Klausur zur Vorlesung

Theoretische Physik I: Mechanik

H.W. Grießhammer, T. Renk und P. Ring
11. Juli 2003

SS`03
Zeit: 90 Minuten

Auf jedem Blatt muß der *eigene Name* und die *Matrikelnummer* stehen.

Lesbar schreiben freut die Korrektoren!

Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben. Es sind insgesamt 50 Punkte erreichbar.

Hilfmittel: Keine.

Hinweise: Viele Teilaufgaben sind bearbeitbar, ohne daß die Ergebnisse aller vorhergehenden Teilaufgaben bekannt sind. *Dokumentieren Sie* die Herleitung Ihrer Ergebnisse. Wenn Sie Überlegungen anstellen, die eine Rechnung vereinfachen oder ersparen, dann beschreiben Sie diese *in Stichworten. Bitte streuen Sie zusammengehörende Aufgabenteile nicht über die ganze Klausur.* Wir empfehlen ein Blatt pro Aufgabe.
Bekanntgabe der Klausurresultate und Scheinnoten durch Aushang vor Zimmer 3217 (Prof. Ring) und – falls datenschutzrechtlich möglich – auf der Homepage der Vorlesung, spätestens ab 15. Juli. Scheine in Zi. 3220 (G. Liebhardt-Schilling, Sekretariat).

1 Allgemeine Fragen zum Verständnis (8P)

a) Unter welchen Bedingungen und wie können Sie das Noethertheorem verwenden, um aus einer gegebenen Lagrangefunktion eine Erhaltungsgröße zu finden? **(2P)**

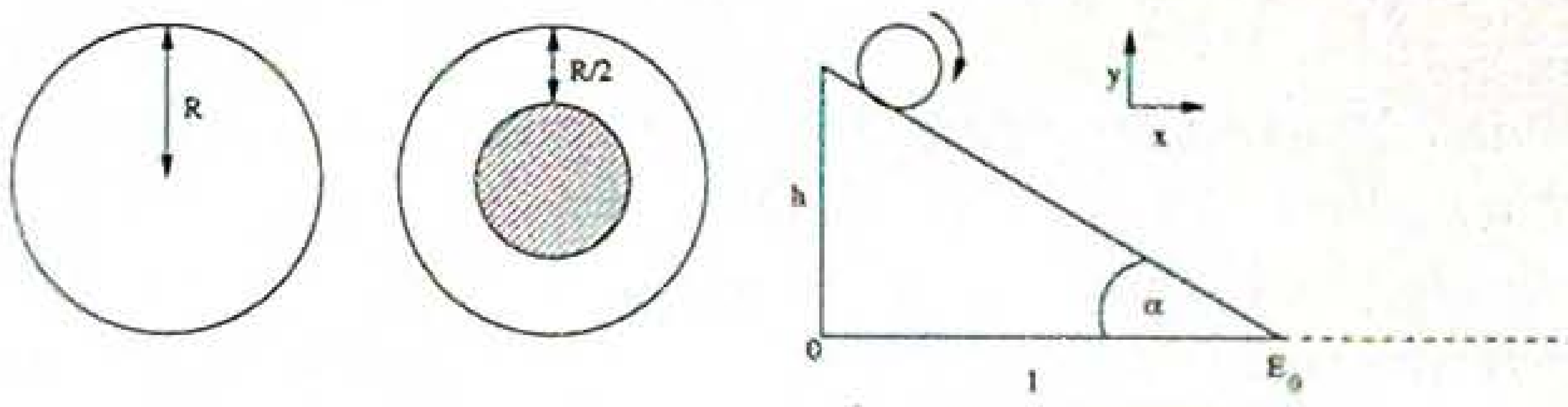
b) Der totale Wirkungsquerschnitt für einen Streuprozeß sei divergent. Geben Sie eine physikalische Interpretation für dieses Phänomen! **(2P)**

c) Kann eine Phasenraumtrajektorie sich überkreuzen? Begründung! **(2P)**

d) Geben Sie die Lagrangefunktion an, die die Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem homogenen magnetischen Feld beschreibt. Wie eindeutig ist diese Wahl? **(2P)**

2 Rollende Zylinder (13P)

Betrachten Sie zwei Zylinder mit gleicher Masse M, Höhe z_0 und Radius R, die reibungsfrei im homogenen Schwerefeld der Erde eine schiefe Ebene hinunterrollen. Zu Beginn der Bewegung liegen beide Zylinder in Ruhe am linken Rand der schiefen Ebene, ihr Schwerpunkt befindet sich in der Höhe $h + R$ über dem Boden. Es wirken bis Aufgabe e) keine weiteren Kräfte. Der erste Zylinder ist komplett mit Materie gefüllt, dem zweiten wurde ein zylindrischer Kern mit Radius $R/2$ entfernt (siehe Skizze). Die Dichteverteilung sei in beiden Fällen homogen.



a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente $I_{1,2}$ der beiden Zylinder für Rotation um die z-Achse! **(3P)**

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf! **(3P)**

Hinweis: Falls Sie kein Ergebnis aus Aufgabe a) erhalten haben, bezeichnen Sie die beiden Trägheitsmomente im folgenden mit I_{voll} und I_{hohl} und geben Sie (mit Begründung) an, welches der beiden größer ist.

c) Finden Sie die Bewegungsgleichungen! **(1P)**

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen! Welcher Zylinder erreicht das Ende der schiefen Ebene früher? Mit welcher Geschwindigkeit passieren die beiden Zylinder den Punkt E_0? **(4P)**

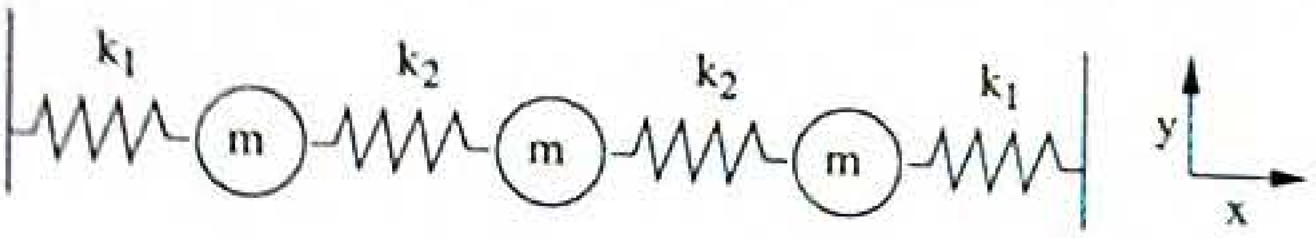
Die Zylinder rollen nun auf der Ebene weiter. Nehmen Sie an, daß der Betrag der Geschwindigkeit beider Zylinder beim Übergang von der Schräge zur Ebene erhalten bleibt und daß Details des Übergangs vernachlässigbar sind.

e) Beide Zylinder werden nun durch eine konstante Kraft $\vec{F}$ (in negative x-Richtung am Schwerpunkt der Zylinder angreifend) abgebremst. Wie weit kommen die beiden Zylinder dann auf der Ebene? **(2P)**

Hinweis: Die Teilaufgabe e) kann unabhängig von den Ergebnissen der vorangehenden Teilaufgaben bearbeitet werden.

3 Massen und Federn (13P)

Betrachten Sie das folgende System aus Massen und Federn (siehe Skizze). Die Federn gehorchen dem Hooke'schen Gesetz mit den angegebenen Federkonstanten und $k_1 = 2k_2$. Betrachten Sie weiter im folgenden nur Longitudinalschwingungen. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten auf! (Hinweis: Koordinaten, die die Auslenkung der Teilchen aus ihrer Ruhelage beschreiben, bieten Ihnen später einen Vorteil). **(2P)**

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen der drei Massen auf und bringen Sie sie in Matrixform. **(3P)**

Hinweis: Die in den Bewegungsgleichungen auftauchende Matrix kann geschrieben werden als

$$\omega_0^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

wobei ω_0 eine durch die Bewegungsgleichungen bestimmte Schwingungsfrequenz ist.

c) Machen Sie sich durch allgemeine Symmetrieüberlegungen klar, daß einer der Eigenwerte $\omega^2 = 3k_2/m$ ist und geben Sie den dazugehörigen Eigenvektor an. **(2P)**

d) Finden Sie die Frequenzen der Eigenschwingungen des Systems und bestimmen Sie auch die dazugehörigen Eigenvektoren, indem Sie einen Ansatz der Form $x_i(t) \sim \exp[i\omega t]$ verwenden. (Sie können das Resultat der vorangehenden Teilaufgabe verwenden.) **(4P)**

e) Geben Sie eine physikalische Interpretation dieser Schwingungsmoden (Angabe von Eigenvektoren mit Eigenwerten, zugehöriger Zeichnung und kurzer Erläuterung)! **(2P)**

4 Bewegung im Zentralpotential (16P)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in einem Zentralpotential der Form

$$V(r) = -\frac{c}{r^\lambda}$$

wobei $\lambda c > 0$, $\lambda < 2$ und $\lambda \neq 0$ ganzzahlig.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf und zeigen Sie, daß sie invariant unter jeder Rotation um eine Achse durch den Koordinatenursprung ist. Welche Größe ist daher erhalten? **(2P)**

b) Geben Sie das effektive Potential V_{eff} an und zeigen Sie damit, daß unter der Annahme $\lambda = 1$, daß für gegebenes c, m die Radialbewegung alleine durch die Gesamtenergie E und den Drehimpulsbetrag l festgelegt ist (sie müssen die Bewegungegleichung dazu nicht lösen). **(2P)**

Diskutieren Sie nun die Radialbewegung anhand des effektiven Potentials. Nehmen sie nun λ auch $\neq 1$ an.

c) Geben Sie für gegebenen Drehimpulsbetrag l den Radius r_0 an, für den die Bewegung auf einer stabilen Kreisbahn abläuft. (Zur Vereinfachung kann angenommen werden, daß der Parameterraum die Existenz gebundener Zustände erlaubt.) **(2P)**

d) Zeigen Sie explizit, daß man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf diesem Orbit den Ausdruck

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{m r_0^{\lambda+2}}}$$

erhält! **(1P)**

Betrachten Sie nun zusätzlich kleine Schwingungen um die Kreisbahn in radialer Richtung.

e) Geben Sie mit Hilfe der Taylor-Entwicklung eine sinnvolle Näherung für das effektive Potential im Fall kleiner Schwingungen an! **(4P)**

f) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Frequenz der radialen Schwingung ω_R und der Umlauffrequenz der Kreisbahn ω_0 her! **(3P)**

g) Welche Bedingung muß λ erfüllen, daß sich periodische, geschlossene Orbits ergeben? Diskutieren Sie das Verhältnis ω_R/ω_0 sowohl für ein Coulomb-Potential als auch für den Fall eines harmonischen Oszillators! **(2P)**

Hinweis: Die Teilaufgaben a), b), c) und g) können (zumindest teilweise) unabhängig von Resultaten aus den anderen Teilaufgaben bearbeitet werden.

Wir wünschen viel Spaß in der vorlesungsfreien Zeit, nicht nur bei der Nachbereitung der Vorlesung.