Lösungen zur Klausur 2

zur Vorlesung Theoretische Physik 2 Quantenmechanik I

Prof. Dr. P. Ring, Physik-Department, Technische Universität München 23.07.002

Aufgabe 1 (multiple choise) 9 Punkte

Der Hamilton-Operator H beschreibe die Bewegung eines Teilchens im dreidimensionalen Raum in einem Potential $V(r)$ endlicher Tiefe, das nur vom Abstand r abhängt. $V(r)$ verschwinde für $r > R$, und es sei $V(r) < 0$, wobei R ein sehr großer endlicher Radius ist. Dann gelten folgende Aussagen:

Ja	Nein	
´		Es gibt nur endlich viele gebundene Zustände
	´	Alle reellen Eigenwerte von H sind kleiner als Null
´		Ein Teil des Eigenwertspektrums von H ist diskret
´		Es lässt sich ein Satz von Eigenfunktionen bestimmen, die gute Parität besitzen
	´	Alle Eigenfunktionen von H sind auch Eigenfunktionen von L_z
	´	Gleichzeitige Eigenfunktionen von H und $\mathbf{L}^2$ sind auch Eigenfunktionen von L_z
´		Es gibt nur diskrete Eigenwerte von $\mathbf{L}^2$
´		Alle ganzen Zahlen kommen als Eigenwerte von L_x vor
	´	Die Eigenfunktionen von L_z sind auch Eigenfunktionen von $\mathbf{L}^2$

Aufgabe 2 10 Punkte

Es werde ein Spin in einem Magnetfeld betrachtet: $H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$, wobei $\boldsymbol{\mu} = \frac{ge}{2mc}\mathbf{s}$ und $\mathbf{s} = \frac{\hbar}{2}\mathbf{s}$ ($e = -e_0, m = m_e, g = 2$ für ein Elektron); $\mathbf{B}$ sei in z-Richtung.

(a) Man bestimme die Zeitabhängigkeit des Zustandes

$$c(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

durch Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, wenn der Spin zur Zeit $t = 0$ Eigenzustand des Spinoperators s_x zum Eigenwert $\hbar/2$ war!

(b) Wie groß ist der Erwartungswert von s_z in diesem Zustand?

Lösung: Für $g = 2$ ist

$$H = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = \frac{\hbar e_0 B}{2mc} s_z = \frac{\hbar e_0 B}{2mc}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

und aus

$$i\hbar \frac{\partial c(t)}{\partial t} = Hc(t)$$

folgt

$$\dot{a}(t) = -.i\frac{e_0 B}{2mc} a(t) \equiv -iw\, a(t)$$

und

$$\dot{b}(t) = iw\, b(t)$$

mit

$$w = \frac{e_0 B}{2mc}.$$

Daher ist

$$c(t) = \begin{pmatrix} a_0\, \mathrm{e}^{-iwt} \\ b_0\, \mathrm{e}^{iwt} \end{pmatrix}.$$

Anfangsbedingung: $c(0)$ ist Eigenzustand des Spinoperators s_x zum Eigenwert $\hbar/2$,

$$c(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so dass

$$c(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-iwt} \\ \mathrm{e}^{iwt} \end{pmatrix}$$

und

$$\langle c(t) | s_z | c(t) \rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{iwt} & \mathrm{e}^{-iwt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-iwt} \\ \mathrm{e}^{iwt} \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 3 10 Punkte

Bestimmen Sie für den dreidimensionalen harmonischen Oszillator $V = mw^2\mathbf{r}^2/2$ Energieeigenwerte und Wellenfunktionen sowie die Entartung der drei tiefsten Niveaus, indem Sie das Problem in kartesischen Koordinaten aufschreiben!

Lösung:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m}{2} w^2 \mathbf{x}^2 \equiv \sum_{i=1}^{3} H_i$$

mit

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m}{2} w^2 x_i^2.$$

Eigenfunktionen

$$y_{n_i}(x_i) \quad \Rightarrow \quad y_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = y_{n_1}(x) y_{n_2}(y) y_{n_3}(z)$$

$$Hy_{n_1 n_2 n_3} = \left(E_{n_1} + E_{n_2} + E_{n_3}\right) y_{n_1 n_2 n_3} = \hbar w \left(n_1 + n_2 + n_3 + 3/2\right) y_{n_1 n_2 n_3}$$

daher

$$\frac{E_0}{\hbar w} = 3/2 \Leftrightarrow (n_1, n_2, n_3) = (0,0,0)$$

E_0 ist <u>nicht entartet.</u>

$$\frac{E_1}{\hbar w} = 5/2 \quad \Leftrightarrow \quad (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$$

E_1 ist <u>dreifach entartet.</u>
Analog

$$\frac{E_2}{\hbar w} = 7/2 \quad \Leftrightarrow \quad (2,0,0)\cdots(1,0,1)$$

E_2 ist <u>6-fach entartet</u>.

<u>Aufgabe 4 (Quickies)</u> 10 Punkte
(a) Wie lautet der Vektor der Pauli-Matrizen?

$$\mathbf{s} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Geben Sie die Größenordnung von $\hbar$ in erg·s an!
$\hbar \approx 10^{-27} erg \cdot s$
(c) Wie lautet die Fermische Goldene Regel?

$$\Gamma_{mn} = \frac{2p}{\hbar} d\left(E_n - E_m\right) \left|\langle n|V|m\rangle\right|^2$$

[Schwabl (16.36) oder Varianten mit endlicher Frequenz].
(d) Wie lautet die Pauli-Gleichung?

$$i\hbar \frac{\partial y(\mathbf{x},t)}{\partial t} = \left\{ \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x},t) \right)^2 + e f(\mathbf{x},t) \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m_B \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \right\} y(\mathbf{x},t)$$

mit dem Bohrschen Magneton $m_B = \dfrac{\hbar e_0}{2mc}$

(e) Bei welcher Bewegung tritt die Zyklotronfrequenz auf?
Bei der Bahnbewegung im Magnetfeld

<u>Aufgabe 5</u> 40 Punkte
Für den anharmonischen Oszillator, der durch die potentielle Energie

$$V(x) = \frac{m}{2} w^2 x^2 + A x^3$$

beschrieben werde, berechne man die Energieeigenwerte in erster und zweiter Ordnung der Störungstheorie !
Hinweise:
Es ist günstig, das Problem auf Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zu transformieren:

$$x = \frac{b}{\sqrt{2}}\left(a + a^{+}\right),$$

wobei

$$b \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{mw}}, \qquad a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \qquad a^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

gelten.
Die Wellenfunktion lautet in erster Ordnung der Störungstheorie

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{m\neq n} \frac{\langle m^{(0)}|H_1|n^{(0)}\rangle}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^{(0)}\rangle .$$

<u>Lösung:</u>

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}w^2 x^2 + Ax^3 \equiv H_0 + H_1$$

$$E_n^{(1)} = \langle n^0|H_1|n^1\rangle$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{m\neq n} \frac{\left|\langle n^0|H_1|m^0\rangle\right|^2}{E_n^0 - E_m^0}$$

$$E_n^{(0)} = \hbar w\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Aus

$$H_1 = Ax^3 = A\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\left(a + a^{+}\right)^3 = A\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^3\left(a^3 + a^{+3} + (1+2\hat{n})a^{+} + a(1+2\hat{n}) + \hat{n}a + a^{+}\hat{n}\right)$$

folgt

$$E_n^{(1)} = 0$$

und

$$\langle n^0|H_1|m^0\rangle = A\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^3 \cdot$$

$$\cdot\left\{\sqrt{m(m-1)(m-2)}\,d_{n,m-3} + \sqrt{(m+1)(m+2)(m+3)}\,d_{n,m+3} + 3m\sqrt{m-1}\,d_{n,m-1} + (3m+3)\sqrt{m+1}\,d_{n,m+1}\right\}$$

Daher ist

$$E_n^{(2)} = \frac{A^2 b^6}{8\hbar w}\left(30n^2 + 30n + 11\right)$$

und

$$E_n = \hbar w\,(n + 1/2) - \frac{A^2 b^6}{8\hbar w}\left(\frac{\hbar}{mw}\right)^3\left(30n^2 + 30n + 11\right)$$