# 随机过程模拟试卷解答

---

## 1. (10 分) 证明与计算

### (1)

如果 $Z_0, Z_1, \ldots$ 是独立同分布的随机变量, 定义 $X_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$, 证明 $\{X_n, n = 0, 1, \ldots\}$ 是平稳独立增量过程。

**解答:**

- **独立增量:** 考虑任意两个不重叠的时间段 $[n_1, n_2]$ 和 $[n_3, n_4]$, 其中 $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$。对应的增量为 $X_{n_2} - X_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} Z_i$ 和 $X_{n_4} - X_{n_3} = \sum_{j=n_3+1}^{n_4} Z_j$。由于 $\{Z_k\}$ 是相互独立的随机变量序列, 且两个求和的下标集合不相交, 所以这两个增量是由两组不同的独立随机变量构成的, 因此它们是相互独立的。
- **平稳增量:** 考虑长度为 $k$ 的任意时间段 $[n, n+k]$ 的增量 $X_{n+k} - X_n = \sum_{i=n+1}^{n+k} Z_i$。由于 $\{Z_i\}$ 是同分布的, 所以这个增量的分布只依赖于求和的项数 $k$, 而不依赖于起始位置 $n$。因此, 该过程具有平稳增量。

综上, $\{X_n\}$ 是平稳独立增量过程。

## 2. (10 分) 泊松过程计算

对于泊松过程 $\{N(t)\}$, 计算 $E[N(t)N(t+s)], E[N(t+s)|N(t)]$, 其中 $s > 0$。

**解答:**

- **计算** $E[N(t)N(t+s)]$ **(相关函数):** 这是泊松过程的相关函数 $R_N(t, t+s)$。$E[N(t)N(t+s)] = E[N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))] = E[N(t)(N(t+s) - N(t))] + E[N^2(t)]$。由于泊松过程有独立增量, $N(t)$ 和 $N(t+s) - N(t)$ 相互独立。$E[N(t)(N(t+s) - N(t))] = E[N(t)]E[N(t+s) - N(t)] = (\lambda t)(\lambda s) = \lambda^2 ts$。对于泊松分布 $N(t) \sim P(\lambda t)$, 其方差

$D(N(t)) = \lambda t$。$E[N^2(t)] = D(N(t)) + (E[N(t)])^2 = \lambda t + (\lambda t)^2$。所以，$E[N(t)N(t+s)] = \lambda^2 ts + \lambda t + (\lambda t)^2 = \boldsymbol{\lambda t + \lambda^2 t(t+s)}$。

- **计算** $E[N(t+s)|N(t)]$ **(条件期望):** $E[N(t+s)|N(t)] = E[N(t+s) - N(t) + N(t)|N(t)] = E[N(t+s) - N(t)|N(t)] + E[N(t)|N(t)]$。由于独立增量，$E[N(t+s) - N(t)|N(t)] = E[N(t+s) - N(t)] = \lambda s$。$E[N(t)|N(t)]$ 是在已知 $N(t)$ 的值的情况下对 $N(t)$ 求期望，结果就是 $N(t)$ 本身。所以，$E[N(t+s)|N(t)] = \boldsymbol{\lambda s + N(t)}$。

## 3. (10 分) 非齐次泊松过程

设 $\{N(t)\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次泊松过程，$X_1, X_2, \ldots$ 是事件之间的间隔时间，问：(1) 诸 $X_i$ 是否独立? (2) 诸 $X_i$ 是否同分布?

**解答:**

(1) **否，一般不独立**。由于发生率 $\lambda(t)$ 随时间变化，第一个事件发生后，系统所处的时间点会影响第二个事件的发生概率。例如，如果 $\lambda(t)$ 是增函数，第一个事件发生得晚（即 $X_1$ 很大)，那么第二个事件的发生率就会更高，导致 $X_2$ 倾向于变小。因此 $X_1$ 和 $X_2$ 不独立。

(2) **否，一般不同分布**。$X_1$ 的分布依赖于从 0 时刻开始的 $\lambda(t)$。$X_2$ 的分布依赖于第一个事件发生时刻 $S_1$ 之后 $\lambda(t)$ 的形态。由于 $\lambda(t)$ 是变化的，这两个分布函数的形式通常是不同的。

## 4. (10 分) 探险家走出溶洞

探险家不幸落入漆黑的溶洞，有两条路供随机选择：沿第一条路探索 2 小时可以走出溶洞，沿第二条路探索 1 小时返回原地。回到原地后只能再次进行随机选择。用 $T$ 表示他走出溶洞所用的时间，试用更新间隔和停时描述 $T$，并计算他走出溶洞平均需要的时间。

**解答:** 这是一个更新过程问题。每次“更新”发生在探险家回到原点进行选择时。设 $X_i$ 为第 $i$ 次尝试所花费的时间。这是一个随机变量。

- 以概率 1/2 选择第一条路，成功走出，花费时间 2 小时。
- 以概率 1/2 选择第二条路，失败返回，花费时间 1 小时。

设 $N$ 为成功走出前失败的次数。$P(\text{成功}) = 1/2, P(\text{失败}) = 1/2$。$N$ 服从参数为 $p = 1/2$ 的几何分布，$P(N = k) = (1/2)^k(1/2), k = 0, 1, 2, \ldots$。总时间 $T$ 是 $N$ 次失败的时间加上最后一次成功的时间。$T = \sum_{i=1}^{N}(1 \text{ 小时}) + (2 \text{ 小时}) = N + 2$。$E[T] = E[N+2] = E[N] + 2$。几何分布的期望为 $E[N] = \frac{1-p}{p} = \frac{1/2}{1/2} = 1$。所以，$E[T] = 1 + 2 = \mathbf{3}$ 小时。**停时描述:** $T$ 是该过程的停时，因为它是在过程达到“走出”状态时停止。

## 5. （10 分）更新函数

证明若到达间隔分布 $F$ 是 $(0,1)$ 均匀分布，那么我们有更新函数 $m(t)=e^t-1, 0\le t\le 1$。

**解答：** 更新函数 $m(t)$ 满足更新方程：$m(t)=F(t)+\int_0^t m(t-u)f(u)du$。对于 $U(0,1)$ 分布，$F(t)=t, f(t)=1$ for $t\in(0,1)$。方程变为 $m(t)=t+\int_0^t m(t-u)\cdot 1du$。令 $v=t-u, dv=-du$。$m(t)=t+\int_t^0 m(v)(-dv)=t+\int_0^t m(v)dv$。这是一个 Volterra 积分方程。两边对 $t$ 求导：$m'(t)=1+m(t)$。这是一个一阶线性常微分方程。$m'(t)-m(t)=1$。初始条件为 $m(0)=0$。解得 $m(t)=Ce^t-1$。代入初始条件 $0=C-1 \implies C=1$。所以 $\boldsymbol{m(t)=e^t-1}$ for $0\le t\le 1$。

## 6. （10 分）天气马尔可夫链

设今日有雨明日也有雨的概率为 0.7，今日无雨明日有雨的概率为 0.5。求星期一有雨，星期三也有雨的概率。

**解答：** 设状态 0=雨，状态 1=无雨。$p_{00}=0.7 \implies p_{01}=1-0.7=0.3$。$p_{10}=0.5 \implies p_{11}=1-0.5=0.5$。转移矩阵为 $P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$。求星期一有雨 (状态 0)，星期三也有雨 (状态 0) 的概率，即从状态 0 出发，经过 2 步回到状态 0 的概率 $p_{00}^{(2)}$。$P^2=P\cdot P=\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.7 & 0.3\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.49+0.15 & 0.21+0.15\\ 0.35+0.25 & 0.15+0.25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.64 & 0.36\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$。$p_{00}^{(2)}=\mathbf{0.64}$。

## 7. （10 分）分支过程

对于分支过程计算群体灭绝概率 $\rho_0$。(1) $p_0=0.2, p_2=0.8$; (2) $p_0=0.2, p_1=0.3, p_2=0.5$。

**解答：** 灭绝概率 $\rho_0$ 是概率母函数 $P(s)=\sum p_k s^k$ 在 $[0,1]$ 区间内的最小不动点，即解方程 $s=P(s)$。

(1) $P(s)=p_0s^0+p_2s^2=0.2+0.8s^2$。解 $s=0.2+0.8s^2 \implies 0.8s^2-s+0.2=0 \implies 4s^2-5s+1=0$。$(4s-1)(s-1)=0$。解得 $s=1/4$ 或 $s=1$。最小非负解为 $\boldsymbol{\rho_0=1/4=0.25}$。

(2) $P(s)=p_0+p_1s+p_2s^2=0.2+0.3s+0.5s^2$。解 $s=0.2+0.3s+0.5s^2 \implies 0.5s^2-0.7s+0.2=0 \implies 5s^2-7s+2=0$。$(5s-2)(s-1)=0$。解得 $s=2/5$ 或 $s=1$。最小非负解为 $\boldsymbol{\rho_0=2/5=0.4}$。

## 8. (10 分) 可逆马氏链

证明两端为反射壁的简单随机游动是可逆马氏链，并计算对称序列和平稳可逆分布。

**解答：** 状态空间 $S = \{0, 1, \ldots, N\}$。转移概率为 $p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = q$ $(0 < i < N)$, $p_{01} = 1, p_{N,N-1} = 1$。设平稳分布为 $\pi$。可逆性条件（细致平衡方程）为 $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$。

- $\pi_i p = \pi_{i+1} q \implies \pi_{i+1} = \frac{p}{q}\pi_i$。
- $\pi_0 p_{01} = \pi_1 p_{10} \implies \pi_0 = \pi_1 q$。

这表明 $\pi_i$ 成等比数列。$\pi_k = (\frac{p}{q})^k \pi_0$。$\sum_{k=0}^N \pi_k = \pi_0 \sum_{k=0}^N (\frac{p}{q})^k = 1$。所以平稳分布为 $\boldsymbol{\pi_k = \frac{(p/q)^k}{\sum_{j=0}^N (p/q)^j}}$。由于存在平稳分布，且细致平衡方程有解，所以该马氏链是可逆的。对称序列 $c_i$ 满足 $c_i p_{ij} = c_j p_{ji}$。取 $\boldsymbol{c_i = (p/q)^i}$ 即可。

## 9. (10 分) 连续时间马氏链

考虑有两种状态的连续时间 Markov 链，状态为 0 和 1，链在离开 0 到达 1 之前在状态 0 停留的时间服从参数为 $\lambda$ 的指数分布，相应地在 1 停留的时间是参数为 $\mu$ 的指数随机变量。对此建立 Kolmogorov 方程，并求解。

**解答：** 状态空间 $S = \{0, 1\}$。从状态 0 离开到 1 的速率为 $\lambda$ $(q_{01} = \lambda)$。从状态 1 离开到 0 的速率为 $\mu$ $(q_{10} = \mu)$。Q 矩阵为 $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$。设 $P(t) = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix}$。Kolmogorov 向前方程为 $P'(t) = P(t)Q$。

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

以第一行为例：$p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu p_{01}(t)$。又因为 $p_{00}(t) + p_{01}(t) = 1 \implies p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t)$。代入得 $p'_{00}(t) = -\lambda p_{00}(t) + \mu(1 - p_{00}(t)) = -(\lambda + \mu)p_{00}(t) + \mu$。这是一个一阶线性常微分方程。初始条件为 $p_{00}(0) = 1$。解得 $\boldsymbol{p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}}$。同理可得其他项：$\boldsymbol{p_{01}(t) = 1 - p_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}}$。$\boldsymbol{p_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}}$。$\boldsymbol{p_{10}(t) = 1 - p_{11}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}}$。

## 10. (10 分) 乘客等待时间

假设乘客按速率为 $\lambda$ 的泊松过程 $\{N(t)\}$ 到达一个火车站。如果火车在时刻 $t$ 离开，计算在 $(0, t)$ 到达的旅客等待时间的总和的期望。

**解答：** 这是一个复合泊松过程问题。$Y=\sum_{k=1}^{N(t)} W_k$，其中 $W_k$ 是第 $k$ 个到达旅客的等待时间。设第 $k$ 个旅客到达时刻为 $S_k$。则他的等待时间是 $W_k=t-S_k$。$Y=\sum_{k=1}^{N(t)}(t-S_k)$。我们求期望 $E[Y]=E[E[Y|N(t)]]$。给定 $N(t)=n$，即在 $(0,t)$ 内有 n 个旅客到达，他们的到达时刻 $S_1,\ldots,S_n$ 服从 $n$ 个在 $(0,t)$ 上独立同分布的均匀随机变量的顺序统计量。对于任意一个旅客，其到达时刻 $S$ 在 $(0,t)$ 上是均匀分布的。$E[S]=t/2$。$E[Y|N(t)=n]=E\left[\sum_{k=1}^{n}(t-S_k)\right]=\sum_{k=1}^{n}E[t-S_k]=\sum_{k=1}^{n}(t-E[S_k])=\sum_{k=1}^{n}(t-t/2)=n\frac{t}{2}$。现在对 $n$ 求期望，$E[N(t)]=\lambda t$。$E[Y]=E[N(t)\frac{t}{2}]=\frac{t}{2}E[N(t)]=\frac{t}{2}(\lambda t)=\boldsymbol{\frac{\lambda t^2}{2}}$。