

Klausur zur Einführung in die Festkörperphysik

Prof. Peter Böni

Wintersemester 2015/2016

24. Februar 2016

Hinweise:

- Notieren Sie auf jedem beschriebenen Blatt Name und Matrikelnummer!
- Fertigen Sie Ihre Lösung ausschließlich auf den ausgeteilten DIN A4 Bögen an!
Notizen auf diesem Aufgabenblatt werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt!
(Aufgabe 6 sei eine Ausnahme; näheres in der Aufgabenstellung)
- Diese Klausurangabe umfasst 6 Aufgaben.
- Bearbeitungszeit: 90 min
- Zugelassene Hilfsmittel:
 - Nicht programmierbarer, netzunabhängiger Taschenrechner.
 - Wörterbuch
 - Ein DIN A4 Formelblatt, beidseitig ausschließlich handschriftlich beschrieben.

Konstanten:

Wirkungsquantum	$h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Wirkungsquantum	$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Elementarladung	$e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Elektronenmasse	$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Atomare Masseneinheit	$u = 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Boltzmann-Konstante	$k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N m}^{-2}$

1 Bindungsenergie im Neon-Kristall (10 Punkte)

- (a) Nennen Sie vier Bindungstypen in Festkörpern und geben Sie jeweils ein Beispiel an, in dem dieser Bindungstyp dominant ist.

Das Edelgas Neon kristallisiert in der fcc-Struktur.

- (b) Skizzieren Sie die fcc-Struktur.

- (c) Wie viele nächste Nachbarn besitzt jedes Atom in der fcc-Struktur?

Die Bindungsenergie des Kristalls wurde zu $U_B = -1.88 \text{ kJ mol}^{-1}$ gemessen und die Gitterkonstante beträgt $a = 4.466 \text{ \AA}$. Die Wechselwirkung der Atome untereinander kann über das Lennard-Jones-Potential beschrieben werden:

$$U_{\text{Pot}}(r) = -4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} \right]$$

- (d) Berechnen Sie die Parameter σ und ϵ . Gehen Sie von der Annahme aus, dass die Wechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn auftritt.

2 Neutronenstreuung (9 Punkte)

Ein weißer Strahl thermischer Neutronen trifft auf einen Germanium Einkristall, welcher als Monochromator dient. Unter einem Streuwinkel von $2\Theta = 155^\circ$ bezüglich der $\text{Ge}(331)$ Ebene werden die Neutronen für ein Diffraktionsexperiment genutzt. Der Kristall hat eine kubisch flächenzentrierten Kristallstruktur mit der Gitterkonstante $a = 5.66 \text{ \AA}$.

- (a) Welche Wellenlänge besitzt der elastisch an der $\text{Ge}(331)$ -Ebene gestreute Neutronenstrahl?
- (b) Die Flussverteilung des Neutronenstrahls hat ein Maximum bei 2.1 \AA . Wie groß muss der Einfallswinkel bezüglich der $\text{Ge}(331)$ -Ebene sein um den maximalen gestreuten Fluss zu erhalten?
- (c) Der monochromatisierte Neutronenstrahl treffe nun mit einer Wellenlänge von $\lambda = 1.548 \text{ \AA}$ auf einen Einkristall mit tetragonal-primitiver Kristallstruktur und den Gitterkonstanten $a = 4 \text{ \AA}$ und $c = 15 \text{ \AA}$. Nehmen Sie an, dass die Wellenvektoren der ein- und ausfallenden Neutronen in einer a - c -Ebene liegen. Skizzieren Sie den elastischen Streuprozess an einer $\{100\}$ Netzebenenschar mittels Ewald-Konstruktion. Kennzeichnen Sie alle relevanten Größen.

3 Phononen (10 Punkte)

- (a) Ein Festkörper wird durch ein Bravais-Gitter mit dreiatomiger Basis beschrieben. Erläutern Sie, was eine Dispersionsrelation ist. Skizzieren und beschreiben Sie wie die Dispersionsrelationen für Phononen in diesem Festkörper aussehen.
- (b) Geben Sie an, welcher Teilchen-Statistik Phononen genügen und folgern Sie daraus, wie groß die mittlere Besetzungszahl $\langle n \rangle$ des Phononenzustands mit der Energie $\hbar\omega$ bei der Temperatur T ist.

In den restlichen Teilaufgaben betrachte man einen Körper vom Volumen V , der durch ein dreidimensionales, kubisches Bravaisgitter (Gitterkonstante: a) mit einatomiger Basis beschrieben wird.

- (c) Geben Sie die Zustandsdichte im reziproken Raum an.

Durch eine Debye-Näherung soll nun berechnet werden, wie groß die gesamte Energie aller Phononen im System ungefähr ist:

- (d) Nennen Sie die Grundannahmen des Debye-Modells.
- (e) Nähern Sie nun die erste Brillouin-Zone durch eine Kugel an und berechnen Sie ihren Radius q_D .
- (f) Nehmen Sie nun für die Dispersionszweige ein lineares Verhalten (mit jeweils derselben Steigung) an:

$$\omega(q) = v_s \cdot q$$

Berechnen Sie damit den Beitrag zur Wärmekapazität durch die Phononen $C_V = \partial_T \langle U \rangle$ für tiefe Temperaturen $T \rightarrow 0$.

(Hinweis: Substituieren dabei $x := \frac{\hbar v_s q}{k_B T}$ und verwenden Sie:

$$\int_0^{\frac{\Theta_D}{T}} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx \approx \int_0^\infty \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = \frac{4\pi^4}{15}$$

mit $\Theta_D = \frac{\hbar v_s q_D}{k_B}$)

4 Messungen des Hall Effekts in Silber (8 Punkte)

Das Edelmetall Silber kristallisiert in der fcc Struktur mit einem Gitterparameter von $a = 4.090 \text{ \AA}$.

- (a) Berechnen Sie unter der Annahme, dass jedes Atom mit einem Elektron am Prozess der Leitung teilnimmt, die erwartete Elektronendichte n in Einheiten von cm^{-3} .

In Abbildung 4.1 sehen sie die Skizze einer typischen Hall Messung an einem rechteckigen Plättchen Silber.

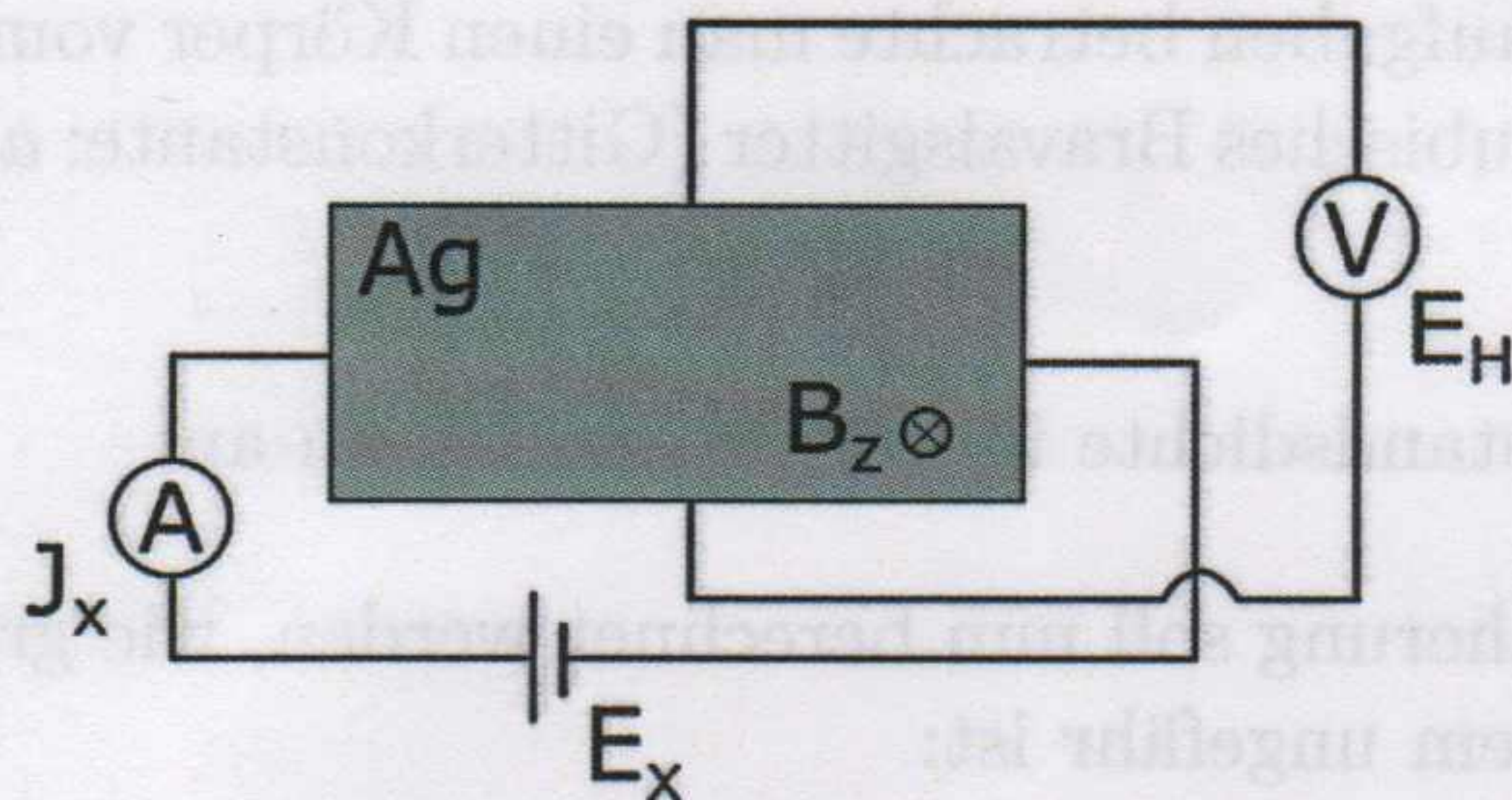


Abbildung 4.1: Skizze einer Hall Messung an einem Plättchen Silber.

- (b) Aus der Bewegungsgleichung im Drude Modell erhalten wir die folgende Gleichung um diese Hall Messung zu beschreiben:

$$0 = -e\vec{E} + \frac{\vec{j}}{n} \times \vec{B} - \frac{\vec{j}}{\tau} \frac{m^*}{ne}$$

Zeigen Sie, dass die Hall Konstante $R_H = \frac{E_H}{j_x B_z}$ wie folgt ausgedrückt werden kann:
 $R_H = -\frac{1}{ne}$.

- (c) Vergleichen sie die Elektronendichte aus (a) mit der die Sie aus der Hall Konstante in (b) berechnet haben. Welche Aussagen können Sie über die Annahmen in (a) treffen?

Durch die Messung erhalten wir folgende Werte für die Hall Konstante R_H sowie die Leitfähigkeit ρ_{xx} :

$$R_H = -0.8 \times 10^{-10} \text{ VmA}^{-1}\text{T}^{-1}$$

$$\rho_{xx} = \frac{E_x}{j_x} = 1.6 \text{ } \mu\Omega\text{cm}$$

- (d) Berechnen sie die Relaxationszeit τ aus den experimentellen Werten des Hall Experiments.

(Hinweis: Die effektive Masse kann mit der Masse freier Elektronen genähert werden)

5 Ladungsträgerdichte und Fermienergie in Halbleitern (8 Punkte)

Es wird ein n-Typ Halbleiterkristall betrachtet.

- (a) Skizzieren Sie den Verlauf des Logarithmus der Ladungsträgerdichte n als Funktion der inversen Temperatur $1/T$ und markieren Sie die verschiedenen Temperaturbereiche.
- (b) Erklären Sie qualitativ für die verschiedenen Temperaturbereiche, wie der Verlauf der Ladungsträgerdichte zustande kommt.
- (c) Bei einer bestimmten Temperatur sind 98.7 % aller Donatoratome ionisiert. Berechnen Sie diese Temperatur, wenn der Abstand zwischen dem Donatorniveau E_D und dem Fermi-niveau E_F 0.121 eV beträgt.

6 Energie freier Elektronen im rechteckigen Gitter (10 Punkte)

Betrachten Sie ein zweidimensionales rechteckiges Kristallgitter mit den Gitterkonstanten $a_1 = 4 \text{ \AA} \hat{e}_x$ und $a_2 = 2\sqrt{2} \text{ \AA} \hat{e}_y$.

- (a) Die mit den Miller'schen Indizes bezeichneten Punkte $\Gamma = (0, 0)$, $\Gamma' = (1, 0)$, $\Gamma^* = (0, 1)$, $X' = (1/2, 0)$, $M = (1/2, 1/2)$ und $X = (0, 1/2)$ bezeichnen Punkte hoher Symmetrie im reziproken Raum. Berechnen Sie die Energie eines Elektrons in der Näherung freier Elektronen an den Punkten Γ , X' , Γ' , M , X und Γ^* in eV.

(Notieren Sie auf der beigelegten Skizzenvorlage unbedingt Name und Matrikelnummer. Denken Sie daran das Blatt mit abzugeben!)

- (b) Zeichnen Sie für dieses Gitter die erste Brillouinzone und tragen Sie die Punkte X , M und X' ein.
- (c) Zeichnen Sie die Dispersionsrelation entlang des Pfades $M \rightarrow X' \rightarrow \Gamma \rightarrow M \rightarrow \Gamma \rightarrow X \rightarrow M$ sowie $M \rightarrow X' \rightarrow \Gamma' \rightarrow M \rightarrow \Gamma^* \rightarrow X \rightarrow M$ in Abbildung 6.1b auf der nachfolgenden Seite ein.
- (d) Für welches $|\vec{k}|$ entlang des Pfades $\Gamma^* \rightarrow M \rightarrow \Gamma'$ wird $E(\vec{k})$ minimal? Berechnen Sie den Vektor \vec{k}_{min} sowie die zugehörige Energie E_{min} in eV.
- (e) Ein schwaches Gitterpotential werde eingeschaltet. Skizzieren (in Abbildung 6.1c auf der nachfolgenden Seite) und erläutern Sie die Veränderungen der Bandstruktur $E(\vec{k})$.