Technische Universität München
Fakultät für Mathematik

Klausur

Mathematik für Physiker 1 (Lineare Algebra)

Modul MA9201

14. Februar 2014, 8:00 – 9:30 Uhr

Prof. Dr. Eric Sonnendrücker
Dr. Katharina Kormann, Dr. Holger Heumann

Beispiellösung

Aufgabe 1. Linearkombinationen (10 Punkte)

Im $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei die Teilmenge

$$X := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

gegeben, wobei $\vec{v}_1 = {}^t(1,1,-1,-2)$, $\vec{v}_2 = {}^t(2,1,0,3)$, $\vec{v}_3 = {}^t(0,-1,2,7)$.

a) Prüfen Sie, ob $\vec{v} = {}^t(4,3,-2,-1) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$, und geben Sie $\vec{v}$ falls möglich als Linearkombination von X an.

b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$ und ergänzen Sie X (bzw. gegebenenfalls eine Teilmenge von X) durch passend gewählte Einheitsvektoren zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

c) Betrachten Sie nun X als Teilmenge des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^4$. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(X)$ und ergänzen Sie X bzw. gegebenenfalls eine Teilmenge von X zu einer Basis des $\mathbb{Q}^4$.

<u>Lösung:</u>

Wir bezeichnen die Vektoren in X mit $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

a) Wir müssen prüfen, ob es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\sum_{i=1}^3 \lambda_i \vec{v}_i = \vec{v}$. Wir suchen also eine Lösung des Systems $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \vec{v}$, wobei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Durch Gaußelimination ergibt sich die folgende Zeilenstufenform für die erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das System ist also lösbar, und damit gilt $\vec{v} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$, und ist unterbestimmt. Mögliche Lösungen sind z.B. $\vec{v} = 4\vec{v}_1 + \vec{v}_3$ oder $\vec{v} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

b) Wir betrachten nun ${}^tA$. Durch Gaußelimination erhalten wir die Zeilenstufenform $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Der Rang von ${}^tA$ ist also zwei und damit auch die Dimension von $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$. In der Zeilenstufenform treten gerade die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_3$ auf, die folglich eine Basis von $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(X)$ bilden. Die Zeilenstufenform lässt sich durch $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ zu einer vollen Matrix erweitern. Damit erhalten wir folgende Basis des $\mathbb{R}^4$: $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$.

c) Da wir in allen Schritten der Rechnung nur rationale Zahlen verwendet haben, können die unter (b) ausgeführten Rechnung genauso auch im $\mathbb{Q}^4$ ausgeführt werden. Damit erhält man dasselbe Resultat wir in (b), d.h. die Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ und die Dimension $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(X)$ zu 2.

Aufgabe 2. Eigenwerte (8 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ die einzigen Eigenwerte von A sind.

b) Finden Sie je eine Basis von $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i E_3)$ für $i = 1, 2$.

c) Begründen Sie, warum die Matrix A diagonalisierbar ist.

d) Geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine Transformationsmatrix S an, so dass

$$A = S \cdot D \cdot S^{-1}$$

gilt.

<u>LÖSUNG:</u>

a) $\det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \cdot (2-\lambda)$. Im letzten Schritt bestimmt man die Determinante als Produkt der Diagonalelemente, da die Matrix eine untere Dreiecksmatrix ist. Nach Lemma 21 der Vorlesung sind die Eigenwerte von A daher genau $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

b)
- $A - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit gilt $\mathrm{Ker}(A - E_3) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}({}^t(1,-1,0),\ {}^t(0,0,1))$, d.h. $({}^t(1,-1,0),\ {}^t(0,0,1))$ ist eine Basis.
- $A - 2E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Damit gilt $\mathrm{Ker}(A - 2E_3) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}({}^t(0,1,0))$, d.h. $({}^t(0,1,0))$ ist eine Basis.

c) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und in beiden Fällen ist die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit. Daher ist die Matrix diagonalisierbar.

d) Man erhält die Diagonalmatrix der Eigenwerte $\mathrm{diag}(1,1,2)$ mit der Transformationsmatrix, die die Eigenvektoren als Spalten enthält $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. Untervektorraum (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Menge $U := \{ {}^t(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}, x + y - z = 0\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie eine Basis von U an.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Wir prüfen die Unterraumaxiome

UV1 $0 + 0 - 0 = 0$ und damit $\vec{0} \in U$

UV2 Seien ${}^t(x_1, y_1, z_1)$, ${}^t(x_2, y_2, z_2) \in U$. Dann ist auch ${}^t(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in U$, da $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = (x_1 + y_1 - z_1) + (x_2 + y_2 - z_2) = 0$.

UV3 Seien ${}^t(x, y, z), \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda\, {}^t(x, y, z) \in U$, da $\lambda x + \lambda y - \lambda z = \lambda(x + y - z) = 0$.

b) $U \subset \mathbb{R}^3$ ist durch eine Gleichung bestimmt. Damit hat U die Dimension zwei. Je nach Wahl von x, y muss $z = x + y$ gelten. Eine mögliche Basis ist damit $({}^t(1, 0, 1), {}^t(0, 1, 1))$.

Aufgabe 4. Kern und Bild (3 Punkte)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie je eine Basis für Kern und Bild der Abbildung an.

<u>LÖSUNG:</u>

- $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$, wenn $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ gilt. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x_2 = -x_3$, eingesetzt in die zweite erhält man dann $x_1 = -x_3$. Damit gilt $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Eine Basis des Kerns ist damit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Nach der Dimensionsformel gilt $\dim \mathbb{R}^3 = \dim f(\mathbb{R}^3) + \dim \mathrm{Ker}(f)$. Da der Kern Dimension 1 hat, muss das Bild Dimension 2 haben. Folglich ist $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$ bzw. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ bilden eine Basis.

Aufgabe 5. Darstellungsmatrix (7 Punkte)

Sei $\mathcal{F} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\cos, \mathrm{e}, 1)$, wobei

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x),$$
$$\mathrm{e} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x,$$
$$1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1.$$

$\mathcal{F}$ ist ein Untervektorraum von $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

Ferner sei

$$\phi : \mathcal{F} \to \mathbb{R}, f \mapsto f(0).$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (\cos, \mathrm{e}, 1)$ eine Basis von $\mathcal{F}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass ϕ linear ist.

c) Betrachten Sie die Basen $\mathcal{B}$ von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{A} = (1)$ von $\mathbb{R}$ und berechnen Sie die darstellende Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\phi)$.

<u>Lösung:</u>

a) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1 \cos + \lambda_2 \mathrm{e} + \lambda_3 1 = 0$. Dann muss für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, dass $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \lambda_3 1 = 0$. Insbesondere muss dies für $x = 0, \pi/2, 3\pi/2$ gelten, d.h.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \lambda_2 \mathrm{e}^{\pi/2} + \lambda_3 = 0, \lambda_2 \mathrm{e}^{3\pi/2} + \lambda_3 = 0.$$

Da $\mathrm{e}^{\pi/2} \neq \mathrm{e}^{3\pi/2}$, ergibt sich aus der zweiten und dritten Gleichung, dass $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Dann muss nach der ersten Gleichung aber auch $\lambda_1 = 0$ gelten. Folglich ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig. $\mathcal{B}$ ist aber auch ein Erzeugendensystem nach der Definition von $\mathcal{F}$.

b) Seien $f, g \in \mathcal{F}$ und $\eta \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$, so dass $f = \lambda_1 \cos + \lambda_2 \mathrm{e} + \lambda_3 1$ und $g = \mu_1 \cos + \mu_2 \mathrm{e} + \mu_3 1$. Dann gilt:

- $\phi(f+g) = \phi((\lambda_1+\mu_1)\cos + (\lambda_2+\mu_2)\mathrm{e}^0 + (\lambda_3+\mu_3)1) = (\lambda_1+\mu_1)\cos(0) + (\lambda_2+\mu_2)\mathrm{e}^0 + (\lambda_3+\mu_3)1 = \lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \mathrm{e}^0 + \lambda_3 1 + \mu_1 \cos(0) + \mu_2 \mathrm{e}^0 + \mu_3 1 = \phi(f) + \phi(g)$.
- $\phi(\eta f) = \phi(\eta\lambda_1 \cos + \eta\lambda_2 \mathrm{e}^0 + \eta\lambda_3 1) = \eta\lambda_1 \cos(0) + \eta\lambda_2 \mathrm{e}^0 + \eta\lambda_3 1 = \eta\left(\lambda_1 \cos(0) + \lambda_2 \mathrm{e}^0 + \lambda_3 1\right) = \eta\phi(f)$.

Man muss hierbei nicht eine Darstellung als Linearkombination wählen. Es ist auch möglich die Linearität von Funktionen auszunutzen.
Alternative kann auch benutzt werden, dass $\mathcal{F}$ eine Teilmenge der Funktionen ist und die Auswertung von Funktionen nach Übung linear ist.

c) Wir betrachten die Bilder der Basisvektoren:

$$\phi(\cos) = \cos(0) = 1 = 1 \cdot 1, \quad \phi(\mathrm{e}^0) = 1 = 1 \cdot 1, \quad \phi(1) = 1 = 1 \cdot 1.$$

Damit ist die darstellende Matrix $(1\,1\,1)$.

Aufgabe 6. Determinanten antisymmetrischer Matrizen (7 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}^*$. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n; K)$ heißt *antisymmetrisch*, wenn ${}^tA = -A$ gilt.

a) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det A$.

b) Sei A antisymmetrisch und n ungerade. Zeigen Sie, dass dann $\det A = 0$ gilt.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Entwickeln nach der 4. Zeile ergibt: $\det A = (-1)^{4+3} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Mit der Regel von Sarrus erhalten wir $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -((-1) \cdot 1 \cdot 1) = 1$. Das ergibt schließlich $\det A = 1$.

b) In der Vorlesung haben wir bewiesen, dass $\det A = \det {}^tA$. Da ${}^tA = -A$. gilt damit $\det {}^tA = \det(-A)$. $-A$ bedeutet, dass jede Zeile mit -1 multipliziert wird, wir können also sukzesive D3(b) auf jede Zeile anwenden und erhalten $\det {}^tA = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$. Für die letzte Gleichheit haben wir n ungerade benutzt. Da nun $\det A = -\det A$ gelten muss, folgt die Behauptung.

Aufgabe 7. Dimension des Bildes (7 Punkte)

Gegeben seien $A \in \mathcal{M}(m \times n; K)$ und $B \in \mathcal{M}(r \times m; K)$. Ferner betrachten wir die Abbildungen

$$F_A : K^n \to K^m, \vec{v} \mapsto A\vec{v},$$

$$F_B : K^m \to K^r, \vec{v} \mapsto B\vec{v}$$

und $G = F_B \circ F_A$. Die Abbildung F_B sei injektiv. Zeigen Sie, dass dann gilt

a) $\mathrm{Ker} F_A = \mathrm{Ker} G$,

b) $\dim F_A(K^n) = \dim G(K^n)$.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Da B injektiv ist, gilt außerdem $KerF_B = \{\vec{0}\}$. Wir zeigen nun, dass $Ker(F_A) = Ker(G)$.
Sei $\vec{v} \in Ker(F_A)$, dann gilt $G(\vec{v}) = F_B(F_A(\vec{v})) = F_B(\vec{0}) = \vec{0}$. Folglich ist $\vec{v} \in Ker(G)$.
Sei nun $\vec{v} \in Ker(G)$. Dann gilt $\vec{0} = F_B(F_A\vec{v})$. Da F_B injektiv ist, muss dann auch gelten $F_A(\vec{v}) = \vec{0}$.
Folglich muss $\vec{v} \in KerF_A$ gelten.

b) Nach der Dimensionsformel gilt:

$$n = \dim F_A(K^n) + \dim Ker(F_A), \quad n = \dim G(K^n) + \dim Ker(G).$$

Da wir nun $\dim Ker(F_A) = \dim Ker(G)$ haben, gilt nach den Dimensionsformeln

$$\dim F_A(K^n) = \dim G(K^n).$$

Aufgabe $\boxed{}$

Aufgabe $\boxed{}$

Aufgabe $\boxed{}$