Задача 3.

Требуется найти аппроксимацию значения интеграла

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} cos^2 x dx$$

с помощью составной формулы Симпсона, используя сначала 3 и затем 9 узлов. Вычислите погрешность аппроксимации для каждого из случаев. Во сколько раз увеличилась точность вычисления при увеличении числа узлов в три раза? Объясните полученное значение.

Решение.

Точное значение интеграла найдем по формуле Ньютона-Лейбница:

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} (\cos(2x) + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \cos(2x)\, d(2x) + \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} 1dx = \left(\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right)\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

$$\approx 0.920735$$

Формула Симпсона основана на замене подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ дугой параболы, т.е. функция $f(x)$ аппроксимируется параболой вида: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Составная формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_1) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + f(x_{n+1})\right]$$

$$-\frac{(b-a)h^4}{180} f^4(\xi)$$

1) Для трех узлов:

$n_3 = 3 - 1 = 2$ – количество интервалов разбиения

$$h_3 = \frac{b-a}{n_3} = \frac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1}{2}$$

Следовательно:

$$I_3 = \frac{h_3}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + f(x_3)] - \frac{(b-a)h^4}{180}f^4(\xi) \Longrightarrow$$

$$I_3^* = \frac{1}{6}\left[cos^2\left(-\frac{1}{2}\right) + 4cos^2(0) + cos^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{6}\left[4cos^2(0) + 2cos^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(4 + 2 \cdot 0.77)$$

$$I_3^* = 0.923.$$

Теперь находим остаточный член:

$$f'(\xi) = (\cos^2 x)' = -2\cos(\xi)\sin(\xi) = -\sin(2\xi)$$

$$f''(\xi) = -2\cos(2\xi)$$

$$f'''(\xi) = 4\sin(2\xi)$$

$$f^{(4)}(\xi) = 8\cos(2\xi)$$

Найдем верхнюю границу модуля остаточного члена:

$$|R_3| = \left|-\frac{(b-a)h^4}{180}f^4(\xi)\right| = \left|-\frac{8\cos(2\xi)}{180 \cdot 2^4}\right| \leq \frac{1}{360} = 0{,}002778$$

2) Для девяти узлов: $n_9 = n - 1 = 8$

$$h_9 = \frac{b-a}{n_9} = \frac{1}{8}$$

$$I_9^* = \frac{h_9}{3}\left[f(x_1) + 2\big(f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\big)\right.$$

$$\left. + 4\big(f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + f(x_8)\big) + f(x_9)\right] =$$

$$= \frac{1}{24}\left[cos^2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(cos^2\left(\frac{1}{4}\right) + cos^2(0) + cos^2\left(\frac{1}{4}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + 4\left(cos^2\left(\frac{3}{8}\right) + cos^2\left(\frac{1}{8}\right) + cos^2\left(\frac{1}{8}\right) + cos^2\left(\frac{3}{8}\right)\right) + cos^2\left(\frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{24}[2 \cdot 0{,}77 + 2 \cdot (2 \cdot 0.938 + 1) + 8 \cdot (0.984 + 0.865)] \approx 0.921$$

Остаточный член для 9 узлов:

$$|R_9| = \left|-\frac{(b-a)h^4}{180}f^4(\xi)\right| = \left|\frac{\frac{1}{8^4} \cdot 8\cos(2\xi)}{180}\right| = \frac{2}{4096 \cdot 45} = 0{,}00001085$$

Тогда точность вычисления будет равна:

$$\frac{|R_3|}{|R_9|} = \frac{(h_3)^4}{(h_9)^4} = \frac{4096}{16} = 256$$

Следовательно, вычислительная точность увеличилась в 256 раз при увеличении числа узлов в три раза. Из этого можно сделать вывод, что на точность вычисления влияет значение разбиения, чем большее количество узлов мы берем (или чем сильнее уменьшаем равномерный шаг h), тем точнее промежуточные значения.