Klausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. R. Kienberger
Sommersemester 2018
17.07.2018

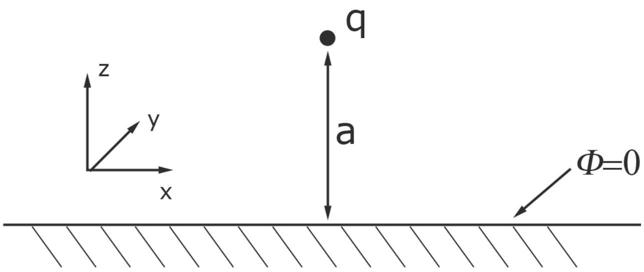
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Betrachten Sie eine unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatte in der xy-Ebene. Im Punkt $(0, 0, a)$ auf der z-Achse befindet sich eine Ladung q (vgl. Abbildung).



(a) Geben Sie das Potential im oberen Halbraum an. Bestimmen Sie dazu das Potential einer verwandten Anordnung nämlich eines mit einer Ladung q bei $(0, 0, a)$ und einer weiteren Ladung $-q$ bei $(0, 0, -a)$.

(b) Zeigen Sie das diese Formel auch für den oberen Halbraum im ersten Fall gilt indem Sie zeigen, dass sich das Potential überall auf der Oberfläche der Platte zu 0 ergibt.

(c) Berechnen Sie basierend auf Ihren vorherigen Überlegungen das $\vec{E}$-Feld im gesamten Raum überhalb der Platte und **skizzieren** Sie den Verlauf der Feldlinien in diesem Bereich.

Lösung

(a) Das Potential einer Punktladung q am Punkt (a, b, c) lautet

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \tag{1}$$

Das Potential im oberen Halbraum errechnet sich mit dem Konzept einer Spiegelladung $q_B = -q$ im Punkt $(0, 0, -a)$ mittels Superposition zu

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \Phi_q + \Phi_{q_B} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

[3]

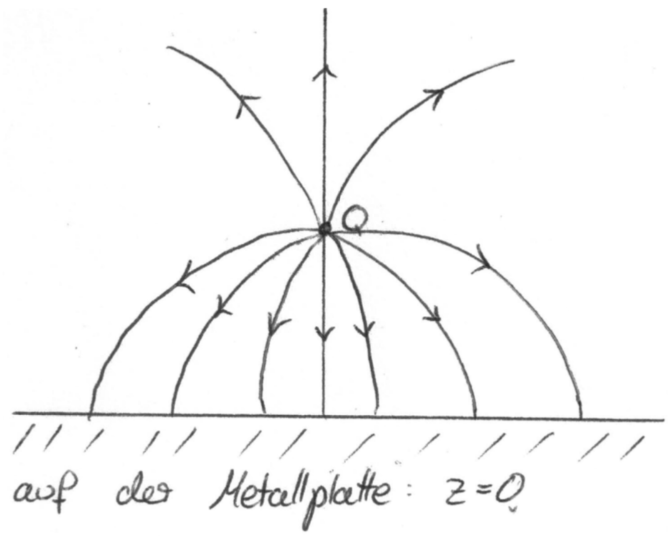
(b) Setzt man nun $z = 0$ in diese Formel ein, so ergibt sich

$$\Phi(z=0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\right) = 0 \tag{3}$$

[1]

(c) Das $\vec{E}$-Feld im oberen Halbraum kann sowohl als negativer Gradient des Potentials als auch durch Superposition der jeweiligen $\vec{E}$-Felder der Punktladungen berechnet werden.

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = -\vec{\nabla}(\Phi_q(\vec{r}) + \Phi_{q_B}(\vec{r})) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-a \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}^3} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+a \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+a)^2}^3}\right)\end{aligned}$$



[4]

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Ein Plattenkondensator mit kreisförmigen Platten der Fläche $A = \pi R^2$, dem Abstand d und geraden Zuleitungen werde mit einem **konstanten Strom** I aufgeladen.

(a) Wie groß ist die Ladung auf den Kondensatorplatten als Funktion der Zeit?

(b) Im Inneren des Kondensators entsteht ein Magnetfeld durch den Verschiebungsstrom. Wo ist dieses Magnetfeld maximal (1 Satz)?

(c) Bei welchem Radius r ist das Magnetfeld auf 50% seiner maximalen Stärke abgefallen (im Inneren des Kondensators)? Und auf welchen Wert ist es abgefallen? Vernachlässigen Sie Randeffekte.

(d) Bestimmen Sie das Magnetfeld des Kondensators jetzt für $r \geq R$. Vergleichen Sie diese Formel mit dem Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes mit gleichem Strom I und bei gleichem Radius r.

Lösung

(a)

$$Q(t) = I \cdot t$$

[**1**]

(b) Das Magnetfeld ist am Rande des Kondensators maximal.

[**1**]

(c) Die Kapazität des Kondensators (Plattenkondensator der Fläche A im Abstand d) beträgt $C = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$, wenn er mit der Ladung $Q(t)$ aufgeladen ist. Beträgt die Spannung $U(t) = \frac{Q(t)}{C}$ und die elektrische Feldstärke $E = \frac{U}{d}$ dann gilt:

$$E(t) = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} = \frac{I}{\epsilon_0 A} \cdot t \tag{4}$$

und

$$\frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0 A}. \tag{5}$$

Das Magnetfeld in einer kreisförmigen Fläche mit Radius $r < R$ zwischen den Kondensatorplatten ergibt sich durch die Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{E} d\vec{A} \tag{6}$$

[**3**]

Wählt man Zylinderkoordinaten mit den Kondensatorplatten in der x-y-Ebene (bzw. der $r - \phi$-Ebene), und den Zuleitungen in z-Richtung, dan ist $\vec{E}$ in Richtung von $\vec{e_z}$ und $\vec{B}$ in richtung von $\vec{e_\phi}$. $\vec{E}$ ist also parallel zu $d\vec{A}$ und die obige Integralgleichung vereinfacht sich dann zu

$$2\pi r \cdot B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I}{\epsilon_0} \cdot \pi r^2 \tag{7}$$

also:

$$B(r) = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \cdot r \tag{8}$$

B hat seinen Maximalwert, wenn die Integrationsfläche die gesamte Plattenfläche ist, also $B_{max} = B(R)$, der 50%-Wert ist somit

$$B_{50\%} = \frac{1}{2} B(R) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}. \tag{9}$$

[3]

(d) Für $r > R$ ergibt Gleichung (6):

$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \epsilon_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} E \cdot \pi R^2 \tag{10}$$

$$2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{I}{\epsilon_0 S} \cdot \pi R^2 = \mu_0 I \tag{11}$$

also:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi r}. \tag{12}$$

Die gleiche Formel erhält man, wenn man das Magnetfeld um einen Leiter durch

$$\oint B ds = \mu_0 \cdot \iint \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 I \tag{13}$$

berechnet.

[3]

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine $L = 0,2$ m lange Spule mit Spulenradius $r = 0,02$ m und Wicklungs**dichte** $n = 1000\ \frac{1}{\mathrm{m}}$ soll ein $\vec{B}$-Feld mit $|\vec{B}| = 0,01$ T erzeugen.

(a) Berechnen Sie den Strom I, der durch die Spule fließen muss.

(b) Berechnen Sie den Widerstand des Spulendrahtes aus Cu (spezifischer Widerstand von Kupfer: $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}\ \Omega$m), der einen Durchmesser von $d = 1$ mm hat und mit Wicklungsdichte n in einer Schicht um den Spulenkörper gewickelt wurde.

(c) Geben Sie die elektrische Leistung P an, die dafür benötigt wird.

Lösung

(a) Für den Betrag des Magnetfeldes in der Spule gilt:

$$|\vec{B}| = \mu_0 \cdot n \cdot I. \tag{14}$$

Daraus folgt für die Stromstärke

$$I = \frac{B}{\mu_0 \cdot n} = 8,0 \text{ A}. \tag{15}$$

[2]

(b) Für den Widerstand des Spulendrahtes gilt

$$R_{Cu} = \rho \left(\frac{A}{L_D} \right)^{-1} = \rho \frac{L_D}{A}. \tag{16}$$

Dabei ist $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)$ die Querschnittsfläche und $L_D = 2\pi r \cdot n \cdot L$ die Länge des Drahtes. Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$R_{Cu} = 0,54\ \Omega.$$

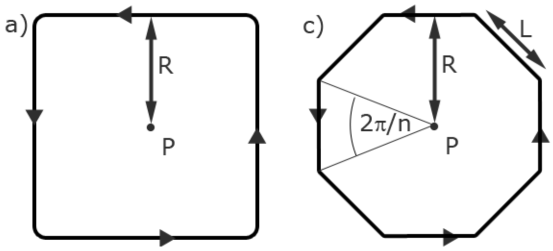
[2]

(c) Die elektrische Leistung beträgt

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = 34,5 \text{ W}. \tag{17}$$

[2]

Aufgabe 4 (12 Punkte)



(a) Leiten Sie das Magnetfeld im Zentrum P des abgebildeten quadratischen Leiters, der von einem Strom I durchflossen wird.

(b) Vergleichen Sie das Ergebnis aus a) mit dem Magnetfeld im Zentrum einer Kreisschleife mit Radius $\left(\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z\right)$. Erklären Sie, warum das Magnetfeld der Kreisschleife größer ist.

(c) Wie lautet das Magnetfeld im Mittelpunkt eines symmetrischen n-Ecks mit n gleich langen Seiten der Länge L (siehe Abbildung)?

(d) Zeigen Sie, dass sich im Grenzfall $n \to \infty$ das Feld im Zentrum einer Kreisschleife ergibt.

Hinweis: $\int dx \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}^3} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

Lösung

(a) Für alle vier Wege gilt: $\vec{r} = \vec{0}$. Das Problem ist symmetrisch, deshalb reicht es eine Seite zu berechnen und mal vier zu nehmen. **Weg 1 (untere Seite:)**

$$\vec{r'} = -R\vec{e}_y + t\vec{e}_x \tag{18}$$

$$d\vec{r'} = dt\vec{e}_x. \tag{19}$$

Daraus folgt

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{r'} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{20}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{dt\vec{e}_x \times (R\vec{e}_y - t\vec{e}_x)}{|R\vec{e}_y + t\vec{e}_x|^3} \tag{21}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_{-R}^{+R} dt \frac{1}{\sqrt{R^2 + t^2}^3} \vec{e}_z \tag{22}$$

$$= \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{t}{R^2 \sqrt{R^2 + t^2}} \right]_{-R}^{+R} \tag{23}$$

$$= \frac{2\mu_0 I}{4\pi\sqrt{2}R} \vec{e}_z. \tag{24}$$

Das gesamte Magnetfeld im Punkt P ist also:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 = \frac{2\mu_0 I}{\pi\sqrt{2}R} \vec{e}_z \tag{25}$$

[**5**]

(b) Im Vergleich zur Kreisschleife ergibt sich ein Faktor $1/(\sqrt{2}\pi)$. Dies liegt hauptsächlich an der Symmetrie, da hier nicht alle Punkte den gleichen Abstand zum Punkt P haben.

[**1**]

(c) Da die Seiten alle den gleichen Beitrag zum Gesamtfeld liefern (vgl. Aufgabenteil (a)), ist es nur notwendig, eine Seite zu berechnen und das Ergebnis mit n zu multiplizieren. Hier wird nur die rechte Seite (Ursprung bei P, kartesisches Koordinatensystem) berechnet. Die Grenzen sind $-L/2$ und $+L/2$. Durch Einsetzen der gegebenen Formel ändern sich die Grenzen zu $-R\tan(\pi/n)$, bzw. $R\tan(\pi/n)$.

$$\vec{r} = \vec{0} \tag{26}$$

$$\vec{r'} = R\vec{e}_x + t\vec{e}_y \tag{27}$$

$$d\vec{r'} = dt\vec{e}_y \tag{28}$$

Daraus folgt:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C dt \frac{\vec{e}_y \times (-R\vec{e}_x - t\vec{e}_y)}{\sqrt{R^2 + t^2}^3} \tag{29}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} R \int_{-R\tan(\pi/n)}^{+R\tan(\pi/n)} dt \frac{\vec{e}_z}{\sqrt{R^2 + t^2}^3} \tag{30}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{R^2 \tan(\pi/n)}{R^2 \sqrt{R^2 + R^2 \tan^2(\pi/n)}} + \frac{R^2 \tan(\pi/n)}{R^2 \sqrt{R^2 + R^2 \tan^2(\pi/n)}} \right] \tag{31}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \left[\frac{2\tan(\pi/n)}{R\sqrt{1 + \tan^2(\pi/n)}} \right] \tag{32}$$

$$\vec{B}_G = n\vec{B}$$

[**3**]

(d) Mit der Kleinwinkelnäherung für $n >> 1 \Rightarrow \tan\phi \approx \phi$ ergibt sich:

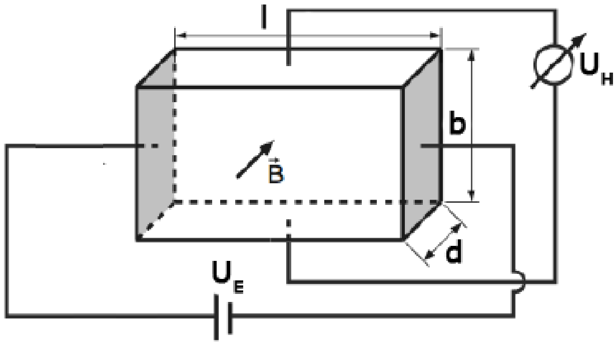
$$\frac{\mu_0 I n}{4\pi}\vec{e}_z\left[\frac{2(\pi/n)}{R\sqrt{1+(\pi/n)^2}}\right] = \frac{\mu_0 I}{2R}\vec{e}_z\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}}\right]$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ geht $(\pi/n)^2 \to 0$. Damit ergibt sich die Formel für den Kreis. Oder man macht es l'Hosbital.

[**3**]

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Edwin Hall entdeckte 1879, dass sich in einem stromdurchflossenen Leiter, der sich in einem stationären Magnetfeld B befindet, eine elektrische Spannung aufbaut. Die Spannung tritt senkrecht sowohl zum Stromfluss als auch zur Magnetfeldrichtung am Leiter auf und wird Hall-Spannung U_H genannt.



(a) Welche Kräfte wirken auf die Elektronen Senkrecht zur Bewegungsrichtung, die sich im Metallstück (siehe Abbildung) bewegen?

(b) Stellen Sie aus dem sich einstellenden Kräftegleichgewicht einen Ausdruck für U_H auf (Ergebnis: $U_H = \frac{IB}{nqd}$, wobei n die Ladungsträgerdichte ist).

(c) An einem Silberstück der Länge $l = 4$cm, Dicke $d = 1$mm und Breite $b = 1$cm wird bei einem Strom von $I = 10$A und einer magnetischen Flussdichte von $B = 1$T eine Hallspannung von $U_H = 1.06$µV gemessen. Wie groß ist die Ladungsträgerdichte von Silber?

(d) Um jetzt noch die Ladungsträgerbeweglichkeit $\mu = \frac{v_D}{E}$ zu bestimmen, muss man die spezifische Leitfähigkeit von Silber kennen. Dazu wird die Spannung $U_E = 1$mV am obigen Silberstück angelegt. Dabei wird eine Stromstärke von $I = 15.3$A gemessen. Bestimmen Sie daraus die elektrische Leitfähigkeit von Silber unter der Annahme, dass das Silberstück homogen vom Strom durchflossen wird. Das Magnetfeld wird hierbei ausgeschaltet.

(e) Berechnen Sie die Ladungsträgerbeweglichkeit.

Lösung:

(a) Die Lorentzkraft: $\vec{F}_L = q\left(\vec{v}_D \times \vec{B}\right)$ und die Coulomb-Kraft: $\vec{F}_E = q\vec{E}$

[2]

(b) Da $\vec{v}_D \perp \vec{B}$ ist $|\vec{F}_L| = q|\vec{v}_D||\vec{B}|$ und $|\vec{F}_E| = q|\vec{E}|$
Aus $F_L = F_E$ folgt: $qv_DB = qE$
Der Stromfluss ist $I = Aj = bd \cdot nqv_D \Rightarrow v_D = \frac{I}{bdnq}$
Und es folgt

$$U_H = Eb \Rightarrow U_H = \frac{IB}{nqd} \tag{33}$$

[2]

(c) Obigen Ausdruck nach n auflösen ergibt:

$$n = \frac{IB}{U_H q d} = 5.89 \cdot 10^{28} \frac{1}{\mathrm{m}^3} \tag{34}$$

[**1**]

(d) Alternative Formulierung des Ohm'schen Gesetzes: $j = \sigma E$. Außerdem gilt $I = Aj$ und $U = El$. Nacheinander einsetzen und nach σ Auflösen ergibt:

$$\sigma = \frac{Il}{UA} = 6.12 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \mathrm{m}^{-1} \tag{35}$$

[**3**]

(e) Die Ladungsträgerbeweglichkeit ist als die Proportionalitätskonstante zwischen der Driftgeschwindigkeit $\vec{v_D}$ und der elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ definiert. (Hinweis: In anisotropen Medien ist μ ein Tensor 2. Stufe)
$j = nqv_D = \sigma E \Rightarrow v_D = \frac{\sigma}{nq} E \Rightarrow \mu = \frac{\sigma}{nq} = 6.5 \cdot 10^{-3} \mathrm{m}^2/\mathrm{Vs}$

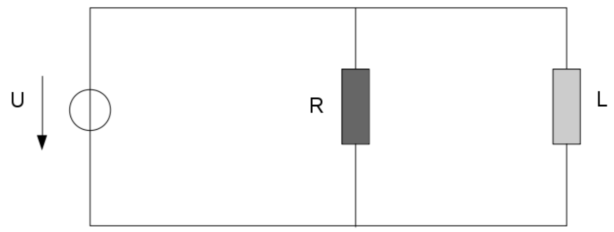
[**2**]

Aufgabe 6 (8 Punkte)

(a) Schreiben Sie die allgemeine Differentialgleichung für einen gedämpften Schwingkreis auf, der mit der einer Wechselspannung betrieben wird.

(b) Vergleichen Sie diese Zusammenhänge nun mit einem mechanischen Feder-Masse-System. Welche Größe in der Elektrotechnik entspricht der Auslenkung, der Kraft, der Masse, der Reibung und der Federkonstante?

(c) Übersetzen Sie nun das folgende Gleichspannungssystem in ein Mechanisches (siehe Zeichnung):



Gesucht ist eine Skizze/Beschreibung eines mechanischen Systems.

Lösung

(a)

$$U = L \cdot \ddot{Q} + R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C} \tag{36}$$

[**1**]

(b)

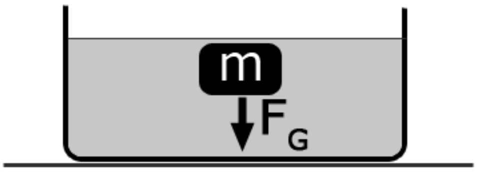
$$\begin{aligned} \text{Spannung} &\leftrightarrow \text{Kraft} && (37) \\ \text{Ladung} &\leftrightarrow \text{Auslenkung} && (38) \\ \text{Induktivitaet} &\leftrightarrow \text{Masse} && (39) \\ \text{Widerstand} &\leftrightarrow \text{Reibung} && (40) \\ 1/\text{Kapazitaet} &\leftrightarrow \text{Federkonstante} && (41) \end{aligned}$$

[**5**]

(c) Hier zum Beispiel eine Masse-Dämpfer-Konstellation, auf die eine Kraft wirkt. So wirkt auf beide Bauteile die gleiche Kraft (analog zur gleichen Spannung bei der Parallelschaltung). Der Dämpfer hat keine Masse und die Masse gleitet reibungsfrei auf der Oberfläche.

[**2**]

Für eine Serienschaltung wären Masse und Dämpfung in einem Objekt vereint.



Aufgabe 7 (7 Punkte)

Es gibt einen neuen, relativistischen Raumschiff-Shuttleservice zwischen Erde und Mars. Es gibt zwei Raumschiffe A und B. Jedes Raumschiff besitzt zwei identische Lichter, eines an der Vorderseite, das andere an der Rückseite. Die normale Geschwindigkeit des Raumschiffs gegenüber der Erde ist v_0 , sodass beim Anflug auf die Erde zu das vordere Licht grün ($\lambda = 500$ nm) leuchtet (von der Erde betrachtet). Beim Abflug von der Erde weg erscheint das Rücklicht rot ($\lambda = 600$ nm).

(a) Bestimmen sie aus den Wellenlängen das Verhältnis der Geschwindigkeit des Raumschiffs zur Lichtgeschwindigkeit $\frac{v_0}{c}$.

(b) Das Raumschiff B will das vorausfliegende Raumschiff A, dass mit v_0 relativ zur Erde fliegt überholen. Welche Geschwindigkeit muss das Raumschiff B relativ zur Erde haben, damit das Rücklicht des in Richtung Mars vorausfliegenden Raumschiffs A wie ein Vorderlicht ($\lambda = 500$ nm, grün) aussieht?

(c) Bestimmen Sie die Wellenlänge des Vorder- und Rücklichtes eines Raumschiffes gemessen aus der Sicht des Piloten dieses Schiffes.

Lösung

Im Folgenden sind alle $\beta = \frac{v}{c}$ gegenüber des Ruhesystems (Erde) angegeben.

Für anfliegende Raumschiffe gilt: $\lambda'_1 = 500$ nm
Für abfliegende Raumschiffe gilt: $\lambda'_2 = 600$ nm
Also:

$$\frac{\nu'_1}{\nu'_2} = \frac{\lambda'_2}{\lambda'_1} = \frac{6}{5}. \tag{42}$$

Daraus folgt

$$\nu'_1 = \sqrt{\frac{1+\beta_0}{1-\beta_0}}\nu_0 \tag{43}$$

$$\nu'_2 = \sqrt{\frac{1-\beta_0}{1+\beta_0}}\nu_0 \tag{44}$$

(a) Teilt man die Ausdrücke für ν'_1 und ν'_2 durcheinander erhält man

$$\frac{\nu'_1}{\nu'_2} = \frac{1+\beta_0}{1-\beta_0} = \frac{6}{5} \tag{45}$$

und daraus folgt

$$\beta_0 = \frac{1}{11}. \tag{46}$$

[3]

(b) Jetzt soll vom beschleunigenden Raumschiffbdie Wellenlänge von 600 nm wie 500 nm aussehen:

$$500 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \cdot 600. \tag{47}$$

Daraus folgt

$$\beta = \frac{11}{61}. \tag{48}$$

Alternativ kann diese Aufgabe auch mit dem Relativitätsprinzip gelöst werden: Das erste Raumschiff nähert sich dem überholenden Raumschiff mit der relativen Geschwindigkeit $c\beta_0$. Mit der Formel für β bei einer Geschwindigkeitstransformation folgt

$$\frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \beta} = -\beta_0, \tag{49}$$

woraus folgt

$$\beta = \frac{2\beta_0}{1+\beta_0^2} = \frac{11}{61}. \tag{50}$$

[2]

(c) Multipliziert man beide Seiten der Gleichungen für ν_1' und ν_2' erhält man

$$\nu_0 = \sqrt{\nu_1' \nu_2'} \tag{51}$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_1' \lambda_2'} = 548 \text{ nm}. \tag{52}$$

[2]

Konstanten

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \mathrm{CV^{-1}m^{-1}}$

$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \mathrm{C}$

$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \mathrm{kg}$

$\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \mathrm{mkgs^{-2}A^{-2}}$

$c = 3 \cdot 10^8 \mathrm{m/s}$

$m_U = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg