TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
PROF. DR. GREGOR KEMPER

Mathematik für Physiker 1
(Lineare Algebra, MA 9201)
Probeklausur im WS 2014-15
am Montag 8.12.2014

Name: Klinsmann Vorname: Jürgen

Rückgabe in Übungsgruppe Nummer: 11

	Korrektur
1	16
2	6
3	6
4	6
5	6
Σ	selber ausrechnen

Korrektor:

Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- In der Klausur am Semesterende ist als **einziges Hilfsmittel** ein (beidseitig) von Ihnen selbst handschriftlich beschriebenes DinA4-Blatt erlaubt.
- Es sind keinerlei weitere Hilfsmittel (Skripten, Bücher, Taschenrechner,...) erlaubt!
- Die Klausur hat 5 Aufgaben. Die erste Aufgabe hat Teile (a)-(j) und erstreckt sich über **zwei** Angabenseiten. Bitte überprüfen Sie diese Angabe auf Vollständigkeit!
- Bei Aufgabe 1 sind die Lösungen ohne Begründung anzugeben. Achten Sie jedoch bei den Aufgaben 2 bis 5 auch auf eine ausreichende Begründung.
- Bitte schreiben Sie Ihre Lösungen zunächst jeweils auf das Blatt mit der Aufgabe und benutzen Sie erst dann Zusatzblätter.
- Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (16 Punkte)

In den folgenden Teilaufgaben sind die Ergebnisse **ohne Begründung** in den dafür vorgegebenen Kästchen anzugeben. Nebenrechnungen und Ergebnisse außerhalb der Kästchen werden **nicht** gewertet. (je 1,5 Punkte für (a) bis (i), 2,5 Punkte für (j))

(a) Geben Sie an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem (über $\mathbb{R}$) mindestens eine Lösung hat:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & 2y & = & a \\ x & + & 3y & = & 3 \\ ax & + & 2ay & = & 2a \end{array}$$

noch 0,5 für $\{0\}$ oder $\{2\}$

Es ist lösbar für $a \in \{ \boxed{0,2} \}$

(b) Gegeben sei eine *surjektive* lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}[X]_{\leq 14} \to \mathbb{R}^8$. Berechnen Sie die Dimension des Kerns von φ.

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \boxed{7}$$

(c) Von einer linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seien die Werte

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bekannt. Berechnen Sie den Wert $\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

(d) Geben Sie die Menge der Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ an:

$$\text{Menge der Eigenwerte} = \{ \boxed{2,3} \}$$

(e) Geben Sie das Signum der folgenden Permutation an:

$$\mathrm{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \boxed{-1}$$

(f) Gegeben sind die Untervektorräume $U = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$ und $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \; x_1 + x_3 = 0 \}$. Geben Sie den Schnitt $U \cap W$ durch Angabe eines Erzeugendensystems an:

$$U \cap W \quad = \quad \langle \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \rangle$$

(g) Es sei $V = \mathbb{R}[x]$ und U sei der Unterraum

$$U = \langle -2x+1, \quad 3x^2+2x, \quad 3x^2+1, \quad 3x^2-2x+2 \rangle$$

von V. Geben Sie die Dimension von U an:

$$\dim(U) \quad = \quad \boxed{2}$$

(h) Es sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum der unendlich-oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, und $\varphi : V \to V, f \mapsto f'$ (Ableitung). Geben Sie einen Eigenvektor $f \in V$ zum Eigenwert 5 von φ an:

$$f(x) \quad = \quad \boxed{e^{5x}}$$

(i) Es sei $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Geben Sie entweder die Definition der Determinante von A oder die Formel zur Entwicklung nach einer Zeile i (oder Spalte j) an:

$$\det(A) \quad = \quad \boxed{\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}}$$

oder: $= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$ oder $= \dots$

(j) Gegeben sei die (geordnete) Basis $B = \{b_1, b_2\}$ des $\mathbb{R}^2$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$. Geben Sie die Basiswechselmatrizen $S_{E,B}$ und $S_{B,E}$ an (wobei E die Standardbasis ist):

$$S_{E,B} = \boxed{\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \qquad S_{B,E} = \boxed{\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}}$$

1   1.5

[2/2.5, falls beide Matrizen vertauscht sind]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) Gegeben sei die reelle Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\det(A)$. (3 Punkte)

(b) Es sei n ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *antisymmetrisch*, d. h. $A^T = -A$. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) = 0$ gilt. (3 Punkte)

(a) $\det(A) \underset{\text{entw. nach Zeile 4}}{=} (-1)^{4+3} (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{nach Sp. 3}}{=} (-1)^{3+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$

3

$= 1 \cdot (0 - (-1)) = \underline{1}$

(b) z.z.: $\det(A) = 0$

Es ist: $\det(A) \underset{(VL)}{=} \det(A^T) \underset{\text{Vor. an } A}{=} \det(-A) \underset{\substack{\text{aus jeder Zeile} \\ (-1) \text{ herausziehen}}}{=} (-1)^n \cdot \det(A)$

Ist n ungerade, so ist also:

3

$$\det(A) = -\det(A)$$

$$\Rightarrow \underline{\det A = 0}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben seien die drei Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$f_1(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x), \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = x.$$

Es sei $U = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ (also ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$). Ferner sei φ die Abbildung

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $B := \{f_1, f_2, f_3\}$ eine Basis von U ist. (~~2~~3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(c) Geben Sie die Darstellungsmatrix $\mathrm{D}_{B,E}(\varphi)$ an, wobei E die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ ist. (~~2~~1 Punkt~~e~~)

(a) Wegen $\langle B \rangle = U$ ist nur z.z., dass B lin. unabhängig ist 1

Seien dazu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$

Einsetzen von $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ liefert: 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & e & 1 & 0 \\ 0 & e^2 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \underline{\text{alle } \lambda_i = 0}$$

(b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in U$ gilt:

2

$$\varphi(\lambda f + g) = \begin{pmatrix} (\lambda f + g)(0) \\ (\lambda f + g)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda f(0) + g(0) \\ \lambda f(1) + g(1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(0) \\ g(1) \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\lambda \varphi(f) + \varphi(g)}$$

(c) $$\underline{\mathrm{D}_{B,E}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & e & 1 \end{pmatrix}}$$ 1 (falscher Eintrag -0.5)

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi = \varphi_A : \quad \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad x \mapsto A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ den Bildvektor $\varphi(x) \in \mathbb{R}^3$ explizit an. (1 Punkt)

(b) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von Kern(φ). (3 Punkte)

(c) Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von Bild(φ). (2 Punkte)

(a) Es ist: $\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}$ 1

(b) $\operatorname{Kern} \varphi = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -8 & -2 \end{pmatrix} -2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 3

$\Rightarrow$ Kern φ ist 2-dimensional. Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $\underbrace{\dim(\operatorname{Kern} \varphi)}_{=2} + \dim(\operatorname{Bild} \varphi) = 4$

2

$\Rightarrow$ Bild φ ist 2-dim., (erzeugt von den Spalten von A)

Basis: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ferner sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Beweisen Sie: Ist $\varphi \circ \varphi = 0$ (die Nullabbildung), so gilt $\dim(\ker(\varphi)) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.
(3 Punkte)

(b) Gilt auch die Umkehrung von (a)? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
(3 Punkte)

(a) $\varphi \circ \varphi = 0 \Rightarrow \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$

denn: Sei $y \in \mathrm{Bild}(\varphi)$, also $y = \varphi(x)$ mit $x \in V$,
so folgt: $0 = \varphi(\varphi(x)) = \varphi(y)$, also $y \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. 1.5

jetzt Dim. formel: $\dim(\mathrm{Kern}\,\varphi) + \underbrace{\dim(\mathrm{Bild}\,\varphi)}_{\leq \dim \mathrm{Kern}\,\varphi} = \dim V$ 1.5

$\Rightarrow 2 \dim \mathrm{Kern}(\varphi) \geq \dim V$

bzw: $\dim(\mathrm{Kern}\,\varphi) \geq \frac{1}{2} \dim V$

(b) Nein, die Umkehrung gilt nicht.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\varphi := \varphi_A$ 3

Dann: $\dim(\mathrm{Kern}\,\varphi) = 1 \geq \frac{1}{2}(\dim \mathbb{R}^2) = 1$,

aber $A^2 \neq 0$, also $\varphi \circ \varphi \neq 0$.