Sektion Physik der Univ. München Sommersemester 2002

Prof. Dr. W. Stocker, Dr. S. Heinemeyer

Klausur 2 zu TL III (Elektrodynamik und Optik)

www.theorie.physik.uni-muenchen.de/~heinemeyer/uni/uebungen/2002edyn

Elektrisches und magnetisches Feld einer geladenen Kugel

1. Gegeben sei eine Kugelschale (Radius R) mit der elektrischen Ladungsdichte

$$\rho(r,\theta,\phi) \;=\; \frac{\sigma_0}{R^2}\,\delta(r-R)\,\cos\theta \;, \tag{1}$$

mit $\sigma_0 = \text{const.}$ Dabei bedeuten r, θ, ϕ die Polarkoordinaten und $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion.

1.1 Wie lautet die allgemeine Formel für das Potential einer Ladungsverteilung? Berechnen sie das Potential der Ladungsverteilung (1) innerhalb und außerhalb der Kugel. [15]

Hinweis: Eine Möglichkeit zur Berechnung benutzt die folgende Relation:

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \frac{4\pi}{2l+1} Y^*_{l,m}(\theta',\phi')\,Y_{l,m}(\theta,\phi)\frac{[\mathrm{Min}(r,r')]^l}{[\mathrm{Max}(r,r')]^{l+1}} \;,$$

wobei gilt:

$$\cos\theta \;=\; \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_{1,0}(\theta,\phi) \;,$$

sowie:

$$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \; Y^*_{l,m}(\theta,\phi)\,Y_{l',m'}(\theta,\phi) \;=\; \delta_{l,l'}\,\delta_{m,m'} \;.$$

1.2 Wie lautet die allgemeine Formel zur Bestimmung des elektrischen Feldes bei gegebenem Potential? Sei das Potential einer Ladungsverteilung nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= c \cdot z/R^2 \;,\; r < R \\ &= c \cdot zR/r^3 ,\; r > R \;. \end{aligned}$$

Wie lautet das entsprechende elektrische Feld $\vec{E}$? Was ergibt sich mit $c = \sigma_0/(3\epsilon_0)$? [15]

Hinweis: Die Lösung kann (muss aber nicht) kompakt dargestellt werden mit den Relationen

$$(xz, yz, z^2) = \vec{r}(\vec{e}_z\vec{r}), \quad (0,0,r^2) = \vec{e}_z r^2 \;.$$

1.3 Sei $\sigma_0 > 0$. Skizzieren sie die elektrischen Feldlinien, diskutieren sie das Ergebnis. [5]

1.4 Wie lautet die allgemeine Formel für das elektrische Dipolmoment einer Ladungsverteilung? Berechnen sie damit das Dipolmoment $\vec{p}$ der Ladungsverteilung (1). Wie lautet das Dipolfeld im Außenraum, gegeben durch

$$\vec{E}_D = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p}\,\vec{r}) - \vec{p}\,r^2}{r^5} \ ?$$

Vergleichen sie das Ergebnis mit dem aus Aufgabe 1.2. [15]

2. Die Kugel (mit der selben Ladungsverteilung (1)) rotiere nun mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ um eine Achse durch den Kugelmittelpunkt.

2.1 Zeigen sie: Die dazugehörige Stromdichte lautet

$$\vec{j} = \frac{\sigma_0}{R^2}\,\delta(r - R)\,\cos\theta\;\Omega \times \vec{r}\ .$$

[5]

2.2 Berechnen sie das magnetische Dipolmoment,

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r\ \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})\ ,$$

für die Rotation um

a) die Symmetrieachse der Ladungsverteilung ($\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_z$), [15]

b) die x-Achse ($\vec{\Omega} = \Omega\vec{e}_x$).

Was folgt für die Rotation um die y-Achse?

Was folgt damit für beliebige Drehachsen? [12]

2.3 Begünden sie mit Symmetrieüberlegungen, warum das magnetische Dipolmoment einer antisymmetrischen Ladungsverteilung ($\rho(\vec{r}) = -\rho(-\vec{r})$) immer identisch verschwindet. Was bedeutet das für das Ergebnis in Aufgabe 2.2 ? [8]