2. Probeklausur Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2019/20
07. Januar 2020

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Die Wasserfontäne *Jet d'eau* im Genfer See ist 140 m hoch.

(a) Wie schnell ist der Wasserstrahl beim Verlassen der Pumpe?

(b) Durch den Wind hat das Wasser eine konstante Geschwindigkeit $v_x = 5$ km/h in x-Richtung. Wie weit enfernt von der Pumpe trifft der Strahl auf die Wasseroberfläche auf?

(c) Wieviel kg Wasser werden pro Sekunde in die Luft geschossen, wenn die Pumpleistung 1 MW beträgt (Ersatzergebnis: 728,12 kg)?

(d) In Wirklichkeit werden nur 500 kg Wasser pro Sekunde verschossen. Wieso erhält man mit der Rechnung aus (c) einen höheren Wert?

Lösung

(a) Mit dem Energieerhaltungssatz $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ erhält man die Geschwindigkeit:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \tag{1}$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 52,4\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2}$$

[2]

(b) Für die resultierende Geschwindigkeit in y-Richtung gilt:

$$v = v_0 - gt, \tag{3}$$

daraus erhält man mit v_0 aus Teilaufgabe (a) die Flugzeit:

$$t = \frac{2v_0}{g} = 10,7\ \text{s}. \tag{4}$$

[**2**]

Die Strecke in x-Richtung beträgt damit ($v_x = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{5}{3{,}6}\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$):

$$s_x = v_x \cdot t = 5\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 10,7\ \text{s} = 14,8\ \text{m}. \tag{5}$$

[**1**]

(c) Aus der Definition der Leistung erhält man:

$$P = \frac{\Delta E_{pot}}{\Delta t} = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} \tag{6}$$

In einer Sekunde fließen also

$$\frac{m}{t(1\ \text{s})} = \frac{P}{g\Delta h} = 729,93\ \frac{\text{kg}}{\text{s}} \tag{7}$$

Wasser aus der Fontäne.

[**3**]

(d) In Aufgabe (c) wurde der Luftwiderstand nicht berücksichtigt. Tatsächlich muss das Wasser also schneller als 52,4 m/s sein, um 140 m Höhe zu erreichen. Man benötigt also mehr Leistung und deshalb wird weniger Wasser bei der vorgegebenen Leistung von 1 MW hochgeschossen.

[**1**]

Aufgabe 2 (16 Punkte)

Ein Kind wirft einen Ball der Masse $m_1 = 500\,\text{g}$ von einem Balkon auf einer Höhe $h = 50\,\text{m}$ mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ horizontal von sich weg. Ein zweites Kind, welches $x_2 = 20\,\text{m}$ vom Haus entfernt auf dem Boden steht, schießt zeitgleich mit einer Armbrust einen Pfeil der Masse $m_2 = 200\,\text{g}$ senkrecht nach oben.

(a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Objekte getrennt auf. Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_2, mit welcher der Pfeil abgefeuert werden muss, damit er den Ball im Flug trifft.

(b) Berechnen Sie den Winkel α, unter welchem sich die Flugbahnen der Geschosse kreuzen.

Nun bleibt das Geschoss im Ball stecken.

(c) Stellen Sie die Bahnkurve $r(t)$ der neuen Einheit Pfeil-Ball ab dem Zeitpunkt der Kollision auf und berechnen Sie, wie weit vom Haus entfernt diese auf dem Boden auftrifft.

Lösung

(a) Der Ball wird horizontal abgeworfen: $\vec{v_1} = v_1\vec{e_x}$.
Der Bolzen wird senkrecht nach oben abgeschossen: $\vec{v_2} = v_2\vec{e_y}$.

Auf beide wirkt die Gravitation der Erde in negative y-Richtung. Somit ergibt sich für die beiden Bewegungsgleichungen in vektorieller Darstellung

$$\vec{r}_{\text{Ball}}(t) = \begin{pmatrix} v_1 \cdot t \\ h - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\vec{r}_{\text{Bolzen}}(t) = \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

[**2**]

Beide Objekte sollen sich zum Zeitpunkt $t = t_1$ treffen.

$$\vec{r}_{\text{Ball}}(t_1) = \vec{r}_{\text{Bolzen}}(t_1) \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad v_1 \cdot t_1 = x_2\,, \quad \Rightarrow t_1 = \frac{x_2}{v_1} = 1{,}0\,\text{s} \tag{11}$$

$$v_2 \cdot t_1 - \frac{1}{2} g \cdot {t_1}^2 = h - \frac{1}{2} g \cdot {t_1}^2 \tag{12}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{h}{t_1} = 50\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{13}$$

[**2**]

(b)

$$\vec{v}_{\text{Ball}}(t_1) = \begin{pmatrix} v_1 \\ -g \cdot t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ -9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\vec{v}_{\text{Bolzen}}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 - g \cdot t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 40{,}19\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Wir können den Winkel über den Winkel des Balls zur vertikalen berechnen:

$$\tan(\alpha - 90°) = \frac{v_{y\text{Ball}}}{v_{x\text{Ball}}} \tag{16}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctan \frac{v_{y\text{Ball}}}{v_{x\text{Ball}}} + 90° = 116{,}1° \tag{17}$$

[**4**]

(c) Bei der Kollision von Bolzen und Ball handelt es sich um einen inelastischen Stoß. Der Gesamtimpuls bleibt also erhalten (zumindest für die infinitesimale Dauer des Stoßes).

$$\vec{p}_{\text{Ball}} + \vec{p}_{\text{Bolzen}} = \vec{p}_{\text{neu}} \tag{18}$$

$$m_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ -g \cdot t_1 \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 - g \cdot t_1 \end{pmatrix} = (m_1 + m_2) \begin{pmatrix} v_{\text{x,neu}} \\ v_{\text{y,neu}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

[**1**]

Aus den einzelnen Komponenten ergibt sich

$$v_{\mathrm{x,neu}} = \frac{m_1}{m_1+m_2} v_1 = \frac{500\,\mathrm{g}}{500\,\mathrm{g}+200\,\mathrm{g}} \cdot 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{20}$$

$$= 14{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{21}$$

$$v_{\mathrm{y,neu}} = \frac{m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot g \cdot t - m_2 \cdot g \cdot t}{m_1+m_2} \tag{22}$$

$$= \frac{200\,\mathrm{g} \cdot 50\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 500\,\mathrm{g} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 200\,\mathrm{g} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{500\,\mathrm{g}+200\,\mathrm{g}} \tag{23}$$

$$= 4{,}48\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{24}$$

[**2**]

Nun brauchen wir noch die Kollisionshöhe als neuen Anfangsparameter:

$$h' = y(t_1) = h - \frac{1}{2} g \cdot {t_1}^2 = 50\,\mathrm{m} - 4{,}91\,\mathrm{m} = 45{,}1\,\mathrm{m} \tag{25}$$

Damit kann man die neue Bewegungsgleichung aufstellen und es ergibt sich ab der Kollision

$$\vec{r}_{\mathrm{neu}}(t) = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{x,neu}} \cdot t + x_2 \\ h' + v_{\mathrm{y,neu}} - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 20\,\mathrm{m} \\ 45{,}1\,\mathrm{m} + 4{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 4{,}9\,\mathrm{m/s}^2 \cdot t^2 \end{pmatrix} \tag{26}$$

[**2**]

Die Wurfweite findet man über den Zeitpunkt t_2, zu welchem der Bolzen-Ball auf Höhe 0 ist. Umstellen nach t_2 liefert

$$t_2 = \frac{-v_{\mathrm{y,neu}} \pm \sqrt{{v_{\mathrm{y,neu}}}^2 + 2g \cdot h'}}{-g} = \begin{cases} -2{,}61\,\mathrm{s} & \text{für } + \\ 3{,}52\,\mathrm{s} & \text{für } - \end{cases} \tag{27}$$

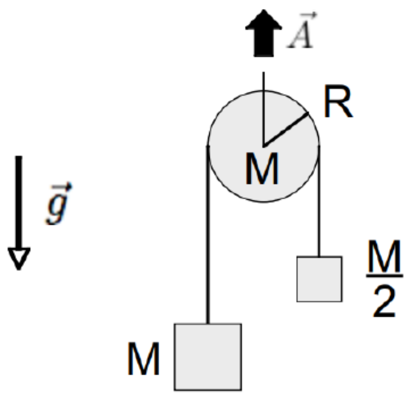
Natürlich ist nur die positive Lösung physikalisch sinnvoll, woraus sich für die Wurfweite ergibt

$$x(t_2) = 20\mathrm{m} + 14{,}3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 3{,}52\,\mathrm{s} = 70{,}3\,\mathrm{m} \tag{28}$$

[**3**]

Aufgabe 3 (10 Punkte)

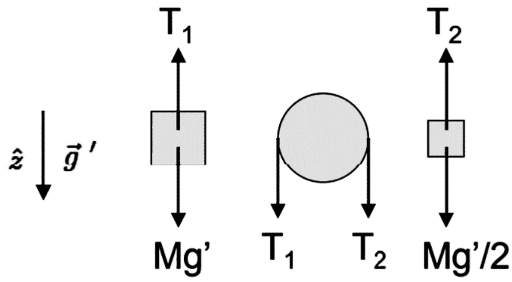
Eine Atwood'sche Fallmaschine besteht aus einer massiven Rolle (einer homogenen kreisförmigen Scheibe mit dem Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2} M R^2$), die zwei Blöcke der Massen M und $M/2$ über ein Seil miteinander verbindet. Das Seil rutscht nicht, wenn sich die Rolle dreht. Die Fallmaschine bewegt sich nun mit einer Beschleunigung A nach oben. Es wirkt die Gravitation g.



(a) Berechnen Sie die Nettobeschleunigung der beiden Blöcke in Abhängigkeit von g und A. Berechnen Sie diese auch in einem Inertialsystem. Nehmen Sie dabei *keine* konstante Seilspannung im gesamten Seil an.

(b) Wie groß muss die Beschleunigung A sein, damit der Block der Masse M im Inertialsystem in Ruhe ist?

Lösung



(a) Diese Aufgabe lässt sich am einfachsten im mitbeschleunigten Referenzsystem lösen, in dem sich die Rolle und die Blöcke in einem effektiven Gravitationsfeld $g' = g + A$ bewegen (siehe Abbildung). Die Kräftediagramme für die Rolle und die Blöcke lauten (mit positiver z-Richtung in Richtung der effektiven Beschleunigung):

$$Ma_1' = Mg' - T_1 \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}Ma_2' = \frac{1}{2}Mg' - T_2 \tag{30}$$

$$I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha = R(T_1 - T_2) \tag{31}$$

[**4**]

Durch die masselosen Seile erhält man die Zwangsbedingung:

$$a_1' = R\alpha = -a_2' \equiv a \tag{32}$$

[**1**]

Kombiniert man (29) und (30)

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}Mg' - \frac{3}{2}Ma \tag{33}$$

Kombiniert man (31) und (32) und setzt gleich mit (33):

$$T_1 - T_2 = \frac{1}{2}MR\alpha = \frac{1}{2}Ma \tag{34}$$

$$\Rightarrow a = g' - \frac{3}{4}g' = \frac{1}{4}(g + A) \tag{35}$$

[**2**]

Um die Beschleunigungen im Inertialsystem zu erhalten, muss noch die Systembeschleunigung A zu den eben ermittelten Beschleunigung vorzeichenrichtig dazu addiert werden:

$$a_1 = a - A = \frac{1}{4}g - \frac{3}{4}A \tag{36}$$

$$a_2 = -a - A = -\frac{1}{4}g - \frac{5}{4}A \tag{37}$$

$$\tag{38}$$

[**2**]

Die Richtung dieser Beschleunigungen ist nach unten, also bewegt sich der Block mit Masse $M/2$ nach oben im Inertialsystem.

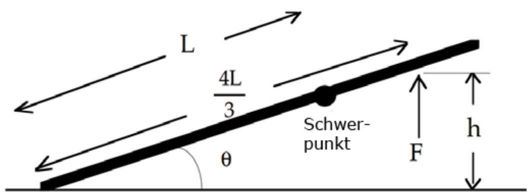
(b) Damit die erste Masse im Inertialsystem in Ruhe bleibt muss gelten:

$$A = \frac{g}{3} \tag{39}$$

[**1**]

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die Abbildung zeigt ein vereinfachtes Modell der Kräfte beim Liegestützen machen. Angenommen, der Körper eines Menschens habe die Form eines Balkens mit Masse M und Trägheitsmoment I_T um die Drehachse (die Zehen). Der Massenschwerpunkt befinde sich im Abstand L von der Drehachse und die dargestellte Kraft (aufgrund der Arme) hat ausschließlich eine vertikale Komponente, die im Abstand $4L/3$ von der Drehachse wirkt.

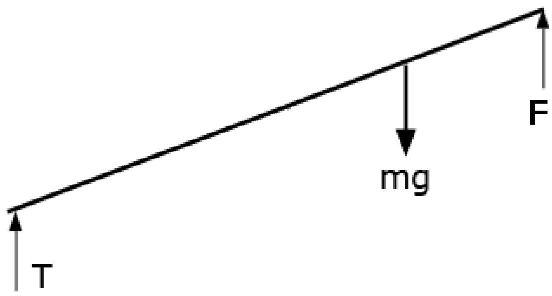


(a) Zeichnen Sie ein Kräftediagramm mit allen Kräften, die auf den Balken wirken.

(b) Ermitteln Sie den Betrag der Kraft F, die nötig ist, um den Balken im Gleichgewicht zu halten und zeigen Sie, dass diese unabhängig vom Winkel θ und damit unabhängig von der Höhe h ist.

(c) Bestimmen Sie die den Betrag der Kraft, der an den Zehen auf den Balken ausgeübt wird.

Lösung



(a) **[2]**

(b) Das Drehmoment um die Zehen muss verschwinden:

$$MgL\cos\theta - F\left(\frac{4L}{3}\right)\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{4}Mg \tag{40}$$

[2]

(c) An den Armen gilt:

$$T + F = Mg \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{4}Mg \tag{41}$$

[1]

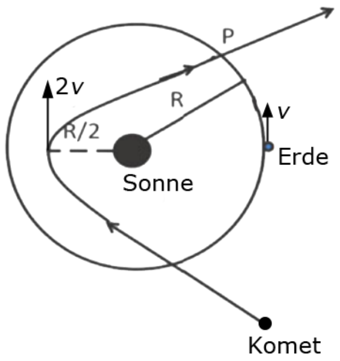
Aufgabe 5 (11 Punkte)

(a) Nehmen Sie an, dass sich die Erde (Masse M_E) mit der Geschwindigkeit v in einer kreisförmigen Bahn mit Radius R um die Sonne (Masse M_S) bewegt. Zeigen Sie, dass $GM_S = v^2R$

(b) Ein Komet befindet sich nun in derselben Ebene, wie die Erdumlaufbahn (siehe Abbildung). Am sonnennächsten Punkt hat er den Abstand $R/2$ zum Zentrum der Sonne und die Geschwindigkeit $2v$. Zeigen Sie unter Verwendung der Gleichung aus Teilaufgabe (a), dass die Gesamtenergie des Kometen Null ist.

(c) Am Punkt P kreuzen sich die Umlaufbahnen von Erde und Komet. Ermittlen Sie die Komponente der Geschwindigkeit des Kometen, die tangential zur Erdumlaufbahn an diesem Punkt ist. Verwenden Sie die Drehimpulserhaltung.

(d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit am Punkt P mittels Energieerhaltung. Zeigen Sie außerdem, dass der Komet die Erdumlaufbahn in einem Winkel von 45° schneidet.



Lösung

(a) Es herrscht ein Kräftegleichgewicht zwischen Zentripetalkraft und Gravitation:

$$\frac{GM_EM_S}{R^2} = \frac{M_Ev^2}{R} \tag{42}$$

bzw.

$$GM_S = v^2R \tag{43}$$

[**2**]

(b) Die Gesamtenergie des Kometen am sonnennächsten Punkt beträgt

$$E = \frac{1}{2}M_K(2v)^2 - \frac{GM_KM_S}{R/2} \tag{44}$$

Setzt man die Bewegungsgleichung aus (a) ein erhält man:

$$E = \frac{1}{2}M_K(2v)^2 - M_K\frac{v^2R}{R/2} \tag{45}$$

$$= 2M_Kv^2 - 2M_Kv^2 \tag{46}$$

$$= 0 \tag{47}$$

[**2**]

(c) Am Punkt der nächsten Annäherung ist die Geschwindigkeit des Kometen senkrecht zum Bahnvektor. Damit beträgt der Drehimpuls

$$L = M_K \cdot (2v) \cdot \left(\frac{R}{2}\right) = M_KvR \tag{48}$$

Sei v_t die Geschwindigkeit des Kometen tangential zur Erdumlaufbahn am Punkt P. Der Drehimpuls an diesem Punkt ist

$$L' = M_Kv_tR \tag{49}$$

[**2**]

Es gilt die Drehimpulserhaltung:

$$M_Kv_tR = M_KvR \tag{50}$$

also muss $v = v_t$ sein.

[1]

(d) Die Gesamtenergie des Kometen am Punkt P beträgt

$$E' = \frac{1}{2} M_K (v')^2 - \frac{G M_S M_K}{R} = 0 \tag{51}$$

mit v' der Geschwindigkeit des Kometen am Punkt P, das $E' = E = 0$ aufgrund der Energieerhaltung gilt. Setzt man in diese Gleichung nun Gleichung (43) ein, ergibt sich

$$E' = \frac{1}{2} M_K (v')^2 - M_K \frac{v^2 R}{R} = 0 \tag{52}$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{2} v \tag{53}$$

Mit θ dem Winkel zwischen $\vec{v'}$ und dem Bahnradius $\vec{R}$ erhält man mit der Drehimpulserhaltung:

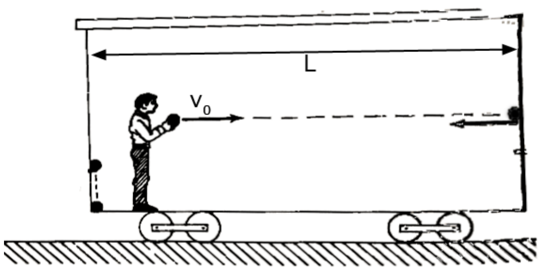
$$M_K v R = M_K v' R \sin\theta = M_K \sqrt{2} v R \sin\theta \tag{54}$$

bzw.

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \theta = 45° \tag{55}$$

[4]

Aufgabe 6 (7 Punkte)



Ein Junge stehe an einem Ende eines Güterwagens der Masse M und Länge L, der sich in Ruhe auf Schienen befindet. Jetzt wirft er einen Ball der Masse m mit Geschwindigkeit v_0 in Richtung des anderen Endes des Wagens. Der Ball kollidiert dort elatisch mit der Wand und fliegt wieder zurück, wo er inelastisch mit der Wand kollidiert und dann zur Ruhe kommt. Beschreiben Sie mathematisch die Bewegung des Wagens. Beschreiben Sie dabei die Zeiten, Geschwindigkeiten und auch die Orte der Bewegung. Die Masse des Balls ist gegenüber der Masse des Wagons *nicht* zu vernachlässigen.

Lösung

Alle Kräfte wirken im Inneren des Wagens. Mit $\vec{V}$ der Geschwindigkeit des Wagens mit dem Jungen und v der Geschwindigkeit des Balls, gilt während der gesamten Bewegung die Impulserhaltung

$$M\vec{V} + m\vec{v} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v} \tag{56}$$

Vor der ersten Kollision gilt $\vec{v} = \vec{v_0}$, also ist

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v_0}, \qquad \text{wenn } 0 < t < \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_0}, \tag{57}$$

[2]

wobei $\frac{L}{\left(1+\frac{m}{M}\right)v_0}$ die Zeit ist, die der Ball bis zur ersten Kollision benötigt. Er bewegt sich dabei mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v_0} + \vec{V} = v_0 + \frac{m}{M}\vec{v_0} \tag{58}$$

relativ zum Boden des Wagens.

Durch die Kollision werden die Geschwindigkeitsvektoren vertauscht:

$$\vec{V} = +\frac{m}{M}\vec{v_0}, \qquad \text{wenn } \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_0} < t < \frac{2L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_0} \tag{59}$$

[2]

Nach der zweiten Kollision haben der Ball und der Wagen dieselbe Geschwindigkeit, also ist

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{V} \tag{60}$$

oder

$$\vec{V} = 0, \qquad \text{wenn } t > \frac{2L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_0} \tag{61}$$

[1]

Der Wagen bewegt sich zunächst um die Strecke

$$\left(\frac{m}{M}v_0\right) \frac{L}{\left(1 + \frac{m}{M}\right) v_0} = \frac{m}{M+m}L \tag{62}$$

[1]

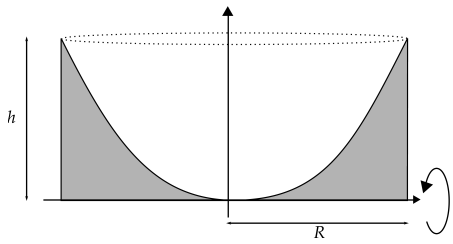
nach links und danach um dieselbe Strecke nach rechts, sodass er wieder an seinem Ausgangspunkt ankommt. Es findet also dass keine Netto-Bewegung des Wagens statt, wenn der Ball wieder zu seiner Ausgangslage innerhalb des Wagens zurückkehrt. Diese Beobachtung ist unabhängig davon, ob die Kollision elastisch oder inelastisch ist, da der Massenschwerpunkt des System immer in Ruhe sein muss.

[1]

Mathematische Ergänzungen (8 Punkte)

Betrachten Sie einen Parabolspiegel, der aus einem homogenen Zylinder mit Radius R und Höhe h gefertigt ist. In der Mitte sei das Material beliebig dünn und die Masse sei M.

Berechnen Sie das Trägheitsmoment bei Rotation um eine Achse in der Grundfläche, die die Symmetrieachse schneidet.



Lösung

Die Zylinderfläche liege in der x-y-Ebene und die Symmetrieachse auf der z-Achse. Die Höhe der Spiegelfläche in Abhängigkeit des Radius $\bar{r}$ (aus den Zylinderkoordinaten) ist gegeben durch eine Parabel

$$z = a\bar{r}^2$$

mit $z(R) = h$ folgt $a = \frac{h}{R^2}$ und somit

$$z = \frac{h}{R^2}\bar{r}^2$$

[**1**]

Für die Masse gilt

$$\begin{aligned} M &= \int_V \rho \mathrm{d}^3 x \\ &= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{\frac{h\bar{r}^2}{R^2}} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \frac{h\bar{r}^3}{R^2} \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho R^2 h \end{aligned}$$

[**1**]

Der Abstand zur Drehachse (x-Achse) ist gerade

$$r_x^2 = y^2 + z^2 = z^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \varphi.$$

[**1**]

Das Trägheitsmoment ist somit

$$
\begin{aligned}
I &= \int_V \rho r_x^2 \,\mathrm{d}^3x = \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r} \int_0^{\frac{h\bar{r}^2}{R^2}} \mathrm{d}z \left(z^2 + \bar{r}^2 \sin^2\varphi\right) \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^R \mathrm{d}\bar{r} \left(\frac{1}{3} \frac{h^3 \bar{r}^7}{R^6} + \frac{h\bar{r}^5}{R^2} \sin^2\varphi \right) \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi, \left(\frac{1}{24} \frac{h^3 R^8}{R^6} + \frac{hR^6}{6R^2} \sin^2\varphi \right) \\
&= \rho \left(\frac{\pi}{12} h^3 R^2 + \frac{\pi h R^4}{6} \right) \\
&= \frac{\pi}{12} \rho h R^2 \left(h^2 + 2R^2\right) = \frac{1}{6} M \left(h^2 + 2R^2\right)
\end{aligned}
$$

[5]