Lösung der Wiederholungsklausur

Aufgabe 0.1 (Kurzaufgaben (13 Punkte)). a) Betrachten Sie die kartesischen Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$ und des Impulsvektors $\vec{p}$ eines Teilchens als generalisierte Koordinaten und Impulse. Berechnen Sie für einen konstanten Vektor $\vec{a}$ die Poisson-Klammern

$$\{(\vec{a}\cdot\vec{r})^2;\vec{p}\}\,.$$

b) Ein vollkommen biegsames, homogenes Seil mit Gesamtlänge l und Masse m hänge auf einem Nagel, so dass die beiden hängenden Teile die Länge $\frac{l}{2}$ haben. Nach einer infinitesimal kleinen Verschiebung aus dem instabilen Gleichgewicht bewege sich das Seil reibungsfrei im homogenen Schwerefeld. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Seiles unmittelbar nach dem vollständigen Abgleiten vom Nagel.

c) Betrachten Sie den vertikalen Fall einer Masse m im homogenen Schwerefeld $g\vec{e}_z$ unter Berücksichtigung der Reibungskraft $F_\text{R} = -Kv^3\vec{e}_v$. Formulieren Sie die Differentialgleichung für die vertikale Geschwindigkeit der Masse und bestimmen Sie die stationäre (zeitunabhängige) Geschwindigkeit, die die Masse für große Zeiten erreicht.

d) Ein Sportler hat die Jahresbestleistung im Hochsprung von h_1. Wie hoch könnte dieser Sportler auf dem Mond mit sechsmal kleinerer Schwerebeschleunigung als auf der Erde springen?

e) Ein mathematisches Pendel hat die Schwingungsperiode $T = 1\,\text{s}$. Wie groß ist die Schwingungsperiode des Pendels in einer Rakete, die mit einer Beschleunigung von $3g$ vertikal von der Erdoberfläche startet.

Lösung. a) Für die i-te Komponente gilt — 3 Punkte

$$\{(\vec{a}\cdot\vec{r})^2;\vec{p}\}_i = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\,(\vec{a}\cdot\vec{r})^2}{\partial x_k}\frac{\partial\,p_i}{\partial p_k} - \frac{\partial\,(\vec{a}\cdot\vec{r})^2}{\partial p_k}\frac{\partial\,p_i}{\partial x_k}\right) = 2\{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{a}\}_i.$$

b) Am Anfang liegt der Schwerpunkt bei $-\frac{l}{4}$ ($z = 0$ am Nagel). Unmittelbar nach dem Abgleiten ist der Schwerpunkt bei $-\frac{l}{2}$. Aus der Energieerhaltung folgt — 3 Punkte

$$-mg\frac{l}{4} = -mg\frac{l}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

und somit $v = \sqrt{\frac{gl}{2}}$.

c) Die Differentialgleichung ergibt sich aus dem newtonschen Kraftgesetz — 3 Punkte

$$F = ma$$
$$mg - Kv_z^3 = m\dot{v}_z.$$

Die stationäre Endgeschwindigkeit stellt sich bei Gleichheit von Schwer- und Reibungskraft ($F = m\dot{v}_z^{st} = 0$) ein zu

$$v_z^{\mathrm{st}} = \left(\frac{mg}{K}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

d) Die kinetische Energie aus dem Absprung transformiert sich in die potenzielle Energie des Schwerpunktes. Auf der Erde gilt für den Springer, dessen Schwerpunkt bei der Höhe h liegt, 2 Punkte

$$E_{\mathrm{kin}} = mg(h_1 - h).$$

Auf dem Mond gilt mit der Sprunghöhe h_1' und $g' = \frac{1}{6}g$ für denselben Sportler

$$E_{\mathrm{kin}} = mg'(h_1' - h).$$

Somit folgt

$$h_1' = 6(h_1 - h) + h.$$

e) Die Periode der kleinen Schwingungen ist $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 1\,\mathrm{s}$. Im nicht-inertialen System der Rakete ist die effektive Beschleunigung $4g$ (Schwerkraft und zusätzlich die Trägheitskraft der Translationbeschleunigung). Die Schwingungsperiode beiträgt somit 0,5 s. 2 Punkte

$\square$

Aufgabe 0.2 (Zug (11 Punkte))**.** Zwei Eisenbahnwaggons mit Massen m_1 und m_2 sind mit einer masselosen Kupplung derart verbunden, dass der Abstand der Schwerpunkte l beträgt. Die Waggons bewegen sich reibungsfrei entlang der x-Achse. Am zweiten Waggon wird mit der zeitabhängigen Kraft $\vec{F}(t) = \alpha t \vec{e}_x$ für $t \geq 0$ mit $\alpha = \text{const.} > 0$ gezogen.

a) Formulieren Sie die Zwangsbedingung für die Koordinaten der Schwerpunkte der Waggons x_1 und x_2 und geben Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ an.

b) Bestimmen Sie die Zwangskraft und die Lösung für $x_1(t)$ und $x_2(t)$.

c) Die Kupplung löst sich, falls die Zwangskraft den kritischen Wert F_c^* übersteigt. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Kupplung gelöst wird. Wie ändert sich das Ergebnis, falls am ersten Waggon mit $\vec{F}(t) = -\alpha t \vec{e}_x$ gezogen wird?

Lösung. a) Die Zwangsbedingung ergibt sich aus der unveränderlichen Länge l zwischen den Schwerpunkten, welche sich andererseits durch Koordinaten ausdrücken lässt

$$l = x_2 - x_1$$
$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1 - l = 0.$$

1 Punkt

Die Bewegungsgleichungen lauten damit

$$m_1 \ddot{x}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\lambda \tag{1}$$ 1 Punkt

$$m_2 \ddot{x}_2 = F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha t + \lambda . \tag{2}$$ 1 Punkt

b) Mit der Zwangsbedingung $x_2 = l + x_1$ erhält man aus der Bewegungsgleichung (2)

$$m_2 \ddot{x}_2 = m_2 \ddot{x}_1 = \alpha t + \lambda .$$

Aus dieser Bewegungsgleichung und der Gleichung (1) lassen sich alle Ableitungen eliminieren und wir erhalten eine Gleichung für λ.

$$0 = \frac{\alpha t}{m_2} + \lambda \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\lambda = -\frac{\alpha t m_1}{m_1 + m_2} .$$ 3 Punkte

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung (1)

$$\ddot{x}_1 = -\frac{\lambda}{m_1} = \frac{\alpha t}{m_1 + m_2} .$$ 1 Punkt

Diese wird unter Einsetzen der Anfangsbedingungen gelöst durch

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{\alpha}{m_1 + m_2} \frac{t^3}{6} .$$ 2 Punkte

c) Für den Zeitpunkt t_c, zu dem die Kupplung gelöst wird, erhält man, da λ gerade gleich der Zwangskraft ist,

$$F_c^* = |\lambda| = \frac{\alpha t_c m_1}{m_1 + m_2}$$

$$t_c = \frac{F_c^* (m_1 + m_2)}{\alpha m_1} .$$

Falls die äußere Kraft am Waggon 1 angreift, gilt analog

$$t_c = \frac{F_c^* (m_1 + m_2)}{\alpha m_2} .$$ 2 Punkte

□

Aufgabe 0.3 (Frosch (11 Punkte)). Betrachten Sie, am Ufer stehend, einen Frosch der Masse m, der am Ende eines auf dem Wasser ruhenden Seerosenblattes der Masse M mit Durchmesser L sitzt. Reibungseffekte seien vernachlässigbar.

a) Der Frosch springt unter dem Winkel α zur Horizontalen und landet am gegenüberliegenden Ende des Blattes.

   i) Bestimmen Sie die Bahnkurve von Frosch (Koordinaten $x(t)$ und $z(t)$) und Blatt (Koordinate $X(t)$).

   ii) Bestimmen Sie die Sprungdauer t_s und die Anfangsgeschwindigkeiten des Frosches und des Blattes unmittelbar nach dem Sprung.

b) Wie groß ist die Verschiebung des Blattes, wenn der Frosch vom einen Ende des Blattes zum anderen kriecht?

Lösung. a) Die Bewegungsgleichungen für die x- und z-Koordinaten des Frosches und die X-Koordinate des Landepunktes (Ende des Blattes) lauten

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{z} &= -mg \\ M\ddot{X} &= 0 \end{aligned}$$

i) Diese unabhängigen Gleichungen werden gelöst durch

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + tv_0 \cos\alpha = tv_0 \cos\alpha \\ z(t) &= z(0) + t\dot{z}'(0) - \frac{t^2}{2}g = tv_0 \sin\alpha - \frac{t^2}{2}g \\ X(t) &= L + u_0 t \end{aligned}$$

wobei wir die Anfangsbedingungen ($x(0) = z(0) = 0$, $X(0) = L$ und $\dot{x}(0) = \dot{z}(0) = \dot{X}(0) = 0$) eingesetzt haben. 3 Punkte

ii) Den Zusammenhang zwischen der Anfangsgeschwindigkeit des Frosches v_0 und der des Blattes u_0 erhält man aus der x-Komponente der Erhaltung des Gesamtimpulses

$$\begin{aligned} 0 &= mv_0 \cos\alpha + Mu_0 \\ u_0 &= -\frac{m}{M} v_0 \cos\alpha \end{aligned}$$

2 Punkte

Die Flugzeit bis zum Wiederaufprall ergibt sich aus der zweiten Nullstelle von $z(t)$.

$$\begin{aligned} 0 = z(t_\mathrm{F}) &= t_\mathrm{F} v \sin\alpha - \frac{t_\mathrm{F}^2}{2}g \\ t_\mathrm{F} &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \end{aligned}$$

1 Punkt

Die Absprunggeschwindigkeit v_0 erhält man durch die Beziehung $X(t_F) - x(t_F) = 0$

$$0 = X(t_F) - x(t_F) = L + u_0 t_F - t_F v_0 \cos\alpha = L - v_0 \cos\alpha(\frac{m}{M} + 1)\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{gL}{(\frac{m}{M} + 1)\sin 2\alpha}}.$$

2 Punkte

b) Da keine äußeren Kräfte in x-Richtung wirken, bleibt die x-Komponente des Schwerpunkts des Systems aus Frosch und Blatt unverändert. Es gilt

$$m0 + MX_s = m(l - s) + M(X_s - s)$$
$$s = \frac{ml}{m + M},$$

wobei X_s die Schwerpunktslage des Blattes ist und s die Verschiebung des Blattes ist, nachdem der Frosch zur anderen Seite gekrochen ist. 3 Punkte

□

Aufgabe 0.4 (Satellitenmanöver (9 Punkte))**.** Ein Erdsatellit der Masse m bewege sich auf einer Kreisbahn mit Radius R_1. Durch zwei Bremsmanöver kann der Satellit auf eine andere Kreisbahn mit Radius $R_2 < R_1$ gebracht werden: Nach einer kurzen Bremsung bewegt sich der Satellit auf einer elliptischen Bahn mit Aphelabstand R_1 und Perihelabstand R_2; die zweite Bremsung im Perihel führt auf die neue Kreisbahn mit Radius R_2.

a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 des Satelliten auf den Kreisbahnen?

b) Bestimmen Sie die minimale und die maximale Geschwindigkeit des Satelliten v_{min} und v_{max} auf der elliptischen Bahn.

c) Betrachten Sie den Fall, dass R_2 gleich dem Erdradius ist. Bestimmen Sie das Verhältnis zwischen der Umlaufperiode T_1 und der Zeit, bis der Satellit nach dem ersten Bremsmanöver auf der Erde landet.

Lösung. a) Auf der Kreisbahn bewegt sich ein Körper mit der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_Z = -\frac{v_1^2}{R_1}\vec{e}_r$, die durch die Gravitationskraft $\vec{F}_G$ verursacht wird.

$$m\vec{a}_Z = \vec{F}_G$$
$$-\frac{mv_1^2}{R_1}\vec{e}_r = -\frac{GM_E m}{R_1^2}\vec{e}_r$$
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_E}{R_1}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{GM_E}{R_2}}.$$

2 Punkte

b) Im Perihel und Aphel stehen $\vec{r}$ und $\vec{v}$ aufeinander senkrecht. Der Betrag des Drehimpulses ergibt sich daher jeweils aus dem Produkt der Beträge zu

$$L = \left|\vec{L}\right| = mR_1 v_{\text{min}} = mR_2 v_{\text{max}}.$$ 1 Punkt

Damit folgt für das Verhältnis der extremalen Geschwindigkeiten

$$\frac{v_{\text{max}}}{v_{\text{min}}} = \frac{R_1}{R_2}.$$ 1 Punkt

Aus der Energieerhaltung folgt für die Energie E bei Perihel und Aphel

$$\frac{mv_{\text{max}}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\text{min}}} = \frac{mv_{\text{min}}^2}{2} - \frac{GMm}{r_{\text{max}}}.$$ 1 Punkt

Unter Verwendung des Verhältnisses der extremalen Geschwindigkeiten erhält man

$$\begin{aligned} v_{\text{min}}^2\left(\frac{R_1^2}{R_2^2} - 1\right) &= 2GM\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \\ v_{\text{min}} &= \sqrt{\frac{GMR_2}{R_1(R_1+R_2)}}. \end{aligned}$$ 2 Punkte

c) Aus dem dritten Keplerschen Gesetz folgt

$$\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3}{a_1^3} = \left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)^3$$

Das Landemanöver dauert daher

$$T_L = \frac{1}{2} T \left(\frac{R_1+R_2}{2R_1}\right)^{\frac{3}{2}}.$$ 2 Punkte

□

Aufgabe 0.5 (Perle auf Schraubenlinie (4 Punkte))**.** Betrachten Sie die Bewegung einer Perle der Masse m auf der unendlichen Schraubenlinie, die in Zylinderkoordinaten durch $\rho = R$ und $z = b\varphi$ mit Konstanten R und b gegeben ist. Es wirke das homogene Schwerefeld $-g\vec{e}_z$. Vernachlässigen Sie Reibungseffekte.

a) Betrachten Sie den Winkel φ als generalisierte Koordinate und bestimmen Sie die kinetische Energie und die Lagrange-Funktion des Systems.

b) Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Bewegungsgleichung und bestimmen Sie die Lösung.

Lösung. a) Unter Verwendung der Zylinderkoordinaten und der Zwangsbedingungen erhält man für die kinetische Energie

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(R^2 + b^2)\dot{\varphi}^2$$ 1 Punkt

und die Lagrange-Funktion

1 Punkt
$$L = T - V = \frac{m}{2}(R^2 + b^2)\dot{\varphi}^2 - mgb\varphi.$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$$
$$m(R^2 + b^2)\ddot{\varphi} = -mgb.$$ 1 Punkt

Die allgemeine Lösung lautet daher

1 Punkt
$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t - \frac{gb}{b^2 + R^2}\frac{t^2}{2}.$$

□