1. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. C. Pfleiderer

Wintersemester 2016/17

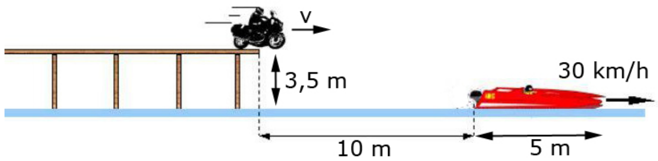
29. November 2016

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (7 Punkte)



Die Gegenspieler von James Bond versuchen mit einem Schnellboot zu entkommen. 007 rast mit seinem Motorrad mit der Geschwindigkeit v über den Landungssteg, der $3,5$m über der Wasseroberfläche verläuft. Seine Absicht ist es, nach einem freien Flug auf dem feindlichen 5m langen Boot zu landen. Die Abbildung zeigt den Moment des Absprungs. Das Boot bewegt sich mit 30km/h nach rechts. Berechne, in welchem **Geschwindigkeitsbereich** sich James Bond beim Absprung seines Motorrads bewegen muss, damit er auf das Boot trifft.

Lösung:

Die Entfernung des Bootes vom Landungssteg zur Absprungzeit $t = 0$s beträgt $e = 10$m, die Länge des Bootes $l = 5$m.

Der Ursprung des Koordinatensystems sei die Absprungkante des Steges.

Zunächst wird die Flugzeit t_0 mit der Gleichung für die Vertikalbewegung (Fall) ermittelt:

$$y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

$$t = \sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}} \tag{2}$$

[2]

Für den Weg s_B, den das Boot während dieser Zeit zurücklegt, gilt:

$$s_b = v_b \cdot t_0 \tag{3}$$

Somit gilt für den minimalen horizontalen Flugweg:

$$s_{min} = e + v_B \cdot t_0 \tag{4}$$

In diesem Fall trifft der Mittelpunkt des Motorrads gerade noch am Heck des Bootes auf. Für den maximalen horizontalen Flugweg gilt:

$$s_{max} = e + l + v_B \cdot t_0 \tag{5}$$

[**2**]

In diesem Fall landet 007 auf der vorderen Spitze des Bootes. Für die konstante horizontale Geschwindigkeit gilt damit, wenn man die Geschwindigkeit des Bootes $v_B = 30\text{km/h} = 8,33\text{m/s}$ verwendet:

$$v_{max} = \frac{s_{max}}{t_0} = \frac{e + l + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e+l}{t_0} + v_B = \frac{e+l}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 26,11\text{m/s} = 94\text{km/h} \tag{6}$$

$$v_{min} = \frac{s_{min}}{t_0} = \frac{e + v_B \cdot t_0}{t_0} = \frac{e}{t_0} + v_B = \frac{e}{\sqrt{-\frac{2 \cdot y_0}{g}}} + v_B = 20,28\text{m/s} = 73\text{km/h} \tag{7}$$

Die Geschwindigkeit von James Bond muss zwischen 73km/h und 94km/h liegen.

[**3**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Körper am Äquator erfährt aufgrund der Erdrotation eine reduzierte Beschleunigung in Richtung des Erdmittelpunktes. Weiterhin erfährt er aufgrund der Rotation der Erde um die Sonne eine reduzierte Beschleunigung in Richtung der Sonne. Berechnen Sie die beiden Beschleunigungen und drücken Sie sie im Verhältnis zur Erdbeschleunigung g aus. *Hinweis:*$r_{Erde} = 6371\,\text{km}$, $r_{Erdumlaufbahn} = 149,6 \cdot 10^6\,\text{km}$

Lösung

(a)

$$|\vec{a}| = \omega^2 |\vec{r}|$$

Mit

$$|\vec{v}| = \omega |\vec{r}| \tag{8}$$

ist

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{v}|^2}{|\vec{r}|}. \tag{9}$$

[2]

Ein Körper auf dem Äquator ($r_{Erde} = 6371\,\text{km}$) bewegt sich mit

$$v = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371 \cdot 10^3\,\text{m}}{60 \cdot 60 \cdot 24\,\text{s}} = 463,3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{10}$$

um den Erdmittelpunkt. Ein Körper auf dem Äquator erfährt damit um

$$\frac{a}{g} = \frac{v^2}{gr} = 3,4 \cdot 10^{-2}\frac{\text{m}}{\text{s}}\frac{1}{g} = 3,4 \cdot 10^{-3} \tag{11}$$

geringere Zentripetalbeschleunigung in Richtung des Erdmittelpunkts.

[2]

(b) Die Bewegung der Erde um die Sonne ($r_{mittlere\,Erdumlaufbahn} = 149,6 \cdot 10^6\,\text{km}$) erfolgt mit einer Geschwindigkeit von

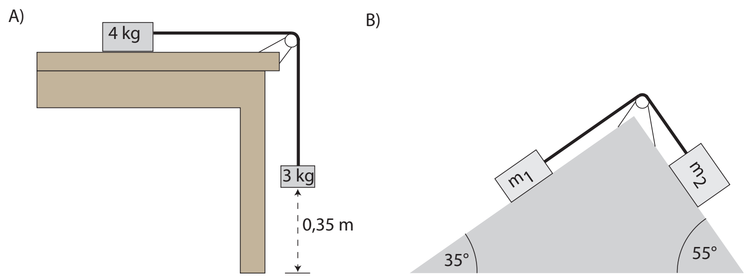
$$v = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 149,6 \cdot 10^9\,\text{m}}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365\,\text{s}} = 29,8\,\cdot 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{12}$$

Durch die Bewegung um die Sonne erfährt ein Körper folglich eine Zentripetalbeschleunigung reduziert um

$$\frac{a}{g} = \frac{v^2}{gr} = 5,9 \cdot 10^{-3}\frac{\text{m}}{\text{s}}\frac{1}{g} = 6 \cdot 10^{-4} \tag{13}$$

[2]

Aufgabe 3 (13 Punkte)



(a) Ein Quader mit der Masse 4kg liege auf einer waagerechten Tischplatte und sei über ein Seil (das über eine Rolle läuft) mit einem 3-kg-Massestück verbunden (siehe Abbildung A). Wie groß muss die Reibungszahl μ mindestens sein, damit der Quader ruht?

(b) Die Reibungszahl zwischen Tisch und Quader betrage nun $\mu = 0,35$. Der Quader werde nun losgelassen. Wie lange braucht das 3-kg-Massestück für den $0,35$m tiefen Fall auf den Boden?

(c) Zwei Körper mit den Massen m_1 und m_2 seien über ein Seil miteinander verbunden und gleiten jeweils auf einer schiefen Ebene; die Reibungszahl für beide Körper sei dabei $\mu_G = 0,3$. Das Seil laufe über eine reibungsfreie Rolle (siehe Abbildung rechts). In welchen Bereich der Massenverhältnisse sind die Körper in Ruhe?

Lösung

(a) Gesucht ist der Reibungskoeffizient μ_H. Gegeben: $m_Q = 4\,\text{kg}$, $m_S = 3\,\text{kg}$ und $h = 0,35\text{m}$.

$$F_H = F_g \Rightarrow \mu_H \cdot m_Q \cdot g = m_S \cdot g$$

$$\Rightarrow \mu_H = \frac{m_S \cdot g}{m_Q \cdot g} = \frac{m_S}{m_Q} = \frac{3\,\text{kg}}{4\,\text{kg}} = 0,75$$

[3]

(b) Reibungszahl sei nun $\mu_G = 0,35$. Es ergibt sich eine effektive Zugkraft F_e aus der Gewichtskraft des 3-kg-Massestücks F_g und der Reibungskraft des Quaders F_R

$$F_e = F_g - F_R$$
$$F_e = m_S \cdot g - \mu_G \cdot m_Q \cdot g = g \cdot (m_S - \mu_G \cdot m_Q)$$

[2]

Da nun das hängende Massenstück durch F_e beschleunigt wird, gilt somit $F_e = m_S \cdot a_e$

$$(m_S + m_Q) \cdot a_e = g \cdot (m_S - \mu_G \cdot m_Q)$$
$$a_e = g \cdot \frac{(m_S - \mu_G \cdot m_Q)}{m_S + m_Q}$$

Es liegt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit vor:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,35\,m}{2,24\frac{m}{s^2}}} = 0,56\,s$$

[3]

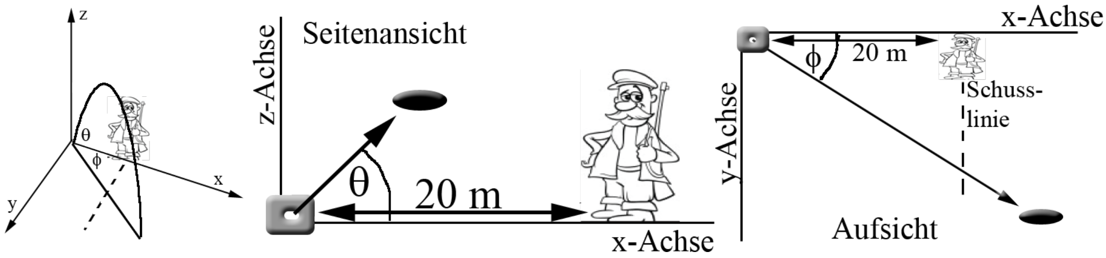
(c) Die beiden Massen sollen nun in Ruhe sein. Es gilt:

$$F_1 = F_2$$
$$F_1 = m_1 \cdot g \cdot (\sin(\alpha_1) \pm \mu_G \cdot \cos(\alpha_1))$$
$$F_2 = m_2 \cdot g \cdot (\sin(\alpha_2) \mp \mu_G \cdot \cos(\alpha_2))$$
$$\Rightarrow m_1 \cdot g \cdot (\sin(\alpha_1) \pm \mu_G \cdot \cos(\alpha_1)) = m_2 \cdot g \cdot (\sin(\alpha_2) \mp \mu_G \cdot \cos(\alpha_2))$$
$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin(\alpha_2) \mp \mu_G \cdot \cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1) \pm \mu_G \cdot \cos(\alpha_1)}$$
$$\Rightarrow \frac{m_{1max}}{m_{2min}} \approx 3,02 \qquad \frac{m_{1min}}{m_{2max}} \approx 0,79$$

[5]

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Ein Jäger ist an einem Schießstand, bei dem kleine Scheiben aus Ton aus einer Wurfmaschine geworfen werden. Die Wurfmaschine steht auf der gleichen Höhe wie der Jäger 20m zu seiner Rechten. Die Tonscheiben werden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 50m/s in einem $\theta = 60°$ Winkel zum Boden weggeworfen. Die Wurföffnung ist um $\phi = 45°$ von ihm nach vorne ins Feld geneigt.



(a) Beschreiben Sie die Bahngleichung $\vec{r}(t)$ von einer Tonscheibe in Abhängigkeit der beiden Winkel und der Zeit.

(b) Wie weit ist die Tonscheibe unter den Bedingungen ($\phi = 45°, \theta = 60°$)geflogen, bis sie am höchsten Punkt ankommt? *Hinweis:*Gemeint ist der Abstand zum Nullpunkt in der x-y-Ebene.

(c) Jetzt will der Jäger parallel zur y-Achse schiessen. Er kann den Abwurfwinkel der Wurfmaschine zum Boden, θ, zwischen 15° und 90° einstellen. Er will den höchsten Punkt der Flugbahn genau in Schusslinie vor sich haben. Auf wieviel Grad muss er den Winkel einstellen? *Hinweis:* $2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$, hat zwei Lösungen im Bereich von $\theta \in [0°, 90°]$.

(d) Jetzt wo er den Mittelpunkt der Flugparabel genau vor sich hat, will er sein Gewehr so positionieren, dass er die Tonscheiben genau trifft. Welchen Winkel zwischen Boden und Gewehr muss er wählen? (Nehmen Sie an die Kugel fliegt auf geradem Weg zum Ziel und vernachlässigen Sie deren Gravitation).

Lösung

(a) Am Besten man schaut sich erst die Projektion von $\vec{v_0}$ auf die x-y-Ebene an und dann die Projektion auf die x-z- und y-z-Ebene.

$$\vec{r}(\phi,\theta,t) = \begin{pmatrix} x(\phi,\theta,t) \\ y(\phi,\theta,t) \\ z(\theta,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cdot t \\ v_y \cdot t \\ v_z \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\phi \cdot \cos\theta \cdot t \\ v_0 \cdot \sin\phi \cdot \cos\theta \cdot t \\ v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{pmatrix}$$

[**3**]

(b) Die Wurfbahn von der Tonscheibe ist eine Parabel. Damit ist der höchste Punkt genau bei der Hälfte der Wurfweite und der Hälfte der Wurfzeit erreicht. Für die z-Koordinate gilt:

$$z(t_{Wurf}) = v_0 \cdot \sin\theta \cdot t_{Wurf} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \rightarrow t_{Wurf} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

$$t_{z_{max}} = \frac{t_{Wurf}}{2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

[2]

Auf der x-y-Ebene kann man eine neue Variable r einführen:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\phi \cos\theta \cdot t)^2 + (v_0 \sin\phi \cos\theta \cdot t)^2} \\ &= \sqrt{(v_0 \cos\theta \cdot t)^2 \cdot (\cos^2\phi + \sin^2\phi)} \\ &= v_0 \cdot \cos\theta \cdot t \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die halbe Wurfweite zu:

$$r_{z_{max}} = v_0 \cos\theta \cdot t_{z_{max}} = \frac{v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = 110\text{m}$$

[2]

(c) $\theta \in [15°, 90°]$. Die Schlusslinie vom Jäger ist durch die Ebene $\begin{pmatrix} x_J = 20\text{m} \\ y \\ z \end{pmatrix}$ gegeben.

Wenn die Tonscheibe diese Ebene trifft, gilt:

$$x_{Tonscheibe}(t_{z_{max}}) = x_J$$

$$x_J = 20\text{m}$$

$$x_{Tonscheibe}(t_{z_{max}}) = v_0 \cos\phi \cos\theta \cdot t_{z_{max}} = \frac{v_0^2 \cos\phi \cos\theta \sin\theta}{g}$$

$$\cos\theta \sin\theta = \frac{x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi}$$

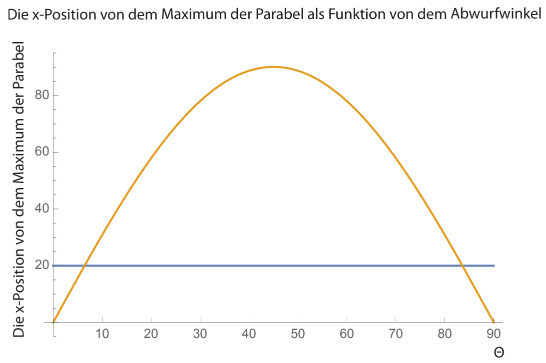
[2]

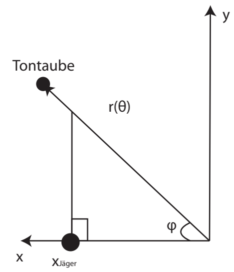
Hinweis: $2\cos\theta \sin\theta = \sin 2\theta$
Achtung: $y = \sin 2\theta$ hat zwei Lösungen zwischen 0° und 90°.

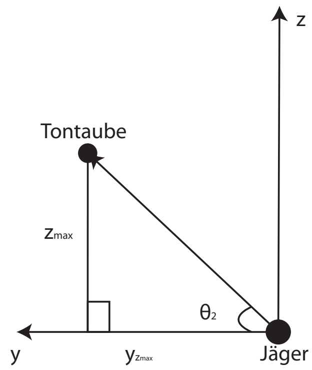
$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2 \cdot x_J \cdot g}{v_0^2 \cos\phi} = \begin{cases} 83.6° \\ [6.41°] \end{cases}$$

Der Schütze muss den Wurfwinkel somit um 23.6° größer machen. Beide Werte sind somit symmetrisch um $\theta = 45°$ verteilt (siehe Abb.(c))







[**3**]

(d) In der z-y-Ebene kann man ein einfaches Dreieck zeichnen (siehe Abb.(d)). Dabei sind die Kantenlänge gegeben durch:

$$z_{max} = v_0 \sin\theta \cdot t_{z_{max}} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{z_{max}}^2 \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

$$y_{z_{max}} = v_0 \cos\theta \sin\phi \cdot t_{z_{max}} \tag{16}$$

[**2**]

Aus der b)

$$t_{z_{max}} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{z_{max}}{y_{max}} = \frac{\tan\theta}{2\sin\phi} \tag{19}$$

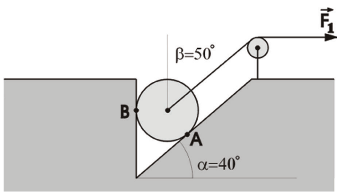
$$\tag{20}$$

$$\theta_2 = 81.0^\circ \tag{21}$$

[**3**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Eine Walze mit der Masse 500 kg liegt in einem Graben zwischen einer senkrechten Wand und einer schrägen Böschung. An der Walze ist ein Seil befestigt, über das über eine Führungsrolle die Zugkraft $\vec{F}_1$ angreift. Berechnen Sie wie groß die Normalkräfte an den Punkten A und B sind, wenn $F_1 = 1000$ N ist? ($\alpha = 40°$, $\beta = 50°$)



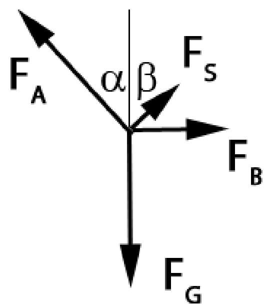
Lösung

Da die Walze sich nicht bewegt müssen die Summe aller Kräfte null sein.

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0$$

[**1**]

Die wirkenden Kräfte sind die Gravitation $\vec{F}_G$, die zwei Normalkräfte $\vec{F}_A$ und $\vec{F}_B$, sowie die Seilkraft $\vec{F}_S$.



[**2**]

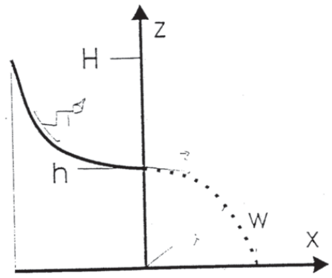
$$\sum F_x = F_S \sin\beta - F_A \sin\alpha + F_B = 0 \tag{22}$$
$$\sum F_y = F_S \cos\beta + F_A \cos\alpha - F_G = 0 \tag{23}$$

[**2**]

$$F_A = \frac{F_G - F_S \cos\beta}{\cos\alpha} = 5564\text{N} \qquad F_B = F_A \sin\alpha - F_S \sin\beta = 2810\text{N}$$

[**2**]

Aufgabe 6 (10 Punkte)



Bei einer Sprungschanze der festen Gesamthöhe H erfolgt der waagerechte Absprung bei einer (variablen) Höhe h (siehe Skizze).

(a) Zeigen Sie, dass die waagerechte Absprunggeschwindigkeit vom Schanzentisch bei vernachlässigter Reibung durch $v = \sqrt{2g(H-h)}$ gegeben ist.

(b) Wie muss man die Höhe $0 \leq h \leq H$ des Schanzentischs gewählt werden, damit die Sprungweite w möglichst groß wird. Wie groß ist $w_{\max}$?

Lösung

(a) Es ist zu zeigen, dass $v = \sqrt{2g(H-h)}$. Mit dem Energieerhaltungssatz gilt

$$mgH = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgh \Rightarrow v = v_x = \sqrt{2g(H-h)} \tag{24}$$

[**2**]

(b) Sei z die Höhe. Dann gilt

$$\begin{aligned} x = v_x t, z = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Rightarrow h = \frac{1}{2}gt_1^2 \\ \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \\ \Rightarrow w = v_x t_1 = \sqrt{2g((H-h))}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{4h(H-h)} \end{aligned}$$

[**4**]

Diese Formel liefert also die Weite eines Sprunges in Abhängigkeit von den Werten H und h.

Für das Optimum:

$$\frac{\partial w}{\partial h} = \frac{\partial}{\partial h}\left(\sqrt{4h(H-h)}\right) = \frac{4H-8h}{2\sqrt{4h(H-h)}} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow 4H - 8h = 0$$
$$\Leftrightarrow 4H = 8h$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}H$$

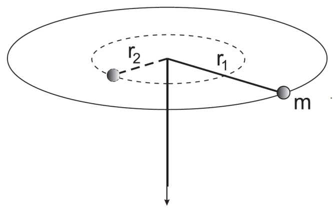
[**2**]

Für die optimale Weite ergibt sich damit

$$w = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2}H\left(H - \frac{1}{2}H\right)} = 2 \cdot \frac{H}{2} = H \tag{25}$$

[**2**]

Aufgabe 7 (6 Punkte)



Ein Stein der Masse $m = 0,3$ kg befindet sich auf einem horizontalen Tisch und wird an einer Schnur auf einer horizontalen Kreisbahn mit dem Radius r_1 reibungsfrei mit zunächst konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_1 herumgeschleudert. Die Schnur wird durch ein dünnes Loch in der Tischplatte geführt und dort durch eine Hand gehalten.

(a) Berechnen Sie den Drehimpuls L_1 in Bezug auf die Rotationsachse, den die Masse m auf der Kreisbahn mit dem Radius $r_1 = 50$ cm bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega_1 = 2\pi\mathrm{s}^{-1}$ besitzt.

(b) Durch Absenken der Hand wird der Radius auf $r_2 = 30$ cm verkürzt. Wie groß ist dann der Drehimpuls L_2 in Bezug auf die Rotationsachse? Begründen Sie kurz.

(c) Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_2 auf der Kreisbahn mit dem Radius r_2.

Lösung

(a)

$$L_1 = r_1^2 m\omega_1 = 0,471\mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

[**2**]

(b) Es gilt Drehimpulserhaltung:

$$L_1 = L_2$$

Da in einem Zentralkraftfeld Drehimulserhaltung gilt. Oder weil die Kraft (anti-)parallel zu r_1 wirkt, wirkt kein Drehmoment.

[**2**]

(c)

$$L_2 = r_2^2 m\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{L_1}{r_2^2 m} = 17,44\mathrm{s}^{-1}$$

[**2**]

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller Stammfunktionen

$$\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$

und berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Lösung:

Das Integral kann durch partielle Integration oder durch Substitution gelöst werden.

(a) Mit $u(x) = x$ und $v'(x) = \sqrt{x+1}$ gilt $u'(x) = 1$ und $v(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ und somit durch partielle Integration

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C \\ &= \frac{2}{15}(3x-2)(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

(b) Mit $u^2 = x+1$ gilt $2u\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ und somit

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x &= \int (u^2-1)u2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\left(\frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{3}u^3\right) + C \\ &= \frac{2}{15}(3x-2)(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

[**4**]

Für das bestimmte Integral ergibt sich dann

$$\int_{-1}^{0} x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = -\frac{4}{15}.$$

[**1**]