

Escuela de Formación Continua
Licenciatura en Gestión Tecnológica

Investigación Operativa

El método SIMPLEX

Docentes:

Juan Otaegui jotaegui@unlam.edu.ar

José Leta jleta@unlam.edu.ar

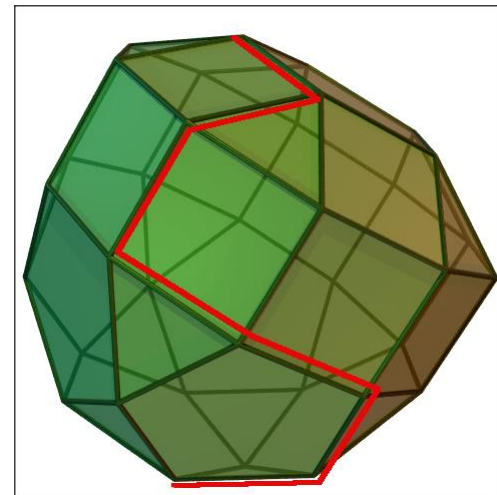
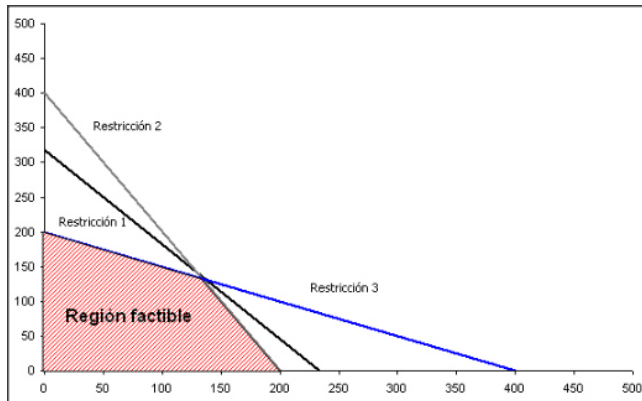
Introducción

- Fue desarrollado por George Dantzig luego de la Segunda Guerra Mundial en 1947
- Gracias a su procedimiento algebraico es posible implementarlo mediante software lo que simplifica problemas de grandes dimensiones con el poder de computo actual.
- Desde entonces se ha estudiado y generado nuevos desarrollos como el Método de las Dos Fases.



Características

- Es un algoritmo que sirve para resolver problemas complejos de programación lineal.
- Es un procedimiento algebraico cuyos conceptos fundamentales son geométricos.
- A diferencia de la resolución gráfica con la que se pueden resolver problemas de 2 dimensiones, el método simplex puede resolver problemas de n dimensiones.



Comprendiendo el método

Comenzaremos asimilando el funcionamiento del método simplex comprendiendo sus conceptos geométricos.

En la resolución gráfica del modelo de programación lineal, las variables de decisión son quienes establecen la cantidad de dimensiones, con el método simplex podemos ampliar las variables de decisión por lo que nuestra cantidad de actividades ahora pueden ser n .

Para ilustrar los conceptos geométricos definiremos un caso práctico con 2 dimensiones.

Caso Práctico

Dos hermanos están pensando en comenzar con un pequeño emprendimiento que consiste en fabricar mesas y sillas de madera para camping, las venderán a \$500 y \$300 respectivamente. Por el momento poseen tres herramientas de banco: una sierra, una agujereadora y un torno. Estas herramientas limitan su producción diaria ya que la sierra puede funcionar 18hs, la agujereadora 12hs y el torno 4hs. Para fabricar una mesa necesitan 2hs de agujereadora y 2hs de la sierra, mientras que para una silla se necesita 1 hora de torno y 3hs de la sierra. En base a esto ¿Cuál será la producción que maximizará su ganancia?

Representación Tabular

	Tiempo de producción por unidad		Tiempo de producción disponible al día
Máquina	Silla	Mesa	
Torno	1	0	4
Agujereadora	0	2	12
Sierra	3	2	18
Ganancia por unidad	\$300	\$500	

Formalizando el problema

Con $X_1 = \text{Sillas}$ y $X_2 = \text{Mesas}$

Maximizar: $Z(X_1, X_2) = 300 X_1 + 500 X_2$

Restringido a:

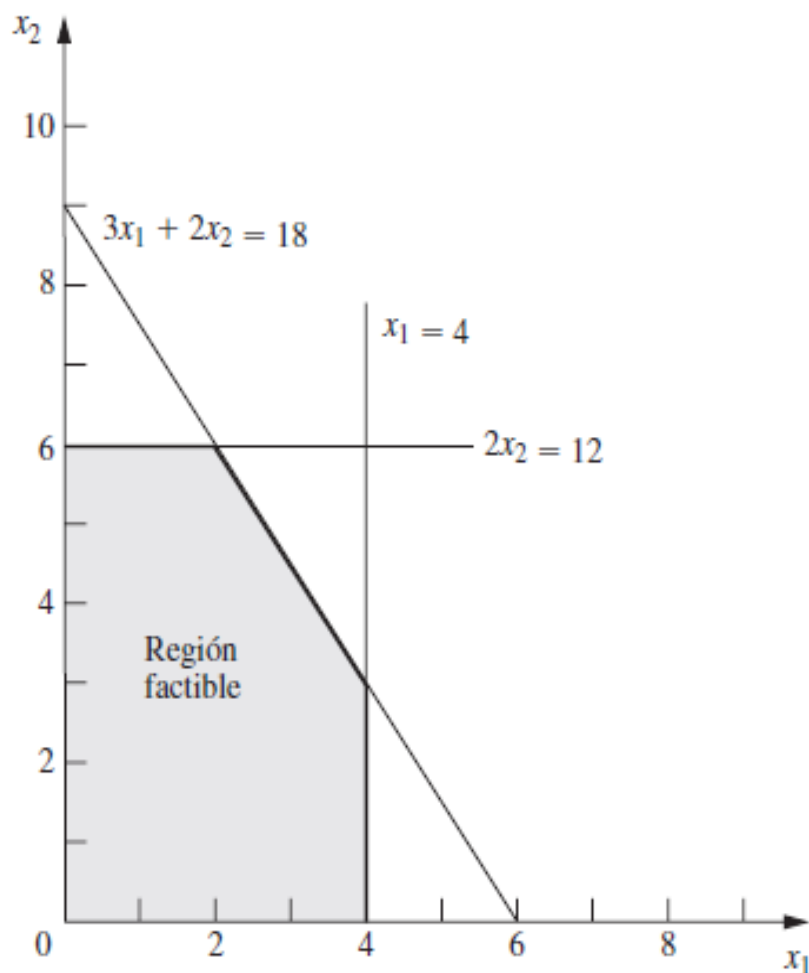
$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3 X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

Graficando



Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$,
sujeta a

$$x_1 \leq 4$$

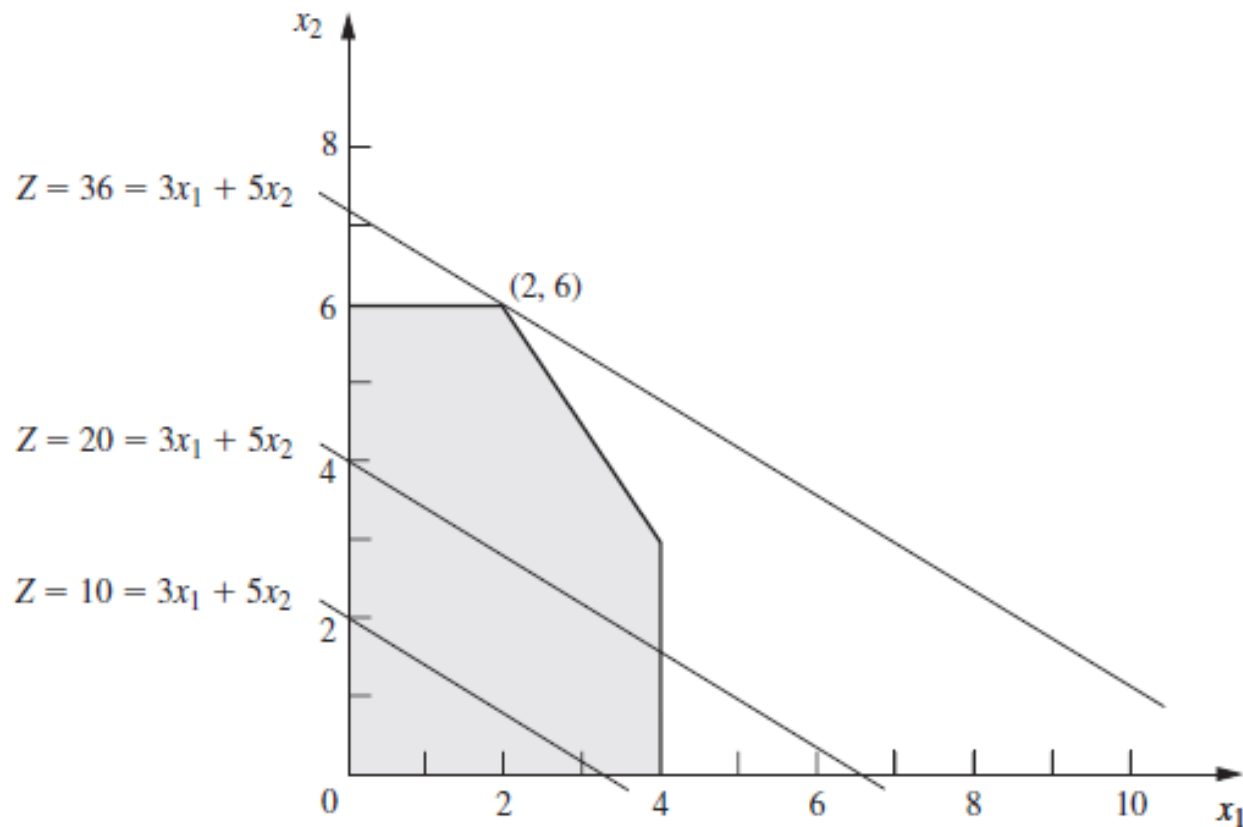
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Como identificar la dirección de Z

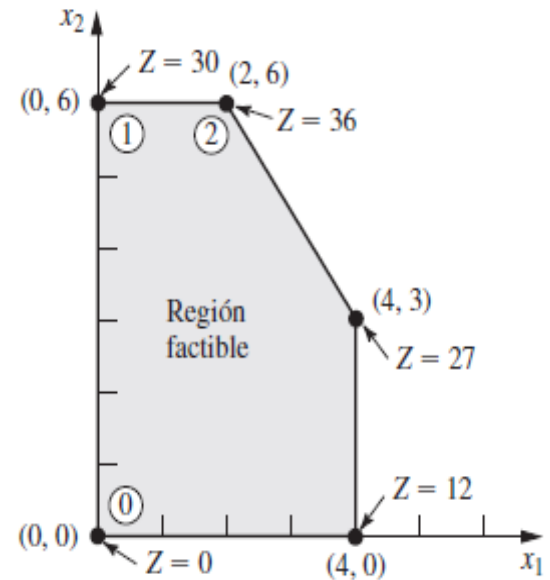


Visión Geográfica

Interpretación y definición:

- Cada intersección de las fronteras de restricción de la región factible son potenciales soluciones en un vértice.
- Dos soluciones en un vértice son adyacentes entre si cuando comparten una restricción.

En cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión, dos soluciones en un vértice son adyacentes entre sí cuando comparten $n - 1$ fronteras de restricción



Visión Geográfica

En base a la definición general de soluciones en un vértice adyacentes entre si, podemos definir la siguiente propiedad general que nos proporciona una manera muy útil de verificar si una solución en un vértice es óptima.

En cualquier problema de programación lineal que posea al menos una solución óptima, si una solución en un vértice no tiene soluciones en un vértice adyacentes que sean mejores, entonces, esa debe ser una solución óptima.

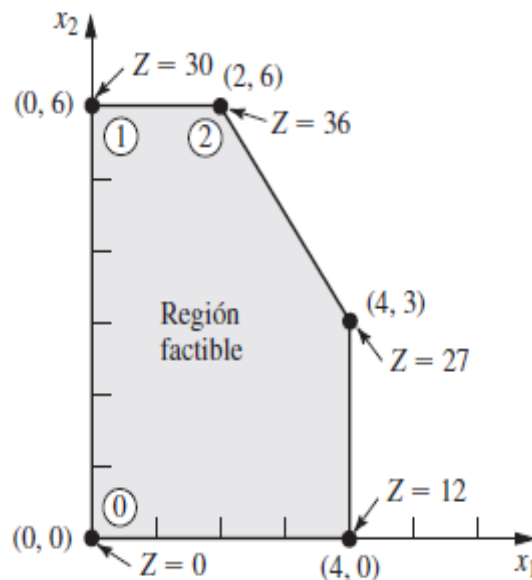
Armando la solución

Ahora estamos en condiciones de armar un algoritmo entendible para una computadora.

1. *Paso inicial*: Elegir $(0, 0)$ como la solución *inicial* (no se requieren cálculos para identificarla)

Prueba de optimalidad ¿Hay soluciones adyacentes mejores?

SI



Armando la solución

2. *Iteración 1*: Moverse a una solución *adyacente* mejor mediante los siguientes tres pasos.

a) Entre las dos restricciones de la región factible que salen de (0, 0) desplazarse a lo largo de la arista que aumenta en mayor medida el valor de Z . En nuestro caso $Z = 300 X_1 + 500 X_2$, X_2 crece más rápido que X_1 .

b) Detenerse al llegar a la primera frontera de restricción,
 $2X_2 \leq 12$.

a) Obtener la nueva intersección entre las fronteras de restricción (0, 6).

Prueba de optimalidad ¿Hay soluciones adyacentes mejores?

SI

Armando la solución

3. *Iteración 2*: Moverse a una solución *adyacente* mejor mediante los siguientes tres pasos.

a) Entre las dos restricciones de la región factible que salen de (0, 6) desplazarse a lo largo de la arista que aumenta en mayor medida el valor de Z, es decir hacia la derecha (si vamos hacia abajo disminuiríamos el valor de Z).

b) Detenerse al llegar a la primera frontera de restricción,

$$3 X_1 + 2X_2 \leq 18$$

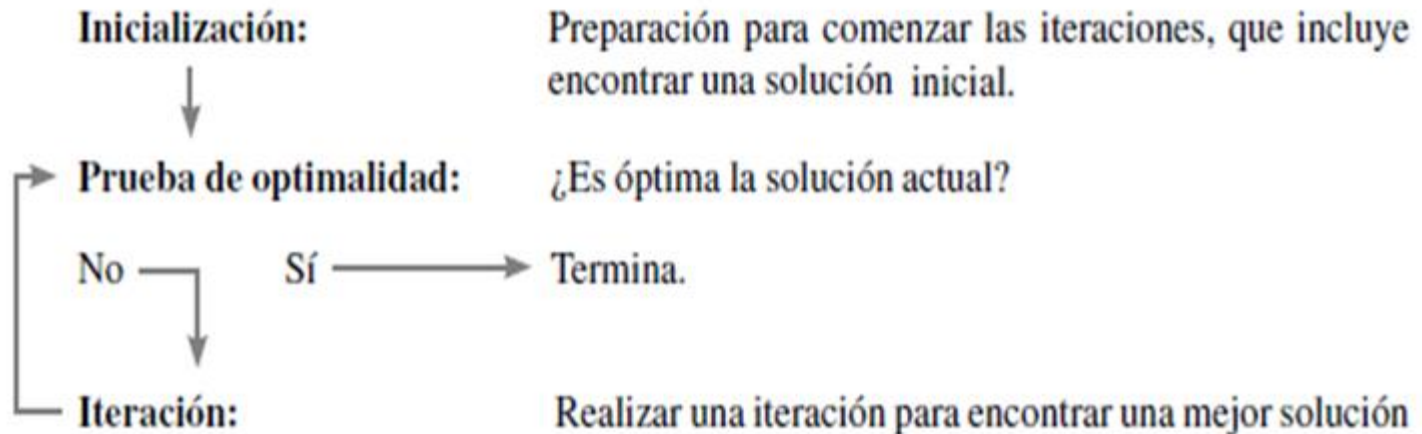
c) Obtener la nueva intersección entre las fronteras de restricción (2, 6).

Prueba de optimalidad ¿Hay soluciones adyacentes mejores?

NO -> ENCONTRAMOS NUESTRA SOLUCIÓN ÓPTIMA

Conceptos de la Solución

- Concepto 1: Solo se analizan las soluciones en los vértices. Cualquier problema con al menos una solución óptima solo requiere encontrar una de ellas.
- Concepto 2: Es un algoritmo iterativo con la siguiente estructura.



Conceptos de la Solución

- Concepto 3: Siempre que es posible, la solución inicial es el origen $(0, 0)$.
- Concepto 4: Dada una solución en un vértice, en términos de programación, es más rápido encontrar las soluciones adyacentes. De esta manera siempre nos “movemos” a través de las fronteras (restricciones) de la región factible.
- Concepto 5: El método calcula la “tasa de mejora de Z ” para saber en que dirección moverse. Si hay mejora entonces se desplaza a lo largo de la frontera adyacente con la mejor tasa.
- Concepto 6: La prueba de optimalidad consiste sólo en verificar si alguna de las fronteras conduce a una tasa *positiva* de mejoramiento de Z . Si *ninguna* lo hace, la solución FEV (Factible en un Vértice) actual es óptima.

Procedimiento Algebraico

El procedimiento algebraico del método simplex se basa en la solución de sistemas de ecuaciones por lo que convertir las restricciones funcionales de desigualdad en restricciones de igualdad equivalentes. Para esto agregaremos **variables de holgura**:

MODELO INICIAL	MODELO AUMENTADO	O bien...
$Z = 3X_1 + 5X_2$	$Z = 3X_1 + 5X_2$	$Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$
$X_1 \leq 4$	$X_1 + H_1 = 4$	$X_1 + H_1 = 4$
$2X_2 \leq 12$	$2X_2 + H_2 = 12$	$2X_2 + H_2 = 12$
$3X_1 + 2X_2 \leq 18$	$3X_1 + 2X_2 + H_3 = 18$	$3X + 2X_2 + H_3 = 18$

Vocabulario

Con las **variables de holgura** ahora creamos una **forma aumentada del modelo**, de igual manera ahora tendremos **soluciones aumentadas** que será la solución original =

variables de decisión y variables de holgura.

Ejemplo, en nuestra forma aumentada la solución en el origen sería $(0, 0, 4, 12, 18)$ porque cuando X_1 y X_2 son igual a cero, las variables de holgura H_1 , H_2 y H_3 toman los valores 4, 12 y 18 respectivamente.

Vocabulario

VARIABLES NO BÁSICAS: Son las variables iguales a cero, en nuestro ejemplo inicial X_1 y X_2 .

VARIABLES BÁSICAS: Son las variables distintas de cero, en nuestro ejemplo inicial H_1 , H_2 y H_3 .

Inicialmente tendremos la solución aumentada
(0, 0, 4, 12, 18)

Pasaje a tabla del modelo aumentado

Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado
1	-3	-5	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	4
0	0	2	0	1	0	12
0	3	2	0	0	1	18

Para el siguiente paso se agrega concepto de variables básicas y variables no básicas ya que de ellas se obtendrá los valores de X_1 y X_2 .

Entonces agregamos una columna al principio con las variables básicas, inicialmente serán las variables de holgura H_1 , H_2 y H_3 .

Las variables que no están presentes serán no básicas e iguales a cero X_1 y X_2 . Tiene sentido ya que comenzamos en el origen.

Tabla con variables básicas

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
H_1	0	1	0	1	0	0	4
H_2	0	0	2	0	1	0	12
H_3	0	3	2	0	0	1	18

- Las variables no básicas no se encuentran en la tabla por lo que se asume que toman el valor de cero.
- Encontramos la solución óptima cuando todos los elementos de la primera fila son no negativos, este no es el caso por lo que debemos comenzar con una iteración

Selecciono columna pívot

- Comenzamos la iteración seleccionando la columna pívot.
- Será seleccionado el valor **más negativo** de la primera fila.
- Es equivalente a evaluar la Tasa de Mejora de Z.
- El encabezado de la columna seleccionada contiene el valor de la variable básica entrante, en este caso X_2

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
H_1	0	1	0	1	0	0	4
H_2	0	0	2	0	1	0	12
H_3	0	3	2	0	0	1	18

Selecciono fila y elemento pivot

- Por cada renglón (sin contemplar el primero) se divide el valor de la columna resultado por el valor de la columna pivot solo cuando este último es estrictamente mayor a cero.
- El **cociente menor** será el que indicará la fila pivot.
- La fila pivot contiene la variable básica que sale, en este caso H_2 , al salir se convierte en no básica y toma el valor de cero.
- La intersección de la fila y la columna indica el elemento pivot

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Res./CP
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	
H_1	0	1	0	1	0	0	4	
H_2	0	0	2	0	1	0	12	$12/2 = 6$
H_3	0	3	2	0	0	1	18	$18/2 = 9$

Primera operación a la fila pivot

- En la primera columna se reemplaza la variable básica saliente por la entrante.
- Se requiere llevar el elemento pivot al valor 1 mediante las operaciones de la **multiplicación o división por una constante**, esta operación se repite sobre el resto de los coeficientes de la fila pivot. Si el elemento pivot ya es 1 se debe omitir este paso.

Variable Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Resultado	Fila
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	F1
H ₁	0	1	0	1	0	0	4	F2
X ₂	0	0	1	0	1/2	0	6	F3
H ₃	0	3	2	0	0	1	18	F4

- En nuestro caso multiplicamos la fila 3 por $\frac{1}{2}$. $F3 = F3 * \frac{1}{2}$.

Aplicar operaciones a las otras filas

Se lleva el resto de los coeficientes de columna pivot a cero.

Para ello se deben realizar las siguientes operaciones:

- Si el coeficiente de la columna pivot es cero entonces se deja la fila tal como esta.
- Si es distinto de cero entonces se procede como se indica:
 - Se multiplica o divide el elemento pivot por una constante.
 - Al resultado anterior le sumamos o restamos el coeficiente de la columna pivot para que resulte en cero.
 - Se repite esta operación (sin realizar modificaciones) sobre el resto de los coeficientes de la fila cuyo coeficiente se llevo a cero.

Aplicar operaciones a las otras filas

En nuestro ejemplo:

Fila 1: El coeficiente de la columna pivot es -5, por lo que realizamos la siguiente operación para toda la fila 1:

$$F1 = F1 + 5F3.$$

Fila 2: El coeficiente de la columna pivot es cero. Por lo que esta fila se deja como esta.

Fila 4: El coeficiente de la columna pivot es 2, por lo que realizamos la siguiente operación para toda la fila 4:

$$F4 = F4 - 2F3$$

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Fila
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	F1
H_1	0	1	0	1	0	0	4	F2
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	F3
H_3	0	3	0	0	-1	1	6	F4

Segunda Iteración

- Dado que aún encontramos valores negativos en fila cero debemos repetir el proceso.
- Seleccionamos la columna pivot y luego dividimos el resultado por la columna pivot para finalmente encontrar el elemento pivot.

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Res./CP
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	
H_1	0	1	0	1	0	0	4	4
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	
H_3	0	3	0	0	-1	1	6	2

- En la primera columna se reemplaza la variable básica saliente por la entrante.

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Res./CP
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	
H_1	0	1	0	1	0	0	4	4
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	
X_1	0	3	0	0	-1	1	6	2

Aplico operaciones

Se lleva el elemento pívot a 1 por lo que la fila 4 será el resultado de aplicar: $F4 = 1/3 * F4$

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Fila
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	F1
H_1	0	1	0	1	0	0	4	F2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	F3
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	F4

Aplico operaciones

Se lleva el resto de los elementos de columna pivot a cero entonces por lo que la nueva fila 2 será el resultado de aplicar: $F2 = F2 - F4$

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Fila
Z	1	-3	0	0	5/2	0	30	F1
H_1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2	F2
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	F3
X_1	0	1	0	0	-1/3	1/3	2	F4

Columna, fila y elemento pívot

Continúo llevando el resto de los elementos de columna pivot a cero $F1 = F1 + 3F4$

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Fila
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36	F1
H_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2	F2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	F3
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	F4

- Luego de realizar todas las operaciones de esta segunda iteración encontramos que en la primera fila no hay valores negativos, por lo que nos encontramos ante una solución óptima.
- Se concluye el proceso.

Solución óptima

- Todos los coeficientes de la primera fila son positivos o cero.

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Fila
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36	F1
H_1	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2	F2
X_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	F3
X_1	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2	F4

- Analizando la tabla resultante cuando observamos la columna variable básica y la columna resultado obtenemos que:
- El Z óptimo es igual a 36.
- X_1 toma un valor de 2 cuando Z es óptimo.
- X_2 toma un valor de 6 cuando Z es óptimo.
- H_1 toma un valor de 2 cuando Z es óptimo
- H_2 y H_3 son variables no básicas por lo tanto son cero
- En este caso la solución aumentada es (2, 6, 2, 0, 0)

Nótese que se llegó al mismo resultado que con el método gráfico.

Empate de variable básica entrante

El paso 1 de cada iteración elige la variable no básica que tiene el coeficiente *negativo* con el *mayor valor absoluto* en la primera fila como la variable básica entrante (pasa de ser cero a un entero mayor que cero).

Cuando hay un empate podemos elegir cualquiera de ella de manera arbitraria. Solo influirá en el camino que se seguirá a través de las aristas que rodean la región factible.

Empate de variable básica entrante

Si modificamos el problema original en el precio de venta de las mesas de la siguiente manera:

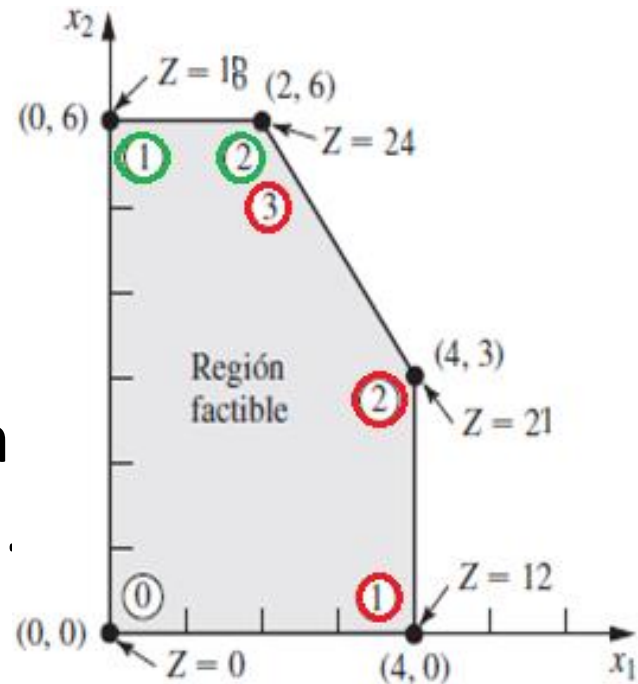
Dos hermanos están pensando en comenzar con un pequeño emprendimiento que consiste en fabricar mesas y sillas de madera para camping, las venderán a **\$300 (antes \$500)** y \$300 respectivamente....

Obtendremos la siguiente tabla:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado
Z	1	-3	-3	0	0	0	0
H_1	0	1	0	1	0	0	4
H_2	0	0	2	0	1	0	12
H_3	0	3	2	0	0	1	18

Empate de variable básica entrante

- Si elegimos X_1 nos movemos en el sentido contrario al de las agujas de reloj. Y realizaremos una iteración mas. (ROJO)
- Si elegimos X_2 nos movemos en el sentido de las agujas de reloj. (VERDE)



Empate de variable básica que sale

El paso 2 de cada iteración se selecciona el cociente menor positivo entre la columna resultado y la columna pivot para elegir la variable que pasa a ser cero (variable no básica).

Un empate implica que todas las variables en igualdad de condiciones se hacen cero al mismo tiempo. Como consecuencia tendremos las variables básicas que no fueron elegidas con valor de cero, por lo que se llamarán variables **DEGENERADAS** y como consecuencia la solución también es **DEGENERADA**.

Empate de variable básica que sale

Problemas con las variables degeneradas:

- Si una de estas variables básicas degeneradas sigue con valor de cero hasta que se selecciona como variable básica que sale en una iteración posterior, la variable básica entrante deberá también quedar con valor de cero, por lo que Z no cambiará.
- Si Z permanece igual en lugar de mejorar en cada iteración, el método símplex puede caer en un ciclo que repite la misma secuencia de soluciones en forma periódica.

Empate de variable básica que sale

Modificando el problema original:

Dos hermanos están pensando en comenzar con un pequeño emprendimiento que consiste en fabricar mesas y sillas de madera para camping, las venderán a \$200 y \$300 respectivamente. Por el momento poseen dos herramientas de banco: una sierra y un torno.

Estas herramientas limitan su producción diaria ya que la sierra puede funcionar 6 hs y el torno 3 hs. Para fabricar una mesa necesitan 1 hora de sierra y 1 hora de torno, mientras que para una silla se necesita 2 hs de sierra y 1 hora de torno. En base a esto ¿Cuál será la producción que maximizará su ganancia?

Representación tabular

	Tiempo de producción por unidad		Tiempo de producción disponible al día
Máquina	Silla	Mesa	
Sierra	2	1	6
Torno	1	1	3
Ganancia por unidad	\$300	\$200	

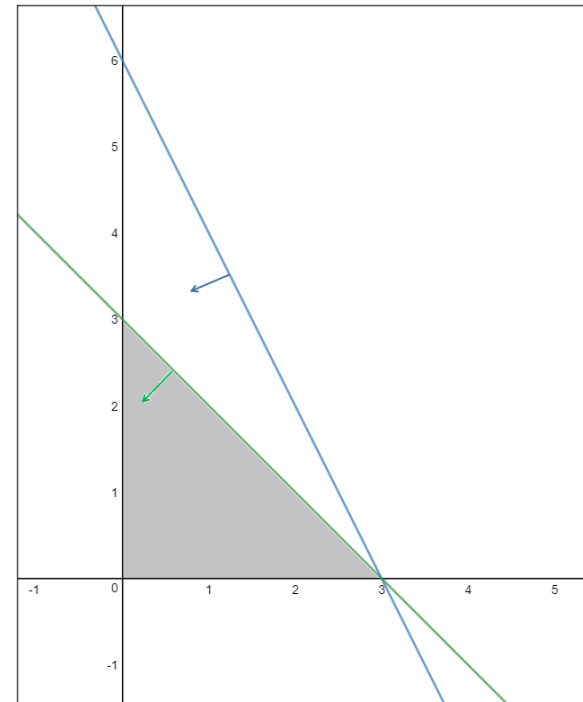
Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	Resultado
Z	1	-3	-2	0	0	0
H_1	0	2	1	1	0	6
H_2	0	1	1	0	1	3

Tratando de resolver

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	Resultado	Cociente
Z	1	-3	-2	0	0	0	
X_1	0	2	1	1	0	6	3
H_2	0	1	1	0	1	3	3

La columna pivot es X_1 , pero al momento de seleccionar la variable que sale tenemos un empate.

En este caso, si graficamos podemos observar que la primera restricción es redundante.



Resolviendo por los dos caminos

Si selecciono H_1
como fila pivót:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	Resultado
Z	1	0	-0,5	1,5	0	9
X_1	0	1	0,5	0,5	0	3
H_2	0	0	0,5	-0,5	1	0

Si selecciono H_2
como fila pivót:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	Resultado
Z	1	0	1	0	3	9
H_1	0	0	-1	1	-2	0
X_1	0	1	1	0	1	3

En este ejemplo es indistinto cual de las dos variables seleccionemos, ya que ambas llevan a la solución óptima, **pero hay casos en los que NO es así, por lo que ante esta situación particular no continuaremos iterando.**

Región factible no acotada

Existe otra posibilidad en el paso 2 de una iteración: aquella en la que *ninguna* variable califica como variable básica saliente. Esta situación puede ocurrir si la variable básica entrante puede crecer de manera *indefinida* sin que *ninguna* de las variables básicas actuales adquiera valores negativos. En la forma tabular, esto significa que *todos* los coeficientes de la columna pivote (se excluye el renglón 0) son negativos o cero.

Región factible no acotada

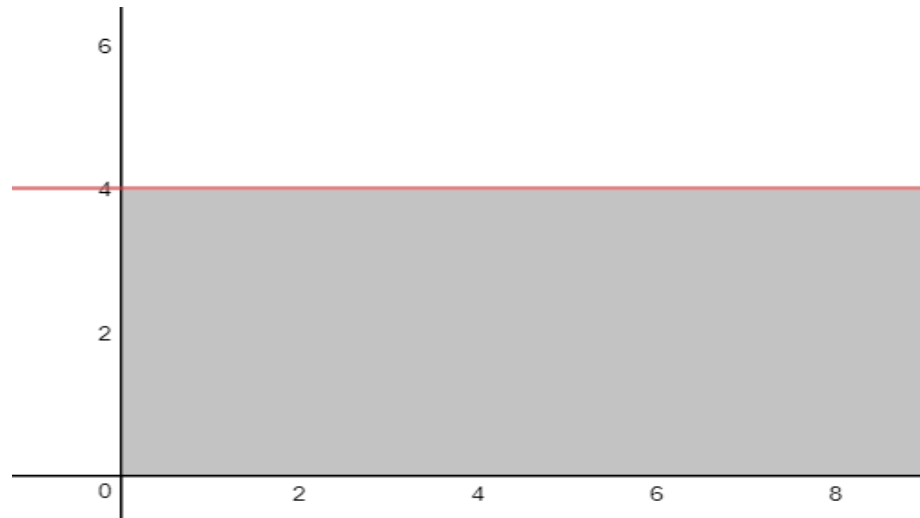
Modificando el problema original en sus restricciones de la siguiente manera:

Dos hermanos están pensando en comenzar con un pequeño emprendimiento que consiste en fabricar mesas y sillas de madera para camping, las venderán a \$500 y \$300 respectivamente. Por el momento poseen un torno de banco que limita su producción diaria ya que el mismo puede funcionar 4hs. Para fabricar una silla se necesitan 2hs de torno. En base a esto ¿Cuál será la producción que maximizará su ganancia?

Región factible no acotada

Observar que tenemos X_1 como variable entrante pero no hay ninguna variable que pueda salir y que gráficamente la región factible no esta acotada:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	Resultado
Z	1	-5	-3	0	0
H_1	0	0	2	1	4



Soluciones óptimas múltiples

Siempre que un problema tiene más de una solución óptima, al menos una variable no básica tiene coeficiente cero en el renglón (0) final, de manera que si aumenta su valor, el valor de la función Z no cambia. Por lo tanto, estas otras soluciones BF óptimas se pueden identificar mediante iteraciones adicionales del método símplex, en las que se elige una variable no básica con coeficiente cero como variable básica entrante.

Soluciones óptimas múltiples

Si modificamos el problema original en el precio de venta de las mesas de la siguiente manera:

Dos hermanos están pensando en comenzar con un pequeño emprendimiento que consiste en fabricar mesas y sillas de madera para camping, las venderán a \$200 y \$300 respectivamente.

Por ende obtendremos la siguiente tabla:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
H_1	0	1	0	1	0	0	4
H_2	0	0	2	0	1	0	12
H_3	0	3	2	0	0	1	18

Soluciones óptimas múltiples

Iteramos:

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Cociente
Z	1	-3	-2	0	0	0	0	
H_1	0	1	0	1	0	0	4	4
H_2	0	0	2	0	1	0	12	
H_3	0	3	2	0	0	1	18	6

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Cociente
Z	1	0	-2	3	0	0	12	
X_1	0	1	0	1	0	0	4	
H_2	0	0	2	0	1	0	12	6
X_2	0	0	2	-3	0	1	6	3

Soluciones óptimas múltiples

Variable Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Resultado	Cociente
Z	1	0	0	0	0	1	18	
X_1	0	1	0	1	0	0	4	
H_2	0	0	0	3	1	-1	6	
X_2	0	0	1	-1,5	0	0,5	3	

Llegamos a nuestra solución óptima en el punto aumentado (4,3,0,6,0) con resultado 18 ya que no hay coeficientes negativos en la función objetivo, pero al observar que H_1 es una variable no básica igual a cero en la función objetivo (Naranja) sabemos que podemos realizar otra iteración para encontrar el otra solución.

Soluciones óptimas múltiples

Seguimos iterando tomando como variable entrante H_1 :

Variable Básica	Z	X1	X2	H1	H2	H3	Resultado	Cociente
Z	1	0	0	0	0	1	18	
X1	0	1	0	1	0	0	4	4
H1	0	0	0	3	1	-1	6	2
X2	0	0	1	-1,5	0	0,5	3	

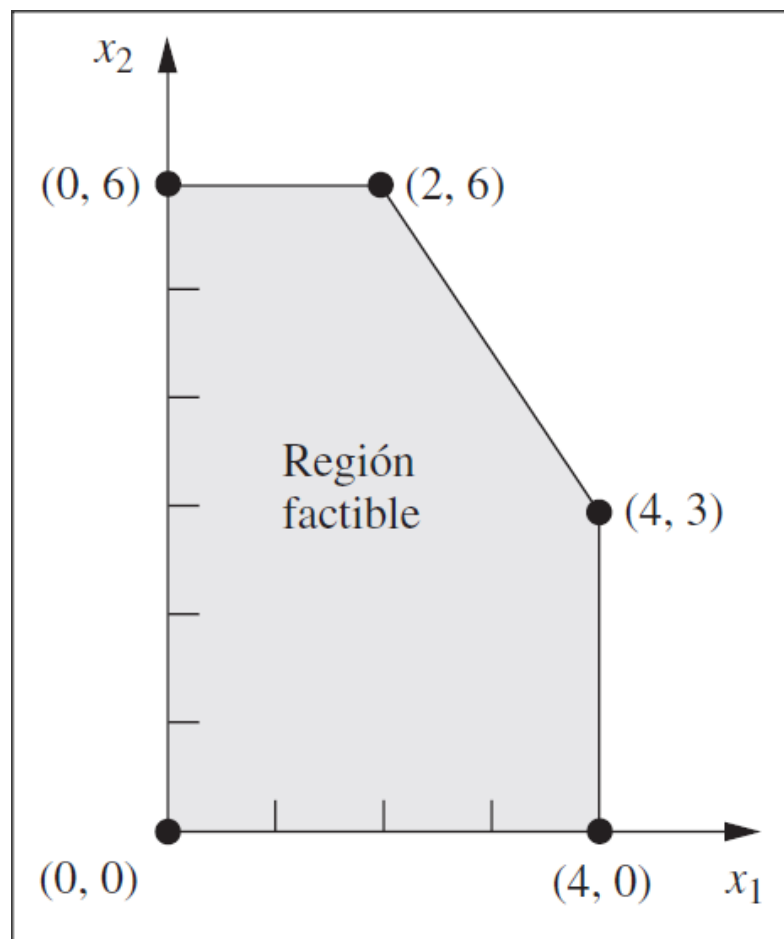
Soluciones óptimas múltiples

Variable Básica	Z	X1	X2	H1	H2	H3	Resultado	Cociente
Z	1	0	0	0	0	1	18	
X1	0	1	0	0	-0,333	0,3333	2	
H1	0	0	0	1	0,3333	-0,333	2	
X2	0	0	1	0	0,5	0	6	

El resultado sigue siendo 18 pero el punto aumentado ahora es (2,6,2,0,0) y esta es otra solución óptima por no tener valores negativos en la función objetivo. Pero ahora H_2 es una variable no básica igual a cero en la función objetivo (Naranja). Si realizamos otra iteración seleccionando a H_2 como variable entrante volveremos a la tabla anterior y entraríamos en un ciclo.

Soluciones óptimas múltiples

Gráficamente la solución óptima son los puntos comprendidos en la recta que se forma por los puntos $(2,6)$ y $(4,3)$.



Conclusiones

- El método simplex puede ser conceptualizado de una forma geométrica - gráfica.
- Básicamente recorre de un punto inicial las soluciones posibles en los vértices cuando detecta una mejora en la tasa de Z .
- El método sirve para n dimensiones y es sencillo de implementar.