线性代数

第一章节:行列式

$$|D| = \sum(-1)^{t(i_1i_2\ldots i_n)+t(j_1j_2\ldots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\ldots a_{i_nj_n} \\ \text{其中}t(i_1i_2\ldots i_n)\text{即为}i_1i_2\ldots i_n\text{的逆序数},t(j_1j_2\ldots j_n)\text{同理} \tag{1}$$

上三角下三角主对角线 都是 对角线相乘

副对角线以及副对角线三角形都是对角线相乘再乘$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

行列式的性质

$$\begin{gathered}(D^T)^T = D \\ |cD| = c^n|D| \\ |D^T| = |D| \quad (\text{因此对行成立的性质对列也成立}) \\ \text{行列式两行互换, 值变号} \\ \text{两行元素对应成比例}, |D| = 0 \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ j & k & l \end{vmatrix} \\ \text{某一行乘}k\text{加到另一行, 行列式的值不变} \\ \text{异乘变零定理：某一行的元素和另一行对应元素代数余子式乘积之和为0}\end{gathered} \tag{2}$$

代数余子式

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (M_{ij}\text{为余子式}) \tag{3}$$

特殊行列式

加边法

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & f \\ 0 & g & h & i \end{vmatrix} \tag{4}$$

范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \tag{5}$$

反对称行列式

$$\begin{gathered} a_{ij} = -aji \\ \text{即主对角线全为0, 对角线两侧对应为相反数} \\ \text{例如} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{6}$$

> 奇数阶反对称行列式为$|D| = 0$

对称行列式

$$\begin{gathered} a_{ij} = a_{ji} \\ \text{即主对角线任意, 对角线两侧对应相等} \\ \text{例如} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{7}$$

三叉型行列式

> 用列消去转换为上三角行列式(需要注意分母不为零的条件)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & d_1 \\ a_2 & b_2 & & \\ \dots & & \dots & \\ a_n & & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - b_1\frac{a_2}{b_2} - \dots - d_1\frac{a_n}{d_n} & b_1 & \dots & d_1 \\ 0 & b_2 & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & & & d_n \end{vmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{gathered}
\text{形如}D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & .. & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & & .. & .. \\ b_n & 0 & 0 & .. & 0 & c_n \end{vmatrix}_n \\
\text{解法：对第一行展开}D = a_0\prod_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=2}^{n+1} A_{1i} \\
= a_0\prod_{i=1}^{n} c_i + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i M_{1(i+1)} \\
\text{其中}\quad M_{1i} = \begin{vmatrix} G_i & 0 \\ * & H_i \end{vmatrix} \\
G_i = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & 0 & .. & 0 \\ b_2 & 0 & c_1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & & .. \\ b_{i-1} & 0 & 0 & .. & c_{i-1} \\ b_i & .. & .. & 0 & 0 \end{vmatrix}_i = (-1)^{i+1} b_i \begin{vmatrix} c_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & c_2 & .. & 0 \\ .. & .. & & .. \\ 0 & 0 & .. & c_{i-1} \end{vmatrix}_{i-1} \\
H_i = \begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & c_{i+2} & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & & .. & .. \\ 0 & .. & .. & 0 & c_n \end{vmatrix}_{n-i}
\end{gathered} \tag{9}$$

爪型行列式

$$\begin{gathered}
\text{形如}D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .. & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & c_2 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}_n \\
\text{解法：对第一行展开}D = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} a_i M_{1i} \\
\text{其中}\quad M_{1i} = \begin{vmatrix} G_i & 0 \\ 0 & H_i \end{vmatrix} \\
G_i = \begin{vmatrix} b_1 & c_2 & 0 & .. & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & & .. \\ 0 & .. & .. & 0 & b_{i-1} \end{vmatrix}_{i-1} \quad \text{为上三角行列式,} \\
H_i = \begin{vmatrix} c_{i+1} & 0 & .. & 0 & 0 \\ b_{i+1} & c_{i+2} & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & & .. & .. \\ 0 & .. & 0 & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix} \quad \text{为下三角行列式}
\end{gathered} \tag{10}$$

三斜线行列式

$$n\text{阶三斜线行列式, 形如}D=\begin{vmatrix}a&b&0&..&0&0\\c&a&b&..&0&0\\..&..&..&&..&..\\0&0&0&..&a&b\\0&0&0&..&c&a\end{vmatrix}_n \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\text{则}D&=A_{11}+A_{12}\quad(\text{第一行展开})\\&=aD_{n-1}-M_{12}\quad(M_{12}\text{第一列展开})\\&=aD_{n-1}-bcD_{n-2}\end{aligned}$$

$$\text{之后使用数学归纳法或者数列技巧证明}or\text{计算}$$

拉普拉斯特殊情形

如果A和B都是方阵

$$\begin{vmatrix}A&0\\ *&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&*\\0&B\end{vmatrix}=|A||B|,\quad\begin{vmatrix}0&A\\B&*\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}*&A\\B&0\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B| \tag{12}$$

克莱姆Cramer法则

设含有n个未知数,n个方程的线性方程组(未知数个数与方程组个数相同)

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_3=b_2\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_3=b_n\end{cases}$$

$$\text{系数行列式为}D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{vmatrix} \tag{13}$$

$$D_j=\text{是把}D\text{中第}j\text{列元素替换为方程组右端的常数得到的}n\text{阶行列式}$$

$$\text{若}D\neq 0\quad,\text{则方程组有唯一解, 且}x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\ldots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

> 若$b_1=b_2=\ldots=b_n=0$,则方程组至少有零解,若同时$D\neq 0$,则方程组只有零解
>
> 齐次方程有非零解的充要条件((未知数个数与方程组个数相同) $\Leftrightarrow \quad D=0$

第二章:矩阵

基本性质

相乘条件:左列数=右行数

中间相等取两头

如果$AB=BA$,称AB是可交换的

$$\begin{gathered}\text{矩阵运算:}\\(AB)^k\neq A^kB^k\\(A^T)^=A\\(A+B)^T=A^T+B^T\\(AB)^T=B^TA^T\end{gathered} \tag{14}$$

左乘行,右乘列

$$\begin{gathered}设A=\alpha\beta^T,\alpha和\beta都是n维列向量,则对于正整数k有:\\ A^k=(\beta^T\alpha)^{k-1}A=(tr(A))^{k-1}A\end{gathered}\tag{15}$$

特殊矩阵

数量矩阵

$$设E为单位矩阵,k为任何实数,则称kE为数量矩阵\tag{16}$$

对角矩阵

$$主对角线以外元素均为0的矩阵,一般记为diag(a_1,a_2,..,a_n)\tag{17}$$

对称矩阵(方阵)

$$\begin{gathered}定义:a_{ij}=a_{ji}\\ 性质:A^T=A\\ A,B对称,AB对阵\Leftrightarrow AB可交换\end{gathered}\tag{18}$$

反对称矩阵(方阵)

$$\begin{gathered}定义:a_{ij}=-a_{ji}\\ 性质:主对角线全为0\\ A^T=-A\end{gathered}\tag{19}$$

伴随矩阵

> 方阵才有伴随矩阵

$$\begin{gathered}A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&..&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&..&A_{n2}\\..&..&&..\\A_{1n}&A_{2n}&..&A_{nn}\end{bmatrix}=|A|A^{-1}\\ \forall方阵A,有AA^*=A^*A=|A|E\\ |A^*|=|A|^{n-1}(|A|=0也成立)\end{gathered}\tag{20}$$

逆矩阵

> 方阵才有逆矩阵

$$\begin{gathered}若A为n阶方阵,\exists B使得AB=BA=E,则A^{-1}=B\\ A可逆的充要条件:|A|\neq 0(非奇异,非退化,满秩)\\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*(伴随矩阵法)\end{gathered}\tag{21}$$

> 性质:

$$\begin{gathered}A可逆,则A的逆矩阵A^{-1}唯一\\ A可逆,|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\\ A可逆,则A^{-1}可逆,(A^{-1})^{-1}=A\\ A可逆,则A^T可逆,且(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T\\ A可逆,则A^*可逆,且(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A\\ 若A,B均可逆,则AB可逆,且(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}\\ k\neq 0,则(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}\end{gathered}\tag{22}$$

> 解矩阵方程的注意事项:
>
> - 提取公因子注意方向
> - 矩阵不能和数字直接运算,要加E
> - 先判断可逆,再乘逆矩阵

分块矩阵

$$\begin{gathered} H=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ |H|=|A||B|\ (\text{证明：}Laplace\text{展开}) \end{gathered} \tag{23}$$

> 性质

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{pmatrix}, A^T=\begin{pmatrix} A_1^T & A_4^T \\ A_2^T & A_5^T \\ A_3^T & A_6^T \end{pmatrix} \tag{24}$$

> 结论

$$\begin{gathered} H=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \text{则}H^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{25}$$

初等变换

$$\text{行初等变换}\begin{cases} \text{交换两行} & E(i,j) \\ \text{用}k(\neq 0)\text{乘某一行} & E(i(k)), k\neq 0 \\ \text{某一行的}l\text{倍加到另一行上} & E(i,j(k)) \end{cases} \tag{26}$$

> 性质

$$\begin{gathered} |E(i,j)|=-1, \quad |E(i(k))|=k(\neq 0), \quad |E(i,j(k))|=1 \\ E(i,j)^{-1}=E(i,j), \quad E(i(k))^{-1}=E(i(\frac{1}{k})), \quad E(i,j(k))^{-1}=E(i,j(-k)) \end{gathered} \tag{27}$$

初等变换等价于组左右乘初等矩阵

> 定理

$$\begin{gathered} A,B\text{等价} \Leftrightarrow \exists\text{可逆矩阵}P,Q, \quad \text{使得}PAQ=B \\ A\text{可逆} \Leftrightarrow A\text{的标准型为}E \end{gathered} \tag{28}$$

> 用途

$$\begin{gathered} \text{求矩阵的逆：} \quad (A,E)\longrightarrow(E,A^{-1}) \\ \text{注意事项：}1.\text{按照第一列第二列第三列}\ldots\text{的顺序} \\ 2.\text{每次对整行进行操作} \\ 3.\text{用}\longrightarrow\text{连接}4.\text{只能用行变换} \\ 5.\text{如果}A\text{无法化为}E,\text{证明}A\text{不可逆} \\ 6.\text{求出}A^{-1}\text{后进行验证} \end{gathered} \tag{29}$$

矩阵的秩

> 定义:非零子式的最高阶数

$$r(A)=n \Leftrightarrow \text{有一个}r\text{阶子式不为}0,\text{所有}r+1\text{阶均为}0(\text{更高也为}0,\text{按行展开可证}) \tag{30}$$

> 性质

$$\begin{gathered}\text{矩阵的秩}r(A)=\text{非零行的行数}\\ \text{初等变换不改变矩阵的秩}\\ A\text{为方阵且}A\text{满秩},\text{则}A\text{可逆}\\ r(A)=r(A^T)\\ A_{m\times n},P\text{为}m\text{阶可逆方阵},Q\text{为}n\text{阶可逆方阵},\text{则}r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)\\ \text{若}AB=0,\text{则}r(A)+r(B)\le n,\quad n\text{为}A\text{的列数}(B\text{的行数})\\ r(A^*)=\begin{cases} n, & \text{若}r(A)=n\\ 1, & \text{若}r(A)=n-1\\ 0, & \text{若}r(A)<n-1\end{cases}\end{gathered} \tag{31}$$

阶梯型

- 若有零行,零行在非零行的下面
- 坐起首非零元素左边零的个数随行数增加而严格增加

$$\text{形如}\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ 0 & e & f & g\\ 0 & 0 & h & i\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{32}$$

行简化阶梯型

- 是阶梯型
- 非零行的首非零元为1
- 首非零元所在列的其余元素全为0
- 按照上面三步进行检验

$$\text{形如}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & b\\ 0 & 1 & 0 & c\\ 0 & 0 & 1 & d\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{33}$$

其他性质

一般地,$AB=cB$时,$A^nB=c^nB$,特别地,$AB=B$时,$A^nB=B$

矩阵分解

> 当一个矩阵B是另一个矩阵A的列向量组线性组合时,可以构造一个矩阵C,使得$B=AC$

$$\begin{gathered}\text{设}A=(\alpha,\beta,\gamma),B=(\alpha+2\beta-\gamma,\ 3\alpha-\beta+\gamma,\ \alpha+2\gamma)\\ \text{令}C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad \text{则}B=AC\end{gathered} \tag{34}$$

基本矩阵方程

$$
\begin{gathered}
\text{初等变换法} \\
1.AX=B:(A|B)\to(E|X),X\text{即为方程的解} \\
2.XA=B:\text{两侧同时转置得到}A^TX^T=B^T,\text{再按第一条} \\
(A^T|B^T)\to(E|X^T)\text{得到}X^T,\text{对}X^T\text{进行转置即可得到方程的解}X
\end{gathered} \tag{35}
$$

> 可以看出,当B为单位阵E时,所得解X即为A^{-1}

第三章:向量组的线性关系与秩

$$
k\alpha=0\Leftrightarrow\quad k=0\ or\ \alpha=0 \tag{36}
$$

线性相关

> 定义:对于向量组$\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_n$,如果存在一组数$k_1,k_2,..,k_n$使得
>
> $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+..+k_n\alpha_n=0 \tag{37}$$
>
> 成立,则该向量组是线性相关的,否则是线性无关的

显然可以看出,向量组中如果存在$\vec{0}$,则必线性相关

> 性质

$$
\begin{gathered}
\begin{cases}\text{部分组线性相关}\to\text{整体组线性相关}\\\text{整体组线性无关}\to\text{部分组线性无关}\end{cases} \\
\begin{cases}\text{线性无关的向量组的接长向量组也线性无关}\\\text{线性相关的向量组的截断向量组也线性相关}\end{cases} \\
\text{对于}n\text{个}n\text{维向量组成的行列式}D\begin{cases}\text{线性无关}\Leftrightarrow D\neq0\\\text{线性相关}\Leftrightarrow D=0\end{cases} \\
\begin{cases}\alpha_1,..,\alpha_n\text{线性相关}\Leftrightarrow\text{至少一个向量可由其余向量表示}\\\alpha_1,..,\alpha_n\text{线性无关},\text{且}\alpha_1,..,\alpha_n,\beta\text{线性相关},\text{则}\beta\text{可由}\alpha_1,..,\alpha_n\text{唯一表示}\end{cases} \\
\begin{cases}\text{替换定理}:\alpha_1,..,\alpha_s\text{线性无关},\text{且可由}\beta_1,..,\beta_t\text{表示},\text{则}s\le t\\\text{逆否命题}:\alpha_1,..,\alpha_s\text{可由}\beta_1,..\beta_t\text{表示},\text{且}s>t,\text{则}\alpha_1,..,\alpha_s\text{线性相关}\end{cases} \\
\begin{cases}\text{若}m>n,\text{则}m\text{个}n\text{维向量线性相关}\\\text{推论}:\text{两个等价的线性无关组所含向量个数相同}\end{cases}
\end{gathered} \tag{38}
$$

$$
\begin{gathered}
\text{做题常用}: \\
\begin{cases}\beta\text{可用}(\alpha_1,..,\alpha_s)\text{线性表示}\Leftrightarrow r(\alpha_1,..,\alpha_s,\beta)=r(\alpha_1,..,\alpha_s)\\\beta\text{可用}(\alpha_1,..,\alpha_s)\text{唯一线性表示}\Leftrightarrow r(\alpha_1,..,\alpha_s,\beta)=r(\alpha_1,..,\alpha_s)=s\end{cases} \\
\begin{cases}\beta_1,..,\beta_t\text{可用}\alpha_1,..,\alpha_s\text{线性表示}\Leftrightarrow r(\alpha_1,,..,\alpha_s,\beta_1,..,\beta_t)=r(\alpha_1,,..,\alpha_s)\\\beta_1,..,\beta_t\text{和}\alpha_1,..,\alpha_s\text{等价}\Leftrightarrow r(\alpha_1,,..,\alpha_s)=r(\alpha_1,,..,\alpha_s,\beta_1,..,\beta_t)=r(\beta_1,..,\beta_t)\end{cases}
\end{gathered} \tag{39}
$$

向量组的秩

极大线性无关组

$$
\begin{gathered}
\text{全为0的向量组没有极大线性无关组} \\
\text{线性无关的向量组的极大无关向量组就是它本身} \\
\text{任何向量组和它的极大无关向量组等价}
\end{gathered} \tag{40}
$$

向量组的秩

> 定义:极大线性无关组所含向量个数,即$r(\alpha_1,..,\alpha_s)$
>
> 规定:全为0的向量组的秩为0

> $0 \le r(\alpha_1,..,\alpha_s) \le \min\{s, 向量的维数\}$

$$
\begin{gathered}
\begin{cases}\alpha_1,..,\alpha_s线性无关 \Leftrightarrow r=s \\ \alpha_1,..,\alpha_s线性相关 \Leftrightarrow r<s\end{cases} \\
\alpha_1,..,\alpha_s可由\beta_1,..\beta_t表示,则r(\alpha_1,..,\alpha_s) \le r(\beta_1,..,\beta_t) \\
两个向量组等价 \longrightarrow 秩相等 \\
矩阵的行秩 = 列秩 = r(A) \\
r(A \pm B) \le r(A)+r(B) \\
r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\} \\
初等行变换不改变列向量组的线性关系
\end{gathered} \tag{41}
$$

求极大线性无关组

1. 不管是行向量还是列向量,均按照列构成矩阵
2. 仅使用初等行变换化为行简化阶梯型
3. 首非零元所在列做极大线性无关组
4. 其余向量表示系数直接写出

> 例:求下面矩阵的列向量的极大线性无关组,并将其他向量用其表示
>
> $$
> \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & -4 & 4 & -6 \\ 2 & 8 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{42}
> $$
>
> $$
> \begin{gathered}
> 则\beta_1,\beta_2是极大线性无关组 \\
> 且\begin{cases}\beta_3 = -3\beta_1 + \frac{1}{2}\beta_2 \\ \beta_4 = 6\beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2\end{cases} \\
> 则\alpha_1,\alpha_2是极大线性无关组,且\begin{cases}\alpha_3 = -3\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \\ \alpha_4 = 6\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\end{cases} \quad (可以不写\beta直接写\alpha)
> \end{gathered} \tag{43}
> $$

第四章:线性方程组

$$
\begin{gathered}
对于一般方程组AX=\beta, \\
r(A)=r(A|\beta) \Rightarrow \begin{cases} r(A)=n, 有唯一解 \\ r(A)<n, 有无穷多解 \end{cases} \\
r(A)<r(A|\beta) \Rightarrow 无解
\end{gathered} \tag{44}
$$

> 解线性方程组的一般步骤

1. 写出$(A|\beta)$
2. 进行初等行变换转化为阶梯型,判断是否有解
3. 若有解,继续进行初等行变换为行简化阶梯型
4. 将非零行首非零元1留在等号左面,其余放在等号右面

齐次线性方程组

$r(A)=r(A|\beta) \quad (\beta=0)$,至少有零解

$$
\begin{gathered}
\begin{cases} r(A)=n, 仅有唯一零解 \\ r(A)<n, 有非零解 \end{cases} \\
\begin{cases} 方程个数m < 未知量个数n \Rightarrow 有非零解 \\ 方程个数m = 未知量个数n, \quad \begin{cases} 有非零解 \Leftrightarrow |A|=0 \\ 只有零解 \Leftrightarrow |A| \ne 0 \end{cases} \end{cases}
\end{gathered} \tag{45}
$$

解的结构

齐次线性方程组

$$\begin{gathered}\text{对于}Ax=0\\ \begin{cases}\text{若}\eta\text{是它的解},\text{则}c\eta\text{也是它的解}\\ \text{若}\eta_1,\eta_2\text{是它的解},\text{则}\eta_1+\eta_2\text{也是它的解}\end{cases}\end{gathered}\tag{46}$$

> 基础解系

$$\begin{gathered}\text{定义基础解系}:\eta_1,..,\eta_s\\ 1.\eta_1,..,\eta_s\text{线性无关}\\ 2.\text{任何解都可以由}\eta_1,..,\eta_s\text{线性表示}\end{gathered}\tag{47}$$

> 齐次线性方程组基础解系标准解法:

1. 对A进行初等行变换,转化为行最简阶梯型
2. 将非零行首非零元1留在等号左面,其余放在等号右面
3. 写出自由未知量(不在方程左面的未知量)
4. 令自由未知量为一组线性无关的量,求出对应的解
5. 得到$n-r(A)$个解构成基础解系

例:

$$\begin{gathered}\text{已知齐次线性方程组}Ax=0\\ A=\to\ldots\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{9}{4}&-\frac{3}{4}&\frac{1}{4}\\ 0&1&\frac{3}{4}&-\frac{7}{4}&\frac{5}{4}\\ 0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \text{则}\begin{cases}x_1=\frac{9}{4}x_3+\frac{3}{4}x_4-\frac{1}{4}x_5\\ x_2=-\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_4-\frac{5}{4}x_5\end{cases}\\ \text{则}x_3,x_4,x_5\text{为自由未知量}\\ \text{令}(x_3,x_4,x_5)^T\text{分别取}(1,0,0)^T,(0,1,0)^T,(0,0,1)^T,\text{带入得到}\\ \eta_1=(\frac{9}{4},-\frac{3}{4},1,0,0)^T,\eta_2=(\frac{3}{4},\frac{7}{4},0,1,0)^T,\eta_3=(-\frac{1}{4},-\frac{5}{4},0,0,1)^T\\ \text{则}\eta_1,\eta_2,\eta_3\text{为}Ax=0\text{的基础解系}\\ \text{即}Ax=0\text{的任意解}\eta\text{都可以表示为}\eta=c_1\eta_2+c_2\eta_2+c_3\eta_3(c1,c2,c3\text{为任意常数})\end{gathered}\tag{48}$$

非齐次线性方程组

$$\begin{gathered}\text{对于非齐次线性方程组}Ax=b,\text{称}Ax=0\text{为它的导出组}\\ \begin{cases}\text{若}\alpha_1,\alpha_2\text{是}Ax=b\text{的解},\text{则}\alpha_1-\alpha_2\text{是}Ax=0\text{的解}\\ \text{若}\alpha_0\text{是}Ax=b\text{的解},\eta\text{是}Ax=0\text{的解},\text{则}\alpha_0+\eta\text{是}Ax=b\text{的解}\end{cases}\end{gathered}\tag{49}$$

> 解的结构

$$\begin{gathered}\alpha_0\text{是}Ax=b\text{的一个解(特解)},\eta\text{是}Ax=0\text{的通解}\\ \text{即}\eta=c_1\eta_1+..+c_{n-r}\eta_{n-r},\text{其中}\eta_1,..,\eta_{n-r}\text{是}Ax=0\text{的基础解系}\\ \text{则}\alpha_0+c_1\eta_1+..+c_{n-r}\eta_{n-r}\text{是}Ax=b\text{的全部解(通解)}\end{gathered}\tag{50}$$

> 非齐次线性方程组的标准解法:

1. 写出$(A|b)$,只使用初等行变换化为行简化阶梯型
2. 写出同解方程组,指出自由未知量,并求出特解α_0
3. 写出导出组的同解方程组,指出自由未知量,求出基础解系$\eta_1,..,\eta_{n-r}$

4. 得到$Ax=b$通解$\alpha_0+c_1\eta_1+..+c_{n-r}\eta_{n-r}$

重要结论

> 矩阵$A_{m\times n},B_{n\times s}$,若$AB=0$,则$r(A)+r(B)\le n$

$$\begin{gathered}\text{证明：}AB=0\Rightarrow B\text{的列向量都是}AX=0\text{的解}\\ \text{因此}B\text{的列向量是}AX=0\text{解集的子集}\\ \text{则}B\text{列向量组的秩,不大于方程组}AX=0\text{基础解系的个数}\\ \text{即}r(B)\le n-r(A)\\ \text{因此}r(A)+r(B)\le n\end{gathered}\tag{51}$$

> $r(A|B)\le r(A)+r(B)$

$$\begin{gathered}\text{证明：设}r(A|B)\text{的列向量分别为}\{\alpha_1,..,\alpha_s,\beta_1,..,\beta_t\}\\ \text{设}\{\alpha_1,..,\alpha_s,\beta_1,..,\beta_t\}\text{的一个极大无关组为}I\\ I_1\text{为}I\text{中属于}\alpha_1,..,\alpha_s\text{中的向量组成的向量组}\\ I_2\text{为}I\text{中属于}\beta_1,..,\beta_t\text{中的向量组成的向量组}\\ \begin{aligned}\text{从而}r(A|B)&=r(\alpha_1,..,\alpha_s,\beta_1,..,\beta_t)\\ &=I\text{向量个数}\\ &=I_1\text{向量个数}+I_2\text{向量个数}\\ &\le r(\alpha_1,..,\alpha_s)+r(\beta_1,..,\beta_t)\\ &=r(A)+r(B)\end{aligned}\end{gathered}\tag{52}$$

> $r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

$$\begin{gathered}\text{证明：}r(A+B)\le r(A+B|B)\\ \text{对矩阵}(A+B|B)\text{进行初等列变换：左边}A+B\text{各列都减去右边}B\text{的对应列,化为}(A|B)\\ \text{于是}r(A+B)\le r(A+B|B)=r(A|B)\le r(A)+r(B)\end{gathered}\tag{53}$$

注意事项:

先初等变换再矩阵乘积可能会改变秩

第五章:特征向量与特征值,相似,对角化

特征值与特征向量

> 定义:

$$\begin{gathered}A\text{为}n\text{阶方阵,存在数}\lambda\text{和非零列向量}\alpha\text{使得}A\alpha=\lambda\alpha\\ \text{则称}\lambda\text{为}\alpha\text{的特征值,或者说}\alpha\text{为}\lambda\text{的特征向量}\\ \text{称}|\lambda E-A|=0\text{为特征方程}\end{gathered}\tag{54}$$

> 性质:

$$\begin{gathered}\text{如果}\eta\text{是}A\text{的特征向量.特征值为}\lambda\text{,则}\eta\text{也是}A\text{的任何多项式}f(A)\text{的特征向量,特征值为}f(\lambda)\\ \lambda\text{是}A\text{的特征值,}\alpha\text{是对应的特征向量,对于}\forall c\neq 0,c\alpha\text{也是}\lambda\text{的特征向量}\\ \text{若}\alpha_1,\alpha_2\text{是}\lambda\text{的特征向量,则}c_1\alpha_1+c_2\alpha_2\text{也是}\lambda\text{的特征向量}\\ n\text{阶对角型矩阵特征值为主对角线}n\text{个元素}\\ \text{若有}\sum|a_{ij}|<1,i=1,..,n\text{和}\sum|a_{ij}|<1,j=1,..,n\text{,则}|\lambda_k|<1\\ \text{对于}n\text{个特征值}\lambda_1,..,\lambda_n\text{,有}\begin{cases}\sum_{i=1}^n\lambda_i=\sum_{i=1}^n a_{ii}=tr(A)\\ \lambda_1\lambda_2..\lambda_n=|A|\end{cases}\\ \text{互不相同的特征值}\lambda_1,..,\lambda_m\text{,对应的特征向量}\alpha_1,..,\alpha_m\text{线性无关}\end{gathered}$$

(互不相同的特征值对应的特征向量：

$$
\begin{cases}
\text{互不相同的特征值对应的特征向量：}\lambda_1\text{对应}(\alpha_{11},..\alpha_{1s}),..,\lambda_n\text{对应}(\alpha_{n1},..,\alpha_{nt}),\\
\text{则}\alpha_{11},..,\alpha_{1s},..,\alpha_{n1},..,\alpha_{nt}\text{全部放在一起仍然线性无关}
\end{cases} \tag{55}
$$

$$
k\text{重特征根对应的线性无关的特征向量的个数} \le k
$$

$$
\begin{cases}
A\text{和}A^T\text{有相同的特征值}\\
k\lambda\text{是}kA\text{的特征值}\\
\lambda^k\text{是}A^k\text{的特征值}\\
\frac{1}{\lambda}\text{是}A^{-1}\text{的特征值}\\
\frac{1}{\lambda}|A|\text{是}A^*\text{的特征值}\\
A\text{可逆时},A,A^{-1},A^*\text{的特征向量完全一样}\\
A+E,A\text{的特征值}\lambda+1,A\text{的特征向量不变}
\end{cases}
$$

$$
r(A)\le 1 \Rightarrow A\text{的特征值为}0,0,\dots,tr(A)
$$

重要结论

$$
\begin{gathered}
\text{设}\lambda\text{是}n\text{阶矩阵}A\text{的特征值},\text{则它的重数}\ge n-r(A-\lambda E)\\
\Rightarrow \text{特征值0的重数}\ge n-r(A)\\
\Rightarrow \text{若}r(A)=1,\text{则重数}\ge n-1,\text{而}\sum\lambda=tr(A)\\
\Rightarrow \text{前}n-1\text{个特征值为0},\text{最后一个为}tr(A)
\end{gathered} \tag{56}
$$

> 例题(完整步骤):

$$
\begin{gathered}
\text{求}A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}\text{的特征值和特征向量}\\
|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda+2&-4\\-2&-4&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+7)(\lambda-2)^2\\
\text{则}\lambda_1=-7,\lambda_2=\lambda_3=2\\
1)\lambda=-7,\lambda E-A=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\longrightarrow\dots(\text{见解的结构部分})\longrightarrow\\
\text{得到特征向量}c_1\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix},c_1\ne 0\\
2)\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda E-A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\longrightarrow\dots(\text{见解的结构部分})\longrightarrow\\
\text{得到特征向量}c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},c_2,c_3\text{不同时为}0(c_2c_3\ne 0)
\end{gathered} \tag{57}
$$

相似矩阵

> 定义:

$$
n\text{的}A,B\text{方阵},\text{若}\exists n\text{阶可逆矩阵}P,\text{使得}P^{-1}AP=B,\text{那么称}A\text{和}B\text{相似},\text{记作}A\sim B \tag{58}
$$

> 性质:

$$
\begin{gathered}
\text{自反性},\text{对称性},\text{传递性}\\
\text{数量矩阵只和自己相似}\\
\text{若}A\sim B,\text{则}A\text{和}B\text{有相同的特征值},\text{且}|A|=|B|,tr(A)=tr(B)
\end{gathered}
$$

$$若A\sim B,则A和B有相同的特征值,且|A|=|B|,tr(A)=tr(B)$$

$$\begin{cases} 若A\sim B\Rightarrow A^m\sim B^m \\ 若A\sim B,A可逆\Leftrightarrow B可逆 \\ 若A,B还可逆,则A^{-1}\sim B^{-1},A^*\sim B^* \\ P^{-1}A^{-1}P=B^{-1},P^{-1}A^*P=B^* \end{cases} \tag{59}$$

$$若A\sim B,则$$

$$如果A\sim B,且P^{-1}AP=B,则\eta是A的特征向量\Leftrightarrow P^{-1}\eta是B的特征向量$$

$$如果A,B中有一个矩阵可逆,则AB\sim BA,证明:A^{-1}(AB)A=BA$$

> - A和B相似,证明A和B的特征值相同
>
> $$\begin{gathered} 因为A\sim B,所以\exists可逆矩阵P使得,P^{-1}AP=B \\ 特征多项式|\lambda E-B|=|\lambda E-P^{-1}AP|=|\lambda P^{-1}EP-P^{-1}AP| \\ =|P^{-1}(\lambda E-A)P|=|P^{-1}||\lambda E-A||P|=|\lambda E-A| \\ 因此A和B的特征多项式相同,则特征值也相同 \end{gathered} \tag{60}$$
>
> - B的特征向量为$P^{-1}\eta$
>
> $$\begin{gathered} A\eta=\lambda\eta,而A=PBP^{-1} \\ PBP^{-1}\eta=\lambda\eta\ \Rightarrow B(P^{-1}\eta)=\lambda(P^{-1}\eta) \\ 所以B的特征向量为P^{-1}\eta \end{gathered} \tag{121}$$

与对角型相似

> 充要条件:

$$A相似于对角型\Leftrightarrow A有n个线性无关的特征向量\Leftrightarrow r_i重特征根的基础解系有r_i个解 \tag{122}$$

> 性质:

$$A有n个互异的特征值\lambda_1,..,\lambda_n,则A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & .. & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{123}$$

> 例题

$$求A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}是否相似于对角型,若相似P=?,\Lambda=?$$

$$|\lambda E-A|=..按上面求出特征值和特征向量=..$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-1时,特征向量为\alpha_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1\end{pmatrix} \\ \lambda_2=\lambda_3=2时,\alpha_2=\begin{pmatrix}-2 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \end{cases} \tag{124}$$

$$则A相似于对角型,且P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),对应的\Lambda=\begin{pmatrix}-4 & & \\ & 2 & \\ & & 2\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ \end{pmatrix},求A^{100}$$

$$\begin{matrix}\backslash -1 & 1 & 0 /\end{matrix}$$

$$\begin{gathered}\text{此处省略一万步}\\ \lambda_1=-1,\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_2=0,\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \lambda_3=1,\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}\\ P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\1&1&3\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix}\text{而}P^{-1}AP=\Lambda,\text{则}A=P\Lambda P^{-1}\\ A^{100}=(P\Lambda P^{-1})^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=..\end{gathered}\tag{125}$$

正交矩阵

> 定义:A为n阶方阵,$A^TA=E$

> 充要条件:A正交$\Leftrightarrow$ A的列(行)向量组是标准正交向量组
>
> 性质:

$$\begin{gathered}\text{内积}:(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta\\ \text{若}A\text{为}n\text{阶正交矩阵}\\ |A|=1\ or\ -1\\ A^{-1}=A^T,\text{且}A^{-1}\text{和}A^T\text{均为正交矩阵}\\ \text{若}A\text{和}B\text{为}n\text{阶正交矩阵},\text{则}AB\text{为正交矩阵}\\ \text{若}A\text{为正交矩阵},\alpha,\beta\text{为列向量},\text{则}(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)\end{gathered}\tag{126}$$

施密特正交化

> 定义:给一组线性无关的$\alpha_1,..,\alpha_s$,求与之等价的正交向量组$\beta_1,..\beta_s$

$$\begin{aligned}&\beta_1=\alpha_1,\\&\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{\beta_1,\beta_1}\beta_1\\&\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{\beta_1,\beta_1}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{\beta_2,\beta_2}\beta_2\\&\quad\cdots\cdots\end{aligned}\tag{127}$$

实对称矩阵的对角化

> 实对称矩阵的性质:
>
> 实对称矩阵A的不同特征值对应的特征向量是正交的。

所有实对称矩阵都能对角化

正交向量组中不能有零向量

$$\begin{gathered}\text{实对称矩阵}A\text{的不同特征值}\lambda_1,..,\lambda_n\text{对应的特征向量}\alpha_1,..,\alpha_s\text{正交}\\ \text{实对称矩阵}A,\text{一定}\exists\text{正交矩阵}Q\text{使得}Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&..&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}\end{gathered}\tag{128}$$

> 正交相似:A,B同为n阶矩阵,若$\exists$ 正交矩阵P使得$P^{-1}AP=B$,那么称A和B正交相似

> 解题过程:
>
> 求出特征值后,若全为单根,则已经正交化,只需单位化

> 若为单根和重根,重根需做正交化
>
> 若全为重根,则均需要正交化

第六章:二次型

二次型->矩阵表达式

- 平方项的系数直接作为主对角线元素
- 交叉项的系数除以2放在两个对称的相应位置上

> 举例:
>
> $$\begin{gathered} x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-x_2x_3+2x_3^2-2x_1x_3= \\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{129}$$

记作X^TAX,A称为该二次型的矩阵,且定义A的秩即为二次型的秩

显然,二次型矩阵一定对称,即$A^T=A$

标准型

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+...+d_ny_n^2 \tag{130}$$

线性替换:$X=CY$

$|C|\neq 0$,称为可逆的非退化的替换

$|C|=0$,称为退化的替换

线性替换后,二次型矩阵仍对称

正惯性指数

> 给定实对称矩阵A,在与A合同的矩阵的对角线元素中,正的个数为正惯性指数,负数个数即为负惯性指数

合同

> 定义:

$$\begin{gathered} \text{对于}n\text{阶方阵}A,B,\text{如果存在可逆矩阵}C\text{使得}C^TAC=B,\text{那么称}A\text{和}B\text{合同} \\ \text{充要条件：对于两个实对称矩阵,他们的正负惯性指数都相同|它们的特征值正负情况相同} \end{gathered} \tag{131}$$

> 性质:

$$\begin{gathered} \text{反身性|对称性|传递性} \\ A\simeq B\Rightarrow r(A)=r(B) \\ \text{若}A\simeq B,\text{则}A^T=A\Leftrightarrow B^T=B \\ \text{若}A\simeq B,\text{且}A,B\text{可逆, 则若}A^{-1}\simeq B^{-1} \\ \text{若}A\simeq B,\text{则}A^T\simeq B^T \end{gathered} \tag{132}$$

化二次型为标准型

> 定义: 构造可逆实矩阵C,使得C^TAC为对角矩阵

> 配方法/初等变换法/正交变换法

- 配方法

> 要点:先配x_1,再$x_2,..$,以此类推
>
> 配完x_i后,x_i应该不再出现

$$\begin{aligned}&x_1^2-3x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3\\&=x_1^2-2x_1(x_2-x_3)+(x_2-x_3)^2-(x_2-x_3)^2-3x_2^2+4x_3^2-6x_2x_3\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-4x_2^2-4x_2x_3+3x_3^2\\&=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2+4x_3^2\\&=y_1^2-y_2^2+4y_3^2\end{aligned}\tag{133}$$

$$\text{则线性替换为}\begin{cases}x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3\\x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3\\x_3=y_3\end{cases}\tag{134}$$

> 对于特殊情况,如只有交叉项
>
> $$\begin{gathered}2x_1x_2-4x_1x_3+10x_2x_3\\\text{令}\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\text{带入}\\x_3=y_3\end{cases}\\\text{原式}=2y_1^2-2y_2^2+6y_1y_3+14y_2y_3,\text{此时可使用配方法求解}\end{gathered}\tag{135}$$

- 初等变换法

> 要点:对A和E做同样的初等列变换,只对A做相应的初等行变换
>
> A化为对角型之时,E化为C

$$\begin{gathered}A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\\1&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\\\text{则}\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&-1&\\&1&-1\\&&1\end{pmatrix}\end{gathered}\tag{136}$$

规范型:

$$\text{形如}\tag{137}$$

- 正交替换法

同实对称矩阵对角化

有定性

> 正定矩阵:设A为n阶方阵.,如果对任何非零向量X,都有$X^TAX>0$,那么称A为正定矩阵

> 如果A为实矩阵,那么A^TA为实对称半正定矩阵,特征值为非负实数
>
> $$\begin{gathered}\text{证明：设特征值为}\lambda,\text{对应的特征向量为}\eta\\A^TA\eta=\lambda\eta\Rightarrow\eta^TA^TA\eta=\lambda\eta^T\eta\\\text{则}\lambda=\frac{(A\eta,A\eta)}{(\eta,\eta)},\text{而}(A\eta,A\eta)\geq0,\ (\eta,\eta)\geq0\\\text{因此}\lambda\geq0\end{gathered}\tag{138}$$
>
> 如果A为实反对称矩阵,那么它的特征值为0或者纯虚数
>
> $$\begin{gathered}\text{证明：}A^T=-A\\\text{则}A^TA=-A^2,\text{由上文知}A^TA\text{的特征值为非负实数},\text{因此}-A^2\text{的特征值为非负实数}\\\text{则}A^2\text{的特征值为非正实数},\text{那么}A\text{的特征值要么为0要么为纯虚数}\end{gathered}\tag{139}$$

正定二次型经过线性替换仍然正定

$$\begin{aligned}f(x)=X^TAX\text{正定}&\Leftrightarrow\text{标准型是}d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ny_n^2,\text{且}d_i>0\\&\Leftrightarrow\text{正惯性指数为}n\\&\Leftrightarrow A\simeq E\\&\Leftrightarrow n\text{个特征值}>0\\&\Leftrightarrow\text{各阶顺序主子式}>0\\&\Rightarrow|A|>0\end{aligned}\tag{140}$$

$$\begin{gathered}\begin{aligned}A\text{正定}&\Rightarrow A^{-1}\text{正定}\\&\Rightarrow A^*\text{正定}\\&\Rightarrow A^k\text{正定}\end{aligned}\\\Rightarrow A\text{的主对角线元素全}>0\\A\text{正定},B(\text{半})\text{正定}\Rightarrow A+B\text{正定}\end{gathered}\tag{141}$$

> 顺序主子式:正定 $\Leftrightarrow$ 顺序主子式全 >0

$$\begin{gathered}\text{对于}f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+x_3^2\\A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\\text{一阶主子式}(2)>0\\\text{二阶主子式}\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}=1>0\\\text{三阶主子式}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=1>0\\\text{因此}f(x_1,x_2,x_3)\text{是正定的}\end{gathered}\tag{142}$$

线性空间

过渡矩阵:

$$\begin{gathered}
\text{已知}\alpha_1,..,\alpha_n\text{和}\beta_1,..,\beta_n\text{是基}\\
\text{且}(\beta_1,..,\beta_n)=(\alpha_1,..,\alpha_n)\begin{pmatrix}a_{11} & .. & a_{1n}\\ .. & & ..\\ a_{n1} & .. & a_{nn}\end{pmatrix}\\
\text{那么称}A=\begin{pmatrix}a_{11} & .. & a_{1n}\\ .. & & ..\\ a_{n1} & .. & a_{nn}\end{pmatrix}\text{是}\alpha_1,..,\alpha_n\text{到}\beta_1,..,\beta_n\text{的过渡矩阵}
\end{gathered}\tag{143}$$

常考点

$$\begin{gathered}
A_{ij}=a_{ij}\Rightarrow A^T=A^*\\
\text{正交相似}\rightarrow\text{相似 }and\text{ 合同}\rightarrow\text{等价}
\end{gathered}\tag{144}$$

$$\begin{gathered}
n\text{阶矩阵}A\text{满足}f(A)=t\text{且}A\text{的特征值为}\lambda,\text{则}f(\lambda)=t\\
\text{例}(A-aE)(A-bE)=0,\text{则}A\text{的特征值}\lambda\text{满足}(\lambda-a)(\lambda-b)=0\\
\text{因此特征值}\lambda\text{只能为}a\text{或}b(\text{不能确定有哪些, 只能确定范围})
\end{gathered}\tag{145}$$

秩

$$\begin{gathered}
AB=0\Rightarrow r(A)+r(b)\leq n\\
r(A\pm B)\leq r(A)+r(B)
\end{gathered}\tag{146}$$

特征值与特征向量

$$\begin{gathered}
n\text{阶矩阵}A\text{的个行元素均为}k,\text{则}A[1,..,1]^T=k[1,..,1]\\
k\text{为特征值, 对应的特征向量为}[1,..,1]
\end{gathered}\tag{147}$$

$$\alpha\alpha^T\text{是一个秩为}1\text{的实对称矩阵, 并且}\alpha\text{是它的特征向量}\tag{148}$$

注意事项

由于求解方程组时只能使用初等行变换,因此如果在求$|\lambda E-A|$时用到了列变换,那么λ代回时不能代到最后化简过的式子中

P439 例5.38