....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
Σ		

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Semestrale
HÖHERE MATHEMATIK III
Analysis 2 für Physiker

21. Juli 2008, 11:30 – 13:00 Uhr

Prof. Dr. H. Spohn

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

I ....
Erstkorrektur

Aufgabe 1. Differenzierbarkeit **[6 Punkte]**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Berechnen Sie im Punkt $a = (0,0)$ die Richtungsableitung $\partial_v f(a)$ von f in Richtung des Einheitsvektors $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Zeigen Sie damit, dass $\partial_x f(a) = \partial_y f(a) = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist.

(a) Beh $\partial_v f(a) = f(v)$

Bew Die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung v ist

$$\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t^3 v_1^2 v_2}{tt^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = f(v).$$

[2 Punkte]

□

Beh $\partial_x f(a) = \partial_y f(a) = 0$

Bew Die partiellen Ableitungen $\partial_x f(a)$ und $\partial_y f(a)$ sind dadurch definiert, dass für v die Einheitsvektoren $e_x = (1,0)$ und $e_y = (0,1)$ in die Richtungen x und y eingesetzt werden, also $\partial_x f(a) = \partial_y f(a) = 0$. **[1 Punkt]**

□

(b) Beh f ist im Ursprung nicht total differenzierbar.

Bew Gemäss Definition aus der Vorlesung ist f total differenzierbar im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, falls eine lineare Abbildung $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existiert, sodass

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f((x_0,y_0) + (h_1,h_2)) - f(x_0,y_0) - A(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

[1 Punkt]

Ausserdem ist die Matrix A eindeutig bestimmt und gleich der Jacobi-Matrix $Df(x_0,y_0)$ an der Stelle (x_0,y_0). **[1 Punkt]**

Nach Aufgabenteil (a) gilt im Ursprung $(x_0,y_0) = (0,0)$, dass $Df(0,0) = (\partial_x f(0,0), \partial_y f(0,0)) = (0,0)$. Wählen wir nun $(h_1,h_2) = (h,h) \neq 0$, so lautet obiger Differenzenquotient im Ursprung

$$\frac{f(h,h) - f(0,0) - Df(0,0)(h,h)}{\|(h,h)\|} = 2^{-3/2}\frac{h}{|h|}.$$

Daraus folgt, dass der Differenzenquotient im Limes $h \to 0$ gegen $\pm 2^{-3/2}$ und nicht gegen 0 strebt, was im Widerspruch steht zur Definition der totalen Differenzierbarkeit. **[1 Punkt]**

□

Aufgabe 2. Vektoranalysis **[2 Punkte]**

(a) Seien $F \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

- ☒ $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$
- ☒ $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0$
- ☐ $\operatorname{grad} \operatorname{div} F = 0$
- ☐ $\operatorname{grad} \operatorname{rot} F = 0$

(b) Seien $f, g \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Welche Aussagen sind richtig?

- ☒ $\operatorname{div} (f \operatorname{grad} g - g \operatorname{grad} f) = f\Delta g - g\Delta f$
- ☒ $f\Delta g = -\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g + \operatorname{div} (f \operatorname{grad} g)$
- ☐ $g\Delta f + f\Delta g = \operatorname{div} (g \operatorname{grad} f)$
- ☐ $g\Delta f = f\Delta g + \operatorname{div} (g \operatorname{grad} f) - \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$

(a) Beh Genau die ersten beiden Aussagen sind richtig.

Bew Die erste und die zweite Aussage ist in Aufgabe 98 enthalten. Die dritte Aussage ist falsch: Wir betrachten dazu z.Bsp. $F(x, y, z) = (x^2/2, 0, 0)$ mit $\operatorname{grad} \operatorname{div} F(x, y, z) = (1, 0, 0) \neq 0$. Die linke Seite der vierten Aussage ist nicht definiert. **[1 Punkt]**

☐

(b) Beh Genau die ersten beiden Aussagen sind richtig.

Bew Die zweite Aussage folgt aus Aufgabe 98 2. und 100 1. mit $F = \operatorname{grad} g$. Vertauschen wir in der zweiten Aussage f und g und subtrahieren diese Gleichung von der ursprünglichen Gleichung in der zweiten Aussage, so erhalten wir die erste Aussage. Die letzten beiden Aussagen sind falsch: Wir setzen dazu z.Bsp. $f(x, y, z) = 1$ und $g(x, y, z) = x^2/2$. **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 3. Gradientenfelder **[2 Punkte]**

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und offen, und sei $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld. Welche Aussagen sind richtig?

- ☐ G ist sternförmig.
- ☒ Die Jacobi-Matrix von f ist symmetrisch.
- ☒ Das Integral $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}x$ ist wegunabhängig.
- ☐ f ist inkompressibel, d.h. $\nabla \cdot f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Beh Genau die zweite und die dritte Aussage sind richtig.

Bew Die erste Aussage ist falsch: Wir betrachten dazu z.Bsp. das Gradientenfeld $f(x) = 0$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Die zweite Aussage ist richtig und in der Aufgabe 99 enthalten. Die dritte Aussage ist richtig und stammt aus dem entsprechenden Satz aus der Vorlesung oder aus der Lösung der Aufgabe 129 (c). Die vierte Aussage ist falsch: Wir betrachten dazu z.Bsp. für $G = \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $f(x, y, z) := (x, y, z) = \nabla(x^2/2, y^2/2, z^2/2)$, für welches $\nabla \cdot f(x, y, z) = 3 \neq 0$. **[2 Punkte]**

$\square$

Aufgabe 4. Extrema **[4 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := x^3 + y^3 + x^2 + y^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0, 0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in

☒ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☒ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in

☒ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in

☐ x_1 ☐ x_2 ☒ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(a) Beh x_1, x_3 und x_5 sind kritische Punkte von f.

Bew Um die kritischen Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Nullstellen des Gradienten von f,

$$\nabla f(x, y) = (x(3x + 2), y(3y + 2)) = (0, 0),$$

woraus folgt, dass x_1, x_3 und x_5 kritische Punkte sind. x_2 und x_4 sind keine kritischen Punkte.

[1 Punkt]

☐

(b) Beh f besitzt in x_5 ein lokales Maximum.

Bew Wir berechnen die Hesse-Matrix,

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x + 2 & 0 \\ 0 & 6y + 2 \end{bmatrix}.$$

An den kritischen Punkten x_1, x_3 und x_5 erhalten wir,

$$H_f(x_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_f(x_3) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_f(x_5) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

$H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwerte $2 > 0$, $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$ und $H_f(x_5)$ den doppelten Eigenwerte $-2 < 0$. Also hat f in x_5 ein lokales Maximum. **[1 Punkt]**

☐

(c) Beh f besitzt in x_1 ein lokales Minimum.

Bew $H_f(x_1)$ hat den doppelten Eigenwerte $2 > 0$. **[1 Punkt]**

☐

(d) Beh f besitzt in x_3 einen Sattelpunkt.

Bew $H_f(x_3)$ die Eigenwerte $-2 < 0$ und $2 > 0$. **[1 Punkt]**

☐

Aufgabe 5. Wegintegral **[2 Punkte]**

Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $x \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$, $t \mapsto x(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich unter dem Einfluss der Kraft F gemäss des 2. Newtonschen Gesetzes $F(x(t)) = m\,\ddot{x}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $x(t_0) = (0, 0, 0)$ nach $x(t_1) = (1, 1, 1)$ bewege und bei $x(t_0)$ die Geschwindigkeit $\|\dot{x}(t_0)\| = 0$ und bei $x(t_1)$ die Geschwindigkeit $\|\dot{x}(t_1)\| = 1$ besitze. Wie gross ist die von F geleistete Arbeit, d.h. die entlang der Teilchenbahn integrierte Kraft?

☐ -1 ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{2}$

Beh Die Arbeit ist gleich der Differenz der kinetischen Energien.

Bew Wir integrieren die Kraft entlang des Weges,

$$\int_x F(y) \cdot \mathrm{d}y = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, F(x(t)) \cdot \dot{x}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\ \ddot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \|\dot{x}(t)\|^2 = \frac{1}{2}(\|\dot{x}(t_1)\|^2 - \|\dot{x}(t_0)\|^2)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

[2 Punkte]

☐

Aufgabe 6. Schwerpunkt **[5 Punkte]**

Bestimmen Sie den Schwerpunkt $S \in \mathbb{R}^3$ mit Komponenten

$$S_j := \frac{1}{|K|} \int_K \mathrm{d}^3x \;\; x_j, \qquad j = 1, 2, 3,$$

des Kugeloktanten K,

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1 \text{ und } x_j \geq 0 \text{ für } j = 1, 2, 3\},$$

wobei $|K|$ das Volumen von K bezeichnet.

Beh Der Schwerpunkt von K ist $S = \frac{3}{8}(1, 1, 1)$.

Bew Wir benutzen Kugelkoordinaten,

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta).$$

[1 Punkt]

Da aus Symmetriegründen $S_1 = S_2 = S_3$ gilt, berechnen wir S_3. **[1 Punkt]**

$$\int_K \mathrm{d}^3x \;\; x_3 = \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \; r^2 \sin\theta \, r \cos\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{4}\cos(2\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16}.$$

[2 Punkte]

Das Volumen von K beträgt einen Achtel des totalen Kugelvolumens, d.h.

$$|K| = \frac{1}{8}\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

[1/2 Punkt]

Wir finden also

$$S_3 = \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{16} = \frac{3}{8}, \qquad S = \frac{3}{8}(1, 1, 1).$$

[1/2 Punkt]

□

Aufgabe 7. Implizite Funktionen **[5 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y,z) := x^2 + yz + z^2 - \mathrm{e}^z.$$

(a) Zeigen Sie, dass in einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ eine Funktion $g(x,y)$ existiert, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

(b) Wie lautet der Gradient von g im Punkt $(1,0)$?

☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☒ $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(a) Beh In einer Umgebung des Punktes $(1,0,0)$ existiert eine Funktion $g(x,y)$, die die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ nach $z = g(x,y)$ auflöst.

Bew Der Satz über implizite Funktionen aus der Vorlesung würde eine solche Auflösung liefern, falls seine Voraussetzungen erfüllt wären. Wir verifizieren also die Anwendbarkeit dieses Satzes (die 3 Voraussetzungen aus der Vorlesung).

(1) Die Funktion ist stetig differenzierbar, $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, da Polynome und die Exponentialfunktion glatt sind. **[1/2 Punkt]**

(2) Die Funktion verschwindet im Punkt $(1,0,0)$, d.h. $f(1,0,0) = 0$. **[1/2 Punkt]**

(3) Die Ableitung nach der aufzulösenden Variablen ist am Punkt $(1,0,0)$ ungleich Null,

$$\partial_z f(x,y,z) = y + 2z - \mathrm{e}^z, \qquad \partial_z f(1,0,0) = -1.$$

[1 Punkt]

Der Satz über implizite Funktionen liefert nun die Existenz einer stetig differenzierbaren Funktion g mit $g(1,0) = 0$ und $f(x,y,g(x,y)) = 0$ in einer Umgebung von $(x,y) = (1,0)$. **[1 Punkt]**

☐

(b) Beh $\nabla g(1,0)^T = [2,0]$

Bew Gemäss der Formel aus der Vorlesung berechnet sich der Gradient von g folgendermassen (die Matrizenmultiplikationen sind: $(1,2) = (1,1) \cdot (1,2)$),

$$\nabla g(1,0)^T = -\left(\partial_z f(1,0,0)\right)^{-1} [\partial_x f(1,0,0), \partial_y f(1,0,0)].$$

Da $\partial_x f(x,y,z) = 2x$ und $\partial_y f(x,y,z) = z$, folgt die Behauptung. **[2 Punkte]**

☐

Aufgabe 8. Stetigkeit **[4 Punkte]**
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

Beh Das stetige Urbild einer offenen Menge ist offen.

Bew Wir geben drei Alternativen an.

Alternative 1: M offen bedeutet: Für jedes $y \in M$ gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(y) \subset M$.
Annahme: $f^{-1}(M)$ ist nicht offen. Dann gibt es ein $x \in f^{-1}(M)$ und zu jedem $\epsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, immer ein x_n mit $x_n \notin f^{-1}(M)$. Offenbar gilt $x_n \to x$. Da f stetig ist, folgt $f(x_n) \to f(x)$. Da M offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset M$. D.h. fast alle $f(x_n)$ liegen in M, im Widerspruch zu $x_n \notin f^{-1}(M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Alternative 2: Das Komplement von M, M^c, ist abgeschlossen. D.h., ist $y_n \in M^c$, $n \in \mathbb{N}$, mit $y_n \to y$, so ist auch $y \in M^c$. Wir zeigen, dass $f^{-1}(M)^c$ abgeschlossen und damit, dass $f^{-1}(M)$ offen ist:
Sei $x_n \in f^{-1}(M)^c$, $n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \to x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $f(x_n) \in M^c$ und, wegen der Stetigkeit von f gilt $f(x_n) \to f(x) \in M^c$, da M^c abgeschlossen ist. Das bedeutet aber, dass $x \in f^{-1}(M)^c$.

Alternative 3: Mit ϵ–δ Definition.
Sei x in $f^{-1}(M)$. Da M offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(f(x)) \subset M$. Da f stetig ist gibt es zu diesem ϵ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in B_\delta(x)$ auch $f(y) \in B_\epsilon(f(x))$, d.h. $y \in f^{-1}(M)$. Also ist $f^{-1}(M)$ offen.

Ist die Definition von "offen", bzw. "abgeschlossen" richtig benutzt oder explizit angegeben: **[1 Punkt]**.
Ist die Definition der Stetigkeit (Folgen- oder ϵ–δ-) richtig verwendet oder explizit angegeben: **[1 Punkt]**.
Für richtige Beweisführung: **[2 Punkte]**.

$\square$

Aufgabe 9. Extrema mit Nebenbedingung **[6 Punkte]**

Gesucht ist das achsenparallele Rechteck größten Flächeninhalts, das vollständig innerhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

liegt $(a, b > 0)$. Bestimmen Sie die Kantenlängen und den Flächeninhalt dieses Rechtecks, indem Sie die Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren verwenden.

Beh Die Kantenlängen sind $\sqrt{2}a$ und $\sqrt{2}b$ und der Flächeninhalt $2ab$.

Bew Zu maximieren ist der Flächeninhalt $F(x, y) := 4xy$ des Rechtecks mit Kantenlängen $2x, 2y > 0$ unter der Nebenbedingung **[1 Punkt]**

$$g(x, y) := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

[1 Punkt]

da die Eckpunkte offensichtlich auf dem Ellipsenrand liegen müssen. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es ein Rechteck mit größerem Flächeninhalt, das immer noch in der Ellipse liegt. Wir berechnen also den Gradienten der Lagrangeschen Hilfsfunktion $F_\lambda(x, y) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$,

$$\nabla F_\lambda(x, y) = \nabla f(x, y) - \lambda \nabla g(x, y) = \begin{bmatrix} 4y \\ 4x \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2x/a^2 \\ 2y/b^2 \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

Die erste Menge der Kandidaten (für lokale Exterma unter der Nebenbedingung) mit $\nabla g(x, y) = 0$ und $g(x, y) = 0$ ist leer. Also können wir uns auf die Untersuchung der zweiten Kandidatenmenge beschränken, die uns das folgende System liefert, **[1 Punkt]**

$$x = \frac{\lambda y}{2b^2}, \tag{1}$$

$$y = \frac{\lambda x}{2a^2}, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt, dass $x = 0$ genau dann gilt, wenn $y = 0$. Nun ist aber $(0, 0)$ keine Lösung von (3), und deshalb folgt, dass $x, y > 0$ und $\lambda \neq 0$. Teilen wir nun (1) durch (2) erhalten wir

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

was, eingesetzt in in (3), den einzigen Kandidaten liefert,

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

[1 Punkt]

Da die Nebenbedingungsmenge $g(x, y) = 0$ kompakt und F auf ihr stetig ist, besitzt F ein Maximum auf der Nebenbedingungsmenge. Da nun aber $F(0, b) = F(a, 0) = 0$, ist $F(a/\sqrt{2}, b/\sqrt{2}) = 2ab > 0$ dieses Maximum. **[1 Punkt]**

□

Aufgabe 10. Flächenintegrale **[4 Punkte]**

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x,y,z) := (0,0,z),$$

durch die obere Hälfte S^+ der Kugeloberfläche,

$$S^+ := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2+y^2+z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}.$$

<u>Beh</u> $\displaystyle\int_{S^+} f \cdot \mathrm{d}S = \frac{2\pi}{3}$

<u>Beh</u> Wir berechnen das Intergal auf zwei alternative Arten.

Alternative 1: Satz von Gauss

Die Menge $K^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$ ist die obere Halbkugel und $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$ die (orientierte) Bodenfläche von S^+. **[1 Punkt]**

Damit ist nach dem Satz von Gauss

$$\int_{S^+} f \cdot \mathrm{d}S = \int_{K^+} \mathrm{d}^3x \operatorname{div} f \; - \int_B f \cdot \mathrm{d}S = \int_{K^+} \mathrm{d}^3x = |K^+| = \frac{2\pi}{3},$$

da $f(x,y,z) = (0,0,0)$ für $(x,y,z) \in B$. **[3 Punkte]**

Alternative 2: Oberflächenintegral

Eine Parametrisierung von S^+ ist $\Gamma : [0,\pi/2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Gamma(\theta,\varphi) := (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

[1 Punkt]

Die Flächennormale ist

$$\partial_\theta\Gamma(\theta,\varphi) \wedge \partial_\varphi\Gamma(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix}.$$

[1 Punkt]

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_{S^+} f \cdot \mathrm{d}S &= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta \end{bmatrix} = 2\pi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \, \cos^2\theta\sin\theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

[2 Punkte]

□