# 2.Probeklausur in Experimentalphysik 1

Prof. Dr. F. Pfeiffer
Wintersemester 2013/2014
21. Januar 2014

Zugelassene Hilfsmittel:

- 1 einseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt
- 1 nichtprogrammierbarer Taschenrechner

Bearbeitungszeit 90 Minuten. Es müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst sein, um die Note 1,0 zu erhalten.

## Aufgabe 1 (4 Punkte)

Finden Sie den Abschusswinkel zur Horizontalen $\alpha$ eines Projektils, dessen Reichweite zweimal so groß wie seine maximale Höhe ist. Der Luftwiderstand ist zu vernachlässigen.

## Lösung:

Die Bahn des Projektils ist gegeben durch:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0\cos(\alpha)t \\ v_0\sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

[**1**]

Die maximale Höhe ist dann erreicht, wenn $v_y = 0$, also zur Zeit

$$t_{max} = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$$

Zu diesem Zeitpunkt beträgt die Höhe des Projektils

$$y_{max} = v_0\sin(\alpha)\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} - \frac{1}{2}g\frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{g^2} = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}$$

[**1**]

Die maximale Reichweite ist gegeben durch:

$$x_{max} = v_0\cos(\alpha)2t_{max} = v_0\cos(\alpha)2\frac{v_0\sin(\alpha)}{g} =$$

$$\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

[**1**]

Wegen $2y_{max} = x_{max}$ kann man diese Ausdrücke gleichsetzen und nach $\alpha$ auflösen:

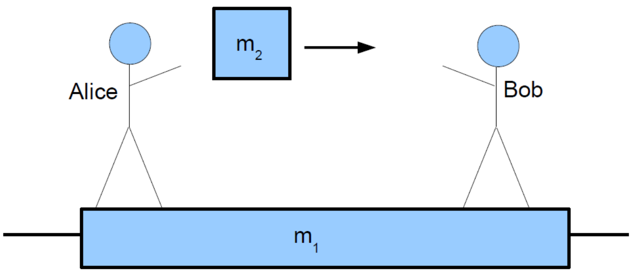
$$\begin{aligned}
2\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} &= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \\
\sin(2\alpha) &= \sin^2(\alpha) \\
2\cos(\alpha)\sin(\alpha) &= \sin^2(\alpha) \\
\rightarrow \tan(\alpha) &= 2
\end{aligned}$$

Damit ist $\alpha = 63{,}43°$.

[**1**]

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Alice und Bob stehen 5 Meter voneinander entfernt in einem ruhenden Boot. Alice hat einen schweren Koffer dabei. Die Masse des Koffers beträgt $m_2 = 20$kg; die Masse von Alice, Bob und dem Boot zusammen beträgt $m_1 = 200$kg.




*a)* Alice wirft den Koffer mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 10m/s in Richtung von Bob. Hierbei setzt sich das Boot in Bewegung. Wie schnell bewegt sich das Boot?

### Lösung:

Der Gesamtimpuls des Koffer-Boot Systems bleibt erhalten. Vor dem Wurf ist der Gesamtimpuls:

$$p_g = (m_1 + m_2)v_g \tag{1}$$

und da das Boot in Ruhe ist, ist der Gesamtimpuls Null:

$$p_g = 0 \tag{2}$$

[**1**]

Nach dem Abwurf, also während der Koffer fliegt, ist dann der Gesamtimpuls:

$$p'_g = p'_{m_1} + p'_{m_2} = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = 0 \tag{3}$$

[**1**]

Nun kann nach $v'_1$ aufgelöst werden:

$$v'_1 = -\frac{m_2}{m_1} v'_2 = -1\text{m/s} \tag{4}$$

Das Boot bewegt sich also mit einer Geschwindigkeit von 1m/s nach links.

[**1**]

*b*) Bob fängt den Koffer. Berechnen Sie nun die Geschwindigkeit des Bootes. Wie lange war der Koffer ingesamt in der Luft?

**Hinweis:** Bob bewegt sich durch die Bewegung des Bootes dem Koffer entgegen.

## Lösung:

Aufgrund der Impulserhaltung ist das Koffer-Boot System wieder in Ruhe, nachdem Bob den Koffer gefangen hat, denn:

$$p''_g = p'_g = p_g = 0 = (m_1 + m_2) v''_g \ \rightarrow \ v''_g = 0 \tag{5}$$

Also ist die Geschwindigkeit des Bootes Null.

[**1**]

Man kann die Berechnung der Flugdauer auch im Bezugssystem des Bootes durchführen. Hier ist die vom Koffer zurückgelegte Strecke

$$s = 5\text{m} \tag{6}$$

Da das Boot hier ruht, setzt sich die Geschwindigkeit des Koffers $\tilde{v}'_2$ aus der Bootsgeschwindigkeit $v'_1$ und der Koffergeschwindigkeit $v'_2$ im ursprünglichen Bezugssystem zusammen:

$$\tilde{v}'_2 = v'_2 - v'_1 \tag{7}$$

[**1**]

Dann ist die Flugdauer gegegben durch

$$t_F = \frac{s}{\tilde{v}'_2} = \frac{5\text{m}}{10\text{m/s} - (-1\text{m/s})} = 0.45\text{s} \tag{8}$$

[**1**]

*c*) Der Koffer wird wieder zurückgeworfen und gefangen. Was ist nun die Geschwindigkeit des Bootes? An welchem Ort befindet sich das Boot nun?

## Lösung:

Das Boot steht wieder still; die Begründung ist analog zu der Begründung aus Teilaufgabe b).

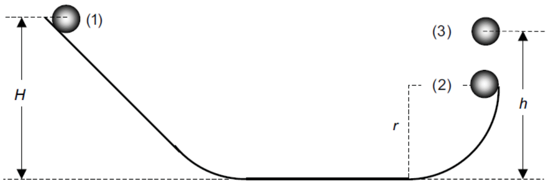
[**1**]

Nach zweimaligem Werfen befindet sich das Boot dann wieder am Ausgangsort.

[**1**]

## Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine Kugel (Masse $m$, Trägheitsmoment $J$ bzgl. ihres Mittelpunktes, Radius $R$) rollt aus der Ruhe heraus ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinab um danach über einen Viertelkreis mit dem Radius $r$ die Bahn in vertikaler Richtung zu verlassen. (Siehe Skizze)




(a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $v$ der Kugel beim Verlassen des Viertelkreises, also an der Stelle (2).

(b) Welche maximale Höhe $h$ erreicht die Kugel nach Verlassen des Viertelkreises bezogen auf den Erdboden.

Warum erreicht die Kugel nicht mehr die Ausgangshöhe $H$? Begründen Sie dies anhand ihrer Rechnungen aus (a) und dieser Teilaufgabe.

## Lösung

(a) Beim Rollen ohne zu gleiten gilt folgender Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\omega$ bei der Rotation um den Schwerpunkt und der Translationsgeschwindigkeit $v$ des Schwerpunkts der Kugel.

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{9}$$

[**1**]

Der Energieerhaltungssatz zwischen (1) und (2) liefert

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{10}$$

[**1**]

Die Rollbedingung 9 eingesetzt ergibt

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}v^2$$
$$2g(H-r) = \left(1 + \frac{J}{mR^2}\right)v^2$$
$$v = \sqrt{\frac{2g(H-r)}{1+\frac{J}{mR^2}}}$$

[**1**]

(b) Der Energieerhaltungssatz zwischen (2) und (3) ergibt

$$mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = mgh + \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{11}$$

[**1**]

Hierbei ist zu bemerken: Beim Verlassen des Viertelkreises (2) wird die Rotation permanent aufrecht erhalten, d. h. auch im höchsten Punkt (3) rotiert die Kugel noch mit derselben Winkelgeschwindigkeit $\omega$, wie bei (2).

Damit ergibt sich

$$mgh = mgr + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow h = r + \frac{v^2}{2g} \tag{12}$$

[**1**]

Mit Aufgabenteil (a) lässt sich folgende Aussage über $H$ machen:

$$mgH = mgr + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{J}{R^2}v^2 \Rightarrow H = \underbrace{r + \frac{v^2}{2g}}_{=h} + \underbrace{\frac{J}{mR^2}\cdot\frac{v^2}{2g}}_{>0}$$

Damit erkennt man, dass $h < H$ gilt.

[**1**]

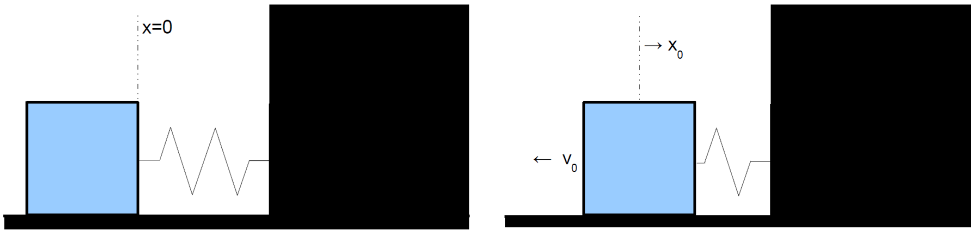
## Aufgabe 4 (8 Punkte)

Betrachten Sie eine ideale Feder mit Federkonstante $k$. Die Feder hängt an einem Block mit Masse $m$, der auf einer horizontalen, reibungslosen Oberfläche liegt. Das Feder-Masse-System wird um $x_0$ aus dem Gleichgewicht ausgelenkt (siehe Abbildung) und dann mit einer anfänglichen Geschwindigkeit $v_0$ in Richtung Gleichgewichtsposition losgelassen.

*a*) Berechnen Sie die Position des Masse-Feder Systems $x(t)$ als Funktion der Zeit sowie $v(t)$, die Geschwindigkeit dieses Systems.

### Lösung:

Man wählt den Koordinatenursprung bei der Gleichgewichtsposition; die positive $x-$Richtung zeige in die Dehnungsrichtung. Dann ist die Anfangsposition $-x_0 < 0$ (da $x_0$ ein geometrischer Abstand und daher immer positiv ist) und $v_0 > 0$. Mit dem Hook'schen Gesetz wird Newtons 2. Axiom dann zu




$$- kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \tag{13}$$

Die allgemeine Lösung für diese Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 + t) \tag{14}$$

[**1**]

Hier ist $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, also die Eigenkreisfrequenz eines harmonischen Oszillators. Die Koeffizienten $A$ und $B$ hängen von den gegebenen Anfangsbedingungen ab:

$$- x_0 \equiv x(t = 0) \quad , \quad v_0 \equiv v(t = 0) \tag{15}$$

wobei $x_0$ und $v_0$ positive Konstanten sind.

Die Geschwindigkeit des Systems zum Zeitpunkt $t$ erhält man, indem man Gleichung (14) ableitet

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0(t)A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t) \tag{16}$$

[**1**]

Um die Konstanten $A$ und $B$ zu ermitteln, setzt man $t = 0$ in Gleichungen (14) und (16) ein. Da $\cos(0) = 1$ und $\sin(0) = 0$ ist die anfängliche Position zum Zeitpunkt $t = 0$

$$- x_0 \equiv x(t = 0) = A \tag{17}$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$v_0 = v(t = 0) = -\omega_0 A\sin(0) + \omega_0 B\cos(0) = \omega_0 \tag{18}$$

Daher:

$$A = -x_0 \quad , \quad B = \frac{v_0}{\omega_0} \tag{19}$$

[**1**]

Also ist die gesuchte Position des Feder-Massen-Systems gegeben durch

$$x(t) = -x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{20}$$

[**1**]

und die Geschwindigkeit:

$$v(t) = \omega_0 x_0 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + v_0 \cos(\omega_0 t) \tag{21}$$

[**1**]

*b*) Berechnen Sie die Schwingungsdauer für dieses System.

## Lösung:

Die Schwingungsdauer ist gegeben durch

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \tag{22}$$

[**1**]

*c*) Wie lange dauert es, bis das Objekt zum ersten Mal in seine Gleichgewichtsposition zurückkehrt?

## Lösung:

Die Feder erreicht die Gleichgewichtsposition zum Zeitpunkt $t = t_1$, wo $x(t_1) = 0$:

$$0 = x(t_1) = -x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \tag{23}$$

[**1**]

Dies kann geschrieben werden als

$$\tan(\omega_0 t_1) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t)} = \frac{x_0 \omega_0}{v_0} \tag{24}$$

Nach $t_1$ aufgelöst:

$$t_1 = \frac{1}{\omega_0} \tan^{-1} \left( \frac{x_0 \omega_0}{v_0} \right) \tag{25}$$

[**1**]

## Aufgabe 5 (5 Punkte)

Ein Vater ($M = 95$kg) und sein Kind ($m = 25$kg) wollen gemeinsam auf einer Wippe wippen. Das Kind sitzt in 2.4m Entfernung von der Drehachse der Wippe. Die Wippe selbst ist als masselos zu betrachten.

*a*) Welches Drehmoment übt das Kind auf die Wippe aus, wenn sie in einem Winkel von 25° zur Horizontalen geneigt ist?

### Lösung:

Allgemein ist das Drehmoment gegeben durch

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{26}$$

Aus der Skizze ist klar, dass das Drehmoment, welches das Kind auf die Wippe ausübt, gegeben ist durch:

$$\tau_K = r_K F_{gKind} \sin(\beta) = r_K m_K g \sin(\beta) = 2.4\text{m} \cdot 25\text{kg} \cdot 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin(90° + \alpha) = 533\text{Nm} \tag{27}$$

[**1**]

*b*) In welchem Abstand zur Drehachse muss der Vater sitzen, um die Wippe hier im Gleichgewicht zu halten?

### Lösung:

Damit die Wippe im Gleichgewicht ist, müssen sich die Drehmomente ausbalancieren:

$$\tau_V = \tau_K \tag{28}$$

[**1**]

Also:

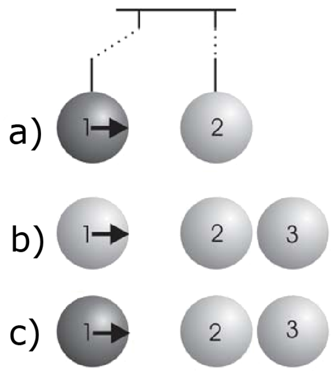
$$r_V m_V g \sin(\gamma) = r_K m_K g \sin(\beta) \tag{29}$$

[**1**]

Nach $r_V$ aufgelöst ergibt dies

$$r_V = r_K \frac{m_K \sin(\beta)}{m_V \sin(\gamma)} = r_K \frac{m_K \sin(90° + \alpha)}{m_V \sin(90° - \alpha)} \tag{30}$$

$$\rightarrow \; r_V = r_K \frac{m_K}{m_V} = 2.4\text{m}\frac{25\text{kg}}{95\text{kg}} = 0.63\text{m} \tag{31}$$




[**1**]

*c*) In welchem Abstand zur Drehachse muss der Vater sitzen, um die Wippe im Gleichgewicht zu halten, wenn die Wippe um 35° zur Horizontalen geneigt ist?

### Lösung:

Aus Gleichung (31) ist leicht ersichtlich, dass der Abstand zur Drehachse unabhängig von $\alpha$ ist; daher muss der Abstand immer

$$r_V = 0.63\text{m} \tag{32}$$

betragen, damit die Wippe im Gleichgewicht ist.

[**1**]

## Aufgabe 6 (10 Punkte)

Mehrere Stahlkugeln sind an Schnüren nebeneinander und auf gleicher Höhe aufgehängt (siehe Abbildung). Die Länge der Schnüre sei so groß, dass die Pendelbewegungen (kleine Auslenkungen) als lineare Bewegung in horizontaler Richtung betrachtet werden können. Stöße zwischen den Kugeln seien vollkommen elastisch.

(a) Die linke Kugel der Masse $m_1$ werde ausgelenkt und stoße mit der Geschwindigkeit $v_1$ zentral auf die vorher ruhende Kugel der Masse $m_2$. Drücken Sie die Geschwindigkeiten $v_1'$ und $v_2'$ der beiden Kugeln nach dem Stoß in Abhängigkeit des Massenverhältnisses $\alpha = m_2/m_1$ aus!

(b) Die Massen aller beteiligten Kugeln seien nun gleich $m$. Kugeln 2 und 3 befinden sich in Ruhe, Kugel 1 werde ausgelenkt. Sie stoße mit der Geschwindigkeit $v_1$ auf Kugel 2, unmittelbar danach stoße letztere auf Kugel 3. Geben Sie die Geschwindigkeiten aller Kugeln nach dem Stoß an.

(c) Kugel 1 habe nun die doppelte Masse als die Kugeln 2 und 3 einzeln. Geben Sie die Geschwindigkeiten aller Kugeln nach dem analogen Versuch zu Aufgabenteil b) an. Beachten Sie, dass Kugel 1 nach dem ersten Stoß nicht ruht.

## Lösung

(a) 1-D-Bewegung, keine Vektoren
" ′" bedeutet: entsprechende Größe nach dem Stoß.
Impulserhaltung (IES): $p_1 = p_1' + p_2'$; $p_2 = 0$

**[1]**

Energieerhaltung (EES): $\frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} \Rightarrow p_1^2 = p_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} p_2'^2$

**[1]**

$$\text{mit IES: } p_1^2 = (p_1' + p_2')^2 = p_1'^2 + 2p_1'p_2' + p_2'^2$$
$$\text{IES und EES: } p_1'^2 + \frac{m_1}{m_2} p_2'^2 = p_1'^2 + 2p_1'p_2' + p_2'^2$$
$$\Rightarrow 2p_1'p_2' = \frac{m_1}{m_2} p_2'^2 - p_2'^2$$
$$\Rightarrow p_1' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} - 1\right) p_2'$$

**[1]**

Mit Impulserhaltung:

$$p_1 = p_1' + p_2' = \left(\frac{1}{2}\frac{m_1}{m_2} - \frac{1}{2}\right) p_2' + p_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) p_2'$$

es gilt $p_1 = m_1 v_1$ und $p_2' = m_2 v_2'$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\frac{m_2}{m_1} v_2' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) v_2' = \frac{1}{2}(1+\alpha) v_2'$$
$$\Rightarrow v_2' = \frac{2v_1}{1+\alpha}$$

**[1]**

müssen noch $v_1'$ in Abhängigkeit von $v_1$ berechnen:
Impulserhaltung: $m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

$$\Rightarrow v_1' = v_1 - \underbrace{\frac{m_2}{m_1}}_{=\alpha} v_2' = v_1 - \alpha \frac{2v_1}{1+\alpha} =$$
$$= v_1 \left(1 - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right) = v_1 \left(\frac{1+\alpha}{1+\alpha} - \frac{2\alpha}{1+\alpha}\right)$$
$$\Rightarrow v_1' = v_1 \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

**[1]**

(b) alle Massen gleich: $m_i = m \rightarrow \alpha = 1$

- $K_1$ stößt $K_2$: $v_1 = v$; $v_2 = 0$; $v_3 = 0$
  $\Rightarrow v_1' = 0$; $v_2' = \frac{2}{1+1} v_1 = v$; $v_3' = 0$

- $K_2$ stößt $K_3$: $v_1' = 0$; $v_2' = v$; $v_3' = 0$
  $\Rightarrow v_1'' = 0$; $v_2'' = 0$; $v_3'' = v$

- usw.

[**2**]

(c) $m_1 = 2m_2 = 2m_3$; $v_1 = v$; $v_2 = v_3 = 0$

- Stoß 1: ($K_1 \rightarrow K_2$; $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$v_1' = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} v = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} v = \frac{1}{3} v$$
$$v_2' = \frac{2v}{1+\frac{1}{2}} = \frac{4}{3} v$$
$$v_3' = 0$$

[**1**]

- Stoß 2: $v_1' = \frac{1}{3} v$; $v_2' = \frac{4}{3} v$; $v_3' = 0$ ($K_2 \rightarrow K_3$, $\alpha = 1$)
  (Situation aus Aufgabe b)

$$v_1'' = \frac{1}{3} v \text{ (unbeteiligt an Stoß 2)}$$
$$v_2'' = 0 \qquad ; \qquad v_3'' = \frac{4}{3} v$$

[**1**]

- Stoß 3 : $v_1'' = \frac{1}{3} v$; $v_2'' = 0$; $v_3'' = \frac{4}{3} v$ ($K_1 \rightarrow K_2$, $\alpha = \frac{1}{2}$)

$$v_1''' = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \frac{1}{3} v = \frac{1}{9} v$$
$$v_2''' = \frac{2}{1+\frac{1}{2}} \frac{1}{3} v = \frac{4}{9} v$$
$$v_3''' = \frac{4}{3} v \text{ (unbeteiligt an Stoß 3)}$$

- Keine weiteren Stöße, da $v_3''' > v_2''' > v_1'''$

[**1**]