................
Note

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| $\Sigma$ | | |

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Semestrale
# HÖHERE MATHEMATIK II
## Analysis 1 für Physiker

11. Februar 2008, 10:30 – 12:00 Uhr

Prof. Dr. H. Spohn, PD Dr. W. Aschbacher

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **10** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **ein** selbsterstelltes DIN A4 Blatt

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind immer **alle** zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

**Aufgabe 1. Definitionen** **[3 Punkte]**

(a) Aus welchen Aussagen folgt, dass die reellwertige Folge $(a_n)$ für $n \to \infty$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

- ☐ $a \neq 0$ und $\forall \delta{>}0\ \exists N{\in}\mathbb{N}\ \forall n{>}N\colon \left|\frac{a_n}{a}\right| \leq \delta$
- ☐ $\forall N{\in}\mathbb{N}\ \exists \varepsilon{>}0\ \forall n{>}N\colon |a_n - a| < \varepsilon$
- ☐ $|a_n - a| \to 0$ für $n \to \infty$
- ☐ $\forall n{\in}\mathbb{N} : a_{n+1} \geq a_n$ und $\sup\{a_n | n{\in}\mathbb{N}\} = a$

(b) Sei $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Welche Aussagen gelten für $g(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$ mit $x \in [0,1]$?

- ☐ $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
- ☐ $g(1) = 0$
- ☐ $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar.
- ☐ $g'(x) = f(x)$ für alle $x \in [0,1]$

(c) Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = f(1) = 0$. Welche Aussagen treffen zu?

- ☐ $f$ ist beschränkt.
- ☐ $f'$ ist beschränkt.
- ☐ Es existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f(x_0) = 0$.
- ☐ Es existiert ein $x_0 \in (0,1)$ mit $f'(x_0) = 0$.

**Aufgabe 2. Konvergenz** **[4 Punkte]**

(a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2^{n+1}}$$

☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{3}{8}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{5}{12}$ ☐ $\frac{5}{6}$

(b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$ ?

☐ $=-\infty$ ☐ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ existiert nicht

(c) Wie gross ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log(n)/n}\, x^n$$

☐ $0$ ☐ $1$ ☐ $\mathrm{e}$ ☐ $\frac{1}{\mathrm{e}}$ ☐ $\infty$

(d) Sei $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$. Durch welchen Wert ist $f$ bei $x=0$ stetig fortsetzbar?

☐ $1$ ☐ nicht stetig fortsetzbar ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $2$ ☐ $0$

**Aufgabe 3. Integration** **[6 Punkte]**

Untersuchen Sie die uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Wert.

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1+x)}$ ☐ divergent ☐ $1$ ☐ $\pi$ ☐ $\frac{1}{2}$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \log x \;\mathrm{d}x$ ☐ divergent ☐ $-1$ ☐ $-2$ ☐ $\frac{1}{2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$ ☐ divergent ☐ $1$ ☐ $2\pi$ ☐ $\frac{3}{2}$

**Aufgabe 4. Inhomogenes Differentialgleichungssystem** **[4 Punkte]**

Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ die Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie den Propagator $\mathrm{e}^{tA}$. Welche Form hat er bei $t = 1$?

$$\square \begin{bmatrix} \mathrm{e} & 0 & \mathrm{e}^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 2\mathrm{e}^2 \\ 0 & \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix}$$

*Hinweis:* Schreiben Sie $A = D + N$ für ein diagonales $D$ und ein nilpotentes $N$, sodass $D$ und $N$ kommutieren.

(b) Wie lautet die erste Komponente von $x(t)$ bei $t = 1$ unter der Anfangsbedingung $x(0) = [0, 0, 0]^T$?

$$\square \ \mathrm{e}^2 - 1 \qquad \square \ \mathrm{e}\,(\mathrm{e}+1) \qquad \square \ \mathrm{e}^2 + 1 \qquad \square \ \mathrm{e}\,(\mathrm{e}-1)$$

**Aufgabe 5. Parameterintegral** **[5 Punkte]**

Sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \int_1^\pi \frac{\sin(tx)}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Benutzen Sie den *Satz von der dominierten Konvergenz* um zu zeigen, dass $f'(0) = \pi - 1$.

**Aufgabe 6. Homogenes Differentialgleichungssystem** **[6 Punkte]**

Sei $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad \text{mit} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $x(t)$ zur Anfangsbedingung $x(0)$, indem Sie eine Basis aus Eigenvektoren von $A$ benutzen.

**Aufgabe 7. Taylorreihe** **[3 Punkte]**

Sei die Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}},$$

und sei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ihre Taylorreihe mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt.

(a) Wie lauten die Koeffizienten $a_n$ für $n \geq 1$?

☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{2^n}$

☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{n!\,2^n}$

☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n-1}(2j-1)}{2^n}$

☐ $a_n = \dfrac{\prod_{j=1}^{n}(2j-1)}{(n-1)!\,2^n}$

(b) Wie gross ist der Konvergenzradius der Taylorreihe?

☐ $0$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $1$ ☐ $\mathrm{e}$ ☐ $\infty$

(c) Wie lauten die Koeffizienten $b_n$ der Taylorreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ von $f'(x)$ im gleichen Entwicklungspunkt?

☐ $b_n = a_n$

☐ $b_0 = 0,\ b_n = a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

☐ $b_n = n\,a_n$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☐ $b_0 = 0,\ b_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$

☐ $b_n = (n+1)\,a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

☐ $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

**Aufgabe 8. Stetigkeit** **[3 Punkte]**

Seien $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Benutzen Sie die $\varepsilon\delta$-Definition der Stetigkeit um zu zeigen, dass

$$f + g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

**Aufgabe 9. Häufungwerte** **[4 Punkte]**

Sei $(a_n)$ eine beschränkte reellwertige Folge und $\mathrm{H}(a_n)$ die Menge aller ihrer Häufungswerte. Zeigen Sie, dass

$$\sup \mathrm{H}(a_n) \in \mathrm{H}(a_n).$$

**Aufgabe 10. Satz von Taylor** **[2 Punkte]**

(a) Sei $f \in C^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Wie lautet die Integralform des Restgliedes $R_{n+1}(x)$ in der Taylorformel $n$-ter Ordnung mit dem Ursprung als Entwicklungspunkt?

| |
|---|
| $R_{n+1}(x) =$ |

(b) Welches Abfallverhalten hat $R_{n+1}(x)$ für $x \to 0^+$?

- ☐ $R_{n+1}(x) = o(x^n)$
- ☐ $R_{n+1}(x) = O(x^n)$
- ☐ $R_{n+1}(x) = o(x^{n+1})$
- ☐ $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$