Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственной бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Новосибирский государственный технический университет»

Кафедра теоретической и прикладной информатики

Лабораторная работа №3
по дисциплине «Методы оптимизации»

Факультет:	ПМИ
Группа:	ПМ-92
Бригада:	7
Студенты:	Иванов В., Кутузов И.
Преподаватель:	Филиппова Е. В.

Новосибирск 2022

Цель работы

Ознакомиться с методами штрафных функций при решении задач нелинейного программирования. Изучить типы штрафных и барьерных функций, их особенности, способы и области применения, влияние штрафных функций на сходимость алгоритмов, зависимость точности решения от величины коэффициента штрафа.

Задание

Реализовать программу? для решения задачи нелинейного программирования с использованием метода штрафных функций и с использованием метода барьерных функций.
Исследовать сходимость метода штрафных функций в зависимости:

- от выбора штрафных функций
- начальной величины коэффициента штрафа
- стратегии изменения коэффициента штрафа
- начальной точки
- задаваемой точности eps

Вариант 7: $f(x, y) = (x + y)^2 + 4y^2 \to min; x + y \geq 5; y = x + 2$

Исследование

Задача $f(x, y) = (x + y)^2 + 4y^2; x + y \geq 5$

$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$G_i[g_i(x)] = \frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}$

x_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(5, 0)	(5.00e+00, 6.89e-09)	25.0	1e-15	5
(0, 5)	(5.00e+00, -2.85e-08)	25.000000000000004	1e-15	5
(5, 5)	(5.00e+00, -1.01e-08)	25.0	1e-15	5
(100, 5)	(5.00e+00, -1.35e-08)	24.999999999999993	1e-15	5
(0, 0)	(5.00e+00, 3.16e-09)	25.0	1e-15	5
(-10, -50)	(5.00e+00, 9.80e-09)	25.0	1e-15	5

$x_0 = (5, 5)$
$r_i = 2r_{i-1}$
$G_i[g_i(x)] = \frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}$

r_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
1	(5.00e+00, -1.01e-08)	25.0	1e-15	5
0.00005	(5.00e+00, 9.88e-09)	24.99999999999993	1e-15	19
10.0	(5.00e+00, -1.15e-08)	25.0	1e-15	2
0.25	(5.00e+00, 5.97e-09)	25.0	1e-15	7
50.0	(5.00e+00, -1.15e-08)	25.0	1e-15	1

$x_0 = (5, 5)$
$r_0 = 1$
$G_i[g_i(x)] = \frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}$

$r_i(i)$	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
$r_i = 2r_{i-1}$	(5.00e+00, -1.01e-08)	25.0	1e-15	5
$r_i = r_{i-1} + 1$	(5.00e+00, -8.39e-09)	25.0	1e-15	13
$r_i = r_{i-1} + 0.1$	(5.00e+00, -6.89e-09)	25.0	1e-15	112
$r_i = 10r_{i-1}$	(5.00e+00, -6.51e-09)	25.0	1e-15	3
$r_i = 50r_{i-1}$	(5.00e+00, 3.11e-07)	25.000000000000387	1e-15	2

$x_0 = (5, 5)$
$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$G_i[g_i(x)] = \frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(9.66e-01, 4.83e-01)	3.0322912811497136	1e+1	1
(4.00e+00, -1.11e-10)	16.000000486155184	1e+0	4
(5.00e+00,-1.01e-08)	25.0	1e-4	5
(5.00e+00,-1.01e-08)	25.0	1e-8	5
(5.00e+00, -1.01e-08)	25.0	1e-15	5

$x_0 = (5, 5)$

$r_0 = 1$

$r_i = 2r_{i-1}$

$G_i[g_i(x)] = [\frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}]^2$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(2.50e+00, -1.15e-08)	6.249999924431094	1e+1	1
(4.00e+00, -1.72e-09)	16.000000129976655	1e+0	3
(5.00e+00, -6.15e-10)	24.99923707633349	1e-4	17
(5.00e+00, 4.31e-06)	24.999999906931194	1e-8	30
(5.00e+00, 4.32e-06)	25.000000000075055	1e-15	53

$x_0 = (5, 5)$

$r_0 = 1$

$r_i = 2r_{i-1}$

$G_i[g_i(x)] = [\frac{1}{2}\{g_i(x) + |g_i(x)|\}]^8$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(4.00e+00, -1.86e-08)	16.00000001708284	1e+1	1
(4.00e+00, -9.94e-09)	16.00000001708284	1e+0	1
(5.00e+00, 2.10e-09)	24.999063653677094	1e-4	95
(5.00e+00, 8.50e-05)	24.999999935127196	1e-8	188
(5.00e+00, 7.70e-05)	25.00000002889694	1e-15	350

Задача $f(x, y) = (x+y)^2 + 4y^y; y = x + 2$

$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|\}$

x_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(1.5, 0.5)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999996	1e-15	3
(0.5, 1.5)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999996	1e-15	3
(1.5, 1.5)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-15	3
(100, 5)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.0	1e-15	3
(0, 0)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.0	1e-15	3
(-10, -50)	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.0	1e-15	3

$x_0 = (1.5, 1.5)$
$r_i = 2r_{i-1}$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|\}$

r_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
1	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-15	3
0.00005	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999996	1e-15	17
5.0	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-15	1
0.25	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999996	1e-15	5
50.0	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.0	1e-15	1

$x_0 = (1.5, 1.5)$
$r_0 = 1$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|\}$

$r_i(i)$	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
$r_i = 2r_{i-1}$	(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-15	3
$r_i = r_{i-1} + 1$	(-1.34e+00, 4.46e-01)	2.0000000000000013	1e-15	3
$r_i = r_{i-1} + 0.1$	(-1.28e+00, 4.25e-01)	1.9999999999999996	1e-15	13
$r_i = 10r_{i-1}$	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.0	1e-15	2
$r_i = 50r_{i-1}$	(-1.50e+00, 5.00e-01)	2.000000000000005	1e-15	2

$x_0 = (1.5, 1.5)$
$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(9.66e-01, 4.83e-01)	3.0322912811497136	1e+1	1
(-7.50e-01, 2.50e-01)	0.500000005924924	1e+0	1
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999598792362	1e-4	2
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-8	3
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999998	1e-15	3

$x_0 = (1.5, 1.5)$
$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|^2\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(4.83e-01, 9.66e-01)	5.83132938682637	1e+1	1
(-1.00e+00, 3.33e-01)	0.8888888874675382	1e+0	1
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9998779353071061	1e-4	15
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999850978891	1e-8	28
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999996	1e-15	52

$x_0 = (1.5, 1.5)$
$r_0 = 1$
$r_i = 2r_{i-1}$
$H_i[h_i(x)] = \{|h_i(x)|^8\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(-7.50e-01, 1.42e+00)	8.556886034293163	1e+1	1
(-9.62e-01, 3.46e-01)	0.8581782704235786	1e+0	1
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9998186095374564	1e-4	92
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.999999981835013	1e-8	185
(-1.50e+00, 5.00e-01)	1.9999999999999978	1e-15	345

Задача $f(x,y) = (x+y)^2 + 4y^2; x + y \geq 5$

$r_0 = 5$
$r_i = \frac{r_{i-1}}{2}$
$G_i[g_i(x)] = \{-\frac{1}{g_i(x)}\}$

x_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(5, 0)	(5.00e+00, 0.00e+00)	25.00000000000067	1e-15	125
(0, 5)	(5.00e+00, 0.00e+00)	25.0	1e-15	118
(5, 5)	(5.00e+00, 7.29e-10)	25.000000000000764	1e-15	128
(3, 3)	(5.00e+00, -2.34e-07)	25.00000000000004	1e-15	128
(5, 21)	(2.60e+01, -7.03e-10)	675.9999999999994	1e-15	49

$x_0 = (5, 5)$
$r_i = \frac{r_{i-1}}{2}$
$G_i[g_i(x)] = \{-\frac{1}{g_i(x)}\}$

r_0	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
5	(5.00e+00, 7.29e-10)	25.000000000000764	1e-15	128
1	(5.00e+00, 5.00e+00)	99.99999999999994	1e-15	49
10	(5.00e+00, -2.91e-08)	25.000000000001215	1e-15	128
25	(5.00e+00, 1.84e-08)	25.000000000003052	1e-15	129
100	(5.00e+00, 4.12e-08)	25.0	1e-15	124

$x_0 = (5, 5)$
$r_0 = 100$
$G_i[g_i(x)] = \{-\frac{1}{g_i(x)}\}$

$r_i(i)$	x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
$r_i = .5r_{i-1}$	(5.00e+00, -2.91e-08)	25.000000000000004	1e-15	124
$r_i = .25r_{i-1}$	(5.00e+00, 1.40e-08)	25.000000000000068	1e-15	67
$r_i = .1r_{i-1}$	(5.00e+00, -1.68e-08)	25.000000000000515	1e-15	41
$r_i = .75r_{i-1}$	(5.00e+00, 9.02e-09)	25.0	1e-15	296
$r_i = .9r_{i-1}$	(2.60e+01, 3.55e-08)	25.0	1e-15	805

$x_0 = (5, 5)$
$r_0 = 100$
$r_i = \frac{r_{i-1}}{2}$
$G_i[g_i(x)] = \{-\frac{1}{g_i(x)}\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(6.33e+00, 6.54e-08)	40.0471199305916	1e+1	4
(5.00e+00, -2.79e-07)	25.000000000000313	1e+0	82
(5.00e+00, -2.79e-07)	25.000000000000313	1e-4	95
(5.00e+00, -2.79e-07)	25.000000000000313	1e-8	109
(5.00e+00, 7.51e-09)	25.0	1e-15	124

$x_0 = (5, 5)$
$r_0 = 100$
$r_i = \frac{r_{i-1}}{2}$
$G_i[g_i(x)] = \{-\ln -g_i(x)\}$

x_{min}	$f(x)$	eps	$iterations$
(5.00e+00, -8.60e-08)	25.000000000001144	1e+1	10
(5.00e+00, 8.30e-07)	25.000000000002753	1e+0	14
(5.00e+00, 8.30e-07)	25.000000000002753	1e-4	27
(5.00e+00, 8.30e-07)	25.000000000002753	1e-8	40
(5.00e+00, -6.73e-09)	25.0	1e-15	63

Вывод

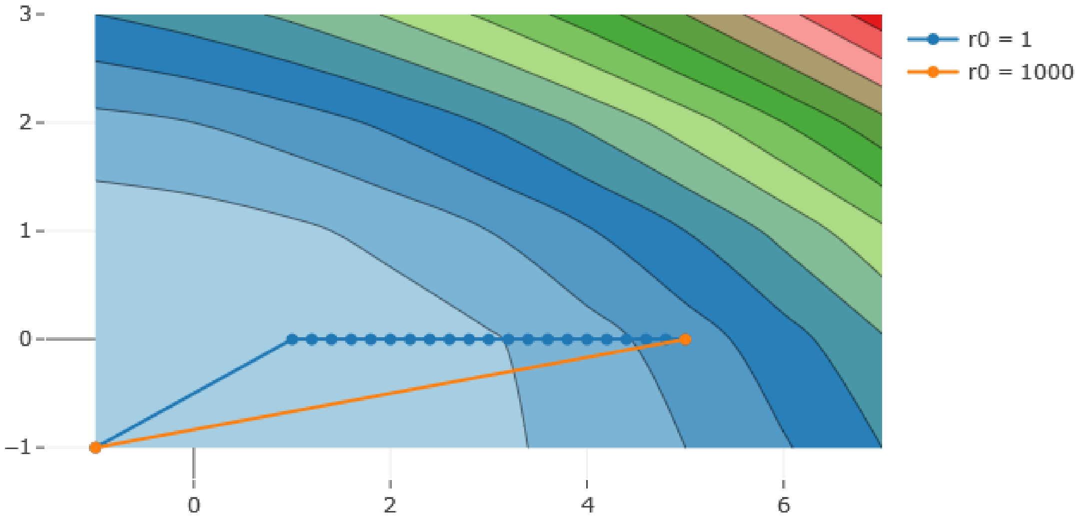
На эффективность *метода штрафных функций* существенно влияет выбор начального приближения r_0. Если выбирать слишком малые значения r_0 (слишком малое значение *штрафной функции*) могут привести к ситуации, когда уже на первых итерациях будет найдена точка, в которой достигается безусловный минимум, в таком случае количество итераций для поиска нужного значения может существенно вырасти. Частично это можно исправить повышением порядка *штрафной функции*, однако, как показывают исследования, с повышением порядка *штрафной функции*, также уменьшается точность получаемого решения.

В отличие от *метода штрафных функций*, при использовании *метода барьерных функций* поиск решения должен начинаться с точки, удовлетворяющей условиям ограничений (т.е в допустимой области), что в некоторых задачах может сопровождаться трудоемкими вычислениями. К тому же вследствие того, что в алгоритме поиска безусловного минимума используются дискретные шаги, нередко возникают ситуации, когда на очередной итерации точка выходит за пределы допустимой области, где *барьерная функция* имеет сравнительно малое значение (по сравнению со значением на границе) и по итогу найденное решение совпадает с безусловным минимумом функции.

Приложение

```
def function(point) -> float:
    x, y = point
    return (x + y)**2 + 4*y**2

def restriction_function(point):
    x, y = point
    return 5 - x - y

def restrictions(point) -> bool:
    return restriction_function(point) <= 0

def G(x_k):
    return restriction_function(x_k) + abs(restriction_function(x_k))) / 2.


def penalty(x_k, r_k):
    return r_k * G(x_k)


def create_function(r_k):
    return lambda x: function(x) + penalty(x, r_k)


def calculate_coefficients(r_k, step):
    return r_k * step


def penalty_method(eps: float, dimension=2, maxiter=10000):
    x_k = initial_point(dimension)
    r_k = 1.
    r_step = 2.

    for i in range(maxiter):
        f_k = create_function(r_k)
        x_k = nelder_mead_method(f_k, x_k, eps)

        if abs(restriction_function(x_k)) < eps:
            return x_k
        else:
            r_k = calculate_coefficients(r_k, r_step)

    return x_k


def barrier_method(eps: float, dimension=2, maxiter=10000):
    x_k = initial_point(dimension)
    r_k = 1.
    r_step = .5

    for i in range(maxiter):
        f_k = create_function(r_k)
        if restrictions(nelder_mead_method(f_k, x_k, eps)):
            x_k = nelder_mead_method(f_k, x_k, eps)

        if abs(penalty(x_k, r_k)) < eps:
            return x_k
        else:
            r_k = calculate_coefficients(r_k, r_step)

    return x_k
```

Метод штрафных функций



Метод барьерных функций