TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. P. Gritzmann, Dr. T. Theobald

Semestralklausur Lineare Algebra 1, WS 2001/02; Gruppe A

Aufgabe 1 (ca. 7 Punkte): Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & b & b-a \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung des Kerns von A für den Fall $a = 2$, $b = 2$.
b) Für welche Werte von a, b hat A den
   (i) Rang 3 ?
   (ii) Rang 2 ?
   (iii) Rang 1 ?
c) Berechnen Sie die Inverse von A für den Fall $a = 2$, $b = 1$.

Aufgabe 2 (ca. 8 Punkte): Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

a) Seien $(U_1, \cdot)$ und $(U_2, \cdot)$ Untergruppen einer Gruppe $(G, \cdot)$.
   (i) Ist $(U_1 \cap U_2, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$?
   (ii) Ist $(U_1 \cup U_2, \cdot)$ eine Untergruppe von $(G, \cdot)$?
b) Sei $U = \{z \in \mathbb{C}^3 \ : \ z_3 = \overline{z_1} + \overline{z_2}\}$.
   (i) Definiert U einen Untervektorraum des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$?
   (ii) Definiert U einen Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$?

Aufgabe 3 (ca. 5 Punkte): Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = 0$.

a) Zeigen Sie $\operatorname{rang} A + \operatorname{rang} B \leq n$.
b) Geben Sie ein Beispiel für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $\operatorname{rang} A = 3$ und $AB = 0$ an, in dem die Ungleichung in a) mit Gleichheit erfüllt ist.

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte): Sei $\mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2.

a) Zeigen Sie, daß $\{1, 1+x, 1-x^2\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_2$ ist.
b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms $1 - 2x + 5x^2$ bezüglich der Basis aus a).
c) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis des Unterraums
$$\operatorname{span}\{x^2 - x, x - 1\} \cap \operatorname{span}\{x^2 - 2x, x\}.$$

Aufgabe 5 (ca. 7 Punkte): Mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(x) = Ax$. Bestimmen Sie

a) eine Basis von $\operatorname{kern} F$;
b) eine Basis von $\operatorname{bild} F$;
c) Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ mit der Übergangsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6 (ca. 6 Punkte): Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *Involution*, falls $A^2 = I_n$ (I_n bezeichnet die Einheitsmatrix). Zeigen Sie:

a) Für jeden Eigenwert λ einer Involution A gilt $\lambda \in \{-1, 1\}$.
b) A ist genau dann eine Involution, wenn $\operatorname{bild}(A - I_n) \subset \operatorname{kern}(A + I_n)$.

Bitte beachten Sie: Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten. Es sind **keine** Hilfsmittel zugelassen. Alle Antworten sind sorgfältig zu begründen!

Zum Bestehen der Klausur sind ca. 17 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!