. . . .
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik für Physiker 4
(Analysis 3)

Prof. Dr. M. Wolf

25. Februar 2014, 11:00 – 12:30 Uhr

Hörsaal: . . . . Reihe: . . . . Platz: . . . .

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Hilfsmittel: Ein selbsterstelltes Din A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I . . . .
Erstkorrektur

II . . . .
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von . . . . bis . . . .

Vorzeitig abgegeben um . . . .

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Volumenberechnung** **[6 Punkte]**

Berechnen Sie das Volumen der Menge $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \geq x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0\}$.

LÖSUNG:

$x \in S$ genau dann, wenn $x_1 \in [0,1]$, $x_2 \in [0, x_1]$ und $x_3 \in [0, x_2]$.
Somit ist S ein Normalbereich und mit Fubini ist **[1]**

$$\int_S \mathrm{d}^3 x = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} \mathrm{d}x_2 \int_0^{x_2} \mathrm{d}x_3 = \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^{x_1} x_2 \mathrm{d}x_2 = \int_0^1 \frac{x_1^2}{2} \mathrm{d}x_1 = \frac{1}{6}.$$

[5]

2. **Transformationsformel** **[13 Punkte]**

Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^+)^2$ gegeben durch $\Phi(u,v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$.

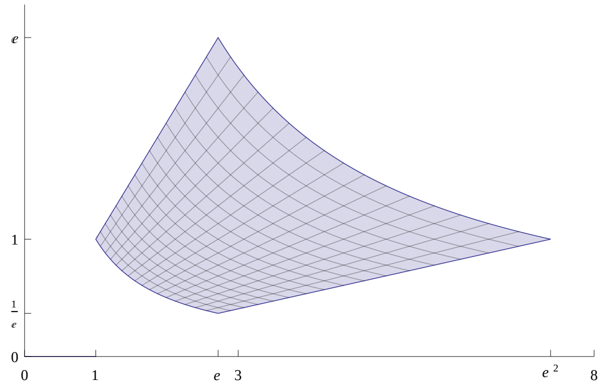
(a) Geben Sie die Jacobi-Determinante von Φ auf $(\mathbb{R}^+)^2$ an: **[3]**

$$\det J_\Phi(u,v) = \; -2e^{2u}$$

(b) Wie lautet die Umkehrabbildung von Φ auf $(\mathbb{R}^+)^2$? **[2]**

$$\Phi^{-1}(x,y) = \quad \left(\tfrac{1}{2}\ln(xy), \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{x}{y}\right)$$

(c) Skizzieren Sie die Menge $M := \Phi([0,1]^2)$. **[3]**



(d) Wie lautet die Transformationsformel für das Integral einer stetigen Funktion $f : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ über die Menge $M \subseteq (\mathbb{R}^+)^2$ mit der Transformation Φ? **[2]**

$$\int_M f(x)\mathrm{d}^2x = \int_{[0,1]^2} f(\Phi(u,v))|\det J_\Phi(u,v)|\mathrm{d}(u,v)$$

(e) Geben Sie den Wert von $\int_M f(x)\mathrm{d}^2x$ für $f(x,y) = \ln(\frac{y}{x})$ an. **[3]**

$$\int_M f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \; -(e^2-1)$$

LÖSUNG:

(a)-(d) s.o., (e) $\int_M f(x,y)dxdy = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^1 \mathrm{d}v \ln(e^{u-v-(u+v)}) \cdot 2e^{2u} = \int_0^1 2e^{2u}\mathrm{d}u \int_0^1 (-2v)\mathrm{d}v = [e^{2u}]_0^1 \cdot (-1) = -(e^2-1)$.

3. **Oberflächenintegrale** **[10 Punkte]**

Gegeben ist die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+2u \\ 2uv \\ v^2+2v \end{pmatrix}$.

(a) Für welche Werte von u und v ist $\Phi'(u,v)$ surjektiv? **[3]**

> Für $(u,v) \in \ \mathbb{R}^2 \setminus \{(-1,-1)\}$

(b) Geben Sie für $(u,v) \in B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$ jeweils eine Basis des Tangential- und des Normalraums für das Flächenstück $M := \Phi(B_1(0))$ im Punkt $\Phi(u,v)$ an. **[3]**

> $T_{\Phi(u,v)}M = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 2u+2 \\ 2v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2u \\ 2v+2 \end{pmatrix} \right)$

> $N_{\Phi(u,v)}M = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} v(v+1) \\ (u+1)(v+1) \\ u(u+1) \end{pmatrix} \right)$

(c) Sei nun $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein C^1–Vektorfeld mit $\operatorname{rot} F(x) \in T_xM$ für alle $x \in M$. Begründen Sie, warum das Wegintegral von F entlang der Randlinie von M gleich Null ist. **[4]**

LÖSUNG:

(a) $J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u+2 & 0 \\ 2v & 2u \\ 0 & 2v+2 \end{pmatrix}$. Die beiden Spalten sind linear abhängig genau dann, wenn $2u+2 = 0$ und $2v+2 = 0$, also für $u = -1$, $v = -1$.

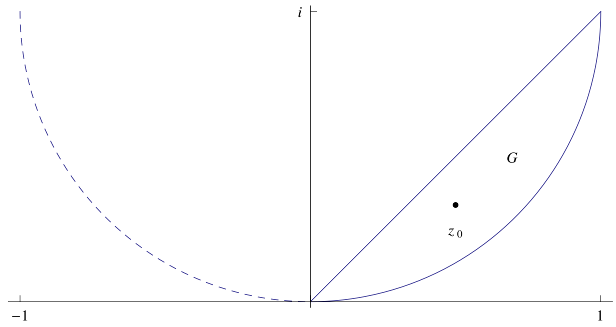
(b) $\partial_u \Phi(u,v)$ und $\partial_v \Phi(u,v)$ spannen den Tangentialraum auf und $\partial_u \Phi(u,v) \times \partial_v \Phi(u,v)$ den Normalraum.

(c) Mit dem Satz von Stokes: $\int\limits_{\partial A} F \cdot dr = \int\limits_{A} \langle \operatorname{rot} F, n\rangle dS = 0$, da $\operatorname{rot} F$ im Tangentialraum liegt und somit immer senkrecht zu n steht. Denn das bedeutet $\langle \operatorname{rot} F, n\rangle = 0$.

4. **Komplexe Kurvenintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Menge $G := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Im} z,\ (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 1)^2 \leq 1\}$.

(a) Skizzieren Sie die Menge G **[2]**



(b) Geben Sie unter Beachtung der Umlaufrichtung eine Parametrisierung von ∂G durch zwei Kurvenstücke an. **[2]**

$\gamma_1(t) = \quad -t - it,\ t \in [-1, 0]$	$\gamma_2(t) = \quad i + \cos t + i \sin t,\ t \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$

(c) Berechnen Sie (mit kurzer Begründung) den Wert des Integrals $\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{6z-3-2i} \mathrm{d}z$. **[4]**

$\int\limits_{\partial G} \frac{e^z}{6z-3-2i} \mathrm{d}z = \quad 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i}\left(\frac{e^z}{6z-3-2i}\right) = \pi i \frac{e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i}}{3}$, wegen Residuensatz,

denn der Integrand ist holomorph bis auf $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i$. ∂G umschließt $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i \in G^{\circ}$.

Lösung:

s.o.

5. **Residuen** **[9 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{\tan z}{z}$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi + \frac{\pi}{2} \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$.

(a) f hat bei $z = 0$ **[1]**

☐ keine Singularität, ☒ eine hebbare Singularität, ☐ einen Pol erster Ordnung,
☐ einen Pol höherer Ordnung, ☐ eine wesentliche Singularität.

(b) Bestimmen Sie das Residuum von f bei $z = \frac{\pi}{2}$. **[2]**

$$\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(f) = -\frac{2}{\pi}$$

(c) Wie lautet der Hauptteil $H_{f,\frac{\pi}{2}}(z)$ der Laurententwicklung von f in einer Umgebung von $z = \frac{\pi}{2}$? **[2]**

$$H_{f,\frac{\pi}{2}}(z) = -\frac{2}{\pi z}$$

(d) Welchen Konvergenzbereich $B \subset \mathbb{C}$ hat die Laurentreihenentwicklung von f im Entwicklungspunkt $z = \frac{\pi}{2}$? **[2]**

$$B = \{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z - \pi| < \pi\}$$

(e) Welchen Wert hat das komplexe Wegintegral $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ entlang der Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2 + 2e^{-it}$? **[2]**

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 8i$$

Lösung:

(a) 0 ist isolierte Singularität von f. Wegen $\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \cos z = 1$ ist sie hebbar.

(b) $\mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(f) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos z}) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$.

(c) Da dort ein Pol erster Ordnung ist, s.o.

(d) 0 ist hebbar, die nächsten Pole liegen bei $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, also ist der Konvergenzbereich die oben angegebene Kreisscheibe.

(e) Die Kurve umkreist den Pol bei $\frac{\pi}{2}$ zweimal im Uhrzeigersinn, also ist $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -2 \cdot 2\pi i \mathrm{Res}_{\frac{\pi}{2}}(f) = 8i$.

6. **Residuenkalkül** **[11 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{z}{z^2+c^2}$ mit $c > 0$.

(a) Wo in der komplexen Ebene verläuft der Hilfsweg zur Berechnung des Integrals $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x$? **[2]**

☐ In der rechten Halbebene. ☒ In der oberen Halbebene.
☐ In der linken Halbebene. ☐ In der unteren Halbebene.

(b) Welchen Wert hat das Integral $I_1 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}\mathrm{d}x$? **[3]**

$I_1 = \pi i e^{-c}$

(c) Welchen Wert hat das Integral $I_2 := \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix}\mathrm{d}x$? **[3]**

$I_2 = -\pi i e^{-c}$

(d) Berechnen Sie nun das Integral $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+c^2}\mathrm{d}x$. **[3]**

LÖSUNG:

(a) e^{iz} fällt für positive Imaginärteile von z exponentiell ab.

(b) $I_1 = 2\pi i \mathrm{Res}_{ic}\left(\frac{e^{iz}}{z^2+c^2}\right) = 2\pi i \frac{ice^{-c}}{2ic} = \pi i e^{-c}$.

(c) Jetzt wird untenrum integriert,
$I_2 = -2\pi i \mathrm{Res}_{-ic}\left(\frac{e^{-iz}}{z^2+c^2}\right) = -2\pi i \frac{-ice^{-c}}{-2ic} = -\pi i e^{-c}$.

(d) Der Integrand $\frac{x\sin x}{x^2+c^2}$ ist eine gerade Funktion. Also gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+c^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{x^2+c^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4i}\left(\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xe^{ix}}{x^2+c^2}\mathrm{d}x - \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xe^{-ix}}{x^2+c^2}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \frac{1}{4i}(I_1 - I_2) = \frac{\pi}{4}(e^{-c} + e^{-c}) = \frac{\pi}{2}e^{-c}.$$

7. **Fouriertransformation** **[10 Punkte]**

(a) Wie wurde in der Vorlesung die Faltung $f * g$ zweier Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ definiert? **[1]**

(b) Wie lautet die Fouriertransformierte der Gauß-Kurve $x \mapsto \exp(-\frac{x^2}{2t})$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$? **[2]**

(c) Beweisen Sie, dass die Faltung $f_1 * f_2$ zweier Gauß-Kurven, $f_j(x) = \exp(-\frac{x^2}{2t_j})$, $t_j > 0$, $j = 1, 2$, wieder eine Gauß-Kurve ist. **[4]**

(d) Sei nun $h := f_1 * f_2$.

(i) Welche Aussagen gelten für h? **[2]**

☒ $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☒ h ist stetig, ☒ $h \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $h \in L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Welche Aussagen gelten für $\widehat{h}$? **[1]**

☒ $\widehat{h} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h}$ ist stetig, ☒ $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, ☒ $\widehat{h} \in L^2(\mathbb{R})$.

LÖSUNG:

(a) $f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(b) Allgemein ist für $f(x) = \exp(\frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle)$ die Fouriertransformierte $\hat{f}(k) = (\det A)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}\langle k, A^{-1}k\rangle)$ mit $x, k \in \mathbb{R}^n$. Hier ist $n = 1$ und $A = \frac{1}{t} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Also ist $\hat{f}(k) = \sqrt{t}\exp(-\frac{1}{2}tk^2)$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Hier gilt der Faltungssatz $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\widehat{g}$, d.h.

$$\widehat{f * g}(k) = \sqrt{2\pi}\sqrt{t_1 t_2}\exp(-\tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)k^2)$$

also eine Gaußkurve. Ihre Rücktransformation ist also wieder eine Gaußkurve,

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx}\widehat{f * g}(k)dk = \sqrt{2\pi\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t_1 + t_2}\right).$$

8. **Hilbertraum** **[8 Punkte]**

In der gesamten Aufgabe ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge von Vektoren im Hilbertraum $\mathcal{H}$.

(a) Zeigen Sie, dass b_n für $n \to \infty$ keinen Grenzwert haben kann. **[3]**

(b) Geben Sie mindestens eine der vier in der Vorlesung behandelten Charakterisierungen dafür an, dass $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB (orthonormale Basis) von $\mathcal{H}$ ist. **[2]**

(c) Geben Sie explizit ein Beispiel für einen Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine orthonormale Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, die **keine** ONB von $\mathcal{H}$ ist und beweisen dies mit Hilfe von (b). **[3]**

LÖSUNG:

(a) Annahme $b_n \to b \in \mathcal{H}$. Dann ist b_n eine Cauchy-folge, also $\sup_{n,m\geq N} \|b_n - b_m\| \to 0$ für $N \to \infty$. Dies steht im Widerspruch zu

$$\|b_{n+1} - b_n\|^2 = \|b_{n+1}\|^2 - \langle b_{n+1}, b_n\rangle - \langle b_n, b_{n+1}\rangle + \|b_n\|^2 = 1 + 0 + 0 + 1 = 2.$$

(b) die orthonormale Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist ONB des Hilbertraums $\mathcal{H}$ genau dann wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) $\forall \phi \in \mathcal{H}: \; (\forall n \in \mathbb{N} : \langle b_n, \phi\rangle = 0) \Longrightarrow \phi = 0,$

(ii) $\forall \phi \in \mathcal{H}: \; \phi = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle b_n, \phi\rangle b_n,$

(iii) $\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{H}: \; \langle \phi_1, \phi_2\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \phi_1, b_n\rangle\langle b_n, \phi_2\rangle,$

(iv) $\forall \phi \in \mathcal{H}: \; \|\phi\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle b_n, \phi\rangle|^2.$

(c) $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{N})$. Dann ist $b_n := (0, \dots, 1, \dots)$ mit der 1 an der n-ten Stelle eine ONB. $\{b_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist immernoch orthonormal, aber keine ONB, da $b_1 \neq 0$, aber $\langle b_{2n}, b_1\rangle = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, siehe (b) Punkt (i).