Semestralklausur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. F. v. Feilitzsch

Sommersemester 2008

12.7.2008

Musterlösung

Aufgabe 1:

Die Zählrate ist

$$d\dot{N} \;=\; L\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega \tag{1}$$

mit der Luminosität L des Strahls, dem Streuquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und dem vom Detektor abgedeckten (kleinen) Raumwinkelelement $d\Omega$.

Für die Luminosität muss man zuerst die Aktivität des Radiumpräparats berechnen. Aus dem exponentiellen Zerfallsgesetz folgt durch Ableiten

$$\dot{N}(t) \;=\; -\lambda N(0)e^{-\lambda t} \tag{2}$$

Also ist die Aktivität zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $N(0) = N_0$:

$$A \;=\; |\dot{N}(0)| \;=\; \lambda N_0 \tag{3}$$

N_0 ergibt sich dabei aus der Masse des Präparats und der Molmasse von Radium 226:

$$N_0 \;=\; \frac{m}{M_{Ra}}\,N_A \tag{4}$$

Von den emittierten α-Teilchen wird der Bruchteil $q = 0.05$ auf die Kupferfolie gelenkt, also ist der Teilchenstrom

$$J_N \;=\; qA \tag{5}$$

Daraus ergibt sich die Luminosität des Strahls:

$$L \;=\; n_t d_t J_N \tag{6}$$

mit der Anzahldichte n_t der Streuzentren und der Dicke d_t des Targets. n_t erhält man aus der Massendichte und der Molmasse von Kupfer:

$$n_t \;=\; \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}\,N_A \tag{7}$$

Alles in allem:

$$\begin{aligned} L \;&=\; \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu}}\,N_A\,d_t\,q\,\frac{\ln 2}{\tau_{1/2}}\,\frac{m}{M_{Ra}}\,N_A && (8)\\ &= && (9)\\ &=\; 1.54\cdot 10^{33}\,/\mathrm{m}^2\mathrm{s} && (10)\end{aligned}$$

Das Raumwinkelelement des Detektors ist

$$d\Omega \;=\; \frac{dF}{r^2} \;=\; \frac{(0.03\,\mathrm{m})^2}{(3\,\mathrm{m})^2} \;=\; 10^{-4} \tag{11}$$

Die Rutherfordsche Streuformel für $\vartheta = 45°$, α-Teilchen ($Z_1 = 2$), Kupfer ($Z_2 = 29$) und $E = 4.78\,\mathrm{MeV} = 7.66 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$ lautet:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta = 45°) \;=\; \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\cdot 29\cdot e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(22.5°)} \tag{12}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/Vm}}\frac{2\cdot 29\cdot(1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\cdot 7.66\cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}}\right)^2\frac{1}{0.0214} \tag{13}$$

$$= 8.92\cdot 10^{-28}\,\mathrm{m}^2 \tag{14}$$

Damit folgt für die Zählrate:

$$d\dot{N} \;=\; L\frac{d\sigma}{d\Omega}\,d\Omega \;=\; 1.54\cdot 10^{33}\,/\mathrm{m}^2\mathrm{s}\cdot 8.92\cdot 10^{-28}\,\mathrm{m}^2\cdot 10^{-4} \;=\; 137.4\,\mathrm{Hz} \tag{15}$$

Aufgabe 2:

a) Der Ansatz für die linke Halbachse ist

$$\varphi_I(x) \;=\; Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \tag{16}$$

Einsetzen in die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung ergibt mit $V(x<0) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2)\left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right) \;\stackrel{!}{=}\; E\left(Ae^{ikx} + Be^{-ikx}\right) \tag{17}$$

also

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} \;=\; E \tag{18}$$

bzw.

$$k(E) \;=\; \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE} \tag{19}$$

Der Ansatz für die rechte Halbachse ist

$$\varphi_{II}(x) \;=\; Ce^{ik'x} \tag{20}$$

muss die Schrödinger-Gleichung mit dem konstanten Potential V_0 erfüllen, also

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(-k'^2) + V_0\right)Ce^{ik'x} \;\stackrel{!}{=}\; ECe^{ik'x} \tag{21}$$

also

$$\frac{\hbar^2k'^2}{2m} \;=\; E - V_0 \tag{22}$$

bzw.

$$k'(E) \;=\; \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-V_0)} \tag{23}$$

Anschlussbedingungen bei $x = 0$:

Stetigkeit von $\varphi(x)$:

$$\varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) \quad \Rightarrow \quad A + B = C \tag{24}$$

Stetigkeit von $\varphi'(x)$:

$$\varphi_I'(0) = \varphi_{II}'(0) \quad \Rightarrow \quad ikA - ikB = ik'C \tag{25}$$

Elimination von C liefert B:

$$B = \frac{k - k'}{k + k'} A \tag{26}$$

und daraus folgt C:

$$C = \frac{2k}{k + k'} A \tag{27}$$

(A ist eine Normierungskonstante, deren Wert nicht wichtig ist.)

Also insgesamt:

$$\varphi_I(x) = A \left(e^{ikx} + \frac{k - k'}{k + k'} e^{-ikx} \right) \tag{28}$$

$$\varphi_{II}(x) = A \frac{2k}{k + k'} e^{-ik'x} \tag{29}$$

mit

$$k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m \cdot 2V_0} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{4mV_0} \tag{30}$$

und

$$k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(2V_0 - V_0)} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mV_0} \tag{31}$$

b) Die Wahrscheinlichkeit für Reflektion ist

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{k - k'}{k + k'} \right|^2 = \frac{(\sqrt{4} - \sqrt{2})^2}{(\sqrt{4} + \sqrt{2})^2} = 0.066 \tag{32}$$

Aufgabe 3:

a) Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist gemäß Angabe

$$w(r) = r^2 R^2(r) = 4a_0^{-3} r^2 e^{-2r/a_0} \tag{33}$$

Ableiten nach r ergibt:

$$w'(r) = 8a_0^{-3} r (1 - r/a_0) e^{-2r/a_0} \tag{34}$$

Die Ableitung hat zwei Nullstellen: Bei $r = 0$ ist ein Minimum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit, bei $r = a_0$ das gesuchte Maximum.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $W(r)$ innerhalb einer Kugel mit Radius r ist

$$W(r) = \int_0^r dr' \int_0^\pi d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, r'^2 \sin\vartheta' \, |\psi(r', \vartheta', \varphi')|^2 \tag{35}$$

$$= \int_0^r dr' \, r'^2 R_{nl}^2(r') \int_0^\pi d\vartheta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \sin\vartheta' \, |Y_{lm}(\vartheta', \varphi')|^2 \tag{36}$$

Wegen der Normiertheit der Y_{lm} ist das Winkelintegral den Wert 1, also

$$W(r) \;=\; \int\limits_0^r dr'\, r'^2 R_{nl}^2(r') \qquad (37)$$

Die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit $w(r)$ erhält man daraus durch Ableiten:

$$w(r) \;=\; W'(r) \;=\; r^2 R_{nl}^2(r) \qquad (38)$$

Anschaulich: Volumenelement der Kugelschale dr ist proportional zu r^2.

b) Die Anzahl z der Nullstellen der Radialfunktion ist durch die Quantenzahl k festgelegt: $z = k - 1$. k wiederum ist gegeben durch $n := l + k$, also $k = n - l$. Insgesamt: $z = n - l - 1$, d.h. $l = n - z - 1 = 0$. Also $R_{30}(r)$.

c) Dazu muss man eigentlich die radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeit(-sdichte)

$$w(r) \;=\; r^2 R_{30}^2(r) \qquad (39)$$

zwischen r_1 und r_2 integrieren, aber da das Intervall dr klein ist, kann man näherungsweise das Integral durch ein Produkt ersetzen:

$$W \;=\; w(r)dr \;=\; w(8a_0) \cdot 0.2a_0 \qquad (40)$$

mit

$$w(r) \;=\; r^2 R_{30}^2(r) \;=\; \frac{4}{27a_0^3}\left[1 - \frac{2}{3}\frac{r}{a_0} + \frac{2}{27}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2\right]^2 r^2\, e^{-2r/3a_0} \qquad (41)$$

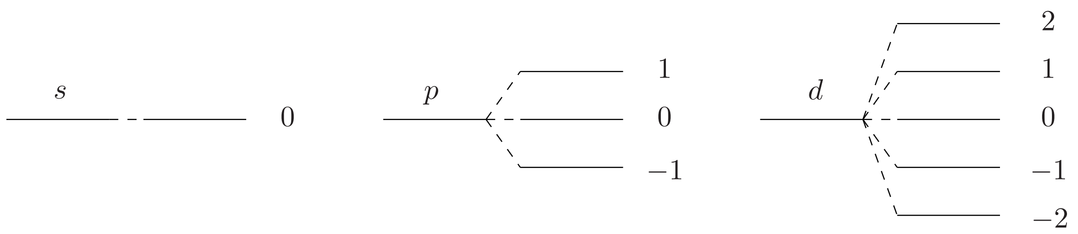
Also

$$W \;=\; \frac{4}{27a_0^3}\left[1 - \frac{2}{3}\cdot 8 + \frac{2}{27}\cdot 8^2\right]^2 (8a_0)^2\, e^{-2\cdot 8/3} \cdot 0.2a_0 \;=\; 0.0015 \qquad (42)$$

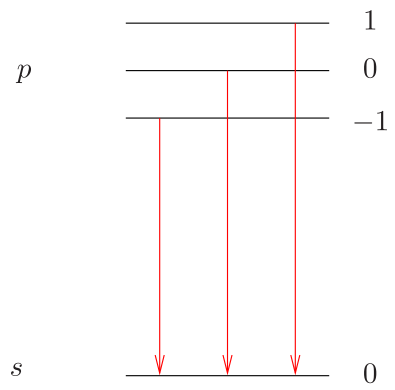
Aufgabe 4:

a) Normaler Zeeman-Effekt. nl spaltet auf in $2l + 1$ Unterniveaus.

b) Die Aufspaltungen und die zugehörigen Werte von m sehen so aus:

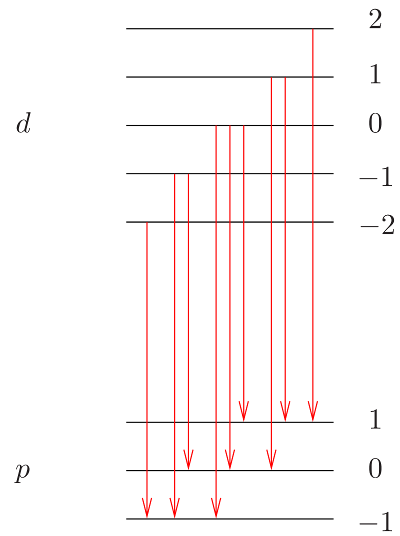


c) Beim Übergang von p nach s sind von den 3 möglichen Übergängen alle erlaubt (Auswahlregel $\Delta m = 0, \pm 1$):



Da die Energien dieser Übergänge unterschiedlich sind, beobachtet man 3 Spektrallinien.

Bei einem Übergang von einem d-Niveau in ein p-Niveau wären ohne Auswahlregel Δm 15 Übergänge möglich, mit Auswahlregel aber nur die eingezeichneten 9:



Da die Abstände im p-Niveau dieselben sind wie im d-Niveau, beobachtet man nur 3 unterschiedliche Spektrallinien.

Aufgabe 5:

Die Konfiguration des ersten angeregten Zustandes ist

$$1s^2\,2s^2\,2p^6\,3s\,3p \tag{43}$$

Seine Energie ist

$$E = 2E_{10} + 2E_{20} + 6E_{21} + E_{30} + E_{31} \tag{44}$$

wobei die Indizes für n, l stehen.

Die möglichen Werte für L, S, J ergeben sich aus

$$L = |l_1 - l_2| \ldots, l_1 + l_2 \quad , \quad S = 0, 1 \quad , \quad J = |L - S|, \ldots, L + S \tag{45}$$

mit $l_1 = 0$, $l_2 = 1$. L kann daher nur den Wert 1 annehmen und S die Werte 0,1. Also:

$$L = 1, S = 0 \quad \rightarrow \quad J = 1 \quad \Rightarrow \quad {}^1P_1 \tag{46}$$

$$L = 1, S = 1 \quad \rightarrow \quad J = 0, 1, 2 \quad \Rightarrow \quad {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2 \tag{47}$$

Die Dimensionen der einzelnen spektroskopischen Niveaus sind ihren J-Werten entsprechend

$$d({}^1P_1) = 3 \quad , \quad d({}^3P_0) = 1 \quad , \quad d({}^3P_1) = 3 \quad , \quad d({}^3P_2) = 5 \tag{48}$$

Das ergibt zusammen 12 für die Gesamtdimension.

Aufgabe 6:

a) Der Normierungsfaktor A ergibt sich aus

$$g(\varepsilon_1)f(\varepsilon_1) + g(\varepsilon_2)f(\varepsilon_2) \stackrel{!}{=} N \tag{49}$$

Wegen der Nichtentartetheit der beiden Energien und mit $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \eta$ bedeutet dies:

$$N = f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2) = A + Ae^{-\eta/kT} \tag{50}$$

also

$$A = \frac{N}{1 + e^{-\eta/kT}} \tag{51}$$

und

$$f(\varepsilon) = \frac{Ne^{-\varepsilon/kT}}{1 + e^{-\eta/kT}} \tag{52}$$

b) Die Gesamtenergie E ist

$$E = \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) + \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) = \frac{N\eta e^{-\eta/kT}}{1 + e^{-\eta/kT}} \tag{53}$$

Für $T \rightarrow 0$ ergibt sich

$$E(T = 0) = \frac{N\eta e^{-\infty}}{1 + e^{-\infty}} = 0 \tag{54}$$

Für $T \rightarrow \infty$ gilt:

$$E(T = \infty) = \frac{N\eta e^{-0}}{1 + e^{-0}} = \frac{N\eta}{2} \tag{55}$$

c) Die Wärmekapazität ist

$$\begin{aligned} C &= \frac{dE}{dT} && (56)\\ &= \frac{1}{(1 + e^{-\eta/kT})^2} \left[(1 + e^{-\eta/kT})N\eta \left(+\frac{\eta}{kT^2}\right) e^{-\eta/kT} - N\eta e^{-\eta/kT} \left(+\frac{\eta}{kT^2}\right) e^{-\eta/kT}\right] && (57)\\ &= N \frac{\eta^2}{kT^2} \frac{e^{-\eta/kT}}{(1 + e^{-\eta/kT})^2} && (58) \end{aligned}$$

Für $T \rightarrow \infty$ gilt:

$$C(T = \infty) = N \cdot 0 \cdot \frac{e^{-0}}{(1 + e^{-0})^2} = 0 \tag{59}$$

Dies ist plausibel, da für im Limes $T \rightarrow \infty$ oberes und unteres Energieniveau gleichstark besetzt sind. Die Energie geht also – wie in b) gezeigt – gegen einen Grenzwert, der auch bei noch so hoher T nicht überschritten wird, und die Wärmekapazität geht infolgedessen gegen 0.

Aufgabe 7:

a) Der Druck ist gemäß der Angabe

$$p = \frac{2E}{3V} \tag{60}$$

Die Gesamtenergie E ergibt sich mit der Fermi-Dirac-Verteilung und der Zustandsdichte per

$$E = \int_0^\infty d\varepsilon\, \varepsilon\, g(\varepsilon)\, f_{FD}(\varepsilon) \tag{61}$$

Da $T = 0$ vorgegeben ist, hat $f_{FD}(\varepsilon)$ den Wert 1 für $\varepsilon < \varepsilon_{F0}$ und den Wert 0 für $\varepsilon > \varepsilon_{F0}$. Damit wird das Integral zu

$$E = \int_0^{\varepsilon_{F0}} d\varepsilon\, \varepsilon\, \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon} \tag{62}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{\varepsilon_{F0}} d\varepsilon\, \varepsilon^{3/2} \tag{63}$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2}{5}\varepsilon_{F0}^{5/2} \tag{64}$$

und der Druck ist

$$p = \frac{2E}{3V} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{2}{5}\varepsilon_{F0}^{5/2} \tag{65}$$

$$= \frac{2}{15\pi^2}\cdot\left(\frac{2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}{(1.055\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js})^2}\right)^{3/2}\cdot(7.04\cdot 1.602\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J})^{5/2} \tag{66}$$

$$= 3.82\cdot 10^{10}\,\mathrm{Pa} \tag{67}$$

Dies ist ungefähr das 380000-fache des Atmosphärendrucks von 1013 hPa.

b) Es gilt

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}m_e\overline{v^2} = \frac{3}{5}\varepsilon_{F0} \tag{68}$$

Also

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{6\varepsilon_{F0}}{5m_e}} \tag{69}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{5\cdot 9.11\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}}}\sqrt{\varepsilon_{F0}} \tag{70}$$

$$= 1.15\cdot 10^{15}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}\sqrt{\mathrm{J}}}\cdot\sqrt{\varepsilon_{F0}} \tag{71}$$

Wegen

$$1\,\mathrm{J} = 6.24\cdot 10^{18}\,\mathrm{eV} \tag{72}$$

ist

$$1\sqrt{\mathrm{J}} = 2.50\cdot 10^{10}\sqrt{\mathrm{eV}} \tag{73}$$

und so:

$$v_{rms} \;=\; \frac{1.15\cdot 10^{15}}{2.50\cdot 10^{10}}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}\sqrt{\mathrm{eV}}}\cdot\sqrt{\varepsilon_{F0}} \;=\; 4.6\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_{F0}}{\mathrm{eV}}} \tag{74}$$

c) Die Verteilung der Elektronenenergien ist

$$n(\varepsilon) \;=\; g(\varepsilon) f_{FD}(\varepsilon) \tag{75}$$

wobei wegen $T=0$ die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion $f_{FD}(\varepsilon)$ den Wert 1 für $\varepsilon < \varepsilon_{F0}$ und den Wert 0 für $\varepsilon > \varepsilon_{F0}$ hat. Also ist

$$n(\varepsilon) \;=\; \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon} \tag{76}$$

für $\varepsilon < \varepsilon_{F0}$ und 0 für $\varepsilon > \varepsilon_{F0}$. Hier kann man $\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2}$ durch die angegebene Fermi-Energie

$$\varepsilon_{F0} \;=\; \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{77}$$

ausdrücken:

$$\left(\frac{2m_e}{\hbar^2}\right)^{3/2} \;=\; 3\pi^2\,\frac{N}{V}\,\varepsilon_{F0}^{-3/2} \tag{78}$$

und erhält so

$$n(\varepsilon) \;=\; \frac{3}{2}N\varepsilon_{F0}^{-3/2}\sqrt{\varepsilon} \tag{79}$$

Daraus folgt per

$$n(v)dv \;=\; n(\varepsilon)d\varepsilon \tag{80}$$

bzw.

$$n(v) \;=\; n(\varepsilon)\,\frac{d\varepsilon}{dv} \tag{81}$$

und

$$\varepsilon \;=\; \frac{1}{2}m_e v^2 \quad , \quad \frac{d\varepsilon}{dv} \;=\; m_e v \tag{82}$$

die Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten:

$$n(v) \;=\; \frac{3}{2}N\varepsilon_{F0}^{-3/2}\sqrt{\frac{1}{2}m_e v^2}\,m_e v \tag{83}$$

$$\;=\; \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{m_e}{\varepsilon_{F0}}\right)^{3/2} N v^2 \tag{84}$$

Hier ist noch zu beachten, dass die maximale Elektronengeschwindigkeit durch

$$\frac{1}{2}m_e v_{max}^2 \;=\; \varepsilon_{F0} \quad\Rightarrow\quad v_{max} \;=\; \sqrt{\frac{2\varepsilon_{F0}}{m_e}} \tag{85}$$

gegeben ist, und die vollständige Geschwindigkeitsverteilung lautet:

$$n(v) \;=\; \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{m_e}{\varepsilon_{F0}}\right)^{3/2} N v^2\,\Theta(v_{max}-v) \tag{86}$$