Technische Universität München **Sommersemester 2005**

Diplomvorprüfung Theoretische Physik 3: QUANTENMECHANIK

Montag, 06.09.2005 Hörsaal MW2001 10:00 – 11:30

1. Operatoren im Hilbertraum:

   (a) Welche der folgenden Operatoren sind Hermitesch (ohne Beweis!),

   $$\hat{x}\ , \quad \hat{p}\ , \quad \hat{x}+\hat{p}\ , \quad \hat{x}\hat{p}\ , \quad \hat{L}_x+\hat{S}_x\ , \quad \hat{L}_x\hat{S}_x \quad ? \qquad \text{(3P)}$$

   (b) Sei $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \ldots, |\psi_n\rangle \ldots$ eine vollständige orthonormale Basis des Hilbertraums $\mathcal{H}$. Die Operatoren $\hat{B}$ und $\hat{B}^\dagger$ seien wie folgt definiert:

   $$\begin{aligned} \hat{B}^\dagger|\psi_n\rangle &= \sqrt{n}|\psi_{n+1}\rangle\ , \qquad n=1,\,2,\,3,\ldots\ ; \\ \hat{B}|\psi_n\rangle &= \sqrt{n-1}|\psi_{n-1}\rangle\ , \qquad n=2,\,3,\ldots\ ; \quad \hat{B}|\psi_1\rangle = 0\,. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\hat{B}^\dagger$ tatsächlich der Hermitesch konjugierte Operator von $\hat{B}$ ist.

   Geben Sie Eigenzustände und Eigenwerte des Hermiteschen Operators $\hat{B}\hat{B}^\dagger$ an. (3P)

   (c) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien zwei Hermitesche Operatoren deren Kommutator verschwindet, $[\hat{A},\hat{B}] = 0$. Das heißt, dass sie eine gemeinsame Basis von Eigenzuständen besitzen. Zeigen Sie:

   $$\sin(\hat{A}+\hat{B}) = \sin(\hat{A})\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{A})\sin(\hat{B}) \qquad \text{(3P)}$$

2. Zwei harmonisch gebundene Teilchen:

   Betrachten Sie zwei nicht wechselwirkende Teilchen der Masse m in einem harmonischen Potenzial in einer räumlichen Dimension:

   $$\hat{H} = \frac{(\hat{p}_1)^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2(x_1)^2 + \frac{(\hat{p}_2)^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2(x_2)^2$$

   (a) Geben Sie die Eigenwerte des Hamiltonoperators $\hat{H}$ und ihre jeweilige Entartung an. (2P)

(b) Beide Teilchen mögen einen Spin mit Spinquantenzahl $s_{1,2} = \frac{1}{2}$ haben. Wie beeinflusst dies die Entartung der Eigenwerte von $\hat{H}$,
(i) wenn beide Teilchen unterscheidbar sind,
(ii) wenn sie zwei ununterscheidbare Fermionen sind ? (4P)

3. Kastenpotenzial:

Für ein Teilchen der Masse m im unendlich hohen Kastenpotenzial,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \,, \\ +\infty & \text{für} \quad x < 0 \text{ und } x > L \end{cases} ,$$

sind die Energieeigenfunktionen $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_n x)$, $0 \leq x \leq L$, mit $k_n = n\pi/L \,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$. Die zugehörigen Energieeigenwerte sind $E_n = \hbar^2 (k_n)^2/(2m)$.

(a) Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen die Orthonormalitätsrelation $\langle \psi_m | \psi_n \rangle = \delta_{m,n}$ erfüllen. (3P)

(b) Das Teilchen werde zum Zeitpunkt $t = 0$ durch die auf Eins normierte Wellenfunktion

$$\psi(x, t = 0) = N\, x(L - x)$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass für die Normierungskostante N gilt: $|N|^2 = 30/L^5$.
Berechnen Sie die Koeffizienten a_n in der Entwicklung von ψ in der Basis von Energieeigenfunktionen ψ_n,

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x) \,. \qquad (6P)$$

$$\left[\text{Nützliches Integral: } \int_0^1 (u - u^2) \sin(n\pi u)\, du = 2\, \frac{1 + (-1)^{n+1}}{(n\pi)^3} \right]$$

(c) Geben Sie einen Ausdruck für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi(x, t)$ an.
Sei T die Zeit, die mit der Energie $E_1 = \pi^2 \hbar^2/(2mL^2)$ des Grundzustands über $T = \pi\hbar/E_1$ verknüpft ist. Wie sieht die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ aus, wenn t ein ganzzahliges Vielfaches von T ist, $t = \nu T$? Wie unterscheidet sich der Fall, dass ν gerade ist, von dem Fall, dass ν ungerade ist? (6P)