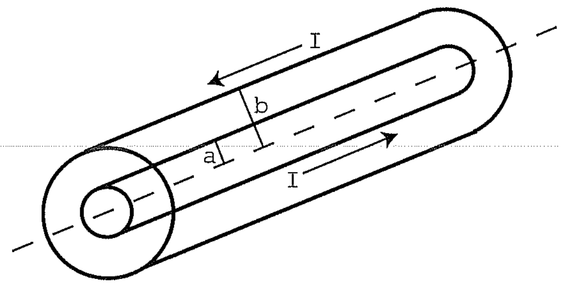
Aufgabe 1: Kapazität und Induktivität eines Koaxial-Leiters (7 Punkte)

Betrachten Sie zwei konzentrische, unendlich lange Hohlzylinder mit Radien a und $b > a$, die entweder von Strömen gleicher Stärke I in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden (s. Skizze) oder auf denen sich entgegengesetzte Oberflächenladungsdichten befinden. Zwischen den unendlich langen, idealen Leitern sei Vakuum.

a) Berechnen Sie die Kapazität C der Anordnung pro Länge aus der Energie $\int \mathbf{E}^2/8\pi$ eines elektrostatischen Feldes $\mathbf{E}$ im Vakuumbereich $a < s < b$, das mit entgegengesetzten Oberflächenladungsdichten auf beiden Zylindern verbunden ist (das Gesamtsystem sei dabei elektrisch neutral).

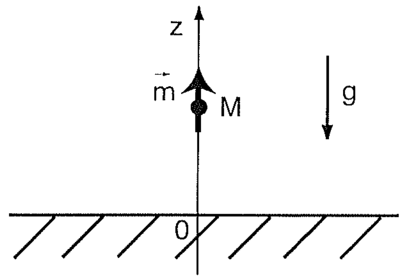
   Hinweis: In den verwendeten cgs-Einheiten ist die Kapazität pro Länge eine dimensionslose Grösse, die nur von der Geometrie, also von a und b abhängen kann.

b) Bestimmen Sie die Induktivität L der Anordnung pro Länge indem Sie die Energie $\int \mathbf{B}^2/8\pi$ eines statischen Magnetfeldes $\mathbf{B}$ berechnen, das mit entgegengesetzten Strömen I bzw. $-I$ auf beiden Zylindern verbunden ist. Berechnen Sie das Produkt aus C und L, jeweils pro Länge.



Aufgabe 2: Levitation über einem Supraleiter (7 Punkte)

Ein Magnet (Masse M) befinde sich im Gravitationsfeld (Erdbeschleunigung g) über einem Supraleiter im Halbraum $z \leq 0$ (s. Skizze). Fassen Sie den Magneten näherungsweise als magnetischen Punktdipol auf, mit einem nach oben gerichtetem Moment $\mathbf{m} = m\,\mathbf{e}_z$, $m > 0$.



a) Berechnen Sie das Magnetfeld im Halbraum $z \geq 0$, das der Bedingung $\mathbf{B} = 0$ im Innern des Supraleiters genügt und zeigen Sie, dass das Feld in der Ebene $z = 0$ rein tangential ist.

   Hinweis: Führen Sie einen geeigneten Bilddipol bei $z = -h$ ein.

b) Bestimmen Sie die stabile Gleichgewichtshöhe $\bar{h}$ des Magneten über dem Supraleiter durch Minimierung der potentiellen Energie $U(h)$ des magnetischen Dipols im Schwerefeld.

   Hinweis: Beachten Sie bei der Wechselwirkung zwischen Dipol und Bilddipol, dass sich die Kraft $F = -\partial U/\partial h$ aus der Variation der Energie bezüglich des Abstands h zur Grenzfläche $z = 0$ ergibt und nicht bezüglich des Abstands zum Bilddipol.

Aufgabe 3: Ladungsdynamik in einem Leiter (6 Punkte)

Für zeitabhängige elektrische Felder in einem gutem Leiter gelte das Ohmsche Gesetz in der Form $\mathbf{j}(\mathbf{x}, \omega) = \sigma(\omega)\mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega)$, d.h. die Stromdichte $\mathbf{j}$ ist bei gegebener Frequenz ω direkt proportional zum lokalen elektrischen Feld $\mathbf{E}$. Die entsprechende frequenzabhängige Leitfähigkeit sei $\sigma(\omega) = \sigma_0/(1 - i\omega\tau)$ mit dc-Leitfähigkeit $\sigma_0 = ne^2\tau/m$ und Relaxationszeit τ ($n, -e$ und m bezeichnen Dichte, Ladung und Masse der Elektronen).

a) Leiten Sie unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung und des Gauss'schen Gesetzes $\nabla\mathbf{E} = 4\pi\rho$ eine Gleichung für die Fouriertransformierte $\rho(\mathbf{x}, \omega)$ der Ladungsdichte ab.

b) Bestimmen Sie die komplexe Frequenz $\bar{\omega}$ bei der die Gleichung aus Teilaufgabe a) eine nichttriviale Lösung besitzt und berechnen Sie aus der Zeitabhängigkeit $\rho(\mathbf{x}, t) \sim \exp -i\bar{\omega}t$ die Oszillationsfrequenz und Abklingzeit einer zur Zeit $t = 0$ vorhandenen nichtverschwindenden Ladungsdichte.

   Hinweis: Es ist nützlich, die sogenannte Plasmafrequenz ω_p einzuführen, die durch $\omega_p^2 = 4\pi ne^2/m$ definiert ist. Nehmen Sie an, dass $\omega_p\tau \gg 1$ gilt.