Zentrum Mathematik	Technische Universität München
Marius Gritl	WS 2021/22
Felix Schwarzfischer	

Ferienkurs Analysis 1 für Physik (MA9202)

Probeklausur

18. März 2022
Arbeitszeit: 90 Minuten **Name:** ____________________

Punkteverteilung

Aufgabe	Punkte	Erreicht
1	16	
2	7	
3	14	
4	9	
5	15	
6	10	
7	12	
Gesamt:	83	

Note:____________

Bestätigung der Verhaltensregeln
Hiermit versichere ich, dass ich diese Klausur ausschließlich unter Verwendung der unten aufgeführten Hilfsmittel selbst löse und unter meinem Namen abgebe.

Unterschrift: ______________________________

Bearbeitungshinweise:

- Diese Klausur enthält 14 Seiten (Einschließlich dieses Deckblatts) und 7 Aufgaben.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 83 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Erlaubte Hilfsmittel: Ein (1) selbsterstelltes, einseitig beschriftetes DIN A4-Blatt.
- **Es werden nur solche Ergebnisse bewertet, bei denen der Lösungsweg erkennbar ist**. Alle Antworten sind **grundsätzlich zu begründen**, sofern es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter/grüner Farbe noch mit Bleistift.

1. (16 Punkte) **Gemischtes**

In den folgenden Teilaufgaben sind **keine** Begründungen gefordert und werden auch nicht zur Bewertung herangezogen. Gewertet werden ausschließlich die Ergebnisse in den dafür vorgesehenen Kästen. Sollte der Platz in den besagten Kästen nicht ausreichen, so sollten Sie in eindeutiger Weise kennzeichnen, wo Sie die Aufgabe bearbeitet haben.

□0 □1 □2 □3 □4

(a) (4 Punkte) Geben Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Phase der komplexen Zahl $z = (1+i)^{100}$ an.

$\mathrm{Re}(z) \overset{[1]}{=} -2^{50}$	$\mathrm{Im}(z) \overset{[1]}{=} 0$	$\|z\| \overset{[1]}{=} 2^{50}$	$\arg(z) \overset{[1]}{=} \pi$

□0 □1 □2

(b) (2 Punkte) Geben Sie eine beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, die divergiert.

$a_n \overset{[2]}{=} (-1)^n$

□0 □1 □2 □3

(c) (3 Punkte) Geben Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!}$ an.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!} \overset{[3]}{=} 1$

□0 □1 □2

(d) (2 Punkte) Geben Sie das Ergebnis des Grenzwerts $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x}$ an.

$\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x} \overset{[2]}{=} 0$

□0 □1 □2

(e) (2 Punkte) Wie lautet das Taylorpolynom $T_7 f(x;0)$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos(x^2)$?

$T_7 f(x;0) \overset{[2]}{=} 1 - \frac{1}{2}x^4$

□0 □1 □2 □3

(f) (3 Punkte) Wie lautet die reelle Partialbruchzerlegung von

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}?$$

$f(x) \overset{[3]}{=} \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1}$

Platz für Notizen:

Zur Lösung:

(a) Wegen $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$ und $i^4 = 1$ ist
$(1+i)^{100} = (2i)^{50} = 2^{50}i^{50} = 2^{50}i^2 = -2^{50}$.

(b) s.o.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln(2))^n}{n!} = -1 + \exp(\ln(2)) = 2 - 1 = 1$

(d) s.o., der Anwendungsbereich der Regel von l'Hospital ist hier nicht eröffnet.

(e) s.o., Einsetzen von x^2 in die bekannte Cosinusreihe.

(f) Der Ansatz $f(x) = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1}$ mit $A, B, C \in \mathbb{R}$ führt auf das lineare Gleichungssystem $B + C = 1$, $A - B = 0$ und $-A = 1$, dessen Lösung auf $A = -1$, $B = -1$ und $C = 2$ führt.

2. (7 Punkte) **Vollständige Induktion**

☐0
☐1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7

Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Sei zunächst $n = 1$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} k \cdot k! = 1 \cdot 1! = 1 = 2! - 1 = (1+1)! - 1.\textbf{[2]}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! &\overset{[1]}{=} \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \overset{[2]}{\underset{\text{I.V.}}{=}} (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! \\ &\overset{[1]}{=} (n+1)!(1 + (n+1)) - 1 = (n+2)! - 1 \overset{[1]}{=} ((n+1)+1)! - 1.\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt somit aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.

3. (14 Punkte) **Konvergenz von Folgen und Reihen**

(a) (4 Punkte) Berechnen Sie nachvollziehbar den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right).$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+1)}-\sqrt{n(n-1)}\right) &\overset{[1]}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)-n(n-1)}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\ &\overset{[1]}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}\\ &\overset{[1]}{=} \frac{2}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \overset{[1]}{=} 1.\end{aligned}$$

(b) (2 Punkte) Sei für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$a_n := \sin\left(n+\frac{1}{n}\right).$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt besitzt.

☐0 ☐1 ☐2

Es ist

$$|a_n| = \left|\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)\right| \le 1$$

für alle $n\in\mathbb{N}$. Das heißt insbesondere, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist[1]. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ damit mindestens einen Häufungspunkt[1].

(c) (8 Punkte) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$$

konvergiert.

□0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8

Sei $x \in \mathbb{R}$ zunächst beliebig und definiere $a_n := \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{-\frac{x}{2}} e^x \overset{[2]}{=} e^{\frac{x}{2}}.$$

Dabei fallen die Betragsstriche nach dem ersten Ungleichheitszeichen weg, da für $n > |x|$ die Terme innerhalb der Klammer positiv werden und endlich viele Terme zur Bestimmung des Limes-superior keine Rolle spielen **[1]**. Nach dem Wurzelkriterium**[1]** konvergiert dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut, wenn $e^{\frac{x}{2}} < 1$ und divergiert, wenn $e^{\frac{x}{2}} > 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $x < 0$ **[1]** (für die Konvergenz) bzw. $x > 0$ **[1]**(für die Divergenz) gilt. Bei $x = 0$ ist offenbar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{0}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

divergent**[1]**. Damit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{n^2} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n^2}$ genau dann, wenn $x \in (-\infty, 0)$**[1]**.

4. (9 Punkte) **Konvexität**

   (a) (3 Punkte) Geben Sie die Definition wieder, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex ist.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

$$\forall \lambda \in [0,1]\ \forall x, y \in \mathbb{R} : f((1-a)x + ay) \leq (1-a)f(x) + \alpha f(y).\textbf{[3]}$$

Bemerkung: Formulierungen wie „f konvex $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0$“ gehen an der Aufgabenstellung vorbei. f wurde nicht als $\mathscr{C}^2$-Funktion vorausgesetzt.

   (b) (6 Punkte) Sei nun $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass wenn der Graph von f nie unterhalb seiner Tangenten liegt, dann ist f konvex, also in Formeln:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : f(b) \geq f(a) + (b-a)f'(a) \Rightarrow f \text{ ist konvex.}$$

Hinweis: Setzen Sie $a = (1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0,1]$.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Seien $\lambda \in [0,1], x, y \in \mathbb{R}$ beliebig und $a = (1-\lambda)x + \lambda y$. Zu zeigen ist

$$f(a) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Nach Voraussetzung gilt

$$f(x) \geq f(a) + (x-a)f'(a)\textbf{[1]} \quad \text{und} \quad f(y) \geq f(a) + (y-a)f'(a)\textbf{[1]}.$$

Berechnen wir nun $(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$, so folgt

$$(1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \overset{\textbf{[2]}}{\geq} f(a) + \underbrace{[(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a)]}_{=0} f'(a) \overset{\textbf{[2]}}{=} f(a),$$

da $(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a) = (1-\lambda)x - a + \lambda a + \lambda y - \lambda a = 0$ aufgrund der Definition von a im Hinweis.

5. (15 Punkte) **Integration**

Seien $I_1 := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$ und $I_2 := \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\mathrm{d}x$.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z), z \in \mathbb{R}.$$

□0
□1
□2

Mit $\sin(x+y) \overset{[1]}{=} \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ x, y \in \mathbb{R}$ folgt mit $x = z$ und $y = \frac{\pi}{2}$ offenbar

$$\begin{aligned}\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin z \cos \frac{\pi}{2} + \cos z \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \sin z \cdot 0 + \cos z \cdot 1 \\ &\overset{[1]}{=} \cos z.\end{aligned}$$

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie nun unter Verwendung der Substitutionsregel, dass $I_1 = I_2$.

□0
□1
□2
□3
□4
□5

Es ist

$$\begin{aligned}I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x &\overset{[2]}{\underset{z=x-\frac{\pi}{2}}{=}} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\left(\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}z \\ = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos z)\mathrm{d}z &\overset{[2]}{\underset{y=-z}{=}} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\cos(-y))\mathrm{d}y \\ &\overset{[1]}{=} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos y)\mathrm{d}y = I_2.\end{aligned}$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie unter Verwendung der Substitution $x = u + \frac{\pi}{2}$, dass

☐0 ☐1 ☐2

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = I_1.$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x \overset{[1]}{\underset{}{\overset{x=u+\frac{\pi}{2}}{=}}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}u \overset{[1]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(u))\mathrm{d}u \overset{\text{(b)}}{=} I_1$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

(d) (6 Punkte) Berechnen Sie nun $I_1 + I_2$ und folgern Sie daraus den Wert von I_1.
Hinweis: $\sin(2x) = 2\sin x \cos x, x \in \mathbb{R}$.

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)))\,\mathrm{d}x \overset{[1]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2} 2\sin(x)\cos(x)\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{[1]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\mathrm{d}x \overset{[2]}{\underset{}{\overset{y:=2x}{=}}} -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y$$

$$\overset{[1]}{\overset{\text{(c)}}{=}} -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}(I_1 + I_1) \overset{\text{(b)}}{=} 2I_1 \qquad \Rightarrow I_1 \overset{[1]}{=} -\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

6. (10 Punkte) **Matrixexponential**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t).$$

(a) (2 Punkte) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{x}(t) = Ax(t)$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

☐0 ☐1 ☐2

$\dot{x}(t) \overset{[2]}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(t)$

(b) (1 Punkt) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$?

☐0 ☐1

☐0 ☐1 [1] ☒ 2 ☐3 ☐4 ☐5

(c) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Die Matrix A hat die Eigenwerte 0 und 2 [1] mit den Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ [1].

Mit der Matrix $S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ [1] gilt $S^{-1}AS \overset{[1]}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D$. Nun rechnet man nach:

$$e^{tA}v \overset{[1]}{=} Se^{tD}S^{-1}v \overset{[1]}{=} S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} S^{-1}v \overset{[1]}{=} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + e^{2t} \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix}.$$

7. (12 Punkte) **Kurze Fragen**

Im Folgenden sind einige Aussagen gegeben, deren Wahrheitsgehalt Sie überprüfen müssen. Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist und geben Sie auch eine Begründung für Ihre Entscheidung an.
Antworten ohne Begründung werden nicht bewertet!

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

(a) (3 Punkte) Jeder angeordnete Körper ist überabzählbar.

☐ Wahr; Begründung: ☒Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper (Anordnung wie in $\mathbb{R}$) und abzählbar. [3]

(b) (3 Punkte) Sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$. Ist f in a stetig, so gilt

$$\forall \delta > 0 \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in D : |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☒ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Das ist genau die ε-δ-Charakterisierung der Stetigkeit von f bei a, nur mit vertauschten Rollen von ε und δ. [3]

(c) (3 Punkte) Ist $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$, so ist $g(x) = xf(x)$ bei $x = 0$ differenzierbar.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☒ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Bei Definition der Differenzierbarkeit folgt unmittelbar

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{x} = f(0),$$

wobei im letzten Schritt die Stetigkeit von f verwendet wurde.[3]

(d) (3 Punkte) Das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ konvergiert.

☐0 ☐1 ☐2 ☐3

☒ Wahr; Begründung: ☐Falsch; Begründung/Gegenbeispiel:

Wegen $\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$ für alle $x > 0$ ist offenbar für $a \in (0, \pi)$

$$\left|\int\limits_0^\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_0^\pi \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x \leq \int\limits_a^\pi 1 \mathrm{d}x = \pi(1 - a).$$

Insbesondere ist dann

$$\left|\int\limits_0^\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| = \left|\lim_{a\to 0} \int\limits_a^\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x\right| \leq \pi < \infty.$$

Damit konvergiert $\int\limits_0^\pi \cos\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x$ nach dem Majorantenkriterium (absolut). [3]

Platz für Notizen:

Platz für Notizen: