TABLA 4.10 Tabla símplex completa para obtener todas las soluciones BF óptimas con $c_2 = 2$, en el problemas de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho	¿Solución óptima?
0	Z	(0)	1	−3	−2	0	0	0	0	No
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	−2	3	0	0	12	No
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	−3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	**0**	0	1	18	Sí
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	−1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
Extra	Z	(0)	1	0	0	0	**0**	1	18	Sí
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

se desea) mediante iteraciones adicionales del método símplex, en las que cada vez se elige una variable no básica con coeficiente cero como variable básica entrante.[13]

A manera de ilustración, considere el caso anterior del problema de la Wyndor Glass Co., donde la función objetivo se cambia a $Z = 3x_1 + 2x_2$. En la tabla 4.10 se muestran las primeras tres tablas que obtiene el método símplex antes de detenerse con una solución básica factible óptima. No obstante, como una variable no básica (x_3) de esa iteración tiene coeficiente cero en el renglón 0, se realiza una iteración más en esa misma tabla para identificar la otra solución BF óptima. En consecuencia, las dos soluciones básicas factibles óptimas son (4, 3, 0, 6, 0) y (2, 6, 2, 0, 0), y ambas producen un valor de $Z = 18$. Observe que la última tabla símplex también tiene una variable *no básica* (x_4) con coeficiente cero en el renglón (0). Esta situación es inevitable porque las iteraciones adicionales no modifican el renglón 0, y cada una de las variables básicas que salen conserva su coeficiente cero. Si ahora se eligiera x_4 como variable básica entrante, sólo se regresaría a la tercera tabla símplex. (Verifique esto.) Por lo tanto, estas dos son las únicas soluciones BF óptimas, mientras que todas *las demás* son una combinación convexa de ellas.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w_1(2, 6, 2, 0, 0) + w_2(4, 3, 0, 6, 0),$$
$$w_1 + w_2 = 1, \qquad w_1 \geq 0, \qquad w_2 \geq 0.$$

4.6 ADAPTACIÓN A OTRAS FORMAS DE MODELO

Hasta ahora se han presentado los detalles del método símplex bajo el supuesto de que el problema se encuentra en nuestra forma estándar (maximizar Z sujeta a restricciones funcionales de la forma

[13] Si una de estas iteraciones no tiene una variable básica *saliente*, esto indica que la región factible es no acotada y la variable básica entrante puede crecer de manera indefinida sin cambiar el valor de Z.

$\leq$ y restricciones de no negatividad sobre todas las variables) con $b_i \geq 0$ para toda $i = 1, 2, \ldots, m$. En esta sección se establecerá cómo hacer los ajustes requeridos a otras formas legítimas de modelos de programación lineal. Se verá que estos ajustes se pueden hacer en el paso inicial, y que el resto del método símplex se aplica exactamente como se aprendió.

El único problema serio que introducen las otras formas de restricciones funcionales (formas con $=$ o $\geq$, o con lados derechos negativos) es identificar una *solución inicial básica factible*. Antes era muy sencillo encontrar esta solución inicial al hacer que las variables de holgura fueran las variables básicas iniciales, donde cada una era igual a la constante *no negativa* del lado derecho de la ecuación correspondiente. Ahora debe hacerse algo más. El enfoque estándar que se utiliza en estos casos es la **técnica de variables artificiales**. Ésta construye un *problema artificial* más conveniente mediante la introducción de una variable ficticia (llamada *variable artificial*) en cada restricción que lo requiera. Esta nueva variable se introduce sólo con el fin de que sea la variable básica inicial de esa ecuación. Las restricciones usuales de no negatividad también se aplican sobre estas variables y la función objetivo se modifica para que imponga una penalización exorbitante en el caso de que adquieran valores mayores que cero. De manera automática, las iteraciones del método símplex fuerzan a las variables artificiales a desaparecer (a volverse cero) una a una, hasta que todas quedan fuera de la solución; después de este paso se resuelve el problema *real*.

Para ilustrar la técnica de las variables artificiales, primero se considera el caso en que la única forma no estándar del problema es la presencia de una o más restricciones en forma de igualdad.

Restricciones en forma de igualdad

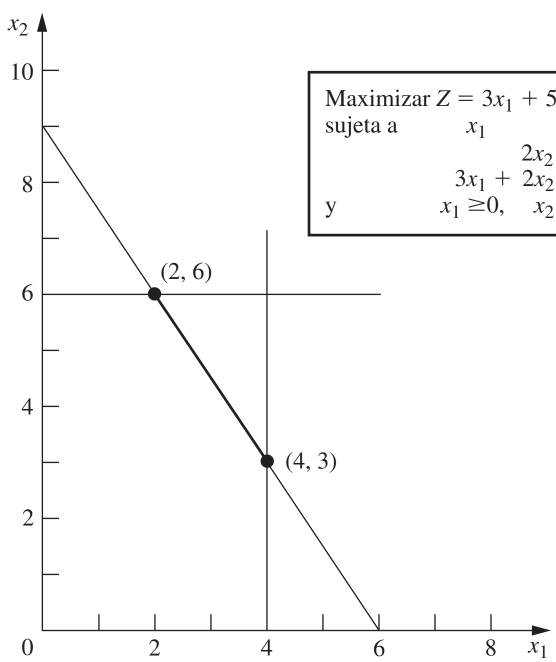
En realidad, cualquier restricción en forma de igualdad

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

es equivalente a dos restricciones de desigualdad:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$$
$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i.$$

FIGURA 4.3
Cuando la tercera restricción funcional se convierte en igualdad, la región factible del problema de la Wyndor Glass Co. se convierte en el segmento de recta entre (2, 6) y (4, 3).



Sin embargo, en lugar de hacer esta sustitución e incrementar con ello el número de restricciones, es más conveniente utilizar la técnica de la variable artificial que se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Suponga que se modifica el problema de la Wyndor Glass Co. de la sección 3.1, de manera que *se requiere* que la planta 3 se use a toda su capacidad. El único cambio que sufre el modelo de programación lineal es que la tercera restricción, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, se convierte en una restricción de igualdad

$$3x_1 + 2x_2 = 18,$$

con lo que el modelo completo se convierte en el que se muestra en la esquina superior derecha de la figura 4.3. Esta figura también muestra la región factible con tinta más oscura, y ahora consiste *nada más* en el segmento que conecta los puntos (2, 6) y (4, 3).

Después de introducir al sistema de ecuaciones las variables de holgura que todavía se necesitan para las restricciones de desigualdad, la forma aumentada del problema se convierte en

$$\begin{array}{llcl}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & & = 0 \\
(1) & \quad x_1 \qquad + x_3 & & = 4 \\
(2) & \qquad\quad 2x_2 \qquad + x_4 & & = 12 \\
(3) & \quad 3x_1 + 2x_2 & & = 18.
\end{array}$$

Desafortunadamente, estas ecuaciones no tienen una solución BF inicial obvia porque en la ecuación (3) ya no se tiene una variable de holgura para usar como variable básica inicial. Es necesario encontrar una solución BF inicial para comenzar con el método símplex.

Este obstáculo se vence de la siguiente manera.

Obtención de una solución BF inicial. El procedimiento es construir un **problema artificial** que tenga la misma solución óptima que el problema real, pero a este último se le deben hacer dos modificaciones.

1. Se aplica la **técnica de la variable artificial** mediante la introducción de una **variable artificial** *no negativa* (denotada por $\bar{x}_5$)[14] en la ecuación (3), como si fuera una variable de holgura

   $$(3) \qquad 3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18.$$

2. Se asigna una *penalización enorme* al hecho de tener $\bar{x}_5 > 0$ para cambiar la función objetivo

   $$Z = 3x_1 + 5x_2 \text{ a}$$

   $$Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5,$$

   donde M representa en forma simbólica un número positivo *muy grande*. (Este método que fuerza a $\bar{x}_5$ hasta llegar a $\bar{x}_5 = 0$ en la solución óptima se llama **método de la gran *M***.)

Ahora se encuentra la solución óptima del problema real con la aplicación del método símplex al problema artificial; la solución BF inicial es la siguiente:

Solución BF inicial
Variables no básicas: $x_1 = 0, \quad x_2 = 0$
Variables básicas: $x_3 = 4, \quad x_4 = 12, \quad \bar{x}_5 = 18.$

Como $\bar{x}_5$ asume el papel de la variable de holgura en la tercera restricción del problema artificial, esta restricción es equivalente a $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (igual que en el problema original de la Wyndor Glass Co. de la sección 3.1). A continuación se muestra el problema artificial que resulta (antes de aumentarlo) junto con el problema real.

[14] Se distinguirán siempre las variables artificiales mediante una barra sobre ellas.

El problema real	*El problema artificial*
Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$, sujeta a $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$ y $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$	Definir $\bar{x}_5 = 18 - 3x_1 - 2x_2$. Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2 - M\bar{x}_5$, sujeta a $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (así $3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18$) y $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \bar{x}_5 \geq 0.$

En consecuencia, igual que en la sección 3.1, la región factible de (x_1, x_2) en el problema artificial es la que se muestra en la figura 4.4. La única porción de esta región factible que coincide con la del problema original es cuando $\bar{x}_5 = 0$ (de manera que $3x_1 + 2x_2 = 18$).

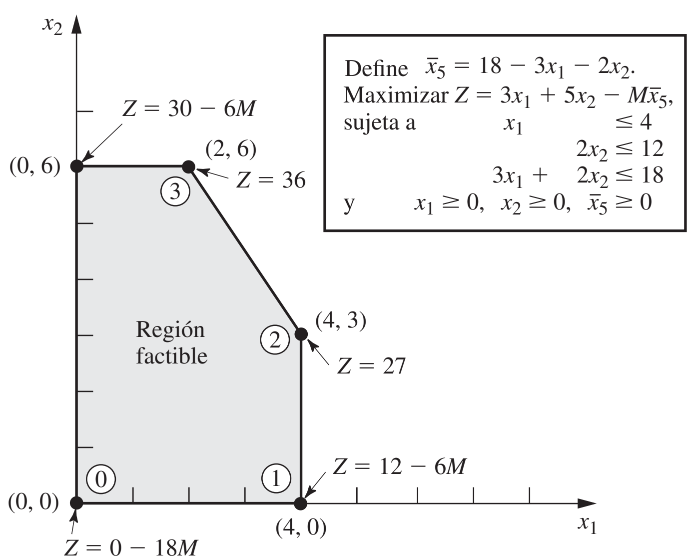
La figura 4.4 muestra, además, el orden en el que el método símplex examina las soluciones FEV (o las soluciones BF después de aumentar el problema), donde los números en los círculos identifican qué iteración obtuvo esa solución. Observe que en este caso, el método símplex se mueve en sentido positivo (contrario al de las manecillas del reloj) mientras que en el problema original se movía en sentido negativo (vea la figura 4.2). La razón de esta diferencia es el término adicional $-M\bar{x}_5$ en la función objetivo del problema artificial.

Antes de aplicar el método símplex y comprobar que sigue el camino que se muestra en la figura 4.4, es necesario el siguiente paso de preparación.

Conversión de la ecuación (0) a la forma apropiada. El sistema de ecuaciones después de aumentar el problema artificial es

$$
\begin{array}{lrcl}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & + M\bar{\boldsymbol{x}}_5 & = 0 \\
(1) & x_1 \quad + \boldsymbol{x}_3 & & = 4 \\
(2) & 2x_2 \quad + \boldsymbol{x}_4 & & = 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 & + \quad \bar{\boldsymbol{x}}_5 & = 18
\end{array}
$$

FIGURA 4.4
Esta gráfica muestra la región factible y la secuencia de soluciones FEV (⓪, ①, ②, ③) que examina el método símplex para el problema artificial que corresponde al problema real de la figura 4.3.



donde las variables básicas iniciales (x_3, x_4, $\bar{x}_5$) se muestran en **negritas**. Este sistema todavía no está en la forma apropiada de eliminación de Gauss porque el coeficiente de $\bar{x}_5$ es diferente de cero en la ecuación (0). Recuerde que todas las variables básicas deben eliminarse de la ecuación (0) con operaciones algebraicas antes de que el método símplex aplique la prueba de optimalidad o encuentre la variable básica entrante. Esta eliminación es necesaria para que el negativo del coeficiente de cada variable no básica proporcione la tasa a la que Z aumenta si esa variable no básica se incrementa a un valor mayor que 0 y se ajustan los valores de las variables básicas.

Para eliminar algebraicamente $\bar{x}_5$ de la ecuación (0) se resta de esta ecuación (0) la ecuación (3) multiplicada por M.

$$
\begin{array}{lr}
 & Z - 3x_1 - 5x_2 + M\bar{x}_5 = 0 \\
 & -M(3x_1 + 2x_2 + \bar{x}_5 = 18) \\
\hline
\text{Nueva (0)} & Z - (3M + 3)x_1 - (2M + 5)x_2 = -18M.
\end{array}
$$

Aplicación del método símplex. Esta nueva ecuación (0) presenta a Z *sólo* en términos de las variables no básicas (x_1, x_2),

$$Z = -18M + (3M + 3)x_1 + (2M + 5)x_2.$$

Como $3M + 3 > 2M + 5$ (recuerde que M representa un número muy grande), si se aumenta x_1 Z crece a una tasa más rápida que al aumentar x_2, de manera que se elige x_1 como la variable básica entrante. Esto causa un movimiento de (0, 0) a (4, 0) en la iteración 1, como se muestra en la figura 4.4, y Z se incrementa en $4(3M + 3)$.

Las cantidades que incluyen el valor M nunca aparecen en el sistema de ecuaciones en otro renglón que no sea el (0), por lo que sólo tienen que tomarse en cuenta en la prueba de optimalidad y en el momento de determinar la variable básica entrante. Una manera de manejar estas cantidades es asignar a M algún valor numérico (muy grande) y trabajar con las cantidades que resulten en la ecuación (0) en la forma acostumbrada. Sin embargo, este enfoque puede acarrear errores de

TABLA 4.11 Conjunto completo de tablas símplex del problema de la figura 4.4

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	Lado derecho
0	Z	(0)	1	$-3M - 3$	$-2M - 5$	0	0	0	$-18M$
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	$\bar{x}_5$	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	0	$-2M - 5$	$3M + 3$	0	0	$-6M + 12$
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	$\bar{x}_5$	(3)	0	0	2	-3	0	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	$-\frac{9}{2}$	0	$M + \frac{5}{2}$	27
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
3	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	$M + 1$	36
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6

redondeo significativos que a su vez pueden invalidar la prueba de optimalidad. Por lo tanto, es mejor hacer lo que se acaba de explicar, esto es, expresar cada coeficiente de la ecuación (0) como una función lineal $aM + b$ de la cantidad *simbólica* M cuando se registra y actualiza por separado el valor numérico de: 1) el factor *multiplicativo* a y 2) el término *aditivo* b. Como se supone que M es tan grande que b es despreciable comparado con M cuando a es diferente de 0, las decisiones en la prueba de optimalidad y la elección de la variable básica entrante se hacen sólo con los valores de los factores *multiplicativos* en la forma usual. La única excepción ocurre cuando hay un empate que se rompe cuando se utilizan los factores *aditivos*.

En la tabla 4.11 se muestra la tabla símplex que resulta al aplicar esta técnica al ejemplo. Observe que la variable artificial $\bar{x}_5$ es una *variable básica* ($\bar{x}_5 > 0$) en las dos primeras tablas símplex y *no básica* ($\bar{x}_5 = 0$) en las últimas dos. En consecuencia, las dos primeras soluciones BF de este problema artificial son *no factibles* para el problema real mientras que las dos últimas son soluciones BF para el problema real.

Este ejemplo incluyó sólo una restricción de igualdad. Si un modelo de programación lineal tiene más, cada una debe manejarse de la misma manera. (Si el lado derecho es negativo, primero se multiplican ambos lados por -1.)

Lados derechos negativos

La técnica que acaba de presentarse para manejar una restricción de igualdad con lado derecho negativo (esto es, multiplicar ambos lados por -1) también se puede usar con las restricciones de desigualdad con lado derecho negativo. Si se multiplican ambos lados de una desigualdad por -1 se invierte el sentido de la desigualdad; es decir, $\leq$ cambia a $\geq$ o viceversa. Por ejemplo, al hacerlo con la restricción

$$x_1 - x_2 \leq -1 \qquad (\text{esto es, } x_1 \leq x_2 - 1)$$

se obtiene la restricción equivalente

$$-x_1 + x_2 \geq 1 \qquad (\text{esto es, } x_2 - 1 \geq x_1)$$

pero ahora el lado derecho es positivo. Cuando se tienen lados derechos no negativos para todas las restricciones funcionales, el método símplex puede comenzar porque (después de aumentar) estos lados derechos se convierten en los valores correspondientes a las *variables básicas iniciales*, que deben satisfacer las restricciones de no negatividad.

A continuación se estudiará cómo aumentar las restricciones del tipo $\geq$ como $-x_1 + x_2 \geq 1$, con la ayuda de la técnica de variables artificiales.

Restricciones funcionales de la forma $\geq$

Para ilustrar la manera en que la técnica de variables artificiales maneja las restricciones de la forma $\geq$ se usará el modelo del diseño de terapia de radiación para Mary, que se presentó en la sección 3.4. Por conveniencia se repite el modelo y se señala con un recuadro la restricción de interés en este caso.

Ejemplo de terapia de radiación

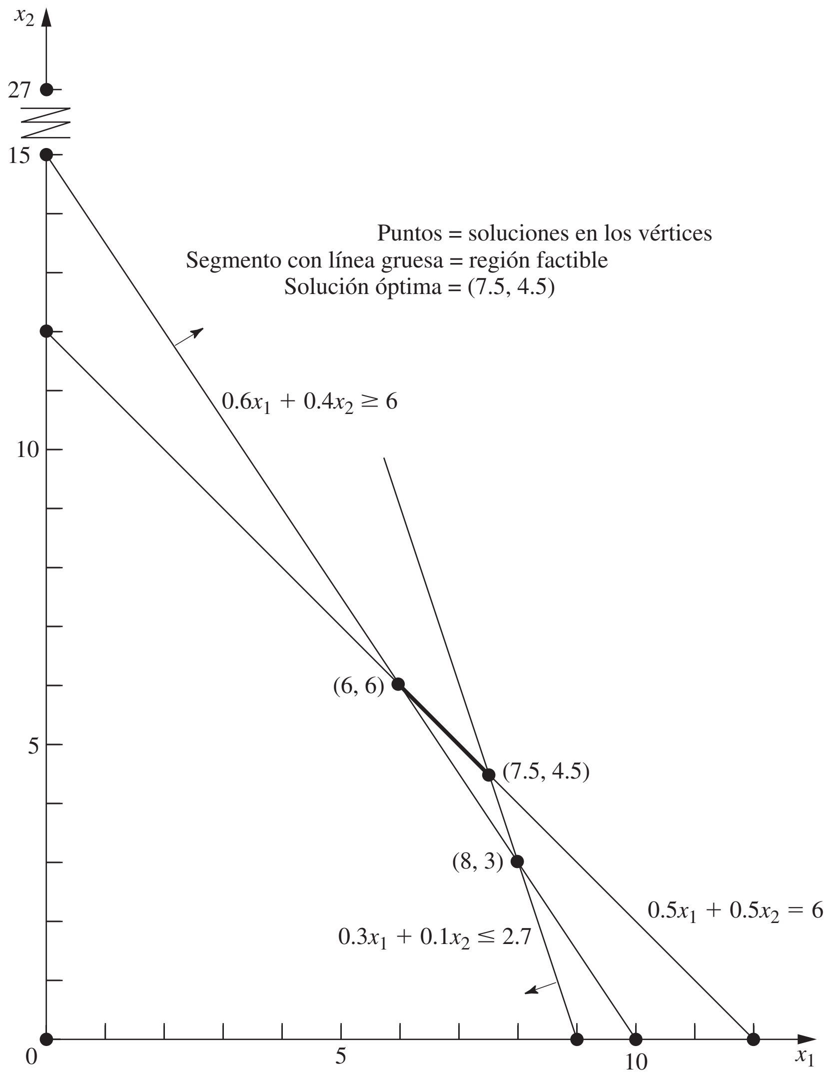
Minimizar $\quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2,$

sujeta a

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$
$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$
$$\boxed{0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$



■ **FIGURA 4.5**
Gráfica del ejemplo de terapia de radiación y sus soluciones en los vértices.

En la figura 4.5 se repite la solución gráfica de este ejemplo (que se muestra en la figura 3.12 con algunas diferencias). Las tres rectas de la figura, junto con los dos ejes constituyen las cinco fronteras de restricción del problema. Los puntos dibujados en la intersección de cada par de restricciones son las *soluciones en los vértices*. Las únicas dos *soluciones factibles* en un vértice son (6, 6) y (7.5, 4.5) y la región factible es el segmento que une estos dos puntos. La solución óptima es $(x_1, x_2) = (7.5, 4.5)$, con $Z = 5.25$.

Muy pronto se mostrará la manera en que el método símplex resuelve este problema a partir de la solución directa del problema artificial correspondiente. No obstante, primero se describirá cómo manejar la tercera restricción.

El enfoque involucra la introducción de *dos* variables: una variable de exceso x_5 (definida como $x_5 = 0.6x_1 + 0.4x_2 - 6$) y una variable artificial $\bar{x}_6$, como se verá en seguida.

$$
\begin{array}{llll}
 & 0.6x_1 + 0.4x_2 & \geq 6 & \\
\rightarrow & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 & = 6 & (x_5 \geq 0) \\
\rightarrow & 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + \bar{x}_6 & = 6 & (x_5 \geq 0,\ \bar{x}_6 \geq 0).
\end{array}
$$

Aquí, x_5 se llama **variable de exceso** porque resta el excedente del lado izquierdo sobre el derecho para convertir la restricción de desigualdad en una de igualdad equivalente. Una vez que se logra esta conversión se introduce una variable artificial igual que para las restricciones de igualdad.

Una vez que se introduce la variable de holgura x_3 en la primera restricción, se inserta una variable artificial $\bar{x}_4$ en la segunda restricción y se aplica el método de la gran M; el problema artificial completo (en la forma aumentada) es

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6, \\ \text{sujeta a} & 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad = 2.7 \\ & 0.5x_1 + 0.5x_2 \qquad + \bar{x}_4 \qquad\qquad = 6 \\ & 0.6x_1 + 0.4x_2 \qquad\qquad - x_5 + \bar{x}_6 = 6 \end{array}$$

$$\text{y} \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0.$$

Observe que los coeficientes de las variables artificiales en la función objetivo son $+M$, en lugar de $-M$, porque ahora se debe minimizar Z. En consecuencia, aun cuando es posible que $\bar{x}_4 > 0$ y/o $\bar{x}_6 > 0$ sea una solución factible para el problema artificial, la unidad de penalización tan grande de $+M$ evita que esto ocurra en una solución óptima.

Como siempre, la introducción de variables artificiales amplía la región factible. Compare las restricciones sobre (x_1, x_2) en el problema real con las restricciones correspondientes del problema artificial.

Restricciones sobre (x_1, x_2) *del problema real*	*Restricciones sobre* (x_1, x_2) *del problema artificial*
$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$
$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$	$0.5x_1 + 0.5x_2 \leq 6$ $\quad$ (= se cumple si $\bar{x}_4 = 0$)
$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$	No hay restricción (excepto cuando $\bar{x}_6 = 0$)
$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$	$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$

La introducción de la variable artificial $\bar{x}_4$ para que asuma el papel de la variable de holgura en la segunda restricción, permite valores de (x_1, x_2) *por debajo* de la recta $0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$ de la figura 4.5. La introducción de x_5 y $\bar{x}_6$ en la tercera restricción del problema real (y el movimiento de estas variables al lado derecho) lleva a la ecuación

$$0.6x_1 + 0.4x_2 = 6 + x_5 - \bar{x}_6.$$

Debido a que la única restricción sobre x_5 y $\bar{x}_6$ es que sean no negativas, su diferencia $x_5 - \bar{x}_6$ puede ser un número positivo o negativo. Entonces, $0.6x_1 + 0.4x_2$ puede tomar cualquier valor, lo que tiene el efecto de eliminar la tercera restricción del problema artificial y permitir puntos en los dos lados de la recta $0.6x_1 + 0.4x_2 = 6$ en la figura 4.5. (Se conserva la tercera restricción del sistema de ecuaciones porque más adelante volverá a ser relevante, después de que el método de la gran M lleve a $\bar{x}_6$ a cero.) En consecuencia, la región factible del problema artificial es el poliedro completo de la figura 4.5 cuyos vértices son (0, 0), (9, 0), (7.5, 4.5) y (0, 12).

Como ahora el origen es factible para el problema artificial, el método símplex comienza con (0, 0) como la solución FEV inicial, es decir, con $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (0, 0, 2.7, 6, 0, 6)$ como solución BF inicial. (El propósito de crear el problema artificial es hacer que el origen sea factible para tener un punto de partida conveniente para el método símplex.) Después se seguirá la trayectoria del método símplex desde el origen hasta la solución óptima para los dos problemas, el artificial y el real. Pero primero, ¿cómo maneja el método símplex la *minimización*?

Minimización

Una manera directa de minimizar Z con el método símplex es cambiar los roles de los coeficientes negativos y positivos en el renglón 0, tanto para la prueba de optimalidad como para el paso 1 de una iteración. Sin embargo, en lugar de cambiar las instrucciones del método símplex para este caso, se presentará una manera sencilla de convertir cualquier problema de minimización en un problema equivalente de maximización:

$$\textit{Minimizar} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

es equivalente a

$$\text{maximizar} \qquad -Z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)x_j;$$

es decir, las dos formulaciones llevan a la(s) misma(s) solución(es) óptima(s).

Las dos formulaciones son equivalentes porque mientras más pequeña es Z, más grande es $-Z$; entonces, la solución que da el *menor* valor para Z dentro de la región factible, también debe dar el *mayor* valor para $-Z$ en esta región.

Por lo tanto, en el ejemplo de terapia de radiación se debe hacer el siguiente cambio en la formulación:

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \rightarrow & \text{Maximizar} & -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2. \end{array}$$

Después de introducir las variables artificiales $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ y de aplicar el método de la gran M, la conversión correspondiente es

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimizar} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \rightarrow & \text{Maximizar} & -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6. \end{array}$$

Solución del ejemplo de terapia de radiación

El ejemplo está casi listo para que se le aplique el método símplex. Si se usa la forma de maximización que se acaba de obtener, el sistema de ecuaciones completo es

$$\begin{array}{llllllll} (0) & -Z + 0.4x_1 + 0.5x_2 & & + M\bar{\boldsymbol{x}}_4 & & & + M\bar{\boldsymbol{x}}_6 & = 0 \\ (1) & \ 0.3x_1 + 0.1x_2 & + \boldsymbol{x}_3 & & & & & = 2.7 \\ (2) & \ 0.5x_1 + 0.5x_2 & & + \bar{\boldsymbol{x}}_4 & & & & = 6 \\ (3) & \ 0.6x_1 + 0.4x_2 & & & & - x_5 & + \bar{\boldsymbol{x}}_6 & = 6. \end{array}$$

Las variables básicas $(x_3, \bar{x}_4, \bar{x}_6)$ de la solución BF inicial (para este problema artificial) se muestran en **negritas**.

Observe que este sistema de ecuaciones todavía no está en la forma apropiada de eliminación gaussiana para iniciar el método símplex, puesto que todavía deben eliminarse las variables básicas $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ de la ecuación (0) de manera algebraica. Como $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ tienen coeficiente M se tienen que restar de la ecuación (0), las ecuaciones (2) *y* (3), *ambas* multiplicadas por M. A continuación se resumen los cálculos de todos los coeficientes (y los lados derechos), en donde los vectores son los renglones relevantes de la tabla símplex correspondiente al sistema de ecuaciones anterior.

Renglón 0:

$$\begin{array}{rrrrrrr} [0.4, & 0.5, & 0, & M, & 0, & M, & 0] \\ -M[0.5, & 0.5, & 0, & 1, & 0, & 0, & 6] \\ -M[0.6, & 0.4, & 0, & 0, & -1, & 1, & 6] \\ \hline \text{Nuevo renglón } 0 = [-1.1M + 0.4, & -0.9M + 0.5, & 0, & 0, & M, & 0, & -12M] \end{array}$$

La tabla símplex inicial que resulta, lista para comenzar el método símplex, se muestra en la tabla 4.12. Al aplicar el método símplex en la forma acostumbrada se obtiene la secuencia de tablas símplex que aparecen en el resto de la tabla 4.12. En cuanto a la prueba de optimalidad y la elección de la variable básica entrante en cada iteración, las cantidades que incluyen M se tratan tal como se explicó para la tabla 4.11. En particular, siempre que M está presente, sólo se usa su factor multiplicativo a menos que haya un empate, en cuyo caso el empate se rompe con los términos aditivos correspondientes. Un empate de este tipo ocurre en la última selección de la variable básica entrante (vea la penúltima tabla símplex) en donde los coeficientes de x_3 y x_5 en el renglón 0 tienen el mismo factor multiplicativo de $-\frac{5}{3}$. Cuando se comparan los términos aditivos, $\frac{11}{6} < \frac{7}{3}$, se selecciona x_5 como la variable básica entrante.

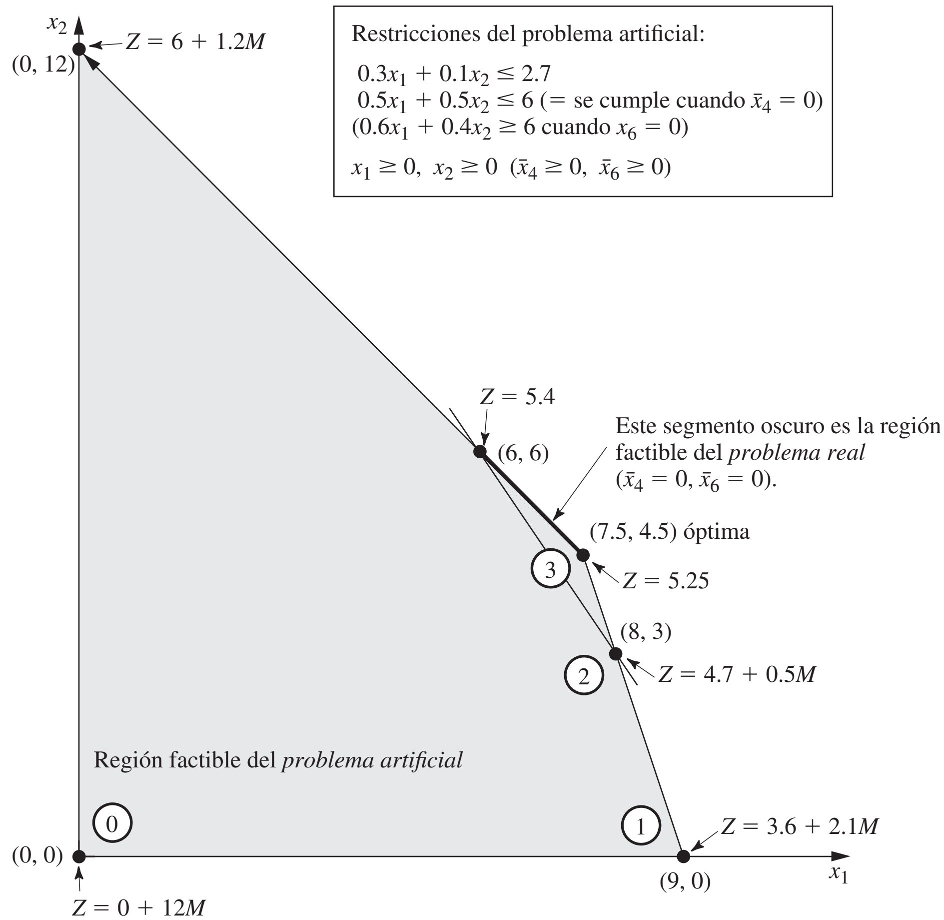
■ **TABLA 4.12** **El método de la gran *M* en el ejemplo de terapia de radiación**

Iteración	Variable básica	Ec.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado derecho
0	Z	(0)	-1	$-1.1M + 0.4$	$-0.9M + 0.5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	$-2.1M - 3.6$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{7}{3}$	0	$-\frac{5}{3}M + \frac{11}{6}$	$\frac{8}{3}M - \frac{11}{6}$	$-0.5M - 4.7$
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0.5	$M - 1.1$	0	M	-5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	-5	3	0	0	4.5

Observe en la tabla 4.12 la progresión de valores de las variables artificiales $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ y de Z. Se comienza con valores grandes, $\bar{x}_4 = 6$ y $\bar{x}_6 = 6$, con $Z = 12M$ ($-Z = -12M$). La primera iteración reduce de manera considerable estos valores. El método de la M logra hacer que $\bar{x}_6$ sea cero (como una nueva variable no básica) en la segunda iteración y en la siguiente hace lo mismo con $\bar{x}_4$. Con $\bar{x}_4 = 0$ y $\bar{x}_6 = 0$ se garantiza que la solución básica que se obtuvo en la última tabla símplex es factible para el problema real. Debido a que cumple con la prueba de optimalidad, también es óptima.

Ahora se puede ver lo que el método de la gran M ha hecho en la gráfica de la figura 4.6. Al iniciar, la región factible del problema artificial tiene cuatro soluciones FEV, (0, 0), (9, 0), (0, 12) y (7.5, 4.5), y después sustituye las primeras tres con dos soluciones FEV nuevas, (8, 3), (6, 6), después de que $\bar{x}_6$ decrece hasta $\bar{x}_6 = 0$ de manera que $0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$ se convierte en una restricción adicional. (Observe que las tres soluciones FEV sustituidas, (0, 0), (9, 0) y (0, 12), eran, en realidad, soluciones *no factibles* en los vértices del problema real que se presentó en la figura 4.5.) Si se comienza con el origen como una solución FEV inicial conveniente para el problema artificial, el proceso se mueve por la frontera a las otras tres soluciones FEV, (9, 0), (8, 3) y (7.5, 4.5). La última de éstas es la primera que también es factible para el problema real. Por coincidencia, esta primera solución factible resulta óptima, por lo que no se necesitan más iteraciones.

En el caso de otros problemas con variables artificiales, puede ser necesario realizar iteraciones adicionales para llegar a una solución óptima después de obtener la primera solución factible del problema real. (Éste fue el caso del ejemplo resuelto en la tabla 4.11.) De esta forma, puede pensarse que el método de la gran M tiene dos fases. En la *primera fase*, todas las variables artificiales se hacen cero (debido a la penalización de M por unidad al ser mayores que cero) con el fin de obtener una solución básica factible inicial para el problema *real*. En la *segunda fase* todas las variables artificiales se mantienen en cero (por esta misma penalización), mientras que el método símplex genera una secuencia de soluciones BF que llevan a la solución óptima. El *método de las dos fases* que se describe a continuación es un procedimiento directo para realizar estas dos fases sin siquiera introducir la M de una manera explícita.



■ **FIGURA 4.6**
La gráfica muestra la región factible y la secuencia de soluciones FEV (⓪, ①, ②, ③) que se examinaron por el método símplex (con el método de la gran *M*) del problema artificial correspondiente al problema real de la figura 4.5.

Método de las dos fases

En el ejemplo de terapia de radiación que se acaba de resolver en la tabla 4.12, recuerde que la función objetivo real es

Problema real: Minimizar $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$.

Sin embargo, el método de la gran *M* utiliza la siguiente función objetivo (o su equivalente en forma de maximización) en todo el procedimiento:

Método de la gran M: Minimizar $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6$.

Como los dos primeros coeficientes son despreciables comparados con *M*, el método de las dos fases puede eliminar la *M* si se usan las siguientes dos funciones objetivo que definen a *Z* de manera completamente diferente.

Método de las dos fases:

Fase 1: Minimizar $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ (hasta $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$).
Fase 2: Minimizar $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ (con $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$).

La función objetivo de la fase 1 se obtiene si se divide la función objetivo del método de la gran *M* entre *M* y eliminan los términos despreciables. Como la fase 1 concluye cuando se obtiene una solución BF para el problema real (aquella en la que $\bar{x}_4 = 0$ y $\bar{x}_6 = 0$), esta solución se usa como la solución BF *inicial* para aplicar el método símplex al problema real (con su función objetivo) en la fase 2.

Antes de resolver el ejemplo por este método se hará un resumen de sus características generales.

Resumen del método de las dos fases. *Paso inicial*: se revisan las restricciones del problema original y se introducen variables artificiales según se necesite para obtener una solución BF inicial obvia para el *problema artificial*.

Fase 1: El objetivo de esta fase es encontrar una solución BF para el *problema real*. Para hacerlo, se debe,

Minimizar $Z = \sum$ de variables artificiales, sujeta a las restricciones revisadas.

La solución óptima que se obtiene para este problema (con $Z = 0$) será una solución BF para el problema real.

Fase 2: El objetivo de esta fase es encontrar una *solución óptima* para el problema real. Como las variables artificiales no son parte del problema real, ahora se pueden eliminar (de cualquier manera todas tienen valor de cero).[15] Se comienza con la solución BF que se obtuvo al final de la fase 1 y se usa el método símplex para resolver el problema real.

A continuación se resumen los problemas que deben resolverse por el método símplex en las fases respectivas del ejemplo.

Problema de la fase 1 (ejemplo de terapia de radiación):

Minimizar $\quad Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6,$

sujeta a

$$\begin{aligned}
0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 \qquad\qquad\quad &= 2.7 \\
0.5x_1 + 0.5x_2 \qquad + \bar{x}_4 \qquad\quad &= 6 \\
0.6x_1 + 0.4x_2 \qquad\qquad - x_5 + \bar{x}_6 &= 6
\end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0.$$

Problema de la fase 2 (ejemplo de terapia de radiación):

Minimizar $\quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned}
0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 \quad &= 2.7 \\
0.5x_1 + 0.5x_2 \qquad &= 6 \\
0.6x_1 + 0.4x_2 \quad - x_5 &= 6
\end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_5 \geq 0.$$

Las únicas diferencias entre estos dos problemas se encuentran en la función objetivo y en la inclusión (fase 1) o exclusión (fase 2) de las variables artificiales $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$. Sin las variables artificiales, el problema de la fase 2 no tiene una *solución BF inicial* obvia. El único propósito de resolver el problema de la fase 1 es obtener una solución BF con $\bar{x}_4 = 0$ y $\bar{x}_6 = 0$ que se pueda usar como la solución BF inicial para la fase 2.

La tabla 4.13 muestra el resultado de aplicar el método símplex a este problema en la fase 1. [El renglón 0 de la tabla símplex inicial se obtiene al convertir minimizar $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ en maximizar $(-Z) = -\bar{x}_4 - \bar{x}_6$ y después usar *operaciones elementales con renglones* para eliminar las varia-

[15] Omitimos otras tres posibilidades: 1) variables artificiales > 0 (que se estudian en la subsección siguiente), 2) variables artificiales que son variables básicas degeneradas y 3) conservar las variables artificiales como variables no básicas en la fase 2 (sin permitir que se conviertan en básicas) como ayuda en el análisis de posoptimización subsecuente. El tutorial IOR le permitirá analizar dichas posibilidades.

TABLA 4.13 Fase 1 del método de las dos fases en el ejemplo de la terapia de radiación

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado derecho
0	Z	(0)	-1	-1.1	-0.9	0	0	1	0	-12
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	-2.1
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	0.6
2	Z	(0)	-1	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	-0.5
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	-10	0	-5	5	3
3	Z	(0)	-1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	-4	-5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	-1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	-5	6

bles básicas $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ de $-Z + \bar{x}_4 + \bar{x}_6 = 0$.] En la penúltima tabla símplex existe un empate en la *variable básica entrante* entre x_3 y x_5, que se rompe de manera arbitraria a favor de x_3. La solución que se obtiene al final de la fase 1 es, entonces, $(x_1, x_2, x_3, \bar{x}_4, x_5, \bar{x}_6) = (6, 6, 0.3, 0, 0, 0)$ o después de eliminar $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$, $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (6, 6, 0.3, 0)$.

Según se afirmó en el resumen, esta solución de la fase 1 es, sin duda, una solución BF para el problema *real* (problema de la fase 2) puesto que es la solución (después de hacer $x_5 = 0$) del sistema de ecuaciones que consiste en las tres restricciones funcionales del problema de la fase 2. De hecho, después de eliminar las columnas de $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$ al igual que el renglón 0 en cada iteración, la tabla 4.13 muestra una manera de utilizar la eliminación gaussiana para resolver este sistema de ecuaciones mediante su reducción a la forma que tiene en la tabla símplex final.

La tabla 4.14 muestra la preparación para iniciar la fase 2 después de completar la fase 1. Se comienza con la última tabla símplex de la tabla 4.13, se eliminan las variables artificiales ($\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$), se sustituye la función objetivo de la fase 2 ($-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2$ en la forma de maximización) en el renglón 0 y después se restablece la forma apropiada de eliminación gaussiana (con la eliminación algebraica de las variables básicas x_1 y x_2 del renglón 0). De esta forma, el renglón 0 de la tabla símplex se obtiene mediante las siguientes *operaciones elementales con renglones* en la penúltima tabla símplex: se restan del renglón 0, el renglón 1 multiplicado por 0.4 y el renglón 3 multiplicado por 0.5. Observe que los renglones 1 y 3 no cambian excepto por la eliminación de las dos columnas. Los únicos ajustes ocurren en el renglón 0 a fin de sustituir la función objetivo de la fase 1 por la función objetivo de la fase 2.

La última tabla símplex de la tabla 4.14 es la tabla símplex inicial para aplicar el método símplex al problema de la fase 2, como se muestra al inicio de la tabla 4.15. Una sola iteración conduce a la solución óptima que se muestra en la segunda tabla símplex: $(x_1, x_2, x_3, x_5) = (7.5, 4.5, 0, 0.3)$. Ésta es la solución óptima deseada del problema real que interesa más que el problema artificial que se construyó en la fase 1.

TABLA 4.14 Preparación para la fase 2 en el ejemplo de terapia de radiación

	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado derecho
Tabla símplex final fase 1	Z	(0)	−1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	−4	−5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	−1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	−5	6
Se eliminan $\bar{x}_4$ y $\bar{x}_6$	Z	(0)	−1	0	0	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Se sustituye la función objetivo de la fase 2	Z	(0)	−1	0.4	0.5	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Se restablece la forma apropiada de eliminación gaussiana	Z	(0)	−1	0	0	0		−0.5		−5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6

Ahora observe lo que el método de las dos fases ha hecho gráficamente en la figura 4.7. A partir del origen, la fase 1 examina un total de cuatro soluciones FEV para el problema artificial. En realidad, las primeras tres eran soluciones no factibles en los vértices para el problema real que se presentó en la figura 4.5. La cuarta solución FEV, en (6,6), es la primera que también es factible para el problema real, de manera que se convierte en la solución FEV inicial de la fase 2. Después de una iteración se obtiene la solución FEV óptima en (7.5, 4.5).

Si el empate en la variable básica entrante que surgió en la penúltima tabla símplex de la tabla 4.13 se hubiera roto de otra manera, la fase 1 habría ido directamente de (8, 3) a (7.5, 4.5). Después de utilizar (7.5, 4.5) para establecer la tabla símplex inicial de la fase 2, la *prueba de optimalidad* habría revelado que esta solución era óptima y no se habría realizado ninguna iteración.

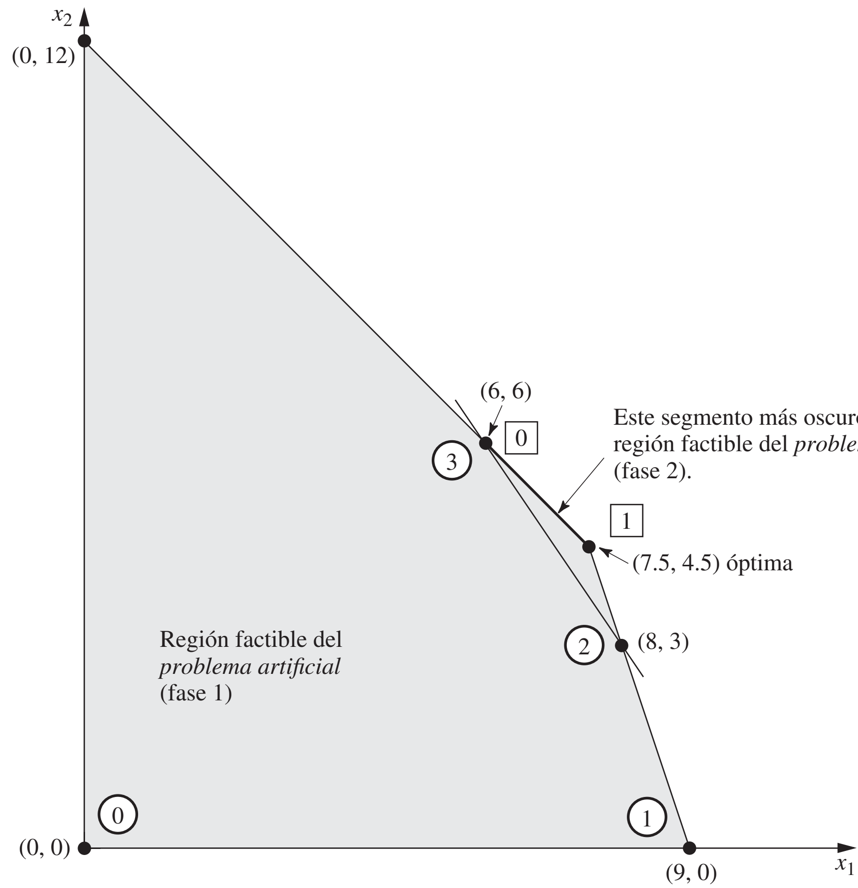
Resulta interesante comparar los métodos de la gran M y de las dos fases. Se comenzará por sus funciones objetivos.

Método de la gran M:

Minimizar $\quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6.$

TABLA 4.15 Fase 2 del método de las dos fases en el ejemplo de terapia de radiación

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_5	Lado derecho
0	Z	(0)	−1	0	0	0	−0.5	−5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0	−5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	5	6
1	Z	(0)	−1	0	0	0.5	0	−5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	−5	0	4.5



■ **FIGURA 4.7**
La gráfica muestra la secuencia de soluciones FEV de la fase 1 (⓪, ①, ②, ③) y después de la fase 2 ($\boxed{0}$, $\boxed{1}$) cuando se aplica el método de las dos fases al ejemplo de terapia de radiación.

Método de las dos fases:

Fase 1: Minimizar $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$.
Fase 2: Minimizar $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$.

Dado que los términos $M\bar{x}_4$ y $M\bar{x}_6$ dominan a los términos $0.4x_1$ y $0.5x_2$ en la función objetivo del método de la gran M, esta función objetivo es esencialmente equivalente a la de la fase 1 siempre que $\bar{x}_4$ y/o $\bar{x}_6$ sean mayores que cero. Entonces, cuando $\bar{x}_4 = 0$ y $\bar{x}_6 = 0$, la función objetivo del método de la gran M se vuelve completamente equivalente a la función objetivo de la fase 2.

Debido a estas equivalencias virtuales de las funciones objetivo, el método de la gran M y el de dos fases tienen casi siempre la misma secuencia de soluciones básicas factibles. La única excepción posible ocurre cuando existe un empate en la variable básica entrante en la fase 1 del método de las dos fases, como sucedió en la tercera tabla símplex de la tabla 4.13. Observe que las primeras tres tablas símplex de las tablas 4.12 y 4.13 son casi idénticas, pues la única diferencia es que los factores multiplicativos de M de la tabla 4.12 se convierten en cantidades únicas en los puntos correspondientes de la tabla 4.13. En consecuencia, no se contaba con los factores aditivos que rompieron el empate de la variable básica entrante en la tercera tabla símplex de la tabla 4.12 para romper este mismo empate en la tabla 4.13. El resultado en este ejemplo fue una iteración adicional en el método de las dos fases, aunque, en general, la ventaja de contar con los factores aditivos es mínima.

El método de las dos fases sigue los pasos del método de la gran M, pero en la fase 1 utiliza sólo los factores multiplicativos, mientras que en la fase 2 elimina las variables artificiales. (El método de la gran M puede combinar los factores multiplicativos y aditivos y asignar un valor muy grande a M, procedimiento que podría crear problemas con la inestabilidad numérica.) Por estas razones es común que cuando se trate de paquetes de computadora se utilice el método de las dos fases.

TABLA 4.16 El método de la gran *M* para la revisión del ejemplo de terapia de radiación que no tiene soluciones factibles

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Lado derecho
0	Z	(0)	-1	$-1.1M + 0.4$	$-0.9M + 0.5$	0	0	M	0	$-12M$
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	1.8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	-1	1	6
1	Z	(0)	-1	0	$-\frac{16}{30}M + \frac{11}{30}$	$\frac{11}{3}M - \frac{4}{3}$	0	M	0	$-5.4M - 2.4$
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	6
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	3
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	-2	0	-1	1	2.4
2	Z	(0)	-1	0	0	$M + 0.5$	$1.6M - 1.1$	M	0	$-0.6M - 5.7$
	x_1	(1)	0	1	0	5	-1	0	0	3
	x_2	(2)	0	0	1	-5	3	0	0	9
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0	-1	-0.6	-1	1	0.6

En la sección Worked Examples del sitio en internet del libro se proporciona **otro ejemplo** en el que al mismo problema se le aplica tanto el método de la gran *M* como el método de las dos fases.

Sin soluciones factibles

Hasta aquí, esta sección se ha ocupado más que nada del problema elemental de identificar la solución BF inicial cuando no se dispone de una obvia. Se explicó que se puede utilizar la técnica de variables artificiales para construir un problema artificial y obtener una solución BF inicial para este problema artificial. El método de la gran *M* o el de dos fases permiten al método símplex comenzar su recorrido hacia las soluciones BF y por último hacia la solución óptima del problema *real*.

No obstante, se debe estar consciente de que se puede presentar un obstáculo. Es posible que no exista una elección obvia para la solución BF inicial por la poderosa razón de que ¡no existan soluciones factibles! Cuando se construye una solución factible artificial, no hay nada que impida al método símplex proceder como siempre e incluso informar que encontró una supuesta solución óptima.

Por fortuna, la técnica de las variables artificiales proporciona algunas señales que indican que esto ha ocurrido:

> Si el problema original *no tiene soluciones factibles*, cualquier solución óptima que se obtenga con el método de la *M* o en la fase 1 del método de las dos fases lleva a una solución final que contiene al menos una variable artificial *mayor* que cero. De otra manera, *todas* son iguales a cero.

Para ilustrar lo que decimos, cambie la primera restricción del ejemplo de terapia de radiación (vea la figura 4.5) como sigue:

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \qquad \rightarrow \qquad 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 1.8,$$

con lo que el problema ya no tiene soluciones factibles. Si se aplica el método de la gran *M* como antes (vea la tabla 4.12) se obtiene la tabla símplex que se muestra en la tabla 4.16. (La fase 1 del método de las dos fases conduce a la misma tabla símplex, excepto que cada expresión que involucra a *M* se reemplaza sólo por el factor multiplicativo.) Entonces, por lo común, el método de la gran *M* indicaría que la solución óptima es (3, 9, 0, 0, 0, 0.6). Sin embargo, en este caso, ya que la variable artificial $\bar{x}_6 = 0.6 > 0$, el mensaje real es que el problema no tiene soluciones factibles.[16]

Variables que pueden ser negativas

En la mayor parte de los problemas prácticos, los valores negativos de las variables de decisión tienen un significado físico, por lo que es necesario incluir las restricciones de no negatividad en la formulación de los modelos de programación lineal. Sin embargo, esto no ocurre siempre. Como ejemplo, suponga que en el problema de la Wyndor Glass Co. el producto 1 ya está en producción y que la primera variable de decisión x_1 representa el *incremento* de la tasa de producción. En consecuencia, un valor negativo de x_1 indicaría que debe reducirse la fabricación del producto 1 en esa cantidad. Tal reducción podría ser deseable para permitir una tasa de producción más alta del nuevo producto 2, más rentable, con lo que se permitirían valores negativos de x_1 en el modelo.

Como el procedimiento para determinar la *variable básica saliente* requiere que todas las variables tengan restricción de no negatividad, cualquier problema que contenga variables que puedan adquirir valores negativos debe convertirse en un problema *equivalente* que emplee sólo variables no negativas antes de aplicar el método símplex. Por fortuna, se puede hacer esta conversión. La modificación que requiere cada variable depende de que tenga o no una cota inferior (negativa) sobre los valores permitidos. Se presentará cada uno de estos casos.

Variables con una cota sobre los valores negativos permitidos. Considere cualquier variable de decisión x_j que puede tener valores negativos, pero nada más aquellos que satisfacen una restricción de la forma

$$x_j \geq L_j,$$

donde L_j es una constante negativa. Esta restricción se puede convertir en una de no negatividad al cambiar de variables

$$x_j' = x_j - L_j, \quad \text{entonces} \quad x_j' \geq 0.$$

Así, $x_j' + L_j$ se sustituye por x_j en el modelo y la nueva variable de decisión x'_j no puede ser negativa. (Esta misma técnica se puede utilizar cuando L_j es *positiva* para convertir una restricción funcional $x_j \geq L_j$ en una restricción de no negatividad $x_j' \geq 0$.)

Para ejemplificar, suponga que la tasa de producción actual del producto 1 en el problema de la Wyndor Glass Co. es 10. Con la definición de x_1 que se acaba de dar, en este punto el modelo completo es el mismo que el que se dio en la sección 3.1, salvo que la restricción de no negatividad $x_1 \geq 0$ se sustituye por

$$x_1 \geq -10.$$

Para obtener el modelo equivalente que necesita el método símplex, la variable de decisión se redefinirá como la tasa de producción *total* del producto 1,

$$x_j' = x_1 + 10,$$

lo que produce los siguientes cambios en la función objetivo y las restricciones:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z = 3x_1 + 5x_2 \\ x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq -10, \quad x_2 \geq 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Z = 3(x_1' - 10) + 5x_2 \\ x_1' - 10 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3(x_1' - 10) + 2x_2 \leq 18 \\ x_1' - 10 \geq -10, \quad x_2 \geq 0 \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Z = -30 + 3x_1' + 5x_2 \\ x_1' \leq 14 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1' + 2x_2 \leq 48 \\ x_1' \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}}$$

[16] Se han desarrollado técnicas (y se han incorporado al software de programación lineal) para analizar qué ocasiona que un problema de programación lineal grande no tenga soluciones factibles, si en la formulación no se puede corregir ningún error. Por ejemplo, vea Chinneck, J. W., *Feasibility and Infeasibility in Optimization: Algorithms and Computational Methods*, Springer Science + Business Media, Nueva York, 2008.

Variables sin cota sobre los valores negativos permitidos. En caso de que x_j *no* tenga una cota inferior en el modelo formulado, se requiere un cambio distinto: x_j se sustituye en todo el modelo por la *diferencia* de dos nuevas variables *no negativas*,

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad \text{donde } x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0.$$

Como x_j^+ y x_j^- pueden tomar cualquier valor no negativo, la diferencia $x_j^+ - x_j^-$ puede tener *cualquier* valor (positivo o negativo), por lo que es una sustitución legítima de x_j en el modelo. Después de estas sustituciones, el método símplex puede proceder con variables que son no negativas.

Las nuevas variables x_j^+ y x_j^- tienen una interpretación sencilla. Como se explica en el siguiente párrafo, cada solución BF de la nueva forma del modelo tiene, necesariamente, la propiedad de que $x_j^+ = 0$ o $x_j^- = 0$ (o ambas). Por lo tanto, en la solución óptima que se obtuvo por el método símplex (una solución BF),

$$x_j^+ = \begin{cases} x_j & \text{si } x_j \geq 0, \\ 0 & \text{de otra manera;} \end{cases}$$

$$x_j^- = \begin{cases} |x_j| & \text{si } x_j \leq 0, \\ 0 & \text{de otra manera;} \end{cases}$$

de forma que x_j^+ representa la parte positiva de x_j y x_j^- su parte negativa (como lo sugieren los superíndices).

Por ejemplo, si $x_j = 10$, de las expresiones anteriores se obtiene $x_j^+ = 10$ y $x_j^- = 0$. Este mismo valor de $x_j = x_j^+ - x_j^- = 10$ ocurrirá también con valores grandes de x_j^+ y x_j^- tales que $x_j^+ = x_j^- + 10$. Cuando se grafican estos valores de x_j^+ y x_j^- en dos dimensiones se obtiene una recta con punto terminal en $x_j^+ = 10$, $x_j^- = 0$ para evitar violar las restricciones de no negatividad. Este punto es la única solución en un vértice sobre la recta. Por lo tanto, sólo este punto terminal puede ser parte de una solución FEV global o de la solución BF que involucra a todas las variables del modelo. Ello ilustra por qué necesariamente en cada solución BF se tiene que $x_j^+ = 0$ o $x_j^- = 0$ (o ambas).

Para ilustrar el uso de x_j^+ y x_j^- se regresará al ejemplo, dado en la página anterior en donde x_1 se vuelve a definir como el incremento sobre la tasa de producción actual de 10 del producto 1 en el problema de la Wyndor Glass Co.

Pero ahora suponga que la restricción $x_1 \geq -10$ no está incluida en el modelo original, ya que es claro que no influye en la solución óptima. (En algunos problemas, ciertas variables no necesitan tener cotas inferiores explícitas cuando las restricciones funcionales impiden valores menores.) Entonces, antes de aplicar el método símplex, x_1 se reemplaza por la diferencia,

$$x_1 = x_1^+ - x_1^-, \qquad \text{donde } x_1^+ \geq 0,\ x_1^- \geq 0,$$

como se muestra a continuación:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = 3x_1 + 5x_2, \\ \text{sujeta a} & \begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\ x_2 &\geq 0 \text{ (única)} \end{aligned} \end{array}} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2, \\ \text{sujeta a} & \begin{aligned} x_1^+ - x_1^- &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned} \\ & x_1^+ \geq 0, \quad x_1^- \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}}$$

Desde un punto de vista computacional, este enfoque tiene la desventaja de que el nuevo modelo equivalente tiene más variables que el modelo original. De hecho, si *ninguna* variable original tuviera restricción de cota inferior, el nuevo modelo tendría el *doble* de variables. Por fortuna, este enfoque se puede modificar en parte para que el número de variables aumente sólo en uno, sin importar cuántas variables originales tengan que sustituirse. Esta modificación se hace reemplazando cada variable de este tipo x_j por

$$x_j = x_j' - x'', \qquad \text{donde } x_j' \geq 0,\ x'' \geq 0,$$

donde x'' es la *misma* variable de toda *j* relevante. En este caso, la interpretación de x'' es que $-x''$ es el valor actual de la variable original negativa *más grande* (en términos de valor absoluto), por

TABLA 4.17 Análisis posóptimo para programación lineal

Tarea	Propósito	Técnica
Extracción de errores del modelo	Errores y debilidades del modelo	Reoptimización
Validación del modelo	Demostrar la validez del modelo final	Vea la sección 2.4
Decisión administrativa final sobre asignación de recursos (los valores b_i)	Efectuar una división apropiada de los recursos de la organización de actividades bajo estudio y otras actividades importantes	Precios sombra
Evaluación de las estimaciones de los parámetros del modelo	Determinar las estimaciones cruciales que pueden afectar la solución óptima de un estudio más amplio	Análisis de sensibilidad
Evaluación de trueques entre los parámetros del modelo	Determinar el mejor trueque	Programación lineal paramétrica

lo cual x_j' es la cantidad en la que x_j excede este valor. Con este recurso, el método símplex puede hacer que algunas x_j' adquieran valores mayores que cero aun cuando $x'' > 0$.

4.7 ANÁLISIS POSÓPTIMO

En las secciones 2.3, 2.4 y 2.5 se hizo hincapié en que el *análisis posóptimo*, el análisis que se hace *después* de obtener una solución óptima para la versión inicial del modelo, constituye una parte muy importante de casi todos los estudios de investigación de operaciones. En particular, este hecho es cierto en el caso de las aplicaciones comunes de programación lineal. Esta sección está dedicada a presentar el papel que juega el método símplex cuando se realiza este análisis.

En la tabla 4.17 se resumen los pasos que deben seguirse en un análisis posóptimo en estudios de programación lineal. En la última columna de ella se identifican algunas técnicas que emplea el método símplex. A continuación se ofrece una introducción breve a estas técnicas y los detalles se dejan para capítulos posteriores.

Reoptimización

Como se analizó en la sección 3.6, los modelos de programación lineal que surgen en la práctica casi siempre son muy grandes, con cientos o miles de restricciones funcionales y variables de decisión. En estos casos pueden ser de interés muchas variaciones del modelo básico que consideran diferentes escenarios. Por lo tanto, después de encontrar una solución óptima para una versión de un modelo de programación lineal, debe resolverse de nueva cuenta el problema (con frecuencia muchas veces) para una versión algo diferente de él. Casi siempre se deben resolver varias veces durante la etapa de extracción de errores del modelo (descrita en las secciones 2.3 y 2.4) y, por lo general, se hace lo mismo un gran número de veces durante las etapas de análisis posóptimo.

Una manera sencilla de hacerlo es aplicar el método símplex desde el principio a cada nueva versión del modelo, aunque cada corrida pueda requerir, en problemas grandes, cientos o miles de iteraciones. Sin embargo, una forma *mucho más eficiente* es la de *reoptimizar*. La reoptimización deduce los cambios que deben introducirse a la tabla símplex final (como se estudiará en las secciones 5.3 y 6.6). Esta tabla símplex revisada y la solución óptima del modelo anterior se usan como *tabla inicial* y *solución básica inicial* para resolver el nuevo modelo. Si esta solución es factible para el nuevo modelo, se aplica el método símplex en la forma usual, a partir de esta solución BF inicial. Si la solución no es factible, tal vez se pueda aplicar un algoritmo similar llamado *método símplex dual* (descrito en la sección 7.1) para encontrar la nueva solución óptima,[17] a partir de esta solución básica inicial.

La gran ventaja de la **técnica de reoptimización** sobre el hecho de volver a resolver el problema desde el principio, es que quizá la solución óptima del problema revisado esté *mucho más*

[17] El único requisito para usar el método símplex dual es que todavía se pase la *prueba de optimalidad* cuando se aplica al renglón 0 de la tabla símplex final *revisada*. Si no, en su lugar se puede usar otro algoritmo llamado *método primal-dual*.

cerca de la solución óptima anterior que de una solución BF inicial construida como siempre por el método símplex. En consecuencia, si se supone que las revisiones del modelo son moderadas, se requerirán sólo unas cuantas iteraciones para reoptimizar en lugar de cientos o tal vez miles que pueden realizarse al comenzar desde el principio. De hecho, las soluciones del modelo anterior y del revisado con frecuencia son las mismas, en cuyo caso, la técnica de reoptimización requiere sólo una aplicación de la prueba de optimalidad y *ninguna* iteración.

Precios sombra

Recuerde que, con frecuencia, los problemas de programación lineal se pueden interpretar como la asignación de recursos a las actividades. En particular, cuando las restricciones funcionales son de la forma $\leq$ las b_i (los lados derechos) se interpretan como las cantidades de los respectivos recursos disponibles para las actividades bajo estudio. En muchos casos puede haber dudas respecto de las cantidades que estarán disponibles. Si así es, los valores b_i que se usan en el modelo inicial (validado), en realidad pueden representar una *decisión inicial tentativa* del administrador sobre la cantidad de recursos de la organización que se asignarán a las actividades consideradas en el modelo y no a otras que él considere importantes. Desde esta perspectiva más amplia, algunos valores de b_i se pueden incrementar en un modelo revisado, pero sólo cuando se presenten razones poderosas sobre los beneficios que reportará esta revisión.

En consecuencia, la información sobre la contribución económica de los recursos a la medida de desempeño (Z) para el estudio en curso casi siempre será muy útil. El método símplex proporciona esta información en forma de *precios sombra* para los recursos respectivos.

> Los **precios sombra** del recurso i (denotados por y_i^*) miden el *valor marginal* de éste, es decir, la tasa a la que Z puede aumentar si se incrementa (un poco) la cantidad que se proporciona de este recurso (b_i).[18,19] El método símplex identifica este precio sombra como y_i^* = coeficiente de la i-ésima variable de holgura del renglón 0 de la tabla símplex final.

Como ejemplo, en el problema de la Wyndor Glass Co.,

Recurso i = capacidad de producción de la planta i ($i = 1, 2, 3$) que se proporciona para los dos nuevos productos bajo estudio,

b_i = horas del tiempo de producción por semana que se llevan a cabo en la planta i para estos nuevos productos.

La aportación de una cantidad sustancial de tiempo de producción para los nuevos productos requerirá un ajuste de los tiempos de producción de los productos actuales, por lo que la elección de los valores de b_i es una decisión administrativa difícil. La decisión inicial tentativa ha sido

$$b_1 = 4, \qquad b_2 = 12, \qquad b_3 = 18,$$

como se refleja en el modelo básico considerado en la sección 3.1 y en este capítulo. Sin embargo, ahora la administración desea evaluar el efecto de cambiar cualquiera de los valores de las b_i.

Los precios sombra de estos recursos proporcionan la información que necesita la administración. La tabla símplex final en la tabla 4.8 lleva a

$$y_1^* = 0 = \text{precio sombra del recurso 1},$$

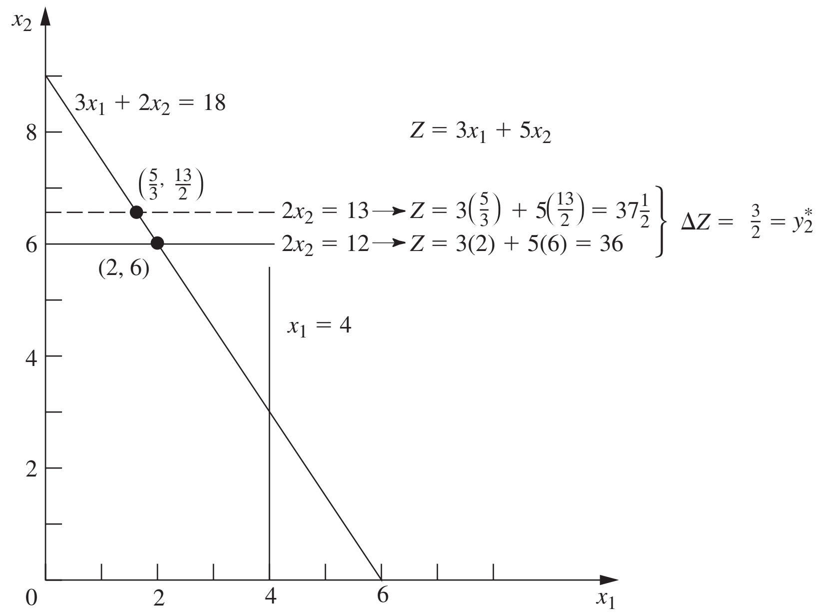
$$y_2^* = \frac{3}{2} = \text{precio sombra del recurso 2},$$

$$y_3^* = 1 = \text{precio sombra del recurso 3}.$$

Con sólo dos variables de decisión, estos números se pueden verificar en forma gráfica si se observa que un incremento individual de 1 en cualquier b_i aumentaría el valor de Z por y_i^*. Por ejemplo,

[18] El incremento de b_i debe ser suficientemente pequeño para que el conjunto actual de variables básicas siga siendo óptimo, ya que esta tasa (el valor marginal) cambia si el conjunto de variables básicas es otro.

[19] En caso de una restricción funcional de la forma $\geq$ o $=$ su precio sombra se define de nuevo como la tasa a la que puede aumentar Z al incrementar (un poco) el valor de b_i, aunque la interpretación usual de b_i ahora sería algo diferente a la cantidad de recursos disponibles.



■ **FIGURA 4.8**
La gráfica muestra que el precio sombra es $y_2^* = \frac{3}{2}$ del recurso 2 del problema de la Wyndor Glass Co. Los dos puntos son las soluciones óptimas de $b_2 = 12$ o $b_2 = 13$, y al insertar estas soluciones en la función objetivo se ve que un incremento de 1 en b_2 ocasiona un aumento de $y_2^* = \frac{3}{2}$ en Z.

en la figura 4.8 se muestra este incremento del recurso 2 cuando se aplica nuevamente el método gráfico que se presentó en la sección 3.1. La solución óptima, (2, 6) con $Z = 36$, cambia a $(\frac{5}{3}, \frac{13}{2})$ con $Z = 37\frac{1}{2}$ cuando b_2 aumenta en 1 (de 12 a 13), de manera que

$$y_2^* = \Delta Z = 37\frac{1}{2} - 36 = \frac{3}{2}.$$

Como Z se expresa en miles de dólares de ganancia semanal, $y_2^* = \frac{3}{2}$ indica que si se agregara una hora más de tiempo de producción a la semana en la planta 2 para estos nuevos productos, aumentaría la ganancia total en \$1 500 semanales. ¿Debe hacerse esto? Depende de la ganancia marginal de otros productos que por el momento usan este tiempo de producción. Si existe un producto actual que contribuye con menos de \$1 500 a la ganancia semanal por una hora de producción a la semana en la planta 2, entonces valdría la pena algún cambio en la asignación del tiempo de producción a los nuevos productos.

Esta historia continuará en la sección 6.7, donde el equipo de IO de la Wyndor utiliza los precios sombra como parte del *análisis de sensibilidad* del modelo.

En la figura 4.8 se demuestra que $y_2^* = \frac{3}{2}$ es la tasa a la que aumentaría Z si se incrementara un poco b_2 pero también demuestra el fenómeno general de que esta interpretación es válida nada más para aumentos pequeños de b_2. Si se aumenta a más de 18 unidades, la solución óptima se queda en el punto (0, 9) sin que Z aumente más. (En ese punto cambia el conjunto de variables básicas de la solución óptima y debe obtenerse una tabla símplex final con nuevos precios sombra, incluso $y_2^* = 0$.)

Ahora observe en la misma figura por qué $y_1^* = 0$. La restricción sobre el recurso 1, $x_1 \leq 4$, *no actúa en su frontera* en la solución óptima, (2, 6), ya que existe un *excedente* de este recurso. Por lo tanto, si b_1 adquiere un valor mayor que 4, no se obtendrá una nueva solución óptima con un valor mayor de Z.

Por el contrario, las restricciones sobre los recursos 2 y 3, $2x_2 \leq 12$ y $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, son **restricciones satisfechas en sus fronteras** (son restricciones satisfechas en la igualdad en la solución óptima). Debido a que la disponibilidad limitada de estos recursos ($b_2 = 12$, $b_3 = 18$) *ata* a Z para que no pueda incrementarse, los precios sombra de estos recursos son *positivos*. Los economistas se refieren a este tipo de recursos como *bienes escasos*, mientras que los recursos disponibles en exceso (como el recurso 1) son *bienes libres* (recursos con precios sombra iguales a cero).

El tipo de información que proporcionan los precios sombra es valiosa para la administración cuando examina la posibilidad de reasignar recursos dentro de la organización. También resulta muy útil cuando un aumento de b_i se puede lograr con sólo salir a comprar un poco más del recurso. Por ejemplo, suponga que Z representa *ganancias* y que las ganancias unitarias de las actividades (los valores de c_j) incluyen los costos (a precios normales) de todos los recursos que se consumen. Entonces, un precio sombra *positivo* de y_i^* del recurso significa que la ganancia total Z se puede aumentar en la cantidad y_i^* si se compra una unidad más de este recurso a su precio normal. Asimismo, si se tiene que pagar un precio *mayor al nominal* por la cantidad adicional del recurso y_i^* representará el precio *máximo* (cantidad adicional sobre el precio normal) que vale la pena pagar.[20]

La teoría de dualidad, que proporciona el fundamento teórico de los precios sombra, se describe en el capítulo 6.

Análisis de sensibilidad

Cuando se examinó el *supuesto de certidumbre* de la programación lineal al final de la sección 3.3, se hizo notar que los valores utilizados para los parámetros del modelo (las a_{ij}, b_i y c_j que se identifican en la tabla 3.3) casi siempre son sólo *estimaciones* de las cantidades cuyos verdaderos valores no se conocerán hasta que el estudio de programación lineal se lleve a la práctica en el futuro. El propósito principal del análisis de sensibilidad es identificar los **parámetros sensibles** (esto es, aquellos que no pueden cambiar sin modificar la solución óptima). Los parámetros sensibles son aquellos que será necesario controlar muy de cerca a medida que el estudio se ponga en práctica. Si se descubre que el valor verdadero de un parámetro sensible difiere de su valor estimado en el modelo, ello significa que la solución debe cambiar de inmediato.

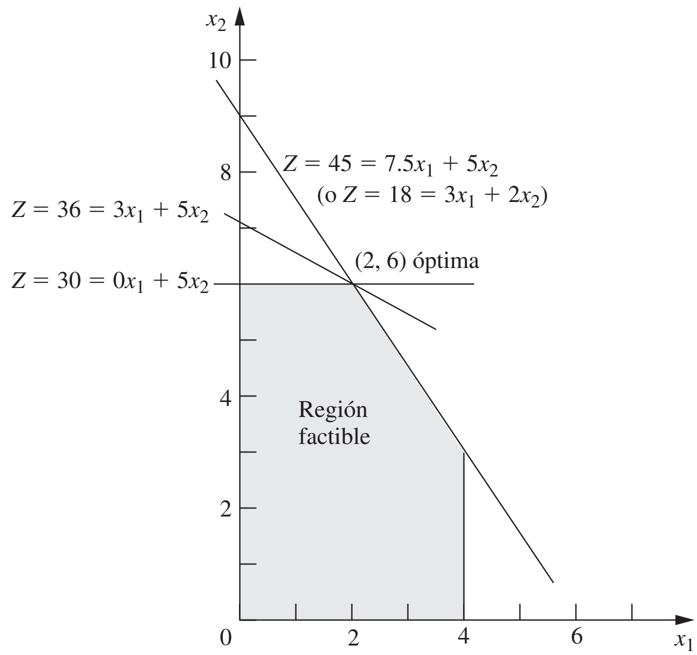
¿Cómo se identifican los parámetros sensibles? En el caso de las b_i, acaba de verse que esta información está dada por los precios sombra que proporciona el método símplex. En particular, si $y_i^* > 0$, entonces la solución óptima cambia si b_i lo hace, por lo que b_i es un parámetro sensible. Sin embargo, $y_i^* = 0$ indica que la solución óptima no es sensible al menos a cambios pequeños en b_i. En consecuencia, si el valor que se usa para b_i es una estimación de la cantidad de recurso que se tendrá disponible (y no una decisión administrativa), los valores de b_i que se deben controlar con más cuidado son aquellos con precios sombra *positivos*, en especial los que tienen precios sombra *grandes*.

Cuando el problema tiene sólo dos variables, la sensibilidad de los distintos parámetros se puede analizar gráficamente. Por ejemplo, en la figura 4.9 se puede observar que $c_1 = 3$ puede cambiar a cualquier otro valor dentro del intervalo de 0 a 7.5 sin que la solución óptima (2, 6) cambie. (La razón es que cualquier valor de c_1 dentro de este intervalo mantiene la pendiente de $Z = c_1x_1 + 5x_2$ entre las pendientes de las líneas $2x_2 = 12$ y $3x_1 + 2x_2 = 18$.) De igual manera, si $c_2 = 5$ es el único parámetro que se cambia, puede tomar cualquier valor mayor que 2 sin que ello afecte la solución óptima. Ello nos indica que ni c_1 ni c_2 son parámetros sensibles. (El procedimiento llamado **Graphical Method and Sensitivity Analysis** que se incluye en el IOR Tutorial permite la realización de este tipo de análisis gráfico de una forma muy eficiente.)

La manera más fácil de analizar la sensibilidad de cada uno de los parámetros a_{ij} es verificar si su restricción correspondiente es satisfecha en su *frontera* en la solución óptima. Como $x_1 \leq 4$ *no* es una restricción satisfecha en su frontera, pues cualquier cambio suficientemente pequeño en sus coeficientes ($a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$) no cambiará la solución óptima, así que éstos *no* son parámetros sensibles. Por otro lado, tanto $2x_2 \leq 12$ y $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ son *restricciones satisfechas en su frontera*, por lo que al cambiar *cualquiera* de sus coeficientes ($a_{21} = 0$, $a_{22} = 2$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 2$) tendrá que cambiar la solución óptima, por lo cual éstos son parámetros sensibles.

Es común que se preste más atención al análisis de sensibilidad sobre los parámetros b_i y c_j que sobre los a_{ij}. En los problemas reales con cientos o miles de restricciones y variables, por lo general, el efecto que se produce al cambiar una a_{ij} es despreciable, mientras que el cambio de valor de una b_i o una c_j puede tener consecuencias notables. Aún más, en muchos casos, los valores de las a_{ij} están determinados por la tecnología que se usa (a veces se les da el nombre de *coeficientes tecnológicos*) por lo que puede que haya muy poca (o ninguna) incertidumbre respecto de sus valores finales. Esto resulta ventajoso puesto que en los problemas grandes existen muchos más parámetros a_{ij} que b_i y c_j.

[20] Si las ganancias unitarias *no* incluyen los costos de los recursos consumidos, entonces y_i^* representa el precio *total* unitario máximo que valdría la pena pagar para aumentar b_i.



■ **FIGURA 4.9**
La gráfica muestra el análisis de sensibilidad de c_1 y c_2 del problema de la Wyndor Glass Co. Comenzando con la recta de la función objetivo original [donde $c_1 = 3, c_2 = 5$, y la solución óptima es (2, 6)], las otras dos rectas muestran los extremos de cuánto puede cambiar la pendiente de la función objetivo sin que cambie la solución óptima (2, 6). Así, con $c_2 = 5$, el intervalo de valores permitido de c_1 es $0 \leq c_1 \leq 7.5$. Con $c_1 = 3$, el intervalo permisible de c_2 es $c_2 \geq 2$.

En problemas con más de dos (o tal vez tres) variables, no se puede analizar la sensibilidad de los parámetros en una gráfica como se hizo con el problema de la Wyndor Glass Co. Sin embargo, se puede extraer el mismo tipo de información del método símplex. Para obtenerla es preciso usar la *idea fundamental* que se describe en la sección 5.3 para deducir los cambios que se generan en la tabla símplex final como resultado de cambiar el valor de un parámetro en el modelo original. En las secciones 6.6 y 6.7 se describe y ejemplifica el resto del procedimiento.

Uso de Excel para generar información para el análisis de sensibilidad

Es común que el análisis de sensibilidad se incorpore en los paquetes de software basado en el método símplex. Por ejemplo, si se le pide, el Excel Solver genera información para el análisis de sensibilidad. Como se muestra en la figura 3.21, cuando Solver produce el mensaje de haber encontrado una solución, también da a la derecha una lista de tres informes que puede proporcionar. Si se selecciona el segundo (llamado "sensibilidad") después de resolver el problema de la Wyndor Glass Co., se obtendrá el *informe de sensibilidad* que se muestra en la figura 4.10. La tabla superior proporciona la información para el análisis de sensibilidad de las variables de decisión y sus coeficientes de la función objetivo. La tabla inferior hace lo mismo para las restricciones funcionales y los lados derechos.

■ **FIGURA 4.10**
Informe de sensibilidad proporcionado por Excel Solver sobre el problema de la Wyndor Glass Co.

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor final	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
C12	Lotes puertas	2	0	3 000	4 500	3 000
D12	Lotes ventanas	6	0	5 000	1E+30	3 000

Restricciones

Celda	Nombre	Valor final	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
E7	Planta 1 Totales	2	0	4	1E+30	2
E8	Planta 2 Totales	12	1 500	12	6	6
E9	Planta 3 Totales	18	1 000	18	6	6

Observe primero la tabla superior de esta figura. La columna del "valor final" indica la solución óptima. La siguiente columna contiene los *costos reducidos* o gradiente reducido. (No se estudiarán estos costos ahora debido a que la información que proporcionan también se puede obtener del resto de la tabla de arriba.) Las siguientes tres columnas proporcionan la información necesaria para identificar el *intervalo permisible* para conservar la optimalidad de cada coeficiente c_j en la función objetivo.

Para cualquier c_j, su **intervalo permisible** es el intervalo de valores de este coeficiente en el cual la solución óptima actual permanece óptima, siempre que no haya cambios en los otros coeficientes.

La columna del "coeficiente objetivo" proporciona el valor actual de cada coeficiente y las dos columnas siguientes el *aumento permisible* y la *disminución permisible* a partir de este valor para permanecer dentro del intervalo permisible. El modelo en hoja de cálculo (figura 3.22) expresa las ganancias por lote en unidades de *dólares*, mientras que la c_j de la versión algebraica del modelo de programación lineal utiliza unidades de *miles de dólares*, por lo que las cantidades que aparecen en estas tres columnas deben dividirse entre 1 000 para usar las mismas unidades que c_j. Por lo tanto,

$$\frac{3\,000 - 3\,000}{1\,000} \leq c_1 \leq \frac{3\,000 + 4\,500}{1\,000}, \qquad \text{entonces} \qquad 0 \leq c_1 \leq 7.5$$

es el intervalo permisible para c_1 en el cual la solución óptima actual permanecerá óptima (se supone que $c_2 = 5$), exactamente como se encontró con el método gráfico en la figura 4.9. De manera similar, como Excel usa 1E + 30 (10^{30}) para representar el infinito,

$$\frac{5\,000 - 3\,000}{1\,000} \leq c_2 \leq \frac{5\,000 + \infty}{1\,000}, \qquad \text{entonces} \qquad 2 \leq c_2$$

es el intervalo permisible para c_2 que conserva óptima la solución.

El hecho de que el aumento y la disminución permisibles sean mayores que cero para el coeficiente de ambas variables de decisión proporciona otra parte de la información útil, como se describe en seguida.

Cuando la tabla superior del informe de análisis de sensibilidad generado por Excel Solver indica que tanto el aumento permisible como la disminución permisible son mayores que cero para todos los coeficientes objetivos, es una señal de que la solución óptima de la columna de "valor igual" es la única solución óptima. Por el contrario, algún aumento o disminución permisible igual a cero indica que existen soluciones múltiples. Al cambiar el coeficiente correspondiente en una cantidad muy pequeña a un valor mayor que cero y resolver de nuevo el problema se obtiene otra solución FEV óptima para el modelo original.

Ahora considere la tabla inferior de la figura 4.10 que se centra en el análisis de sensibilidad de las tres restricciones funcionales. La columna de "valor igual" proporciona el *valor del lado izquierdo* de cada restricción en la solución óptima. Las dos columnas siguientes dan los precios sombra y el valor actual de los lados derechos (b_i) de cada restricción. (Estos precios sombra del modelo en hoja de cálculo utilizan unidades de *dólares*, por lo cual deben dividirse entre 1 000 para usar las mismas unidades de *miles de dólares* que Z en la versión algebraica del modelo de programación lineal.) Cuando se cambia sólo un valor b_i las dos últimas columnas proporcionan el *aumento permisible* o la *disminución permisible* a fin de permanecer dentro del *intervalo permisible* para conservar su factibilidad.

Para cualquier b_i, su **intervalo permisible** para conservar su factibilidad es el intervalo de valores del lado derecho en el cual la solución BF óptima actual (con valores ajustados[21] para las variables básicas) permanece factible, si se supone que no cambian los otros lados derechos. Una

[21] Debido a que los valores de las variables básicas se obtienen como la solución simultánea de un sistema de ecuaciones (las restricciones funcionales en la forma aumentada), al menos algunos de estos valores cambian si se modifica uno de los lados derechos. Sin embargo, los valores ajustados del conjunto actual de variables básicas todavía satisfacen las restricciones de no negatividad, de modo que todavía es factible, siempre y cuando el nuevo valor de este lado derecho permanezca dentro de su intervalo permisible para seguir factible. Si la solución básica ajustada sigue factible, también seguirá siendo óptima. Se profundizará sobre esta cuestión en la sección 6.7.

propiedad importante de este rango de valores es que el *precio sombra* actual de b_i permanece válido para evaluar el efecto sobre Z de cambiar b_i sólo mientras b_i permanezca dentro de este intervalo permisible.

Entonces, si se usa la tabla inferior de la figura 4.10, se combinan las dos últimas columnas con los valores actuales de los lados derechos para obtener los intervalos permisibles:

$$\begin{aligned} 2 &\le b_1 \\ 6 &\le b_2 \le 18 \\ 12 &\le b_3 \le 24. \end{aligned}$$

El informe de sensibilidad generado por Excel Solver contiene la información característica del análisis de sensibilidad del software de programación lineal. En el apéndice 4.1 se verá que LINDO y LINGO proporcionan en esencia el mismo informe. MPL/CPLEX también lo hace cuando se pide en el cuadro de diálogo de "Solution File". Una vez más, esta información que se obtiene de manera algebraica también se puede derivar del análisis gráfico de este problema de dos variables (vea el problema 4.7-1). Por ejemplo, cuando b_2 se incrementa a más de 12 en la figura 4.8, la solución FEV óptima original en la intersección de las fronteras de las restricciones $2x_2 = b_2$ y $3x_1 + 2x_2 = 18$ seguirá factible (incluye $x_1 \ge 0$) sólo para $b_2 \le 18$.

En la sección Worked Examples del sitio en internet del libro se incluye **otro ejemplo** de aplicación del análisis de sensibilidad (en el que se usan tanto el análisis gráfico como un informe de sensibilidad). En la última parte del capítulo 6 se examinará este tipo de análisis con más detalle.

Programación lineal paramétrica

El análisis de sensibilidad requiere el cambio de un parámetro a la vez en el modelo original para examinar su efecto sobre la solución óptima. Por el contrario, la **programación lineal paramétrica** (o **programación paramétrica** en forma más corta) se refiere al estudio sistemático de los cambios en la solución óptima cuando cambia el valor de *muchos* parámetros *al mismo tiempo* dentro de un intervalo. Este estudio proporciona una extensión muy útil al análisis de sensibilidad; por ejemplo, se puede verificar el efecto de cambios simultáneos en parámetros "correlacionados", causados por factores exógenos tales como el estado de la economía. Sin embargo, una aplicación más importante es la investigación de los *trueques* entre los valores de los parámetros. Por ejemplo, si los valores de c_j representan la ganancia unitaria de las actividades respectivas, es posible aumentar el valor de alguna c_j a costa de disminuir el de otras mediante un intercambio apropiado de personal y equipo entre las actividades. De manera parecida, si los valores de b_i representan las cantidades disponibles de los respectivos recursos, es posible aumentar alguna b_i si se está de acuerdo en disminuir algunas otras. El análisis de este tipo de posibilidades se presenta e ilustra al final de la sección 6.7.

En algunas aplicaciones, el propósito del estudio es determinar el trueque más apropiado entre dos factores básicos como *costos* y *beneficios*. La forma usual de hacerlo es expresar uno de estos factores de la función objetivo (como minimizar el costo total) e incorporar el otro a las restricciones (por ejemplo, beneficio $\ge$ nivel mínimo aceptable), como se hizo en el problema de contaminación de la Nori & Leets Co., en la sección 3.4. La programación lineal paramétrica permite entonces la investigación sistemática de lo que ocurre cuando se cambia una decisión inicial tentativa sobre los trueques (como el nivel mínimo aceptable de los beneficios) a fin de mejorar un factor a costa de otro.

La técnica algorítmica para programación lineal paramétrica es una extensión natural del análisis de sensibilidad, por lo que también está basada en el método símplex. El procedimiento se describe en la sección 7.2.

4.8 USO DE COMPUTADORA

Si la computación electrónica no se hubiera inventado, no se oiría hablar de programación lineal ni del método símplex. Aunque es posible aplicar el método símplex a mano (probablemente con la ayuda de una calculadora) para resolver problemas muy pequeños de programación lineal, los cálculos necesarios son demasiado tediosos para llevarlos a cabo de manera rutinaria. Sin embargo, el método símplex es un algoritmo muy adecuado para su ejecución en computadora. La revolución de las computadoras ha hecho posible la amplia aplicación de la programación lineal en las últimas décadas.

Implantación del método símplex

Existe una amplia disponibilidad de programas del método símplex en esencia para casi todos los sistemas de cómputo modernos. Por lo general, estos programas son parte de paquetes de software complejos de programación matemática que incluyen muchos procedimientos descritos en los capítulos subsecuentes (incluso los referentes a análisis posóptimo).

Estos programas de computadora no siempre siguen la forma tabular o la algebraica del método símplex que se presentaron en las secciones 4.3 y 4.4. Estas formas se pueden simplificar de manera significativa al llevarlas a la computadora. Por lo tanto, los programas usan una *forma matricial* (que suele llamarse *método símplex revisado*) muy adecuada para computación. Esta forma obtiene los mismos resultados que las formas tabular y algebraica, pero calcula y almacena sólo los números que necesita para la iteración actual, y después guarda los datos esenciales de manera más compacta. En las secciones 5.2 y 5.4 se describe este método.

El método símplex se usa en forma rutinaria para resolver problemas de programación lineal sorprendentemente grandes. Por ejemplo, algunas computadoras personales poderosas (en especial las estaciones de trabajo) pueden resolver problemas con cientos de miles o, inclusive, de millones de restricciones funcionales y un número mayor de variables de decisión. En ocasiones, problemas resueltos con éxito tienen inclusive decenas de millones de restricciones funcionales y variables de decisión.[22] Para ciertos *tipos especiales* de problemas de programación lineal (como problemas de transporte, asignación y flujo de costo mínimo que se describirán en secciones posteriores), ahora pueden resolverse problemas de tamaño mucho mayor con versiones *especializadas* del método símplex.

Varios factores afectan el tiempo que tarda el método símplex general para resolver un problema de programación lineal. El más importante es el *número de restricciones funcionales ordinarias*. De hecho, el tiempo de cálculo tiende a ser, a grandes rasgos, proporcional al cubo de este número, por lo que al duplicarlo el tiempo puede quedar multiplicado por un factor aproximado a 8. Por el contrario, el número de variables es un factor de importancia relativamente menor.[23] Así, aunque se dupliquen, tal vez ni siquiera se duplique el tiempo de cálculos. Un tercer factor con alguna importancia es la *densidad* de la tabla de coeficientes de las restricciones (es decir, la *proporción* de coeficientes *distintos* de cero) ya que afecta el tiempo de cálculo *por iteración*. (En problemas grandes que se encuentran en la práctica, es común que la densidad esté por debajo de 5% e incluso sea menor a 1%, "dispersión" que tiende a acelerar el método símplex de manera considerable.) Una regla empírica común para estimar el *número de iteraciones* es que tiende a ser el doble del número de restricciones funcionales.

En problemas de programación lineal grandes es inevitable que al inicio se cometan algunos errores y se tomen decisiones equivocadas cuando se formula el modelo y se lo introduce en la computadora. En consecuencia, como se estudió en la sección 2.4, se necesita un proceso exhaustivo de pruebas y refinamiento (*validación del modelo*). El producto terminal usual no es un modelo estático que el método símplex resuelve de una sola vez. Por el contrario, el equipo de IO y casi siempre la administración toman en cuenta una larga serie de variaciones sobre el modelo básico (en ocasiones, miles de variaciones) para examinar diferentes escenarios como parte del análisis posóptimo. Este proceso completo se acelera en gran medida cuando se puede llevar a cabo de manera *interactiva* en una *computadora personal*. Con la ayuda de los lenguajes de modelado matemático y de los avances en la tecnología de computadoras este procedimiento es, cada vez más, una práctica común.

Hasta mediados de la década de 1980, los problemas de programación lineal se resolvían casi de manera exclusiva en *computadoras grandes*. Un interesante desarrollo reciente es la explosiva

[22] No intente desarrollar esta tarea en casa. Los problemas de este tipo requieren un sistema de programación lineal complejo que usa las técnicas modernas que aprovechan la proporción de coeficientes en la matriz y otras técnicas especiales (por ejemplo, *técnicas de quiebre* para encontrar con rapidez una solución BF inicial avanzada). Cuando se resuelven problemas en forma periódica después de alguna actualización menor de los datos, con frecuencia se ahorra mucho tiempo cuando se utiliza (o se modifica) la última solución óptima como solución inicial básica factible de la nueva corrida.
[23] Esta afirmación supone que se utiliza el método símplex revisado descrito en las secciones 5.2 y 5.4.

ampliación de la capacidad de ejecutar programas de programación lineal en las computadoras personales, las microcomputadoras y las estaciones de trabajo. Éstas, que incluyen algunas con capacidad de procesamiento en paralelo, en la actualidad se emplean en lugar de las computadoras grandes para resolver modelos masivos. Las computadoras personales más rápidas no se quedan atrás aunque la solución de modelos extensos suele requerir memoria adicional.

Software de programación lineal descrito en este libro

Hoy se dispone de un gran número de paquetes de software para programación lineal y sus extensiones, que satisfacen distintas necesidades. Uno de los más avanzados de este tipo es **Express-MP**, un producto de Dash Optimization (que se unió con Fair Isaac). Otro paquete que es considerado muy poderoso para la resolución de problemas extensos es **CPLEX**, un producto de ILOG, Inc., con oficinas en Silicon Valley. Desde 1988, CPLEX ha marcado el camino de la solución de problemas de programación lineal cada vez más grandes. Los extensos esfuerzos de investigación y desarrollo han permitido una serie de actualizaciones con incrementos drásticos del nivel de eficiencia. CPLEX 11, que se liberó en 2007, brinda otra mejora con una magnitud importante. Este software ha resuelto con éxito problemas de programación lineal reales surgidos en la industria en decenas de millones de restricciones funcionales y variables de decisión! Con frecuencia, CPLEX utiliza el método símplex y sus variantes (como el método símplex dual que se presentó en la sección 7.1) para resolver estos problemas masivos. Además del método símplex, CPLEX cuenta con otras herramientas poderosas para resolver problemas de programación lineal. Una de ellas es un algoritmo muy rápido que aplica el *enfoque de punto interior* que se introduce en la sección 4.9. Este algoritmo puede resolver algunos problemas de programación lineal enormes que el método símplex no puede (y viceversa). Otra presentación es el *método símplex de redes* (descrito en la sección 9.7), que puede resolver tipos especiales de problemas de programación lineal aún más grandes. CPLEX 11 también va más allá de la programación lineal e incluye algoritmos modernos para *programación entera* (capítulo 11) y *programación cuadrática* (sección 12.7), así como *programación cuadrática entera*.

Es posible predecir que estos avances importantes de los paquetes de software para optimización, como CPLEX, continuarán en el futuro. La continua mejora de la velocidad de las computadoras también permite anticipar un acelerado aumento de la velocidad de los futuros paquetes de software.

Como a menudo se utiliza para resolver problemas realmente grandes, lo normal es que CPLEX se use junto con un *lenguaje de modelado* de programación matemática. Como se describió en la sección 3.7, los lenguajes de modelado están diseñados para formular con eficiencia modelos de programación lineal grandes (y modelos relacionados) de manera compacta, después de lo cual se corre un solucionador para resolver el modelo. Varios lenguajes de modelado sobresalientes trabajan con CPLEX como solucionadores. ILOG introdujo también su propio lenguaje de modelado, llamado *Lenguaje de Programación para Optimización* (*OPL*) que se puede usar con CPLEX para formar el *Sistema de Desarrollo OPL-CPLEX.* (Se puede encontrar una versión de prueba de ese producto en la página de internet de ILOG, www.ilog.com.)

Como se mencionó en la sección 3.7, la versión para estudiantes de CPLEX se incluye en el OR Courseware como el solucionador del lenguaje de modelado MPL.

La versión del estudiante de MPL que contiene el OR Courseware también incluye dos solucionadores que representan una alternativa de CPLEX para resolver problemas de programación lineal y problemas de programación con enteros (temas que se analizan en el capítulo 11). Uno de ellos es **CoinMP**, un solucionador de software que puede resolver problemas más complejos que la versión del estudiante de CPLEX (el cual está limitado a 300 restricciones y variables). El otro es LINDO.

LINDO (iniciales de Linear INteractive and Discrete Optimizer) tiene una historia más antigua que CPLEX en el campo de las aplicaciones de la programación lineal y sus extensiones. La interfaz fácil de usar de LINDO se encuentra disponible como un subconjunto del paquete de modelado de optimización **LINGO** de LINDO Systems, www.lindo.com. En parte, la duradera popularidad de LINDO se debe a su sencillez de manejo. Para problemas relativamente pequeños (tamaño libro de texto), el modelo se puede introducir y resolver de manera bastante intuitiva, por lo que se trata de una herramienta útil para los estudiantes. Aunque su uso es muy sencillo en modelos pequeños, LINDO/LINGO puede resolver también modelos de gran tamaño, por ejemplo, la versión más grande de este software ha sido capaz de resolver problemas reales con 4 millones de variables y 2 millones de restricciones.

En el OR Courseware que se proporciona en el sitio de internet del libro se incluye la versión para estudiantes de LINGO/LINDO junto con un tutorial extenso. El apéndice 4.1 proporciona una breve introducción. Además, el software contiene una gran cantidad de ayuda en línea. El OR Courseware también cuenta con formulaciones LINGO/LINDO para los ejemplos principales que se utilizan en este libro.

Los solucionadores basados en las hojas de cálculo son cada vez mejor recibidos para programación lineal y sus extensiones. Entre los líderes se encuentran los solucionadores producidos por Frontline Systems para Microsoft Excel y otros paquetes de hojas de cálculo. Además del solucionador básico que incluyen estos paquetes, se dispone de otros más poderosos como el *Premium Solver*. Debido al amplio uso actual del software de hojas de cálculo como Microsoft Excel, estos solucionadores permiten que un creciente número de personas conozcan el potencial de la programación lineal. Para problemas tipo libros de texto (y algunos bastante más grandes), las hojas de cálculo proporcionan una manera conveniente de formular y resolver modelos de programación lineal, como se describe en la sección 3.5. Los solucionadores más poderosos pueden resolver modelos bastante grandes con varios miles de variables de decisión. Sin embargo, cuando la hoja de cálculo crece hasta un tamaño difícil de manejar, un buen lenguaje de modelado y su solucionador pueden proporcionar un enfoque más eficiente para formular y resolver el modelo.

Las hojas de cálculo proporcionan una excelente herramienta de comunicación, en especial si se trata de administradores típicos que se sienten a gusto con este formato pero no con las formulaciones algebraicas de IO. Por esta razón, es común que los paquetes de optimización y los lenguajes de modelado puedan importar y exportar datos y resultados al formato de una hoja de cálculo. Por ejemplo, en la actualidad, el lenguaje de modelado MPL incluye una mejora (llamada *OptiMax 2000 Component Library*) que permite crear la sensación de un modelo en hoja de cálculo para el usuario del modelo pero que usa MPL para formularlo de manera muy eficiente. (La versión para estudiantes de OptiMax 2000 se incluye en el OR Courseware.)

El **Premium Solver for Education** es uno de los complementos de Excel incluido en el CD-ROM. Se puede instalar para obtener un desempeño mucho mejor que con el Excel Solver estándar.

En consecuencia, todo el software, los tutoriales y los ejemplos que se incluyen en el sitio de internet del libro proporcionan varias opciones atractivas de paquetes para programación lineal.

Opciones de software disponibles para programación lineal

1. Ejemplos de demostración (en OR Tutor) y procedimientos interactivos y automáticos en el IOR Tutorial para un aprendizaje eficiente del método símplex.
2. Excel y el Premium Solver para formular y resolver modelos de programación lineal en una hoja de cálculo.
3. MPL/CPLEX para formular y solucionar de manera eficiente modelos grandes de programación lineal.
4. LINGO y su solucionador (compartido con LINDO) que proporciona una manera alternativa de formular y resolver modelos grandes de programación lineal con eficiencia.
5. LINDO para formular y resolver modelos de programación lineal en forma directa.

Quizá el instructor del curso especifique cuál software es conveniente utilizar. Cualquiera que sea la elección se adquirirá experiencia con el tipo de software actual que usan los profesionales de IO.

4.9 ENFOQUE DE PUNTO INTERIOR PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El desarrollo de más trascendencia durante la década de 1980 en investigación de operaciones fue el descubrimiento del enfoque de punto interior para resolver problemas de programación lineal. Este descubrimiento se efectuó en 1984, cuando un joven matemático de AT&T Bell Laboratories, Narendra Karmarkar, anunció el desarrollo de un nuevo algoritmo para resolver problemas de programación lineal con este enfoque. Aunque el algoritmo experimentó sólo una mezcla de aceptación y rechazo cuando comenzó a competir con el método símplex, el concepto clave de solución que describía parecía tener un gran potencial para resolver problemas de programación lineal *enormes* más allá del alcance del método símplex. Muchos investigadores de alto nivel trabajaron en modificaciones del algoritmo de Karmarkar para aprovechar todo su potencial. Se han logrado grandes avances (y continúan) y se han desarrollado varios algoritmos poderosos que usan el enfoque de punto interior. En la actualidad, los paquetes de software más eficaces diseñados para resolver problemas muy grandes (como CPLEX) incluyen al menos un algoritmo que emplea este enfoque junto con el método símplex y sus variantes. La investigación sobre estos algoritmos continúa y su implantación en la computadora sigue mejorando. Estos avances han renovado la investigación sobre el método símplex lo mismo que sobre su implantación en computadoras. A la vez, se mantiene la competencia por la supremacía entre los dos enfoques para resolver problemas muy grandes.

A continuación se estudiará la idea clave en la que se apoya el algoritmo de Karmarkar y sus variantes subsecuentes que aplican el enfoque de punto interior.

El concepto de solución clave

Aunque es bastante diferente del método símplex, el algoritmo de Karmarkar comparte algunas de sus características. En principio, es un algoritmo *iterativo*. Comienza por identificar una *solución de prueba* factible. En cada iteración, se mueve de una solución de prueba actual a una mejor solución de prueba en la región factible. Después continúa este proceso hasta llegar a una solución de prueba que es (en esencia) óptima.

La gran diferencia se encuentra en la naturaleza de estas soluciones de prueba. En el caso del método símplex, éstas son *soluciones FEV* (o soluciones BF en el problema aumentado), de manera que todos los movimientos se hacen por las aristas sobre la *frontera* de la región factible. De acuerdo con el algoritmo de Karmarkar, las soluciones de prueba son **puntos interiores**, es decir, puntos *dentro* de la frontera de la región factible. Ésta es la razón por la que se hace referencia al algoritmo de Karmarkar y sus variantes como **algoritmos de punto interior**.

Sin embargo, debido a que se obtuvo una patente de una versión anterior de un algoritmo de punto interior, con frecuencia a este algoritmo también se le denomina **algoritmo de barrera** (o *método de barrera*). El término *barrera* se utiliza porque desde la perspectiva de una búsqueda cuyas soluciones de prueba son *puntos interiores*, cada frontera de restricción es tratada como una barrera. En la actualidad, la mayoría de los paquetes de software para optimización utilizan la terminología de la barrera cuando se refieren a su opción de solucionador basado en el enfoque del punto interior. Tanto CPLEX como LINDO API incluyen un "algoritmo de barrera" que se puede emplear para resolver problemas de programación lineal o cuadrática (estos últimos se explican en la sección 12.7).

Para ilustrar este enfoque, en la figura 4.11 se muestra la trayectoria seguida por el algoritmo de punto interior en el OR Courseware cuando se aplica al problema de la Wyndor Glass Co. que comienza en la solución de prueba inicial (1, 2). Observe que todas las soluciones de prueba (puntos) que aparecen en esta trayectoria se encuentran dentro de la frontera de la región factible a medida que la trayectoria se acerca a la solución óptima (2, 6). (Todas las soluciones de prueba subsecuentes que no se muestran están también dentro de la frontera de la región factible.) Compare esta trayectoria con la que se sigue en el método símplex alrededor de la frontera de (0, 0) a (0, 6) a (2, 6).

En la tabla 4.18 se muestra una salida real del OR Courseware para este problema.[24] (Inténtelo.) Observe cómo las soluciones de prueba sucesivas se acercan cada vez más a la solución óptima, pero en realidad nunca llegan. Sin embargo, la desviación se vuelve infinitesimalmente pequeña y, para propósitos prácticos, la solución de prueba final puede tomarse como la solución óptima. (En la sección Worked Examples del sitio en internet del libro se muestra el resultado del IOR Tutorial para **otro ejemplo**.)

En la sección 7.4 se presentan los detalles del algoritmo de punto interior específico que se desarrolló en el IOR Tutorial.

[24] La rutina se llama *Solve Automatically by the Interior-Point Algorithm* (solución automática por el algoritmo de punto interior). El menú de "option" da dos alternativas para cierto parámetro del algoritmo (definido en la sección 7.4). La elección usada aquí es el valor establecido de $\alpha = 0.5$.

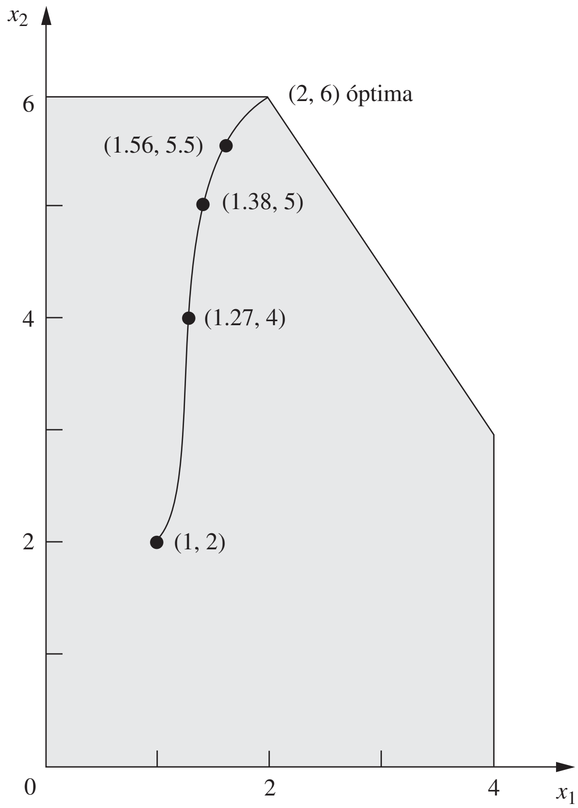


FIGURA 4.11
La curva de (1, 2) a (2, 6) muestra una trayectoria típica seguida por un algoritmo de punto interior, a través de la parte *interna* de la región factible del problema de la Wyndor Glass Co.

Comparación con el método símplex

Una manera significativa de comparar los algoritmos de punto interior con el método símplex es examinar sus propiedades teóricas en cuanto a complejidad computacional. Karmarkar demostró que la versión original de su algoritmo es un **algoritmo de tiempo polinomial**; es decir, el tiempo que se requiere para resolver *cualquier* problema de programación lineal se puede acotar por arriba mediante una función polinomial del tamaño del problema. Se han construido contraejemplos muy

TABLA 4.18 Salida del algoritmo de punto interior en OR Courseware del problema de la Wyndor Glass Co.

Iteración	x_1	x_2	Z
0	1	2	13
1	1.27298	4	23.8189
2	1.37744	5	29.1323
3	1.56291	5.5	32.1887
4	1.80268	5.71816	33.9989
5	1.92134	5.82908	34.9094
6	1.96639	5.90595	35.429
7	1.98385	5.95199	35.7115
8	1.99197	5.97594	35.8556
9	1.99599	5.98796	35.9278
10	1.99799	5.99398	35.9639
11	1.999	5.99699	35.9819
12	1.9995	5.9985	35.991
13	1.99975	5.99925	35.9955
14	1.99987	5.99962	35.9977
15	1.99994	5.99981	35.9989

rebuscados para demostrar que el método símplex no posee esta propiedad y que es un **algoritmo de tiempo exponencial** (esto es, el tiempo requerido sólo puede ser acotado por arriba mediante una función exponencial del tamaño del problema). La diferencia de *desempeño en el peor de los casos* es considerable. No obstante, esto no dice nada sobre la comparación de desempeño promedio en problemas reales, que es un asunto de mayor importancia.

Los dos factores básicos que determinan el desempeño de un algoritmo ante un problema real son el *tiempo promedio de computadora por iteración* y el *número de iteraciones*. Las siguientes comparaciones tratan sobre estos factores.

Los algoritmos de punto interior son mucho más complicados que el método símplex. Se requieren muchos más cálculos en cada iteración para encontrar la siguiente solución de prueba. Por lo tanto, el tiempo de computadora por iteración de un algoritmo de punto interior es muchas veces mayor que el que emplea el método símplex.

En el caso de problemas claramente pequeños, el número de iteraciones que requiere el algoritmo de punto interior y el método símplex tienden a ser comparables. Por ejemplo, en un problema con 10 restricciones funcionales, 20 iteraciones sería lo normal para los dos tipos de algoritmos. En consecuencia, en problemas de tamaño similar, el tiempo total de computadora para desarrollar un algoritmo de punto interior tenderá a ser mucho mayor que si se utiliza el método símplex.

Por otro lado, una ventaja de los algoritmos de punto interior es que los problemas grandes no requieren muchas más iteraciones que los problemas pequeños. Por ejemplo, un problema con 10 000 restricciones funcionales tal vez requiera menos de 100 iteraciones. Aun si se considera el tiempo sustancial de computadora necesario por iteración para un problema de este tamaño, un número de iteraciones tan pequeño hace que el problema sea muy manejable. Por el contrario, el método símplex puede requerir 20 000 iteraciones, lo que genera el peligro de no terminar en un tiempo razonable. En consecuencia, es muy probable que los algoritmos de punto interior sean más rápidos que el método símplex para problemas tan grandes.

La razón de esta gran diferencia en el número de iteraciones para problemas grandes es la diferencia entre las trayectorias que se siguen. En cada iteración el método símplex se mueve de la solución FEV actual a una solución FEV adyacente por una arista de la frontera de la región factible. Los problemas grandes tienen cantidades astronómicas de soluciones FEV. La trayectoria desde la solución FEV inicial hasta una solución óptima puede dar muchas vueltas por la frontera, y dar numerosos pasos antes de llegar a cada solución FEV adyacente siguiente. En contraste, un algoritmo de punto interior evita este engorroso deambular pues avanza por el interior de la región factible hacia la solución óptima. Al agregar restricciones funcionales se agregan aristas a la frontera de la región factible, lo cual tiene muy poco efecto sobre el número de soluciones de prueba que se necesitan en la trayectoria a través del interior. Esta característica posibilita que los algoritmos de punto interior resuelvan problemas con un número muy grande de restricciones funcionales.

Una última comparación importante se refiere a la capacidad para realizar los distintos tipos de análisis posóptimo descritos en la sección 4.7. El método símplex y sus extensiones son muy adecuados y su uso es muy extenso para este tipo de análisis. Por ejemplo, el producto de ILOG llamado *Optimization Decision Manager* hace un uso extenso del método símplex en CPLEX para llevar a cabo una gran variedad de tareas del análisis de posoptimización de una manera apropiada. Desafortunadamente, en la actualidad el enfoque de punto interior tiene una capacidad muy limitada en esta área.[25] Dada la gran importancia del análisis posóptimo, ésta es una falla crucial de los algoritmos de punto interior. Sin embargo, se establecerá una forma en que el método símplex se puede combinar con el enfoque de punto interior para salvar este obstáculo.

Papeles complementarios del método símplex y el enfoque de punto interior

La investigación que se realiza en la actualidad proporciona mejoras sustanciales en la implantación en computadora del método símplex (incluidas sus variantes) y el algoritmo de punto interior. Por lo tanto, cualquier predicción sobre su papel futuro es riesgosa. De todas maneras se presentará un resumen de la predicción actual acerca de sus papeles complementarios.

[25] Sin embargo, la investigación dirigida a aumentar esta capacidad continúa en avance. Por ejemplo, vea E. A. Yildirim y M. J. Todd, "Sensitivity Analysis in Linear Programming and Semidefinite Programming Using Interior-Point Methods", en *Mathematical Programming*, Series A, **90**(2): 229-261, abril de 2001.

El método símplex (y sus variantes) todavía es el algoritmo estándar para el uso rutinario de programación lineal. Es el algoritmo más eficiente para resolver problemas con menos de, digamos, 10 000 restricciones funcionales. También es el más eficiente para abordar algunos (pero no todos) de los problemas con hasta, digamos, 100 000 restricciones funcionales y casi un número ilimitado de variables de decisión, por lo que la mayor parte de los usuarios aún lo utilizan para este tipo de problemas. Sin embargo, cuando el número de restricciones funcionales aumenta, cada vez es más probable que el enfoque de punto interior sea el más eficiente, por lo cual en la actualidad se lo emplea con mayor frecuencia. Cuando el tamaño llega a cientos de miles o inclusive millones de restricciones funcionales, el enfoque de punto interior puede ser el único capaz de resolver el problema. Aun así, no siempre ocurre de este modo. Como se mencionó en la sección anterior, el software moderno ha tenido éxito en el uso del método símplex y sus variantes para resolver algunos problemas masivos con millones e incluso decenas de millones de restricciones y variables de decisión.

Estas generalizaciones sobre la comparación entre el enfoque de punto interior y el método símplex para distintos tamaños de problemas no son acertadas en todos los casos. El software y el equipo de cómputo que se usan tienen un efecto importante. El *tipo específico* de problema de programación lineal que se desea resolver afecta de manera notable la comparación. Al pasar el tiempo se sabrá más sobre cómo identificar los tipos de problemas que son más adecuados para cada tipo de algoritmo.

Uno de los productos secundarios del enfoque de punto interior ha sido la renovación importante de los esfuerzos dedicados a mejorar la eficiencia de los programas de computadora del método símplex. Se han logrado progresos impresionantes en los últimos años y habrá más por venir. Al mismo tiempo, la investigación y desarrollo en marcha sobre el enfoque de punto interior aumentará todavía más su poder, y quizá a un paso más acelerado que en el caso del método símplex.

El mejoramiento de la tecnología de las computadoras, como el procesamiento masivo en paralelo (un gran número de unidades de computadora que operan en paralelo en distintas partes del mismo problema), también significará un aumento sustancial del tamaño del problema que cualquiera de los dos tipos de algoritmos pueda resolver. Sin embargo, por el momento parece que los enfoques de punto interior tienen mucho mayor potencial que el método símplex para aprovechar el procesamiento en paralelo.

Como ya se dijo, una desventaja grave del enfoque de punto interior es su limitada capacidad para realizar un análisis posóptimo. Para compensar esta falla, los investigadores han intentado desarrollar procedimientos para cambiar al método símplex cuando el algoritmo de punto interior termina. Recuerde que las soluciones pruebas obtenidas por éste se acercan cada vez más a una solución óptima (la mejor solución FEV), pero nunca llegan a ella. Por esta razón, un procedimiento para cambiar de enfoque requiere identificar la solución FEV (o la solución BF del problema aumentado) que es muy cercana a la solución de prueba final.

Por ejemplo, si se observa la figura 4.11, es sencillo ver que la solución de prueba final de la tabla 4.18 es muy cercana a (2, 6). Desafortunadamente, en problemas con miles de variables de decisión (en los que no se dispone de una gráfica), la identificación de una solución FEV (o BF) cercana es una tarea difícil y lenta. No obstante, se ha progresado bastante en el desarrollo de procedimientos para hacerlo. Por ejemplo, la versión profesional completa de CPLEX incluye un *algoritmo superior* que convierte la solución obtenida mediante su "algoritmo de barrera" en una solución BF.

Una vez que se encuentra la solución BF cercana, se aplica la prueba de optimalidad del método símplex para verificar si se trata de la solución BF óptima. Si no lo es, se llevan a cabo algunas iteraciones del método símplex para moverla hacia esa dirección. En general, sólo se necesitan unas cuantas iteraciones (tal vez una sola) ya que el algoritmo de punto interior se acerca de manera estrecha a una solución óptima. Estas iteraciones deben poderse realizar bastante rápido, aun en problemas demasiado grandes para resolverlos desde el principio. Después de obtener realmente una solución óptima, se aplican el método símplex y sus extensiones para ayudar a realizar el análisis posóptimo.

Debido a las dificultades que implica la aplicación de un procedimiento de cambio (que incluye el tiempo adicional de computadora), algunos profesionales prefieren usar sólo el método símplex desde el principio. Ésta parece una buena opción cuando sólo en algunas ocasiones se encuentran problemas suficientemente grandes como para que un algoritmo de punto interior sea un poco más rápido (antes de hacer el cambio) que el método símplex. Esta modesta aceleración no justificaría ni el tiempo adicional de computadora para el procedimiento de cambio ni el alto costo de adquirir (y aprender a usar) el software basado en el enfoque de punto interior. Sin embargo, para las organizaciones que con frecuencia deben manejar problemas de programación lineal extremadamente grandes, la adquisición del nuevo software de este tipo (con el procedimiento de cambio) tal vez valga la pena. Cuando se trata de problemas enormes, la única forma de solución disponible pueden ser estos paquetes.

Algunas veces, las aplicaciones de los modelos de programación lineal muy grandes generan ahorros de millones de dólares. Sólo una de ellas puede pagar varias veces el costo de los paquetes de software basados en el enfoque de punto interior y el cambio al método símplex al final.

4.10 CONCLUSIONES

El método símplex es un algoritmo eficiente y confiable para resolver problemas de programación lineal. También proporciona la base para llevar a cabo, en forma muy eficiente, las distintas etapas del análisis posóptimo.

Aunque tiene una interpretación geométrica útil, el método símplex es un procedimiento algebraico. En cada iteración se mueve de la solución BF actual a una adyacente mejor mediante la elección de la variable básica entrante y de la saliente; después recurre a la eliminación de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones lineales. Cuando la solución actual no tiene una solución BF adyacente que sea mejor, la solución actual es óptima y el algoritmo se detiene.

Se presentó la forma algebraica completa del método símplex para establecer su lógica y se llevó el método a una forma tabular más conveniente. Para preparar el inicio del método símplex, algunas veces es necesario usar variables artificiales para obtener una solución básica factible inicial de un problema artificial. En este caso se puede usar el método de la gran *M*, o bien, el método de las dos fases, para asegurar que el método símplex obtenga una solución óptima para el problema real.

La implantación en computadoras personales del método símplex y sus variantes se han convertido en herramientas tan poderosas que se emplean a menudo para resolver problemas de programación lineal con cientos de miles de restricciones funcionales y variables de decisión y, en ocasiones, para encarar problemas mucho más grandes. Los algoritmos de punto interior proporcionan una nueva herramienta poderosa para resolver problemas muy grandes.

APÉNDICE 4.1 INTRODUCCIÓN AL USO DE LINDO Y LINGO

El paquete LINGO puede aceptar modelos de optimización en cualquiera de los dos estilos o sintaxis: *a*) sintaxis LINDO o *b*) sintaxis LINGO. En primera instancia se descrbirá la sintaxis LINDO. Las ventajas relativas atribuibles a ella consisten en que es muy fácil y natural para enfrentar problemas de programación lineal y con enteros. Su sintaxis se ha utilizado ampliamente desde 1981.

La sintaxis de LINDO permite introducir un modelo en forma natural, en esencia, de la misma forma como se presenta en el libro. Por ejemplo, ésta es una forma sencilla de escribir un modelo en LINDO para el ejemplo de la Wyndor Glass, Co. de la sección 3.1. Bajo el supuesto de que usted ya instaló LINGO, presione sobre el ícono LINGO para arrancar LINGO e inmediatamente después teclee lo siguiente:

```
! Problema de Wyndor Glass Co. Modelo LINDO
! X1 = lotes del producto 1 por semana
! X2 = lotes del producto 2 por semana
! Ganancia, en 1000 dólares

MAX Profit) 3 XI + 5 X2

Subject to

! Tiempo de producción
Plant1) X1 <= 4
Plant2) 2 X2 <= 12
Plant3) 3 X1 + 2 X2 <= 18
END
```

Las primeras cuatro líneas, las cuales comienzan con un signo de admiración, son sólo comentarios. El comentario de la cuarta línea clarifica que la función objetivo está expresada en unidades de miles de dólares. El número 1 000 en este comentario no tiene la coma acostumbrada en frente de los tres últimos dígitos ya que LINDO/LINGO no acepta comas. (La sintaxis de LINDO tampoco acepta paréntesis en expresiones algebraicas.) Las líneas cinco en adelante especifican el modelo. Las variables de decisión pueden especificarse en minúsculas o mayúsculas. Por lo general, las mayúsculas se utilizan con el fin de que las variables no se vean pequeñas con respecto a los "subíndices" que le preceden. En lugar de usar X1 o X2, usted puede utilizar nombres más sugerentes como, por ejemplo, el nombre del producto que se está fabricando; por ejemplo, PUERTAS y VENTANAS, para representar a la variable de decisión a lo largo de todo el modelo.

La quinta línea de la formulación LINDO indica que el objetivo del modelo es maximizar la función objetivo, $3x_1 + 5x_2$. La palabra Profit (ganancia) seguida de un paréntesis es opcional y aclara que la cantidad que se maximiza se llamará Profit en el reporte solución.

El comentario del séptimo renglón señala que las siguientes restricciones son de los tiempos de producción que se usan. Los siguientes tres comienzan por un nombre seguido de un paréntesis para cada restricción funcional. Estas restricciones se escriben de la forma usual excepto por los signos de desigualdad. Como muchos teclados no incluyen los símbolos $\leq$ y $\geq$, LINDO interpreta los símbolos $<$ o $<=$ como $\leq$ y $>$ o $>=$ como $\geq$. (Para teclados que incluyen los símbolos $\leq$ y $\geq$, LINDO no los reconocerá.)

El final de las restricciones se indica con la palabra END. LINDO supone de modo automático las restricciones de no negatividad. Si, por ejemplo, x_1 no tiene restricción de no negatividad, debe indicarse con FREE X1 en el renglón que sigue a END.

Para resolver este modelo en LINGO/LINDO, presione la tecla Bull's Eye rojo en la parte superior de la ventana LINGO. La figura A4.1 muestra el "informe de solución" resultante. Las líneas en la parte superior indican que se encontró una solución óptima o "global" con un valor de la función objetivo de 36 en dos iteraciones. En seguida aparecen los valores de x_1 y x_2 para la solución óptima.

La columna de la derecha de la columna Valores proporciona los **costos reducidos**, los cuales no se han estudiado en este capítulo porque la información que proporcionan se puede derivar del *intervalo permisible* para los coeficientes de la función objetivo. Dichos rangos permisibles se encuentran disponibles (como se verá en la siguiente figura). Cuando la variable es una *variable básica* de la solución óptima (como ambas variables del problema de la Wyndor), su costo reducido es 0 en forma automática. Cuando es una *variable no básica* su costo reducido proporciona información interesante. Una variable cuyo coeficiente objetivo es "muy pequeño" en un modelo de maximización o "muy grande" en un modelo de minimización tendrá un valor de 0 en una solución óptima. El costo reducido indica cuánto se puede *aumentar* (cuando se maximiza) o *disminuir* (cuando se minimiza) este coeficiente antes de que cambie la solución óptima y esta variable se convierta en básica. Sin embargo, recuerde que esta información se obtiene mediante el intervalo permisible para seguir óptimo para el coeficiente de esta variable en la función objetivo. El costo reducido (de una variable no básica) es sólo el *aumento permitido* (cuando se maximiza), a partir del valor actual del coeficiente para quedar dentro de su intervalo permisible o la *reducción permitida* (cuando se minimiza).

La parte inferior de la figura A4.1 proporciona información acerca de las tres restricciones funcionales. La columna Slack o Surplus proporciona la diferencia entre los dos lados de cada restricción. La columna Dual Prices proporciona, con otro nombre, los *precios sombra* de estas restricciones estudiados en la sección

■ **FIGURA A4.1**
Informe de solución proporcionado por la sintaxis de LINDO sobre el problema de la Wyndor Glass Co.

```
Global optimal solution found.
Objective value:                                      36.00000
Total solver iterations:
 Variable        Value          Reduced Cost
    X1         2.000000           0.000000
    X2         6.000000           0.000000
   Row     Slack Or Surplus     Dual Prices
  PROFIT       36.00000           1.000000
  PLANT1        2.000000          0.000000
  PLANT2        0.000000          1.500000
  PLANT3        0.000000          1.000000
```

4.7. (Este nombre se debe al hecho, tema que se introducirá en la sección 6.1, de que los precios sombra son los valores óptimos de las variables duales que se presentan en el capítulo 6.) Sin embargo, es importante notar que LINDO utiliza una convención de signos diferente con respecto a la convencional adoptada en cualquier parte de este libro (vea la nota al pie 19 respecto a la definición de precio sombra en la sección 4.7). En particular, en el caso de problemas de minimización, los precios sombra (precios duales) de LINGO/LINDO son los negativos de los nuestros.

Una vez que LINDO le proporcione el reporte de solución, usted tiene la opción de realizar el análisis de rango (sensibilidad). La figura A4.2 muestra el reporte de rango, el cual se genera tecleando en LINGO | Range.

Excepto por el uso de unidades de miles de dólares en lugar de dólares en los coeficientes de la función objetivo, este reporte es idéntico a las últimas tres columnas de las tablas del informe de sensibilidad generado por Excel Solver, que se muestran en la figura 4.10. Así, como se vio en la sección 4.7, los primeros dos renglones de este informe indican que el rango permisible de cada coeficiente de la función objetivo (se supone que no hay otro cambio en el modelo) es

$$0 \leq c_1 \leq 7.5$$
$$2 \leq c_2$$

De manera similar, los últimos tres renglones indican que el intervalo permisible factible en cada lado derecho (en el supuesto de que no hay otro cambio en el modelo) es

$$2 \leq b_1$$
$$6 \leq b_2 \leq 18$$
$$12 \leq b_3 \leq 24$$

Usted puede imprimir los resultados en la forma estándar de Windows tecleando en Files | Print.

Éstos son los fundamentos para comenzar a usar LINGO/LINDO. Usted puede encender o apagar la generación de reportes. Por ejemplo, si se apaga la generación automática del reporte de solución estándar (modo Terse), usted lo puede volver a encender tecleando: LINGO | Options | Interface | Output level | Verbose | Apply. La facilidad de generar reportes de intervalo puede encenderse o apagarse tecleando: LINGO | Options | General solver | Dual computations | Prices & Ranges | Apply.

El segundo estilo de entrada con el que LINGO cuenta es sintaxis LINGO, la cual es mucho más poderosa que la sintaxis LINDO. Las ventajas del uso de la sintaxis LINGO son: *a*) permite expresiones matemáticas arbitrarias incluyendo paréntesis así como todas las operaciones matemáticas comunes tales como la división, la multiplicación, logaritmos, seno, etc., *b*) la facilidad de no sólo resolver problemas de programación lineal sino también no lineal, *c*) la escalabilidad de aplicaciones extensas usando variables con subíndices y conjuntos, *d*) la facilidad de leer datos de entrada a partir de una hoja de cálculo o base de datos y enviar información acerca de la solución a la hoja de cálculo o base de datos, *e*) la facilidad de representar de forma natural relaciones dispersas, *f*) la facilidad de programar de tal forma que usted pueda resolver una serie de modelos en forma automática de la misma manera que cuando realiza un análisis paramétrico. Una formulación del problema Wyndor en LINGO utilizando la facilidad subíndices/conjuntos es:

FIGURA A4.2
Informe de intervalos proporcionado por LINDO sobre el problema de la Wyndor Glass Co.

```
Ranges in which the basis is unchanged:
                Objective    Coefficient      Ranges

                 Current      Allowable      Allowable
  Variable     Coefficient    Increase       Decrease
     X1          3.000000     4.500000       3.000000
     X2          5.000000     INFINITY       3.000000
               Righthand     Side Ranges

     Row         Current      Allowable      Allowable
                   RHS        Increase       Decrease
   PLANT1        4.000000     INFINITY       2.000000
   PLANT2       12.000000     6.000000       6.000000
   PLANT3       18.000000     6.000000       6.000000
```

```
! Wyndor Glass Co. Problem;
SETS:
 PRODUCT: PPB, X;            ! Each product has a profit/batch
and amount;
 RESOURCE: HOURSAVAILABLE;    ! Each resource has a capacity;
! Each resource product combination has an hours/batch;
 RXP(RESOURCE,PRODUCT): HPB;
ENDSETS
DATA:
 PRODUCT  = DOORS  WINDOWS;     ! The products;
     PPB =    3       5;        ! Profit per batch;

      RESOURCE = PLANT1 PLANT2 PLANT3;
 HOURSAVAILABLE =    4      12     18;

  HPB =    1   0    ! Hours per batch;
           0   2
           3   2;
ENDDATA
 ! Sum over all products j the profit per batch times batches
produced;
 MAX = @SUM( PRODUCT(j): PPB(j)*X(j));

 @FOR( RESOURCE(i)): ! For each resource i...;
    ! Sum over all products j of hours per batch time batches
produced...;
   @SUM(RXP(i,j): HPB(i,j)*X(j)) <= HOURSAVAILABLE(i);
     );
```

El problema Wyndor original tiene dos productos y tres recursos. Si Wyndor se expande para tener cuatro productos y cinco recursos, representa un cambio trivial insertar los nuevos datos en la sección DATA. La formulación del modelo se ajusta de manera automática. La facilidad subscript/sets también permite representar modelos en tres dimensiones o en más de manera natural. El problema descrito en la sección 3.6 tiene cinco dimensiones: plantas, máquinas, productos, regiones/clientes y periodos. Lo anterior resulta difícil de representar en una hoja de datos bidimensional, pero es sencillo hacerlo en un lenguaje de modelación con conjuntos y subíndices. En la práctica, para el caso de problemas como el de la sección 3.6, gran parte de las 10(10)(10)(10)(10) = 100 000 combinaciones posibles de relaciones no existen; por ejemplo, no todas las plantas pueden fabricar todos los productos y no todos los clientes demandan todos los productos. La facilidad subscript/sets de los lenguajes de modelación simplifican la representación de dichas relaciones dispersas.

En la mayoría de los modelos que usted ingrese, LINGO podrá detectar de manera automática el uso de sintaxis LINDO o LINGO. Usted puede seleccionar su sintaxis por omisión tecleando: LINGO | Options | Interface | File format | lng (para el caso de LINGO) o ltx (para el caso de LINDO).

LINGO incluye un menú de ayuda en línea con el fin de brindar más detalles y ejemplos. Los suplementos 1 y 2 del capítulo 3 (que se muestran en el sitio de internet del libro) proporcionan una introducción casi completa de LINGO. El tutorial de LINGO en el sitio de internet también proporciona detalles adicionales. Los archivos LINGO/LINDO que se encuentran en el sitio de internet de diferentes capítulos muestran formulaciones LINDO/LINGO de numerosos ejemplos pertenecientes a una gran parte de los capítulos.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

1. Bixby, R. E., "Solving Real-World Linear Programs: A Decade and More of Progress", en *Operations Research*, **50**(1): 3-15, enero-febrero de 2002.
2. Dantzig, G. B. y M. N. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.
3. Fourer, R., "Software Survey: Linear Programming", en *OR/MS Today*, junio de 2007, pp. 42-51.
4. Luenberger, D. y Y. Ye, *Linear and Nolinear Programming*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

5. Maros, I., *Computational Techniques of the Simplex Method*, Kluwer Academic Publishers (en la actualidad, Springer), Boston, MA, 2003.
6. Schrage, L., *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems, Chicago, 2008.
7. Tretkoff, C. e I. Lustig, "New Age of Optimization Applications", *OR/MS Today*, diciembre de 2006, pp. 46-49.
8. Venderbei, R. J., *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

AYUDAS DE APRENDIZAJE PARA ESTE CAPÍTULO EN NUESTRO SITIO DE INTERNET (www.mhhe.com/hillier)

Ejemplos resueltos:

Ejemplos para el capítulo 4

Ejemplos de demostración en OR Tutor:

Interpretación de variables de holgura (Interpretation of Slack Variables)
Forma algebraica del método símplex (Simplex Method—Algebraic Form)
Forma tabular del método símplex (Simplex Method—Tabular Form)

Rutinas interactivas en IOR Tutorial:

Introducción o revisión de un problema general de programación lineal (Enter or Revise a General Linear Programming Model)
Preparación para el método símplex, sólo interactivo (Set Up for the Simplex Method—Interactive Only)
Solución interactiva por el método símplex (Solve Interactively by the Simplex Method)
Método gráfico interactivo (Interactive Graphical Method)

Rutinas automáticas en IOR Tutorial:

Solución automática por el método símplex (Solve Automatically by the Simplex Method)
Solución automática por el algoritmo de punto interior (Solve Automatically by the Interior-Point Algorithm)
Método gráfico y análisis de sensibilidad (Graphical Method and Sensitivity Analysis)

Complemento de Excel:

Premium Solver for Education

Archivos (capítulo 3) para resolver los ejemplos de la Wyndor y de terapia de radiación:

Archivos de Excel
Archivo de LINGO/LINDO
Archivo de MPL/CPLEX

Glosario del capítulo 4

Vea en el apéndice 1 la documentación del software.

PROBLEMAS

Los símbolos de la izquierda de algunos problemas (o de sus incisos) significan lo siguiente:

D: El ejemplo de demostración correspondiente de la lista de la página precedente puede ser útil.
I: Se sugiere que use la rutina interactiva correspondiente enumerada en la página anterior (la impresión registra su trabajo).
C: Use la computadora con cualquiera de las opciones de software disponibles (o según lo indique su instructor) para resolver el problema de manera automática. (Vea en la sección 4.8 una lista de las opciones que contiene este libro y en el sitio en internet del libro.)

Un asterisco en el número del problema indica que al final del libro se da al menos una respuesta parcial.

4.1-1. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$x_1 \leq 5$$
$$x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

a) Grafique la región factible y marque con un círculo las soluciones FEV.
b) En cada solución FEV identifique el par de ecuaciones de fronteras de restricción que satisface.
c) En cada solución FEV utilice este par de ecuaciones de fronteras de restricción para obtener la solución algebraica de los valores de x_1 y x_2 en el vértice.
d) En cada solución FEV, identifique sus soluciones FEV adyacentes.
e) En cada par de soluciones FEV adyacentes, identifique con su ecuación la frontera de restricción común.

4.1-2. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$,

sujeta a

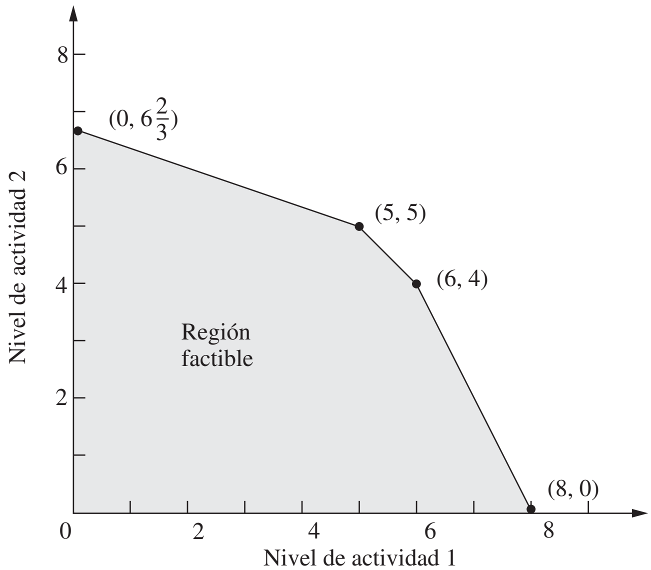
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

D,I ***a***) Use el método gráfico para resolver este problema. Marque con un círculo los vértices de la gráfica.
b) En cada solución FEV, identifique el par de ecuaciones de fronteras de restricción que satisface.
c) En cada solución FEV, identifique sus soluciones FEV adyacentes.
d) Calcule Z en cada solución FEV. Use esta información para identificar la solución óptima.
e) Describa en la gráfica lo que hace el método símplex paso a paso para resolver este problema.

4.1-3. Cierto modelo de programación lineal con dos actividades tiene la región factible que se muestra.



El objetivo es maximizar la ganancia total de las dos actividades. La ganancia unitaria de la actividad 1 asciende a $1 000 y la de la actividad 2 a $2 000.

a) Calcule la ganancia total según cada solución FEV. Use esta información para encontrar la solución óptima.
b) Utilice los conceptos de solución del método símplex que se presentaron en la sección 4.1 para identificar la secuencia de soluciones FEV que examinará el método símplex para llegar a la solución óptima.

4.1-4.* Considere el modelo de programación lineal (que se explicó al final del libro) que se formuló para el problema 3.2-3.

a) Utilice el análisis gráfico para identificar todas las *soluciones en los vértices* en este modelo. Diga si cada una de ellas es factible o no factible.
b) Calcule el valor de la función objetivo de cada una de las soluciones FEV. Utilice esta información para identificar una solución óptima.
c) Utilice los conceptos de solución del método símplex que se presentaron en la sección 4.1 para identificar la secuencia de soluciones FEV que examinará el método símplex para llegar a una solución óptima. (*Sugerencia:* Existen dos secuencias alternativas que se pueden identificar en este modelo en particular.)

4.1-5. Repita el problema 4.1-4 en el siguiente problema.

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

4.1-6. Describa en una gráfica lo que hace el método símplex paso a paso para resolver el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 2x_1 + 3x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 4x_1 - x_2 &\leq 10 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

4.1-7. Describa en una gráfica lo que hace el método símplex paso a paso para resolver el siguiente problema.

Minimizar $\quad Z = 5x_1 + 7x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 147 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 210 \\ x_1 + x_2 &\geq 63 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

4.1-8. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones sobre los problemas de programación lineal es falsa o verdadera y justifique su respuesta.

***a*)** En problemas de minimización, si se evalúa la función objetivo en una solución FEV y no es mayor que su valor en las soluciones FEV adyacentes, entonces esa solución es óptima.

***b*)** Sólo las soluciones FEV pueden ser óptimas, de manera que el número de soluciones óptimas no puede ser mayor que el número de soluciones FEV.

***c*)** Si existen soluciones óptimas múltiples, entonces una solución FEV óptima puede tener una solución FEV adyacente que también es óptima (que da como resultado el mismo valor de *Z*).

4.1-9. Las siguientes afirmaciones son paráfrasis inexactas de los seis conceptos de solución de la sección 4.1. En cada caso explique qué está mal.

***a*)** La mejor solución FEV siempre es óptima.

***b*)** Una iteración del método símplex verifica si la solución FEV actual es óptima y, si no lo es, se desplaza hacia una nueva solución FEV.

***c*)** Aunque se puede elegir cualquier solución FEV como solución FEV inicial, el método símplex siempre comienza en el origen.

***d*)** Cuando el método símplex está listo para elegir una nueva solución FEV para moverse de la solución FEV actual, sólo considera las soluciones adyacentes porque es probable que una de ellas sea óptima.

***e*)** Para elegir la nueva solución FEV y moverse de la solución FEV actual, el método símplex identifica todas las soluciones FEV adyacentes y determina cuál proporciona la mayor tasa de mejoramiento del valor de la función objetivo.

4.2-1. Reconsidere el modelo del problema 4.1-4.

***a*)** Introduzca las variables de holgura a fin de escribir las restricciones funcionales en la forma aumentada.

***b*)** En cada solución FEV, identifique la solución BF correspondiente al calcular los valores de las variables de holgura. En cada solución BF, use los valores de las variables para identificar las variables no básicas y las básicas.

***c*)** En cada solución BF demuestre (mediante la sustitución de la solución) que después de hacer las variables no básicas iguales a cero, esta solución BF también es la solución simultánea del sistema de ecuaciones que obtuvo en el inciso *a*).

4.2-2. Reconsidere el modelo del problema 4.1-5. Siga las instrucciones del problema 4.2-1 para los incisos *a*), *b*) y *c*).

***d*)** Repita el inciso *b*) para las soluciones no factibles en los vértices y las soluciones básicas no factibles correspondientes.

***e*)** Repita el inciso *c*) para las soluciones básicas no factibles.

4.3-1. Lea la referencia que describe todo el estudio de investigación de operaciones que se resume en el Recuadro de aplicación que se muestra en la sección 4.3. Describa en forma breve la aplicación del método símplex en este estudio. Después, haga una lista con los diferentes beneficios financieros y no financieros que resulten de este estudio.

D,I **4.3-2.** Aplique el método símplex (en forma algebraica) paso a paso para resolver el modelo del problema 4.1-4.

4.3-3. Reconsidere el modelo del problema 4.1-5.

***a*)** Aplique el método símplex (en su forma algebraica) a mano para resolver este modelo.

D,I ***b*)** Repita el inciso *a*) con la rutina interactiva correspondiente en el IOR Tutorial.

C ***c*)** Verifique la solución óptima que obtuvo por medio de un paquete de software basado en el método símplex.

D,I **4.3-4.*** Utilice el método símplex (en su forma algebraica) paso a paso para resolver el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 30 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 40 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

D,I **4.3-5.** Use el método símplex (en forma algebraica) paso a paso para resolver el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &\leq 150 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 120 \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 &\leq 105 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

4.3-6. Considere el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 30 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Usted obtiene la información de que las variables *diferentes de cero* en la solución óptima son x_2 y x_3.

a) Describa cómo se puede usar la información para adaptar el método símplex a fin de resolver este problema en el menor número posible de iteraciones (si comienza con la solución BF inicial de costumbre). *No* realice iteraciones.

b) Utilice el procedimiento desarrollado en el inciso *a*) para resolver este problema a mano. (*No* use el OR Courseware.)

4.3-7. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 24 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 &\leq 60 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Usted obtiene la información de que $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 > 0$ en la solución óptima.

a) Describa cómo puede usar la información para adaptar el método símplex a fin de resolver este problema en el número mínimo posible de iteraciones (si comienza con la solución BF inicial de costumbre). *No* realice iteraciones.

b) Utilice el procedimiento desarrollado en el inciso *a*) para resolver este problema a mano. (*No* use el OR Courseware.)

4.3-8. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera y justifique su respuesta mediante referencia a las citas específicas del capítulo.

a) La regla del método símplex para elegir la variable básica entrante se usa porque siempre conduce a la mejor solución BF adyacente (mayor valor de Z).

b) La regla del cociente mínimo del método símplex para elegir la variable básica que sale se usa porque si se hace otra elección con un cociente mayor se llega a una solución que no es factible.

c) Cuando el método símplex obtiene la siguiente solución BF se usan operaciones algebraicas elementales para eliminar cada variable no básica de todas las ecuaciones menos una (*su* ecuación) y para darle un coeficiente de +1 en esa ecuación.

D,I **4.4-1.** Repita el problema 4.3-2; utilice la forma tabular del método símplex.

D,I,C **4.4-2.** Repita el problema 4.3-3; utilice la forma tabular del método símplex.

4.4-3. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 2x_1 + x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 40 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 100 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

a) Resuelva este problema de manera gráfica y a mano. Identifique todas las soluciones FEV.

D,I ***b***) Ahora use el IOR Tutorial para resolver este problema en forma gráfica.

D ***c***) Mediante cálculos manuales resuelva este problema por el método símplex en forma algebraica.

D,I ***d***) Ahora use el IOR Tutorial para resolver este problema de manera interactiva por el método símplex en su forma algebraica.

D ***e***) Mediante cálculos manuales resuelva este problema por el método símplex en forma tabular.

D,I ***f***) Ahora utilice el IOR Tutorial para resolver este problema de manera interactiva por el método símplex en forma tabular.

C ***g***) Use un paquete de software basado en el método símplex para resolver este problema.

4.4-4. Repita el problema 4.4-3 para resolver el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 2x_1 + 3x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 30 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

4.4-5. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 5x_1 + 9x_2 + 7x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 8 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

D,I ***a***) Aplique el método símplex paso a paso en la forma algebraica.

D,I ***b***) Aplique el método símplex paso a paso en la forma tabular.

C ***c***) Use un paquete de software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.4-6. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2 + 6x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

D,I ***a***) Aplique el método símplex paso a paso en forma algebraica.

D,I ***b***) Aplique el método símplex en forma tabular.

C ***c***) Use un paquete de computadora basado en el método símplex para resolver el problema.

D,I **4.4-7.** Aplique el método símplex paso a paso (en forma tabular) para resolver el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 2x_1 - x_2 + x_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &\le 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\le 2 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0.$$

D,I **4.4-8.** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = -x_1 + x_2 + 2x_3,$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 20 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 60 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 50 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0.$$

4.5-1. Considere las siguientes afirmaciones sobre programación lineal y el método símplex. Diga si cada una es falsa o verdadera y justifique su respuesta.

***a*)** En una iteración específica del método símplex, si hay un empate de la variable que debe salir de la base, entonces la siguiente solución BF debe tener al menos una variable básica igual a cero.

***b*)** Si no existe una variable básica saliente en alguna iteración, entonces el problema no tiene soluciones factibles.

***c*)** Si al menos una de las variables básicas tiene un coeficiente igual a cero en el renglón 0 de la tabla símplex final, entonces el problema tiene soluciones óptimas múltiples.

***d*)** Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples, entonces el problema debe tener una región factible acotada.

4.5-2. Suponga que se proporcionan las siguientes restricciones para un modelo de programación lineal con variables de decisión x_1 y x_2.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 12 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

***a*)** Demuestre en una gráfica que la región factible es no acotada.

***b*)** Si el objetivo es maximizar $Z = -x_1 + x_2$, ¿tiene el modelo una solución óptima? Si es así, encuéntrela. Si no, explique por qué.

***c*)** Repita el inciso *b*) si el objetivo es maximizar $Z = x_1 - x_2$.

***d*)** En ciertas funciones objetivo, este modelo no tiene solución óptima. ¿Significa ello que no hay soluciones buenas según el modelo? Explique. ¿Qué pudo haber salido mal al formular el modelo?

D,I ***e*)** Seleccione una función objetivo para la que este modelo no tenga solución óptima. Después, aplique el método símplex paso a paso para demostrar que Z es no acotada.

C ***f*)** En el caso de la función objetivo seleccionada en el inciso *e*), aplique un paquete de software basado en el método símplex para determinar que Z no es acotada.

4.5-3. Siga las instrucciones del problema 4.5-2 con las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le 20 \\ x_1 - 2x_2 &\le 20 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0.$$

D,I **4.5-4.** Considere el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4,$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\le 20 \\ -4x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 &\le 40 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 8x_4 &\le 50 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0, \qquad x_4 \ge 0.$$

Utilice el método símplex para demostrar que Z no está acotada.

4.5-5. Una propiedad básica de cualquier problema de programación lineal con una región factible acotada es que toda solución factible se puede expresar como una combinación convexa de las soluciones FEV (tal vez en más de una forma). De igual manera, en la forma aumentada del problema, toda solución factible se puede expresar como una combinación convexa de las soluciones BF.

***a*)** Demuestre que *cualquier* combinación convexa de *cualquier* conjunto de soluciones factibles debe ser una solución factible (de manera que cualquier combinación convexa de soluciones FEV debe ser factible).

***b*)** Utilice el resultado establecido en el inciso *a*) para demostrar que cualquier combinación convexa de soluciones BF debe ser una solución factible.

4.5-6. Utilice los datos del problema 4.5-5 para demostrar que las siguientes afirmaciones deben ser ciertas para cualquier problema de programación lineal que tiene una región factible acotada y soluciones óptimas múltiples:

***a*)** Toda combinación convexa de soluciones BF óptimas debe ser óptima.

***b*)** Ninguna otra solución factible puede ser óptima.

4.5-7. Considere un problema de programación lineal de dos variables cuyas soluciones FEV son (0, 0), (6, 0), (6, 3), (3, 3) y (0, 2). (Vea en el problema 3.2-2 la gráfica de la región factible.)

***a*)** Use la gráfica de la región factible para identificar todas las restricciones del modelo.

***b*)** Para cada par de soluciones FEV adyacentes, dé un ejemplo de una función objetivo tal que todos los puntos del segmento entre esas dos soluciones en los vértices sean soluciones óptimas.

***c*)** Ahora suponga que la función objetivo es $Z = -x_1 + 2x_2$. Aplique el método gráfico para encontrar todas las soluciones óptimas.

D,I ***d*)** En el caso de la función objetivo del inciso *c*), aplique el método símplex paso a paso para encontrar todas las soluciones BF óptimas. Después escriba una expresión algebraica que identifique todas las soluciones óptimas.

D,I **4.5-8.** Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 50x_1 + 25x_2 + 20x_3 + 40x_4$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 30 \\ x_3 + 2x_4 &\le 20 \end{aligned}$$

y

$x_j \ge 0$, para $j = 1, 2, 3, 4$.

Trabaje el método símplex paso a paso para encontrar todas las soluciones BF óptimas.

4.6-1.* Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

y

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

D,I ***a***) Resuelva este problema en forma gráfica.
b) Aplique el método de la gran M para construir la primera tabla símplex completa para el método símplex e identificar la solución BF inicial (artificial) correspondiente. También identifique la variable básica entrante y la variable básica saliente.
I ***c***) A partir del inciso *b*) trabaje el método símplex paso a paso para resolver el problema.

4.6-2. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 300 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 300 \end{aligned}$$

y

$x_j \ge 0$, para $j = 1, 2, 3, 4$.

a) Aplique el método de la gran M para construir la primera tabla símplex completa para el método símplex e identifique la solución BF inicial (artificial) correspondiente. Identifique también la variable básica entrante inicial y la variable básica saliente.
I ***b***) Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.
c) Utilice el método de las dos fases para construir la primera tabla símplex completa para la fase 1 e identifique la solución BF inicial (artificial) correspondiente. Identifique también la variable básica entrante inicial y la variable básica saliente.
I ***d***) Aplique la fase 1 paso a paso.
e) Construya la primera tabla símplex completa de la fase 2.
I ***f***) Aplique la fase 2 paso a paso para resolver el problema.
g) Compare la serie de soluciones BF que obtuvo en el inciso *b*) con las de los incisos *d*) y *f*). ¿Cuáles de estas soluciones son factibles sólo para el problema artificial que se obtuvo al introducir las variables artificiales y cuáles son de hecho factibles para el problema real?
C ***h***) Utilice un paquete de software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-3.* Considere el siguiente problema.

Minimizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$,

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\ge 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \quad\quad &\ge 6 \end{aligned}$$

y

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$.

a) Reformule este problema para que se ajuste a nuestra forma estándar del modelo de programación lineal que se presentó en la sección 3.2.
I ***b***) Utilice el método de la gran M para aplicar el método símplex paso a paso y resolver el problema.
I ***c***) Utilice el método de las dos fases para aplicar el método símplex paso a paso y resolver el problema.
d) Compare la secuencia de soluciones BF que obtuvo en los incisos *b*) y *c*). ¿Cuáles de estas soluciones son factibles sólo para el problema artificial que obtuvo al introducir las variables artificiales y cuáles son de hecho factibles para el problema real?
C ***e***) Utilice un software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-4. De acuerdo con el método de la gran M, explique por qué el método símplex nunca elegiría una variable artificial como variable básica entrante, una vez que todas las variables artificiales son no básicas.

4.6-5. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 5x_1 + 4x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 - x_2 &\ge 6 \end{aligned}$$

y

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

a) Demuestre en una gráfica que este problema no tiene soluciones factibles.
C ***b***) Utilice un paquete de computadora basado en el método símplex para determinar que el problema no tiene soluciones factibles.
I ***c***) Utilice el método de la gran M para aplicar el método símplex paso a paso y demostrar que el problema no tiene soluciones factibles.
I ***d***) Repita el inciso *c*) para la fase 1 del método de las dos fases.

4.6-6. Siga las instrucciones del problema 4.6-5 para solucionar el siguiente problema.

Minimizar $Z = 5\,000x_1 + 7\,000x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\ge 1 \\ x_1 - 2x_2 &\ge 1 \end{aligned}$$

y

$x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

4.6-7. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3,$

sujeta a

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 20$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 50$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

a) Utilice el método de la gran *M* para construir la primera tabla símplex completa para el método símplex e identifique la solución BF inicial (artificial) correspondiente. También identifique la variable básica entrante inicial y la variable básica saliente.

I ***b)*** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.

I ***c)*** Utilice el método de las dos fases para construir la primera tabla símplex completa para la fase 1 e identifique la solución BF inicial (artificial) correspondiente. También identifique la variable básica entrante inicial y la variable básica saliente.

I ***d)*** Aplique la fase 1 paso a paso.

e) Construya la primera tabla símplex completa de la fase 2.

I ***f)*** Aplique la fase 2 paso a paso para resolver el problema.

g) Compare la secuencia de soluciones BF que obtuvo en el inciso *b*) con las de los incisos *d*) y *f*). ¿Cuáles de estas soluciones son factibles sólo para el problema artificial que obtuvo al introducir las variables artificiales y cuáles son factibles para el problema real?

C ***h)*** Utilice un paquete de software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-8. Considere el siguiente problema.

Minimizar $Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3,$

sujeta a

$$5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 420$$
$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 280$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

I ***a)*** Utilice el método de las dos fases y aplique la fase 1 paso a paso.

C ***b)*** Emplee un paquete de software basado en el método símplex para formular y resolver la fase 1 del problema.

I ***c)*** Aplique la fase 2 paso a paso para resolver el problema original.

C ***d)*** Utilice un programa de computadora basado en el método símplex para resolver el problema original.

4.6-9.* Considere el siguiente problema.

Minimizar $Z = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3,$

sujeta a

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 60$$
$$3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

I ***a)*** Utilice el método de la gran *M* para aplicar el método símplex paso a paso a fin de resolver el problema.

I ***b)*** Emplee el método de las dos fases para aplicar el método símplex paso a paso y resolver el problema.

c) Compare la serie de soluciones BF de los incisos *a*) y *b*). ¿Cuáles de estas soluciones son factibles sólo para el problema artificial que se obtuvo al introducir las variables artificiales y cuáles son factibles para el problema real?

C ***d)*** Utilice un paquete de software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-10. Siga las instrucciones del problema 4.6-9 para el siguiente problema.

Minimizar $Z = 3x_1 + 2x_2 + 7x_3,$

sujeta a

$$-x_1 + x_2 = 10$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 10$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

4.6-11. Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera y justifique su respuesta.

a) Cuando un modelo de programación lineal tiene una restricción de igualdad, se introduce una variable artificial a esta restricción con el fin de comenzar el método símplex con una solución básica inicial obvia que sea factible para el modelo original.

b) Cuando se crea un problema artificial al introducir variables artificiales y al usar el método de la gran *M*, si todas las variables artificiales de una solución óptima del problema artificial son iguales a cero, entonces el problema real no tiene soluciones factibles.

c) En la práctica suele aplicarse el método de las dos fases porque, en general, se requieren menos iteraciones para llegar a una solución óptima que en el método de la gran *M*.

4.6-12. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 3x_1 + 7x_2 + 5x_3,$

sujeta a

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 9$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12$$

y

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

(sin restricción de no negatividad sobre x_1).

a) Reformule este problema para que todas las variables tengan restricciones de no negatividad.

D,I ***b)*** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.

C ***c)*** Use un paquete de software basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-13.* Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = -x_1 + 4x_2,$

sujeta a

$$-3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_2 \geq -3$$

(sin restricción de cota inferior para x_1).

D,I ***a***) Resuelva este problema por el método gráfico.

b) Reformule este problema de manera que tenga sólo dos restricciones funcionales y todas las variables tengan restricciones de no negatividad.

D,I ***c***) Aplique el método símplex paso a paso para resolver este problema.

4.6-14. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = -x_1 + 2x_2 + x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &\leq 120 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 &\leq 80 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 100 \end{aligned}$$

(sin restricciones de no negatividad).

a) Reformule este problema para que todas las variables tengan restricciones de no negatividad.

D,I ***b***) Aplique el método símplex paso a paso para resolver este problema.

C ***c***) Utilice un paquete de computadora basado en el método símplex para resolver el problema.

4.6-15. En este capítulo se describió el método símplex según se aplica a problemas de programación lineal en los que la función objetivo se debe maximizar. En la sección 4.6 se explicó cómo convertir un problema de minimización en uno equivalente de maximización para aplicar el método símplex. Otra opción en los problemas de minimización es hacer algunas modificaciones a las instrucciones que se dieron para el método símplex, a fin de aplicar el algoritmo en forma directa.

a) Describa cuáles deberían ser estas modificaciones.

b) Utilice el método de la gran *M* para aplicar el algoritmo modificado que desarrolló en el inciso *a*) y resuelva el siguiente problema de manera directa y a mano. (*No* use el OR Courseware.)

$$\text{Minimizar} \quad Z = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_2 + 4x_3 &\geq 70 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\geq 70 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

4.6-16. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = -2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &\geq -1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \end{aligned}$$

y

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

(sin restricciones de no negatividad para x_1).

a) Formule de nuevo este problema para que se ajuste a nuestra forma estándar del modelo de programación lineal que se presentó en la sección 3.2.

b) Utilice el método de la gran *M* para construir la primera tabla símplex completa para el método símplex e identifique la solución BF inicial (artificial). Identifique también la variable básica entrante y la variable básica saliente.

c) Use el método de las dos fases para construir el renglón 0 de la primera tabla símplex de la fase 1.

C ***d***) Utilice un paquete de computadora basado en el método símplex para resolver este problema.

I **4.6-17.** Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 20 \\ 15x_1 + 6x_2 - 5x_3 &\leq 50 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\leq 30 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Aplique el método símplex paso a paso para demostrar que este problema no tiene soluciones factibles.

4.7-1. Consulte la figura 4.10 y el *rango permisible* para cada lado derecho de las restricciones del problema de la Wyndor Glass Co. dado en la sección 3.1. Utilice el método gráfico para demostrar que cada intervalo permisible dado es correcto.

4.7-2. Reconsidere el modelo del problema 4.1-5. Interprete los lados derechos de las restricciones funcionales como la cantidad disponible de los recursos respectivos.

I ***a***) Utilice el análisis gráfico para determinar los precios sombra de los recursos respectivos, tal como en la figura 4.8.

I ***b***) Recurra al análisis gráfico para realizar un análisis de sensibilidad de este modelo. En particular, verifique cada parámetro del modelo para determinar si es un parámetro *sensible* (un parámetro cuyo valor no puede cambiar sin que se modifique la solución óptima) mediante un análisis de la gráfica que identifica la solución óptima.

I ***c***) Utilice el análisis gráfico como en la figura 4.9 para determinar el intervalo permisible para cada valor c_j (coeficiente de x_j en la función objetivo) sobre el que la solución óptima actual sigue óptima.

I ***d***) Si se cambia sólo un valor b_i (el lado derecho de la restricción funcional *i*) se mueve la frontera de restricción correspondiente. Si la solución FEV óptima actual está sobre esta frontera de restricción, la solución FEV también se moverá. Aplique el análisis gráfico para determinar el intervalo permisible de cada valor b_i sobre el cual esta solución FEV sigue factible.

C ***e***) Verifique sus respuestas a los incisos *a*), *c*) y *d*) con un paquete de computadora basado en el método símplex para resolver el problema y después generar la información del análisis de sensibilidad.

4.7-3. Se proporciona el siguiente problema de programación lineal.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 2x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 &\leq 60 \qquad \text{(recurso 1)} \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 75 \qquad \text{(recurso 2)} \\ 2x_2 &\leq 40 \qquad \text{(resurso 3)} \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

D,I ***a*)** Resuelva este problema en forma gráfica.
***b*)** Mediante el análisis gráfico, encuentre los precios sombra de los recursos.
***c*)** Determine cuántas unidades adicionales del recurso 1 se necesitan para aumentar en 15 el valor óptimo de Z.

4.7-4. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = x_1 - 7x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 && \text{(recurso 1)} \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 2 && \text{(recurso 2)} \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 && \text{(recurso 3)} \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

D,I ***a*)** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.
***b*)** Identifique los precios sombra de los tres recursos y describa su significado.
C ***c*)** Recurra a un software basado en el método símplex para resolver el problema y genere el informe de sensibilidad. Use esta información para determinar los precios sombra de cada recurso, el intervalo permisible para seguir óptimo de cada coeficiente de la función objetivo y el intervalo permisible para seguir factible de cada lado derecho.

4.7-5.* Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 && \text{(recurso 1)} \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 2 && \text{(recurso 2)} \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 12 && \text{(recurso 3)} \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

D,I ***a*)** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.
***b*)** Identifique los precios sombra de los tres recursos y describa su significado.
C ***c*)** Utilice un software basado en el método símplex para resolver el problema y elabore el informe de sensibilidad. Use esta información para identificar los precios sombra de cada recurso, el intervalo permisible para seguir óptimo de cada coeficiente de la función objetivo y el intervalo permisible para seguir factible de cada lado derecho.

4.7-6. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \quad Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &\leq 24 && \text{(recurso 1)} \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &\leq 36 && \text{(recurso 2)} \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

D,I ***a*)** Aplique el método símplex paso a paso para resolver el problema.
***b*)** Identifique los precios sombra de los tres recursos y describa su significado.
C ***c*)** Utilice un software basado en el método símplex para resolver el problema y genere el informe de sensibilidad. Use esta información para identificar los precios sombra de cada recurso, el intervalo permisible para seguir óptimo de cada coeficiente de la función objetivo y el intervalo permisible para seguir factible de cada lado derecho.

4.9-1. Utilice el algoritmo de punto interior en el IOR Tutorial para resolver el modelo del problema 4.1-4. Elija $\alpha = 0.5$ del menú de opciones (Options), use $(x_1, x_2) = (0.1, 0.4)$ como la solución de prueba inicial y corra 15 iteraciones. Dibuje una gráfica de la región factible y después grafique la trayectoria de las soluciones de prueba a través de esta región factible.

4.9-2. Repita el problema 4.9-1 para el modelo del problema 4.1-5.

CASOS

Caso 4.1 Telas y moda de otoño

En el décimo piso de su edificio de oficinas, Katherine Rally observa las hordas de neoyorquinos que batallan por caminar por calles llenas de taxis y banquetas saturadas de puestos de hot dogs. En este caluroso día de julio dedica una atención especial a la moda que ostentan algunas mujeres y se pregunta qué elegirán ponerse en el otoño. Sus pensamientos no son cavilaciones aleatorias: son críticas para su trabajo pues posee y administra TrendLines, una compañía de ropa elegante para dama.

Hoy es un día en especial importante porque debe reunirse con Ted Lawson, el gerente de producción, para decidir el plan de producción del mes próximo de la línea de verano. En particular, tendrá que determinar la cantidad de cada artículo de ropa que debe producir dada la capacidad de producción de la planta, los recursos limitados y los pronósticos de demanda. La planeación precisa de la producción del mes próximo es crítica para las ventas de otoño pues los artículos que se produzcan ese mes aparecerán en las tiendas durante septiembre, y las mujeres tienden a comprar la mayor parte de su atuendo para el otoño en cuanto aparece ese mes.

Regresa a su amplio escritorio de cristal y observa los numerosos papeles que lo cubren. Su ojos vagan por los patrones de ropa diseñados hace casi seis meses, las listas de requerimientos de materiales para cada uno y las listas de pronósticos de demanda determinados por las encuestas que se aplican a los clientes en los desfiles de modas. Recuerda los días ajetreados, a veces casi de pesadilla, del diseño de la línea de otoño y su presentación en los desfiles de Nueva York, Milán y París. Al final, pagó a su equipo de seis diseñadores un total de 860 000 dólares por su trabajo en esta línea. Con el costo de contratar modelos, estilistas y artistas del maquillaje, personal para coser y ajustar las prendas, la construcción de los escenarios, la coreografía, los ensayos para el desfile y la renta de los salones de conferencias, cada desfile le costó 2 700 000 dólares.

Se dedica a estudiar los patrones de ropa y las necesidades de materiales. Su línea de otoño consiste en ropa tanto profesional (para el trabajo) como informal. Ella determina los precios de cada prenda tomando en cuenta la calidad, el costo del material, de la mano de obra y de los maquinados, la demanda del artículo y el prestigio del nombre de la marca TrendLines.

La moda profesional para el otoño incluye:

Artículo	Requerimiento de materiales	Precio	Costos de mano de obra y maquilado
Pantalones de lana	3 yardas de lana 2 yardas de acetato para forro	$300	$160
Suéter de cashmere	1.5 yardas de cashmere	$450	$150
Blusa de seda	1.5 yardas de seda	$180	$100
Camisola de seda	0.5 yardas de seda	$120	$ 60
Falda ajustada	2 yardas de rayón 1.5 yardas de acetato para forro	$270	$120
Chaqueta de lana	2.5 yardas de lana 1.5 yardas de acetato para forro	$320	$140

La moda informal de otoño incluye:

Artículo	Requerimiento de materiales	Precio	Costos de mano de obra y maquilado
Pantalón de terciopelo	3 yardas de terciopelo 2 yardas de acetato para forro	$350	$175
Suéter de algodón	1.5 yardas de algodón	$130	$ 60
Minifalda de algodón	0.5 yardas de algodón	$ 75	$ 40
Camisa de terciopelo	1.5 yardas de terciopelo	$200	$160
Blusa de botones	1.5 yardas de rayón	$120	$ 90

Para la producción del próximo mes, ella ha ordenado 45 000 yardas de lana, 28 000 de acetato, 9 000 de cashmere, 18 000 de seda, 30 000 de rayón, 20 000 de terciopelo y 30 000 de algodón. Los precios de los materiales se presentan en la siguiente tabla:

Material	Precio por yarda
Lana	$ 9.00
Acetato	$ 1.50
Cashmere	$60.00
Seda	$13.00
Rayón	$ 2.25
Terciopelo	$12.00
Algodón	$ 2.50

Cualquier material que no se use en la producción se puede devolver al distribuidor de telas y obtener su reembolso, aunque el desperdicio no se puede devolver.

Ella sabe que la producción tanto de la blusa de seda como del suéter de algodón deja material de desperdicio. En especial, para producir una blusa de seda o un suéter de algodón, se necesitan 2 yardas de seda y 2 de algodón, respectivamente. De estas dos yardas, 1.5 se usan para la blusa o el suéter y 0.5 yardas quedan como material de desperdicio. No quiere desaprovechar este material, por lo que planea utilizar el desperdicio rectangular de seda o algodón para producir una camisola de seda o una minifalda de algodón, respectivamente. Por lo tanto, si se produce una blusa de seda, también se produce una camisola de este material. Del mismo modo, cuando se produce un suéter de algodón, también se fabrica una minifalda de algodón. Observe que es posible producir una camisola de seda sin producir una blusa del mismo material o una minifalda de algodón sin producir un suéter de algodón.

Los pronósticos de demanda indican que algunos artículos tienen una demanda limitada. En particular, dado que los pantalones y camisas de terciopelo son novedades, TrendLines ha pronosticado que puede vender sólo 5 500 pares de pantalones y 6 000 camisas. La empresa no quiere producir más de la demanda pronosticada porque una vez que pasen de moda no los podrá vender. Sin embargo, puede producir menos de lo pronosticado, ya que no se requiere que la compañía cumpla con la demanda. El suéter de cashmere también tiene una demanda limitada porque es bastante costoso, y TrendLines sabe que puede vender, como máximo, 4 000 suéteres. Las blusas de seda y las camisolas tienen demanda limitada por la idea de las mujeres de que es difícil cuidar la seda, y las proyecciones de TrendLines son que puede vender a lo más 12 000 blusas y 15 000 camisolas.

Los pronósticos de demanda también indican que los pantalones de lana, las faldas ajustadas y las chaquetas de lana tienen una gran demanda porque son artículos básicos necesarios en todo guardarropa profesional. En especial, la demanda de los pantalones de lana es de 7 000 pares y la de las chaquetas de 5 000 unidades. Katherine desea cumplir con al menos 60% de la demanda de estos dos artículos para mantener la lealtad de su base de clientes y no perderlos en el futuro. Aunque la demanda de faldas no se puede estimar, Katherine siente que debe producir al menos 2 800 de ellas.

***a*)** Ted intenta convencer a Katherine de no producir camisas de terciopelo pues la demanda de esta moda novedosa es baja. Afirma que sólo es responsable de 500 000 dólares de los costos de diseño y otros costos fijos. La contribución neta (precio del artículo-costos de materiales-costo de mano de obra) cuando se venda la novedad debe cubrir estos costos fijos. Cada camisa de terciopelo genera una contribución neta de 22 dólares. Él afirma que dada la contribución neta, aun si se satisface la demanda máxima, no dejará ganancias. ¿Qué piensa del argumento de Ted?

***b*)** Formule y resuelva un problema de programación lineal para maximizar la ganancia dadas las restricciones de producción, recursos y demanda.

Antes de tomar una decisión final, Katherine planea explorar las siguientes preguntas independientes, excepto cuando se indique otra cosa.

***c*)** El distribuidor de textiles informa a Katherine que no puede recibirle el terciopelo sobrante porque los pronósticos de demanda muestran que la demanda de esta tela disminuirá en el futuro. En consecuencia, Katherine no obtendrá el reembolso por el terciopelo. ¿En qué cambia este hecho el plan de producción?

***d*)** ¿Cuál es una explicación económica intuitiva de la diferencia entre las soluciones que se encontraron en los incisos *b*) y *c*)?

***e*)** El personal de costura encuentra dificultades para coser los forros de las mangas de los sacos de lana pues el patrón tiene una forma extraña y el pesado material de lana es difícil de cortar y coser. El incremento de tiempo para coser un saco de lana aumenta en 80 dólares los costos de mano de obra y maquinado por cada saco. Dado este nuevo costo, ¿cuántas prendas de cada tipo debe producir TrendLines para maximizar la ganancia?

***f*)** El distribuidor de textiles informa a Katherine que como otro cliente canceló su orden, ella puede obtener 10 000 yardas adicionales de acetato. ¿Cuántas prendas de cada tipo debe producir TrendLines para maximizar la ganancia?

***g*)** TrendLines supone que puede vender todas las prendas que no se vendan en septiembre y octubre en una gran barata en noviembre a 60% de su precio original. Por lo tanto, en esa oportunidad puede vender cantidades ilimitadas de todos los artículos. (Los límites superiores mencionados se refieren sólo a las ventas durante septiembre y octubre.) ¿Cuál debe ser el nuevo plan de producción para maximizar la ganancia?

RESUMEN DE LOS CASOS ADICIONALES EN EL SITIO EN INTERNET DEL LIBRO (www.mhhe.com/hillier)

Caso 4.2 Nuevas fronteras

AmeriBank comenzará muy pronto a ofrecer a sus clientes el servicio de banca en red. Con la intención de guiar su planeación para los servicios que proporcionará a través de internet, se realizará una encuesta entre cuatro diferentes grupos de edad y tres tipos de comunidades. AmeriBank impone ciertas restricciones acerca de la profundidad con que debe ser encuestado cada grupo de edad y tipo de comunidad. Se requiere la programación lineal para desarrollar un plan para la encuesta que minimice su costo total al mismo tiempo que satisfaga todas las restricciones bajo varios escenarios diferentes.

Caso 4.3 Asignación de estudiantes a escuelas

La oficina escolar de Springfield decidió cerrar una de sus escuelas de educación media; por ello necesita reasignar a todos los estudiantes de nivel medio para el próximo año en las tres escuelas restantes. Muchos de ellos serán transportados en autobús, por lo que la minimización de los costos de transporte escolar es uno de los objetivos. Otro es minimizar los elementos de inconveniencia y seguridad de los estudiantes que deberán trasladarse a la escuela a pie o en bicicleta. Dadas las capacidades de las tres escuelas, así como la necesidad de encontrar un punto cercano al balance para el número de estudiantes en los tres grados de cada escuela, ¿cómo puede utilizarse la programación lineal para determinar cuántos estudiantes de cada una de las seis áreas residenciales de la ciudad deben ser asignados a cada escuela? ¿Qué pasaría si la totalidad de cada área residencial debiera ser asignada a la misma escuela? (Este caso continuará en las casos 6.3 y 11.4.)