeldnäherung $\frac{c\tau}{x} \ll 1$ an.

(c) (4 P.) Bestimmen Sie das skalare Potential in Lorenz-Eichung und Fernfeldnäherung. (Hinweis: Der führende Term ist betraglich $\sim \dfrac{1}{xc\tau}|\mathbf{p}_0|$ mit $x = |\mathbf{x}|$.)

(d) (2 P.) Bestimmen Sie das elektrische Feld in führender Fernfeldnäherung. Verifizieren Sie explizit die Transversalität $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{x}}$ mit $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

(e) (2 P.) Zeigen Sie, daß der Poyntingvektor im Fernfeld

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2\tau^2 x} f''\left(\frac{1}{\tau}\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)\right)^2 (\mathbf{p}_0 \times \hat{\mathbf{x}})^2\, \hat{\mathbf{x}}$$

ist. (Sie können hier, falls Sie das elektrische Feld in (d) nicht erhalten haben, dieses aus $\mathbf{B}$, welches in Teil (b) berechnet wird, und der Transversalitätsbeziehung im Fernfeld, siehe Teil (d), bestimmen.)

(f) (2 P.) Falls Sie das Resultat aus (e) nicht oder nur fehlerhaft erhalten haben, rechnen Sie nun bitte mit dem dort angegebenen Ausdruck für $\mathbf{S}$ weiter. Wie groß ist die abgestrahlte Leistung im Fernfeld als Funktion der Zeit?

(g) (2 P.) Sei $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. Wie groß ist die insgesamt während des Dipolpulses abgestrahlte Energie?

Einige Formeln

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^{2n} \mathrm{e}^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n-1)!!}{(2\alpha)^n}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$$

$$(2n-1)!! = \begin{cases} (2n-1)(2n-3)\cdots 1 \text{ für } n > 0 \\ 1 \text{ für } n = 0 \end{cases},$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta_x\right) \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -4\pi\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')$$

In Lorenz-Eichung:

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -4\pi\varrho$$

$$\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$