................
Note

| | |
|---|---|
| Name | Vorname |

| | | |
|---|---|---|
| Matrikelnummer | Studiengang (Hauptfach) | Fachrichtung (Nebenfach) |

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

Gruppe A

| | I | II |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| $\sum$ | | |

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

# Semestrale
# HÖHERE MATHEMATIK II
## Analysis 1 für Physiker, Prof. Dr. H. Spohn

14. Februar 2005, 12:15 – 13:45 Uhr

Hörsaal: ............. Reihe: ............. Platz: .............

## Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **9 Aufgaben**

Bearbeitungszeit: 90 min.

Erlaubte Hilfsmittel: zwei selbsterstellte DIN A4 Blätter

## Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von ........ bis ........

Vorzeitig abgegeben um ........

Besondere Bemerkungen:

I ................
Erstkorrektur

II ................
Zweitkorrektur

**Aufgabe 1. Definitionen (Multiple Choice)** [ca. 4 Punkte]

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an (es können auch mehrere Antworten richtig sein; Punkte gibt es nur, wenn innerhalb einer Teilaufgabe alles richtig markiert ist).

a) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu: “$M \subseteq \mathbb{R}$ *ist nach oben unbeschränkt.*”?

☒ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in M : y > x$ ☐ $\forall x \in M\ \exists y \in \mathbb{R} : y < x$ ☒ $\neg\, \exists x \in \mathbb{R}\, \forall\, y \in M : x \geq y$

b) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu: “$M \subseteq \mathbb{R}$ *ist abgeschlossen.*”?

☒ $\mathbb{R} \setminus M$ ist offen ☐ $M \subseteq \overline{M}$ ☒ $M = \overline{M}$ ☐ $M$ ist kompakt und beschränkt

c) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu: “$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist differenzierbar im Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}$.”?

☒ $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

☒ $f$ ist stetig im Punkt $x_0$ und $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existiert

☐ Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, s.d. für $\phi(\epsilon) = f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) - c\epsilon$ gilt, dass $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \phi(\epsilon) = 0$.

d) Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zu: “*Die Funktionenfolge* $f_n \in C([a,b],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, *konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion* $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.”?

☐ $\forall\, x \in [a,b] : \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

☒ $\forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall x \in [a,b]\ \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

☐ $\forall\, x \in [a,b]\ \forall\, \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

☒ $\sup\limits_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$

**Aufgabe 2. Konvergenz (Multiple Choice)** [ca. 5 Punkte]

a) Welchen Wert besitzt die folgende Reihe?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$$

☐ $\frac{5}{4}$ ☐ $\frac{7}{8}$ ☒ $\frac{5}{6}$ ☐ $\frac{11}{12}$ ☐ $\frac{13}{6}$

b) Wo liegt der Grenzwert der Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log(n+5)}$ ?

☐ $=-\infty$ ☒ $\in(-\infty,0)$ ☐ $=0$ ☐ $\in(0,\infty)$ ☐ $=+\infty$ ☐ undefiniert

c) Wie gross ist der Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n}\,x^n$$

☐ $0$ ☒ $1$ ☐ $e$ ☐ $\frac{1}{e}$ ☐ $\infty$

d) Für welche $z\in\mathbb{C}$ konvergiert die folgende Reihe absolut?

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2 z}$$

☐ $\operatorname{Im} z>0$ ☒ $\operatorname{Re} z>0$ ☐ $|z|<1$ ☐ $\operatorname{Im} z<0$ ☐ $\operatorname{Re} z\le 0$

e) Durch welchen Wert ist die Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}$ bei $x=0$ stetig fortsetzbar?

☐ $-1$ ☐ nicht stetig fortsetzbar ☒ $\frac{1}{2}$ ☐ $2$ ☐ $0$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}-1=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

b) konvergent nach Leibniz (alternierende, betragsmäßig streng monoton fallende Nullfolge), erster Term ($n=1$) negativ, also auch Grenzwert negativ.

c) $\displaystyle\limsup\left(\sqrt{(1+\tfrac{1}{n})^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{n})^{\frac{1}{2}}=1$. Kehrwert $1$ ist der Konvergenzradius.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2 z}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2\operatorname{Re} z}e^{-in^2\operatorname{Im} z}$. Absolut konvergent, genau dann wenn $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2\operatorname{Re} z}$ konvergent. $0<e^{-n^2\operatorname{Re} z}\le e^{-n\operatorname{Re} z}$ für $\operatorname{Re} z>0$ (konvergente Majorante), keine Nullfolge, falls $\operatorname{Re} z\le 0$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}\overset{\text{l'H.}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$.

**Aufgabe 3. Satz von Taylor** [ca. 3 Punkte]

Formulieren Sie den Satz von Taylor für eine Funktion $f \in C^{n+1}([-1,1],\mathbb{R})$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Für alle $x \in [-1,1]$ gilt

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + R_{n+1}(x)$$

Wobei der Fehlerterm gegeben ist durch

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x x^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Insbesondere ist $\lim_{x\to 0} x^{-n}R_{n+1}(x) = 0$.

*Alternative Restglieddarstellung:*
Für alle $x \in [-1,1]$ existiert ein $\xi \in [0,x]$ (bzw. $\in [x,0]$), so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi).$$

.

**Aufgabe 4. Parameterintegral** [ca. 5 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \int_0^1 dy \sqrt{1+x+y^3}$ auf $[0,1]$ stetig ist.

Wir geben zwei Lösungsmöglichkeiten an.

Erstens. [$\epsilon, \delta$-Stetigkeit]

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(x')\right| &\leq \int_0^1 dy \left|\sqrt{1+x+y^3} - \sqrt{1+x'+y^3}\right| \\
&= \int_0^1 dy \frac{\sqrt{1+x+y^3} + \sqrt{1+x'+y^3}}{\sqrt{1+x+y^3} + \sqrt{1+x'+y^3}} \left|\sqrt{1+x+y^3} - \sqrt{1+x'+y^3}\right| \\
&= \int_0^1 dy \frac{\left|1+x+y^3 - (1+x'+y^3)\right|}{\sqrt{1+x+y^3} + \sqrt{1+x'+y^3}} \\
&= \int_0^1 dy \frac{|x-x'|}{\sqrt{1+x+y^3} + \sqrt{1+x'+y^3}} \\
&\leq \frac{1}{2} \left|x - x'\right|
\end{aligned}$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(x')| < \epsilon$, sobald $|x - x'| < \delta$ (wähle z.Bsp. $\delta = 2\epsilon$).

Zweitens. [Folgenstetigkeit]
Wir benutzen den Satz von der dominierten Konvergenz. Da der Integrand auf $[0,1] \times [0,1]$ nach oben gleichmässig in $x$ durch die über den $y$-Bereich integrable Funktion $\sqrt{3}$ abgeschätzt werden kann, dürfen wir den Limes unter das Integral ziehen ($x_0 \in [0,1]$):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \int_0^1 dy \sqrt{1+x+y^3} = \int_0^1 dy \lim_{x\to x_0} \sqrt{1+x+y^3} = \int_0^1 dy \sqrt{1+x_0+y^3} = f(x_0)$$

Beim zweitletzten Gleichheitszeichen haben wir die Stetigkeit der Wurzelfunktion benutzt.

**Aufgabe 5. Taylorreihe** [ca. 4 Punkte]

Gegeben sei die Funktion $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Geben Sie die Koeffizienten $a_n$ der Taylorreihe für $\cosh x$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

b) Wie groß ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

a) Taylorkoeffizient für $x_0 = 0$: $\quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Es gilt $\quad \cosh' x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x \quad$ und $\quad \sinh' x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$

Mit $\quad \cosh 0 = 1\,, \quad \sinh 0 = 0 \quad$ folgt $\quad f^{(n)}(0) = 1$ für $n$ gerade , $\quad f^{(n)}(0) = 0$ für $n$ ungerade.

$$\Rightarrow \qquad a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2\,n!} = \begin{cases} 1/n! & , \; n \text{ gerade} \\ 0 & , \; n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Alternativ: $\quad \cosh x = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{(-x)^n}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$

b) $e^x$ und damit auch $e^{-x}$ haben Konvergenzradius $R = \infty$, also gilt auch für $\cosh x$: $\quad R = \infty$

Alternativ: $\quad \limsup |a_n|^{1/n} = 0,$ da $\; a_{2k+1} \equiv 0 \;$ und $\; |a_{2k}|^{\frac{1}{2k}} = \left|\dfrac{1}{(2k)!}\right|^{\frac{1}{2k}} \to 0\,, \; k \to \infty.$

$$\Rightarrow \qquad R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}} = \infty$$

**Aufgabe 6. Integration** [ca. 7 Punkte]

Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ c) $\displaystyle\int_0^1 x\log x\,dx$

a) $$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}} \le \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} = 2x^{1/2}\Big|_0^1 = 2 < \infty$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}} \le \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = -2x^{-1/2}\Big|_1^\infty = 2 < \infty$$

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ konvergiert.

Substitution: $y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad dx = 2y\,dy$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^\infty \frac{2\,dy}{1+y^2} = 2\arctan y\Big|_0^\infty = 2\Big(\frac{\pi}{2} - 0\Big) = \pi$$

da $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ (dies reicht auch für Konvergenz) [3 Punkte]

b) Für $x \in [0,1]$ ist $\sin x \le x$ und damit: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sin x} \ge \int_0^1 \frac{dx}{x} = \log x\Big|_0^1 = +\infty$ [1.5 Punkte]

c) Partielle Integration:

$$\int_0^1 x\log x\,dx = \frac{x^2}{2}\log x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \Big(\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_0^1 = \Big(0 - \frac{1}{4} - (0-0)\Big) = -\frac{1}{4}$$

da $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\,\log x = \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-1/x^2} = 0$ nach l'Hospital [2.5 Punkte]

**Aufgabe 7. Stetige Bilder** [ca. 3 Punkte]

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

b) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

c) Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, dann ist $f(M)$ beschränkt.

Begründen Sie Ihre Antworten.

a) nicht wahr. Gegenbeispiel $f : ]0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

b) nicht wahr. Gegenbeispiel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

c) wahr, Satz vom Maximum und Minimum.
(*Alternativ:* stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt, also auch beschränkt.)

**Aufgabe 8. Differentialgleichungen I** [ca. 5 Punkte]

Gegeben sei das inhomogene Differentialgleichungssystem für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + b(t) \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie den Propagator $e^{tA} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. [Zwischenergebnis: $e^{tA} = e^t \left(\begin{smallmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ]

b) Bestimmen Sie die Lösung $x(t)$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, indem Sie die folgende Formel aus der Vorlesung anwenden:

$$x(t) = e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds$$

a) Wir zerlegen die Matrix $A$ in die Summe eines Vielfachen der Identität plus einer nilpotenten Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1 \\ 0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} =: \mathbf{1} + B$$

Wir bemerken, dass $B^2 = 0$ ist. Da $[\mathbf{1}, B] = 0$, faktorisiert die Matrix-Exponentialfunktion $e^{tA}$:

$$e^{tA} = e^{t(\mathbf{1}+B)} = e^{t\mathbf{1}} e^{tB} = e^t e^{tB} = e^t(\mathbf{1} + tB) = e^t \begin{pmatrix} 1\,t \\ 0\,1 \end{pmatrix}$$

b) Wir benutzen die angegebene Formel:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{tA} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\, b(s)\, ds = 0 + \int_0^t e^{(t-s)} \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos s \\ 0 \end{pmatrix} ds \\ &= e^t \int_0^t e^{-s} \begin{pmatrix} \cos s \\ 0 \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

Wir integrieren zweimal partiell:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-s} \cos s\, ds &= \left[-e^{-s} \cos s\right]_0^t - \int_0^t e^{-s} \sin s\, ds = -e^{-t} \cos t + 1 - \left( \left[-e^{-s} \sin s\right]_0^t + \int_0^t e^{-s} \cos s\, ds \right) \\ &= -e^{-t} \cos t + 1 - (-e^{-t} \sin t) - \int_0^t e^{-s} \cos s\, ds \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir also:

$$x(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + \sin t - \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9. Differentialgleichungen II** [ca. 4 Punkte]

Gegeben sei das homogene Differentialgleichungssystem für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ des Systems, indem Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A$ berechnen.

charakteristisches Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-2)}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\,, \quad \lambda_2 = -1$

Eigenvektoren $v^{(1)}, v^{(2)} \in \mathbb{R}^2$:

$$(A - \lambda_1 \mathbf{1}) v^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 \mathbf{1}) v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung: $x(t) = c_1\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$