Zentrum Mathematik
Technische Universität
München
Prof. Dr. H. Spohn

SS 2001

Mathematik für Physiker III (Analysis 2)

Semestralklausur 23.7.2001

Aufgabe 1 :
Zeigen Sie, daß die Funktion

$$u = -y + F(x^2 + y^2, ze^{-x})$$

auf $\mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = x$$

erfüllt, wobei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ als differenzierbar vorausgesetzt wird.

Aufgabe 2 :
Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$x^3 - y^2 + z^2 - xz = 1$$

in einer Umgebung des Punktes $(1, 0, 1)$ eine eindeutig bestimmte implizite $\mathcal{C}^1$-Funktion $x = \varphi(y, z)$ definiert und berechnen Sie $\text{grad}\varphi(0, 1)$.
Bestimmen Sie weiter Normalenvektor und Tangentialebene der durch die Gleichung definierten Fläche im Punkt $(1, 0, 1)$.

Aufgabe 3 :
Zeigen Sie, daß die folgenden Flächen in jedem gemeinsamen Punkt aufeinander senkrecht stehen:

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : ax + by = 0\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = cz^2\}\,,\ c > 0.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 :
Bestimmen Sie die Extrema der Funktion

$$f(x,y,z) = 3x - 4z$$

unter der Nebenbedingung $x^2+y^2+z^2 = 1$. Bestimmen Sie die Art der Extrema.

Aufgabe 5 :
Berechnen Sie das folgende Integral

$$\int_D \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}\, dx\, dy\, dz$$

mit $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

Aufgabe 6 :
Berechnen Sie die Arbeit, die verrichtet wird, wenn man ein Teilchen in dem Kraftfeld

$$F(x,y,z) = (y, -x, 0)$$

entlang der Kurve

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$$

von Punkt $(1,0,0)$ nach Punkt $(1,0,4\pi)$ bewegt.

Aufgabe 7 :
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes

$$F(x,y,z) = (x, y^2, z)$$

durch die Fläche S, die durch folgende Parametrisierung gegeben ist:

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ uv \\ v^2 \end{pmatrix} \qquad 0 \leq u, v \leq 1.$$

Aufgabe 8 :
Bestimmen Sie für das Vektorfeld

$$f(x,y,z) = (\frac{y^2}{2} + yz, x(y+z), xy)$$

auf dem $\mathbb{R}^3$ ein Potential.

Bearbeitungszeit 90 min.