Klausur in Experimentalphysik 2

Prof. Dr. F. Pfeiffer
Sommersemester 2014
17. Juli 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Die Punktladung $q_1 = q$ sei bei $x = 0$ und die Ladung $q_2 = -4q$ bei $x = d > 0$ auf der x-Achse fixiert.

(a) Geben Sie das Potential für die Gesamtladung als Funktion von x an, dabei soll das Potential so normiert sein, dass es im Unendlichen verschwindet (d.h. Null wird).

(b) Skizzieren Sie qualitativ für jede Ladung die x-Komponente des E-Feldes, $E_x(x)$, als Funktion von x. (Beachten sie dabei das Vorzeichen, das positiv gewählt wird, wenn $\vec{E}$ entlang der positiven x-Achse zeigt. Dabei ist es günstig, die drei Bereiche ($x < 0, 0 < x < d$ und $d < x$) getrennt zu behandeln.)

(c) berechnen Sie $E_x(x)$,

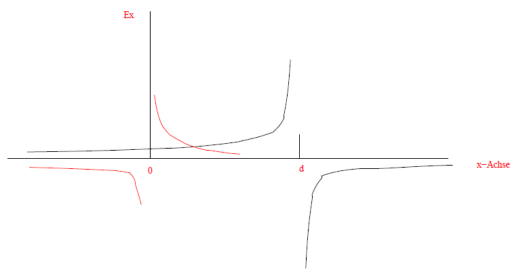
(d) an welchem Ort auf der x-Achse ist die gesamte Kraft auf eine Probeladung gleich Null?

Lösung

(a) Das Potential ist positiv mit um $x = 0$ und negativ mit $4q/r$ um $x = d$.

$$\phi(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{4}{|x-d|}\right)$$

[**1**]



(b) [**1**]

(c) $x < 0$:

$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x-d)^2}\right)$$

$0 < x < d$:

$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{(x-d)^2}\right)$$

$d < x$:

$$E_x(x) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{4}{(x-d)^2}\right)$$

[**1**]

(d) Nullstelle nur für $x < 0$ möglich:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{4}{(x-d)^2} \tag{1}$$

$$x^2 - 2xd + d^2 = 4x^2 \tag{2}$$

$$x^2 + \frac{2}{3}xd - \frac{1}{3}d^2 = 0 \tag{3}$$

$$x_{1/2} = -d/3 \pm 2d/3 \tag{4}$$

$$x_1 = -d \tag{5}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Plattenkondensator mit einem Plattenabstand von $0,5$ cm und einer Fläche von 100cm^2.

(a) Berechnen Sie die Kapazität des Kondensators (im Vakuum).

(b) Welche Kapazität besitzt der Kondensator, wenn ein Dielektrikum mit $\epsilon_r = 2,5$ in den Kondensator eingeführt wird?

(c) Im Vakuum wurde der Kondensator auf 100 V aufgeladen. Welche Spannung liegt an, wenn nun ein Dielektrikum mit $\epsilon_r = 2,5$ eingeführt wird?

Lösung

(a) Die Kapazität eines Plattenkondensators wird über die Formel $C = \epsilon_0 A/d$ bestimmt.

$$\Rightarrow C_0 = 17,7\text{pF}$$

[**1**]

(b)
$$C_1 = \epsilon_0 \epsilon_r A/d = 2,5 C_0 = 44,3\text{pF}$$

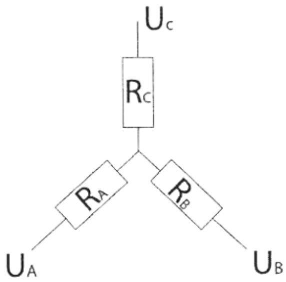
[**0,5**]

(c) Bei einem Kondensator gilt $C = Q/U$. Lädt man nun den Kondensator im Vakuum mit 100 V auf, so enthält er die Ladung: $Q = C_0 U_0 .(Q = 17,7\text{pF} \cdot 100\text{V} = 1,77\text{nC})$. Führt man das Dielektrikum ein, so gilt: $1,77\text{nC} = Q = C_1 U_1 \Rightarrow U_1 = Q/C_1 = 40V$

[**1,5**]

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben sei die folgende Schaltung. Es liegen die Potentiale $U_A = 10\text{V}, U_B = 20\text{V}, U_C = 30\text{V}$ an den Eckpunkten A, B, C an. Die Widerstände seien $R_A = 1\text{k}\Omega, R_B = 1,5\text{k}\Omega, R_C = 3\text{k}\Omega$. Bestimmen Sie die Stromflüsse I_A, I_B, I_C durch die drei Widerstände.



Lösung

Das Potential U am Kreuzpunkt ist zunächst unbekannt. Die Ströme, die in den Kreuzpunkt einfließen, sind
$$I_A = \frac{U - U_A}{R_A}, etc.$$

[**1**]

Also haben wir

$$I_A + I_B + I_C = 0 = \frac{U - U_A}{R_A} + \frac{U - U_B}{R_B} + \frac{U - U_C}{R_C} \tag{6}$$

$$U\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right) = \frac{U_A}{R_A} + \frac{U_B}{R_B} + \frac{U_C}{R_C} \tag{7}$$

$$U = \frac{\frac{U_A}{R_A} + \frac{U_B}{R_B} + \frac{U_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}} = \frac{33,3\text{mA}}{2(\text{k}\Omega)^{-1}} = 16,67\text{V} \tag{8}$$

$$I_A = \frac{U - U_A}{R_A} = 6,66\text{mA} \tag{9}$$

$$I_B = \frac{U - U_B}{R_B} = -2,22\text{mA} \tag{10}$$

$$I_C = \frac{U - U_C}{R_C} = -4,44\text{mA} \tag{11}$$

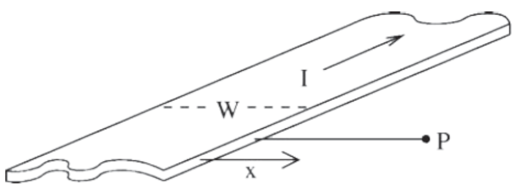
$$\tag{12}$$

[3]

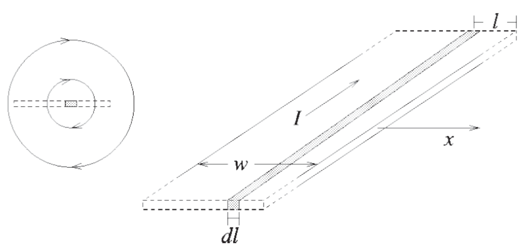
Also $I_A + I_B + I_C = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein dünnes, flaches, unendlich langes Band der Weite W transportiert einen gleichmäßigen Strom I. Bestimmen Sie das magnetische Feld an einem Punkt P, der sich in der Ebene des Bandes befindet und einen Abstand x von dessen Rand hat. Überlegen Sie sich das Feld eines Streifens. Wie sieht das Ergebnis für den Limes $W \to 0$ aus? (Hinweis: $\ln(1 + \delta) \approx \delta$ für kleine δ).



Lösung



Wir unterteilen das Band in infinitesimale Streifen, die sich wie Drähte verhalten und die wir nach dem Prinzip der Superposition als Vektorsumme zusammefassen können. Betrachte einen

Streifen der Weite dl, der eine Strecke l vom rechten Rand des Bandes entfernt ist. Der Streifen trägt den Strom Idl/W und hat eine Entfernung von $l + x$ zum Punkte P. Der differentielle Beitrag zum magnetischen Feld ist:

$$dB = \frac{\mu_0 I \frac{dl}{W}}{2\pi(x+l)}$$

[**1**]

mit dem Feld im Uhrzeigersinn zeigend. Um das gesamte Feld zu bekommen integrieren wir über das gesamte Band von $l = 0$ bis $l = W$ (Substitution: $u = x + l, du = dl$):

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{2\pi W}\int_0^W \frac{dl}{x+l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi W}\int_x^{x+W}\frac{du}{u} = \frac{\mu_0 I}{2\pi W}\ln\left(1+\frac{W}{x}\right)$$

[**2**]

Um den Limes zu betrachten taylorn wir das Ergebnis. Für $W \to 0$ wird $\ln(1+\delta) \approx \delta$ deshalb

$$B \to \frac{\mu_0 I}{2\pi W}\left(\frac{W}{x}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

[**1**]

Was die Formel für einen stromdurchflossenen Draht ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Zwei Elektronenstrahlen laufen im feldfreien Raum im Vakuum parallel zueinander im Abstand $d = 2$ cm. Die Beschleunigungsspannung beträgt $U_B = 3$ kV, der Elektronenstrom ist $I = 10$ mA pro Strahl.

(a) Berechnen Sie die Lorentzkraft, die einer der Strahlen auf ein Stück der Länge Δl des anderen Strahls ausübt. Welche Richtung hat sie?

(b) Wie groß ist die elektrostatische Kraft, die einer der Strahlen auf ein Stück der Länge Δl des anderen Strahls ausübt?

(c) Wie groß muss die Elektronengeschwindigkeit sein, damit beide Kräfte vom Betrag gleich sind? Was folgt daraus?

(d) Die gleichen Ströme bewegen sich nun in zwei parallelen Metalldrähten mit Abstand d. Welche Kräfte wirken nun?

Lösung

(a) Lorentzkraft: Das Magnetfeld des 1. Strahls ist:

$$B_1(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

damit ist die Kraft auf ein Stück der Länge Δl des 2. Strahls:

$$F_L = I_2 \Delta l B_1(d) = I_2 \Delta l \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \tag{13}$$

$$\frac{F_L}{\Delta l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = 1 \cdot 10^{-9}\mathrm{N/m} \tag{14}$$

Beide Ströme fließen in die gleiche Richtung, also wirkt die Lorentz-Kraft anziehend.

[2]

(b) Energie der Elektronen:

$$\frac{1}{2}m_e v^2 = eU_B \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_e}}$$

Strom: $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dl}\frac{dl}{dt} = \lambda v$ mit der Linienladungsdichte $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{I}{v} = I\sqrt{\frac{m_e}{2eU_B}} = 3,08 \cdot 10^{-10}\mathrm{C/m}$$

Das elektrische Feld des 1. Strahls ist

$$E_1(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

[2]

die Coulombkraft auf ein Stück der Länge Δl des 2. Strahls ist:

$$F_C = \lambda\Delta l E_1(d) = \lambda\Delta l\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \tag{15}$$

$$\frac{F_C}{\Delta l} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 d} = 8,52 \cdot 10^{-8}\mathrm{N/m} \tag{16}$$

[1]

(c)

$$\frac{F_C}{\Delta l} = \frac{F_L}{\Delta l} \Rightarrow \frac{I^2}{2\pi\epsilon_0 dv^2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = c^2$$

Für die Gleichheit der Kräfte müssten die Elektronen Vakuumlichtgeschwindigkeit erreichen, was natürlich nicht geht. Die Coulombkraft ist stets größer als die Lorentzkraft.

[1]

(d) Die Lorentzkraft ist wie in a). Es wirkt aber keine Coulombkraft zwischen den Drähten, da die positive Ladung der Metallionen in den Drähten die Ladung der Elektronen kompensiert.

[1]

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Ein Zug fahre mit $v = 300$ km/h. Sie möchten mit Hilfe des Zuges das Erdmagnetfeld messen: Die Spannung zwischen den beiden Schienen wird bestimmt, während der Zug auf Sie zufährt. (Die Schienen sind ansonsten voneinander und der Erde isoliert.)

(a) Wie groß ist die vertikale Komponente des Erdmagnetfeldes, wenn bei der Annäherung des Zuges eine Spannung zwischen den beiden Schienen von $5,3$ mV gemessen wird? (Schienenabstand: 1435 mm.)

(b) Wie ändert sich die Spannung, nachdem der Zug die Messstelle passiert hat?

(c) Ein Kommilitone will den Betrag des Magnetfeldes noch genauer bestimmen. Dazu benutzt er ein Flugzeug dessen beide Flügelspitzen mit einem Draht über einen 100Ω Widerstand verbunden sind. Welchen Strom misst er durch den Draht bei normaler Reisegeschwindigkeit? Die Spannweite beträgt 60,3 m und die Reisegeschwindigkeit liegt bei 870 km/h.

Lösung

(a)

$$U_{Ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dA}{dt}\cos\alpha = -Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

Vertikale Komponente des Magnetfelds: $\alpha = 0°$:

$$B = -\frac{U_{Ind}}{lv} = 4,43 \cdot 10^{-5}\mathrm{T}$$

[**2**]

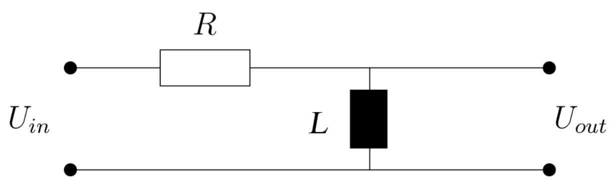
(b) Der Betrag der Spannung ändert sich nicht.

[**1**]

(c) Durch den entstandenen Stromkreis (Tragflächen-Draht-Messinstrument) fließt kein Strom. Der Draht bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit im Erdmagnetfeld wie das Flugzeug, deshalb wird in ihm die gleiche Gegenspannung induziert. Anders ausgedrückt: Der magnetische Fluss durch die „Leiterschleife" ändert sich nicht, deshalb wird in ihr keine Spannung induziert.

[**1**]

Aufgabe 7 (7 Punkte)



Betrachten Sie die in der Abbildung dargestellte Schaltung mit Widerstand und Spule. Stellen Sie die Differentialgleichung für die Ausgangsspannung U_{out} auf, wenn die Eingangsspannung $U_{\text{in}}(t)$ eine bekannte Funktion der Zeit ist. Lösen Sie die Differentialgleichung für den Fall $U_{\text{in}}(t) = U_0 \sin\omega t$, indem Sie für die spezielle Lösung den Ansatz $Asin(\omega t + \varphi)$ machen und die allgemeine homogene Lösung addieren. Geben Sie die Amplitude der Ausgangsspannung als Funktion von ω und U_0 an, nachdem sich das System eingeschwungen hat. Beschreiben Sie das Frequenzverhalten der Schaltung? (Hinweis: $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$, $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$)

Lösung

Die Ausgangsspannung ist die Spannung an der Spule, also

$$U_{\text{out}} = L\dot{I}$$

Wenn man den Strom durch die Spule kennt, dann kennt man also die Ausgangsspannung. Für I gilt die Differentialgleichung

$$L\dot{I} = U_{\text{in}}(t) - RI$$

Für $U_{\text{in}}(t) = U_0 \sin \omega t$ also

$$RI + L\dot{I} = U_0 \sin \omega t$$

[1,5]

Die allgemeine homogene Lösung ist $ae^{\frac{-tR}{L}}$, für die spezielle Lösung macht man den Ansatz

$$\begin{aligned} I(t) &= A\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{I}(t) &= \omega A \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

[**1**]

Setzt man dies in die DGL ein, erhält man

$$\cos \omega t \,(L\omega \cos \varphi + R \sin \varphi) + \sin \omega t\,(-L\omega \sin \varphi + R\cos \varphi) = \frac{U_0}{A} \sin \omega t$$

Woraus durch Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} L\omega \cos \varphi + R \sin \varphi &= 0 \\ -L\omega \sin \varphi + R \cos \varphi &= \frac{U_0}{A} \end{aligned}$$

[**1**]

Durch Quadrieren beider Gleichungen und Addition erhält man

$$\begin{aligned} L^2\omega^2 + R^2 &= \frac{U_0^2}{A^2} \\ \Leftrightarrow A &= \frac{U_0}{R\sqrt{\frac{L^2}{R^2}\omega^2 + 1}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung für $I(t)$ und für $\dot{I}(t)$ lautet also

$$I(t) = e^{-tR/L} + \frac{U_0}{R\sqrt{\frac{L^2}{R^2}\omega^2 + 1}} \sin(\omega t + \varphi)$$

[**1**]

$$\dot{I}(t) = \frac{R}{L}e^{-tR/L} + \frac{U_0\omega}{R\sqrt{\frac{L^2}{R^2}\omega^2 + 1}} \cos(\omega t + \varphi)$$

mit $\tan \varphi = -\frac{L}{R}\omega$.

Die Ausgangsspannung nach Abklingen des Einschwingvorgangs ist also

$$U_{\text{out}} = \frac{U_0 L\omega}{R\sqrt{\frac{L^2}{R^2}\omega^2 + 1}} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}} \cos(\omega t + \varphi)$$

[1,5]

deren Amplitude ist

$$U_{0,\text{ out}} = \frac{U_0}{\sqrt{1+\frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

Dies ist proportional zur Amplitude der Eingangsspannung, erreicht für $\omega = 0$ den Minimalwert 0 und steigt für große ω auf U_0 an. Die vorliegende Anordnung lässt also Schwingungen mit hohen Frequenzen ungehindert passieren, während eine niedrigfrequente Schwingung abgeschwächt wird. Daher Hochpassfilter.

[**1**]

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Wir betrachten ein Raumschiff, dass sich mit hoher Geschwindigkeit von der Erde entfernt. Es sendet zwei Lichtsignale aus, zwischen denen die Zeit $\Delta t'$ (im Raumschiff gemessen) liegt.

Zeigen Sie, dass die Zeit ΔT (auf der Erde gemessen) zwischen der Ankunft der beiden Signale auf der Erde gleich $\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}\Delta t'$ ist. (*Hinweis:*Schreiben Sie sich die 4 Raumzeitkoordinaten auf im ungestrichenen System auf.)

Lösung

Wir bezeichnen die Aussendung des ersten und zweiten Signals als Ereignis A und B. Im System S' des Raumschiffes haben wir also die Raum-Zeit-Koordinaten (x'_A, t'_A) beziehungsweise $(x'_B = x'_A, t'_B = t'_A + \Delta T')$. Im Ruhesystem der Erde S haben A und B die Koordinaten (x'_A, t'_A) beziehungsweise $(x'_B = x'_A + \Delta x, t'_B = t'_A + \Delta t)$. Die Transformation von S' nach S ist nun gegeben durch:

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'),$$

[**1**]

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \approx 2$ wobei $x = x'_A$ oder x'_B, etc.

Somit haben wir:

$$x_A = \gamma(x'_A + vt'_A), \qquad t_A = \gamma(t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A), \tag{17}$$

$$x_B = \gamma(x'_B + vt'_B), \qquad t_B = \gamma(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B), \tag{18}$$

[**1**]

und weiterhin, mit $x'_B - x'_A = 0$:

$$x_B - x_A = \Delta x = \gamma v \Delta t', \quad t_B - t_A = \Delta t = \gamma \Delta t',$$

[**1**]

In S (Erdsystem) liegen die beiden Signale also zeitlich um $\Delta t = \gamma \Delta t'$ auseinander. Während dieser Zeit legt das Raumschiff die Strecke Δx zurück. Die beiden Lichtsignale kommen im erdfesten Punkt x_0 zu den Zeiten T_A, beziehungsweise $T_B = T_A + \Delta T$ an. T_A und T_B lassen sich berechnen aus:

$$T_A = t_A + \frac{x_A - x_0}{c}, \quad T_B = t_B + \frac{x_B - x_0}{c},$$

[**1**]

wobei $(x_A - x_0)/c$ und $(x_B - x_0)/c$ die Laufzeiten (im Erdsystem S) der Signale vom Punkt x_A beziehungsweise x_B zu x_0 sind. Somit ist:

$$T_B - T_A = \Delta T = t_B - t_A + \frac{(x_B - x_A)}{c} = \Delta t + \frac{\Delta x}{c},$$

d.h. die gemessene Zeitdifferenz zwischen den beiden Signalen ist zusammen gesetzt aus der Zeitdifferenz Δt in S (zwischen dem Aussenden der Signale) und einer Laufzeit-Differenz. Mit den obigen Gleichungen erhalten wir für die gemessene Zeitdifferenz im System S:

$$\Delta T = \gamma(1 + v/c)\Delta t' = \frac{(1 + v/c)\Delta t'}{\sqrt{(1 + v/c)(1 - v/c)}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}\Delta t'$$

[**1**]

Konstanten

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \qquad m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\mathrm{kg}$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\mathrm{As/Vm} \qquad \mu = 12.57 \cdot 10^{-7}\mathrm{N/A^2}$$