Klausur in Experimentalphysik 3
Lösung

Prof. Dr. S. Schönert
Wintersemester 2017/18
19. Februar 2018

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe A (10 Punkte)

(a) Was ist die mikroskopische Ursache für die Dispersion von Licht in Materie?

(b) Nenne zwei verschiedene Abbildungsfehler.(Linsenfehler)

(c) Welchen Zusammenhang gibt es zwischen einer beliebig geformten Blende und ihrem Beugungsbild im Fernfeld?

(d) Wie lassen sich Effekte wie Beugung und Interferenz im Teilchenmodell beschreiben?

(e) Welchen Einfluss hat die Expansion unseres Universums auf elektromagnetische Strahlung?

(f) Warum entlädt sich ein negativ geladener Gegenstand, wenn man Licht (mit genügend hoher Energie) auf ihn strahlt, aber nicht ein positiv geladener?

(g) Welche Ruhemasse hat ein Photon?

(h) Ein Gegenstand steht zwischen dem Brennpunkt und der Mitte einer Sammellinse. Was kann man über das Bild sagen?

(i) Warum funktioniert kein 2-Niveau-Laser?

(j) Welche physikalische Erscheinung tritt bei pointillistischen Gemälden auf?

Lösung

(a) Die einfallende elektromagnetische Welle regt im Medium die Atomelektronen zu Schwingungen an. Die dadurch ausgestrahlten Sekundärwellen überlagern sich mit der Primärwelle. Aufgrund deren Phasenverschiebung resultiert eine kleinere Geschwindigkeit $c' = c/n$ (Dispersion).

[**1**]

(b) chromatische Aberration, sphärische Aberration, Astigmatismus, Koma, Bildfeldwölbung

[**1**]

(c) Das Beugungsbild im Fernfeld ist proportional zum Quadrat der Fouriertransformation der Blende.

[**1**]

(d) Die Feldstärke wird als Wahrscheinlichkeitsamplitude interpretiert, so dass das Quadrat eine Wahrscheinlichkeitsdichte repräsentiert.

[**1**]

(e) Dies führt zu einer Rotverschiebung der Strahlung.

[**1**]

(f) Der Photoeffekt kann nur Elektronen (negativ) aus dem Gegenstand lösen. Deshalb entlädt sich ein negativ geladener Gegenstand, aber nicht ein positiv geladener.

[**1**]

(g) Photonen haben Ruhemasse 0, es gibt also keine ruhenden Photonen.

[**1**]

(h) Virtuell, aufrecht und vergrößert.

[**1**]

(i) Es bildet sich ein Gleichgewicht zwischen Elektronen auf dem angeregten und dem Grundzustand. Somit kann keine Ladungsinversion erreicht werden.

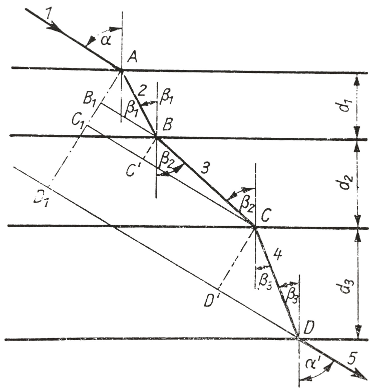
[**1**]

(j) Pointilllistische Gemälde bestehen aus Punkten reiner Farbe, wobei diese Farben ab einem bestimmten Abstand zum Gemälde im Auge des Betrachters nicht mehr auflösbar sind, sie vermischen sich.Grund ist das beugungslimitierte Auflösungsvermögen des Auges.

[**1**]

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein Lichtstrahl, der sich zunächst in Luft ausbreitet, durchdringt nacheinander drei unterschiedlich brechende Substanzen. Diese sind durch parallele, ebene Begrenzungsflächen voneinander getrennt. Nach dem Durchdringen dieser Stoffe tritt der Lichtstrahl erneut in Luft ein. Es ist nachzuweisen, dass der in die Luft austretende Strahl nach mehrfacher Brechung gegenüber dem einfallenden Strahl nur parallel verschoben ist. Bestimmen sie den Betrag dieser Parallelverschiebung (siehe Abbildung).
Die Brechzahlen der einzelnen Medien sind $n_1 = 1,5$, $n_2 = 1,3$, $n_3 = 1,4$, die Dicken der aufeinanderfolgenden planparallelen Schichten sind $d_1 = 2$ cm, $d_2 = 3$ cm, $d_3 = 4$ cm. Der Primärstrahl fällt auf die oberste Fläche unter dem Winkel $\alpha = 60°$ ein.



Lösung

Nach der Abbildung gilt für die erste Brechung

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{n_1}{n_0}, \tag{1}$$

wobei n_0 die Brechzahl der Luft ist.

[1]

Auf das zweite Medium fällt der Strahl unter dem Winkel β_1 ein, hier wird er unter dem Winkel β_2 gebrochen. Das Brechungsgesetz lautet hierbei

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{2}$$

Analog gilt für die Brechung im dritten Medium

$$\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_3} = \frac{n_3}{n_2}. \tag{3}$$

Wenn wir voraussetzen, dass der Strahl unter einem Winkel α' in die Luft austritt, dann gilt das Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha'} = \frac{n_0}{n_3}. \tag{4}$$

Wir multiplizieren die Gleichungen (1) bis (4) miteinander und erhalten nach Umformung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = 1,$$

[2]

was bedeutet, dass $\alpha = \alpha'$ ist. Der Lichtstrahl tritt nach mehrmaliger Brechung nur parallelverschoben aus.

Aus den Gleichungen (1) bis (3) ermitteln wir durch Einsetzen der für die Brechzahlen angegebenen Werte ohne weitere Mühe der zugehörigen Winkel

$$\beta_1 = 35^\circ\ 16', \quad \beta_2 = 41^\circ\ 46', \quad \beta_3 = 38^\circ 13'.$$

[**1**]

Die Gesamtverschiebung x des austretenden Strahls (Nr. 5) gegenüber dem einfallenden Strahl (Nr. 1) beträgt nach der Abbildung

$$x = \overline{AD_1} = \overline{AB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1}. \tag{5}$$

Jedoch ist

$$\begin{aligned}
\overline{AB_1} &= \overline{AB}\sin(\alpha - \beta_1) \text{ mit } \overline{AB} = \frac{d_1}{\cos\beta_1}, \\
\overline{B_1C_1} = \overline{BC'} &= \overline{BC}\sin(\alpha - \beta_2) \text{ mit } \overline{BC} = \frac{d_2}{\cos\beta_2}, \\
\overline{C_1D_1} = \overline{CD'} &= \overline{CD}\sin(\alpha - \beta_3) \text{ mit } \overline{CD} = \frac{d_3}{\cos\beta_3}.
\end{aligned}$$

[**2**]

Nach Einsetzen dieser Beziehungen in Gleichung (5) erhalten wir

$$x = \frac{d_1\sin(\alpha - \beta_1)}{\cos\beta_1} + \frac{d_2\sin(\alpha - \beta_2)}{\cos\beta_2} + \frac{d_3\sin(\alpha - \beta_3)}{\cos\beta_3}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich für die Verschiebung

$$x = 4,18 \text{ cm}.$$

[**1**]

Aufgabe 2 (14 Punkte)

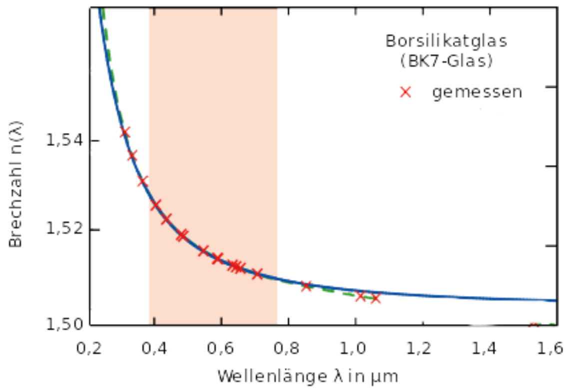
Unpolarisiertes Licht der Wellenlängen $\lambda_1 = 700$ nm und $\lambda_2 = 405$ nm fällt auf eine Borsilikatglasplatte.

(a) Wie groß ist der Reflexionsgrad ρ der Platte bei senkrechtem Einfall des Lichts für beide Wellenlängen?

(b) Bei welchen Einfallswinkeln ϑ_{lp} ist das reflektierte Licht der beiden Wellenlängen vollständig linear polarisiert und in welche Richtung ist es polarisiert? Erklären Sie kurz den zugrundeliegenden Effekt und zeichnen Sie eine Skizze.

(c) Betrachten Sie nun den umgekehrten Strahlengang (Kronglas $\rightarrow$ Luft). Bei welchen Einfallswinkeln ist das an der Grenzfläche Kronglas-Luft ins Glas zurück reflektierte Licht vollständig linear polarisiert? Wie groß sind hier die Grenzwinkel der Totalreflexion?

(d) Welche Werte haben in allen Fällen die Brechungswinkel ϑ?



Lösung

(a) Man erhält:

$$\rho = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 .$$

[1]

$\lambda_1 = 700$ nm liegt im Roten und besitzt daher den Brechungsindex $n = 1,5076$. Die andere Wellenlänge liegt im Violetten mit $n = 1,5236$. Man erhält als Lösung

$$\rho_{rot} \approx 4,1\ \% \quad \text{und} \quad \rho_{violett} \approx 4,3\ \%.$$

[1]

(b) Das reflektierte Licht ist vollständig linear polarisiert, wenn gebrochener und reflektierter Strahl aufeinander senkrecht stehen. Da die in Schwingung versetzten Atome wie Hetzsche Dipole abstrahlen und paralell zu ihrer Schwingungsachse nicht abstrahlen. Das Licht ist Senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Hier brauchen wir das Brewstersche Gesetz:

[2]

$$\tan \vartheta_{lp} = \frac{n_2}{n_1} = n.$$

[1]

Man erhält sofort

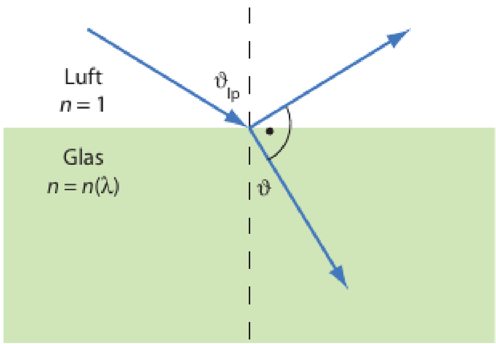
$$\vartheta_{lp,rot} \approx 56,44^\circ \quad \text{und} \quad \vartheta_{lp,violett} \approx 56,72^\circ.$$

[1]

[1]

(c) Hier ist $\tan \vartheta_{lp} = \frac{1}{n}$. Im roten Bereich ergibt sich $\vartheta_{lp,rot} \approx 33,56^\circ$ und im Violetten $\vartheta_{lp,violett} \approx 33,28^\circ$. Der Grenzwinkel der Totalreflexion ist gegeben als

[2]



$$\sin\vartheta_{gr} = \frac{1}{n}.$$

[**1**]

Damit ergibt sich

$$\vartheta_{gr,rot} \approx 41,55^\circ \quad \text{und} \quad \vartheta_{gr,violett} \approx 41,02^\circ.$$

[**1**]

(d) Der Brechungswinkel ϑ muss mit ϑ_{lp} addiert 90° ergeben. Also ist

$$\vartheta = 90^\circ - \vartheta_{lp}.$$

[**1**]

Damit ergeben sich folgende Winkel:

	ϑ_{rot}	$\vartheta_{violett}$
(b) in °	33,56	33,28
(c) in °	56,44	56,72

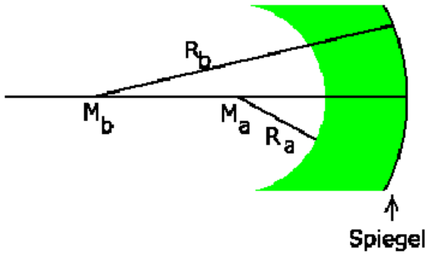
[**2**]

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Die nachfolgende Skizze zeigt eine Spiegellinse, bei der die äußere Grenzfläche verspiegelt ist. Die Krümmungsradien der sphärischen Grenzflächen seien R_a und R_b, das Linsenmaterial habe den Brechungsindex n. Die gesamte Linse befindet sich in Luft mit dem Brechungsindex $n_0 = 1$. Nehmen Sie nachfolgend an, dass der Abstand d der beiden Grenzflächen vernachlässigbar klein ist (Näherung für dünne Linsen.)

(a) Berechnen Sie die Brechkraft dieser Spiegellinse in paraxialer Näherung mit Hilfe der Matrixmethode.

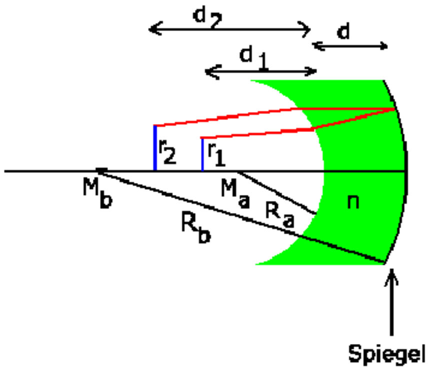
Hinweis: Nutzen Sie die Brechungsmatrix an einer Kreisfläche $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}$ und die Spiegelmatrix an einer Kreisfläche: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{pmatrix}$ für den Komponentenvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}$



(b) Eine Lichtquelle befinde sich im Mittelpunkt M_a der inneren Kugelschale. Wie müssen Sie das Verhältnis $\frac{R_b}{R_a}$ wählen, damit die von der Linse eingefangenen Lichtstrahlen das System parallel zur optischen Achse verlassen (mit Matrixmethode)?

Lösung

Wir zeichnen den Strahlengang eines beliebigen Lichtstrahls durch die Linse:



Die Transformationsregel lautet:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

[1]

Mit M der Linsenmatrix,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(1-n)}{|R_a|} & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{-|R_b|} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-(n-1)}{-n|R_a|} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Da nach Aufgabenstellung $d = 0$ gesetzt werden sollte, werden die beiden Translationsmatrizen zu den Einheitsmatrizen, können also weggelassen werden.

[2]

Wir diskutieren die verbleibenden Matizen noch einmal von links nach rechts.

Die erste Matrix auf der rechten Seite beschreibt die Brechung des einfallenden Strahls. Hier ist R_a negativ zu wählen, da dem Lichtstrahl die Fläche konkav erscheint. Außerdem ist $n_1 = 1$ und $n_2 = n$.

Die mittlere Matrix beschreibt die Reflexion am Spiegel. Hier ist R_b negativ, da der Strahl die Fläche konkav sieht.

Nach der Reflexion kehrt der Strahl zurück zur Begrenzungsfläche zwischen Glas und Luft. Hier ist jetzt aber R_a positiv einzusetzen, da der Strahl die Begrenzungsfläche konvex sieht. Außerdem ist $n_2 = 1$ und $n_1 = n$.

In der obigen Formel haben wir die Vorzeichen bereits explizit angeschrieben, sodass in den weiteren Rechnungen $R_a = |R_a|$ und $R_b = |R_b|$ positiv sind.

Mit den Abkürzungen

$$D_a = \frac{n-1}{R_a} \quad \text{und} \quad D_b = \frac{2}{R_b}$$

können wir die Linsenmatrix schreiben als

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_a & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -D_b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{D_a}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2D_a - nD_b & 1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente der Matrix M sind also

$$M_{11} = 1 \quad M_{12} = 0 \quad M_{21} = 2D_a - nD_b \quad M_{22} = 1.$$

[2]

Die weitere Auswertung der Transformation liefert

$$\begin{aligned} r_2 &= [1 + (2D_a - nD_b)d_2]\, r_1 + [d_1 + d_2 + (2D_a - nD_b)d_1 d_2]\, \alpha_1 \\ \alpha_2 &= [2D_a - nD_b]\, r_1 + [1 + (2D_a - nD_b)d_1)]\, \alpha_1 \end{aligned}$$

[2]

(a) Achsenparallele Strahlen ($\alpha_1 = 0$) schneiden nach der Brechung ($r_2 = 0$) die optische Achse im Abstand $f = d_2$ von der Linse, wobei f die Brennweite ist. Daher folgt aus der Transformationsformel

$$0 = [1 + (2D_a - nD_b)f]\, r_1 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{f} = nD_b - 2D_a$$

oder nach Einsetzen der Abkürzungen:

$$D = \frac{2n}{R_b} - \frac{2(n-1)}{R_a}$$

[4]

(b) Eine Lichtquelle im Punkt M_a auf der optischen Achse hat den Abstand $d_1 = R_a$ von der Lichtbegrenzung. Außerdem ist $r_1 = 0$. Alle Strahlen von diesem Punkt sollen nach Brechung und Reflektion die Steigung $\alpha_2 = 0$ haben. Wir setzen dies in die zweite Transformationsformel ein und erhalten

$$0 = [1 + (2D_a - nD_b)R_a]\,\alpha_1.$$

Einsetzen der Ausdrücke für D_a und D_b ergibt

$$\left(\frac{2(n-1)}{R_a} - \frac{2n}{R_b}\right) R_a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \frac{R_b}{R_a} = \frac{2n}{2n-1}$$

[**3**]

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Mit einem Teleskop werden zwei Objekte in 10 km Entfernung beobachtet, die 0,12 m voneinander entfernt sind und werden von Licht der Wellenlänge 600 nm beleuchtet. Bestimmen Sie den Durchmesser der Objektivlinse des Teleskops, sodass es die beiden Objekte gerade noch auflösen kann.

Lösung

Das Rayleigh-Kriterium für die Winkelauflösung $\Delta\theta$ einer kreisförmigen Öffnung mit dem Durchmesser $D \gg \lambda$ lautet

$$\Delta\theta = 1,22\frac{\lambda}{D}.$$

Für zwei Objekte im Abstand z, die voneinander den Abstand s (mit $s \ll z$)gilt:

$$\Delta\theta = \frac{s}{z}.$$

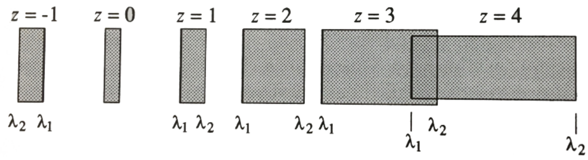
Daraus folgt

$$D = 1,22\frac{\lambda z}{s} = 6 \text{ cm}.$$

[**3**]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ab einer bestimmten Beugungsordnung z können sich die von einem Beugungsgitter erzeugten Spektren aufeinanderfolgender Beugungsordnung teilweise überlappen (im Bild die Beugungsspektren der 3. und 4. Ordnung). Von welcher Ordnung z an überlappen sich die Spektren des sichtbaren Lichts zwischen $\lambda_V = 400$ nm (violett) und $\lambda_R = 780$ nm (rot) ?



Lösung

Soll das Beugungsspektrum von λ_V bis λ_R überlappungsfrei sein, so muss für die zugehörigen Beugungswinkel α gelten:

$$\alpha_{R(z)} < \alpha_{V(z+1)}$$

bzw. wegen

$$\sin \alpha_{R(z)} = \frac{z\lambda_R}{a} \quad \text{und} \quad \sin \alpha_{V(z+1)} = \frac{(z+1)\lambda_V}{a}$$

[**2**]

folgt

$$z\lambda_R < (z+1)\lambda_V \quad \text{oder} \quad \frac{z+1}{z} > \frac{\lambda_R}{\lambda_V} = 1,95.$$

Für $z = 1$ ist diese Bedingung erfüllt, für $z = 2$ schon nicht mehr (Überlappung.)

[**2**]

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Eine rotierende, runde Raumstation des Radius $R = 1$km soll im Sirius-System errichtet werden. Sie soll in der Nähe eines erdgroßen Diamant-Planeten ($R_{Planet} = 6000$km) errichtet werden. Sirius ist viel größer ($R_{Sirius} = 1 \cdot 10^9$m) und heißer als die Sonne ($T_S = 10000°$K) und hat einen kleinen Abstand $D_{Planet-Sirius} = 3,47 \cdot 10^9$m von Sirius Mittelpunkt zum Planeten.

(a) Welche Temperatur hätte die Raumstation, wenn sie so beschichtet ist, dass sie 30% aller einfallenden Strahlung reflektiert?

(b) Wo läge das Maximum der abgestrahlten Strahlung der Raumstation?

Das ist natürlich zu heiß. Deshalb soll die Raumstation im Schatten hinter dem Planeten gebaut werden, der auf Grund seiner Rotation eine konstante Oberflächentemperatur hat. Dort bekommt die Station keine Strahlung von Sirius ab.

(c) In welchem Abstand hinter dem Planeten muss die (beschichtete) Raumstation gebaut werden, um eine Temperatur von $T_{Station} = 20°$ C zu halten?

Lösung

(a) Die Leistung von Sirius ist

$$P_{Sirius} = \sigma A T_S^4. \tag{6}$$

[1]

Die Station bekommt davon jedoch nur einen Bruchteil ab, der sich aus dem Verhältnis des Raumwinkels ergibt (oder der Fläche der ganzen Siriusstrahlung gegenüber der Station), also

$$P_{St-auf} = 0,7 \cdot \sigma 4\pi R_{Sirius}^2 T_S^4 \frac{\pi R_{Station}^2}{4\pi D_{Planet-Sirius}^2}, \tag{7}$$

[1]

Die Station strahlt die Leistung

$$P_{St-ab} = \sigma 4\pi R_{Station}^2 T_{Station}^4 \tag{8}$$

[1]

ab. Deshalb muss im Strahlungsgleichgewicht gelten:

$$P_{St-auf} = P_{St-ab} \quad \Rightarrow \quad T_{Station} = T_{Sirius}\sqrt{\frac{\sqrt{0,7} \cdot R_{Sirius}}{2D_{Planet-Sirius}}} = 3472°\mathrm{K} \tag{9}$$

[1]

Das ist wohl ein wenig warm.

(b) Das Maximum der Abstrahlung liegt bei

$$\lambda_{\max} = \frac{2897{,}8\,\mu\mathrm{m\ K}}{T_{Station}} = 835\mathrm{nm}$$

Von der Farbtemperatur her würde die Station rot-gelb glühen.

[2]

(c) Sirius heizt den Planeten auf. Der Planet wiederum strahlt ab und heizt die Raumstation. Wir bestimmen zuerst die Temperatur des Planeten.

$$\sigma 4\pi R_{Sirius}^2 T_{Sirius}^4 \frac{\pi R_{Planet}^2}{4\pi D_{Planet-Sirius}^2} = \sigma 4\pi R_{Planet}^2 T_{Planet}^4 \tag{10}$$

$$\Rightarrow T_{Planet} = T_{Sirius}\sqrt{\frac{R_{Sirius}}{2D_{Planet-Sirius}}} = 3795°\mathrm{K} \tag{11}$$

[1]

Es war zu vermuten, dass sich eine ähnliche Temperatur wie für die Station einstellt. Daraus bestimmen wir jetzt die Entfernung die die Raumstation von dem 3795°K heißen Planeten haben muss. Im Strahlungsgleichgewicht muss wieder gelten:

$$0,7 \cdot P_{St-auf} = P_{St-ab} \tag{12}$$

$$0,7 \cdot \sigma 4\pi R_{Planet}^2 T_{Planet}^4 \frac{\pi R_{Station}^2}{4\pi R_{Station-Planet}^2} = \sigma 4\pi R_{Station}^2 T_{Station}^4 \tag{13}$$

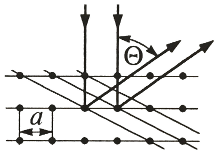
$$\Rightarrow R_{Station-Planet} = \frac{\sqrt{0,7} \cdot T_{Planet}^2 R_{Planet}}{2T_{Station}^2} = 4,2 \cdot 10^8\mathrm{m} \tag{14}$$

[2]

Damit muss die Raumstation ungefähr den Abstande Erde-Mond vom Planeten haben.

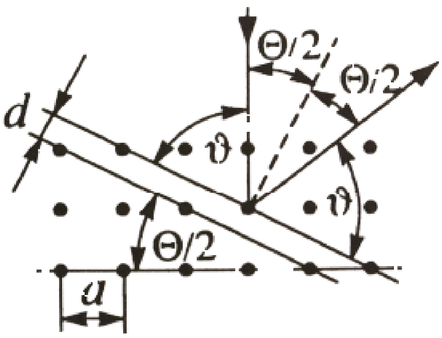
Aufgabe 7 (8 Punkte)

(a) Zur Messung der De-Broglie-Wellenlänge von Elektronen werden diese senkrecht auf eine kristallographisch ausgezeichnete Oberfläche eines Nickeleinkristalls gestrahlt. Bei einem Streuwinkel von $\Theta = 50^\circ$ wird die erste Braggsche Reflexion beobachtet. Wie groß ist die Wellenlänge der Elektronen, wenn der angegebene Abstand der Nickelatome $a = 2,16 \cdot 10^{-10}$ m beträgt?



(b) Welche Geschwindigkeit hat ein Elektron, dessen De-Broglie-Wellenlänge gleich seiner Compton-Wellenlänge ist?

Lösung



(a) Für den Netzebenenabstand d und den Bragg-Winkel ϑ der sich in Reflexionsstellung befindlichen Netzebenenschar gelten die geometrischen Beziehungen $d = a \sin \frac{\Theta}{2}$, $\sin \vartheta = \cos \frac{\Theta}{2}$, sodass die Braggsche Reflexionsbedingung

$$2d \sin \vartheta = z\lambda$$

[3]

die Form

$$2a \sin \frac{\Theta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} = a \sin \Theta = z\lambda$$

[1]

erhält. Für $z = 1$ (1. Reflexionsordnung) folgt somit für die Wellenlänge der Elektronen

$$\lambda = a \sin \Theta = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

[1]

(b) Mit

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{m_e v}$$

und

[**1**]

$$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$$

folgt

$$\lambda = \lambda_C$$
$$\Rightarrow v = \frac{c}{\sqrt{2}} = 2,12 \cdot 10^8 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[**2**]

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Die quantenmechanische Wellenfunktion eines Teilchens sei gegeben durch

$$\psi(x) = N e^{-|x|/a} \tag{15}$$

(a) Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N.Warum ist die normierte Wellenfunktion notwendig für die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik? Welche Einheit hat die Wellenfunktion?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen exakt am Ort $x = 0$ zu finden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[0, a]$ zu finden?

Lösung:

(a) Damit die Wellenfunktion

$$\psi(x) = N e^{-|x|/a} \tag{16}$$

normiert ist, muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\psi(x)|^2 = |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-2|x|/a} = 2\,|N|^2 \int_0^{\infty} dx e^{-2x/a} = \tag{17}$$

$$2\,|N|^2 \left(-\frac{a}{2}\right) \left[e^{-2x/a}\right]_0^{\infty} = |N|^2 \, a \stackrel{!}{=} 1 \tag{18}$$

[**2**]

also (bis auf einen konstanten Phasenfaktor):

$$N = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{19}$$

Die normierte Wellenfunktion lautet also:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-|x|/a} \tag{20}$$

[**1**]

Nur wenn die Wellenfunktion normiert ist, lässt sich $|\psi(x)|^2$ als Wahrscheinlichkeitsdichte deuten, da das Integral einer Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte über die gesamte reelle Achse 1 ergeben muss.

[**1**]

Das Quadrat von ψ ist eine 1-dimensionale Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte, hat also die Dimension 1/m. Daher hat ψ selbst die Dimension $1/\sqrt{m}$.

[**1**]

(b) Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen exakt an einem Ort zu finden, ist null. Das ist immer bei kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen so. $|\psi(0)|^2$ ist jedenfalls nicht die richtige Antwort, denn das ist ja schon von der Einheit her keine Wahrscheinlichkeit.

[**1**]

Für das Intervall $[0, a]$ muss man das entsprechende Integral berechnen:

$$w = \int_0^a dx \left| \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-|x|/a} \right|^2 = \frac{1}{a} \int_0^a dx e^{-2x/a} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2}) = 0.432... \tag{21}$$

[**2**]

unabhängig von a.

Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \mathrm{CV^{-1}m^{-1}}$
Elementarladung:	$e = 1.60 \cdot 10^{-19} \mathrm{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \mathrm{Js}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{ms^{-1}}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \mathrm{kg}$
Stefan Boltzmann Konstante:	$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$
Wiensche Verschiebungskonstante:	$b = 2,9 \cdot 10^{-3} \mathrm{mK}$