

---

# Nachklausur in Experimentalphysik 3

## Lösung

Prof. Dr. L. Fabbietti  
Wintersemester 2019/20  
22. Juni 2020

---

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

### Aufgabe A (10 Punkte)

- (a) Kann eine bikonvexe Linse als Zerstreuungslinse verwendet werden? Wenn ja unter welchen Bedingungen / wenn nein warum?
- (b) Beschreibe kurz die Funktionsweise eines Mikroskops.
- (c) Was beschreibt die Translationsmatrix in der geometrischen Optik?
- (d) Was versteht man unter chromatischer Aberration?
- (e) Wie verhält sich der Abstand zwischen den Maxima des Interferenzmusters am Doppelspalt, wenn der Abstand der beiden Spalte zueinander vergrößert wird?
- (f) Welche Beziehung hat die Fresnel-Beugung zur Fraunhofer-Beugung?
- (g) Welchen Einfluss hat ein frequenzabhängiger Brechungsindex auf ein Wellenpaket, dass sich in einem solchen Medium ausbreitet?
- (h) Wie funktioniert ein Polarisationsfilter?
- (i) Was verursacht die Farbe eines Gegenstands?
- (j) Wann ist der Strahlungsdruck größer? Bei Absorption oder Reflexion und warum?

### Lösung

- (a) Ja, wenn der Brechungsindex der Umgebung größer ist als der der Linse.[1]
- (b) Ein Mikroskop besteht aus zwei Linsen. Die 1. Linse (Objektiv) entwirft ein reelles Zwischenbild in der Brennebene der 2. Linse (Okular), die für das Zwischenbild als Lupe wirkt.[1]

- (c) Sie beschreibt in der Matrixmethode die geradlinige Ausbreitung eines Lichtstrahls in einem Medium mit Brechungsindex  $n$ . [1]
- (d) Der Brechungsindex  $n$  hängt von der Wellenlänge ab, wobei blaues Licht stärker gebrochen wird, als rotes. Die unterschiedlichen Wellenlängen bilden bei einer Linse nicht im gleichen Punkt ab. [1]
- (e) Größerer Spaltabstand führt zum Zusammenrücken der Maxima. [1]
- (f) Der allgemeinere Fall der Fresnel-Beugung (quadratische Näherung der Phase im Beugungsintegral) geht für große Entfernungen in die Fraunhofer-Beugung über (lineare Näherung). Oder Die Fresnel-Beugung geht für genügend kleine Blendendurchmesser in die Fraunhofer-Beugung über, da in diesem Fall nur die erste Fresnelzone zur Feldamplitude beiträgt. [1]
- (g) Die verschiedenen Teilwellen, aus denen sich das Wellenpaket zusammensetzt, bewegen sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit fort. Dadurch zerläuft das Wellenpaket. [1]
- (h) Ein Polarisationsfilter (kurz auch Polfilter) ist ein Polarisator für Licht, der auf Dichroismus beruht, also komplementär polarisiertes Licht absorbiert. [1]
- (i) Die Farbe eines Gegenstands wird durch die Zusammensetzung des Lichts bestimmt, das von dem Material reflektiert oder ausgesendet wird. [1]
- (j) Der Strahlungsdruck ist bei Reflexion doppelt so hoch wie bei Absorption wegen der Impulserhaltung. [1]

### Aufgabe 1 (9 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass zwischen der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \omega/k$  und der Gruppengeschwindigkeit  $v_g = d\omega/dk$  folgender Zusammenhang besteht:

$$v_g(\lambda) = v_{ph}(\lambda) - \lambda \frac{dv_{ph}(\lambda)}{d\lambda}$$

- (b) Folgern Sie aus (a), ob bei normaler Dispersion die Gruppengeschwindigkeit kleiner oder größer als die Phasengeschwindigkeit ist.
- (c) Im Röntgenbereich ist die Brechzahl für elektromagnetische Wellen etwas kleiner als 1:

$$n \approx 1 - \frac{a^2}{\omega^2} \quad \text{mit} \quad \frac{a^2}{\omega^2} \ll 1.$$

Zeigen Sie, dass - obwohl die Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  größer als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist- die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  kleiner als  $c$  bleibt.

## Lösung

(a) Wir benötigen die Zusammenhänge

$$(1) v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2) v_{ph} = \frac{\omega}{k} \quad (3) \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Wir starten mit (1) und nutzen sofort (2):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dv_{ph} \cdot k}{dk} \quad (1)$$

Nun benutzen wir die Produktregel und die Kettenregel:

$$v_g = \frac{dv_{ph}}{dk} k + v_{ph} = \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk} \cdot k + v_{ph} \quad (2)$$

Nun noch zweimal die Beziehung (3):

$$v_g = -\frac{dv_{ph}}{d\lambda} \frac{2\pi}{k} + v_{ph} = v_{ph} - \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \lambda \quad (3)$$

[3]

(b) Normale Dispersion bedeutet, dass der Brechungsindex mit der Frequenz ansteigt, also:

$$\frac{dn}{d\lambda} < 0 \quad (4)$$

$$v_g = -\frac{dv_{ph}}{d\lambda} \cdot \lambda + v_{ph} = -\frac{dv_{ph}}{dn} \frac{dn}{d\lambda} \cdot \lambda + v_{ph} \quad (5)$$

Da  $v_{ph} = \frac{c}{n}$  gilt, ist  $\frac{dv_{ph}}{dn} < 0$ . Somit ergibt sich:

$$v_g < v_{ph} \quad (6)$$

[3]

(c) Die Phasengeschwindigkeit berechnet sich als

$$v_{ph} = \frac{c}{n} \quad (7)$$

Für  $n \approx 1 - \frac{a^2}{\omega^2}$  und  $\frac{a^2}{\omega^2} \ll 1$  gilt also

$$v_{ph} > c \quad (8)$$

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$\frac{c}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}} = \frac{c}{1 - \frac{a^2}{\omega^2} + 2\omega \frac{a^2}{\omega^3}} = \frac{c}{1 + \frac{a^2}{\omega^2}} \quad (9)$$

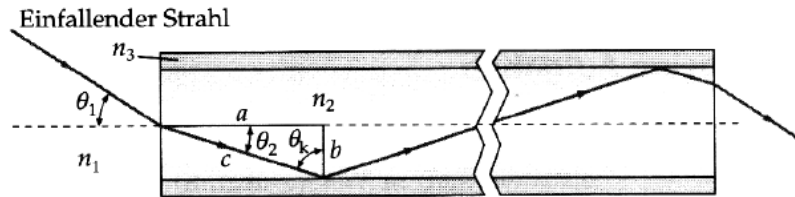
Daraus folgt

$$v_g < c \quad (10)$$

[3]

## Aufgabe 2 (5 Punkte)

In einer Glasfaser breiten sich Lichtstrahlen über eine lange Strecke aus, wobei sie total reflektiert werden. Wie in der Abbildung gezeigt, besteht die Faser aus einem Kern mit der Brechzahl  $n_2$  und dem Radius  $b$ . Der Kern ist umgeben von einem Mantel mit der Brechzahl  $n_3 < n_2$ . Die numerische Apertur der Faser ist definiert als  $A_N \equiv \sin \theta_1$ . Dabei ist  $\theta_1$  der Einfallswinkel eines Lichtstrahls an der Stirnfläche der Faser, der an der Grenzfläche zum Mantel unter dem kritischen Winkel der Totalreflexion reflektiert wird.



Zeigen Sie anhand der Abbildung, dass bei einem aus Luft ( $n_1 = 1$ ) in die Glasfaser eintretenden Lichtstrahls für die numerische Apertur gilt:

$$A_N \equiv \sin \theta_1 = \sqrt{n_2^2 - n_3^2}$$

## Lösung

Es gelten die folgenden Beziehungen:

1. Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (11)$$

2. Totalreflexion:

$$\sin \theta_k = \frac{n_3}{n_2} \quad (12)$$

3. Geometrische Überlegung:

$$\theta_k = 90^\circ - \theta_2 \quad (13)$$

[3]

4. Beziehung von Sinus und Cosinus:

$$\sin \theta_k = \sin(90^\circ - \theta_2) = \cos \theta_2 \quad (14)$$

Daraus folgt:

$$\sin^2 \theta_1 = \frac{n_2^2}{n_1^2} \sin^2 \theta_2 \quad (15)$$

$$= \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - \cos^2 \theta_2) \quad (16)$$

$$= \frac{n_2^2}{n_1^2} \left( 1 - \frac{n_3^2}{n_2^2} \right) \quad (17)$$

$$= \frac{n_2^2}{n_1^2} - \frac{n_3^2}{n_1^2} \quad (18)$$

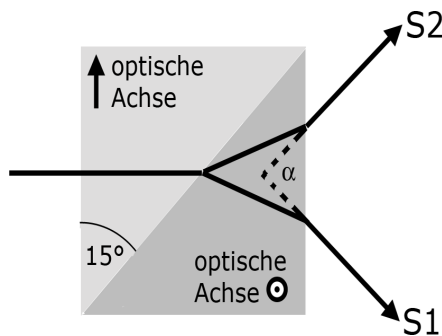
Mit  $n_1 = 1$  gilt somit

$$\sin \theta_1 = A_N = \sqrt{n_2^2 - n_3^2} \quad (19)$$

[2]

### Aufgabe 3 (7 Punkte)

Zwei Prismen aus Kalkspat, die so geschnitten sind, dass die optische Achse einmal in der Zeichenebene, zum Anderen senkrecht zur Zeichenebene verläuft, werden zusammengeklebt. Die



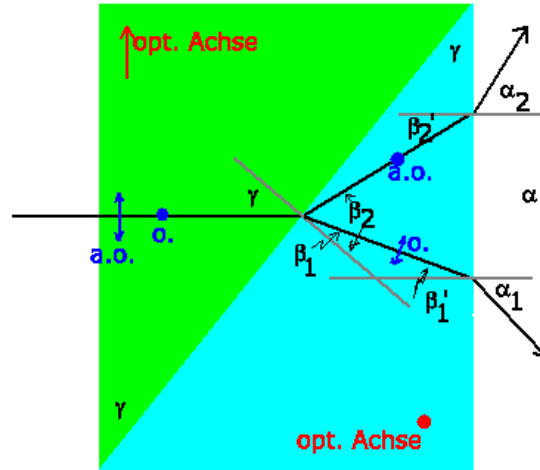
Hauptbrechungsindizes für Kalkspat sind  $n_o = 1,6584$  und  $n_{ao} = 1,4864$ . Der Winkel zwischen beiden Prismen beträgt  $\gamma = 15^\circ$ .

Ein unpolarisierter Lichtstrahl, trifft senkrecht zur optischen Achse auf das erste Prisma. Er spaltet beim Durchgang in zwei Lichtstrahlen  $S_1$  und  $S_2$  auf. Wie groß ist der Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden austretenden Lichtstrahlen und wie sind diese Strahlen polarisiert?

### Lösung

Wir zerlegen die einfallende Welle in den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl. Der ordentliche Strahl ist senkrecht zur optischen Achse polarisiert, der außerordentliche Strahl parallel zur optischen Achse. Beide Strahlen haben gleiche Richtung, sind jedoch phasenverschoben. Beim Eintritt in das zweite Prisma, dessen optische Achse nach Aufgabenstellung senkrecht zur optischen Achse des ersten Prismas gerichtet sein sollte, wird der ordentliche Strahl zum außerordentlichen Strahl und umgekehrt der außerordentliche Strahl zum ordentlichen Strahl.

Der Einfallswinkel bei der Brechung an der Grenzfläche der beiden Prismen ist identisch mit dem Keilwinkel  $\gamma$  der Prismen. Wir bezeichnen mit dem Index 1 den im zweiten Prisma als



ordentlichen Strahl erscheinenden Lichtstrahl, umgekehrt mit dem Index 2 den im zweiten Prisma als außerordentlichen Strahl erscheinenden Lichtstrahl. Die weitere Bezeichnung der Winkel ist in der Zeichnung angegeben. Wir benutzen das Brechungsgesetz um die Winkel der beiden Strahlen zu ermitteln. Dabei können wir das Brechungsgesetz ganz normal anwenden, nur, dass je nach Strahl der jeweilige Brechungsindex eingesetzt werden muss. Die Brechungsgesetze an der Grenzfläche der beiden Prismen lauten

$$\begin{aligned} n_o \sin \gamma &= n_{ao} \sin \beta_2 \\ n_{ao} \sin \gamma &= n_o \sin \beta_1 \end{aligned}$$

Numerisch folgt daraus, dass  $\beta_1 = 13,41^\circ$  und  $\beta_2 = 16,79^\circ$ . Der Einfallswinkel auf die Begrenzungsfläche des zweiten Prismas mit der Luft ist

$$\beta_1' = \gamma - \beta_1 = 1,59^\circ \qquad \beta_2' = \beta_2 - \gamma = 1,79^\circ$$

[3]

Nochmalige Anwendung des Brechungsgesetzes liefert

$$\begin{aligned} n_{ao} \sin \beta_2' &= \sin \alpha_2 = 0,0464 \\ n_o \sin \beta_1' &= \sin \alpha_1 = 0,0460. \end{aligned}$$

Der Winkel zwischen den beiden Lichtstrahlen  $S_1$  und  $S_2$  ist damit

$$\begin{aligned} \alpha &= (\beta_2 - \beta_1) + (\alpha_1 - \beta_1') + (\alpha_2 - \beta_2') \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_2 - \beta_2') - (\beta_1 + \beta_1') = \alpha_1 + \alpha_2 = 5,3^\circ \end{aligned}$$

[3]

Die Strahlen sind dabei wie in der Zeichnung polarisiert.

[1]

#### Aufgabe 4 (15 Punkte)

Ein einfaches Fernrohr besteht aus zwei dünnen bikonvexen Linsen (2. Brennpunkt des Objektivs = 1. Brennpunkt des Okulars) mit Brennweiten  $f_{OB} = 100 \text{ cm}$  und  $f_{OK} = 5 \text{ cm}$ . Mit diesem Fernrohr wird der Mond betrachtet, der im Objektiv unter einem Winkel von  $\epsilon_{OB} = 0,009 \text{ rad}$  erscheint.

- (a) Skizzieren Sie das Linsensystem und den Strahlengang mit mindestens zwei Strahlen und beschriften Sie die Zeichnung insbesondere auch die Ein- und Ausfallswinkel.
- (b) Welchen Durchmesser hat das vom Objektiv entworfene Bild? Unter welchem Winkel erscheint das Endbild im Unendlichen? Welche Vergrößerung hat das Fernrohr?
- (c) Das weltweit größte Linsenfernrohr (Refraktor) gehört zum Yerkes Observatorium der University of Chicago mit  $1,02 \text{ m}$  Durchmesser und  $19,5 \text{ m}$  Brennweite. Vergleichen Sie das Öffnungsverhältnis ( $o = D/f_{OB}$ ) und die Vergrößerung des Fernrohrs (nehmen Sie ein Okular mit Brennweite  $f_{OK} = 1,25 \text{ cm}$  an) mit dem  $5,1 \text{ m}$  Spiegelteleskop auf dem Mount Palomar mit Brennweite  $1,68 \text{ m}$ .
- (d) Ein Teleskop hat für Beobachtungen von Objekten auf der Erde den Nachteil, dass es ein umgekehrtes Endbild erzeugt. Beim sogenannten Galilei-Fernrohr ist die Objektivlinse wie gewöhnlich eine Sammellinse, die Okularlinse allerdings eine Zerstreuungslinse. Das vom Objektiv entworfene Bild liegt hinter dem Okular an dessen Brennpunkt. Skizzieren Sie den Strahlengang und zeigen Sie daran, dass das Endbild aufrecht steht und im Unendlichen liegt.

#### Lösung

[4]

[4]

- (b) Wir betrachten zunächst ein einfaches astronomisches Linsenfernrohr und skizzieren das System mit Strahlengang (siehe Abbildung). Für den Zusammenhang von Winkel  $\epsilon_{OB}$ , Bild  $B$  und Brennweite  $f_{OB}$  gilt (mit Kleinwinkelnäherung):

$$\tan \epsilon_{OB} = -\frac{B}{f_{OB}} \approx \epsilon_{OB}$$

Somit folgt sofort die Größe des reellen Zwischenbildes:

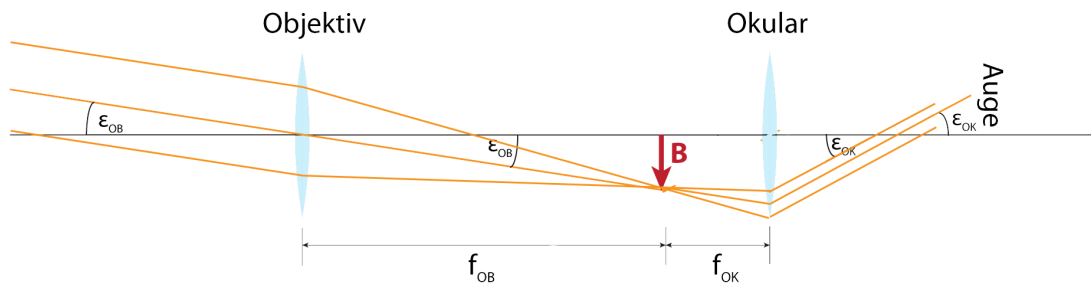
$$B \approx -\epsilon_{OB} f_{OB} = -0,9 \text{ cm}$$

Ähnlich gilt für das Okular und den Winkel des Endbildes:

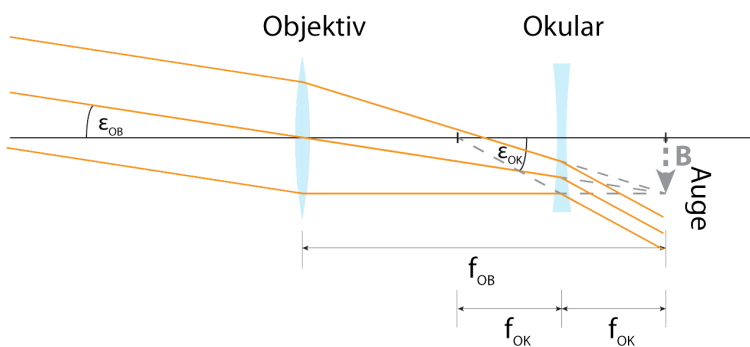
$$\begin{aligned} \tan \epsilon_{OK} &= \frac{B}{f_{OK}} \approx \epsilon_{OK} \\ \epsilon_{OK} &\approx \frac{B}{f_{OK}} = -0,178 \text{ rad} = -10,2^\circ \end{aligned}$$

[3]

### Astronomisches Fernrohr



### Galilei-Fernrohr



(a)

Da das Bild  $B$  negativ ist, ist auch  $\epsilon_{OK}$  negativ. Somit steht das Endbild auf dem Kopf, was für rein astronomische Beobachtungen kein großes Problem darstellt. Die Vergrößerung des Teleskops ist gegeben durch die Winkelvergrößerung:

$$V_T = \frac{\epsilon_{OK}}{\epsilon_{OB}} \approx -\frac{f_{OB}}{f_{OK}} = -20$$

[1]

- (c) Vergleicht man zunächst die Vergrößerungen der beiden Teleskope, so erhält man mit der Formel aus a) für das Linsenfernrohr  $V_{LT} = -1560$ , für das Spiegelteleskop 'nur'  $V_{ST} = -134$ . Hohe Vergrößerungen sind jedoch relativ problemlos durch die Wahl der Brennweiten erreichbar. In der Astronomie oftmals wichtiger ist eine hohe Lichtstärke eines Teleskops, welche die Beobachtung lichtschwacher Objekte ermöglicht. Es ergibt sich für die Lichtstärke (auch: Öffnungsverhältnis  $o$ , Objektivdurchmesser  $D$ ):

$$\begin{aligned} o_{LT} &= \frac{D}{f_{OB}} = \frac{1,02m}{19,5m} = 0,052 \\ o_{ST} &= \frac{5,1m}{1,68m} = 3,036 \end{aligned}$$

[3]



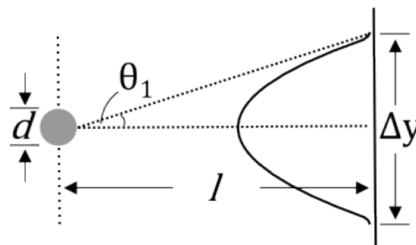
Das Spiegelteleskop ist somit  $58\times$  lichtstärker als das Linsenteleskop. Man kann hier klar erkennen, dass die Lichtstärke ( $\propto f_{OB}^{-1}$ ) einer stärkeren Vergrößerung ( $\propto f_{OB}$ ) vorgezogen wurde.

- (d) Eine Skizze des Galilei-Fernrohrs zeigt die Linsen und den Strahlengang. Die Strahlen fallen unter einem kleinen Winkel  $\epsilon_{OB}$  ein und erzeugen das virtuelle Bild  $B$  im 2. Brennpunkt des Okulars. Die fokussierende Wirkung des Objektivs wird aber durch das Okular aufgehoben und die Strahlen verlassen das Okular parallel (Bild im Unendlichen) unter Winkel  $\epsilon_{OK} \approx B/f_{OK}$ . Unter Betrachtung der Winkel und des virtuellen Bildes folgt auch hier aus  $\epsilon_{OB} \approx -\frac{B}{f_{OB}}$  und  $\epsilon_{OK} \approx \frac{B}{f_{OK}}$  die Vergrößerung des Fernrohrs zu  $V_T \approx -\frac{f_{OB}}{f_{OK}}$ . Allerdings erhält man hier aufgrund der negativen Brennweite bei Zerstreuungslinsen (siehe Vorlesung) einen positiven Wert für die Vergrößerung und  $\epsilon_{OK}$  und somit auch ein aufrechtes Bild.

Das aufrechte Endbild erkennt man auch am Strahlengang (oberster Strahl vor Eintritt = oberster Strahl nach Austritt). Das in Holland erfundene und von Galilei weiterentwickelte Fernrohr erzeugt somit aufrechte Bilder und ist zudem wesentlich kürzer als frühere Fernrohre.

## Aufgabe 5 (4 Punkte)

Licht mit der Wellenlänge  $632,8 \text{ nm}$  aus einem Helium-Neon-Laser trifft auf ein menschliches Haar, dessen Durchmesser  $d = 60 \text{ }\mu\text{m}$  beträgt. Das Haar ist  $l = 5 \text{ m}$  von einem Schirm entfernt ist. Welche Breite des zentralen Beugungsmaximum  $\Delta y$  wird auf dem Schirm gemessen?



## Lösung

Das vom Haar erzeugte Beugungsmuster ist dasselbe wie das eines Einzelspalts mit der Breite  $d$  auf Grund der Komplementarität. Die Bedingung für das Auftreten von Beugungsminima am Einzelspalt lautet:

$$\sin \theta = \frac{n\lambda}{d} \quad (20)$$

wobei  $n = 1$  für das erste Minimum einzusetzen ist. Aus einer einfachen Geometrieüberlegung folgt:

$$\tan \theta = \frac{\frac{\Delta y}{2}}{l} \quad (21)$$

Die Breite des Beugungsmaximums  $\Delta y$  ergibt sich nun durch:

$$\Delta y = 2l \tan \theta \approx 2l \sin \theta = 2l \frac{\lambda}{d} = 10,55 \text{ cm.} \quad (22)$$

[4]

## Aufgabe 6 (11 Punkte)

- (a) Ein Photon der Energie  $E_\gamma$  wird an einem freien Teilchen der Ruhemasse  $m_0$  gestreut. Compton beobachtete 1921, dass für die Wellenlängenverschiebungen gestreuter Photonen ein einfacher Zusammenhang mit deren Streuwinkel  $\theta$  besteht. Berechnen sie daraus die kinetische Energie des Teilchens, das unter dem Winkel  $\phi$  bezüglich der Richtung des einlaufenden Photons gestreut wird! Zeigen Sie unter welchem Winkel  $\phi$  im Laborsystem das Teilchen die maximale Energie erhält.
- (b) Welche Energie kann ein Photon der Wellenlänge  $\lambda = 400\text{nm}$  auf ein freies Elektron übertragen?
- (c) In einem Comptonexperiment erhält ein Elektron die kinetische Energie  $0,1\text{MeV}$  durch den Stoß mit einem Photon der Energie  $500\text{keV}$ . Bestimmen Sie die Wellenlänge und den Winkel des gestreuten Photons, wenn das Elektron sich anfänglich in Ruhe befand.
- (d) Kann das Photon seine gesamte Energie dem freien Elektron übertragen? Begründen Sie anhand der Formel.

## Lösung

(a)

$$\begin{aligned} \lambda' - \lambda &= \frac{hc}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \\ E_{kin} &= E_\gamma - E'_\gamma = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda' \lambda} = \frac{E_\gamma E'_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta) \\ E'_\gamma &= \frac{E_\gamma}{1 + \frac{E_\gamma}{m_0 c^2} (1 - \cos \theta)} \Rightarrow E_{kin} = \frac{E_\gamma}{\frac{m_0 c^2}{E_\gamma (1 - \cos \theta)} + 1} \end{aligned}$$

ist maximal für  $\theta_{max} = \pi$ .

[2]

Der Impulserhaltungssatz:

$$p_\gamma = p'_\gamma \sin \theta + p_e \sin \phi \Rightarrow 0 = p'_\gamma \sin \theta_{max} + p_e \sin \phi \Rightarrow p_e \sin \phi_{max} = 0 \Rightarrow \phi_{max} = 0$$

[2]

(b)

$$\lambda = 400\text{nm} \Rightarrow E_\gamma = 3,1\text{eV}$$

mit  $\theta_{max} = \pi$  folgt  $E_{kin,max} = 3,8 \cdot 10^{-5}\text{eV}$

[2]

(c)

$$E'_\gamma = E_\gamma - E_{kin} = 400\text{keV} \Rightarrow \lambda' = 3,1 \cdot 10^{-3}\text{nm}$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = 2,48 \cdot 10^{-3}\text{nm} \text{ folgt aus Compton: } \theta = \arccos\left(1 - \frac{(\lambda' - \lambda)m_0c}{h}\right) = 41,8^\circ$$

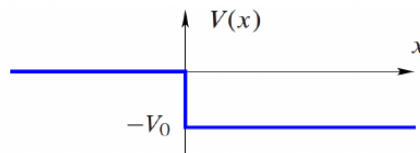
[3]

(d) Übertrüge das Photon seine gesamte Energie auf das Elektron, dann wäre  $E'_\gamma = 0 \Rightarrow \lambda' = \infty \Rightarrow \lambda' - \lambda = \infty = \frac{hc}{m_0c^2}(1 - \cos\theta) \Rightarrow 1 - \cos\theta = \infty$

[2]

## Aufgabe 7 (10 Punkte)

Ein Elektron der Energie  $E > 0$  bewegt sich von links her auf eine in der Abbildung dargestellte Potentialstufe zu. Das Potential  $V(x)$  ist gleich Null für  $x < 0$  und  $-V_0$  für  $x > 0$ .



- (a) Leiten sie Ausdrücke für die Reflexions- sowie Transmissionswahrscheinlichkeit des Elektrons an der Potentialstufe her. Lösen Sie hierzu die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das gegebene Potential.
- (b) Nehmen Sie nun an, dass das Elektron eine Energie von 10 eV besitzt und die Stufe 80 eV tief ist. Berechnen Sie die Reflexions- sowie Transmissionswahrscheinlichkeit für diesen Fall.

**Hinweise:** Nehmen Sie für die Wellenfunktion links der Stufe  $\psi_I = e^{ikx} + Re^{-ikx}$  als allgemeinen Ansatz an und für die Wellenfunktion rechts der Stufe  $\psi_{II} = Te^{iqx}$ . Die Reflexionswahrscheinlichkeit  $\mathcal{R}$  drückt somit über  $\mathcal{R} = R^2$  aus.

## Lösung

- (a) Das konstante Potential  $V(x) = -V_0$  bestimmt den Hamiltonoperator:  $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0$ , wobei gilt:  $\hat{p} = -i\hbar\partial_x$ . Zur Lösung der Schrödingergleichung  $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  wird der folgende Ansatz verwendet:

Für  $x < 0$ :

$$\psi_I = e^{ikx} + e^{-ikx} \quad (23)$$

$$\Rightarrow E\psi_I = (-\hbar^2(ik)^2 e^{ikx} - \hbar^2(-ik)^2 R e^{-ikx}) \cdot \frac{1}{2m} \quad (24)$$

$$= (-\hbar^2(-k^2)\psi_I) \cdot \frac{1}{2m} \quad (25)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi_I \quad (26)$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (27)$$

Für  $x > 0$ :

$$\psi_{II} = T e^{iqx} \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{2m(E + V_0)}{\hbar^2}} \quad (28)$$

Es gelten die folgenden Stetigkeitsbedingungen:

Bei  $x = 0$ :

$$(I) \quad 1 + R \stackrel{!}{=} T \quad (29)$$

Stetigkeit von  $\partial_x \psi$  bei  $x = \infty$ :

$$(II) \quad ik + R(-ik) = Tiq \quad (30)$$

Aus (II) erhält man zunächst:

$$(1 - R)k = Tq \quad (31)$$

[4]

Addition von (I) und (II) liefert nun:

$$(1 - R)k = (1 + R)q \quad (32)$$

$$k - q = R(q + k) \quad (33)$$

$$R = \frac{k - q}{k + q} \quad (34)$$

$$\Rightarrow T = \frac{k + q}{k + q} - \frac{k - q}{k + q} = \frac{2k}{k + q} \quad (35)$$

Damit lautet die Wellenfunktion:

$$\psi = \begin{cases} e^{ikx} + \frac{k-q}{k+q} e^{-ikx} & x < 0 \\ \frac{2k}{k+q} e^{iqx} & x > 0 \end{cases} \quad (36)$$

[3]

(b)

$$\mathcal{R} = R^2 = \frac{(k - q)^2}{(k + q)^2} \quad (37)$$

$$= \frac{\frac{2m}{\hbar^2} \left( E - 2\sqrt{E(E + V_0)}E + E + V_0 \right)}{\frac{2m}{\hbar^2} \left( 2E + V_0 + 2\sqrt{(E + V_0)E} \right)} \quad (38)$$

$$= \frac{2E + V_0 - 2\sqrt{(E + V_0)E}}{2E + V_0 + 2\sqrt{(E + V_0)E}} = 0,25 \quad (39)$$

Das Reflexionsvermögen beträgt also 25 %.

[3]

## Konstanten

Elektrische Feldkonstante:	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{CV}^{-1}\text{m}^{-1}$
Elementarladung:	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{C}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{Js} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{eVs}$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ms}^{-1}$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$