VORDIPLOMS-KLAUSUR ZUR QUANTENMECHANIK I

A. Buras, B. Borasoy, T.R. Hemmert 8.3.2004

- **Schreiben Sie bitte Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes von Ihnen verwendete Blatt Papier.**
- **Erschrecken Sie bitte nicht über die große Anzahl von Aufgaben. Auch für eine 1,0 wird nicht erwartet, daß Sie alle Aufgaben in der vorgegebenen Zeit bearbeiten können. 25 Punkte genügen zum Bestehen der Klausur.**
- **Bitte beginnen Sie für jede der 10 Aufgaben eine neue Seite.**
- **Es stehen 90 Minuten zur Bearbeitung der 10 Aufgaben zur Verfügung.**

Wir wünschen viel Erfolg !

Aufgabe 1. (2P)

Die Größen L_i, $i = 1, 2, 3$ bezeichnen die Komponenten des Drehimpulsoperators. Berechnen Sie die Kommutatoren $[L_i, x_j]$ und $[L_i, x^2]$, wobei $x^2 = \sum_k x_k x_k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Führen Sie diese Rechnung unter Verwendung der Darstellung

$$L_i = \sum_{k,l} \epsilon_{ikl}\, x_k\, p_l$$

durch. ϵ_{ijk} bezeichnet den vollständig antisymmetrischen ϵ-Tensor, dessen Indices i, j, k jeweils die Werte $1 - 3$ annehmen können.

Aufgabe 2. (7P)

a) Berechnen Sie für einen zeitunabhängigen Operator A in der Schrödingerdarstellung die zeitliche Ableitung des Erwartungswertes $\frac{d}{dt}\langle A\rangle_\psi$. (2P)

b) Es sei nun der Operator $H = \frac{1}{2m}p^2 + V(x)$ gegeben. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}\langle x\rangle_\psi$ und $\frac{d}{dt}\langle p\rangle_\psi$. (2P)

c) Stellen Sie mit Hilfe von b) eine Differentialgleichung für $\langle x\rangle_\psi$ auf und finden Sie die allgemeinste Lösung. Wie lautet das klassische Analogon der Differentialgleichung? (3P)

Aufgabe 3. (4P)

Die Bewegung eines Teilchens mit Masse μ sei beschrieben durch den Hamiltonoperator $H = \frac{1}{2\mu}p^2 + V(x)$ mit diskreten Eigenzuständen $|n\rangle$, $|m\rangle$. Beweisen Sie die folgenden Identitäten:

a) $\langle n|x^2|n\rangle = \sum_m |\langle m|x|n\rangle|^2$. (1P)

b) $\langle n|p^2|n\rangle = \sum_m |\langle m|p|n\rangle|^2$. (1P)

c) $\langle n|p^2|n\rangle = \frac{\mu^2}{\hbar^2}\sum_m (E_m - E_n)^2 |\langle m|x|n\rangle|^2$. (2P)

Aufgabe 4. (3P)

Es seien drei Operatoren σ_i, $i = 1, 2, 3$, gegeben, die den Kommutatorrelationen $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ genügen. Weiterhin gelte $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = id$, mit id = Einheitsoperator. Zeigen Sie, daß für den Antikommutator dieser Operatoren gilt:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 0 \quad \text{mit} \quad i \neq j \ .$$

Führen Sie diesen Beweis aus, **ohne** eine explizite Darstellung der Operatoren σ_i zu verwenden.

Aufgabe 5. (6P)

Gegeben seien zwei gekoppelte Spin-1/2 Teilchen im Ruhezustand mit dazugehörigen Spinoperatoren $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$.

a) Welches sind die möglichen Werte für den Gesamtspin und die z-Komponenten des Gesamtspins? Geben Sie auch die entsprechenden Eigenfunktionen an. (3P)

b) Der Hamiltonoperator sei $H = \lambda \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ (Hinweis: Es liegt **kein** kinetischer Term vor!). Berechnen Sie die Energieeigenwerte. (2P)

c) Welches ist der *niedrigste* Energieeigenwert für $\lambda > 0$? (1P)

Aufgabe 6. (4P)

Sei L_1 die erste Komponente des Drehimpulsoperators $\vec{L}$. Berechnen sie die Streuung

$$(\Delta L_1)^2 = \langle lm|(L_1 - \langle L_1\rangle_{lm})^2|lm\rangle,$$

wobei $|lm\rangle$ eine Eigenfunktion von $\vec{L}^2$ und L_3 ist mit $\vec{L}^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$ und $L_3|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle$. $\langle L_1\rangle_{lm}$ ist der Erwartungswert des Operators L_1 im Zustand $|lm\rangle$.

Aufgabe 7. (6P)

Der Hamiltonoperator zweier gekoppelter harmonischer Oszillatoren sei gegeben durch

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x_1^2 + x_2^2) + c(x_1 - x_2)^2.$$

a) Es gelte zunächst $c = 0$. Geben Sie für diesen Fall die Energieniveaus an. (1P)

b) Berechnen Sie nun die **exakten** Energieniveaus für allgemeines c.
(Hinweis: Finden Sie Koordinaten, in denen die zwei Oszillatoren entkoppeln.) (5P)

Aufgabe 8. (8P)

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im Grundzustand.

a) Berechnen Sie die Erwartungswerte der potentiellen und der kinetischen Energie für diesen Zustand. (4P)

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das Elektron weiter vom Kern entfernt aufhält, als dies nach der klassischen Physik möglich wäre.
(Hinweis: Definieren Sie zuerst, in welchem Bereich sich ein klassisches Elektron aufhalten kann, wenn man zur Vereinfachung von einer kreisförmigen klassischen Bahn ausgeht.) (4P)

Aufgabe 9. (4P)

Finden Sie einen Richtungsvektor $\hat{n}$, bezüglich dem Sie die Eigenwerte des Operators

$$H = A\,\vec{L}^2 + B\,L_3 + C\,L_1 - D\,L_2$$

bestimmen können. Der Vektor L_i, $i = 1, 2, 3$ entspricht hier dem Drehimpulsoperator und A, B, C, D bezeichnen Konstanten. Geben Sie die Eigenwerte explizit an.

Aufgabe 10. (8P)

Ein Teilchen mit Spin 1 befindet sich in einem Eigenzustand des Hamiltonoperators

$$H_0 = B\,S_Z$$

a) Berechnen Sie die Energieverschiebungen und die resultierenden Gesamtenergien zu *erster Ordnung in Störungsrechnung* auf Grund des Störpotentials

$$V = \lambda\,S_x^2.$$

Die S_i bezeichnen die Spin-Operatoren für ein Teilchen mit Spin 1. $\lambda \ll 1$ und B seien konstant. (4P)

b) Berechnen Sie nun die dazugehörigen Korrekturen der Zustände in erster Ordnung Störungsrechnung. (4P)