Klausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Simmel

Sommersemester 2009

30.7.2009

Musterlösung

Aufgabe 1:

Die isochore Wärmekapazität ergibt sich durch Ableiten von U nach T bei konstantem V:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4bT^3V \tag{1}$$

Die Adiabatengleichung erhält man, indem man im Ersten Hauptsatz

$$dU = dQ + dW \tag{2}$$

das Wärmedifferential $dQ = 0$ setzt und $dW = -pdV$ berücksichtigt:

$$dU + pdV = 0 \tag{3}$$

Ersetzt man hier dU und p mit Hilfe der gegebenen $p(T,V)$ und $U(T,V)$, dann erhält man eine Differentialgleichung für den Zusammenhang zwischen T und V:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = 4bT^3V\,dT + bT^4dV \tag{4}$$

und

$$pdV = \frac{1}{3}bT^4dV \tag{5}$$

Zusammen:

$$4bT^3V\,dT + bT^4dV + \frac{1}{3}bT^4dV = 0 \tag{6}$$

bzw.

$$3\frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0 \tag{7}$$

Also gemäß dem Hinweis in der Angabe:

$$T^3V = \text{const.} \tag{8}$$

Aufgabe 2:

(a) Die Adiabatengleichung des 1atomigen idealen Gases in TV-Form ist

$$T^3V^2 = \text{const.} \tag{9}$$

Also

$$T_2^3V_2^2 = T_1^3V_1^2 \tag{10}$$

und

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} \tag{11}$$

(b) Während der adiabatisch-reversiblen Kompression gibt es keine Entropieänderungen. Durch den anschließenden Temperaturausgleich ändert sich die Entropie des Gases gemäß

$$\Delta S_G \;=\; \int \frac{dQ}{T} \tag{12}$$

wobei dQ die dem Gas zugeführte Wärme und T seine momentane Temperatur bezeichnet. Da die Abkühlung isochor erfolgt, ist

$$dQ \;=\; dU \;=\; \frac{3}{2} nRdT \tag{13}$$

(Die Vorzeichen sind korrekt, dQ ist negativ, da bei der Abkühlung des Gases dT negativ ist.) Damit wird die Entropieänderung ein Integral über T:

$$\Delta S_g \;=\; \int_{T_2}^{T_u} \frac{3}{2}\nu R \frac{dT}{T} \;=\; \frac{3}{2}\nu R \ln \frac{T_u}{T_2} \tag{14}$$

Die Entropieänderung der Umgebung ist

$$\Delta S_u \;=\; \int \frac{dQ}{T_u} \tag{15}$$

wobei jetzt dQ die der Umgebung zugeführte Wärme ist. Das T_u konstant ist, folgt

$$\Delta S_u \;=\; \frac{1}{T_u} \int dQ \tag{16}$$

Wegen Energieerhaltung ist $dQ = -dU_g$, also ist

$$\Delta S_u \;=\; -\frac{\Delta U_g}{T_u} \;=\; -\frac{1}{T_u}\,\frac{3}{2}\nu R(T_u - T_2) \tag{17}$$

Also ist im Ganzen:

$$\Delta S \;=\; \Delta S_g + \Delta S_u \;=\; \frac{3}{2}\nu R \left(\ln \frac{T_u}{T_2} + \frac{T_2 - T_u}{T_u} \right) \tag{18}$$

wobei T_2 der in (a) berechnete Wert ist.

Aufgabe 3:

(a) Der Wirkungsgrad ist allgemein Nutzen durch Aufwand. Hier ist der Nutzen die vom tiefen Temperaturniveau T_b abgesaugte Wärmeleistung Q_b und der Aufwand die verbrauchte elektrische Leistung P. Also gemäß Angabe

$$\eta \;=\; \frac{Q_b}{P} \;=\; \frac{T_b}{T_u - T_b} \tag{19}$$

Dies ist eine Gleichung für die zwei Unbekannten Q_b und T_b. Die zweite Gleichung ist die Wärmeleitungsgleichung:

$$Q_b \;=\; L(T_u - T_b) \tag{20}$$

(Mit Q_b ist hier der Betrag der Wärmeleistung gemeint.) Ersetzt man das Q_b der ersten Gleichung durch die zweite, dann erhält man:

$$L(T_u - T_b)^2 \;=\; T_b P \tag{21}$$

also eine quadratische Gleichung für T_b. Normalform:

$$T_b^2 - \left(2T_u + \tfrac{P}{L}\right) T_b + T_u^2 \;=\; 0 \tag{22}$$

Die Lösung lautet

$$T_b \;=\; T_u + \tfrac{P}{2L} \pm \sqrt{\left(T_u + \tfrac{P}{2L}\right)^2 - T_u^2} \tag{23}$$

Das positive VZ fällt weg, da die Temperatur in der Box auf jeden Fall kleiner als die Umgebungstemperatur sein muss. Also

$$T_b \;=\; T_u + \tfrac{P}{2L} - \sqrt{\left(T_u + \tfrac{P}{2L}\right)^2 - T_u^2} \tag{24}$$

(b) Einsetzen der Zahlenwerte ergibt

$$T_b \;=\; 230.35\,\mathrm{K} \;=\; -42.8\,^\circ\mathrm{C} \tag{25}$$

(c) Aus der Gleichung

$$L(T_u - T_b)^2 \;=\; T_b P \tag{26}$$

von Teil (a) liest man ab, dass für $L = 0$ auch $T_b = 0$ ist. Dividiert man die Gleichung durch L:

$$(T_u - T_b)^2 \;=\; \frac{T_b P}{L} \tag{27}$$

dann liest man ab, dass sich für $L = \infty$ ergibt, dass $T_b = T_u$ ist. Beides ist intuitiv zu erwarten und man kann es eigentlich auch ohne jede Rechnung vorhersagen.

Aufgabe 4:

(a) Aus Symmetriegründen kann man das elektrische Feld in der Form

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \;=\; E(r)\boldsymbol{e}_r \tag{28}$$

ansetzen. Das Gaußsche Gesetz

$$\int\limits_{\partial V} d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E} \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_{V} dV\,\rho \tag{29}$$

wird damit und wegen der Konstanz von ρ zu

$$4\pi r^2 E(r) \;=\; \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3} r^3 \rho \tag{30}$$

Also

$$E(r) \;=\; \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, r \tag{31}$$

(b) Die beiden Protonen haben auf jeden Fall denselben Abstand vom Mittelpunkt der Kugel und befinden sich auf einer Geraden durch den Mittelpunkt, die mit der x-Achse zusammenfallen soll. Das eine Proton befindet sich dann bei $x_p > 0$, das andere bei $-x_p$. Für das Proton bei x_p müssen sich die Feldstärken der negativen Ladungsdichte und des anderen Protons genau aufheben. Das heißt:

$$\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\, x_p + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2x_p)^2} \;=\; 0 \tag{32}$$

Die Ladungsdichte ist nun

$$\rho \;=\; \frac{-2e}{\frac{4\pi}{3} R^3} \tag{33}$$

Damit ergibt sich

$$-\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,x_p + \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 (2x_p)^2} \;=\; 0 \tag{34}$$

also

$$x_p \;=\; \frac{R}{2} \tag{35}$$

(c) Das Feld der Ladungskugel ist

$$E(r) \;=\; \begin{cases} -\dfrac{e}{2\pi\varepsilon_0 R^3}\,r & , \quad r \leq R \\ -\dfrac{e}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & , \quad r > R \end{cases} \tag{36}$$

Wegen $E(r) = -\phi'(r)$ ist das elektrostatische Potential dementsprechend

$$\phi(r) \;=\; \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,r^2 + C & , \quad r \leq R \\ -\dfrac{e}{2\pi\varepsilon_0 r} & , \quad r > R \end{cases} \tag{37}$$

Die Integrationskonstante C ergibt sich aus der Stetigkeitsbedingung des Potentials bei $r = R$:

$$\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,R^2 + C \;=\; -\frac{e}{2\pi\varepsilon_0 R} \tag{38}$$

also

$$C \;=\; -\frac{3e}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{39}$$

Damit ist das Potential am Ort des ersten Protons (wenn nur die negative Ladungskugel anwesend ist)

$$\phi(R/2) \;=\; \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{R^2}{4} - \frac{3e}{4\pi\varepsilon_0 R} \;=\; -\frac{11e}{16\pi\varepsilon_0 R} \tag{40}$$

Die Arbeit die man aufwenden muss um das Proton aus dem Unendlichen heranzuführen, ist dieselbe die frei wird, wenn sich das Proton ins Unendliche entfernt, also gleich $e\phi$:

$$W_1 \;=\; -\frac{11e^2}{16\pi\varepsilon_0 R} \tag{41}$$

Die Arbeit um das zweite Proton auf seinen Platz zu bringen ist genauso groß wie die für das erste plus der Arbeit die man braucht um das zweite Proton gegen die Abstoßung des ersten in den Abstand R zu bringen. Also:

$$W_2 \;=\; -\frac{11e^2}{16\pi\varepsilon_0 R} \;+\; \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \;=\; -\frac{7e^2}{16\pi\varepsilon_0 R} \tag{42}$$

Aufgabe 5:

Man kann aufgrund von Symmetrieüberlegungen das $\boldsymbol{B}$-Feld ansetzen als

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; B_x(z)\boldsymbol{e}_x \quad \text{mit} \quad B_x(-z) = -B_x(z) \tag{43}$$

Um das Ampereschen Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; \mu_0 \int_S d\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \tag{44}$$

anwenden zu können, betrachtet man eine rechteckige Integrationsschleife in der xz-Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung, der festen Länge l und variablen halben Höhe z. Das Integral über die Schleife ist

$$\oint_{\partial S} d\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; lB_x(-z) - lB_x(z) \;=\; -2lB_x(z) \tag{45}$$

Es ist zu beachten, dass bei der Flächenintegration über die Stromdichte der Normalenvektor so gewählt sein muss, dass zusammen mit der Umlaufrichtung um den Flächenrand die „Rechte-Hand-Regel“ erfüllt ist. D.h. der Normalenvektor ist in diesem Fall $-\boldsymbol{e}_y$.
Damit ist das Stromintegral

$$\mu_0 \int_S d\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \;=\; \mu_0 2zlj\boldsymbol{e}_y\cdot(-\boldsymbol{e}_y) \;=\; -2\mu_0 zlj \tag{46}$$

Gleichsetzen der beiden Integrale ergibt

$$B_x(z) \;=\; \mu_0 jz \tag{47}$$

Das gilt nur im Inneren der Stromschicht. Außerhalb behält das B-Feld den Wert bei, den es an der Grenzfläche hat.
Im Ganzen:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) \;=\; \begin{cases} \mu_0 ja\boldsymbol{e}_x & , \quad z > a \\ \mu_0 jz\boldsymbol{e}_x & , \quad -a \le z \le a \\ -\mu_0 ja\boldsymbol{e}_x & , \quad z < -a \end{cases} \tag{48}$$

Aufgabe 6:

Wir legen das Koordinatensystem so, dass sich die Anordnung in der xz-Ebene befindet, mit der Spule im positiven x-Bereich und dem Draht entlang der z-Achse. Nach Biot-Savart oder dem Ampereschen Durchflutungsgesetz ist das zeitabhängige B-Feld des Drahtes ($r := \sqrt{x^2+y^2}$)

$$\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \;=\; B(t,r)\boldsymbol{e}_\varphi \quad , \quad B(t,r) \;=\; \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \tag{49}$$

Die induzierte Spannung $U(t)$ ist nach dem Induktionsgesetz betragsmäßig gegeben durch

$$U \;=\; N\frac{d}{dt}\int d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \tag{50}$$

Also:

$$\begin{aligned} U(t) \;&=\; N\frac{d}{dt}\int_a^{2a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz\, B(t,x,0,z) && (51)\\ &=\; N\frac{d}{dt}\int_a^{2a} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz\, \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} && (52)\\ &=\; \frac{Na\mu_0\dot{I}(t)}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dx}{x} && (53)\\ &=\; \frac{Na\mu_0\dot{I}(t)}{2\pi}\big[\ln x\big]_a^{2a} && (54)\\ &=\; \frac{Na\mu_0\ln 2}{2\pi}\,\dot{I}(t) && (55) \end{aligned}$$

Mit $I(t) = I_0\cos\omega t$ folgt

$$U(t) \;=\; \frac{Na\mu_0\ln 2}{2\pi}\, I_0\omega\sin\omega t \tag{56}$$

Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$U(t) \;=\; 0.0261\,\mathrm{V}\cdot\sin(377\,\mathrm{s}^{-1}t) \tag{57}$$

Aufgabe 7:

(a) Es bietet sich an, mit komplexen Widerständen zu rechnen. Die Impedanzen eines Ohmschen Widerstandes, eines Kondensators und einer Spule sind

$$Z_R(\omega) \;=\; R \quad , \quad Z_C(\omega) \;=\; -\frac{i}{\omega C} \quad , \quad Z_L(\omega) \;=\; i\omega L \tag{58}$$

Bei Hintereinanderschaltung addieren sich die Impedanzen, bei Parallelschaltung ist der Kehrwert der Gesamtimpedanz die Summe der Kehrwerte der Einzelimpedanzen. Für den betrachteten Stromkreis ergibt sich somit:

$$\frac{1}{Z(\omega)} \;=\; \frac{1}{R_2 + i\omega L} \;+\; \frac{1}{-\frac{i}{\omega C} + R_1} \tag{59}$$

Also:

$$I_0 \;=\; \frac{1}{Z(\omega)} U_0 \;=\; \left[\frac{1}{R_2 + i\omega L} \;+\; \frac{1}{-\frac{i}{\omega C} + R_1}\right] U_0 \tag{60}$$

(b) Die komplexe Amplitude der am Kondensator abfallenden Spannung ist

$$U_{0C} \;=\; \frac{-\frac{i}{\omega C}}{-\frac{i}{\omega C} + R_1} U_0 \tag{61}$$

denn

$$I_{01} \;=\; \frac{1}{-\frac{i}{\omega C} + R_1} U_0 \tag{62}$$

ist die komplexe Amplitude des durch den linken Ast des Stromkreises fließenden Stroms.

Die am Widerstand R_2 abfallende Spannung ist

$$U_{0R_2} \;=\; \frac{R_2}{R_2 + i\omega L} U_0 \tag{63}$$

denn

$$I_{02} \;=\; \frac{1}{R_2 + i\omega L} U_0 \tag{64}$$

ist die komplexe Amplitude des durch den rechten Ast des Stromkreises fließenden Stroms.

An den Punkten A und B herrscht gleiches Potential, wenn $U_{0C} = U_{0R_2}$, also wenn

$$\frac{-\frac{i}{\omega C}}{-\frac{i}{\omega C} + R_1} U_0 \;=\; \frac{R_2}{R_2 + i\omega L} U_0 \tag{65}$$

was sich in wenigen Schritten zu

$$\frac{L}{C} \;=\; R_1 R_2 \tag{66}$$

vereinfacht.

Aufgabe 8:

Die momentante Strahlungsintensität (Einheit $\mathrm{W/m^2}$) an einem bestimmten Ort ist durch den Poynting-Vektor

$$\boldsymbol{S} \;=\; \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{67}$$

gegeben. Im vorliegenden Fall sieht er konkret so aus:

$$\boldsymbol{S}(t,\boldsymbol{r}) \;=\; \varepsilon_0 c^2 \frac{\alpha\beta}{r^2}\sin^2\vartheta\cos^2(\omega t - kr)\boldsymbol{e}_r \;=\; \varepsilon_0 c\frac{\alpha^2}{r^2}\sin^2\vartheta\cos^2(\omega t - kr)\boldsymbol{e}_r \tag{68}$$

Er zeigt also stets in radialer Richtung vom Ursprung (= Ort des Dipols) weg und sein Betrag oszilliert zwischen 0 und dem ortsabhängigen Maximalwert $\varepsilon_0 c\frac{\alpha^2}{r^2}\sin^2\vartheta$. Die momentane Strahlungsleistung (= Energiefluss, Einheit W) durch die Halbsphäre ist das Oberflächenintegral

$$P \;=\; \int\limits_{HS} d\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{S} \;=\; \int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, r^2 \sin\vartheta\, \boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{S} \tag{69}$$

(Da die Strahlungsintensität wegen dem Faktor $\sin^2\vartheta$ nicht auf der Halbsphäre konstant ist, kann man nicht einfach den Betrag von $\boldsymbol{S}$ mit der Fläche $2\pi r^2$ der Halbsphäre multiplizieren, sondern muss das Integral berechnen.) Also:

$$P(t) \;=\; 2\pi\varepsilon_0 c\alpha^2\cos^2(\omega t - kr)\int\limits_0^{\pi/2} d\vartheta\,\sin^3\vartheta \;=\; \frac{4\pi}{3}\varepsilon_0 c\alpha^2\cos^2(\omega t - kr) \tag{70}$$

Dies ist die momentane Strahlungsleistung zur Zeit t durch die Halbsphäre mit Radius r. Das zeitliche Mittel davon ist

$$\bar{P} \;=\; \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt\, P(t) \tag{71}$$

also im Wesentlichen durch das Zeitmittel des $\cos^2$-Terms gegeben. Dieses hat bekanntermaßen den Wert $\frac{1}{2}$. Also

$$\bar{P} \;=\; \frac{2\pi}{3}\varepsilon_0 c\alpha^2 \tag{72}$$

unabhängig von r. Als Zahlenwert ergibt sich mit $\alpha = 100\,\mathrm{V}$:

$$\bar{P} \;=\; 55.5\,\mathrm{W} \tag{73}$$