ЗНАХО ЖЕННЯ НАЙКОРОТШОГО ШЛЯХУ В МЕРЕЖІ ПО АЛГОР ТМУ ЕЙК ТРІ

Мета роботи:

- 1. Вивчити архітектурні принципи побудови мереж зв'язку.
- 2. Придбати ряд вмінь з аналізу та синтезу мереж зв'язку.
- 3. Уміти знаходити найкоротший шлях у зв'язній мережі.

Контрольні питання:

- 1. Що називається шляхом, довжиною шляху, найкоротшим шляхом?
- 2. Яка мережа називається зв'язною?
- 3. Сформулювати задачу знаходження найкоротшого шляху у зв'язній мережі?
- 4. Яка особливість алгоритму Дейкстрі?
- 5. За допомогою розстановки у вершинах графа яких приміток реалізується робота алгоритму Дейкстрі?
- 6. Які властивості тимчасових і постійних приміток?
- 7. Записати формулу для позначки вершини r від вершини j (початкова вершина s).
- 8. Сформулювати алгоритм Дейкстрі у покроковому вигляді.
- 9. Яка вершина в подальших кроках участі не бере?
- 10. Яка вершина з тимчасовою позначкою викреслюється?
- 11. Коли закінчується робота алгоритму?

Методичні вказівки:

Задача про знаходження найкоротшого за довжиною шляху у зв'язній мережі відноситься до фундаментальних задач комбінаторної оптимізації. До неї можна звести коло практичних задач, які виникають в різних областях народного господарства, а в першу чергу в зв'язку.

В из на чення. **Шляхом** називається послідовність вершин $\mu_{ir}=(i,j,...,r)$ або послідовність дуг (ребер) $\mu_{ir}=\{(i,j),...,(k,r)\}$, які з'єднують пару вершин і та r графа G.

Сума вагів, які приписані дугам (ребрам), на шляху μ_{ir} визначає д**овжину** шляху.

Шлях з вершини i до вершини r, який має мінімально можливу довжину, називається **найкоротшим шляхом.**

Мережа називається **зв'язною**, якщо в ній для кожної пари вершин ϵ хоча б один шлях, який їх з'єдну ϵ .

Беручи за основу мережеву модель, задачу про знаходження найкоротшого шляху можна сформулювати наступним чином.

Нехай задана зв'язна мережа G, в якій кожній дузі (ребру) надається позитивна вага, яка пропорційна її (його) довжині. Необхідно знайти шлях μ_{st} між заданими вершинами s і t, який має мінімально можливу довжину, тобто:

$$L = \sum_{(i,j)\in\mu_{st}} l_{ij} \to \min (\mathcal{H}a M),$$

де М-множина всіх можливих шляхів з s до t.

Одним із найбільш ефективних алгоритмів, які вирішують поставлену задачу, ϵ алгоритм Дейкстрі, який носить ім'я автора.

Особливістю цього алгоритму ϵ той факт, що в процесі його виконання одночасно будуються найкоротші шляхи із заданої вершини s до всіх інших вершин мережі. Це пояснюється тим, що будь-яка вершина $i \in N$ може стати проміжною у найкоротшому шляху з s до t. По закінченні роботи алгоритму, вершина s ϵ зв'язаною з усіма іншими вершинами зв'язної мережі G, в тому числі і з вершиною t найкоротшими шляхами, а дуги (ребра), які до них входять, утворюють деяку підмережу без циклів, тобто дерево з корнем у вершині s.

Робота алгоритму реалізується за допомогою розстановки у вершинах приміток виду (L_{sj},i) , де L_{sj} – довжина найкоротшого шляху з вихідної вершини s до деякої вершини s деякої вершини s до деякої вершини s до деякої вершини s деякої

Примітки розділяються на *тимчасові* та *постійні*. Тимчасові примітки можуть змінюватися в результаті роботи алгоритму, а постійні – не змінюються.

Нижче приведений алгоритм Дейкстрі у покроковому вигляді.

Крок 0. Від вершин j з постійними позначками $P=(L_{sj},i)$ (i,j-попередні вершини на шляху) перераховуємо тимчасові позначки для вершин r з цими позначками $P=(L_{sr},j)$, суміжних до вершин з постійними позначками: $L_{sr}=L_{sj}+L_{jr}$. $P_s=(L_{ss},s)=(0,s)$.

Крок 1. Серед вершин з тимчасовими позначками вибираємо вершину з найкоротшим шляхом ($min\ L_{sr}$). Вона стає вершиною з постійною позначкою.

Якщо повторюється та ж сама вершина, але з більшою тимчасовою позначкою, то вершина з більшою тимчасовою позначкою викреслюється (не враховується). Кінцева вершина в подальших кроках не бере участі.

Якщо всі вершини мережі дістали постійні позначки – кінець роботи алгоритму.

Приклад 1. Нехай задано 7 пунктів мережі, відстані між якими зведено в матрицю $L=/|l_{ij}|/$, а саме (див. рис.1):

Рисунок 1

Телекомунікаційна мережа містить 7 пунктів й 11 ліній, що забезпечують зв'язок поміж пунктами в обох напрямках.

Відсутні значення елементів матриці ваг слід розглядати як нескінченно великі відстані, тобто неможливість фізичного прокладання кабеля поміж деякими парами пунктів.

Початковий граф, побудований на основі матриці відстаней (або ваг) поміж пунктами мережі, має вигляд (рис.2):

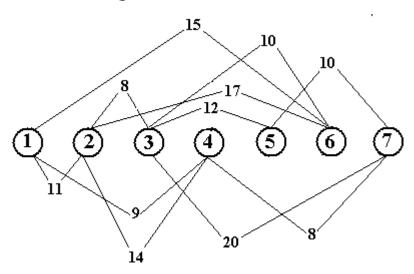


Рисунок 2

Знайдемо найкоротший шлях з вершини 6 (s) до вершини 7 (t) в мережі, зображеній у вигляді графу на рис.2.

Крок 0. Позначка P для вершини s має вигляд: P_s =(0,s). Для інших вершин P_i =(∞ ,s). Всі позначки mимчасовi.

Перераховуємо *тимчасові* позначки для вершин, суміжних вершині s: P_1 =(15,s); P_2 =(17,s); P_3 =(10,s).

Крок 1. Вибираємо вершину 3, оскільки вона має найменший параметр довжини: $P_3=(10,s)$. Її позначка стає *постійною*. Так як ще не всі вершини отримали *постійні* позначки, переходимо до *кроку* 0 та здійснюємо перерахунок позначок для вершин, суміжних вершинам s і 3: $P_1=(15,s)$; $P_2=(17,s)$; $P_5=(22,3)$; $P_t=(30,3)$; $P_2=(18,3)$.

Вершина 2 повторюється. Викреслюємо вершину 2 з більшою *тимчасовою* позначкою P_2 =(18,3). Кінцева вершина P_t =(30,3) в подальших кроках не бере участі.

Далі переходимо до *кроку 1*. Вибираємо вершину 1: P_I =(15,s). Її позначка стає *постійною*.

На *кроці* 0 перераховуємо позначки для вершин, суміжних вершинам s, 3 і 1: P_2 =(17,s); P_5 =(22,3); P_4 =(24,1); P_2 =(26,1). Викреслюємо вершину 2 з більшою *тимчасовою* позначкою P_2 =(26,1).

На *кроці* 1 вибираємо вершину з найменшим параметром довжини: P_2 =(17,s) і т.д.

Подальший процес знаходження найкоротшого шляху у зв'язній мережі зобразимо у вигляді табл.1.

Таблиця 1

$$P_s = (0,s)$$

Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1
P ₁ =(15,s)	P ₃ =(10,s)	P ₁ =(15,s)	P ₁ =(15,s)	P ₂ =(17,s)	P ₂ =(17,s)
$P_2 = (17,s)$		P ₂ =(17,s)		P ₅ =(22,3)	
P ₃ =(10,s)		P ₅ =(22,3)		P ₄ =(24,1)	
		P _t =(30,3)		$P_2 = (26,1)$	
		P ₂ =(18,3)			

Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1
P ₅ =(22,3)	P ₅ =(22,3)	P ₄ =(24,1)	P ₄ =(24,1)	$P_t = (32,4)$	P _t =(32,4)
P ₄ =(24,1)		$P_t = (32,5)$			
P ₄ =(31,2)					

Тимчасова позначка P_t =(32,4) для вершини t є останньою і вона автоматично стає *постійною*.

Трасировку шляху μ_{st} визначаємо, прямуючи у зворотньому напрямку від t до s через вершини, які вказані у позначках:

a)
$$t \rightarrow 20 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow S$$
;
6) $t \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 1 \rightarrow 15 \rightarrow S$;
B) $t \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 12 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow S$.

Найкоротший шлях: a) $t \rightarrow 20 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow S$.

Приклад 2. Нехай задано 7 пунктів мережі, відстані між якими зведено в матрицю $L=/|l_{ij}|/$, а саме (див. рис.3):

Рисунок 3

Телекомунікаційна мережа містить 7 пунктів й 11 ліній, що забезпечують зв'язок поміж пунктами в обох напрямках.

Початковий граф, побудований на основі матриці відстаней (або ваг) поміж пунктами мережі, має вигляд (рис.4):

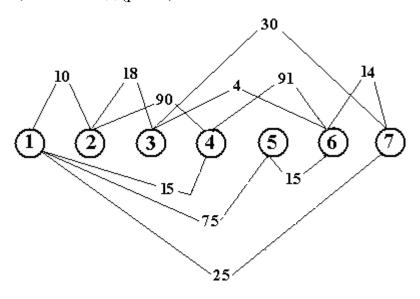


Рисунок 4

Знайдемо найкоротший шлях з вершини 4 (s) до вершини 5 (t) для графу, зображеному на рис.4. Результати заносимо до табл.2.

Крок 0 — присвоєння вершинам тимчасових позначок і викреслення вершин, які повторюються, з більшими тимчасовими позначками.

Крок 1 – вибір вершини з найкоротшим шляхом.

Кінцева вершина в подальших кроках не бере участі.

Таблиця 2

$$P_s = (0,s)$$

Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1
P ₁ =(15,s)	P ₁ =(15,s)	P ₂ =(90,s)	P ₂ =(25,1)	P ₃ =(43,2)	P ₇ =(40,1)
P ₂ =(90,s)		P ₂ =(25,1)		$P_7 = (40,1)$	
P ₆ =(91,s)		$P_t = (90,1)$		P ₆ =(91,s)	
		P ₇ =(40,1)			
		P ₆ =(91,s)			

Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1	Крок 0	Крок 1
P ₃ =(70,7)	P ₃ =(43,2)	P ₆ =(54,7)	$P_6 = (47,3)$	$P_t = (62,6)$	$P_t = (62,6)$
$P_6 = (54,7)$		$P_6 = (47,3)$			
$P_3 = (43,2)$					
P ₆ =(91,s)					

Тимчасова позначка P_t =(62,6) для вершини t ϵ останньою i вона автоматично стає *постійною*.

Трасировку шляху μ_{st} визначаємо, прямуючи у зворотньому напрямку від t до s через вершини, які вказані у позначках:

a)
$$t \rightarrow 75 \rightarrow 1 \rightarrow 15 \rightarrow S$$
;

6)
$$t \to 15 \to 6 \to 4 \to 3 \to 18 \to 2 \to 10 \to 1 \to 15 \to s$$
.

Висновок: Найкоротший шлях: б) $P_t^{15} \rightarrow P_6^4 \rightarrow P_3^{18} \rightarrow P_2^{10} \rightarrow P_1^{15} \rightarrow P_8$.

$$t \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow s$$
.

Завдання:

У відповідності з варіантом завдання (табл.3) знайти найкоротший шлях у зв'язній мережі. Результати виконання завдання перевірити у програмному середовищі DEICSTRI:

- 1) На робочому столі подвійним натисканням лівої кнопки мишки запустити програму під назвою DEICSTRI.
- 2) На екрані з'являється вікно під назвою "Пошук найкоротшого шляху (за алгоритмом Дейкстрі)". Після чого лівою кнопкою мишки виконати розстановку вузлів комутації (якщо якийсь пункт виставлений не вірно, або ϵ зайвим правою кнопкою мишки його можна вилучити), кількість та геометричний порядок вузлів комутації визначається варіантом.
- 3) У лівому куті знаходиться надпис "Вихідна матриця", при активації цього надпису з'являється матриця, в яку потрібно занести початкові дані згідно зі своїм варіантом. До звіту по лабораторній роботі занести матрицю з початковими даними та замалювати розташування вузлів комутації та відстаней між ними.
- 4) У правому куті знаходиться надпис "Впорядкувати ребра", після активації цього надпису отримаємо початковий граф, побудований на основі матриці відстаней (або ваг) поміж пунктами мережі. Початковий граф треба занести до звіту по лабораторній роботі.
- 5) За допомогою мишки натиснути клавішу "Почати", після чого з'являється вікно, де потрібно ввести початковий вузел маршруту та кінцевий. Згідно варіанту це потрібно зробити активізувавши надписи у правому верхньому куті "Початкова вершина та Кінцева вершина". У звіт іншим кольром занести початковий вузел (на рисунку відмічений червоним кольором) та кінцевий вузел (на рисунку відмічений білим кольором).
- 6) За допомогою мишки натиснути клавішу "Наступний крок" і прослідкувати роботу алгоритму, кожен крок описується під рисунком. До звіту по лабораторній роботі занести кожний крок роботи алгоритму (тобто у різних кольорах замалювати динаміку пошуку найкоротшого шляху) та накреслити таблицю з постійними та тимчасовими позначками вершин:
 - 6.1) Присвоєння вершинам тимчасових приміток (жовтий колір);
- 6.2) Влучення приміток, які повторюються, та вибір вершини з найкоротшим шляхом (зелений колір);
 - 6.3) Побудова найкоротшого шляху (білий колір).
- 7) Останній крок роботи даного алгоритму це побудова зворотньго шляху. Занести зворотній шлях до звіту по лабораторній роботі.

Таблиця 3 – Вихідні дані

	Варіант 1																		
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	10	15	75	25	18	18	90	4	30	91	15	32	14	93	25	7	11	2	65
	Варіант 2																		
П.В.																9			
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага															10				
Варіант 3														1					
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	70	11	90	25	80	15	3	52	30	15	93	60	20	18	45	75	13	14	8
								E	Bapia	нт 4					I				
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	10	18	22	15	34	17	10	25	14	20	31	40	21	19	23	70	10	17	50
								E	Bapia	нт 5									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	50	9	31	15	73	21	8	19	45	27	9	3	90	41	18	80	77	11	13
								E	Bapia	нт 6									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	3	70	90	21	35	10	15	50	16	60	18	37	30	21	15	80	14	12	10
	<u> </u>		<u> </u>	Е	Bapia	нт 7	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u>I</u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u>I</u>				
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9

K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	15	30	5	9	95	42	27	14	5	98	19	17	11	9	25	50	2	71	80
								Е	Bapia	нт 8									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	15	83	31	41	50	19	17	16	25	21	33	13	25	9	19	13	53	8	12
								Е	Bapia	нт 9									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	7	10	11	25	15	30	4	3	40	12	14	32	15	18	20	6	13	10	5
								В	apiar	т 10									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	20	10	15	9	17	7	19	19	9	40	30	15	16	10	50	17	32	12	16
								В	аріан	іт 11									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	30	73	12	11	9	4	17	12	4	10	7	32	12	8	7	31	70	35	14
								В	apiar	іт 12									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	19	20	15	18	22	20	13	17	54	31	24	18	73	51	16	42	17	19	53
									аріан	іт 13									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	13	31	17	70	18	60	32	15	9	52	73	7	18	20	43	19	27	18	93
								В	аріан	іт 14									

П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	81	33	16	34	20	18	10	31	7	18	13	27	31	18	30	54	20	81	17
	<u> </u>							В	аріан	іт 15		<u> </u>							
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	10	12	71	30	21	7	9	14	3	20	31	18	20	9	51	21	18	34	19
	I							В	аріан	іт 16		I							
П.В.															9				
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	30	12	10	30	10	11	19	24	14	10	30	27	19	9	7	14	10	7	90
	I							В	аріан	іт 17		I							
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	18	20	70	93	17	19	63	18	10	45	67	13	9	19	21	31	21	18	16
								В	apiar	іт 18									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	3	14	5	70	31	9	7	13	10	11	16	54	70	10	22	17	13	18	10
								В	аріан	іт 19									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	13	20	16	31	22	10	19	34	19	35	27	19	16	37	10	42	31	70	15
								В	аріан	т 20									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	13	43	19	61	15	45	18	20	13	15	20	37	18	12	71	13	14	16	31

								В	аріан	т 21									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	20	3	15	14	50	19	80	25	18	30	21	45	15	9	13	70	27	20	28
	I							В	apiar	т 22									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	21	63	18	19	17	19	7	21	29	53	15	30	10	16	17	50	12	32	15
Варіант 23																			
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	50	12	30	55	75	10	15	90	99	10	70	80	19	73	40	10	33	7	3
	•							В	аріан	т 24									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	90	21	35	5	25	13	18	71	10	15	37	90	30	16	19	14	7	20	99
								В	аріан	т 25									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	50	35	13	41	99	80	95	18	15	7	9	70	17	12	11	10	52	1	83
									аріан	т 26									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	90	32	18	27	13	31	27	60	34	14	18	12	31	10	3	7	12	42	5
									аріан	т 27									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
К.В.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10

Вага	90	19	10	50	9	13	12	19	13	10	42	18	10	17	5	15	13	17	19
								В	apiar	т 28									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	19	37	18	27	34	63	19	17	35	15	19	72	12	13	43	51	18	12	11
	l						l	В	аріан	т 29				l	l				
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	10	8	12	30	15	7	9	14	4	20	17	11	11	9	14	7	9	11	10
								В	apiar	т 30									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	3	70	90	21	25	11	13	40	16	50	18	37	35	30	80	15	9	12	10
								В	apiar	т 31									
П.В.	1	1	1	1	1	2	2	3	3	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9
K.B.	2	4	5	7	8	3	4	6	7	6	6	8	7	8	9	10	9	10	10
Вага	30	10	5	11	19	12	13	20	40	28	15	35	18	26	32	25	1	61	55

Зміст звіту

- 1. Привести матрицю з початковими даними та замалювати розташування вузлів комутації і відстаней між ними.
- Зобразити початковий граф мережі.
 Привести кожний крок роботи алгоритму Дейкстрі та накреслити таблицю з постійними та тимчасовими позначками вершин.
- 4. Показати найкоротший шлях у зв'язній мережі.
- 5. Проаналізувати отримані результати.