....
Note

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
MA9202 Mathematik für Physiker 2
(Analysis 1)

Prof. Dr. N. Berger

24. Februar 2017, 08:00 – 09:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **6** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

Musterlösung (mit Bewertung)

1. **Vollständige Induktion** **[7 Punkte]**

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist $5^n + 7$ durch 4 teilbar.

LÖSUNG:

Induktionsanfang $n = 0$: **[1/2]**
Die Zahl $5^0 + 7 = 1 + 7 = 8$ **[1]** ist durch 4 teilbar **[1]**, da $8 = 2 \cdot 4$.
Induktionsschritt von n *auf* $n + 1$: **[1/2]**
Es gilt

$$5^{n+1} + 7 \overset{\textbf{[1]}}{=} 5 \cdot 5^n + 35 - 35 + 7 \overset{\textbf{[1]}}{=} 5 \cdot (5^n + 7) - 28.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist der Ausdruck in der Klammer und damit der ganze erste Summand durch 4 teilbar **[1]** ; der zweite Summand 28 ist ebenfalls durch 4 teilbar. **[1]** Somit ist auch die ganze Summe $5^{n+1} + 7$ durch 4 teilbar.

2. **Komplexe Zahlen** **[7 Punkte]**

Es ist $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{i}+1) \in \mathbb{C}$ gegeben. Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N} \mapsto f(n) = z^n$ auf Injektivität und Surjektivität.

LÖSUNG:

f nicht injektiv: **[1]** Es ist $|z| = 1$ **[1/2]** und $\arg(z) = \pi/4$. **[1/2]**

Damit gilt mit Vorlesung $z^n = |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\varphi} \overset{\textbf{[1]}}{=} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/4}$. Es ist z.B. $f(1) = f(9)$. **[2]**
f nicht surjektiv: **[1]** Es existiert kein $n \in \mathbb{N}$ für ein $w \in \mathbb{C}$, $|w| \neq 1$. **[1]** Z.B. $f^{-1}(\{2+0\cdot i\}) = \emptyset$.

3. **Infimum und Supremum** **[6 Punkte]**

Hat die Menge $A := \{x \in \mathbb{R} : \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \wedge x > 0\} \subset \mathbb{R}$ ein Infimum, Minimum, Supremum und/oder Maximum in $\mathbb{R}$? Bestimmen Sie ggf. jeweils Infimum, Minimum, Supremum bzw. Maximum.

LÖSUNG:

$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \wedge x > 0 \overset{\textbf{[1]}}{\Longleftrightarrow} x_n = \frac{1}{n\pi},\ n \in \mathbb{N}$. So ist $A = \{\frac{1}{n\pi} : n \in \mathbb{N}\}$ **[1]**

$\Rightarrow \sup A = 1/\pi$, da Folge $(1/(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend **[1]** , da $\sup A \in A$, so ist $\max A = \sup A$ **[1]**

$\Rightarrow \inf A = 0$, da $\lim_{n\to\infty} 1/(n\pi) = 0$ **[1]** und da $0 \notin A$, so hat die Menge A kein Minimum. **[1]**

4. **Konvergenz von Funktionenfolgen** **[10 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f_n(x) = \sin\left((1+\frac{1}{n})x\right)$; $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \sin(x)$ für $n \to \infty$.

(b) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \sin(x)$ auf $\mathbb{R}$ für $n \to \infty$?

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) = \sin(x)$ auf $I := [-10, 10]$ für $n \to \infty$?

LÖSUNG:

(a) Wegen der Stetigkeit von sin **[1/2]**, gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} \sin((1 + 1/n)x) = \sin(\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)x) = \sin(1 \cdot x) = \sin(x)$. **[1/2]**

(b) Die Konvergenz ist auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig. **[1]** Denn, wir wählen $x_n = n\pi/2$ **[1]**

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \overset{[1]}{\geq} |f_n(x_n) - f(x_n)| = |\sin\left(n\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) - \sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right)| \overset{[1]}{=} 1\,.$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$.

(c) Die Konvergenz ist auf $I := [-10, 10]$ gleichmäßig. **[1]** Denn, nach dem Mittelwertsatz existiert ein $y \in (x, x + \frac{x}{n})$ mit

$$\sin(x + x/n) - \sin(x) \overset{[1]}{=} \cos(y)(x + x/n - x) \leq |\cos(y)||x/n| \overset{[1]}{\leq} |x/n|\,.$$

Somit gilt

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} |\sin(x + x/n) - \sin(x)| \overset{[1]}{\leq} \sup_{x\in I} |x/n| \overset{[1]}{=} 10/n\,.$$

Also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

5. **Potenzreihen** **[6 Punkte]**

Betrachten Sie die komplexe Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^n\,,\ z \in \mathbb{C}\,.$

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe P.

(b) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist P konvergent und für welche $z \in \mathbb{C}$ ist P divergent ?

LÖSUNG:

(a) $R \overset{\textbf{[1]}}{=} \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} \overset{\textbf{[1]}}{=} \dfrac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} \overset{\textbf{[1]}}{=} 1$

(b) Nach Satz der Vorlesung gilt
P konvergiert auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ absolut **[1]**
und P ist in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ divergent. **[1]**
P ist auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ divergent, da $(nz^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $|z| = 1$ keine Nullfolge. **[1]**

6. **Extrema** **[6 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$. An welcher Stelle x_0 hat f ein Maximum ? Begründen Sie Ihre Antwort!

LÖSUNG:

Aus der Vorlesung gilt, das uneigentliche Integral f existiert. **[1]**
Die Funktion f ist Stammfunktion von $g(x) = \sin(x)/x$, das heisst es gilt $f'(x) = g(x)$. **[1]**
Das bedeutet f ist differenzierbar auf $(0, 2\pi)$ und damit stetig auf $[0, 2\pi]$. **[1]**
Da $g(x) > 0$ auf $(0, \pi)$, so ist f auf $(0, \pi)$ streng monoton steigend. **[1]**
Da $g(x) < 0$ auf $(\pi, 2\pi)$, so ist f auf $(\pi, 2\pi)$ streng monoton fallend. **[1]**
Damit hat f in $x_0 = \pi$ ein Maximum. **[1]**