Name, Vorname:________________________

Matrikel:________________________

Übungsgruppe:________________________

Geburtsort und -datum:________________________

---

1. Klausur zur Vorlesung

Theoretische Physik III A: Elektrodynamik

H.W. Grießhammer und P. Ring WS 02/03
12. Dezember 2002 Zeit: 90 Minuten

Auf jedem Blatt muß der *eigene Name* und die *Matrikelnummer* stehen.

Lesbar schreiben freut die Korrektoren!

Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben. Es sind insgesamt 50 Punkte erreichbar.

Hilfmittel: Keine. Interessante **mathematische Formeln auf der Rückseite dieses Blattes**.

Hinweise: Die meisten Teilaufgaben sind bearbeitbar, ohne daß die Ergebnisse aller vorhergehenden Teilaufgaben bekannt sind.
Dokumentieren Sie die Herleitung Ihrer Ergebnisse. Wenn Sie Überlegungen anstellen, die eine Rechnung vereinfachen oder ersparen, dann beschreiben Sie diese *in Stichworten*.

Aufgabe	(max. Punkte)	Erreichte Punkte
1a	(2)	
1b	(2)	
1c	(1)	
2a	(3)	
2b	(2)	
3a	(2)	
3b	(2)	
3c	(4)	
3d	(2)	
4a	(2)	
4b	(2)	
4c	(4)	
4d	(2)	
4e	(2)	
4f	(2)	
4g	(3)	
5a	(2)	
5b	(7)	
5c	(2)	
5d	(2)	
$\sum$	(50)	

Interessante mathematische Formeln

$$Y_{00}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \tag{1}$$

$$Y_{10}(\Omega) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta \qquad Y_{1\pm1}(\Omega) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \tag{2}$$

$$Y_{20}(\Omega) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1) \qquad Y_{20}(\Omega) = Y_{20}^*(\Omega) \tag{3}$$

$$Y_{2\pm1}(\Omega) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\cos\theta\,\sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi} \qquad Y_{2\pm2}(\Omega) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\,\mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\varphi} \tag{4}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}}\,r \begin{pmatrix} Y_{1-1}(\Omega) - Y_{11}(\Omega) \\ \mathrm{i}[Y_{11}(\Omega) + Y_{1-1}(\Omega)] \\ \sqrt{2}\,Y_{10}(\Omega) \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int d^3r\,\rho(\vec{r})\,r^l\,Y_{lm}(\Omega) \tag{6}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}\,P_l(\cos\alpha) \tag{7}$$

$$P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\Omega)\,Y_{lm}(\Omega') \tag{8}$$

$$P_0(x) = 1 \qquad P_1(x) = x \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1) \tag{9}$$

$$\vec{\mathrm{e}}_z \times \vec{\mathrm{e}}_r = \sin\vartheta\,\vec{\mathrm{e}}_\varphi \tag{10}$$

$$\int\limits_{-A}^{A} dx\,\frac{1}{\sqrt{x^2+b^2}} = \ln[A + \sqrt{b^2+A^2}] - \ln[A - \sqrt{b^2+A^2}] \tag{11}$$

$$\int\limits_{-A}^{A} dx\,\frac{1}{x^2+b^2} = \frac{2}{b}\,\arctan\frac{A}{b} \tag{12}$$

$$\int\limits_{-A}^{A} dx\,\frac{1}{(x^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2A}{b^2\sqrt{b^2+A^2}} \tag{13}$$

δ-Distribution in Kugelkoordinaten: $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2}\,\delta(r - r_0)\,\delta(\cos\theta - \cos\theta_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)$ (14)

$$1 + 1 = 2 \times 2 - \sqrt{4} \tag{15}$$

Name, Vorname:________________________

Matrikel:________________________

---

1. Grundlagen (**5P**):

   a) (**2P**) Stellen Sie sich vor, Sie haben in Ihrem Notizbuch einige Vektorfelder zu statischen Problemen in kartesischen Koordinaten notiert, leider aber vergessen, ob dies elektrische oder magnetische Felder waren. Was für Felder sind dann:

$$(i)\;\; \vec{N}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad , \qquad (ii)\;\; \vec{Q}(\vec{r}) = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \alpha \neq 0 \;\; .$$

   b) (**2P**) Zeigen Sie, daß

$$G(x, x') = \frac{1}{2}\,|x - x'|$$

   die Greensfunktion der *ein*dimensionalen Poissongleichung ohne Randbedingungen im Endlichen ist.

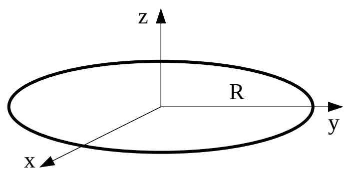
   c) (**1P**) Berechnen Sie mittels des Ergebnisses aus b) das elektrische Feld einer homogenen Flächenladungsdichte σ, die auf der gesamten yz-Ebene verteilt ist.

2. Elektrisches Feld der geladenen Hohlkugel (**5P**): Eine leitende, homogene Hohlkugel mit Radius R und Gesamtladung Q hat ihren Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

   a) (**3P**) Geben Sie das elektrische Feld im Innen- und Außenraum an. Eine Rechnung ist nicht notwendig, aber begründen Sie Ihr Ergebnis kurz (Stichworte!).

   b) (**2P**) Berechnen Sie die gesamte im elektrischen Feld gespeicherte Energie.

3. Multipolmomente (**10P**): Ein unendlich dünner, leitender Kreisring vom Radius R trägt die homogene Linienladungsdichte μ. Er liegt vollständig in der xy-Ebene, und sein Mittelpunkt fällt mit dem Koordinatenursprung zusammen, siehe Abbildung.



   Hinweise: Alle Multipolmomente sind bezüglich des Koordinatenursprungs zu berechnen. Falls Multipolmomente verschwinden, kann ein Argument (Stichwort!) die Rechnung ersetzen.

   a) (**2P**) Bestimmen Sie das sphärische Monopolmoment.

   b) (**2P**) Bestimmen Sie die sphärischen Dipolmomente.

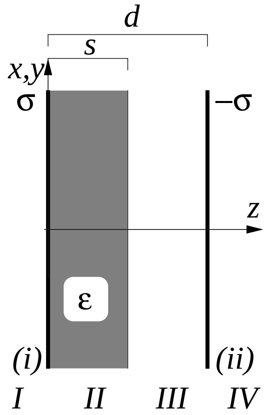
   c) (**4P**) Bestimmen Sie die sphärischen Quadrupolmomente.

   d) (**2P**) Geben Sie das Potential für große Abstände $r \gg R$ an, wobei Momente höher als $l = 2$ vernachlässigbar sind.

   Hinweis: Falsche numerische Vorfaktoren der Terme zu den Dipol- und Quadrupolmomenten in Teilaufgabe d) bleiben ohne Punktabzug.

Fortsetzung nächste Seite

4. Teilgefüllter Plattenkondensator (**17P**): Zwei entgegengesetzt geladene, unendlich ausgedehnte und infinitesimal dünne Leiterplatten sind parallel zueinander im Abstand d angeordnet. Die linke Platte ist identisch mit der xy-Ebene und trägt die Flächenladungsdichte $\sigma_1 = \sigma > 0$. Wie in der Abbildung zu sehen, ist sie homogen so bedampft, daß sich im Raum II zwischen den Platten ein Dielektrikum $\varepsilon > 1$ der Dicke s befindet. Der andere Teil des Kondensators, III, ist evakuiert, ebenso wie die Außenräume I und IV links bzw. rechts des Kondensators.



Hinweis: Die Teilaufgaben d), e), f) und g) können jeweils unabhängig voneinander gelöst werden.

a) (**2P**) Welchen Randbedingungen müssen elektrisches Feld und dielektrische Verschiebung jeweils an jeder der Leiterplatten genügen?

b) (**2P**) Welchen Randbedingungen müssen die Tangential- und Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung an der Grenzfläche II/III genügen? Wie bezeichnet man die daraus folgenden Randbedingungen für die elektrostatischen Potentiale?

c) (**4P**) Berechnen Sie das elektrische Feld und die dielektrische Verschiebung *zwischen und außerhalb* der Platten. Feldskizze für $\vec{D}$ und $\vec{E}$!

d) (**2P**) Berechnen Sie die Oberflächendichte der Polarisationsladungen auf der Grenzfläche.

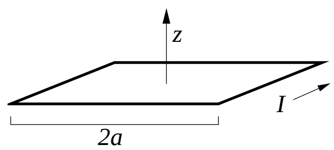
e) (**2P**) Berechnen Sie die Feldenergie pro Flächeneinheit der Kondensatorplatten. Das Ergebnis hat die Form [*verwendbar im Folgenden, wenn Sie e) nicht gelöst haben*]

$$u = \alpha\,\sigma^2\,[d + s\,f(\varepsilon)] \quad \text{wobei } \alpha > 0 \text{ eine Konstante, } f(\varepsilon) < 0 \text{ für } \varepsilon > 1.$$

f) (**2P**) Bestimmen Sie, in welche Richtung der auf die Grenzfläche ausgeübte elektrostatische Druck (Kraft pro Oberflächeneinheit) wirkt.

g) (**3P**) Geben Sie das elektrostatische Potential Φ an und skizzieren Sie es. Dabei sei $\Phi = 0$ auf der linken Platte.

5. Magnetfeld des stromdurchflossenen Quadrats (**13P**): Durch einen quadratischen Leiter mit unendlich dünnem Querschnitt und Seitenlänge $2a$ fließt der Strom I im mathematisch positiven Sinn. Das Quadrat liegt in der xy-Ebene, sein Mittelpunkt im Koordinatenursprung, siehe Abbildung.



Hinweis: Teilaufgaben b), c) und d) können unabhängig voneinander gelöst werden.

a) (**2P**) Geben Sie die Stromdichte $\vec{j}(\vec{x})$ an.

b) (**7P**) Bestimmen Sie Stärke und Richtung des Magnetfelds im Koordinatenursprung.

c) (**2P**) Bestimmen Sie die *Richtung* von $\vec{B}$ auf der z-Achse.

d) (**2P**) Diskutieren Sie Stärke und Richtung der Kraft, die durch das Magnetfeld auf eine Punktladung Q ausgeübt wird, die sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = (0, 0, v_0)$ auf der z-Achse bewegt.