Grappe A

Aufgabe 1. (Punkte: 8)



Auf \mathbb{R}^2 sei als innere Verknüpfung die übliche Addition + und eine spezielle äußere Verknüpfung \circ definiert:

$$+: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} \right. & \circ: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} \right. \right\}$$

$$\circ: \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \left(\lambda, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?



Nein Ja

 \square (\mathbb{R}^2 , +) ist kommutative Gruppe X

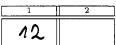
(2)

 $\forall v \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}: (\lambda \cdot \mu) \circ v = \lambda \circ (\mu \circ v)$

X \square (\mathbb{R}^2 , +, \circ) ist distributiv

 $\forall v \in \mathbb{R}^2: 1 \circ v = v$

Aufgabe 2. (Punkte: 12)



Sei $p \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom höchstens dritten Grades, d.h. $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Es gelte: p(1) = -1, p(0) = 3, p(-1) = -1 und $p(3) = \lambda \in \mathbb{R}$.

Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten a, b, c, und d auf und bestimmen Sie a, b, c

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Grad von p kleiner 3, d.h. deg(p) < 3?

A2) kusatz: p(x) = ax3+bx2+cx+d

LGS (2)

$$2a+2c=0 \Rightarrow c=-a$$

=>
$$24a = 1 + 33 => a = (1 + 33)_{24}$$

Gegeben seien
$$a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$$
 durch $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ \vartheta \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $\vartheta \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie: $\exists \vartheta \in \mathbb{R}$, so dass $span(a,b) = span(c,d)$.

Aufgabe 4. (Punkte: 12)

Sei $0 < s \in \mathbb{R}$ und $M := \left\{ \begin{pmatrix} x & -sy \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \,\middle|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \right\}.$

c) hovever slement on
$$(y \xrightarrow{sy}) \in M$$
 int (nach formal): Fix s>0 $(x \xrightarrow{-sy})^{-1} = \frac{1}{\det(y \xrightarrow{x})} (-y \xrightarrow{x}) = \frac{1}{x^2 + sy^2} (-y \xrightarrow{x}) \in M$, de $x^2 + sy^2 \neq 0$ $(y \xrightarrow{x})$ the oriential gill allgement bei blahizen product $(x \xrightarrow{x})$

d) troviativitat gilt allgemein bei batrizen produkt

(D)

Aufgabe 5.	(Punkte:	10)
Aurgane 3.	(I unvic.	TO)

1	2
10	

- a) Bestimmen Sie über dem Körper \mathbb{Z}_3 sämtliche Lösungen $x \in \mathbb{Z}_3^3$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3.$
- b) Bestimmen Sie über dem Körper $\mathbb C$ sämtliche Lösungen $x\in\mathbb C^2$ des linearen Gleichungssystems $Ax=b \text{ mit } A=\begin{pmatrix} i & 2i \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2} \text{ und } b=\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \text{ in Abhängigkeit von } \alpha \in \mathbb{C}.$

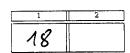
$$(A5) \text{ a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \times = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3 \quad \textcircled{9}$$

b)
$$(i \ 2i \ | 1) \sim (-1 \ -2 \ | i) \sim (1 \ 2 \ | -i)$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -i\left(\frac{2+\kappa}{\alpha-4}\right) & 2 \\ \frac{3i}{\alpha-4} & 2 \end{pmatrix}$$

Fall x=4 => er gebt Deine Losung (= 0) Fall $\alpha \neq 4 \Rightarrow x_1 = \frac{3i}{\alpha - 4}, x_n = -i - \frac{6i}{\alpha - 4} = -i \left(\frac{\alpha + 2}{\alpha - 4}\right) \Rightarrow x = \left(\frac{3i}{\alpha - 4}\right)$

Aufgabe 6. (Punkte: 18)



(2)

Gegeben sei die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in S_8$.



- a) Stellen Sie π als Produkt paarweise elementfremder Zykel dar und berechnen Sie π^{2006} .
- b) Geben Sie π^{-1} an.
- c) Welche Ordnung hat die von π erzeugte Untergruppe der S_8 ?
 - $\Box 3$ $\Box 4$ $\Box 7$ $\square 8$
- d) Wie viele Transpositionen sind zur Darstellung von π mindestens notwendig? $\square 8$ **25**5 $\Box 6$ $\Box 7$
- e) Lässt sich π als Produkt von n ($n \in \mathbb{N}$) nicht notwendigerweise verschiedenen 3-Zykeln darstellen? Achtung: falsche Antwort gibt hier (bei 6,e) Punktabzug!

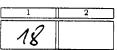
$$\Box Ja$$
 $\triangleright Nein$

Wyen 2006 mod 3 = 2006 mod 4 = 2006 mod 12 = 2 gilt: 12006 = (134)²⁰⁰⁶(2567)²⁰⁰⁶ = (134)²(2567)² =

$$\pi^{2006} = \pi^2 = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 35416778 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 46137258 \end{pmatrix}$$

b)
$$\pi^{-1} = (134)^2 (2567)^3 = (143)(2765) = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 47132568 \end{pmatrix}$$
 (2)

Aufgabe 7. (Punkte: 18)



Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ einer linearen Abbildung $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \mapsto Ax \end{cases}$

- a) Geben Sie für Kern(f) und $Bild(\mathbb{R}^3)$ jeweils die Dimension und eine Basis an.
- b) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A ist.
- c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie alle Eigenwerte von A an.

$$\begin{pmatrix}
4 & 6 & 0 & | & 0 \\
6 & -9 & 6 & | & 0 \\
0 & 6 & -2 & | & 0
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
2 & 3 & 0 & | & 0 \\
2 & -3 & 2 & | & 0 \\
0 & 3 & -1 & | & 0
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
2 & 3 & 0 & | & 0 \\
0 & -6 & 2 & | & 0 \\
0 & 3 & -1 & | & 0
\end{pmatrix}
\sim
\begin{pmatrix}
2 & 3 & 0 & | & 0 \\
0 & -3 & 1 & | & 0 \\
0 & 0 & 0 & | & 0
\end{pmatrix}$$

=>
$$x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$$
, $x_2 = \frac{\lambda}{3}$, $x_1 = \frac{1}{2}(-\lambda)$; Mit $\lambda = 6\mu$ =>

$$|\text{Kem}(f)| = \{ x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \mu \in |\mathbb{R} \}, \text{ dein}(\text{Kem}(f)) = 1; \text{ } \text{Bunk}(f) = (\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}) \text{ } \text{ } \text{Basen}$$

b)
$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & -9 & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 36 \\ 12 + 54 + 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 84 \\ -42 \end{pmatrix} = -14 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c)
$$X_{A}(x) = del(A - xid_{3x3}) = del\begin{pmatrix} 4-x & 6 & 0 \\ 6 & -9-x & 6 \\ 0 & 6 & -2-x \end{pmatrix} =$$

$$= -x^{3} + x^{2}(4-11) + x(44+18+36) + 72-72$$

$$= -x^3 - 7x^2 + 98x = -x(x^2 + 7x - 98)$$

Eigenwerte van A mind Nallstellen van Xx (5):

$$k_1 = 0$$
 (ogl. a)?), $k_2 = -14$ (ogl. b)?) => $k_3 = -\frac{98}{-14} = 7$

3

(4)

oder mit Formel für guadratische Gleichen