# ZERI DI EQUAZIONI NON LINEARI

## Introduzione

Data una $f$:(a,b) $\longrightarrow \mathbb{R}$ affrontiamo il problema di determinare eventuali $\alpha \in$ (a,b) tali che: $f(\alpha)=0$.

E' questo il problema della ricerca degli zeri che, se non esiste un metodo per determinare le radici della $f$ in modo immediato, si basa su metodi iterativi che danno luogo a successioni che si spera convergano alla soluzione.

Tali metodi possono essere chiusi (bracketing methods) che richiedono due valori iniziali all'interno dei quali deve trovarsi la soluzione, oppure aperti (open methods).

Mentre i metodi chiusi convergono sicuramente alla radice, quelli aperti possono divergere ma, se convergono, questi ultimi sono più veloci di quelli chiusi.

I metodi chiusi che esamineremo sono: bisezione, corde, falsa posizione. I metodi aperti: Newton e secanti.

Trattiamo per il momento solo radici semplici di funzioni continue.

## 1. Metodo di bisezione

Sia $f \in C[a,b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Per il teorema di esistenza degli zeri $\exists s \in ]a,b[ : f(s) = 0$ .

Valutiamo $f(x)$ in $x_1 = \dfrac{a+b}{2}$ e sia $f(x_1) \neq 0$. Poniamo $x_0 = a$ e supponiamo che

$f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$ .

Deve quindi $\exists s \in \left]x_0, x_1\right[ : f(s) = 0$ . Poniamo $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$.

Iterando tale procedimento $n$ volte, la radice, se non ancora trovata, è contenuta in un intervallo di lunghezza $\dfrac{b-a}{2^n}$. L'errore commesso nel considerare $x_n$ come radice è :

$$|e_n| \le h^n (b-a), \; h = \frac{1}{2}$$

Un metodo si dice di ordine $p$ se, detta $\alpha$ la radice ed $\{x_n\}$ le iterate, si ha:

$$|x_{n+1} - \alpha| \le c|x_n - \alpha|^p \;, \quad n \ge 0, \quad c \ne f(p)$$

Se $p = 1$ e $c < 1$ : $|x_{n+1} - \alpha| \le c \, |x_n - \alpha|$ e la convergenza si dice ***lineare***.

Il metodo di bisezione è generalmente lineare poiché

$$|e_{n+1}| \le h|e_n|$$

anche se ci possono essere dei casi particolari in cui non si ha una tale riduzione monotona dell’errore.

In un metodo iterativo, per decidere quando terminare i calcoli si può stimare l'errore relativo:

$$|E_r| = \left| \frac{x_{att} - x_{prec}}{x_{att}} \right|$$

dove $x_{att}$ e $x_{prec}$ sono le stime al passo attuale e a quello precedente.

Se $E_r$ < accuratezza $\Rightarrow$ STOP.

Lo svantaggio principale del metodo di bisezione è la lenta convergenza.

Inoltre in tale metodo non si tiene conto del valore della $f$ e della sua derivata. Per tenerne conto si espande quindi la $f$ in serie di Taylor e si tronca al primo ordine:

$$f(\alpha) = 0 = f(x) + (\alpha - x)f'(\xi) \;\;, \qquad \xi \in (\alpha, x)$$

Infatti tutti i metodi escluso quello di bisezione possono essere ricavati

tramite la determinazione di una pendenza $q_k$ di una retta passante per $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$:

$$y - f\left(x^{(k)}\right) = q_k(x - x^{(k)})$$

la cui intersezione con l'asse delle *x* dà il punto $x^{(k+1)}$:

$$-f\left(x^{(k)}\right) = q_k(x^{(k+1)} - x^{(k)})$$

da cui

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - q_k^{-1} f\left(x^{(k)}\right)$$

Se $\qquad q_k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ si ha il <u>metodo delle corde</u> la cui pendenza è costante.

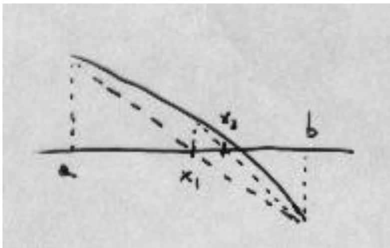
Se $\qquad q_k = \frac{f\left(x^{(k)}\right)-f(x^{(k')})}{x^{(k)}-x^{(k')}}$ con $\quad f(x^{(k)})\, f(x^{(k')})<0$

si ha il <u>metodo della falsa posizione</u> che adesso descriviamo.

## 2. Metodo della falsa posizione (regula falsi)

Il metodo di bisezione divide a metà l'intervallo in cui è contenuta la radice senza tenere conto delle informazioni che possono dare i valori della $f$ . Se ad esempio $f(x_a)$ è più vicina a zero di $f(x_b)$ è più probabile che $x_a$ sia più vicina alla radice di $x_b$ .

In tale metodo si sostituisce la $f$ con una retta che determina una falsa posizione della radice.




La retta che unisce $a$ e $b$ è data da:

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b}$$

per $y = 0$ si ha $x_1$ :

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Si sostituisce $a$ oppure $b$ con $x_1$, a seconda se è $a$ o $b$ ad avere la $f$ con lo stesso segno di $f(x_1)$.

In generale quindi si ha:

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} \cdot f(x_n) - x_n \cdot f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Il rate di convergenza del metodo è lineare.

Esaminiamo ora i metodi aperti che hanno origine dai metodi di punto fisso.

<u>3. Metodi di punto fisso</u>

Data la funzione $f(x)$ di cui si vuole trovare $s$ tale che: $f(s) = 0$, costruiamo una funzione ausiliaria $g(x)$ tale che: $s = g(s)$ quando $f(s) = 0$.

Tale costruzione non è unica. Per esempio se:

$f(x) = x^3 - 13x + 18$ allora

1) $g(x) = \dfrac{x^3 + 18}{13}$

2) $g(x) = (13x - 18)^{1/3}$

3) $g(x) = x^3 - 12x + 18$

4) $g(x) = \dfrac{13x - 18}{x^2}$

5) $g(x) = \sqrt{\dfrac{13x - 18}{x}}$

Il problema di trovare $s$ tale che : $s = g(s)$ è noto come <u>problema del punto</u>

fisso ed $s$ è detto *punto fisso* di $g(x)$ .

### Teorema del punto fisso

Sia $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ ed inoltre

$\forall x, y \in [a,b] : |g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ con $0 < k < 1$:

$\Rightarrow$

1) $\exists_1 \alpha \in [a,b] : \alpha = g(\alpha)$

2) $\forall x_0 \in [a,b]$ , $x_{n+1} = g(x_n) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

3) $|\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}(x_1 - x_0)$

DIM.

1) Supponiamo $g \in C^1[a,b]$ allora dall'ipotesi: $|g'(x)| \leq k$

Poniamo: $\psi(x) = x - g(x)$.

Poichè $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ si ha: $\psi(a) \leq 0$ essendo $g(a) \geq a$

e: $\psi(b) \geq 0$ essendo $g(b) \leq b$

Se è valido l' = allora $a$ oppure $b$ è punto fisso.

Se non è valido l' = si applica il teorema di esistenza degli zeri.

Dimostriamo ora l'unicità del punto fisso.

Supponiamo per assurdo che $\exists \beta$ , $\alpha \neq \beta$ : $\alpha = g(\alpha)$

$\beta = g(\beta)$

$|\alpha - \beta| = |g(\alpha) - g(\beta)|$ per Lagrange: $= |\alpha - \beta| \cdot |g'(\xi)| \leq k|\alpha - \beta| < |\alpha - \beta|$ poichè

$0 < k < 1$, ma ciò è assurdo.

2) $|\alpha - x_n| = |g(\alpha) - g(x_{n-1})| = |\alpha - x_{n-1}| \cdot |g'(\xi)| \leq k|\alpha - x_{n-1}| = k|g(\alpha) - g(x_{n-2})| \leq$

$\leq k^2 |\alpha - x_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n |\alpha - x_0|$ dove si e' applicato n volte il teorema di Lagrange.

Poichè $x_0$ è fissato $|\alpha - x_0|$ è una costante : $0 < |\alpha - x_n| < k^n$

Poichè $k < 1$, $\lim_{n \to \infty} k^n = 0$ e per il teorema del confronto delle successioni: $\lim_{n \to \infty} |\alpha - x_n| = 0$ ovvero $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

3) $|\alpha - x_n| = |\alpha - g(x_n) + g(x_n) - x_n| \leq |\alpha - g(x_n)| + |g(x_n) - x_n| = |g(\alpha) - g(x_n)| + |g(x_n) - x_n| \leq$

$\leq |\ g'(\xi)\ ||\alpha - x_n| + |g(x_n) - x_n|$

dove la seconda disuguaglianza, ricordando che $x_n = g(x_{n-1})$ , dà:

$|g(x_n) - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| = k|g(x_{n-1}) - g(x_{n-2})| \leq$

$\leq k^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq k^n |x_1 - x_0|$

Allora:

$|\alpha - x_n| \leq k|\alpha - x_n| + k^n |x_1 - x_0| \Rightarrow$

$|\alpha - x_n| - k|\alpha - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0| \Rightarrow$

$$(1-k)|\alpha - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0| \Rightarrow |\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{(1-k)} |x_1 - x_0| \ .$$ •

Una funzione $g$ definita da: $g([a,b]) \subseteq [a,b]$ tale che $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$ con

$0<k<1$ è detta **contrazione.** Il più piccolo valore di *k* per cui tale relazione è valida è nota come costante di Lipschitz.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL TEOREMA DI PUNTO FISSO

Ogni radice reale di $x = g(x)$ è l'ascissa di un punto di intersezione di $y = g(x)$ con la retta $y = x$. L'algoritmo del punto fisso è: $x_{n+1} = g(x_n)$.

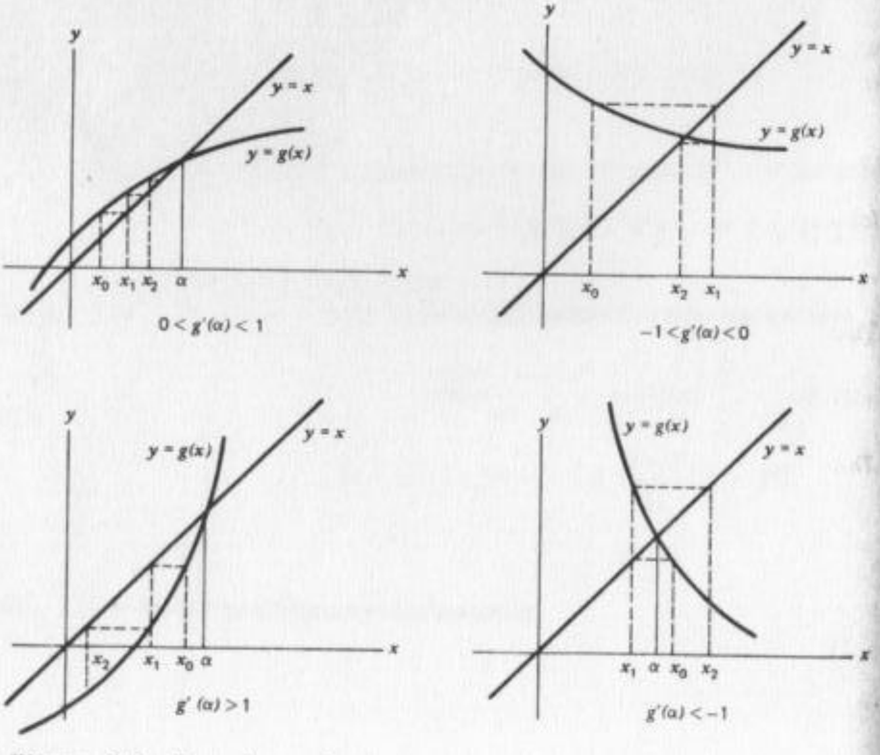



**Figure 2.6** Examples of convergent and nonconvergent sequences $x_{n+1} = g(x_n)$.

VELOCITA' DI CONVERGENZA DEI METODI DI PUNTO FISSO

$g \in C^{k+1}[a,b]$, $x^* = g(x^*)$, $e_n = x_n - x^*$, $g(x_n) = x_{n+1}$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - x^* = g(x_n) - g(x^*) = g'(x^*)(x_n - x^*) + g''(x^*)\frac{(x_n - x^*)^2}{2} + \ldots + g^{(k)}(x^*)\frac{(x_n - x^*)^k}{k!} + O(k+1)$$

Se: $g'(x^*) \neq 0$ si ha:

$$e_{n+1} = g'(\xi_n)e_n \qquad \xi_n \in \left]x_n, x^*\right[$$

ed essendo $g'$ continua in $x^*$: $\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n} = g'(x^*)$

Tale rate di convergenza è detto lineare.

Se $g'(x^*) = 0$, $g''(x^*) \neq 0$ $\lim_{n\to\infty}\frac{e_{n+1}}{e^2{}_n} = g''(x^*)/2$ e il rate di convergenza è quadratico.

Più derivate si annullano in $x^*$, più veloce è il metodo. Il termine $\frac{g^{(k+1)}(x^*)}{(k+1)!}$ è detto fattore asintotico di convergenza.

Ricaviamo il numero $r$ di iterazioni da eseguire perché l'errore sia $< 10^{-m}e_{n-1}$

Poniamo: $E_0 = e_{n-1}$, $e_{n-1+r} = E_r$, $\frac{|e_n|}{|e_{n-1}|^p} = C$

Si ha: $E_r \approx |E_{r-1}|^p C \approx C^{1+p}|E_{r-2}|^{p^2} \approx \ldots \approx C^{1+p+\ldots+p^{r-1}}|E_0|^{p^r}$

cioè:

$$|E_r| \approx \begin{cases} C^r|E_0| & p = 1 \\ C^{\frac{p^r-1}{p-1}}|E_0|^{p^r} & p > 1 \end{cases}$$

$$|E_r| = 10^{-m}|E_0| = C^r|E_0| \qquad p = 1$$

$$r \geq \frac{m}{-\lg C}$$

$$|E_r| = 10^{-m}|E_0| = C^{\frac{p^r-1}{p-1}}|E_0|^{p^r} \qquad\qquad p > 1$$

$$p^r \geq 1 + \frac{m}{-\lg\left(C^{\frac{1}{p-1}}|E_0|^{p^r}\right)}$$

Dal confronto per $p = 1$ e $p > 1$ si ha che , se sono richieste 130 iterazioni nel metodo lineare per avere una data accuratezza, sono necessarie solo 7 iterazioni nel metodo quadratico.

## 4. Metodo di Newton o delle tangenti.

Se $\quad q_k = f'(x^{(k)}) \quad$ si ha il metodo di Newton.

Sia $x_0$ un punto arbitrario di $[a,b]$ in cui è definita la $f(x)$ di cui si vuole determinare la radice.

Consideriamo la tangente alla $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{e sia} \quad f'(x_0) \neq 0.$$

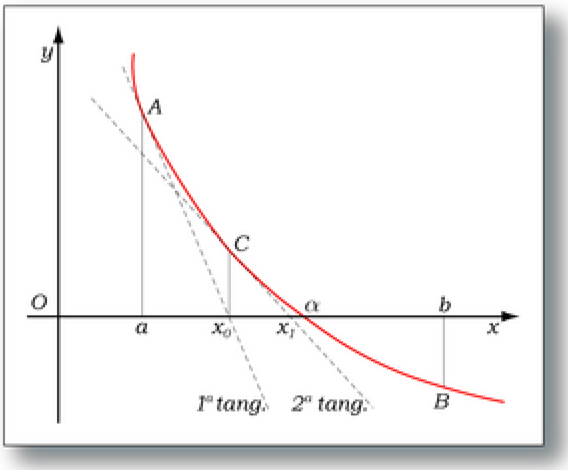
$x_1$ sia dato dalla intersezione di tale retta con $\vec{x}$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

ripetendo iterativamente si ha:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

con $f'(x_n) \neq 0$. Se la radice è semplice il metodo è quadratico.




Il metodo di Newton ha una convergenza quadratica. Si ha infatti il seguente

## TEOREMA

$f \in C^2[a,b]$, $\exists \delta > 0$, $f'(x) \neq 0 \forall x \in ]x^* - \delta, x^* + \delta[$, $f(x^*) = 0$

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, $\{x_n\} \to x^*$ quadraticamente per $|x_0 - x^*| < \varepsilon$ ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^{\;2}} = c \,, \quad c = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

Dimostrazione.

Espandiamo la $f$ attorno ad $x^*$:

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + (x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2}$$

$\xi_n \in ]x^* - x_n, x^* + x_n[$

Poiché: $e_n = x^* - x_n$ ed $f(x^*) = 0$ si ha: $0 = f(x_n) + e_n f'(x_n) + e_n^{\;2} \frac{f''(\xi_n)}{2}$.

Da cui: $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = -e_n - e_n^{\;2} \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}$.

Poiché il metodo è: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ sostituendo, si ha:

$$x_{n+1} - x_n = e_n + e_n^{\,2}\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} = x_{n+1} - x^* + x^* - x_n = -e_{n+1} + e_n$$

$$\Rightarrow e_{n+1} = -e_n^{\,2}\frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)} \le -e_n^{\,2}\frac{\max|f''|}{2\min|f'|} = -Me_n^{\,2}$$

dove: $M = \frac{\max\, f''(\xi_n)}{2\min\, f'(x_n)}$

Pertanto: $|e_{n+1}| \le M\left|e_n^{\,2}\right|$ da cui la convergenza quadratica.

La convergenza è garantita se: $M|e_0| \le 1$

Infatti: $M|e_{n+1}| \le M^2 e_n^{\,2} \Rightarrow M|e_n| \le M^2 e_{n-1}^{\,2}$

$\Uparrow \qquad \Downarrow$

$|e_n| \le Me_{n-1}^{\,2} \qquad M^2 e_n^{\,2} \le M^4 e_{n-1}^{\,4}$

$M|e_{n+1}| \le M^4 e_{n-1}^{\,4} \le \ldots \le \left(M|e_0|\right)^{2^{n+1}}$ da cui la convergenza se $M|e_0| < 1$. ----

**Per stimare la convergenza al passo n-esimo basta considerare la differenza tra due iterate successive**. Infatti, per il teorema di Lagrange:

$$f(x_n) - f(x^*) = f'(\xi_n)(x_n - x^*)$$

Ma: $f(x^*) = 0 \Rightarrow \quad f(x_n) = f'(\xi_n)(x_n - x^*)$

$$e_n = x^* - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1} - x_n$$

## 5. Il metodo di Newton come metodo di punto fisso.

Cerchiamo $x^* : f(x^*) = 0$

e risolviamo tale problema come ricerca del punto fisso di $g(x)$: $x^* = g(x^*)$

Scelta "naturale" di g(x): $g(x) = x + c \cdot f(x)$ con $c \neq 0$.

Abbiamo visto che l'iterazione di punto fisso: $x_{n+1} = g(x_n)$

è veloce se si annullano le derivate di $g(x)$.

Si ha: $g'(x^*) = 1 + c \cdot f'(x^*)$

Allora: $g'(x^*) \neq 0$ a meno che: $c = -\dfrac{1}{f'(x^*)}$

Però, non conoscendo $x^*$ non conosciamo $c$.

Poniamo quindi:

$$g(x) = x + h(x) \cdot f(x) \; .$$

$$g'(x) = 1 + h'(x) \cdot f(x) + h(x) \cdot f'(x)$$

Poiché $f(x^*) = 0$ si ha: $g'(x^*) = 1 + h(x^*) f'(x^*)$

e perche' $g'(x^*) \equiv 0$ si avra'

$$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{f'(x)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ che è il metodo di Newton.

## 6. Radici Multiple

Se la radice di $f(x)$ non è semplice ma ha molteplicità p, la convergenza del metodo di Newton non è più quadratica ma lineare.

Ponendo però:

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

si può far vedere che il metodo è quadratico. È però di scarsa utilità perché solo raramente si conosce la molteplicità di una radice.

## 7. Metodo delle secanti

Se $$q_k = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$ si ha il metodo delle secanti.

Vediamo come ricavarlo. Una difficoltà del metodo di Newton è relativa al calcolo della $f'(x)$. Sostituendo la tangente con la secante si ha un metodo più lento ma meno oneroso:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

da cui:

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - f(x_{n-1})x_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Poiché $x_{n+1}$ dipende esplicitamente da $x_n$ ed $x_{n-1}$ non è una iterazione di punto fisso e non è un metodo chiuso poiché, sebbene siano richiesti due valori iniziali, non è richiesto un cambio di segno della $f(x)$. Tale metodo può quindi divergere.

Mostriamo che la convergenza è superlineare.

Poniamo: $e_n = \xi - x_n$ dove $\xi : f(\xi) = 0$. Vediamo se $e_n \to 0$.

Si ha, dalle differenze divise:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x]$$

Poniamo: $x = \xi$, $x_0 = x_n$, $x_1 = x_{n-1}$

$$f(\xi) = f(x_n) + (\xi - x_n) f[x_n, x_{n-1}] + (\xi - x_n)(\xi - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \xi] = 0$$

Dividiamo per $f[x_n, x_{n-1}]$:

$$f(\xi) = \frac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]} + (\xi - x_n) + \frac{(\xi - x_n)(\xi - x_{n-1})}{f[x_n, x_{n-1}]} f[x_n, x_{n-1}, \xi] = 0$$

Ma: $x_n - x_{n+1} = \dfrac{f(x_n)}{f[x_n, x_{n-1}]}$ e quindi:

$$f(\xi) = \cancel{x_n} - x_{n+1} + \xi - \cancel{x_n} + (\xi - x_n)(\xi - x_{n-1}) \frac{f[x_n, x_{n-1}, \xi]}{f[x_n, x_{n-1}]} = 0$$

Se $f \in C^2[a,b]$ poiché: $f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \dfrac{f^n(\xi)}{n!}$

$$f[x_n, x_{n-1}, \xi] = \frac{f''(u)}{2!}$$

$$f[x_n, x_{n-1}] = f'(v)$$

Per cui:

$$e_{n+1} = -e_n e_{n-1} \frac{f''(u)}{2 f'(v)}$$

Ponendo: $M = \dfrac{\max f''(x)}{2 \min f(x)}$ si ha:

$$|e_{n+1}| \le M |e_n| |e_{n-1}|$$

Poniamo: $d_n = Me_n$

$$Me_{n+1} \le M^2 e_n e_{n-1} \Rightarrow d_{n+1} \le d_n d_{n-1}$$

$$d_2 \le d_0 d_1$$

Poniamo: $d = \max(d_0, d_1)$

$$d_2 \le d^2,\, d_3 \le d_2 d_1 \le d^3, \ldots, d_n \le d^{\alpha n}$$ con:

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_{n-1},\; \alpha_0 = 1,\; \alpha_1 = 1 \qquad (1)$$

Tale relazione dà la successione di Fibonacci

Poniamo: $\alpha_n = r^n$, (1)$\Rightarrow r^{n+1} = r^n + r^{n-1} \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},\; r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La soluzione generale è: $\alpha_n = c_1 (r_1)^n + c_2 (r_2)^n$

dove $c_1$ e $c_2$ si ricavano da:

$$c_1 + c_2 = 1 \equiv \alpha_0$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 \equiv \alpha_1$$

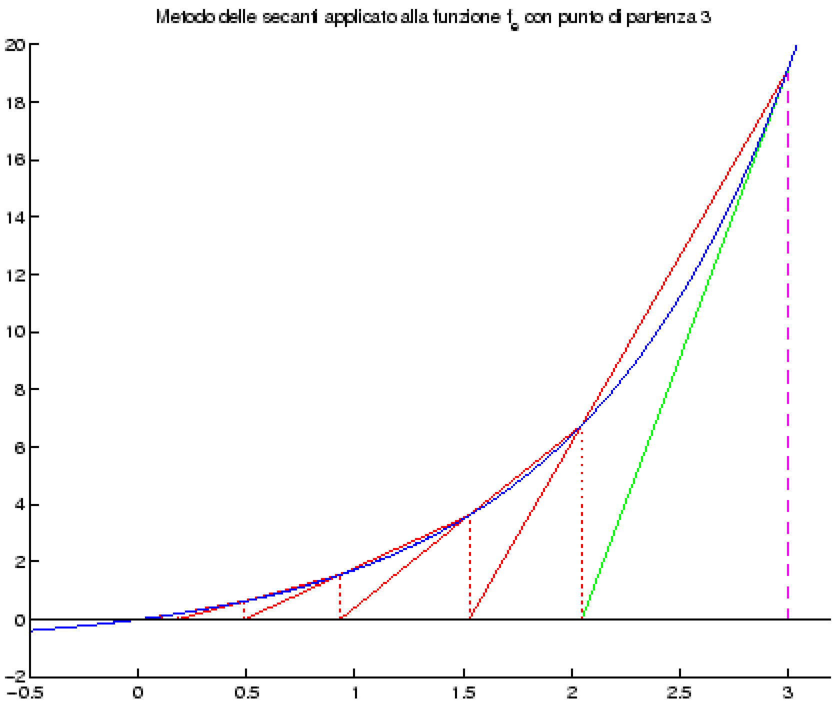
$$\Rightarrow \qquad c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\; c_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Ovvero: $\alpha_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Poiché $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \to 0$ il rate di convergenza è determinato da $r_1$. Inoltre:

$$M|e_n| < d^{\alpha_n}$$

Se $d < 1$ il metodo è convergente e ciò si ha se: $M|e_0| < 1$, $M|e_1| < 1$. Si può far vedere che $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è l'ordine di convergenza del metodo e poiché: $1 < r_1 < 2$ la convergenza è ***superlineare***.




Metodo delle secanti applicato alla funzione $y = e^x - 1$ con punto di partenza $x_0 = 3$. Converge alla radice $\bar{x} = 0$ con un errore di $10^{-7}$ in 10 passi. Nella figura è disegnata in colore verde la retta tangente in $x_0$ ottenuta dal metodo di Newton ordinario.

## Differenza dei tempi di calcolo tra il metodo di Newton e il metodo delle secanti

Il metodo di Newton necessita il calcolo della $f'(x)$. D'altronde il metodo delle secanti ha il rate di convergenza inferiore. Vediamo quando conviene l'uno o l'altro metodo.

Valutiamo il numero delle iterate per ottenere una certa precisione.

$$|e_n| \approx \frac{1}{M}\left(M|e_0|\right)^{2^n} \quad \text{Newton}$$

$$|e_n| \approx \frac{1}{M}\left(M|e_0|\right)^{r^n} \quad \text{secanti}$$

perché il metodo abbia accuratezza $\varepsilon : |e_n| \le \varepsilon$

da cui: $$n_N \ge \frac{k}{e_n{}^2}$$

$$n_S \ge \frac{k}{e_n{}^r} \qquad \text{con } k = \ln\frac{\ln \varepsilon r}{\ln\left(M|e_0|\right)}$$

Sia $m$ il tempo di calcolo di $f(x)$ ed $mt$ quello di $f'(x)$ $(t \neq 1)$. Il tempo minimo per avere accuratezza $\varepsilon$ è dato da :

$$T_N = (m + mt)n_N = (1+t)\frac{mk}{e_n{}^2}$$

$$T_S = mn_S = \frac{mk}{e_n{}^r}$$

$\frac{T_S}{T_N} = \frac{e_n{}^2}{(1+t)e_n{}^r}$, e quindi $T_S < T_N$ se:

$e_n{}^2 < (1+t)e_n{}^r$ ovvero:

$$t > \frac{e_n{}^2}{e_n{}^r} - 1 \approx 0.44$$

Pertanto il metodo delle secanti è più veloce del metodo di Newton se la frazione di tempo del calcolo della $f'$ è maggiore del 44% del tempo di calcolo della $f$ .

## Metodo di Newton in più variabili

Consideriamo il problema della risoluzione di un sistema non lineare di *n* equazioni in *n* incognite e siano

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))^T$$

e cerchiamo $\mathbf{x}^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_n)^T$ tale che

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = (0,0,\dots,0)^T$$

Tutti i teoremi visti in precedenza per il metodo di Newton in una variabile sono validi sostituendo R con $R^n$, e il valore assoluto con la norma.

Il metodo di Newton è quindi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}\, \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

dove $J(\mathbf{x}^{(k)})$ è lo jacobiano di $\mathbf{F}$ in $\mathbf{x}^{(k)}$

$$J_{ij}(\mathbf{x}^{(k)}) = \frac{\partial \mathbf{F}_i(\mathbf{x}^{(k)})}{\partial x_j}$$

Poiché non è conveniente il calcolo di $J(\mathbf{x}^{(k)})^{-1}$ definiamo

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$$

e risolviamo il sistema lineare

$$J(\mathbf{x}^{(k)})\, \mathbf{z}^{(k+1)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

A questo punto si risolve il sistema lineare con uno dei metodi noti e si trova $\mathbf{x}^{(k+1)}$ da $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} + \mathbf{x}^{(k)}$

Esempio

Dati $\quad f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^5 + x_2^3 x_3^4 + 1$

$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 x_3$

$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_3^4 - 1$

si ha $$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 5x_1^4 & 3x_2^2 x_3^4 & 4x_2^3 x_3^3 \\ 2x_1 x_2 x_3 & x_1^2 x_3 & x_1^2 x_2 \\ 0 & 0 & 4x_3^3 \end{vmatrix}$$

Algebricamente si trovano quattro zeri reali

$\boldsymbol{s}_1 = (0, -1, -1),\ \boldsymbol{s}_2 = (0, -1{,}1),\ \boldsymbol{s}_3 = (-1, 0, -1),\ \boldsymbol{s}_4 = (-1, 0, -1)$

e con i seguenti valori iniziali si ottengono le 4 radici

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (-100, 0, -100)$ da cui si ottiene $\boldsymbol{s}_4$

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (-1000, -1000, -1000)$ da cui si ottiene $\boldsymbol{s}_1$

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.1, 0.1, 0.1)$ da cui si ottiene $\boldsymbol{s}_2$

$\boldsymbol{x}^{(0)} = (-100, 0, 100)$ da cui si ottiene $\boldsymbol{s}_3$