

Klassenarbeit 2		Thema		LF5: Schleifen	
Datum	16.03.2023	Punkte	50 / _____	Note	
Klasse	E1FI	Name	<i>Musterlösung</i>		USB Stick
Zeit	120 Minuten				
Hilfsmittel	Computer mit Entwicklungsumgebung für Java, Taschenrechner				Seite(n): 3
Datum		Unterschrift Lehrer			

Wir untersuchen das harmonische Mittel von Zahlen. Hierfür werden wir zuerst einmal uns die Formel anschauen, uns den Wert für gegebene Werte ausrechnen und dann den Vorgang verallgemeinern. Wenn das alles erledigt ist, werden wir eine 1. einfache Version programmieren.

1. Definition für $n=2$ Zahlen

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{n}{\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)} \quad \frac{1}{x_1} \text{ wird als Kehrwert von } x_1 \text{ bezeichnet}$$

Wir sehen unter dem Bruchstrich, dass wir die *Kehrwerte der Zahlen* miteinander addieren. Die Zahl n ist die Anzahl von Werten (hier x_1 und x_2), für die wir das harmonische Mittel suchen, hier also 2

2. Ein Beispiel mit den Zahlen $x_1=5$ und $x_2=20$

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{2}{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right)} = \frac{2}{(0,2 + 0,05)} = \frac{2}{(0,25)} = 8$$

Wir berechnen also zuerst den *Kehrwert* von 5 und dann den *Kehrwert* von 20. Die beiden Ergebnisse addieren wir zu einem Gesamtergebnis. Nun teilen wir 2 durch das Gesamtergebnis.

3. Berechne das harmonische Mittel für folgende Werte: (3 Punkte)

$x_1=2$ $x_2=8$ 3,2

$x_1=10$ $x_2=30$ 15

$x_1=40$ $x_2=160$ 64

4. Schreibe ein Java-Programm (harmomisch01.java) das für die Werte $x_1=12$ und $x_2=80$ das harmonische Mittel berechnet (4 Punkte)

Deine Lösung sollte wie folgt aussehen:

```

Harmonisches Mittel 1. Version
x1          = 12.0
x2          = 80.0
n           = 2.0
xharmonisch = 20.869565217391305
    
```

Nachdem die Grundlagen gelegt sind, wollen wir das harmonische Mittel für eine beliebige Anzahl von Werten berechnen. Hierfür schauen wir uns zunächst die allgemeine mathematische Definition an, rechnen wieder ein Beispiel mit Zahlen und entwerfen dann eine 2. und verbesserte Version unseres Programms.

5. Die allgemeine Definition (für eine beliebige Anzahl n von Werten)

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Das Σ Zeichen bedeutet das wir eine Summe kurz schreiben können. Wir sagen einfach wir haben eine Variable i , die fängt bei 1 an und läuft bis zur Zahl n . Für jedes i erstellen wir den jeweiligen Kehrwert und addieren die Werte zu einem Ergebnis. Auch hier ist n die Anzahl von Werten die wir betrachten, das kann deutlich größer wie 2 sein! Am Ende nehmen wir n und teilen durch das aufsummierte Ergebnis der Kehrwerte.

6. Ein Beispiel mit $x_1=30$, $x_2=60$ und $x_3=90$ ($n=3$)

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} = \frac{3}{\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90}} = \frac{3}{0,033 + 0,0166 + 0,0111} = \frac{3}{0,0611} = 49,09$$

7. Berechne das harmonische Mittel für folgende Werte: (6 Punkte)

$$x_1=3 \quad x_2=6 \quad x_3=9 \quad \underline{4,909}$$

$$x_1=1 \quad x_2=3 \quad x_3=7 \quad \underline{2,032}$$

$$x_1=11 \quad x_2=37 \quad x_3=77 \quad \underline{22,914}$$

8. Schreibe ein Java-Programm (harmonisch02.java) das für die Werte in einem Array vom Typ double das harmonische Mittel errechnet. (7 Punkte)

Folgender Quellcode ist gegeben:

```
double[] werte = {5, 15, 55, 575, 1275, 7895};
int n = werte.length;
```

Deine Lösung muss mit einer Schleife realisiert werden und sollte wie folgt aussehen:

```
Harmonisches Mittel 2. Version
x1      = 5.0
x2      = 15.0
x3      = 55.0
x4      = 575.0
x5      = 1275.0
x6      = 7895.0
xharmonisch = 20.86966746400119
```

Hinweis:

Auf die Inhalte von Array's wird mit dem Namen des Array's und einem Index, der in eckigen Klammern angegeben wird, zugegriffen.

```
System.out.println(werte[0]);
```

Die Zeile wird den Wert an der 1. Position (die Nummerierung in Array's beginnt bei 0) des Array's werte auf der Konsole ausgeben.

Wofür wird das harmonische Mittel angewendet? Anwendung findet das harmonische Mittel bei der Betrachtung von Verhältnissen. Verhältnisse sind Brüche, die einen Zähler und einen Nenner haben. Ein Beispiel hier für ist die Geschwindigkeit, die im Kilometer pro Stunden (km/h) angegeben wird. Aber wie groß ist nun die Durchschnittliche Geschwindigkeit, wenn ich bei einer Strecke von 300 km die ersten 50 km mit 90 km/h, die zweite 100 km lange Strecke mit 110 km/h und die letzten 150 km mit 120 km/h unterwegs war? Hier hilft das harmonische Mittel in einer leicht abgeänderten Form. Wir sprechen hier auch von einem gewichteten Mittel, deswegen führen wir hierfür das kleine g in die Formel als Abkürzung ein. Für solche Berechnungen entwerfen wir eine finale 3. Version unseres Programms.

9. Die geänderte Form mit der Abkürzung g für die Gewichtung

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{x_i}} = \frac{g_1 + \dots + g_n}{\frac{g_1}{x_1} + \dots + \frac{g_n}{x_n}} \quad \text{beachte, dass die } g_i \text{ oben und unter dem Bruchstrich vorkommen!}$$

10. Ein Beispiel mit $g_1=50\text{ km}$, $g_2=100\text{ km}$, $g_3=150\text{ km}$, $x_1=90\text{ km/h}$, $x_2=110\text{ km/h}$ und $x_3=120\text{ km/h}$ ($n=3$)

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{x_i}} = \frac{50\text{ km} + 100\text{ km} + 150\text{ km}}{\frac{50\text{ km}}{90\text{ km/h}} + \frac{100\text{ km}}{110\text{ km/h}} + \frac{150\text{ km}}{120\text{ km/h}}} = \frac{300\text{ km}}{0,555\text{ h} + 0,909\text{ h} + 1,25\text{ h}}$$

$$x_{\text{harmonisch}} = \frac{300\text{ km}}{2,714\text{ h}} = 110,53\text{ km/h} \quad \text{h ist die Abkürzung von hour und bedeutet Stunde}$$

11. Berechne das harmonische Mittel mit folgenden Werten: (9 Punkte)

$$\begin{array}{lll} g_1=50\text{ km} & g_2=60\text{ km} & g_3=90\text{ km} \\ x_1=150\text{ km/h} & x_2=120\text{ km/h} & x_3=90\text{ km/h} \end{array}$$

109,090

12. Schreibe ein Java-Programm (harmonisch03.java) das für die Strecken und die Geschwindigkeiten gespeichert in Array's vom Typ double das harmonische Mittel errechnet. (21 Punkte)

Folgender Quellcode ist gegeben:

```
double[] strecken = {70, 80, 110};
double[] geschwindigkeiten = {150, 130, 120};
int n = strecken.length;
```

Deine Lösung muss mit Schleifen realisiert werden und sollte wie folgt aussehen:

```
Harmonisches Mittel 3. Version
Strecken aufaddieren
g1      = 70.0
g2      = 80.0
g3      = 110.0
Σ gi    = 260.0
Gewichtete Geschwindigkeiten aufaddieren
x1      = 150.0
x2      = 130.0
x3      = 120.0
Σ gi/xi = 1.9987179487179487
xharmonisch = 130.08338678640155 km/h
```

Viel Spaß beim Lösen und gutes Gelingen!