....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
$\sum$		

I .... Erstkorrektur

II .... Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Studienbegleitende Fachprüfung, Wiederholung
Mathematik für Physik 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. S. Warzel

6. April 2009, 9:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **11** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[8 Punkte]**
Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k!k = n! - 1$$

LÖSUNG:

Induktionsbeginn ($n = 1$): $\sum_{k=1}^{n-1} k!k = 0 = 1! - 1$ (leere Summe)

Induktionsschritt ($n \to n + 1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k!k &\overset{[\mathbf{2}]}{=} \sum_{k=1}^{n-1} k!k + n!n \\ &\overset{\text{I.V.}[\mathbf{2}]}{=} n! - 1 + n!n \\ &\overset{[\mathbf{1}]}{=} (n+1)n! - 1 \\ &\overset{[\mathbf{1}]}{=} (n+1)! - 1 \end{aligned}$$

$\square$

Erklärung:
[**2 Punkte**] für den Induktionsbeginn,
[**2 Punkte**] für das Zerlegen,
[**2 Punkte**] für das Einsetzen der Induktionsvoraussetzung,
[**2 Punkte**] für das Zusammenfassen.

2. **Komplexe Zahlen** **[6 Punkte]**

(a) Geben Sie $z = \frac{1}{2}i + \frac{2-i}{(1+i)^2}$ in Polardarstellung, $r\,e^{i\phi}$, $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in (-\pi, \pi]$, an. **[3]**

$$z = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-i\frac{3}{4}\pi}}$$

(b) Geben Sie Real- und Imaginärteil von $\sqrt[3]{i}$ an. **[3]**

$$\sqrt[3]{i} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \mathrm{i}\,\boxed{\frac{1}{2}}$$

LÖSUNG:

(a) $z = 3i + \frac{(2-i)^2}{1+i} = 3i + \frac{4-4i-1}{1+i} = 3i + \frac{(3-4i)(1-i)}{2} = 3i + \frac{3-4-7i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

(b) $\sqrt[3]{i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^{1/3} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

3. Konvergenz von Folgen und Reihen **[7 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$ **[2]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=0$ ☒ $=\frac{1}{2}$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(b) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ **[3]**

☐ $=-\infty$ ☐ $=-1$ ☒ $=0$ ☐ $=1$ ☐ $=\infty$ ☐ existiert nicht

(c) Welchen Wert besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{3^n}$? **[2]**

☐ $-\frac{3}{2}$ ☐ -1 ☐ 0 ☐ 1 ☒ $\frac{3}{2}$ ☐ 3 ☐ ∞ ☐ undefiniert

LÖSUNG:

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}=\frac{1}{2}.$

(b) Die Folge $\log\left(\frac{n^2+5}{n^2+3}\right)$ konvergiert gegen 0, da das Argument des log gegen 1 konvergiert und log dort stetig ist. Der Faktor $\sin\left(\frac{n^2+1}{n+5}\right)$ ist vom Betrag durch 1 beschränkt und ändert nichts an der Konvergenz gegen 0.

(c) Die Terme der Reihe bilden keine Nullfolge, also nicht konvergent.

4. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Gegeben ist die Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2} z^n$. Bestimmen Sie ihren Konvergenzradius.

LÖSUNG:

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} e^{n\log(1+\frac{1}{n^2})} = 1$, da $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = 0$. Für $x = \frac{1}{n}$ erhält man wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion als Limes $e^0 = 1$. Der Konvergenzradius ist also $R = 1$.

5. **Grenzwerte von Funktionen, stetige Fortsetzbarkeit** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert hat $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$? **[2]**

☐ $-\infty$ ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☒ 1 ☐ 2 ☐ ∞ ☐ existiert nicht

(b) Durch welchen Wert ist die Funktion $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ bei $x = 0$ stetig fortsetzbar? **[2]**

☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☒ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ nicht stetig fortsetzbar

LÖSUNG:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \log(1+\frac{1}{x^2}) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\,\frac{-2}{x^3}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$, da $|x\cos\frac{1}{x}| \le |x| \to 0$ für $x \to 0$.

6. **Stetige und differenzierbare Funktionen** **[6 Punkte]**

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$, $F(\frac{1}{2}) = 1$. Beweisen Sie: es gibt ein $t \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(t) = 2$.

LÖSUNG:

F ist als Stammfunktion von f differenzierbar auf $[0,1]$. **[1]**
Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung **[1]**
gibt es ein $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ mit $F'(\xi) = \frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0} = 2$ **[2]**
Somit ist $f(\xi) = F'(\xi) = 2$ und $\xi \in [0, \frac{1}{2}]$. **[2]**

7. **Maximale Fläche** **[10 Punkte]**

Unter den Rechtecken in der xy-Ebene, für welche

- eine Seite auf der x-Achse liegt, und
- zwei Ecken in der oberen Halbebene auf dem Graph der Funktion $f(x) = 9 - x^2$ liegen,

soll dasjenige bestimmt werden, welches den größten Flächeninhalt hat.

(a) Welche Beziehung besteht zwischen der Höhe h und der Breite b des Rechtecks?

(b) Bestimmen Sie, mit Begründung, die Breite b desjenige Rechtecks mit dem größten Flächeninhalt.

LÖSUNG:

(a) $h = 9 - (\frac{b}{2})^2 = 9 - \frac{1}{4}b^2$. **[2]**

(b) Die Fläche des Rechtecks in Abhängigkeit von der Breite ist $F(b) = bh = 9b - \frac{1}{4}b^3$. **[2]**
b liegt im Intervall $[0, 6]$, damit h nichtnegativ ist. An den Rändern ist $f(0) = f(6) = 0$. **[1]**
Ableiten der Fläche nach b ergibt $F'(b) = 9 - \frac{3}{4}b^2$. Durch Nullsetzen der Ableitung erhält man $b^2 = 12$, bzw., wegen $b \geq 0$, $b = 2\sqrt{3} < 6$. **[3]**
Dies ist absolute Maximalstelle, da f stetig und konkav ist, $f''(b) = -\frac{3}{2}b \leq 0$. **[2]**

8. **Integration** **[6 Punkte]**

(a) Bestimmen Sie **[2]**

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \quad \log(\log x)$$

(b) Das Integral $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}}dx$ ist **[2]**

☒ konvergent, ☒ absolut konvergent, ☐ undefiniert.

(c) Das Integral $\int\limits_1^\infty \frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}}dx$ ist **[2]**

☒ konvergent, ☒ absolut konvergent, ☐ undefiniert.

LÖSUNG:

(a) $\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{\log'(x)}{\log(x)}dx = \log(\log x)$.

(b) Das Integral über $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ist absolut konvergent über $(0,1]$. Nach dem Majorantenkriterium also auch dieses Integral, da $|\frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}}| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x > 0$.

(c) Das Integral über e^{-x} ist absolut konvergent über $[1,\infty)$. Nach dem Majorantenkriterium also auch dieses Integral, da $|\frac{e^{-x}\cos x}{\sqrt{x}}| \le e^{-x}$ für $x > 1$.

9. **Integration** **[7 Punkte]**

Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ konvergiert das Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall seinen Wert.

LÖSUNG:

Der Integrand konvergiert unabhängig von $a \in \mathbb{R}$ für $b \neq 0$ wie unten gezeigt wird. Für $b = 0$ ist das verhalten bei $x = a$ von der Ordnung $\mathcal{O}(|x-a|^{-2})$, also nicht konvergent. **[2]**

Der Ausdruck ist unabhängig vom Vorzeichen von b. Für $b > 0$ erhält man

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx \overset{y=x-a,\mathbf{[1]}}{=} \frac{1}{b^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{y}{b})^2+1} dy \overset{x=\frac{y}{b},\mathbf{[1]}}{=} \frac{1}{b} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$\overset{\mathbf{[2]}}{=} \frac{1}{b} [\arctan x]_{-\infty}^{\infty} \overset{\mathbf{[1]}}{=} \frac{1}{b} \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{b}.$$

Für $b < 0$ dreht sich das Vorzeichen um. Insgesamt also

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{\pi}{|b|}.$$

[1]

10. **Taylorentwicklung** **[8 Punkte]**

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$.

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom fünfter Ordnung, $T_{f,5}(x)$, von $f(x)$ um den Entwicklungspunkt 0. **[5]**

$T_{f,5}(x) =$	$x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{1}{40}x^5$

(b) Welchen Konvergenzradius hat die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt 0? **[3]**

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{e}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 2 ☐ e ☒ ∞ ☐ existiert nicht

LÖSUNG:

(a) Mit der Exponentialreihe erhält man $e^{-\frac{1}{2}t^2} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\frac{t^4}{4} \pm \cdots$. Gliedweises integrieren ergibt die Lösung
[1] für die 1-te Ordnung.
[2] für die $2, 3$-te Ordnung.
[2] für die $4, 5$-te Ordnung.

(b) Die Exponentialreihe besitzt unendlichen Konvergenzradius. Somit konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-\frac{1}{2}t^2)^n$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gegen $e^{-\frac{1}{2}t^2}$, besitzt also auch unendlichen Konvergenzradius. Aufintegrieren verändert den Konvergenzradius nicht.

11. **Matrixexponential** **[7 Punkte]**

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie A^n, $n \in \mathbb{N}$. **[2]**

$$\boxed{A^n = \qquad A}$$

(b) Berechnen Sie $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$. **[3]**

$$\boxed{\exp(tA) = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2} & \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2} & \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(c) Berechnen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **[2]**

$$\boxed{x(t) = \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

LÖSUNG:

(a) $A^2 = A$, $A^{n+1} = AA^n = A^2 = A$.

(b) $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A = \mathbb{1} + (e^t - 1)A = \mathbb{1} - A + e^t A = \begin{pmatrix} \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2} & \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{e^t}{2} - \frac{1}{2} & \frac{e^t}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$