Aufgabe 1 (ca. 8 Punkte): Es sei K ein kommutativer Körper und $A \in \mathrm{Mat}(n,n;K)$ mit charakteristischem Polynom

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Zeigen Sie:

a) A ist invertierbar genau dann wenn $a_0 \neq 0$.

b) Wenn $a_0 \neq 0$, so gilt: $A^{-1} \in \langle A^0, A^1, \ldots, A^{n-2}, A^{n-1} \rangle$.

c) Geben Sie im Fall $n = 2$ eine explizite Formel für A^{-1} an (mit Begründung, aber ohne Bezug auf die a_i).

1a) Nach B.2 gilt $a_0 = \det A$. Also

$a_0 \neq 0 \iff \det A \neq 0 \overset{12.7.1}{\iff} A$ invertierbar

1b) Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt

$\chi_A(A) = 0$, also $(-1)^n A^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$ $(*)$

Wg. $a_0 \neq 0$ und 1a) können wir $(*)$ mit A^{-1} multiplizieren:

$(-1)^n A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i-1} + a_0 A^{-1} = 0$

also gilt $A^{-1} = -a_0^{-1}\left((-1)^n A^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i A^{i-1}\right)$ $(**)$

d.h. $A^{-1} \in \langle A^0, A^1, \ldots, A^{n-1} \rangle$.

1c) Mit $(**)$ gilt

$A^{-1} = -a_0^{-1}\left((-1)^2 A^1 + a_1 A^0\right)$

mit B.2. gilt $a_0 = \det A$

$a_{2-1} = (-1)^{2-1}\,\mathrm{spur}\, A$

also

$A^{-1} = -\frac{1}{\det A}\left(A - (\mathrm{spur}\, A)E\right)$

Aufgabe 2 (ca. ~~8~~ 7 Punkte): Es sei V ein $\mathbf{R}$-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbf{N}$ und s ein Skalarprodukt.

a) Beweisen Sie, daß die Abbildung

$$\sim: V \to \mathbf{R}^V; a \mapsto s_a : \begin{cases} V \to \mathbf{R} \\ x \mapsto s(a,x) \end{cases}$$

linear und injektiv ist.

b) Zeigen Sie $\sim (V) = \hat{V}$.

2a) Linearität von $\sim$:

Es seien $a, b \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt für alle $x \in V$

$$s_{a+b}(x) = s(a+b, x) \left[\overset{s \text{ sym.}}{=} s(x, a+b) \overset{s \text{ add. in 2-ter Komponente}}{=} s(x,a) + s(x,b) = \right]$$

$$= s(a,x) + s(b,x) = s_a(x) + s_b(x)$$

und

$$s_{a\lambda}(x) = s(a\lambda, x) = s(a,x)\lambda = (s_a(x))\lambda$$

also $\widetilde{a+b} = \tilde{a} + \tilde{b}$ und $\widetilde{a\lambda} = \tilde{a} \cdot \lambda$

Injektivität

Es seien $a, b \in V$ mit $\tilde{a} = \tilde{b}$,

d.h. $\forall x \in V: \; s_a(x) = s_b(x)$

$$\therefore \; s(a,x) = s(b,x)$$

$$\therefore \; s(x,a) + s(x,-b) = 0$$

$$\therefore \; \forall x \in V: \; s(x, a-b) = 0$$

Für $x = a-b$ ergibt sich $s(a-b, a-b) = 0$.

Als Skalarprodukt ist $s(\cdot,\cdot)$ aber pos. def und kann nur $=0$ sein, wenn $a-b=0$, also $a=b$.

Daher ist $\sim$ injektiv.

b) Nach a) ist $\tilde{V} \subset \hat{V}$ klar

Da V n-dimensional ist, ist auch $\hat{V}$ n-dimensional.
Es reicht also, $\dim \tilde{V} \geq n$ zu beweisen.

<u>Bew 1:</u> Da $\sim$ injektiv ist gilt $\operatorname{Dim} \tilde{V} = \operatorname{Dim} V = n$.
Zusammen mit $\tilde{V} \subset \hat{V}$ und $\tilde{V}$ UVR folgt $\tilde{V} = \hat{V}$

<u>Bew 2:</u> Da V endlich-dim, können wir eine ONB $a_1, \dots, a_n$ von V bezügl s wählen.

<u>Bhptg:</u> $s_{a_1}, \dots, s_{a_n}$ sind lin. unabh. in $\hat{V}$.

<u>Bew</u> Es sei $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} s_{a_i} \lambda_i = 0$.

$$\therefore \; \forall x \in V: \sum_{i=1}^{n} s_{a_i}(x) \lambda_i = 0$$

Wahl von $x = a_j$ ergibt, da $s_{a_i}(a_j) = \begin{cases} 0 : i \neq j \\ 1 : i = j \end{cases}$

$$s_{a_j}(a_j) \lambda_j = 0$$

$$\therefore \; 1 \cdot \lambda_j = 0.$$

Also sind die s_{a_i} lin. unabh. und $\dim \tilde{V} \geq n$.

Aufgabe 3 (ca. 7 Punkte): Es sei K ein kommutativer Körper. Ferner seien $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$. Setze $A_{ij} := \alpha_i^{2(j-1)}$ für $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Beweisen Sie:

$$\det(A) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i) \cdot \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j + \alpha_i).$$

Erster Beweis: Offensichtlich ist A eine Vandermonde Matrix in (α_i^2). Mit der Formel für die Vandermondsche Determinante ergibt sich:

$$\det A = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j^2 - \alpha_i^2) = \prod_{1\leq i<j\leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_j + \alpha_i)$$

Zweiter Beweis: Benutze $(\alpha_j - \alpha_i)(\alpha_j + \alpha_i) = \alpha_j^2 - \alpha_i^2$. Beweis mit Induktion.

IA: $n=1$: $A = (\alpha_1^0)$, $\det A = 1$

und $\prod_{1\leq i<j\leq 1} (\alpha_j^2 - \alpha_i^2) = 1$ ✓

$n=2$: $A = \begin{pmatrix} \alpha_1^0 & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^0 & \alpha_2^2 \end{pmatrix}$, $\det A = \alpha_2^2 - \alpha_1^2$

und $\prod_{1\leq i<j\leq 2} (\alpha_j^2 - \alpha_i^2) = \alpha_2^2 - \alpha_1^2$ ✓

Ind. Schritt: Ang. die Identität gilt für n und gegeben ist eine Matrix zu $n+1$.

Es sei B die Matrix, die aus A hervorgeht, indem von der Spalte $1 < j \leq n+1$ das α_{n+1}^2-fache der Spalte $j-1$ abgezogen wird, dabei gilt lt. VL: $|A| = |B|$

$$B_{ij} = \begin{cases} B_{ij} & \text{wenn } j=1 \\ B_{ij} - \alpha_{n+1}^2 B_{i,j-1} & \text{wenn } j \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } j=1 \\ \alpha_i^{2(j-1)} - \alpha_{n+1}^2 \alpha_i^{2(j-2)} & : j \neq 1 \wedge i = n+1 \\ A_{ij} - \alpha_{n+1}^2 A_{i,j-1} & : j \neq 1 \wedge i \neq n+1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{wenn } j=1 \\ 0 & \text{wenn } i=n+1 \wedge j \neq 1 \\ \alpha_i^{2(j-1)} - \alpha_{n+1}^2 \alpha_i^{2(j-2)} & \text{wenn } i \neq n+1 \wedge j \neq 1 \end{cases}$$

Nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz ergibt sich bei Entwicklung nach der letzten Zeile:

$|A| = (-1)^{n+2} \, |B^{(n+1,1)}|$. Für $B^{(n+1,1)}$ ergibt sich

$$B_{ij}^{(n+1,1)} = B_{i,j+1} = (\alpha_i^2 - \alpha_{n+1}^2)\,\alpha_i^{2(j-1)}$$

Es sei C die Matrix mit $c_{ij} = \alpha_i^{2(j-1)}$, für $i,j \in \{1,\dots,n\}$

Dann gilt $|A| = (-1)^{n+2} \, |B^{(n+1,1)}| = (-1)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i^2 - \alpha_{n+1}^2)\, |C|$

aus den Zeilen $(\alpha_i^2 - \alpha_{n+1}^2)$ rausziehen.

$$= \prod_{i=1}^{n} (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_i^2) \cdot |C| \overset{\text{IA}}{=} \prod_{i=1}^{n} (\alpha_{n+1}^2 - \alpha_i^2) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j^2 - \alpha_i^2)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\alpha_j^2 - \alpha_i^2)$$

Aufgabe 4 (ca. 7 Punkte): **Begründen Sie sorgfältig Ihre Antworten.**

a) Es seien $A, B \in \mathrm{Mat}(3,3;\mathbf{R})$ zwei Matrizen mit den charakteristischen Polynomen $\chi_A(x) = -x^3+2x^2-x$ und $\chi_B(x) = -x^3+7x^2-9x+3$. Geben Sie die Determinanten von A und B an. Ist der Kern von $(AB)_t$ immer 1-dimensional?

b) Es seien $n \in \mathbf{N}$ und n^2 differenzierbare Funktionen $a_{ij} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mit $x \mapsto a_{ij}(x)$ für $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gegeben. Warum ist die Abbildung $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto \det(A(x))$ differenzierbar und wie lautet die Ableitung von $f(x)$? (Sie können aus der Analysis verwenden, daß das Produkt und die Summe differenzierbarer Funktionen wiederum differenzierbar ist.)

4a) Nach B.2 gleicht die Determinante dem konstanten Term des char Polys.

Also $\det A = 0$ und $\det B = 3$

Mit 12.7.1. ist B invertierbar, nicht aber A. Weiterhin können wir an χ_A ablesen, daß 0 ein einfacher EW ist. Also gilt $\dim \ker A = 1$.

Da $x \in \ker AB \Leftrightarrow Bx \in \ker A$ und B invertierbar, gilt $B^{-1}(\ker A) = \ker AB$.
Da $\ker A$ eindimensional ist, ist also auch $\ker AB$ eindimensional.

4b) Nach der Leibniz Formel gilt

$$f(x) = \det(A(x)) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)i}(x)$$

Da f also Summe von Produkten diffbarer Funktionen ist, ist f selber diffbar.

Mit der Produkt- und Summenregel ergibt sich $f'(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \cdot \sum_{j=1}^{n} a'_{\sigma(j),j}(x) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{\sigma(i),i}(x)$

Aufgabe 5 (ca. 12 Punkte): **Es sei die Matrix**

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbf{Mat}(5,5;\mathbf{R})$$

gegeben.

a) **Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A_ℓ und die Eigenwerte und ihre Vielfachheiten.**

b) **Bestimmen Sie die Haupt- und Eigenräume von A_ℓ.**

c) **Berechnen Sie eine Jordan-Basis S von $\mathbf{R}^5$ bezüglich A_ℓ und geben sie die zugehörige Jordan-Normalform J an.**

d) **Berechnen Sie für jede Spalte x von S den Vektor Ax.**

Hinweis: Geben Sie die Rechenschritte/Umformungen an, andernfalls werden falsche Antworten mit 0 Punkten bewertet.

a) $$\chi_A(x) = \det(A - Ex) = \det\left(\begin{array}{cc|ccc} 3-x & 1 & & & \\ -1 & -1-x & & 0 & \\ \hline -3 & 1 & -2-x & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2-x & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2-x \end{array}\right)$$

$$= (-2-x)^3\,[(3+x)(1+x)+1] = (-2-x)^3\,[x^2+4x+4] = (-2-x)^5$$

Also ist die einzige EW von A_ℓ: -2
und hat die algebraische Vielfachheit 5.

b) $$E_{A_\ell}(-2) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{da } 1.=2.=5.\text{ Zeile}}{=} \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - I \end{matrix} \to \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Der Eigenraum ist also
$\langle e_3, e_1+e_2+e_4+e_5 \rangle$.

[Also hat die JNF
2 J-Kästchen]

$$\operatorname{Kern}((A+E2)_\ell)^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \langle e_1+e_5, e_2, e_3, e_4 \rangle$$

$$\operatorname{Kern}((A+E2))^3 = \operatorname{Kern} 0 = \mathbb{R}^5$$

Also ist $H_{A_\ell}(-2) = \mathbb{R}^5$

[Da $((A+2^\circ)_\ell)^3 = 0$ ist das größte J-Kästchen 3×3.]

c) Da $\operatorname{Kern}((A+2^\circ)_\ell)^3 = \operatorname{Kern}((A+2^\circ)_\ell)^2 \oplus \langle e_5 \rangle$

setzen wir $b_{3,1} = e_5$.

Dann ergibt sich $b_{2,1} = (A+2^\circ)\, b_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $b_{1,1} = (A+2^\circ)\, b_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da $\operatorname{Kern}((A+2^\circ)_\ell)^2 = \underbrace{(\operatorname{Kern}(A+2^\circ)_\ell \oplus b_{2,1})}_{\langle e_1+e_2+e_5,\, e_3,\, e_4 \rangle} \oplus e_2$

Also $b_{2,2} = e_2$

und $b_{1,2} = (A+2^\circ)\, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{12} & b_{22} \end{matrix} \end{array} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -2 & 1 & & \\ & & -2 & & \\ & & & -2 & 1 \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$$

5d

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Ab_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ab_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad Ab_{31} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$Ab_{12} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad Ab_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Korrektur:

$$\left. \begin{array}{l} Ab_{11} = -2b_{11} \\ Ab_{21} = b_{11} - 2b_{21} \\ Ab_{31} = b_{21} - 2b_{31} \\ \hline Ab_{12} = -2b_{12} \\ Ab_{22} = b_{12} - 2b_{22} \end{array} \right\} \text{sollten gelten}$$