Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
Институт № 8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра математической кибернетики

Лабораторная работа № 1
По курсу «Математическое моделирование»

Выполнил:
Студент группы М8О-405Б-19
Данилова Татьяна Михайловна
Проверил:
Доцент кафедры 802
Майоров Андрей Юрьевич

Москва
2022 г.

Задание:

Построить фазовый портрет колебаний механической системы, описываемый уравнением

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{x} + x^5 = 0$$

для случаев $\lambda = 10$, $\lambda = -10$. Для этого: получите потенциальную энергию ***П(x)***, получите интеграл энергии, постройте график потенциальной энергии при $\lambda = 10$, $\lambda = -10$, с помощью графика постройте фазовый портрет колебаний. Укажите характерные элементы фазового портрета: положение равновесия $x = x_0$, типичные траектории, сепаратрису. Для случая $\lambda = -10$ получите зависимость ***T(a)*** периода колебаний от начальной амплитуды в виде квадратуры, постройте график этой зависимости с помощью MAPLE и объясните поведение графика ***T(a)***.

Получение потенциальной энергии *П(x)*

Для получения потенциальной энергии необходимо использовать замену вида:

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx}$$

Тогда получим уравнение:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} + f(x) = 0,$$

где $f(x) = \frac{\lambda}{x} + x^5$.

Решив данное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, получим выражение вида:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = c,$$

где $\Pi(x)$ **–** искомая потенциальная энергия, c – константа.

<u>Реализация вычисления потенциальной энергии в Maple:</u>

```
restart; with(plots) :
```

$f := \frac{\lambda}{x} + x^5$

$$f := \frac{\lambda}{x} + x^5$$

```
diff(x(t), t$2) + f = 0;
```

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{\lambda}{x} + x^5 = 0$$

```
PI := int(f, x)
```

$$\Pi := \lambda \ln(x) + \frac{1}{6} x^6$$

$\mathrm{PI} := \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6} x^6$

$$\Pi := \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6} x^6$$

$\frac{diff(x(t), t\$1)^2}{2} + \mathrm{PI} = C$

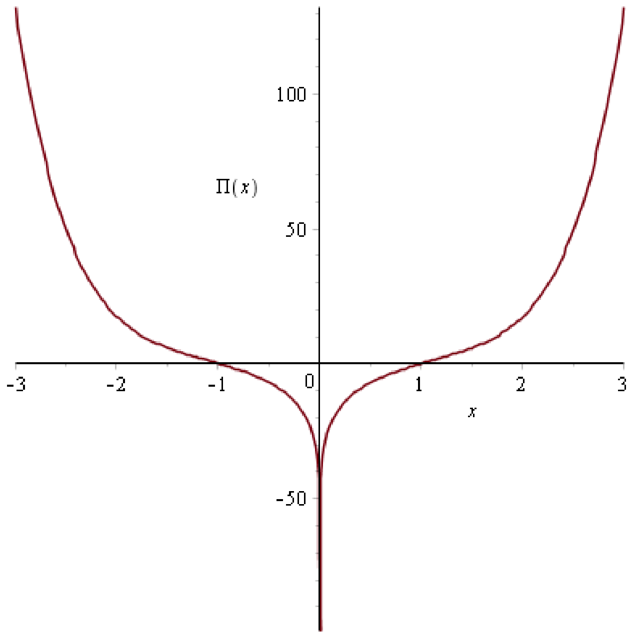
$$\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} x(t) \right)^2 + \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6} x^6 = C$$

График потенциальной энергии $\Pi(x)$:

$\lambda := 10$

$$\lambda := 10$$

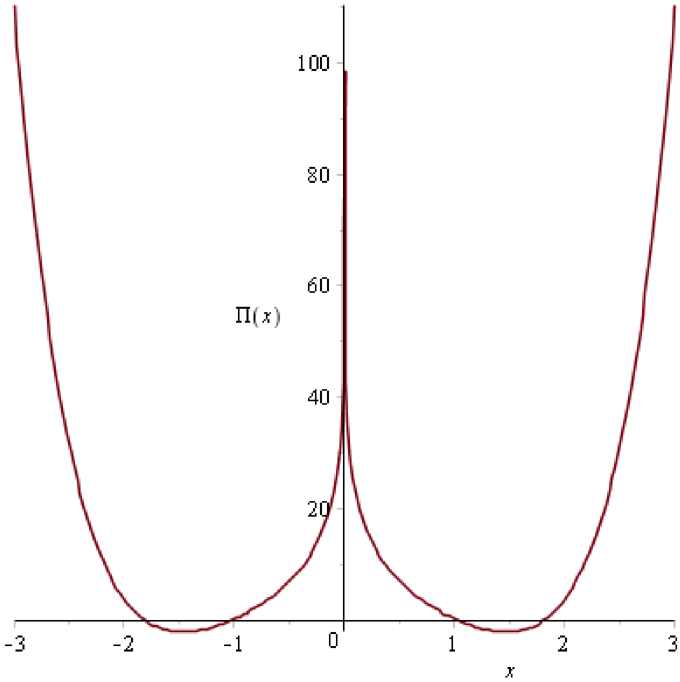
```
plot(PI, x = -3 ..3, labels = [x,'PI(x)'])
```



$\lambda := -10$

$\lambda := -10$

$plot(\mathrm{PI}, x = -3..3, labels = [x, '\mathrm{PI}(x)'])$



Построение фазового портрета

Для построения фазового портрета выразим $\dot{x}$ из уравнения $\frac{\dot{x}^2}{2} + \Pi(x) = c$. Тогда получим выражение вида:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{(2c - 2\Pi(x))},$$

где $\Pi(x) = \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6}x^6$ – выражение потенциальной энергии.

<u>Построение фазового портрета в Maple:</u>

$V\_pos := x \rightarrow \sqrt{2 \cdot C - 2 \cdot \mathrm{PI}}$

$$V\_pos := x \rightarrow \sqrt{2\,C - 2\,\Pi}$$

$V\_neg := x \rightarrow -\sqrt{2 \cdot C - 2 \cdot \mathrm{PI}}$

$$V\_neg := x \rightarrow -\sqrt{2\,C - 2\,\Pi}$$

$\lambda := 10$

$$\lambda := 10$$

$C := 0$; $C1\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = blue)$: $C1\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = blue)$:

$$C := 0$$

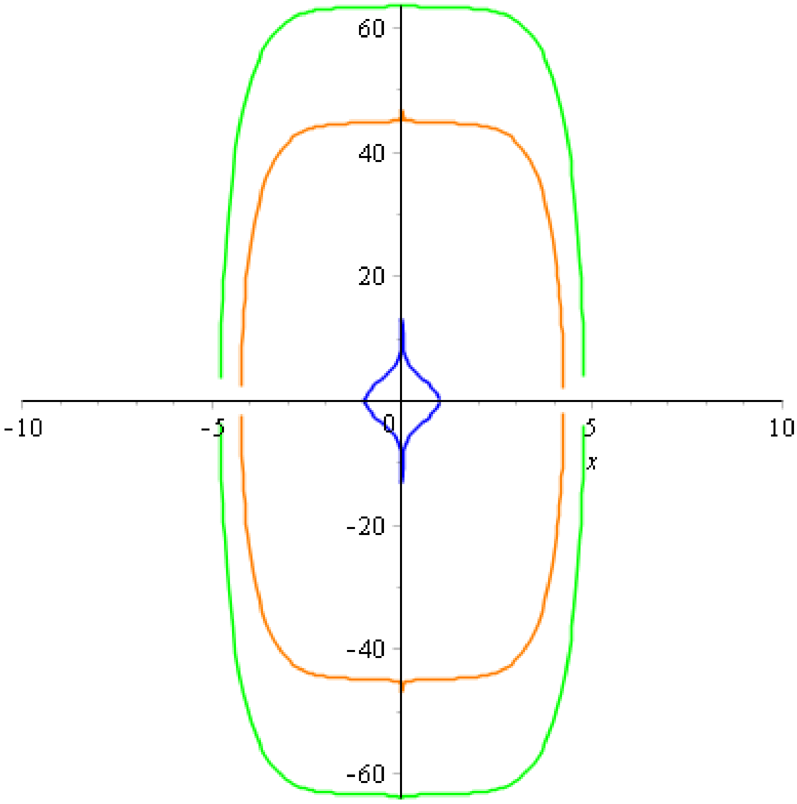
$C := 1000$; $C2\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = \mathrm{coral})$: $C2\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = \mathrm{coral})$:

$$C := 1000$$ (

$C := 2000$; $C3\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = \mathrm{green})$: $C3\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = \mathrm{green})$:

$$C := 2000$$ (

$display([C1\_pos, C1\_neg, C2\_pos, C2\_neg, C3\_pos, C3\_neg])$



$\lambda := -10$

$$\lambda := -10$$

$C := 0\,;\ C1\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = blue) : C1\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = blue) :$

$$C := 0$$

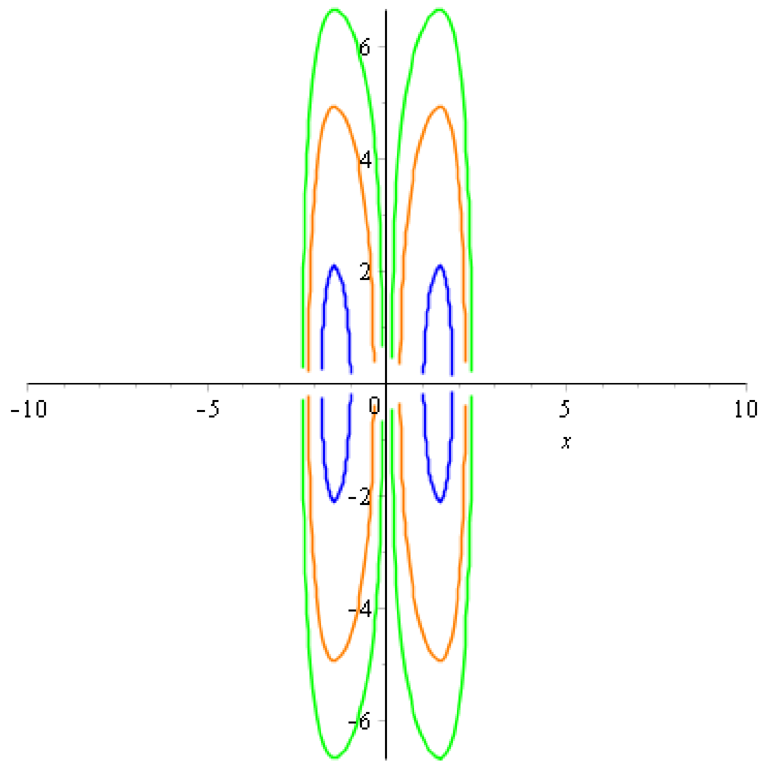
$C := 10;\ C2\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = \text{coral}) : C2\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = \text{coral}) :$

$$C := 10$$

$C := 20\,;\ C3\_pos := plot(V\_pos(x), x, color = \text{green}) : C3\_neg := plot(V\_neg(x), x, color = \text{green}) :$

$$C := 20$$

$display([C1\_pos, C1\_neg, C2\_pos, C2\_neg, C3\_pos, C3\_neg])$



Получение зависимости периода колебаний от начальной амплитуды *T(a)*

Выразим период колебаний T из выражения $\dot{x} = \pm\sqrt{(2c - 2\Pi(x))}$, получим:

$$T = \pm\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(2c - 2\Pi(x))}}$$

Для построения графика зависимости периода колебаний от начальной амплитуды ***T(a)***, следуем приведенному алгоритму:

1) Выбираем точку $\boldsymbol{x = a}$ на оси абсцисс Ох из области колебания системы, учитываем, что $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, тогда выражение $\dot{\mathbf{x}} = \pm\sqrt{(\boldsymbol{2c - 2\Pi(x)})}$, сводится к равенству вида:

$$\boldsymbol{c = \Pi(a)}$$

Откуда получаем значение константы $\boldsymbol{c}$.

2) Подставляем полученные значения в преобразованную формулу вычисления периода колебаний $\boldsymbol{T}$.
3) Повторить 1) - 2) для <u>разных</u> значений $\boldsymbol{x_i = a_i}$, где $\boldsymbol{i = 0, \dots, n}; (\boldsymbol{n \geq 10})$.

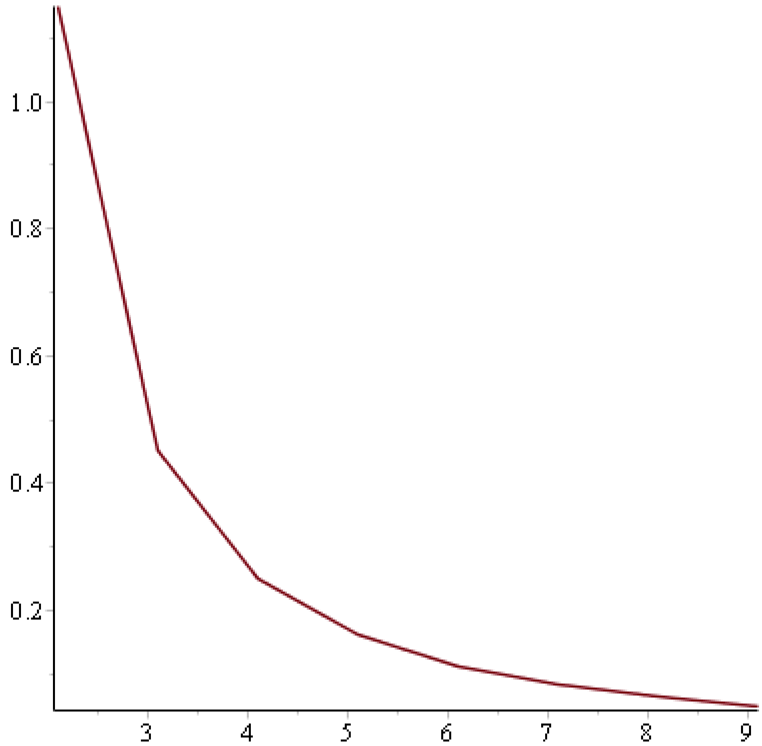
<u>Реализация построение графика зависимости периода колебаний от начальной амплитуды *T(a)* в Maple:</u>

```
restart;
PI(x) := -10·ln(|x|) + 1/6 x^6;
P := -10·ln(|x|) + 1/6 x^6;
for a_l from 2.1 by 1 to 10 do
a := a_l;
C := PI(a);
B := solve(C = PI(x))[1];
T[a_l] := -2 ∫_a^B 1/sqrt(2·C - 2·P) dx;
end do
```

$$T[a\_l] := -2\int_a^B \frac{1}{\mathrm{sqrt}(2\cdot C - 2\cdot P)}\,dx;$$

```
T_neg := Vector([1.151475360, 0.4524375236, 0.2516738096, 0.1619747478, 0.1131075240, 0.08346407644, 0.06412047404,
    0.05079995440], datatype=float[8], orientation=column);
A_neg := Vector([ 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1, 9.1], orientation=column);
plot(A_neg, T_neg);
```

График зависимости периода колебаний от начальной амплитуды *T(a)*:



Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы были определены:

1) потенциальная энергия $\boldsymbol{\Pi(x) = \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6} x^6}$,
2) интеграл энергии $\boldsymbol{\frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \ln(|x|) + \frac{1}{6} x^6 = c}$,
3) значения периода колебаний $\boldsymbol{T}$ для значений начальной амплитуды в интервале $a \in [2.1; 10]$ с шагом 1.