МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»

IV курс, VII семестр

Выполнил:
Студент группы М8О-305Б-19
Данилова Татьяна Михайловна
Номер по списку: 9
Преподаватель:
Демидова Ольга Львовна

Оценка: ____

Дата: 18.05.2022

Москва
2022

Оглавление

Численное решение интегральных уравнений Фредгольма 1-го и 2-го рода.

1. Основные понятия и определения

Интегральным уравнением называется всякое уравнение, содержащее неизвестную функцию под знаком интеграла.

Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2 – го рода называется уравнение вида

$$f(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt \ = g(x)$$

где $f(x)$ – искомая функция; $K(x,t)$ и $g(x)$ – известные функции, заданные на основном квадрате $[a,b] \times [a,b]$ и отрезке $[a,b]$ соответственно; λ – числовой параметр. Функция $K(x,t)$ называется ядром интегрального уравнения, а $f(x)$ – свободным членом этого уравнения. Если $g(x) \neq 0$, то уравнение называется неоднородным, если же $g(x) = 0$, то данное уравнение называется однородным.

Пределы интегрирования a и b могут быть как конечными, так и бесконечными. Решением называется любая функция $f(x)$, при подстановке, которой в уравнения последние обращаются в тождества относительно $x \in [a,b]$.

Интегральное уравнение вида:

$$\int_a^b K(x,t)f(t)dt \ = g(x)$$

не содержащие искомой функции а $f(x)$ вне интеграла, называется линейным интегральным уравнением Фредгольма 1 – го рода.

2. Решение методом квадратур

Одним из наиболее распространенных методов, применяемых для решения уравнения Фредгольма, является метод квадратур, состоящий в замене входящего в левую часть уравнения интеграла какой-либо формулой численного интегрирования

Опишем данный метод применительно к уравнению 2 рода. Для начала построим на отрезке $[a,b]$ сетку с узлами $x_0, x_1, \dots, x_n$. Для каждого узла сетки запишем уравнение, и в итоге получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} f(x_0) - \lambda \int_a^b K(x_0,t)f(t)dt \ = g(x_0) \\ \qquad\qquad \dots \\ f(x_n) - \lambda \int_a^b K(x_n,t)f(t)dt \ = g(x_n) \end{cases}$$

Аппроксимируем интегралы, используя формулу трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\sum_{i=1}^{n}(f_i + f_{i-1}) = h\left(\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2}\right)$$
$$= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$

где h – постоянный шаг сетки

После преобразования система будет иметь вид:

$$\begin{cases} f(x_0) - \lambda h\sum_{j=0}^{n-1} w_j K(x_0, x_j) f(x_j) = g(x_0) \\ \dots \\ f(x_n) - \lambda h\sum_{j=0}^{n-1} w_j K(x_n, x_j) f(x_j) = g(x_n) \end{cases}$$

где $w_0 = w_n = \frac{1}{2}$, $w_j = 1$ при j = 1, 3,…, n-1.

Запишем матрицу данной системы относительно неизвестных f(x):

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \lambda\frac{h}{2}K(x_0, x_0) & \cdots & -\lambda\frac{h}{2}K(x_0, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda\frac{h}{2}K(x_n, x_0) & \cdots & 1 - \lambda\frac{h}{2}K(x_n, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ \dots \\ g(x_n) \end{pmatrix}$$

Решив систему любым численным методом, получим функцию f(x), заданную таблично в узлах сетки.

```
def Fredgolm_II(K, g, x, h, lamb):
    n = x.size

    A = numpy.zeros((n, n))

    for i in range(n):
        if i == 0:
            A[i, 0] = 1-0.5*lamb*h*K(x[i], x[0])
        else:
            A[i, 0] = - 0.5 * lamb * h * K(x[i], x[0])

    for i in range(n)
        for j in range(n):
            if j == i:
                A[i, j] = 1 - lamb * h * K(x[i], x[j])
            else:
                A[i, j] = - lamb * h * K(x[i], x[j])

    for i in range(n):
        if i == n-1:
            A[i, n-1] = 1-lamb * 0.5 * h * K(x[i], x[n-1])
        else:
            A[i, n - 1] = - lamb * 0.5 * h * K(x[i], x[n - 1])

    return numpy.linalg.solve(A, g(x))
```

Для уравнения Фредгольма первого рода аналогичным образом можно получить систему:

$$A = \begin{pmatrix} hK(x_0, x_0) & \cdots & \frac{h}{2}K(x_0, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h}{2}K(x_n, x_0) & \cdots & hK(x_n, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ \cdots \\ g(x_n) \end{pmatrix}$$

```
def Fredgolm_I(K, g, x, h):
    n = x.size

    A = numpy.zeros((n, n))

    for i in range(n):
            A[i, 0] = 0.5*h*K(x[i], x[0])
            A[i, n-1] = 0.5*h*K(x[i], x[n-1])

    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i, j] = h * K(x[i], x[j])

    return numpy.linalg.solve(A, g(x, a, b))
```

Для расчета погрешности используем формулу

$$\max_{0 \le i \le n-1} |f(x_i) - y_i|$$

где f(x) – точное решение в точке x, а y – численное.

3. Результат работы программы

Уравнение Фредгольма 1-го рода

Еравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b |x - t| f(t) dt = g(x), 0 \le a < b$$

$$f(x) = \frac{1}{2} g''_{xx}(x)$$

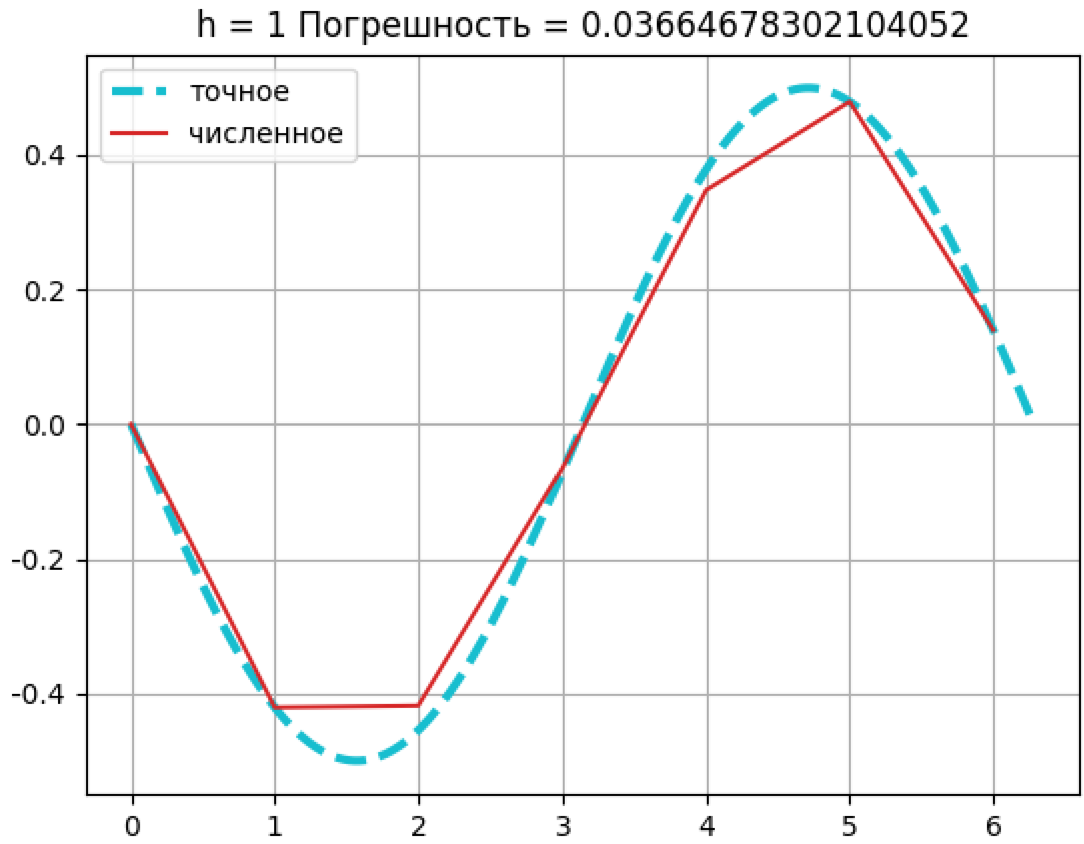
Причем g(x) обязательно должна иметь следующий вид:

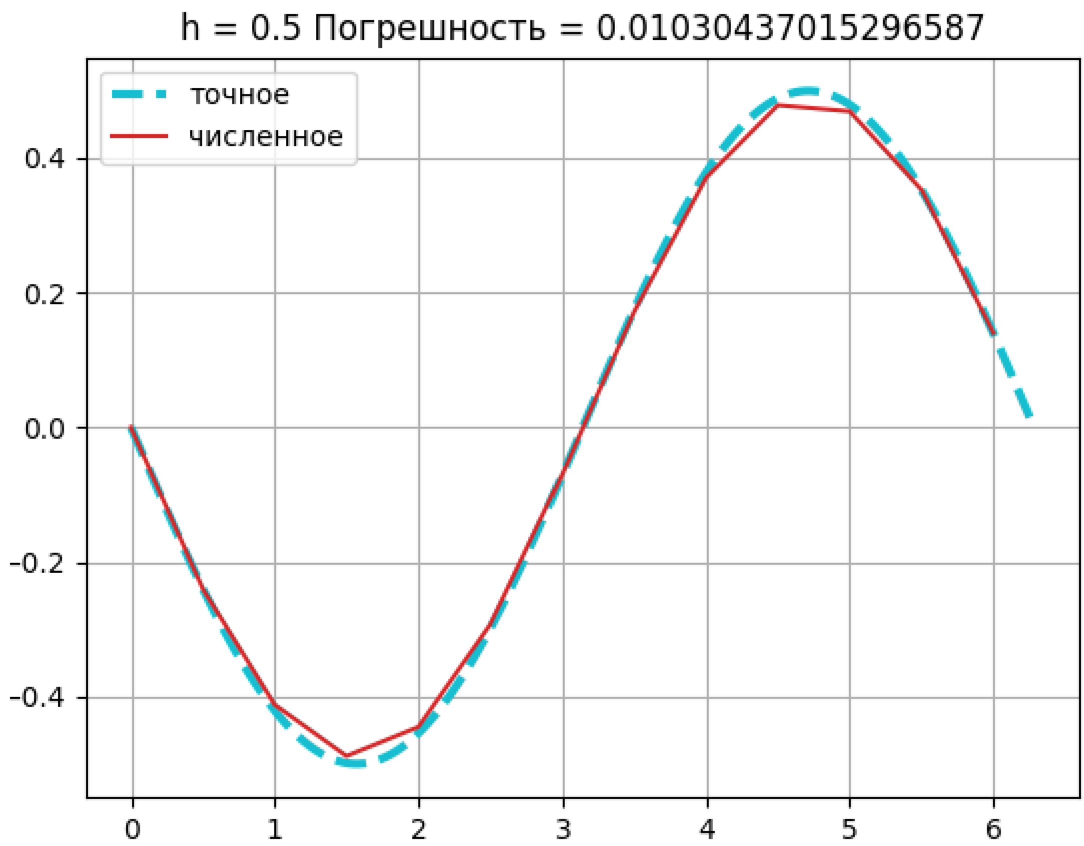
$g(x) = G(x) + Ax + B$

где G(x) – ограниченная дважды дифференцируемая функция

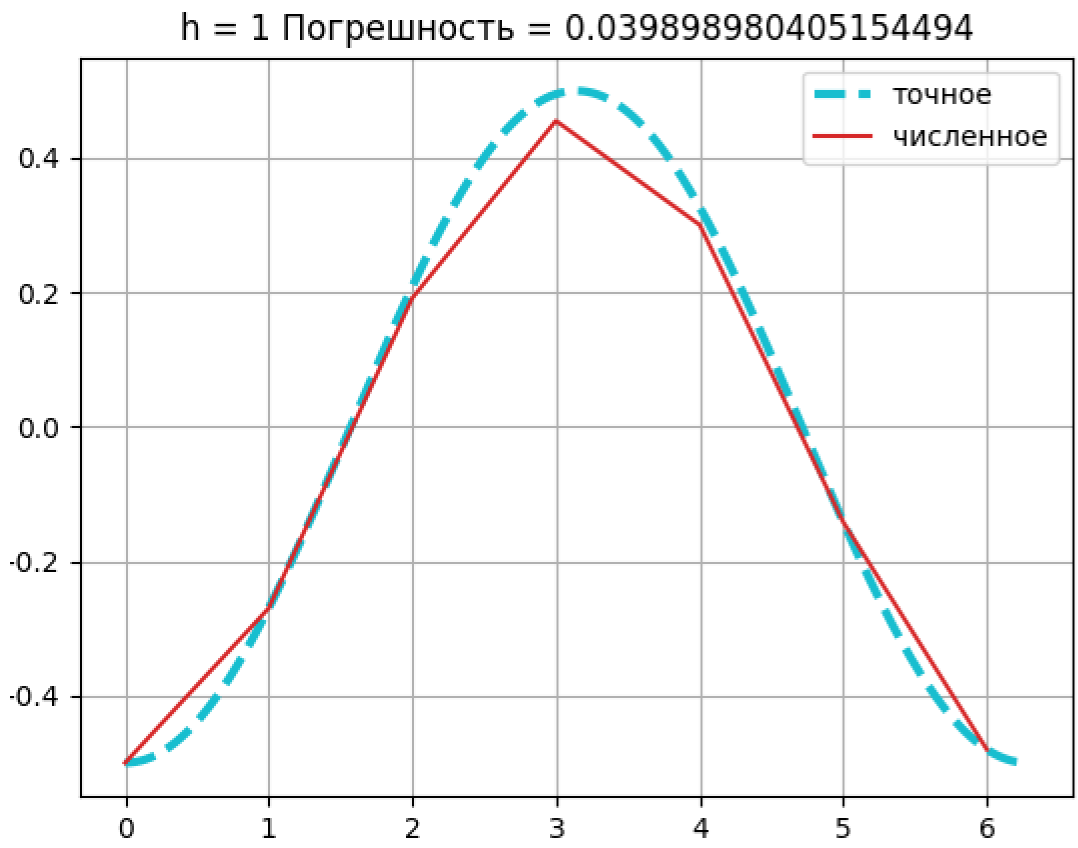
$A = -\frac{1}{2}\left(G'_x(a) + G'_x(b)\right)$ $B = \frac{1}{2}\left(aG'_x(a) + bG'_x(b) - G(a) - G(b)\right)$

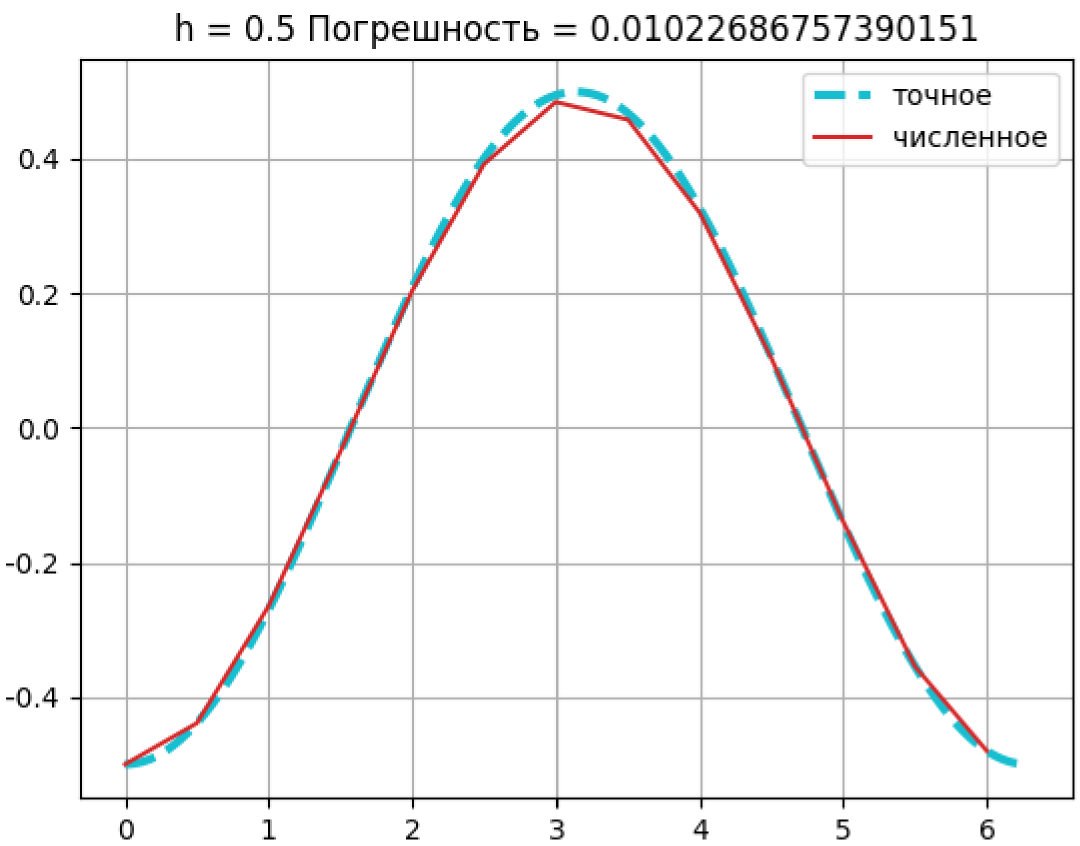
$$\boxed{G(x) = \sin(x), \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\sin(x)}$$





$$G(x) = \cos(x), \qquad f(x) = -\frac{1}{2}\cos(x)$$

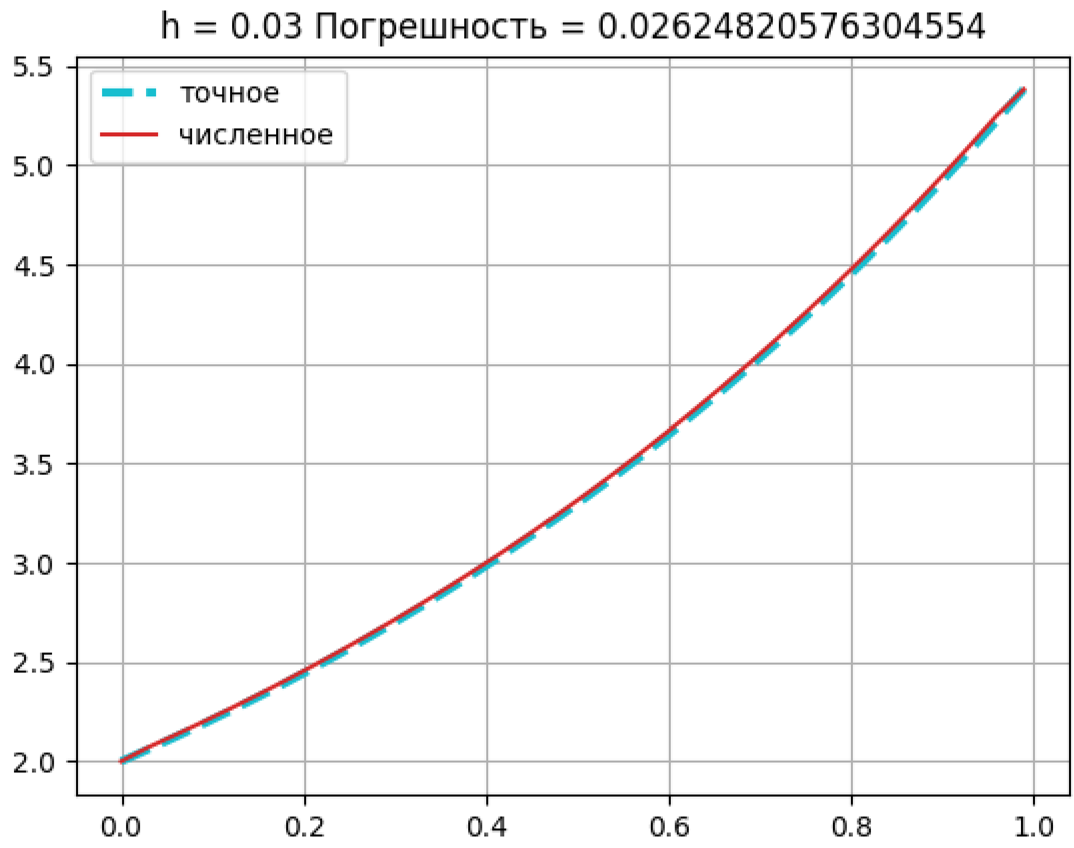


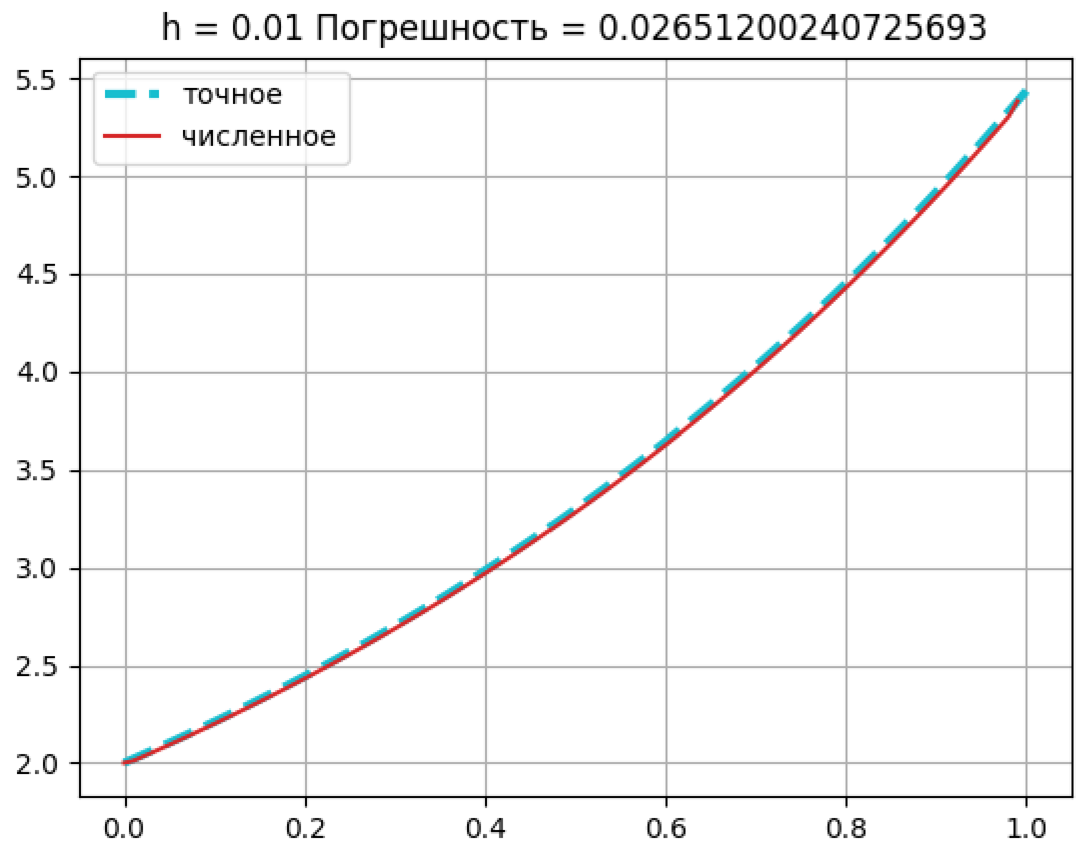


Уравнение Фредгольма 2-го рода

Дано уравнение с границами отрезка интегрирования $a = 0$ и $b = 1$, параметром $\lambda = \frac{1}{2}$, ядром $K(x,s) = e^{x-t}$ и правой частью $g(x) = e^{x}$.

Точное решение этого уравнения $y(x) = 2e^x$





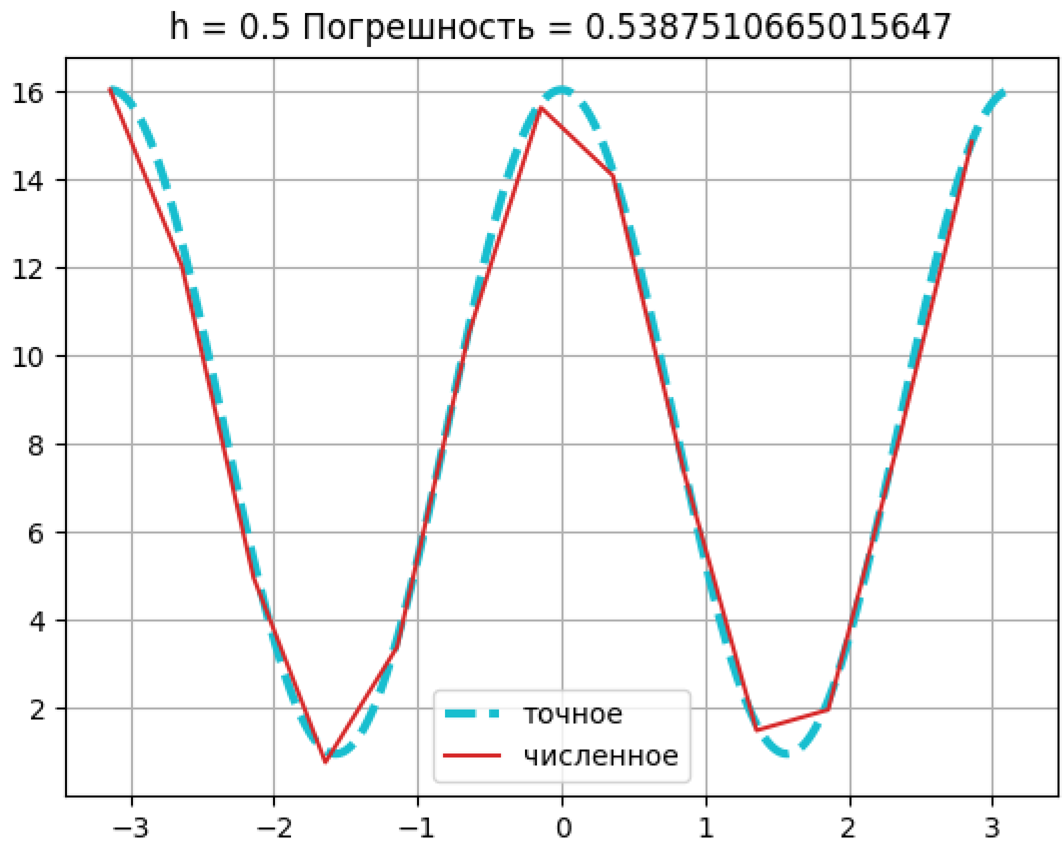
Дано уравнение с границами отрезка интегрирования $a = -\pi$ и $b = \pi$, параметром $\lambda = \frac{3}{10\pi}$, ядром

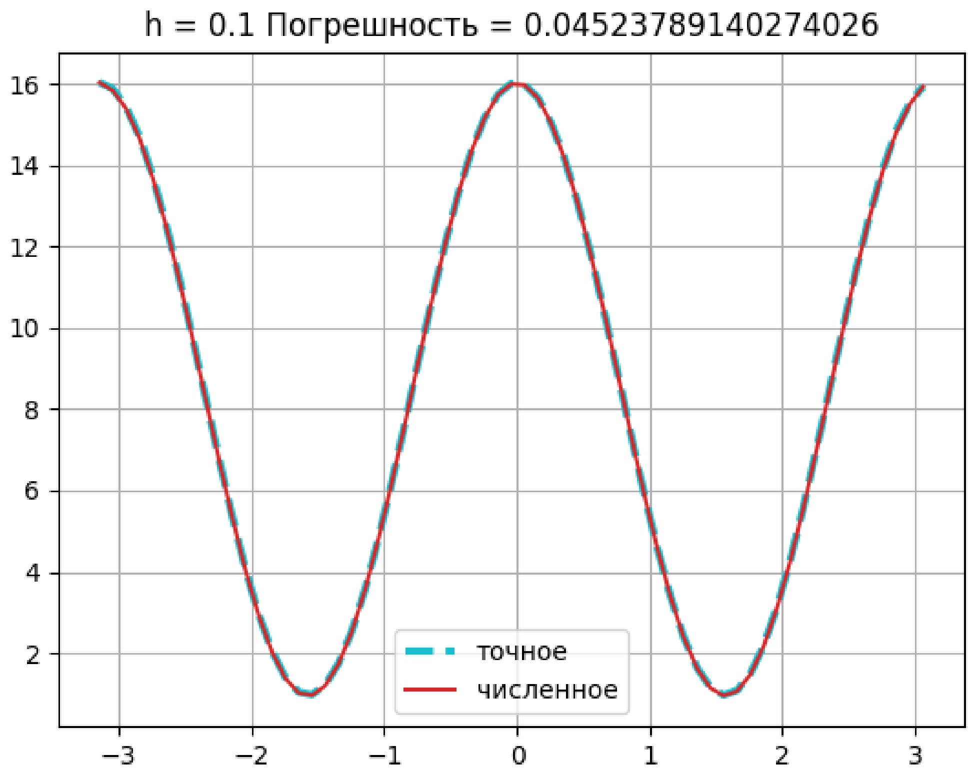
$$K(x,s) = \frac{1}{0.64\cos^2\left(\frac{x+s}{2}\right) - 1}$$

и правой частью $g(x) = 25 - 16\, sin^2\,(x)$.

Точное решение этого уравнения

$$y(x) = \frac{17}{2} + \frac{128}{17}\, cos(2x)$$





4. Выводы

Графики наглядно демонстрируют, какова будет точность расчета при различных значениях шага h. Чем меньше длина отрезка интегрирования $[a, b]$, тем короче стоит выбирать шаг. Для отрезка $[0,1]$ оптимальной длиной шага является 0.001, для отрезка $[-\pi, \pi]$ достаточно взять 0.1.

В процессе работы над курсовым проектом я ознакомился с уравнениями Фредгольма первого и второго рода и научился их решать, используя метод квадратур. Стоит отметить, что несмотря на простоту, данный метод обеспечивает достаточно высокую степень точности, что наглядно отражено на графиках.

Список литературы

1. **Сумин Е. В., Шерстюков В. Б., Шерстюкова О. В.** *Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, краевые задачи и методы их решения: Учебно-методическое пособие.* б.м. : НИЯУ МИФИ, 2016.

2. **Полянин А. Д., Манжиров А. В.** *Справочник по интегральным уравнениям.* б.м. : Физматлит, 2003.

3. **Попов В. А.** *Сборник задач по интегральным уравнениям.* Казань : б.н., 2006.

4. **Калашников А. Л.** *Методы приближённого решения интегральных уравнений второго рода.* Нижний Новгород : Нижегородский университет, 2017.

5. **Карачевский Е. М.** *Численные методы решения уравнений и комплекс программ на языке Matlab.* Казань : Казанский университет, 2019.