# Übungen zum Ferienkurs Analysis II

# Topologie und Extrema

# 2.1 Eigenschaften von Mengen $\star$

Bestimmen Sie, welche der folgenden Mengen offen, abgeschlossen, zusammenhängend, kompakt sind (ohne Beweis).

- $\bullet \mathbb{R}^2$
- [4,7)
- $[0,1) \cup [2,5]$
- $\{x \in \mathbb{R} | |x| > 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x+y=0 \}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^4 + y^3 = 3 \}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | e^{x^2} = 3e^{-|y|} \}$
- $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^{10} > 3\}$

### 2.2 Stetigkeit \*

Sei X, metrischer Raum, zusammenhängend und  $f: X \to \mathbb{R}$  lokal konstant d.h. zu jedem  $x \in X$  exisitiert eine Umgebung  $x \in U \subset X$  so dass  $f|_U$  konstant. Zeige: f ist konstant. Geben Sie zudem ein Gegenbeispiel an, für den Fall, dass X nicht zusammenhängend ist (eine lokal konstanten Funktion an, die nicht konstant ist).

# 2.3 Kompaktheit

Sei X kompakt und  $A \subset X$  abgeschlossen. Zeige: A ist auch kompakt.

#### 2.4 Kompaktheit II

Sei  $(x_n)_{b\in\mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{R}^n$  und H die Menge aller Häufungspunkte der Folge. Weiterhin sei  $A := \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \cup H$  die Menge der Folgenglieder und Häufungspunkte. Zeige: A ist kompakt.

#### 2.5 Lokale Extremwerte \*

Gegeben sei die Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = y^3 - 3xy + x^2$ 

- (a) Bestimmen Sie die beiden Punkte  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  mit grad f(x, y) = 0.
- (b) Wie lautet die Hessematrix von f im Punkt  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$ ?
- (c) Besitzt f in den Punkten  $(x_0, y_0)$  und  $(x_1, y_1)$  ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder einen Sattelpunkt?

Nimmt f ein globales Maximum oder ein globales Minimum in den Punkten  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ ?

# 2.6 Extrema mit Nebenbedingungen I $\star$

Berechnen Sie diejenigen Punkte auf der Kugeloberfläche

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

die von (1,1,1) den kleinsten bzw. größten Abstand haben.

# 2.7 Extrema mit Nebenbedingungen II

Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion  $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = 5x + y - 3z$  unter den Nebenbedingungen:

$$x + y + z = 0$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

# 2.8 Extrema mit Nebenbedingungen III

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2$  unter der Nebenbedingung  $x^2 + y^2 = 1$ .