Nützliche Formeln für die Probeklausur MECHANIK am 20.7.09

Bewegungsgleichungen : $m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$, $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k}$, $\quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Für konservative Systeme: $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_i} U\left(\vec{r}_1, \ldots \vec{r}_N\right)$

Typischer Fall : $\quad T = \sum_{i=1}^{f} \frac{m_i}{2}\,\dot{q}_i^2$, $\quad U = U(q_1, \ldots q_f)$,

$L(q_1, \ldots q_f, \dot{q}_1, \ldots \dot{q}_f) = \sum_{i=1}^{f} \frac{m_i}{2}\,\dot{q}_i^2 - U$, $\quad H(q_1, \ldots q_f, p_1, \ldots p_f) = \sum_{i=1}^{f} \frac{p_i^2}{2\,m_i} + U$.

Für homogene Potenziale vom Grad k: Virialsatz, $2\bar{T} = k\bar{U}$.
Für $\beta = \alpha^{1-k/2}$ gilt: $q_i(t)$ Lösung der Bwgln. $\Longleftrightarrow$ $\alpha q_i(\beta t)$ Lösung der Bwgln.

Trägheitstensor : $J_{\mu\,\nu} = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\vec{x}^{\,(i)}\right)^2 \delta_{\mu\,\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)}\right]$ $\quad$ bzw. $\quad J_{\mu\,\nu} = \int \rho(\vec{x}) \left[\vec{x}^{\,2}\delta_{\mu\,\nu} - x_\mu x_\nu\right] \mathrm{d}^3x$;
kinetische Energie T_{rot} und Drehimpuls $\vec{L}$ eines rotierenden starren Körpers
im Schwerpunktsystem : $\quad T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{\mathrm{T}} J \vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\,\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu} \omega_\nu$, $\quad \vec{L} = J\vec{\omega},\ L_\mu = \sum_{nu=1}^{3} J_{\mu\nu}\omega_\nu$.

Bewegunsgl. im rotierenden Bezugsystem: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - 2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$.

Kugelkoordinaten: $x = r\,\sin\theta\,\cos\phi$, $\quad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi$, $\quad z = r\,\cos\theta$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \cdots r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\ ;$$

bei Axialsymmetrie um z-Achse : $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^\infty \cdots r^2\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta$,

mit $\xi = \cos\theta$: $\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\pi \int_0^\infty \cdots r^2\,\mathrm{d}r \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\xi$.

$$\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)\,\mathrm{d}\xi = \frac{4}{3}\ , \qquad \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{16}{15}\ .$$

Für Funktionen, die nur vom Betrag des Ortsvektors abhängen : $\quad \vec{\nabla} f(r) = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$.

Poissonklammern : $\{A, B\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right)$, $\{q_i, q_j\} = 0,\ \{p_i, p_j\} = 0,\ \{q_i, p_j\} = \delta_{i\,j}$.

Beispiele: $\{q_i, p_j^2\} = 2p_j\delta_{i\,j}$, $\quad \{L_x, L_y\} = L_z,\ \{L_y, L_z\} = L_x,\ \{L_z, L_x\} = L_y$.