Klausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Back
Wintersemester 2021/22
16. Februar 2022

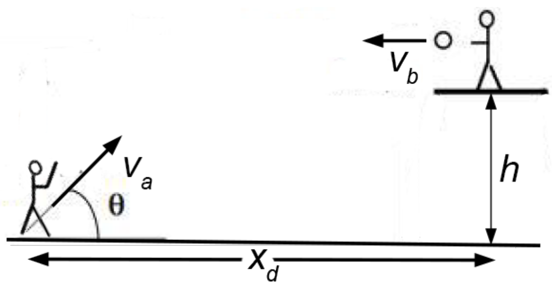
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Eine Zirkusakrobatin wird mit der Geschwindigkeit $|v_a| = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in einem Winkel von $\theta = 40°$ nach oben geschossen. In einem horizontalen Abstand von $x_d = 20\,\text{m}$ steht ihr Partner auf einer Plattform der Höhe h. Genau in dem Moment, in dem die Akrobatin nach oben geschossen wird, wirft ihr Partner einen Ball horizontal mit einer Geschwindigkeit von $|v_b| = 5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ in ihre Richtung.



(a) Schreiben Sie die Gleichungen für die Positionen der Akrobatin und des Balls als Funktion der Zeit auf. Seien Sie dabei konsistent in Ihrer Wahl des Ursprungs.

(b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, an dem die Akrobatin und der Ball dieselbe horizontale Position haben.

(c) Bestimmen Sie die Höhe h die die Plattform haben muss damit das Kunststück funktioniert. Nehmen Sie hierfür an, dass die Akrobatin und der Ball sich auf der selben Höhe befinden müssen.

(d) Bestimmen Sie die den Betrag der Relativgeschwindigkeit von Ball und Akrobatin in dem Moment, in dem sie den Ball fängt.

Lösung

(a) Die Gleichungen für Positionen der Akrobatin lauten:

$$x_a = v_a \cdot \cos(\theta)t = 11.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t \tag{1}$$

$$y_a = v_a \cdot \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 = 9.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t - 4.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 \tag{2}$$

Die Gleichungen für die Positionen des Ball lauten:

$$x_b = x_d - v_b t \tag{3}$$

$$y_b = h - \frac{1}{2}gt^2 = h - 4.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 \tag{4}$$

[**2**]

(b) Durch Gleichsetzen der horizontalen Gleichungen erhält man:

$$x_a = x_b \tag{5}$$

$$t_t = 1.21\,\mathrm{s} \tag{6}$$

[**2**]

(c) Die Höhe der Akrobatin zum Zeitpunkt des Fangs erhält man durch Einsetzen der in Teilaufgabe (b) ermittelten Zeit in die Gleichung für y_a:

$$y_a(t = 1.21\,\mathrm{s}) = 4.44\,\mathrm{m} \tag{7}$$

Damit folgt für die Höhe h:

$$y_b = h - 4.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t_t^2 = h - 7.2\,\mathrm{m} \overset{!}{=} 4.44\,\mathrm{m} \tag{8}$$

Also muss gelten:

$$h = 11.6\,\mathrm{m}$$

[**2**]

(d) Für die Geschwindigkeiten der Akrobatin zum Zeitpunkt des Fangs gilt:

$$v_a^x(t = 1.21\,\mathrm{s}) = \frac{dx_a}{dt} = 11.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{9}$$

$$v_a^y(t = 1.21\,\mathrm{s}) = \frac{dy_a}{dt} = 9.6\,\mathrm{m} - 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t\Big|_{t=1.21\,\mathrm{s}} = -2.26\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{10}$$

Für die Geschwindigkeiten des Balls erhält man analog:

$$v_b^x = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{11}$$

$$v_b^y = -11.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{12}$$

Folglich gilt für die Relativgeschwindigkeiten:

$$v_{rel}^x = (-5 - 11.5)\ \mathrm{m\,s^{-1}} = -16.5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{13}$$

$$v_{rel}^y = (-11.9 - (-2.25))\ \mathrm{m\,s^{-1}} = -9.6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{14}$$

Damit erhält man für den Betrag der Relativgeschwindigkeit:

$$|v_{rel}| = \sqrt{\left(v_{rel}^x\right)^2 + \left(v_{rel}^y\right)^2} = 19.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{15}$$

[4]

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Eine 3 kg schwere Masse ist mit einer Feder verbunden. Die Schwingungsdauer T beträgt 0.4 s. Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzt die Masse eine Geschwindigkeit von $v_0 = 3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in Richtung ihrer Gleichgewichtsposition und ihre Auslenkung gegenüber der Gleichgewichtsposition ist $x_0 = 0.1\,\mathrm{m}$.

(a) Stellen Sie die Lösung der Bewegungsleichung $x(t)$ auf und bestimmen Sie alle Konstanten.

(b) Wann wird die Masse zum ersten Mal ihre Gleichgewichtsposition durchkreuzen? Bestimmten Sie an diesem Zeitpunkt die

- Geschwindigkeit
- Beschleunigung
- kinetische Energie
- potentielle Energie

Lösung

(a) Es handelt sich bei der Anordnung um ein vollständig harmonisches Problem. Also ist die Position der Masse als Funktion der Zeit gegeben durch:

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{16}$$

Die Winkelgeschwindigkeit beträgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4\,\mathrm{s}} \approx 15.7\ \mathrm{rads}^{-1} \tag{17}$$

Definiert man nun die Richtung von x in Richtung der ursprünglichen Auslenkung, so beträgt die ursprüngliche ($t = 0$) Auslenkung gegenüber dem Ursprung $x = 0.1\,\mathrm{m}$, also:

$$0.1 = A\cos\delta \tag{18}$$

Die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit lautet:

$$v = -\omega A\sin(\omega t + \delta) \tag{19}$$

Die ursprüngliche ($t = 0$) Geschwindigkeit beträgt $-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ und zeigt in Richtung des Ursprungs von der positiven Seite aus, also:

$$-3 = -\omega A\sin\delta \tag{20}$$

Mit den Gleichungen (18) und (20) kann man nun δ bestimmen:

$$\tan\delta = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{3}{0.1\omega} = \frac{3T}{0.1\cdot 2\pi} \tag{21}$$

Also is:

$$\delta = \arctan\left(\frac{3T}{0.1 \cdot 2\pi}\right) \approx 1.088 \tag{22}$$

(Anmerkung: Jeder Wert von $\delta = 1.088 + 2n\pi$ ist korrekt.)

Unter Verwendung von Gleichung (18) erhält man die Amplitude:

$$A = \frac{0.1}{\cos\delta} \approx 0.216\,\mathrm{m} \tag{23}$$

Die Bewegungsgleichung lautet daher:

$$x = 0.216 \cdot \cos(15.7t + 1.088) \tag{24}$$

[6]

(b) Im Gleichgewicht gilt $x = 0$. Also:

$$A\cos(\omega t + 1.088) = 0 \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow \omega t + 1.088 = \frac{\pi}{2} + n\pi \tag{26}$$

$$\Longleftrightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + n\pi - 1.088\right) \tag{27}$$

Die Masse durchkreuzt ihre Gleichgewichtsposition zum ersten Mal zum Zeitpunkt:

$$t = 7.7 \cdot 10^{-2} \cdot T = 3.1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s} \tag{28}$$

Während der Bewegung bleibt die Gesamtenergie erhalten:

$$E_{Ges} = K + U \tag{29}$$

mit:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{und} \qquad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m\omega^2 x^2}{2} = \frac{2\pi^2 m}{T^2}x^2 \tag{30}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Energie:

$$E_{Ges} = \frac{1}{2}v_0^2 + \frac{2\pi^2 m}{T^2}x_0^2 \approx 17.2\,\mathrm{J}. \tag{31}$$

Aufgrund der Energieerhaltung entspricht dies die Gesamtenergie für alle Zeiten.

In der Gleichgewichtsposition ist nur kinetische Energie vorhanden. Damit kann man die Geschwindigkeit berechnen:

$$|v| = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 3.4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{32}$$

Die Beschleunigung bei $x = 0$ beträgt:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \cdot x = 0 \tag{33}$$

[6]

Alternativ:

$$t = 0 \Rightarrow v(t=0) = v_0 = -3\frac{m}{s};\ x(t=0) = x_0 = 0.1m$$

(a) physikalischer Ansatz:

$$\begin{aligned}
x(t) &= A \cdot \cos(\omega t) + B \cdot \sin(\omega t) \\
x(t=0) &= A \equiv x_0 \\
\dot{x}(t) &= -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) \\
\dot{x}(t=0) &= B\omega \equiv v_0 \Rightarrow B = \frac{v_0}{\omega} \\
\Rightarrow x(t) &= x_0 \cdot \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \\
\text{wobei } \omega &= \frac{2\pi}{T}
\end{aligned}$$

(b) Als erstes brauchen wir den Zeitpunkt des Nulldurchlaufs. Dazu setzen wir ein:

$$\begin{aligned}
x(t_0) = 0 \Rightarrow & x_0 \cdot \cos(\omega t_0) + \frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t_0) = 0 \\
& x_0 \cdot \cos(\omega t_0) = -\frac{v_0}{\omega} \cdot \sin(\omega t_0) \\
& -\frac{x_0 \cdot \omega}{v_0} = \frac{\sin(\omega t_0)}{\cos(\omega t_0)} \\
& \arctan\left(-\frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}\right) = \omega t_0 \\
& t_0 = \frac{1}{\omega} \arctan\left(-\frac{x_0 \cdot \omega}{v_0}\right) = \frac{T}{2\pi} \arctan\left(-\frac{x_0 \cdot 2\pi}{v_0 \cdot T}\right) = 0.031s
\end{aligned}$$

Die Beschleunigung im Nullpunkt ist 0, da der Nullpunkt durch das Gleichgewicht der Kräfte bestimmt wird. Ebenso ist die potentielle Energie 0 (die Feder ist ja gerade im Ruhezustand). Für die Geschwindigkeit:

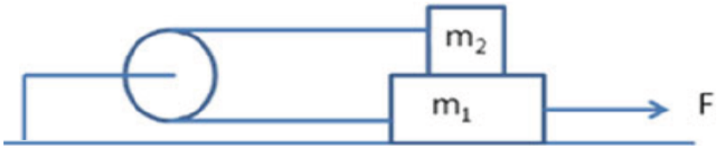
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t_0) &= -x_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t_0) + v_0 \cdot \cos(\omega t_0) = -3.39\frac{m}{s} \\
E_{kin}(t_0) &= \frac{1}{2} m \cdot (\dot{x}(t_0))^2 = 17,2J
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Zwei Blöcke mit den Massen m_1 und m_2 sind durch ein Seil verbunden, das um eine reibungslose Rolle läuft. Es wirkt die Gravitation. Der Reibungskoeffizient μ wirkt zwischen den beiden Blöcken **und** zwischen dem unteren Block und dem Boden. An m_1 greife eine horizontal wirkende Kraft F an.

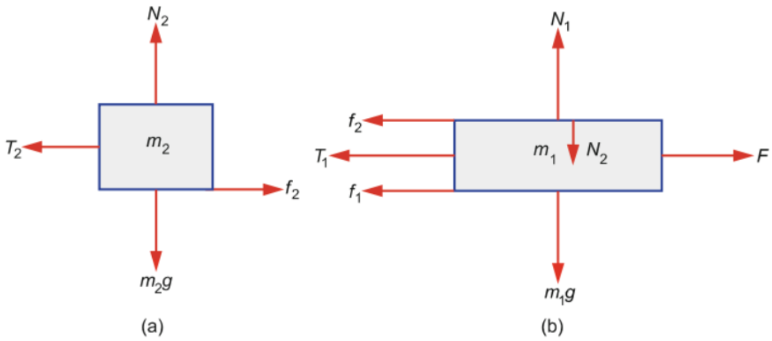
(a) Fertigen Sie zwei Zeichnungen (für jede Masse eine) mit den auf die Massen wirkenden Kräften an.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für beide Massen auf. Bestimmen Sie die Beschleunigung a von m_1 (in Abhängigkeit von F, μ und den Massen).



Lösung

(a) Die Kräftediagramme sind in untenstehender Abbildung gezeigt.



[**4**]

(b) Die folgenden Kräfte wirken auf m_2:

- Spannung T_2 durch das Seil
- Gravitation
- Reibungskraft f_2 durch die Bewegung von m_1
- Normalkraft, die m_1 auf m_2 ausübt. Dadurch wird verhindert, dass m_2 sich vertikal bewegen kann.

Die Kräfte, die durch m_2 auf m_1 wirken, sind gleich und gegensätzlich zu den Kräften, die von m_1 auf m_2 ausgeübt werden. Die Bewegungsgleichungen für m_1, m_2 und die Rolle lauten:

$$m_1 a = F - f_1 - f_2 - T_1 \tag{34}$$

$$m_2 a = T_2 - f_2 \tag{35}$$

Die Kräfte in vertikaler Richtung sind:

$$N_2 = m_2 g \tag{36}$$

$$N_1 = N_2 + m_1 g = (m_1 + m_2) g \tag{37}$$

Die Reibungskräfte betragen:

$$f_2 = \mu N_2 = \mu m_2 g \tag{38}$$

$$f_1 = \mu N_1 = \mu (m_1 + m_2) g \tag{39}$$

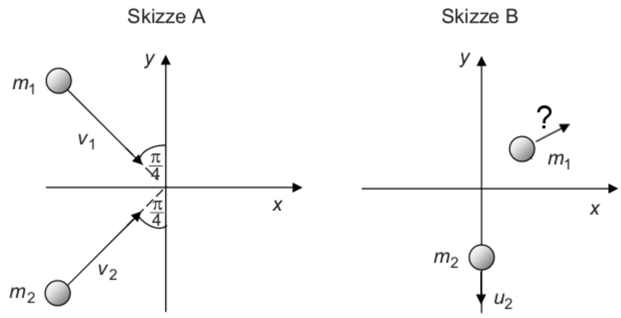
Durch Addition der Gleichungen (34), (35) und das Einsetzen von (38) und (39) erhält man nach Eliminierung von f_1, f_2 und T schließlich die Beschleunigung:

$$a = \frac{F - \mu(m_1 + 3m_2)g}{m_1 + m_2} \tag{40}$$

[**5**]

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Zwei Körper '1' und '2' gleicher Masse ($m_1 = m_2 = m$) stoßen in der gezeichneten Geometrie nach Skizze A zusammen. Vor dem Stoß sind die Beträge ihrer Geschwindigkeiten mit $v_1 = v_2 = v = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ebenfalls gleich. Nach dem Stoßvorgang bewegt sich Körper '2' mit der Geschwindigkeit $u_2 = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in der in Skizze B gezeichneten Richtung. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit (Betrag



und Richtung) u_1 des Körpers '1' nach dem Stoß.

Lösung

Impulserhaltung für die beiden Koordinatengleichungen liefert

- für die x-Koordinatenrichtung

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \tag{41}$$

- für die y-Koordinatenrichtung

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}. \tag{42}$$

Dazu kommen die speziellen Bedingungen

$$m_1 = m_2 = m$$
$$v_1 = v_2 = v.$$

[**2**]

Impulserhaltung in y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
y:\ m\cdot v\cdot\cos(45^\circ) - m\cdot v\cdot\cos(45^\circ) &= m\cdot u_1\cos(\varphi) + m\cdot u_2\\
0 &= m\cdot u_1\cos(\varphi) + m\cdot u_2\\
\Rightarrow u_2 &= u_1\cos(\varphi)
\end{aligned}
$$

Impulserhaltung in x-Richtung:

$$
\begin{aligned}
x:\ m\cdot v\cdot\sin(45^\circ) + m\cdot v\cdot\sin(45^\circ) &= m\cdot u_1\sin(\varphi)\\
2\cdot v\cdot\sin(45^\circ) &= u_1\sin(\varphi)\\
\Rightarrow u_1 &= \frac{2\cdot v\cdot\sin(45^\circ)}{\sin(\varphi)}\\
\Rightarrow u_2 &= \frac{2\cdot v\cdot\sin(45^\circ)}{\tan(\varphi)}\\
\tan(\varphi) &= \frac{2\cdot v\cdot\sin(45^\circ)}{u_2} \Rightarrow \varphi = 70,5^\circ\\
\Rightarrow u_1 &= 15\frac{m}{s}
\end{aligned}
$$

[**6**]

Aufgabe 5 (9 Punkte)

In der Antarktis gibt es einen Antarktis-Park, ein beliebter Zeitvertreib für Pinguine. Eine besondere Attraktion ist eine scheibenförmige Eisscholle (Fläche A, Eisdicke D, Eisdichte ρ_E), die im Meer schwimmt (Wasserdichte ρ_W).

(a) Welcher Anteil der Eisdicke D befindet sich oberhalb der Wasseroberfläche?

(b) Wie groß müsste die Gesamtmasse der Pinguine auf der Eisscholle sein, damit ihr Gewicht die Scholle völlig untertaucht?

(c) Mit größtem Vergnügen springen Pinguine auf der Eischolle so auf und ab, dass die Scholle anfängt zu schwingen. Mit welcher Periode T müssten die Pinguine springen, um die Scholle in der Resonanzfrequenz anzuregen?

(d) Aufgrund der globalen Erwärmung schmilzt die Eisscholle. Wie ändert sich dadurch der Wasserspiegel des Meeres? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Temperatur des Meerwassers wird als unverändert angenommen. Die Pinguine werden für diesen Teil der Aufgabe nicht berücksichtigt. Sie haben sich längst aus dem Staub (aus dem Schnee?) gemacht.

Lösung

(a) Masse Eis: $M_E = \rho_E AD$

Masse verdrängten Wassers: $M_W = \rho_W A(D-x)$, wobei x die Höhe der Eisschicht ist, die aus dem Wasser ragt. Aus $M_E g = M_W g$ folgt

[**1**]

$$\frac{x}{D} = \frac{V_{E\,\text{außen}}}{V_E} = \frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_W}$$

[1]

(b)

$$\rho_E ADg + mg = \rho_W ADg$$

[1]

Damit ist die Masse der Pinguine $m = (\rho_W - \rho_E)AD$.

[1]

(c) Die x-Achse zeige nach oben, die einwirkenden Kräfte sind der Auftrieb durch das verdrängte Wasser nach oben und das Gewicht des Eises nach unten.

$$\begin{aligned} M_E\ddot{x} &= \rho_W Ag(D - x) - \rho_E AgD \\ \ddot{x} + \frac{\rho_W Ag}{M_E}x &= \frac{\rho_W - \rho_E}{M_E}ADg = g\frac{\rho_W - \rho_E}{\rho_E} \\ \omega^2 &= \frac{\rho_W Ag}{M_E} = \frac{\rho_W g}{\rho_E D} \end{aligned}$$

[2]

Damit ist die Schwingungsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_E D}{\rho_W g}}$

[1]

(d) Nach dem Schmelzen nimmt das Eis folgendes Volumen ein:

$$V = \frac{M_E}{\rho_W} = \frac{\rho_E}{\rho_W}AD$$

[1]

Dies ist das Wasservolumen, das die Eisscholle verdrängt hat. Somit ändert sich der Meeresspiegel beim Schmelzen nicht.

[1]

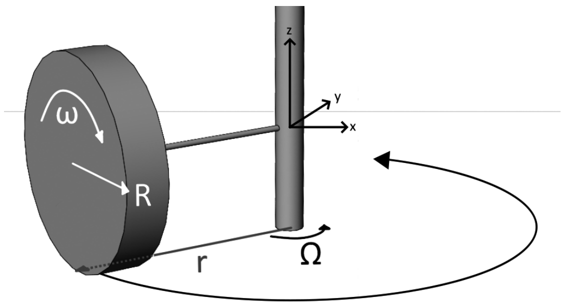
Aufgabe 6 (10 Punkte)

Ein Mühlstein (Scheibe, Masse M, Radius R) rollt in einer Ebene an einer Stange der Länge r auf einer Kreisbahn. Der Stein durchläuft eine gesamte Kreisbahn in der Zeit T.

(a) Berechnen Sie die Kreisfrequenz ω, mit der der Mühlstein um seinen Schwerpunkt rotiert. Zeigen Sie, dass gilt: $\omega = \frac{2\pi}{T}\frac{r}{R}$.

(b) Welchen Drehimpuls hat der Mühlstein (Θ_{para} wenn Drehachse $\parallel$ Symmetrieachse $\frac{1}{2}MR^2$, Θ_{quer} wenn Drehachse $\perp$ Symmetrieachse $\frac{1}{4}MR^2$) bei seiner Bewegung auf der Kreisbahn? Nehmen Sie im ersten Fall an, dass der Mühlstein nur mit Ω rotiert, aber **nicht** mit ω. Geben Sie den Betrag und die Richtung an.

(c) Berechnen Sie jetzt den Drehimpuls, wenn sich der Mühlstein mit Ω und ω dreht. Geben Sie diesen vektoriell an, in Abhängigkeit der in der Aufgabenstellung gegebenen Größen sowie der Position des Rades.



Lösung

(a) Die Rotationsgeschwindigkeit des Steins um sich selbst ist $v_{\text{rot},1} = \omega R$, die für die Bewegung auf der Ebene ist $v_{\text{rot},2} = \Omega r$ mit $\Omega = \frac{2\pi}{T}$. Da beide gleich sein müssen, ergibt sich:

$$\omega = \Omega \frac{r}{R} = \frac{2\pi}{T} \frac{r}{R} \tag{43}$$

[3]

(b) Dieser Teil des Drehimpulses basiert auf der Drehung des Mühlsteins um die zentrale z-Achse. Der Drehimpuls einer Scheibe um eine Querachse lautet $\Theta_{quer} = \frac{1}{4} MR^2$, Über den Satz von Steiner erhält man:

$$\Theta_{Stange} = \frac{MR^2}{4} + Mr^2 \tag{44}$$

Die Richtung der Drehachse zeigt über die "Rechte-Daumen-Regel“ in die positive z-Richtung, womit sich für den Drehimpuls folgender Term ergibt:

$$\vec{L}_{Stange} = \left(\frac{MR^2}{4} + Mr^2 \right) \cdot \Omega \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

[3]

(c) In diesem Fall setzt sich der Drehimpuls mittels Superposition aus zwei Anteilen zusammen. Den ersten Teil haben wir in b) berechnet. Der zweite Teil ist der Drehimpuls des Rades um sich selbst. Er ergibt sich über $\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$ aus dem Trägheitsmoment und der Kreisfrequenz multipliziert mit der Richtung $\vec{e}_\omega$ der Drehachse. Nach der "Rechte-Daumen-Regel“ zeigt er aufgrund der Drehrichtung des Rades zur Achse auf der Ebene, an der der Haltestab befestigt ist. Drückt man die Position des Radschwerpunktes über Polarkoordinaten aus, erhält man:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{46}$$

$\vec{e}_\omega$ zeigt diesem Vektor genau entgegen und hat den Betrag 1. Also ist:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega = -\omega \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

und damit:

$$\vec{L}_{Rad} = -\frac{MR^2}{2} \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{48}$$

[**2**]

Und L_{gesamt}:

$$\vec{L}_{gesamt} = \vec{L}_{Stange} + \vec{L}_{Rad} \tag{49}$$

$$\vec{L}_{gesamt} = \left(\frac{MR^2}{4} + Mr^2\right) \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

$$\vec{L}_{gesamt} = \begin{pmatrix} -\frac{MRr}{2} \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{2\pi}{T} \\ -\frac{MRr}{2} \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{2\pi}{T} \\ \left(\frac{MR^2}{4} + Mr^2\right) \cdot \frac{2\pi}{T} \end{pmatrix} = \frac{MR\pi r}{T} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \\ \left(\frac{R}{2r} + \frac{2r}{R}\right) \end{pmatrix} \tag{51}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Jemand springt in ein Wasserbecken und erzeugt zur Zeit $t = 0\,\text{s}$ kreisförmige, periodische Wasserwellen. $10\,\text{m}$ vom Eintauchpunkt des Springers entfernt messen Sie zur Zeit $t = 5\,\text{s}$ den ersten Wellenberg mit der Amplitude $A = 0.15\,\text{m}$.

Für die Geschwindigkeit v von Wasserwellen der Wellenlänge λ in Wasser gilt:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

(a) Welche Wellenlänge λ hat diese Welle?

(b) Mit welcher Frequenz f schwingt die entsprechende Welle?

(c) Mit welcher Proportionalität verhält sich die Energie der Welle zur Amplitude der Welle? Begründen Sie kurz.

(d) Nehmen Sie an, dass die Energie der Kreiswelle während der Ausbreitung erhalten ist. Wie groß war die Amplitude dieser Welle als sie noch einen Radius von $l = 0.2\,\text{m}$ hatte?

Lösung

(a) Bekannt sind (siehe auch Abbildung):

$$L = 10\,\text{m}, \qquad A = 0.15\,\text{m}, \qquad g = 9.81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt:

$$v_p = \frac{L}{t} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \tag{52}$$

Aufgelöst nach der Wellenlänge λ erhält man:

$$\lambda = \frac{2\pi L^2}{t^2 g} = 2.5\,\text{m} \tag{53}$$

[2]

(b) Die Frequenz f erhält man aus der Beziehung:

$$v_p = \lambda \cdot f = \frac{L}{t} \qquad \Leftrightarrow \qquad f = \frac{L}{\lambda t} = 0.8\,\text{Hz} \tag{54}$$

[2]

(c) Die Energie ist poportional zum Amplitudenquadrat $E \sim A^2$. Das lässt sich über die Formel der potentiellen, kinetischen oder Gesamtenergie begründen.

[2]

(d) Die Energie der Kreiswelle ist proportional zum Radius $E \sim \frac{1}{r}$. Daraus folgt

$$A \sim \frac{1}{\sqrt{|r|}} \tag{55}$$

Gesucht ist die Amplitude A bei $l = 0.2\,\text{m}$. Bei einer Kreiswelle gilt: Daraus folgt:

$$\frac{A(l)}{A(L)} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}} \qquad \Leftrightarrow \qquad A(l) = A(L) \cdot \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{l}} = 1.06\,\text{m} \tag{56}$$

[**3**]

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Ein Schwingkreis wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben.

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Die Ladung $Q(t)$ befindet sich auf einem Kondensator der Kapazität C. Dieser ist in Reihe geschaltet mit einer Spule der Induktivität L und einem Widerstand $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und geben Sie die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$ an.

Hinweis: Beachten Sie, dass eine Differentielgleichung zweiter Ordnung zwei linear unabhängige Lösungen hat. Falls Sie nur eine Lösung finden, arbeiten Sie mit dieser Lösung weiter.

Lösung

Es handelt sich um eine homogene, lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten mit $\gamma = \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

$$\ddot{Q} + 2\gamma\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$

Der Ansatz $Q(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ liefert das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \frac{1}{LC}$$

mit Nullstellen

$$\lambda_\pm = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \frac{1}{LC}}$$

Tatsächlich ist $\lambda_+ = \lambda_- = -\gamma$, daher sind die beiden Lösungen

$$\left\{\mathrm{e}^{-\gamma t}; t\mathrm{e}^{-\gamma t}\right\}$$

[**4**]

Probe (nicht nötig):

$$(t\gamma^2 - 2\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma t} + 2\gamma(1 - t\gamma)\mathrm{e}^{-\gamma t} + \frac{1}{LC}\mathrm{e}^{-\gamma t} = 0$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$Q(t) = A\mathrm{e}^{-\gamma t} + Bt\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

Aus $Q(0) = Q_0$ folgt $A = Q_0$ und aus

$$\dot{Q}(t) = -\gamma Q_0\mathrm{e}^{-\gamma t} + B\mathrm{e}^{-\gamma t} - \gamma Bt\mathrm{e}^{-\gamma t}$$

folgt

$$B = \gamma Q_0$$

und somit

$$Q(t) = Q_0\mathrm{e}^{-\gamma t} + \gamma Q_0 t\mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

[**3**]