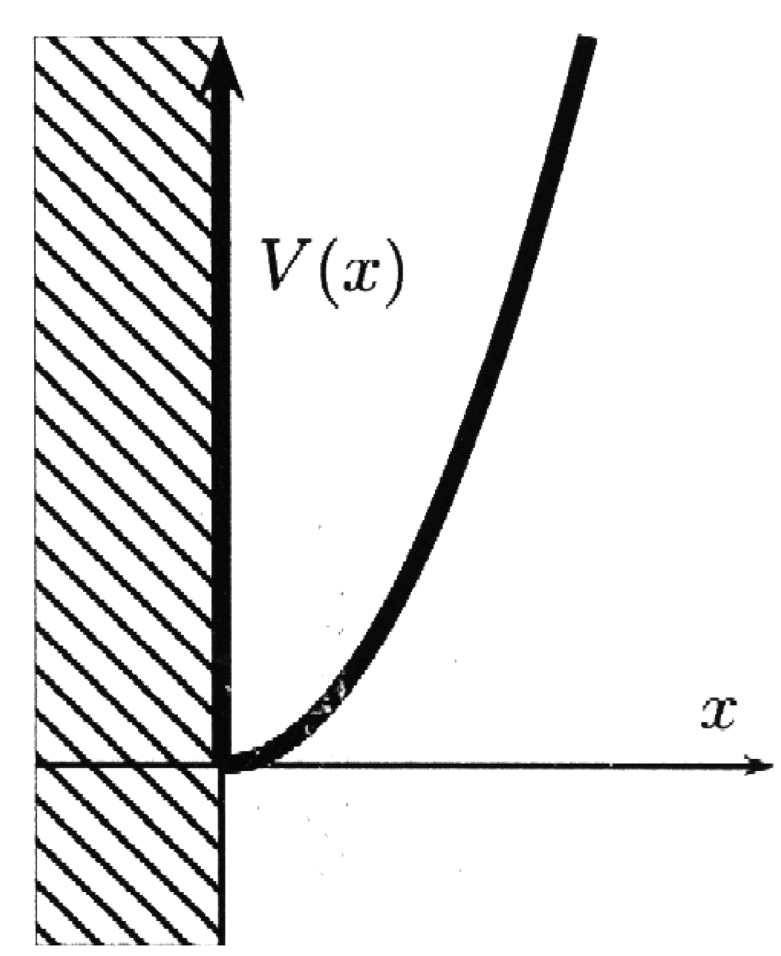
Vordiplomsprüfung

Prof. Lindner **Quantenmechanik 1** **17.09.2004**

- Diese Prüfung beinhaltet 5 Aufgaben und 90 Punkte.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Die Punkte sind jeweils am Rand des Blattes angegeben.
- Die angegeben Punkte dienen als Richtlinie für die Bearbeitungszeit in Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
- Schreiben Sie deutlich. Unleserliche Antworten werden nicht bewertet.

1. Betrachten Sie das eindimensionale Potentialproblem

$$V(x) = \begin{cases} \infty\,, & x < 0 \\ \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\,, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } m, \omega > 0.$$



2 (a) Formulieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Problem.

6 (b) Wie lauten die Rand- bzw. Anschlussbedingungen für die Lösung $\psi(x)$ der zeitunabhängigen Schrödingergleichung.

6 (c) Geben Sie die Lösungen des Problems an.

4 (d) Wie lauten die Energieeigenwerte des Systems?

8 (e) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ für den Grundzustand.

Hinweise zu Aufgabe 1:

- *Die Lösungen des harmonischen Oszillators sind gegeben durch*

$$\psi_n^{\text{H.O.}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, x_0}}\, H_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2\right\}$$

mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ *und* $H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots$.

- *Integrale der Form* $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, e^{-\alpha x^2}$ *können durch Differentiation der Integrale*

$$I_0(\alpha) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} \quad \textit{bzw.} \quad I_1(\alpha) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-\alpha x^2}$$

nach α *berechnet werden.*

2. Seien $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ hermitesche Operatoren mit nicht-entartetem Spektrum.

3 (a) Wie lautet das Inverse von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$?

8 (b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ simultan diagonalisiert werden können, falls $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}] = 0$ gilt.

6 (c) Beweisen Sie, dass die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ reell sind.

6 (d) Begründen Sie: Falls $\boldsymbol{A}$ mit zwei Komponenten des Drehimpulsoperators $\vec{\boldsymbol{L}}$ kommutiert, kommutiert $\boldsymbol{A}$ mit allen Komponenten.

3 (e) Was muss für α gelten, damit $\exp(\alpha \boldsymbol{A})$ unitär ist?

12 3. Betrachten Sie das δ-Potential

$$V(x) = -F\,\delta(x)$$

mit $F > 0$. Berechnen Sie die Streuung einer von links einlaufenden Welle an diesem Potential und bestimmen Sie den Reflexionskoeffizienten

$$R = \frac{|j_{\text{reflektiert}}|}{|j_{\text{einlaufend}}|}\,,$$

wobei $j_{\text{reflektiert}}$ bzw. $j_{\text{einlaufend}}$ die Stromdichte der reflektierten bzw. einlaufenden Welle bezeichnet. [Hilfe: *Eine Randbedingung bei $x = 0$ lautet (für $\varepsilon > 0$):*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\varepsilon} - \left.\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\right|_{x=-\varepsilon} \right\} = -\frac{2m}{\hbar^2} F\psi(0,t)\ .] \tag{1}$$

4. Ein starrer Rotator mit Trägheitsmoment I werde durch den Hamiltonoperator

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{1}{2I}\vec{\boldsymbol{L}}^2$$

beschrieben. $\vec{\boldsymbol{L}}$ ist der Drehimpulsoperator.

4 (a) Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?

10 (b) Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ führt das zu einem Wechselwirkungsterm

$$\boldsymbol{H}_1 = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} = -\mu B\cos\theta\ .$$

$\boldsymbol{H}_1$ soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur für die Grundzustandsenergie des Rotators.

[Hilfe: *Es gilt für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$: $Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$, $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$.*]

7 5. (a) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator

$$\boldsymbol{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} + V(\boldsymbol{x})$$

die Kommutatorrelation

$$\left[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right] = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{x}^2} - \boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x})$$

erfüllt.

5 (b) Es genüge nun $V(\boldsymbol{x})$ der Homogenitätsbedingung, d. h. es gelte

$$\boldsymbol{x}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}V(\boldsymbol{x}) = \lambda V(\boldsymbol{x})$$

mit $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für einen Energie-Eigenzustand $|\psi\rangle$ die Erwartungswerte der potentiellen Energie und der kinetischen Energie die Relation

$$\left\langle \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \right\rangle_\psi = \frac{\lambda}{2}\left\langle V(\boldsymbol{x})\right\rangle_\psi$$

erfüllen.