4. Interpolazione

Definizione del problema

È un problema di approssimazione di una funzione o di un insieme di dati con una funzione che sia più semplice e che abbia buone proprietà di regolarità. È utilizzata quando i dati sono forniti con precisione. La **condizione di interpolazione** è che la funzione interpolante e la funzione interpolata coincidano nei nodi che sono le ascisse dei dati.

Interpolazione polinomiale

Nell'interpolazione polinomiale la funzione interpolata sarà un polinomio. Con P_n indicheremo l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale ad n.

Teorema di Vandermonde

Siano dato gli $n+1$ nodi $x_0, \dots, x_n$ distinti ed i dati in corrispondenza $y_0, \dots, y_n$, allora esiste sempre uno ed un solo polinomio interpolante di grado n passante per tutti i punti x_i.

$$\exists_1 p \in P_n : p(x_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \dots, n \tag{1}$$

Metodo dei coefficienti indeterminati

Anche detto metodo di Vandermonde, consiste nel ricavare il polinomio risolvendo un sistema lineare. Un polinomio $p \in P_n$ ha $n+1$ coefficienti, che sarebbero le incognite. Se abbiamo $n+1$ nodi allora possiamo facilmente costruire un sistema lineare quadrato per ottenere i coefficienti del polinomioì, e quindi un polinomio che rispetti la condizione di interpolazione.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0^1 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1^1 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n^1 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

Purtroppo il metodo genera una matrice mal condizionata per il problema dei sistemi lineari al crescere di n. Esistono metodi migliori per il problema dell'interpolazione.

Metodo dei polinomi di Lagrange

Si pone il polinomio $p \in P_n$ alla seguente espressione:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x) \tag{3}$$

Dove gli L_i sono i polinomi di Lagrange e sono definibili come una base dello spazio dei polinomi P_n, mentre nei casi precedenti viene usata la base canonica ($1, x, x^2, \dots, x^n$). La costruzione avviene come segue:

$$L_i(x) = \prod_{j \neq i, j=0}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{4}$$

Il comportamento di L_i con i nodi è quello di un interruttore:

$$Li(x_j) = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ 1 & x = x_i \end{cases} \tag{5}$$

Quindi è ovvio che il polinomio definito precedentemente interpola i nodi, essendo che quando è sottomesso a x_i si attiva $L_i(x_i) = 1$ e si annullano tutti gli altri, quindi $p(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$.

Metodo delle differenze divise di Newton

Anche in questo metodo si utilizza una base differente, e si crea $p \in P_n$ come segue:

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i) \tag{6}$$

Osserviamo che:

1. $p(x_0) = b_0$
2. $p(x_1) = b_0 + b_1(x - x_0)$
3. etc.

Le espressioni successive si annullano a causa di moltiplicazioni per 0. Una volta osservato questo, bisogna calcolare i termini b_i imponendo che sia soddisfatta la condizione di interpolazione. Per il primo nodo si ha:

$$p(x_0) = b_0 = y_0 \implies b_0 = y_0 \tag{7}$$

Vediamo cosa succede per il secondo nodo:

$$p(x_1) = b_0 + b_1(x_1 - x_0) = y_1 \tag{8}$$

Quindi:

$$b_1 = \frac{y_1 - b_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{9}$$

Questo termine, che somiglia al rapporto incrementale, prende il nome di **prima differenza divisa**

$$f[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{10}$$

In generale, si ha che per $0 < i \leq n$ il termine b_i corrisponde alla differenza divisa:

$$b_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \tag{11}$$

Calcolo delle differenze divise

Un trucco per calcolare le differenze divise è quello di creare una tabella piramidale come segue:

x_0	$f(x_0)$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\dots$	
x_2	$f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3]$	$\dots$	
		$f[x_2, x_3]$			$f[x_0, x_1, \dots, x_n]$
x_3	$f(x_3)$			$\dots$	
.				$\dots$	
.			$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		
.		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$			
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f(x_n)$				

Sia P la tabella piramidale, con $P[i, j]$ ci riferiamo all'elemento i della colonna j. Possiamo riempire la colonna calcolando gli elementi come segue (dalla 3° colonna in poi, dato che le prime due sono note):

$$P[i, j] = \frac{P[i-1, j] - P[i-1, j+1]}{P[0, j+i] - P[0, j]} \tag{12}$$

Le differenze divise che ci interessano stanno nella prima riga della tabella, quindi $P[i, 0]$ per $i = 1, \dots, n$, quindi in generale:

$$b_i = P[i, 0] \tag{13}$$

Metodo delle differenze

Deriva dal metodo delle differenze divise e si adotta solo nel caso in cui i nodi sono **ugualmente spaziati** tra loro, e quindi data una spaziatora h si può definire una relazione:

$$x_i = x_0 + hi \tag{14}$$

Se anziché considerare le differenze divise, considerassimo solo le differenze, allora potremmo definire ricorsivamente il seguente schema:

$$\begin{cases} \Delta^0 f(x) & = f(x) \\ \Delta^1 f(x) & = \Delta(\Delta^0 f(x)) = f(x+h) - f(x) \\ \Delta^i f(x) & = \Delta(\Delta^{i-1} f(x)) \end{cases} \tag{15}$$

Per capire meglio come funzionano, calcoliamo $\Delta^2 f(x)$:

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta^1 f(x)) \\ &= \Delta(f(x+h) - f(x)) \\ &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)) \end{aligned} \tag{16}$$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x))$$
$$= f(x+2h) + 2f(x+h) + f(x)$$

Si può effettuare il calcolo delle differenze attraverso la tabella, ma senza dividere:

$$P[i,j] = P[i-1,j] - P[i-1,j+1] \tag{17}$$

Teorema

Se i nodi sono equispaziati, allora vale che:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f(x)}{k! h^k} \tag{18}$$

e vale anche la seguente formula per il calcolo del polinomio interpolante:

$$p(x) = p(x_0 + rh) = \sum_{j=0}^{n} \left[\Delta^j f(x_0) \binom{r}{j} \right] \tag{19}$$

Dove r è ottenuto come $r = (x - x_0)/h$. Tramite questa formula è possibile ignorare completamente il calcolo dei coefficienti b_i e valutare il polinomio interpolante in un qualsiasi punto (previa costruzione della tabella che determina le differenze $\Delta^j f(x_0)$).

Problemi legati all'interpolazione polinomiale

Un polinomio di grado troppo alto continuerà ad interpolare i nodi, ma tra un punto ed il successivo oscillerà in maniera crescente al crescere di n. Vedremo come rimediare quando studieremo le splines.

Interpolazione Lagrangiana

I metodi presentati sino ad ora sono metodi di interpolazione polinomiale lagrangiana. In questi metodi non viene specificato come deve avvenire il passaggio per i punti interpolati, ad esempio sfruttando informazioni relative alle derivate.

Teorema dell'errore nei metodi di interpolazione lagrangiani

> Il teorema vale per qualsiasi metodo di interpolazione Lagrangiana.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la funzione da interpolare e siano dati $n+1$ nodi $x_0, \dots, x_n$. Sia $f \in C[a,b]^{n+1}$ ovvero siano continue le $n+1$ derivate di f. Sia $p \in P_n$ il polinomio interpolante f nei nodi stabiliti. Allora l'errore vale esattamente

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} W(x) \qquad \forall x \in [a,b] \tag{20}$$

Con $\xi \in]a,b[$ e $W \in P_{n+1}$ definito come segue

$$W(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{21}$$

Anche se non viene detto come determinare il termine ξ, è comunque possibile studiare l'errore massimo che si può commettere utilizzando il polinomio ottenuto tramite interpolazione lagrangiana:

$$\max(e) = \max(f(x) - p(x)) = \frac{\max f^{n-1}}{(n+1)!} \max W \qquad \forall x \in [a, b] \tag{22}$$

Dimostrazione del teorema.

Nel caso in cui x sia un nodo x_i, allora l'espressione è banalmente vera: per la condizione di interpolazione l'errore è nullo. Questo è vero sia nell'espressione $f(x) - p(x)$, sia in quella seguente, dato che $W(x)$ si annulla quando x è un nodo.

Fissiamo x e ipotizziamo che non sia uno dei nodi. Definiamo una funzione ausiliaria:

$$F(t) = f(t) - p(t) - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)} W(t) \tag{23}$$

La funzione $F(t)$ ha esattamente $n+2$ zeri:

- $n+1$ zeri sono dati dalla componente $W(t)$ che si annulla sugli $n+1$ nodi
- 1 zero è dato per $t = x$

La funzione F è differenziabile $n+1$ volte poichè è composta da:

- f che è differenziabile $n+1$ volte per ipotesi
- W e p che essendo polinomi sono differenziabili infinite volte

Il teorema di Rolle enuncia che sotto opportune condizioni (funzione continua e derivabile (esterni esclusi) nel dominio) se $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in Dom(F)$ tale che $f'(c) = 0$. Dato che:

$$F(x_i) = F(x_{i+1}) = 0 \tag{24}$$

Allora in ogni intervallo $]x_i, x_{i+1}[$ tra due nodi consecutivi contiene un punto al suo interno per cui la derivata prima F' si annulla. Essendoci $n+1$ nodi, questo ragionamento può essere applicato ai rispettivi n intervalli, quindi la derivata prima F' ha $n+1$ zeri.

Se si reitera il ragionamento otterremo che:

- F ha $n+2$ zeri
- F' ha $n+1$ zeri
- F'' ha n zeri
- $\dots$
- F^{n+1} ha uno zero, che chiameremo ξ

Una volta chiarito qual è lo ξ a cui ci riferiamo, osserviamo come calcolare la formula della tesi.

Lo scopo è quello di calcolare la derivata $(n+1)$-esima di F. La f è per ipotesi derivabile $(n+1)$ volte, quindi si calcola la derivata. Il polinomio $p \in P_n$ si annulla derivandolo $n+1$ volte. Il termine $W(t)$ è tale che:

$$W(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) = t^{n+1} + a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n+1} \tag{25}$$

Osserviamo che il polinomio è **monico**, ovvero il coefficiente del monomio di grado massimo è 1. La derivata $(n+1)$ di un polinomio monico di grado $n+1$ è semplicemente:

$$W^{(n+1)}(t) = (n+1)! \tag{26}$$

$$W^{(n+1)}(t) = (n+1)! \tag{26}$$

> Piccolo hint: deriviamo x^4 4 volte: $4x^3 \rightarrow (3*4)x^2 \rightarrow (2*3*4)x \rightarrow (1*2*3*4) = 4!$

Infine ricomponiamo la derivata $F^{(n+1)}$

$$F^{(n+1)}(t) = f^{n+1}(t) - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)}(n+1)! \tag{27}$$

Inseriamo $t = \xi$ facendo così annullare la derivata $(n+1)$-esima:

$$F^{(n+1)}(\xi) = f^{n+1}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)}(n+1)! = 0 \tag{28}$$

Riordiniamo l'espressione:

$$\begin{aligned} f^{n+1}(\xi) - \frac{f(x) - p(x)}{W(x)}(n+1)! = 0 \\ -\frac{f(x) - p(x)}{W(x)}(n+1)! = -f^{n+1}(\xi) \\ \frac{f(x) - p(x)}{W(x)}(n+1)! = f^{n+1}(\xi) \\ f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}W(x) \end{aligned} \tag{29}$$

Da cui la tesi:

$$e(x) = f(x) - p(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}W(x) \tag{30}$$

Corollario (correlazione tra errore e differenze divise)

Dal teorema sull'errore e dalle formule delle differenze divise di Newton si ha:

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{31}$$

Interpolazione Hermitiana

L'interpolazione hermitiana tiene conto dell'informazione fornita dalle derivate della funzione interpolata. Siano $x_0, \dots, x_n$ gli $n+1$ nodi, se oltre alla valutazione della funzione nel generico nodo $f(x_i)$ vengono fornite anche le derivate $f'(x_i), f''(x_i), \dots$ allora si può imporre un passaggio più accurato del polinomio approssimante in quel punto.

Buchi di informazione

Per funzionare, non devono esserci buchi nell'informazione fornita. Per buco intendiamo ad esempio che venga fornita la derivata prima nel punto x_i, ma non il valore della funzione, oppure che venga fornito il valore della derivata seconda e non della derivata prima (etc). Se le informazioni contengono buchi, allora la matrice del sistema lineare associato (Vendermonde) sarà degenere. Se invece non ci sono buchi, quindi per ogni derivata n-esima fornita sono state fornite le derivate precedenti ed il valore della funzione valutata sul punto, allora la matrice sarà non degenere e sarà possibile calcolare il polinomio.

Grado del polinomio interpolante

Supponiamo che siano forniti:

- $n+1$ nodi
- m_0 valori
- m_1 derivate prime
- $\dots$
- m_n derivate n-esime

Allora il grado del polinomio interpolante calcolato attraverso interpolazione hermitiana sarà

$$N = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i\right) - 1 \tag{32}$$

Interpolazione osculatoria

Questo tipo di interpolazione è un caso particolare dell'interpolazione hermitiana, in cui si hanno a disposizione tutti le informazioni di derivate prime oltre che ai valori della funzione nei vari nodi.

Estensione dei teoremi sull'errore

I teoremi sull'errore dell'interpolazione lagrangiana precedentemente enunciati valgono anche in questo caso, con l'unica differenza che nella funzione $W(x)$, se si conosce fino alla derivata n-esima di un certo nodo x_i, il termine $(x - x_i)$ deve essere elevato alla n.

Disposizione dei nodi

> Per semplicità lavoreremo sulla interpolazione lagrangiana, ma vale anche per quella hermitiana.

All'aumentare del grado del polinomio, esso oscilla tra i nodi imposti durante l'interpolazione. Questo effetto può essere rilassato andando a giocare sulla disposizione dei nodi, utilizzando quindi dei nodi non equispaziati (campionamento non uniforme).

Triangolazione

Fissata una tipologia di campionamento (uniforme oppure non uniforme) e fissato n, la triangolazione Δ di un certo intervallo $[a, b]$ produce una sequenza di campionamenti $C_1, C_2, \dots, C_n$ di cardinalità $|C_i| = i$. Andando a produrre il polinomio interpolante per ognuno dei campionamenti, si spera che all'aumentare del numero di campioni il polinomio converga alla funzione interpolata $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Teorema di Faber

Per ogni triangolazione Δ esiste una funzione $f \in C[a,b]$ per cui la successione di polinomi $\{p_n(x)\}$ non converge uniformemente ad $f(x).

> Esempio: funzione di Runge $f(x) = 1/(1+x^2)$ con $x \in [-5,5]$ con campionamento omogeneo.

Teorema dell'esistenza della triangolazione ottima

Data $f \in C[a,b]$ allora esiste una triangolazione Δ tale che la successione $\{p_n(x)\}$ converge uniformemente ad $f(x)$.

Conseguenze dei teoremi

- Non esistono schemi interpolatori universali.
- Dalla formula dell'errore l'unica cosa che possiamo manipolare è il campionamento

Polinomi di Chebichev

I polinomi di Chebichev sono una classe di polinomi $T_n(x)$ di grado n utili alla ricerca dei nodi ottimali presso i quali campionare non uniformemente una qualsiasi funzione che si intende interpolare tramite interpolazione polinomiale. Si lavorerà ipotizzando che il dominio della funzione interpolata sia $[-1,1]$, in caso contrario, sarà possibile mappare il risultato nel dominio originale della funzione.

I polinomi di Chebichev sono definiti come segue:

$$\begin{cases} T_n(x) = \cos(n\theta) \\ x = \cos(\theta) \end{cases} \tag{33}$$

Quindi per valutare $T_n(x)$ bisogna prima calcolare $\theta = arccos(x)$, e dopodiché $T_n(x) = \cos(n\theta)$. Notiamo che:

- Per $n = 0$ si ha $T_0(x) = \cos(0) = 1$
- Per $n = 1$ si ha $T_1(x) = \cos(\theta) =^{def} x$

Otteniamo il polinomio per $n = k+1$ ed $n = k-1$ ed utilizziamo le formule di sommazione degli angoli per il coseno:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) = \cos((k+1)\theta) = \cos(k\theta+\theta) = \cos(k\theta)\cos(\theta) + \cos(k\theta)\cos(\theta) \\ T_{k-1}(x) = \cos((k-1)\theta) = \cos(k\theta-\theta) = \cos(k\theta)\cos(\theta) - \cos(k\theta)\cos(\theta) \end{aligned} \tag{34}$$

Sommiamo i polinomi e manipoliamo l'equazione:

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) &= 2\cos(k\theta)\cos(\theta) \\ T_{k+1}(x) &= 2\cos(k\theta)\cos(\theta) - T_{k-1}(x) \\ T_{k+1}(x) &= 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x) \end{aligned} \tag{35}$$

Dove sostituiamo $x = \cos(\theta)$ e $T_k = \cos(k\theta)$. Possiamo definire i polinomi di Chebichev ricorsivamente come segue:

$$\begin{cases} 1 & n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & n = 1 \\ 2x \cdot T_k(x) - T_{k-1}(x) & n \geq 2 \end{cases} \tag{36}$$

Sviluppando i polinomi si nota che il grado di T_n è effettivamente n. Inoltre, sempre sviluppando i polinomi, ci accorgiamo che il coefficiente del monomio di grado più alto di T_k è 2^{k-1}, quindi se consideriamo:

$$\frac{T_k(x)}{2^{k-1}} = x^k + \dots \tag{37}$$

Avremo un polinomio monico. Questa osservazione ci servirà nei teoremi successivi.

Zeri dei polinomi di Chebichev

Essendo T_k un polinomio di grado k, avrà necessariamente k zeri $x_1, \dots, x_k$. Se utilizziamo la rappresentazione iniziale, esisteranno sicuramente $\theta_1, \dots, \theta_n$ tale che $x_i = \cos(\theta_i)$.

Quando si annulla il coseno?

$$\cos(k\theta_i) = 0 \iff k\theta_i = \frac{\pi}{2} + i\pi \tag{38}$$

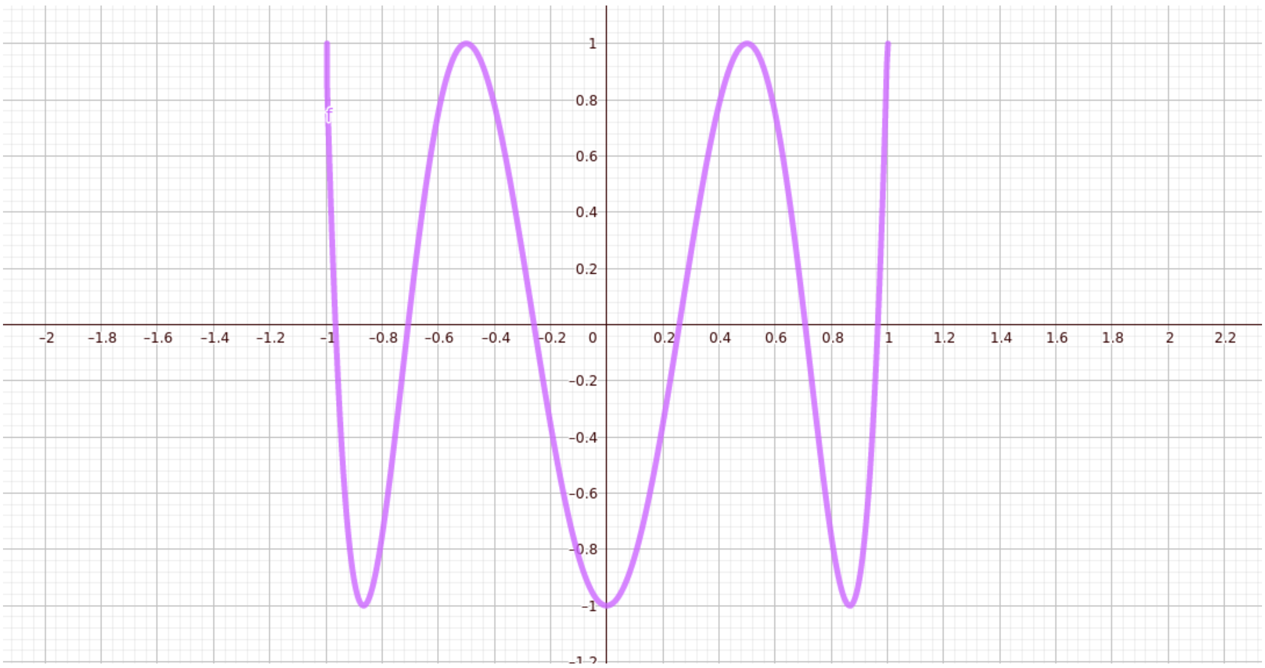
Quindi otteniamo:

$$\theta_i = \frac{2i+1}{2k}\pi \tag{39}$$

Una volta trovati i θ, li utilizziamo per trovare gli zeri x_i di T_k:

$$x_i = \cos(\theta_i) = \cos\left(\frac{2i+1}{2k}\pi\right) \qquad i = 0, 1, \dots, k-1 \tag{40}$$

Segue una rappresentazione della funzione di T_6 in cui sono evidenti i 6 zeri del polinomio:



Polinomi ortogonali

I polinomi di Chebichev fanno parte di una più grande classe di polinomi chiamati **polinomi ortogonali** al prodotto interno.

Teorema di minimizzazione dell'errore nel caso di zeri di Chebichev

Sia $W(x)$ la funzione utilizzata nella determinazione dell'errore di interpolazione. Tra le possibili scelte degli $n+1$ nodi $\{x_i\}_{i=0}^n$ con $x_i \in [-1, 1]$ si ha che $\max(W(x))$ è minima se

$$W(x) = \frac{T_{n+1(x)}}{2^n} \tag{41}$$

Quindi se gli x_i scelti sono gli zeri dei polinomi di Chebichev.

> Come si eguagliano di due termini? Essendo due polinomi di grado $n+1$ sarà sicuramente possibile passare da una forma all'altra.

Splines

L'idea è che anziché usare un polinomio di alto grado, si suddivide l'intervallo in sottointervalli intermedi e si utilizzano polinomi di grado più basso in ognuno dei sottointervalli. La funzione spline è data dall'unione dei polinomi ottenuti. Ci sono due categorie di spline:

- **Spline interpolanti**: si interpola nei sottointervalli, ma non garantisce la continuità delle derivate a meno di imporre ulteriori restrizioni.
- **Spline approssimanti**: si rilassa il vincolo dell'interpolazione, non è obbligatorio quindi interpolare i punti ed il metodo diventa di approssimazione.

Parleremo di spline interpolanti.

Grado della spline

Queste ultime sono descritte da un **grado** legato alla loro derivabilità. Per ottenere una spline interpolante, è necessario raggruppare i campioni continui (max ~5 per gruppo) ed interpolare all'interno del gruppo. Otterremo tanti polinomi quanti sono i gruppi. I polinomi vengono poi concatenati per creare la spline. La concatenazione dei polinomi **non preserva la derivabilità** in quanto crea dei punti angolosi. La spline costruita come descritto prima è di grado 0. Per ottenere una spline di grado k, bisogna imporre delle condizioni su tutte le derivate di ordine minore o uguale a k.

> In pratica si utilizzano spline di grado 1 o 3, poiché propongono un buon trade-off tra efficienza computazionale e approssimazione fornita. Si evita l'utilizzo di spline di **grado pari**, poiché quelle di **grado dispari** presentano meno errori di approssimazione.

Polinomio a tratti e definizione di Spline

Un polinomio di grado k a tratti è una funzione che in ogni sottointervallo è un polinomio di grado k. Tali polinomi sono uniti in modo continuo in modo da interpolare i dati. Ciò comporta che la funzione interpolante possa avere derivate discontinue. È possibile imporre alcune proprietà di continuità alle derivate senza richiedere la conoscenza di tali derivate. Di particolare interesse è il caso in cui le derivate sono continue fino all'ordine $k-1$ se k è il grado del polinomio a tratti, in tal caso il polinomio prende il nome di **spline di grado k**.

> Ricordiamoci che non è necessario conoscere le derivate della funzione nei nodi, le condizioni di continuità delle derivate sono imposte tra i polinomi contigui!!

Gradi di libertà

Per grado di libertà si intende il numero di condizioni da imporre nella costruzione della spline $S(x)$ per garantire l'univocità di quest'ultima. Se la spline $S(x)$ è di grado k e si opera su $n+1$ nodi, si dimostra che il grado di libertà è $n+k$.

Disambiguazione: con gradi di liberta intendiamo anche il numero di condizioni che ci manca da imporre per identificare univocamente $S(x)$.

Spline lineari

Per $k=1$ si hanno le spline lineari. Se determiniamo il grado di libertà, supponendo di avere $n+1$ nodi, otterremo un grado di libertà $n+1$. Le $n+1$ condizioni sono banalmente soddisfatte attraverso la costruzione di una particolare base. Definiamo le funzioni cappello ψ_i per $i=1,\ldots,n-1$ come segue:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 0 & x \in [x_{i-1}, x_{i+1}] \\ (x-x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}) & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i) & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases} \tag{42}$$

Così definite, avremo che $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ (delta di dirak), quindi le funzioni cappello sono linearmente indipendenti (ortogonali tra loro).

La spline lineare è definita come:

$$S(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \psi_i(x) \tag{43}$$

Graficamente la spline consiste nell'unire i campioni contigui attraverso delle rette.

> Stima dell'errore: sia $h_i = x_i - x_{i-1}$, si ha che
>
> $$|f(x) - S_1(x)| \leq \left(\frac{h_i}{2}\right)^2 \max_{h_{i-1} \leq t \leq h_i} \left|\frac{f''(t)}{2}\right| \tag{44}$$

Spline cubiche

Per $k = 3$ si hanno le spline cubiche. Questa volta con $n + 1$ nodi ci rimangono 2 gradi di liberta da riempire ($n + 3 - (n + 1) = 2$). Il tipo di spline cubica varia in base a come si impongono i due gradi di libertà:

- **Spline naturale**: si impone $S_3''(x_0) = S_3''(x_n) = 0$
- **Spline periodica**: si impone $S_3'(x_0) = S_3'(x_n) \wedge S_3''(x_0) = S_3''(x_n)$
- **Spline vincolata** si impone $S_3'(x_0) = y_0' \wedge S_3'(x_n) = y_n'$ con $y_0', y_n' \in \mathbb{R}$