1. Aufgabe

$$w := \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

gesucht $z = w^{100}$

$|w| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+1} = 1$

$\frac{\pi}{4}$ ist der Polarwinkel von w $\Bigg\} \Rightarrow$ 2

$$w = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow z = w^{100} = \cos\frac{100}{4}\pi + i\sin\frac{100}{4}\pi$$

$$= \cos 25\pi + i\sin 25\pi$$ 2

$$= \cos\pi + i\sin\pi$$

$\Rightarrow z = -1$ 2

Auch: $|w| = 1$, $\frac{\pi}{4}$ = Polarwinkel von w

$\Rightarrow z = w^{100}$ hat $|z| = |w|^{100} = 1$ und

Polarwinkel $\frac{100}{4}\pi = 25\pi \to \pi$

$\Rightarrow$ ....

2. Aufgabe

$$z^2+2z+2=0 \iff z=\frac{1}{2}\left(-2\pm\sqrt{4-8}\right)=-1\pm i \qquad (2)$$

$$\Rightarrow R(z)=\frac{3z^2+2z}{(z-1)(z+1+i)(z+1-i)}$$

PBZ-Ansatz:

$$R(z)=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1+i}+\frac{C}{z+1-i} \qquad (3)$$

$$\iff 3z^2+2z=A(z+1+i)(z+1-i)$$
$$+B(z-1)(z+1-i)+C(z-1)(z+1+i)$$

$z=1$: $\quad 5=A(2+i)(2-i)=A\cdot 5 \Rightarrow \underline{A=1}$

$z=-1-i$: $\quad 3(1+i)^2-2(1+i)=B(-2-i)(-2i)$

$$\Rightarrow 6i-2-2i=B(-2+4i)$$
$$\Rightarrow -2+4i=B(-2+4i) \Rightarrow \underline{B=1}$$

Allgemein – da $R(z)$ nur reelle Koeff. – gilt:

$B=\bar{C} \Rightarrow \underline{C=1}$

oder

z^2: $\quad 3=A+B+C=2+C \Rightarrow \underline{C=1}$

oder $z=-1+i$, ...

(4)

PBZ lautet:

$$R(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1+i}+\frac{1}{z+1-i} \qquad (1)$$

Alternativ: reelle PBZ: x^2+2x+2 keine reelle N.S. $\quad R(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$ (1)

$$R(x)=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2} \qquad (4)$$

$$3x^2+2x=A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x-1)$$

$x=1$: $\quad 5=5A \Rightarrow A=1.$

x^2: $\quad 3=A+B \Rightarrow 3=1+B \Rightarrow B=2$

x: $\quad 2=2A-B+C \Rightarrow 2=2-2+C \Rightarrow C=2$

(5)

3. Aufg

1. Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k z^k$: Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{(k+1)\, z^{k+1}}{k\, z^k}\right| = \frac{k+1}{k}\,|z| \xrightarrow[k\to\infty]{} |z| < 1$$ 2

$\Rightarrow$ absolute Konvergenz der Reihe.

$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist für $|z|<1$ die absolut konvergente geom. Reihe (Vorl.) 1

2.
$$c_k = \sum_{j=0}^{k} j z^j\, z^{k-j} = z^k \sum_{j=0}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2} z^k$$
2 1 1

3. Nach Vorlesung ist das Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen wieder absolut konvergent. 2

4.
$$\sum_{k=0}^{\infty} k z^k \underset{\substack{\uparrow \\ k=0,\ 0\cdot z^0 = 0}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k z^k = z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} =$$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = \frac{z}{(1-z)^2} \quad \text{(Vorgabe)}$$ 2

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} k z^k\right)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)}_{=\frac{1}{1-z}} = \frac{z}{(1-z)^3}$$ 2

Bzw.:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} z^k = \frac{z}{(1-z)^3}$$

4. Aufgabe

1. Für $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y}\right| = \frac{|x-y|}{\underbrace{(1+x)}_{\geq \frac{3}{2}}\underbrace{(1+y)}_{\geq \frac{3}{2}}} \leq \frac{4}{9}|x-y| \quad (3)$$

$x, y \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Beh.

2. Für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt:

$$\frac{3}{2} \leq 1 + x \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f(x) \in [\frac{1}{2}, 1] \quad (3)$$

Folglich: $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

3. $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = x \Leftrightarrow x^2 + x = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4})$

$\underset{x \geq \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, falls $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \in [\frac{1}{2}, 1]$. (2)

$2 \leq \sqrt{5} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{5} - 1 \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt{5} - 1 \leq 1$ (1)

$\tilde{x} := \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ ist also der einzige Fixpunkt von f.

4. f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = \frac{4}{9} < 1$, $[\frac{1}{2}, 1]$ kompakt, $f([\frac{1}{2}, 1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Damit sind alle Voraussetzungen von A. 113 erfüllt (2)

Nach A 113 gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \underset{\text{Nr. 3}}{=} \tilde{x} := \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (1)

(Fixpunkt von f).

5. $|x_n - \tilde{x}| \overset{n \geq 1}{=} |f(x_{n-1}) - f(\tilde{x})| \leq \frac{4}{9}|\tilde{x}_{n-1} - \tilde{x}| \leq$

$\leq \ldots \underset{n\text{-mal}}{\leq} \left(\frac{4}{9}\right)^n \underbrace{|x_0 - \tilde{x}|}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}\right)^n$. $n = 0$ klar (3)