Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (Quickies (10 Punkte)). Beantworten Sie die Fragen und geben Sie eine möglichst kurze Erklärung.

a) Geben Sie die nicht verschwindenden Hauptträgheitsmomente eines N_2-Moleküls (zwei Punktmassen m mit festem Abstand l) an.
b) Nehmen Sie an, die Erde würde in der Bewegung um die Sonne plötzlich stoppen. Geben Sie mit Hilfe der Keplerschen Gesetze die Zeit in Jahren an, bis die Erde auf Grund der Gravitation in die Sonne gestürzt ist.
c) In welcher Richtung rotieren die Luftmassen um ein Tiefdruckgebiet auf der Nordhalbkugel?
d) Zwei Menschen unterschiedlicher Masse rollen mit identischen Fahrrädern (das Trägheitsmoment der Reifen sei Θ) eine schiefe Ebene herab. Begründen Sie, welcher Fahrer am Ende der schiefen Ebene die höhere Geschwindigkeit hat? Vernachlässigen Sie die Luftreibung.
e) Geben Sie die Hamiltonfunktion eines eindimensionalen, harmonischen Oszillators an und leiten Sie die kanonischen Bewegungsgleichungen ab.

Lösung. a) Das Hauptträgheitsmoment um die Symmetrieachse verschwindet, da in der Rotation einer Punktmasse um sich selbst keine Energie steckt. Die beiden anderen Hauptträgheitsmomente sind gleich und ergeben sich jeweils durch zwei Punktmassen m mit Abstand $\frac{l}{2}$ von der Drehachse, also

$$\Theta_x = \Theta_y = 2\left(m\left(\frac{l}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}ml^2.$$

b) Nach dem Stop bewegt sich die Erde auf einer entarteten Ellipse mit kleiner Halbachse $b' = 0$ und großer Halbachse $a' = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ AE. Die Zeit, bis die Erde in die Sonne gestürzt ist, beträgt daher die Hälfte der Bahnperiode T'. Mit dem dritten Keplerschen Gesetz gilt

$$\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a'^3}{a^3},$$

woraus für die gesuchte Zeit $t = \frac{1}{2}T'$ folgt

$$t = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}T = \frac{1}{4\sqrt{2}}T.$$

c) Auf der Nordhalbkugel weist die Corioliskraft in Bewegungsrichtung nach rechts. Die druckbedingte Bewegung der Luftmassen auf das Zentrum zu, wird daher gegen den Uhrzeigersinn abgelenkt.

d) Sowohl die potentielle Energie als auch die kinetische Energie der Translationsbewegung des Radfahrers ist proportional zur Masse. Die kinetische Energie der Rotation der Reifen hingegen ist unabhängig von der Masse des Radfahrers. Daher geht beim schwereren Radfahrer im Verhältnis weniger Energie in der Rotation der Reifen „verloren“ und er ist schneller.

e) Die Hamiltonfunktion des eindimensionalen, harmonischen Oszillators ist

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2.$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -kq.$$

□

Aufgabe 2 (Atwoodsche Fallmaschine mit Feder (10 Punkte))**.** In eine Atwoodsche Fallmaschine mit zwei gleichen Massen m, einem masselosen Seil der Länge L und einer masselosen Rolle mit Radius R ist eine Feder mit der Federkonstanten k und Gleichgewichtslänge l eingebaut. Die Massen können sich nur in der Vertikalen bewegen und sind dem Schwerefeld $-g\boldsymbol{e}_z$ ausgesetzt.

a) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems auf, wobei die Höhen der Massen gegenüber der Rollenachse mit z_1 und z_2 bezeichnet werden.
b) Geben Sie die Bewegungsgleichungen an und bestimmen Sie die allgemeine Lösung.
c) Unter welcher Bedingung enthält die Bewegung beider Massen keinen oszillierenden Anteil?

Lösung. a) Die Länge der Feder ergibt sich zu

$$s = -z_1 - z_2 + \pi R - L.$$

Die Spannenergie der Feder ist damit $E_{\text{Feder}} = \frac{k}{2}(s-l)^2$. Mit der neuen Konstanten $L' = L + l - \pi R$ erhalten wir daher

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{z}_2^2 - mgz_1 - mgz_2 - \frac{k}{2}(z_1 + z_2 + L')^2.$$

b) Die Euler-Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i}$$

$$m\ddot{z}_i = -mg - k(z_1 + z_2 + L').$$

Die Bewegungsgleichungen lauten in Matrixschreibweise mit $\boldsymbol{u} = (z_1, z_2)^{\mathrm{t}}$, $\boldsymbol{f} = (-g - \frac{kL'}{m}, -g - \frac{kL'}{m})^{\mathrm{t}}$ und $A = \frac{k}{m}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$

$$\ddot{\boldsymbol{u}} + A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}.$$

A hat die Eigenwerte 0 und $\frac{2k}{m}$ mit Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2}(1,-1)^{\mathrm{t}}$ und $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{2}(1,1)^{\mathrm{t}}$. Damit erhalten wir für die Koordinaten $u_1 = \frac{z_1+z_2}{2}$ und $u_2 = \frac{z_1-z_2}{2}$ das entkoppelte System

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 &= 0 \\ \ddot{u}_2 + \frac{2k}{m}u_2 &= -g - \frac{kL'}{m}. \end{aligned}$$

Eine partikuläre Lösung für u_2 erhält man durch den Ansatz $u_2 = \text{const.}$, so dass sich als allgemeine Lösung ergibt

$$\begin{aligned} u_1 &= C_1 + tC_2 \\ u_2 &= -\frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} + C_3 \cos\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right). \end{aligned}$$

Für die Koordinaten z_i ergibt sich damit

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1 + tC_2 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} + C_3 \cos\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right) \\ z_2 &= -C_1 - tC_2 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} + C_3 \cos\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{\tfrac{2k}{m}}t\right). \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten C_i mit $i \in \{1, \dots, 4\}$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} z_1^{(0)} &= C_1 + C_3 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} \\ z_2^{(0)} &= -C_1 + C_3 - \frac{gm}{2k} - \frac{L'}{2} \\ \dot{z}_1^{(0)} &= C_2 + C_4\sqrt{\tfrac{2k}{m}} \\ \dot{z}_2^{(0)} &= -C_2 + C_4\sqrt{\tfrac{2k}{m}} \end{aligned}$$

insbesondere zu

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{z_1^{(0)} + z_2^{(0)} + \frac{gm}{k} + L'}{2} \\ C_4 &= \left(\dot{z}_1^{(0)} + \dot{z}_2^{(0)}\right)\sqrt{\tfrac{m}{8k}}. \end{aligned}$$

c) Die Bewegung beider Massen enthält keinen oszillierenden Anteil, wenn $C_3 = C_4 = 0$ und somit, wenn gilt

$$\begin{aligned} -z_1^{(0)} - z_2^{(0)} &= \frac{gm}{k} + gL' \\ \dot{z}_1^{(0)} &= -\dot{z}_2^{(0)}, \end{aligned}$$

was anschaulich klar ist. Die Feder muss genau die Gleichgewichtslänge im Schwerefeld haben und beiden Massen müssen sich mit derselben Geschwindigkeit längs der Fallmaschine bewegen.

□

Aufgabe 3 (Überkippen eines Würfels (10 Punkte))**.** Ein homogener Würfel mit Kantenlänge a und Masse m gleitet zunächst reibungsfrei entlang der x-Achse mit konstanter Geschwindigkeit v parallel zu vier Kanten über eine horizontale, glatte Fläche. Eine leicht klebrige Schwelle von vernachlässigbarer Höhe stoppt dann die vordere, untere Kante des Würfels.

a) Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment des Würfels bei Rotation um eine Kante $\Theta = \frac{2}{3}ma^2$ ist.
b) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit unmittelbar nach dem Anstoßen. Welche Energie wird beim Anstoßen von der Schwelle absorbiert?
c) Wie groß muss die anfängliche Geschwindigkeit v mindestens sein, damit der Würfel nicht zurück fällt sondern über die Schwelle kippt?

Lösung. a) Das Trägheitsmoment des Würfels um die Kante ergibt sich direkt durch Integration (Würfel im Oktant mit $x > 0$, $y > 0$ und $z > 0$ mit Rotationsachse gleich der z-Achse)

$$\Theta = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{m}{a^3}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{m}{a}\left(\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^a y^2\,\mathrm{d}y\right) = \frac{2}{3}ma^2$$

oder vermittels des Satzes von Steiner aus dem Trägheitsmoment $\Theta_0 = \frac{1}{6}ma^2$ um die Achse durch den Schwerpunkt parallel zu einer Kante, wobei der Abstand der Kante zum Schwerpunkt $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ beträgt

$$\Theta = \frac{1}{6}ma^2 + mb^2 = \frac{1}{6}ma^2 + m\frac{a^2}{2} = \frac{2}{3}ma^2.$$

b) Beim Anstoßen ist der Drehimpuls $L = \Theta\omega$ bezüglich der Stoßkante

$$L = |m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}| = mv\,|\boldsymbol{r}_\perp| = mv\frac{a}{2}.$$

Der Drehimpuls ist beim Stoß erhalten, da die Kraft durch die Schwelle nur auf die Bezugsachse wirkt. Daraus ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{mva}{2\Theta} = \frac{3v}{4a}.$$

Da sich der Würfel bis zum Stoß auf einer Äquipotentialfläche bewegt, muss nur die kinetische Energie betrachtet werden. Die Energiebilanz lautet

$$\begin{aligned} E_{\text{Transl.}} &= E'_{\text{Rot.}} + \Delta E \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \Delta E \\ \Delta E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{2}{3}ma^2\frac{9v^2}{16a^2} = \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{8}E_{\text{Transl.}}. \end{aligned}$$

Die Schwelle absorbiert also fast zwei Drittel der ursprünglichen kinetischen Energie des Würfels.

c) Der Würfel kippt über die Schwelle, wenn er sich um einen Winkel größer 45° (Stellung mit Schwerpunkt in maximaler Höhe) dreht. Im Grenzfall reicht die Energie in der Rotation gerade aus, um den Schwerpunkt entsprechend anzuheben.

$$\begin{aligned}
E'_{\text{Rot.}} &= E''_{\text{Pot.}} - E'_{\text{Pot.}} \\
\frac{3}{16} m v^2_{\text{Grenz}} &= mg\frac{a}{\sqrt{2}} - mg\frac{a}{2} \\
v^2_{\text{Grenz}} &= \frac{16ga}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) \\
v_{\text{Grenz}} &= \sqrt{ga\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)}.
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (Molekül (10 Punkte))**.** Die Bewegung zweier durch eine Feder (Federkonstante k, Gleichgewichtslänge l) verbundener Massen m_1 und $m_2 < m_1$ sei auf die z-Achse, welche gleich der Symmetrieachse ist, eingeschränkt. Das System falle zunächst frei aus der Höhe h (Abstand der unteren Masse zum Boden) im homogenen Schwerefeld g, wobei die beiden Massen stets den Abstand l behalten und die größere Masse unten ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ stoße die untere Masse am Boden total elastisch auf (instantane Umkehr der Geschwindigkeit). Nehmen Sie an, dass genau ein Stoß mit dem Boden stattfindet.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten der Massen z_1 und z_2 für $t > 0$.
b) Führen Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinate ein
$z_S = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$, $\quad z_R = z_2 - z_1$
und geben Sie die Bewegungsgleichungen dafür an.
c) Geben Sie die Anfangswerte für z_S, z_R und die Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Stoß bei $t = 0$ an und bestimmen Sie die zugehörige Lösung der Bewegungsgleichungen.
d) Wie hoch steigt der Schwerpunkt des Systems nach dem Stoß? Benutzen Sie die Energieerhaltung in der Schwerpunktsbewegung.

Lösung. a) An den beiden Massen greift jeweils die Schwerkraft und die Federkraft an

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{z}_1 &= -m_1 g + k(z_2 - z_1 - l) \\
m_2\ddot{z}_2 &= -m_2 g - k(z_2 - z_1 - l).
\end{aligned}$$

b) Durch Linearkombination der Gleichungen aus a) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ddot{z}_S &= -g \\
\ddot{z}_R &= -k\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)(z_2 - z_1 - l) = -\frac{k}{\mu}(z_R - l),
\end{aligned}$$

wobei wir die reduzierte Masse $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ eingeführt haben.

c) Der Betrag der Geschwindigkeit v des Systems unmittelbar vor dem Stoß ergibt sich aus der Energieerhaltung

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} = m_1 g h + m_2 g (h + l) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 + m_2 g l = E'_{\text{kin}} + E'_{\text{pot}} \\ v &= \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Anfangsbedingungen unmittelbar nach dem Stoß bei $t = 0$

$$\begin{aligned} z_1(0) &= 0, & \dot{z}_1(0) &= v, \\ z_2(0) &= l, & \dot{z}_2(0) &= -v \end{aligned}$$

sowie für Schwerpunkts- und Relativkoordinate

$$\begin{aligned} z_{\text{S}}(0) &= \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, & \dot{z}_{\text{S}}(0) &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \\ z_{\text{R}}(0) &= l, & \dot{z}_{\text{R}}(0) &= -2v. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen für die Relativkoordinate ergibt sich aus der partikulären Lösung aus dem Ansatz $z_{\text{R}} = \text{const.}$ und der Schwingung

$$z_{\text{R}} = l + C_1 \cos \sqrt{\tfrac{k}{\mu}} t + C_2 \sin \sqrt{\tfrac{k}{\mu}} t,$$

wobei $C_1 = z_{\text{R}}(0) - l$ und $C_2 \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \dot{z}_{\text{R}}(0)$ gilt. Die zu den bestimmten Anfangsbedingungen gehörige Lösung lautet daher

$$\begin{aligned} z_{\text{S}} &= \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v t - \frac{1}{2} g t^2 \\ z_{\text{R}} &= l - 2v \sqrt{\tfrac{\mu}{k}} \sin \sqrt{\tfrac{k}{\mu}} t. \end{aligned}$$

d) Bei $t = 0$ besitzt der Schwerpunkt die Geschwindigkeit $\dot{z}_{\text{S}}(0) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$, wobei sich m_1 bei $z_1 = 0$ und m_2 bei $z_2 = l$ befindet. Die Energieerhaltung liefert für die maximale Steighöhe h_{max} daher

$$\begin{aligned} E'_{\text{pot}} + E'_{\text{kin}} &= E''_{\text{pot}} \\ m_2 g l + \frac{1}{2} \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2} v^2 &= (m_1 + m_2) g h_{\text{max}} \\ h_{\text{max}} &= \frac{\mu}{m_1} l + h \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{\mu}{m_1} l + h \left(1 - \frac{4\mu}{m_1 + m_2} \right). \end{aligned}$$

□

Aufgabe 5 (Bonusaufgabe (3 Punkte)). Ein Faden läuft durch ein Loch in einer horizontalen Platte. An den beiden Enden seien Massen m_1 und m_2 befestigt. m_1 bewege sich mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ senkrecht zum Faden reibungsfrei auf der Platte, während m_2 stets senkrecht im Schwerefeld hängt.

a) Wie groß muss $|\boldsymbol{v}_0|$ sein, damit sich der stationäre Zustand einstellt, in dem der Abstand von m_1 zum Loch stets r_0 ist?
b) Welche Größe ist allgemein neben der Energie erhalten? Kann m_1 bei $|\boldsymbol{v}_0| \neq 0$ durch das Loch fallen?

Lösung. a) Im stationären Zustand stellt die Schwerkraft auf die hängende Masse m_2 gerade die Zentripetalkraft für die Kreisbewegung der Masse m_1 dar. Für die Geschwindigkeit in diesem Fall ergibt sich daher

$$\left|F_g\right| = m_2 g = \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = |F_Z|$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{m_2 g r_0}{m_1}}.$$

b) Neben der Energie ist der Drehimpuls $\boldsymbol{L} = m_1 \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}$ erhalten. Da beim Fallen durch das Loch der Drehimpuls L verschwinden müsste, kann m_1 bei $|\boldsymbol{v}_0| \neq 0$ und damit $L \neq 0$ nicht durch das Loch fallen.

□