Prof. Dr. P. Rentrop, Dr. K.-D. Reinsch
Lehrstuhl M2 für Numerische Mathematik
Zentrum Mathematik, TU München

SoS 2007, 13.07.07
Semestralklausur

Höhere Mathematik III für Physik (Analysis 2)

Aufgabe 1 (ca. 4 P)

Man löse mittels Laplace-Transformation das Anfangswertproblem

$$y'(x) + 4\,y(x) = 3\,\mathrm{e}^{-4\,x} \quad , \quad y(0) = y_0\,,\, y_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 2 (ca. 6 P)

Man zeige, dass sich

$$f(x,y,z) := x^2 - y^2 + z^3 - x\,z - 1 = 0$$

in der Umgebung des Punktes $P := (1\,,0\,,1)$ als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $z = g(x,y)$ darstellen lässt.
Man berechne $\operatorname{grad} g(1,0)$ und bestimme Normalenvektor und Tangentialebene im Punkt P der durch die Gleichung $f(x,y,z) = 0$ definierten Fläche.

Aufgabe 3 (ca. 12 P)

Für die Funktion

$$z = f(x,y) := (x-y)\,\mathrm{e}^{1-x^2-y^2}\,, \quad (x,y) \in B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2+y^2 \le 1\right\}$$

ermittle man (mit Begründung!) alle **globalen** Maxima und Minima – jeweils nach Lage und Wert. ($\sqrt{2} \doteq 1.41$, $\mathrm{e} \doteq 2.72$, $\sqrt{\mathrm{e}} \doteq 1.65$)

Aufgabe 4 (ca. 4 P)

Zu den Messdaten (x_j, y_j) , $j = 1, \ldots, 4$ mit

x_j	0	1	2	3
y_j	3	1	2	3

bestimme man die Ausgleichsgerade $g(x) = m\,x + t$, d.h. $m\,,\,t \in \mathbb{R}$, so dass $\sum_{j=1}^{4} \big(g(x_j) - y_j\big)^2$ minimal ist.

Aufgabe 5 (ca. 4 P)

Für das Kraftfeld $\underline{\mathrm{K}}\,(\underline{\mathrm{x}}) := \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ berechne man die Arbeit $\int_C < \underline{\mathrm{K}}\,(\underline{\mathrm{x}})\,, d\underline{\mathrm{x}} >$

längs C: $\underline{\mathrm{s}}\,(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 6\pi$.

Aufgabe 6 (ca. 4 P)

Das Vektorfeld $\underline{\mathrm{V}}\,(\underline{\mathrm{x}}) := \begin{pmatrix} y\,z \\ \dfrac{z^2}{2} + x\,z \\ y\,(x+z) \end{pmatrix}$ besitzt auf dem $\mathbb{R}^3$ ein Potential. Man bestimme eines.

Aufgabe 7 (ca. 6 P)

Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = x\,y(x) + x\,\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\,, \quad y(0) = 1\,.$$

Arbeitszeit: 90 Minuten
Hilfsmittel: keine bis auf das ausgeteilte Beiblatt zur Laplace-Transformation.