
Nachklausur zur Experimentalphysik 4

Prof. Dr. W. Henning, Prof. Dr. L. Fabbietti

Sommersemester 2012

27. September 2012

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 beidseitig handbeschriebenes oder computerbeschrieben DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Fourier-Transformierte der Ortswellenfunktion $\psi(x)$ ist die Impulswellenfunktion $\hat{\psi}(k)$:

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \quad (1)$$

Das heißt, das Absolutquadrat $|\hat{\psi}(k)|^2$ gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Impuls $p = \hbar k$ an.

- Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Impulses sich nicht ändert, wenn die Ortswellenfunktion entlang der x -Achse verschoben wird.
- Zeigen Sie, dass sich die Verteilung der Impulse vorzeicheninvertiert, wenn man die Ortswellenfunktion komplex-konjugiert. Was bedeutet dies physikalisch?
- Wie ändert sich die Impulsverteilung, wenn man die Ortswellenfunktion mit dem Phasenfaktor $e^{i\chi x}$ multipliziert?

Lösung

- (a) Zur Ortswellenfunktion $\psi(x)$ gehört die Impulswellenfunktion $\hat{\psi}(k)$

$$\hat{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x) \quad (2)$$

Wir betrachten nun eine neue Ortswellenfunktion $\phi(x)$, die aus der alten durch Verschiebung um Δx entlang der x -Achse hervorgeht, d.h.

$$\phi(x) = \psi(x - \Delta x) \quad (3)$$

Welche Impulswellenfunktion gehört zu ihr?

Antwort:

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi(x - \Delta x) \quad (4)$$

Substituiert man im Integral nun $x - \Delta x =: y$ also

$$x = y + \Delta x, \quad dx = dy \quad (5)$$

dann erhält man

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ik(y+\Delta x)} \psi(y) = e^{-ik\Delta x} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} \psi}_{=\hat{\psi}(k)} = e^{-ik\Delta x} \hat{\psi}(k) \quad (6)$$

[1]

Also:

$$\hat{\phi}(k) = e^{-ik\Delta x} \cdot \hat{\psi}(k) \quad (7)$$

Verschiebung der Ortswellenfunktion erzeugt also in der Impulswellenfunktion einen Phasenfaktor. Dieser fällt heraus, wenn man zur Impulsverteilung übergeht:

$$|\hat{\phi}(k)|^2 = |\hat{\psi}(k)|^2 \quad (8)$$

Die Impulsverteilung ändert sich also durch Verschieben im Ortsraum nicht. Das ist plausibel, da es sich ja bloß um denselben Zustand an einem andern Ort handelt. Wenn die Verschiebung keine starre Translation wäre, sondern die Ortswellenfunktion "verzerrt" würde, dann würde man natürlich auch andere Impulswahrscheinlichkeiten erhalten.

[1,5]

(b) Jetzt ist die neue Ortswellenfunktion das Komplex-Konjugierte der alten, d.h.

$$\phi(x) = \psi^*(x) \quad (9)$$

Zu ihr gehört die Impulswellenfunktion

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \psi^*(x) \quad (10)$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \psi(x) \right]^* = [\hat{\psi}(-k)]^* \quad (11)$$

[1]

Also

$$\hat{\phi}(k) = [\hat{\psi}(-k)]^* \quad (12)$$

Komplexe Konjugation der Ortswellenfunktion führt also zu einer komplex-konjugierten Impuls- wellenfunktion mit vorzeicheninvertiertem Argument. Für die Verteilung der Impulse bedeutet das

$$|\hat{\phi}(k)|^2 = |\hat{\psi}(-k)|^2 \quad (13)$$

Gab es zuvor beispielsweise einen Peak bei einem positiven Impuls k_0 , dann gibt es nun also einen Peak beim entsprechenden negativen Impuls $-k_0$. Physikalisch bedeutet dies, dass die komplexe Konjugation der Ortswellenfunktion einer Bewegungsumkehr entspricht. Die Ortswellenfunktion enthält eben Information nicht nur über den Ort, sondern auch über den augenblicklichen Bewegungszustand des Teilchens. Durch komplexe Konjugation wird an der Ortsverteilung nichts geändert, aber eben die momentane Bewegungsrichtung invertiert, d.h. alle Geschwindigkeiten bzw. Impulse umgekehrt.

[1,5]

- (c) Nun ist die neue Ortswellenfunktion die alte, bloß mit einem Phasenfaktor verziert:

$$\phi(x) = e^{i\chi x} \psi(x) \quad (14)$$

Also ist die zugehörige Impulswellenfunktion

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{i\chi x} \psi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k-\chi)x} \psi(x) = \hat{\psi}(k - \chi) \end{aligned}$$

Also:

$$\hat{\phi}(k) = \hat{\psi}(k - \chi) \quad (15)$$

[1]

und

$$|\hat{\phi}(k)|^2 = |\hat{\psi}(k - \chi)|^2 \quad (16)$$

Wenn die alte Impulsverteilung also einen Peak bei $k = 0$ hatte, dann hat die neue einen Peak bei $k = \chi$. D.h. das Wellenpaket als Ganzes hat durch die Multiplikation mit dem Phasenfaktor einen "Kick" bekommen, und bewegt sich jetzt mit der mittleren Geschwindigkeit $v = \frac{p_0}{m} = \frac{\hbar\chi}{m}$.

[1]

Aufgabe 2 (4 Punkte)

- (a) Der Strom $I = qf_{\text{rev}}$ wird durch eine sich im Kreis bewegende Ladung q der Frequenz f_{rev} verursacht. Ermitteln Sie den Strom, den ein Elektron auf der ersten Bohrschen Bahn hervorruft.
- (b) Das magnetische Moment einer Stromschleife ist IA , wobei A die Fläche der Schleife ist. Geben Sie das magnetische Moment des Elektrons an, das sich auf der ersten Bohrschen Bahn befindet. Dieses magnetische Moment wird *Bohrsches Magneton* genannt.

Lösung

- (a) Es ist

$$\begin{aligned} I &= qf_{\text{rev}} \\ &= e \frac{v}{2\pi r} \\ &= e \frac{(n\hbar/mr)}{2\pi r} = e \frac{n\hbar}{2\pi m r^2} \\ &= e \frac{n\hbar}{2\pi m (a_0 n^2 / Z)^2} = e \frac{Z^2 \hbar}{2\pi m a_0^2 n^3} = e \frac{2cR}{n^3} \\ &= \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}) 2 \cdot (3 \cdot 10^{17} \text{nm/s}) (1,097 \cdot 10^7 \text{m}^{-1})}{1^3} \\ &= 1,054 \cdot 10^{-3} \text{A} \end{aligned}$$

[2]

(b) Es ist hier

$$\begin{aligned}
\mu &= IA \\
&= I\pi a_0^2 \\
&= \left(\frac{emk^2 e^4}{2\pi\hbar^3} \right) \pi \left(\frac{\hbar^2}{mke^2} \right) \\
&= \frac{e\hbar}{2m} \\
&= \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{C})(1,055 \cdot 10^{-34} \text{Js})}{2(9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg})} \approx 9,28 \cdot 10^{-24} \text{A} \cdot \text{m}^2
\end{aligned}$$

[2]

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Betrachten Sie ein hypothetisches Wasserstoffatom, in dem das Elektron durch ein K^- -Teilchen ersetzt ist. Das K^- -Teilchen ist ein Partikel mit Spin 0 und deshalb ohne eigenes magnetisches Moment. Das einzige Magnetische Moment dieses Atoms stammt aus der Bahnbewegung des K^- -Teilchens. Dieses Atom wird in ein Magnetfeld mit $B_z = 1 \text{T}$ gesetzt.

- (a) Wie verhalten sich die Energielevel des 1s- und den 2p-Zustand?
- (b) In wieviele Linien spaltet sich die $2p \rightarrow 1s$ -Spektrallinie auf?
- (c) Was ist der normierte Abstand $\frac{\Delta\lambda}{\lambda}$ zwischen zwei benachbarten Spektrallinien?
(Hinweis: $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\lambda}{hc} \Delta E$)

Die Masse des K^- -Partikels ist $493,7 \text{MeV}/c^2$.

Lösung

- (a) Für den 1s-Zustand gilt $l = 0$, somit ist er unbeeinflusst durch das Magnetfeld. Für den 2p-Zustand gilt $l = 1$ und wird deshalb durch das Magnetfeld in drei Energielevel aufgespalten.

[1]

- (b) Die $2p \rightarrow 1s$ Spektrallinie spaltet sich durch das externe Magnetfeld in drei Linien auf.

[1]

- (c) $\mu = -\frac{g_L \mu_K L}{\hbar}$ mit $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_K}$, so dass

$$\mu_{kz} = -mg_l \mu_K = -(1)(1) \frac{e\hbar}{2m_k} = -\mu_B \frac{m_e}{m_k} \quad (17)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\Delta E &= \mu_B \frac{m_e}{m_k} B \\ &= 5,70 \cdot 10^{-5} \text{eV/T} \cdot \frac{0,511 \text{MeV}/c^2}{497,7 \text{MeV}/c^2} \cdot 1 \text{T} \\ &= 5,94 \cdot 10^{-8} \text{eV}\end{aligned}$$

[1]

Es gilt weiterhin $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\lambda}{hc} \Delta E$. Um λ für den $2p \rightarrow 1s$ Übergang zu bestimmen nutzen wir $\lambda = hc/\Delta E_k$ mit

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -13,6 \text{eV} \cdot \frac{m_k}{m_e} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 9,93 \cdot 10^3 \text{eV} \quad (18)$$

[1]

und

$$\lambda = \frac{1240 \text{eVnm}}{9,93 \cdot 10^3 \text{eV}} = 0,125 \text{nm} \quad (19)$$

Damit

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0,125 \text{nm}(5,94 \cdot 10^{-8} \text{eV})}{1240 \text{eVnm}} = 5,98 \cdot 10^{-12} \quad (20)$$

[1]

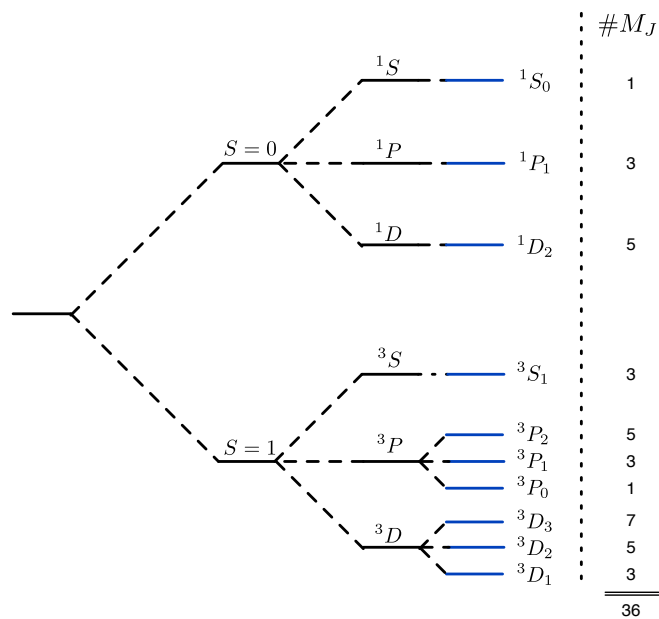
Aufgabe 4 (9 Punkte)

- Beschreiben Sie ein Zweielektronensystem bestehend aus zwei p-Elektronen (np und $n'p$, mit $n \neq n'$ verschiedene Hauptquantenzahlen) in LS-Kopplung. Skizzieren Sie dazu qualitativ die energetische Lage aller möglichen Terme und benennen Sie die Terme. Geben Sie die Zahl der möglichen magnetischen Unterzustände an!
- Geben Sie die Elektronenkonfigurationen von ${}_{14}\text{Si}$, ${}_{15}\text{P}$, ${}_{16}\text{S}$ im Grundzustand an! Skizzieren Sie dabei die Besetzung der Unterschalen. Geben Sie das Termsymbol für den Grundzustand an!
- Was unterscheidet die in Teilaufgabe 2 erhaltenen ${}_{14}\text{Si}$ Grundzustandskonfiguration von dem Ergebnis von Teilaufgabe 1.

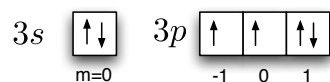
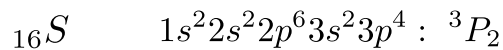
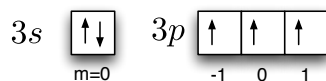
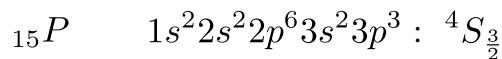
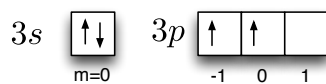
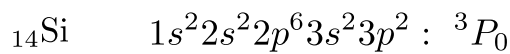
Lösung

- Unter LS-Kopplung koppeln die Spins der einzelnen Elektronen zu einem Gesamtspin $\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$ mit den möglichen Eigenwerten $|s_1 - s_2|, \dots, s_1 + s_2$. Analog koppeln die Bahndrehimpulse zu einem Gesamtbahndrehimpuls L , der die Eigenwerte $|l_1 - l_2|, \dots, l_1 + l_2$ annehmen kann. Der Gesamtdrehimpuls des Systems kann dann jeweils die Werte $|L - S|, \dots, L + S$ annehmen. Da $n \neq n'$ ist, können alle so entstehenden Ortswellenfunktionen symmetrische oder antisymmetrische Form annehmen, so dass wirklich alle Zustände angenommen werden können.

[4]



(b) In der Abbildung sind jeweils Elektronenkonfiguration, Schalenbesetzung in Pauli-Schreibweise und Termsymbol des Grundzustands für die drei gegebenen Atome dargestellt.



[3]

- (c) Nach dem Pauli-Prinzip muss die Gesamtwellenfunktion (hier als Produkt von Orts- und Spin-Wellenfunktionen) des Systems bzgl. Vertauschung der Elektronen antisymmetrisch sein. Da in Teilaufgabe 1 die Hauptquantenzahlen $n \neq n'$ unterschiedlich sind, kann die Ortswellenfunktion der beiden äußeren Elektronen stets in antisymmetrischer Form geschrieben werden. Insbesondere ist also auch die Konfiguration möglich, bei der beide Elektronen Spinquantenzahl $m_s = 1$ und trotzdem Magnetquantenzahl $m_l = 1$ haben, das heißt $L = 2$ (maximaler Spin und maximaler Bahndrehimpuls \rightarrow Grundzustand).

Dagegen kann diese Konfiguration unter der gleichen Hauptquantenzahl nicht angenommen werden, da sowohl die Ortswellenfunktion als auch die Spinwellenfunktion symmetrisch wären.

[1]

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die K_α -, L_α - und M_α -Röntgen-Spektrallinien werden bei den Übergängen $n = 2 \rightarrow n = 1$ bzw. $n = 3 \rightarrow n = 2$ bzw. $n = 4 \rightarrow n = 3$ emittiert. Für Calcium ($Z = 20$) sind die Energien dieser drei Übergänge 3,69keV bzw. 0,341keV bzw. 0,024keV.

Wir nehmen an, dass energiereiche Photonen ein Elektron aus der K-Schale von Calcium auslösen. Man berechne die Ionisationsenergien der drei Schalen, sowie die Energien von Auger Elektronen die aus der L-, M- und N-Schale ($n = 2, 3, 4$) austreten.

Lösung

Mit der Formel $E_n = -\frac{E_0 Z^2}{n^2}$ und $E_1 = -13,6\text{eV} \frac{20^2}{1^2} = -5440\text{keV}$ ergibt sich:

$$E_2 = E_1 + 3,69\text{keV} = -1,750\text{keV}$$

$$E_3 = E_2 + 0,341\text{keV} = -1,409\text{keV}$$

$$E_4 = E_3 + 0,024\text{keV} = -1,385\text{keV}$$

[2]

Dies sind die Ionisationsenergien für die einzelnen Energielevel. Die Energien der Auger-Elektronen aus den Schalen ist $\Delta E - |E_n|$ mit ($\Delta E = 3,69\text{keV}$).

$$E_L = 3,69\text{keV} - 1,750\text{keV} = 1,94\text{keV}$$

$$E_M = 3,69\text{keV} - 1,409\text{keV} = 2,28\text{keV}$$

$$E_N = 3,69\text{keV} - 1,385\text{keV} = 2,31\text{keV}$$

[2]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Die Hauptfrequenz für die Absorption von Licht durch HCl (Rotationsspektrum) liegt bei $f = 8,66 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$ und die Absorptionspeaks der anderen Rotationen unterscheiden sich jeweils um $\Delta f = 6 \cdot 10^6 \text{ Hz}$. Mit diesen Informationen, berechnen Sie

- (a) die Nullpunktsenergie für HCl.
- (b) das Trägheitsmoment von HCl.
- (c) den Abstand der Atome im Equilibrium.

Hinweis: $m_{\text{Cl}} = 35u$

Lösung

- (a) Mit der Gleichung $E_\nu = (\nu + 0,5)hf$ und $\nu = 0$ ergibt sich

$$E_0 = \frac{hf}{2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})(8,66 \cdot 10^{13} \text{ Hz})}{2} = 0,179 \text{ eV} \quad (21)$$

[1]

- (b) Für $l = \pm 1$ gilt $\Delta E_l = \frac{lh^2}{I} = lh\Delta f$, womit folgt, dass

$$I = \frac{h}{4\pi^2 \Delta f} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{4\pi^2 (6 \cdot 10^{11})} = 2,8 \cdot 10^{-47} \text{ kgm}^2 \quad (22)$$

[1,5]

- (c) Es ist $I = \mu r^2$, womit

$$\mu = \frac{m_{\text{H}} m_{\text{Cl}}}{m_{\text{H}} + m_{\text{Cl}}} = 0,973u \Rightarrow r = 0,132 \text{ nm} \quad (23)$$

[1,5]

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Ein Behälter enthält Wasserstoff (H_2) mit einem Druck von einer Atmosphäre bei einer Temperatur von 300K. Bei dieser Temperatur folgt Wasserstoff der Boltzmann-Verteilung. Wie weit muss das Wasserstoffgas heruntergekühlt werden, damit die Boltzmann-Verteilung nicht mehr angewandt werden darf und Quanteneffekte wichtig werden?

Hinweis: Setzen Sie die de Broglie-Wellenlänge, mit dem mittleren Abständen der Moleküle gleich, die Sie aus der idealen Gasgleichung erhalten. Kürzen Sie Potenzen per Hand falls Sie Taschenrechnerprobleme haben.

Lösung

Es ist

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\langle E \rangle}} = \frac{h}{\sqrt{2m\frac{3kT}{2}}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \quad (24)$$

[1]

Der Abstand zwischen zwei Molekülen kann aus der idealen Gasgleichung erhalten werden:

$$pV = nRT = nRT \frac{N_A}{N_A} = NkT \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{V}{N}} = \sqrt[3]{\frac{kT}{p}} \quad (25)$$

[1]

Dies gleichgesetzt mit der obigen Gleichung für λ gibt

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{kT}{P}} &= \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \\ \Leftrightarrow T &= \left(\frac{Ph^3}{k(3mk)^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{5}} \\ &= \left(\frac{(101\text{kPa})(6,63 \cdot 10^{-34}\text{Js})^3}{3(2 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg})(1,38 \cdot 10^{-23}\text{J/K})^{\frac{3}{2}}} \right)^{\frac{2}{5}} \\ &= 4,4\text{K} \end{aligned}$$

[2]

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N Teilchen mit nur zwei Energiezustände $E_0 = 0$ und $E_1 = \varepsilon$. Die Verteilungsfunktion dieses Systems ist $f_i = C e^{-\frac{E_i}{kT}}$.

(a) Berechnen Sie C ?

(b) Berechnen Sie die durchschnittliche Energie $\langle E \rangle$ und zeigen Sie, dass

$$\langle E \rangle \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 \quad (26)$$

und

$$\langle E \rangle \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{2} \quad (27)$$

(c) Zeigen Sie, dass die Wärmekapazität dieses Systems

$$C_V = Nk \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{(1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})^2} \quad (28)$$

ist.

Lösung

(a)

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^2 n_i \\
 &= f_0(E_0) + f_1(E_1) \\
 &= Ce^0 + Ce^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = C(1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}})
 \end{aligned}$$

$$\text{also } C = \frac{N}{1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}.$$

[1]

(b) Es ist

$$\langle E \rangle = \frac{0 \cdot n_0 + \varepsilon n_1}{N} = \frac{\varepsilon C e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{N} = \frac{N \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{(1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}) N} = \frac{\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \quad (29)$$

[1]

also gilt für die Grenzwerte:

Geht $T \rightarrow 0$, dann geht $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ gegen 0 und $1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ gegen 1, also geht $\langle E \rangle$ gegen 0. Geht $T \rightarrow \infty$, so geht $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$ gegen 1, also $\langle E \rangle \rightarrow \frac{\varepsilon}{2}$.

[1]

(c) Es wird einfach nachgerechnet.

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{dE}{dT} \\
 &= \frac{d(N\langle E \rangle)}{dT} \\
 &= \frac{d}{dT} \left(\frac{N \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \right) \\
 &= \frac{N \varepsilon^2}{kT^2} \left(\frac{-\left(e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)^2}{\left(1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)^2} + \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}} \right) \\
 &= Nk \left(\frac{\varepsilon}{kT} \right)^2 \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}}{\left(1 + e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}\right)^2}
 \end{aligned}$$

[2]