Lösung der Probeklausur zur Theoretischen Physik II (Elektrodynamik)

1 Multiple-Choice Fragen (10P)

Zu jeder Frage darf nur *eine* Antwort angekreuzt werden. Für jede richtig beantwortete Frage gibt es einen Punkt.

Ein Feld $\vec{A}(\vec{r})$ ist quellenfrei, wenn gilt

⊗ $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ◯ $\Delta \vec{A} = 0$ ◯ $\nabla \times \vec{A} = 0$

Die Tangentialkomponente welcher Größe ist an einer Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika mit verschiedener Dielektrizitätskonstante stetig?

⊗ die des elektrischen Felds E_t ◯ die der dielektrischen Verschiebung D_t

Eine Ladung befindet sich im Mittelpunkt einer metallischen Hohlkugel. Wie viele Bildladungen sind nötig, um das elektrische Feld *im Inneren* der Kugel zu beschreiben?

⊗ null ◯ unendlich viele ◯ eine

Gegeben ist eine dreidimensionale Ladungsverteilung. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

richtig	falsch	
⊗	◯	Bei einer Drehung des dreidimensionalen Raums bleibt die Spur des Quadrupoltensors erhalten.
⊗	◯	Die Diagonalkomponenten des Quadrupoltensors sind null, wenn die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist.
◯	⊗	Der Quadrupoltensor kann nur dann diagonalisiert werden, wenn die Ladungsverteilung Zylindersymmetrie aufweist.

Zwei kreisförmige Leiterschleifen sind parallel übereinander angeordnet. in den Leiterschleifen fließt Strom in entgegengesetzten Richtungen. Die beiden Leiterschleifen

◯ ziehen sich an ⊗ stossen sich ab ◯ wirken keine Kraft aufeinander aus

Zwei homogen geladene, unendlich ausgedehnte, infinitesimal dünne Platten befinden sich parallel zur (x,y)-Ebene im Vakuum. Die eine Platte bei $z_1 > 0$ hat die Flächenladungsdichte σ, die andere Platte bei $z_2 = -z_1$ hat die Flächenladungsdichte $-\sigma$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?

richtig	falsch	
◯	⊗	Für $|z| >> z_1$ ist das elektrische Feld wie ein Dipolfeld proportional zu $1/z^3$.
◯	⊗	Das Potential verschwindet für $z \to \infty$ und $z \to -\infty$.
⊗	◯	Für $|z| < z_1$ ist das elektrische Feld konstant.

2 Zwei Ladungen an leitender Oberfläche (10P)

Der Halbraum $z < 0$ wird von einem idealen Leiter ausgefüllt. Zwei Ladungen $+q$ und $-q$ sind im Abstand d starr miteinander verbunden. Der Mittelpunkt befindet sich im Abstand $z_M > \frac{d}{2}$ zur Leiteroberfläche. Die Verbindungsachse steht im Winkel α zur Oberflächennormalen

Die Positionen von Ladungen und Bildladungen sind

$$\vec{r}_q = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}, \vec{r}_{-q} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}, \vec{r'}_q = \begin{pmatrix} \frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ -z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix}, \vec{r'}_{-q} = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2}\sin\alpha \\ 0 \\ -z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

a) Geben Sie alle Bedingungen an, die das elektrostatische Potenzial $\Phi(\vec{r})$ im Bereich $z > 0$ erfüllen muss.

Bedingungen an das Potential:

- Poisson-Geichung:

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \qquad \rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q) - q\delta(\vec{r} - \vec{r}_{-q}) \tag{2}$$

- Randbedingungen:

$$\left.\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial x}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\Phi(\vec{r})}{\partial y}\right|_{z=0} = 0 \tag{3}$$

$$|\Phi(\vec{r})| < \infty, \qquad \vec{r} \neq \vec{r}_q, \vec{r}_{-q} \tag{4}$$

b) Bestimmen Sie das Potenzial und das elektrische Feld für $z > 0$ mit Hilfe der Bildladungsmethode.

$z > 0$:

$$\begin{aligned}
\Phi(|\vec{r}|) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{-q}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}_q|} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}_{-q}|}\right) &(5)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2}}\right.\\
&\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z + z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z + z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2}}\right) &(6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\cdot\Phi(|\vec{r}|) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-\vec{r}_q}{|\vec{r}-\vec{r}_q|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r}_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r}_{-q}|^3} - \frac{\vec{r}-\vec{r'}_q}{|\vec{r}-\vec{r'}_q|^3} + \frac{\vec{r}-\vec{r'}_{-q}}{|\vec{r}-\vec{r'}_{-q}|}\right) &(7)\\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{z}}{\left[(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}} - \frac{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)\hat{x} + y\hat{y} + (z - z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{z}}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z - z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}\right. &(8)\\
&\left. - \frac{(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{z}}{\left[(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z + z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}} + \frac{(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)\hat{x} + y\hat{y} + (z + z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)\hat{z}}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z + z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}\right) &(9)
\end{aligned}$$

c) Das elektrische Feld ist 0 fuer $z < 0$. Die Ladungdichte ist notwendig um das elektrische Feld bei $z = 0$ zu kompensieren. Also gilt für die Oberflächenladungsdichte:

$$\vec{E}(z = 0^+) - \vec{E}(z = 0^-) = \frac{\sigma(x,y)\hat{n}}{\epsilon_0}, \tag{10}$$

wobei $\hat{n} = \hat{z}$ der Normalenvektor auf der Oberfläche ist.

$$\sigma(x,y) = \frac{q}{2\pi}\left(-\frac{z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[(x-\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z_m + \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}} + \frac{z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha}{\left[(x+\frac{d}{2}\sin\alpha)^2 + y^2 + (z_m - \frac{d}{2}\cos\alpha)^2\right]^{3/2}}\right). \tag{11}$$

3 Rotierende geladene Kugel – magnetischer Dipol (12P)

Eine homogene Vollkugel mit Radius R und Gesamtladung Q rotiert um eine feste Achse durch ihren Mittelpunkt mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$.

a) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}\,(\vec{r})$ an.

Mit Hilfe der Relation $\vec{j} = \rho\vec{v}$ und $T = 2\pi/\omega$ sowie $\rho = 3Q/(4\pi R^3)$ ergibt sich die Stromdichte zu:

$$\vec{j} = \hat{e}_\phi \frac{2\pi r \sin(\theta)}{T}\rho. \tag{12}$$

Der Richtungsvektor ergibt sich aus der Drehbewegung der Kugel und der Betrag der Geschwindigkeit ist für jeden Raumpunkt der Kugel über seinen Abstand von der Drehachse (o.B.d.A. die z-Achse) bestimmt, hier also $r\sin(\theta)$. Es gilt weiterhin:

$$\vec{j} = \omega\rho r \sin(\theta)\,\hat{e}_\phi = \omega\rho\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \omega\rho\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{r}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) + \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega)\right] \\ \mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) - \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Dabei wurden die Ortskoordinaten x und y mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen ausgedrückt (Ω steht für die beiden Winkel θ und ϕ), also:

$$x = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) - \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega)\right] \quad \text{und} \quad y = \frac{r}{2\mathrm{i}}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left[\mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) + \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega)\right]. \tag{14}$$

b) Berechnen Sie das Vektorpotential $\vec{A}\,(\vec{r})$ außerhalb der Kugel. Zeigen Sie, dass ein reines Dipolfeld entsteht.

Hinweis: Drücken Sie $\vec{r}$ mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)$ aus.

Das Vektorfeld $\vec{A}$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\vec{A}\,(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\,\frac{\vec{j}\,(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\omega\rho\int r'^2\mathrm{d}r'\int \mathrm{d}\Omega'\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{r'}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega') + \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega')\right] \\ \mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega') - \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega') \\ 0 \end{pmatrix}\sum_{lm}\frac{r'^l}{r^{l+1}}\frac{4\pi}{2l+1}\mathrm{Y}_{lm}(\Omega)\,\mathrm{Y}^*_{lm}(\Omega') \\
&= \mu_0\omega\rho\sum_{lm}\int_0^R \mathrm{d}r'\,r'^{l+3}\frac{1}{2l+1}\frac{1}{r^{l+1}}\mathrm{Y}_{lm}(\Omega)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\delta_{l1}\delta_{m,-1} + \delta_{l1}\delta_{m1}\right] \\ \delta_{l1}\delta_{m,-1} - \delta_{l1}\delta_{m1} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mu_0\omega\rho\frac{1}{5}R^5\frac{1}{3r^2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{i}}\left[\mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) + \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega)\right] \\ \mathrm{Y}_{1,-1}(\Omega) - \mathrm{Y}_{1,1}(\Omega) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega R^2 Q}{5r^2}\sin(\theta)\,\hat{e}_\phi,
\end{aligned} \tag{15}$$

wobei wieder $\hat{e}_\phi$ verwendet wurde, vgl. hierzu die Umformung aus (13), und auch die Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen spielt eine wichtige Rolle, da diese zwischenzeitlich die Kronecker-Deltas erzeugen.

Man beachte hier den wichtigen Unterschied zwischen gestrichenen und ungestrichenen Variablen. Desweiteren kam die sogenannte Zauberformel der Vorlesung zum Tragen mit $r_< = r'$ und $r_> = r$. Es liegt ein reines Dipolfeld vor, da nur $l = 1$ relevant ist.

c) Wie groß ist das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ der Kugel? Berechnen Sie das Magnetfeld im Außenraum.

Für das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ erhält man:

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r'\,\vec{r}' \times \vec{j}\,(\vec{r}') = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}r'\,r'^2 \int \mathrm{d}\Omega'\,r'\hat{e}_{r'} \times \hat{e}_{\phi'}\omega\rho r' \sin(\theta') \\ &= -\frac{1}{2}\omega\rho\int_0^R \mathrm{d}r'\,r'^4 \int \mathrm{d}\Omega'\,\hat{e}_{\theta'}\sin(\theta') = -\frac{1}{2}\omega\rho\frac{1}{5}R^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\phi'\mathrm{d}\theta'\sin^2(\theta')\begin{pmatrix}\cos(\theta')\cos(\phi')\\ \cos(\theta')\sin(\phi')\\ -\sin(\theta')\end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega\rho R^5}{10}2\pi\hat{e}_z\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta'\sin^3(\theta') = \frac{\omega Q}{5}R^2\hat{e}_z. \end{aligned} \tag{16}$$

Hierbei ist zu beachten, dass über die Richtungsvektoren integriert wird und diese nicht vor das Integral gezogen werden dürfen. Das Vektorpotential dieses Dipols ist:

$$\vec{A}_{\text{Dipol}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\mu}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega R^2 Q}{5r^2}\sin(\theta)\,\hat{e}_\phi, \tag{17}$$

identisch mit dem Ergebnis von b). Zuletzt bestimmt man noch das entstehende Magnetfeld:

$$\vec{B}_{\text{Dipol}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[3\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}\right] = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\omega Q}{5}\frac{R^2}{r^3}\left[3\cos(\theta)\,\hat{e}_r - \hat{e}_z\right]. \tag{18}$$

4 Kugelkondensator mit inhomogenem Dielektrikum (8P)

Ein Kugelkondensator besteht aus zwei konzentrischen, unendlich dünnen Kugelschalen mit den Radien R_1 und $R_2 > R_1$. Die Kugelschalen haben die Ladungen $q_1 = q$ und $q_2 = -q$. Der Zwischenraum zwischen den beiden Schalen sei ganz mit einem inhomogenen Dielektrikum der Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(r)$ gefüllt.

a) Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$.

Satz von Gauss:

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} & \text{für} \quad R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & \text{für} \quad r > R_2 \end{cases} \tag{19}$$

und da $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon(r)\vec{E}$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < R_1 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon(r)r^2}\hat{r} & \text{für} \quad R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & \text{für} \quad r > R_2 \end{cases} \tag{20}$$

b) Betrachten Sie nun den Fall $\varepsilon(r) = \tilde{\varepsilon}r^2$. Berechnen Sie das elektrische Feld und die Kapazität des Kondensators, und geben Sie die elektrostatische Energie an.

mit $\epsilon(r) = \tilde{\epsilon}r^2$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad r < R_1 \\ \frac{q}{4\epsilon_0\pi\tilde{\epsilon}r^4}\hat{r} & \text{für} \quad R_1 \le r \le R_2 \\ 0 & \text{für} \quad r > R_2 \end{cases} \tag{21}$$

Das Elektrische Feld ist $\vec{E}(r) = -\vec{\nabla}\Phi(r)$. Daher ist die Potenzialdifferenz zwischen den beiden Kugelschalen gegeben durch:

$$\Delta\Phi(r) = -\int_{R_1}^{R_2} dr E(r) = \frac{q}{12\pi\epsilon_0\tilde{\epsilon}}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) \tag{22}$$

Die Kapazitaet ist somit:

$$C = \frac{q}{|\Delta\Phi|} = 12\epsilon_0\pi\tilde{\epsilon}\frac{(R_2 R_1)^3}{R_2^3 - R_1^3} \tag{23}$$

Mit $\rho_i(r) = q_i\delta(r - R_i)/4\pi r^2$, i =1,2 erhält man

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\int_V \rho_i(\vec{r})\Phi(\vec{r})d^3\vec{r} = \frac{q^2}{24\pi\epsilon_0\tilde{\epsilon}}\left(\frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{R_1^3}\right) \tag{24}$$