Technische Universität München
Fakultät für Mathematik
Dr. A. Ruffing

08.07.2002

Semestralklausur Analysis 2 für Physiker

Musterlösung

Aufgabe 1 **6 Punkte**

1. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $B : V \times V \to \mathbb{R}$ heisst Skalarprodukt auf V, sofern die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $\forall x, y, u \in V,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}:\ B(\alpha x + \beta y, u) = \alpha\, B(x, u) + \beta\, B(y, u)$
(2) $\forall x, y \in V:\ B(x, y) = B(y, x)$
(3) $\forall x \in V:\ B(x, x) \geq 0$
(4) $B(x, x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$

2. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $f : V \to \mathbb{R}$ heisst Norm auf V, sofern die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $\forall x \in V: \quad f(x) \geq 0$
(2) $f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$
(3) $\forall x \in V,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad f(\alpha x) = |\alpha|\, f(x)$
(4) $\forall x, y \in V: \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y)$

3. Es sei M eine nichtleere Menge. Eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ heisst Metrik auf M, sofern die folgenden Eigenschaften gelten:

(1) $\forall x, y \in M: \quad d(x, y) \geq 0$
(2) $\forall x, y \in M: \quad d(x, y) = d(y, x)$
(3) $\forall x, y \in M: \quad d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y$
(4) $\forall x, y, z \in M: \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Aufgabe 2 **12 Punkte**

1. Für die partiellen Ableitungen gilt der Reihe nach:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 100y + 2x - 4z \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 1000z - 4y \tag{1}$$

Dementsprechend erhalten wir für die zweiten partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 100 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 1000 \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -4 \tag{3}$$

Mit dem Minorenkriterium z.B. folgt die positive Definitheit der Matrix der zweiten Ableitungen, so dass es nicht möglich ist, zwei voneinander verschiedene Punkte $(u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ zu finden, an denen f ein globales Minimum annimmt. Die einzige globale Minimumsstelle ist im Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2. In dem man z.B. die Quersumme der Koordinaten für die drei Punkte

$$(1, -1, 2), \quad (3, 5, -6), \quad (-1, -1, 4) \tag{4}$$

berechnet, erkennt man, dass die drei Punkte auf der Ebene

$$E = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 2 \,\} \tag{5}$$

liegen. Die zu betrachtende Funktion für das Lagrange-Multiplikatorenverfahren wird daher gegeben durch

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ (x, y, z, \lambda) \mapsto F(x, y, z, \lambda) := (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 + \lambda(x+y+z-2) \tag{6}$$

Für die partiellen Ableitungen nach x, y, z gilt dementsprechend

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + \lambda \tag{7}$$

Nullsetzen dieser partiellen Ableitungen liefert nun

$$2x + \lambda = 2y + \lambda = 2z + \lambda = 0 \tag{8}$$

und hieraus folgt

$$x = y = z \tag{9}$$

was zusammen mit der Ebenengleichung

$$x + y + z = 2 \tag{10}$$

als eindeutige Lösung der Minimierungsaufgabe den Punkt

$$(x^*, y^*, z^*) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \tag{11}$$

liefert.

3. Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto F(x,y) := e^{y^2 \sin x} + x^6 y^2 - 3y - 1 \tag{12}$$

erfüllt z. B. auf dem offenen Rechteck $R := (-1,1) \times (-1,1)$ die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen, insbesondere existieren die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}$ auf R und sind dort stetig. Es gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y\ \sin x\ e^{y^2 \sin x} + 2x^6 y - 3 \tag{13}$$

und damit gilt insbesondere $(\frac{\partial F}{\partial y})(0,0) = -3$. Wegen $F(0,0) = 0$ und $(0,0) \in R$ gibt es nun also ein Intervall $U \subseteq (-1,1)$ um 0 und ein Intervall $V \subseteq (-1,1)$ um 0 sowie genau eine stetige reelle Funktion $f : U \to V$ mit

$$f(0) = 0 \qquad F(x, f(x)) = 0 \tag{14}$$

für alle $x \in U$. In kann U man also die Gleichung $F(x,y) = 0$ als $y = f(x)$ auflösen.

Aufgabe 3 **11 Punkte**

1. In Aufgabe **T14** der Übungen zur Analysis 2 vom Sommersemester 2002 war das folgende gezeigt worden:

Es sei $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ werde gegeben durch

$$v = (x,y,z) \mapsto F(v) := g(||v||_2)\ \frac{v}{||v||_2} \tag{15}$$

Weiterhin sei $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $G' = g$. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $v \mapsto f(v) := G(||v||_2)$. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Gleichung $(\mathrm{grad}(f))(x,y,z) = F(x,y,z)$.

In der Aufgabenstellung ist somit die Funktion g gegeben durch die Vorschrift

$$g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(t) := \frac{1}{1+t^2} + \sin t \tag{16}$$

Eine zugehörige Stammfunktion $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist

$$G : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ t \mapsto g(t) := \arctan t - \cos t \tag{17}$$

Somit erfüllt nach dem in **T14** bewiesenen Sachverhalt die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ v \mapsto f(v) := G(||v||_2) = \arctan \sqrt{x^2+y^2+z^2} - \cos \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{18}$$

die Gleichung $(\mathrm{grad}(f))(x,y,z) = F(x,y,z)$ für alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

2. Mit den Funktionen $F_1, F_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F_1(x,y,z) := x - y \qquad F_2(x,y,z) := y^2 - x^2 \tag{19}$$

liefert die Bedingung $\operatorname{div}(F) = 0$, dass

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{20}$$

was an f das Kriterium

$$1 + 2y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2y - 1 \tag{21}$$

stellt. Folglich muss die stetig partiell nach allen drei Variablen differenzierbare Funktion f den Aufbau

$$(x,y,z) \mapsto f(x,y,z) = -z\,(2y+1) + g(x,y) \tag{22}$$

haben, wobei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetig partiell nach x und y differenzierbare Funktion sein kann.

Aufgabe 4 **11 Punkte**

1. Der Nenner des Integrals hat den Aufbau $x^2 + bx + c$ mit $b = 2$ und $c = 2$. Wir wählen die Substitution $x = t - \frac{b}{2} = t - 1$ und erhalten damit

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int_1^2 \frac{2t - 2}{(t-1)^2 + 2(t-1) + 2}\, dt \tag{23}$$

Dies liefert

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \int_1^2 \frac{2t-2}{t^2+1}\, dt = \ln(t^2+1)\big|_1^2 - 2\arctan t\big|_1^2 \tag{24}$$

Das heißt damit schließlich

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 2x + 2}\, dx = \ln 5 - \ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2\arctan 2 \tag{25}$$

2. Wir wählen im zweiten Integral des Ausdrucks

$$F(x,y) := \int_0^{e^{x^2+y^2}} \frac{1}{1+t^2}\, dt + 4\int_0^{e^{-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2}} \frac{t^3}{1+t^8}\, dt \tag{26}$$

die Substitution $u := t^4$ und erhalten damit insbesondere

$$4\int_0^{e^{-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}y^2}} \frac{t^3}{1+t^8}\, dt = \int_0^{e^{-x^2-y^2}} \frac{du}{1+u^2} \tag{27}$$

Somit gewinnen wir insgesamt

$$F(x,y) = \arctan(e^{x^2+y^2}) + \arctan(e^{-x^2-y^2}) \tag{28}$$

Für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(t) := \arctan t + \arctan \frac{1}{t} \tag{29}$$

gilt $\forall t > 0 :\ f'(t) = 0$, d.h. f ist konstant. Somit folgt für die Ableitung von F

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial F}{\partial x}(s,t) = \frac{\partial F}{\partial y}(s,t) = 0 \tag{30}$$

3. Es gilt

$$J_1 = \int_A x^6 y^2 \, dx \, dy - \int_A x^7 y^3 \, dx \, dy = \tag{31}$$

$$J_1 = (\int_0^1 x^6 \, dx)(\int_0^1 y^2 \, dy) - (\int_0^1 x^7 \, dx)(\int_0^1 y^3 \, dy) \tag{32}$$

und damit

$$J_1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{32} \tag{33}$$

Nach dem Satz von Fubini gilt schließlich

$$J_2 = J_1 = \frac{1}{21} - \frac{1}{32} \tag{34}$$