1. Aufgabe

Sei $a = (a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

1. (a) $f(x) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)$

$\partial_k f(x) = \varphi'\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) a_k \quad k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow \operatorname{grad} f(x) = \varphi'(\langle x, a\rangle)\, a$ (2)

(b) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \partial_j(\partial_j f)(x) =$

$= \sum_{j=1}^{n} \partial_j\left(\varphi'\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)\right) a_j = \sum_{j=1}^{n} \varphi''(\langle x, a\rangle)\, a_j^2$

$= \varphi''(\langle x, a\rangle)\|a\|_2^2 \overset{!}{=} \|a\|_2^2$ (2)

$\Leftrightarrow \varphi''(\langle x, a\rangle) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \varphi''(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \varphi(t) = \frac{1}{2} t^2 + \alpha t + \beta$, $t \in \mathbb{R}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (1)

2. (a) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfkt. von ψ, also $\varphi' = \psi$ und $f(x) = \varphi(\langle x, a\rangle)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt

$\operatorname{grad} f(x) = \varphi'(\langle x, a\rangle)\, a = \psi(\langle x, a\rangle)\, a = F(x)$ (2)

$\Rightarrow$ F ist Gradientenfeld.

(b) $\operatorname{rot} F(x) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$ (1)

(c)

$$F(x) = \begin{pmatrix} \psi(\langle x, a\rangle)\, a_1 \\ \vdots \\ \psi(\langle x, a\rangle)\, a_n \end{pmatrix} \Rightarrow J_F(x) = (\alpha_{i,j}(x))$$

mit $\alpha_{i,j}(x) = \partial_j \psi(\langle x, a\rangle)\, a_i = \psi'(\langle x, a\rangle)\, a_j a_i$

$i, j = 1, 2, \dots n$

$$\Rightarrow J_F(x) = \varphi'(\langle x,a\rangle)\, a\, a^T$$

$$\Rightarrow J_f(x)\, h = \varphi'(\langle x,a\rangle)\, a(\underbrace{a^T h}_{\langle a,h\rangle}) = \varphi'(\langle x,a\rangle)\langle a,h\rangle a$$ (5)

3.(a) Mit $\varphi(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$ gilt

$G(x) = \varphi(\langle x,a\rangle)a$. Mit $\psi(t) = \arctan t$ ist
$\psi'(t) = \varphi(t)$ und nach 2(a) gilt für
$g(x) = \arctan(\langle x,a\rangle)$: $G(x) = \operatorname{grad} g(x)$.
Also ist $U(x) = -\arctan(\langle x,a\rangle)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (2)
ein Potential von G. Dabei gilt $U(0) = \arctan\langle 0,a\rangle$
$= 0$.

(b) Sei $\gamma : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ eine stw. st. diff'b. Kurve

$$\int_\gamma G \cdot d\vec{x} = g(\gamma(\beta)) - g(\gamma(\alpha)) =$$ (2)

$= \arctan(\langle\gamma(\beta),a\rangle) - \arctan(\langle\gamma(\alpha),a\rangle) \in]-\pi,\pi[$, (1)

da $-\frac{\pi}{2} < \arctan(\langle\gamma(\beta),a\rangle), \arctan(\langle\gamma(\alpha),a\rangle) < \frac{\pi}{2}$

2. Aufgabe. $\Phi(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+z^2-2\lambda z+\lambda xy+2\lambda$.

1.
$$\operatorname{grad}\Phi(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x+\lambda y \\ 2y+\lambda x \\ 2z-2\lambda \\ -2z+xy+2 \end{pmatrix}$$ (1)

2.
$$\operatorname{grad} g(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ g hat keine stationären Stellen. (1)

3. (x,y,z,λ) stationäre Stelle von Φ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\lambda y=0 & (1) \\ 2y+\lambda x=0 & (2) \\ 2z-2\lambda=0 & (3) \\ -2z+xy+2=0 & (4) \end{cases}$$

$(1)\cdot x \Rightarrow 2x^2+\lambda xy=0$

$(2)\cdot y \Rightarrow 2y^2+\lambda xy=0$

$(1)\cdot x-(2)\cdot y$:

$x^2-y^2=0 \Leftrightarrow y=\pm x$

1. Fall: $x=y=0 \underset{(4)}{\Rightarrow} z=1 \underset{(3)}{\Rightarrow} \lambda=1$

$(0,0,1,1)$ ist Lösung von (1)-(4)

2. Fall: $0\neq y=-x$, $(1)\Rightarrow (2-\lambda)x=0 \Rightarrow \lambda=2 \underset{(3)}{\Rightarrow} z=2$

$\underset{(4)}{\Rightarrow} -4+xy+2=0 \Rightarrow -2-x^2=0 \Rightarrow$ ↯

3. Fall $0\neq y=x$. $(1)\Rightarrow (2+\lambda)x=0 \Rightarrow \lambda=-2 \underset{(3)}{\Rightarrow} z=-2$

$\underset{(4)}{\Rightarrow} 4+x^2+2=0 \Rightarrow 6+x^2=0 \Rightarrow$ ↯

Somit ist $(0,0,1,1)$ die einzige stat. Stelle von Φ. (5)

DVP M3 für Physik, 4.9.06 - 4 -

4. $\lambda = 1$ nach Nr. 3 ①

5. $f(0;0,1) = 1$ ist das Minimum von f unter der Nebenbedingung $g=0$. Es wird in $(0,0,1)$ angenommen ①

3. Aufgabe

1. $\partial_y f(t,y) = -\pi(\cos y)\sin(\pi(\sin y - \sin t))$

$\Rightarrow \partial_y f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (1)

$\Rightarrow$ f ist bezüglich y lokal Lipschitz-stetig. (1)

2. Für $t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \underset{\uparrow}{=} |\partial_y f(t,\tilde{y})|\,|y_1 - y_2|$$

MWS angew. auf $y \mapsto f(t,y)$ bei festem t.
$\tilde{y}$ zwischen y_1 und y_2

$$\underset{1,\ \partial_y f}{\Rightarrow} \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq \pi\,|y_1 - y_2| \quad \forall t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

(2)

$\Rightarrow L = \pi$

3. $y = t \Rightarrow y' = 1,\ f(t,\overset{t}{\overset{\shortparallel}{y}}) = \cos(\pi(\sin t - \sin t))$

$= \cos 0 = 1$ (1)

$\Rightarrow y' = f(t,y)$. Somit $y=t$ erfüllt (*).

4. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$ ist nach Nr. 3 die gesuchte Lösung (1)

5. Existenz und Eindeutigkeit von $\varphi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ mit maximalem Def-Intervall $\mathcal{Y}$ folgen aus f stetig und $\partial_y f$ lok. Lipschitz-stetig nach y (1)
(Vorl. 20, 19).

Annahme: $\mathcal{Y} \neq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \mathcal{Y} \cap [0,\infty[\; = [0,a[\quad (\alpha) \quad$ oder
$\quad \mathcal{Y} \cap]-\infty, 0] =]a, 0] \quad (\beta) \quad$ jeweils mit $a \in \mathbb{R}$.

Nach Vorl. (20.25) gilt mit Nr. 2:

$|\psi(t) - \varphi(t)| \leq |\frac{\pi}{6} - 0| e^{L|t-0|} \quad \forall t \in J$

$\Rightarrow |\psi(t)| \leq \frac{\pi}{6} e^{\pi|t|} + |t| \quad \forall t \in J$

$\Rightarrow \{(t,\psi(t)) : t \in J, t \geq 0\} \subset [0,a] \times [-c,c]$

mit $c = \frac{\pi}{6} e^{\pi|a|} + |a|$, falls ($\alpha$) gilt, bzw.

$\{(t,\psi(t)) : t \in J, t \leq 0\} \subset [a,0] \times [-c,c]$

mit c wie oben, falls (β) zutrifft

$\Rightarrow$ ↯ zu Vorl. (20.21).

Also gilt $J = \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(0) = \frac{\pi}{6}$, ψ Lösung von (*). (5)

(a) $\psi(0) - \varphi(0) = \frac{\pi}{6} - 0 > 0$

Annahme: $\psi(t) \leq t$ für ein $t \in \mathbb{R} \to \psi(t) - \varphi(t) \leq 0$

$\Rightarrow \exists\, t_0 \neq 0$ mit $\psi(t_0) - \varphi(t_0) = 0 \Rightarrow \psi(t_0) = \varphi(t_0) = t_0 \neq 0$

ZWS

$\Rightarrow$ bei AWA (*), $y(t_0) = t_0$ hat zwei verschiedene Lösungen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ↯ (20.19) Vorl., da f und $\partial_y f$ stetig. (2)

(b) $\psi'(0) = f(0, \psi(0)) = f(0, \frac{\pi}{6}) = \cos(\pi(\sin\frac{\pi}{6} - 0))$

$= \cos\frac{\pi}{2} = 0.$ (1)

$\psi'(t) = f(t, \psi(t)) \Rightarrow$

$\psi''(t) = \pi(\psi'(t)\cos\psi(t) - \cos t)(-\sin(\pi(\sin(\psi(t)) - \sin t)))$

$\Rightarrow \psi''(0) = \pi(0 - 1)(-\sin(\frac{\pi}{2})) = \pi(-1)(-1) = \pi$ (1)

(c) Folgt aus $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = \pi > 0$ nach (b) (1)