~ 0F39Y8.tmp i·(-i) =

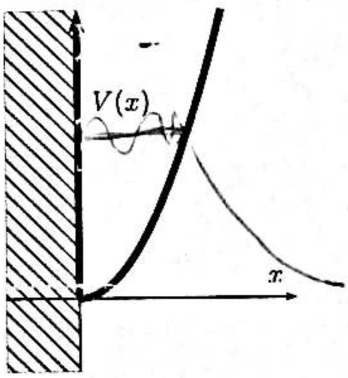
Vordiplomsprüfung

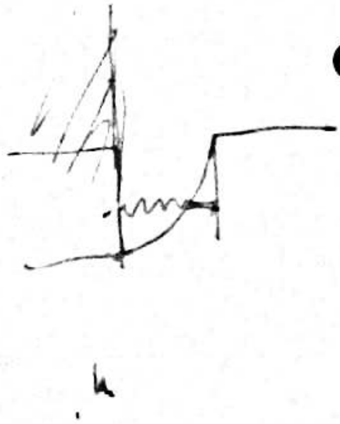
Prof. Lindner | **Quantenmechanik 1** | **13.09.2001**

- Diese Prüfung beinhaltet 5 Aufgaben und 90 Punkte.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Die Punkte sind jeweils am Rand des Blattes angegeben.
- Die angegeben Punkte dienen als Richtlinie für die Bearbeitungszeit in Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie deutlich. Unleserliche Antworten werden nicht bewertet.

1. Betrachten Sie das eindimensionale Potentialproblem

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\,, & x \geq 0 \end{cases}$$





mit $m, \omega > 0$.

2 (a) Formulieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Problem.

6 (b) Wie lauten die Rand- bzw. Anschlussbedingungen für die Lösung $\psi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung.

6 (c) Geben Sie die Lösungen des Problems an.
[Hilfe: *Die Lösungen des harmonischen Oszillators sind gegeben durch*

$$\psi_n^{\text{H.O.}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, x_0}}\, H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right\}$$

mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ *und* $H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots$]

4 (d) Wie lauten die Energieeigenwerte des Systems?

8 (e) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle$ für den Grundzustand.
[Hilfe: *Integrale der Form* $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, e^{-\alpha x^2}$ *können durch Differentiation der Integrale*

$$I_0(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} \quad bzw. \quad I_1(\alpha) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-\alpha x^2}$$

nach α *berechnet werden.*]

2. Seien A und B hermitesche Operatoren mit nicht-entartetem Spektrum.

[3] (a) Wie lautet das Inverse von AB?

[8] (b) Zeigen Sie, dass A und B simultan diagonalisiert werden können, falls $[A, B] = 0$ gilt.

[6] (c) Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von A reell sind.

[6] (d) Begründen Sie: Falls A mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{L}$ kommutiert, kommutiert A mit allen Komponenten.

[3] (e) Was muss für α gelten, damit $\exp(\alpha A)$ unitär ist? α muß ~~imaginär~~ rein imaginär sein $AA^+ = 1$

[12] 3. Betrachten Sie das δ-Potential

Blatt 4 A10

$$V(x) = -F\,\delta(x)$$

mit $F > 0$. Berechnen Sie die Streuung einer von links einlaufenden Welle an diesem Potential und bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten

$$R = \frac{|j_{\text{reflektiert}}|}{|j_{\text{einlaufend}}|}\,,$$

wobei $j_{\text{reflektiert}}$ bzw. $j_{\text{einlaufend}}$ die Stromdichte der reflektierten bzw. einlaufenden Welle bezeichnet. [Hilfe: *Eine Randbedingung bei $x = 0$ lautet (für $\varepsilon > 0$):*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-\varepsilon}\right\} = -\frac{2m}{\hbar^2}F\psi(0,t)\ .]$$

4. Ein starrer Rotator mit Trägheitsmoment I werde durch den Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2I}\vec{L}^2$$

beschrieben. $\vec{L}$ ist der Drehimpulsoperator.

[4] ? (a) Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?

[10] ? (b) Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ führt das zu einem Wechselwirkungsterm

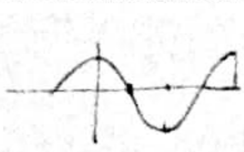
$$H_1 = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B\cos\theta\ .$$

H_1 soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur für die Grundzustandsenergie des Rotators.

[Hilfe: *Es gilt für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$: $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$. Drücken Sie H_1 durch die Kugelflächenfunktionen aus und verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen.*]

5. Wir betrachten eine Theorie, in der das Coulombgesetz für sehr kleine Skalen eine Modifikation erfährt:

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{e^2}{4\pi}\dfrac{R}{r^2} & \text{für } r \le R\,, \\[2ex] -\dfrac{e^2}{4\pi}\dfrac{1}{r} & \text{für } r > R\,, \quad \text{wobei } r = |\vec{r}|. \end{cases}$$



[4] (a) Spalten Sie den Hamiltonoperator $H = H_0 + H_1$ für das Elektron so auf, dass H_0 den Hamiltonoperator für den Fall des üblichen Coulombgesetz darstellt und H_1 die durch die Modifikation hervorgerufene Störung beschreibt.

[8] (b) Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie den Einfluß der Modifikation auf die Grundzustandsenergie.

[Hilfe: *Verwenden Sie die Grundzustandswellenfunktion für das Wasserstoffatom mit punktförmigem Proton $\psi_0(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a_0^3\pi}}\exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$.*]

$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}\vec{\nabla}^2 - \frac{e^2}{4\pi r}$ $\qquad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Delta - \frac{e^2 R}{4\pi r^2} +$

$\hat{H} - \hat{H}_0 = -\frac{e^2 R}{4\pi r} + \frac{e^2}{4\pi r} = \frac{e^2}{4\pi r^2}(r-R) = H_1$