Viele Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse aller vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitbar.

1. KURZE FRAGEN: (**7P**)

a) (**2P**) STATIONÄRES POTENTIAL

Ein beliebiges Potential $V(\vec{r}, t)$ ist invariant gegenüber zeitlichen Verschiebungen:

$$V(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t + a) \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \; .$$

Zeigen Sie: Die Gesamtenergie eines Massenpunktes in diesem Potential ist eine Erhaltungsgröße.

b) (**5P**) RADIALBEWEGUNG EINES KÖRPERS IM GRAVITATIONSFELD DER ERDE

Ein Körper (Masse m) bewegt sich *ausschließlich radial* im Gravitationsfeld der Erde (Radius R, Masse M). Sein Abstand zum Erdmittelpunkt ist groß, $r \geq R$. Es wirken keine weiteren Kräfte.

i) Wie lautet das Gravitationspotential und die Gravitationskraft, die auf den Körper im Abstand r vom Erdmittelpunkt wirkt?

ii) Geben Sie die Gesamtenergie des Körpers im Gravitationsfeld an.
Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in seinem Startpunkt auf der Erdoberfläche sei v_0. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v als Funktion des Abstandes r vom Erdmittelpunkt?

iii) Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit mindestens sein, damit der Körper das Gravitationspotential der Erde überwinden kann?

iv) Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Gravitationskonstante G und der lokalen Gravitationsbeschleunigung g an der Erdoberfläche?

v) Die International Space Station kreist in einer Umlaufbahn ca. 350 km über der Erdoberfläche ($R = 6400$ km). Wie groß ist dort ungefähr die lokale Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} im Vergleich zu g auf der Erdoberfläche? Weshalb spricht man trotzdem von *Zero-g* ("Schwerelosigkeit")?

2. EIN ZENTRALPOTENTIAL MIT SPEZIELLEN EIGENSCHAFTEN (**10P**)

a) (**1P**) Wie lautet die Energie $E = T + V$ für die Bewegung eines Massenpunktes (Masse m) im Zentralpotential $V(r) = -\alpha\, r^{-2}$ mit konstantem $\alpha > 0$? Es wirken keine weiteren Kräfte.

b) (**2P**) Unter welchen Bedingungen kann dieser Massenpunkt gemäß der klassischen Newton'schen Mechanik das Zentrum ($r \to 0$) des Potentials erreichen, wenn sein Drehimpuls $l \neq 0$ ist? Welche Besonderheit ergibt sich für den Grenzfall $l^2 = 2m\alpha$?

Wir betrachten nun den Fall ins Zentrum eines Körpers, der sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Abstand $r(t = 0) = r_0$ vom Zentrum befindet und keine Radialbewegung besitzt. Sein Drehimpuls erlaubt ihm, das Zentrum zu erreichen, und $l \neq 0$. Die Abkürzung $\lambda := -\dfrac{l^2 - 2m\alpha}{2m}$ kann hilfreich sein.

c) (**3P**) Weisen Sie nach, dass die dafür benötigte Zeit endlich ist.

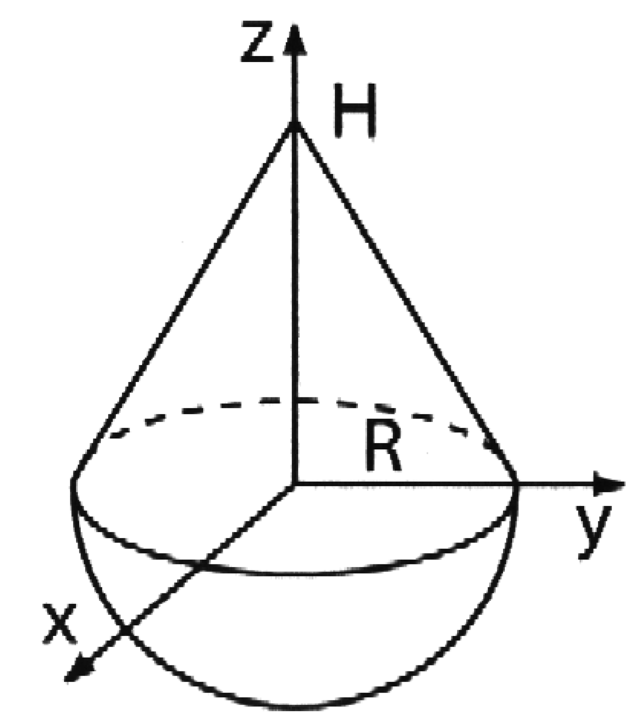
d) (**3P**) Zeigen Sie, dass dann aber die Winkelgeschwindigkeit und auch die Geschwindigkeit des Massenpunktes gegen Unendlich gehen. Ist dabei die Zahl der Umläufe endlich oder unendlich?

e) (**1P**) Erörtern Sie die Grenzen der klassischen Mechanik bei diesem Problem.

Fortsetzung nächste Seite

Viele Teilaufgaben sind ohne Kenntnis der Ergebnisse aller vorhergehenden Teilaufgaben bearbeitbar.

3. DAS STEHAUFMÄNNCHEN (**10P**)



Auf der Flachseite einer homogenen Halbkugel mit dem Radius R ist ein homogener Kreiskegel mit Höhe H und Radius R zentral aufgesetzt, siehe Abbildung. Beide Körper besitzen die gleiche homogene Massendichte ρ. Sie ruhen im homogenen Schwerefeld der Erde. Es wirken keine weiteren Kräfte.

a) **(7P)** Bestimmen Sie nacheinander die Schwerpunkte

i) der Halbkugel (Volumen $V = \frac{2}{3}\pi R^3$);

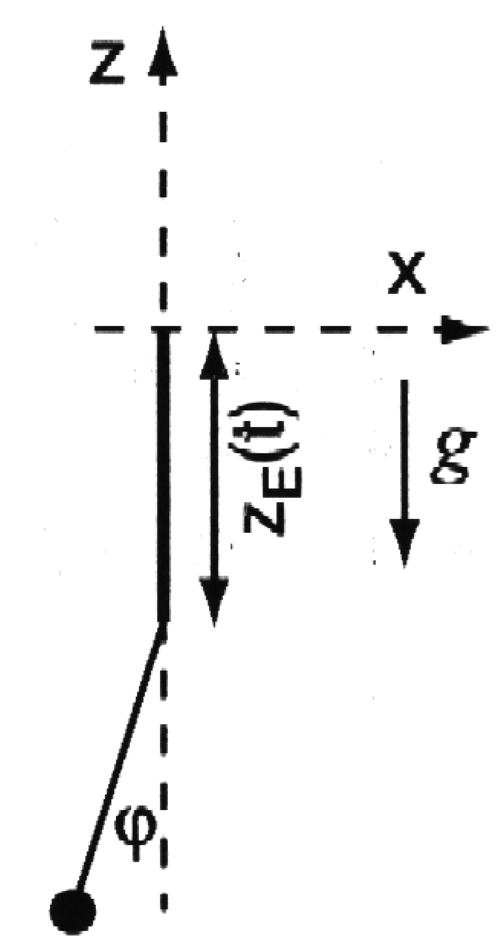
ii) des Kegels (Volumen $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$).

Zeigen Sie nun: Der Ort Z des Schwerpunkts des Gesamtkörpers auf der z-Achse ist gegeben durch

$$Z = \frac{H^2 - 3R^2}{4H + 8R} \quad .$$

b) **(3P)** Wie groß muss der Winkel an der Spitze des Kegels mindestens sein, damit die oben gezeigte Anordnung stabil ist, d.h. damit der Körper bei kleiner Anfangsauslenkung auf einer horizontalen Ebene in die oben gezeigte stabile Position zurückpendelt?

4. FADENPENDEL IM AUFZUG (**13P**)



Ein ideales, mathematisches Fadenpendel der Länge l und Masse m schwingt im homogenen Schwerefeld der Erde (Ortsfaktor $g > 0$) nur in der xz-Ebene. Sein Aufhängepunkt wird durch eine bekannte, vorgegebene Funktion $z_E(t)$ in der Vertikalen variiert – etwa durch Aufhängung des Pendels in einem bewegten Aufzug (siehe Figur). Es wirken keine weiteren Kräfte.

a) **(4P)** Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion des Systems gegeben ist durch:

$$L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\,\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\dot{z}_E + \dot{z}_E^2\right) - mg(z_E - l\,\cos\varphi)$$

b) **(4P)** Leiten Sie die zugehörige Bewegungsgleichung ab. Vergleichen Sie die Bewegungsgleichung mit derjenigen des gewöhnlichen mathematischen Pendels ohne beweglichen Aufhängepunkt.

c) **(2P)** Geben Sie die allgemeine Lösung $\varphi(t)$ der Bewegungsgleichung für eine konstante Beschleunigung $\ddot{z}_E = a$ und kleine Auslenkungen φ aus der Ruhelage an. Rechnung nicht nötig. Diskutieren Sie den Fall $a = -g$ (freier Fall des Aufzugs).

d) **(3P)** Berechnen Sie die Hamiltonfunktion als Funktion der verallgemeinerten Koordinate $q \equiv \varphi$ und ihres generalisierten Impulses $p \equiv p_\varphi$. Ist im beschriebenen System die Energie erhalten? Begründung.

Viel Spaß!

BONUSPUNKT (**1P** bei richtiger Antwort, falls insgesamt weniger als 40 Punkte erreicht.)
Beweisen Sie die auf dem Deckblatt angegebene interessante mathematische Formel

$$\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{x}\right)^2 - 1}}\,dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + \text{const.}$$