Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра математической кибернетики

Лабораторная работа № 2
По курсу «Математическое моделирование»

Выполнил:
Студент группы М8О-405Б-19
Данилова Татьяна Михайловна
Проверил:
Доцент кафедры 802
Майоров Андрей Юрьевич

Москва
2022 г.

Задание:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{x} + x^5 = 0$$

Найти периодическое решение дифференциального уравнения методом Линштедта в окрестности устойчивого частного решения $x = x_* > 0$, $\dot{□} = 0$ для случая □ $= -10$. Для этого необходимо:

1. Разложить нелинейную функцию исследуемого уравнения в ряд по возмущениям $\xi = x - x_*, \dot{\xi} = \dot{x}$ в окрестности точки покоя $x = x_*$, $\dot{x} = 0$ и удержать члены до третьего порядка включительно. Ввести в уравнения движения малый параметр ε, используя замену переменных $\xi = \varepsilon y$, $\dot{\xi} = \varepsilon \dot{y}$, и новое время по формуле $\tau = \omega t$, где

$\omega = □_0 + □□_1 + □^2□_2 + \cdots$ - искомая частота колебаний.

Получить в явном виде периодическое решение $y = y(\tau)$, $\dot{y} = \dot{y}(\tau)$ задачи Коши $y(0) = y_0$, $\dot{y}(0) = 0$ для преобразованного дифференциального уравнения с точностью до членов порядка ε^3. После этого следует вернуться к старым переменным x, $\dot{x}$ и получить приближенное выражение периодических колебаний в виде $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$.

2. С помощью MAPLE построить две сравнительные фазовые кривые на плоскости переменных x, $\dot{x}$ соответствующие аналитическому (приближенному) решению и строгому решению задачи Коши (полученному на основе численного счета). Рассмотрите два интервала изменения времени t: $t \in [0, 10]$, $t \in [0, 1/\varepsilon]$. Численные значения параметров и начальных условий таковы: $\lambda = -10$, $x(0) = 0.001$, $\dot{x}(0)=0$, $\varepsilon = 0.01$.

Решение:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{x} + x^5 = 0$$

1. Разложим в ряд Тейлора

$> f := -\frac{10}{x} + x^5$

$$f := -\frac{10}{x} + x^5$$

$> x_0 := \sqrt[6]{10}$

$$x_0 := 10^{1/6}$$

$> taylor(f, x = x_0)$

$$6\,10^{2/3}\left(x - 10^{1/6}\right) + 9\sqrt{10}\left(x - 10^{1/6}\right)^2 + 11\,10^{1/3}\left(x - 10^{1/6}\right)^3 + 4\,10^{1/6}\left(x - 10^{1/6}\right)^4 + 2\left(x - 10^{1/6}\right)^5 + O\left(\left(x - 10^{1/6}\right)^6\right)$$

2. Введем малый параметр (замена переменных: $\xi = \varepsilon y$, $\dot{\xi} = \varepsilon \dot{y}$) и сократим на $\varepsilon \neq 0$. Берем члены ряда до третьего порядка включительно.
   Делаем замену времени $\tau = \omega t$.

   $\frac{d}{dt} = \frac{d}{d(\tau/\omega)} = \omega \frac{d}{d\tau}$,

   $\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\right) = \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$,

   обозначим $\frac{dy}{d\tau} = y'$, $\frac{d^2y}{d\tau^2} = y''$, тогда уравнение имеет вид:

   $> \omega^2 \cdot diff(y(\mathrm{tau}), \mathrm{tau\$2}) + 6\,10^{2/3} y(\mathrm{tau}) + 9\sqrt{10}\,\varepsilon \cdot y(\mathrm{tau})^2 + 11\,10^{1/3}\,\varepsilon^2 \cdot y(\mathrm{tau})^3 = 0$

   $$\omega^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau)\right) + 6\,10^{2/3} y(\tau) + 9\sqrt{10}\,\varepsilon y(\tau)^2 + 11\,10^{1/3}\,\varepsilon^2 y(\tau)^3 = 0$$

3. Представим частоту колебания ω в виде ряда по малому параметру:

   $\omega_0 = 1, \omega = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$.

   Решение представим в виде ряда:

   $y(\tau) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau)$.

   Подставим эти разложения в дифференциальное уравнение. С помощью Maple

> $subs(\mathrm{omega} = \omega0 + \varepsilon\cdot\omega1 + \varepsilon^2\cdot\omega2, \%)$

$$\left(\varepsilon^2\omega2 + \varepsilon\omega1 + \omega0\right)^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y(\tau)\right) + 6\,10^{2/3}y(\tau) + 9\sqrt{10}\,\varepsilon y(\tau)^2 + 11\,10^{1/3}\varepsilon^2 y(\tau)^3 = 0$$

> $subs(y(\mathrm{tau}) = \mathrm{y0}(\mathrm{tau}) + \varepsilon\cdot y1(\mathrm{tau}) + \varepsilon^2\cdot y2(\mathrm{tau}), \%)$

$$\left(\varepsilon^2\omega2 + \varepsilon\omega1 + \omega0\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left(y0(\tau) + \varepsilon y1(\tau) + \varepsilon^2 y2(\tau)\right)\right) + 6\,10^{2/3}\left(y0(\tau) + \varepsilon y1(\tau) + \varepsilon^2 y2(\tau)\right) + 9\sqrt{10}\,\varepsilon\left(y0(\tau) + \varepsilon y1(\tau) + \varepsilon^2 y2(\tau)\right)^2$$
$$+ 11\,10^{1/3}\varepsilon^2\left(y0(\tau) + \varepsilon y1(\tau) + \varepsilon^2 y2(\tau)\right)^3 = 0$$

> $collect(\%, \mathrm{epsilon});$

$$11\,10^{1/3}y2(\tau)^3\varepsilon^8 + 33\,10^{1/3}y1(\tau)\,y2(\tau)^2\varepsilon^7 + \left(\omega2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right) + 11\,10^{1/3}\left(y0(\tau)\,y2(\tau)^2 + 2y1(\tau)^2 y2(\tau) + y2(\tau)\left(2y0(\tau)\,y2(\tau)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + y1(\tau)^2\right)\right)\right)\varepsilon^6 + \left(9\sqrt{10}\,y2(\tau)^2 + 11\,10^{1/3}\left(4y0(\tau)\,y1(\tau)\,y2(\tau) + y1(\tau)\left(2y0(\tau)\,y2(\tau) + y1(\tau)^2\right)\right) + \omega2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right)\right.$$
$$\left. + 2\,\omega1\,\omega2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right)\right)\varepsilon^5 + \left(18\sqrt{10}\,y1(\tau)\,y2(\tau) + 11\,10^{1/3}\left(y0(\tau)\left(2y0(\tau)\,y2(\tau) + y1(\tau)^2\right) + 2y1(\tau)^2 y0(\tau) + y2(\tau)\,y0(\tau)^2\right)\right.$$
$$\left. + \left(2\,\omega0\,\omega2 + \omega1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right) + 2\,\omega1\,\omega2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + \omega2^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right)\right)\varepsilon^4 + \left(9\sqrt{10}\left(2y0(\tau)\,y2(\tau) + y1(\tau)^2\right)\right.$$
$$\left. + 33\,10^{1/3}y0(\tau)^2 y1(\tau) + 2\,\omega0\,\omega1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right) + \left(2\,\omega0\,\omega2 + \omega1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + 2\,\omega1\,\omega2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right)\right)\varepsilon^3 + \left(6\,10^{2/3}y2(\tau)\right.$$
$$\left. + \omega0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right) + 2\,\omega0\,\omega1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + \left(2\,\omega0\,\omega2 + \omega1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right) + 18\sqrt{10}\,y0(\tau)\,y1(\tau) + 11\,10^{1/3}y0(\tau)^3\right)\varepsilon^2$$
$$+ \left(6\,10^{2/3}y1(\tau) + 9\sqrt{10}\,y0(\tau)^2 + 2\,\omega0\,\omega1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right) + \omega0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right)\right)\varepsilon + 6\,10^{2/3}y0(\tau) + \omega0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right) = 0$$

4. Приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε, получим уравнения для определения функций $y_0(\tau), y_1(\tau), y_2(\tau)$. Затем последовательно решаем три задачи Коши. Обнуляя секулярные члены находим $\omega_0, \omega_1, \omega_2$.

   Решаем первую задачу Коши, полагая $\omega_0 = \sqrt{6 * 10^{\frac{2}{3}}}$, получаем $y_0(\tau)$:

   $\omega0 := \mathrm{sqrt}\left(6\,10^{2/3}\right)$

$$\omega0 := \sqrt{6}\;10^{1/3}$$

   #решаем задачу Коши для части уравнения без эпсилон

   $dsolve\left(\left\{6\,10^{2/3}y0(\tau) + \omega0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right), y0(0) = a, \mathrm{D}(y0)(0) = 0\right\}\right)$

$$y0(\tau) = a\cos(\tau)$$

   Подставляем $y_0(\tau)$ во вторую задачу Коши, получаем $y_1(\tau)$:

```
> # из выражения где все сгруппировано по эпсилон вытаскиваем множитель при эпсилон и подставляем туда решение для y0
```

$$subs\left(y0(\tau) = a\cos(\tau), \left(2\,\omega 0\,\omega 1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right) + \omega 0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + 6\,10^{2/3}\,y1(\tau) + 9\sqrt{10}\,y0(\tau)^2\right)\right)$$

$$2\sqrt{6}\,10^{1/3}\,\omega 1\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right) + 6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + 6\,10^{2/3}\,y1(\tau) + 9\sqrt{10}\,a^2\cos(\tau)^2$$

```
> #решаем задачу Коши для части уравнения с эпсилон1
```

$$dsolve\left(\left\{2\sqrt{6}\,10^{1/3}\,\omega 1\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right) + 6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + 6\,10^{2/3}\,y1(\tau) + 9\sqrt{10}\,a^2\cos(\tau)^2, y1(0) = 0, D(y1)(0) = 0\right\}\right)$$

$$y1(\tau) = \frac{1}{300}\,2^{5/6}\,5^{5/6}\left(-5^{5/6}\sqrt{3}\,2^{1/3}\,\omega 1\,a + 15\,a^2\right)\cos(\tau) + \frac{1}{20}\left(5^{5/6}\,a\left(\cos(\tau)^2 - 2\right)2^{2/3} + \frac{2}{3}\,\omega 1\sqrt{3}\,5^{2/3}\left(\sin(\tau)\,\tau + \cos(\tau)\right)\right)2^{1/6}\,a$$

```
> collect(%, sin(τ))
```

$$y1(\tau) = \frac{1}{30}\,2^{1/6}\,a\sin(\tau)\sqrt{3}\,5^{2/3}\,\omega 1\,\tau + \frac{1}{300}\,2^{5/6}\,5^{5/6}\left(-5^{5/6}\sqrt{3}\,2^{1/3}\,\omega 1\,a + 15\,a^2\right)\cos(\tau) + \frac{1}{20}\left(5^{5/6}\,a\left(\cos(\tau)^2 - 2\right)2^{2/3} + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,5^{2/3}\cos(\tau)\,\omega 1\right)2^{1/6}\,a$$

Обнуляем секулярный член, для этого полагаем, что ω_1=0. Получаем окончательное значение для $y_1(\tau)$:

```
> ω1 := 0
```

$$\omega 1 := 0$$

```
> #решаем задачу Коши для части уравнения с эпсилон1,обнуляляя секулярный член
```

$$dsolve\left(\left\{2\sqrt{6}\,10^{1/3}\,\omega 1\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right) + 6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right) + 6\,10^{2/3}\,y1(\tau) + 9\sqrt{10}\,a^2\cos(\tau)^2, y1(0) = 0, D(y1)(0) = 0\right\}\right)$$

$$y1(\tau) = \frac{1}{20}\,10^{5/6}\,a^2\cos(\tau) + \frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\left(-3 + \cos(2\,\tau)\right)$$

Подставляем полученные значения $y_0(\tau)$, $y_1(\tau)$ в третью задачу Коши.

> *# подставляем y0,y1 в члены с эпсилон2*

$$subs\left(y0(\tau)=a\cos(\tau), y1(\tau)=\frac{1}{20}\cos(\tau)\,10^{5/6}a^2+\frac{1}{40}10^{5/6}a^2(-3+\cos(2\tau)), \left(6\,10^{2/3}y2(\tau)+\omega0^2\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right)+2\,\omega0\,\omega1\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y1(\tau)\right)+\left(2\,\omega0\,\omega2+\omega1^2\right)\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y0(\tau)\right)+18\sqrt{10}\,y0(\tau)\,y1(\tau)+11\,10^{1/3}y0(\tau)^3\right)\right)$$

$$6\,10^{2/3}y2(\tau)+6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right)+2\sqrt{6}\,10^{1/3}\omega2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right)+18\sqrt{10}\,a\cos(\tau)\left(\frac{1}{20}10^{5/6}a^2\cos(\tau)+\frac{1}{40}10^{5/6}a^2(-3+\cos(2\tau))\right)+11\,10^{1/3}a^3\cos(\tau)^3$$

> *#решаем задачу Коши для части уравнения с эпсилон2*

$$dsolve\left(\left\{6\,10^{2/3}y2(\tau)+6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right)+2\sqrt{6}\,10^{1/3}\omega2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right)+18\sqrt{10}\,a\cos(\tau)\left(\frac{1}{20}\cos(\tau)\,10^{5/6}a^2+\frac{1}{40}10^{5/6}a^2(-3+\cos(2\tau))\right)+11\,10^{1/3}a^3\cos(\tau)^3, y2(0)=0, D(y2)(0)=0\right\}\right)$$

$$y2(\tau)=-\frac{1}{60}10^{2/3}a\left(\sqrt{6}\,\omega2+a^2\right)\cos(\tau)+\frac{1}{40}10^{2/3}\left(\frac{2}{3}\omega2\left(\sin(\tau)\,\tau+\cos(\tau)\right)\sqrt{6}+\left(\frac{5}{3}\cos(\tau)^3+\sin(\tau)\,\tau+2\cos(\tau)^2+\cos(\tau)-4\right)a^2\right)a$$

> *collect*(%, sin(τ))

$$y2(\tau)=\frac{1}{40}10^{2/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\,\omega2\,\tau+a^2\tau\right)a\sin(\tau)-\frac{1}{60}10^{2/3}a\left(\sqrt{6}\,\omega2+a^2\right)\cos(\tau)+\frac{1}{40}10^{2/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\cos(\tau)\,\omega2+\left(\frac{5}{3}\cos(\tau)^3+2\cos(\tau)^2+\cos(\tau)-4\right)a^2\right)a$$

Обнуляем секулярный член, $\omega_2=-\frac{1}{4}\sqrt{2}a^2\sqrt{3}$. Получаем окончательное решение для $y_2(\tau)$:

> $\omega 2 := solve\left(\frac{1}{40}\,10^{2/3}\,a\left(\frac{2}{3}\sqrt{6}\,\omega 2\,\tau + a^2\,\tau\right) = 0, \omega 2\right)$

$$\omega 2 := -\frac{1}{4}\,a^2\sqrt{6}$$

> *#решаем задачу Коши для части уравнения с эпсилон2,обнуляяя секулярный член*

$$dsolve\left(\left\{6\,10^{2/3}\,y2(\tau) + 6\,10^{2/3}\left(\frac{d^2}{d\tau^2}y2(\tau)\right) + 2\sqrt{6}\,10^{1/3}\,\omega 2\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(a\cos(\tau))\right) + 18\sqrt{10}\,a\cos(\tau)\left(\frac{1}{20}\cos(\tau)\,10^{5/6}\,a^2 + \frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\,(-3+\cos(2\,\tau))\right) + 11\,10^{1/3}\,a^3\cos(\tau)^3, y2(0) = 0, D(y2)(0) = 0\right\}\right)$$

$$y2(\tau) = \frac{1}{120}\,10^{2/3}\cos(\tau)\,a^3 + \frac{1}{120}\,10^{2/3}\,a^3\left(5\cos(\tau)^3 + 6\cos(\tau)^2 - 12\right)$$

5. Составим решение исходного уравнения:

> *#собираем решение*
>
> $y(\mathrm{tau}) := y0(\mathrm{tau}) + \mathrm{epsilon}\cdot y1(\mathrm{tau}) + \varepsilon^2\cdot y2(\mathrm{tau});$

$$y := \tau \rightarrow y0(\tau) + \varepsilon\,y1(\tau) + \varepsilon^2\,y2(\tau)$$

> $subs\Big(y0(\tau) = a\cos(\tau), y1(\tau) = \frac{1}{20}\,10^{5/6}\,a\left(2\,10^{1/6} + a\right)\cos(\tau) + \frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\,(-3+\cos(2\,\tau)), y2(\tau) = \frac{1}{120}\,10^{2/3}\left(a^3 + 12\,10^{1/6}\,a^2 + 12\,10^{1/3}\,a\right)\cos(\tau) + \frac{1}{24}\,a^2\left(\left(\cos(\tau)^3 + \frac{6}{5}\cos(\tau)^2 - \frac{12}{5}\right)a\,10^{2/3} + \frac{12}{5}\,10^{5/6}\left(\cos(\tau)^2 - 2\right)\right), y(\mathrm{tau})\Big);$

$$a\cos(\tau) + \varepsilon\left(\frac{1}{20}\cos(\tau)\,10^{5/6}\,a\left(2\,10^{1/6} + a\right) + \frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\,(-3+\cos(2\,\tau))\right) + \varepsilon^2\left(\frac{1}{120}\cos(\tau)\,10^{2/3}\left(a^3 + 12\,10^{1/6}\,a^2 + 12\,10^{1/3}\,a\right) + \frac{1}{24}\left(\left(\cos(\tau)^3 + \frac{6}{5}\cos(\tau)^2 - \frac{12}{5}\right)a\,10^{2/3} + \frac{12}{5}\,10^{5/6}\left(\cos(\tau)^2 - 2\right)\right)a^2\right)$$

Выражение для ω:

> $\mathrm{omega} := omega0 + \mathrm{epsilon}\cdot omega1 + \varepsilon^2\cdot omega2;$

$$\omega := -\frac{1}{4}\,\varepsilon^2\,a^2\sqrt{6} + \sqrt{6}\,10^{1/3}$$

Делаем обратную замену $t = \frac{\tau}{\omega}$:

$$> subs\left(\tau=\omega\cdot t,\ a\cos(\tau)+\varepsilon\left(\frac{1}{20}\cos(\tau)\,10^{5/6}\,a\left(2\,10^{1/6}+a\right)+\frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\left(-3+\cos(2\,\tau)\right)\right)+\varepsilon^2\left(\frac{1}{120}\cos(\tau)\,10^{2/3}\left(a^3+12\,10^{1/6}\,a^2+12\,10^{1/3}\,a\right)+\frac{1}{24}\,a^2\left(a\left(\cos(\tau)^3+\frac{6}{5}\cos(\tau)^2-\frac{12}{5}\right)10^{2/3}+\frac{12}{5}\,10^{5/6}\left(\cos(\tau)^2-2\right)\right)\right)\right);$$

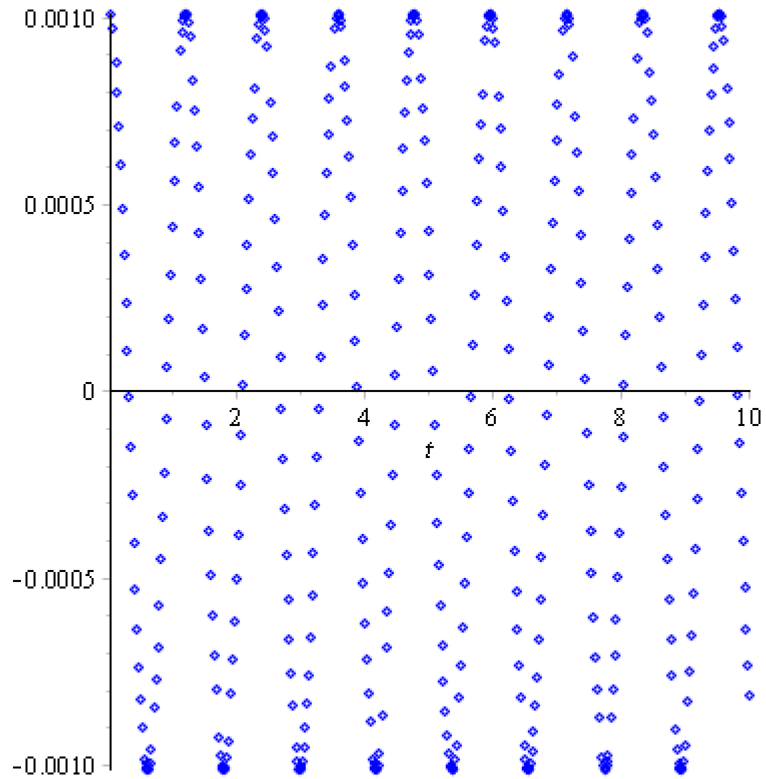
$$a\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)+\varepsilon\left(\frac{1}{20}\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)10^{5/6}\,a\left(2\,10^{1/6}+a\right)+\frac{1}{40}\,10^{5/6}\,a^2\left(-3+\cos\left(2\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)\right)\right)+\varepsilon^2\left(\frac{1}{120}\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)10^{2/3}\left(a^3+12\,10^{1/6}\,a^2+12\,10^{1/3}\,a\right)+\frac{1}{24}\left(\left(\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)^3+\frac{6}{5}\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)^2-\frac{12}{5}\right)a\,10^{2/3}+\frac{12}{5}\,10^{5/6}\left(\cos\left(\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^2 a^2\sqrt{6}+\sqrt{6}\,10^{1/3}\right)t\right)^2-2\right)\right)a^2\right)$$

6. Построим сравнительные графики полученного приближенно-аналитического решения и точного численного решения исходного дифференциального уравнения.

Для $\lambda=-10, x(0)=0.001, x^{\cdot}(0)=0, \varepsilon=0.01, t\in[0,10]$

Метод Линштедта:

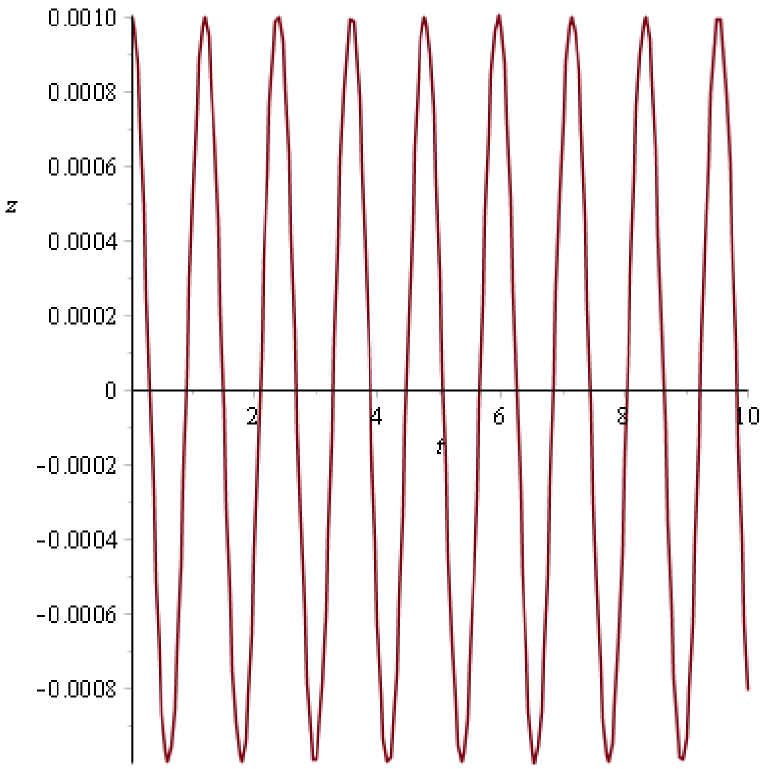
```
> plot(subs(epsilon = 0.01, a = 0.001, y(t)), t = 0 ..10, style = point, colour = blue);
```



Решение численным методом:

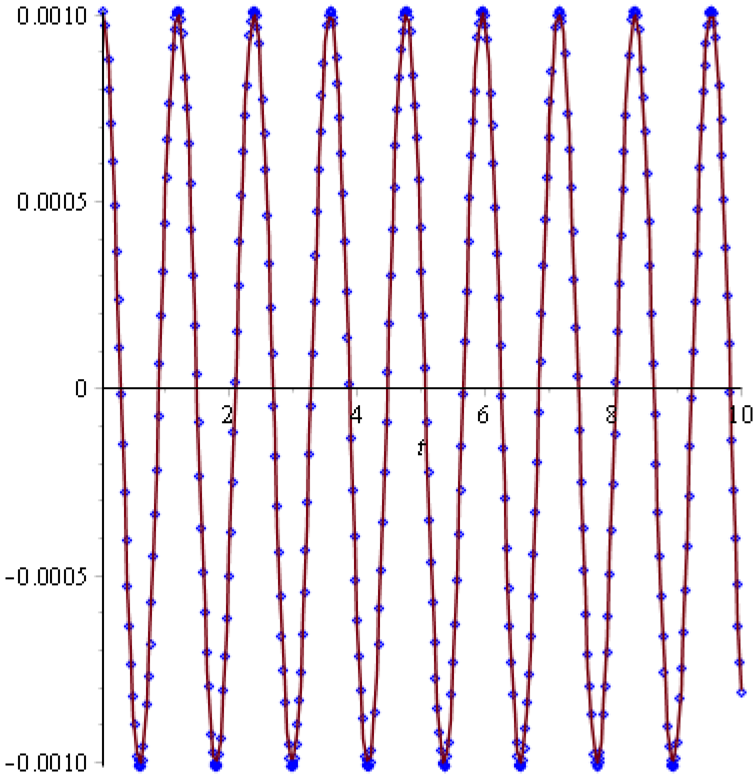
$$> de := dsolve\left(\left\{\frac{d^2}{dt^2}\left(z(t)-10^{1/6}\right)-\frac{10}{z(t)-10^{1/6}}+\left(z(t)-10^{1/6}\right)^5=0, z(0)=0.001, D(z)(0)=0\right\}, z(t), numeric\right):$$

$$> odeplot(de, [t, z(t)], 0..10);$$



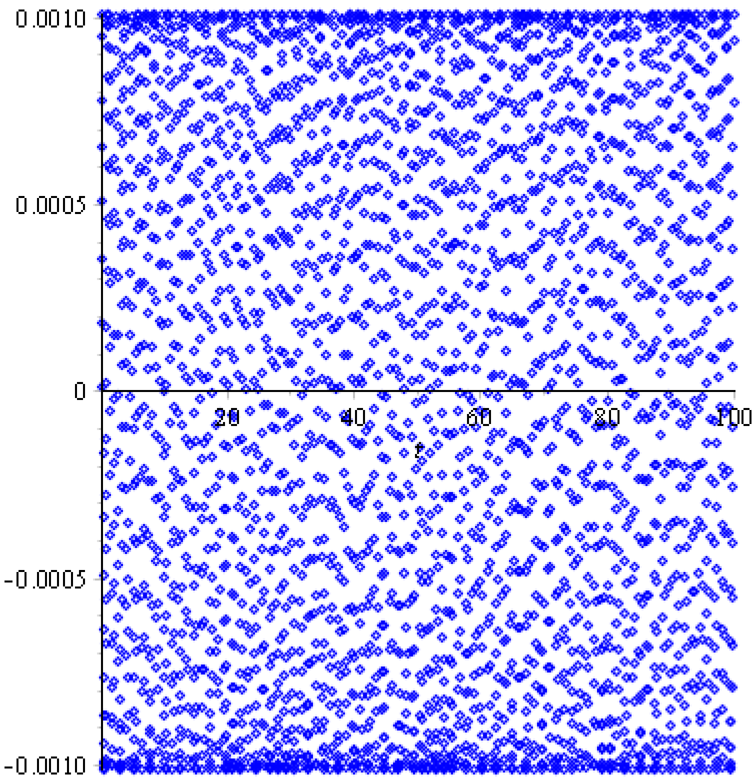
Наложение приближенно-аналитического метода на численный:

```
> display([pic_1, pic_2]);
```



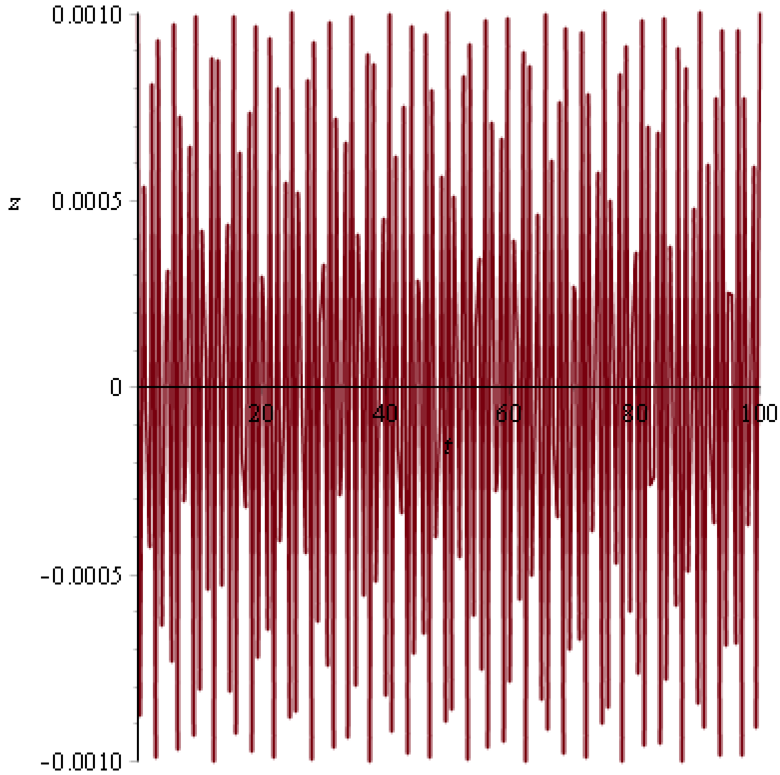
Для $\lambda = -10, x(0) = 0.001, x^{\cdot}(0) = 0, \varepsilon = 0.01, t \in [0, 1/\varepsilon]$

```
> plot(subs(epsilon = 0.01, a = 0.001, y(t)), t = 0 .. 1/0.01, style = point, colour = blue);
```

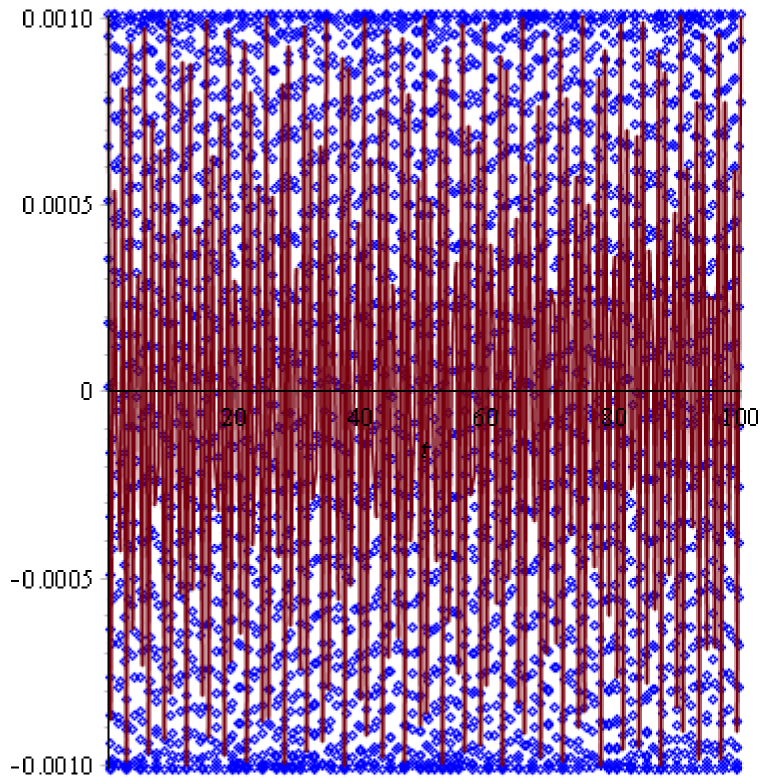


На более мелком разбиении Maple строит некорректный график.

> $odeplot\left(de, [t, z(t)], t = 0 .. \frac{1}{0.01}\right);$



> $display([pic\_3, pic\_4]);$



Вывод: из сравнительных графиков приближенно-аналитического и численного методов решения дифференциального уравнения можно убедиться, что метод Линдштедта является достаточно точным методом.