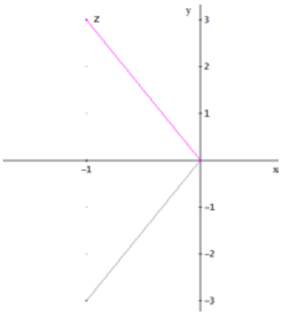
Forma Algebrica

Coniugato di Numeri Complessi



$z = -1 + 3i \qquad \bar{z} = -1 - 3i$

Modulo di un Numero Complesso

$z = 1 + 4i \qquad |z| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

$z = -1 \quad |z| = |-1| = 1$

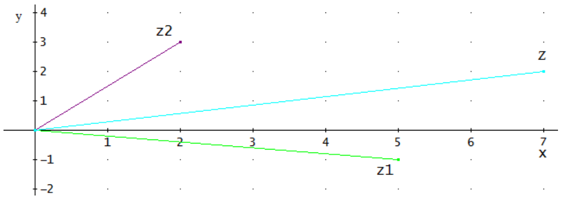
$z = -i \quad |z| = \sqrt{(-1)^2} = 1$

Inverso di un Numero Complesso

$z = 5 - i$

$z^{-1} = (5 - i)^{-1} = \frac{5+i}{5^2+1} = \frac{1}{26} \cdot (5 + i)$

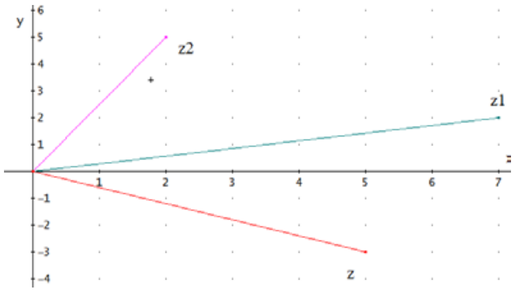
Somma di Numeri Complessi



$z_1 = 5 - i \qquad z_2 = 2 + 3i$

$z = z_1 + \ z_2 = (5 + 2) + (-1 + 3)i = 7 + 2i$

Sottrazione di Numeri Complessi

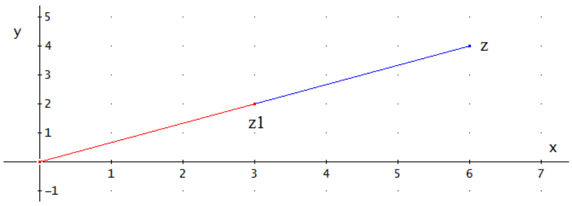


(somma del minuendo con l'opposto del sottraendo)

$z_1 = 7 + 2i \qquad z_2 = 2 + 5i$

$z = z_1 - \ z_2 = (7 - 2) + (2 - 5)i = 5 - 3i$

Moltiplicazione di Numeri Complessi



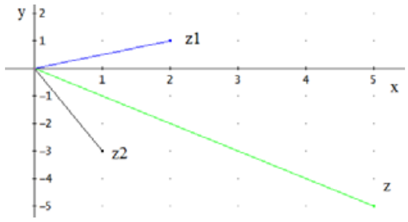
$z_1 = 3 + 2i \qquad z_2 = 2$

$z = z_1 \cdot z_2 = (3 + 2i) \cdot 2 = 6 + 4i$

$z_1 = 2 + i \qquad z_2 = 1 - 3i$

$z = z_1 \cdot z_2 = (2 + i) \cdot (1 - 3i) = 2 - 6i + i - 3i^2 =$

$= 2 - 5i + 3 = 5 - 5i$



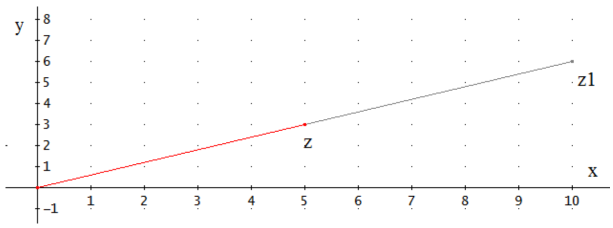
$z_1 = 2 + i \qquad z_2 = 2 - i$

$z = z_1 \cdot z_2 = (2 + i\,) \cdot (2 - i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 5$

Rapporto

$z_1 = 10 + 6i \qquad x = 2$

$\frac{z_1}{x} = \frac{10+6i}{2} = 5 + 3i$

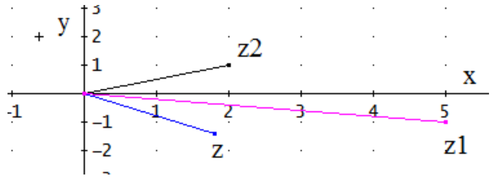


$z_1 = 5 - i \qquad z_2 = 2 + i$

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5-i}{2+i} = \frac{5-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{10-5i-2i-1}{4+1} = \frac{9-7i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{7}{5}i$ ■

oppure

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5-i}{2+i} = \frac{(5-i)\cdot(2-i)}{(\sqrt{2^2+1^1})^2} = \frac{10-5i-2i-1}{4+1} = \frac{9-7i}{5} = \frac{9}{5} - \frac{7}{5}i$ ■



Forma Trigonometrica

Passare dalla FA alla FT

$z = 1 - i$

Calcoliamo $|z|$

$|z| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

Troviamo θ risolvendo il sistema

$$\begin{cases} cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \theta = \sin^{-1}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = \frac{7\pi}{4} \\ \theta = \frac{7\pi}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \blacksquare$$

Da FT a FA è banale

Prodotto di Numeri Complessi (formule di addizione degli archi)

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \qquad z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = \left[2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)\right] \cdot \left[3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)\right] =$$

Moltiplicando e Semplificando

$$= 2 \cdot 3\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{4}\right)\right) = 6\left(\cos\left(\frac{31\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{31\pi}{12}\right)\right) = 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) \blacksquare$$

Rapporto di Numeri Complessi (formule di sottrazione degli archi)

$$z_1 = 3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right) \qquad z_2 = 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right)}{5\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore

$$= \frac{3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)}{5\left((\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)) \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)} = \quad \text{semplificando si ha:}$$

$$= \frac{3\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right)\right)}{5\left(cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)} =$$

$$= \frac{3}{5}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3}{5}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right) \blacksquare$$

Forma Esponenziale

Passare dalla FT alla FE

$z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \rightarrow \; z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$

Coniugato di Numeri Complessi

$z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\qquad\qquad \bar{z} = \; 3 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$

Modulo di un Numero Complesso

$z = 3 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \rightarrow \quad z = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \; \rightarrow \quad z = 3(0 + \mathrm{i})$= 3i

$|z| = 3$

Prodotto di Numeri Complessi

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\qquad\qquad z_2 = 4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z = z_1 \cdot z_2 = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}\right) \cdot \left(4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{5\pi}{6}} = 8 \cdot e^{i\pi}$ ■

Rapporto di Numeri Complessi

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ $\qquad\qquad z_2 = 4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}}{4 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}} = \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{6} - i\frac{5\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ■

Bisogna Ricordare che :

$z = \rho e^{i\theta}$ è $reale \; se \; \theta = k\pi \; con \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3..$

$z = \rho e^{i\theta}$ è $immaginario \; puro \; se \; \theta = k\frac{\pi}{2} \; con \; k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5..$

$z = e^{a+i\theta} = e^{a} \cdot \; e^{i\theta} = \rho \cdot e^{i\theta} \; con \; \rho = e^{a}$

Potenza n-esima

$z = -2 + 2i$

Troviamo la forma trigonometrica

$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$z = 2\sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$\begin{cases} cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \theta = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \frac{3\pi}{4} \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Calcoliamo z^4 utilizzando la formula di De Moivre

$z^4 = \left(2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = \left(2\sqrt{2}\right)^4\left[\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 4\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 4\right)\right)\right] =$

$= 64[\cos(3\pi) + isin(3\pi)] = -64 + 0 = -64$ ■

Radice n-esima

Dato il numero complesso z, calcolarne le radici quarte.

$z = -4 + i4\sqrt{3}$

Troviamo la forma trigonometrica

$|z| = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$

$z = 8\left[-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$\begin{cases} cos\theta = -\frac{1}{2} \\ sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \theta = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \theta = \frac{2\pi}{3} \\ \theta = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$

$z = 8\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ ■

Calcoliamo $\alpha = \sqrt[4]{z}$, k=0,1,2,3

$$\alpha = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right)$$

Per k=0

$$\alpha_0 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{3} + i)\blacksquare$$

Per k=1

$$\alpha_1 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(-1 + i\sqrt{3})\blacksquare$$

Per k=2

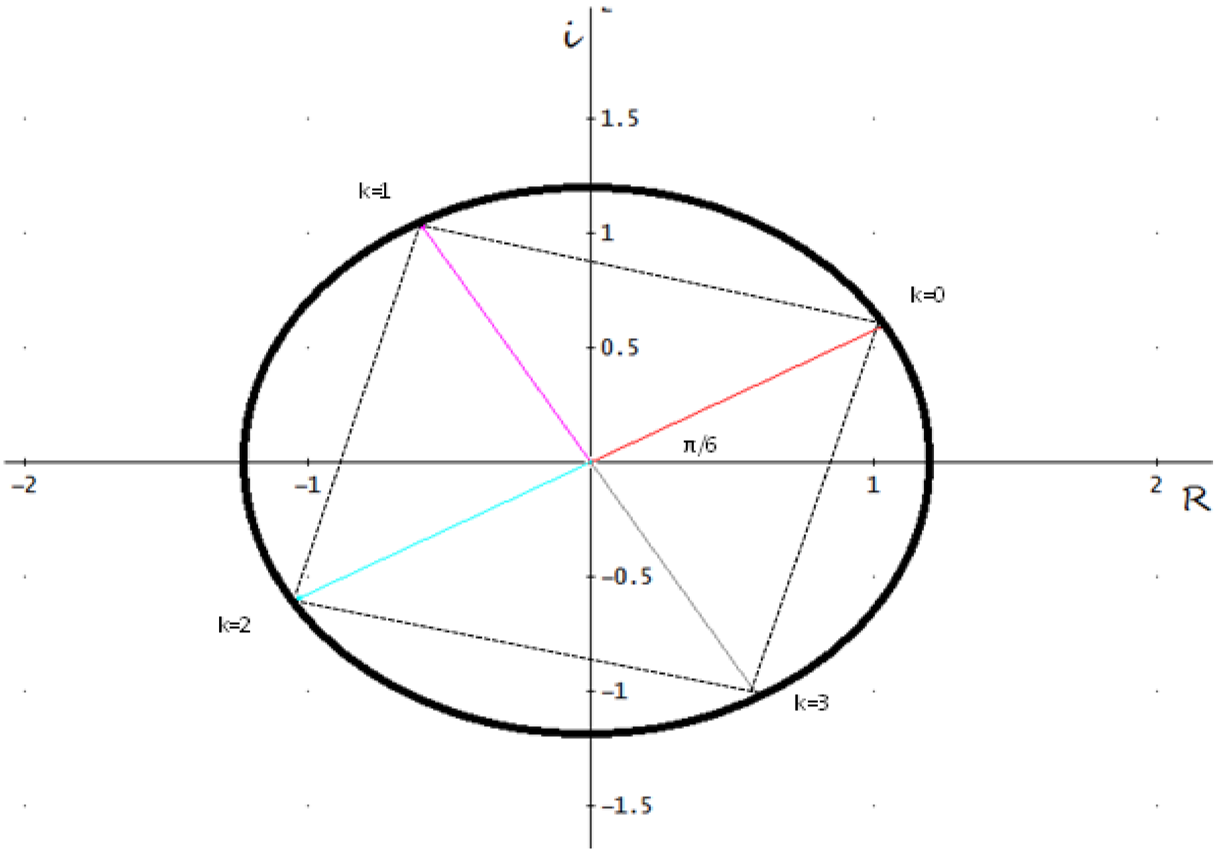
$$\alpha_2 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(-\sqrt{3} - i)\blacksquare$$

Per k=3

$$\alpha_3 = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[4]{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(1 - i\sqrt{3})\blacksquare$$



Radice n-esima dell'unità

Dato il numero complesso z, calcolarne le radici seste.

$z = 1$

$\beta = \sqrt[6]{1}$

per k=0

$$\beta_0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$$

Per k=1

$$\beta_{1=}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

Per k=2

$$\beta_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$$

Per k=3

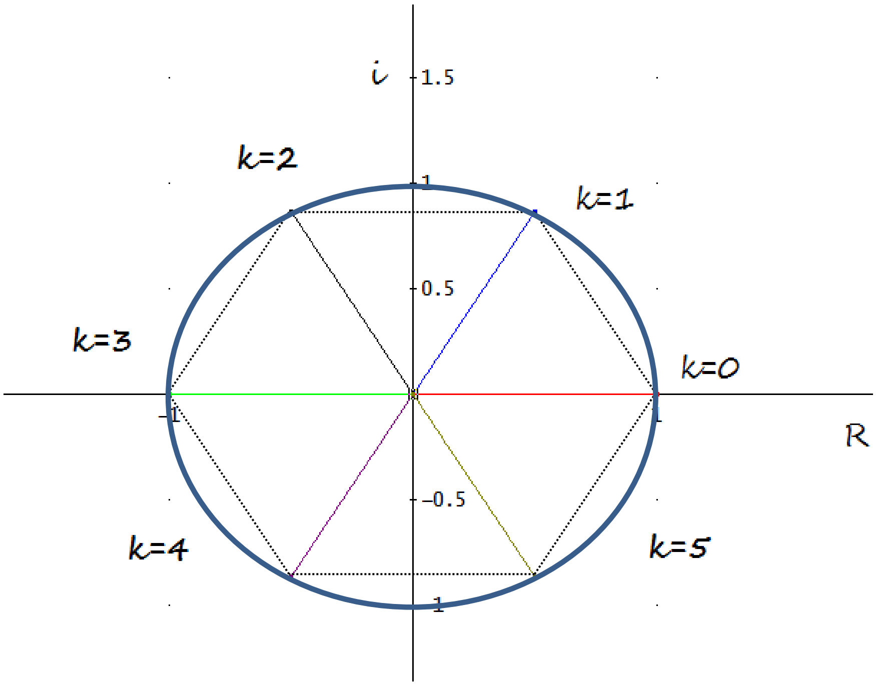
$$\beta_3 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$$

Per k=4

$$\beta_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

Per k=5

$$\beta_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$$



Notare:

La radice n-esima (con n pari) di un numero positivo dà sempre due radici reali e le altre complesse.

La radice n-esima (con n dispari) di un numero positivo dà sempre una radice reale e le altre complesse.

Sia N un numero qualunque, sia x una qualsiasi delle sue radice n-esime ($x = \sqrt[n]{N}$) , allora i numeri

$$x\beta_0, x\beta_1, x\beta_{2,\dots}x\beta_{n-1}$$

Sono tutti numeri distinti perché distinti sono i beta, inoltre si ha:

$$(x\beta_0)^n = x^n{\beta_0}^n = x^n 1 = x^n = N$$

$$(x\beta_1)^n = x^n{\beta_1}^n = x^n 1 = x^n = N$$

$$\dots\dots..$$

$$(x\beta_{n-1})^n = x^n{\beta_{n-1}}^n = x^n 1 = x^n = N$$

Tornando all'esempio precedente di cui avevamo trovato le radici quarte:

$z = -4 + i4\sqrt{3}$

Per k=2 avevamo trovato:

$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(-\sqrt{3} - i)$.

Troviamo le radici quarte dell'unità :

$\beta = \sqrt[4]{1}$

per k=0

$$\beta_0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$$

Per k=1

$$\beta_{1=}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$$

Per k=2

$$\beta_2 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$$

Per k=3

$$\beta_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{6\pi}{4}\right) = -i$$

Applichiamo la formula:

$$\alpha_2\beta_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{3} - i\right) = \alpha_2$$

$$\alpha_2\beta_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot i = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(1 - i\sqrt{3}\right) = \alpha_3$$

$$\alpha_2\beta_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{3} + i\right) = \alpha_0$$

$$\alpha_2\beta_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{3} - i\right) \cdot (-i) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-1 + i\sqrt{3}\right) = \alpha_1$$

Le radice n-esime di z non sono "allineate" alle radice n-esime dell'unità.