Klausur zur Experimentalphysik III

Prof. Dr. L. Oberauer

Wintersemester 2009/2010

Quirin Meindl
Timo Lewke

quirin.meindl@ph.tum.de
timo.lewke@ph.tum.de

Raum: PH3043
Tel.:089/289-12328

16.02.10

Zugelassene Hilfsmittel:

1 beidseitig handbeschriebenes DINA4 Blatt
Ein nicht-programmierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90min.
Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden, um die Note 1.0 zu erhalten.
Die Lösungswege müssen nachvollziehbar sein, um Punkte auf das Ergebnis zu erhalten!
5 Seiten, 8 Aufgaben (+ Anhang), insgesamt ∼67 Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Glasfaser (∼ 8 Punkte)

Gegeben sei eine zylindrische Glasfaser in Luft mit stufenförmigen Brechzahlprofil:

$$n(r) = \begin{cases} n_K & \text{für } r \leq a \\ n_M & \text{für } r > a \end{cases}$$

Dabei ist $n_K = 1.457$ die Brechzahl des Kerns mit Radius a, $n_M = 1.448$ die Brechzahl des Mantels und r die Radialkoordinate.

(a) Ein Lichtstrahl treffe unter dem Winkel α bei $r = 0$ auf die Stirnfläche der Glasfaser. Bis zu welchem Winkel α_{max} wird er an der Grenzfläche Kern-Mantel der Glasfaser totalreflektiert?

(b) Die Dauer, die das Licht zum Durchlaufen des Kerns einer Faser der Länge L benötigt, hängt nur vom Winkel ab, unter dem sich das Licht zur Faserachse ausbreitet. Wie groß ist der maximale relative Laufzeitunterschied zwischen Strahlen mit unterschiedlichen Eintrittswinkeln α? Was müsste man ändern, damit diese die Übertragungslänge begrenzenden Laufzeitunterschiede minimiert werden?

Lösung:

(a) Im Lichtleiter ist der Grenzwinkel für Totalreflektion $\alpha = \arcsin n_M/n_K = 83.63°$. Zum Lot auf der Stirnfläche entspricht dies $90° - \alpha = 6.37°$. Dieser Winkel wird für alle Lichtrahlen, die steiler als $\arcsin(\sin 6.37 \cdot n_K) = 9.30°$ einfallen, unterschritten.

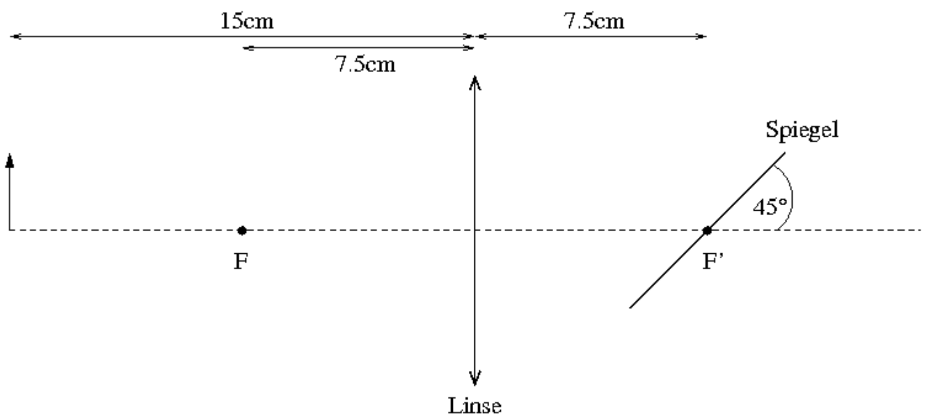
(b) Der maximale relative Weglängenunterschied in einem Faserstück der Länge L für die beiden Extremalstrahlen mit WInkeln von 6.37° und 0° zur Faserachse ist

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{\cos 6.37°} - 1 = 0.6\%.$$

Der relative Laufzeitunterschied beträgt also folglich auch 0.6%.
Man kann die Radialabhängigkeit der Brechzeit der Faser so profilieren, dass für einen größeren Winkelbereich keine merklichen Laufzeitunterschiede zustande kommen (Gradientenphaser). Eine weitere Möglichkeit ist eine geeignete Linsenkonstruktion vor der Glasfaser um das Licht zu parallelisieren.

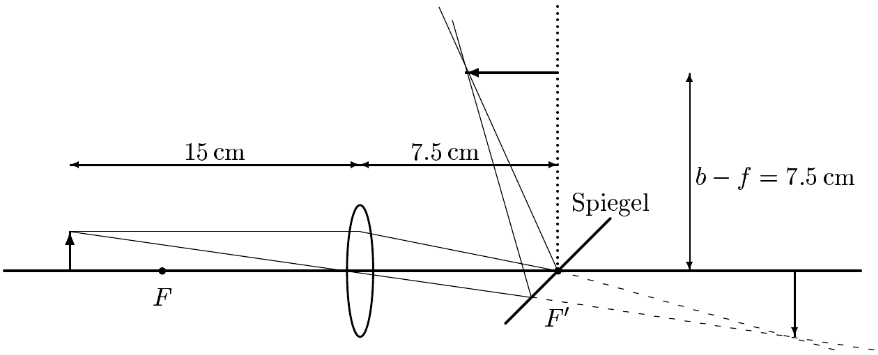
Aufgabe 2: Linse und Spiegel (∼ 7 Punkte)

Ein Gegenstand befindet sich $15cm$ vor einer dünnen Sammellinse mit einer Brennweite von $7.5cm$. Auf der rechten Seite der Linse befindet sich im Brennpunkt ein Spiegel, der um 45° gedreht ist, so dass die reflektierten Strahlen nicht mehr die Linse treffen.



Wo entsteht das Bild? Wie weit ist es von der optischen Achse entfernt? Ist das Bild reell oder virtuell? Skizzieren Sie den Strahlengang!

Lösung:



Die Abbildungsgleichung liefert uns sofort die Bildweite der Linse:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{fg}{g-f} = 15cm$$

Zur Bildkonstruktion muss man sich den Strahlengang ohne Spiegel denken und ihn dann an der Ebne des Spiegels reflektieren. Es entsteht ein reelles Bild. Dieses befindet sich $7.5cm$ oberhalb der optischen Achse. Der Strahlengang ist in der Skizze angedeutet.

Aufgabe 3: Ölschicht (∼ 13 Punkte)

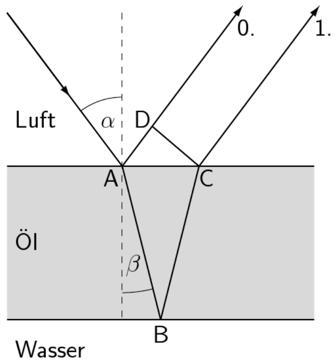
Auf einer Wasserpfütze ($n_W = 1.3$) schwimme eine dünne Ölschicht der Dicke d. Man betrachtet die Schicht und das darin reflektierte Sonnenlicht unter einem Winkel α zur Normalen.

(a) Zeigen Sie, dass die optische Wegdifferenz zwischen dem an der Grenzfläche Luft-Öl einfach reflektierten Strahl und dem an der Grenzfläche Öl-Wasser einfach reflektierten Lichtstrahl $\Delta s = 2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2 \alpha}$ beträgt und skizzieren Sie die Strahlengänge.

(b) Geben Sie die Bedingung für konstruktive Interferenz zwischen den beiden reflektierten Lichtstrahlen an, wenn das Öl einen Brechungsindex von $n_{\text{Öl}} = 1.6$ bzw. $n_{\text{Öl}} = 1.2$ hat.

(c) Berechnen Sie die minimale Dicke d der Ölschicht für $n_{\text{Öl}} = 1.6$, so dass das reflektierte Sonnenlicht bei Betrachtung unter einem Winkel von $\alpha = 45°$ grün ($\lambda = 500nm$) erscheint.

Lösung:



(a) Die optische Wegdifferenz beträgt $\Delta s = n_{\text{Öl}}(\overline{AB} + \overline{BC}) - \overline{AD}$.
Mit $\overline{AB} = \overline{BC} = d/\cos\beta$ und $\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin\alpha$ folgt unter Verwendung von $\tan\beta = \overline{AC}/2d$ für die Wegdifferenz:

$$\Delta s = \frac{2n_{\text{Öl}d}}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\sin\alpha$$

An dieser Stelle wird das Snellius'sche Brechungsgesetz $\sin\alpha = n_{\text{Öl}}\sin\beta$ benutzt und es ergibt sich

$$\Delta s = \frac{2n_{\text{Öl}}d}{\cos\beta} - \frac{2n_{\text{Öl}}d\sin^2\beta}{\cos\beta} = 2n_{\text{Öl}}d\cos\beta$$

Nun wird der cos wieder in einen sin umgewandelt und anschließend der Winkel β mittels erneuter Anwendung des Brechungsgesetzes in α transformiert. Es ergibt sich die gesuchte Beziehung:

$$\Delta s = 2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha}$$

(b) Für $n_{\text{Öl}} = 1.6$ muss man einen Phasensprung bei A an der Grenzfläche Luft-Öl berücksichtigen. Die Pasendifferenz ergibt somit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s - \pi = m2\pi; \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Und man erhält eine Wegdifferenz von

$$\Delta s = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

Für $n_{\text{Öl}} = 1.2$ ergibt sich ein zusätzlicher Phasensprung bei B an der Grenzfläche Öl-Wasser berücksichtigen. Die Pasendifferenz ergibt somit

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s - 2\pi = m2\pi; \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Und man erhält eine Wegdifferenz von

$$\Delta s = (m + 1)\lambda$$

(c) Benutzt man die vorherige Aufgabe, so ergibt sich:

$$2d\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha} = \Delta s = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

Da nach der minimalen Dicke gefragt ist, muss $m = 0$ verwendet werden. Zusammen mit $\alpha = 45°$ und $\lambda = 500nm$ kann man die Decke bestimmen zu

$$d = \frac{(m + 1/2)\lambda}{2\sqrt{n_{\text{Öl}}^2 - \sin^2\alpha}} = 87.1mm.$$

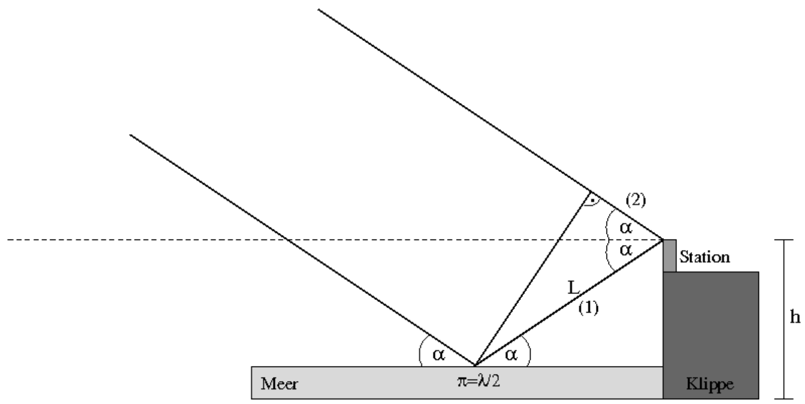
Aufgabe 4: Interferenz ($\sim$ 7 Punkte)

Eine Radarstation beobachtet den Venusaufgang. Die Station steht auf einer Klippe am Ufer des Atlantiks und sendet zu diesem Zweck elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge von $\lambda = 300m$ aus. Die Höhe der Station gegenüber Meereshöhe beträgt $h = 350m$. Die Intensität der von der Venus reflektierten Radarsignale hat ein erstes Minimum, wenn die Venus den Winkel α über dem Horizont erreicht. Berechnen Sie diesen Winkel α. (**Hinweis:** Das Meer ist als plane, perfekt reflektierende Fläche zu betrachten. Beugungseffekte, der Einfluß der Atmosphäre und die Erdkrümmung sollen vernachlässigt werden. Außerdem ist die Venus ziemlich weit weg!)

Lösung:

Man muß den Gangunterschied Δs berechnen, der durch die unterschiedlichen Weglängen (1) und (2) erzeugt wird ist.

$$\begin{aligned} (1) &= L = \frac{h}{\sin\alpha} \\ (2) &= L \cdot \cos(2\alpha) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \Delta s = (1) - (2) = L - L \cdot \cos 2\alpha = \frac{h}{\sin\alpha}(1 - \cos(2\alpha)) = 2h \sin\alpha$$

Unter Berücksichtigung des Phasensprungs bei der Reflektion an der Grenzfläche Luft-Wasser, ergibt sich somit für den Wegunterschied die Minimabedingung 1.Ordnung zu

$$\Delta s = 2h \sin\alpha = \lambda.$$

Auflösen nach dem Winkel α liefert das gesuchte Ergebnis:

$$\alpha = \arcsin\frac{\lambda}{2h} = 25.4^\circ.$$

Aufgabe 5: Doppelbrechung ($\sim$ 11 Punkte)

Ein Phasenverschiebungs-Plättchen ist eine planparallele doppelbrechende einachsige Kristallplatte mit der optischen Achse parallel zur Grenzfläche. Das Licht fällt senkrecht auf das Plättchen. Beim Durchgang durch die Platte werden ordentlicher (Brechungsindex n_o) und außerordentlicher Strahl (Brechungsindex n_a) gegeneinander phasenverschoben.

(a) Wie groß ist der Phasenunterschied als Funktion der Plattendicke d?

(b) Gegeben sei ein $0.856\mu m$ dickes Plättchen aus Kalkspat mit $n_o = 1.658$ und $n_a = 1.486$. Berechnen Sie die Wellenlänge λ, für die dieses Plättchen einen Phasenunterschied von $\pi/2$ zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl bewirkt.

(c) Ein monochromatischer Lichtstrahl fällt senkrecht (in z-Richtung) auf ein $\lambda/4$-Plättchen, dessen optische Achse in x-Richtung liegt. Begründen Sie den Polarisationszustand des Lichts nach dem $\lambda/4$-Plättchen, wenn die einfallende Welle

   (i) parallel oder senkrecht zur optischen Achse linear polarisiert ist.

(ii) unter einem Winkel von 45° zur optischen Achse linear polarisiert ist.

(iii) rechtszirkular polarisiert ist ($\vec{E} = \frac{E_0}{2}[\cos{(kz - \omega t)}\hat{x} + \sin{(kz - \omega t)}\hat{y}]$).

(iv) unpolarisiert ist.

Lösung:

(a) Die Weglängendifferenz zwischen ordentlichem und außerordentlichem Strahl ergibt sich zu

$$\Delta s = (n_o - n_a)d.$$

Es ergibt sich eine Phasendifferenz von

$$\Delta\phi(d) = k\Delta s = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_a)d$$

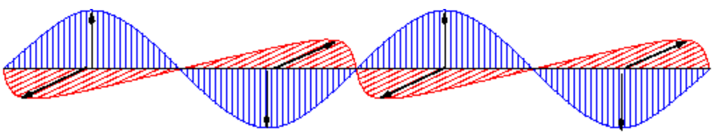
(b) Einsätzen und auflösen nach λ liefert das Ergebnis:

$$\lambda = 4(n_o - n_a)d = 588.9nm$$

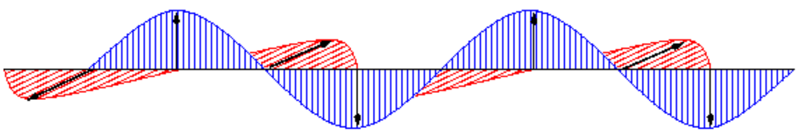
(c) Nach dem $\lambda/4$-Plättchen ergeben sich folgende Polarisationszustände:

(i) bleibt unverändert, d.h parallel oder senkrecht zur optischen Achse linear polarisiert. Nur die Phase der Wellen hat sich um $\pi/2 \hat{=} \lambda/4$ verändert.

(ii)

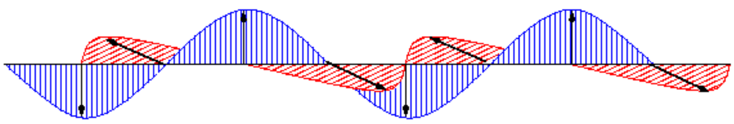


Linear polarisierte Welle zerlegt in parallelen und senkrechten Anteil zur optischen Achse

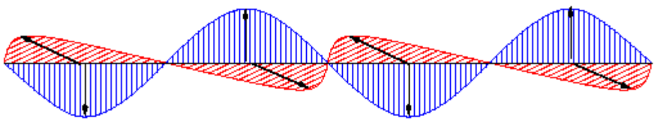


(Links–)Zirkular polarisierte Welle nach Durchgang durch das Plaettchen

(iii)



Rechtszirkular polarisierte Welle

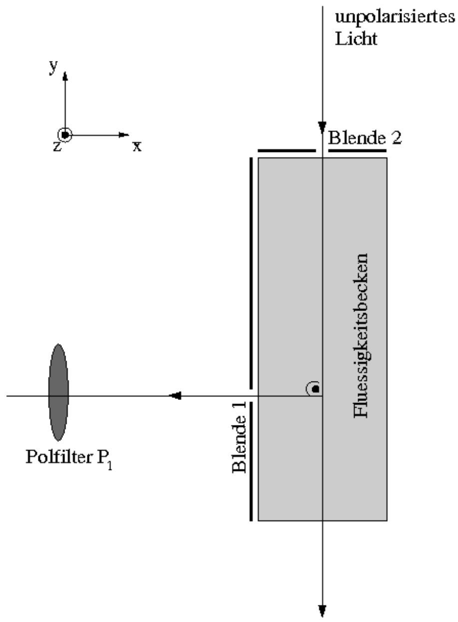


Linear polarisiert nach Durchgang durch das Plaettchen, in parallelen und senkrechten Anteil zerlegt

(iv) Überlagerung von unterschiedlich polarisierten Wellen $\Rightarrow$ bleibt unpolarisiert.

Aufgabe 6: Rayleigh-Streuung (~ 7 Punkte)

Wie in dem in der Vorlesung vorgeführten Experiment wird unpolarisiertes Licht durch eine Blende auf ein mit Flüssigkeit gefülltes Becken geworfen. Senkrecht zu der Einfallsrichtung wird das Streulicht durch einen Polarisationsfilter P_1 beobachtet. Die Durchlassrichtung des Polarisationsfilters P_1 sei θ_1 (gemessen zur positiven z-Achse in der yz-Ebene) und ist veränderbar.



(a) Bestimmen Sie die Abhängigkeit der beobachteten Intensität vom Winkel θ_1 nach Durchgang durch den Polarisationsfilter P_1.

(b) Nun wird ein weiterer Polarisationsfilter P_2 bei Blende 2 vor das Becken eingebracht. Seine Durchlassrichtung sei zunächst festgehalten bei $\theta_2 = \pi/2$ (relativ zur positiven z-Achse in der xz-Ebene).
Bestimmen Sie für diese Anordnung erneut die Abhängigkeit der beobachteten Intensität vom Winkel θ_1 nach Durchgang durch den Polarisationsfilter P_1.

(c) Am Ende wird nun auch der Polarisationsfilter P_2 freigeschalten, so dass θ_2 variabel ist. Bestimmen Sie mit den allgemeinen Einstellungen für θ_1 und θ_2 die Abhängigkeit der beobachteten Intensität vom Winkel θ_1 nach Durchgang durch den Polarisationsfilter P_1.

Geben Sie für alle Ihre Antworten eine kurze, nachvollziehbare Begründung an!

Lösung:

(a) In der Flüssigkeit werden Herz'sche Dipole zum Schwingen angeregt. Der Strahl der senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ausgekoppelt wird, hat demnach nur noch eine Komponente die parallel zur z-Richtung schwingt. Demnach erhält man nach Durchgang durch den Polarisationsfilter maximale Intensität für $\theta_1 = 0°$ bzw $\theta_1 = 180°$ und minimale Intensität für $\theta_1 = 90°$ bzw. $\theta_1 = 270°$. Die Amplitude verhält sich demnach $\sim |\cos\theta_1|$. Für die Intensität gilt damit:

$$I(\theta_1) = I_0 \cos^2\theta_1$$

(b) Da nun die Herz'schen Dipole nur noch in x-Richtung schwingen, wird kein Licht mehr senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ausgekoppelt. Die Beobachtbare Intensität nach P_1 ist somit für alle Winkel θ_1 gleich Null.

$$I(\theta_1) = 0$$

(c) Der Ausgekoppelte Strahl verhält sich zu θ_2 wie der in Aufgabe (a) beschriebene Strahl zu θ_1. Er hat somit eine Intensität $\sim \cos^2\theta_2$. Der Polarisationsfilter P_1 wurde schon in Aufgabenteil (a) behandelt, und muss nun noch auf die ausgekoppelte Strahlintensität angewendet werden. Man erhält

$$I(\theta_1, \theta_2) = I_0 \cos^2\theta_1 \cos^2\theta_2.$$

Aufgabe 7: Spinwellen im Festkörper (~ 6 Punkte)

Als Magnon bzw. Magnon-Quasiteilchen bezeichnet man den elementaren Anregungszustand einer magnetischen Spinwelle in Festkörpern. Voraussetzung dafür ist das Vorhandensein einer magnetischen Ordnung, also einer Kopplung zwischen den magnetischen Momenten der Gitteratome. Das Magnon hat folgende Dispersionsrelation:

$$\omega = \frac{C_1}{\hbar} + \frac{C_2}{\hbar}(1 - \cos(ka)).$$

Hierbei ist $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ der Wellenvektor und a der Gitterebenenabstand der Atome. C_1 und C_2 sind elementspezifische Konstanten.

(a) Bestimmen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit.

(b) Skizzieren Sie für die erste Brillouin-Zone (entspricht dem Bereich von $\frac{ka}{\pi} \in [-1; 1]$) qualitativ die Dispersionsrelation und die Gruppengeschwindigkeit. Für welche k-Werte ergeben sich stehende Wellen?

Lösung:

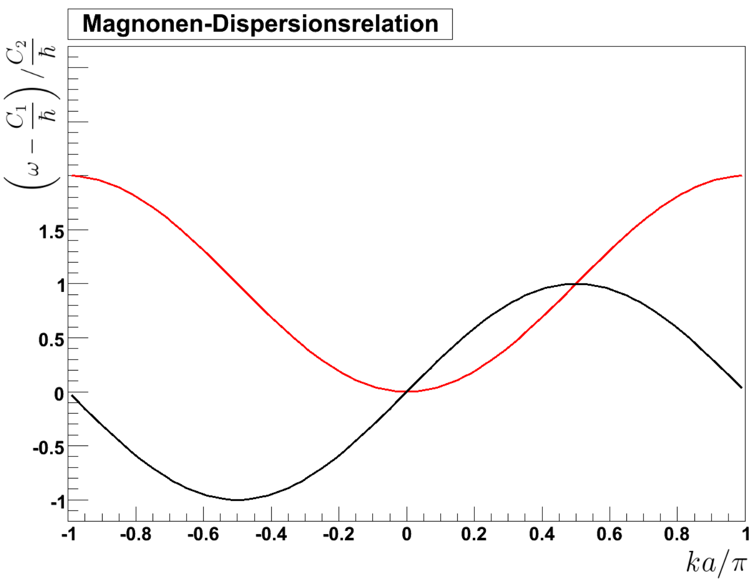
(a) Die Gruppen-Geschwindigkeit ergibt sich durch Ableiten der Dispersionsrelation:

$$v_{gr}(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{aC_2}{\hbar} \sin(ka))$$

Die Phasengeschwindigkeit ergibt sich durch Teilen der Dispersionsrelation durch den Wellenvektor k:

$$v_{ph}(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{C_1}{\hbar k} + \frac{C_2}{\hbar k}(1 - \cos(ka)).$$

(b) Man erhält stehende Wellen wenn $v_{gr}(k) = 0$, also für $k = \pm\frac{\pi}{a}$ und $k = 0$.



Aufgabe 8: Schwarzer Körper ($\sim$ 7 Punkte)

Außerhalb der Erdatmosphäre misst man das Maximum des Sonnenspektrums bei einer Wellenlänge von $\lambda = 465nm$.

(a) Betrachten Sie die Sonne näherungsweise als schwarzen Strahler und bestimmen Sie die Oberflächentemperatur T_S der Sonne.

(b) Die vom Merkur ausgesandte Schwarzkörperstrahlung entspricht einer Temperatur von $T_M = 442.5K$. Bestimmen Sie den Abstand r des Merkurs von der Sonne unter der Annahme thermischen Gleichgewichts und eines kreisförmigen Orbits. Der Radius der Sonne beträgt $R_S = 6.96 \cdot 10^5 km$, der des Merkurs ist $R_M = 2439.7km$. (Nehmen Sie an, dass die Oberfläche des Merkurs <u>nicht</u> reflektierend ist!)

<u>Lösung:</u>

(a) Mit dem Wienschen Verschiebungsgesetz erhält man sofort die Lösung für die gesuchte Temperatur:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$
$$\Rightarrow \quad T = \frac{b}{\lambda_{max}} = 6237K$$

(b) Die Abgestrahle Leistung der Sonne beträgt nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$P_S = 4\pi \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4,$$

mit σ als Stefan-Boltzmann-Konstante.
Damit nun Gleichgewicht vorherrscht, muss die vom Merkur absorbierte Strahlungsleistung gleich seiner emittierten sein:

$$P_{abs} = P_S \cdot \frac{\pi \cdot R_M^2}{4\pi \cdot r^2} \overset{!}{=} 4\pi \cdot R_M^2 \cdot \sigma \cdot T_M^4 = P_{em}$$

Setzt man nun noch die Strahlungsleistung P_S der Sonne ein, muss nur noch nach r aufgelöst werden:

$$\frac{4\pi \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \cdot \pi \cdot R_M^2}{4\pi \cdot r^2} = 4\pi \cdot R_M^2 \cdot \sigma \cdot T_M^4$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{T_S^4}{T_M^4} \cdot \frac{R_S^2}{4}$$

$$\Rightarrow r = 6.914 \cdot 10^{10} m.$$

Anhang:

Wien'sche Verschiebungskonstante:	$b = 2.9 \cdot 10^{-3} Km$
Stefan-Boltzmannkonstante:	$s = 5.67 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$
Boltzmannkonstante:	$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$
Planck'sche Konstante:	$h = 6.63 \cdot 10^{-34} Js$
Lichtgeschwindigkeit:	$c = 3 \cdot 10^{8} ms^{-1}$
Neutronenruhemasse:	$m_N = 1.6749 \cdot 10^{-27} kg = 939.57 MeV/c^2$
Elektronenruhemasse:	$m_e = 511 keV/c^2$

Additionstheoreme:

$$\cos(2\epsilon) = \cos^2\epsilon - \sin^2\epsilon$$
$$\sin^2\epsilon = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\epsilon))$$

Integral:

$$\int x^n e^{ax} dx \quad = \quad \frac{e^{ax}}{a^{n+1}}\left[(ax)^n - n(ax)^{n-1} + n(n-1)(ax)^{n-2} - ... + (-1)^n n!\right]$$