....
Note

Name	Vorname

Matrikelnummer	Studiengang (Hauptfach)	Fachrichtung (Nebenfach)

Unterschrift der Kandidatin/des Kandidaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Fakultät für Mathematik

Probeklausur
Mathematik 3 für Physik
(Analysis 2)

Prof. Dr. S. Warzel

15. Juni 2009, 12:20 – 13:50 Uhr

Hörsaal: .... Reihe: .... Platz: ....

Hinweise:

Überprüfen Sie die Vollständigkeit der Angabe: **8** Aufgaben

Bearbeitungszeit: **90** min

Erlaubte Hilfsmittel: **zwei** selbsterstellte DIN A4 Blätter

Bei Multiple-Choice-Aufgaben sind **genau** die zutreffenden Aussagen anzukreuzen.
Bei Aufgaben mit Kästchen werden nur die Resultate **in diesen Kästchen** berücksichtigt.

	I	II
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
$\sum$		

I ....
Erstkorrektur

II ....
Zweitkorrektur

Nur von der Aufsicht auszufüllen:

Hörsaal verlassen von .... bis ....

Vorzeitig abgegeben um ....

Besondere Bemerkungen:

1. **Stetigkeit** **(8 Punkte)**
Sei $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $M \subset \mathbb{R}^m$ offen. Zeigen Sie, dass das Urbild $f^{-1}(M) \subset \mathbb{R}^n$ offen ist.

2. **Krümmung einer Klothoide** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \int_0^t \cos\left(u^2/2\right) \mathrm{d}u \\ \int_0^t \sin\left(u^2/2\right) \mathrm{d}u \end{pmatrix}$$

an der Stelle $t > 0$ gleich ihrer Länge $L(t)$ ist.

HINWEIS: Die Krümmungsformel lautet $\kappa = |(\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y})/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}|$, wobei $\vec{r} = \binom{x}{y}$.

3. **Wegintegral** **(4 Punkte)**
Sei $F \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ein Kraftfeld und $x \in C^2([t_0, t_1], \mathbb{R}^3)$, $t \mapsto x(t)$, die Bahn eines Teilchens der Masse $m = 1$, welches sich unter dem Einfluss der Kraft F gemäss des 2. Newtonschen Gesetzes $F(x(t)) = m\,\ddot{x}(t)$ im Zeitintervall $[t_0, t_1]$ von $x(t_0) = (0,0,0)$ nach $x(t_1) = (1,1,1)$ bewege und bei $x(t_0)$ die Geschwindigkeit $|\dot{x}(t_0)| = 0$ und bei $x(t_1)$ die Geschwindigkeit $|\dot{x}(t_1)| = 1$ besitze. Wie groß ist die von F geleistete Arbeit, d.h. die entlang der Teilchenbahn integrierte Kraft?

☐ -1 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $-\frac{1}{2}$

4. **Separierbare Differentialgleichungen** **(8 Punkte)**

(a) Finden Sie auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen von $yy' = x(1 - y^2)$ mit $y(0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $y_0 > 0$: **(2)**

$y(x) =$

Für $y_0 < 0$: **(2)**

$y(x) =$

(b) Wieviele konstante Lösungen gibt es? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(c) Wieviele auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungen mit $y(0) = 0$ gibt es? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

5. **Lineare Differentialgleichungen** **(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 0$ $(*)$.

(a) Welche Dimension hat der Lösungsraum von $(*)$? **(2)**

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

(b) Welche der folgenden Funktionen von x sind Lösungen von $(*)$? **(2)**

☐ $-\ln x$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ $2e^{-x}$ ☐ $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

(c) Geben Sie ein Fundamentalsystem von $(*)$ an: **(2)**

(d) Geben Sie die Menge aller reellen Lösungen der Differentialgleichung $y''' + 7y'' + 15y' + 9y = 3$ an: **(2)**

6. **Differenzierbarkeit** **(8 Punkte)**

Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

(a) Für den Punkt $a = (0,0)$ und den Vektor $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ berechne man **[2]**

$$\boxed{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \qquad\qquad}$$

und **[2]**

$$\boxed{\partial_x f(a) = \qquad\qquad} \qquad \boxed{\partial_y f(a) = \qquad\qquad}$$

(b) Zeigen Sie, dass f im Ursprung nicht total differenzierbar ist. **[4]**

7. **Extrema** **(8 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(u,v) := u^3 + v^3 + u^2 + v^2,$$

und die folgenden Punkte in $\mathbb{R}^2$,

$$x_1 = (0,0), \quad x_2 = (0, 2/3), \quad x_3 = (-2/3, 0), \quad x_4 = (-1, 0), \quad x_5 = (-2/3, -2/3).$$

Welche Aussagen sind richtig?

(a) f besitzt einen kritischen Punkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(b) f besitzt eine lokales Maximum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(c) f besitzt eine lokales Minimum in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

(d) f besitzt einen Sattelpunkt in **[2]**

☐ x_1 ☐ x_2 ☐ x_3 ☐ x_4 ☐ x_5

8. **Taylor-Formel** **(8 Punkte)**

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$, $a, x \in U$. Welches sind die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Taylorformel 1. Ordnung für $f(x)$ im Entwicklungspunkt a, in der das Restglied durch die Hesse-Matrix in einem Punkt ausgedrückt wird? **[2]**

(b) Wie lautet die Taylor-Formel in diesem Fall? **[6]**