....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Semestrale
Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. Oliver Matte

24. Dezember 2010

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **1** selbsterstelltes DIN A4-Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Folgen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten für $n \to \infty$ der unten stehenden Folgen.

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

☐ $\sqrt{e}$ ☐ $+\infty$ ☐ e ☐ 0 ☐ 1 ☐ konvergiert nicht

(ii) $b_n = \frac{2^n}{5^{n/2}} - \frac{2n^2+1}{5n^2+4n+2}$

☐ $-\frac{2}{5}$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ $+\infty$ ☐ konvergiert nicht

(iii) $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$

☐ $+\infty$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ 1 ☐ konvergiert nicht

2. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie die Menge der $x \in \mathbb{R}$, für die die unten stehenden Potenzreihen bzw. Funktionen konvergieren.

(i) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

☐ $(-1, +1)$ ☐ $[-1, +1)$ ☐ $[-1, +1]$ ☐ $(-1, +1]$ ☐ konvergiert nirgends

(ii) $g(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k}\, x^k$

☐ $\mathbb{R}$ ☐ $(-1, +1)$ ☐ $\{0\}$ ☐ $[-1, +1]$ ☐ konvergiert nirgends

(iii) $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \, |x|^n$

☐ $(-1/4, +1/4)$ ☐ $(-4, +4)$ ☐ $[-1/4, +1/4]$ ☐ $[-4, +4]$ ☐ $\mathbb{R}$

3. **Reihen** **[7 Punkte]**

Geben Sie den Reihenwert von

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 6k + 8}$$

an.

4. **Kurvendiskussion** **[13 Punkte]**

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{\frac{1}{4}(x+\frac{1}{x})}$.

(i) Überprüfen Sie, ob f in $x = 0$ stetig fortsetzbar ist. Begründen Sie!

(ii) Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to \pm\infty$.

(iii) Bestimmen Sie erste und zweite Ableitung von f.

(iv) Bestimmen Sie Art und Lage der Extrema von f. Sind die Extrema lokal oder global?

5. **Potenzreihen** **[7 Punkte]**

Stellen Sie

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

als Potenzreihe dar und geben Sie den Konvergenzradius an. *Hinweis:* Cauchy-Produkt

6. Gleichmäßige Konvergenz **[11 Punkte]**

Sei $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$.

(i) Geben Sie die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ an, gegen die die f_n punktweise konvergieren.

(ii) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen f konvergiert.

(iii) Sei $\tilde{f}_n : [0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ die Einschränkung von f_n auf das Intervall $[0, 1/2]$. Geben Sie die Grenzfunktion $\tilde{f}$ an und zeigen Sie, dass $(\tilde{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\tilde{f}$ konvergiert.

7. **Stetige Bilder** **[6 Punkte]**

Sei $f : M \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antworten!

(i) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☐ Wahr ☐ Falsch

(ii) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☐ Wahr ☐ Falsch

(iii) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

☐ Wahr ☐ Falsch

8. **Stetige Funktionen** **[7 Punkte]**

Die Temperaturverteilung eines dünnen Metallrings entlang seines Umfangs kann als stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f(2\pi)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie, dass es immer zwei entgegengesetzte Punkte auf dem Ring gibt, die exakt die gleiche Temperatur haben.

Hinweis: Man betrachte $f(x) - f(x + \pi)$ auf $[0, \pi]$.