# Ferienkurs Analysis 1: Übungsblatt 1

Marta Krawczyk, Andreas Schindewolf, Simon Filser

15.3.2010

## 1 Aufgaben zur vollständigen Induktion

### 1.1 Verallgemeinerte geometrische Summenformel

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq b$  und  $n \in \mathbb{N}$  die verallgemeinerte geometrische Summenformel gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a - b}.$$
 (1)

2. Zeigen Sie, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Zahl  $7^n - 1$  durch 6 teilbar ist.

### 1.2 Zwei weitere Summenformeln

1. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \tag{2}$$

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{(n+1)}.$$
(3)

# 2 Aufgaben zu Intervallschachtelungen und Abzählbarkeit

### 2.1 Direkte und indirekte Beweise.

Beweisen Sie folgende Aussagen:

- a) Wenn  $n \in \mathbb{N}$  gerade ist, dann auch  $n^2$ .
- b)  $n \in \mathbb{N}$  ist gerade, wenn  $n^2$  gerade ist.
- c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gibt es <br/>n aufeinanderfolgende Zahlen, die keine Primzahlen sind.
- d)Es gibt unendlich viele Primzahlen.

### 2.2 Intervallschachtelung.

Es sei 0 < a < b. Man definiere Intervalle  $[a_n; b_n], n \in \mathbb{N}$ , rekursiv durch  $[a_0; b_0] := [a; b]$ , sowie durch  $a_{n+1} := G(a_n, b_n)$  und  $b_{n+1} := A(a_n, b_n)$ , wobei  $G(a, b) := \sqrt{ab}, A(a, b) := \frac{a+b}{2}$ . Man zeige, dass sie eine Intervallschachtelung bilden. Gehen Sie wie folgt vor:

- a) Beweisen Sie a < G(a, b) < A(a, b) < b.
- b) Beweisen Sie  $a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_0$ .
- c) Zeigen, dass die Intervalle  $I_n$ : =  $[a_n; b_n]$  eine Intervallschachtelung bilden.

### 2.3 Injektivität und Surjektivität bei der Komposition von Abbildungen.

Es seien  $f: X \to Y$  und  $g: Y \to Z$  Abbildungen. Untersuchen Sie, welche der nachfolgenden Implikationen zutreffen und welche nicht.

- a)  $g \circ f$  injektiv  $\Rightarrow$  f injektiv
- b) g injektiv  $\Rightarrow g \circ f$  injektiv

### Injektivität und Surjektivität

Gegeben sei das folgende kommutierende Diagramm (siehe Bild 1), d. h. für Abbildungen  $f: A \to B, g: X \to Y, \alpha: A \to X$  und  $\beta \colon B \to Y$  gelte  $g \circ \alpha = \beta \circ f$ . Ferner werde vorausgesetzt, dass  $\alpha, \beta$  bijektiv sind. Zeigen Sie: g ist genau dann injektiv, wenn f injektiv ist.

Hinweis: Benutzen Sie folgenden Satz (ohne Beweis): Seien  $\varphi \colon K \to L$  und  $\psi \colon L \to M$  Abbildungen, es gilt:

- a) Sind beide Abbildungen injektiv, so ist auch  $\psi \circ \varphi$  injektiv.
- b) Sind beide Abbildungen surjektiv, so ist auch  $\psi \circ \varphi$  surjektiv.

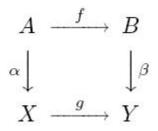


Abbildung 1: Aufgabe 4

#### 2.5Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

Zeigen Sie, dass Q abzählbar/überabzählbar ist.

#### $\mathbf{3}$ Aufgaben zu komplexen Zahlen

#### Nullstellen 3.1

a) Prüfen Sie, für welche  $\gamma \in \mathbb{C}$  der Bruch B gekürzt werden kann:

$$B(x) = \frac{2x^4 + x^3 + 22x^2 + 9x + 36}{x^2 + \gamma}$$

b) Finden Sie die Nullstellen von  $2x^4 + x^3 + 22x^2 + 9x + 36$ .

#### 3.2Rechenübungen

Wandeln Sie in karthesische Darstellung um:

- b)  $4exp(i\frac{\pi}{3})$

 $c)\pi^i$ 

Wandeln Sie in Polardarstellung um:

- d) 4 + 8i
- e)  $i^e$
- f)  $\sqrt{3} 3i$
- g) Berechnen Sie:  $\sqrt[4]{16i}$
- h) Berechnen Sie:  $(\sqrt{3}+i)^{12}$

#### 3.3 Quadratische Gleichung

Lösen Sie die Gleichung  $z^2 = 3 + 4i$ .

#### n-te Wurzel 3.4

a) Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$  die Gleichung

$$z^n = 1 \tag{4}$$

genau n Lösungen hat und geben Sie diese an.

b) Man nennt die Lösungen der Gleichung (4) n-te Einheitswurzeln. Zeigen Sie, dass für eine n-te Einheitswurzel  $\rho$  gilt:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \begin{cases} n, & \rho = 1\\ 0, & sonst \end{cases}$$
 (5)