Technische Universität München
Physik Department – Theoretische Physik
James–Franck Straße, 85747 Garching

Klausur zur Theoretischen Physik I: Mechanik

Prof. Dr. M. Lindner

13. Februar 2003

Allgemeine Hinweise:

1) Schreiben Sie auf **jedes Blatt lesbar** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
2) Sie haben zur Bearbeitung der Aufgaben **90 Minuten** Zeit.
3) Es sind **keine Hilfsmittel** erlaubt.
4) Ideen bitte hinreichend formulieren, damit wir erkennen ob das Problem richtig gelöst wurde.

1) Allgemeine Fragen (5 Punkte = 12%)

a) Was sind holonome Zwangsbedingungen und was sind generalisierte Koordinaten? **[2P]**

b) Wie lauten die Lagrange–Gleichungen 2. Art für ein konservatives System mit p holonomen Zwangsbedingungen (d.h. generalisierten Koordinaten q_i für $i = 1, .., 3N - p$)? **[1P]**

c) Bestimme die Legendre-Transformierte $g(x, v)$ von $f(x, y) = x^2 + y^2$ für $v = \partial f / \partial y$. **[1P]**

d) Wie lautet der Viralsatz in allgemeiner Form? Welche Beziehung bekommt man für zwei Teilchen im Potential $V = Cr^m$, mit $C = konst.$? **[1P]**

2) Starrer Körper (8 Punkte = 19%)

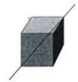
a) Drücke die Rotationsenergie T_R eines beliebigen starren Körpers, der um eine Achse $\vec{n} = \vec{\omega}/\omega$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotiert, durch den Trägheitstensor $\mathbf{J}$ und $\vec{\omega}$ aus. **[1P]**

b) Wie ist der Trägheitstensor $\mathbf{J}$ mit den Komponenten J_{ab} für einen starren Körper mit Massendichte $\rho(\vec{r})$ allgemein definiert? Was sind Hauptträgheitsachsen? **[1P]**

c) Die Trägheitsmomente eines starren Körpers für die Rotation um die feste x–, y– und die z–Achse sind durch J_{xx}, J_{yy} und J_{zz} gegeben. Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Körper gilt: $J_{zz} \leq J_{xx} + J_{yy}$. Wann gilt das Gleichheitszeichen? **[2P]**

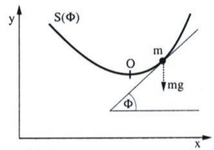
d) Gegeben sei nun ein Körper, bei dem die x–, y– und z–Achsen die Hauptträgheitsachsen sind. Wie lautet das Trägheitsmoment bezüglich einer Achse, die durch den Schwerpunkt verläuft und deren Richtung durch einen Vektor $\vec{n}$ mit $|\vec{n}| = 1$ gegeben ist? **[1P]**

e) Bestimmen Sie das Trägheitsmoment eines Würfels mit Masse m und Kantenlänge a bezüglich einer Achse, die durch zwei diametrale Ecken verläuft. **[3P]**



3) Gleitende Perle (10 Punkte = 23%)

Eine Perle der Masse m im Schwerefeld (Potential $V = mgy$) kann wie in der Skizze gezeichnet (ohne Reibung) auf einer ebenen Kurve $S = S(\Phi)$ gleiten, wobei S die Bogenlänge und Φ der Winkel zwischen Tangente und Horizontale ist. Die Kurve ist in einer vertikalen $x - y$ Ebene gezeichnet und $S = 0$ entspricht dem Minimum '0'.



a) Wie lauten die Lagrange-Funktion und das Potential V in der generalisierten Koordinate S? Hinweis: $dy = \sin(\Phi)\, dS$ erlaubt es y durch S auszudrücken. **[2P]**

b) Bestimmen Sie Bewegungsgleichung mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung. **[2P]**

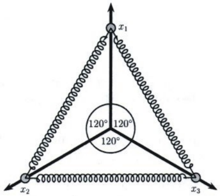
c) Welche Differentialgleichung muß $S(t)$ erfüllen, damit die Oszillation um das Minimum bei '0' harmonisch ist, d.h. die Lösung die Form $S(t) = S_0 \sin(\kappa t + \delta)$ mit den Konstanten κ und δ hat? **[2P]**

d) Berechnen Sie $\Phi(t)$ aus dem Vergleich von b) und c). Welche Bedingung muß die Größe $\lambda := S_0 \kappa^2 / g$ erfüllen? **[2P]**

e) Handelt es sich bei der Kurve um $y(x) = Cx^2$? Begründen Sie Ihre Antwort! **[2P]**

4) Gekoppelte Perlen (10 Punkte = 23%)

Drei punktförmige Perlen der Masse m bewegen sich reibungsfrei entlang drei idealisierter Drähte. Die Drähte liegen in einer Ebene und gehen vom Koordinatenursprung aus, wobei sie Winkel von 120° einschließen. Weiters sind die Perlen mit linearen Federn mit der Federkonstante k verbunden (siehe Abb.). Die natürliche Länge der Federn sei $\sqrt{3}\,l$, sodass sich die Ruhelage der Perlen jeweils im Abstand l vom Ursprung befindet. Diese Gleichgewichtslage wird nun gestört, und die Körper oszillieren um die Ruhelage. Verwenden Sie als Koordinaten die Auslenkungen aus der Ruhelage, x_1, x_2, x_3, und betrachten Sie kleine Auslenkungen $x_1, x_2, x_3 \ll l$, sodass in erster Näherung die Winkel zwischen den Drähten und den Federn als konstant betrachtet werden können.



a) Geben Sie die Lagrange-Funktion des Systems an. **[3P]**

b) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Zeigen Sie, dass sie in der Form

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{3}{4}\frac{k}{m} M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können und geben Sie die Matrix M an. **[3P]**

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung indem sie das Eigenwertproblem $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ behandeln. Zeigen Sie, dass $\lambda_1 = 4$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, und berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$. **[4P]**

5) Allgemeiner Formalismus (10 Punkte = 23%)

a) Betrachten Sie eine allgemeine Koordinatentransformation $T: \quad q_i \to q_i' = q_i'(q_i, t, \alpha)$, wobei α ein kontinuierlicher Parameter der Transformation ist. Was bedeutet die Aussage "T ist eine Symmetrietransformation der Lagrange-Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$"? Was besagt das Noethertheorem? **[3P]**

b) Betrachten Sie die Hamiltonfunktion $H = p_1 p_2 + \omega^2 q_1 q_2$. Leiten Sie mit Hilfe der Hamiltonschen Gleichungen die Bewegungsgleichungen ab. **[2P]**

c) Berechnen Sie für H aus Teilaufgabe b) die Lagrange-Funktion und zeigen Sie, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen auf die selben Bewegungsgleichungen führen. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und diskutieren Sie die Bewegung in der (q_1, q_2)-Ebene. **[3P]**

d) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion invariant ist unter der Transformation $q_1 \to e^{-\alpha} q_1$, $q_2 \to e^{\alpha} q_2$ und berechnen Sie die entsprechende Erhaltungsgröße. Was ist ihre physikalische Bedeutung? **[2P]**