Formelblatt: Analysis

1 Vollständige Induktion

Prinzip:

1. **Induktionsanfang:** Zeige $P(n_0)$ für den Startwert n_0 (z.B. $n_0 = 0$ oder 1).
2. **Induktionsvoraussetzung:** Angenommen, $P(n)$ gilt für ein beliebiges, aber festes $n \geq n_0$.
3. **Induktionsschritt:** Beweise, dass $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

2 Rechenregeln

Wurzeln:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

Logarithmen:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b, \quad \log(a^r) = r \log a.$$

Potenzen:

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

3 Komplexe Zahlen

Kartesische Darstellung:

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Polardarstellung:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg(z).$$

Euler-Formel:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

4 Additionstheoreme

Trigonometrisch:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Hyperbolisch:

$$\sinh(\alpha \pm \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta \pm \cosh\alpha\sinh\beta,$$
$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta \pm \sinh\alpha\sinh\beta.$$

5 Binomialkoeffizient

Ohne Wiederholung (Kombinationen):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \le k \le n.$$

Mit Wiederholung:

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

6 Grenzwerte

Definition:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \ge N.$$

L'Hôpital's Regel:

Falls $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ oder $\pm\infty$ und $g'(x) \neq 0$ in einer Umgebung von a, so gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.

7 Sätze zu Folgen

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.
- **Bolzano-Weierstraß:** Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge.

8 Konvergenzkriterien für Reihen und Potenzreihen

Leibnizkriterium (Alternierende Reihen):

Ist (a_n) monoton fallend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dann konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n.$$

Nullfolgenkriterium:

Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Absolute Konvergenz:

$$\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut, wenn } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergiert.}$$

Majorantenkriterium:

Sind $|a_n| \leq b_n$ für alle n und konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Quotientenkriterium:

Sei

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Dann:

$$L < 1 \Rightarrow \text{absolute Konvergenz}, \quad L > 1 \Rightarrow \text{Divergenz}, \quad L = 1 \Rightarrow \text{unbestimmt.}$$

Wurzelkriterium:

Sei

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann:

$$L < 1 \Rightarrow \text{absolute Konvergenz}, \quad L > 1 \Rightarrow \text{Divergenz}, \quad L = 1 \Rightarrow \text{unbestimmt.}$$

Umordnungssatz:

Absolute Konvergenz garantiert, dass jede Umordnung den Wert der Reihe nicht ändert.

9 Grenzwerte von Funktionen & Stetigkeit

Zwischenwertsatz:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$. Dann gilt:

$$\forall c \text{ zwischen } f(a) \text{ und } f(b)\ \exists \xi \in [a, b] : f(\xi) = c.$$

Ableitung der Umkehrfunktion:

Ist f streng monoton und differenzierbar, so existiert f^{-1} mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{mit } y = f(x).$$

Extremwertsatz:

Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ nimmt ihr Maximum und Minimum an.

10 Differenzialquotient und Ableitungen

Definition der Ableitung:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Ableitungsregeln:

- **Summenregel:** $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- **Produktregel:** $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- **Quotientenregel:** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.
- **Kettenregel:** $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- **Ableitung der Umkehrfunktion:** Siehe Zwischenwertsatz.

11 Extremstellen

Notwendige Bedingung:

Falls f an x_0 ein lokales Extremum hat und differenzierbar ist, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung:

Ist $f'(x_0) = 0$ und

$$f''(x_0) > 0 \quad \text{(lokales Minimum)} \quad \text{oder} \quad f''(x_0) < 0 \quad \text{(lokales Maximum)},$$

so liegt ein Extremum vor.

Sattelpunkte:

Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$, sind höhere Ableitungen zu untersuchen.

12 Satz von Rolle und Mittelwertsatz

Satz von Rolle:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) mit $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = 0.$$

Mittelwertsatz:

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

13 Taylorreihen

Satz von Taylor:

Für f in einer Umgebung von a gilt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_n(x),$$

wobei $R_n(x)$ der Restterm ist.

14 Integrale

Hauptsatz der Integralrechnung:

Sei f stetig auf $[a, b]$ und F eine Stammfunktion von f $(F' = f)$. Dann:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Substitution:

Mit $u = g(x)$ gilt:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

Partielle Integration:

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

Riemannscher Integralbegriff:

Definition über Zerlegung des Integrationsintervalls, Riemann-Summen und Grenzwertbildung.

Cauchyscher Hauptwert:

Für symmetrische uneigentliche Integrale:

$$\text{p.v.} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\,dx.$$

Uneigentliche Integrale:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Integralkriterium für Reihen:

Sei $a_n = f(n)$ mit f monoton fallend und $f(x) \geq 0$. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \iff \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx < \infty.$$

15 Differentialgleichungen (DGL)

Erste Ordnung

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx.$$

Lineare DGL:

$$y' + p(x)y = q(x), \quad \mu(x) = \exp\left(\int p(x)\,dx\right),$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left(\int \mu(x)q(x)\,dx + C\right).$$

Zweite Ordnung

Homogene DGL:

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Lösungen:

$$\begin{cases} \Delta > 0: & y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \\ \Delta = 0: & y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}, \quad \lambda = -\frac{b}{2a}, \\ \Delta < 0: & y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right), \quad \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}. \end{cases}$$

Inhomogene DGL:

Gesamtlösung:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

wobei y_h die Lösung der homogenen Gleichung und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist. Methoden: Variation der Konstanten oder Ansatz der unbestimmten Koeffizienten.