Nachklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. T. Hugel

Wintersemester 2012/2013

3. April 2013

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

(a) Geben Sie drei Erhaltungssätze der Mechanik an!

(b) Welches ist jeweils die Voraussetzung für die Gültigkeit des Erhaltungssatzes?

Lösung

(a)
- Energieerhaltung
- Impulserhaltung
- Drehimpulserhaltung

[1,5]

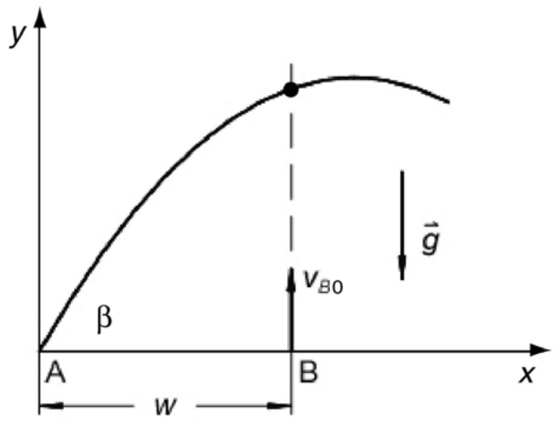
(b)
- abgeschlossenes System (kein Energietransport zu oder von diesem System)
- keine äußeren Kräfte
- keine äußeren Drehmomente

[1,5]

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Von Punkt A wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_{\mathrm{A0}} = 90\mathrm{m/s}$ unter dem Winkel $\beta = 50°$ gegen die Horizontale abgeschossen.

Mit welcher Geschwindigkeit v_{B0} muss in einem $w = 60\mathrm{m}$ entfernten, höhengleichen Punkt B ein zweiter Körper senkrecht nach oben abgeschossen werden, damit sich die Körper im Schnittpunkt der beiden Bahnkurven treffen? Der Luftwiderstand wird vernachlässigt.



Lösung

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um einen schiefen Wurf des Körpers A und um einen senkrechten Wurf nach oben des Körpers B; Zusatzbedingung ist der Zusammenstoß der beiden Körper.

Wähle ein x-y-Koordinatensystem mit positiver y-Achse nach oben und mit positiver x-Achse nach rechts zu wählen. Der Koordinatennullpunkt wird in des Startpunkt des Körpers A gelegt. Für die beiden Körper ergeben sich für Beschleunigung, Geschwindigkeit und Ort die folgenden Darstellungen in Vektorform

Körper A Für die Beschleunigung (Fallbeschleunigung nach unten) ergibt sich

$$\vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_{\mathrm{A0}} \cos\beta \\ v_{\mathrm{A0}} \sin\beta - gt \end{pmatrix}$$

Nach Integration erhält man für den Ortsvektor für Körper A

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} (v_{\mathrm{A0}} \cos\beta)t \\ (v_{\mathrm{A0}} \sin\beta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

[**1**]

Körper B Für die Beschleunigung (Fallbeschleunigung nach unten) ergibt sich

$$\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ v_{\mathrm{B0}} - gt \end{pmatrix}$$

Nach Integration erhält man für den Ortsvektor für Körper A

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} w \\ v_{\mathrm{B0}}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

[**1**]

Für den Zeitpunkt des Zusammenstoßes müssen müssen die beiden Ortsvektoren gleichgesetzt werden, also

$$\vec{r}_A(t_S) = \vec{r}_B(t_s)$$

Dies liefert zwei Gleichungen

Die Zeitdauer bis zum Zusammenstoß erhält man aus der Gleichheit der y-Komponenten der beiden Körper

$$(v_{\mathrm{A0}} \cos\beta)t_S = w$$

[**1**]

Für die Anfangsgeschwindigkeit erhält man aus der Gleichheit der y-Komponenten der beiden Körper

$$(v_{\mathrm{A0}} \sin\beta)t_S - \frac{1}{2}gt_S^2 = v_{\mathrm{B0}}t_S - \frac{1}{2}gt_S^2$$
$$v_{\mathrm{A0}} \sin\beta = v_{B0}$$

[**1**]

Zahlenwerte Flugzeit bis zum Zusammenstoß

$$t_S = \frac{w}{v_{\mathrm{A0}} \cos\beta} = \frac{60\mathrm{m}}{90\mathrm{m/s} \cdot \cos 50°} = 1,04\mathrm{s}$$

Anfangsgeschwindigkeit des Körpers B

$$v_{\mathrm{B0}} = v_{\mathrm{A0}} \sin\beta = 90\mathrm{m/s} \cdot 50° = 69\mathrm{m/s}$$

[**1**]

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Eine Masse $m = 1$kg, festgehalten durch eine masselose Schnur der Länge $l = 1$m wird aus ihrer Ruhelage ausgelenkt und losgelassen. Wenn die Schnur einen Winkel $\Theta = 30°$ mit der Vertikalen (nach unten) einschließt, ist die Geschwindigkeit der Masse $v = 1$m/s.

(a) Bestimmen Sie die Beträge der radialen und tangentialen Komponente der Beschleunigung in diesem Moment.

(b) Bestimmen Sie den Betrag der resultierenden Gesamtbeschleunigung.

(c) Berechnen Sie die Zugkraft auf die Schnur in diesem Punkt.

(d) Die Masse wird jetzt für einen Moment unter dem Winkel von 30° festgehalten und dann wieder aus der Ruhe losgelassen. Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit.

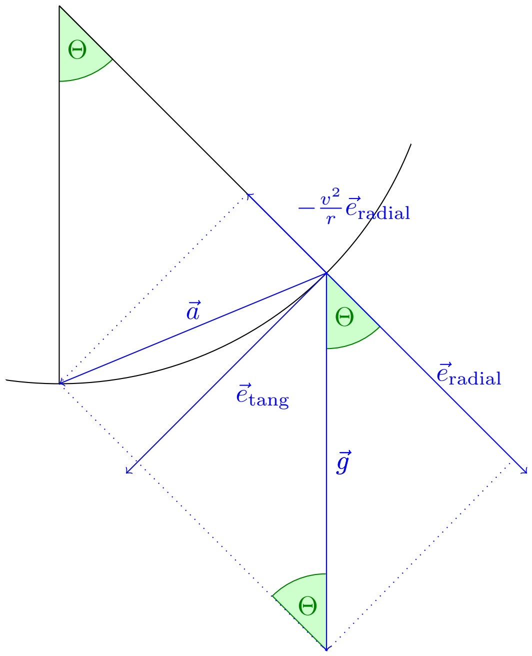
Lösung

(a) Es gilt

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r} = \frac{4\text{m}^2\text{s}^{-2}}{1\text{m}} = 4\text{ms}^{-2}$$
$$a_{\text{tang}} = g\sin\Theta = 9,81\text{ms}^{-2}\cdot\frac{1}{2} = 4,905\text{ms}^{-2}$$

[2]

(b) Zuerst eine Zeichnung



Es gilt

$$|\vec{a}|^2 = a_{\text{radial}}^2 + a_{\text{tang}}^2 = \frac{v^4}{r^2} + g^2\sin^2\Theta$$

Damit

$$a = \sqrt{g^2\sin^2\Theta + \frac{v^4}{r^2}} = \sqrt{9,81^2\text{m}^2\text{s}^{-4}\cdot(1/2)^2 + 16\text{m}^2\text{s}^{-4}} = 6,329\text{ms}^{-2}$$

[1,5]

(c)

$$\begin{aligned} F_{\text{Zug}} &= mg\cos\theta + m\frac{v^2}{r} \\ &= 1\text{kg}\cdot 9{,}81\text{ms}^{-2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1\text{kg}\frac{4\text{m}^2\text{s}^{-2}}{1\text{m}} \\ &= 12{,}50\text{N} \end{aligned}$$

[1,5]

(d) Es gilt $h = l - l\cos\Theta = l(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$. Der Energieerhaltungssatz gibt $mgh = \frac{m}{2}v_{\text{max}}^2$. Dies liefert

$$\begin{aligned} v_{\text{max}} &= \sqrt{2gh} \\ &= \sqrt{2gl(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} \\ &= \sqrt{2\cdot 9{,}81\text{ms}^{-2}\cdot 1\text{m}\cdot(1-\frac{\sqrt{3}}{2})} \\ &= 1{,}621\text{ms}^{-1} \end{aligned}$$

[2]

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Der Mars ist, von der Sonne aus gesehen, der vierte Planet in unserem Sonnensystem. Sein Durchmesser ist knapp 6800km und seine Umlaufbahn um die Sonne hat eine große Halbachse von $227{,}99$km.

(a) Die Fallbeschleunigung auf der Marsoberfläche beträgt $3{,}69\text{m/s}^2$. Berechnen Sie die Masse des Mars.

(b) Wie groß ist die Fluchtgeschwindigkeit auf der Marsoberfläche, also die Geschwindigkeit, die ein Geschoss in senkrechter Richtung haben muss, um dem Gravitationsfeld des Planeten zu entkommen?

(c) Die Umlaufzeit des Mars um die Sonne beträgt 687 Tage. Bestimmen Sie daraus die Masse der Sonne unter der Näherung einer Kreisbahn des Mars.

(d) Die Bahnebene der Planetenbahnen haben eine feste Orientierung (die Bahnnormalen sind konstant). Was ist der physikalische Grund?

Lösung

(a) Aus dem Gravitationsgesetz erhält man

$$|F| = \frac{M_{\text{Mars}}m}{r_{\text{Mars}}^2}G = mg_{\text{Mars}}$$

Durch Auflösen nach M_{Mars} ergibt sich

$$M_{\text{Mars}} = \frac{g_{\text{Mars}}}{G} r_{\text{Mars}}^2 = 6,4 \cdot 10^{23}\text{kg}$$

[1]

(b) Durch Gleichsetzen der Ausdrücke für die potentielle Energie pro Masse $U/m = M_{\text{Mars}}G/r$ und der kinetischen Energie pro Masse $E_{\text{kin}}/m = \frac{1}{2}v^2$ ergibt sich die gesuchte Fluchtgeschwindigkeit zu

$$v = \sqrt{\frac{2M_{\text{Mars}}}{r}} = 5,0 \cdot 10^3\text{m/s}$$

[2]

(c) Verwende $F_Z = F_G$, wobei $F_G = \frac{mM}{r^2}G$ und $F_Z = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T_{\text{Umlauf}}}\right)^2 r$. Dabei ist m die Marsmasse, M die Sonnenmasse und der Radius der Planetenbahn, genähert durch die große Halbachse. Daraus ergibt sich

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT_{\text{Umlauf}}^2} = 1,99 \cdot 10^{30}\text{kg}$$

[2]

(d) Es handelt sich um ein Zentralkraftfeld, daher ist der Drehimpuls erhalten.

[1]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Ein Güterwagen der Masse $m_1 = 25000\text{kg}$ fährt gegen einen stehenden Personenwagen und kuppelt an diesen an. Bei desem Manöver werden 30% der kinetischen Energie des Güterwagens in nicht-mechanische Energieformen umgewandelt.

Berechnen Sie die Masse m_2 des Personenwagens.

Lösung

Mit dem Inpulserhaltungssatz erhält man

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= (m_1 + m_2)u \\ \Leftrightarrow u &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned}$$

[1]

Die Energie vor dem Stoß war $E_{\text{kin}}^{\text{vor}} = 1/2 m_1 v_1^2$. Nach dem Stoß ist sie $E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = 1/2(m_1 + m_2)u^2$. Siebzig Prozent der Energie sind nach der Kollision noch vorhanden. Es gilt also

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}}^{\text{nach}} &= 0,7 E_{\text{kin}}^{\text{vor}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2 &= \frac{0,7}{2} m_1 v_1^2 \end{aligned}$$

Nun die Impulsbedingung eingesetzt gibt

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 = \frac{0,7}{2} m_1 v_1^2$$

[**2**]

Durch Äquivalenzumformungen erhält man $\frac{m_1}{m_1+m_2} = 0,7$, womit folgt $m_1 = 0,7m_1 + 0,7m_2$ und schließlich $m_2 = \frac{0,3}{0,7} m_1 = 10714\text{kg}$.

[**1**]

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Zwei identische Zylinder mit Massen M und R liegen in der Höhe h auf einer schiefen Ebene und werden gleichzeitig aus der Ruhe heraus losgelassen. Der eine Zylinder gleitet (ohne zu rollen) herab, der andere rollt (ohne zu gleiten herab).

Hinweis: Das Massenträgheitsmoment eines Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse ist $J_S = {}^1\!/_2 MR^2$. Reibungsverluste ist zu vernachlässigen.

(a) Berechnen Sie das Verhältnis der Geschwindigkeiten des gleitenden Zylinders v_g und des rollenden Zylinders v_r am Ende der schiefen Ebene. Warum sind die Geschwindigkeiten unterschiedlich?

Hinweis: Verwenden Sie den Energieerhaltungssatz

(b) Begründen Sie, warum beide Körper eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ausführen. Was kann man daraus qualitativ über die jeweiligen Zeiten schließen, die die beiden Zylinder hierfür benötigen?

Lösung

(a) Die Gleitgeschwindigkeit v_g erhält man mit dem Energieerhaltungssatz zu

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_g^2$$
$$\Leftrightarrow v_g = \sqrt{2gh}$$

[**1**]

Abrollen bedeutet, dass sich der Zylinder ebenfalls noch um seine Symmetrieachse dreht. Es gilt der Zusammenhang $v_r = R\omega$ zwischen Roll- und Winkelgeschwindigkeit. Es kommt noch ein Anteil von Rotationsenergie hinzu. Hier wieder mit dem Energieerhaltungssatz

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_r^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

[**1**]

Nun $\omega = \frac{v_r}{R}$ und $J = \frac{1}{2}MR^2$ eingesetzt ergibt

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_r^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\left(\frac{v_r}{R}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow Mgh = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)Mv_r^2$$

Somit ist die Rollgeschwindigkeit

$$v_r = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

[**1**]

Das Verhältnis der Gleitgeschwindigkeit zur Rollgeschwindigkeit ist

$$\frac{v_g}{v_r} = \frac{sqrt2gh}{\sqrt{\frac{4}{3}gh}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \approx 1,22$$

Die Gleitgeschwindigkeit ist also bei einem Zylinder ungefähr 1,22 mal größer als seine Rollgeschwindigkeit. Dies liegt daran, dass Energie für die Rotation aufgebracht werden muss, was beim Gleiten nicht der Fall ist.

[**1**]

(b) Die beschleunigende Kraft ist bei einer schiefen Ebene immer konstant, deshalb erhält man immer eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung. Für gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (aus der Ruhe) gilt

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2$$
$$v(t) = at$$

Dies liefert $x(t) = {}^1\!/_2 v(t)t$ also

$$t = \frac{2x(t)}{v(t)}$$

Da der zurückgelegte Weg $x(t)$ längs der schiefen Ebene bei dieser Anordnung immer derselbe ist, folgt für die Zeit die Proportionalität $t \sim (v(t))^{-1}$. Unter Benutzung des Ergebnisses aus der ersten Teilaufgabe erhält man

$$v_g(t) = \sqrt{3}2v_r(t) \approx 1,22v_r(t)$$

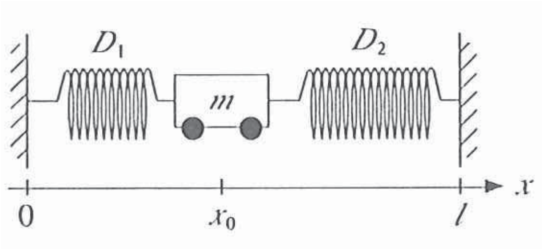
Da die Geschwindigkeit beim Gleiten zu jedem Zeitpunkt größer ist als beim Rollen, benötigt der rollende Körper mehr Zeit, um das Ende der schiefen Ebene zu erreichen.

[**1**]

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Betrachten Sie das skizzierte Doppelfeder-Pendel als Beispiel eines harmonisch schwingenden Systems mit Federkonstanten D_1 und D_2. Die Schwingungsgleichung dieses Systems lautet

$$m\ddot{x} + D_1x + D_2(x-l) = 0$$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + (D_1+D_2)x - D_2l = 0$$



(a) Berechnen Sie die Ruhelage x_0 des Systems.

(b) Führen Sie die neue Ortskoordinate $x' = x - x_0$ in obige Gleichung ein und verwenden Sie Ihr Ergebnis aus der ersten Teilaufgabe. Mit welcher Kreisfrequenz schwingt das System?

Lösung

(a) In Ruhelage gilt $\ddot{x} = 0$. Damit muss gelten $x_0 = \frac{D_2}{D_1+D_2} l$.

[**1**]

(b) Es gilt $x = x' + x_0 = x' + \frac{D_2}{D_1+D_2} l$ und $\ddot{x} = \ddot{x}'$. Damit gilt

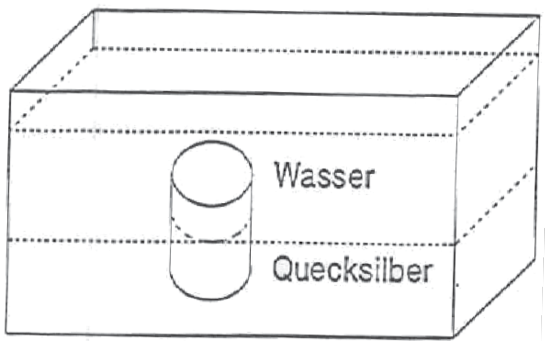
$$m\ddot{x}' + (D_1 + D_2)\left(x' + \frac{D_2 l}{D_1 + D_2}\right) - D_2 l = 0$$
$$m\ddot{x}' + (D_1 + D_2)x' = 0$$

Daraus folgt $\omega = \sqrt{\frac{D_1+D_2}{m}}$.

[**2**]

Aufgabe 8 (7 Punkte)

In einem Gefäß ist Wasser ($\rho_{H_2O} = 1,0 \mathrm{g/cm^3}$) ohne Mischung über Quecksilber ($\rho_{Hg} = 13,6 \mathrm{g/cm^3}$) geschichtet.



Ein zylindrischer Körper mit Radius $R = 5\mathrm{cm}$ taucht mit 20% seines Gesamtvolumens in das Quecksilber ein, und das restliche Volumen befindet sich im Wasser.

(a) Bestimmen Sie die Dichte ρ' des Körpers.

(b) Befindet sich der Körper nur im Wasser, so hat ein Gewicht von 10N. Bestimmen Sie sein Volumen, seine Höhe und seine Masse.

(c) Das Wasser über dem Quecksilber wird jetzt bis auf 3cm abgeschöpft. Wie ändert sich die Eindringtiefe des Zylinders im Quecksilber?

Lösung

(a) Mit dem Archimedischen Prinzip erhält man $F_a = F_g$ mit $F_a = \rho_{\mathrm{Hg}} g \frac{1}{5} V + \rho_{\mathrm{H_2O}} g \frac{4}{5} V$ und $F_g = \rho' g V$. Daraus folgt, dass $\rho' = \frac{1}{5}\rho_{\mathrm{Hg}} + \frac{4}{5}\rho_{\mathrm{H_2O}} = \left(\frac{13{,}6}{5} + \frac{4}{5}\right) \mathrm{g/cm^3} = 3{,}52 \mathrm{g/cm^3}$.

[2]

(b) Jetzt gilt $F_a = \rho_{\mathrm{H_2O}} g V$ und $F_g = \rho' g V$. Damit gilt $F_{\mathrm{Rest}} := F_g - F_a = (\rho' - \rho_{\mathrm{H_2O}}) g V$.

[1]

Damit gilt

$$V = \frac{F_{\mathrm{Rest}}}{(\rho' - \rho_{\mathrm{H_2O}}) g} = \frac{10\mathrm{N}}{2{,}52 \mathrm{gcm^{-3}} \cdot 9{,}81 \mathrm{ms^{-2}}} = 4{,}05 \mathrm{cm^3}$$

Mit $V = \pi R^2 h$ folgt

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{405}{\pi \cdot 25} \mathrm{cm} = 5{,}15 \mathrm{cm}$$

Des weiteren gilt $m = \rho' V = 3{,}52 \cdot 405 \mathrm{g} = 1{,}424 \mathrm{kg}$.

[1,5]

(c) Jetzt gilt

$$F_a = \rho_{\mathrm{Hg}} g A h_{\mathrm{Hg}} + \rho_{\mathrm{H_2O}} g A h_{\mathrm{H_2O}}$$

und $F_g = \rho' g A h$, sowie $A = \pi R^2$. Es muss immer noch $F_a = F_g$ gelten.

[1]

$$13{,}6 h_{\mathrm{Hg}} + 3\mathrm{cm} = 5{,}15 \cdot 3{,}52 \mathrm{cm}$$

Also $h_{\mathrm{Hg}} = 1{,}112 \mathrm{cm}$. Vorher war

$$h_{\mathrm{Hg}}^{\mathrm{vorher}} = \frac{1}{5} h = \frac{5{,}15}{5} \mathrm{cm} = 1{,}030 \mathrm{cm}$$

Damit ist $\Delta h = h_{\mathrm{Hg}} - h_{\mathrm{Hg}}^{\mathrm{vorher}} = 0{,}82 \mathrm{mm} > 0$. Der Körper sinkt also, da das Wasser keinen so großen Auftrieb wie zuvor bietet.

[1,5]