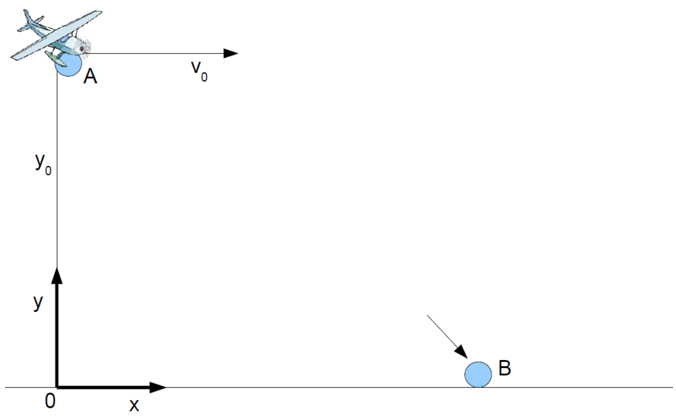
Probeklausur zur Experimentalphysik 1

Prof. Dr. M. Rief
Wintersemester 2010/2011
19. Januar 2011
Musterlösung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 500$ km/h in einer Höhe $y_0 = 3$ km und wirft zur Zeit $t = 0$ am Ort A eine Masse m ab, die zu Boden fällt (siehe Skizze). Luftreibung werde vernachlässigt.



a) Stellen Sie die Gleichung x(t) und y(t) für die Flugbahn der Masse auf. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege bei 0.

Lösung:

Die Masse m wird parallel zum Horizont abgeworfen, es handelt sich hier also um einen waagrechten Wurf. Da der Luftwiderstand vernachlässigbar ist und daher idealisierte Bedingungen herrschen, kann man für den Wurf das Superpositionsprinzip anwenden und die Bewegung in die $x-$Richtung und die Bewegung in die $y-$Richtung getrennt beobachten.

In die $x-$Richtung wirkt keine Kraft; $x(t)$ ist daher gegeben durch

$$x(t) = v_0 t \tag{1}$$

[**1**]

In die $y-$Richtung wirkt die Erdbeschleunigung g nach unten. Daher ist

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

[**1**]

b) Leiten Sie daraus die Bahnkurve y(x) her.

Lösung:

Die Bahnkurve $y(x)$ erhält man, indem man $x(t)$ nach t auflöst und die resultierende Gleichung in $y(t)$ einsetzt:

$$t = \frac{x}{v_0} \tag{3}$$

$$y(x) = y_0 - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \tag{4}$$

[**1**]

c) Wie groß ist die Gesamtgeschwindigkeit v_g der Masse kurz vor dem Aufschlag am Boden?

Lösung:

Die Gesamtgeschwindigkeit v_g setzt sich zusammen aus v_x und v_y:

$$v_x = v_0 \quad , \quad v_y = -gt \tag{5}$$

$$\rightarrow v_g = \sqrt{v_x^2 + g^2t^2} \tag{6}$$

Die Zeit t kurz vor dem Aufschlag kann aus Gleichung (2) berechnet werden:

$$y(t_A) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \ \rightarrow \ t_a = \sqrt{2\left(\frac{y_0}{g}\right)} \tag{7}$$

[**1**]

Dieses Ergebnis setzt man nun in Gleichung (6) ein und erhält:

$$v_g = \sqrt{(138.9\mathrm{m/s})^2 + 9.81\mathrm{m/s}^2 \cdot 2 \cdot 3000\mathrm{m}} = 279.6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1007\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{8}$$

[**1**]

d) Welche Strecke legt das Flugzeug zwischen Abwurf und Aufschlag der Masse bei B zurück?

Lösung:

Nach der Zeit t_A hat das Flugzeug die Strecke

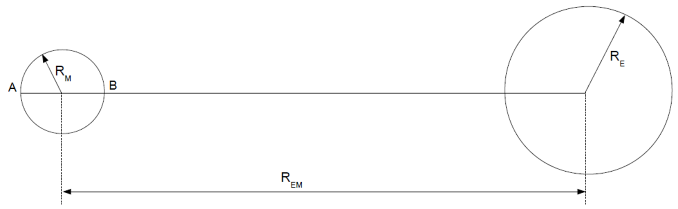
$$x(t_A) = v\sqrt{2\frac{y_0}{g}} = 138.9\mathrm{m/s}\sqrt{2\frac{3000\mathrm{m}}{9.81\mathrm{m/s}^2}} = 3.44\mathrm{km} \tag{9}$$

zurückgelegt.

[**1**]

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zum Bau einer Weltraumstation soll das Material vom Mond aus bereitgestellt werden. Für die Rechnung sollen nur Erde (Masse $M_E = 5.97 \times 10^{24}$ kg , Radius $R_E = 6380$ km) und Mond ($M_M = M_E/81$, $R_M = 0.272R_E$) berücksichtigt werden. Der Abstand der beiden Schwerpunkte beträgt $R_{EM} = 60.31R_E$. Die Gravitationskonstante beträgt $G = 6.67 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.



a) Vernachlässigen Sie zunächst den Einfluss der Erde. Mit welcher Geschwindigkeit v_1 muss ein Körper vom Punkt A abgeschossen werden, damit er das Schwerefeld des Mondes überwinden kann?

Lösung:

Damit ein Körper das Schwerefeld des Mondes überwinden kann, muss seine kinetische Energie gerade so groß sein wie die Gravitationsenergie des Mondes:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - G\frac{mM_M}{R_M} = 0 \tag{10}$$

[**1**]

Aufgelöst nach v_1 ergibt dies:

$$v_1 = \sqrt{2G\frac{M_M}{R_M}} = 2380\text{m/s} \tag{11}$$

[**1**]

b) Im folgenden soll zusätzlich das Schwerefeld der Erde berücksichtigt, die Rotation des Mondes um den gemeinsamen Schwerpunkt aber vernachlässigt werden. Der Körper wird vom Punkt B abgeschossen. Wie groß ist jetzt die Fluchtgeschwindigkeit v_2, damit der Körper das Schwerefeld des Mondes sowie das der Erde überwinden kann?

Lösung:

Damit beide Gravitationsfelder überwunden werden können, braucht man nun den Ansatz:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_M m}{R_M} - G\frac{M_E m}{R_{EM} - R_M} = 0 \tag{12}$$

[**1**]

Nach v_2 augelöst:

$$v_2 = \sqrt{2G\left(\frac{M_M}{R_M} + \frac{M_E}{R_{EM} - R_M}\right)} = v_1 \cdot 1.169 = 2783\text{m/s} \tag{13}$$

[**1**]

c) Nehmen Sie an, der Abschuss würde in Richtung der Verbindungslinie Mond-Erde von Punkt B erfolgen. Geben Sie das Potential $V(r)$ an, wobei r der Abstand vom Mondmittelpunkt ist ($V(r \to \infty) = 0$). In welchem Abstand vom Mond hat ein so abgeschossener Körper minimale kinetische Energie? Wie groß ist die Mindesgeschwindigkeit v_3 mit welcher der Körper nicht auf den Mond zurückfällt?

Lösung:

Das Potential zwischen Mond und Erde ist gegeben durch

$$V(r) = -G\left(\frac{M_M}{r} + \frac{M_E}{R_{EM} - r}\right) \tag{14}$$

[**1**]

Der Körper hat minimiale kinetische Energie bei r_0, d.h. wo das Potential ein Extremum hat:

$$\frac{dV}{dr} = 0 \tag{15}$$

[**1**]

$$\to \frac{M_M}{r_0^2} = \frac{M_E}{(R_{EM} - r_0)^2} \tag{16}$$

[**1**]

$$\frac{R_{EM}}{r_0} - 1 = \sqrt{\frac{M_E}{M_M}} \tag{17}$$

$$r_0 = R_{EM}\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{M_E}{M_M}}} = \frac{R_{EM}}{10} = 38500\text{km} \tag{18}$$

[**1**]

Die Mindestgeschwindigkeit v_3 ergibt sich dann im Abstand r_0:

$$\frac{1}{2}v_3^2 - G\left(\frac{M_M}{R_M} + \frac{M_E}{R_{EM} - R_M}\right) = -G\left(\frac{M_M}{r_0} + \frac{M_E}{R_{EM} - r_0}\right) \tag{19}$$

[**1**]

Nach v_3 aufgelöst:

$$v_3^2 = 2G\left\{\frac{M_M}{R_M}\left(1+\frac{M_E}{M_M}\frac{R_M}{R_{EM}-R_M}-\frac{R_M}{r_0}-\frac{M_E}{M_M}\frac{R_M}{R_{EM}-r_0}\right)\right\} \tag{20}$$

$$v_3^2 = v_1^2 \cdot 0.916 \tag{21}$$

$$\rightarrow v_3 = 2278\text{m/s} \tag{22}$$

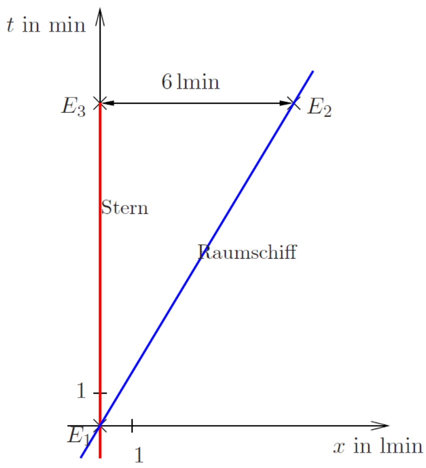
[**1**]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Ein Raumschiff fliegt mit 60% der Lichtgeschwindigkeit an einem Stern vorbei, der sich anschickt als Supernova zu explodieren. Nachdem das Raumschiff den Stern passiert und sich (vom Intertialsystem des Sterns betrachtet) 6 Lichtminuten von ihm entfernt hat, bricht die Supernova aus.

a) Zeichnen und beschriften Sie ein Minkowski-Diagramm, das die Situation bezüglich des Inertialsystems des Sterns darstellt. Im Nullpunkt des Diagrams soll sich dabei das Ereignis 'Das Raumschiff passiert den Stern' befinden.

Lösung:



- E_1: 'Das Raumschiff passiert den Stern'
- E_2: 'Das Raumschiff ist (im Inertialsystem des Sterns) 6 lmin vom Stern entfernt'
- E_3: 'Die Supernova bricht aus'

[**2**]

b) Welche Koordinaten hat der Supernovaausbruch im Inertialsystem des Sterns?

Lösung:

Die Ortskoordinate von E_3 im Inertialsystem des Sterns ist

$$x_3 = 0 \tag{23}$$

[**1**]

E_3 ist laut Angabe im Inertialsystem des Sterns gleichzeitig mit E_2. Da sich das Raumschiff mit $v = 0.6c$ bewegt, ist die Zeitkoordinate von E_2

$$t_2 = \frac{x_2}{v} = \frac{6\text{lmin}}{0.6c} = 10\text{min} \tag{24}$$

also

$$t_3 = 10\text{min} \tag{25}$$

[**1**]

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation, welche Zeit auf der Raumschiffsuhr zwischen dem Vorbeiflug am Stern und dessen Explosion verstreicht.

Lösung:

Gefragt ist nach der Zeitkoordinate von E_3 bezüglich dem bewegten System des Raumschiffs. Die Lorentz-Transformation

$$t_3' = \gamma \left(t_3 - \frac{v}{c^2} x_3 \right) \tag{26}$$

[**1**]

liefert mit den Koordinaten aus b):

$$t_3' = 1.25 \cdot (10\text{min} - 0) = 12.5\text{min} \tag{27}$$

[**1**]

d) In welcher Entfernung ereignet sich die Supernova vom Raumschiff aus betrachtet?

Lösung:

Gefragt ist nach der Ortskoordinate von E_3 bezüglich dem bewegten System des Raumschiffs. Die Lorentz-Transformation

$$x_3' = \gamma(x_3 - v t_3) = \gamma \left(x_3 - \frac{v}{c} c t_3 \right) \tag{28}$$

[**1**]

liefert mit den Koordinaten aus b)

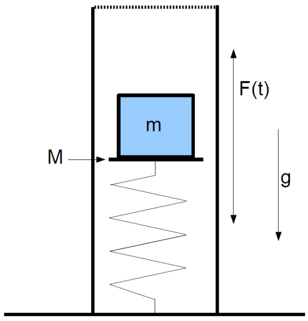
$$x_3' = 1.25 \cdot (0 - 0.6 \cdot 10\text{lmin}) = -7.5\text{min} \tag{29}$$

Die Entfernung ist also $|x_3'| = 7.5\text{lmin}$.

[**1**]

Aufgabe 4 (14 Punkte)

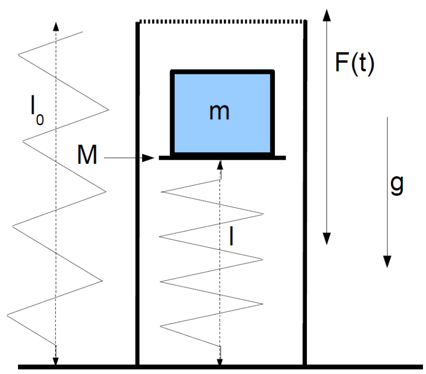
Eine als masselos zu betrachtende Feder der Ruhelänge $l_0 = 0.5$ m und der Federkonstante $k = 100$ N/m befindet sich aufrecht in einem Führungsrohr. Am Federende ist eine Waagschale (Masse $M = 0.1$ kg) befestigt, auf der sich ein Gewicht mit $m = 1$ kg befindet (siehe Skizze). Die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9.81$ m/s^2 Das System wird nun in Richtung der Schwerkraft durch eine periodische äußere Kraft F(t)=$F_m \cos(\omega t)$, $F_m = 10$ N zu erzwungenen Schwingungen angeregt.



a) Berechnen Sie zunächst die Ruhelage der Masse m. Wählen Sie dann die Ruhelage als Koordinatenursprung und stellen Sie die Bewegungsgleichung der Masse m für den Fall einer gedämpften Schwingung auf. Geben Sie die Lösung an und berechnen Sie die Eigenfrequenz ω_0.

Lösung:

Durch die Gewichtskraft von Masse m und M wird die Feder gedrückt bis zur neuen Ruhelage l (siehe Skizze).



Das Hookesche Gesetz ergibt dann

$$(m + M)g = k(l_0 - l) \tag{30}$$

[1]

Die Ruhelage der Masse m liegt dann bei

$$l = l_0 - \frac{(m+M)g}{k} \tag{31}$$

Mit den angegebenen numerischen Werten ergibt sich daraus

$$l = 0.392\text{m} \tag{32}$$

[**1**]

Wählt man diese Ruhelage als Koordinatenursprung, so fällt die Schwerkraft in der Schwingungsgleichung heraus.

[**1**]

b) Für den Fall einer gedämpften Schwingung ist die Bewegungsgleichung der Masse gegeben durch:

$$(m+M)\ddot{x} + (m+M)\beta\dot{x} + kx = F_m \cos(\omega t)$$

Bestimmen Sie die Eigenfrequenz der Masse ω_0 und zeigen Sie, dass $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ eine Lösung der Differentialgleichung darstellt, indem Sie A und B berechnen.

Lösung:

Die Eigenfrequenz des Systems findet man, indem man die angegebene Differentialgleichung mit $(m+M)\ddot{x} + kx = 0$ vergleicht. Daraus folgt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{(m+M)}} \tag{33}$$

Dies ergibt dann

$$\omega_0 = 9.531/\text{s} \tag{34}$$

[**1**]

Um zu zeigen, dass $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ eine Lösung für die Differentialgleichung darstellt, berechnet man zunächst die Ableitungen $\dot{x}$ und $\ddot{x}$, setzt diese dann in die Gleichung ein und löst nach A und B auf:

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \tag{35}$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t) - B\omega^2\cos(\omega t) \tag{36}$$

[**1**]

Sammelt man die Ausdrücke für Sinus und Cosinus zusammen, so erhält man zwei Gleichungen für die zwei Unbekannten A und B.
Alle $\sin(\omega t)$:

$$-A\omega^2 - B\omega\beta + A\omega_0^2 = 0 \tag{37}$$

Alle $\cos(\omega t)$:

$$-B\omega^2(m+M) + A\omega(m+M)\beta + B(m+M)\omega_0^2 = F_0 \tag{38}$$

[1]

Löst man Gleichung (37) nach A auf, so erhält man

$$A = \frac{B\omega\alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{39}$$

Dies kann nun in Gleichung (38) eingesetzt werden. Für B erhält man dann

$$B = \frac{F_0}{(m+M)} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \tag{40}$$

[1]

Und für A:

$$A = \frac{F_0}{(m+M)} \frac{\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2} \tag{41}$$

[1]

c) Berechnen Sie die jeweilige maximale Auslenkung der Masse m im Fall einer Dämpfung mit $\beta = 8\ s^{-1}$ bei einer Anregungsfrequenz $\omega = \omega_0$ und bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}}$.

Lösung:

Die Auslenkung der Masse ist gegeben durch

$$x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \tag{42}$$

Es gibt zwei mögliche Lösungswege:

(a) Die Auslenkung ist maximal, wenn die zeitliche Ableitung

$$\dot{x} = 0 \tag{43}$$

[1]

ist. Also:

$$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \tag{44}$$

[**1**]

Also ist

$$(\omega t)_{max} = \arctan\left(\frac{A}{B}\right) \tag{45}$$

[**1**]

Demnach:

$$x_{max} = A\sin(\omega t)_{max} + B\cos(\omega t)_{max} \tag{46}$$

[**1**]

(b) $x(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$ kann umgeschrieben werden in

$$x = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \phi) \tag{47}$$

[**1**]

Die Phase ist hier gegeben durch

$$\phi = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \tag{48}$$

[**1**]

Man sieht sofort, dass die Auslenkung maximal ist für

$$\sin(\omega t + \phi) = 1 \tag{49}$$

[**1**]

Also ist

$$x_{max} = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{(m+M)\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\beta\omega)^2}} \tag{50}$$

[**1**]

Mit $\beta = 8\text{s}^{-1}$ und $\omega_0 = 9.53\text{rad/s}$ folgt:

$$x_{max}(\omega = \omega_0) = 0.119\text{m} \tag{51}$$

[**1**]

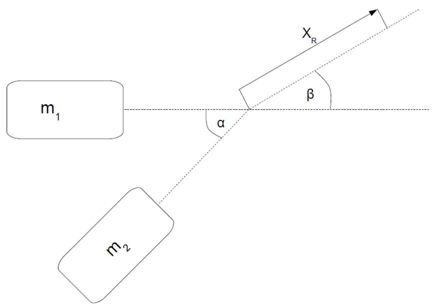
$$x_{max}(\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2/2}) = 0.131\text{m} \tag{52}$$

[1]

Die maximale Auslenkung ist also bei $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}}$ am größten und nicht bei der Eigenfrequenz!

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Zwei Autos (mit jeweiligen Massen m_1, m_2 und Geschwindigkeiten (v_1, v_2) stoßen unter einem Winkel α zusammen und rutschen ineinander verkeilt (ohne Rotation) nach dem Zusammenstoß mit blockierten Rädern eine Strecke X_R, bis sie zum Stillstand kommen; der Reibungskoeffizient beim Rutschen beträgt μ. Beide Autos werden als Massenpunkte aufgefasst.



In welche Richtung rutschen die Autos nach dem Zusammenstoß und wie lang ist die Rutschstrecke X_R?

Lösung:

Beide Autos rutschen nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit v_0. Nun lässt sich der Impulssatz in $x-$ und $y-$Richtung aufstellen. Im Moment des Aufpralls wirken in guter Näherung keine äußeren Kräfte; daher ist der Impuls vor dem Stoß gleich dem nach dem Stoß.

Impuls in $x-$Richtung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos(\alpha) = (m_1 + m_2) v_0 \cos(\beta) \tag{53}$$

[1]

Impuls in $y-$Richtung:

$$m_2 v_2 \sin(\alpha) = (m_1 + m_2) v_0 \sin(\beta) \tag{54}$$

[1]

Indem man die beiden Formeln dividiert erhält man für den gesuchten Winkel β:

$$\tan(\beta) = \frac{m_2 v_2 \sin(\alpha)}{m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos(\alpha)} \tag{55}$$

[1]

Zur Bestimmung der Rutschstrecke wird das zweite Newtonsche Gesetz in Rutschrichtung gebildet:

$$-\mu(m_1 + m_2) g = (m_1 + m_2) a \tag{56}$$

[**1**]

Für die Beschleunigung gilt also

$$a = -\mu g \tag{57}$$

[**1**]

Durch die Trennung von Variablen erhält man

$$\int_{v_0}^{0} v dv = \int_{0}^{X_R} -\mu g ds \tag{58}$$

[**1**]

und schließlich

$$X_R = \frac{v_0^2}{2\mu g} \tag{59}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Ein Stern der Masse $M = 3 \times 10^{30}$ kg und dem Radius $R = 8 \times 10^8$ m benötigt für eine Rotation $T = 22$ Tage. Der Stern kollabiert ohne Massenverlust zu einem Neutronenstern und benötigt nur noch 4 ms für eine Rotation. Die Massenverteilung in Stern und Neutronenstern sei jeweils homogen.

a) Wie groß sind Trägheitsmoment, Drehimpuls und Rotationsenergie des Sternes vor dem Kollaps?

Lösung:

Trägheitsmoment:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 = \frac{2}{5}(3 \times 10^{30})(8 \times 10^8)^2 = 7.68 \times 10^{47}\text{kgm}^2 \tag{60}$$

[1]

Um den Drehimpuls zu berechnen, wird die Kreisfrequenz des Sterns vor dem Kollaps benötigt:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{22 \times 86400\text{s}} = 3.31 \times 10^{-6}\text{s}^{-1} \tag{61}$$

$$L = I\omega = 7.68 \times 10^{47} \times 3.31 \times 10^{-6}\text{kgm}^2/\text{s} \tag{62}$$

[1]

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(7.68 \times 10^{47})(3.31 \times 10^{-6})^2 = 4.21 \times 10^{36}\text{J} \tag{63}$$

[1]

b) Bleibt bei dem Kollaps der Drehimpuls erhalten? Bleibt die Rotationsenergie erhalten?

Lösung:

Der Drehimpuls bleibt erhalten, da es sich um ein abgeschlossenes System handelt. Die Rotationsenergie hingegen nimmt zu, da $E_{rot} = \frac{1}{2}L\omega$; L bleibt konstant, aber ω nimmt zu.

[1]

c) Wie groß ist das Trägheitsmoment und die Rotationsenergie nach dem Kollaps? Woher kommt die zusätzliche Rotationsenergie?

Lösung:

Die Kreisfrequenz nach dem Kollaps beträgt:

$$\omega = \frac{2\pi}{4\text{ms}} = 1.57 \times 10^3 1/\text{s}^2 \tag{64}$$

Das Trägheitsmoment nach dem Kollaps lässt sich durch die Drehimpulserhaltung ermitteln:

$$L_{\text{Stern}} = L_{\text{Neutronenstern}} = I_{\text{Neutronenstern}} \omega_{\text{Neutronenstern}} \tag{65}$$

$$I_{\text{Neutronenstern}} = \frac{2.54 \times 10^{42}}{1.57 \times 10^3} = 1.62 \times 10^{39} \text{kgm}^2 \tag{66}$$

[**1**]

Die Rotationsenergie des Neutronensterns beträgt

$$E_{rot} = \frac{1}{2} L\omega = \frac{1}{2}(2.54 \times 10^{42})(1.57 \times 10^3) = 1.99 \times 10^{45} \text{J} \tag{67}$$

[**1**]

Die zusätzliche Rotationsenergie war vorher in Form von Gravitationsenergie gespeichert.

[**1**]

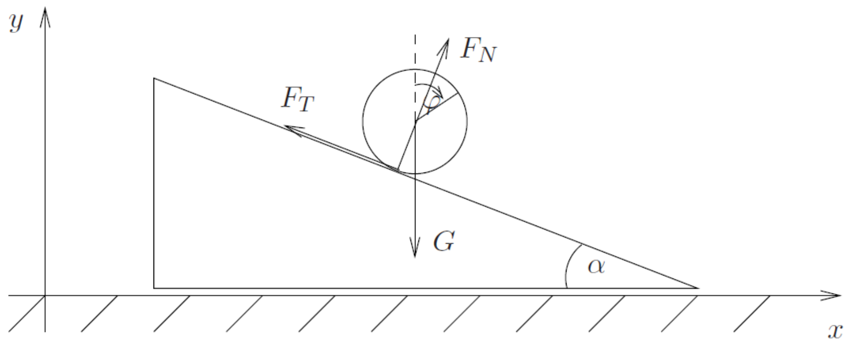
Aufgabe 7 (11 Punkte)

Auf einem Keil mit Masse M und Winkel α rollt ein homogener Zylinder mit Radius r, Masse m und Trägheitsmoment $I = \frac{1}{2}mr^2$ ohne zu rutschen. Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung des Zylinders für die folgenden Fälle:

a) Der Keil ist auf seiner Unterlage fixiert.

Lösung:

Wie in der folgenen Abbildung skizziert, wirken auf den abrollenden Zylinder zwei Kräfte: Seine Gewichtskraft $G = mg$, die man sich im Schwerpunkt angreifend denken kann, und die Kraft die vom Keil am Berührkpunkt auf den Zylinder ausgeübt wird und die wir hier bereits in ihre Normal- bzw. Tangentialkomponenten F_N bwz. F_T zerlegt haben.



Damit lassen sich die folgenden Bewegungsgleichungen für die Translation bzw. Rotation des Zylinders aufstellen:

$$m\ddot{x} = F_N \sin(\alpha) - F_T \cos(\alpha) \tag{68}$$

$$m\ddot{y} = -mg + F_N \cos(\alpha) + F_T \sin(\alpha) \tag{69}$$

$$I\ddot{\phi} = rF_T \tag{70}$$

[**1**]

Dabei sind x und y die Koordinaten des Schwerpunkts und ϕ wie in der Abbildung angedeutet der Winkel zwischen der Vertikalen und einer Markierung auf dem Zylinder. F_N und F_T sind die Beträge der Kräfte, die Vorzeichen in den Bewegungsgleichungen sind entsprechend korrekt gesetzt. Dies sind drei Gleichungen mit den fünf Unbekannten $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{\phi}$, F_N, F_T, es fehlen also noch zwei Gleichungen. Die fehlenden Gleichungen erhält man, wenn man die geometrische Bedingung berücksichtigt, dass sich der Zylinder ohne zu rutschen auf dem ruhenden Keil bewegen soll. Das bedeutet nämlich, dass die Schwerpunktskoordinaten x und y vom Drehwinkel ϕ abhängen per

$$x = x_0 + r\phi\cos(\alpha) \quad , \quad y = y_0 - r\phi\sin(\alpha) \tag{71}$$

[**1**]

Durch zweimaliges Ableiten folgt

$$\ddot{x} = r\ddot{\phi}\cos(\alpha) \quad , \quad \ddot{y} = -r\ddot{\phi}\sin(\alpha) \tag{72}$$

[1]

und damit hat man nun fünf Gleichungen für die fünf Unbekannten. Durch Einsetzen in die Gleichungen für die Schwerpunktsbewegung reduziert man dies auf drei Gleichungen mit drei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{c} mr\ddot{\phi}\cos(\alpha) = F_N\sin(\alpha) - F_T\cos(\alpha) \\ -mr\ddot{\phi}\sin(\alpha) = -mg + F_N\cos(\alpha) + F_T\sin(\alpha) \\ I\ddot{\phi}) = rF_T \end{array} \right| \tag{73}$$

[1]

Multiplikation der ersten Reihe mit $\cos(\alpha)$, der zweiten mit $\sin(\alpha)$ und anschließende Subtraktion ergibt:

$$\left| \begin{array}{c} mr\ddot{\phi} = mg\sin(\alpha) - F_T \\ I\ddot{\phi} = rF_T \end{array} \right| \tag{74}$$

[1]

und daraus

$$(mr + \frac{I}{r})\ddot{\phi} = mg\sin(\alpha) \tag{75}$$

Mit dem Trägheitsmoment des Zylinders $I = \frac{1}{2}mr^2$ wird dies schließlich zu:

$$\ddot{\phi} = \frac{2g\sin(\alpha)}{3r} \tag{76}$$

[1]

Bemerkung: Es ist sehr naheliegend, bei der Lösung diese Aufgabenteils den momentanten Berührpunkt zwischen Zylindern und Ebene als Drehpunkt anzusehen und das durch die Gewichtskraft erzeugte Drehmoment zu betrachten. Dann erhält man

$$(I + mr^2)\ddot{\phi} = mgr\sin(\alpha) \tag{77}$$

woraus sich genau das obige Resultat ergibt. Das ist jedoch eigentlich nicht korrekt, da die zugrundeliegende Gleichung $\dot{L} = D$ nur dann gilt, wenn der Bezugspunkt für den Drehimpuls und das Drehmoment unbeschleunigt ist - oder der Schwerpunkt ist. Dass hier trotzdem das richtige Ergebnis rauskommt, ist Zufall.

b) Der Keil wird mit der vorgegebenen Beschleunigung a über seine Unterlage gezogen.

Lösung:

Nun ist der Keil nicht in Ruhe, sondern wird von außen mit der Beschleunigung a horizontal bewegt. An den Bewegungsgleichungen für $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ und $\ddot{\phi}$ ändert sich nichts, bloß die geometrische Bedingung für das Rollen auf dem Keil sieht nun anders aus, nämlich

$$x = x_0 + \frac{1}{2}at^2 + r\phi\cos(\alpha) \quad , \quad y = y_0 - r\phi\sin(\alpha) \tag{78}$$

[1]

bzw. zweimal abgeleitet

$$\ddot{x} = a + r\ddot{\phi}\cos(\alpha) \quad , \quad \ddot{y} = -r\ddot{\phi}\sin(\alpha) \tag{79}$$

[1]

Einsetzen in die Gleichungen der Schwerpunktsbewegung ergibt

$$\left| \begin{array}{c} ma + mr\ddot{\phi}\cos(\alpha) = F_N\sin(\alpha) - F_T\cos(\alpha) \\ -mr\ddot{\phi}\sin(\alpha) = -mg + F_N\cos(\alpha) + F_T\sin(\alpha) \\ I\ddot{\phi} = rF_T \end{array} \right| \tag{80}$$

[1]

Wie in Teil a) hilft Multiplikation mit $\cos(\alpha)$ bzw. $\sin(\alpha)$ und anschließende Subtraktion weiter:

$$\left| \begin{array}{c} ma\cos(\alpha) + mr\ddot{\phi} = mg\sin(\alpha) - F_T \\ I\ddot{\phi} = rF_T \end{array} \right| \tag{81}$$

[1]

und daraus

$$(mr + \frac{I}{r})\ddot{\phi} = m(g\sin(\alpha) - a\cos(\alpha)) \tag{82}$$

Mit dem Trägheitsmoment des Zylinders $I = \frac{1}{2}mr^2$ folgt das Endergebnis:

$$\ddot{\phi} = \frac{2(g\sin(\alpha) - a\cos(\alpha))}{3r} \tag{83}$$

[1]