Klausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. S. Paul, Dr. B. Ketzer

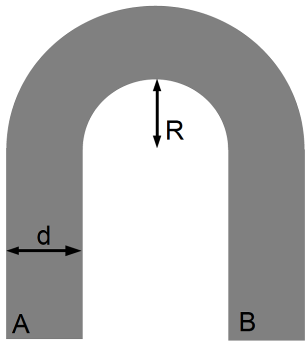
Wintersemester 2010/2011

14. Februar 2012

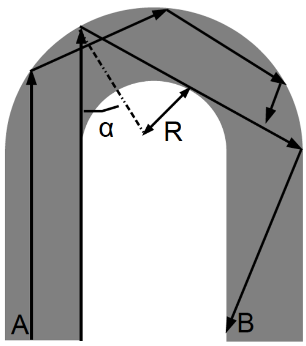
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Glasstab mit einem rechteckigen Querschnitt wird in die in der Abbildung gezeigte Form verbogen. Ein paralleler Lichtstrahl fällt senkrecht auf A ein. Fertigen Sie eine Skizze an. Bestimmen Sie den Minimalwert des Verhältnisses $\frac{R}{d}$, für den alles Licht, das auf A einfällt, auch durch das Glas bei B wieder austritt. Der Brechungsindex von Glas ist $n = 1.5$. Der Glasstab befindet sich in Luft ($n_{Luft} = 1$).



Lösung:



[1]

Betrachten Sie die Strahlen in der Abbildung. Ein Strahl, der in den Glasstab durch die Oberfläche A eintritt und an der Innenseite des Stabes passiert, wird an der Außenfläche im kleinstmöglichen Winkel α reflektiert.

[**1**]

Hier ist der reflektierte Strahl tangential zur Innenseite. Man muss nun die Bedingungen betrachten, unter denen der Strahl intern Totalreflexion erfährt, bevor er B erreicht. Für $\alpha < \theta_C$ (θ_C ist der kritische Winkel) werden alle einfallenden Strahlen B passieren. Also wird gefordert, dass

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{n} \tag{1}$$

[**1**]

Durch die Geometrie ergibt sich

$$\sin(\alpha) = \frac{R}{(R+d)}, \tag{2}$$

[**1**]

also

$$\frac{R}{(R+d)} = \frac{1}{n} \tag{3}$$

[**1**]

So ergibt sich schließlich

$$\left(\frac{R}{d}\right)_{\min} = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{1.5-1} = 2 \tag{4}$$

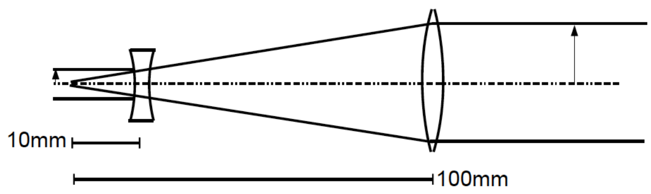
[**1**]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein Laserstrahl mit einem kreisförmigen Querschnitt mit Radius $r = 1\text{mm}$. Sie haben zwei Linsen zur Verfügung, eine Konvexlinse mit $|f| = 100\text{mm}$ und eine Konkavlinse mit $|f| = 10\text{mm}$. Sie sollen die Linsen so auf einer optischen Bank anordnen, dass der Laserstrahl nach Durchlaufen der Linsen wieder aus parallelen Strahlen besteht, jedoch einen größeren Querschnitt von jetzt $r = 10\text{mm}$ hat (Strahlaufweiter).

a) Zeichnen Sie qualitativ den Strahlengang.

Lösung:



[**2**]

b) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Linsen.

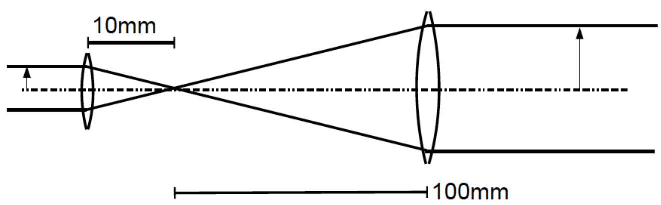
Lösung:

Aus der obigen Skizze kann man leicht ablesen, dass der Abstand zwischen den beiden Linsen 90mm beträgt. Das Bild der Konkavlinse wird im Brennpunkt fokussiert. Dieses Bild ist der Gegenstand der zweiten Linse. Auch dieser Gegengstand befindet sich im Brennpunkt der Konvexlinse, da die Bildweite dann im Unendlichen liegt.

[**1**]

c) Skizzieren Sie einen Aufbau aus zwei Konvexlinsen (mit $f = 10\text{mm}$ und $f = 100\text{mm}$) mit gleicher Wirkung.

Lösung:



[**2**]

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Der Brechungsindex von Luft bei $T = 300\text{K}$ und Druck $p = 1\text{atm}$ beträgt $n = 1.0003$ in der Mitte des sichtbaren Spektrums. Nehmen Sie bei $T = 300\text{K}$ eine isotherme Atmosphäre an. Berechnen Sie den Faktor, um den die Erdatmosphäre dichter sein müsste, damit die Krümmung eines horizontalen Lichtstrahls der Erdkrümmung auf Meereshöhe entspräche. Dies würde bedeuten, dass man bei wolkenlosem Himmel die ganze Nacht lang einen romantischen Sonnenuntergang beobachten könnte. Allerdings wäre das Bild der Sonne stark vertikal gestaucht.

Hinweis: Der Brechungsindex n habe die Eigenschaft, dass $n - 1$ proportional zur Dichte sei. In dieser isothermen Atmosphäre gilt die barometrische Höhenformel:

$$\rho(h) = \rho_0 \exp\left(-\frac{h}{8700\text{m}}\right), \tag{5}$$

wobei $\rho(h)$ die Dichte sei, ρ_0 die Dichte auf Meereshöhe und h die Höhe über der Meereshöhe ist, sodass gilt

$$n(r) - 1 = \rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700}\right), \tag{6}$$

wobei ρ der Dichtekoeffizient ist. Der Erdradius ist gegeben durch $R = 6400 \times 10^3\text{m}$. Denken Sie an das Fermatsche Prinzip.

Lösung:

Es ist also bekannt, dass

$$n(r) - 1 = \rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700}\right), \tag{7}$$

wobei $R = 6400 \times 10^3\text{m}$ ist, also der Erdradius, und ρ der Dichtekoeffizient von Luft. Dann ist

$$n(r) = 1 + \rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700}\right) \tag{8}$$

$$\frac{dn(r)}{dr} = n'(r) = -\frac{1}{8700}\rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700}\right) \tag{9}$$

[**1**]

Es ist ebenfalls bekannt, dass die Luft so dicht ist, dass die Lichtkrümmung der Erdkrümmung auf Meereshöhe entspricht (siehe Abbildung).

Die optische Weglänge von A nach B ist

$$l = n(r)r\theta \tag{10}$$

[**1**]

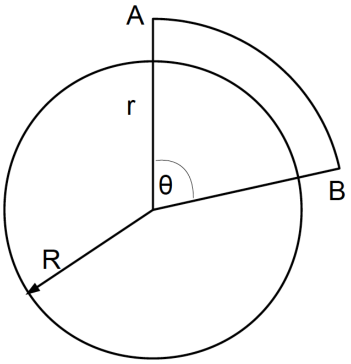


Figure 1: Krümmung des Lichts.

Das Fermatsche Prinzip besagt, dass die optische Weglänge von A nach B ein Extremum sein sollte. Daher hat man

$$\frac{dl}{dr} = \left(n'(r)r + n(r)\right)\theta = 0, \tag{11}$$

[**1**]

das bedeutet also

$$n'(r) = \frac{-n(r)}{r} \tag{12}$$

[**1**]

Setzt man Gleichung (12) in Gleichung (9) ein, so erhält man

$$\frac{1}{8700}\rho \exp\left(-\frac{r-R}{8700}\right) = \frac{n(r)}{r} \tag{13}$$

[**1**]

Auf Meereshöhe beträgt $r = R = 6400 \times 10^3$m. Zusammen mit den Gleichungen (8) und (13) hat man dann

$$\frac{\rho \times 6400 \times 10^3}{8700} = 1 + \rho \tag{14}$$

und damit

$$\rho = 0.00136 \tag{15}$$

[**1**]

Auf Meereshöhe und bei bei $T = 300$K und Druck $p = 1$atm ist

$$n_0 - 1 = \rho_0 = 0.0003 \tag{16}$$

Damit erhalten wir schließlich das Ergebnis:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 4.53 \tag{17}$$

Das bedeutet, dass die Atmosphäre um einen Faktor von 4.53 dichter sein müsste, um die gewünschte Lichtkrümmung zu erhalten.

[**1**]

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein Doppelspalt-Experiment werde in Fraunhoferscher Geometrie zunächst in Luft durchgeführt. Der Doppelspalt mit Spaltabstand $b = 0.12$mm werde von einem HeNe-Laser mit Wellenlänge $\lambda = 633$nm beleuchtet. Wird eine dünne Kunststofffolie auf der dem Laser zugewandten Seite vor einen der Spalte gebracht, so verschiebt sich das Interferenzmuster um 5.5 Streifen.

Nun führt man dasselbe Experiment unter Wasser ($n_W = 1.33$) durch und es ergibt sich wieder ein Interferenzmuster. Wird nun die Kunststofffolie vor einen der Spalte gebracht, so verschiebt sich dieses Interferenzmuster nur um 3.5 Streifen. Berechnen Sie die Dicke sowie den Brechungsindex der Kunststofffolie.

Lösung:

Beim Doppelspalt ist die Bedingung für Maxima:

$$b\sin(\theta) = m\lambda \qquad \text{mit m} = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{18}$$

[**1**]

Die Kunststofffolie verlängert den optischen Weg für einen der beiden Teilstrahlen. Zur Berechnung der zusätzlichen Weglängendifferenz können wir, da es sich um eine dünne Folie handelt, die Dicke der Folie als unabhängig vom Winkel θ betrachten. Somit setzt sich die Weglängendifferenz aus der in Luft mit

$$(b\sin(\theta) - D)n_{Luft} \tag{19}$$

[**1**]

und der im Kunststoff mit

$$Dn \tag{20}$$

zusammen.

[**1**]

Die Bedingung für Maxima lautet also:

$$b\sin(\theta) + (n - n_{Luft})D = m\lambda \qquad \text{mit m} = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{21}$$

[1]

Die Verschiebung des Musters wird also durch den Summanden $(n-n_{Luft})D$ verursacht. Entsprechendes gilt bei der Anordnung in Wasser, so dass wir folgende Gleichungen erhalten:

$$(n - n_{Luft})D = 5.5\lambda \qquad \text{und} \qquad (n - n_W)D = 3.5\lambda \tag{22}$$

[1]

Durch Division kann daraus der Brechungsindex des Kunststoffes berechnet werden:

$$\frac{n - n_{Luft}}{n - n_W} = \frac{5.5}{3.5} \qquad \rightarrow \qquad n = \frac{3.5n_{Luft} - 5.5n_W}{-2} \approx 1.91 \tag{23}$$

[1]

Durch Subtraktion der Gleichungen erhält man schließlich

$$n_W D - n_{Luft}D = (5.5 - 3.5)\lambda \qquad \rightarrow \qquad D = \frac{2\lambda}{n_W - n_{Luft}} \approx 3.84\mu\text{m} \tag{24}$$

[1]

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Das einfachste Lichtmikroskop besteht aus einem Objektiv der Brennweite f_1 und einem Okular der Brennweite f_2. Der Abstand der einander zugewandten Brennpunkte beider Linsen wird als optische Tubuslänge t bezeichnet (siehe Abbildung).

a) Beschreiben Sie die Funktion von Objektiv und Okular im Lichtmikroskop.

Lösung:

Das Objektiv erzeugt ein stark vergrößertes, reelles Zwischenbild in der Brennebene des Okulars.

[1]

Das Okular wirkt als Lupe für das unendlich eingestellte Auge des Beobachters.

[1]

b) Was begrenzt das Auflösungsvermögen des Mikroskops? Von welchen Parametern hängt der minimale Abstand zweiter Objektpunkte ab, die im Mikroskop noch getrennt wahrgenommen werden können?

Lösung:

Das Auflösungsvermögen des Mikroskops ist abhängig davon, wie viel Licht vom beobachteten Gegenstand in das Objektiv gelangt. Die Lichtbeugung an der Fassung des Objektivs als engste Öffnung (Aperturblende) des Mikroskops begrenzt das Auflösungsvermögen des Mikroskops. Somit hat ein Objektiv mit einem geringen Öffnungswinkel auch eine schlechte Auflösung.

Der geringste Abstand, den zwei Punkte im Objekt haben dürfen, damit ihre Beugungsscheibchen noch getrennt wahrgenommen werden dürfen, beträgt

$$d_{min} = 0.61 \frac{\lambda}{n \sin(\phi)} \tag{25}$$

Hier ist $n \sin(\phi)$ die numerische Apertur, n der Brechungsindex des Mediums zwischen Objekt und Objektiv und ϕ ist der halbe Öffnungswinkel des abbildenden Lichtbündels.

[**3**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Ein monoenergetischer γ-Strahl fällt auf eine sehr dünne metallische Folie, die sich im Vakuum befindet. Senkrecht aus der Folie austretende Elektronen werden durch ein homogenes Magnetfeld $\mathbf{B}$, das parallel zur Folie orientiert ist, abgelenkt. Bestimmen Sie die Energie, die Frequenz und die Wellenlänge der einfallenden Strahlung unter Annahme folgender Bedingungen: $R = 0.10\text{m}$ sei der Krümmungsradius der herausgeschlagenen Elektronen in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld der Stärke $B = |\mathbf{B}| = 15 \cdot 10^{-4}\text{T}$, λ=1.5nm sei die Wellenlänge, die der Austrittsarbeit des Metalls entspricht.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit der Elektronen sehr viel kleiner als c ist.

Lösung:

Unter Vernachlässigung etwaiger Energieverluste durch Synchrotronstrahlung gilt für Elektronen, die sich senkrecht zum Magnetfeld bewegen, $F_{\text{Lorentz}} = F_{\text{Zentri}}$ mit

$$F_{\text{Lorentz}} = evB \tag{26}$$

und

$$F_{\text{Zentri}} = \frac{mv^2}{R}. \tag{27}$$

[**1**]

Dabei ist v die Geschwindigkeit der Elektronen. Wir betrachten nur Elektronen mit der maximal möglichen kinetischen Energie. Kurzer Check zeigt $v/c < 0.1$ und wir rechnen nicht-relativistisch weiter.

[**1**]

Die Energie der Photonen E_{Phot} muss um die Austrittsarbeit des Materials K grösser sein als die kinetische Elektronenenergie E_{Kin}, d.h.

$$E_{\text{Phot}} = E_{\text{Kin}} + K. \tag{28}$$

[**1**]

Dabei ist $K = hc/\lambda$. Es ergibt sich mit den Werten aus der Aufgabe $E_{\text{Phot}} = 84,63\,\text{keV}$, $\nu_{\text{Phot}} = 2 \cdot 10^{19}\,\text{Hz}$ und $\lambda_{\text{Phot}} = 14,65\,\text{pm}$.

[**3**]

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Sonne als schwarzen Strahler mit einer Temperatur $T = 5500\text{K}$. Der Abstand Erde-Sonne ist $1.5 \times 10^8\text{km}$. Der Durchmesser der Sonne beträgt $1.4 \times 10^6\text{km}$. Nehmen Sie jetzt an, dass durch die Zunahme des CO_2-Gehalts elektromagnetische Strahlung mit Wellenlängen $\lambda > \lambda_0 = 10\mu\text{m}$ die Atmosphäre nicht mehr durchdringen können. Wie groß ist die prozentuale Abnahme der Bestrahlungsstärke auf der Erde im Vergleich zu einer völlig transparenten Atmosphäre?

Hinweis: Es sei $hc/\lambda << k_B T$ für $\lambda > \lambda_0$. Das Das Plancksche Strahlungsgesetz lautet

$$M_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu \tag{29}$$

Lösung:

Die Gesamtemission, also das Integral der spektralen spezifischen Ausstrahlung $M_\nu(\nu, T)$ über alle Frequenzen, einer Oberflächeneinheit des schwarzen Körpers ist durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz gegeben:

$$M = \sigma T^4 \tag{30}$$

[**1**]

Das Plancksche Strahlungsgesetz lautet

$$M_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu \tag{31}$$

Zur Integration kann man den Exponentialterm entwickeln. Nach Einsetzen von $1 + \frac{h\nu}{k_B T}$ erhalten wir

$$M_\nu(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} d\nu = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{\frac{h\nu}{(k_B T)}} d\nu = \frac{2\pi}{c^2} k_B T \nu^2 \tag{32}$$

[**2**]

Zur Berechnung der prozentualen Abnahme bilden wir

$$\frac{\int M_\nu(\nu,T)d\nu}{\sigma T^4} = \frac{15h^3}{\pi^4 k_B^3} T \int_{\nu_1}^{\nu_2} \nu^2 d\nu \quad (33)$$

$$= \frac{15h^3}{\pi^4 k_B^3} T \frac{1}{3} [\nu^3]_{\nu_1}^{\nu_2} \quad (34)$$

$$= 0.1\% \quad (35)$$

[**2**]