TU München, Lehrstuhl E23
Walther-Meissner-Institut
L. Alff, R. Gross

Experimentalphysik III

Vordiplom-Klausur

5. September 2002, HS S0320, 12:00-13:30

Aufgabe 1: Licht als Welle [$\sim$ 10/80 Punkte]

Geben Sie die Wellenfunktion einer (beliebigen) harmonischen Welle an. Erläutern Sie folgende Begriffe am Beispiel dieser Wellenfunktion:

(a) Dispersionsrelation,

(b) Phasengeschwindigkeit v (in dispersionsfreien und dispergierenden Medien),

(c) Gruppengeschwindigkeit v_g (ist sie größer oder kleiner als v?) und

(d) Huygenssches Prinzip. Zeichnen Sie eine qualitative Skizze am Beispiel einer (i) ebenen Welle und einer (ii) Kugelwelle.

Lösung 1: Licht als Welle [**10 Punkte**]

(a) Die Wellenfunktion einer beliebigen harmonischen Welle kann als

$$\psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$$

geschrieben werden (**1 Punkt**). Die Dispersionsrelation beschreibt die Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω von der Wellenzahl k, also die Funktion $\omega = \omega(k)$ (**1 Punkt**).

(b) Diese Beziehung zwischen ω und k bestimmt die Phasengeschwindigkeit v einer Welle. Als Phase ϕ bezeichnet man das Argument $kx - \omega t$ der Sinusfunktion. Man erhält (**1 Punkt**)

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_\phi = \frac{\omega}{k} = v.$$

Diese lineare Beziehung gilt in einem dispersionsfreien Medium wie dem Vakuum. Bei allen Wellenlängen- und Frequenzänderungen bleibt v konstant. In einem dispergierenden Medium hängt v von der Frequenz der Welle ab (**1 Punkt**).

(c) In einem dispergierenden Medium bewegen sich Wellen verschiedener Frequenz unterschiedlich schnell. Überlagert man mehrere Wellen zu einem Wellenpaket, so wird sich die Geschwindigkeit der einhüllenden Modulationskurve von der Geschwindigkeit der einzelnen Wellen unterscheiden (**1 Punkt**). Man kann daher die Gruppengeschwindigkeit v_g durch

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{\overline{\omega}}$$

beschreiben, wobei $\overline{\omega}$ der Mittelpunkt des (schmalen) Frequenzbereichs $\Delta\omega$ der Welle sei (**1 Punkt**). Die Modulation oder das Signal breitet sich mit der Geschwindigkeit v_g aus, die größer, gleich oder kleiner als v, die Phasengeschwindigkeit der Trägerwelle, sein kann (**1 Punkt**).

(d) Das Huygenssche Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer primären Wellenfront Ausgangspunkt kugelförmiger sekundärer Elementarwellen ist, so dass die Wellenfront zu einem späteren Zeitpunkt die Einhüllende dieser Elementarwellen bildet (**1 Punkt**). Dabei breiten sich die sekundären Elementarwellen mit der gleichen Frequenz ν und der gleichen Geschwindigkeit v aus wie die Primärwellen. Die Einhüllende einer ebenen Welle und die Einhüllende einer Kugelwelle ergeben also wieder eine ebene Welle (**1 Punkt**) bzw. eine Kugelwelle (**1 Punkt**). Die Skizze wird hier nicht gezeigt. Man findet sie in jedem Lehrbuch.

Aufgabe 2: Polarisation [$\sim 8/80$ Punkte]

Die Transmissionsachsen zweier Polarisationsfolien seien gekreuzt, so dass kein Licht durch dringt. Eine dritte Folie werde so zwischen die ersten beiden gestellt, dass ihre Transmissionsachse mit der ersten einen Winkel θ bildet. Unpolarisiertes Licht der Intensität I_0 treffe auf die erste Folie. Geben Sie eine allgemeine Formel an, die den Zusammenhang von der durchgelassenen Intensität mit I_0 und θ beschreibt. Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion. Berechnen Sie die Intensität des Lichts nach Durchgang durch alle drei Folien (a) für $\theta = 45°$ und (b) für $\theta = 30°$.

Lösung 2: Polarisation [**8 Punkte**]

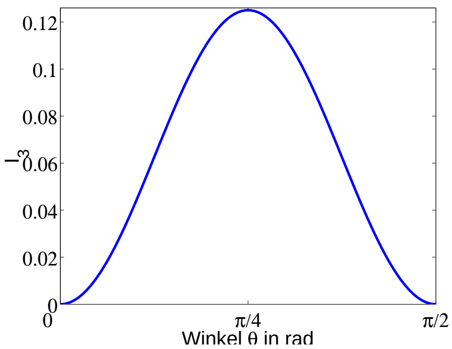


Abbildung 1: $I_3(I_0, \theta)$.

Die von der ersten Polarisationsfolie durchgelassene Intensität ist natürlich $I_1 = I_0/2$ (**1 Punkt**). Für die weiteren Folien gilt die Beziehung $I_{n+1} = I_n \cos^2\theta$ (**2 Punkte**). Wenn die Transmissionsachse der mittleren Folie mit der Achse der ersten den Winkel θ bildet, dann bildet sie mit der Achse der letzten Folie den Winkel $90° - \theta$. Es ist aber $\cos(90° - \theta) = -\sin\theta$ und $\cos^2(90° - \theta) = \sin^2\theta$ (**1 Punkt**). Also gilt:

$$I_3 = I_2 \sin^2\theta = I_1 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\theta \sin^2\theta = \frac{I_0}{8} \sin^2 2\theta.$$

Dabei wurde das im Anhang angegebene Additionstheorem verwendet (**2 Punkte**). Die Skizze ergibt einen Punkt (**1 Punkt**). (a) Für 45° erhalten wir $I_3 = \frac{I_0}{8}$ (wegen $\sin 90° = 1$).

(b) Für 30° erhalten wir $I_3 = 3\frac{I_0}{32}$ (wegen $\sin^2 60° = \frac{3}{4}$ (**1 Punkt**)).

Aufgabe 3: Totalreflexion [∼ 8/80 Punkte]

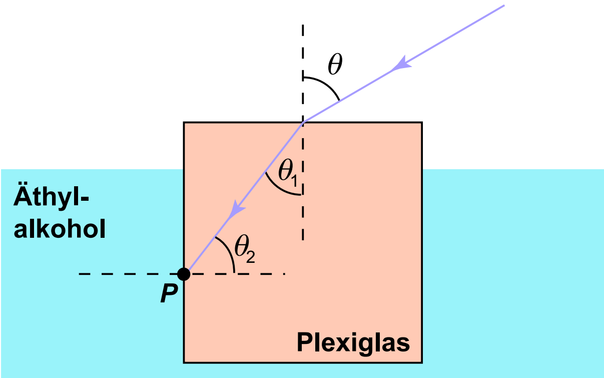


Abbildung 2: Zu Aufgabe 3.

Ein Lichtstrahl treffe aus Luft ($n = 1$) auf einen Plexiglasquader, der fast vollständig in Äthylalkohol eingetaucht ist (siehe Abbildung). (a) Berechnen Sie den Winkel θ, für den sich am Punkt P Totalreflexion ergibt. (b) Wenn der Äthylalkohol entfernt wird, ergibt sich dann auch mit dem in (a) berechneten Winkel θ am Punkt P Totalreflektion? Antworten Sie nicht nur mit „Ja" oder „Nein" sondern erklären Sie Ihre Aussage! (c) Zeichnen Sie den Strahlengang ab dem Punkt P für beide Fälle weiter!

Lösung 3: Totalreflexion [**8 Punkte**]

Aus dem Anhang: $n_{\text{Plexiglas}} = 1.491$ und $n_{\text{Alkohol}} = 1.3617$.

(a) Für die erste Brechung gilt nach dem Brechungsgesetz $\sin\theta = n_{\text{Plexiglas}} \sin\theta_1$ (**1 Punkt**). Am Punkt P folgt aus der Symmetrie der Anordnung $\theta_2 = 90° - \theta_1$. Das Brechungsgesetz lautet hier (**1 Punkt**):

$$n_{\text{Plexiglas}} \sin(90° - \theta_1) = n_{\text{Plexiglas}} \cos\theta_1 = n_{\text{Alkohol}} \sin\theta_3.$$

Damit nun bei P Totalreflexion auftritt, muss $\theta_3 = 90°$ gelten! Daraus folgt rückschließend: $\theta_1 = \arccos(n_{\text{Alkohol}}/n_{\text{Plexiglas}}) = \arccos(0.91328) \approx 24.0°$ (**1 Punkt**). Daraus erhält man dann für $\theta = \arcsin(n_{\text{Plexiglas}} \sin\theta_1) \approx 37.4°$ (**1 Punkt**).

(b) Für Äthylalkohol ist der kritische Winkel der Totalreflektion $\theta_k = \theta_2$ etwa 66.0°. Für Luft ist er jedoch nur etwa 42°, was sich aus $\sin\theta_k = n_{\text{Luft}}/n_{\text{Medium}}$ ergibt (**1 Punkt**). Also findet natürlich immer noch Totalreflektion statt (**2 Punkte**).

(c) Es gibt im Prinzip immer einen transmittierten und einen reflektierten Strahl. Für Winkel, die kleiner als der Winkel der Totalreflektion sind, ist der reflektierte Strahl sehr schwach. Am Winkel der Totalreflektion läuft der „transmittierte" Strahl parallel zur Oberfläche, seine Intensität ist jedoch gleich Null. Die Intensität steckt also im reflektierten Strahl, so wie im Aufgabenblatt schon gezeichnet. Daher ergibt sich kein Unterschied für die beiden Fälle (**1 Punkt**).

Aufgabe 4: Geometrische Optik [$\sim 6/80$ Punkte]

Berechnen Sie die Brennweite einer dicken bikonvexen Linse aus Kronglas SK 1 und den Krümmungsradien $+20\,\mathrm{cm}$ und $-20\,\mathrm{cm}$. Die Linse sei $4\,\mathrm{cm}$ dick und befinde sich in Luft ($n = 1$).

Lösung 4: Geometrische Optik [**6 Punkte**]

Um die Brennweite einer Linse zu bestimmen, setzt man $g = \infty$. Dann entsteht das Bild in der Brennebene, also $b = f$ (**1 Punkt**). An der ersten Oberfläche gilt die Gleichung für eine brechende Kugelfläche (mit $n_1 = 1$

$$\frac{1}{g} + \frac{n}{b} = \frac{n-1}{r_1}$$

mit $n = 1.61016$ und $r_1 = 20\,\mathrm{cm}$ (**1 Punkt**). Man formt nach b um und erhält $b = nr_1/(n-1) \approx 52.8\,\mathrm{cm}$. Das Bild entsteht also $52.8\,\mathrm{cm}$ rechts von der ersten Oberfläche. Diese ist $4\,\mathrm{cm}$ von der zweiten Oberfläche entfernt, so dass $g' = -48.8\,\mathrm{cm}$ gilt (**1 Punkt**). Für die zweite Brechung gilt daher

$$-\frac{n}{48.8\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{b'} = \frac{1-n}{r_2} \Leftrightarrow b' = \frac{r_2 \cdot 48.8\,\mathrm{cm}}{(1-n)\cdot 48.8\,\mathrm{cm} + nr_2}$$

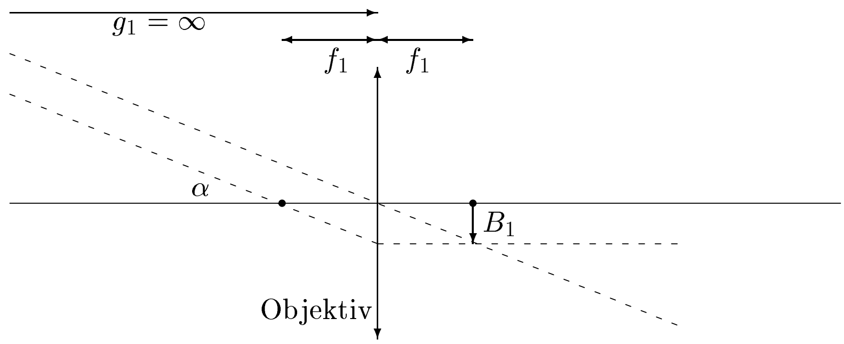
mit $r_2 = -20\,\mathrm{cm}$ (**2 Punkte**). Daraus folgt die Brennweite F der Gesamtlinse $F = b' \approx 15.75\,\mathrm{cm}$ (**1 Punkt**).

Aufgabe 5: Teleskop [$\sim 10/80$ Punkte]

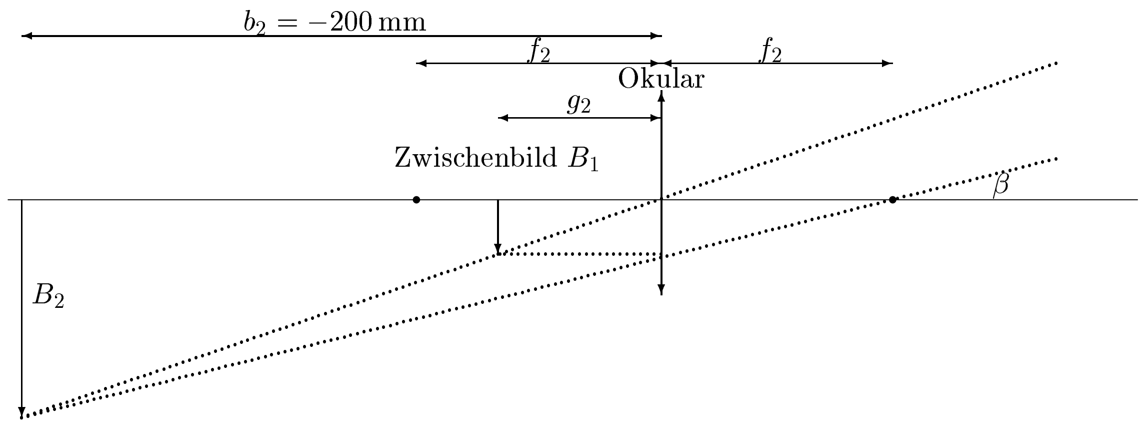
Ein Gegenstand von 5 cm Höhe in 25 m Entfernung soll mittels eines Teleskops erkannt werden. Das Teleskop besitzt eine Objektivbrennweite von 500 mm und eine Okularbrennweite von 16 mm. Wie groß ist die Winkelauflösung dieses Instruments? Zeichnen Sie den Strahlengang des Teleskops mit Bild und Zwischenbild. Wenn die Bildweite des Okulars auf 20 cm eingestellt ist, erscheint der Gegenstand wie hoch?

Lösung 5: Teleskop [**10 Punkte**]

Die Skizze zählt **3 Punkte**! Beim Teleskop gilt $g \gg f, b$. Also setzt man $g = \infty$ und konstruiert nicht die Abbildung eines Gegenstands, sondern den Durchgang eines parallelen Strahlenbündels. Dann entsteht das Zwischenbild im Brennpunkt ($f_1 = b_1$).



Die Bildgröße B_1 ergibt sich als $B_1 = -f_1 \tan\alpha$. Nun das Okular (**3 Punkte**):



Die Größe des Zwischenbildes B_1 können wir nun auch als Funktion der Okularwerte angeben: $B_1 = -f_2 \tan\beta$. Damit ergibt sich eine Winkelvergrößerung m für achsennahe Strahlen $m = \beta/\alpha = f_1/f_2 = 31.25$ (**1 Punkt**). So weit gilt diese Rechnung auch für den afokalen Betrieb (bei entspanntem Auge z.B.) für $b_2 = \infty, g_2 = f_2$.

Wir wissen, dass das Verhältnis von B/b (Index 2 ist weggelassen) gleich G/g (Index 1 weggelassen) mal der Winkelvergrößerung ist: $B/b = m \cdot G/g = 31.25 \cdot 5\,\mathrm{cm}/25\,\mathrm{m} = 0.0625$ (**1 Punkt**). Da die Bildweite des Okulars auf 20 cm gestellt ist, ergibt sich für die Bildgröße $B \approx 0.0625 \cdot 20\,\mathrm{cm} = 1.25\,\mathrm{cm}$ (**1 Punkt**).

Der Gegenstand erscheint genau 1/4 so groß wie original bei 25 cm Abstand. Nach Konstruktion steht er auf dem Kopf (**1 Punkt**).

Aufgabe 6: Michelson-Interferometer [$\sim 10/80$ Punkte]

Erläutern Sie an Hand von einer Skizze das Prinzip des Michelson-Interferometers. Braucht man Laserlicht? Welche Funktion erfüllt die Kompensatorplatte? Was passiert in der Nullstellung? Wozu kann man das Michelson-Interferometer benutzen?

Lösung 6: Michelson-Interferometer [**10 Punkte**]

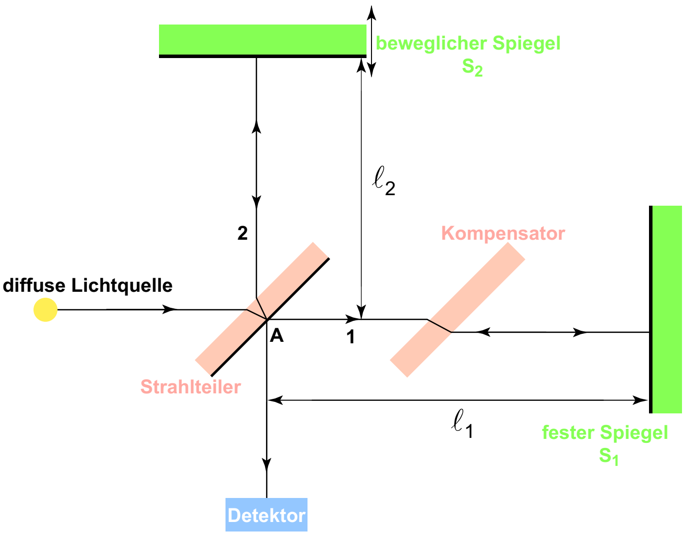


Abbildung 3: Zu Aufgabe 6.

Die richtige Skizze gibt schon mal **3 Punkte**. Man braucht sicherlich kein Laserlicht, denn das Michelson-Interferometer gibt es schon länger als Laser. Wie erhält man die notwendige Kohärenz? Man trennt eine einzige Wellenfront in zwei kohärente Teile, die man dann interferieren lässt! Daher kann man eine ausgedehnte diffuse Lichtquelle, zum Beispiel eine von einer Entladungslampe angestrahlte Mattscheibe benutzen (**2 Punkte**). Am Strahlteiler wird die Welle aufgespalten. Ein Teil geht in den mit 1 bezeichneten Strahlengang nach rechts, der andere Teil wandert nach oben in Strahlengang 2. Die Spiegel reflektieren die Teilstrahlen zurück. Ein Teil der Welle, die vom beweglichen Spiegel kommt gelangt durch den Strahlteiler in den Detektor, wo sie mit der am Strahlteiler in den Detektor reflektierten anderen Teilwelle interferiert (**1 Punkt**). Der Teilstrahl im Strahlengang 2 geht dreimal durch Punkt A, der andere nur einmal. Damit beide Teilstrahlen den gleichen Weg im Glas zurücklegen, braucht es daher die Kompensatorplatte, die exakt so dick wie der Strahlteiler sein muss. Nun entspricht der optische Wegunterschied der beiden Teilstrahlen dem tatsächlichen Wegunterschied. Der Kompensator wirkt auch der Dispersion entgegen, weshalb man mit ihm mit einer Quelle großer Bandbreite trotzdem noch Interferenz beobachtet (**2 Punkte**). In der Nullstellung, also wenn beide optischen Wege gleich sind, entsteht destruktive Interferenz. D.h. eine Phasenschiebung von π tritt auf. Diese kommt daher, dass die nach oben laufende Welle im Strahlengang 2 im Strahlteiler *innen* reflektiert wird, während die Welle im Strahlengang 1 *außen* reflektiert wird (**1 Punkt**). Man kann das Michelson-Interferometer zur exakten Längenmessung verwenden. Benutzt man Licht bekannter Wellenlänge, kann man die Verschiebungsstrecke des Spiegels S_2 exakt ausmessen. In früheren Zeiten (bis 1983) hat man so das Meter als ein bestimmtes Vielfaches der Wellenlänge eines Kryptonisotops definiert (**1 Punkt**).

Aufgabe 7: Dickenmessung [$\sim 6/80$ Punkte]

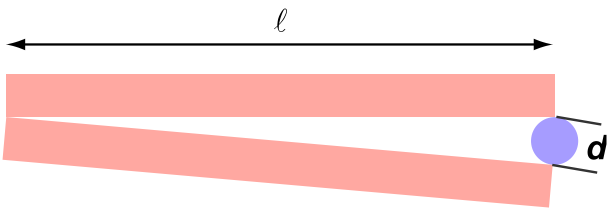


Abbildung 4: Zu Aufgabe 7.

Der Durchmesser d von sehr feinen Drähten lässt sich mit Hilfe von Interferenzmustern sehr genau messen. Die Abbildung zeigt die Messanordnung mit zwei planparallelen Glasplatten ($n_{\text{Glas}} = 1.5$) der Länge $\ell = 20\,\text{cm}$ und dem feinen Draht mit dem Durchmesser d, wobei sich die gesamte Anordnung in Luft ($n = 1$) befinde. Die Anordnung werde mit dem gelben Licht einer Natriumlampe ($\lambda \approx 590\,\text{nm}$) etwa senkrecht von unten beleuchtet. Das vom System reflektierte Licht wird auf einem Schirm aufgefangen. Es lassen sich 19 helle Streifen beobachten. Der 19. Streifen liegt nicht am Ende, es tritt aber kein 20. Streifen auf.

(a) Leiten Sie die Bedingung für konstruktive Interferenz an der Stelle x her. Erläutern Sie das Zustandekommen dieser Formel. Welche Strahlen kommen zur Interferenz? Skizzieren Sie den Strahlengang! (b) Geben Sie eine untere und obere Grenze der Drahtdicke an!

Lösung 7: Dickenmessung [**6 Punkte**]

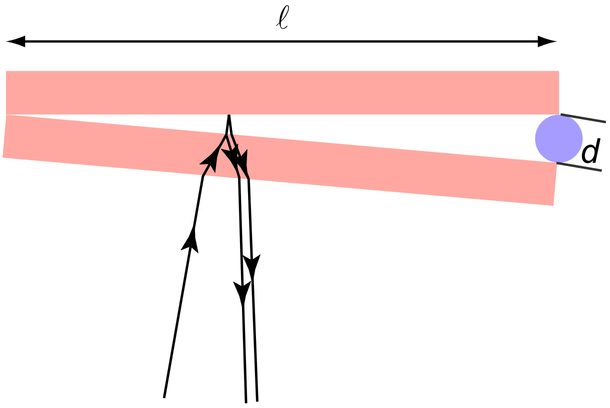


Abbildung 5: Zu Lösung 7.

(a) Es kommen die Strahlen zur Interferenz, die nach Durchgang durch die erste Platte reflektiert werden und diejenigen, die den Luftspalt durchkreuzen und an der Grenzfläche zur zweiten Platte reflektiert werden (**1 Punkt**). Bei der Reflektion am dichteren Medium tritt eine Phasenschiebung von $-\pi$ auf (**1 Punkt**). Diese Phasenschiebung bedeutet einen zusätzlichen Weglängenunterschied von einer halben Wellenlänge, also $\lambda/2$. Der gesamte Weglängenunterschied muss für konstruktive Interferenz ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge sein, also $2n_{\text{Spalt}}\tilde{d}(x) - \frac{\lambda}{2} = 2\tilde{d}(x) - \frac{\lambda}{2} = m\lambda \Leftrightarrow 2\tilde{d}(x) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots.$ Da wir uns zwischen den Platten in Luft befinden, ist $n_{\text{Spalt}} = 1$. Die Wegstrecke im Spalt wird schlicht als $2\tilde{d}(x)$ angenommen, da der Winkel zwischen den Platten sehr klein ist (**2 Punkte**).

(b) Für den 19ten hellen Streifen ist $m = 18$, denn m fängt ja bei Null an. An der Stelle des Drahtes gilt $\tilde{d}(\ell) = d$. Also: $d = 5.46\,\mu\text{m}$ (**1 Punkt**). Dies ist eine untere Grenze für die Dicke des Drahtes. Die obere Grenze folgt aus der Beobachtung, dass der 20ste Streifen fehlt. Für diesen hätte man ja (mit $m = 19$) $d = 5.75\,\mu\text{m}$. Als Resultat erhalten wir $5.46\,\mu\text{m} < d < 5.75\,\mu\text{m}$ (**1 Punkt**).

Aufgabe 8: Bragg-Streuung [$\sim 8/80$ Punkte]

(a) In kristallinem Natrium sitzen die Atome auf den Eck- und Mittelpunkten eines Gitters (flächenzentriert kubisches Gitter), das aus würfelförmigen Einheitszellen der Kantenlänge $a = 4.29\,\text{Å}$ aufgebaut ist. Sie beugen monochromatische Röntgenstrahlung der Wellenlänge $\lambda = 1.54\,\text{Å}$ an den zu den Würfelseiten parallelen Netzebenen. Bei welchen Beugungswinkeln tritt Bragg-Reflexion auf?
(b) Ein Neutronenstrahl fällt auf polykristallines Wismut (größter Gitterebenenabstand $4\,\text{Å}$). Man suche den Energiebereich der Neutronen, für den dieser Filter <u>k</u>eine kohärente Streuung liefert. Leiten Sie diesen aus dem Ausdruck $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ her.

Lösung 8: Bragg-Streuung [**8 Punkte**]

(a) Es ist im Wesentlichen nach der BRAGG-Beziehung gefragt. Trifft Röntgenlicht auf das dreidimensionale Gitter, so interferieren die an verschiedenen Netzebenen gestreuten Strahlen konstruktiv, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge λ beträgt. Dies führt zur Bragg-Bedingung $n\lambda = 2d\sin\vartheta$ (**2 Punkte**). Der Netzebenenabstand parallel zu den Würfelseitenflächen beträgt $d = a/2 = 2.145\,\text{Å}$, da man ja die Mittelatome mitzählen muss (**1 Punkt**). Wir haben also die Gleichung: $\sin\vartheta_n = 0.359n$, also $\vartheta_n = \arcsin(0.359n)$ für $n = 1, 2, ...$ Lösungen sind $\vartheta_1 \approx 21.0°$, $\vartheta_2 \approx 45.9°$. Für größere n gibt es keine Lösung (**2 Punkte**).
(b) Es gilt natürlich wieder die Bragg-Bedingung $n\lambda = 2d\sin\vartheta$. Sie kann nicht mehr erfüllt werden, wenn $\lambda > 2d_{\mathrm{max}}$ ist, also $\lambda > 0.8\,\mathrm{nm}$ (**1 Punkt**). Oberhalb dieser Grenzwellenläge haben wir keine kohärente Streuung mehr. Es ist $k = 2\pi/\lambda$, also folgt $\lambda = h/\sqrt{2mE}$ (**1 Punkt**). Also ist der gesuchte Energiebereich

$$0 \leq E \leq \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2d_{\mathrm{max}}}\right)^2 = 1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{eV}$$

(oder etwa $2 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{J}$) (**1 Punkt**). h und m_{Neutron} sind im Anhang angegeben.

Aufgabe 9: Höhere Harmonische [$\sim 4/80$ Punkte]

Was ist eine höhere Harmonische? Was hat das mit nichtlinearer Optik zu tun?

Lösung 9: Höhere Harmonische [**4 Punkte**]

Das Feld einer Lichtwelle polarisiert das Medium, das sie durchläuft. Im Normalfall erhält man $P = \varepsilon_0 \chi E$, wobei χ die dimensionslose elektrische Suszeptibilität ist (**1 Punkt**). Hat man jedoch starke Felder, so wird P nicht ewig linear weiter anwachsen, sondern sättigen. Dadurch entstehen Nichtlinearitäten. Im isotropen Medium, wo **P** und **E** parallel liegen, erhält man $P = \varepsilon_0(\chi E + \chi_2 E^2 + \chi_3 E^3 + ...)$ (**1 Punkt**). Haben wir nun $E = E_0 \sin \omega t$, so erhalten wir Terme mit $\sin^n$. Dies entspricht aber Termen, in denen z.B. $\cos 2\omega t$ steht. Dies nennt man die zweite Harmonische: Verdopplung der Grundfrequenz (**1 Punkt**). Die angeregten Oszillatoren strahlen wiederum Licht mit der doppelten Frequenz aus. Im Photonenbild tun sich 2 Photonen der Energie $\hbar\omega$ zu einem Photon der Energie $2\hbar\omega$ zusammen (**1 Punkt**). Nur gerade Harmonische treten bei Kristallen ohne Inversionszentrum auf (Quarz, KDP).

Aufgabe 10: Fraunhofer-Beugung [$\sim$ 10/80 Punkte]

(a) Die Airy-Funktion

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{2J_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right)^2$$

beschreibt das Beugungsbild einer kreisförmigen Öffnung. Was bedeuten die einzelnen Symbole der Formel? Berechnen Sie den Radius der Airy-Scheibe (der Radius des ersten dunklen Rings des Airy-Musters) als Funktion des Kreisdurchmessers, der Wellenlänge und der Entfernung der kreisförmigen Öffnung zum Aufpunkt der Airy-Scheibe!
(b) Diskutieren Sie die resultierende Auflösungsbeschränkung für eine Linse mit Durchmesser D als Funktion ihrer Brennweite. Betrachten Sie dazu zwei punktförmige, selbstleuchtende Objekte mit Abstand $\Delta\ell$, die sich in großer Entfernung von der Linse befinden.
(c) Lord Rayleigh definierte zwei Punkte als gerade noch auflösbar, wenn der Mittelpunkt der Airy-Scheibe der einen Lichtquelle in den ersten dunklen Streifen der zweiten fällt. Formulieren Sie demgemäß ein Kriterium für den minimalen Winkel $(\Delta\varphi)_{\text{min}}$, unter dem Objekte noch als getrennt wahrgenommen werden. Formulieren Sie die Auflösungsgrenze $(\Delta\ell)_{\text{min}}$ als den Abstand der beiden Bildmittelpunkte! Wie kann man das Auflösungsvermögen verbessern?

Lösung 10: Fraunhofer-Beugung [**10 Punkte**]

(a) Die kreisförmige Öffnung besitzt den Radius a. Die Entfernung zum Aufpunkt auf der Airy-Scheibenebene ist R, der Winkel, den R zur Symmetrieachse einnimmt, ist θ. q ist die Entfernung vom Mittelpunkt des Airy-Musters zum Aufpunkt. Also $\sin\theta = q/R$. k ist die Wellenzahl des verwendeten Lichts. J_1 ist die Bessel-Funktion erster Ordnung (**2 Punkte**). Zur Bestimmung des Radius muss man die erste Nullstelle der Besselfunktion kennen. Wir entnehmen der Tabelle im Anhang, dass diese für das Argument 3.83 auftritt, also $kaq/R = 3.83$. q ist dann auch der Radius der Airy-Scheibe. $q = 1.22\dfrac{R\lambda}{2a}$, wobei $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ verwendet wurde (**2 Punkte**). $2a$ ist der Durchmesser D der kreisförmigen Öffnung, $R \approx f$, da man meistens mit einer Linse in deren Brennpunkt fokussiert. Man erhält (**2 Punkte**)

$$R_{\text{Airy-Scheibe}} = q \approx 1.22\frac{f\lambda}{D}.$$

(b/c) Es gilt ja gerade $q/f = \sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$. Nach Definition sind nun die Mittelpunkte beider Scheibchen q entfernt. Also erhält man $(\Delta\theta)_{\text{Min}} = 1.22\lambda/D$ (**2 Punkte**). Die Auflösungsgrenze $\Delta\ell$, also der Abstand der beiden Mittelpunkte, ist gemäß Definition identisch mit dem Radius der Airy-Scheibe! Also schlichtweg $(\Delta\ell)_{\text{Min}} = 1.22\dfrac{f\lambda}{D}$ (**1 Punkt**). Die Auflösung kann man verbessern, wenn man mit kleineren Wellenlängen arbeitet, z.B. mit Elektronenstrahlen (**1 Punkt**).