# Lösung der Klausur

**Aufgabe 0.1** (Kurzaufgaben (11 Punkte)). a) Gegeben sei die Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}.$$

Welche Variable ist zyklisch? Welche Größe ist neben der Energie eine Erhaltungsgröße?

b) Der Halleysche Komet bewegt sich mit einer Periode von 76 Jahren um die Sonne. Der Perihelabstand ist $r_{\mathrm{min}} = 0{,}6\,R_{\mathrm{E}}$. wobei $R_{\mathrm{E}}$ den Abstand Erde–Sonne bezeichnet. Wie groß ist der Aphelabstand $r_{\mathrm{max}}$ des Kometen?

c) Betrachten Sie die kartesischen Koordinaten des Ortsvektors $\vec{r}$ und des Impulsvektors $\vec{p}$ eines Teilchens als generalisierte Koordinaten und Impulse. Berechnen Sie die Poissonklammern $\left\{\vec{a}\cdot\vec{r}, \vec{b}\cdot\vec{p}\right\}$, wobei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ konstante Vektoren sind.

d) Betrachten Sie das Molekül LiH aus zwei Punktmassen $m_1$ und $m_2$ mit festem Abstand $l$ und geben Sie die Lage des Schwerpunkts relativ zu $m_1$ und die nicht verschwindenden Trägheitsmomente an.

*Lösung.* a) $\varphi$ ist eine zyklische Variable, weshalb der konjugierte Impuls $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = mr^2\dot{\varphi}$ eine Erhaltungsgröße ist

$$\frac{\mathrm{d}\,p_\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

b) Aus dem dritten keplerschen Gesetz erhält man

$$\frac{T^2}{T_{\mathrm{E}}^2} = \frac{(r_{\mathrm{min}} + r_{\mathrm{max}})^3}{(2R_{\mathrm{E}})^3}$$

und damit

$$r_{\mathrm{max}} = 2R_{\mathrm{E}}\left(\frac{T}{T_{\mathrm{E}}}\right)^{\frac{2}{3}} - r_{\mathrm{min}}.$$

c) Es gilt

$$\left\{\vec{a}\cdot\vec{r}, \vec{b}\cdot\vec{p}\right\} = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\vec{a}\cdot\vec{r}}{\partial x_i}\frac{\partial\,\vec{b}\cdot\vec{p}}{\partial p_i} - \frac{\partial\,\vec{a}\cdot\vec{r}}{\partial p_i}\frac{\partial\,\vec{b}\cdot\vec{p}}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i + 0 = \vec{a}\cdot\vec{b}.$$

d) Der Schwerpunkt liegt relativ zu $m_1$ bei

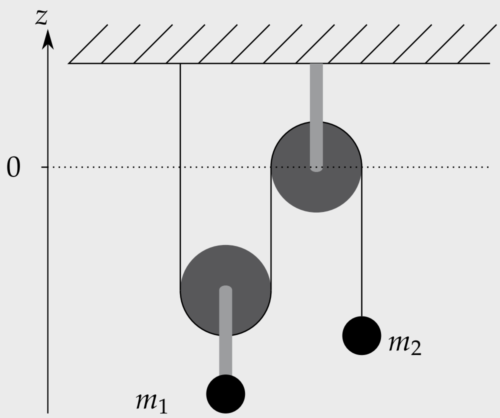
$$r_{\mathrm{s}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}l.$$

Das Trägheitsmoment um die Molekülachse verschwindet. Die anderen beiden Trägheitsmomente sind gleich

$$\Theta = m_1(-r_\mathrm{s})^2 + m_2(l - r_\mathrm{s})^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

□

**Aufgabe 0.2** (Flaschenzug (9 Punkte))**.** An der losen Rolle eines Flaschenzugs sei eine Masse $m_1$ und am Seilende eine Masse $m_2$ befestigt. Die Rollen mit Radius $R$ und das Seil der Länge $L$ seien masselos. Die masselosen Stäbe, mit denen die feste Rolle an der Decke und die Masse $m_1$ an der Achse der losen Rolle befestigt sind, haben die Länge $l$. Die Massen und die lose Rolle können sich nur in der Vertikalen bewegen. Die Massen sind dem Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ ausgesetzt. Die Achse der festen Rolle sei bei $z = 0$.




a) Begründen Sie, dass die Zwangsbedingung für die Koordinaten der Massen $z_1$ und $z_2$ die Form

$$2z_1 + z_2 = C = \text{const.}$$

hat und bestimmen Sie die Konstante $C$. Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrangegleichungen 1. Art) für $z_1(t)$ und $z_2(t)$ an.

b) Eliminieren Sie mit Hilfe der Zwangsbedingung die Koordinate $z_1$ aus den Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die Zwangskraft und die Lösung für $z_1(t)$ mit den Anfangsbedingungen $\dot{z}_1(0) = \dot{z}_2(0) = 0$.

c) Unter welcher Bedingung fällt die Masse $m_2$ nach unten?

*Lösung.* a) Die Zwangsbedingung ergibt sich aus der unveränderlichen Länge $L$ des Seiles, welche sich andererseits durch die Konstanten und Koordinaten ausdrücken lässt.

$$L = -l + (-z_1) + \pi R + (-z_1) + \pi R + (-z_2)$$

$$2z_1 + z_2 = -l + 2\pi R - L =: C$$

$$f(z_1, z_2) = 2z_1 + z_2 - C = 0.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten damit

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda\frac{\partial f}{\partial z_1} = -m_1 g + 2\lambda \tag{I}$$
$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda\frac{\partial f}{\partial z_2} = -m_2 g + \lambda. \tag{II}$$

b) Mit der Zwangsbedingung $z_2 = C - 2z_1$ erhält man aus der Bewegungsgleichung (II)

$$m_2\ddot{z}_2 = -2m_2\ddot{z}_1 = -m_2 g + \lambda.$$

Aus dieser Bewegungsgleichung und der Gleichung (I) lassen sich alle Ableitungen eliminieren und wir erhalten eine Gleichung für $\lambda$.

$$\begin{aligned} 0 &= -3g + \lambda\left(\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \\ \lambda &= \frac{3g m_1 m_2}{m_1 + 4m_2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung (I)

$$\ddot{z}_1 = -g + \frac{2\lambda}{m_1} = -g\frac{(m_1 - 2m_2)}{m_1 + 4m_2}.$$

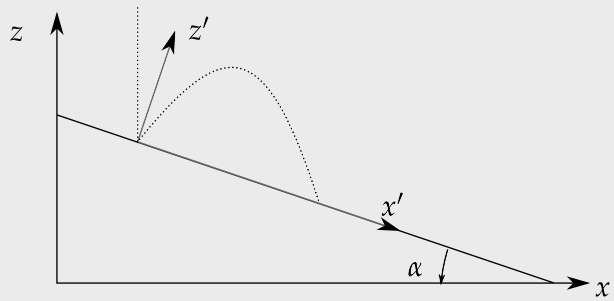
Diese wird unter Einsetzen der Anfangsbedingungen gelöst durch

$$z_1(t) = z(0) - g\frac{m_1 - 2m_2}{m_1 + 4m_2}\frac{t^2}{2}.$$

c) Im Falle $2m_2 > m_1$ bewegt sich die Masse $m_1$ nach oben, so dass aus der Zwangsbedingung $z_2 = C - 2z_1$ folgt, dass die Masse $m_1$ nach unten fällt.

□

**Aufgabe 0.3** (Tennisball (6 Punkte)). Ein Tennisball der Masse $m$ falle vertikal im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ und stoße zum Zeitpunkt $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = -v\vec{e}_z$ total elastisch an einer Ebene, die den Winkel $\alpha$ mit der $x$-$y$-Ebene bildet. Bei dem Stoß wird die Normalkomponente der Geschwindigkeit instantan umgekehrt. Nehmen Sie an, dass die Bewegung des Balls nur in der $x$-$z$-Ebene stattfindet. Wählen Sie den Koordinatenursprung am Ort des ersten Aufpralls und führen Sie Koordinaten $x'$ und $z'$ parallel und senkrecht zur Ebene ein.




a) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor des Balls unmittelbar nach dem Stoß in $x'$-$z'$-Koordinaten an.

b) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die Bahnkurve $x'(t)$ und $z'(t)$ nach dem Stoß und vor dem Wiederaufprall.

c) Bestimmen Sie die Zeit $t_\mathrm{F}$ und den Abstand $s$ zwischen dem ersten und dem zweiten Aufprall des Balls auf der Ebene.

*Lösung.* a) Durch die instantane Umkehr der Normalkomponente der Geschwindigkeit ist der Reflexionswinkel gleich dem Einfallswinkel von $\alpha$ gegen die $z'$-Achse. Somit ist die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Aufprall im $x'$-$z'$-System

$$\vec{v}' = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{z'} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

b) Im $x'$-$z'$-System ist das Schwerfeld gegeben durch $\vec{g} = g\sin\alpha\vec{e}_{x'} - g\cos\alpha\vec{e}_{z'}$. Somit lauten die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= mg\sin\alpha \\ m\ddot{z}' &= -mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

Diese unabhängigen Gleichungen werden gelöst durch

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'(0) + t\dot{x}'(0) + \frac{t^2}{2}g\sin\alpha = tv\sin\alpha + \frac{t^2}{2}g\sin\alpha \\ z'(t) &= z'(0) + t\dot{z}'(0) - \frac{t^2}{2}g\cos\alpha = tv\cos\alpha - \frac{t^2}{2}g\cos\alpha, \end{aligned}$$

wobei wir die Anfangsbedingungen eingesetzt haben.

c) Die Flugzeit bis zum Wiederaufprall ergibt sich aus der anderen Nullstelle von $z'(t)$.

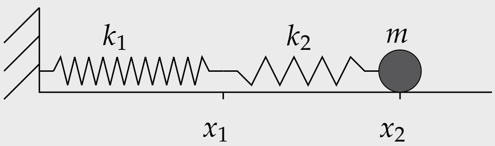
$$\begin{aligned} 0 = z(t_\mathrm{F}) &= t_\mathrm{F} v \cos\alpha - \frac{t_\mathrm{F}^2}{2} g \cos\alpha \\ t_\mathrm{F} &= \frac{2v}{g}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Strecke längs der schiefen Ebene zu

$$s = x'(t_\mathrm{F}) = \frac{2v^2}{g}\sin\alpha + \frac{4v^2}{2g}\sin\alpha = \frac{4v^2}{g}\sin\alpha.$$

□

**Aufgabe 0.4** (Pendel aus zwei Federn (8 Punkte))**.** Einen Massepunkt der Masse $m$ ist in der Horizontalen durch zwei hintereinander gehängte Federn (Federkonstanten $k_1$ und $k_2$) mit der Wand verbunden.




a) Betrachten Sie die Auslenkungen der Feder $x_1$ und des Massepunktes $x_2$ aus den jeweiligen Gleichgewichtslagen als generalisierte Koordinaten. Bestimmen Sie die potentielle Energie und geben Sie die Lagrangefunktion des Systems an.

b) Formulieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen.

c) Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Fall, dass in der Ruhelage die Masse durch einen instantanen Stoß bei $t = 0$ auf die Geschwindigkeit $v$ gebracht wird.

*Lösung.* a) Durch die Wahl der Koordinaten als Auslenkungen aus der Ruhelage, nimmt die potentielle Energie die einfache Form

$$V = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2$$

an. Damit lautet die Lagrangefunktion lauten

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1 x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1)^2.$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad (k_2 + k_1)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0. \end{aligned}$$

c) Da von $x_1$ keine Ableitungen auftreten, erhalten wir eine Art Zwangsbedingung

$$x_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2.$$

Diese lässt sich verwenden, um $x_1$ aus der anderen Bewegungsgleichung zu eliminieren

$$0 = m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 \frac{k_2}{k_1 + k_2} x_2 = m\ddot{x}_2 + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} x_2.$$

Dies ist die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators. Der Ansatz $\mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda = \pm \mathrm{i}\omega := \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

und damit das Fundamentalsystem

$$\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right\}$$

oder alternativ durch Linearkombination das reelle Fundamentalsystem

$$\{\cos \omega t; \sin \omega t\} .$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ &= \frac{v}{\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

□

**Aufgabe 0.5** (Bonusaufgabe (6 Punkte))**.** Eine Kugel der Masse $m_1$ mit Trägheitsmoment $\Theta$ und Radius $R$ rollt aus der Ruhe ohne zu gleiten von einem Berg der Höhe $H$ im Schwerefeld $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der Kugel am Fuß des Berges?

b) Die Kugel stößt nun elastisch und zentral gegen einen ruhenden Klotz der Masse $m_2$, der reibungsfrei den Nachbarberg hinauf gleitet. Welche Geschwindigkeit hat der Klotz unmittelbar nach dem Stoß und welche Höhe erreicht der Klotz maximal?

*Lösung.* a) Auf Grund der Energieerhaltung und unter Verwendung der Abrollbedingung $\omega = \frac{v_1}{R}$ gilt für die Geschwindigkeit $v_1$ am Fuß des Berges

$$\begin{aligned} m_1 g H &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\omega^2 \Theta = \frac{1}{2} v_1^2 \left(m_1 + \frac{\Theta}{R^2}\right) \\ v_1 &= \sqrt{\frac{2gH}{1 + \frac{\Theta}{m_1 R^2}}}. \end{aligned}$$

b) Bei dem Stoß gilt Impuls- und Energieerhaltung für die Schwerpunktsbewegung. Die Rotationsenergie kann von der Kugel nicht auf den Klotz übertragen werden sondern geht in Reibung verloren (Rotation entgegen der Rollrichtung!).

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2', \qquad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

$$v_1' = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - m_2 v_1 v_2' + \frac{m_2^2}{2m_1} (v_2')^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2')^2$$

$$v_2' = \frac{2}{\frac{m_2}{m_1} + 1} v_1.$$

Die maximale Höhe für den Klotz ergibt sich wiederum aus der Energieerhaltung.

$$h = \frac{(v_2')^2}{2g}.$$

□