Nachklausur zur Experimentalphysik 3

Prof. Dr. S. Paul, Dr. B. Ketzer

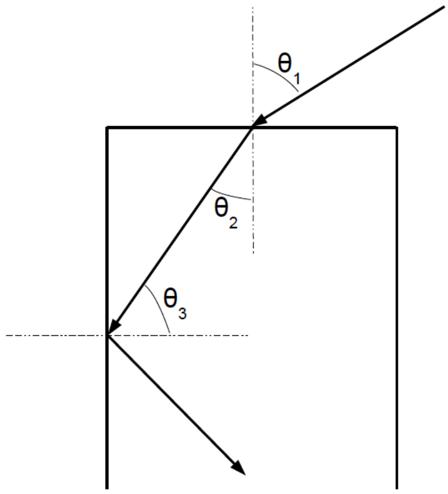
Wintersemester 2010/2011

3. April 2012

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es fällt Licht auf einen Plastikstab mit Brechungsindex n_2. Berechnen Sie den kleinsten Brechungsindex für den Plastikstab in der Abbildung, so dass jeder Strahl, der in den Stab eintritt, Totalreflexion erfährt. Der Plastikstab befindet sich in Luft mit Brechnungsindex $n_1 = 1.0$.



Lösung:

Wie aus der Abbildung ersichtlich wird, würde ein Strahl im Plastikstab totalreflektiert werden, wenn

$$\theta_3 \geq \arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right), \tag{1}$$

was der kritische Winkel ist.

[1]

Daher muss

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_3 < \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right), \tag{2}$$

oder

$$\sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) < n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right)\right) = n \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right)\right) \tag{3}$$

[**1**]

Da $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$, oder $\sin(\theta_1) \leq 1$, muss für alle Strahlen die im Stab totalreflektiert werden, gelten:

$$n \cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right)\right) > 1 \tag{4}$$

[**1**]

Also ist die Bedingung für Totalreflektion:

$$\arcsin\left(\frac{1}{n_2}\right) < \arccos\left(\frac{1}{n_2}\right), \tag{5}$$

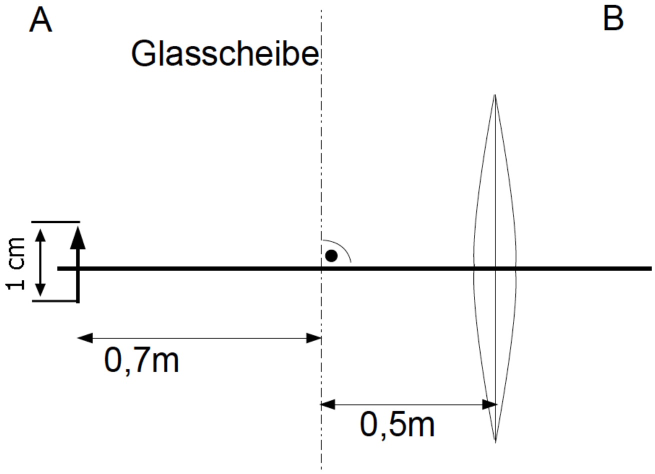
oder:

$$n > \sqrt{2} = 1.414 \tag{6}$$

[**1**]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

0.5m hinter einer Glasscheibe befindet sich eine Sammellinse mit der Brennweite 50mm. 0.7m vor der Glasscheibe befindet sich ein 1cm hoher Gegenstand, angedeutet durch den Pfeil in der Abbildung. Die Glasscheibe habe keinen Einfluss auf den Strahlenverlauf und ihre Dicke sei vernachlässigbar. Sie dient nur dazu, den Raum A (links) und den Raum B (rechts) zu trennen. In den Räumen A und B befindet sich Luft mit Brechungsindex $n_L = 1.0$.



a) Berechnen Sie die Bildweite. Befindet sich das Bild links oder rechts von der Linse?

Lösung:

Aus der Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \tag{7}$$

und mit $f = 5 \times 10^{-2}$m und $g = 1.2$m ergibt sich

$$b = 5.217 \times 10^{-2}\text{m} \tag{8}$$

Da $b > 0$ befindet sich das Bild rechts von der Linse.

[**1**]

b) Wie groß ist das Bild des Pfeils? Ist es aufrecht oder steht es auf dem Kopf?

Lösung:

Aus

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \tag{9}$$

ergibt sich

$$B = 1\text{cm}\frac{5.217 \times 10^{-2}\text{m}}{1.2\text{m}} = 0.43\text{mm} \tag{10}$$

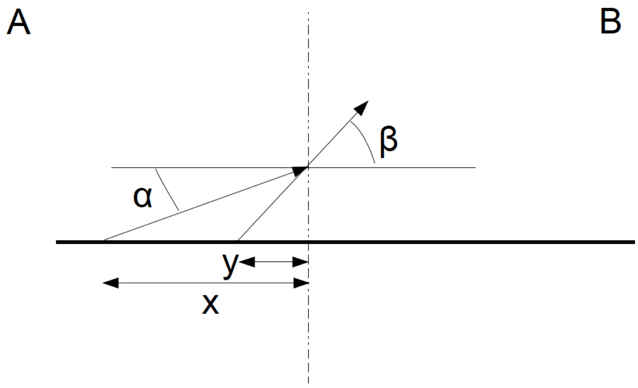
Das Bild steht auf dem Kopf.

[**1**]

Jetzt wird der Raum A mit Wasser mit $n_W = 1.33$ gefüllt. Durch die Brechung an der Grenzfläche zwischen A und B wird ein virtuelles Bild des Gegenstandes erzeugt.

c) In welcher Entfernung und auf welcher Seite von der Glasscheibe liegt das virtuelle Bild? Betrachten Sie dazu achsennahe Strahlen, die vom Gegenstand ausgehen.

Lösung:



Aus der Skizze wird ersichtlich, dass

$$x \tan(\alpha) = y \tan(\beta) \tag{11}$$

Daraus folgt mit der Kleinwinkelnäherung:

$$\frac{y}{x} = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} \approx \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{1}{n_W} \tag{12}$$

[**1**]

Also beträgt die Entfernung von der Glasscheibe

$$y = \frac{x}{n} = \frac{0.7\text{m}}{1.33} = 0.526\text{m} \tag{13}$$

Das Bild befindet sich also vor der Glasscheibe.

[**1**]

d) Wie weit verschiebt sich das von der Linse erzeugte Bild des Gegenstandes gegenüber dem Bild aus Teilaufgabe a)?

Lösung:

$$b = \left(\frac{1}{0.05\mathrm{m}} - \frac{1}{0.5\mathrm{m} + 0.526\mathrm{m}} \right)^{-1} = 5.256 \times 10^{-2}\mathrm{m} \tag{14}$$

[**1**]

Also verschiebt sich das Bild 0.4mm vom Brennpunkt weg.

[**1**]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Für Wellenlängen im sichtbaren Spektrum kann der Brechungsindex für eine bestimmte Art von Kronglas mit der Beziehung

$$n(\lambda) = 1.5255 + \frac{(4825\text{nm}^2)}{\lambda^2} \tag{15}$$

genähert werden.

a) Ist dieses Material dispersiv? Diskutieren Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Ja, das Material ist dispersiv, da der Brechungsindex n von der Wellenlänge λ abhängt. Mit steigendem λ verringert sich ω und damit n. Daher liegt normale Dispersion vor.

[**1**]

b) Bestimmen Sie den Brechungsindex für dieses Glas bei einer Wellenlänge von 400nm.

Lösung:

Die gegebene Gleichung ist

$$n(\lambda) = 1.5255 + \frac{(4825\text{nm}^2)}{\lambda^2} \tag{16}$$

In diese Gleichung wird die gegebene Wellenlänge einfach eingesetzt:

$$n(\lambda) = 1.5255 + \frac{(4825\text{nm}^2)}{(400\text{nm})^2} = 1.5556 \tag{17}$$

[**1**]

c) Bestimmen Sie die Phasengeschwindigkeit im Glas für harmonische Wellen mit Wellenlängen zwischen 400nm und 700nm.

Lösung:

Die Phasengeschwindigkeit bei $\lambda = 400\text{nm}$ ist gegeben durch

$$v_p = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8\text{m}}{1.5556} = 1.929 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{18}$$

[**1**]

Bei 700nm ist dann

$$n(\lambda) = 1.5255 + \frac{(4825\text{nm}^2)}{(700\text{nm})^2} = 1.535346 \tag{19}$$

Also ist

$$v_p = \frac{c}{n} = \frac{3 \times 10^8\text{m}}{1.535346} = 1.954 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{20}$$

[1]

Daraus wird ersichtlich, dass die Phasengeschwindigkeit unterschiedlich bei verschiedenen Wellenlängen ist.

d) Bestimmen Sie die Gruppengeschwindigkeit für einen Puls mit sehr schmaler Bandbreite zentriert bei 400nm und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Phasengeschwindigkeit des Pulses.

Lösung:

Die Gruppengeschwindigkeit kann bestimmt werden aus der Gleichung

$$v_g = v_p \left(1 + \frac{\lambda}{n}\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)\right) \tag{21}$$

[1]

Durch Ableitung erhält man

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{-2(4825 \times 10^{-18})}{\lambda^3} \tag{22}$$

Für eine Wellenlänge bei $400nm$ ist das

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{-2(4825 \times 10^{-18})}{(400\text{nm})^3} = 1.507 \times 10^5\text{m}^{-1} \tag{23}$$

[1]

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, erhält man also für die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = 1.85 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{24}$$

[1]

Daraus ist ersichtlich, dass

$$v_p > v_g \tag{25}$$

[1]

Aufgabe 4 (10 Punkte)

a) Unterscheiden Sie zwischen Fraunhofer und Fresnel Beugung in Bezug auf den unterschiedlichen experimentellen Aufbau.

Lösung:

Fraunhofer Beugung tritt auf, wenn die Lichtquelle und der Schirm, auf dem man das Beugungsmuster beobachtet, sich in unendlicher Entfernung von der Beugungsapparatur befinden, so dass der einfallende und der gebeugte Strahl als ebene Wellen betrachtet werden können. Experimentell erreicht man dies, indem das Licht von der Quelle durch eine Linse parallelisiert wird und auf den Schirm durch eine weitere Linse fokussiert wird.

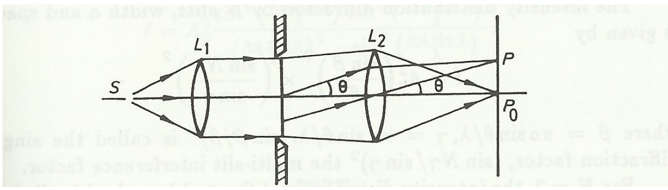
[**1**]

Fresnel Beugung hingegen wird beobachtet, wenn sich Lichtquelle und Schirm in endlicher Entfernung von der Blende befinden. Hier sind keine Linsen im experimentellen Aufbau nötig.

[**1**]

b) Zeichnen Sie schematisch einen Versuchsaufbau, mit dem man Fraunhofer Beugung beobachten kann und beschriften/erklären Sie Ihre Zeichnung.

Lösung:



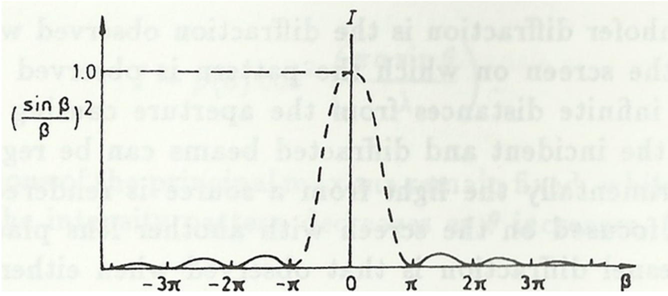
Eine Lichtquelle befindet sich vor der vorderen Brennebene einer Sammellinse L_1. Das Licht tritt aus L_1 als ebene Wellen aus. Diese ebenen Wellen fallen auf den Beugungsschirm. Hinter dem Beugungsschirm befindet sich eine weitere Sammellinse L_2. In der hinteren Brennebene von L_2 befindet sich ein Beobachtungsschirm, auf dem das Beugungsmuster beobachtet werden kann.

[**2**]

c) Zeichnen Sie das Intensitätsmuster, das man auf einem Schirm durch Fraunhofer Beugung an einem Einzelspalt mit Breite a, sowie das Intensitätsmuster, dass durch Fraunhofer Beugung an einem Doppelspalt (Spaltbreite jeweils a, Spaltabstand d) entsteht. Erklären Sie, wodurch sich diese Muster jeweils auszeichnen.

Lösung:

Intensitätsmuster für einen Einzelspalt:



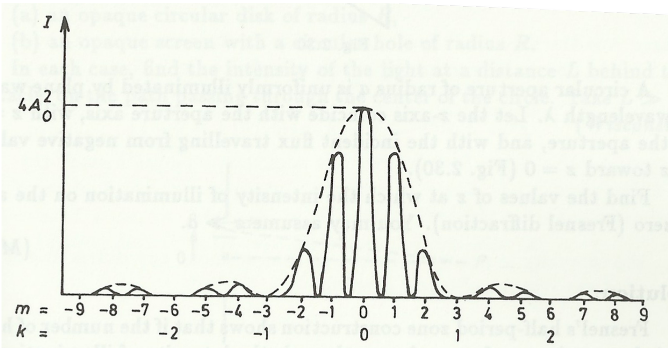
[2]

Eigenschaften des Intensitätsmusters:

- Das Hauptmaximum ergibt sich, wenn θ (siehe Abbildung in Aufgabenteil b)) gegen Null strebt.
- Zwischen zwei benachbarten Minima befindet sich ein schwächeres Maximum, dessen Intenstiät sehr viel kleiner als das des Hauptmaximus ist, und dessen Intensität mit steigendem k weiter abnimmt.

[1]

Intensitätsmuster für einen Doppelspalt:



[2]

Eigenschaften des Intenstiätsmusters:

- Das Intensitätsmuster des Doppelspalts wird durch das Intensitätsmuster von Einzelspaltbeugung moduliert.

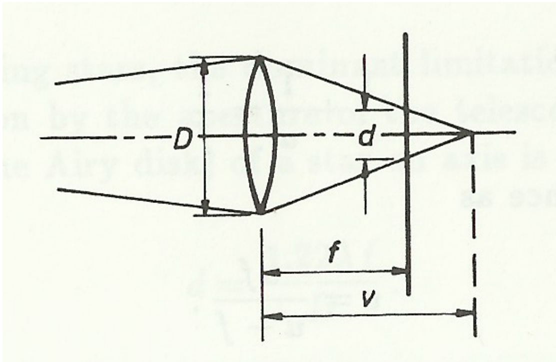
[1]

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Eine Kamera (Brennweite $f = 50\text{cm}$, Blendendurchmesser D), sensibel für Licht im sichtbaren Spektrum, ist auf die Sterne fokussiert. Danach wird es für ein Objekt benutzt, welches sich in 100m Entfernung vor der Kamera befindet. Die Kamera soll nicht neu fokussiert werden. Bestimmen Sie den Blendendurchmesser D, der die beste Auflösung für diesen Gegenstand liefern wird und geben Sie D in cm an.

Hinweis: Beachten Sie die Beugung. Nehmen Sie eine Wellenlänge von 550nm an.

Lösung:



Da die Kamera auf die Sterne fokussiert ist, befindet sich der Film genau 50cm (also die Brennweite) von der Linse entfernt. Für ein Objekt in 100m Entfernung ergibt sich aus der Linsengleichung

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \tag{26}$$

dass es sich hinter dem Film befindet.

[**1**]

Ein heller Punkt des Objekts auf der optischen Achse wird daher auf dem Film als eine Scheibe mit Durchmesser d erscheinen.

[**1**]

Die beste Auflösung wird erreicht, wenn d dieselbe Größe wir die Beugungsscheibe der Linse hat, die durch

$$d = \frac{1.22\lambda f}{D} \tag{27}$$

gegeben ist.

[**1**]

Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass

$$\frac{d}{D} = \frac{v - f}{v} \tag{28}$$

[**1**]

Daher ist

$$d = \frac{(v - f)D}{v} = \frac{fD}{u} = \frac{1.22\lambda f}{D} \tag{29}$$

[**1**]

und damit schließlich

$$D = \sqrt{1.22\lambda u} \approx 0.82\text{cm} \tag{30}$$

[**1**]

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Der Draht einer Glühbirne sei zylindrisch, mit einer Länge $l = 20\text{mm}$ und einem Radius $r = 0.05\text{mm}$. Ein elektrischer Strom heizt den Draht konstant bei einer Temperatur von $T = 5000\text{K}$. Der Draht verhalte sich wie ein schwarzer Körper, der gleichmäßig in alle Richtungen strahlt. Sie beobachten die Glühbirne bei Nacht von einer Entfernung $D = 10\text{km}$ aus. Ihre Pupille sei komplett geweitet bei einem Radius von $\rho = 3\text{mm}$.

a) Berechnen Sie die Leistung, die von dem Draht ausgestrahlt wird.

Lösung:

Aus dem Stefan-Boltzmann ergibt sich:

$$\frac{dP}{dA} = \sigma T^4, \tag{31}$$

[**1**]

wobei $\frac{dP}{dA}$ die abgestrahlte Leistung pro Einheitsoberfläche der Quelle ist und T die Temperatur in Kelvin. Multiplikation der Gleichung mit dA und Integration über die Oberfläche des Drahtes ergibt also

$$P_{ges} = A\sigma T^4 = 2\pi r l \sigma T^4 = 220\text{W} \tag{32}$$

[**1**]

b) Berechnen Sie die Strahlungsleistung, die auf Ihr Auge einfällt.

Lösung:

Da der Draht isotropisch, also gleichmäßig in alle Richtungen, ausstrahlt, ist die Leistung, die in das Auge einfällt die gesamte Strahlungsleistung multipliziert mit dem Bruchteil der Pupillenscheibe zur Gesamtoberfläche einer Kugel, die ihren Mittelpunkt in der Quelle hat und einen Radius von $D = 10\text{km}$.

$$P_{Auge} = P_{ges}\frac{\pi(3 \times 10^{-3}\text{m})^2}{4\pi(10 \times 10^3\text{m})^2} \tag{33}$$

[**1**]

c) Bei welcher Wellenlänge strahlt der Draht am stärksten?

Lösung:

Hier wird das Wiensche Gesetz angewendet:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} = \frac{2.9 \times 10^{-3}\text{mK}}{5000\text{K}} = 5.8 \times 10^{-7}\text{m} = 580\text{nm} \tag{34}$$

[1]

d) Berechnen Sie die Anzahl der Photonen, die pro Sekunde in Ihr Auge einfallen. Nehmen Sie an, dass die durchschnittliche Wellenlänge der Photonen $\lambda = 600$nm beträgt.

Lösung:

Die Energie eines Photons ist gegeben durch

$$\frac{hc}{\lambda} \tag{35}$$

[1]

Die Anzahl der Photonen ergibt sich dann aus der Gesamtleistung, die in das Auge eintritt, geteilt durch die Energie eines durchschnittlichen Photons:

$$N = \frac{P_{Auge}}{\frac{hc}{\lambda}} = 1.5 \times 10^7 \text{Photonen/Sekunde} \tag{36}$$

[1]

Aufgabe 7 (7 Punkte)

Neutronen ($T = 200\,\mathrm{K}$) aus einem Reaktor werden durch Bragg-Streuung an einem Silizium-Einkristall monochromatisiert.

a) Die Neutronen mit der wahrscheinlichsten Energie $E_0 = k_\mathrm{B}T$ werden dabei um 40.56° von der Einfallsrichtung abgelenkt. Berechnen Sie unter der Annahme, dass es sich um einen Bragg-Peak erster Ordnung handelt, den Netzebenenabstand von Silizium.

Lösung:

Für thermische Neutronen lautet der Ausdruck für den Impuls (nicht relativistisch) $p = \sqrt{2k_\mathrm{B}Tm}$, die Materiewellenl"ange λ ergibt sich dann zu:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2k_\mathrm{B}Tm}}$$

.

[1]

Die Bragg-Bedingung lautet $n\lambda = 2d\sin\theta$ für das n-te Maximum, wobei θ der Winkel der einfallenden Neutronen zur Netzebene ist.

Dieser Winkel ist halb so groß wie der Ablenkwinkel des Strahls!

Einsetzen führt zum Netzebenenabstand

$$d = \frac{hn}{2\sin\theta\sqrt{2k_\mathrm{B}Tm}}$$

Für das Maximum erster Ordnung und $\theta = 20.28°$ ergibt sich $d = 3.15 \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$.

[1]

b) Der gleiche Monochromator soll nun für Photonen benutzt werden. Welche Energie müssen diese haben, wenn die gestreuten Photonen unter dem selbem Winkel beobachtet werden sollen?

Lösung:

Die Energie von Photonen ist

$$E = \frac{hc}{\lambda}. \tag{37}$$

[1]

Einsetzen der Wellenlänge aus Aufgabe a) führt zu $E = 5.7\,\mathrm{keV}$

[1]

c) Wie groß wäre der Ablenkwinkel bezüglich der Einfallsrichtung bei Elektronen mit einer kinetischen Energie von 1 MeV?

Lösung:

Da die Ruheenergie von Elektronen $E_0 = 511\,\text{keV}$ kleiner als deren kinetische Energie ist, muss hier relativistisch gerechnet werden.

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$$

[**1**]

läßt sich der Impuls der Elektronen berechnen:

$$p = \sqrt{E^2/c^2 - m_0^2c^2},$$

mit der Gesamtenergie $E = E_0 + E_{\text{kin}}$.

[**1**]

Daraus läßt sich nun wieder die deBroglie-Wellenlänge berechnen und schließlich der Ablenkwinkel für das erste Maximum

$$\theta = \arcsin\frac{n\lambda}{2d} = \arcsin\frac{h}{2d\sqrt{(E_0 + E_{\text{kin}})^2/c^2 - m_0^2c^2}}.$$

Als Wert ergibt sich: $\theta = 0.079°$ und der Ablenkwinkel ist $2\theta = 0.159°$. Also ist dieser Monochromator für Elektronen nicht sehr geeignet.

[**1**]