# Nachklausur zur Experimentalphysik 2

Prof. Dr. M. Rief

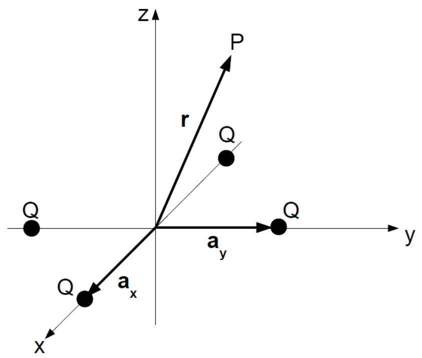
Sommersemester 2011

14. Oktober 2011

**Musterlösung**

## Aufgabe 1 (6 Punkte)

Vier positive Punktladungen gleicher Größe $Q$ sitzen in der Ebene $z = 0$ eines kartesischen Koordinatensystems auf den Ecken eines Quadrats, nämlich in den Punkten $\mathbf{a}_x$, $-\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_y$, $-\mathbf{a}_y$ mit $\mathbf{a}_x = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ (siehe Abbildung). Die Anordnung befindet sich im Vakuum, d.h. es sei überall $\epsilon = \epsilon_0$.




*a*) Geben Sie das Potential der Ladungsverteilung im Punkt $P$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$ an.

### Lösung:

Dem Superpositionsprinzip zufolge ist das elektrische Potential bei $P$ gegeben durch:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_x|} + \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}_x|} + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}_y|} + \frac{1}{|\mathbf{r}+\mathbf{a}_y|}\right) \tag{1}$$

**[1]**

*b*) Zeigen Sie, dass sich die Ladungsverteilung für große Abstände wie eine Punktladung verhält.

## Lösung:

Aus Gleichung (1) ergibt sich für $r >> a$:

$$\left|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}_{\substack{x\\y}}\right| \approx |\mathbf{r}| \tag{2}$$

[**1**]

und daher:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{4Q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{3}$$

Daher verhält sich die Ladungsverteilung für große Abstände wie eine Ladung $4Q$ im Ursprung.

[**1**]

*c*) Wie groß muss eine Ladung $q$ als Kompensation im Ursprung des Koordinatensystems relativ zu $Q$ sein, damit die Kräfte auf die Ladungen $Q$ verschwinden?

## Lösung:

Man kann zum Beispiel die Kraft auf die Ladung bei $\mathbf{a}_x$ berechnen. Aus Symmetriegründen verschwinden dann auch die Kräfte auf die anderen Ladungen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\underbrace{\frac{\mathbf{e}_x}{(2a)^2}}_{\text{von Ladung bei } -\mathbf{a}_x} + \frac{1}{(\sqrt{2}a)^2}\left(\underbrace{\left(\frac{\mathbf{e}_x}{\sqrt{2}} - \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{von Ladung bei } \mathbf{a}_y} + \underbrace{\left(\frac{\mathbf{e}_x}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\right)}_{\text{von Ladung bei } -\mathbf{a}_y}\right)\right) + \underbrace{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x}{a^2}}_{\text{von Ladung im Ursprung}} && (4)\\
&= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{e}_x}{a^2}\left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)Q + q\right) \stackrel{!}{=} 0 && (5)
\end{aligned}$$

[**1**]

Daraus folgt für die Ladung im Ursprung:

$$q = -Q\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -0.957Q \tag{6}$$

[**1**]

*d*) Bestimmen Sie das Potential auf der $z-$Achse als Funktion von $z$.

### Lösung:

Hier kann man das Ergebnis für $V(\mathbf{r})$ aus Teilaufgabe a) nutzen und

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \tag{7}$$

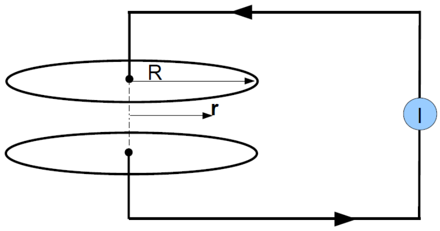
in Gleichung (1) einsetzen:

$$V(z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{4}{\sqrt{a^2+z^2}}\right) = \frac{Q}{\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}} \tag{8}$$

[**1**]

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein sehr großer Kondensator mit Radius $R$ und Plattenabstand $d$ wird langsam mit einem konstanten Strom $I$ geladen. Während der Kondensator geladen wird, erhöht sich das elektrische Feld zwischen den Platten als Funktion der Zeit. Wie in der Abbildung zu sehen ist, sei $r$ der Radialabstand von der Achse des Kondensators.




*a*) Zu einem bestimmten Zeitpunkt $t$ hat die Flächenladungsdichte den Wert $\sigma$.. Bestimmen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ zwischen den Platten zu diesem Zeitpunkt.

### Lösung:

Da der Kondensator keine Ladung in seinem Inneren trägt, befindet sich alle Ladung auf der Oberfläche. Das elektrische Feld zeigt also vertikal nach unten:

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{9}$$

[**1**]

*b*) Bestimmen Sie die Veränderung des E-Feldes zwischen Platten, $\frac{dE}{dt}$ in Abhängigkeit des Stromes $I$, Radius $R$ und Konstanten.

## Lösung:

Aus Gleichung (9) ist bekannt, dass

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{Q}{\pi R^2 \epsilon_0} \tag{10}$$

**[1]**

Also beträgt die Veränderung

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dQ/dt}{A\epsilon_0} = \frac{I}{\pi R^2 \epsilon_0} \tag{11}$$

**[1]**

*c*) Nahe dem Mittelpunkt der Platten ist das zeitlich variable elektrische Feld im Raum konstant. Bestimmen Sie das Magnetfeld $B(r)$ zwischen den Platten für $r < R$ als abhängig von $I$, $R$ und anderen Konstanten. Geben Sie die Größe und Richtung des Feldes an.

## Lösung:

Für $r < R$ kann das Amperesche Gesetz verwendet werden:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I, \tag{12}$$

**[1]**

wobei $I$ die Verschiebungsstromstärke bezeichnet und $d\mathbf{l}$ ein Teilstück der geschlossenen Kurve $S$ ist. Nun ergibt sich für $r < R$ durch das Gauß'sche Gesetz:

$$Q(t) = \epsilon_0 \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}(t), \tag{13}$$

**[1]**

wobei $\mathbf{S}$ die Gauß'sche Oberfläche bezeichnet. Im vorliegenden Fall (die Kondensatorplatten sind parallel und Randeffekte können ignoriert werden) ist dann also

$$I = \frac{dQ(t)}{dt} = \pi r^2 \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \pi r^2 \epsilon_0 \frac{I}{\pi R^2 \epsilon_0} = \frac{r^2 I}{R^2} \tag{14}$$

**[1]**

Außerdem ist

$$\mu_0 I = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B \tag{15}$$

**[1]**

Gleichsetzen ergibt also für $B$:

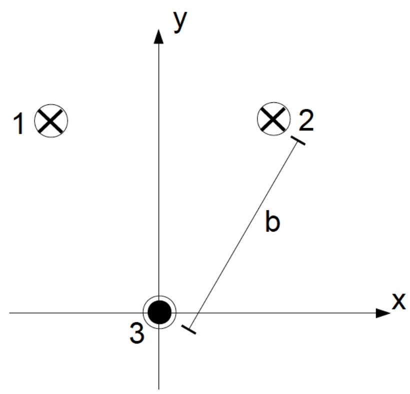
$$|B| = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad \text{für} \quad r < R \tag{16}$$

Von oben gesehen zeigt das Feld gegen den Uhrzeigersinn.

[**1**]

## Aufgabe 3 (6 Punkte)

Drei sehr lange Drähte sind wie in der Abbildung gezeigt in einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge $b$ angeordnet. Draht 1 und 2 tragen Strom in die Zeichenebene hinein während Draht 3 Strom aus der Zeichenebene hinaus leitet. Die Beträge der Ströme sind in allen drei Drähten gleich groß. Draht 3 befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems.




*a*) Bestimmen Sie das Magnetfeld **B** bei Draht 1, das durch die Ströme der beiden anderen Drähte hervorgerufen wird.

### Lösung:

Aus dem Ampereschen Gesetz ergibt sich für das Magnetfeld bei 1:

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \tag{17}$$

Also:

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \tag{18}$$

Daher ist das Magnetfeld durch 2:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\mathbf{e}_y \tag{19}$$

[**1**]

Durch 3:

$$\mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\cos(30°)\mathbf{e}_x - \sin(30°)\mathbf{e}_y\right) \tag{20}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x - \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{21}$$

[**1**]

Insgesamt haben wir also

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi b}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{22}$$

[**1**]

*b*) Berechnen Sie die Kraft pro Längeneinheit auf Draht 1.

## Lösung:

Die Kraft ist natürlich gegeben durch

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{23}$$

[**1**]

Also:

$$\mathbf{F}_2 = IlB_2\mathbf{e}_x \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{F}_2}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\mathbf{e}_x \tag{24}$$

Und:

$$\mathbf{F}_3 = Il \times \mathbf{B}_3 \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{F}_3}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(-\cos(60°)\mathbf{e}_x + \sin(60°)\mathbf{e}_y\right) = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{25}$$

[**1**]

Insgesamt:

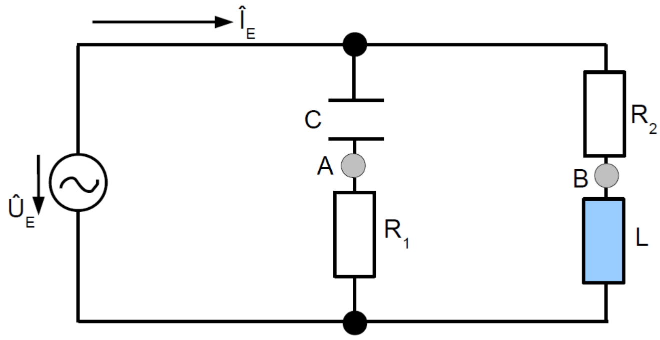
$$\frac{\mathbf{F}}{L} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi b}\left(\frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y\right) \tag{26}$$

[**1**]

## Aufgabe 4 (8 Punkte)

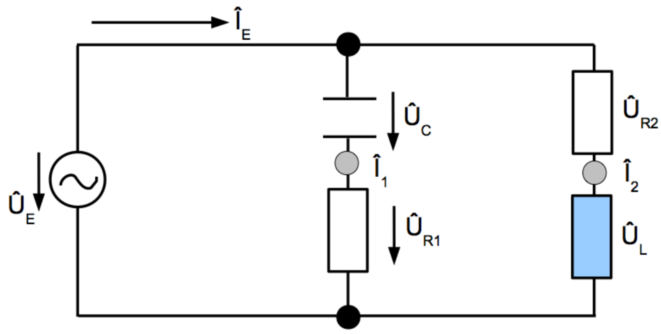
Gegeben ist die skizzierte Brückenschaltung, bestehend aus einer Kapazität $C$, einer Induktivität $L$ und zwei Widerständen $R_1$ und $R_2$. Die Schaltung werde von einer idealen Wechselspannungsquelle mit $\hat{U}_e$ und der Kreisfrequenz $\omega$ gespeist.

**Hinweis:** Rechnen Sie im Komplexen.




Leiten Sie eine Beziehung zwischen $R_1$, $R_2$, $L$ und $C$ her, für welche die Spannungsdifferenz zwischen den Punkten $A$ und $B$ Null wird.

## Lösung:




Aus den Kirchhoffschen Regeln ist bekannt, dass

$$\hat{U}_E = \hat{U}_C + \hat{U}_{R_1} = \hat{U}_{R_2} + \hat{U}_L \tag{27}$$

[**1**]

und

$$\hat{I}_E = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 \tag{28}$$

[**1**]

Damit $U_{AB} = 0$ muss gelten, dass

$$\hat{U}_C = \hat{U}_{R_2} \text{ bwz. } \hat{U}_{R_1} = \hat{U}_L \tag{29}$$

[**1**]

Die komplexe Spannung des Kondensators wird geschrieben als

$$\hat{U}_C = \frac{I_1}{j\omega C} \tag{30}$$

und die des ohmschen Widerstandes

$$\hat{U}_{R_1} = I_1 R_1 \tag{31}$$

[**1**]

Diese Ergebnisse können in Gleichung (27) eingesetzt werden:

$$\hat{I}_1 \left( \frac{1}{j\omega C} + R_1 \right) = \hat{U}_E \quad \rightarrow \quad \hat{I}_1 = \frac{\hat{U}_E}{\frac{1}{j\omega C} + R_1} \tag{32}$$

Eingesetzt in Gleichung (30) ergibt dies

$$\hat{U}_C = \frac{\hat{U}_E}{1 + jR_1\omega C} \tag{33}$$

[**1**]

Für die zweite Masche ist dann

$$\hat{U}_{R_2} = \hat{I}_2 R_2 \text{ und } \hat{U}_L = I_2 j\omega L \tag{34}$$

[**1**]

Also:

$$\hat{I}_2 = \frac{1}{j\omega L + R_2} \hat{U}_E \tag{35}$$

$$\hat{U}_{R_2} = \frac{1}{\frac{j\omega L}{R_2} + 1} \hat{U}_E \tag{36}$$

[**1**]

Nun werden Gleichungen (33) und (36) gleichgesetzt:

$$\hat{U}_{R_2} = \hat{U}_C \tag{37}$$

$$1 + jR_1\omega C = 1 + j\frac{\omega C}{R_2} \tag{38}$$

$$\rightarrow \quad R_1 R_2 = \frac{L}{C} \tag{39}$$

**[1]**

## Aufgabe 5 (8 Punkte)

Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle breitet sich im Vakuum in negativer $y-$Richtung aus. Das magnetische Feld $\mathbf{B}$ ist sinusförmig mit der Amplitude $B_0$ und ist in der $z-$Richtung ausgerichtet. Die Geschwindigkeit der Welle beträgt $c = \frac{\omega}{k}$. Bei $y = 0$, $t = 0$ ist $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, wobei $\mathbf{e}_z$ der Einheitsvektor in $z-$Richtung ist.

*a*) Bestimmen Sie die Vektoren **E** und **B**.

### Lösung:

Das Magnetfeld ist gegeben durch

$$\mathbf{B} = B_0 \cos(\omega t + ky)\mathbf{e}_z \tag{40}$$

**[1]**

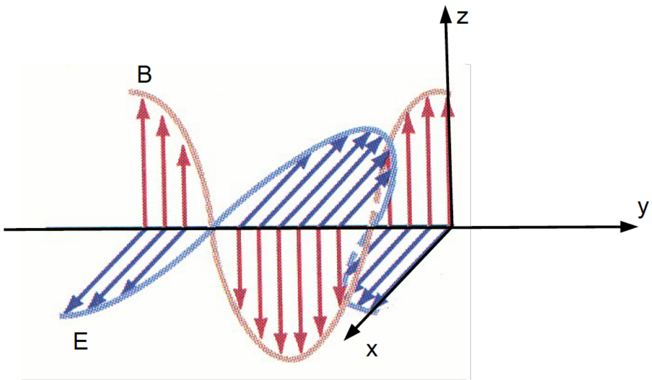
Das elektrische Feld:

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t + ky)\mathbf{e}_x \tag{41}$$

**[1]**

*b*) Skizzieren Sie eine Wellenlänge der elektrischen und magnetischen Welle im kartesischen Koordinatensystem. Zeichnen Sie wenigstens je ein Beispiel der $\mathbf{E}-$ und $\mathbf{B}-$Vektoren ein.

### Lösung:




**[2]**

*c*) Die Welle trifft auf eine komplett absorbierende glatte Oberfläche mit Fläche $A$, die senkrecht zur Fortbewegungsrichtung liegt. Ein Beobachter dieser Fläche misst die Energie $U$, die in einer Zeit $t = 10(2\pi/\omega)$ absorbiert wird. Bestimmen Sie $U$ als Funktion von $B_0$, $A$, $\omega$ und Konstanten.

### Lösung:

Der Poynting-Vektor ist definiert als

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{c}{\mu_0} B_0^2 \cos^2(\omega t + ky)(-\mathbf{e}_y) \tag{42}$$

**[1]**

Die momentane Leistung über die Fläche $A$ ist dann also

$$|P| = \left| \int \mathbf{S} d\mathbf{A} \right| = A\frac{c}{\mu_0} B^2 \cos^2(\omega t + ky) \tag{43}$$

**[1]**

Also ist die Energie $U$:

$$U = \int_0^{10\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} |P|\, dt = A\frac{c}{\mu_0 \omega} B^2 \int_0^{20\pi} \underbrace{cos^2(\omega t + ky) d(\omega t)}_{=\frac{1}{2}20\pi = 10\pi} = \frac{AcB^2}{\mu_0 \omega} 10\pi \tag{44}$$

**[2]**

## Aufgabe 6 (9 Punkte)

Gegeben sei ein beheizbares, nicht isoliertes Zimmer mit dem Volumen $75\text{m}^3$ und der Anfangstemperatur $14°\text{C}$. Die Heizung werde nun aufgedreht bis die Endtemperatur $20°\text{C}$ erreicht ist.

**Hinweis:** Betrachten Sie Luft näherungsweise als reinen Stickstoff $N_2$ und diesen als ideales Gas. Der Luftdruck soll 1013hPa betragen und sich durch das Heizen nicht verändern. Verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannten Gleichungen für die innere Energie eines idealen Gases sowie für die Wärmekapazität bei konstantem Druck.

*a*) Wie groß ist die in der Zimmerluft anfänglich enthaltene Energie?

### Lösung:

Für Stickstoff als 2atomiges ideales Gas gilt

$$U = \frac{5}{2}\nu RT \tag{45}$$

**[1]**

Hier ist nun die Molzahl $\nu$ unbekannt, sie wird mit Hilfe der idealen Gasgleichung bestimmt:

$$\nu = \frac{pV}{RT} \tag{46}$$

Setzt man diese ein, dann folgt

$$U = \frac{5}{2}pV = 19.0\text{MJ} \tag{47}$$

[**1**]

*b*) Wie groß ist die Energie der Zimmerluft nach Beendigung des Heizvorgangs? Begründen Sie Ihre Antwort.

## Lösung:

Aus der in a) hergeleiteten Gleichung

$$U = \frac{5}{2}pV \tag{48}$$

folgt, dass bei gegebenem Druck $p$ die in einem Volumen $V$ enthaltene Energie unabhängig von der Temperatur ist. D.h. die in der Luft des geheizten Zimmers enthaltende Energie ist genauso groß wie im ungeheizten Zimmer.

[**1**]

Das ist auf den ersten Blick erstaunlich, liegt aber einfach daran, dass wegen der Bedingung konstanten Luftdrucks im Zimmer (alles andere wäre ziemlich unrealistisch) die Luftmenge (in Mol) im Zimmer durch den Heizvorgang abnimmt, es entweicht Luft nach draußen. Dadurch wird genau die Zunahme der Energie durch die Aufheizung kompensiert, so dass die Energie im Zimmer insgesamt unverändert bleibt.

[**1**]

*c*) Welche Wärmeenergie hat die Heizung abgegeben?

## Lösung:

Natürlich kann man jetzt nicht die abgegeben Wärmeenergie der Heizung einfach dadurch berechnen, dass man die Energie der Zimmerluft vorher und nachher vergleicht. Das würde ja auf null führen, was offensichtlich Unsinn ist.

Es ist auch nicht richtig, gemäß

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\nu R\Delta T \tag{49}$$

(Zur Erinnerung: die Wärmekapazität des 2atomigen idealen Gases bei konstanem Druck ist $\frac{7}{2}\nu R$) die Wärmemenge zu berechen, die man bei konstantem Druck zum Aufheizen von $\nu$ Mol eines 2atomigen idealen Gases benötigt, denn $\nu$ ist ja nicht konstant: Es werden nicht alle $\nu$ Mol, die am Anfang im Zimmer waren, erwärmt, sondern ein Teil wird während der Heizphase nach draußen gedrückt.

Allerdings gilt die Gleichung (49) infinitesimal:

$$dQ = \frac{7}{2}\nu R dT \tag{50}$$

**[1]**

wobei jetzt $\nu$ eine abnehmende Funktion von $T$ ist: Wegen $pV$ =const. gilt nach der idealen Gasgleichung $\nu T$=const., also

$$\nu T = \nu_0 T_0 \tag{51}$$

also

$$\nu(T) = \frac{\nu_0 T_0}{T} \tag{52}$$

**[1]**

Damit wird die infinitesimale Gleichung für $dQ$ zu

$$dQ = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \frac{dT}{T} \tag{53}$$

und integriert:

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = \frac{7}{2}\nu_0 R T_0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \tag{54}$$

**[1]**

Hierin ist $\nu_0$ unbekannt, folgt aber aus den bekannten Größen per

$$\nu_0 = \frac{pV}{RT_0} \tag{55}$$

**[1]**

Also insgesamt:

$$\Delta Q = \frac{7}{2}pV \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \tag{56}$$

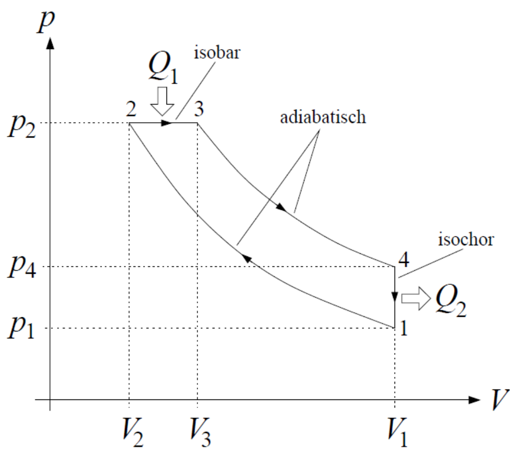
Zahlenwerte:

$$\Delta Q = \frac{7}{2} \cdot 1013 \cdot 10^2 \mathrm{Pa} \cdot 75\mathrm{m}^3 \cdot \ln\left(\frac{293\mathrm{K}}{287\mathrm{K}}\right) = 550\mathrm{kJ} \tag{57}$$

**[1]**

## Aufgabe 7 (10 Punkte)

Das folgende Diagramm zeigt das Arbeitsdiagramm eines Dieselmotors.




**Hinweis:** Schreiben Sie zunächst den Wirkungsgrad des Dieselmotors als Funktion der im Arbeitsschritt zwischen 2 und 3 zugeführten Wärmemenge $Q_1$ sowie der zwischen 4 und 1 abgeführten Wärmemenge $Q_2$ auf. Betrachten Sie nun ein Mol eines idealen zweiatomigen Gases als Arbeitsmedium und bestimmen Sie $Q_1$ als Funktion von $C_P$, $p$ und $V$ sowie $Q_2$ als Funktion von $C_V$, $p$ und $V$. Nutzen Sie weiterhin aus, dass der Arbeitsschritt von 1 nach 2 und der von 3 nach 4 adiabatisch ist, also $pV^\kappa$ =const., $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$.

*a*) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad $\nu_{Diesel}$ für diesen Dieselmotor geschrieben werden kann als:

$$\nu_{Diesel} = 1 - \frac{r_e r_k}{\kappa} \frac{r_e^{-\kappa} - r_k^{-\kappa}}{r_k - r_e} \tag{58}$$

wobei $\kappa = \frac{C_P}{C_V}$, $r_k = \frac{V_1}{V_2}$ das Kompressionsverhältnis und $r_e = \frac{V_4}{V_3} = \frac{V_1}{V_3}$ das Expansionsverhältnis bezeichnet.

### Lösung:

Der Wirkungsgrad des Dieselmotors ist gegeben durch

$$\nu_{Diesel} = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{59}$$

[**1**]

wobei $W$ die gesamte abgegebene Arbeit ist und $Q_1$ die zugeführte bzw. $Q_2$ die abgeführte Wärmemenge ist. Wir betrachten ein Mol eines idealen zweiatomigen Gases als Arbeitsmedium. Die zugeführte Wärme $Q_1$ im Arbeitsschritt 2 und 3 ist

$$Q_1 = C_P(T_3 - T_2) = \frac{C_P}{R} p_2(V_3 - V_2) \tag{60}$$

**[1]**

wobei die Zustandsgleichung für ideale Gase benutzt wurde. Die abgeführte Wärme $Q_2$ zwischen 4 und 1 ist

$$Q_2 = C_V(T_4 - T_1) = \frac{C_V}{R}(p_4 - p_1)V_1 \tag{61}$$

**[1]**

Da der Arbeitsschritt zwischen 1 und 2 adiabatisch ist, gilt die Adiabatengleichung

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \quad \rightarrow \quad p_1 = p_2 \frac{V_2^\kappa}{V_1^\kappa} \tag{62}$$

**[1]**

Der Arbeitsschritt zwischen 3 und 4 ist ebenfalls adiabatisch und deshalb folgt mit $V_1 = V_4$ und $p_3 = p_2$

$$p_4 V_1^\kappa = p_4 V_4^\kappa = p_3 V_3^\kappa = p_2 V_3^\kappa \quad \rightarrow \quad p_4 = p_2 \frac{V_3^\kappa}{V_1^\kappa} \tag{63}$$

**[1]**

Mit $\kappa = C_P/C_V$ und den Gleichungen (62) und (63) wird Gleichung (59) zu

$$\begin{aligned} \nu_{Diesel} &= 1 - \frac{\frac{C_V}{R}(p_4 - p_1)V_1}{\frac{C_P}{R} p_2(V_3 - V_2)} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{p_4 - p_1}{p_2 \frac{V_3}{V_1} - p_2 \frac{V_2}{V_1}} && (64) \\ &= 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{p_2 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\kappa - p_2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa}{p_2 \frac{V_3}{V_1} - p_2 \frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left(\frac{V_3}{V_1}\right)^\kappa - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^\kappa}{\frac{V_3}{V_1} - \frac{V_2}{V_1}} && (65) \end{aligned}$$

**[1]**

Mit Hilfe des Kompressionsverhältnisses $r_k = V_1/V_2$ sowie des Expansionsverhältnisses $r_e = V_1/V_3$ lässt sich Gleichung (64) umformen zu

$$\nu_{Diesel} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\left(\frac{1}{r_e}\right)^\kappa - \left(\frac{1}{r_k}\right)^\kappa}{\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_k}} = 1 - \frac{r_e r_k}{\kappa} \frac{r_e^{-\kappa} - r_k^{-\kappa}}{r_k - r_e} \tag{66}$$

**[1]**

$b)$ Berechnen Sie den Zahlenwert des Wirkungsgrades $\nu_{Diesel}$ für ein ideales zweiatomiges Arbeitsgas, indem Sie $r_k = 14$ und $r_e = 5$ annehmen.

## Lösung:

Da das Arbeitsgas ein zweiatomiges, ideales Gas ist, hat es 3 translatorische und 2 rotatorische Freiheitsgrade ($f = 3 + 2 = 5$).

[**1**]

Somit wird

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{f}{2}kN_A + R}{\frac{f}{2}kN_A} = \frac{\frac{f}{2}R + R}{\frac{f}{2}R} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5} = 1.4 \tag{67}$$

[**1**]

Mit den angegebene Werten $r_k = 14$ und $r_e = 5$ liefert dies den gesuchten Wirkungsgrad

$$\nu_{Diesel} = 1 - \frac{5 \times 14}{1.4} \frac{5^{-1.4} - 14^{-1.4}}{14 - 5} = 55.4\% \tag{68}$$

[**1**]