Technische Universität München
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Christian Liedtke
Kai Behrens

Wintersemester 2017/18
Probeklausur

Abgabedatum: Freitag, 13. Januar 2018

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra) (MA 9201)

Diese Probeklausur soll eigenständig während der Weihnachtsferien bearbeitet werden. Die Probeklausur wird abgegeben und korrigiert werden, jedoch sind die erzielten Punkte nicht relevant für den Notenbonus. Wir empfehlen euch deshalb, diese alleine, im Zeitrahmen von 90 Minuten und ohne (in der echten Klausur nicht erlaubte) Hilfsmittel zu lösen, damit ihr zu einer guten Selbsteinschätzung kommt.

Aufgabe 1 (9 Punkte)**.** Richtig oder falsch. Geben Sie zu jeder Aussage an, ob diese richtig oder falsch ist. Eine Begründung ist nicht notwendig. Jede korrekte Antwort gibt 1 Punkt, jede inkorrekte Antwort gibt -1 Punkt. Insgesamt erhalten Sie auf diese Aufgabe jedoch mindestens 0 Punkte.

1. Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ hat unendlich viele Basen.
2. Seien A und B zwei äquivalente 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$, dann sind A und B auch ähnlich.
3. Seien f und g diagonalisierbare Endomorphismen von $\mathbb{R}^4$, dann ist auch $f \circ g$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus von $\mathbb{R}^4$.
4. Sei $A \in M_3(\mathbb{R})$, so dass A^5 invertierbar ist. Dann ist auch A invertierbar.
5. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Dann ist f von der Form $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$.
6. Seien $A, B \in M_3(\mathbb{R})$. Dann sind A und B genau dann ähnlich, wenn $\det(A) = \det(B)$.
7. Die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems ist ein Vektorraum.
8. Seien $A, B \in M_5(\mathbb{C})$. Dann ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von AB genau dann, wenn λ auch ein Eigenwert von BA ist.
9. Seien $A, B \in M_3(\mathbb{Q})$. Dann gilt $AB = BA$ genau dann, wenn eine der Matrizen A, B ein Vielfaches von $I_3 \in M_3(\mathbb{Q})$ ist.

Aufgabe 2 (7 Punkte)**.** Sei $V := \mathbb{R}[X]_{\leq 4}$ der Unterraum aller Polynome vom Grad ≤ 4 und $f\colon V \to K^2$ die Abbildung $P \mapsto (P(1), P'(0))$ (hierbei notiert $(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i)' = \sum_{i=1}^{n} a_i X^{i-1}$ die erste Ableitung).
a) Geben Sie die Matrixdarstellung von f bezüglich der Basen $1, X, X^2, X^3, X^4$ von V und e_1, e_2 von K^2 an.
b) Bestimmen Sie den Rang und den Kern von f.

Aufgabe 3 (6 Punkte).
a) Bestimmen Sie den Rang von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$-Matrix mit $a_{ij} \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Rang von A über $\mathbb{Q}$ mit dem Rang von A über $\mathbb{R}$ übereinstimmt.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{Q}).$$

Zeigen Sie, dass $\det(A)$ durch $729 = 3^6$ teilbar ist.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f, g\colon V \to V$ zwei lineare Abbildungen mit $f + g = \mathrm{id}_V$. Beweisen Sie:

a) Es gilt $V = \mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g)$.

b) Falls weiterhin gilt $\mathrm{im}(f) \cap \mathrm{im}(g) = 0$, dann gilt auch $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ sowie $f \circ g = g \circ f = 0$.

Aufgabe 6 (11 Punkte)**.** Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & -12 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.
b) Berechnen Sie die Eigenwerte von A über $\mathbb{Q}$.
c) Berechnen Sie Basen der Eigenräume von A über $\mathbb{Q}$.
d) Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$? Ist A trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$?