随机过程核心公式与概念总集

综合整理版

2025 年 7 月 3 日

目录

1 基础概念与数字特征

随机过程 一族依赖于参数 $t \in T$ 的随机变量 $\{X(t), t \in T\}$。

- **均值函数:** $\mu_X(t) = E[X(t)]$
- **自相关函数:** $R_X(s,t) = E[X(s)X(t)]$
- **自协方差函数:** $C_X(s,t) = \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = R_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$
- **方差函数:** $D_X(t) = \mathrm{Var}(X(t)) = C_X(t,t)$

平稳过程

- **严平稳 (Strict-Sense Stationary, SSS):** 任意有限维分布对时间平移不变。

$$F_{X(t_1),\dots,X(t_n)}(x_1,\dots,x_n) = F_{X(t_1+\tau),\dots,X(t_n+\tau)}(x_1,\dots,x_n)$$

- **宽平稳 (Wide-Sense Stationary, WSS):** 二阶矩具有平移不变性。
  1. 均值函数为常数: $E[X(t)] = \mu$
  2. 自相关函数只与时间差 $\tau = s - t$ 有关: $R_X(s,t) = R_X(s-t) = R_X(\tau)$
- **关系:** 严平稳 $\implies$ 宽平稳。若为高斯过程，则宽平稳 $\iff$ 严平稳。

独立增量与平稳增量过程

- **独立增量:** 对于任意不重叠的时间区间, 过程的增量是相互独立的随机变量。
- **平稳增量:** 增量的分布只依赖于时间区间的长度，而与区间的起始位置无关。

2 离散时间马尔可夫链 (DTMC)

核心性质

- **马尔可夫性:** 未来只与现在有关，与过去无关。

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

- **转移概率矩阵 (TPM):** $P = [p_{ij}]$, 其中 $p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$。$P$ 是一个行和为 1 的随机矩阵。
- **C-K 方程:** $P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$，由此可得 $\boldsymbol{P^{(n)} = P^n}$。

平稳分布 π

- **定义方程:** $\boldsymbol{\pi = \pi P}$ 且 $\sum_i \pi_i = 1$。
- **遍历定理:** 对于不可约、非周期的有限状态马氏链，存在唯一的平稳分布 π，且

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \text{对所有 } i, j \in S$$

可逆性与细致平衡

- **细致平衡方程 (Detailed Balance):** $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ for all i, j。
- **可逆性 (Reversibility):** 满足细致平衡方程的马氏链称为可逆马氏链。细致平衡是平稳的充分不必要条件。

3 连续时间马尔可夫链 (CTMC)

Q 矩阵与停留时间 • **Q 矩阵 (转移速率矩阵):** $Q = [q_{ij}]$。

- q_{ij} $(i \neq j)$: 从状态 i 到 j 的瞬时转移速率。
- $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_i$。Q 矩阵行和为 0。

- **状态停留时间:** 在状态 i 的停留时间服从参数为 $q_i = -q_{ii}$ 的指数分布。

动态方程与平稳分布 • **Kolmogorov 向前/向后方程:**

$$P'(t) = P(t)Q \quad (\text{向前}) \quad \text{和} \quad P'(t) = QP(t) \quad (\text{向后})$$

形式解为 $\boldsymbol{P(t) = e^{Qt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Qt)^k}{k!}}$。

- **平稳分布** π**:**

$$\boldsymbol{\pi Q = 0} \quad \text{且} \quad \sum_i \pi_i = 1$$

生灭过程 (Birth-Death Process) 状态只能在相邻间转移的 CTMC。

- **速率:** 出生率 $\lambda_n = q_{n,n+1}$，死亡率 $\mu_n = q_{n,n-1}$。
- **细致平衡方程:** $\boldsymbol{\pi_n \lambda_n = \pi_{n+1} \mu_{n+1}}$。
- **通解:** $\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \pi_0$。

4 泊松过程与更新过程

泊松过程 (Poisson Process, 速率 λ)

- **计数值分布:** $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t) \implies P(N(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$。
- **到达间隔时间分布:** $T_i \sim \text{i.i.d. } E(\lambda)$。
  - PDF: $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
  - CDF: $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
  - 均值: $E[T_i] = 1/\lambda$
- **第 k 次事件发生时刻分布:** $S_k = \sum_{i=1}^{k} T_i \sim \Gamma(k, \lambda)$。
  - PDF: $f_{S_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!}$
- **数字特征:**
  - $E[N(t)] = \lambda t$
  - $\text{Var}(N(t)) = \lambda t$
  - $C_N(s,t) = \lambda \min(s,t)$
- **叠加与筛选:** 独立泊松过程之和仍是泊松过程，速率相加。对泊松过程以概率 p 筛选，得到的新过程仍是泊松过程，速率为 λp。

更新过程 (Renewal Process)

- **定义:** 事件间隔时间 T_i 为 i.i.d. 非负随机变量，分布为 F_T。
- **更新函数 (均值):** $m(t) = E[N(t)]$。
- **基本更新方程:** $m(t) = F_T(t) + \int_0^t m(t-u) f_T(u) du = F_T(t) + m(t) * f_T(t)$。
- **拉普拉斯变换解:** $m^*(s) = \frac{f_T^*(s)}{s(1-f_T^*(s))}$。
- **初等更新定理:** 若 $E[T_i] = \mu$，则 $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$。

5 高斯过程与布朗运动

高斯过程 任意有限维分布都是多元正态分布。完全由其**均值函数** $\mu_X(t)$ 和**协方差函数** $C_X(s,t)$ 唯一确定。

维纳过程/布朗运动 $W(t)$ 标准维纳过程 $(\sigma^2 = 1)$ 的性质:

- **定义:** $W(0) = 0$，具有独立、平稳的高斯增量。
- **增量分布:** $W(t) - W(s) \sim N(0, t-s)$ for $s < t$。
- **数字特征:**
  - $E[W(t)] = 0$
  - $\mathrm{Var}(W(t)) = t$
  - 相关/协方差函数: $R_W(s,t) = C_W(s,t) = \min(s,t)$
- **高斯变量四阶矩 (零均值):**

$$E[Z_1Z_2Z_3Z_4] = E[Z_1Z_2]E[Z_3Z_4] + E[Z_1Z_3]E[Z_2Z_4] + E[Z_1Z_4]E[Z_2Z_3]$$

A 附录：常用概率分布与特征函数

A.1 离散型

- **二项分布** $B(n,p)$**:** $P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $\phi_X(\omega) = (pe^{i\omega} + 1 - p)^n$
- **泊松分布** $P(\lambda)$**:** $P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $\phi_X(\omega) = e^{\lambda(e^{i\omega}-1)}$
- **几何分布** $G(p)$**:** $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}, k \geq 1$, $\phi_X(\omega) = \frac{pe^{i\omega}}{1-(1-p)e^{i\omega}}$

A.2 连续型

- **均匀分布** $U(a,b)$**:** $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$, $\phi_X(\omega) = \frac{e^{i\omega b} - e^{i\omega a}}{i\omega(b-a)}$
- **指数分布** $E(\lambda)$**:** $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $\phi_X(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - i\omega}$

- **正态分布** $N(\mu, \sigma^2)$**:** $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $\phi_X(\omega) = e^{i\omega\mu - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$
- **伽玛分布** $\Gamma(\alpha, \beta)$ **(shape-rate):** $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$