KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK I

A. Buras, B. Borasoy, T. Hemmert Sommersemester 2003

****** Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. ******

Aufgabe 1. (9 P)

a) Beweisen Sie in der Schrödinger-Darstellung: Wenn der Operator A nicht explizit von der Zeit abhängt und $[H, A] = 0$ ist, dann ist auch $\langle A \rangle$ zeitunabhängig. (2 P)

b) Beweisen Sie: Eigenwerte von hermiteschen Operatoren sind reell. (2 P)

c) Welchem Gesamtspin entspricht der aus zwei Spin-1/2 Teilchen bestehende Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad ?$$

Begründung? (2 P)

d) Zeigen Sie, daß die Eigenwerte eines Operators in der Schrödinger- und Heisenberg-Darstellung identisch sind. (3 P)

Aufgabe 2.: Spin Operatoren (4 P)

a) Wie lautet der diagonale Operator S_z in Matrixdarstellung für ein Spin 1 Teilchen? (1 P)

b) Konstruieren Sie explizit den Leiter-Operator S_- in Matrixdarstellung für ein Spin 1 Teilchen. (3 P)

Aufgabe 3.: Drehimpuls Operatoren L_+, L_-, L^2 (4P)

Geben Sie den resultierenden Zustand (sofern er existiert) zu folgenden Operationen an. Die genaue Normierung der rotationssymmetrischen Zustände $|l, m\rangle$ mit den Drehimpulsquantenzahlen l und m ist nicht gefordert. (je 0.5 P)

$$a)\ L_+\,|1,0\rangle, \quad b)\ L_-\,L_+\,|1,1\rangle, \quad c)\ L^2\,L_+\,|2,1\rangle, \quad d)\ L_-\,|1,2\rangle,$$
$$e)\ L_+\,L^2\,L_+\,|7,5\rangle, \quad f)\ L_-\,L^2\,|3,-3\rangle, \quad g)\ L^2\,L_+\,|1,-1\rangle, \quad h)\ L_+\,|0,0\rangle$$

Aufgabe 4.: Kugelsymmetrisches Potential (10 P)

a) Wie lautet der Hamiltonoperator für ein Teilchen mit Masse m in Kugelkoordinaten für ein Potential, das nur vom Radius abhängt? (2 P)

b) Wie lautet die Schrödingergleichung für den Radialanteil $R(r)$ der Wellenfunktion $\psi(\vec{x})$? (3 P)

c) Betrachten Sie nun den Fall l=0 und $R(r) = u(r)/r$. Wie lautet die Differentialgleichung für $u(r)$? (2 P)

d) Welchen Randbedingungen muß $u(r)$ gehorchen ? Begründung? (3 P)

Aufgabe 5.: Eindimensionale stationäre Schrödingergleichung (20 P)

Ein Teilchen mit Masse m und Energie $-V_0 < E < 0$ (gebundener Zustand) befinde sich in folgendem Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad x \leq 0 \qquad \text{(I)} \\ -V_0 & \text{für} \quad 0 < x < x_0 \qquad \text{(II)} \\ 0 & \text{für} \quad x_0 \leq x \qquad \text{(III)} \end{cases} . \tag{1}$$

a) Geben Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung in den Bereichen (I), (II) und (III) an. (5 P)

b) Welche Bedingungen muß die Lösung bei $x = 0$, $x = x_0$ und $x \to \infty$ erfüllen? Leiten Sie mit Hilfe der Anschlußbedingungen eine Bedingung für die Energie E her. (6 P)

c) Normieren Sie die Wellenfunktion. (3 P)

d) Welche Aussage können Sie über die Parität der Eigenfunktionen machen? Begründung? (2 P)

e) Ermitteln Sie graphisch die Anzahl der möglichen gebundenen Zustände, falls das Produkt aus Potentialbreite und -tiefe gegeben ist durch $V_0 x_0^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\pi^2(n + \frac{3}{4})^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$. (4 P)

Aufgabe 6.: Harmonischer Oszillator mit Störterm (18 P)

Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit einem zu α proportionalen quadratischen Störterm.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 + \alpha \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2 \tag{2}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega'^2 x^2 \qquad \text{mit} \qquad \omega' = \omega\sqrt{1+\alpha} \tag{3}$$

a) Drücken Sie (2) durch

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\,\hbar}}\left(x + \frac{i\,p}{m\omega}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\,\hbar}}\left(x - \frac{i\,p}{m\omega}\right) \tag{4}$$

aus. (4 P)

b) Sei $|n\rangle^{(0)}$ der Eigenzustand des ungestörten harmonischen Oszillators, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\,\omega^2 x^2$, mit $H\,|n\rangle^{(0)} = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})\,|n\rangle^{(0)}$.
Beweisen Sie: $a^\dagger\,|n\rangle^{(0)} = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle^{(0)}$ und $a\,|n\rangle^{(0)} = \sqrt{n}\,|n-1\rangle^{(0)}$. (5 P)

c) Betrachten Sie (2) als gestörten harmonischen Oszillator mit Störparamter α.

   i) Berechnen Sie die Energiekorrekturen 1. Ordnung. (2 P)

   ii) Berechnen Sie die Zustandsvektoren $|n\rangle^{(1)}$ 1. Ordnung. (4 P)

d) Fassen Sie nun (3) als harmonischen Oszillator auf und vergleichen Sie die Energieeigenwerte aus c) mit dem exakten Ergebnis, indem Sie ω' nach α entwickeln. (3 P)

Es gibt insgesamt 65 Punkte.

Mit 30 und mehr Punkten gilt die Klausur als bestanden. **VIEL ERFOLG!**