INTERPOLAZIONE

È un problema di approssimazione di una funzione o di un insieme di dati con una funzione che sia più semplice e che abbia buone proprietà di regolarità. Tale tipo di approssimazione si usa quando i dati sono noti con precisione. La condizione di interpolazione e' che la funzione interpolante e quella interpolata devono coincidere nei nodi che sono le ascisse dei dati.

Problemi: esistenza, unicità, accuratezza, stabilità.

Poiché come classe di funzioni interpolanti scegliamo la classe dei polinomi, l'*interpolazione* si dirà *polinomiale*.

Interpolazione polinomiale

Sia P_n = {polinomi di grado $\leq n$}.

Teorema 1 (esistenza ed unicità)

Siano dati i nodi: $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i,j = 0, \ldots, n$ ovvero tutti distinti e l'insieme di dati in corrispondenza di essi $y_0, \ldots, y_n$ allora:

$$\Rightarrow \exists_1\, p \in P_n : \qquad p(x_i) = y_i \quad i = 0, \ldots, n$$

Dimostrazione.

Sia V la matrice di Vandermonde:
$$V = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & & x_1^n \\ . & . & & \ldots \\ 1 & x_n & & x_n^n \end{vmatrix}$$

Risolvere il sistema lineare: $Va = y$ con $y = [y_0, \ldots, y_n]^T$ equivale a risolvere: $p(x_i) = y_i$

dove: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ e $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$

Quindi: $Va = y \quad \Leftrightarrow \quad p(x_i) = y_i \quad i=0,\ldots,n$

ma: $\det V \propto \prod_{0\leq j<i\leq n} (x_i - x_j) \neq 0$

pertanto il problema ha un'unica soluzione. •

Da tale teorema possiamo ricavare il *metodo dei coefficienti indeterminati* che consiste nell'imporre le condizioni di interpolazione al generico polinomio:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$p(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, \dots, n$$

e risolvendo quindi il sistema lineare:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^n \\ . & . & \dots \\ 1 & x_n & x_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ . \\ a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ . \\ f(x_n) \end{vmatrix}$$

Un'altra dimostrazione del teorema, di tipo costruttivo, e che quindi ci da' un altro metodo, è basata sulla rappresentazione esplicita della soluzione per y generico con una opportuna base. Siano:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad i = 0, \dots, n$$

n+1 polinomi di grado n, dove $L_i(x)$ e' detto polinomio di *interpolazione di Lagrange*. Essi sono tali che:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} \qquad i, j = 0, \dots, n$$

Quindi gli L_i sono linearmente indipendenti da cui segue che:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

che è ***la rappresentazione lagrangiana*** di p(x).

Dimostriamolo nel caso speciale per cui $y_i = 1$ e $y_j = 0$ con $j \neq i$ per qualche $0 \leq i \leq n$.

Cerchiamo un polinomio di grado $\leq$ n avente come n zeri i nodi x_j, $j \neq i$.

(N.B.: tali nodi sono n poiché $j \neq i$).

$$p(x) = c(x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) (x - x_{i+1}) \dots (x - x_n) \quad \text{per qualche c.}$$

Il fatto che $p(x_i) = 1$ implica che:

$$c = [(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1}) (x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)]^{-1}$$

che ci da' l'espressione di $L_i(x)$.

Dimostriamo adesso l'unicità di tale p(x).

Sia q(x) tale che

$$q(x_i) = f(x_i) \qquad i=0,\dots,n$$

$$\text{Sia :} \quad r(x) = p(x) - q(x)$$

$$r \in P_n : \qquad r(x_i) = p(x_i) - q(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$

r ha quindi n+1 zeri (cioè tutti gli x_i), ma poiche' $r \in P_n \Rightarrow r \equiv 0$.

Metodo delle differenze divise di Newton

Questo e' un altro modo per trovare il polinomio interpolatorio, che e' più comodo se si deve aggiungere un dato nuovo. Scriviamo p(x) nella seguente forma:

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$b_0 = f(x_0)$

$b_1 = f[x_0, x_1]$

$b_2 = f[x_0, x_1, x_2]$

…

$b_n = f[x_0, \dots, x_n]$

dove:

$f[x_i, x_j] = \dfrac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$ è la prima differenza divisa,

$f[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$ è la seconda differenza divisa.

In generale, si costruisce la seguente tabella:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f(x_1) & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \dots & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1, x_2, x_3] & & \dots \\
 & & f[x_2, x_3] & & & f[x_0, x_1, \dots, x_n] \\
x_3 & f(x_3) & & & & \dots \\
. & & & & \dots & \\
. & & & f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}] & & \\
. & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f(x_n) & & & &
\end{array}
$$

Differenze divise nel caso di nodi ugualmente spaziati

Siano: $x_i = x_0 + i \cdot h$, $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{x_n - x_0}{n}$ $i = 0,1,\dots,n$ gli n+1 nodi.

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$, $f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}$, ….

Poniamo:

$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$\Delta^0 f(x) = f(x)$

$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x))$

Da cui si ha:

$f[x_i, \ldots, x_{i+k}] = \dfrac{\Delta^k f(x)}{k!h^k}$

$p(x) = p(x_0 + rh) = \sum_{j=0}^{n} \Delta^j f(x_0) \binom{r}{j} \qquad r \in \Re$

Ricordiamo che: $\binom{r}{j} = \dfrac{r(r-1)\ldots(r-(j-1))}{j!}$

Esempio.

Calcolare $f(x) = \cos(x)$ per $x=0.44$.

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0.3	0.955336			
		-0.034275		
0.4	0.921061		-0.009203	
		-0.043478		0.000434
0.5	0.877583		-0.008769	
		-0.052247		
0.6	0.825336			

$p(x) = 0.955336 - 0.034275\binom{r}{1} - 0.009203\binom{r}{2} + 0.000434\binom{r}{3}$

con: $x_0 = 0.3$, $h = 0.1$

per $x = 0.44$ r sarà dato da: $0.44 = 0.3 + 0.1\, r \Rightarrow r = 1.4$

Quindi: $p(0.44) = 0.904750.$

Errore dell'interpolazione lagrangiana

Teorema. Sia $f \in C^{n+1}[a,b]$, $x_0, \dots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$

Sia: $p \in P_n$ che interpola la f nei nodi x_i.

$$\Rightarrow \qquad e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} W(x)$$

dove: $$W(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in]a, b[$$

Dimostrazione.

Sia $x \in [a, b]$ fissato e $x \neq x_i$, $i = 0, \dots, n$ altrimenti il teorema è banalmente vero. Sia:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)} W(t)$$

F(t) ha n+2 zeri: $F(x) = F(x_0) = \dots = F(x_n) = 0$ ed è n+1 volte differenziabile. Allora, per il teorema di Rolle **(*)**, F'(t) ha n+1 zeri, F''(t) ha n zeri ed iterando, $F^{(n+1)}(t)$ ha almeno uno zero in $]a,b[$. Sia esso ξ . Allora:

$$F^{(n+1)}(\xi) = 0 = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)} (n+1)!$$

da cui la tesi. •

(*) Richiamiamo il teorema di Rolle:

Ip. Sia $f:[a,b] \rightarrow R$, continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ con $f(a) = f(b)$

Ts. $\exists c \in]a,b[: f'(c)=0.$ ◦

Dal teorema sull'errore e dalle formule delle differenze divise di Newton si ha:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Infatti:

Costruiamo il polinomio $p_{n+1}(x)$ interpolante $f(x)$ negli n+2 punti $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$

$p_{n+1}(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}] =$
$= p_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$

Poiché : $p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1})$, si ha:

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = (x_{n+1} - x_0) \dots (x_{n+1} - x_n) f[x_0, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

e poichè dal teorema precedente

$$\frac{f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})}{(x_{n+1} - x_0) \dots (x_{n+1} - x_n)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

si ha la tesi.

Interpolazione di Hermite

Ci si chiede se, conoscendo il valore delle derivate di f(x) in alcuni nodi, sia possibile raggiungere una maggiore accuratezza.

Indichiamo con $p^{(j)}(x)$ la derivata j-esima di p(x). Se in x_0 conoscessimo tutte le derivate di f(x) fino all'ordine n, il problema di trovare:

$$p(x) \in P_n : \qquad p^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0) \quad j = 0, \ldots, n$$

avrebbe soluzione unica. Infatti, il sistema che si otterrebbe imponendo le condizioni di interpolazione:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n &= f(x_0) \\ a_1 + 2a_2x_0 + \ldots + na_nx_0^{n-1} &= f'(x_0) \\ &\ldots \\ n!a_n &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

avrebbe la matrice dei coefficienti di tipo triangolare superiore con elementi diagonali tutti positivi, pertanto il suo determinante sarebbe diverso da zero e il problema avrebbe soluzione unica.

In generale il problema, pero', non ha soluzione unica. Cioè, quando vengono assegnati in alcuni nodi i valori di alcune derivate non sempre c'è un unico polinomio interpolante che abbia in tali nodi il valore dato delle derivate.

Esempio: trovare $p(x) \in P_2$ con queste condizioni interpolatorie :

$$p(-1) = y_1, \qquad p'(0) = y_2, \qquad p(1) = y_3$$

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Il sistema: $\begin{cases} a - b + c = y_1 \\ b = y_2 \\ a + b + c = y_3 \end{cases}$ ha il: det $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

e quindi non ha soluzione unica.

Invece, il problema: dati n+1 punti, $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, trovare $p(x) \in P_N$:

con: $N = n + m_0 + m_1 + \ldots + m_n$ che assuma i seguenti valori:

$$
\begin{array}{ccc}
f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(m_0)}(x_0) \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
f(x_n), f'(x_n), \ldots, f^{(m_n)}(x_n)
\end{array}
$$

ha soluzione unica ed il polinomio interpolante è detto di Hermite. Se $m_0 = m_1 = \ldots = m_n = 1$ l'interpolazione è detta *osculatoria*.

Sull'interpolazione di tipo osculatoria si hanno i seguenti due teoremi:

Teorema.

Dati $x_0, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ $\in [a, b]$ ed $f(x_i)$, $f'(x_i)$ $i = 0, \ldots, n$

$$\Rightarrow \exists_1 \; p(x) \in P_{2n+1} : \quad p(x_i) = f(x_i) \quad e \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad i = 0, \ldots, n$$

o

Analogamente al teorema sull'errore dell'interpolazione lagrangiana si ha:

Teorema.

Sia $f \in C^{(2n+2)}[a,b]$ e sia $p(x) \in P_{2n+1}$ il polinomio di Hermite osculatorio interpolante $f(x)$ in $x_0, \ldots, x_n$ distinti $\in [a,b]$

$$\Rightarrow \qquad e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}[W(x)]^2$$

Dimostrazione.

E' simile al teorema dell'errore dell'interpolazione lagrangiana ponendo:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{[W(x)]^2}[W(t)]^2 \qquad \bullet$$

I polinomi sono di facile costruzione e la loro utilità si basa sul teorema di approssimazione di Weierstrass.

Teorema di Weierstrass.

Sia $f \in C[a,b]$. Essa è allora approssimabile uniformemente da un polinomio il cui grado dipende dall'accuratezza scelta. Cioè:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, n = n(\varepsilon), \quad p(x) \in P_n : \quad \|f - p\|_\infty \le \varepsilon$$

ovvero: $|f(x) - p(x)| \le \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$ o

Si ha inoltre:

Teorema.

Sia $f \in C[a,b]$, $n \in N$ fissato $\Rightarrow$ $\exists_1\, p^* \in P_n : \quad \|f - p^*\| \le \|f - p\| \quad \forall p \in P_n$ in una delle norme 1, 2, ∞. o

Ma nonostante le buone proprietà dei polinomi, ci possono però essere difficoltà associate all'interpolazione polinomiale. Per illustrare ciò, sia Δ una suddivisione triangolare del generico intervallo [a,b] definita da:

$$\begin{array}{llllll}
t_{00} & & & & \rightarrow & p_0(x) \\
t_{10} & t_{11} & & & \rightarrow & p_1(x) \\
t_{20} & t_{21} & t_{22} & & \rightarrow & p_2(x) \\
 & \cdots & & & & \\
t_{n0} & t_{n1} & \ldots & t_{nn} & \rightarrow & p_n(x)
\end{array}$$

con: $a \le t_{n0} < t_{n1} < \ldots < t_{nn} \le b \quad \forall n \in N$ e i $\{p_n(x)\}$ siano una successione di polinomi generati dalla interpolazione di Lagrange ad $f(x)$ nei punti t_{ni}, $i = 0, \ldots, n$. Si ha:

Teorema ***(di Faber).***

Per ogni Δ, $\exists f \in C[a,b]$ per cui $\{p_n(x)\}$ non converge uniformemente ad f(x). o

D'altronde si ha:

Teorema.

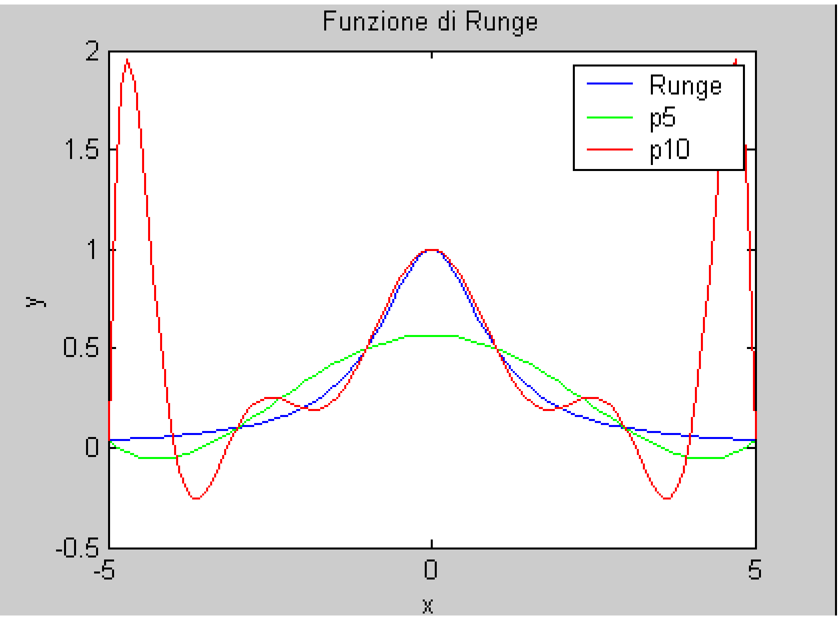
Data $f \in C[a,b]$, $\exists\ \Delta :$ $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente ad f(x).

Da tali teoremi si deduce che non esistono schemi interpolatori universali.

Per una triangolazione con nodi ugualmente spaziati, la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in [-5,5]$$

nota come funzione di Runge, fornisce un esempio di interpolazione non convergente uniformemente, come si può vedere dal grafico in cui sono riportati, insieme alla f(x), i polinomi interpolanti di quinto e decimo grado.



Stabilità

Analizziamo il problema della stabilità degli schemi interpolatori ovvero della propagazione degli errori dei dati sul polinomio di interpolazione. Dalla rappresentazione di Lagrange si ha, indicando con $\tilde{y}_i$ i dati perturbati e con y quelli non perturbati:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

$$\tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, \tilde{y}_i$$

$$\text{da cui :} \qquad p(x) - \tilde{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, (y_i - \tilde{y}_i)$$

$$|\, p(x) - \tilde{p}(x)\, | \le \lambda_n(x) \max_{0 \le i \le n} |\, y_i - \tilde{y}_i \,|$$

$$\|p - \tilde{p}\|_\infty \le \Lambda_n \|y - \tilde{y}\|_\infty$$

dove: $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |\, L_i(x)\, |$, $\quad \Lambda_n = \|\lambda_n\|_\infty$ note come funzione e costante di Lebesgue, rispettivamente. Tanto più sono piccole, maggiore è la stabilità del problema.

Si può vedere che se i nodi sono gli zeri dei polinomi di Chebichev (v. prossimo paragrafo), la funzione $\lambda_n(x)$ ha un andamento vicino a quello ottimale. Ricordando, poi, il teorema sull'errore dell'interpolazione di Lagrange, si vede che, per migliorare l'errore, si devono scegliere gli x_i in modo da minimizzare $\max_{x \in [a,b]} W(x)$.

Se [a,b] = [-1,1] tale scelta degli x_i è data dagli zeri dei polinomi di Chebichev. Vista l'importanza di tali polinomi nella teoria dell'approssimazione, studiamone il comportamento.

Polinomi di Chebichev

***Polinomio di Chebichev di 1ª specie*:**

$$T_n(x) = \cos(n\vartheta) \qquad n \in N$$

$$x = \cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0,\pi]$$

$$\Rightarrow \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Mostriamo che $T_n(x) \in P_n$ ed è quindi definito per $\forall\, x \in R$. Infatti:

$$\cos((k+1)\,\vartheta) = \cos k\vartheta \cos\vartheta - \operatorname{sen} k\vartheta \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\cos((k-1)\,\vartheta) = \cos k\vartheta \cos\vartheta + \operatorname{sen} k\vartheta \operatorname{sen}\vartheta$$

$$\Rightarrow \qquad \cos((k+1)\,\vartheta) + \cos((k-1)\,\vartheta) = 2\cos(k\vartheta)\cos\vartheta$$

da cui si ha la relazione di ricorrenza:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

$$\text{con:} \quad T_0(x) = 1, \; T_1(x) = x.$$

Pertanto: $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, …

Il coefficiente di x^k in $T_k(x)$ è 2^{k-1}. Gli zeri di $T_k(x)$ sono dati da:

$$\cos(k\vartheta_i) = 0, \quad k\vartheta_i = \frac{\pi}{2} + i\pi, \quad \vartheta_i = \frac{2i+1}{2k}\pi$$

$$\Rightarrow x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) \qquad i = 0, \dots, k-1$$

Poiché $T_k(x) \in P_k$, gli zeri trovati sono i soli zeri di $T_k(x)$ ed essi sono distinti.

I punti di [-1,1] in cui $|T_k(x)| = 1$ sono di estremo relativo e sono dati da:

$$\cos(i\pi) = (-1)^i \;\Rightarrow \phi_i = \frac{i\pi}{k} \qquad i = 0, \dots, k$$

Si ha: $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$.

Ed inoltre: $T'_k(x) = \dfrac{-k \operatorname{sen} k\vartheta}{-\operatorname{sen}\vartheta} = \dfrac{k \operatorname{sen} k\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$

Il polinomio $U_{k-1} \in P_{k-1}$: $U_{k-1} = \dfrac{T'_k(x)}{k} = \dfrac{\operatorname{sen} k\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}$ è il *polinomio di Chebichev di 2ª specie.*

I polinomi di Chebichev sono ortogonali rispetto al prodotto interno:

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Dimostriamo adesso che, nell'intervallo [-1, 1], la $W(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$ ha $\|W\|_\infty$ minima se gli x_i sono gli zeri dei polinomi di Chebichev.

Teorema. Sia: $W(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i) \in P_{n+1}$. Tra le possibili scelte dei nodi $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, $x_i \in [-1, 1]$, $\|W\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |W(x)|$ è minima se: $W(x) = \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$ cioè gli x_i sono gli zeri di $T_{n+1}(x)$.

Dimostrazione. $T_{n+1}(x)$ ha il coefficiente di x^{n+1} dato da 2^n. Allora, tra tutti i polinomi del tipo: $x^{n+1} + \ldots$, (noti come *polinomi monici*), $\frac{T_{n+1}(x)}{2^n}$ è un candidato per il minimo di $\|W\|_\infty$. Poniamo quindi:

$$W(x) = \frac{T_{n+1}}{2^n} = (x - x_0)\ldots(x - x_n) \qquad \text{con:}$$

$$x_i = \cos\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi$$

Si ha: $\|W\|_\infty = \frac{1}{2^n}$ poiché $\|T_{n+1}\|_\infty = 1$ se $x \in [-1,1]$.

Se poniamo: $y_i = \cos\frac{i\pi}{n+1}$ $i = 0, \ldots, n+1$ si ha:

$$W(y_i) = (-1)^i \frac{1}{2^n} \qquad \text{e pertanto:} \quad W(y_{i+1}) = - W(y_i).$$

Supponiamo ora che $\exists\ V \in P_{n+1}$ monico e tale che $\|V\|_\infty < \|W\|_\infty$. Si avra':

per i pari: $V(y_i) < W(y_i)$

per i dispari: $V(y_i) > W(y_i)$

Pertanto: $V(y_0) < W(y_0)$, $V(y_1) > W(y_1)$, …

che daranno n+2 cambi di segno.

Definendo $H(x) = V(x) - W(x)$ si ha che $H(x) \in P_n$ poiché V e W hanno lo stesso coefficiente per x^{n+1}. Ma H(x) ha n+1 zeri in quanto abbiamo visto che ha n+2 cambi di segno in [-1,1], ma ciò è assurdo e si ha quindi la tesi. •

Splines

Nell'interpolazione polinomiale, la conoscenza dei valori della f(x) da interpolare in n+1 nodi dà un polinomio di grado n che, all'aumento di n, ha un comportamento oscillatorio. Ciò può dare dei problemi se la funzione da approssimare è "piatta" o se si deve approssimare la f'(x).

Si hanno quindi due diverse strategie:

1) Approssimare la funzione con un polinomio di basso grado che approssimi ma non interpoli la f(x). Dipendendo dalla scelta della norma con cui si decide di stimare l'errore, e quindi la bonta' dell'approssimazione si hanno: minimi quadrati (norma 2), minimax (norma del massimo).
2) Approssimare la funzione con polinomi di basso grado interpolanti la f(x) in sottointervalli. Tali funzioni, che su tutto l'intervallo non sono polinomi, sono note come *polinomi a tratti*.

Un polinomio di grado k a tratti è una funzione che in ogni sottointervallo è un polinomio di grado k. Tali polinomi sono uniti in modo *continuo* in modo da interpolare i dati. Ciò comporta che la funzione polinomiale approssimante la f(x) possa avere derivate discontinue. Se si conoscessero le f'(x) nei nodi si potrebbe usare l'interpolazione di Hermite ma ciò aumenterebbe la complessità del problema. È invece possibile imporre alcune proprietà di continuità alle derivate senza richiedere la conoscenza di tali derivate. Di particolare interesse è il caso in cui le derivate sono continue fino all'ordine k-1 se k è il grado del polinomio a tratti.

Un polinomio di grado k a tratti che ha derivate continue fino all'ordine k-1 è detto ***spline di grado k***.

Le proprietà di una **spline S(x) di grado k interpolante** una f(x) sono:

1) $S(x_i) = f(x_i)$ $\quad i = 0, \ldots, n$
2) $S(x) \in C^{(k-1)}[a,b]$
3) $S(x) \in P_k$ in $\forall\ [x_i, x_{i+1}]$ $\quad i = 0, \ldots, n-1$

Se k è il grado della spline ed n+1 il numero dei nodi, per determinare univocamente la spline dobbiamo imporre n+k condizioni (*). Tale numero è noto come numero di gradi di libertà (d.o.f = degree of freedom). In generale: d.o.f = n+k , mentre nel caso interpolatorio: d.o.f. = k-1.

(*) Infatti, essendo la spline di grado k, per ogni intervallino dobbiamo determinare k+1 coefficienti ed essendo n tali intervallini, si devono determinare n(k+1) coefficienti. Imponendo le condizioni di continuità da 0 a k-1, esse sono k per ogni punto interno ed essendo tali punti n-1 possiamo imporre k(n-1) condizioni. Pertanto, il numero di gradi di libertà e': $n(k+1)-k(n-1)=n+k$.

Generalmente le spline più usate sono quelle lineari e quelle cubiche.

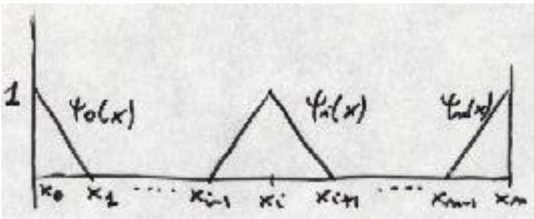
Splines lineari

In tal caso k =1 $\Rightarrow$ d.o.f. = n+1 e l'esistenza e l'unicità della funzione spline sono ovvie e risultano dal procedimento di costruzione di una particolare base.

Definiamo le *funzioni cappello* ψ_i i=1,…,n-1

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Esempio: $\psi_0(x) = \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$, $x \in [x_0, x_1]$, $\psi_n(x) = \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$, $x \in [x_{n-1}, x_n]$.



Poiché $\psi_i(x_j) = \delta_{ij}$ le ψ_i sono linearmente indipendenti.

Pertanto: $$S(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \psi_i(x)$$

E se la spline S(x) interpola la f(x) in $f(x_i) = y_i$ i = 0, …, n si ha:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \psi_i(x)$$

Per stimare l'errore si utilizzano i risultati per i polinomi interpolanti.

Sia $h_i = x_i - x_{i-1}$ e sia $f \in C^2[a,b]$: $|f(x) - S_1(x)| \le \left(\dfrac{h_i}{2}\right)^2 \max\limits_{h_{i-1} \le t \le h_i} \left|\dfrac{f''(t)}{2}\right|$.

Ponendo h = max h_i si ha:

$$\|f - S_1\|_\infty \le \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$$

per $h \to 0$ $e(x) \to 0$.

Splines cubiche

In questo caso d.o.f. = n+3. Imponendo le condizioni di interpolazione si hanno n+1 condizioni e restano due gradi di libertà. A seconda della loro scelta si hanno:

Spline *naturale* : $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$

Spline *periodica* : $S_3'(x_0) = S_3'(x_n)$

$S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$

Spline *vincolata* : $S_3'(x_0) = y_0'$, $S_3'(x_n) = y_n'$

Indichiamo per brevità la spline cubica con $C(x)$.

Dimostriamo che la scelta :

$$C(x_i) = f(x_i) \qquad i = 0, \ldots, n$$

$$C''(x_0) = s_0$$

$$C''(x_n) = s_n$$

dà un'unica spline. La particolare scelta $s_0 = s_n = 0$ da' poi la spline naturale.

Supponiamo di scegliere $s_0, \ldots, s_n$, $s_i = C''(x_i)$ e costruiamo la retta passante per:

$$(x_i, s_i) \;,\; (x_{i+1}, s_{i+1})$$

$$C_i''(x) = s_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + s_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \;,\quad h_i = x_{i+1} - x_i,\; i = 0, \ldots, n-1$$

Notiamo che: $C''_i(x_{i+1}) = C''_{i+1}(x_{i+1})$ $i = 0,\ldots,n-2$ e quindi $C''(x)$ è continua.

Integrando due volte si ha:

$$C_i(x) = s_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + s_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + c_i\,(x - x_i) + d_i\,(x_{i+1} - x)$$

con c_i, d_i costanti di integrazione.

Scegliamo c_i e d_i in modo che C(x) sia continua ed interpoli la f(x).

Dove: $f_i = f(x_i)$

$$C_i(x_i) = f_i, \quad C_i(x_{i+1}) = f_{i+1}, \quad i = 0,\dots,n-1$$

$$c_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - s_{i+1}\frac{h_i}{6}, \quad d_i = \frac{f_i}{h_i} - s_i\frac{h_i}{6}$$

$$\Rightarrow \quad C_i(x) = s_i\frac{(x_{i+1}-x)^3}{6h_i} + s_{i+1}\frac{(x-x_i)^3}{6h_i} + \left(\frac{f_{i+1}}{h_i} - s_{i+1}\frac{h_i}{6}\right)(x - x_i) + \left(\frac{f_i}{h_i} - s_i\frac{h_i}{6}\right)(x_{i+1} - x)$$

Imponiamo la continuità di C'(x) cioè:

$$C'_{i-1}(x_i) = C'_i(x_i) \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$C'_i(x) = -s_i\frac{(x_{i+1}-x)^2}{2h_i} + s_{i+1}\frac{(x-x_i)^2}{2h_i} + \frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(s_{i+1}-s_i) \qquad (1)$$

dove: $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$.

Da cui:

$$h_{i-1}s_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})s_i + h_i s_{i+1} = b_i \qquad i = 1,\dots,n-1$$

dove : $b_i = 6\left(\frac{\Delta f_i}{h_i} - \frac{\Delta f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$

Poiché s_0 ed s_n sono note, si ha un sistema di n-1 equazioni in n-1 incognite. Il sistema è tridiagonale e diagonalmente dominante. Pertanto ha soluzione unica.

Analogamente, se si impone che:

$$C'(x_0) = y'_0, \quad C'(x_n) = y'_n$$

dalla (1) si ha:

$$C'_{n-1}(x_n) = s_n\frac{h_{n-1}}{2} + \frac{\Delta f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{h_{n-1}}{6}(s_n - s_{n-1}) = y'_n$$

$$\Rightarrow 2h_{n-1}s_n + h_{n-1}s_{n-1} = 6\left(y'_n - \frac{\Delta f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \qquad (2)$$

$$C'_0(x_0) = -\, s_0\,\frac{h_0}{2} + \frac{\Delta f_0}{h_0} - \frac{h_0}{6}(s_1 - s_0) = y'_0$$

$$\Rightarrow 2\, h_0 s_0 + h_0 s_1 = 6\left(\frac{\Delta f_0}{h_0} - y'_0\right) \qquad (3)$$

Le (1), (2) e (3) formano un sistema di n+1 equazioni in n+1 incognite tridiagonale diagonalmente dominante e quindi ha soluzione unica.