....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Semestrale
Mathematik 4 für Physik
(Analysis 3)

Prof. Dr. S. Warzel

19. Februar 2010, 8:15 – 9:45 Uhr, MW 0001

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **7** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4-Seiten

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen. Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung

1. **Fluss durch eine Oberfläche** **[7 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x^2 + y^2 + 16z^2 = 2010\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt. Berechnen Sie den Fluss von

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y-z \\ -x+z \\ x-y \end{pmatrix} \tag{1}$$

durch S.

Lösung:

Sei V das von $S = \partial V$ eingeschlossene Volumen (V ist ein Ellipsoid). Nach dem Satz von Gauß ist der Fluß von F [2] durch die Oberfläche S mit der Divergenz von F verknüpft [2]. Da F divergenzfrei ist,

$$\operatorname{div} F \overset{[1]}{=} \partial_x(y-z) + \partial_y(-x+z) + \partial_z(x-y) \overset{[1]}{=} 0,$$

verschwindet die rechte Seite:

$$\underbrace{\int_S F \cdot n \,\mathrm{d}S}_{[2]} \overset{[2]}{=} \int_V \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x \overset{[1]}{=} 0$$

Bemerkung: Es gibt 2 Punkte auf die Definition des Flusses ist und 2 Punkte auf die Anwendung des Satzes von Gauß.

2. **Zirkulation durch den Rand einer Fläche** **[8 Punkte]**

Sei $S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1 \wedge z \geq 0\}$ so orientiert, dass der Normalenvektor vom Ursprung weg zeigt, und

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+4 \\ \tanh z + 2x \\ \cosh(x^2+z^2) + e^{4y^2} \end{pmatrix}$$

ein Vektorfeld. Bestimmen Sie die Zirkulation von v durch den Rand von S.

Lösung:

Wir benutzen den Satz von Stokes: der Rand der Halbkugel S ist eine Kreislinie ∂S in der xy-Ebene, die im mathematisch positiven Sinne, also gegen den Uhrzeigersinn, orientiert ist. Nach dem Satz von Stokes können wir alternativ den Fluss von $\operatorname{rot} v$ durch *irgendeine* Oberfläche D mit Rand $\partial S = \partial D$ wählen.

Sei $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1 \wedge z = 0\}$ die Kreisscheibe in der xy-Ebene, die so orientiert sei, dass der Normalenvektor durch $n = (0,0,1)$ gegeben ist. Dann gilt

$$\underbrace{\int_{\partial S} v \cdot \mathrm{d}r}_{[2]} \overset{[2]}{=} \int_D \operatorname{rot} v \cdot n \,\mathrm{d}S = \int_D \underbrace{\begin{pmatrix} (\operatorname{rot} v)_x \\ (\operatorname{rot} v)_y \\ \partial_x(\tanh z + 2x) - \partial_y(y+4) \end{pmatrix}}_{[1]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{[1]} \,\mathrm{d}S(x,y)$$

$$= \int_D \underbrace{\begin{pmatrix} (\operatorname{rot} v)_x \\ (\operatorname{rot} v)_y \\ 1 \end{pmatrix}}_{[1]} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\mathrm{d}S(x,y) = \int_D 1 \,\mathrm{d}S(x,y) \overset{[1]}{=} \pi,$$

denn der Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius 1 ist π.

Alternativ kann man das auch direkt ausrechnen: die Kreislinie wird in Polarkoordinaten parametrisiert. Dann rechnet man nach, dass das Integral gleich π ist,

$$\underbrace{\int_{\partial S} v \cdot \mathrm{d}r}_{[2]} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\varphi + 4 \\ 0 + 2\cos\varphi \\ \cosh(\cos^2\varphi + 0) + e^{4\sin^2\varphi} \end{pmatrix}}_{[1]} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ +\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{[1]}$$

$$\overset{[1]}{=} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(-\sin^2\varphi - 4\sin\varphi + 2\cos^2\varphi\right)$$

$$= -\pi + 0 + 2\pi \overset{[1]}{=} \pi.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin^2\varphi \overset{[1]}{=} \pi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \cos^2\varphi$$

ist sowie

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, \sin\varphi \overset{[1]}{=} 0.$$

Bemerkung: Es gibt 2 Punkte auf die Definition der Zirkulation und 2 Punkte auf die Anwendung des Satzes von Stokes.

3. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden und

$$f(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - \alpha_k)^{-1}.$$

(a) f hat bei α_k eine

☐ hebbare Singularität ☒ Pol 1. Ordnung [1] ☐ Pol 2. Ordnung
☐ Pol −1. Ordnung ☐ wesentliche Singularität

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = \alpha_1$:

$$\mathrm{Res}_{\alpha_1}(f) = \prod_{2 \le j \le N} \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_j} \qquad [2]$$

(c) Geben Sie den Hauptteil der Laurent-Reihe von f um $z = \alpha_1$ an:

$$H(z) := \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - \alpha_1)^{-n} = \frac{\mathrm{Res}_{\alpha_1}(f)}{z - \alpha_1} \qquad [2]$$

(d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius des Nebenteils $N(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha_1)^n$ der Laurent-Reihe von f um $z = \alpha_1$:

$$R = \min\Big\{ |\alpha_k - \alpha_1| \;\Big|\; k = 2, \dots, N \Big\} \qquad [3]$$

Lösung:

Zur Teilaufgabe (d): Da die α_k, $k = 1, \dots, N$, paarweise verschieden sind, hat f die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{z - \alpha_k} = \frac{b_1}{z - \alpha_1} + \sum_{k=2}^{N} \frac{b_k}{z - \alpha_k} = H(z) + N(z)$$

wobei die Konstanten $b_k = \mathrm{Res}_{\alpha_k}(f)$ die Residuen von f an der Stelle α_k sind. Dann ist der äußere Konvergenzradius der Laurent-Reihe von f, also der Konvergenzradius des Nebenteils N, gleich dem Abstand zum nächsten Pol.

Denn für jedes α_k, $k = 2, \dots, N$, kann $(z - \alpha_k)^{-1}$ um $z = \alpha_1$ entwickelt werden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \alpha_k} &= -\frac{1}{(\alpha_k - \alpha_1) - (z - \alpha_1)} = -\frac{1}{\alpha_k - \alpha_1} \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha_1}{\alpha_k - \alpha_1}} \\ &= -\frac{1}{\alpha_k - \alpha_1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - \alpha_1}{\alpha_k - \alpha_1} \right)^n. \end{aligned}$$

Die geometrische Reihe konvergiert solange $|z - \alpha_1| < |\alpha_k - \alpha_1|$ ist. Die Potenzreihe von f konvergiert also, solange alle Potenzreihen zu $(z - \alpha_k)^{-1}$ konvergieren. Der Konvergenzradius R ist also der Abstand zum nächsten Pol,

$$R = \min\big\{ |\alpha_k - \alpha_1| \;\big|\; k = 2, \dots, N \big\}.$$

4. **Fourier-Transformation** **[11 Punkte]**

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \varepsilon^2},$$

mit $\varepsilon > 0$. Berechnen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{f}$.

Lösung:

Die Fourier-Transformierte ist definiert als

$$\hat{f}(k) \overset{\boxed{1}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2}.$$

Wir berechnen dieses Integral im Komplexen [2 Punkte]: wir schließen die Strecke $[-R, +R]$ in der komplexen Ebene durch beispielsweise einen Halbkreis γ_R in der oberen Halbebene. Dann ist das Integral der Funktion $\frac{e^{-ikz}}{z^2+\varepsilon^2}$ über die Kurve $[-R, +R] \cup \gamma_R$ gleich dem eingeschlossenen Residuum bei $+i\varepsilon$ mal $2\pi i$,

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_{\gamma_R} \mathrm{d}z \, \frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} &\overset{\boxed{1}}{=} +2\pi i \, \mathrm{Res}_{i\varepsilon} \left(\frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} \right) \overset{\boxed{1}}{=} 2\pi i \, \frac{e^{-iki\varepsilon}}{i\varepsilon + i\varepsilon} \\ &= \pi \frac{e^{+\varepsilon k}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Das Pluszeichen erklärt sich dadurch, dass $[-R, +R] \cup \gamma_R$ im mathematisch positiven Sinne durchlaufen wird. Um zu sehen, für welche $k \in \mathbb{R}$ der zweite Term im Grenzfall $R \to \infty$ verschwindet, schätzen wir ihn betragsmäßig ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} \mathrm{d}z \, \frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} \right| &\overset{\boxed{1}}{=} \left| \int_0^\pi \mathrm{d}t \, iRe^{it} \, \frac{e^{-ikRe^{it}}}{R^2 e^{i2t} + \varepsilon^2} \right| \leq \int_0^\pi \mathrm{d}t \, R^{-1} \left| e^{-ikR(\cos t + i \sin t)} \right| \\ &\overset{\boxed{1}}{=} \int_0^\pi \mathrm{d}t \, R^{-1} \, e^{+kR \sin t} \end{aligned}$$

Der Integrand verschwindet genau dann fast überall punktweise für große R, wenn $k \leq 0$ ist. Daher erhalten wir für $k \leq 0$

$$\lim_{R \to \infty} \left(\int_{-R}^{+R} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_{\gamma_R} \mathrm{d}z \, \frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} \right) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} \overset{\boxed{1}}{=} \pi \frac{e^{+\varepsilon k}}{\varepsilon}.$$

Um das Integral für $k \geq 0$ berechnen zu können, müssen wir die Strecke $[-R, +R]$ nach unten mit einem Halbkreis $\tilde{\gamma}_R$ schließen. Dann ist das Residuum an der Stelle $-i\varepsilon$ eingeschlossen. Damit die Kurve im mathematisch positiven durchlaufen wir, lautet die Gleichung in diesem Fall (man achte auf die Integralgrenzen)

$$\begin{aligned} \int_{+R}^{-R} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} + \int_{\tilde{\gamma}_R} \mathrm{d}z \, \frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} &= 2\pi i \, \mathrm{Res} \left(\frac{e^{-ikz}}{z^2 + \varepsilon^2} \right) \overset{\boxed{1}}{=} 2\pi i \, \frac{e^{-ik(-i\varepsilon)}}{-i\varepsilon - i\varepsilon} \\ &= -\pi \frac{e^{-\varepsilon k}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Das Integral über den Hilfsweg trägt im Grenzfall $R \to \infty$ nicht bei und wir erhalten so für $k \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} = +\pi \frac{e^{-\varepsilon k}}{\varepsilon}.$$

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ ist also gegeben durch

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \, \frac{e^{-ikx}}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \pi \frac{e^{-\varepsilon |k|}}{\varepsilon} \\ &\overset{\boxed{2}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\varepsilon |k|}}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

5. **Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm** **[8 Punkte]**

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\hat{g}(k,t)$ von $g(x,t)$, so dass für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$\phi(x,t) := \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y,t)\, \mathrm{d}y$$

das Anfangswertproblem $\phi(x,0) = f(x)$ zur Gleichung

$$\partial_t \phi(x,t) = \big(\partial_x^2 - m^2\big)\phi(x,t)$$

löst.

Lösung:

Das Integral aus der Angabe ist die Faltung von f und g in der Ortsvariable x: für alle $f, g(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}\phi)(k,t) \equiv \hat{\phi}(k,t) &\overset{[1]}{=} \big(\mathcal{F}(g(\cdot,t) * f)\big)(k) = \big(\mathcal{F}\big(f * g(\cdot,t)\big)\big)(k) = \sqrt{2\pi}\,(\mathcal{F}f)(k)\,(\mathcal{F}g)(k,t) \\ &\overset{[1]}{=} \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(k)\,\hat{g}(k,t).\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung

$$\partial_t \phi(x,t) = \big(\partial_x^2 - m^2\big)\phi(x,t)$$

kann Fourier-transformiert werden:

$$\partial_t \hat{\phi}(k,t) = -(k^2 + m^2)\hat{\phi}(k,t) \qquad [2]$$

Diese Gleichung hat die Lösung

$$\hat{\phi}(k,t) \overset{[1]}{=} e^{-(k^2+m^2)t}\hat{\phi}(k,0) \overset{[1]}{=} e^{-(k^2+m^2)t}\hat{f}(k)$$

und man liest ab, dass

$$\hat{g}(k,t) \overset{[2]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(k^2+m^2)t}$$

sein muss.

6. **Rechnen mit Distributionen** **[4 Punkte]**

Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Lösung:

Die distributionelle Ableitung von f kann man ausrechnen, indem man das Integral bei 0 aufteilt:

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f, \varphi\right) &\overset{[1]}{=} -\left(f, \varphi'\right) \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, f(x)\, \varphi'(x) \overset{[1]}{=} +\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, \varphi'(x) - \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \varphi'(x) \\
&\overset{[1]}{=} \left[1 \cdot \varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\, 0 \cdot \varphi(x) - \left[1 \cdot \varphi(x)\right]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x\, 0 \cdot \varphi(x) \\
&= \varphi(0) + \varphi(0) \overset{[1]}{=} \left(2\delta, \varphi\right)
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 2\delta(x)$.

7. **Operatoren auf Hilbert-Räumen** **[7 Punkte]**

Sei $T_\lambda : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ der durch

$$(T_\lambda \psi)(x) := \lambda^{n/2} \psi(\lambda x)$$

definierte Operator, wobei $\lambda > 0$ ist.

(a) Bestimmen Sie den adjungierten Operator:

$$(T_\lambda^* \varphi)(x) = \lambda^{-n/2}\, \varphi(x/\lambda) = (T_{1/\lambda}\varphi)(x)$$ [3]

(b) T_λ ist für alle $\lambda \neq 1$

☐ selbstadjungiert ☐ eine Orthonormalbasis ☐ positiv
☐ ein orthogonaler Projektor ☒ unitär [1]

Seien A, B selbstadjungierte beschränkte Operatoren auf einem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$.

(c) Zeigen Sie, dass aus $AB = 0$ auch $BA = 0$ folgt:

$$0 = 0^* \overset{[1]}{=} (AB)^* \overset{[1]}{=} B^* A^* \overset{[1]}{=} BA$$

Lösung:

(a) Seien $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann setzen wir T_λ in das Skalarprodukt ein:

$$\langle \varphi, T_\lambda \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \overline{\varphi(x)}\, (T_\lambda \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \overline{\varphi(x)}\, \lambda^{n/2}\, \psi(\lambda x)$$

Nach einem Variablenwechsel, $y := \lambda x$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \varphi, T_\lambda \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \lambda^{-n}\, \overline{\varphi(y/\lambda)}\, \lambda^{n/2}\, \psi(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \overline{\lambda^{-n/2}\varphi(y/\lambda)}\, \psi(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \overline{(T_{1/\lambda}\varphi)(y)}\, \psi(y) = \big\langle T_{1/\lambda}\varphi, \psi \big\rangle\,. \end{aligned}$$

Der adjungierte Operator $T_\lambda^* = T_{1/\lambda}$ ist also gegeben durch

$$(T_\lambda^* \varphi)(x) = (T_{1/\lambda}\varphi)(x) = \lambda^{-n/2}\varphi(x/\lambda).$$

[3 Punkte]

(b) Wir müssen zeigen, dass der adjungierte Operator T_λ^* auch das Inverse T_λ^{-1} ist. Für jedes $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \big(T_{1/\lambda} T_\lambda \varphi\big)(x) &= \lambda^{-n/2}\, (T_\lambda \varphi)(x/\lambda) = \lambda^{-n/2} \lambda^{n/2}\, \varphi\big(\lambda x/\lambda\big) \\ &= \varphi(x), \end{aligned}$$

das heißt $T_\lambda^* = T_{1/\lambda}$ ist ein Linksinverses. Analog zeigt man, dass T_λ^* das Rechtsinverse ist. Somit ist die Adjungierte auch das Inverse, $T_\lambda^* = T_\lambda^{-1}$, und T_λ ist unitär.