TU München
Diplomvorprüfung Physik
Klausur zur Theoretischen Physik (Mechanik)

28. Februar 2002 Prof. Dr. P. Ring Zeit: 90 Minuten

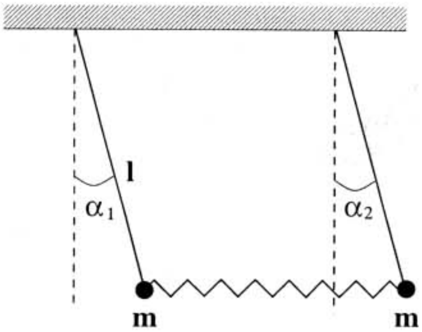
Auf jedem Blatt sollte der *eigene Name* und die *Matrikelnummer* stehen.

******* Bitte jede Aufgabe auf ein gesondertes Blatt. *******

Lesbar schreiben freut die Korrektoren!

1. Zwei gekoppelte Pendel (**18P**): Zwei gleiche Pendel (Masse m, Länge l) sind durch eine masselose, ideale Feder verbunden und bewegen sich im homogenen Schwerefeld der Erde, siehe Abbildung. Betrachtet wird der Fall kleiner Auslenkungen. Die Länge der unbelasteten Feder ist gleich dem Abstand der Aufhängungspunkte der Pendel. Es wirken keine weiteren Kräfte. Sie können ferner ohne Beweis annehmen, daß das durch die Feder generierte Potential nur vom horizontalen Abstand der Pendel abhängt.

a) (**4P**) Formulieren Sie im Falle kleiner Auslenkungen α_1 und α_2 die Lagrangefunktion und die Bewegungsgleichungen.



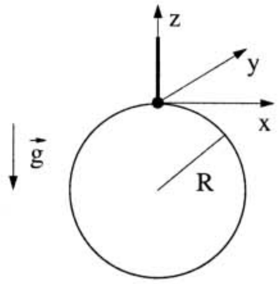
b) (**4P**) Welche Eigenfrequenzen und Normalschwingungen hat das System? Leiten daraus eine graphische Darstellung jeder der Normalschwingungen ab, zugeordnet zu ihrer jeweiligen Eigenfrequenz.

c) (**4P**) Berechnen Sie $\alpha_1(t)$ und $\alpha_2(t)$ für die Anfangsbedingungen $\alpha_2(0) = \alpha_0$; $\alpha_1(0) = \dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$.

d) (**6P**) Diskutieren Sie das System im Limes schwacher Kopplung, d.h. $lf \ll mg$. Welches wohlbekannte physikalische Phänomen erwarten Sie in diesem Fall?

Federkonstante

2. Der Hula-Hopp-Reifen (**13P**): Ein Hula-Hopp-Reifen ist ein homogener Ring mit Radius R, Masse M und vernachlässigbarer Dicke. Er ist an einem festen Punkt seines Umfangs im homogenen Schwerefeld der Erde im Koordinatenursprung aufgehängt. Zunächst soll er frei in jede Richtung schwingen können. Die Schwerkraft wirkt antiparallel zur z-Achse, siehe Abbildung. Es wirken keine weiteren Kräfte.



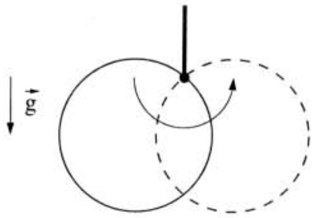
a) (**4P**) Berechnen Sie den Trägheitstensor bezüglich des Aufhängepunktes im abgebildeten Koordinatensystem.

b) (**3P**) Geben Sie die kontinuierlichen Symmetrien des Systems und die dazugehörigen Erhaltungsgrößen an.

$m(y^2+z^2)$ x

Fortsetzung nächste Seite

Wir betrachten nunmehr den Fall, daß der Reifen nur in der xz-Ebene schwingen kann, siehe Abbildung.



c) (**2P**) Wie lautet die Lagrangefunktion des Problems?

d) (**4P**) Berechnen Sie daraus die Frequenz kleiner Schwingungen um die Gleichgewichtslage in Abhängigkeit vom Trägheitsmoment I um die y-Achse.

3. Potentialbewegung (**19P**): Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem allgemeinen Zentralpotential

$$V(r) = -\frac{c}{r^\lambda}, \tag{1}$$

wobei $\lambda c > 0$, $\lambda \neq 0$ und zugleich $\lambda < 2$.

a) (**2P**) Wie lautet das zugehörige effektive Potential $V_{eff}(r)$?

b) (**3P**) Finden Sie die Beziehung zwischen Radius und Drehimpuls, für die sich das Teilchen auf einer stabilen *Kreisbahn* mit Radius r_0 bewegt. (Hinweis: Es kann zur Vereinfachung ohne Beweis vorausgesetzt werden, daß der Parameterraum von $V_{eff}(r)$ die Existenz gebundener Zustände definitiv erlaubt.)

c) (**2P**) Zeigen Sie explizit, daß man für die Kreisfrequenz ω_0 eines Umlaufs auf diesem Orbit folgenden Ausdruck erhält:

$\ell^2 \approx \omega_0^2 m \approx \frac{c\lambda}{r_0^{\lambda+2}}$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c\lambda}{m\, r_0^{\lambda+2}}}$$

$2\pi f = \omega_0$ $\quad \frac{\ell^2}{m^2} = \omega$

Betrachten Sie nun zusätzlich zur Kreisbewegung kleine Schwingungen um die Kreisbahn in *radialer* Richtung.

d) (**3P**) Wie lautet das (effektive) Potential für diese radiale Bewegung im Fall *kleiner* Schwingungen ? (Hinweis: Führen Sie eine Taylor-Entwicklung bis zum ersten kinematisch relevanten Term durch.)

e) (**3P**) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz der radialen Schwingung ω_R und ω_0 her. (Hinweis: Drücken Sie mit Hilfe der in Teilaufgabe b) gefundenen Beziehung den Drehimpuls als eine Funktion von r_0 aus.)

f) (**3P**) Welche Bedingung muß λ erfüllen, damit sich periodische, geschlossene Orbits ergeben ?

g) (**3P**) Diskutieren Sie das Verhältnis ω_R/ω_0 sowohl für den Fall eines Coulomb Potentials, als auch für den Fall des harmonischen Oszillators.

$\frac{\omega_0^2 \cdot m}{c\lambda} = r^{-2-\lambda}$ $\quad \frac{\ell^2}{2\mu c} = r^{2-\lambda}$

$\frac{\omega^2 \cdot m}{r_0^{\lambda+2}}$

ω_0 $\quad \frac{2\pi}{T} = \omega^2$