Musterlösung Nachholsemestrale Ex 1
2.4.2008

Aufgabe 1

Wir berechnen zuerst den Ort des abarischen Punktes, d.h. seinen Abstand r_a vom Erdmittelpunkt. Das von Erde und Mond erzeugte Gravitationspotential ist

$$V(r) = -G\frac{mm_E}{r} - G\frac{mm_M}{R-r} = -Gm\left(\frac{m_E}{r} - \frac{m_M}{r-R}\right) \tag{1}$$

(r = Abstand vom Erdmittelpunkt, m = Masse der Sonde, m_E, m_M = Erd- / Mondmasse, R = Abstand der Mittelpunkte Erde-Mond)

Der abarische Punkt ist das Maximum dieses Potentials, also gegeben durch

$$V'(r) = -Gm\left(-\frac{m_E}{r^2} + \frac{m_M}{(r-R)^2}\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

(Das kann man natürlich auch direkt, ohne Potential hinschreiben.) Daraus ergibt sich

$$\left(\frac{r_a - R}{r_a}\right)^2 = \frac{m_M}{m_E} \tag{3}$$

also

$$r_a = \frac{R}{1 + \sqrt{m_M/m_E}} \tag{4}$$

(Kontrolle: $m_M = m_E$ würde $r_a = R/2$ ergeben, passt.)

Daraus folgt nun mit Energieerhaltung die Geschwindigkeit v_a um r_a gerade zu erreichen, d.h. dort die Geschwindigkeit 0 zu haben:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + V(r_E) = V(r_a) \tag{5}$$

also

$$\frac{1}{2}mv_a^2 = V(r_a) - V(r_E) \tag{6}$$

Einsetzen der Potentiale und Kürzen von m ergibt:

$$\frac{1}{2}v_a^2 = -G\frac{m_E}{r_a} - G\frac{m_M}{R-r_a} + G\frac{m_E}{r_E} + G\frac{m_M}{R-r_E} \tag{7}$$

also

$$\boxed{v_a = \sqrt{-2G\frac{m_E}{r_a} - 2G\frac{m_M}{R-r_a} + 2G\frac{m_E}{r_E} + 2G\frac{m_M}{R-r_E}}} \tag{8}$$

(Einsetzen des oben berechneten Wertes von r_a bringt keine Vereinfachung.)

Für allgemeine Abschussgeschwindigkeit v_0 folgt die Geschwindigkeit v beim Einschlag auf dem Mond (d.h. $r = R - r_M$) ebenfalls aus der Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + V(r_E) \;=\; \frac{1}{2}mv^2 + V(R - r_M) \tag{9}$$

Also

$$\frac{1}{2}v_0^2 - G\frac{m_E}{r_E} - G\frac{m_M}{R - r_E} \;=\; \frac{1}{2}v^2 - G\frac{m_E}{R - r_M} - G\frac{m_M}{r_M} \tag{10}$$

und schließlich

$$\boxed{v \;=\; \sqrt{v_0^2 - 2G\frac{m_E}{r_E} - 2G\frac{m_M}{R - r_E} + 2G\frac{m_E}{R - r_M} + 2G\frac{m_M}{r_M}}} \tag{11}$$

Aufgabe 2

Es kann nicht die gesamte kinetische Energie in innere Energie umgewandelt werden, da dafür das System der beiden Massenpunkte nach dem Stoß ruhen müsste, und das ist nicht mit der Impulserhaltung verträglich.

(a) Es gilt Impulserhaltung

$$m_1 v_1' + m_2 v_2' \;=\; m_1 v_1 \tag{12}$$

Maximale Umwandlung in innere Energie findet statt bei total inelastischer Kollision, d.h. wenn

$$v_1' = v_2' \tag{13}$$

Das sind zwei Gleichungen für zwei gesuchte Größen v_1' und v_2' mit der Lösung

$$v_1' \;=\; v_2' \;=\; \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{14}$$

Die erzeugte innere Energie Q ist kinetische Energie vorher − kinetische Energie nachher, also

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right) \\ &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \,\frac{m_2}{m_1 + m_2} \;=\; qT \end{aligned} \tag{15}$$

mit dem Bruchteil

$$\boxed{q \;=\; \frac{m_2}{m_1 + m_2}} \tag{16}$$

(Physikalisch vernünftig: Für $m_2 = \infty$ ist $q = 1$ und für $m_2 = 0$ ist $q = 0$.)

(b) Die Geschwindigkeit v_S des Schwerpunktsystems ist gegeben durch die Bedingung, dass der Gesamtimpuls verschwindet:

$$m_1(v_1 - v_S) + m_2(v_2 - v_S) \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{17}$$

Mit $v_2 = 0$ ergibt sich hieraus

$$v_S \;=\; \frac{m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \tag{18}$$

Die anfängliche kinetische Energie im Schwerpunktsystem ist

$$T_S = \frac{1}{2}m_1(v_1 - v_S)^2 + \frac{1}{2}m_2 v_S^2 \tag{19}$$

Setzt man hier v_S ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} T_S &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 v_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \left(\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned} \tag{20}$$

q.e.d.

Aufgabe 3

(a) Wir nehmen an, dass die Bewegung 1dimensional nur in vertikaler Richtung stattfindet, lassen die positive z-Richtung nach oben zeigen und legen den Nullpunkt auf die Höhe der Matratzenoberfläche. Dann lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{z} \;=\; -mg - kz \tag{21}$$

Die Vorzeichen sind richtig: Ohne Feder würde die Masse m in negative z-Richtung beschleunigt, und die Feder bewirkt bei eingedrückter Matratze, also $z < 0$, eine Kraft nach oben.

(b) Die Bewegungsgleichung ist eine inhomogene lineare Gleichung

$$\ddot{z} + \omega^2 z \;=\; -g \tag{22}$$

($\omega := \sqrt{k/m}$) also ist ihre allgemeine Lösung die allgemeine homogene Lösung plus eine spezielle inhomogene Lösung. Die allgemeine homogene Lösung ist eine Überlagerung von sin und cos, und eine spezielle inhomogene Lösung errät man leicht: $z = -g/\omega^2 = -mg/k$. Also:

$$z(t) \;=\; a\cos\omega t + b\sin\omega t - \frac{mg}{k} \tag{23}$$

Die Anfangsbedingungen im Augenblick der Landung des Kindes sind

$$z(0) \;=\; 0 \qquad \dot{z}(0) \;=\; -\sqrt{2gh} \tag{24}$$

(Diese Geschwindigkeit ergibt sich per Energiesatz $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ aus der Fallhöhe.)

Das bedeutet

$$z(0) \;=\; a - \frac{mg}{k} \;\stackrel{!}{=}\; 0 \qquad \longrightarrow \qquad a = \frac{mg}{k} \tag{25}$$

und

$$\dot{z}(0) \;=\; \omega b \;\stackrel{!}{=}\; -\sqrt{2gh} \qquad \longrightarrow \qquad b = -\frac{\sqrt{2gh}}{\omega} \tag{26}$$

Damit ist die vollständige Lösung

$$\boxed{z(t) \;=\; \frac{mg}{k}\big(\cos\omega t - 1\big) - \frac{\sqrt{2gh}}{\omega}\sin\omega t} \tag{27}$$

Um die maximale Kompression zu ermitteln, suchen wir die Nullstellen der Geschwindigkeit:

$$\dot{z}(t) \;=\; -\frac{mg}{k}\omega\sin\omega t - \sqrt{2gh}\cos\omega t \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{28}$$

also

$$\tan \omega t = -\sqrt{2gh}\,\frac{k}{\omega m g} \tag{29}$$

Jetzt ist der Zeitpunkt gekommen, die angegebenen Zahlenwerte einzusetzen:

$$\tan \omega t = -10{,}0 \tag{30}$$

Also

$$\omega t = \arctan(-10{,}0) + n\pi \tag{31}$$

Wir suchen die erste Nullstelle der Ableitung für *positive* Zeiten, daher müssen wir $n = 1$ nehmen. Es ergibt sich

$$\omega t \approx -1{,}4711 + 3{,}1415 \approx 1{,}6704 \tag{32}$$

und daraus

$$t \approx 0{,}0747\,\mathrm{s} \tag{33}$$

Setzt man dies in die Lösung für $z(t)$ ein, dann erhält man die maximale Kompression

$$z_{max} \approx -0{,}2209\,\mathrm{m} \tag{34}$$

also die maximale Kraft

$$\boxed{F_{max} = k|z_{max}| \approx 2209\,\mathrm{N}} \tag{35}$$

(c) Rechnung mit Energieerhaltung: Am Anfang nur potentielle Energie des Kindes in der Höhe h, am Ende Kompressionsenergie der Feder und potentielle Energie in (negativer) Höhe z (keine kinetische Energie!):

$$\frac{1}{2}kz^2 + mgz = mgh \tag{36}$$

ergibt eine quadratische Gleichung für z:

$$z^2 + \frac{2mg}{k}z - \frac{2mgh}{k} = 0 \tag{37}$$

mit den Lösungen

$$z_{1/2} = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k}} \tag{38}$$

Wir suchen die maximale Kompression, also die negative Lösung:

$$z_{max} = -\frac{mg}{k} - \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2mgh}{k}} \tag{39}$$

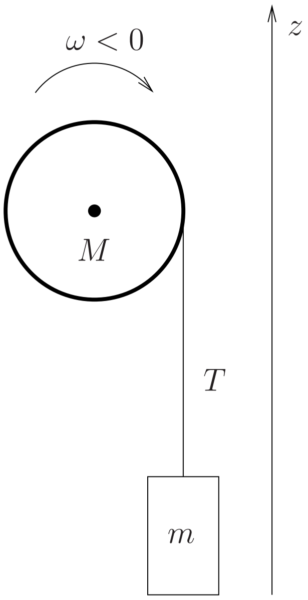
Einsetzen der angegebenen Werte ergibt

$$\boxed{z_{max} \approx -22,09\,\mathrm{cm}} \tag{40}$$

in Übereinstimmung dem Ergebnis aus Teil (b).

Aufgabe 4

Die angehängte Masse sei m, die Seilspannung T, die z-Koordinate der angehängten Masse z. Die Vorzeichenkonventionen sind so wie in der Skizze gezeigt. Es sind andere Konventionen möglich, diese müssen aber konsistent sein.



Dann hat man eine Bewegungsgleichung für die Rotation des Zylinders, eine Bewegungsgleichung für die lineare Beschleunigung der angehängten Masse und eine Zwangsbedingung durch den Faden, die die beiden Bewegungsgleichungen verknüpft:

$$\Theta\dot{\omega} = -rT \tag{41}$$

$$m\ddot{z} = -mg + T \tag{42}$$

$$\ddot{z} = r\dot{\omega} \tag{43}$$

mit $\Theta = \frac{1}{2}Mr^2$. (Die Vorzeichen sind korrekt im Sinne der gewählten Konvention, z.B. führt eine positive Fadenspannung zu einer negativen Winkelbeschleunigung.) Dies sind drei Gleichungen für die drei Unbekannten $\dot{\omega}$, $\ddot{z}$ und T. Elimination von $\ddot{z}$ führt auf

$$\frac{1}{2}Mr\dot{\omega} = -T \tag{44}$$

$$mr\dot{\omega} = -mg + T \tag{45}$$

und durch Addition und Auflösen erhält man daraus

$$\dot{\omega} = -\frac{mg/r}{m + \frac{1}{2}M} \tag{46}$$

Für die lineare Beschleunigung folgt

$$\ddot{z} \;=\; r\dot{\omega} \;=\; -\frac{mg}{m+\frac{1}{2}M} \tag{47}$$

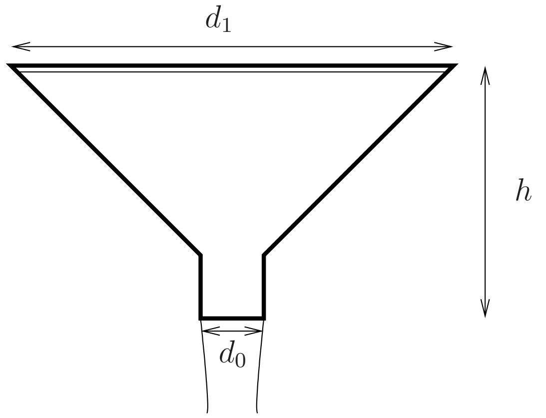
und für die Seilspannung

$$T \;=\; -\frac{1}{2}Mr\dot{\omega} \;=\; +\frac{1}{2}M\frac{mg}{m+\frac{1}{2}M} \tag{48}$$

Die vertikale Tragekraft ist schließlich die Summe aus Gewichtskraft des Zylinders und der Fadenspannung:

$$F \;=\; Mg+T \;=\; Mg+\frac{1}{2}M\frac{mg}{m+\frac{1}{2}M} \;=\; \frac{3m+M}{2m+M}Mg \tag{49}$$

Aufgabe 5



(a) Es gilt die Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h \;=\; \frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_0 \tag{50}$$

An der Oberfläche des Trichters herrscht Atmosphärendruck, also $p_1 = p_A$, ebenso im austretenden Wasserstrahl, also $p_0 = p_A$. Daher:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h \;=\; \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{51}$$

Weiterhin gilt die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 \;=\; v_0 A_0 \tag{52}$$

also

$$v_1 \;=\; v_0 \frac{A_0}{A_1} \;=\; v_0 \frac{d_0^2}{d_1^2} \tag{53}$$

Wegen dem Hinweis in der Aufgabenstellung ist also

$$v_1 \approx 0 \tag{54}$$

Damit vereinfacht sich die Bernoulli-Gleichung weiter

$$\rho g h \;=\; \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{55}$$

und es folgt die Geschwindigkeit des Wasserstrahls:

$$\boxed{v_0 \;=\; \sqrt{2gh} \;=\; 1{,}5\,\mathrm{ms}^{-1}} \tag{56}$$

(b) Aus der Austrittsgeschwindigkeit und der Querschnittsfläche der Austrittsöffnung ergibt sich der Volumenstrom

$$\Phi = A_0 v_0 \tag{57}$$

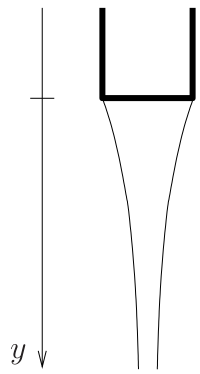
und die Zeit für das Auslaufen des Volumens V ist

$$t = \frac{V}{\Phi} = \frac{V}{A_0 v_0} = \frac{4V}{\pi d_0^2 \sqrt{2gh}} \tag{58}$$

also

$$\boxed{t \approx 23{,}3\,\mathrm{s}} \tag{59}$$

(c)



Mit zunehmender Fallstrecke y nimmt die Fallgeschwindigkeit des Wassers zu. Wäre der Strahlquerschnitt konstant, dann würde daher der Volumenstrom des Wassers mit y zunehmen. Dies kann aber nicht sein, denn der Volumenstrom ist wegen der Inkompressibilität eine Erhaltungsgröße, d.h. unabhängig von y. Daher muss der Strahlquerschnitt zum Ausgleich abnehmen.

Für den Volumenstrom $\Phi(y)$ gilt

$$\Phi(y) = A(y)v(y) = \text{const.} = A_0 v_0 \tag{60}$$

Die Fallgeschwindigkeit als Funktion der Fallhöhe ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung

$$\frac{1}{2}\rho v^2(y) - \rho g y = \frac{1}{2}\rho v_0^2 \tag{61}$$

(negatives Vorzeichen vor $\rho g y$, da y nach unten zeigt.) Also

$$v(y) = \sqrt{v_0^2 + 2gy} \tag{62}$$

Damit wird die Stromerhaltung zu

$$A(y)\sqrt{v_0^2 + 2gy} \;=\; A_0 v_0 \tag{63}$$

bzw. mit $A = \pi d^2/4$

$$d^2(y)\sqrt{v_0^2 + 2gy} \;=\; d_0^2 v_0 \tag{64}$$

und schließlich

$$d(y) \;=\; d_0\sqrt{\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}}} \tag{65}$$

Mit den angegebenen Werten ergibt sich für $y = 24{,}0\,\mathrm{cm}$:

$$\boxed{d(y) \approx 4{,}51\,\mathrm{mm}} \tag{66}$$

Aufgabe 6

(a) Die Welle bewegt sich nach links, da das Argument der cos-Funktion

$$kx + \omega t \;=\; k\left(x + \frac{\omega}{k}t\right) \tag{67}$$

nach links wandert: Zur Zeit $t = 0$ ist sein Nullpunkt bei $x = 0$, zur Zeit $t > 0$ ist er bei

$$x \;=\; -\frac{\omega}{k}t \;<\; 0 \tag{68}$$

Aus dieser Gleichung kann man auch die Geschwindigkeit ablesen:

$$v \;=\; \frac{\omega}{k} \tag{69}$$

also

$$\boxed{v \;=\; \frac{314\,\mathrm{s}^{-1}}{62,8\,\mathrm{m}^{-1}} \;=\; 5\,\mathrm{ms}^{-1}} \tag{70}$$

(b) Wellenlänge:

$$\lambda \;=\; \frac{2\pi}{k} \;\approx\; 0,1\,\mathrm{m} \tag{71}$$

Frequenz:

$$f \;=\; \frac{\omega}{2\pi} \;\approx\; 50\,\mathrm{s}^{-1} \tag{72}$$

Schwingungsdauer:

$$T \;=\; \frac{1}{f} \;\approx\; 0,02\,\mathrm{s} \tag{73}$$

(c) Wir setzen uns an einen festen Punkt, d.h. halten x konstant und leiten nach t ab:

$$\dot{y}(t,x) \;=\; -a\omega\sin(kx + \omega t) \tag{74}$$

Die Amplitude der Geschwindigkeit des Seilelements am festgehaltenen Ort x ist also

$$a\omega \tag{75}$$

(unabhängig von x, klar) und hat den Wert

$$\boxed{a\omega \;=\; 0,314\,\mathrm{ms}^{-1}} \tag{76}$$

Aufgabe 7

(a) Vom System S aus wird die Bewegung des Lichtimpulses durch

$$x = c(t - \tau) \tag{77}$$

und die des Empfängers durch

$$x = vt \tag{78}$$

beschrieben. Gleichsetzen und Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{79}$$

und daraus folgt x zu

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} \tag{80}$$

(b) Mit Hilfe der Lorentz-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) && (81)\\
&= \gamma\left(\frac{\tau}{1-\frac{v}{c}} - \frac{v}{c^2}\frac{v\tau}{1-\frac{v}{c}}\right) && (82)\\
&= \gamma\left(\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v}{c}}\right)\tau && (83)\\
&= \gamma\left(1+\frac{v}{c}\right)\tau && (84)\\
&= \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{v}{c})(1+\frac{v}{c})}}\left(1+\frac{v}{c}\right)\tau && (85)\\
&= \frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}}\,\tau && (86)
\end{aligned}$$