



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Новосибирский государственный технический университет»



**НГТУ  
НЭТИ** | **Факультет прикладной  
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики и информатики

Практическая работа 3, 4  
по дисциплине «Уравнения математической физики»

**Решение гармонических задач. Решение несимметричных СЛАУ**

Группа ПМ-92      ИВАНОВ ВЛАДИСЛАВ

Вариант 5, 4      КУТУЗОВ ИВАН

Преподаватели    ПАТРУШЕВ И. И.

ЗАДОРОВЫЙ А. Г.

Новосибирск, 2022

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Задание</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Постановка гармонической задачи</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Конечноэлементная аппроксимация гармонической задачи</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Исследования</b>	<b>5</b>
5.1	Вывод . . . . .	7

## 1 Цель работы

Разработать программу решения гармонической задачи методом конечных элементов. Провести сравнение прямого и итерационного методов решения получаемой в результате конечноэлементной аппроксимации СЛАУ.

Изучить особенности реализации итерационных методов BCG, BCGStab, GMRES для СЛАУ с несимметричными разреженными матрицами. Исследовать влияние предобуславливания на сходимость этих методов.

## 2 Задание

- Выполнить конечноэлементную аппроксимацию исходного уравнения в соответствии с заданием. Получить формулы для вычисления компонент матрицы  $A$  и вектора правой части  $b$
- Реализовать программу решения гармонической задачи с учетом следующих требований:
  - язык программирования C++ или Фортран;
  - предусмотреть возможность задания неравномерной сетки по пространству, разрывность параметров уравнения по подобластям, учет краевых условий;
  - матрицу хранить в разреженном строчном формате с возможностью перегенерации ее в профильный формат;
  - реализовать (или воспользоваться реализованными в курсе «Численные методы») методы решения СЛАУ: итерационный – локально-оптимальную схему или метод сопряженных градиентов для несимметричных матриц с предобуславливанием и прямой – LU -разложение или его модификации.
  - Протестировать разработанную программу на полиномах первой степени.
  - Провести исследования реализованных методов для сеток с небольшим количеством узлов 500 – 1000 и большим количеством узлов – порядка 20000 - 50000 для различных значений параметров  $10^{-4} \leq \omega \leq 10^9$ ,  $10^2 \leq \lambda \leq 8 \cdot 10^5$ ,  $8.81 \cdot 10^{-12} \leq \chi \leq 10^{-10}$ ,  $0 \leq \sigma \leq 10^8$ .

**Вариант 5:** Решить двумерную гармоническую задачу в декартовых координатах, базисные функции – билинейные.

**Вариант 4:** Реализовать решение СЛАУ методом BSG без предобуславливания.

### 3 Постановка гармонической задачи

Рассмотрим задачу для гиперболического уравнения:

$$\chi \frac{\partial u^2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} u = f \quad (1)$$

Представим решение  $u$  данного уравнения и его правую часть  $f$  в виде:

$$u(x, y, t) = u^s \sin \omega t + u^c \cos \omega t \quad (2)$$

$$f(x, y, t) = f^s \sin \omega t + f^c \cos \omega t \quad (3)$$

Исходное уравнение (1) приводится к следующей системе:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} u^s - \omega \sigma u^c - \omega^2 \chi u^s = f \\ -\operatorname{div} \lambda \operatorname{grad} u^c - \omega \sigma u^s - \omega^2 \chi u^c = f \end{cases} \quad (4)$$

### 4 Конечноэлементная аппроксимация гармонической задачи

Элементы матрицы конечноэлементной слау находятся следующим образом:

$$p_{ij} = \int_{\Omega} \lambda \operatorname{grad} \psi_i \operatorname{grad} \psi_j - \omega^2 \chi \psi_i \psi_j d\Omega \quad (5)$$

$$c_{ij} = \omega \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j d\Omega \quad (6)$$

Элементы локальной матрицы  $\mathbf{A}$  для одномерного элемента находятся по формуле:

$$p_{ij} = -\frac{\lambda}{h} \mathbf{G}_{ij} - \frac{\omega^2 \chi h}{6} \mathbf{M}_{ij} \quad (7)$$

$$c_{ij} = \frac{\omega \sigma h}{6} \mathbf{M}_{ij} \quad (8)$$

Причем в данном случае  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{G}$  - матрицы билинейных одномерных конечных элементов.

Локальный вектор правой части  $\mathbf{b}$  будем находить таким образом:

$$b^s = \mathbf{M} \cdot f^s \quad (9)$$

$$b^c = \mathbf{M} \cdot f^c \quad (10)$$

При этом глобальный вектор собирается по следующему правилу:

$$\mathbf{b}_{2i} = b_k^s \quad (11)$$

$$\mathbf{b}_{2i+1} = b_k^c \quad (12)$$

Чтобы осуществить переход к двумерной задаче воспользуемся следующими формулами:

$$M_{ij} = M_{i\%2, j\%2}^x * M_{i/2, j/2}^y \quad (13)$$

$$A_{ij} = A_{i\%4, j\%4}^x * A_{i/4, j/4}^y \quad (14)$$

где % - остаток от деления, а / - целая часть от деления

## 5 Исследования

$$u^s = 2x$$

$$u^c = -2x + y$$

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\lambda = 1, \omega = 1, \sigma = 1, \chi = 1 \text{ e-}11$$

Таблица 1: Размер сетки - 121 узлов.  $\omega$

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\omega = 10^{-4}$	3,79 e-7	3,79 e-7	1,13 e-7	395	139
$\omega = 10^{-3}$	3,79 e-6	3,79 e-6	1,13 e-6	395	132
$\omega = 10^{-2}$	3,79 e-5	3,79 e-5	1,13 e-5	395	135
$\omega = 10^{-1}$	3,78 e-4	3,78 e-4	1,13 e-4	399	125
$\omega = 0$	3,66 e-9	3,66 e-9	1,13 e-9	395	138
$\omega = 10^1$	3,11 e-2	3,11 e-2	1,17 e-4	517	158
$\omega = 10^2$	9 e-2	1,65 e-1	1,07 e-4	83	265
$\omega = 10^3$	1,07 e-1	1,07 e-1	2,54 e-3	240	123
$\omega = 10^4$	1,05 e-1	1,05 e-1	1,16 e-2	80	64
$\omega = 10^5$	1,06 e-1	1,06 e-1	7,48 e-1	47	63
$\omega = 10^6$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,85 e-1	281	63
$\omega = 10^7$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,87 e-1	113	80
$\omega = 10^8$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,85 e-1	82	73
$\omega = 10^9$	1,14 e-1	1,07 e-1	7,58 e-1	—	79

Таблица 2: Размер сетки - 121 узлов.  $\lambda$

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\lambda = 10^2$	6,66 e-2	3,79 e-5	1,42 e-5	13	120
$\lambda = 10^3$	6,66 e-2	3,79 e-6	1,43 e-6	231	166
$\lambda = 10^4$	6,66 e-2	3,79 e-7	1,43 e-7	—	169
$\lambda = 10^5$	6,66 e-2	3,78 e-8	9,06 e-8	49	178
$\lambda = 8 \cdot 10^5$	6,66 e-2	5,78 e-9	2,97 e-9	23	180

Таблица 3: Размер сетки - 121 узлов.  $\chi$

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\chi = 10^{-12}$	3,65 e-3	3,65 e-3	2,54 e-3	408	125
$\chi = 10^{-11}$	3,65 e-3	3,65 e-3	2,54 e-3	408	133
$\chi = 10^{-10}$	3,65 e-3	3,65 e-3	2,54 e-3	408	128

Таблица 4: Размер сетки - 121 узлов.  $\sigma$ 

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\sigma = 0$	3,66 e-9	3,66 e-9	1,13 e-9	395	127
$\sigma = 10^1$	3,11 e-2	3,11 e-2	1,17 e-4	517	161
$\sigma = 10^2$	9 e-2	1,65 e-1	1,07 e-4	82	259
$\sigma = 10^3$	1,07 e-1	1,07 e-1	2,54 e-3	248	121
$\sigma = 10^4$	1,05 e-1	1,05 e-1	1,16 e-2	80	64
$\sigma = 10^5$	1,06 e-1	1,06 e-1	7,49 e-1	47	63
$\sigma = 10^6$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,85 e-1	95	63
$\sigma = 10^7$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,88 e-1	167	65
$\sigma = 10^8$	1,13 e-1	1,06 e-1	7,88 e-1	70	69

Таблица 5: Размер сетки - 10201 узлов.  $\omega$ 

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\omega = 10^{-4}$	7,03 e-3	4,56 e-8	6,26 e-8	—	—
$\omega = 10^{-3}$	7,03 e-3	4,56 e-7	6,26 e-7	379	—
$\omega = 10^{-2}$	7,03 e-3	4,56 e-6	6,26 e-6	23	—
$\omega = 10^{-1}$	7,03 e-3	4,54 e-5	6,27 e-5	853	—
$\omega = 0$	7,03 e-3	2,81 e-10	—	6,26 e-10	—
$\omega = 10^1$	7,03 e-3	3,96 e-3	2,41 e-4	48	—
$\omega = 10^2$	1,81 e-2	2,1 e-2	1,43 e-3	—	—
$\omega = 10^3$	1,63 e-3	2,44 e-2	7,59 e-2	—	—
$\omega = 10^4$	1,43 e-2	2,74 e-2	7,86 e-2	—	—
$\omega = 10^5$	1,46 e-2	1,46 e-2	7,86 e-2	185	277
$\omega = 10^6$	1,46 e-2	1,46 e-2	7,86 e-2	81	80
$\omega = 10^7$	1,46 e-2	1,46 e-2	7,86 e-2	95	79
$\omega = 10^8$	1,47 e-2	1,47 e-2	7,86 e-2	70	89
$\omega = 10^9$	1,49 e-2	1,48 e-2	7,86 e-2	318	91

Таблица 6: Размер сетки - 10201 узлов.  $\lambda$ 

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\lambda = 10^2$	7,03e-3	4,56e-6	3,79e-6	983	—
$\lambda = 10^3$	7,03e-3	4,56e-7	3,79e-7	955	—
$\lambda = 10^4$	7,03e-3	4,56e-8	3,79e-8	—	—
$\lambda = 10^5$	7,03e-3	4,6e-9	3,79e-9	—	—
$\lambda = 8 \cdot 10^5$	7,03e-3	6,6e-10	3,79e-10	—	—

Таблица 7: Размер сетки - 10201 узлов.  $\chi$ 

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\chi = 10^{-12}$	7,03e-3	4,41e-4	2,41e-4	517	—
$\chi = 10^{-11}$	7,03e-3	4,41e-4	2,41e-4	405	—
$\chi = 10^{-10}$	7,03e-3	4,41e-4	2,41e-4	517	—

Таблица 8: Размер сетки - 10201 узлов.  $\sigma$ 

parameter	LOS norm	BSG norm	LU norm	LOS iterations	BSG iterations
$\sigma = 0$	7,03e-3	2,81e-10	6,26e-10	—	—
$\sigma = 10^1$	7,03e-3	3,96e-3	1,43e-3	49	—
$\sigma = 10^2$	2,94e-2	2,92e-2	7,59e-2	513	—
$\sigma = 10^3$	1,56e-2	2,1e-2	7,59e-2	—	—
$\sigma = 10^4$	1,43e-2	2,74e-2	7,59e-2	—	—
$\sigma = 10^5$	1,46e-2	6,13e-3	7,59e-2	185	277
$\sigma = 10^6$	1,46e-2	1,46e-2	7,86e-2	76	80
$\sigma = 10^7$	1,46e-2	1,46e-2	7,86e-2	86	79
$\sigma = 10^8$	1,46e-2	1,46e-2	7,86e-2	104	85

## 5.1 Вывод

При увеличении  $\omega$  точность уменьшается. При увеличении  $\lambda$  точность увеличивается. Изменения  $\chi$  не влияют на точность.

Локально-оптимальная схема, как правило показывает результат хуже, чем метод бисопряженных градиентов.