MATRICI

Una matrice $A \in Mat(m,n)$ è una tabella ordinata di numeri disposti in m righe ed n colonne. Indichiamo con a_{ij} l'elemento di posto ij che può essere reale o complesso.

Operazioni di matrici:

1) $(\alpha A)_{ij} = \alpha\, a_{ij} \quad \alpha \in C$

2) $(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Proprietà della somma: associativa e simmetrica. Con 1) e 2), Mat(m,n) è uno spazio vettoriale.

Siano $A \in Mat(m,p)$, $B \in Mat(p,n)$, $C \in Mat(m,n)$.

Si definisce prodotto di A e B la matrice data da: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$

Proprietà del prodotto: associativa, distributiva rispetto alla somma, non sempre vale la proprietà commutativa.

Matrice trasposta di $A \in Mat(m,n)$ è $C \in Mat(n,m)$: $C = A^T$, $c_{ij} = a_{ji}$

Matrice trasposta coniugata: $C = A^*$, $\overline{c_{ij}} = \overline{a_{ji}}$

Una ***matrice quadrata*** $A \in Mat(n,n)$ si dice hermitiana (o simmetrica) se $A = A^*$ $(A = A^T)$

Matrice identita' I : $IA = AI = A \qquad \forall A \in Mat(m,n)$

Matrice diagonale: $a_{ij} = 0 \ \ i \neq j$

Matrice triangolare superiore: $a_{ij} = 0 \ \ i > j$

Matrice triangolare inferiore: $a_{ij} = 0 \quad i < j$

Matrice tridiagonale: $a_{ij} = 0 \quad |i - j| > 1$

Matrice di Hessemberg: $a_{ij} = 0 \quad j > i + 1$ oppure $i > j + 1$

Data $A \in Mat(n,n)$ simmetrica, si dice ***definita positiva*** se per $\forall\, x \in R^n$, $x \neq 0$ si ha:

$$x^T A x > 0.$$

Se $x^T A x \geq 0$ allora A è *semidefinita positiva*.

Matrice strettamente diagonalmente dominante: $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,\ldots,n$

Matrice debolmente diagonalmente dominante: $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1,\ldots,n$

Determinante

Sia $A \in Mat(n,n)$. Il determinante di A, che indicheremo con det(A), e' un numero definito dalla regola di Laplace. Poiche' tale regola e' ricorsiva, definiamo prima i determinanti per n = 1,2,3.

- $n=1 \quad det(A) = a_{11}$
- $n=2 \quad det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$
- $n=3 \quad det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21}$

Per il generico n si ha la seguente regola.

Regola di Laplace. Sia A_{ij} la matrice ottenuta cancellando da A la i-esima riga e la j-esima colonna. Si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} di A il numero A_{ij} definito da: $A_{ij} = (-1)^{i+j} (\det A_{ji})$

Si definisce il determinante di A sviluppato rispetto alla i-esima riga:

$$|A| = \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Teorema di Binet. Date due matrici A e B si ha:

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B).$$

Teorema di Sylvester. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una matrice A simmetrica sia definita positiva è che $\det(A_k)>0$ $k=1,\dots,n$ dove A_k è la matrice formata dalle prime k righe e k colonne.

Conseguenze del teorema di Sylvester.

Sia $A \in Mat(n,n)$ simmetrica, definita positiva. Allora:

1) gli elementi diagonali sono tutti positivi.
2) $|a_{ij}| < a_{ii}a_{jj}$ $i \neq j$.

Proprietà.

Sia A una matrice simmetrica, diagonalmente dominante a diagonale positiva $\Rightarrow$ definita positiva.

Matrice trasposta dei complementi algebrici:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & & & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Tale matrice gode della seguente proprietà:

$$A\,\hat{A} = \hat{A}\,A = \det(A)\, I_n$$

Si ha, inoltre, che se $\det(A) \neq 0$ allora:

$$\left(\frac{\hat{A}}{\det(A)}\right) A = I_n$$

ovvero:

$$\frac{\hat{A}}{\det(A)} = A^{-1} \quad \text{inversa di A}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Pertanto, ponendo $B = A^{-1}$ si ha:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{|A_{ji}|}{|A|}$$

Proprietà. La matrice inversa quando esiste è unica.

Dimostrazione per assurdo.

Supponiamo che esista una matrice B tale che $BA = I$

$$BAA^{-1} = IA^{-1}$$

$$BI = IA^{-1} \Rightarrow B = A^{-1}$$

Matrice *non degenere*: $A \in Mat(n,n)$ $\det(A) \neq 0$.

Siano A, B non degeneri e sia $C = AB$ (che e' non degenere per il teorema del Binet) $\Rightarrow$ $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Dimostrazione.

$CC^{-1} = I$, $(AB)C^{-1} = I$, $A^{-1}ABC^{-1}=A^{-1}$, $BC^{-1}=A^{-1}$, $B^{-1}BC^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, $C^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

Prodotto scalare

Siano a, b $\in C^{nx1}$. Il prodotto scalare $<a,b>$ è dato dal numero:

$$<a,b> = \bar{a}^T b = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i b_i$$

Sia: $\alpha \in C$

Proprietà

I) $<a,a> \geq 0$

II) $<a,a> = 0 \Leftrightarrow a = \underline{0}$

III) $<a,\alpha b> = \alpha<a,b>$

IV) $<\alpha a,b> = \bar{\alpha} <a,b>$

V) $<a+b,c> = <a,c> + <b,c>$

VI) $<a,b+c> = <a,b> + <a,c>$

VII) $<b,a> = <\overline{a,b}> = \sum \bar{b}_i a_i$

VIII) $|<a,b>|^2 \leq <a,a><b,b>$

Modulo di a: $|a| = <a,a>^{1/2}$

Si ha:

$|a| \geq 0$

$|a| = 0 \Leftrightarrow a = \underline{0}$

$|ka| = |k| |a|$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

Norme vettoriali

La norma si indica con $\| \, \|$. È una funzione definita su uno spazio vettoriale a valori reali positivi. $\| \, \|: C^n \to R^+$

Gode delle proprietà:

1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad \forall\, x \in C^n$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\| \quad \forall\, \alpha \in C, \forall x \in C^n$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in C^n$

Distanza: $d(x,y) = \|x - y\|$

Si ha:

I) $\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

II) $|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\|$

La norma è una funzione continua delle componenti del vettore x:

$$\lim_{\delta \to 0} \|x + \delta\| = \|x\|$$

Norma p o norma Hölderiana: $1 \leq p < \infty$

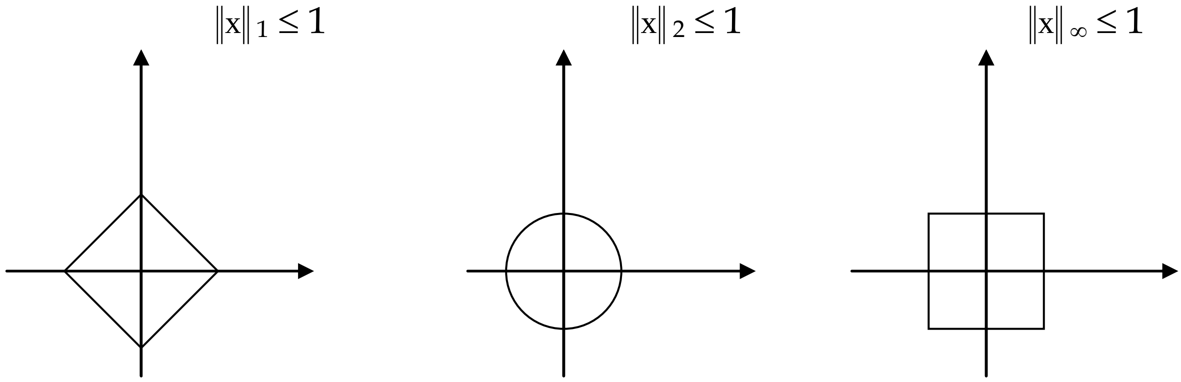
$$\|x\|_p = \left| \sum_i |x_i|^p \right|^{1/p}$$

Si ha: $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$

$\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2}$ euclidea

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ del massimo

Se $x \in R^2$ i cerchi unitari: $\|x\|_p \le 1$ p = 1, 2, ∞ sono:



Teorema. In R^n le norme 1,2,∞ sono equivalenti cioè $\exists\ \alpha, \beta \in \Re$, $0 < \alpha \le \beta$

$$\alpha\|x\|' \le \|x\|'' \le \beta\ \|x\|'$$

Norme matriciali

La norma matriciale e' una funzione: $C^{nxn} \to R^+$

1) $\|A\| \ge 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2) $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
4) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$
5) $\|Ax\|_p \le \|A\|\ \|x\|_p$

Una norma matriciale si dice *indotta* se $\forall$ A $\in$ Mat(n,n) $\exists$ x $\in R^n$

$$\|Ax\| \le \|A\|\ \|x\|$$

Si definisce *norma naturale* di A:

$$\|A\| = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Tale definizione è equivalente a:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Pertanto:

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le \|A\| \quad \forall x \neq 0$$

che equivale a: $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$

N.B. una norma naturale non è detto che sia indotta.

La norma matriciale è funzione continua del suo argomento.

Vediamo le norme naturali indotte dalle norme vettoriali 1, 2, ∞.

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \rightarrow \qquad \|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|x\|_2 = (\sum_i |x_i|^2)^{1/2} \quad \rightarrow \quad \|A\|_2 = \left(\rho\left(A^*A\right)\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \quad \rightarrow \quad \|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_j |a_{ij}|$$

Autovalori e autovettori

$A \in \Re^{n \times n}$, $\lambda \in C$ è *autovalore* di A se:

$$\exists\ \underline{x} \in C^n,\ \underline{x} \neq 0 : (A - \lambda I)\underline{x} = 0$$

Il vettore $\underline{x}$ si dice *autovettore* associato a λ.

Spettro di A: insieme degli autovalori $\sigma(A)$.

Un autovettore è sempre $\neq 0$. Un autovalore = 0 sse A è singolare.

Raggio spettrale: $\rho = \max_{1 \le j \le n} |\lambda_j|$

Se $\det(A - \lambda I) = 0$ il sistema lineare di *n* equazioni in *n* incognite $(A - \lambda I)\underline{x} = 0$ ammette soluzioni non nulle.

Polinomio caratteristico: $\det(A - \lambda I)$ di grado *n* in λ.

Equazione caratteristica: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Gli autovalori di una matrice sono tutte e sole le radici dell'equazione caratteristica.

Proprietà

I) A ed A^T hanno gli stessi autovalori infatti $\det(A^T - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^T$

II) $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

III) Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists\ A^{-1}$ e se μ è autovalore di A $\Rightarrow \mu^{-1}$ autovalore di A^{-1}

Infatti: $Ax = \mu x$, $\quad A^{-1}Ax = \mu A^{-1}x$, $\quad A^{-1}x = \frac{1}{\mu}x$

IV) Sia μ autovalore di A cui è associato $\underline{x} \Rightarrow \forall\ s \in N$, μ^s è autovalore di A^s cui è associato $\underline{x}$, cioè: $Ax = \mu x \Rightarrow A^s x = \mu^s x$

V) Se μ è autovalore di A, μ^s è autovalore di $A^s\ \forall\ s \in Z$

Siano A, B $\in$ Mat(n,n), $\exists\ B^{-1}$ e sia $C = B^{-1}AB$. C si dice *trasformata per contragradienza di A mediante B.*

Due matrici trasformate per contragradienza l'una dall'altra si dicono *simili*.

Teorema Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico e quindi gli stessi autovalori.

Dimostrazione.

Sia $C = B^{-1}AB$

$\det(C - \lambda I) = \det(B^{-1}AB - \lambda B^{-1}IB) = \det(B^{-1}(A - \lambda I)B) = \det(B^{-1})\det(A - \lambda I)\det B = \det(A - \lambda I)$ •

Teorema Se A e C sono simili, allora A^s e C^s sono ancora simili $\forall\ s \in N$.

Dimostrazione.

Sia $C = B^{-1}AB$.

$C^s = \underbrace{C \ldots C}_{s\ volte} = (B^{-1}AB) \ldots (B^{-1}AB) = B^{-1}A(BB^{-1})AB \ldots B^{-1}AB = B^{-1}A^sB$ •

Teorema Se A e C sono simili e $\det(A) \neq 0$ allora anche $\det(C) \neq 0$ e inoltre A^{-1}, C^{-1} sono simili.

Dimostrazione.

Sia: $C = B^{-1}AB \Rightarrow \det(C) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(A)$

$C^{-1}=(B^{-1}AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}(B^{-1})^{-1} = B^{-1}A^{-1}B$. •

Poiché il polinomio caratteristico è di grado *n*, A ha *n* autovalori non necessariamente distinti. A ha almeno una coppia autovalore-autovettore e poiché:

$Ax = \lambda x \Leftrightarrow A\alpha x = \lambda\alpha x$, ovvero A ha infiniti autovettori. (Infatti, posto: $y=\alpha x$ si ha: $Ay=\lambda y$). Il problema è quindi quello di determinare il numero di autovettori linearmente indipendenti.

Indicheremo con ***molteplicità algebrica*** di un autovalore la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.

Indicheremo con ***molteplicità geometrica*** di un autovalore il numero di vettori linearmente indipendenti associati ad esso.

Teorema di Gerschgorin

Sia $A \in Mat(n,n)$ e siano:

$$\rho_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n$$

$$\gamma_i = \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq \rho_i\} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$$

Allora, se $\lambda \in \sigma(A) \quad \Rightarrow \lambda \in \gamma$

Dimostrazione.

Sia λ autovalore di A ed $\underline{x}$ autovettore associato ad esso:

$$A\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \lambda x_i \qquad i = 1, \dots, n$$

Supponiamo che l'r-esima riga contenga la x_r che sia di modulo massimo:

$$a_{rr}x_r + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} a_{rj}x_j = \lambda x_r$$

$$(a_{rr} - \lambda)\, x_r = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} a_{rj}x_j$$

$$|(a_{rr} - \lambda)| = \left| \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} a_{rj}(x_j / x_r) \right|$$

$$|a_{rr} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} |a_{rj}||x_j / x_r| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq r}}^{n} |a_{rj}|$$

$$\Rightarrow |a_{rr} - \lambda| \leq \rho_r \Rightarrow \lambda \in \gamma_r$$

Poiché A ed A^T hanno gli stessi autovalori si ha:

$$\gamma' = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq \rho_i'\}$$

$$\rho_i' = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|$$

$$\lambda \in \gamma \Rightarrow \lambda \in \gamma \cap \gamma' \qquad \bullet$$

Conseguenze del teorema di Gerschgorin.

Teorema

Ogni matrice $A \in Mat(n,n)$ strettamente diagonalmente dominante è non degenere.

Ip. $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$

Ts. $\det(A) \neq 0$.

Dimostrazione per assurdo.

Supponiamo che det(A) = 0 $\Rightarrow$ 0 è autovalore di A $\Rightarrow$ $0 \in \gamma$ per Gerschgorin e poiché $\gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i$ $\exists$ i tale che $0 \in \gamma_i$ cioè:

$$|0 - a_{ii}| \leq \rho_i \Rightarrow |a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

che è assurdo. •

Teorema di Hermite

Se $A \in Mat(n,n)$, $A = \overline{A}^T$ (matrice hermitiana) allora gli autovalori di A sono tutti reali.

Dimostrazione.

Sia μ autovalore di A e $\underline{x}$ un autovettore associato ad esso

$$A\underline{x} = \mu\underline{x}$$

$$\overline{x}^T Ax = \mu \overline{x}^T x = \mu\langle x,x\rangle$$

Poiché $\langle x,x\rangle \in R^+$ dobbiamo mostrare che $\overline{x}^T Ax \in R$

$\overline{\overline{x}^T Ax} = x^T \overline{A}\overline{x} = \left(x^T \overline{A}\overline{x}\right)^T = \overline{x}^T \overline{A}^T x = \overline{x}^T Ax$. •

Teorema

Se A è simmetrica definita positiva gli autovalori sono tutti reali positivi. ◦

Definizione Una matrice si dice ***diagonalizzabile*** se e′ simile ad una matrice diagonale. ◦

Teorema

Una matrice A $\in$ Mat(n,n) è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti. $\circ$

Definizioni

Matrice ***unitaria***: $\overline{U}^T U = U \overline{U}^T = I$ da cui: $U^{-1} = \overline{U}^T$

Matrice ***ortogonale***: $U^T U = U U^T = I$ da cui: $U^{-1} = U^T$

Matrice ***normale***: $U^T U = U U^T$

Teorema di Schur

$A \in$ Mat(n,n) $\Rightarrow \exists$ U unitaria : $T = \overline{U}^T AU$, dove T è triangolare superiore. $\circ$

NB: Se A è reale allora U è ortogonale.

Definizione $A \in$ Mat(n,n) è *convergente* se $\lim_{m\to\infty} A^m = 0$ (matrice zero)

Teorema Se A è hermitiana essa è diagonalizzabile. $\circ$

Teorema Condizione necessaria e sufficiente perché $A \in$ Mat(n,n) sia convergente è che $\rho(A) < 1$. $\circ$

Teorema $\rho(A) \leq \|A\|$ $\circ$

Teorema Condizione necessaria e sufficiente perché A sia convergente è che sia infinitesima: $\|A^k\| \to 0$. $\circ$