2. Probeklausur in Experimentalphysik 1 - Lösung

Prof. Dr. R. Kienberger
Wintersemester 2017/18
23. Januar 2018

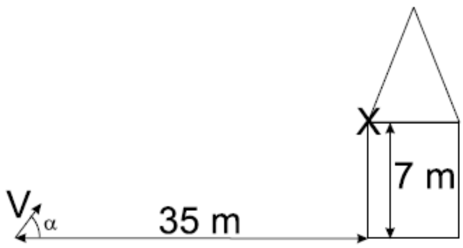
Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 Doppelseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Im Januar diesen Jahres flog in Limbach-Oberfrohna ein Auto ins Dach der Stadtkirche. Der Fahrer war mit überhöhter Geschwindigkeit von der Straße abgekommen und eine Böschung hinaufgefahren. Wie schnell war das Auto im Moment des Abhebens, wenn man annimmt, dass es durch die Böschung einen Abflugwinkel $\alpha = 45°$ erhielt? Das Auto steckte in 7 m Höhe über dem Erdboden (oberer Punkt der Böschung) im Kirchendach. Die Wand der Kirche ist 35 m vom Abhebepunkt des Autos an der Böschung entfernt. Der Luftwiderstand sei zu vernachlässigen und das Auto als Massepunkt zu betrachten.



Lösung

Wurfweite:

$$x_E = v_0 \cos\alpha \cdot t_E$$

Daraus ergibt sich die Flugzeit:

$$t_E = \frac{x_E}{v_0 \cos\alpha}$$

Wurfhöhe:

$$y_E = v_0 \sin\alpha \cdot t_E - \frac{g}{2} t_E^2$$
$$y_E = \tan\alpha \cdot x_E - \frac{g}{2} \frac{x_E^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

[2]

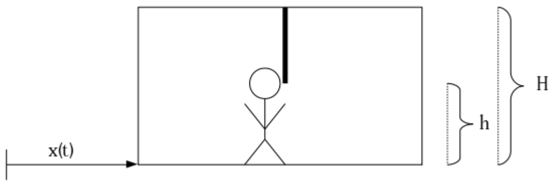
Daraus erhält man die Geschwindigkeit:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_E^2}{2\cos^2\alpha (x_E \tan\alpha - y_E)}}$$
$$v_0 = 20,7 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[2]

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Ein Mann der Masse $m = 80$ kg und der Höhe $h = 1,80$ m steht in einer Gondel ($H = 3$ m), an deren Decke ein Seil aufgehängt ist. Der Mensch hält sich nun an dem Seil fest und die Gondel setzt sich in x-Richtung in Bewegung. Die Bewegungsgleichung für die Gondel lautet $x(t) = x_0 + \frac{1}{2} a_S t^2$ mit $x_0 = 20$ m, $a_S = \frac{1}{5} g$.



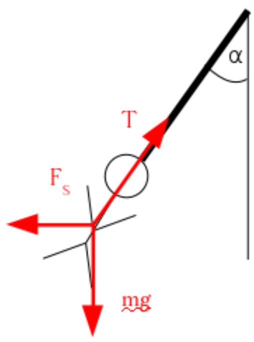
(a) Wie groß ist der Auslenkwinkel des Seils gegenüber der Senkrechten, falls keine Reibung zwischen Boden und Füßen vorhanden ist? Erstellen Sie eine Zeichnung der wirkenden Kräfte und zeichnen Sie den Auslenkwinkel ein. Achten Sie auch auf die Länge der Kräfte.

(b) Nun soll die Reibung der Person mit dem Boden mitberücksichtigt werden. Der Mann bleibt am Ursprungsort stehen und zieht mit der Kraft $F_1 = g \cdot 5$ kg am Seil. Wie groß muss der Reibungskoeffizient μ sein, damit er stehen bleiben kann? Fertigen Sie auch wieder eine Zeichnung der wirkenden Kräfte an.
(*Hinweis:* Die Scheinkraft greift am Schwerpunkt bei $h/2$ an, die Reibung an den Füßen des Mannes).

Lösung

(a) Es wirken die folgenden Kräfte:

[2]



Dabei ist T die Seilspannung und $F_S = ma_S$ die Scheinkraft in negative Bewegungsrichtung.

Im Kräftegleichgewicht gilt:

$$0 = \sum F_x = T \sin\alpha - \frac{1}{5}mg$$
$$0 = \sum F_y = T \cos\alpha - mg$$

[**1**]

Daraus erhält man die Gleichungen

$$\frac{1}{5}mg = T \sin\alpha$$
$$mg = T \cos\alpha$$

und der Auslenkungswinkel α ergibt sich durch Division der beiden Gleichungen

$$\frac{T \sin\alpha}{T \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{\frac{1}{5}mg}{mg} = \frac{1}{5}$$
$$\Rightarrow \alpha = 11{,}31^\circ.$$

[**2**]

(b) Es wirken die folgenden Kräfte:

[**3**]

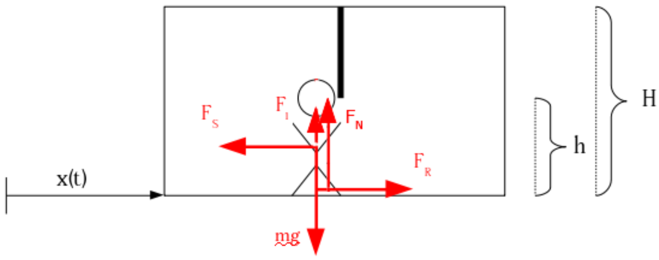
Die Kraft F_1 reduziert das Gewicht auf den Gondelboden. Die Normalkraft beträgt also

$$F_N = mg - F_1 = g \cdot 75 \text{ kg}.$$

Für die Reibungskraft wird der Grenzfall der größtmöglichen Reibung

$$F_R = \mu F_N$$

angenommen.



[2]

Damit der Mann stehen bleibt, muss ein Kräftegleichgewicht zwischen F_R und F_S herrschen. Da die beiden Kräfte jedoch an unterschiedlichen Punkten angreifen, müssen die Drehmomente um die Aufhängung betrachtet werden:

$$M_S = M_R$$
$$\left(H - \frac{h}{2}\right) \cdot F_S = H \cdot F_R$$
$$\left(H - \frac{h}{2}\right) m a_S = H \mu F_N$$

Für den Reibungskoeffizient μ gilt somit

$$\mu = \left(1 - \frac{h}{2H}\right) \frac{m a_S}{F_N} = \left(1 - \frac{h}{2H}\right) \frac{m}{5(m - 5\ \mathrm{kg})} = 0,15.$$

[5]

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Ein zylindrisches Gefäß ist bis zur Höhe H mit Wasser gefüllt ($H = 2$ m). Es hat in der Höhe $h_1 = 40$ cm über dem Boden eine Öffnung, aus der waagrecht ein Wasserstrahl austritt.

(a) Welche Strecke s liegt der Auftreffpunkt P auf dem Boden vom Gefäß entfernt?

(b) In welcher Höhe h_2 muss man eine zweite Öffnung anbringen, damit sich beide Wasserstrahlen im Punkt P treffen?

Lösung

(a) Die Austrittsgeschwindigkeit des Wassers in der Höhe h_1 ergibt sich durch die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mg(H - h_1) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_1)} = 5,6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[2]

Die Fallzeit aus der Höhe h_1 bis zum Punkt P beträgt

$$t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 0,286 \text{ s.}$$

[2]

Es folgt für die Entfernung s

$$s = v \cdot t = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h_1)} \cdot \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{4 \cdot h(H - h_1)} = 1,6 \text{ m.}$$

[2]

(b) Die allgmeine Formel für s in Abhängigkeit von der Höhe h lautet

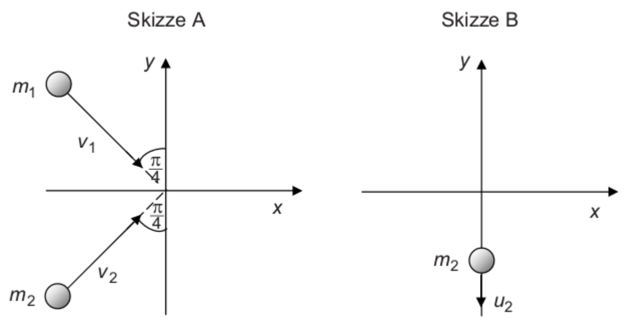
$$s(h) = \sqrt{4h(H - h)}$$

Aus dieser Formel erkennt man, dass aus Symmetriegründen $h_2 = 1,6$ m sein muss.

[2]

Aufgabe 4 (16 Punkte)

Zwei Körper '1' und '2' gleicher Masse ($m_1 = m_2 = m$) stoßen in der gezeichneten Geometrie nach Skizze A zusammen. Vor dem Stoß sind die Beträge ihrer Geschwindigkeiten mit $v_1 = v_2 = v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ebenfalls gleich. Nach dem Stoßvorgang bewegt sich Körper '2' mit der Geschwindigkeit $u_2 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in der in Skizze B gezeichneten Richtung.



(a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit (Betrag und Richtung) u_1 des Körpers '1' nach dem Stoß.

(b) Wie ist der Stoßvorgang zu klassifizieren? Bestimmen Sie dazu die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß. Wurden kinetische Energien in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt oder wurde bei diesem Stoßprozess Energie zugeführt?

Lösung

(a) Impulserhaltung für die beiden Koordinatengleichungen liefert

- für die x-Koordinatenrichtung

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \tag{1}$$

- für die y-Koordinatenrichtung

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y}. \tag{2}$$

[2]

Dazu kommen die speziellen Bedingungen

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 = m \\ v_1 &= v_2 = v. \end{aligned}$$

Die geometischen Beziehungen vor dem Stoß (Skizze A) liefern für die Komponenten

$$\begin{aligned} v_{1x} &= v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}v \\ v_{1y} &= -v\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}v \\ v_{2x} &= v \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}v \\ v_{2y} &= v\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}v. \end{aligned}$$

[4]

Die geometrischen Bedingungen nach dem Stoß (Skizze B) liefern für die Komponenten

$$\begin{aligned} u_{2x} &= 0 \\ u_{2y} &= u_2. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen (1) und (2) liefert:

- Für die x-Koordinatenrichtung

$$m\frac{1}{2}\sqrt{2}v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}v = m u_{1x} + 0,$$

also

$$u_{1x} = \sqrt{2}v = 14,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

[1]

- Für die y-Koordinatenrichtung

$$\begin{aligned} -m\frac{1}{2}\sqrt{2}v + m\frac{1}{2}\sqrt{2}v &= m u_{1y} + m u_2 \\ 0 &= u_{1y} + u_2 \\ u_{1y} &= -u_2 = 5,0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \end{aligned}$$

[**1**]

Aus den Komponenten der Geschwindigkeiten von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich der Betrag der Geschwindigkeit u_1 durch den Satz des Pythagoras

$$u_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2 = (200 + 25)\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 225\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2};$$

also ist

$$u_1 = 15\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

[**2**]

Für die Richtung des Geschwindigkeitsvektors von Körper '1' nach dem Stoß ergibt sich die trigonometrische Beziehung

$$\tan\phi = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{5,0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{14,1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0,35\ ;$$

also ist

$$\phi = 19,5°.$$

Hinweis: Wenn die Winkel anders definiert sind, erhält man den Gegenwinkel $\phi = 70,5°$.

[**2**]

(b) Für einen schiefen Stoß in einer Ebene müssen zur Klassifikation elastisch/inelastisch/vollständig inelastisch die kinetischen Energien der Translation vor und nach dem Stoß miteinander verglichen werden.
Es gilt

$$E_{kin}^{trans}(vor) = E_{kin}^{trans}(nach) + Q_{Verlust}.$$

Ein Stoßvorgang ist vollständig elastisch, wenn $Q_{Verlust} = 0$ und inelastisch, wenn $Q_{Verlust} \neq 0$ ist.

Mit den Ergebnissen von Teilaufgabe (a) erhält man für die kinetischen Energien vor und nach dem Stoßprozess

$$\begin{aligned} E_{kin}^{trans}(vor) &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= m \cdot 100\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{kin}^{trans}(nach) &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m \cdot \left(15^2 + 5^2\right)\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \\ &= m \cdot 125\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$E_{kin}^{trans}(nach) > E_{kin}^{trans}(vor).$$

Die kinetischen Energien beider Körper sind nach dem Stoß größer als vor dem Stoß. Beim Stoßvorgang wurde Energie zugeführt; der Stoßvorgang ist inelastisch

[**4**]

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein Schwungrad, dessen Trägheitsmoment $\Theta = 200\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ beträgt, rotiert anfänglich mit 20 Umdrehungen pro Sekunde. Eine Minute nach Abschalten des Antriebs bleibt es stehen. Berechnen Sie das konstante bremsende Drehmoment. Wie groß ist die Winkelbeschleunigung während des Bremsvorgangs? Berechnen sie außerdem die Anzahl der Umdrehungen des Schwungrads, die es vom Moment des Abschaltens bis zu seinem Stillstand ausführt.

Lösung

Zwischen Drehmoment und Winkelbeschleunigung gilt die Beziehung

$$M = \Theta \cdot \alpha.$$

Unter der Voraussetzung, dass α konstant ist, gilt

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = 2\pi \frac{f}{t} = -2,09\ \frac{1}{\mathrm{s}^2}.$$

[**3**]

Für das bremsende Drehmoment ergibt sich dann

$$M = \Theta \cdot \alpha = -418,9\ \mathrm{Nm}.$$

Für den Winkel, der beim Bremsvorgang zurückgelegt wird, gilt

$$\phi = \omega_0 t + \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 = 3762.$$

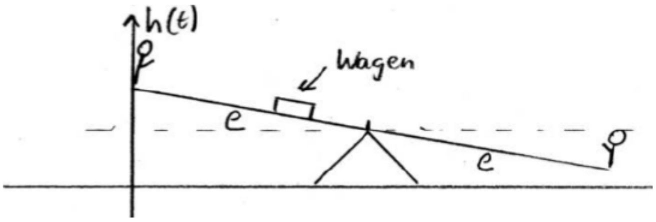
Daraus ergibt sich für die Anzahl der Umrehungen

$$N = \frac{\phi}{2\pi} = 598,7.$$

[**4**]

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Ein Wagen fährt reibungsfrei auf dem Balken einer Wippe, auf der zwei Kinder sitzen. Wenn die Kinder wippen, fährt der Wagen hin und her.
(*Hinweis:* $h(t) = h_0 \sin\omega_0 \cdot t$ für das linke Kind)



(a) Geben Sie die Bewegungsgleichung des Wagens an.

Hinweis: Der Rest der Aufgabe geht nicht in die Bewertung ein, da hier eine Zentrifugalkraft wirkt und damit das Problem nicht sinnvoll lösbar ist.

(b) Wo befindet sich der Wagen, wenn die Wippe gerade am Umkehrpunkt ist (eines der Kinder ist ganz oben)?

(c) Nun wippen die Kinder gerade so, dass der Wagen den ganzen Wippbalken (Länge: $2l$) entlang fährt, ohne an eines der Kinder anzustoßen. Wie lautet der Zusammenhang zwischen der Wippfrequenz ω und der Wippamplitde h_0?

Lösung

(a) Die Trägheitskraft

$$F_T = m\ddot{x}$$

ist gleich der Hangabtriebskraft

$$F_H = \frac{h(t)}{l} \cdot mg = \frac{h_0 \sin(\omega_0 t)}{l} \cdot mg$$

und der Zentrifugalkraft, da der Wagen sich in einem beschleunigten Bezugssystem befindet

$$F_Z = m\omega_0^2 x$$

[2]

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m\ddot{x} = \frac{h_0 \sin(\omega_0 t)}{l} \cdot mg + m\omega_0^2 x$$

[1]

Für den Fall, dass sich die Wippe nur langsam bewegt (kleines ω_0) und der Wagen nur in der Mitte der Schaukel ausgelenkt wird (kleines x), kann die Zentrifugalkraft vernachlässigt werden.

$$m\ddot{x} = \frac{h_0 \sin(\omega_0 t)}{l} \cdot mg$$

Mathematische Ergänzungen (11 Punkte)

Betrachten Sie einen homogenen Kreiskegel mit Radius R, Höhe h und Masse M.

(a) Für jede Koordinate x_i des Schwerpunkts gilt mit dem Volumen des Kegels $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

$$x_i = \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}^3x$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts, wenn der Kegel mit der Spitze im Ursprung senkrecht auf der x-y-Ebene liegt.
Hinweis: Benutzen Sie die Symmetrie, um das Problem zu vereinfachen.

(b) Berechnen Sie explizit durch Integration in Zylinderkoordinaten das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich einer Achse parallel zur Kreisfläche durch die Kegelspitze.
Zur Kontrolle: das Trägheitsmoment ist $I_\mathrm{K} = \frac{3}{20}M(4h^2 + R^2)$.

(c) Wie lautet das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich einer Achse durch den Schwerpunkt bei $z = \frac{3}{4}h$ parallel zu der Kreisfläche?

Lösung

(a) Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt bei $x = y = 0$. Die Integration für die z-Koordinate kann in Zylinderkoordinaten erfolgen

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{V}\int z\,\mathrm{d}^3x \\
&= \frac{1}{V}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^h\mathrm{d}z\int_0^{z\frac{R}{h}}\mathrm{d}\bar{r}\,\bar{r}z \\
&= \frac{1}{V}2\pi\int_0^h\mathrm{d}z\,z\left[\frac{1}{2}\bar{r}^2\right]_0^{z\frac{R}{h}} \\
&= \frac{1}{V}\pi\int_0^h\mathrm{d}z\,z^3\frac{R^2}{h^2} \\
&= \frac{1}{V}\pi\frac{R^2}{h^2}\frac{1}{4}h^4 \\
&= \frac{\pi R^2 h^2}{4V} = \frac{3}{4}h
\end{aligned}$$

[**4**]

(b) Für das Trägheitsmoment kann die gleiche Parametrisierung verwendet werden. Die Rotationsachse ist jetzt die x-Achse. Der Abstand zur Rotationsachse somit

$$r_\perp^2 = z^2 + y^2 = z^2 + \bar{r}^2\cos^2\varphi$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
I &= \varrho \int z^2 + y^2 \, \mathrm{d}^3x \\
&= \varrho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{z\frac{R}{h}} \mathrm{d}\bar{r}\, \bar{r}(z^2 + \bar{r}^2 \cos^2\varphi) \\
&= 2\pi\varrho \int_0^h \mathrm{d}z\, z^2 \left[\frac{1}{2}\bar{r}^2\right]_0^{z\frac{R}{h}} + \pi\varrho \int_0^h \mathrm{d}z \, \left[\frac{1}{4}\bar{r}^4\right]_0^{z\frac{R}{h}} \\
&= \pi\varrho\frac{R^2}{h^2} \int_0^h \mathrm{d}z\, z^4 + \frac{1}{4}\pi\varrho\frac{R^4}{h^4} \int_0^h \mathrm{d}z\, z^4 \\
&= \pi\varrho\frac{R^2}{h^2}\frac{1}{5}h^5 + \frac{1}{4}\pi\varrho\frac{R^4}{h^4}\frac{1}{5}h^5 \\
&= \pi\varrho R^2 \frac{1}{20}(4h^3 + R^2 h) = \frac{3}{20}M(4h^2 + R^2)
\end{aligned}
$$

[**5**]

(c) Das soeben berechnete Trägheitsmoment ist das „verschobene“ Trägheitsmoment I. Das Trägheitsmoment um den Schwerpunkt ist entsprechend des Satzes von Steiner reduziert:

$$
I_{\mathrm{CM}} = \frac{3}{20}M(4h^2 + R^2) - M\left(\frac{3}{4}h\right)^2 = \frac{3}{80}M(h^2 + 4R^2).
$$

[**2**]