I numeri complessi

Si chiama numero complesso una qualunque coppia ordinata (a,b) di numeri reali. L'insieme dei numeri complessi è denotato da *C*.
Il numero $(0,1)$, denotato dalla lettera i, è detto *unità immaginaria* ed è tale che: $i^2 = -1$.
Da esso deriva la forma algebrica di un numero complesso:

$$(a,b) = a + ib$$

con cui è possibile eseguire le operazioni fondamentali con le stesse regole del calcolo letterale.
Se: $x = a + ib$ definisce *modulo* di *x* il numero:

$$|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si definisce complesso coniugato di *x* il numero $\bar{x}$ dato da:

$$\bar{x} = a - ib$$

Siano $x = (a,b), y = (c,d)$. Si ha:

$x + y = (a,b) + (c,d) = (a+c) + i(b+d)$

$x - y = (a,b) - (c,d) = (a+c) - i(b+d)$

$x \cdot y = (ac - bd, ad + bc)$

$\frac{1}{x} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$ ***se*** $a^2 + b^2 > 0$

Pertanto, se: $x = (1,2), y = (3,4)$

$x + y = 4 + 6i$

$x - y = 4 - 6i$

$x \cdot y = -5 + 10i$

$\frac{1}{x} = \frac{1 - 2i}{5}$; $|x| = \sqrt{5}$; $\bar{x} = 1 - 2i$;

Interpretazione geometrica dei numeri complessi.

E' possibile rappresentare in un altro modo i numeri complessi utile per trovare le radici n-esime di un numero complesso.
Dato un sistema di riferimento cartesiano, indicando con l'asse delle x l'asse reale e con l'asse delle y l'asse immaginario, essendo il numero complesso una coppia ordinata di numeri vi è una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi e i punti del piano.
Sia $z=(a,b)\in C$ e P il punto del piano che lo rappresenta. Se P non coincide con l'origine, indicando con $\rho=\sqrt{a^2+b^2}$ la misura di OP, si ha:

$$a=\rho\cos\vartheta, \qquad b=\rho\sin\vartheta$$

Il numero ρ viene detto modulo (indicato con $|z|$) e ϑ argomento di z. Si ha le seguente <u>forma trigonometrica</u> di un numero complesso:

$$z=\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

Si ha la <u>formula di De Moivre</u> per la potenza n-esima di z:

$$z^n=\rho^n(\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta) \qquad n\in N$$

Tale formula è fondamentale per determinare la radice n-esima di un numero complesso. Vogliamo trovare quei complessi $w=\phi(\cos\tau+i\sin\tau)$, se esistono, tali che:

$$w^n=z\,.$$

Si ha che esiste un unico $\phi\in\Re$ e $k\in Z$ tali che:

$$\phi^n = \rho, \qquad n\tau = \vartheta + 2k\pi$$

Pertanto per $\forall k \in Z$, l'equazione $w^n = z$ ammette delle soluzioni che si calcolano da:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)$$

Sembrerebbe che ci siano infinite radici n-esime, in realtà quelle a due a due distinte sono n, date dalla formula precedente con $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

Un caso particolare è dato dalle radici n-esime dell'unità. Esse sono indicate con e_k e sono date da:

$$e_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad \forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$$

Potenza complessa

Dato un numero complesso $z = x + iy$ chiameremo potenza di base e ed esponente z il numero complesso:

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

che è nota come formula di Eulero da cui è possibile definire le funzioni trigonometriche di un numero complesso:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \forall z \in C$$

In particolare, se $x \in \Re$:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Si ha anche la famosa identità di Eulero: $e^{i\pi} + 1 = 0$