....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Fakultät für Mathematik

Klausur
Mathematik 4 für Physiker
(Analysis 3)

Prof. Dr. D. Castrigiano

18. Februar 2011, 08:30 – 10:00 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Erreichbare Gesamtpunktzahl: **80 Punkte**

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Teilaufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Σ		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Komplexe Wegintegrale** **[8 Punkte]**

Gegeben ist der geschlossene Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = 1 + \cos t + i \sin t.$$

Berechnen Sie (mit Begründung) $\int_\gamma f(z)dz$ für

(a) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$,

(b) $f(z) = \cos z$,

(c) $f(z) = \frac{z^7}{z^2-1}$.

2. **Residuen** **[12 Punkte]**

Sei $f(z) = \frac{z}{(e^z-1)^2}$.

(a) Zeigen Sie, dass f außer bei $2i\pi\mathbb{Z}$ keine weiteren Pole besitzt.

(b) Bestimmen Sie (mit Begründung) die Ordnung aller Pole von f.

(c) Berechnen Sie das Residuum von f bei $z = 0$.

(d) Welchen Konvergenzradius hat der Nebenteil der Laurent-Reihe von f um $z = 0$?

3. **Residuenkalkül** **[8 Punkte]**

Berechnen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx$ für $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. **σ-Subadditivität von Maßen** **[6 Punkte]**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für die Mengen $A_n, B_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, gelte $\mu(B_n \setminus A_n) = c_n$.
Man zeige für $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, dass gilt

$$\mu(B \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

5. **Bildmaß und Maß mit Dichte** **[8 Punkte]**

Gegeben ist die Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \to \overline{\mathbb{R}}$, $(x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^2)$ für $(x, y) \neq 0$ und $h(0) = -\infty$. $\mu = h(\lambda^2)$ sei das zugehörige Bildmass.

(a) Warum ist h messbar?

(b) Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

(c) Bestimmen Sie eine Dichte ρ, so dass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

6. **Lebesgue-Integrierbarkeit** **[8 Punkte]**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \frac{e^{-ix}}{x+i\eta}$, $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Begründen Sie, warum die Funktion f nicht Lebesgue-integrierbar ist.

(b) Wie ist $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx$ definiert?

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix}}{x+i\eta} dx :=$$

7. Fluss durch eine Oberfläche **[20 Punkte]**

Gegeben Sie die Menge $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$ und das Vektorfeld $F(x,y,z) = (-y, x, yz)$ mit $G(x,y,z) = \operatorname{rot} F(x,y,z) = (z, 0, 2)$.

(a) Bestimmen Sie den Fluss $g_{\partial B}$ von G durch den Rand von B.

(b) Bestimmen Sie den Fluss g_S von G durch das Flächenstück

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = z, 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$$

mit von der z-Achse wegzeigender Flächennormale.

(c) Berechnen Sie $f_\gamma := \int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\vec{x}$ für $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1), \quad t \in [0, 2\pi]$.

$f_\gamma =$

(d) Geben Sie den Fluss g_{K_1} von G durch das Flächenstück

$$K_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

an, wobei die Flächennormale vom Ursprung wegzeigt. HINWEIS: Spur γ = Rand K_1.

$g_{K_1} =$

(e) Geben Sie den Fluss g_{K_2} von G durch das Flächenstück

$$K_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \leq z, x^2+y^2+z^2 = 4\}$$

an, wobei die Flächennormale vom Ursprung wegzeigt.

$g_{K_2} =$

8. **Hilbertraum** **[10 Punkte]**

Sei (x_n) eine orthogonale Folge in einem Hilbertraum H, d.h. $\langle x_n, x_m \rangle = 0$ für $n \neq m$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Folge (x_n) konvergent, so ist ihr Grenzwert 0.

(b) Zeigen Sie: Ist (x_n) orthonormal, so ist (x_n) nicht konvergent.

(c) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine orthogonale Folge (x_n) an mit $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_n \to 0$.

(d) Gilt (a) in jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt?

☐ Ja ☐ Nein

(e) Gilt (b) in jedem Vektorraum V mit Skalarprodukt?

☐ Ja ☐ Nein