Technische Universität München **Wintersemester 2006/07**

Theoretische Physik 2: ELEKTRODYNAMIK, DVP-Klausur

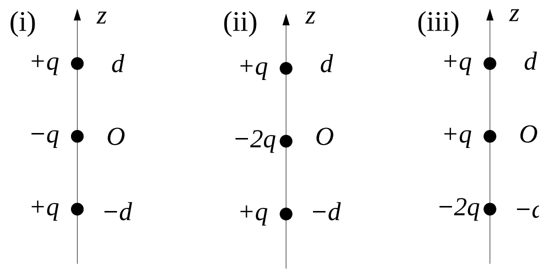
Freitag, 23.03.2007 10:00 – 11:30

1. (a) Berechnen Sie für die folgenden Vektorpotenziale $\vec{A}_i$ das zugehörige Magnetfeld $\vec{B}_i$:

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} -B_0 y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}B_0 y \\ \frac{1}{2}B_0 x \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

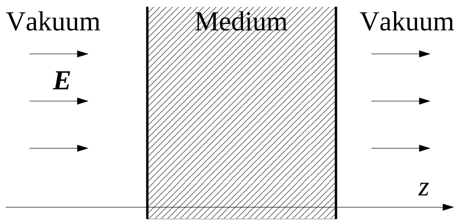
Geben Sie eine skalare Eichfunktion $f(\vec{r})$ an, für welche gilt: $\vec{A}_3 = \vec{A}_1 + \vec{\nabla} f$. (4P)

(b) Berechnen Sie für die folgenden elektrostatischen Ladungsverteilungen das Monopolmoment Q, das Dipolmoment $\vec{p}$ und den spurlosen Quadrupoltensor Q_{ij} in kartesischer Darstellung.



(9P)

(c) Ein homogenes Dielektrikum mit relativer Dielektrizitätskonstante $\epsilon > 1$ ist von Vakuum umgeben, in dem ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E}$ herrscht, das in z-Richtung zeigt, siehe Skizze.



Skizzieren Sie qualitativ, wie die Stärke $|\vec{E}|$ des elektrischen Feldes und die Stärke $|\vec{D}|$ der dielektrischen Verschiebung von z abhängen, insbesondere bei den Übergängen zwischen Vakuum und Medium. (3P)

2. Eine linear polarisierte ebene Welle propagiert in z-Richtung und fällt bei $z = 0$ auf eine ideal reflektierende Wand (z.B. einen idealen Leiter, $\epsilon \to \infty$, $\mu \to \infty$) in der x-y-Ebene, $\vec{E}_{\mathrm{in}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\mathrm{i}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $z < 0$.

   (a) Welche Stetigkeitsbedingungen müssen an der Grenzfläche erfüllt werden? (4P)

   (b) Welcher Vorfaktor $\vec{E}_{\mathrm{r}}$ in der reflektierten Welle $\vec{E}_{\mathrm{refl}}(\vec{r}, t) = \vec{E}_{\mathrm{r}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$, $z < 0$, garantiert die Erfüllung der einschlägigen Stetigkeitsbedingungen? (1P)

   (c) Welcher Druck ensteht durch die Reflexion der Welle an der Fläche? (4P)

3. Eine Punktladung Q liegt im Vakuum am Punkt $x = d$, $y = d$, $z = 0$. Im Dreiviertelraum $x \leq 0$ oder $y \leq 0$ befindet sich ein idealer Leiter, dessen Oberfläche durch die x-z-Halbebene $x \geq 0$ und die y-z-Halbebene $y \geq 0$ gegeben ist. Berechnen Sie die Dichte $\sigma(x, y = 0, z)$ bzw. $\sigma(x = 0, y, z)$ der an der Oberfläche des Leiters influenzierten Ladungen. (6P)

   Mit welcher führenden Potenz von $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ fällt das elektrostatische Potenzial bei großen Abständen im leiterfreien Viertelraum $x > 0$ und $y > 0$ ab? (2P)

4.(a) Drücken Sie die folgenden Beziehungen so durch Vierer-Vektoren aus, dass ihre Lorentz-Invarianz deutlich sichtbar ist:
Lorentz-Eichung der Potenziale, Dispersionsrelation, Kontinuitätsgleichung, Wellengleichung, Phaseninvarianz einer ebenen Welle. (5P)

(b) Eine linear polarisierte ebene Welle propagiert im Bezugsystem K in z-Richtung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \ , \quad \vec{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \eta > 0 \ .$$

Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r},t)$. (3P)

(c) Das Bezugsystem K′ stimmt bei $t = t' = 0$ mit K überein und bewegt sich relativ zu K ohne Drehung mit Geschwindigkeit v in x-Richtung. In K′ hat die ebene Welle die Form $\vec{E}\,'(\vec{r}\,',t') = \vec{E}_0'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'-\omega' t')}$, und das zugehörige Magnetfeld ist $\vec{B}\,'(\vec{r}\,',t') = \vec{B}_0'\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}\,'\cdot\vec{r}\,'-\omega' t')}$.

(i) Berechnen Sie die Frequenz ω' in K′. (2P)

(ii) Berechnen Sie den Wellenvektor $\vec{k}'$ der ebenen Welle in K′. (2P)

(iii) Berechnen Sie die Vorfaktoren $\vec{E}_0'$ und $\vec{B}_0'$ in K′. (4P)

(iv) Rechnen Sie explizit nach, dass $\vec{k}'$, $\vec{E}_0'$, und $\vec{B}_0'$ paarweise orthogonal sind. (3P)

Nützliche Information:

- Maxwellgleichungen

$$\begin{array}{lclclclclcl} \vec{\nabla}\cdot\vec{D} &=& \rho_{\mathrm{frei}} & \quad & \vec{\nabla}\times\vec{E} &=& -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \quad & \vec{D} &=& \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &=& 0 & & \vec{\nabla}\times\vec{H} &=& \vec{j}_{\mathrm{frei}} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} & & \vec{H} &=& \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} \end{array}$$

Poynting-Vektor: $\vec{E}\times\vec{H}$ Impulsdichte: $\vec{D}\times\vec{B}$

- Lorentz Transformation (K' bewegt sich in x-Richtung)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} c_0 t' = x_0' &=& \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x_1' &=& \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x_2' &=& x_2 \\ x_3' &=& x_3, \end{array} \right. \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \gamma &=& 1/\sqrt{1-\beta^2}, \\ \beta &=& v/c_0 \end{array} \right.$$

- Transformation der Felder (K' bewegt sich in x-Richtung)

$$\begin{array}{lcllcl} E_1' &=& E_1 & \quad B_1' &=& B_1 \\ E_2' &=& \gamma(E_2 - c_0\beta B_3) & \quad B_2' &=& \gamma(B_2 + (\beta/c_0)E_3) \\ E_3' &=& \gamma(E_3 + c_0\beta B_2) & \quad B_3' &=& \gamma(B_3 - (\beta/c_0)E_2) \end{array}$$

- Druck $= \dfrac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \dfrac{\text{Impulsübertrag}}{\text{Fläche}\cdot\text{Zeit}}$.