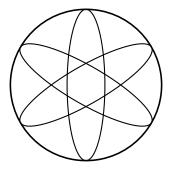


## Ferienkurs Analysis 3 für Physiker



Übung: Integralsätze

Autor: Benjamin Rüth Stand: 17. März 2014 **Aufgabe 1** (Torus) Zu festem R > 0 werden mittels

$$T: [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + \varrho \cos \vartheta) \sin \varphi \\ \varrho \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

- **1.1** den Oberflächen<br/>inhalt des Torus  $T_R^r := T([0,r] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi])$  mit  $r \in [0,R],$
- **1.2** den Fluß des Vektorfeldes  $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , v(x) = x, durch die Oberfläche von  $T_R^r$  direkt,
- **1.3** den Fluß des Vektorfeldes  $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , v(x) = x, durch die Oberfläche von  $T_R^r$  mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Aufgabe 2 (Gauss) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{\partial W} \begin{pmatrix} x^2 + e^{y^2 + z^2} \\ y^2 + x^2 z^2 \\ z^2 - e^y \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\sigma,$$

wobei W der Einheitswürfel mit den Ecken in (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,0,1), (0,1,1) und (1,1,1).

**Aufgabe 3** (Gauß) Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion  $u(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}$ :

$$\iint_{B} \Delta u \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \, \mathrm{d}s \,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

**Aufgabe 4** (Gauss) Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_{\phi} \mathbf{v} \cdot ds \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei  $\phi$  die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche  $z=4-y^2$  und die drei Ebenen x=0, x=3, z=0 begrenzt ist.

**Aufgabe 5** (Satz von Green) Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

**Aufgabe 6** (Satz von Green) Man verifiziere für das Vektorfeld  $\mathbf{v}(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)^{\top}$  und das Gebiet B, das durch  $y = x^2$  und  $y^2 = x$  begrenzt wird, den Satz von Green.

**Aufgabe 7** (Satz von Stokes) Verifizieren Sie den **Satz von Stokes** für das Vektorfeld  $v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ,  $v(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_3, x_2, x_2x_3)^T$  auf dem Stück des Kegelmantels  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ , das zwischen den Ebenen  $x_3 = 0$  und  $x_3 = 1$  liegt. Worauf ist bei der Parametrisierung der Randkurve des Kegelmantelstücks zu achten?

Aufgabe 8 (Satz von Stokes) Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_{\phi} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot ds = \oint_{\partial \phi} \mathbf{v} \cdot ds \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei  $\phi$  die Fläche des Paraboloids  $2z=x^2+y^2$  mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene z=2 mit dem Rand  $\partial \phi$  begrenzt ist.

**Aufgabe 9** (Satz von Stokes) Gegeben sind das Vektorfeld  ${\bf v}$  und die Fläche  $\phi$ 

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \ \text{und} \ \phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ \vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral  $\iint_{\phi} \text{rot} \mathbf{v} \cdot ds$ .

Aufgabe 10 (Maxwell) Leiten Sie mithilfe der Integralsätze aus der folgenden differentiellen Form der Maxwell-Gleichungen die integrale Darstellung her:

$$\bullet \ \operatorname{rot}(H) - \dot{D} = j, \qquad \bullet \ \operatorname{rot}(E) + \dot{B} = 0, \qquad \bullet \ \operatorname{div}(D) = \rho, \qquad \bullet \ \operatorname{div}(B) = 0.$$