Nachklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Pfleiderer

Wintersemester 2016/17

12. April 2017

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein Bauarbeiter trägt einen großen Eimer mit Sand mit konstanter Geschwindigkeit einen Turm hinauf. Der Turm ist $H = 40$m hoch. Der Eimer hat eine Masse von $m = 5$kg und enthält anfangs $M = 30$kg Sand. Der Sand rieselt gleichmäßig aus einem Loch. Als der Bauarbeiter oben ankommt, sind noch $M' = 10$kg Sand im Eimer.

(a) Geben Sie die Funktion für die Gesamtmasse von Eimer und Sand in Abhängigkeit der Höhe z an.

(b) Berechnen Sie die Arbeit, die der Bauarbeiter an Eimer und Sand verrichtet bei seinem Aufstieg vom Boden des Turmes bis zu seiner Spitze verrichtet.

Lösung:

(a) Am Fuß des Turms sei $z = 0$. Da der Bauarbeiter den Turm mit gleichbleibender Geschwindigkeit hinaufsteigt und der Sand gleichmäßig rieselt, ist die Sandmasse $M(z)$ eine lineare Funktion von z:

$$M(z) = M(0) - \mu z \tag{1}$$

Aus den Randbedingungen $M(0) = 0$ und $M(H) = M'$ folgt:

$$\mu = \frac{(M - M')}{H} \tag{2}$$

und somit

$$M_{\text{total}}(z) = m + M(z) = m + M - \frac{M - M'}{H} z. \tag{3}$$

[3]

(b) Die Hubarbeit auf einem Wegstück $\mathrm{d}z$ ist

$$\mathrm{d}W = M_{\text{total}}(z) g \, \mathrm{d}z. \tag{4}$$

[**1**]

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^H M_{\text{total}}(z) g / ddz && (5)\\
&= g \int_0^H \left(m + M - \frac{M - M'}{H} z \right) \mathrm{d}z && (6)\\
&= g \left((m+M)H - \frac{M - M'}{2H} H^2 \right) && (7)\\
&= gH \left(m + M + \frac{M - M'}{2} \right) && (8)\\
&= gH \left(m + \frac{M + M'}{2} \right) = 9,81 \mathrm{kJ}. && (9)
\end{aligned}$$

[**3**]

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Ein Bogenschütze zieht mit der Kraft $F = 100\,\mathrm{N}$ die Sehne seines Bogens so weit zurück, dass die beiden Hälften der Sehne einen Winkel von $\varphi = 135°$ einschließen.

(a) Fertigen Sie eine Zeichnung des gespannten Bogens mit allen auftretenden Kräften an, die an dem Punkt auftreten, an dem gezogen wird.

(b) Wie groß sind die Kräfte F entlang der Sehne?

(c) Der Bogenschütze benützt nun einen schwächer vorgespannten Bogen gleicher Größe und kann daher mit der selben Zugkraft die Sehnenhälften auf einen Winkel von nur $\varphi = 100°$ spannen. Wie groß sind nun die Kräfte F' entlang der Sehne?

Lösung

(a) [**3**]

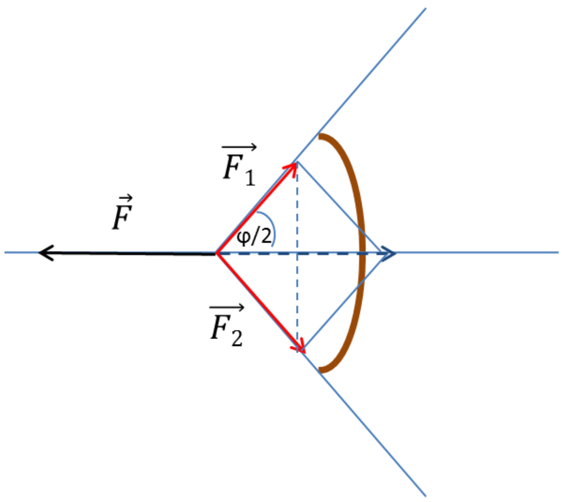
(b) Gemäß der Skizze oben gilt:

$$F_1 = F_2$$

und bei einem Winkel von 135°:

$$F_{135} = \frac{F}{2\cos(\varphi/2)} = \frac{50\mathrm{N}}{\cos(67,5°)} = 131\mathrm{N}$$

[**3**]



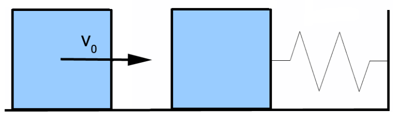
(c)

$$F_{100} = \frac{F}{2\cos(\varphi/2)} = \frac{50\mathrm{N}}{\cos(50°)} = 77,8\mathrm{N}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Ein Gegenstand der Masse $m_1 = 2$kg befindet sich auf einer horizontalen Oberfläche. Der Gegenstand ist an einer entspannten Feder mit der Federkonstanten $k = 600\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ befestigt. Auf dieser Oberfläche kann der Gegenstand reibungsfrei gleiten. Der Gegenstand befindet sich zunächst in Ruhe. Ein zweiter Gegenstand der Masse $m_2 = 1,00$kg gleite reibungsfrei mit einer Geschwindigkeit von $v = 6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf den ersten zu.



(a) Bestimmen Sie die Amplitude der Schwingung, wenn die Gegenstände einen idealen inelastischen Stoß ausführen. Wie groß ist die Schwingungsdauer der Schwingung?

(b) Bestimmen Sie Amplitude und Schwingungsdauer des zweiten Gegenstandes nach einem elastischen Stoß mit dem ersten Gegenstand.

Lösung:

(a) Körper haften aneinander $\Rightarrow$ eine gemeinsame Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoß: v_e
Impulserhaltung:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_e \Rightarrow v_e = \frac{m_2 v}{m_1 + m_2}$$

[**1**]

Dies ist gleichzeitig die Maximalgeschwindigkeit, da es die Geschwindigkeit im Gleichgewichtspunkt der Feder ist:

$$E_{kin} = E_{pot} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_e^2 = \frac{1}{2}kA_1^2$$

[**2**]

mit A_1 Maximalauslenkung der Feder

$$\Rightarrow A_1 = \sqrt{\frac{(m_1+m_2)v_e^2}{k}} = \sqrt{\frac{m_2^2 v^2}{(m_1+m_2)k}} = \sqrt{\frac{(1,00\mathrm{kg})^2 \cdot (6,00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2}{3,00\mathrm{kg} \cdot 600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0,141\mathrm{m}$$

[**2**]

Nach Vorlesung: $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow$ Schwingungsdauer $T_1 = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{3{,}00\mathrm{kg}}{600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0,444\mathrm{s}$

[**2**]

(b) Geschwindigkeiten nach dem Stoß: v_1 bzw. v_2
Impulserhaltung: $m_2 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$
Energieerhaltung: $\frac{1}{2}m_2 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$
Formeln für v_1 und v_2:
$v_1 = \frac{2v}{1+\frac{m_1}{m_2}} = \frac{2vm_2}{m_2+m_1}$ ($\widehat{=}$ wieder Maximalgeschwindigkeit der schwingenden Feder)

$$E_{kin} = E_{pot} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}kA_2^2$$

[**3**]

$$\Rightarrow A_2 = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2}{k}} = \sqrt{\frac{4m_1 v^2 m_2^2}{k(m_2+m_1)^2}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,00\mathrm{kg} \cdot (6,00\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 \cdot (1,00\mathrm{kg})^2}{600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \cdot (3,00\mathrm{kg})^2}} = 0,231\mathrm{m}$$

[**2**]

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2,00\mathrm{kg}}{600\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}} = 0,363\mathrm{s}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Kabel hängt senkrecht von einer Aufhängung herab. Sein unteres Ende erreicht gerade eine horizontale Platte. Nachdem das obere Ende von der Aufhängung gelöst wurde, fällt das Kabel herab. Zeigen Sie, dass während der Fallbewegung die gesamte auf die Platte wirkende Kraft F_{Ges} drei mal so groß ist, wie die reine Gewichtskraft F_G des bereits auf der Platte liegenden Anteils des Kabels.

Hinweis: $\mu = \frac{dm}{dx}$ Masse pro Längeneinheit des Kabels

Lösung:

Die Ursache für die Kraft ΔF des fallenden Kabels auf die Platte ist die Impulsänderung beim Auftreffen. Hinzu kommt natürlich das Gewicht des schon auf der Platte liegenden Kabels $F_G = m_{liegend} g = \mu g x$. Fällt in der Zeit d$t$ ein Kabelelement d$m = \mu$dx auf die Platte (μ = Masse einer Längeneinheit), so gilt:

[**1**]

$$\Delta F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{\mu dxv}{dt} \tag{10}$$

[**1**]

Da $\frac{dx}{dt} = v$ folgt damit

$$\Delta F = \mu v^2 \tag{11}$$

[**1**]

Dabei ist v die Geschwindigkeit, die ein Kabelelement dm beim Erreichen der Platte hat. Aus dem Energiesatz folgt jedes Stück Kabel der Masse m, dass

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgx \Rightarrow v^2 = 2gx \tag{12}$$

[**1**]

und die auf die Platte wirkende Gesamtkraft ist dann

$$F_{Ges} = \Delta F + F_G = 2\mu g x + m_{liegend} g = 3\mu g x = 3 m_{liegend} g \tag{13}$$

[**1**]

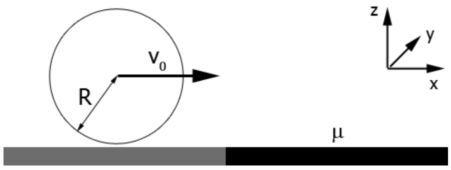
Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine homogene Bowlingkugel mit Masse m und Radius R rutscht mit der Startgeschwindigkeit v_0 auf einer Fläche. Zum Zeitpunkt $t = 0$ erreicht die Kugel einen anderen Untergrund mit Gleitreibungskoeffizient μ.

(a) Berechnen Sie das von der Reibung verursachte vektorielle Drehmoment auf dem neuen Untergrund.

(b) Ermitteln Sie die Rotationsfrequenz in Abhängigkeit von der Zeit. *Hinweis*: Das Trägheitsmoment einer Kugel ist $\frac{2}{5} m R^2$.

(c) Nach welcher Zeit rollt die Kugel vollständig ohne zu gleiten?



Lösung

(a)

$$\vec{F}_R = -F_G \mu \vec{e}_x = -mg\mu \vec{e}_x$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = mg\mu R \vec{e}_y$$

[3]

(b) Bewegungsgleichung für die Rotation:

$$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} \Rightarrow \vec{\omega}(t) = \int_0^t \frac{\vec{M}(t')}{I} dt' = \int_0^t \frac{mg\mu R}{\frac{2}{5}mR^2} \vec{e}_y dt' = \frac{5g\mu t}{2R} \vec{e}_y$$

[3]

(c) Die Rollbedingung muss beim Übergang vom Rollen zum gleiten erfüllt sein:

$$|\dot{x}| = |R\omega|$$

Bewegungsgleichung Translation:

$$m\ddot{x} = -\mu g m \Rightarrow \dot{x} = -\mu g t + v_0$$

Bewegungsgleichung Rotation:

$$M = I\dot{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{5g\mu t}{2R}$$

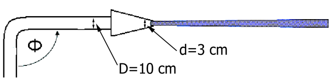
beides in die Rollbedingung eingesetzt:

$$v_0 - \mu g t = \frac{5}{2} g\mu t \Rightarrow t = \frac{2v_0}{7g\mu}$$

[4]

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Feuerwehrleute halten einen Schlauch, der eine Biegung von $\phi = 90°$ besitzt. Das Ende des Schlauchs verläuft zunächst horizontal zum Boden. Der Luftdruck beträgt $p_L = 970\text{hPa}$. Das Wasser tritt mit der Geschwindigkeit $v = 20{,}0\text{m/s}$ aus der Düse mit dem Durchmesser $d = 3{,}00\text{cm}$ aus. Der Schlauch hat einen Durchmesser von $D = 10{,}0\text{cm}$.



(a) Wie groß ist die Masse an Wasser m_1 (Dichte $\rho_W = 1000\text{kg/m}^3$), die in einer Sekunde aus dem Schlauch austritt?

(b) Wie hoch ist der Gesamtdruck p, der im Schlauch kurz vor der Austrittsöffnung herrscht.

(c) Wie groß ist der horizontale Impuls $|\vec{p}_h|$ des pro Sekunde ausgespritzten Wassers?

(d) Der Impuls des Wasser ändert an der Krümmung seine Richtung. Zeichnen Sie ein Diagramm mit den Impulsvektoren vor und nach ($\vec{p}_1$ bzw. $\vec{p}_2$) der Schlauchkrümmung sowie den Vektor der Impulsänderung $\overrightarrow{\Delta p}$. Zeichnen Sie die Richtung der Kraft mit der der Feuerwehrmann den Schlauch halten muss, dait der Schlauch sich nicht bewegt. Bestimmen Sie den Betrag dieser Kraft F_W.

Lösung

(a)

$$\dot{m}_1 = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot A \cdot v = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (0{,}015\text{m})^2 \cdot \pi \cdot 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = 14{,}1\frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

[3]

(b) Bernoulli:

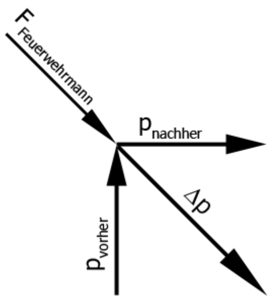
$$p_{ges} = p_L + \frac{1}{2}\rho v^2 = 97000\text{Pa} + \frac{1}{2} \cdot 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (20\frac{\text{m}}{\text{s}})^2$$
$$= 2{,}97 \cdot 10^5\text{Pa}$$

[2]

(c)

$$p_h = m_1 \cdot v = 14{,}1\text{kg} \cdot 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = 282\text{Ns}$$

[2]



(d) **[3]**

Der Betrag der Geschwindigkeit einer Wassereinheit ändert sich nicht: $\overrightarrow{\Delta p}$ ist 45° nach unten gerichtet.

$$|\vec{p}_1| = m \cdot v$$

Kontinuitätsgleichung:

$$A_{Düse} \cdot v = A_{Schlauch} \cdot v_W$$
$$\Rightarrow v_W = \frac{d^2\pi 4}{4D^2\pi} \cdot v = \frac{3\text{cm}^2}{10\text{cm}^2} \cdot 20\frac{\text{m}}{\text{s}} = 1{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

[2]

$$F = \sqrt{2} \cdot \frac{dm}{dt} v_W = \sqrt{2} \cdot \dot{m}_1 v_W = \sqrt{2} \cdot 14,1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} 1,8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$= 35,9\mathrm{N}$$

[2]

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Die Feder eines Stoßdämpfers befindet sich in einem Ölbad. Die Federkonstante der Feder ist k. Es wirken keine Schwerkräfte. An der Feder sei die Masse m befestigt. Wegen des Ölbades wirkt eine Reibungskraft $F_R = -\kappa v$ ($\kappa > 0$).

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Bestimmen Sie rechnerisch den Grenzfall, bei dem die Dämpfung qualitativ andere Lösungen hervorruft (schwache $\rightarrow$ starke Dämpfung) und beschreiben Sie kurz den mathematischen Unterschied.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Fall geringer Dämpfung für die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ und $v(0) = v_0 > 0$.

Lösung

(a) Die Bewegungsgleichung lautet

$$m\ddot{x} = -kx - \kappa\dot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

wobei im letzten Schritt neue Konstanten $\gamma = \frac{\kappa}{2m}$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ eingeführt wurden. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt sich mit dem Ansatz

$$x(t) = \exp(\lambda t).$$

[2]

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

mit Nullstellen sind für $\omega_0 > \gamma$, also $\kappa < 2k$, komplex

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2},$$

[2]

die Lösungen haben also einen oszillierenden Anteil, während die Nullstellen für $\kappa \geq 2k$ reell sind. Im Fall kleiner Dämpfung ist das Fundamentalsystem aus Lösungen also mit $\omega = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$

$$\left\{\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$$

[2]

(b) Dies ist gleichwertig zu dem Fundamentalsystem (im Wesentlichen Summe und Differenz der beiden Funktionen)

$$\left\{\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t, \mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t\right\}$$

und die allgemeine Lösung lautet

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos\omega t + B\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t$$

Die Anfangsbedingungen ergeben $A = 0$ und $B = \frac{v_0}{\omega}$ und somit

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t.$$

[4]