随机过程综合应用习题

---

1. **(马尔可夫链性质分析)**
   设有一个离散时间马尔可夫链，其状态空间为 $S=\{0,1,2,3,4\}$，一步转移概率矩阵 P 如下：
   $$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$
   请完成以下任务：
   (a) 画出该马尔可夫链的状态转移图。
   (b) 判断该链是否可约？如果是，请找出所有的不可约闭子集（常返类）和所有暂态。
   (c) 对于所有的不可约闭子集，分别求出其平稳分布。

2. **(排队论基础)**
   设顾客的到达符合速率为 λ 的泊松过程，单个顾客的服务时间为一个随机变量 T。若一个顾客到达时发现服务台空闲，则他立即接受服务；若服务台繁忙，则他需要等待。假设一个顾客到达时，服务台恰好被前一个顾客占用。求在以下三种服务时间 T 的分布情况下，该顾客**不需要等待**的概率，以及他的**平均等待时间**。
   (a) 服务时间 T 是一个确定的常数 a。
   (b) 服务时间 T 服从参数为 μ 的指数分布，即 $T\sim E(\mu)$。
   (c) 服务时间 T 服从在区间 $(0,a)$ 上的均匀分布，即 $T\sim U(0,a)$。

3. **(高斯随机变量的矩)**
设 $\{X_k, k = 1, \ldots, 2n\}$ 是一组独立同分布 (i.i.d.) 的高斯随机变量，且均服从 $N(0, \sigma^2)$ 分布。现定义两个新的随机变量：

$$Y = \sum_{k=1}^{n} |X_{2k} - X_{2k-1}|$$

$$Z = \left| \sum_{k=1}^{n} (X_{2k} - X_{2k-1}) \right|$$

请分别计算 $E[Y], \mathrm{Var}(Y), E[Z], \mathrm{Var}(Z)$。

4. **(Ehrenfest 坛子模型)**
一个坛子里装有 M 个球，每个球要么是红色，要么是黑色。在每一离散时刻 n，随机地从坛子中取出一个球，并将其颜色翻转（红变黑，黑变红），然后放回坛中。设 X_n 为在时刻 n 坛子中黑球的个数。

   (a) 求该马尔可夫链的平稳分布 $\pi_k = P(X = k)$。

   (b) 计算极限概率 $\lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$。

   (c) 当 $M = 3$ 时，从 3 个都是红球的状态 $(X_0 = 0)$ 出发，求首次出现 3 个都是黑球的状态 $(X = 3)$ 的平均操作次数。

5. **(M/G/∞ 排队模型)**
设顾客的到达服从速率为 $\lambda = 2$ 的泊松过程 $\{N(t)\}$，且系统有无限个服务台（即每个到达的顾客都能立即接受服务）。每个顾客的服务时间（停留时间）T 是一个随机变量，服从在区间 $(60, 120)$ 分钟上的均匀分布。令 $Y(t)$ 表示在时刻 t 系统中的顾客数量（即队伍人数）。

   (a) 设 S_k 是第 k 个顾客的到达时刻，T_k 是其服务时间。定义一个示性函数 $I_{(S_k+T_k>t)}$,当第 k 个顾客在时刻 t 仍未离开时取值为 1,否则为 0。求 $E[I_{(S_k+T_k>t)}]$ 和 $E[(I^2_{(S_k+T_k>t)}]$。

   (b) 求均值函数 $E[Y(t)]$。

   (c) 求方差函数 $\mathrm{Var}(Y(t))$。