....
Note

Name

Vorname

Matrikelnummer

Studiengang (Hauptfach)

Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

4. August 2009, 09:00 – 10:30 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **74 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Stetigkeit, Differenzierbarkeit** **(7 Punkte)**
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq 0, \\ 0, & (x,y) = 0. \end{cases}$$

(a) Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt nicht stetig ist.
Hinweis: Bestimmen Sie x_n, so dass $f(x_n, y_n)$ für $y_n = \frac{1}{n}$ konstant ist.

(b) Die partielle Ableitung $\partial_1 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(c) Die partielle Ableitung $\partial_2 f(0,0)$ ist

☐ -1 ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ nicht definiert.

(d) Wie lautet die totale Ableitung von f im Nullpunkt?

☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $Df(0)$ ist nicht definiert ☐ $Df(0)$ hängt von der betrachteten Kurve ab

2. **Gradient** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die skalare Funktion $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{1}{|x|^2}$ und die Kurve $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x(t) = \binom{e^t}{e^{-t}}$.

(a) Berechnen Sie den Gradient von F.

grad $F(x) =$

(b) Wie lautet die Geschwindigkeit von $x(t)$ zum Zeitpunkt $t = 2$?

$\dot{x}(2) =$

(c) Die Funktion $F \circ x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in einer Umgebung des Punktes $t = 2$

☐ streng monoton steigend,

☐ streng monoton fallend,

☐ weder monoton steigend noch monoton fallend.

3. **Differentialgleichungssystem** **(10 Punkte)**

Gegeben ist das Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)\,.$$

(a) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{x}(t) = A\,x(t)$ mit einer 2×2-Matrix A und der vektorwertigen Funktion $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$:

(b) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $\dot{x} = Ax$?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

(c) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = A\,x\,,\ x(0) = v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle: Die Matrix A hat die beiden Eigenwerte 0 und 2.

4. **Taylor-Formel** **(10 Punkte)**

Gegeben sei eine Funktion $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$, die im Ursprung einen kritischen Punkt besitzt. Weiter gilt

$$g(0) = 5, \quad \partial_1^2 g(0) = \partial_1 \partial_2 g(0) = 1, \quad \partial_2^2 g(0) = 0.$$

(a) Wie lautet explizit die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von g im Entwicklungspunkt $0 \in \mathbb{R}^2$?

$g(x, y) =$ $+R_3(x, y)$

(b) Für welche $k \in \mathbb{N}_0$ kann man $\lim\limits_{(x,y)\to 0} \frac{R_3(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}^k} = 0$ folgern?

☐ $k = 0$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = 2$ ☐ $k = 3$ ☐ $k = 4$ ☐ $k = 5$

(c) Sei nun $f(x, y) = (-y, x + y)$. Wie lautet die Taylorentwicklung bis zur zweiten Ordnung von $h = g \circ f$ im Entwicklungspunkt 0 explizit?

$h(x, y) =$ $+R_3'(x, y)$

5. **Extremalstellen** **(12 Punkte)**

Sei $f(x,y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$, $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen und klassifizieren Sie die kritischen Punkte von f.

(b) Bestimmen und klassifizieren Sie die lokalen Extrema von f entlang der Kurve $\gamma : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^{1/3}, t^{1/2})$.

6. **Implizit definierte Funktionen** **(8 Punkte)**
Seien $f_1(t,x,y) = \log x + y^2 t - 4$, $f_2(t,x,y) = x^2 + yt^2 + t^2$ für $t,x,y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, und $P = (1,1,-2)$. Es gilt $f_1(P) = f_2(P) = 0$.

(a) Die Gleichung $f_1(t,x,y) = 0$ kann offenbar in einer Umgebung des Punktes P lokal nach y aufgelöst werden. Man erhält die Funktion $(t,x) \mapsto \tilde{y}(t,x)$. Berechnen Sie $\operatorname{grad} \tilde{y}(1,1)$.

$\partial_t \tilde{y}(1,1) =$	$\partial_x \tilde{y}(1,1) =$

(b) Der Punkt P ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$f_1(t,x,y) = 0,$$
$$f_2(t,x,y) = 0.$$

Dieses soll in einer Umgebung von P lokal nach x und y aufgelöst werden. Die Invertierbarkeit welcher Matrix muss dazu überprüft werden?

$M =$

7. **Vektoranalysis** **(9 Punkte)**

Sei $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld mit $v(x) = \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, 0\right)$.

(a) Berechnen Sie:

$\operatorname{rot} v(x) =$

(b) Es gilt:

- ☐ der Definitionsbereich von v ist sternförmig
- ☐ v ist konservativ
- ☐ v ist nicht konservativ
- ☐ v besitzt ein Potential
- ☐ v besitzt kein Potential

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma v(x) \cdot dx$ von v entlang der Kurve

$$\gamma : [0,1] \ni t \mapsto (1-t, 2t, \tanh t) \in \mathbb{R}^3.$$

8. **Schwerpunkt der Halbkugel** **(10 Punkte)**

Sei $H := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1, x_3 \geq 0\}$. Gesucht sind Volumen V und Schwerpunktkoordinaten $S = (S_1, S_2, S_3)$ der Halbkugel H.

(a)

$V =$	$S_1 =$	$S_2 =$

(b) Berechnen Sie S_3 mit Hilfe von Kugelkoordinaten.