Задача 1.1

Требуется доказать, что определенный интеграл

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx \tag{1}$$

можно переписать в виде рекуррентного соотношения

$$I_n = 1 - n \cdot I_{n-1} \tag{2}$$

и вывести начальное условие I_0;

Доказательство №1:

Положим, что $U = x^n$, $dV = e^{x-1} d(x-1) = e^{x-1} dx$.

Тогда $dU = U' \cdot dx = n \cdot x^{n-1} \cdot dx$, а $V = e^{x-1}$.

Воспользуемся формулой интегрирования по частям для определенного интеграла:

$$\int_a^b UdV = U \cdot V|_a^b - \int_a^b VdU\ ,$$

и преобразуем наш интеграл в соответствии с ней.

Получим:

$$I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx = x^n \cdot e^{x-1}|_0^1 - \int_0^1 n \cdot x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx \tag{3}$$

Преобразуем интеграл содержащийся в правой части равенства (3) следующим образом, используя свойство линейности интеграла:

$$\int_0^1 n \cdot x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx = n \int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx = I_{n-1} \tag{5}$$

Подставим полученные выражения (4) и (5) в формулу (3):

$$I_n = x^n \cdot e^{x-1}|_0^1 - n \cdot I_{n-1} = (e^0 \cdot 1 - e^{-1} \cdot 0) - n \cdot I_{n-1} = 1 - n \cdot I_{n-1}$$

Полученная рекуррентная формула доказана.

Доказательство №2:

Введем функцию $F_n(y) = \int_0^y x^n e^{x-1} dx \equiv F_n(x) = \int_0^x y^n e^{y-1} dy$

По теореме Барроу (производная интеграла с переменным верхним пределом по этому верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на верхнем пределе интегрирования):

$$F_n(x)'_x = (\int_0^x f(y)dy)'_x = f(x)$$

Тогда:

$$\frac{dF_n(x)}{dx} = x^n e^{x-1}$$

- первая производная.

$$\frac{d^2F_n(x)}{dx^2} = (x^n e^{x-1})' = n \cdot x^{n-1} \cdot e^{x-1} + x^n e^{x-1}$$

- вторая производная.

Но так как зависимость от n в исходном интеграле (1) отражается только в степени у x-а, то имеет место равенство:

$$x^{n-1}e^{x-1} = \frac{dF_{n-1}(x)}{dx} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2F_n(x)}{dx^2} = n \cdot \frac{dF_{n-1}(x)}{dx} + \frac{dF_n(x)}{dx}$$

$$\int_0^1 \frac{d^2F_n(x)}{dx^2} dx = n \cdot \int_0^1 \frac{dF_{n-1}(x)}{dx} dx + \int_0^1 \frac{dF_n(x)}{dx} dx \Longrightarrow$$

$$\frac{dF_n(x)}{dx}|_0^1 = n \cdot dF_{n-1}(x)|_0^1 + dF_n(x)|_0^1$$

Исходя из определения $F_n(x)$: $F_n(0) = 0, F_n(1) = I_n$ (получится формула (1)) $\Rightarrow$

$$x^{n-1}e^{x-1}|_0^1 = n \cdot I_{n-1} + I_n \Rightarrow$$

$$(e^0 \cdot 1 - e^{-1} \cdot 0) = n \cdot I_{n-1} + I_n$$

Из чего следует:

$$I_n = 1 - n \cdot I_{n-1}$$

Вывод начального условия I_0:

Для того чтобы вывести I_0 подставим в $I_n = \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\, dx$ значение $n = 0$.

$$I_0 = \int_0^1 x^0 \cdot e^{x-1}\, dx = \int_0^1 e^{x-1}\, dx = \int_0^1 e^{x-1}\, d(x-1) \qquad (6)$$

Далее, воспользовавшись формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Находим (6):

$$I_0 = e^{x-1}|_0^1 = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$$

Задача 1.2

Требуется доказать, что решение для I_n имеет следующий вид:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n!\, I_0 \qquad (7)$$

Доказательство:

Воспользуемся рекуррентным соотношением (2) и будем понижать индекс до тех пор, пока не проследим закономерность.

Для этого исходя из выражения (2) выведем I_{n-1}, I_{n-2} и т.д. и будем рекурсивно их подставлять в (2).

Для I_{n-1} имеем $I_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx$, аналогичным способом, как для I_n распишем все шаги преобразования этого интеграла.

$$\int_0^1 x^{n-1} \cdot e^{x-1} dx = \begin{vmatrix} U = x^{n-1}, & dV = e^{x-1} d(x-1) \\ dU = (n-1)x^{n-2}, & V = e^{x-1} \end{vmatrix} =$$

$$x^{n-1} e^{x-1}|_0^1 - \int_0^1 x^{n-2} \cdot (\mathrm{n}-1) \cdot e^{x-1} dx = 1 - (n-1) \int_0^1 x^{n-2} \cdot e^{x-1} dx =$$

$$1 - (n-1) \cdot I_{n-2} \qquad (8)$$

Подставим (7) в (2):

$$I_n = 1 - n \cdot (1 - (n-1) \cdot I_{n-2}) = 1 - n + n \cdot (n-1)\, I_{n-2} \qquad (9)$$

Теперь аналогичным образом, найдем рекуррентное соотношение для I_{n-2}:

$$\int_0^1 x^{n-2}\cdot e^{x-1}dx = \begin{vmatrix} U = x^{n-2}, & dV = e^{x-1}d(x-1) \\ dU = (n-2)x^{n-3}, & V = e^{x-1} \end{vmatrix} =$$

$$x^{n-2}e^{x-1}|_0^1 - \int_0^1 x^{n-3}\cdot(\mathrm{n}-2)\cdot e^{x-1}dx = 1-(n-2)\int_0^1 x^{n-3}\cdot e^{x-1}dx =$$

$$1-(n-2)\cdot I_{n-3} \tag{10}$$

Подставим (10) в (9):

$$I_n = 1-n+n\cdot(n-1)\cdot(1-(n-2)\cdot I_{n-3}) =$$
$$1-n+n\cdot(n-1)-n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot I_{n-3}$$

Нетрудно уже проследить закономерность. Так как для решения интегралов с помощью рекуррентой формулы, мы должны дойти до самого последнего (в данном случае I_0) интеграла, то итерации будем нумеровать с конца:

Итерация $n-1$: $I_n = 1-n\cdot I_{n-1}$

Итерация $n-2$: $I_n = 1-n+n\cdot(n-1)\,I_{n-2}$

Итерация $n-3$: $I_n = 1-n+n\cdot(n-1)-n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot I_{n-3}$

Итерация $n-4$: $I_n =$

$$1-n+n\cdot(n-1)-n\cdot(n-1)\cdot(n-2)+n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot$$
$$(n-3)\cdot I_{n-4}$$

…

Итерация $n-n=0$: $I_n =$

$$1-\mathrm{n}+\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)-\cdots+(-1)^m\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big(n-(n-2)\big)+$$
$$(-1)^n\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big(n-(n-1)\big)\cdot I_0 =$$

$$1-\mathrm{n}+\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}-1)-\cdots+(-1)^m\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big(n-(n-2)\big)+(-1)^n n!\,I_0 \tag{11}$$

Было замечено, что знак перед I с пониженным индексом меняется в зависимости от итерации по закономерности $(-1)^n$.

Однако пока не очевидна закономерность со знаками для суммы следующих слагаемых на последней итерации:

$$-\mathrm{n} + \mathrm{n} \cdot (\mathrm{n}-1) - \cdots + (-1)^m \cdot n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot \big(n-(n-2)\big) \tag{12}$$

Можно заметить, что количество слагаемых в сумме (12) равно $n-1$, тогда суммирование будет проходить от 1 до $n-1$ элемента.

Видно, что $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k)$ это отношение факториалов $\frac{n!}{(n-k)!}$, распишем сумму (12) с учетом этого:

$$-\frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} - \frac{n!}{(n-3)!} + \cdots + (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!}$$

Получаем с учетом выше сказанного:

$$\sum_{1}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \tag{13}$$

Таким образом, соединив (11) и (13), получаем следующее решение:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n!\, I_0$$

Задача 1.3

Требуется, используя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2 \cdot \pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}$, доказать, что рекуррентное соотношение (2) является вычислительно неустойчивым.

Доказательство:

В вычислительной математике большое значение имеет чувствительность решения задачи тем или иным алгоритмом к малым изменениям входных данных.

Перепишем формулу (7) с учетом аппроксимации Стирлинга:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-k)}} \cdot \left(\frac{n}{n-k}\right)^n + (-1)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot I_0 \tag{14}$$

I_0 будет иметь вычислительную погрешность начальных условий, тогда перепишем (14), прибавив к I_0 дельта значение Δ:

$$I_n{}' = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{(n-k)}} \cdot \left(\frac{n}{n-k}\right)^n + (-1)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (I_0 + \Delta) (15)$$

Найдем вычислительную погрешность σ. Она будет представлять из себя разность выражений (14) и (15):

$$\sigma = |I_n' - I_n| = (-1)^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \Delta$$

Задача или алгоритм решения задачи называются вычислительно неустойчивыми, если малые изменения входных данных приводят к заметным изменениям решения.

В данном случае $O(\left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{2}})$ при $n \to \infty$.

Что дает нам право говорить о том, что задача вычислительно неустойчивая.