Prof. Dr. H. Friedrich
Physik-Department T30a
Technische Universität München

Klausur zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Mittwoch, 12.08.2009, 09:15 - 10:45

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Geben Sie möglichst kurze Antworten auf die folgenden Fragen:

(a) Woran erkennen Sie, dass das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = c_0\,\hat{e}_z \times \hat{e}_r$ nicht konservativ ist? $\big[\hat{e}_z$ ist der (konstante) Einheitsvektor in Richtung der z-Achse, $\hat{e}_r = \vec{r}/r$, c_0 =konst.$\big]$ **(1 P)**

Lösung: Es ist $\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \neq 0$, da $\hat{e}_z \times \hat{e}_r$ in Richtung von $\mathrm{d}\vec{r}$ zeigt. Alternativ kann man zeigen, dass $\mathrm{rot}\vec{F} \neq 0$.

(b) Warum ist in Südafrika, Australien, Nord- und Südamerika in der Regel das Meerwasser bei gleichem Breitengrad vor der Westküste kälter als vor der Ostküste? **(2 P)**

Lösung: Die Corioliskraft drängt die Meeresströmungen zu Kreisbewegungen im Uhrzeigersinn auf der Nordhalbkugel und gegen den Uhrzeigersinn auf der Südhalbkugel. In beiden Hemisphären strömt das Meerwasser also an den Westküsten vom (kälteren) Pol zum Äquator und an den Ostküsten vom (wärmeren) Äquator zum Pol.

(c) Das (nicht lineare) Molekül von Formaldehyd (HCHO) wird als ein System aus vier Massenpunkten beschrieben, die untereinander mit Hookeschen Federn verbunden sind. Wieviele unabhängige Eigenschwingungen hat dieses System? **(1 P)**

Lösung: Insgesamt gibt es bei 4 Massenpunkten $4 \times 3 = 12$ Freiheitsgrade. Das Molekül hat dann 3 Freiheitsgrade der Rotation und 3 Translationsfreiheitsgrade. Damit gibt es 6 unabhängige Eigenschwingungen.

(d) Nach dem Keplerschen Gesetz hängen die Umlaufzeiten T der Planeten um die Sonne über $T \propto R^{3/2}$ mit ihren (mittleren) Abständen R zusammen. Wie würde sich diese Beziehung ändern, wenn die Graviationskraft mit zunehmender Entfernung nicht wie die zweite Potenz des Abstands abfallen würde, sondern wie die dritte? **(1 P)**

Lösung: Für das Potenzial homogen vom Grad $k = -2$ gilt $T \propto R^2$.

(e) Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Innenseite eines halben Hohlzylinders ("half pipe") unter dem Einfluss der Schwerkraft, die senkrecht zur Zylinderachse wirkt. Welche Erhaltungsgrößen gibt es? **(2 P)**

Lösung: Impuls parallel zur Zylinderachse und Energie sind erhalten.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Acht Massen m sind an den Ecken eines Würfels mit Kantenlänge a durch masselose Stangen starr miteinander verbunden.

(a) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente um geeignete Achsen durch den Schwerpunkt. **(3 P)**

Lösung: Für kantenparallele Achsen durch den Schwerpunkt des Würfels haben alle acht Ecken zu einer gegebenen Achse den Abstand $a/\sqrt{2}$; also $I_1 = I_2 = I_3 = 8 \times m\,a^2/2 = 4\,m\,a^2$.

(b) Betrachten Sie nun eine Achse durch den Schwerpunkt, welche zwei gegenüberliegende Ecken des Wüfels verbindet. Zeigen Sie, dass jede nicht auf der Achse liegende Ecke den Abstand $\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ von der Achse hat, und schließen Sie daraus, dass das Trägheitsmoment um diese Achse mit dem aus Teilaufgabe (a) bekannten Ergebnis übereinstimmt. **(4 P)**

Lösung: Die Diagonale des Würfels hat die Länge $\sqrt{3}\,a$. Jeder Eckpunkt bildet mit den Diagonalenden ein Dreieck mit den weiteren Schenkellängen $\sqrt{2}\,a$ und a. Der senkrechte Abstand x des Eckpunkts zur Diagonalen beträgt $x = \sqrt{\frac{2}{3}}\,a$. Das Trägheitsmoment um die Diagonale ist als $6 \times \frac{2}{3} m\,a^2 = 4\,a^2$.

(c) Ein Methan-Molekül besteht aus einem Kohlenstoffatom (Masse M) im Schwerpunkt und vier Wasserstoffatomen (Masse m), die im Abstand l vom Kohlenstoffatom an den Ecken eines regelmäßigen Tetraeders liegen. Berechnen Sie das Hauptträgheitsmoment um eine geeignete Achse durch den Schwerpunkt. **(2 P)**
(Hilfe: Überlegen Sie, was diese Frage mit den Teilaufgaben (a) oder (b) zu tun hat.)

Lösung: Die vier Ecken eines Tetraeders sind die vier Enden von gegenüberliegenden nicht-parallelen Flächendiagonalen; ein Tetraeder ist also "ein halber Würfel". Der Strecke vom Schwerpunkt zu einer Ecke entspricht der Hälfte der Diagonalen aus Teilaufgabe (b), also $l = \sqrt{3}\,a/2$. Das Trägheitsmoment um diese Achse rührt von den drei übrigen Ecken des Tetraeders, $I = 3 \times \frac{2}{3} m\,a^2 = 2\,a^2 = \frac{8}{3}\,l^2$. Ebenso hätte man das Trägheitsmoment um Achsen durch den Schwerpunkt berechnen können, die parallel zu den Kanten des "ganzen Würfels" liegen: $I_1 = I_2 = I_3 = 4 \times m\,a^2/2 = 2\,m\,a^2 \equiv \frac{8}{3}\,l^2$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

In einer vertikalen Ebene ist eine Hantel mit zwei Massen M an den Enden eines masselosen Stabs der Länge l_2 genau in der Mitte frei drehbar am Ende eines Pendels der Länge l_1 befestigt. Die Koordinaten der zwei Massen sind (x_1, y_1) bzw. (x_2, y_2).

(a) Geben Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der beiden Winkel ϕ_1, ϕ_2 und der zugehörigen Geschwindigkeiten $\dot{\phi}_1$, $\dot{\phi}_2$ an und leiten Sie die Bewegungsgleichungen her. **(4 P)**

Lösung: Die Koordinaten der Massen sind

$$x_1 = l_1 \sin\phi_1 + \frac{1}{2} l_2 \sin\phi_2, \qquad y_1 = l_1 \cos\phi_1 + \frac{1}{2} l_2 \cos\phi_2,$$
$$x_2 = l_1 \sin\phi_1 - \frac{1}{2} l_2 \sin\phi_2, \qquad y_1 = l_1 \cos\phi_1 - \frac{1}{2} l_2 \cos\phi_2.$$

Die kinetische Energie ist dann

$$T = \frac{1}{2} M(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = M\, l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{4} M\, l_2^2 \dot{\phi}_2^2.$$

Aus der Formulierung " ... einer vertikalen Ebene ..." geht hervor, dass eine Schwerkraft wirkt. Die potentielle Energie ist

$$U = -Mg(l_1 \cos\phi_1 + \frac{l_2}{2} \cos\phi_2 + l_1 \cos\phi_1 - \frac{l_2}{2} \cos\phi_2) = -2Mgl_1 \cos\phi_1.$$

Die Lagrange-Funktion $L = T - U$ ist dann

$$L = M \left(l_1^2 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{4} l^2 \dot{\phi}_2^2 \right) + 2\, Mg\, l_1 \cos\phi_1.$$

Es ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_1} = 2Ml_1^2 \ddot{\phi}_1\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi_1} = -2Mgl_1 \sin\phi_1\,.$$

Die Bewegungsgleichung für ϕ_1 ist dann

$$\ddot{\phi}_1 = -\frac{g}{l_1} \sin\phi_1\,.$$

Für ϕ_2 ist

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_2} = \frac{1}{2} Ml_2^2 \ddot{\phi}_2\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial \phi_2} = 0,$$

also $\ddot{\phi}_2 = 0$.

(b) Welche Erhaltungsgrößen gibt es? **(2 P)**

Lösung: Die Energie und der innere Drehimpuls der Hantel in ihrem Schwerpunktsystem sind erhalten.

(c) Beschreiben Sie qualitativ die möglichen Bewegungsformen. **(2 P)**

Lösung: Das Pendel schwingt mit Winkel ϕ_1 wie ein einfaches Pendel mit Länge L und Masse $2M$. Überlagert ist die freie Rotation der Hantel, $\dot{\phi}_2$ =const, um ihren Schwerpunkt. Unter der Annahme kleiner Auslenkungen kann die Pendelschwingung als harmonische Schwingung angesehen werden, Eigenfrequenz $\omega = \sqrt{g/l_1}$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einer vertikalen Linie unter dem Einfluss des Gravitationpotentials $U(x) = m\, g\, x$.

(a) Bei gegebener Energie E bilden die Punkte $(x(t), p(t))$, $-\infty < t < \infty$, im zweidimensionalen Phasenraum eine eindimensionale Kurve $p(x)$. Berechnen Sie diese Kurve und zeichnen Sie sie für mindestens eine positive und eine negative Energie. **(3 P)**

Lösung: Aus dem Energiesatz erhält man $p = \pm\sqrt{2m(E - mgx)}$.

(b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für $x(t)$ und $p(t)$ bei gegebenen Anfangswerten $x(0)$, $p(0)$. **(2 P)**

Lösung: Die Bewegungsgleichung ist $m\ddot{x} = -mg.$

Daraus folgt $p(t) = p(0) - mgt, \quad x(t) = x(0) + p(0)t/m - \frac{1}{2}gt^2.$

(c) Ein Ensemble von gleichartigen Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort $x = 0$ mit gleichmäßig verteilten Impulsen zwischen $-p_0$ (nach unten) und $+p_0$ (nach oben). Geben Sie den Bereich des Phasenraums an, den die Phasenraumpunkte $(x(t), p(t))$ dieser Teilchen zu einem späteren Zeitpunkt $t = t_0 > 0$ belegen. (Hilfe: Setzen Sie in den Bewegungsgleichungen $x(0) = 0$ und eliminieren Sie $p(0)$. Das führt auf eine Beziehung für $p(t_0)$ als Funktion von $x(t_0)$.) **(3 P)**

Lösung: Mit $x(0) = 0$ hat man $p(0) = \left[x(t_0) + \frac{1}{2}gt_0^2\right]\frac{m}{t_0}.$

Daraus folgt, dass alle Phasenraumpunkte zur Zeit t_0 auf der Geraden

$$p(t_0) = \frac{m}{t_0}x(t_0) - \frac{1}{2}mgt_0$$

liegen. Diese Gerade schneidet die parabolische Phasenraumkurve zur (maximalen) Energie $E_0 = p_0^2/(2m)$ in den Punkten:

$$x_1 = \frac{p_0}{m}\,t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\,, \quad p_1 = p_0 - m\,g\,t_0 \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p_0}{m}\,t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\,, \quad p_2 = -p_0 - m\,g\,t_0\;.$$

Die Phasenraumpunkte des Ensembles belegen zum Zeitpunkt $t = t_0$ den Abschnitt der oben angegeben Geraden zwischen diesen Schnittpunkten.

(d) Betrachten Sie nun den Fall, dass die Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ ein kleines endliches Gebiet des Phasenraums mit Ortskoordinaten zwischen $x = 0$ und $x = h$ (h klein) belegen; die Anfangsimpulse sollen nach wir vor zwischen $-p_0$ und p_0 liegen, die Fläche des Gebiets ist also $2\,p_0 h$. Zeigen Sie, dass die Fläche des Gebiets, das die Phasenraumpunkte zum späteren Zeitpunkt t_0 belegen, dieselbe ist. **(2 P)**

Lösung: Zum Zeitpunkt t_0 liegt das Gebiet zwischen der Geraden in (c) und einer um den Wert h zu positiven x-Werten verschobenen Geraden:

$$p = \frac{m}{t_0}\,(x - h) - \frac{m\,g\,t_0}{2}.$$

Das Gebiet ist annähernd ein Parallelogramm mit der Grundlänge h, und die Höhe ist nach wie vor $2\,p_0$; also ist die Fläche nach wie vor $2\,p_0 h$.