1 Quickies (10 Punkte)

Beantworten Sie die Fragen und geben Sie eine möglichst kurze Erklärung.

(a) Ein Massenpunkt m sei durch die zwei Federn der Federkonstante k mit zwei Wänden verbunden. Die Federn seien auf einer Linie. Betrachten Sie kleine Auslenkungen des Massenpunktes aus der Gleichgewichtslage entlang der Verbindungslinie und geben Sie die Eigenfrequenz an.

Lösung. $m\ddot{x} = -kx - kx = -2kx, \Rightarrow \; \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

(b) Ein Körper gleite reibungslos in der x-y-Ebene auf einer rotierenden Scheibe vom Zentrum zum Rand. In welche Richtung wird der Körper durch die Corioliskraft im mit der Scheibe mitgedrehten Koordinatensystem abgedrängt, falls sich die Scheibe (von oben gesehen) im Uhrzeigersinn dreht?

Lösung. $\boldsymbol{\omega} = -\omega \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_r$, $\quad \boldsymbol{F}_C = -2m(\omega \times \boldsymbol{v}) = 2m\omega v \boldsymbol{e}_\varphi \;\Rightarrow$ nach links

(c) Betrachten Sie das System Erde-Mond mit dem Massenverhältnis $M_{Erde}/m_{Mond} = 81$. Der Abstand zwischen diesen Himmelskörpern ist 380 000 km. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Schwerpunkt des Systems und dem Erdmittelpunkt.

Lösung. $R_s = (M_{Erde} * 0 + m_{Mond}R)/(M_{Erde} + m_{Mond}) = 380000/82 \approx 4600\, km$

(d) Ein Tennisball springt elastisch auf einer horizontalen Platte. Wie hängt die Periode der Bewegung von der maximalen Höhe h_{max} ab , die der Ball erreicht?

Lösung. Die Fallzeit T_F von maximaler Höhe lautet $h_{max} = \frac{1}{2} g T_F \;\Rightarrow\; T_F = \sqrt{2h_{max}/g}$. Für die Periode T erhält man:$T = 2T_F$

(e) Gegeben sei die Lagrange-Funktion des Systems $L = \frac{1}{2}m(1 + \frac{q^2}{b^2})\dot{q}^2 - mg\frac{q^2}{2b}$. Bestimen Sie die Hamilton-Funktion des Systems $H(p, q)$.

Lösung. $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m(1 + \frac{q^2}{b^2})\dot{q}$

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = m(1 + \frac{q^2}{b^2})\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m(1 + \frac{q^2}{b^2})\dot{q}^2 + mg\frac{q^2}{2b} = \frac{p^2}{2m(1 + \frac{q^2}{b^2})} + mg\frac{q^2}{2b}$$

2 Tunnel (10 Punkte)

Zwischen München und Köln (Enfernung soll ein geradliniger Tunnel der Länge $L = 500$ km gegraben werden, in welchen Güterwägen zwischen den beiden Städten verkehren. Ein solcher Wagen bewege sich reibungslos unter dem Einfluß der Schwerkraft $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$. Betrachten Sie die Erde als eine ideale Kugel mit Radius $R = 6400$ km.

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung für $x(t)$ im Falle $L \ll R$, $|\boldsymbol{g}| = g = const$

b) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung an.

c) Wie lange dauert die Fahrt von München nach Köln für einen Wagen mit Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$.

d) Wie groß sind die mittlere und die maximale Geschwindigkeit des Wagens?

Lösung.

a) Die Bewegungsgleichung für $x(t)$ lautet

$$m\ddot{x} = F_x = -mg\sin\alpha,$$

wobei α der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der y-Achse ist. Es gilt

$$\tan\alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2 - L^2/4}}$$

Im Falle $|x| \leq L \ll R$ erhält man

$$\tan\alpha \approx \frac{x}{R} \approx \sin\alpha, \quad \ddot{x} = -\frac{g}{R}x$$

b) Die Lösung der Oszillatogleichung lautet

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \dot{x}(0)\frac{\sin\omega t}{\omega}, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

c) Im Falle $\dot{x}(0) = 0$ ist die Fahrzeit gleich der Halbperiode

$$T_F = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 0.7\,St$$

d) Die mittlere Geschwindigkeit $\overline{v}$ und die maximale Geschwindigkeit v_{max} lauten

$$\overline{v} = \frac{L}{T_F} = 714\,km/St \qquad v_{max} = \frac{L\omega}{2} = \frac{L\pi}{2T_F} = 1120\ km/St$$

3 Schiefe Ebene (10 Punkte)

Eine Scheibe gleite reibungslos unter dem Einfluß der homogenen Schwerkraft $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$ auf einer schiefen Ebene

$$z = ax + by$$

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen 1. Art) unter dieser Zwangsbedingung .

b) Bestimmen Sie den Lagrange-Multiplikator λ als Funktion der Koordinaten und Geschwindigkeiten mittels der Bewegungsgleichungen und der Zwangsbedingung.

c) Eliminieren Sie λ aus der Bewegungsgleichungen und geben Sie die Lösungen an.

Lösung.

a) Die Zwangsbedingung und die Bewegungsgleichungen lauten

$$f(x, y, z) = ax + by - z = 0$$

$$m\ddot{x} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda a \tag{1}$$

$$m\ddot{y} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda b \tag{2}$$

$$m\ddot{z} = -mg + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} = -mg - \lambda \tag{3}$$

b) Unter Verwendung $z = ax + by$ in der Gleichung (3) erhält man

$$m\ddot{z} = am\ddot{x} + bm\ddot{y} \overset{(1,2)}{=} (a^2 + b^2)\lambda = -mg - \lambda \Rightarrow$$

$$\lambda = -\frac{mg}{1 + a^2 + b^2}$$

c)

$$m\ddot{x} = -m\frac{ga}{1 + a^2 + b^2}, \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t - \frac{ga}{1 + a^2 + b^2}\frac{t^2}{2}$$

$$m\ddot{y} = -m\frac{gb}{1 + a^2 + b^2}, \quad \Rightarrow \quad y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t - \frac{gb}{1 + a^2 + b^2}\frac{t^2}{2}$$

$$z(t) = ax(t) + by(t)$$

4 Rollender Zylinder (10 Punkte)

Ein Zylinder mit Masse M, Radius R und Trägheitsmoment Θ_y um die Zylinderachse rollt ohne Schlupf im homogenen Schwerefeld ($\boldsymbol{F} = -Mg\boldsymbol{e}_z$) eine um den Winkel α geneigte schiefe Ebene hinab. Betrachten Sie den Fall, dass die Zylinderachse immer parallel zur y-Achse bleibt und sich der Schwerpunkt nur in der x-z-Ebene bewegt.

(a) Betrachten Sie die Strecke $s(t)$, die sich der Schwerpunkt längs der Ebene bewegt hat, als generalisierte Koordinate und drücken Sie die Geschwindigkeiten $\dot{x}_s$, $\dot{z}_s$ des Schwerpunktes und die Winkelgeschwindigket des Zylinders $\boldsymbol{\omega}$ durch $\dot{s}$ aus.

(b) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des System $L(s, \dot{s})$ auf und formulieren Sie die Euler-Lagrange-Gleichung (Lagrange-Gleichung 2. Art) für $s(t)$.

(c) Geben Sie die Lösung der Bewegungsgleichung mit der Anfangsbedingungen $s(0) = 0$ und $\dot{s}(o) = 0$ an. Was rollt unter gleichen Bedingungen schneller: ein Hohlzylinder oder ein Vollzylinder mit gleicher Masse M und gleichem Radius R?

Lösung.

(a)

$$\dot{s} = v, , \dot{x}_s = v\cos\alpha,\ \dot{z}_s = -v\sin\alpha,\ \boldsymbol{\omega} = \frac{v}{R}\boldsymbol{e}_y = \frac{\dot{s}}{R}\boldsymbol{e}_y$$

(b) Kinetische Energie, potentielle Energie und die Lagrange-Funktion lauten

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_s^2 + \dot{z}_s^2) + \frac{1}{2}\Theta_y\omega_y^2 = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta_y}{R^2})\dot{s}^2$$
$$V = V(s(0)) - Mgs\sin\alpha$$
$$L = T - V = \frac{1}{2}(M + \frac{\Theta_y}{R^2})\dot{s}^2 - V(s(0)) + Mgs\sin\alpha$$

Die Bewegungsgleichung für $s(t)$ lautet

$$(M + \frac{\Theta_y}{R^2})\ddot{s} = Mg\sin\alpha$$

(c) Im Falle $s(0) = 0$ und $\dot{s}(o) = 0$ erhält man die Lösung

$$s(t) = \frac{M}{(M + \frac{\Theta_y}{R^2})}g\sin\alpha\frac{t^2}{2}$$

Da der Vollzylinder das kleineren Trägheitsmoment hat, rollt er schneller als der Hohlzylinder.