CAPÍTULO 3

Introducción a la programación lineal

El desarrollo de la programación lineal ha sido clasificado como uno de los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, y estamos de acuerdo con esta aseveración. Su efecto desde 1950 ha sido extraordinario. En la actualidad es una herramienta de uso normal que ha ahorrado miles o millones de dólares a muchas compañías o negocios, incluso empresas medianas, en los distintos países industrializados del mundo; su aplicación a otros sectores de la sociedad se ha ampliado con rapidez. Una proporción muy grande de los programas científicos en computadoras está dedicada al uso de la programación lineal. Se han escrito docenas de libros de texto sobre esta materia y se cuentan por cientos los artículos *publicados* que describen aplicaciones importantes.

¿Cuál es la naturaleza de esta notable herramienta y qué tipos de problemas puede manejar? El lector adquirirá una noción de este tema a medida que trabaje en los ejemplos que se presentarán más adelante. Sin embargo, un resumen verbal puede permitirle elaborar una idea. Expresado en forma breve, el tipo más común de aplicación abarca el problema general de asignar de la mejor manera posible —es decir, de *forma óptima*— *recursos limitados* a *actividades que compiten* entre sí por ellos. Con más precisión, este problema consiste en elegir el nivel de ciertas actividades que compiten por recursos escasos necesarios para realizarlas. Después, los niveles de actividad que se eligen dictan la cantidad de recursos que consumirá cada una de ellas. La variedad de situaciones a las que se puede aplicar esta descripción es sin duda muy grande, ya que abarca desde la asignación de instalaciones de producción a los productos hasta la asignación de los recursos nacionales a las necesidades de un país; desde la selección de una cartera de inversiones hasta la selección de los patrones de envío; desde la planeación agrícola hasta el diseño de una terapia de radiación, etc. No obstante, el ingrediente común de todas estas situaciones es la necesidad de asignar recursos a las actividades mediante la elección de los niveles de éstas.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema. El adjetivo *lineal* significa que todas las funciones matemáticas del modelo deben ser *funciones lineales*. En este caso, la palabra *programación* no se refiere aquí a términos computacionales; en esencia es sinónimo de *planeación*. Por lo tanto, la programación lineal involucra la *planeación de actividades* para obtener un resultado óptimo; esto es, el resultado que mejor alcance la meta especificada —de acuerdo con el modelo matemático— entre todas las alternativas factibles.

Aunque la asignación de recursos a las actividades es la aplicación más frecuente, la programación lineal tiene muchas otras posibilidades. En realidad, *cualquier* problema cuyo modelo matemático se ajuste al formato general del modelo de programación lineal, es un problema de programación lineal. (Por esta razón, un problema de programación lineal y su modelo se denominan con frecuencia *programa lineal*, o incluso sólo *PL*.) Aún más, se dispone de un procedimiento de solución muy eficiente llamado **método símplex** para resolver estos problemas lineales, incluso los de gran tamaño. Éstas son algunas razones del tremendo efecto de la programación lineal en las décadas recientes.

Debido a su gran importancia hemos dedicado a la programación lineal éste y los siguientes seis capítulos. Después de presentar aquí las características generales de programación lineal, los capítulos 4 y 5 se dedican al método símplex. El capítulo 6 analiza los problemas de programación lineal *después* de la aplicación inicial del método símplex. El capítulo 7 examina varias extensiones muy empleadas de este método e introduce el *algoritmo de punto interior* que en ocasiones se usa para resolver problemas de programación lineal aún más grandes que los que maneja el método símplex. Los capítulos 8 y 9 consideran algunos problemas especiales de programación lineal cuya trascendencia justifica su estudio individual.

Además, en varios de los capítulos posteriores se verán aplicaciones de programación lineal a otras áreas de la investigación de operaciones.

Este capítulo comienza con el desarrollo de un ejemplo prototípico simplificado de un problema de programación lineal. Este ejemplo es tan pequeño que puede resolverse de manera directa en una gráfica. En las secciones 3.2 y 3.3 se presentan el *modelo general de programación lineal* y sus supuestos básicos. La sección 3.4 proporciona algunos ejemplos adicionales de programación lineal. La sección 3.5 describe cómo pueden establecerse y resolverse problemas de programación lineal de tamaño mediano en una hoja de cálculo. Sin embargo, algunos problemas reales requieren modelos en verdad *masivos*. La sección 3.6 ilustra cómo suelen surgir estos modelos de gran tamaño y cómo se pueden formular de manera correcta con la ayuda de lenguajes especiales de modelado como MPL —su formulación se describe en esta sección— o LINGO (la formulación de este modelo se presenta en el suplemento 2 de este capítulo en el sitio web del libro).

3.1 EJEMPLO PROTOTÍPICO

La WYNDOR GLASS CO. produce artículos de vidrio de alta calidad, entre ellos ventanas y puertas de vidrio. Tiene tres plantas. Los marcos y molduras de aluminio se hacen en la planta 1, los de madera en la planta 2; la 3 produce el vidrio y ensambla los productos.

Debido a una reducción de las ganancias, la alta administración ha decidido reorganizar la línea de producción de la compañía. Se discontinuarán varios productos no rentables y se dejará libre una parte de la capacidad de producción para emprender la fabricación de dos productos nuevos cuyas ventas potenciales son muy prometedoras:

Producto 1: una puerta de vidrio de 8 pies con marco de aluminio
Producto 2: una ventana corrediza con marco de madera de 4 por 6 pies

El producto 1 requiere parte de la capacidad de producción en las plantas 1 y 3 y nada en la planta 2. El producto 2 sólo necesita trabajo en las plantas 2 y 3. La división de comercialización ha concluido que la compañía puede vender todos los productos que se puedan fabricar en las plantas. Sin embargo, como ambos productos competirían por la misma capacidad de producción en la planta 3, no está claro cuál *mezcla* de productos sería la *más rentable*. Por lo tanto, se ha formado un equipo de IO para estudiar este problema.

El grupo comenzó por realizar juntas con la alta administración para identificar los objetivos del estudio. Como consecuencia de ellas se desarrolló la siguiente definición del problema:

> Determinar cuáles *tasas de producción* deben tener los dos productos con el fin de *maximizar las utilidades totales*, sujetas a las restricciones impuestas por las capacidades de producción limitadas disponibles en las tres plantas. (Cada producto se fabricará en lotes de 20 unidades, de manera que la *tasa de producción* está definida como el número de lotes que se producen a la semana.) Se permite *cualquier* combinación de tasas de producción que satisfaga estas restricciones, incluso no fabricar uno de los productos y elaborar todo lo que sea posible del otro.

El equipo de IO también identificó los datos que necesitaba reunir:

1. Número de horas de producción disponibles por semana en cada planta para fabricar estos nuevos productos. (Casi todo el tiempo de estas plantas está comprometido con los productos actuales, lo que limita la capacidad para manufacturar nuevos productos.)
2. Número de horas de fabricación que se emplea para producir cada lote de cada artículo nuevo en cada una de las plantas.
3. La ganancia por lote de cada producto nuevo. (Se escogió la *ganancia por lote producido* como una medida adecuada una vez que el equipo llegó a la conclusión de que la ganancia incremental de cada lote adicional producido sería, en esencia, *constante*, sin que importase el número total de lotes producidos. Debido a que no se incurre en costos sustanciales para iniciar

Recuadro de aplicación

Swift & Company es una empresa diversificada productora de proteína con base en Greeley, Colorado. Con ventas anuales de más de 8 000 millones de dólares, la carne de res y sus productos derivados son, por mucho, la parte más grande del negocio de la compañía.

A fin de mejorar las ventas de la empresa y su desempeño en la manufactura, la alta administración concluyó que necesitaba alcanzar tres objetivos importantes. Uno fue permitir a los representantes de servicio al cliente hablar a sus más de 8 000 clientes para transmitirles información precisa acerca de la disponibilidad de inventario actual y futuro, al mismo tiempo que consideraban fechas de entrega solicitadas y edad máxima del producto en el momento de su entrega. Un segundo objetivo fue producir un programa eficiente de nivel de turno para cada planta en un horizonte de 28 días. El tercer objetivo consistió en determinar de manera exacta si una planta podía embarcar una cantidad solicitada de pedidos-líneas-artículos en la fecha y a la hora requeridas dadas la disponibilidad de ganado y las restricciones impuestas por la capacidad de la planta.

Para enfrentar estos tres desafíos, un equipo de IO desarrolló un *sistema integrado de 45 modelos de programación lineal* basado en tres formulaciones de modelo para programar de manera dinámica sus operaciones de fabricación de carne en cinco plantas en tiempo real cuando recibe los pedidos. *Los beneficios totales auditados que se observaron en el primer año* de operación de este sistema fueron de **12.74 millones de dólares**, de los cuales 12 millones correspondieron a la *optimización de la mezcla de productos*. Entre otros beneficios se destacan la disminución de las órdenes perdidas, la reducción de los descuentos de precio y la mejora de las entregas a tiempo.

Fuente: A. Bixby, B. Downs y M. Self, "A Scheduling and Capable-to-Promise Application for Swift & Company", en *Interfaces*, **36**(1): 39-50, enero-febrero de 2006. (En nuestro sitio web, www.mhhe.com/hillier, se proporciona un vínculo con este artículo.)

la producción y la comercialización de estos nuevos productos, la ganancia total de cada uno es aproximadamente la *ganancia por lote que se produce* multiplicada por el *número de lotes*.)

La obtención de estimaciones razonables de estas cantidades requirió del apoyo de personal clave en varias unidades de la compañía. El personal de la división de manufactura proporcionó los datos de la primera categoría mencionada. En la segunda categoría, el desarrollo de estimaciones requirió un análisis de los ingenieros de manufactura involucrados en el diseño de los procesos de producción para elaborar los nuevos artículos. Al analizar los datos de costos que se obtuvieron, junto con la decisión sobre los precios de la división de marketing, el departamento de contabilidad calculó las estimaciones para la tercera categoría.

La tabla 3.1 resume los datos reunidos.

De inmediato, el equipo de IO reconoció que se trataba de un problema de programación lineal del tipo clásico de **mezcla de productos** y procedió a la formulación del modelo matemático correspondiente.

Formulación como un problema de programación lineal

La definición del problema planteado indica que las decisiones que deben tomarse son el número de lotes de los productos que se fabricarán semanalmente, de manera que se maximice su ganancia total.

Para formular el modelo matemático de programación lineal de este problema se define

x_1 = número de lotes del producto 1 que se fabrican por semana
x_2 = número de lotes del producto 2 que se fabrican por semana
Z = ganancia semanal total (en miles de dólares) que generan estos dos productos

TABLA 3.1 Datos del problema de la Wyndor Glass Co.

Planta	Tiempo de producción por lote, horas — Producto 1	Tiempo de producción por lote, horas — Producto 2	Tiempo de producción disponible a la semana, horas
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por lote	$3 000	$5 000	

Por lo tanto, x_1 y x_2 son las *variables de decisión* del modelo. Si se usa el último renglón de la tabla 3.1 se obtiene

$$Z = 3x_1 + 5x_2.$$

El objetivo es elegir los valores de x_1 y x_2 que *maximice* $Z = 3x_1 + 5x_2$, sujeta a las restricciones impuestas sobre sus valores por las capacidades de producción limitadas de las cuales se disponen en las tres plantas. La tabla 3.1 indica que cada lote del producto 1 que se produce por semana emplea una hora de producción en la planta 1, y sólo se dispone de 4 horas semanales. En términos matemáticos, esta restricción se expresa mediante la desigualdad $x_1 \leq 4$. De igual manera, la planta 2 impone la restricción $2x_2 \leq 12$. El número de horas de producción usadas a la semana en la planta 3 que se consume al elegir x_1 y x_2 como las tasas de producción de los nuevos productos sería $3x_1 + 2x_2$. En consecuencia, la expresión matemática de la restricción de la planta 3 es $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Por último, como las tasas de producción no pueden ser negativas, es necesario restringir las variables de decisión a valores no negativos: $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Para resumir, en el lenguaje matemático de programación lineal, el problema consiste en seleccionar valores de x_1 y x_2 para

$$\text{Maximizar} \qquad Z = 3x_1 + 5x_2,$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

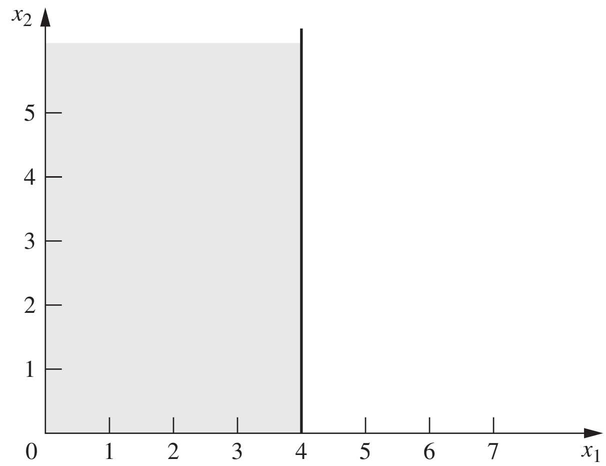
(Observe cómo la información de la tabla 3.1 en esencia se duplica en la distribución de los coeficientes de x_1 y x_2 en el modelo de programación lineal.)

Solución gráfica

Este pequeño problema tiene sólo dos variables de decisión, esto es, sólo dos dimensiones, así que se puede usar un procedimiento gráfico para resolverlo. Este procedimiento incluye la construcción de una gráfica de dos dimensiones con x_1 y x_2 como los ejes. El primer paso es identificar los valores de (x_1, x_2) permitidos por las restricciones. Este objetivo se logra dibujando cada una de las rectas que limitan los valores permitidos por una restricción. Para comenzar, observe que las restricciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ exigen que el punto (x_1, x_2) se encuentre en el lado *positivo* de los ejes (incluso sobre *cualquiera* de los dos ejes), es decir, en el primer cuadrante. Después, debe observarse que la restricción $x_1 \leq 4$ significa que (x_1, x_2) no puede estar a la derecha de la recta $x_1 = 4$. Estos resultados se muestran en la figura 3.1, en la que el área sombreada contiene los únicos valores de (x_1, x_2) permitidos.

De manera parecida, la restricción $2x_2 \leq 12$ (o de modo equivalente, $x_2 \leq 6$) implica que la recta $2x_2 = 12$ debe agregarse a la frontera de la región permisible. La última restricción, $3x_1 + 2x_2 \leq 18$, se encuentra al graficar los puntos (x_1, x_2) tales que $3x_1 + 2x_2 = 18$ (otra recta) para completar la frontera. (Observe que los puntos que cumplen $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ son aquellos que están sobre o por debajo de la recta $3x_1 + 2x_2 = 18$, por lo que ésta es la recta que limita, y más allá de ella, la desigualdad no se satisface.) En la figura 3.2 se muestra la región de valores permisibles de (x_1, x_2), llamada **región factible**. (La demostración llamada *Graphical Method* —método gráfico— en el OR Tutor proporciona un ejemplo detallado de la construcción de la región factible.)

El paso final es seleccionar, dentro de esta región factible, el punto que maximiza el valor de $Z = 3x_1 + 5x_2$. Para descubrir cómo realizar este paso de manera eficiente se pueden intentar algunos valores por prueba y error. Por ejemplo, probar, $Z = 10 = 3x_1 + 5x_2$ para ver si existe algún valor de (x_1, x_2) dentro de la región permisible que dé un valor de 10 para Z. Si se dibuja la recta $3x_1 + 5x_2 = 10$ se puede ver que existen muchos puntos sobre esta recta que están dentro de la región (vea la figura 3.3). Después de intentar este valor arbitrario de $Z = 10$ se tiene una mejor



■ **FIGURA 3.1**
El área sombreada muestra los valores de (x_1, x_2) permitidos por $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1 \leq 4$.

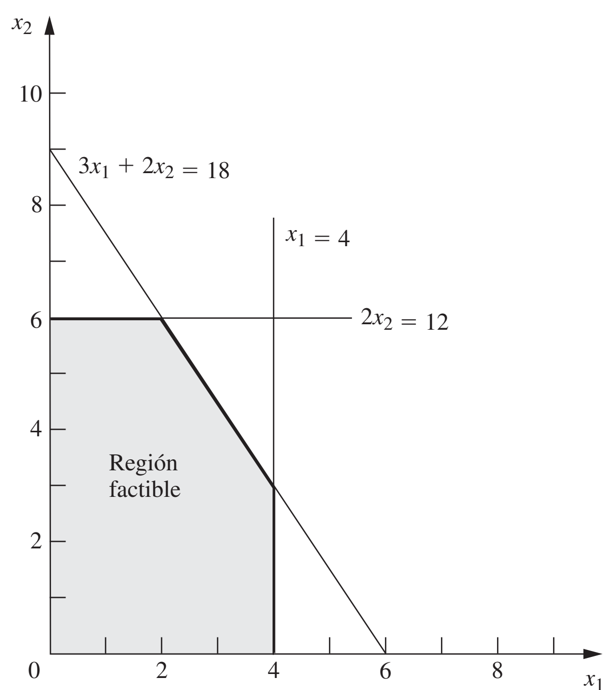
perspectiva, debe intentarse ahora un valor arbitrario más grande, por ejemplo, $Z = 20 = 3x_1 + 5x_2$. De nuevo, la figura 3.3 revela que un segmento de la recta $3x_1 + 5x_2 = 20$ se encuentra dentro de la región, de manera que el máximo valor permisible de Z debe ser, por lo menos, 20.

Observe ahora en la figura 3.3 que las dos rectas que se acaban de graficar son paralelas. Esto no es coincidencia, ya que *cualquier* recta construida de esta manera tiene la forma $Z = 3x_1 + 5x_2$ para el valor seleccionado de Z, lo que implica que $5x_2 = -3x_1 + Z$ o, en forma equivalente,

$$x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$$

Esta última ecuación, llamada forma de **pendiente-ordenada al origen** de la función objetivo, demuestra que la *pendiente* de las rectas es $-\frac{3}{5}$ (ya que cada incremento de una unidad en x_1 hace que x_2 cambie en $-\frac{3}{5}$), mientras que la ordenada al origen de la recta —la *intersección* con el eje x_2—

■ **FIGURA 3.2**
El área sombreada muestra los valores permitidos de (x_1, x_2), llamada la región factible.



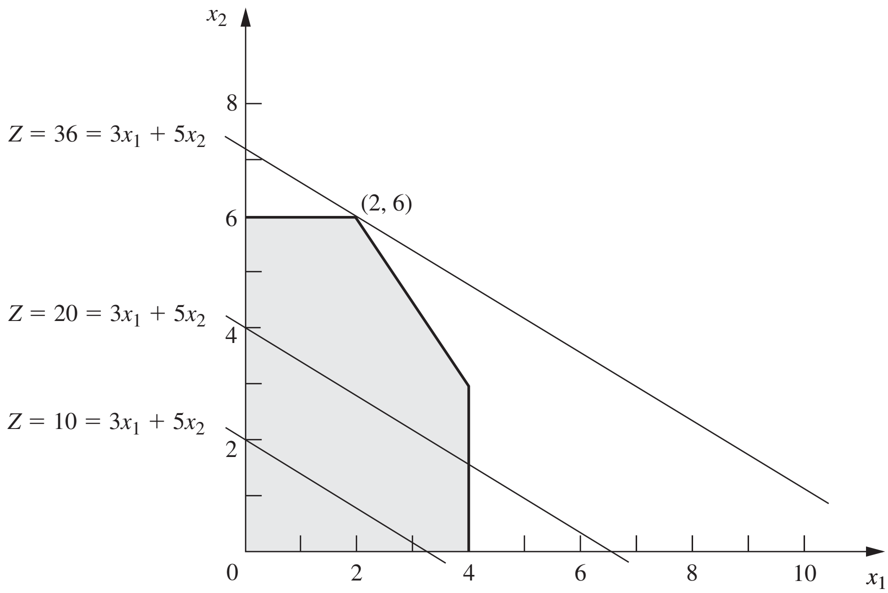


FIGURA 3.3
El valor de (x_1, x_2) que maximiza $3x_1 + 5x_2$ es (2, 6).

es $\frac{1}{5}Z$ (puesto que $x_2 = \frac{1}{5}Z$ cuando $x_1 = 0$). El hecho de que la pendiente esté fija en $-\frac{3}{5}$ significa que *todas* las rectas construidas de esta manera son paralelas.

De nuevo, si se comparan las rectas $10 = 3x_1 + 5x_2$ y $20 = 3x_1 + 5x_2$ en la figura 3.3, es posible observar que la recta que da el valor mayor de Z ($Z = 20$) se encuentra más lejos del origen hacia arriba que la otra recta ($Z = 10$). Este hecho también está implícito en la forma de pendiente-ordenada al origen de la función objetivo, lo que indica que la intersección con el eje x_1 ($\frac{1}{5}Z$) aumenta cuando crece el valor seleccionado de Z.

Estas observaciones implican que el procedimiento de prueba y error para construir las rectas de la figura 3.3 involucra sólo dibujar una familia de rectas paralelas que contengan al menos un punto en la región factible y elegir la que corresponda al mayor valor de Z. La figura 3.3 muestra que esta recta pasa por el punto (2, 6), lo cual indica que la **solución óptima** es $x_1 = 2$ y $x_2 = 6$. La ecuación de esta recta es $3x_1 + 5x_2 = 3(2) + 5(6) = 36 = Z$, lo cual indica que el valor óptimo de Z es $Z = 36$. El punto (2, 6) se encuentra en la intersección de las dos rectas $2x_2 = 12$ y $3x_1 + 2x_2 = 18$, que se muestra en la figura 3.2, por lo que el punto se puede calcular de manera algebraica como la solución simultánea de estas dos ecuaciones.

Una vez estudiado el procedimiento de prueba y error para encontrar el punto óptimo (2, 6) es posible seguir los pasos de este método en otros problemas. En lugar de dibujar varias rectas paralelas, es suficiente marcar una de ellas con una regla para establecer la pendiente y después mover la regla con pendiente fija sobre la región factible en la dirección en que Z mejora. (Cuando el objetivo sea *minimizar Z* la regla deberá moverse en la dirección en que *Z decrece*.) La regla se deja de mover en el momento en que todavía pasa por un punto de esta región. Este punto es la *solución óptima* deseada.

Con frecuencia se hace referencia a este procedimiento como el **método gráfico** de programación lineal. Se puede usar para resolver cualquier problema de programación lineal con dos variables de decisión. Con alguna dificultad es posible extender el método a tres variables de decisión, pero no más de tres. (En el siguiente capítulo se estudia el *método símplex* para resolver problemas más grandes.)

Conclusiones

El equipo de IO utilizó este procedimiento para encontrar que la solución óptima deseada es $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, con $Z = 36$. Esta solución indica que la Wyndor Glass Co. debe fabricar los productos 1 y 2 a una tasa de 2 y 6 lotes por semana, respectivamente, con una ganancia total resultante de 36 000 dólares semanales. No existe otra mezcla de los dos productos que sea tan redituable, *de acuerdo con el modelo*.

No obstante, en el capítulo 2 se puso de manifiesto que un buen estudio de investigación de operaciones no sólo encuentra *una* solución para el modelo *inicial* formulado. Cada una de las seis etapas que se describieron es importante, incluso las pruebas exhaustivas del modelo (vea la sección 2.4) y el análisis posóptimo (sección 2.3).

Si reconoce la totalidad de estas realidades prácticas, el equipo de IO está listo para evaluar la validez del modelo de una manera más crítica (esta explicación continuará en la sección 3.3), y para llevar a cabo un análisis de sensibilidad sobre el efecto que tendría el hecho de que las estimaciones dadas en la tabla 3.1 fueran diferentes debido a inexactitudes, cambios en las circunstancias, etc. (Este tema continuará en la sección 6.7.)

Continuación del proceso de aprendizaje con OR Courseware

Éste es el primero de muchos puntos en los cuales será útil emplear el *OR Courseware* que se encuentra en el CD que acompaña al libro. Un programa clave en este CD es el llamado OR Tutor que contiene un ejemplo de demostración completo del *método gráfico* que se estudia en esta sección. Esta demostración comienza por la introducción de un problema y la formulación de un modelo de programación lineal, antes de aplicar el método gráfico para resolverlo, con la intención de proporcionar un **ejemplo adicional** de formulación de un modelo. Al igual que muchos otros ejemplos de demostración en otras secciones, éste resalta los conceptos que son difíciles de explicar en una página impresa. En el apéndice 1 se puede consultar la documentación sobre el software.

Si el lector desea ver **más ejemplos** puede consultar la sección de problemas resueltos —**Worked Examples**— en el sitio web del libro. Esta sección incluye unos cuantos ejemplos con soluciones completas para casi todos los capítulos, así como un complemento de los ejemplos del libro y del OR Tutor. Los ejemplos de este capítulo comienzan con un problema relativamente directo que implica la formulación de un pequeño modelo de programación lineal y la aplicación del método gráfico. Los ejemplos siguientes implicarán de manera progresiva un reto mayor.

Otra parte clave del OR Courseware es un programa llamado **IOR Tutorial**. Éste realiza muchos procedimientos interactivos para ejecutar los diferentes métodos de solución que se presentan en el libro, lo que permite que el lector se enfoque en el aprendizaje y la ejecución de la lógica del método en forma eficiente, mientras que la computadora realiza los cálculos numéricos. Se incluye un procedimiento interactivo para aplicar el método gráfico en la programación lineal. Una vez que se haya captado este primer procedimiento, un segundo enfoque permite aplicar con rapidez el método gráfico para desarrollar análisis de sensibilidad sobre el efecto de cambios en los datos del problema. Después, es posible imprimir los trabajos y resultados como una tarea. Como los otros procedimientos del IOR Tutorial, éstos están específicamente diseñados para proporcionar al lector una experiencia de aprendizaje eficiente, amena y enriquecedora mientras realiza sus tareas.

Cuando se formule un modelo de programación lineal con más de dos variables de decisión, por lo que no puede usarse el método gráfico, el *método símplex* descrito en el capítulo 4 permitirá encontrar una solución óptima de inmediato. Obtenerla también es útil para la *validación del modelo* puesto que encontrar una *solución sin sentido* indica que se cometieron errores en la formulación del modelo.

En la sección 1.4 se mencionó que el OR Courseware es una introducción a los tres paquetes de software comerciales que más se usan —Excel Solver, LINGO/LINDO y MPL/CPLEX— para resolver una variedad de modelos de IO. Los tres paquetes incluyen el método símplex para resolver problemas de programación lineal. En la sección 3.5 se describe cómo usar Excel para formular y resolver modelos de programación lineal en el formato de una hoja de cálculo. Las descripciones de los otros paquetes se proporcionan en la sección 3.6 —MPL y LINGO—, los suplementos 1 y 2 de este capítulo en el sitio web del libro —LINGO—, la sección 4.8 —CPLEX y LINDO— y el apéndice 4.1 —LINDO—. Además, el OR Courseware incluye un archivo para cada uno de los tres paquetes que muestra cómo se puede usar para resolver los ejemplos en este capítulo.

3.2 MODELO DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema de la Wyndor Glass Co. se diseñó para ilustrar un problema común de programación lineal, en versión simplificada. Sin embargo, esta técnica es muy versátil como para describirla mediante un solo ejemplo. En esta sección se presentarán las características generales de los problemas de programación lineal y las distintas formas legítimas del modelo matemático.

TABLA 3.2 Terminología común de programación lineal

Ejemplo modelo	Problema general
Capacidad de producción de las plantas	Recursos
3 plantas	m recursos
Fabricación de productos	Actividades
2 productos	n actividades
Tasa de producción del producto j, x_j	Nivel de actividad j, x_j
Ganancia Z	Medida global de desempeño Z

Comenzaremos por establecer la terminología y notación básicas. La primera columna de la tabla 3.2 resume los componentes del problema de la Wyndor Glass Co. La segunda introduce términos más generales de estos componentes, que se ajustarán a muchos problemas de programación lineal. Los términos clave son *recursos* y *actividades* en los que m denota el número de tipos de recursos que se pueden usar y n el número de actividades que se consideran. Algunos ejemplos de recursos son dinero y tipos especiales de maquinaria, equipo, vehículos y personal. Los ejemplos de actividades incluyen inversión en proyectos específicos, publicidad en un medio determinado y el envío de bienes de cierta fuente a cierto destino. En cualquier aplicación de programación lineal es posible que todas las actividades sean de un tipo general (como cualquiera de estos tres ejemplos), a consecuencia de lo cual cada una correspondería en forma individual a las alternativas específicas dentro de esta categoría general.

Como se describió en la introducción del capítulo, el tipo más usual de aplicación de programación lineal involucra la asignación de recursos a ciertas actividades. La cantidad disponible de cada recurso es limitada, de forma que debe asignarse con todo cuidado. La determinación de esta asignación implica elegir los niveles de las actividades que lograrán el mejor valor posible de la *medida global de desempeño*.

Ciertos símbolos se usan de manera convencional para denotar los diversos componentes de un modelo de programación lineal. Estos símbolos se enumeran a continuación, junto con su interpretación para el problema general de asignación de recursos a actividades.

Z = valor de la medida global de desempeño.
x_j = nivel de la actividad j (para $j = 1, 2, \ldots, n$).
c_j = incremento en Z que se obtiene al aumentar una unidad en el nivel de la actividad j.
b_i = cantidad de recurso i disponible para asignarse a las actividades (para $i = 1, 2, \ldots, m$).
a_{ij} = cantidad del recurso i consumido por cada unidad de la actividad j.

El modelo plantea el problema en términos de tomar decisiones sobre los niveles de las actividades, por lo que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se llaman **variables de decisión**. Como se resume en la tabla 3.3, los valores

TABLA 3.3 Datos necesarios para elaborar un modelo de programación lineal para manejar la asignación de recursos a actividades

	Consumo de recursos por unidad de actividad				
	Actividad				
Recurso	1	2	. . .	n	Cantidad de recursos disponibles
1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	b_2
.					.
.	. . .	. . .	. . .	. . .	.
.					.
m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	b_m
Contribución a Z por unidad de actividad	c_1	c_2	. . .	c_n	

de c_j, b_i y a_{ij} (para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$) son las *constantes de entrada* al modelo. Las c_j, b_i y a_{ij} también se conocen como **parámetros** del modelo.

Observe la correspondencia entre la tabla 3.3 y la tabla 3.1.

Una forma estándar del modelo

Para proceder con el problema de la Wyndor Glass Co., ahora se puede formular el modelo matemático del problema general de asignar recursos a actividades. En particular, este modelo consiste en elegir valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para

$$\text{Maximizar} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le b_m, \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0.$$

Ésta es llamada *nuestra forma estándar*[1] del problema de programación lineal. Cualquier situación cuya formulación matemática se ajuste a este modelo es un problema de programación lineal.

Observe que el modelo del problema de la Wyndor Glass Co. se ajusta a la forma estándar con $m = 3$ y $n = 2$.

En este momento se puede resumir la terminología común de los modelos de programación lineal. La función que se desea maximizar, $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, se llama **función objetivo**. Por lo general, se hace referencia a las limitaciones como **restricciones**. Las primeras m restricciones (aquellas con una *función* de todas las variables $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$ en el lado izquierdo) a veces reciben el nombre de **restricciones funcionales** (o *restricciones estructurales*). De manera parecida, las restricciones $x_j \ge 0$ se conocen como **restricciones de no negatividad** (o *condiciones de no negatividad*).

Otras formas

Debe hacerse notar que el modelo anterior no se ajusta a la forma natural de algunos problemas de programación lineal. Las otras *formas legítimas* son las siguientes:

1. Minimizar en lugar de maximizar la función objetivo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

2. Algunas restricciones funcionales con desigualdad en sentido mayor o igual que:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \ge b_i \qquad \text{para algunos valores de } i.$$

3. Algunas restricciones funcionales en forma de ecuación:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \qquad \text{para algunos valores de } i.$$

4. Algunas variables de decisión sin la restricción de no negatividad:

x_j no está restringida en su signo   para algunos valores de j.

Cualquier problema que incluye una, varias o todas estas formas con las otras partes del modelo anterior también se clasifica como un problema de programación lineal. La interpretación de las palabras *asignación de recursos limitados entre actividades* que compiten puede ya no aplicarse

[1] Se llama *nuestra* forma estándar en lugar de *la* forma estándar porque otros libros adoptan formas distintas.

muy bien, si es que se aplica; pero sin importar cuál sea la interpretación o el contexto, lo único necesario es que la formulación matemática del problema se ajuste a las formas permitidas. Así, la definición concisa de un problema de programación lineal es que cada componente de su modelo se ajusta a la forma estándar o a una de las otras formas legítimas que ya se mencionaron.

Terminología de las soluciones del modelo

Puede ser que el lector esté acostumbrado a que el término *solución* signifique la respuesta final a un problema, pero en programación lineal (y sus extensiones) la convención es bastante distinta. Ahora, *cualquier* conjunto de valores específicos de las variables de decisión ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) se llama una **solución**, aunque sea sólo una posibilidad deseable o ni siquiera permitida. Después se identifican los tipos de soluciones mediante el empleo de un adjetivo apropiado.

Una **solución factible** es aquella para la que *todas* las restricciones se *satisfacen*.
Una **solución no factible** es una solución para la que *al menos una* restricción se *viola*.

En el ejemplo, los puntos (2, 3) y (4, 1) de la figura 3.2 son soluciones factibles, mientras que (−1, 3) y (4, 4) son *soluciones no factibles*.

La **región factible** es la reunión de todas las soluciones factibles.

En el ejemplo, la región factible es toda el área sombreada de la figura 3.2.

Es posible que un problema **no tenga soluciones factibles**. Esto habría ocurrido si se hubiera requerido que los nuevos productos tuvieran un rendimiento neto de 50 000 dólares semanales por lo menos, para justificar la interrupción de la fabricación de la línea actual. La restricción correspondiente, $3x_1 + 5x_2 \geq 50$, hubiera eliminado por completo la región factible, con lo que ninguna mezcla de nuevos productos sería superior a la situación actual. Este caso se ilustra en la figura 3.4.

Dado que existen soluciones factibles, la meta de la programación lineal es encontrar una solución factible que sea la mejor, medida por el valor de la función objetivo en el modelo.

Una **solución óptima** es una solución factible que proporciona el *valor más favorable* de la función objetivo.

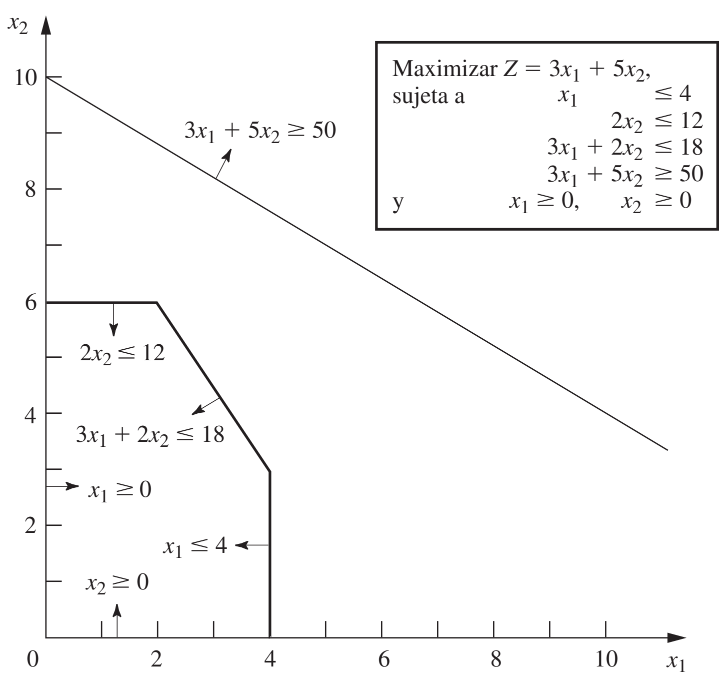


FIGURA 3.4
El problema de la Wyndor Glass Co. no tendría soluciones óptimas si se le agregara la restricción $3x_1 + 5x_2 \geq 50$.

El **valor más favorable** significa el *valor más grande* si la función objetivo debe *maximizarse*, o el *valor más pequeño* si la función objetivo debe *minimizarse*.

La mayor parte de los problemas tendrá nada más una solución óptima. Sin embargo, también es posible tener más de una. Esto ocurriría en el ejemplo si la *ganancia por lote producido* del producto 2 se cambiara a 2 000 dólares. Este hecho cambiaría la función objetivo a $Z = 3x_1 + 2x_2$, de manera que todos los puntos sobre el segmento de recta que va de (2, 6) a (4, 3) serían soluciones óptimas, situación que se ilustra en la figura 3.5. Igual que en este caso, *cualquier* problema que tenga **soluciones óptimas múltiples** tendrá un número *infinito* de ellas, todas con el mismo valor de la función objetivo.

Otra posibilidad es que el problema **no tenga soluciones óptimas**, lo cual ocurre sólo si: 1) no tiene soluciones factibles, o 2) las restricciones no impiden que el valor de la función objetivo (Z) mejore indefinidamente en la dirección favorable (positiva o negativa). Este caso se conoce como un problema con **Z no acotada** u *objetivo no acotado*. El último caso sería cierto si, por error, en el ejemplo se omitieran las últimas dos restricciones funcionales del modelo, lo cual se ilustra en la figura 3.6.

Ahora se introducirá un tipo especial de soluciones factibles que tiene un papel importante cuando el método símplex trata de encontrar una solución óptima.

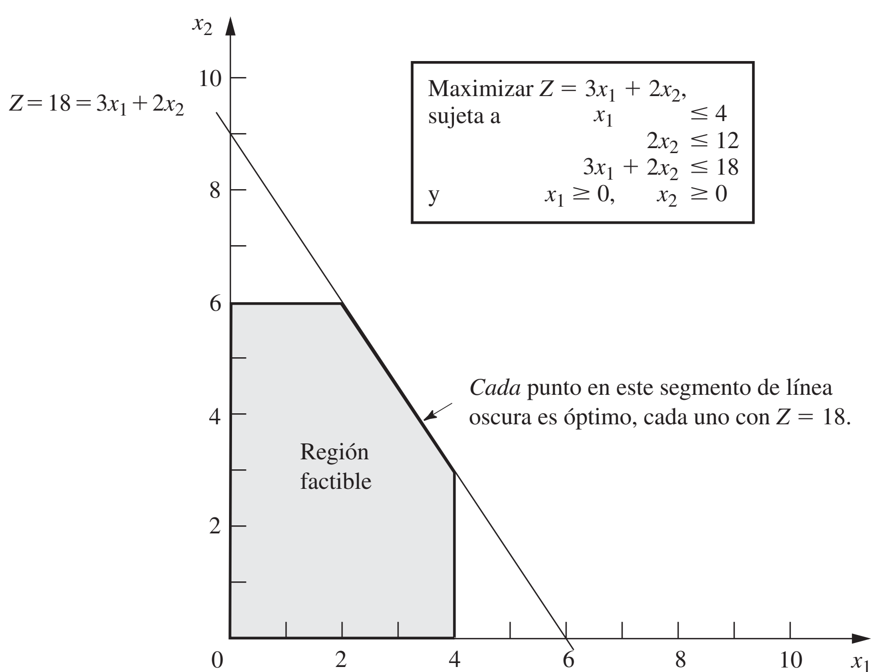
> Una **solución factible en un vértice (FEV)** es una solución que se encuentra en una esquina de la región factible.

(Las soluciones FEV también se conocen como *puntos extremos* o *esquinas*, pero preferimos la terminología más sugerente de *vértice*.) La figura 3.7 pone de relieve cinco soluciones factibles en los vértices del ejemplo.

En las secciones 4.1 y 5.1 se analizarán varias propiedades útiles de las soluciones FEV para problemas de cualquier tamaño, incluso la siguiente relación con las soluciones óptimas.

> **Relación entre las soluciones óptimas y las soluciones FEV:** Considere cualquier problema de programación lineal con soluciones factibles y una región factible acotada. El problema *debe* poseer soluciones FEV y al menos una solución óptima. Además, la mejor solución FEV *debe* ser una solución óptima. Entonces, si un problema tiene exactamente una solución óptima, ésta *debe* ser una solución FEV. Si el problema tiene múltiples soluciones óptimas, al menos dos deben ser soluciones FEV.

FIGURA 3.5
El problema de la Wyndor Glass Co. tendría múltiples soluciones óptimas si la función objetivo se cambiara a $Z = 3x_1 + 2x_2$.



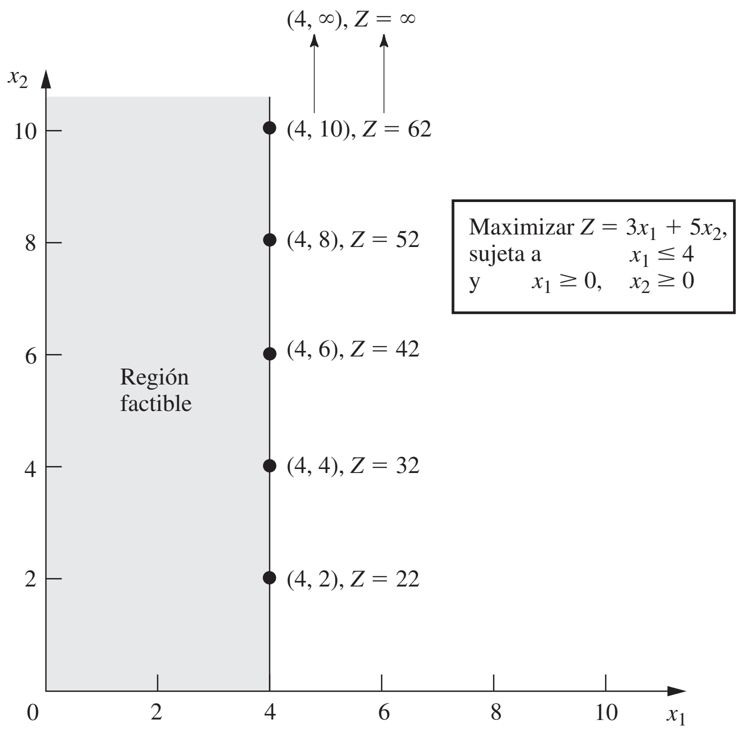


FIGURA 3.6
El problema de la Wyndor Glass Co. no tendría soluciones óptimas si la única restricción funcional fuera $x_1 \leq 4$, puesto que x_2 podría aumentar de modo indefinido en la región factible sin llegar a un valor máximo de $Z = 3x_1 + 5x_2$.

El ejemplo tiene exactamente una solución óptima, $(x_1, x_2) = (2, 6)$, que es FEV. (Considérese la forma como el método gráfico que conduce a la solución óptima que es FEV.) Cuando se modifica el ejemplo para que tenga soluciones óptimas múltiples, como se muestra en la figura 3.5, dos de estas soluciones óptimas —(2, 6) y (4, 3)— son soluciones factibles en los vértices.

3.3 SUPUESTOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

En realidad, todos los supuestos de programación lineal están implícitos en la formulación del modelo que se presentó en la sección 3.2. En particular, desde un punto de vista matemático, los supuestos simplemente son que el modelo debe tener una función objetivo lineal sujeta a restricciones lineales. Sin embargo, desde el punto de vista de modelación, estas propiedades

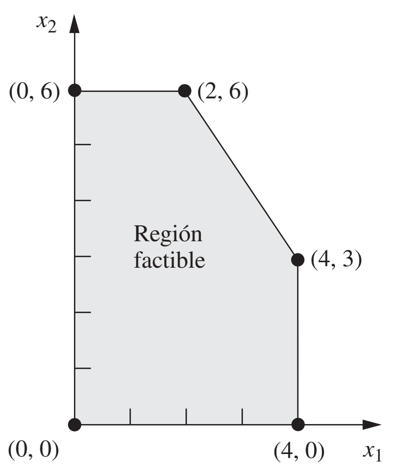


FIGURA 3.7
Los puntos indican las cinco soluciones FEV para el problema de la Wyndor Glass Co.

■ **TABLA 3.4** Ejemplos de proporcionalidad satisfecha o violada

	Ganancia del producto 1 ($000 por semana)			
		Proporcionalidad violada		
x_1	Proporcionalidad satisfecha	Caso 1	Caso 2	Caso 3
0	0	0	0	0
1	3	2	3	3
2	6	5	7	5
3	9	8	12	6
4	12	11	18	6

matemáticas de un modelo de programación lineal implican que se deben considerar ciertos supuestos acerca de las actividades y datos del problema que será modelado, incluso algunos acerca del efecto de las variaciones en el nivel de las actividades. Vale la pena hacer hincapié en ellas para que sea más sencillo evaluar si esta técnica es adecuada para un problema dado. Aún más, es necesario analizar por qué el equipo de IO de la Wyndor Glass Co. concluyó que la formulación de programación lineal proporcionaba una representación satisfactoria del problema.

Proporcionalidad

La *proporcionalidad* es un supuesto sobre la función objetivo y sobre las restricciones funcionales, como se resume a continuación.

> **Supuesto de proporcionalidad:** La contribución de cada actividad al *valor de la función objetivo* Z es *proporcional* al *nivel de la actividad* x_j, como lo representa el término $c_j x_j$ en la función objetivo. De manera similar, la contribución de cada actividad *al lado izquierdo de cada restricción funcional* es *proporcional* al *nivel de la actividad* x_j, como lo representa en la restricción el término $a_{ij} x_j$. En consecuencia, este supuesto elimina cualquier exponente diferente de 1 para las variables en cualquier término de las funciones —ya sea la función objetivo o la función en el lado izquierdo de las restricciones funcionales— en un modelo de programación lineal.[2]

Para ilustrar este supuesto, considere el primer término ($3x_1$) en la función objetivo ($Z = 3x_1 + 5x_2$) del problema de la Wyndor Glass Co. Este término representa la ganancia generada por semana (en miles de dólares) cuando se fabrica el producto 1 a una tasa de x_1 lotes por semana. La columna de *proporcionalidad satisfecha* de la tabla 3.4 muestra el caso que se supuso en la sección 3.1, esto es, que la ganancia sin duda es proporcional a x_1 de manera que $3x_1$ es el término apropiado de la función objetivo. Por el contrario, las siguientes tres columnas muestran casos hipotéticos diferentes en los que el supuesto de proporcionalidad no se cumple.

Vea primero la columna del *caso 1* en la tabla 3.4. Este caso surgiría si se tuvieran *costos fijos* asociados al arranque de la fabricación del producto 1. Por ejemplo, es posible que existan costos debidos a la preparación de las instalaciones de producción. También puede haber costos asociados con el arreglo de la distribución del nuevo producto. Como se trata de costos en los que se incurre una sola vez, deben amortizarse cada semana para que sean conmensurables con Z (ganancia en miles de dólares por semana). Suponga que se hace esta amortización y que los costos de preparación o fijos totales significan una reducción de 1 en el valor de Z, la ganancia, sin considerar los costos fijos es de $3x_1$. Esto quiere decir que la contribución del producto 1 a Z es $3x_1 - 1$ para $x_1 > 0$, mientras que la contribución es $3x_1 = 0$ cuando $x_1 = 0$ (no hay costo fijo). Esta función de ganancias,[3] dada por la curva continua en la figura 3.8, sin duda *no* es proporcional a x_1.

---

[2] Cuando la función incluye *algún término de producto cruzado*, la proporcionalidad debe interpretarse en el sentido de que los *cambios* en el valor de la función son proporcionales a los *cambios* en cada variable (x_j) en forma individual, dados cualesquiera valores fijos para las otras variables. Por lo tanto, un término de producto cruzado satisface la proporcionalidad siempre que cada variable del término tenga un exponente de 1. (Sin embargo, cualquier término de producto cruzado viola el *supuesto de aditividad* que se estudiará en seguida.)

[3] Si la contribución del producto 1 a la función Z fuera $3x_1 - 1$ para *toda* $x_1 \geq 0$, incluso $x_1 = 0$, entonces la constante fija, -1, se podría eliminar de la función objetivo sin cambiar la solución óptima y se restablecería la proporcionalidad. Sin embargo, en este caso no es posible, ya que la constante -1 no se aplica si $x_1 = 0$.

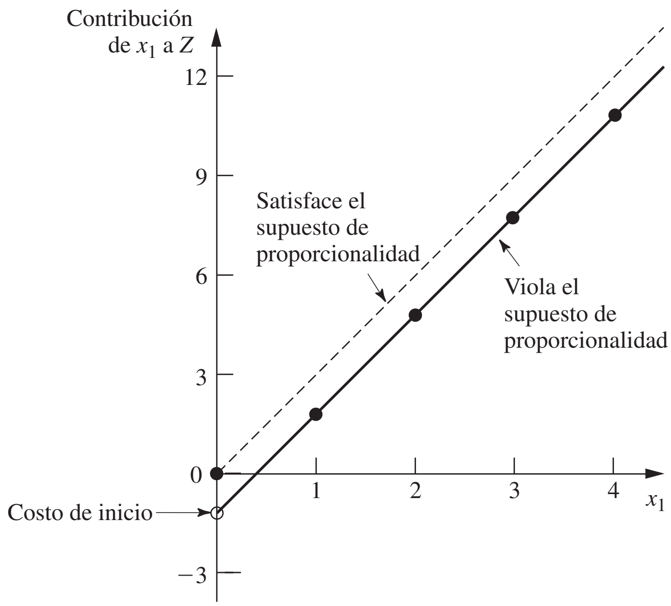
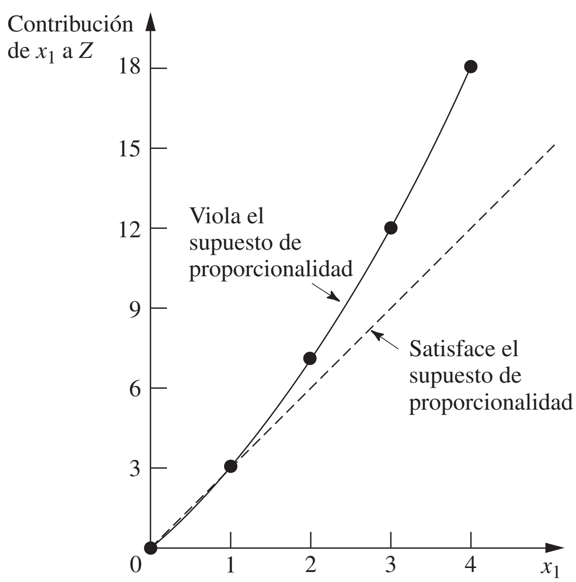


FIGURA 3.8
La curva continua viola el supuesto de proporcionalidad debido al costo fijo en que se incurre cuando x_1 aumenta desde cero. Los valores de los puntos están dados en la columna del caso 1 de la tabla 3.4.

A primera vista, podría parecer que el *caso 2* de la tabla 3.4 es bastante parecido al caso 1. Pero el hecho es que el caso 2 surge de forma muy diferente. No existe un costo fijo y la ganancia generada por la primera unidad del producto 1 por semana, por supuesto, es de 3 dólares, como se supuso en un principio. Pero ahora se tiene un *rendimiento marginal creciente*; es decir, la *pendiente* de la *función de ganancia* del producto 1 (vea la curva continua de la figura 3.9) crece a medida que x_1 aumenta. Esta violación de la proporcionalidad puede ocurrir debido a economías de escala que en ocasiones se pueden lograr en niveles altos de producción, por ejemplo, a través del uso de maquinaria más eficiente para altos volúmenes, corridas de producción más grandes, descuentos por cantidad por compras grandes de materia prima y por el efecto de la curva de aprendizaje debido a la cual los trabajadores son cada vez más eficientes a medida que adquieren experiencia en un trabajo de producción dado. Cuando el costo incremental disminuye, la ganancia incremental aumenta si se supone un ingreso marginal constante.

FIGURA 3.9
La curva continua viola el supuesto de proporcionalidad porque su pendiente (el *rendimiento marginal* del producto 1) sigue en crecimiento a medida que x_1 aumenta. Los valores de los puntos están dados en la columna del caso 2 de la tabla 3.4.



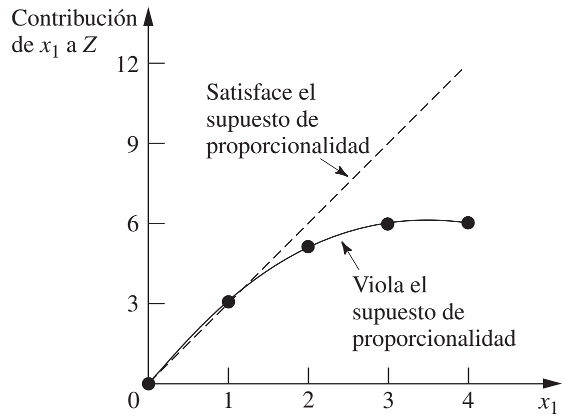


FIGURA 3.10
La curva continua viola el supuesto de proporcionalidad porque su pendiente (el *rendimiento marginal* del producto 1) sigue en decadencia a medida que x_1 aumenta. Los valores de los puntos están dados en la columna del caso 3 de la tabla 3.4.

De nuevo, según los datos de la tabla 3.4, el caso contrario del 2 es el *caso 3*, en el que existe un *rendimiento marginal decreciente*. En este caso, la *pendiente* de la *función de ganancia* del producto 1 (dada por la curva continua de la figura 3.10) disminuye conforme x_1 aumenta. Esta violación de la proporcionalidad puede ocurrir debido a que los *costos de marketing* tienen que elevarse más que proporcionalmente para lograr aumentos del nivel de ventas. Por ejemplo, tal vez el producto 1 se pueda vender a una tasa de 1 por semana ($x_1 = 1$) sin publicidad, mientras que lograr ventas que sostengan una tasa de producción de $x_1 = 2$ puede requerir una publicidad moderada, para $x_1 = 3$ es posible que sea necesaria una extensa campaña publicitaria y para $x_1 = 4$ puede requerirse también una disminución de precios.

Los tres casos son ejemplos hipotéticos de la forma en que el supuesto de proporcionalidad puede no cumplirse. ¿Cuál es la situación real? La ganancia real al fabricar el producto 1 (o cualquier otro) se deriva del ingreso por ventas menos los distintos costos directos e indirectos. Es inevitable que algunos de estos componentes de costos no sean estrictamente proporcionales a las tasas de producción, tal vez por alguna de las razones que se expusieron. Sin embargo, la pregunta importante es si después de acumular todos los componentes de ganancia, la proporcionalidad es una aproximación razonable del modelado. En el problema de la Wyndor Glass Co., el equipo de IO verificó tanto la función objetivo como las restricciones funcionales. La conclusión fue que sin duda podía suponerse la proporcionalidad sin distorsiones serias.

¿Qué ocurre cuando el supuesto no se cumple, ni siquiera como una aproximación razonable? En la mayor parte de los casos, esto significa que se debe emplear *programación no lineal* (vea el capítulo 12). Sin embargo, en la sección 12.8 se señala que cierta clase importante de falta de proporcionalidad se puede manejar mediante programación lineal a través de la reelaboración del problema de manera adecuada. Aún más, si se viola el supuesto nada más debido a los costos fijos, existe una extensión de la programación lineal (*programación entera mixta*) que se puede usar, presentada en la sección 11.3 (el problema de costos fijos).

Aditividad

Aunque el supuesto de proporcionalidad elimina los exponentes diferentes de uno, no prohíbe los *términos de productos cruzados*, términos que incluyen el producto de dos o más variables. El supuesto de aditividad elimina esta posibilidad, como se ve a continuación.

> **Supuesto de aditividad:** *Cada* función de un modelo de programación lineal (ya sea la función objetivo o el lado izquierdo de las restricciones funcionales) es la *suma* de las *contribuciones individuales* de las actividades respectivas.

Para que esta definición sea más concreta y aclare por qué es necesario preocuparse por este supuesto se analizarán algunos ejemplos. En la tabla 3.5 se muestran algunos casos posibles de la función objetivo del problema de la Wyndor Glass Co. En cada caso, las *contribuciones individuales* de los productos son las que se supusieron en la sección 3.1, es decir, $3x_1$ para el producto 1 y $5x_2$ para el producto 2. La diferencia estriba en el último renglón que da el *valor de la función* de

TABLA 3.5 Ejemplos que satisfacen o violan la aditividad de la función objetivo

	Valor de Z		
		Aditividad violada	
(x_1, x_2)	Aditividad satisfecha	Caso 1	Caso 2
(1, 0)	3	3	3
(0, 1)	5	5	5
(1, 1)	8	9	7

Z cuando se fabrican los dos productos de manera conjunta. La columna de *aditividad satisfecha* muestra el caso en el que este *valor de la función* se obtiene simplemente mediante la suma de los dos primeros renglones ($3 + 5 = 8$), es decir, $Z = 3x_1 + 5x_2$, como se supuso antes. Por el contrario, las columnas que siguen muestran casos hipotéticos en los que el supuesto de aditividad queda violado, pero no el de proporcionalidad.

De acuerdo con la columna del *caso 1* de la tabla 3.5, se tiene una función objetivo de $Z = 3x_1 + 5x_2 + x_1x_2$, de manera que $Z = 3 + 5 + 1 = 9$ para $(x_1, x_2) = (1, 1)$, lo que viola el supuesto de aditividad de que $Z = 3 + 5$. (El supuesto de proporcionalidad todavía se satisface puesto que si se fija el valor de una variable, el incremento de Z debido a la otra variable es proporcional al valor de esa variable.) Este caso surge si los dos productos son *complementarios* de alguna forma en que la ganancia *aumenta*. Por ejemplo, suponga que es necesaria una campaña publicitaria importante para comercializar cualquiera de los dos productos por sí solos, pero que la misma campaña puede promover de manera eficaz ambos productos. Como se ahorra un costo alto del segundo producto, la ganancia conjunta será algo más que la *suma* de sus ganancias individuales si se producen por separado.

El *caso 2* de la tabla 3.5 también viola el supuesto de aditividad debido al término adicional en su función objetivo, $Z = 3x_1 + 5x_2 - x_1x_2$, de forma que $Z = 3 + 5 - 1 = 7$ para $(x_1, x_2) = (1, 1)$. Al contrario del primer caso, el caso 2 surge cuando los dos productos son *competitivos* de algún modo en que su ganancia conjunta *disminuye*. Por ejemplo, suponga que ambos productos deben usar la misma maquinaria y equipo. Si se produce cada uno por sí solo, maquinaria y equipo se dedican a este único uso. Sin embargo, cuando son fabricados ambos productos, se requiere cambiar los procesos de producción de uno a otro, con tiempo y costos involucrados en la interrupción temporal de la producción de uno y la preparación del otro. Debido a este costo adicional importante, su ganancia conjunta será algo menor que la *suma* de sus ganancias individuales si se les produce por separado.

El mismo tipo de interacción de actividades puede afectar la aditividad de las funciones de restricción. Por ejemplo, considere la tercera restricción del problema de la Wyndor Glass Co., $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. (Ésta es la única restricción que incluye ambos productos.) Esta restricción se refiere a la capacidad de producción de la planta 3, en la que se dispone de 18 horas semanales de producción para los dos nuevos productos, mientras que la función del lado izquierdo ($3x_1 + 2x_2$) representa el número de horas de producción semanales que se usarían en estos productos. La columna de *aditividad satisfecha* de la tabla 3.6 muestra este caso, mientras que las dos columnas siguientes exponen casos en los que la función tiene un término adicional de producto cruzado que

TABLA 3.6 Ejemplos de aditividad satisfecha o violada de una restricción funcional

	Cantidad de recurso usado		
		Aditividad satisfecha	
(x_1, x_2)	Aditividad violada	Caso 3	Caso 4
(2, 0)	6	6	6
(0, 3)	6	6	6
(2, 3)	12	15	10.8

viola la aditividad. En las tres columnas, las *contribuciones individuales* de los productos en cuanto al uso de la capacidad de la planta 3 son las que se supusieron, es decir, $3x_1$ para el producto 1 y $2x_2$ para el producto 2, o sea, $3(2) = 6$, para $x_1 = 2$ y $2(3) = 6$ para $x_2 = 3$. Igual que en la tabla 3.5, la diferencia estriba en el último renglón que ahora da el *valor total de la función* para el tiempo de producción que se utiliza cuando se fabrican los dos productos de manera conjunta.

En el caso 3 (vea la tabla 3.6), el tiempo de producción para los dos productos está dado por la función $3x_1 + 2x_2 + 0.5x_1x_2$, de manera que el *valor total de la función* es $6 + 6 + 3 = 15$ cuando $(x_1, x_2) = (2, 3)$, lo que viola el supuesto de aditividad de que el valor es sólo $6 + 6 = 12$. Este caso puede surgir justo de la misma forma que se describió en el caso 2 (tabla 3.5): tiempo adicional desperdiciado en el cambio de procesos de producción entre los dos productos. El término adicional de producto cruzado ($0.5x_1x_2$) representa el tiempo de producción desperdiciado en esta forma. (Observe que el desperdicio de tiempo al cambiar de un producto a otro da por resultado, en este caso, un término positivo de producto cruzado en donde la función total mide el tiempo de producción utilizado, mientras que lleva a un término negativo de producto cruzado en el caso 2 puesto que esa función total mide la ganancia.)

En el caso 4 de la tabla 3.6, la función de la capacidad que se usa es $3x_1 + 2x_2 - 0.1x_1^2x_2$, por lo que el *valor de la función* para $(x_1, x_2) = (2, 3)$ es $6 + 6 - 1.2 = 10.8$. Este caso surge de la siguiente manera. Igual que en el caso 3, suponga que los dos productos requieren el mismo tipo de maquinaria y equipo, pero que ahora el tiempo para cambiar de un producto a otro es relativamente pequeño. Como cada producto pasa por una serie de operaciones, las instalaciones de producción individual, que por lo general se dedican a ese producto, tendrían algunos tiempos ociosos. Estas instalaciones podrían utilizarse durante estos tiempos en otros productos. En consecuencia, el tiempo total de producción usado cuando se fabrican en forma conjunta los dos productos, es menor que la *suma* de los tiempos de producción usados por los productos individuales cuando se fabrican por separado.

Después de analizar los tipos posibles de interacción de los dos productos ilustrados en estos cuatro casos, el equipo de IO concluyó que ninguno tenía un papel importante en el problema real de la Wyndor Glass Co. Por lo tanto, el supuesto de aditividad se adoptó como una aproximación razonable.

En otros problemas, si la aditividad no es un supuesto razonable, de forma que algunas o todas las funciones matemáticas del modelo necesariamente son *no lineales* (debido a términos de producto cruzado), resulta definitiva la entrada en el ámbito de la programación no lineal (capítulo 12).

Divisibilidad

El siguiente supuesto se refiere a los valores permitidos para las variables de decisión.

> **Supuesto de divisibilidad:** En un modelo de programación lineal, las variables de decisión pueden tomar *cualquier* valor, incluso valores *no enteros*, que satisfagan las restricciones funcionales y de no negatividad. En consecuencia, estas variables *no* están restringidas a sólo valores enteros. Como cada variable de decisión representa el nivel de alguna actividad, se supondrá que las actividades se pueden realizar a *niveles fraccionales*.

En el problema de la Wyndor Glass Co., las variables de decisión representan tasas de producción (número de lotes de un producto fabricados a la semana). Como estas tasas pueden tomar *cualquier* valor fraccional dentro de la región factible, el supuesto de divisibilidad se cumple.

En ciertas situaciones, el supuesto de divisibilidad no se cumple porque algunas o todas las variables de decisión deben restringirse a *valores enteros*. Los modelos matemáticos con esta restricción, que se llaman modelos de *programación entera*, se estudiarán en el capítulo 11.

Certidumbre

El último supuesto se refiere a los *parámetros* del modelo, es decir, a los coeficientes c_j, en la función objetivo, los coeficientes a_{ij}, en las restricciones funcionales y los b_i en el lado derecho de las restricciones funcionales.

> **Supuesto de certidumbre:** Se supone que los valores asignados a cada parámetro de un modelo de programación lineal son *constantes conocidas*.

En los problemas reales, el supuesto de certidumbre casi nunca se satisface por completo. Por lo general se formula un modelo de programación lineal para elegir un curso de acción futuro. En este caso, los valores de los parámetros que se emplean están basados en una predicción de las condiciones futuras, lo que es inevitable que introduzca cierto grado de incertidumbre.

Por esta razón, siempre es importante realizar un **análisis de sensibilidad** después de encontrar una solución óptima de los valores supuestos de los parámetros. Como se presentó en la sección 2.3, el propósito general es identificar los parámetros *sensibles* (es decir, aquellos cuyo valor no puede cambiar mucho sin cambiar la solución óptima), debido a que un cambio mayor en el valor de un parámetro sensible de inmediato envía la señal de la necesidad de introducir un cambio en la solución usada.

El análisis de sensibilidad tiene un papel importante en el problema de la Wyndor Glass Co., como se verá en la sección 6.7. De cualquier manera, es necesario adquirir algunos conocimientos adicionales antes de terminar esta historia.

En algunos casos, el grado de incertidumbre en los parámetros es demasiado grande para que el análisis de sensibilidad lo pueda manejar. En estas situaciones es necesario establecer, en forma explícita, estos parámetros como *variables aleatorias*. Se han desarrollado formulaciones de este tipo, que se pueden consultar en las secciones 23.6 y 23.7 del sitio web del libro.

Los supuestos en perspectiva

En la sección 2.2 se hizo hincapié en que el modelo matemático intenta ser sólo una representación idealizada del problema real. Por lo general se requieren aproximaciones y los supuestos de simplificación para que el modelo se pueda manejar. Agregar demasiados detalles y precisión puede hacer que el modelo sea difícil de manipular para llevar a cabo un análisis útil del problema. En realidad, todo lo que se necesita es que exista una correlación relativamente alta entre la predicción del modelo y lo que de hecho pasaría en el problema real.

Este consejo sin duda es aplicable a la programación lineal. Es muy frecuente en las aplicaciones reales de esta técnica que casi *ninguno* de los cuatro supuestos se cumpla. Excepto, quizá, en el caso del *supuesto de divisibilidad*, deben esperarse pequeñas disparidades. Esto es cierto en especial para el *supuesto de certidumbre*, de manera que es normal que deba aplicarse el análisis de sensibilidad para compensar la violación de este supuesto.

Sin embargo, es importante que el equipo de IO examine los cuatro supuestos en el problema que se estudia y analice el tamaño de las disparidades. Si cualquiera de los supuestos es violado de manera importante, es necesario disponer de varios modelos alternativos, como se verá en capítulos posteriores de este libro. Una desventaja de estos modelos es que los algoritmos disponibles para resolverlos no son tan poderosos como el de programación lineal, pero en algunos casos este inconveniente se ha solucionado. En algunas aplicaciones se utiliza el poderoso enfoque de programación lineal para el análisis inicial y después un modelo más complejo para perfeccionar el análisis.

Al trabajar los ejemplos de la siguiente sección se demostrará que el análisis del grado en que se cumplen los cuatro supuestos de la programación lineal es una buena práctica.

3.4 EJEMPLOS ADICIONALES

El problema de la Wyndor Glass Co. es un ejemplo prototípico de programación lineal en varios aspectos: comprende la asignación de recursos limitados entre actividades que compiten por ellos, su modelo se ajusta a la forma estándar y su contexto es el tradicional de planeación para mejorar la administración. Sin embargo, la aplicación de la programación lineal es mucho más extensa. Esta sección comienza por ampliar el horizonte. Al estudiar los siguientes ejemplos observe que se caracterizan como problemas de programación lineal por el modelo matemático, más que por su contexto. Luego, debe considerarse que el mismo modelo matemático surge en muchos otros contextos con sólo cambiar los nombres de las actividades.

Estos ejemplos son versiones simplificadas de aplicaciones reales. Como el problema de Wyndor y el ejemplo de demostración del problema gráfico en el OR Tutor, el primero de estos ejemplos tiene sólo dos variables de decisión, de manera que puede ser resuelto mediante el método gráfico. Ahora se trata de un problema de minimización y tiene una mezcla de formas para las restricciones funcionales. (Este ejemplo simplifica de manera considerable la situación real de diseñar una terapia de radiación, pero el primer Recuadro de aplicación en esta sección describe el emocionante impacto que en realidad está teniendo la IO en esta área.) Los ejemplos subsecuentes tienen muchas más de dos variables de decisión y por lo tanto son más difíciles de formular. Aunque se mencionarán las soluciones óptimas que se obtienen por medio del método símplex, en esta sección el enfoque se concentra en la manera de formular el modelo de programación lineal para estos problemas más grandes. En las secciones subsecuentes y en el capítulo siguiente se dará mayor importancia a las herramientas de software y al algoritmo (método símplex) que se utiliza para resolver dichos problemas.

Si el lector considera que requiere **ejemplos adicionales** de formulación de modelos de programación lineal pequeños y relativamente directos antes de tratar con los ejemplos de formulación más grandes, se le sugiere regresar al caso de demostración del método gráfico en el OR Tutor y a los ejemplos en la sección de Worked Examples de este capítulo en el sitio web del libro.

Diseño de terapia de radiación

Acaban de diagnosticar que Mary padece cáncer en una etapa bastante avanzada. Específicamente, tiene un tumor grande en el área de la vejiga, una "lesión que afecta a toda la vejiga".

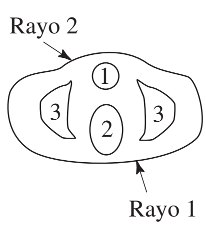
Mary recibirá los cuidados médicos más avanzados disponibles, para proporcionarle la mejor posibilidad de supervivencia. Estos cuidados incluyen una terapia de *radiación extensa*.

La terapia implica el uso de una máquina de rayos externos que envía radiación ionizante a través del cuerpo de la paciente y daña tanto los tejidos cancerosos como los sanos. Es normal que se administren los rayos con precisión desde diferentes ángulos en un plano de dos dimensiones. Debido a la atenuación, cada rayo descarga más radiación sobre el tejido cercano al punto de entrada que sobre el cercano al punto de salida. La dispersión también provoca que parte de la radiación se descargue sobre tejidos que están fuera de la trayectoria directa del rayo. Debido a que las células del tumor casi siempre se encuentran diseminadas entre células sanas, la dosis de radiación a través de la región del tumor debe ser suficiente para matar las células malignas que son un poco más sensibles a ella, pero suficientemente pequeña para no matar a las células sanas. Al mismo tiempo, la dosis acumulada que reciben los tejidos críticos no debe exceder los niveles de tolerancia establecidos, con el objeto de prevenir complicaciones que puedan resultar más serias que la enfermedad misma. La dosis completa que recibe el cuerpo sano debe minimizarse.

Debido a la necesidad de balancear con cuidado todos estos factores, el diseño de la terapia de radiación es un proceso muy delicado. La meta principal de este diseño es elegir la combinación de rayos que se utilizará y la intensidad de cada uno para generar la mejor distribución posible de la dosis. (La fuerza de la dosis en cualquier punto del cuerpo se mide en unidades llamadas *kilorads*.) Una vez diseñado el tratamiento, se administra en muchas sesiones durante varias semanas.

En el caso de Mary, el tamaño y la localización del tumor hacen que el diseño de su tratamiento sea un proceso más delicado que lo usual. La figura 3.11 muestra un diagrama de un corte transversal del tumor visto desde arriba, al igual que los tejidos cercanos críticos que deben evitarse. Estos tejidos incluyen órganos vitales —por ejemplo, el recto— y estructura ósea —el fémur y la pelvis— que atenuarán la radiación. Además, se muestra el punto de entrada y la dirección de los únicos dos rayos que se pueden usar en este caso con un grado relativamente moderado de seguridad. (El ejemplo se ha simplificado en este punto, pero en la realidad se consideran docenas de rayos posibles.)

FIGURA 3.11
Corte transversal del tumor de Mary (visto desde arriba), cerca de tejidos críticos y de los rayos de radiación usados.



1. Vejiga y tumor
2. Recto, cóccix, etc.
3. Fémur, parte de la pelvis, etc.

En el caso de cualquier rayo propuesto de una cierta intensidad, el análisis para determinar cuál sería la absorción de radiación resultante por distintas partes del cuerpo requiere desarrollar un difícil proceso. En resumen, con base en un análisis anatómico cuidadoso, la distribución de energía dentro de un corte transversal de dos dimensiones se puede graficar en un mapa de isodosis en el que las curvas representan la fuerza de la dosis como un porcentaje de la fuerza de ésta en el punto de entrada. Después, se coloca una red fina sobre dicho mapa. Si se suma la radiación absorbida en los cuadros que contienen cada tipo de tejido, se puede calcular la dosis promedio que absorbe el tumor, los tejidos sanos y los tejidos críticos. La absorción de la radiación es aditiva cuando se administra más de un rayo (en forma secuencial).

Después de un análisis exhaustivo, el equipo médico estimó con detalle los datos necesarios para el diseño del tratamiento de Mary, cuyo resumen se presenta en la tabla 3.7. La primera columna presenta una lista de las áreas del cuerpo que deben considerarse y las dos siguientes pro-

Recuadro de aplicación

El *cáncer de próstata* es la forma más común de cáncer diagnosticada en hombres. Se estima que en 2007 hubo 220 000 nuevos casos sólo en Estados Unidos. Como muchas otras formas de esta enfermedad, la *terapia de radiación* es un método común de tratamiento para el cáncer de próstata, cuya meta es tener una dosis de radiación suficientemente alta en la región del tumor para matar las células malignas al mismo tiempo que se minimiza la exposición a la radiación de estructuras sanas críticas cercanas al tumor. Este tratamiento puede aplicarse a través de una terapia de radiación de *rayo externo* (como se ilustra en el primer ejemplo en esta sección) o *radioterapia*, la cual implica colocar alrededor de 100 "semillas" radiactivas dentro de la región del tumor. El reto consiste en determinar el patrón geométrico tridimensional más eficaz para colocarlas.

El **Memorial Sloan-Kettering Cancer Center (MSKCC)** en Nueva York es el centro para el tratamiento del cáncer más antiguo del mundo. Un equipo de IO del *Centro para la Investigación de Operaciones en Medicina y Cuidado de la Salud* del Georgia Institute of Technology trabajó con médicos del MSKCC para desarrollar un *método vanguardista* altamente complejo para optimizar la aplicación de radioterapia al cáncer de próstata. El modelo subyacente se ajusta a la estructura para programación lineal con una excepción. Además de tener las variables continuas comunes que se ajustan a la programación lineal, el modelo también incluye algunas *variables binarias* (variables cuyos únicos valores posibles son 0 y 1). (Este tipo de extensión de la programación lineal a la cual se le llama *programación entera mixta* se explicará en el capítulo 11.) La optimización se hace en cuestión de minutos mediante un sistema de planeación computarizado que puede ser operado con facilidad por el personal médico cuando comienza el procedimiento de insertar las semillas en la próstata del paciente.

Este procedimiento para optimizar la aplicación de la radioterapia para el cáncer de próstata ha teniendo un efecto profundo tanto en los costos del cuidado de la salud como en la calidad de vida de los pacientes que reciben el tratamiento debido a su alta eficacia y a la reducción sustancial de los efectos colaterales. Se estima que cuando todas las clínicas de Estados Unidos adopten este procedimiento, los ahorros en costos anuales serán de alrededor de **500 millones de dólares**, debido a la eliminación de la necesidad de una reunión para planear el tratamiento y una exploración posterior a la operación, así como porque proporciona un procedimiento quirúrgico más eficiente y reduce la necesidad de tratar efectos colaterales subsecuentes. También se anticipa que este enfoque puede extenderse a otras formas de radioterapia, como el tratamiento del cáncer de seno, cérvix, esófago, tracto biliar, páncreas, cabeza y cuello, y ojo.

Esta aplicación de la programación lineal y sus extensiones llevaron al equipo de IO a ganar en 2007 el primer lugar en la competencia internacional por el Premio Franz Edelman al desempeño en investigación de operaciones y ciencias de la administración.

Fuente: E. K. Lee y M. Zaider, "Operations Research Advances Cancer Therapeutics", en *Interfaces*, **38**(1): 5-25, enero-febrero, 2008. (En nuestro sitio web, www.mhhe.com/hillier, se proporciona un vínculo con este artículo.)

porcionan la fracción de la dosis de radiación de cada rayo en el punto de entrada que se absorbe en promedio en las áreas respectivas. Por ejemplo, si el nivel de la dosis en el punto de entrada del rayo 1 es 1 kilorad, se absorberán 0.4 kilorad en toda la anatomía sana en el plano de dos dimensiones, un promedio de 0.3 kilorad en los tejidos críticos cercanos, un promedio de 0.5 kilorad en las distintas partes del tumor *y* 0.6 kilorad en el centro del tumor. La última columna presenta las restricciones sobre la dosis total de ambos rayos que se absorbe en promedio en las diferentes partes del cuerpo. En particular, la absorción promedio de la dosis por la anatomía sana debe ser *tan pequeña como sea posible*, los tejidos críticos no deben exceder 2.7 kilorads, el promedio sobre todo el tumor debe ser *igual* a 6 kilorads y en el centro del tumor debe ser *por lo menos* de 6 kilorads.

TABLA 3.7 Datos para el diseño del tratamiento de radiación de Mary

Área	Fracción de la dosis de entrada absorbida por área (promedio)		Restricción sobre la dosis promedio total, kilorads
	Rayo 1	Rayo 2	
Anatomía sana	0.4	0.5	Minimizar
Tejido crítico	0.3	0.1	≤ 2.7
Región del tumor	0.5	0.5	= 6
Centro del tumor	0.6	0.4	≥ 6

Formulación como un problema de programación lineal. Las decisiones que deben hacerse son las dosis de radiación en los dos puntos de entrada. Por lo tanto, las dos variables de decisión x_1 y x_2 representan la dosis (en kilorads) en el punto de entrada de los rayos 1 y 2, respectivamente. Como debe minimizarse la dosis total que llega a la anatomía sana, se definirá como Z a esta cantidad. En este punto se pueden usar los datos de la tabla 3.7 para formular el siguiente modelo de programación lineal.[4]

$$\text{Minimizar} \quad Z = 0.4x_1 + 0.5x_2,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 0.3x_1 + 0.1x_2 &\leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 &= 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Observe las diferencias entre este modelo y el que se presentó en la sección 3.1 para la Wyndor Glass Co. Este último involucraba *maximizar Z*, y todas las restricciones funcionales tenían la forma $\leq$. El nuevo modelo incorpora otras tres formas *legítimas* descritas en la sección 3.2; a saber: *minimizar Z*, restricciones funcionales de la forma $=$, y restricciones funcionales de la forma $\geq$.

Sin embargo, ambos modelos tienen sólo dos variables, de manera que este nuevo problema también se puede resolver por el *método gráfico* que se ilustró en la sección 3.1. La figura 3.12 muestra la solución gráfica. La *región factible* consiste nada más en el segmento entre los puntos (6, 6) y (7.5, 4.5), ya que los puntos en este segmento son los únicos que satisfacen todas las restricciones al mismo tiempo. (Observe que la restricción de igualdad limita la región factible a la recta que contiene este segmento y las otras restricciones funcionales determinan los puntos extremos del segmento.) La línea punteada representa la función objetivo que pasa por la solución óptima $(x_1, x_2) = (7.5, 4.5)$ con $Z = 5.25$. Esta solución es óptima y no (6, 6) porque *disminuir Z* (para valores positivos de Z) empuja la función objetivo hacia el origen (donde $Z = 0$). Y $Z = 5.25$ para (7.5, 4.5) es menor que $Z = 5.4$ para (6, 6).

En consecuencia, el diseño óptimo implica utilizar una dosis total en el punto de entrada de 7.5 kilorads para el rayo 1 y 4.5 kilorads para el rayo 2.

Planeación regional

La CONFEDERACIÓN SUR DE KIBBUTZIM está formada por tres kibbutzim (comunidades agrícolas comunales) de Israel. La planeación global de este grupo se hace en su oficina de coordinación técnica. En la actualidad planean la producción agrícola para el año próximo.

La producción agrícola está limitada tanto por la extensión de terreno disponible para irrigación como por la cantidad de agua que la Comisión de Aguas (una oficina del gobierno nacional) asigna para irrigarlo. La tabla 3.8 contiene los datos.

Los tipos de cultivos adecuados para la región incluyen remolacha, algodón y sorgo, que son precisamente los tres que están en estudio para la estación venidera. Los cultivos difieren primordialmente en su rendimiento neto esperado por acre y en su consumo de agua. Además, el Ministerio de Agricultura ha establecido una cantidad máxima de acres que la Confederación puede dedicar a estos cultivos. La tabla 3.9 muestra estas cantidades.

[4] Este modelo es *mucho* más pequeño del que normalmente se necesitaría para aplicaciones reales. Para obtener mejores resultados, un modelo realista podría incluso requerir muchas decenas de miles de variables de decisión y restricciones. Por ejemplo, vea H. E. Romeijn, R. K. Ahuja, J. F. Dempsey y A. Kumar, "A New Linear Programming Approach to Radiation Therapy Treatment Planning Problems", en *Operations Research*, **54**(2): 201-216, marzo-abril de 2006. Para enfoques alternativos que combinan programación lineal con otras técnicas de IO (como en el primer Recuadro de aplicación de esta sección), también vea G. J. Lim, M. C. Ferris, S. J. Wright, D. M. Shepard y M. A. Earl, "An Optimization Framework for Conformal Radiation Treatment Planning", en *INFORMS Journal on Computing*, **19**(3): 366-380, verano del 2007.

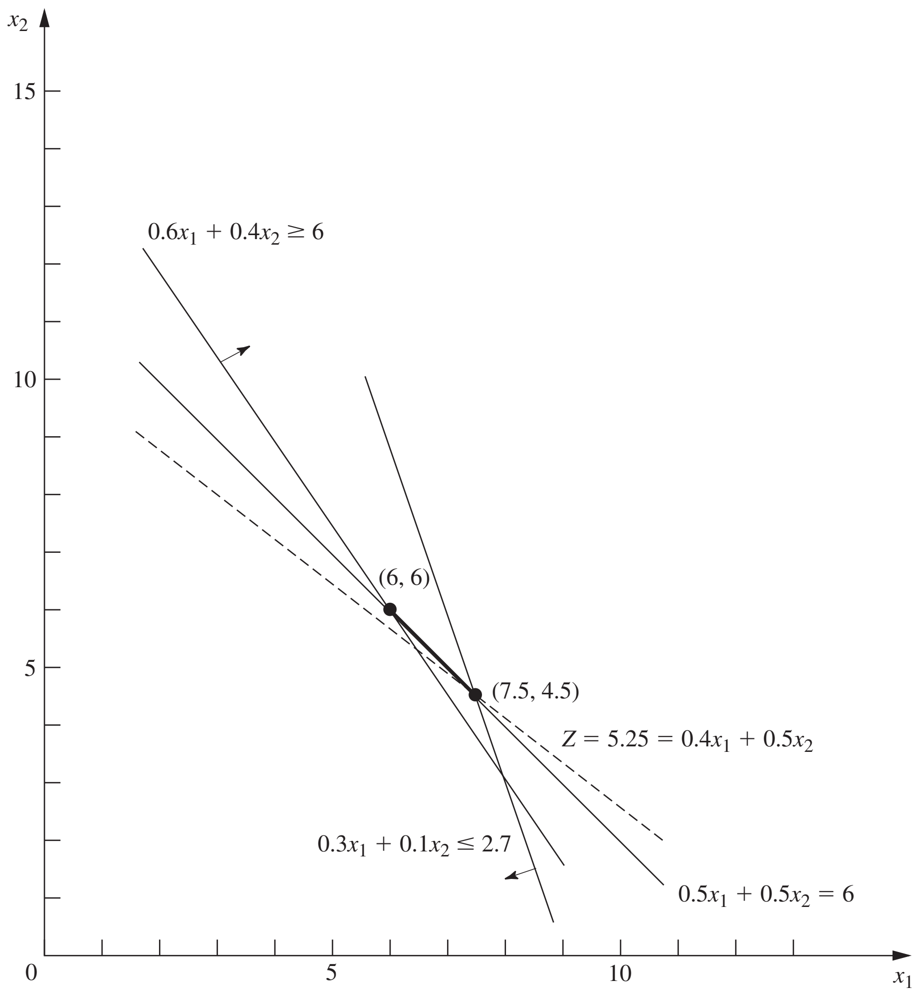


FIGURA 3.12
Solución gráfica del diseño de la terapia de radiación de Mary.

Debido a la disponibilidad limitada de agua para irrigación, la Confederación no podrá usar todo el terreno irrigable para los cultivos de la próxima temporada. Para asegurar la equidad entre los tres kibbutzim, han acordado que cada uno sembrará la misma proporción de sus tierras irrigables disponibles. Por ejemplo, si el kibbutz 1 siembra 200 de sus 400 acres disponibles, entonces el kibbutz 2 deberá sembrar 300 de sus 600 acres, mientras que el kibbutz 3 sembraría 150 acres de los 300 que tiene. Cualquier combinación de estos cultivos se puede sembrar en cualquiera de las granjas. El trabajo al que se enfrenta la oficina de coordinación técnica consiste en planear cuántos acres deben asignarse a cada tipo de cultivo en cada kibbutz, de forma que cumpla con las restricciones dadas. El objetivo es maximizar el rendimiento neto total de la Confederación Sur de Kibbutzim.

Formulación como un problema de programación lineal. Las cantidades sobre las que se tomará la decisión son el número de acres que se dedicará a cada cultivo en cada kibbutz.

TABLA 3.8 Datos de recursos de la Confederación Sur de Kibbutzim

Kibbutz	Terreno disponible (acres)	Asignación de agua (pies-acre)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

TABLA 3.9 Datos de cultivos de la Confederación Sur de Kibbutzim

Cultivo	Cantidad máxima (acres)	Consumo de agua (acre-pie/acre)	Rendimiento neto ($/acre)
Remolacha	600	3	1 000
Algodón	500	2	750
Sorgo	325	1	250

Las variables de decisión x_j ($j = 1, 2, \ldots, 9$) representan estas nueve cantidades, como se muestra en la tabla 3.10.

Como la medida de eficacia Z es el rendimiento neto total, el modelo de programación lineal que resulta para este problema es

$$\text{Maximizar} \quad Z = 1\,000(x_1 + x_2 + x_3) + 750(x_4 + x_5 + x_6) + 250(x_7 + x_8 + x_9),$$

sujeta a las siguientes restricciones:

1. Terreno para uso en cada kibbutz:

$$x_1 + x_4 + x_7 \leq 400$$
$$x_2 + x_5 + x_8 \leq 600$$
$$x_3 + x_6 + x_9 \leq 300$$

2. Asignación de agua para cada kibbutz:

$$3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600$$
$$3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800$$
$$3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375$$

3. Total de acres para cada cultivo:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 600$$
$$x_4 + x_5 + x_6 \leq 500$$
$$x_7 + x_8 + x_9 \leq 325$$

4. Igual proporción de área plantada:

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_8}{600}$$
$$\frac{x_2 + x_5 + x_8}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$
$$\frac{x_3 + x_6 + x_9}{300} = \frac{x_1 + x_4 + x_7}{400}$$

TABLA 3.10 Variables de decisión del problema de la Confederación Sur de Kibbutzim

	Asignación (acres)		
	Kibbutz		
Cultivo	**1**	**2**	**3**
Remolacha	x_1	x_2	x_3
Algodón	x_4	x_5	x_6
Sorgo	x_7	x_8	x_9

TABLA 3.11 Solución óptima del problema de la Confederación Sur de Kibbutzim

	Mejor asignación (acres)		
	Kibbutz		
Cultivo	**1**	**2**	**3**
Remolacha	$133\frac{1}{3}$	100	25
Algodón	100	250	150
Sorgo	0	0	0

5. No negatividad:

$$x_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 9.$$

Esto completa el modelo, a excepción de las igualdades que no están en la forma apropiada para un modelo de programación lineal porque algunas variables están en el lado derecho de las ecuaciones. En consecuencia, la forma final[5] es

$$\begin{aligned} 3(x_1 + x_4 + x_7) - 2(x_2 + x_5 + x_8) &= 0 \\ (x_2 + x_5 + x_8) - 2(x_3 + x_6 + x_9) &= 0 \\ 4(x_3 + x_6 + x_9) - 3(x_1 + x_4 + x_7) &= 0 \end{aligned}$$

La oficina de coordinación técnica formuló este modelo y después aplicó el método símplex (que se desarrolla en el capítulo 4) para encontrar una solución óptima

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = \left(133\frac{1}{3}, 100, 25, 100, 250, 150, 0, 0, 0\right),$$

como se muestra en la tabla 3.11. El valor óptimo de la función objetivo que obtuvieron es $Z = 633, 333\frac{1}{3}$, es decir, un rendimiento neto total de \$633 333.33.

Control de la contaminación del aire

La NORI & LEETS CO., una de las mayores productoras de acero del mundo occidental, está localizada en la ciudad de Steeltown y es la única empresa grande de la localidad. La comunidad ha crecido y prosperado junto con la compañía, que de momento emplea cerca de 50 000 residentes. La actitud de los habitantes ha sido siempre "lo que es bueno para Nori & Leets es bueno para nosotros". Sin embargo, esta actitud está cambiando; la contaminación no controlada del aire debida a los altos hornos de la planta está en camino de arruinar la apariencia de la ciudad y de poner en peligro la salud de sus habitantes.

Como resultado, después de una revuelta entre los accionistas se eligió un nuevo consejo directivo más responsable. Los nuevos directores han decidido seguir políticas de responsabilidad social y realizar pláticas con las autoridades de la ciudad y con grupos de ciudadanos para tomar medidas respecto de la contaminación ambiental. Juntos han establecido estándares rigurosos de calidad del aire para la ciudad de Steeltown.

Los tres tipos principales de contaminantes son partículas de materia, óxidos de azufre e hidrocarburos. Los nuevos estándares requieren que la compañía reduzca su emisión anual de estos contaminantes en las cantidades que se presentan en la tabla 3.12. El consejo directivo ha dado

[5] En realidad, cualquiera de estas ecuaciones es redundante y se puede eliminar si así se desea. Debido a la forma de las ecuaciones, cualesquiera dos de las restricciones referentes al terreno útil también se pueden eliminar porque se satisfacen de manera automática cuando se satisfacen las restricciones restantes del terreno útil y estas ecuaciones. Sin embargo, la inclusión de restricciones no necesarias no produce problemas (excepto un esfuerzo computacional un poco mayor), por lo que no es necesario preocuparse por identificarlas y eliminarlas del modelo formulado.

■ **TABLA 3.12 Estándares de aire limpio de Nori & Leets Co.**

Contaminante	Reducción requerida de la tasa de emisión anual (millones de libras)
Partículas	60
Óxidos de azufre	150
Hidrocarbonos	125

instrucciones a la administración para que el personal de ingeniería determine cómo lograr estas reducciones en la forma más económica.

La fabricación de acero tiene dos fuentes principales de contaminación: los altos hornos para fabricar el arrabio (lingotes de hierro) y los hornos Siemens-Martin para transformar el hierro en acero. En ambos casos, los ingenieros determinaron que los métodos de abatimiento más eficaces son: 1) aumentar la altura de las chimeneas,[6] 2) usar filtros (con trampas de gas) en ellas y 3) incluir limpiadores de alto grado en los combustibles de los hornos. Todos estos métodos tienen limitaciones tecnológicas en cuanto al nivel en que pueden usarse; por ejemplo, un incremento factible máximo de la altura de las chimeneas, pero también existe una gran flexibilidad para usar el método en cualquier nivel fraccionario de su límite tecnológico.

La tabla 3.13 muestra la cantidad de emisión (en millones de libras anuales) que se puede eliminar de cada tipo de horno mediante el empleo del método de abatimiento al máximo límite tecnológico. Para fines de análisis se supone que cada método se puede usar a un nivel menor para lograr cualquier fracción de reducción de las tasas de emisión que se presentan en esta tabla. Más aún, las fracciones pueden ser diferentes para los altos hornos y los hornos Siemens-Martin, y el uso simultáneo de otro método no afecta de manera significativa la reducción de emisiones que alcanza cada uno de ellos.

Después de obtener estos datos, quedó claro que ningún método por sí solo podía lograr las reducciones requeridas. Por otro lado, la combinación de los tres métodos a toda su capacidad —lo que sería demasiado caro si se quiere que los productos tengan precios competitivos— genera un resultado mucho más elevado de lo que se pide. Por todo esto, la conclusión de los ingenieros fue que debían usar alguna combinación de métodos, tal vez con capacidades fraccionarias, basada en sus costos relativos. Aún más, debido a las diferencias entre los altos hornos y los hornos Siemens-Martin, es probable que la combinación sea diferente para cada tipo de horno.

Se llevó a cabo un análisis para estimar el costo total anual de cada método de abatimiento. El costo anual de un método incluye el aumento de los gastos de operación y mantenimiento al igual que la reducción de los ingresos debida a cualquier pérdida de eficiencia en el proceso de producción que pueda generar el uso del método. El otro costo importante es el *costo fijo inicial* (el capital

■ **TABLA 3.13 Reducción de la tasa de emisión (en millones de libras por año) con el uso máximo factible del método de abatimiento de Nori & Leets Co.**

	Chimeneas más altas		Filtros		Mejores combustibles	
Contaminante	Altos hornos	Hornos Siemens-Martin	Altos hornos	Hornos Siemens-Martin	Altos hornos	Hornos Siemens-Martin
Partículas	12	9	25	20	17	13
Óxidos de azufre	35	42	18	31	56	49
Hidrocarbonos	37	53	28	24	29	20

[6] Un tiempo después de realizado el estudio, este método específico de reducción de contaminación se convirtió en materia de controversia. Como su efecto es reducir la contaminación a nivel del suelo esparciendo las emisiones a una distancia mayor, los grupos ecologistas sostienen que este procedimiento crea más lluvia ácida pues mantiene los óxidos de azufre más tiempo en el aire. En consecuencia, la U.S. Environmental Protection Agency adoptó nuevas reglas en 1985 para eliminar los incentivos sobre el uso de chimeneas más altas.

TABLA 3.14 Costo total anual por el uso máximo factible del método de abatimiento de Nori & Leets Co. (millones de dólares)

Método de abatimiento	Altos hornos	Hornos de corazón abierto
Chimeneas más altas	8	10
Filtros	7	6
Mejores combustibles	11	9

inicial) que se requiere para instalar el método. Para hacer que este costo único fuera conmensurable con los costos anuales, se usó el valor del dinero en el tiempo para calcular el gasto anual (sobre el tiempo esperado de vida del método) que sería equivalente a este costo fijo inicial.

El análisis permitió estimar los costos anuales totales (en millones de dólares), que se presentan en la tabla 3.14, en que se incurre al usar los métodos a toda su capacidad de abatimiento. También se determinó que el costo de un método que se utiliza a un nivel menor es esencialmente proporcional a la capacidad fraccional de la capacidad de abatimiento que se logra, aspecto que se presenta en la tabla 3.13. Entonces, para cualquier fracción que se logre, el costo total anual sería en esencia la fracción de la cantidad correspondiente de la tabla 3.14.

En esta etapa, todo está listo para desarrollar el marco general del plan de la compañía para disminuir la contaminación. Este plan especifica qué tipo de métodos de reducción deberán emplearse y a qué fracciones de su capacidad para: 1) los altos hornos y 2) los hornos Siemens-Martin. Debido a la naturaleza combinatoria del problema de encontrar un plan que satisfaga los requisitos con el menor costo posible, se formó un equipo de investigación de operaciones para resolverlo. El equipo decidió enfocar el problema desde un punto de vista de programación lineal, y formuló el modelo que se resume a continuación.

Formulación como un problema de programación lineal. Este problema tiene seis variables de decisión, x_j, $j = 1, 2, \ldots, 6$, que representan el uso de cada uno de los tres métodos de reducción en cada tipo de horno, expresado como una *fracción de la capacidad de reducción* (de manera que x_j no exceda de 1). En la tabla 3.15 se muestra el orden asignado a estas variables. Tomándose en cuenta que el objetivo es minimizar el costo total sin violar los requerimientos de reducción de la emisión, los datos de las tablas 3.12, 3.13 y 3.14 condujeron al siguiente modelo:

$$\text{Minimizar} \quad Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6,$$

sujeta a las siguientes restricciones:

1. Reducción de emisión:

$$\begin{aligned} 12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 &\geq 60 \\ 35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 &\geq 150 \\ 37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 &\geq 125 \end{aligned}$$

2. Tecnológicas:

$$x_j \leq 1, \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 6$$

TABLA 3.15 Variables de decisión (fracción del uso máximo factible del método de abatimiento) de Nori & Leets Co.

Método de abatimiento	Altos hornos	Hornos de corazón abierto
Chimeneas más altas	x_1	x_2
Filtros	x_3	x_4
Mejores combustibles	x_5	x_6

■ **TABLA 3.16** Datos de productos de la Save-It Co.

Grado	Especificación	Amalgamado, costo ($) por libra	Precio de venta ($) por libra
A	Material 1: no más de 30% del total Material 2: no menos de 40% del total Material 3: no más de 50% del total Material 4: exactamente 20% del total	3.00	8.50
B	Material 1: no más de 50% del total Material 2: no menos de 10% del total Material 4: exactamente 10% del total	2.50	7.00
C	Material 1: no más de 70% del total	2.00	5.50

3. No negatividad:

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, 6.$$

El equipo de IO usó este modelo[7] para encontrar el plan de costo mínimo

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1, 0.623, 0.343, 1, 0.048, 1),$$

con $Z = 32.16$ (costo total anual de 32.16 millones). Después realizó un análisis de sensibilidad para explorar el efecto de hacer los ajustes posibles en los estándares del aire que se presentan en la tabla 3.12, y para verificar el efecto de inexactitudes en los datos de costo dados en la tabla 3.14. (Esta historia continuará en el caso de estudio 6.1 al final del capítulo 6.) Después, se hizo una planeación detallada y la administración la aprobó. Muy poco tiempo después el programa se puso en práctica y los habitantes de Steeltown respiraron aire —más limpio— con alivio.

Reciclado de desechos sólidos

La SAVE-IT COMPANY opera un centro de reciclado que recoge cuatro tipos de material de desecho sólido y los trata para amalgamarlos en un producto que pueda lanzarse al mercado. El tratamiento y el amalgamado son dos procesos diferentes. Se pueden obtener tres grados diferentes de este producto (vea la primera columna de la tabla 3.16), según la mezcla de materiales que se use. Aunque existe alguna flexibilidad para esta mezcla en cada grado, los estándares de calidad especifican una cantidad mínima y una máxima de la proporción de los materiales permitidos en ese grado. (La proporción es el peso del material expresado como un porcentaje del peso total del producto de ese grado.) Para los dos grados más altos se especifica un porcentaje fijo de uno de los materiales. Estas especificaciones se presentan en la tabla 3.16 junto con el costo de amalgamado y el precio de venta de cada grado.

El centro de reciclado recoge los materiales de desecho sólido de ciertas fuentes habituales por lo que casi siempre puede mantener una tasa de producción estable para tratarlos. En la tabla 3.17 se muestran las cantidades disponibles para la recolección y tratamiento semanal, al igual que el costo del proceso de cada tipo de material.

La Save-It Co. es propiedad de Green Earth, una organización dedicada a asuntos ecológicos, por lo que las ganancias se usan para apoyar las actividades de Green Earth. Esta organización ha logrado contribuciones y apoyos por la cantidad de 30 000 dólares semanales, que deben usarse sólo para cubrir el costo del tratamiento completo de los desechos sólidos. El consejo directivo de Green Earth ha girado instrucciones a la administración de Save-It para que divida este dinero entre los materiales, de manera tal que se recolecte y se trate *al menos la mitad* de la cantidad disponible de cada tipo de material. Estas restricciones adicionales se enumeran en la tabla 3.17.

[7] Una formulación equivalente puede expresar cada variable de decisión en unidades naturales para su método de abatimiento; por ejemplo, x_1 y x_2 podrían representar el número de *pies* que aumentan las alturas de las chimeneas.

TABLA 3.17 Datos de los materiales de desechos sólidos de Save-It Co.

Material	Libras por semana disponible	Costo del tratamiento ($) por libra	Restricciones adicionales
1	3 000	3.00	1. De cada material deben recolectarse y tratarse al menos la mitad de las libras disponibles por semana.
2	2 000	6.00	2. Deben usarse $30 000 semanales para tratar estos materiales.
3	4 000	4.00	
4	1 000	5.00	

Con las restricciones especificadas en las tablas 3.16 y 3.17, la administración desea determinar la *cantidad* que debe producir de cada grado *y* la *mezcla* exacta de materiales que usará para cada uno, de manera que se maximice la ganancia semanal neta —ingresos totales por ventas *menos* costo total del amalgamado—, independiente del costo del tratamiento fijo de 30 000 dólares por semana que será cubierto por donaciones.

Formulación como un problema de programación lineal. Antes de intentar construir un modelo de programación lineal debe tenerse mucho cuidado en la definición apropiada de las variables de decisión. Si bien muchas veces esta definición es obvia, otras es la parte medular de la formulación. Después de identificar con claridad cuál es la información que sirve y la forma más conveniente de manejarla mediante las variables de decisión, se pueden establecer la función objetivo y las restricciones sobre los valores de estas variables de decisión.

En este problema específico, las decisiones que deben tomarse están bien definidas, pero vale la pena pensar un poco en la manera de manejar la información a través de ellas. (Se recomienda intentar hacerlo y ver si primero se obtiene el siguiente conjunto *inapropiado* de variables de decisión.)

Como un conjunto de decisiones se refiere a la *cantidad* de cada grado de producto que se debe fabricar, parecería natural definir un conjunto de variables de decisión acorde. Siguiendo tentativamente esta línea de pensamiento se define

y_i = número de libras del producto de grado i producidas por semana $(i = A, B, C)$.

El otro conjunto de decisiones es la *mezcla* de materiales de cada grado de producto. Esta mezcla se identifica por la proporción de cada material en el producto, lo que sugiere definir el otro conjunto de variables de decisión como

z_{ij} = proporción del material j en el producto de grado i $(i= A, B, C; j = 1, 2, 3, 4)$.

Sin embargo, en la tabla 3.17 se proporcionan los costos del tratamiento y la disponibilidad de los materiales por *cantidad* (libras) y no en *proporciones*, y es esta información en *cantidades* la que se necesita registrar en algunas de las restricciones. Para el material j $(j = 1, 2, 3, 4)$,

$$\text{Cantidad en libras de material } j \text{ usado por semana} = z_{Aj}\,y_A + z_{Bj}\,y_B + z_{Cj}\,y_C.$$

Por ejemplo, como la tabla 3.17 indica que se dispone de 3 000 libras del material 1 por semana, una restricción del modelo sería

$$z_{Aj}\,y_A + z_{Bj}\,y_B + z_{Cj}\,y_C \leq 3\,000.$$

Desafortunadamente, ésta no es una restricción legítima de programación lineal. La expresión del lado izquierdo *no es* una función lineal porque incluye la multiplicación de variables. Por lo tanto, no se puede construir un modelo de programación lineal con estas variables de decisión.

Por suerte, existe otra manera de definirlas que se ajusta al formato de programación lineal. (¿Es posible identificar alguna manera de hacerlo?) Este objetivo se logra con sólo sustituir cada *producto* de las variables de decisión anteriores por una sola variable. En otras palabras se define

$$\begin{aligned} x_{ij} &= z_{ij}y_i \qquad (\text{para } i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4) \\ &= \text{número total de libras del material } j \text{ asignadas al producto grado } i \text{ por semana,} \end{aligned}$$

y después se definen x_{ij} como las variables de decisión. Al combinar las x_{ij} en diferentes formas se llega a las siguientes cantidades necesarias en el modelo (para $i = A, B, C; j = 1, 2, 3, 4$).

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = \text{número de libras del producto grado } i \text{ fabricado por semana.}$$

$$x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj} = \text{número de libras de material } j \text{ usado por semana.}$$

$$\frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}} = \text{proporción del material } j \text{ en el producto de grado } i.$$

El hecho de que esta última expresión sea una función *no lineal* no causa complicaciones. Por ejemplo, considere la primera especificación para el producto grado A en la tabla 3.16 (la proporción de material 1 no debe exceder de 30%). Esta limitación conduce a la restricción no lineal

$$\frac{x_{A1}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \leq 0.3.$$

Sin embargo, al multiplicar ambos lados de esta desigualdad por el denominador se llega a la restricción *equivalente*

$$x_{A1} \leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}),$$

de manera que

$$0.7x_{A1} - 0.3x_{A2} - 0.3x_{A3} - 0.3x_{A4} \leq 0,$$

es una restricción legítima de programación lineal.

Con este ajuste a las tres cantidades dadas se determinan directamente todas las restricciones funcionales del modelo. La función objetivo se basa en la meta de la administración de maximizar la ganancia semanal total —ingresos totales por ventas *menos* costo total del amalgamado— que se obtiene por los tres grados de productos. En consecuencia, la ganancia por libra de cada grado de producto se obtiene mediante la resta del costo del amalgamado que se presenta en la tercera columna de la tabla 3.16 del precio de venta que aparece en la cuarta columna. Estas *diferencias* proporcionan los coeficientes de la función objetivo.

Por lo tanto, el modelo completo de programación lineal es

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad Z = 5.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) &+ 4.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) \\ &+ 3.5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}), \end{aligned}$$

sujeta a las siguientes restricciones:

1. Especificaciones de mezcla (segunda columna de la tabla 3.16):

$$\begin{aligned} x_{A1} &\leq 0.3(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && (\text{grado } A, \text{ material } 1) \\ x_{A2} &\geq 0.4(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && (\text{grado } A, \text{ material } 2) \\ x_{A3} &\leq 0.5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && (\text{grado } A, \text{ material } 3) \\ x_{A4} &= 0.2(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) && (\text{grado } A, \text{ material } 4) \\ x_{B1} &\leq 0.5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && (\text{grado } B, \text{ material } 1) \\ x_{B2} &\geq 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && (\text{grado } B, \text{ material } 2) \\ x_{B4} &= 0.1(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) && (\text{grado } B, \text{ material } 4) \\ x_{C1} &\leq 0.7(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4}) && (\text{grado } C, \text{ material } 1). \end{aligned}$$

2. Disponibilidad de materiales (segunda columna de la tabla 3.17):

$$
\begin{aligned}
x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\le 3\,000 \quad \text{(material 1)}\\
x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\le 2\,000 \quad \text{(material 2)}\\
x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\le 4\,000 \quad \text{(material 3)}\\
x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\le 1\,000 \quad \text{(material 4)}.
\end{aligned}
$$

3. Restricciones sobre las cantidades tratadas (lado derecho de la tabla 3.17):

$$
\begin{aligned}
x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} &\ge 1\,500 \quad \text{(material 1)}\\
x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} &\ge 1\,000 \quad \text{(material 2)}\\
x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} &\ge 2\,000 \quad \text{(material 3)}\\
x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} &\ge 500 \quad \text{(material 4)}.
\end{aligned}
$$

4. Restricción sobre el costo del tratamiento (lado derecho de la tabla 3.17):

$$
\begin{aligned}
3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3})&\\
+ 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30\,000.&
\end{aligned}
$$

5. Restricciones de no negatividad:

$$x_{A1} \ge 0, \quad x_{A2} \ge 0, \quad \ldots, \quad x_{C4} \ge 0.$$

Esta formulación completa el modelo, excepto que las restricciones de las especificaciones de la mezcla necesitan reescribirse en la forma adecuada para un modelo de programación lineal con todas las variables en el lado izquierdo y combinar los términos:
Especificaciones de mezcla:

$$
\begin{aligned}
0.7x_{A1} - 0.3x_{A2} - 0.3x_{A3} - 0.3x_{A4} &\le 0 \quad (\text{grado } A, \text{ material } 1)\\
-0.4x_{A1} + 0.6x_{A2} - 0.4x_{A3} - 0.4x_{A4} &\ge 0 \quad (\text{grado } A, \text{ material } 2)\\
-0.5x_{A1} - 0.5x_{A2} + 0.5x_{A3} - 0.5x_{A4} &\le 0 \quad (\text{grado } A, \text{ material } 3)\\
-0.2x_{A1} - 0.2x_{A2} - 0.2x_{A3} + 0.8x_{A4} &= 0 \quad (\text{grado } A, \text{ material } 4)\\
0.5x_{B1} - 0.5x_{B2} - 0.5x_{B3} - 0.5x_{B4} &\le 0 \quad (\text{grado } B, \text{ material } 1)\\
-0.1x_{B1} + 0.9x_{B2} - 0.1x_{B3} - 0.1x_{B4} &\ge 0 \quad (\text{grado } B, \text{ material } 2)\\
-0.1x_{B1} - 0.1x_{B2} - 0.1x_{B3} + 0.9x_{B4} &= 0 \quad (\text{grado } B, \text{ material } 4)\\
0.3x_{C1} - 0.7x_{C2} - 0.7x_{C3} - 0.7x_{C4} &\le 0 \quad (\text{grado } C, \text{ material } 1).
\end{aligned}
$$

La tabla 3.18 muestra una solución óptima para este modelo, y después estos valores de x_{ij} se usan para calcular otras cantidades de interés dadas en la misma tabla. El valor óptimo de la función objetivo que se obtiene es $Z = 35\ 109.65$ (o sea, una ganancia semanal total de $35 109.65).

TABLA 3.18 Solución óptima del problema de Save-It Co.

	Libras usadas por semana				
	Material				
Grado	**1**	**2**	**3**	**4**	**Número de libras producidas por semana**
A	412.3 (19.2%)	859.6 (40%)	447.4 (20.8%)	429.8 (20%)	2 149
B	2 587.7 (50%)	517.5 (10%)	1 552.6 (30%)	517.5 (10%)	5 175
C	0	0	0	0	0
Total	3 000	1 377	2 000	947	

Recuadro de aplicación

El control de costos es esencial para la supervivencia en la industria aérea. Por lo tanto, la alta administración de **United Airlines** inició un estudio de investigación de operaciones para mejorar la utilización de personal en las oficinas de reservaciones de la aerolínea y en los aeropuertos al ajustar de manera más cercana los programas de trabajo con las necesidades del cliente. El número de empleados necesario en cada ubicación para proporcionar el nivel de servicio que se requiere varía en gran medida durante las 24 horas del día y puede fluctuar de manera considerable cada media hora.

El diseño de programas de trabajo para todos los empleados en una ubicación dada para satisfacer estas necesidades de servicio de manera más eficiente es una pesadilla de consideraciones combinatorias. Una vez que el empleado llega, estará ahí de manera continua durante todo el turno (entre dos y 10 horas, dependiendo del empleado), *con excepción* de la hora de la comida y los descansos cada dos horas. Dado el número *mínimo* de empleados que trabajan que se requieren para *cada* intervalo de media hora en un día de 24 horas (este mínimo cambia día con día en una semana de siete días), ¿*cuántos* empleados de *cada longitud de turno* deben comenzar a trabajar en *qué momento de inicio cada día* de 24 horas en una semana de siete días? Por fortuna, la programación lineal trata con estas pesadillas combinatorias. El modelo de programación lineal para algunas de las ubicaciones programadas implicaron ¡más de 20 000 decisiones!

Esta aplicación de la programación lineal recibió el crédito por *ahorrarle a United Airlines más de* **6 millones de dólares** *anuales* sólo por salarios directos y costos de prestaciones. Entre otros beneficios obtenidos están la mejora del servicio al cliente y la reducción de las cargas de trabajo para el equipo de apoyo.

Fuente: T. J. Holloran y J. E. Bryne, "United Airlines Station Manpower Planning System", en *Interfaces*, **16**(1): 39-50, enero-febrero, 1986. (En nuestro sitio web www.mhhe.com/hillier se proporciona un vínculo con este artículo.)

El problema de la Save-It Co. es ejemplo de un **problema de mezclas**. El objetivo de un problema de este tipo es encontrar la mejor mezcla de ingredientes de los productos finales para cumplir con ciertas especificaciones. Algunas de las primeras aplicaciones de programación lineal se hicieron para la *mezcla de gasolina*, en donde los ingredientes del petróleo se mezclaban para obtener varios grados de gasolina. El reconocido estudio de IO en Texaco que se presenta al final de la sección 2.5 trata sobre mezcla de gasolina. Otros problemas de mezclas incluyen productos finales como acero, fertilizantes y alimento para animales.

Programación de personal

UNION AIRWAYS va a agregar vuelos desde y hacia su aeropuerto base, por lo cual necesita contratar más agentes de servicio a clientes. Sin embargo, no está claro cuántos más debe contratar. La administración reconoce la necesidad de controlar el costo y al mismo tiempo proporcionar de manera permanente un nivel satisfactorio de servicio. Por todo esto, un equipo de IO estudia la forma de programar a los agentes para proporcionar un servicio satisfactorio con el menor costo en personal.

Con base en la nueva programación de vuelos, se ha realizado un análisis del número *mínimo* de agentes de servicio a clientes que deben encontrarse de guardia en diferentes momentos del día para proporcionar un nivel satisfactorio de servicio. La columna de la derecha de la tabla 3.19 muestra el número de agentes necesario para los periodos dados en la primera columna. Los otros datos de la tabla reflejan uno de los acuerdos del contrato colectivo vigente entre la compañía y el sindicato que representa a los agentes de servicio a clientes. El acuerdo es que cada agente trabaje un turno de 8 horas 5 días a la semana, y los turnos autorizados son

Turno 1: 6:00 a.m. a 2:00 p.m.
Turno 2: 8:00 a.m. a 4:00 p.m.
Turno 3: 12:00 a.m. (mediodía) a 8:00 p.m.
Turno 4: 4:00 p.m. a 12 p.m. (medianoche)
Turno 5: 10:00 p.m. a 6:00 a.m.

Las marcas en el cuerpo principal de la tabla 3.19 muestran las horas cubiertas por los turnos respectivos. Como algunos turnos son menos deseables que otros, los salarios que se especifican en el contrato difieren de uno a otro. En el último renglón se muestra la compensación diaria —con las prestaciones— por cada agente para cada turno. El problema consiste en determinar cuántos agentes deben asignarse a los turnos respectivos cada día para minimizar el costo *total* de personal debido a los agentes, de acuerdo con este último renglón, al mismo tiempo que se cumplen (o se sobrepasan) las necesidades de servicio dados en la columna de la extrema derecha.

TABLA 3.19 Datos del problema de programación de personal en Union Airways

	Periodos cubiertos					
	Turno					
Periodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Número mínimo necesario de agentes**
6:00 a.m. a 8:00 a.m.	✔					48
8:00 a.m. a 10:00 a.m.	✔	✔				79
10:00 a.m. a 12 a.m.	✔	✔				65
12 a.m. a 2:00 p.m.	✔	✔	✔			87
2:00 p.m. a 4:00 p.m. .		✔	✔			64
4:00 p.m. a 6:00 p.m.			✔	✔		73
6:00 p.m. a 8:00 p.m.			✔	✔		82
8:00 p.m. a 10:00 p.m..				✔		43
10:00 p.m. a 12:00 p.m.				✔	✔	52
12:00 p.m. a 6:00 a.m.					✔	15
Costo diario por agente	$170	$160	$175	$180	$195	

Formulación como un problema de programación lineal. Los problemas de programación lineal siempre implican encontrar la mejor *mezcla de los niveles de actividad*. La clave para formular este problema en particular es reconocer la naturaleza de las actividades.

Las *actividades* corresponden a los turnos, donde el nivel de cada actividad es el número de agentes asignados a ese turno. Por lo tanto, este problema trata de encontrar la mejor *mezcla de tamaños de turnos*. Como las variables de decisión siempre son los niveles de actividades, las cinco variables de decisión en este caso son

x_j = número de agentes asignados al turno j, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

La restricción principal sobre los valores de estas variables de decisión es que el número de agentes que trabaja en cada periodo debe satisfacer el requerimiento mínimo que se presenta en la columna de la derecha de la tabla 3.19. Por ejemplo, de las 2:00 p.m. a las 4:00 p.m., el número total de agentes asignados a los turnos que cubren este periodo (turnos 2 y 3) debe ser al menos 64, de manera que

$$x_2 + x_3 \geq 64$$

es la restricción funcional para este periodo.

Como el objetivo es minimizar el costo total de los agentes asignados a los cinco turnos, los coeficientes de la función objetivo se presentan en el último renglón de la tabla 3.19.

Por lo tanto, el modelo completo de programación lineal es

$$\text{Minimizar} \quad Z = 170x_1 + 160x_2 + 175x_3 + 180x_4 + 195x_5,$$

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_1 & & & & & \geq 48 && \text{(6-8 a.m.)}\\
x_1 &+ x_2 & & & & \geq 79 && \text{(8-10 a.m.)}\\
x_1 &+ x_2 & & & & \geq 65 && \text{(10-12 a.m.)}\\
x_1 &+ x_2 &+ x_3 & & & \geq 87 && \text{(12 a.m.-2 p.m.)}\\
 & x_2 &+ x_3 & & & \geq 64 && \text{(2-4 p.m.)}\\
 & & x_3 &+ x_4 & & \geq 73 && \text{(4-6 p.m.)}\\
 & & x_3 &+ x_4 & & \geq 82 && \text{(6-8 p.m.)}\\
 & & & x_4 & & \geq 43 && \text{(8-10 p.m.)}\\
 & & & x_4 &+ x_5 & \geq 52 && \text{(10-12 p.m.)}\\
 & & & & x_5 & \geq 15 && \text{(12 p.m.-6 a.m.)}
\end{aligned}$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Si se observa con cuidado se ve que la tercera restricción, $x_1 + x_2 \geq 65$, en realidad no es necesaria porque la segunda, $x_1 + x_2 \geq 79$, asegura que $x_1 + x_2$ será mayor que 65. Así, $x_1 + x_2 \geq 65$ es una restricción *redundante* que se puede eliminar. De manera similar, la sexta restricción $x_3 + x_4 \geq 73$, también es *redundante* porque la séptima es $x_3 + x_4 \geq 82$. (En realidad, tres de las restricciones de no negatividad, $x_1 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, también son restricciones redundantes debido a la primera, la octava y la décima: $x_1 \geq 48$, $x_4 \geq 43$ y $x_5 \geq 15$. Sin embargo, no se facilitan los cálculos si se eliminan estas restricciones de no negatividad.)

La solución óptima para este modelo es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (48, 31, 39, 43, 15)$. Esto conduce a $Z = 30\,610$, es decir, un costo total diario de personal de $30 610.

Este problema es un ejemplo donde en realidad no se satisface el supuesto de divisibilidad de un modelo de programación lineal. El número de agentes asignados a cada turno necesita ser entero. Si se habla de manera estricta, el modelo debe tener una restricción adicional para cada una de las variables de decisión que especifique que sus valores deben ser enteros. Al agregar estas restricciones, el modelo de programación lineal se convierte en un modelo de programación entera (tema del capítulo 11).

Aun sin estas restricciones, resulta que la solución óptima dada tiene valores enteros, por lo cual su no inclusión no generó problemas. (La forma de las restricciones funcionales permitió que este resultado fuera probable.) Si alguna de las variables hubiera sido no entera, el enfoque más sencillo habría sido *redondearla* a un valor entero. (El redondeo es factible en este ejemplo porque todas las restricciones funcionales son de la forma $\geq$ con coeficientes no negativos.) Cuando se redondea no necesariamente se obtiene una solución óptima para el modelo de programación lineal entera, pero el error que se introduce con algunos números grandes es despreciable en la mayoría de las situaciones prácticas. De manera alternativa, se pueden usar las técnicas de programación entera descritas en el capítulo 11 para obtener una solución óptima exacta con valores enteros.

El segundo Recuadro de aplicación en esta sección describe la manera como United Airlines aplicó programación lineal para desarrollar un sistema de programación de personal de tamaño mucho mayor que el ejemplo.

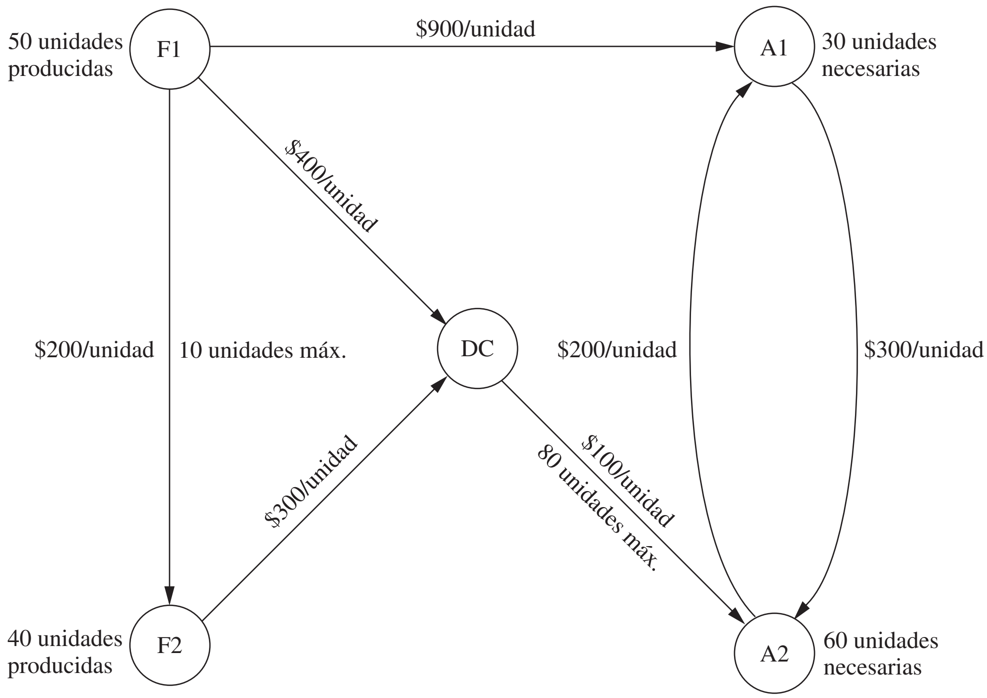
Distribución de bienes a través de una red

El problema. La DISTRIBUTION UNLIMITED CO. fabricará el mismo nuevo producto en dos plantas distintas y después tendrá que enviarlo a dos almacenes de distribución, donde cualquiera de las dos fábricas puede abastecer a cualquiera de los dos almacenes. La red de distribución disponible para el envío de este producto se muestra en la figura 3.13, donde Fl y F2 son las dos fábricas, Al y A2 son los dos almacenes y CD es el centro de distribución. Las cantidades que deben enviarse desde Fl y F2 se muestran a la izquierda, y las cantidades que deben recibirse en Al y A2 se presentan a la derecha. Cada flecha representa un canal factible de envío. Fl puede enviar directamente a Al y tiene tres rutas posibles (F1 → CD → A2, F1 → F2 → CD → A2 y F1 → A1 → A2) para mandar bienes a A2. La fábrica F2 tiene sólo una ruta a A2 (F2 → CD → A2) y una a A1 (F2 → CD → A2 → A1). El costo por unidad enviada a través de cada canal se muestra al lado de la flecha. También, junto a F1 → F2 y CD → A2 se muestran las cantidades máximas que se pueden enviar por estos canales. Los otros canales tienen suficiente capacidad para manejar todo lo que las fábricas pueden enviar.

La decisión que debe tomarse se refiere a qué cantidades enviar a través de cada canal de distribución. El objetivo es minimizar el costo total de envío.

Formulación como un problema de programación lineal. Con siete canales de envío se necesitan siete variables de decisión ($x_{\text{F1-F2}}, x_{\text{F1-CD}}, x_{\text{F1-A1}}, x_{\text{F2-CD}}, x_{\text{CD-A2}}, x_{\text{A1-A2}}, x_{\text{A2-A1}}$) para representar las cantidades enviadas a través de los canales respectivos.

Existen varias restricciones sobre los valores de estas variables. Además de las restricciones usuales de no negatividad, se tienen dos *restricciones de cota superior*, $x_{\text{F1-F2}} \leq 10$ y $x_{\text{CD-A2}} \leq 80$, impuestas por la capacidad limitada de envío de los dos canales, F1 → F2 y CD → A2. Todas las demás restricciones surgen de las cinco *restricciones de flujo neto*, una para cada localidad. Estas restricciones tienen la siguiente forma.



■ **FIGURA 3.13**
Red de distribución de Distribution Unlimited Co.

Restricción de flujo neto para cada localidad:

Cantidad enviada – cantidad recibida = cantidad requerida.

Como se indica en la figura 3.13, estas cantidades requeridas son 50 para F1, 40 para F2, –30 para A1 y –60 para A2.

¿Cuál es la cantidad requerida para CD? Todas las unidades producidas en las fábricas se necesitan en algún momento en los almacenes, de manera que las unidades enviadas de las fábricas a los centros de distribución deben mandarse a los almacenes. Por lo tanto, la cantidad total enviada de los centros de distribución a los almacenes debe ser *igual* a la cantidad total enviada desde las fábricas al centro de distribución. En otras palabras, la *diferencia* de estas dos cantidades enviadas —la cantidad requerida para la restricción de flujo neto— debe ser *cero*.

Como el objetivo es minimizar el costo total de envío, los coeficientes de la función objetivo son directamente los costos unitarios de envío que se muestran en la figura 3.13. Por lo tanto, si se usan unidades monetarias en cientos de dólares en esta función objetivo, el modelo completo de programación lineal es

$$\text{Minimizar} \quad Z = 2x_{\text{F1-F2}} + 4x_{\text{F1-CD}} + 9x_{\text{F1-A1}} + 3x_{\text{F2-CD}} + x_{\text{CD-A2}} + 3x_{\text{A1-A2}} + 2x_{\text{A2-A1}},$$

sujeta a las siguientes restricciones:

1. Restricciones de flujo neto:

$$\begin{aligned}
x_{\text{F1-F2}} + x_{\text{F1-CD}} + x_{\text{F1-A1}} &= 50 \text{ (fábrica 1)}\\
-x_{\text{F1-F2}} + x_{\text{F2-CD}} &= 40 \text{ (fábrica 2)}\\
- x_{\text{F1-CD}} - x_{\text{F2-CD}} + x_{\text{CD-A2}} &= 0 \text{ (centro de distribución)}\\
- x_{\text{F1-A1}} + x_{\text{A1-A2}} - x_{\text{A2-A1}} &= -30 \text{ (almacén 1)}\\
- x_{\text{CD-A2}} - x_{\text{A1-A2}} + x_{\text{A2-A1}} &= -60 \text{ (almacén 2)}
\end{aligned}$$

2. Restricciones de límite superior

$$x_{\text{F1-F2}} \leq 10, \quad x_{\text{CD-A2}} \leq 80$$

3. Restricciones de no negatividad:

$$x_{\text{F1-F2}} \geq 0, \quad x_{\text{F1-CD}} \geq 0, \quad x_{\text{F1-A1}} \geq 0, \quad x_{\text{F2-CD}} \geq 0, \quad x_{\text{CD-A2}} \geq 0,$$
$$x_{\text{A1-A2}} \geq 0, \quad x_{\text{A2-A1}} \geq 0.$$

Este problema se verá de nuevo en la sección 9.6, que está dedicada a problemas de programación lineal de este tipo, llamados *problemas de flujo de costo mínimo*. En la sección 9.7 se obtendrá su solución óptima:

$$x_{\text{F1-F2}} = 0, \quad x_{\text{F1-CD}} = 40, \quad x_{\text{F1-A1}} = 10, \quad x_{\text{F2-CD}} = 40, \quad x_{\text{CD-A2}} = 80,$$
$$x_{\text{A1-A2}} = 0, \quad x_{\text{A2-A1}} = 20.$$

El costo total de envío resultante es de $49 000.

3.5 FORMULACIÓN Y SOLUCIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL EN UNA HOJA DE CÁLCULO

Los paquetes de hojas de cálculo, como Excel, son una herramienta conocida para analizar y resolver problemas pequeños de programación lineal. Es sencillo introducir en una hoja de cálculo las características principales de un modelo de programación lineal, entre ellas, todos sus parámetros. Sin embargo, este software puede hacer mucho más que sólo desplegar datos. Si se incluye cierta información adicional, la hoja de cálculo se puede usar para analizar con rapidez soluciones potenciales. Por ejemplo, se puede verificar una solución potencial para ver si es factible y qué valor de Z (ganancia o costo) adquiere. Una gran parte del poder de la hoja de cálculo estriba en su capacidad para apreciar de inmediato los resultados de los cambios en la solución.

Además, el Excel Solver puede aplicar el método símplex para encontrar una solución óptima para el modelo.

Para ilustrar este proceso se considerará de nuevo el ejemplo de la Wyndor Glass de la sección 3.1.

Formulación del modelo en una hoja de cálculo

En la figura 3.14 se despliega el problema de Wyndor, sólo que se transfirieron los datos de la tabla 3.1 a una hoja de cálculo. (Las columnas E y F han sido reservadas para introducir otros datos que se describirán más adelante.) En lo sucesivo se hará referencia a las celdas que contienen los datos como **celdas de datos**. Estas celdas están sombreadas para distinguirlas de las otras que integran la hoja de cálculo.[8]

FIGURA 3.14
Hoja de cálculo inicial del problema de la Wyndor después de transferir los datos de la tabla 3.1 a las celdas de datos.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	$3 000	$5 000			
5							Hours
6			Hours Used Per Batch Produced				Available
7		Plant 1	1	0			4
8		Plant 2	0	2			12
9		Plant 3	3	2			18

[8] Los bordes y el sombreado de celdas se pueden modificar mediante los botones de bordes y sombreado que están en la barra de herramientas de Formato o al seleccionar “Celdas” del menú “Formato” para después elegir la opción de “Bordes” o “Tramas”.

Recuadro de aplicación

Welch's, Inc. es el procesador de uvas Concord y Niágara más grande del mundo, con ventas que sobrepasan 550 millones de dólares al año. Tales productos como la mermelada y el jugo de uva Welch han sido disfrutados por generaciones de consumidores estadounidenses.

Cada septiembre, los agricultores comienzan a entregar sus cosechas a las plantas de procesamiento que después exprimen las uvas crudas para obtener jugo. Debe pasar tiempo antes de que el jugo esté listo para convertirlo en jalea, mermelada, jugos y concentrados.

La decisión de cómo usar la cosecha de uva es una tarea compleja dada la demanda cambiante y la calidad y cantidad inciertas de la cosecha. Las decisiones típicas incluyen cuáles embarques deben usarse para elaborar los grupos de productos más importantes, la transferencia de jugo de uva entre las plantas y el modo de transporte para esta transferencia.

Debido a que Welch's no tenía un sistema formal para optimizar el movimiento de materia prima y los embarques usados para la producción, un equipo de IO desarrolló un modelo de programación lineal. Éste fue un modelo grande con 8 000 variables de decisión que se enfocaba en el nivel de detalle de los componentes. Las pruebas a pequeña escala probaron que el modelo funcionaba.

Para que el modelo fuera más útil, el equipo lo modificó agregando la demanda por grupo de productos en vez de por componentes. Esto redujo su tamaño a 324 variables de decisión y 361 restricciones funcionales. *Después el modelo se incorporó a una hoja de cálculo*.

La compañía ha utilizado de manera continua la versión actualizada de este *modelo de hoja de cálculo* cada mes desde 1994 para proporcionar a la alta administración información sobre el plan logístico generado por el Solver. Los *ahorros* por usar y optimizar este modelo *fueron de aproximadamente* **150 000 dólares** *sólo en el primer año*. Una ventaja importante de incorporar el modelo de programación lineal en una hoja de cálculo ha sido la facilidad de explicar el modelo a los administradores con diferentes niveles de comprensión matemática. Esto condujo a una valoración amplia del enfoque de investigación de operaciones tanto por esta aplicación como por otras.

Fuente: E.W. Schuster y S. J. Allen, "Raw Material Management at Welch's, Inc.", en *Interfaces*, **28**(5): 13-24, septiembre-octubre, 1998. (En nuestro sitio web www.mhhe.com/hillier se presenta un vínculo con este artículo.)

Después se puede observar que se ha facilitado su interpretación mediante el empleo de nombres de rango. Un **nombre de rango** es el título descriptivo que se da a un conjunto de celdas que de inmediato identifica lo que éstas contienen. Así, las celdas de datos en el problema de Wyndor han recibido los nombres de rango GananciaUnitaria (C4:D4), HorasUsadasPorLoteProducido (C7:D9), y HorasDisponibles (G7:G9). Observe que no se permiten los espacios en los nombres de rango y que cada nueva palabra comienza con una letra mayúscula. Aunque es opcional, el rango de celdas a las que se les da un nombre de rango puede especificarse entre paréntesis después del nombre. Por ejemplo, el rango C7:D9 es la forma corta en Excel para referirse al *rango desde* C7 *hasta* D9, es decir, todo el bloque de celdas en las columnas C o D y en los renglones 7, 8 o 9. Para introducir un nombre de rango, primero se debe seleccionar el rango de celdas, después se elige Nombre\Definir del menú Insertar y se digita un nombre de rango, o se da clic en el cuadro de nombre a la izquierda de la barra de fórmulas arriba de la hoja de cálculo y se digita un nombre.

Antes de iniciar el proceso de utilización de una hoja de cálculo para formular un modelo de programación lineal para el problema es necesario contestar tres preguntas.

1. ¿Qué *decisiones* deben tomarse? En este problema, las decisiones necesarias son las *tasas de producción* —número de lotes producidos a la semana— de los dos nuevos productos.
2. ¿Cuáles son las *restricciones* de estas decisiones? En este caso, son que el número de horas semanales de producción de los dos productos en las plantas respectivas no puede superar el número de horas disponibles.
3. ¿Cuál es la *medida global de desempeño* de estas decisiones? La medida de desempeño global de Wyndor es la *ganancia total* que se obtiene cada semana por los dos productos, por lo cual el *objetivo* es *maximizar* dicha cantidad.

En la figura 3.15 se muestra la forma como estas respuestas se pueden incorporar a una hoja de cálculo. Con base en la primera respuesta, las *tasas de producción* de los dos productos se colocan en las celdas C12 y D12 para ubicarlas en las columnas de estos productos justo debajo de las celdas de datos. Como aún no se sabe cuáles deben ser las tasas de producción, en este punto se introducen sólo como ceros. (En realidad, se puede introducir cualquier solución de prueba, aunque los valores *negativos* se deben excluir puesto que son imposibles.) Estos números cambiarán a medida que se busca la mejor mezcla de tasas de producción. Por ello, las celdas que contienen las decisiones

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	$3 000	$5 000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	<=	4
8		Plant 2	0	2	0	<=	12
9		Plant 3	3	2	0	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	0	0			$0

FIGURA 3.15
Hoja de cálculo completa del problema de la Wyndor con una solución de prueba inicial (ambas tasas de producción iguales a cero) introducidas en las celdas cambiantes (C12 y D12).

que se deben tomar se llaman **celdas cambiantes** (o *celdas ajustables*). Para resaltar las celdas cambiantes, éstas se muestran sombreadas y con un borde. (En los archivos para hoja de cálculo del OR Courseware, las celdas cambiantes aparecen sombreadas en amarillo brillante.) Las celdas cambiantes han recibido el nombre de rango LotesProducidos (C12:D12).

Con base en la respuesta 2, el número total de horas de producción utilizadas cada semana por los dos productos en las plantas respectivas se introduce en las celdas E7, E8 y E9, justo a la derecha de las celdas de datos correspondientes. Las ecuaciones de Excel para estas tres celdas son

E7 = C7*C12 + D7*D12

E8 = C8*C12 + D8*D12

E9 = C9*C12 + D9*D12

donde cada asterisco denota multiplicación. Como cada una de estas celdas proporciona una salida que depende de las celdas cambiantes (C12 y D12) son llamadas **celdas de salida**.

Observe que cada una de las ecuaciones de las celdas de salida implica la suma de dos productos. Existe una función en Excel, llamada SUMAPRODUCTO, que suma el producto de los términos individuales que contienen dos diferentes rangos de celdas cuando los dos rangos tienen el mismo número de renglones y columnas. Cada producto que será sumado es el producto de un término del primer rango y el término de la ubicación correspondiente del segundo rango. Por ejemplo, considere los dos rangos, C7:D7 y C12:D12, de manera que cada rango tiene un renglón y dos columnas. En este caso, SUMAPRODUCTO (C7:D7, C12:D12) toma cada término individual del rango C7:D7, los multiplica por el término correspondiente del rango C12:D12 y después suma estos productos individuales, tal como se muestra en la ecuación anterior. Si se utiliza el nombre de rango LotesProducidos (C12:D12), la fórmula se convierte en SUMAPRODUCTO (C7:D7, LotesProducidos). Aunque es opcional en ecuaciones tan pequeñas, esta función es útil cuando se trata de capturar ecuaciones de programación lineal más largas.

Después se introducen los signos $\leq$ en las celdas F7, F8 y F9 para indicar que cada valor total a su izquierda no puede exceder al número correspondiente en la columna G. La hoja de cálculo permitirá introducir soluciones de prueba que violan los signos $\leq$. Sin embargo, estos signos sirven como recordatorio de que tales soluciones de prueba deben ser rechazadas si no se hacen cambios en los números de la columna G.

Por último, como la respuesta a la tercera pregunta es que la medida global de desempeño es igual a la ganancia total obtenida por los dos productos, dicha ganancia (por semana) se introduce en la celda G12. En forma parecida a los números de la columna E, ésta se obtiene mediante la suma de productos,

G12 = SUMAPRODUCTO (C4:D4, C12:D12)

Si se utilizan los nombres de rango GananciaTotal (G12), GananciaPorLote (C4:D4) y LotesProducidos (C12:D12), esta ecuación se convierte en

GananciaTotal = SUMAPRODUCTO (GananciaPorLote, LotesProducidos)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem						
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	$3 000	$5 000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	0	<=	4
8		Plant 2	0	2	0	<=	12
9		Plant 3	3	2	0	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	0	0			$0

Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

FIGURA 3.16
Modelo en hoja de cálculo del problema de la Wyndor que incluye las fórmulas de la celda objetivo GananciaTotal (G12) y las otras celdas de salida en la columna E, donde el objetivo es maximizar la celda objetivo.

Éste es un buen ejemplo del beneficio que se obtiene cuando se utilizan los nombres de rango para que las ecuaciones resultantes sean más fáciles de interpretar. En lugar de tener que consultar la hoja de cálculo para ver lo que hay en las celdas G12, C4:D4 y C12:D12, los nombres de rango revelan de inmediato lo que hace la ecuación.

GananciaTotal (G12) es un tipo especial de celda de salida. Ésta es la celda particular que tiene el objetivo de alcanzar un valor tan grande como sea posible cuando se toman las decisiones relativas a las tasas de producción. Por lo tanto, GananciaTotal (G12) es referida como la **celda objetivo**. Dicha celda está sombreada con un color más oscuro que el de las celdas cambiantes y se distingue con un borde más grueso. (En los archivos para hoja de cálculo que contiene el OR Courseware, esta celda aparece en color naranja.)

La esquina inferior derecha de la figura 3.16 muestra las fórmulas que deben introducirse en la columna de HorasUsadas y en la celda de GananciaTotal. También se presenta un resumen de los nombres de rango (en orden alfabético) y las direcciones de celda correspondientes.

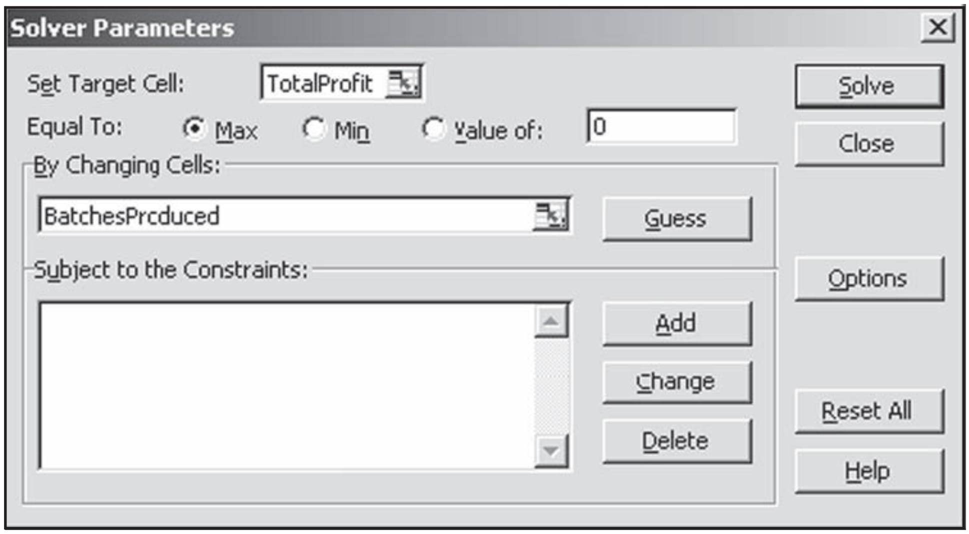
Lo anterior completa la formulación del modelo en una hoja de cálculo del problema de Wyndor.

Con esta formulación es sencillo analizar cualquier solución de prueba para las tasas de producción. Cada vez que se introducen tasas de producción en las celdas C12 y D12, Excel calcula de inmediato la cantidad total empleada de cada recurso y la ganancia total. Sin embargo, no es necesario utilizar la prueba y el error. A continuación se presenta cómo usar Excel para encontrar en forma rápida una solución óptima.

Uso de Excel Solver para resolver el modelo

Excel incluye una herramienta llamada Solver que aplica el método símplex para encontrar una solución óptima. (Una versión más poderosa de Solver, llamada *Premium Solver for Education*, está disponible en el OR Courseware.)

Para entrar a Solver por primera vez, es necesario ingresar al menú de complementos de Excel y agregar el Solver, y así podrá encontrarlo en la tabla de datos (Data tab) (para Excel 2007) o en el menú de herramientas (para versiones anteriores de Excel).



■ **FIGURA 3.17**
Cuadro de diálogo de Solver donde se especifica cuáles celdas de la figura 3.16 son las celdas objetivo y cuáles las que se modifican. También se indica que la celda objetivo será maximizada.

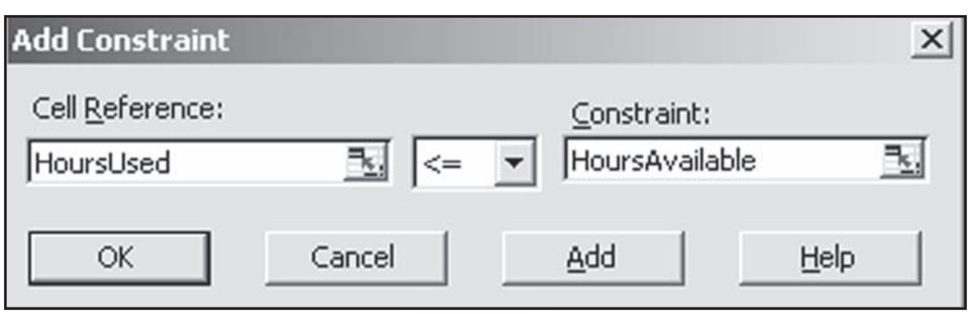
Para iniciar, en la figura 3.16 se ha introducido una solución arbitraria de prueba al colocar ceros en las celdas cambiantes. El Solver las modificará con los valores óptimos después de resolver el problema.

Este procedimiento comienza cuando se elige Solver del menú Herramientas. El cuadro de diálogo se muestra en la figura 3.17.

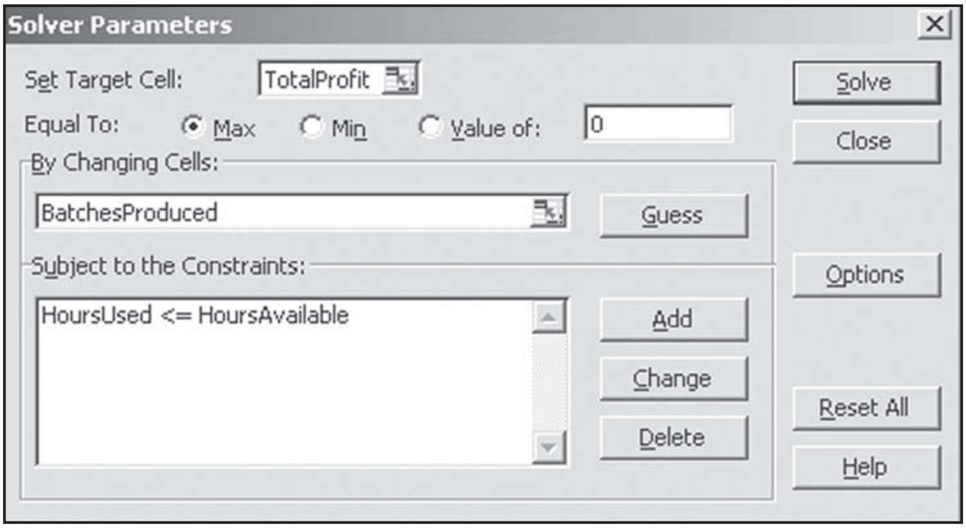
Antes de que Solver aplique el método símplex, necesita conocer con exactitud dónde se localizan los componentes del modelo en la hoja de cálculo. El cuadro de diálogo de Solver se usa para introducir esta información. El usuario tiene la opción de escribir los nombres de rango, las direcciones de las celdas o hacer clic sobre las celdas en la hoja de cálculo.[9] En la figura 3.17 se muestra el resultado de utilizar la primera opción, por lo cual se ha introducido GananciaTotal (en lugar de G12) para la celda objetivo y se ha escrito LotesProducidos (en lugar de rango C12: D12) para las celdas cuyo contenido cambiará. Como el objetivo es maximizar la meta de la celda objetivo, también se debe seleccionar Max.

Después deben especificarse las celdas que contienen las restricciones funcionales. Este objetivo se logra con un clic en el botón "agregar" en el cuadro de diálogo de Solver, con lo que aparece el cuadro de diálogo de "agregar restricción", que se muestra en la figura 3.18. Los signos ≤ en las celdas F7, F8 y F9 de la figura 3.16 son un recordatorio de que las celdas de HorasUsadas (E7:E9)

■ **FIGURA 3.18**
Cuadro de diálogo de Agregar restricción después de introducir el conjunto de restricciones, HorasUsadas (E7:E9) ≤ HorasDisponibles (G7:G9), las cuales especifican que se requiere que las celdas E7, E8 y E9 de la figura 3.16 sean menores o iguales que las celdas respectivas G7, G8 y G9.



[9] Si las celdas se seleccionan mediante un clic sobre ellas, aparecerán al principio en el cuadro de diálogo con sus direcciones y signos monetarios (por ejemplo, $C$9:$D$9), los cuales pueden pasarse por alto. Solver reemplazará tanto las direcciones de celda como los signos monetarios por el nombre de rango correspondiente (si es que existe algún nombre de rango definido para las celdas especificadas), pero sólo después de agregar una restricción o cerrar y reabrir el cuadro de diálogo de Solver.



■ **FIGURA 3.19**
Cuadro de diálogo de Solver después de especificar el modelo completo en términos de la hoja de cálculo.

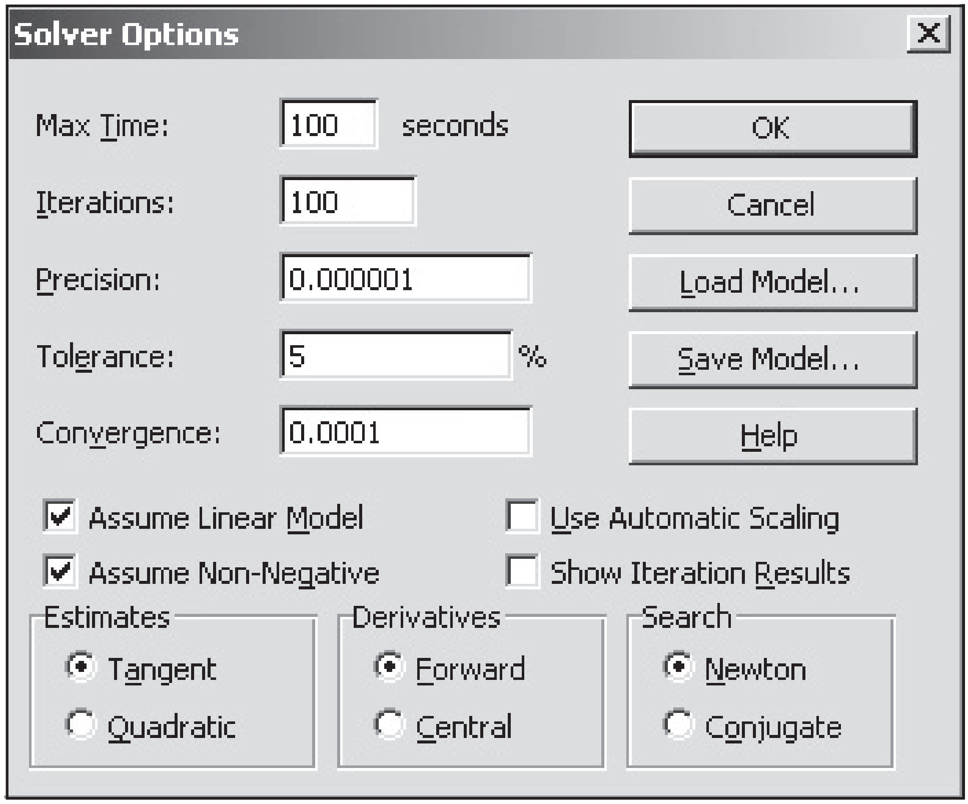
deben ser menores o iguales que las celdas correspondientes de HorasDisponibles (G7:G9). Estas restricciones se especifican en Solver al introducir HorasUsadas (o E7:E9) en el lado izquierdo del cuadro de diálogo de Agregar Restricción y HorasDisponibles (o G7:G9) en el lado derecho. Para ingresar el signo entre estos dos lados existe un menú para elegir entre los signos <= (menor o igual que), = o >= (mayor o igual que), en el que se ha elegido <= para estas restricciones. Esta selección es necesaria aun cuando antes se hayan escrito los signos ≤ en la columna F de la hoja de cálculo, porque Solver usa sólo las restricciones funcionales que se especifican en el cuadro de diálogo de Agregar restricción.

Si hubiera más restricciones funcionales que añadir se debería hacer clic en “agregar” para que aparezca de nuevo el cuadro de diálogo. Sin embargo, como no hay más en este ejemplo, el siguiente paso es hacer clic en “aceptar” para regresar al cuadro de diálogo de Solver.

Ahora el cuadro de diálogo resume el modelo completo (vea la figura 3.19) en términos de la hoja de cálculo de la figura 3.16. Sin embargo, antes de pedir a Solver que resuelva el modelo, se debe dar otro paso. Al elegir el botón “opciones” aparecerá el cuadro de diálogo que se muestra en la figura 3.20. Éste permite especificar cierto número de opciones sobre la manera en que se resolverá el modelo. Las más importantes son las opciones “adoptar modelo lineal” y “asumir no negativos”. Asegúrese de elegir los cuadros de ambas opciones como se muestra en la figura. Esto indica a Solver que es un problema de programación *lineal* con restricciones de no negatividad para todas las variables de decisión, y que el método símplex se debe usar para resolver el problema. En cuanto al resto de las opciones, en general los valores preestablecidos se pueden aceptar para problemas pequeños. Con un clic en aceptar se regresa al cuadro de diálogo de Solver.

Ahora todo está listo para hacer clic en “resolver” en el cuadro de diálogo de Solver, con lo que se ejecutará el método símplex. Después de unos segundos (en el caso de un problema pequeño), Solver indicará los resultados. Por lo común señalará que encontró una solución óptima, como se especifica en el cuadro de diálogo de Resultados de Solver que se muestra en la figura 3.21. Si el modelo no tiene soluciones factibles o una solución óptima, este cuadro de diálogo lo indicará con un mensaje como “Solver no pudo encontrar una solución factible” o “El conjunto de valores en las celdas no converge”. El cuadro de diálogo también presenta la opción de generar varios informes. Uno de ellos —el informe de sensibilidad— se analizará con detalle en las secciones 4.7 y 6.8.

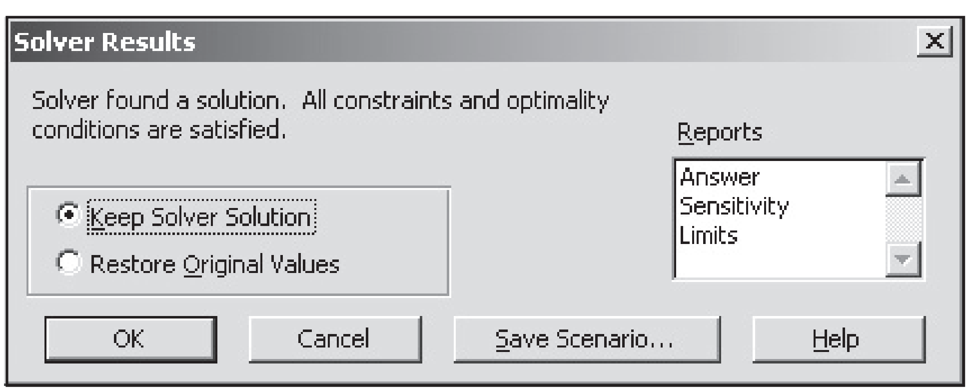
Después de resolver el modelo, el Solver sustituye el valor original de las variables de decisión en la hoja de cálculo por los valores óptimos, como se muestra en la figura 3.22. Así, la solución óptima es producir dos lotes de puertas y seis lotes de ventanas por semana, tal como se encontró mediante el método gráfico en la sección 3.1. La hoja de cálculo también indica el número correspondiente en la celda objetivo —una ganancia total de 36 000 dólares por semana—, así como los números en las celdas de salida HorasUsadas (E7:E9).



■ **FIGURA 3.20**
Cuadro de diálogo de Opciones de Solver después de elegir las opciones "Adoptar modelo lineal" y "Asumir no negativos" para indicar que se desea resolver un modelo de programación lineal que tiene restricciones de no negatividad.

En este punto se podría verificar lo que pasa con la solución óptima si cualquiera de los números de las celdas de datos se cambiara por otros valores posibles. Este cambio es fácil de hacer porque el Solver guarda todas las direcciones de la celda objetivo, celdas cambiantes, restricciones, etc., cuando se guarda el archivo. Todo lo que se debe hacer es realizar los cambios que se desee en las celdas de datos y después dar clic de nuevo sobre "resolver" en el cuadro de diálogo del Solver. (Las secciones 4.7 y 6.8 se enfocan en este tipo de *análisis de sensibilidad*, incluso se aborda la manera de utilizar el Informe de Sensibilidad del Solver para realizar el análisis "qué pasaría si".)

Para ayudar a experimentar con este tipo de cambios, el OR Courseware incluye archivos de Excel para éste y otros capítulos que proporcionan una formulación completa y una solución de los ejemplos —el problema de Wyndor y los de la sección 3.4— en un formato de hoja de cálculo. Se recomienda "jugar" con estos ejemplos para ver qué pasa con los diferentes datos, distintas soluciones, etc. Estas hojas de cálculo también pueden resultar útiles como plantillas para resolver problemas de tarea.



■ **FIGURA 3.21**
Cuadro de diálogo de Resultados de Solver que indica que se encontró una solución óptima.

	A	B	C	D	E	F	G
1		**Wyndor Glass Co. Product-Mix Problem**					
2							
3			Doors	Windows			
4		Profit Per Batch	$3 000	$5 000			
5					Hours		Hours
6			Hours Used Per Batch Produced		Used		Available
7		Plant 1	1	0	2	<=	4
8		Plant 2	0	2	12	<=	12
9		Plant 3	3	2	18	<=	18
10							
11			Doors	Windows			Total Profit
12		Batches Produced	2	6			$36 000

Solver Parameters

Set Target Cell: TotalProfit

Equal To: ⦿ Max ○ Min ○

By Changing Cells:

BatchesProduced

Subject to the Constraints:

HoursUsed <= HoursAvailable

	E
5	Hours
6	Used
7	=SUMPRODUCT(C7:D7,BatchesProduced)
8	=SUMPRODUCT(C8:D8,BatchesProduced)
9	=SUMPRODUCT(C9:D9,BatchesProduced)

	G
11	Total Profit
12	=SUMPRODUCT(ProfitPerBatch,BatchesProduced)

Solver Options

☑ Assume Linear Model

☑ Assume Non-Negative

Range Name	Cells
BatchesProduced	C12:D12
HoursAvailable	G7:G9
HoursUsed	E7:E9
HoursUsedPerBatchProduced	C7:D9
ProfitPerBatch	C4:D4
TotalProfit	G12

■ **FIGURA 3.22**
Hoja de cálculo obtenida después de resolver el problema de la Wyndor.

Además, se sugiere utilizar los archivos de Excel de este capítulo para revisar de manera cuidadosa las formulaciones en hoja de cálculo para algunos de los ejemplos de la sección 3.4. Este enfoque explica cómo formular modelos de programación lineal en hojas de cálculo cuando éstos son más grandes y complicados que el del problema de Wyndor.

En capítulos posteriores se verán otros ejemplos de cómo formular y resolver varios tipos de modelos de IO en una hoja de cálculo. Los capítulos complementarios del sitio web del libro también incluyen un capítulo completo (21) que está dedicado al modelado en hojas de cálculo. Ese capítulo describe en detalle tanto el proceso general como las directrices básicas para construir modelos en hoja de cálculo. También presenta algunas técnicas para depurar tales modelos.

3.6 CONSTRUCCIÓN DE MODELOS GRANDES DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Los modelos de programación lineal son de muchos tamaños diferentes. Los ejemplos de las secciones 3.1 y 3.4 oscilan desde tres restricciones funcionales y dos variables de decisión —para la Wyndor y la terapia de radiación— hasta 17 restricciones funcionales y 12 variables de decisión —en el problema de Save-It Company—. El último caso puede parecer un modelo algo grande. Después de todo, lleva bastante tiempo elaborar uno de este tamaño. Sin embargo, los modelos de los recuadros de aplicación que se presentan en este capítulo son mucho más grandes. Por ejemplo, el modelo para la aplicación de United Airlines en la sección 3.4 tiene más de 20 000 variables de decisión.

Los modelos de ese tamaño no son del todo raros. Es común que, en la práctica, los modelos de programación lineal tengan cientos o miles de restricciones funcionales. En realidad, a veces tienen incluso millones de restricciones funcionales. Con frecuencia, el número de variables de decisión es tan grande como el número de restricciones funcionales, y en ocasiones también llegan a ser millones.

La formulación de modelos tan grandes puede ser una tarea desalentadora. Aun un modelo de "tamaño medio" con mil restricciones y mil variables tiene más de un millón de parámetros, que incluyen el millón de coeficientes de estas restricciones. Sencillamente no es práctico elaborar la formulación algebraica ni introducir los parámetros en una hoja de cálculo para un modelo de este tipo.

Entonces, ¿cómo se construyen estos modelos grandes en la práctica? Se requiere el uso de un *lenguaje de modelado*.

Lenguajes de modelado

Un lenguaje de modelado de programación matemática es un software de diseño especial para formular de modo eficiente los modelos de programación lineal grandes, y otros relacionados. Incluso cuando se tienen miles de restricciones funcionales, éstas relativamente son de pocos tipos, y las del mismo tipo siguen el mismo patrón. De igual manera, las variables de decisión estarán dentro de unas cuantas categorías. Por ello, si se usan grandes bloques de datos en bases de datos, un lenguaje de modelado construirá todas las restricciones del mismo tipo a la vez, con fundamento en las variables de cada tipo. Este proceso se ilustrará en breve.

Además de formular con eficiencia los modelos grandes, un lenguaje de modelado facilita las tareas de administración del modelo, inclusive el acceso a los datos, su transformación en parámetros del modelo, la modificación del modelo cuando se desee y el análisis de las soluciones. También puede producir informes resumidos en el lenguaje de los tomadores de decisiones, al igual que documentar el contenido del modelo.

Se han desarrollado varios lenguajes de modelado excelentes en las últimas dos décadas, entre los que se destacan AMPL, MPL, GAMS y LINGO.

La versión para estudiantes de uno de ellos, **MPL** (siglas de mathematical programming language), está incluida en el sitio web del libro junto con un amplio material de ayuda. A medida que las versiones subsecuentes salgan al mercado en el futuro, se podrán bajar del sitio de Internet maximalsoftware.com. MPL es un producto de Maximal Software, Inc. Su nueva característica es el gran apoyo de Excel en MPL, el cual incluye tanto la importación como la exportación de conjuntos de datos desde y hacia Excel. También se proporciona un apoyo amplio para el lenguaje de macros de Excel VBA mediante el OptiMax 2000. (La versión para estudiantes de OptiMax 2000 se encuentra también en el sitio web del libro.) Este producto permite al usuario integrar totalmente los modelos de MPL en Excel y resolverlos con cualquiera de los poderosos solucionadores que soporta MPL, como **CPLEX** (descrito en la sección 4.8).

LINGO es un producto de LINDO Systems, Inc., que también comercializa un optimizador orientado por completo a hojas de cálculo llamado What'sBest! que está diseñado para enfrentar grandes problemas industriales, así como una subrutina adicional llamada LINDO API. El software LINGO incluye una interfaz con el subprograma LINDO que ha sido una introducción popular a la programación lineal para muchas personas. La versión para estudiante de LINGO con la interfaz LINDO es parte del software incluido en el sitio web del libro. Todos los productos de Sistemas LINDO también se pueden bajar de www.lindo.com. Al igual que MPL, LINGO es un poderoso lenguaje de modelado de propósito general. Una característica notable de LINGO es su gran flexibilidad para tratar con una amplia variedad de problemas de IO además de los de programación lineal. Por ejemplo, cuando se abordan problemas complicados de programación no lineal, contiene un optimizador global que obtiene una solución globalmente óptima. (Comentarios adicionales a esto aparecen en la sección 12.10.) En esta nueva edición del libro, el LINGO más reciente también tiene un lenguaje de programación incluido de manera que es posible realizar tareas como resolver diferentes problemas de optimización como parte de una corrida, lo cual es particularmente útil cuando se hace análisis paramétrico,

El sitio web del libro incluye formulaciones de MPL, LINGO, LINDO y What's*Best!* para casi todos los ejemplos de este libro a los que se pueden aplicar estos lenguajes de modelado y optimizadores.

A continuación se presenta un ejemplo simplificado que ilustra cómo puede surgir un modelo de programación lineal muy grande.

Ejemplo de un problema con un modelo muy grande

La administración de WORLDWIDE CORPORATION desea resolver un *problema de mezcla de productos*, que es mucho más complejo que el problema de la Wyndor presentado en la sección 3.1. Esta corporación tiene 10 plantas en varias partes del mundo. Cada una elabora los mismos 10 productos y después los vende en su región. Se conoce la *demanda* (ventas potenciales) de cada producto en cada planta en cada uno de los próximos 10 meses. Aunque la cantidad de producto vendido en un mes dado no puede exceder la demanda, la cantidad producida puede ser mayor, y la cantidad en exceso se debería almacenar en inventario (con un costo unitario por mes) para su venta posterior. Cada unidad de cada producto ocupa el mismo espacio en almacén, y cada planta tiene un límite superior para el número total de unidades que se puede guardar (la *capacidad del inventario*).

Cada planta tiene los mismos 10 procesos de producción, se hará referencia a ellos como *máquinas*, cada uno de los cuales se puede usar para producir cualquiera de los 10 productos. Tanto el costo de producción por unidad como la tasa de producción de un producto —número de unidades producidas por día dedicado a ese producto— dependen de la combinación de plantas y máquinas involucradas (pero no del mes). El número de días hábiles (*días de producción disponibles*) varía un poco de un mes a otro.

Como algunas plantas y máquinas pueden producir un producto dado ya sea a menor costo o a una tasa más rápida que otras plantas y máquinas, en ocasiones vale la pena enviar algunas unidades del producto de una planta a otra para que esta última las venda. Existe cierto costo asociado con cada unidad enviada de cualquier producto de cada combinación de una planta que envía (*planta origen*) y una planta que recibe (*planta destino*), donde este costo unitario es el mismo para todos los productos.

La administración necesita determinar cuántas unidades de cada producto debe producir en cada máquina de cada planta cada mes, al igual que cuántas unidades de cada producto debe vender cada planta cada mes y cuántas unidades de cada producto debe enviar cada planta cada mes a cada una de las otras plantas. Si se toma en cuenta el precio en todo el mundo de cada producto, el objetivo es encontrar el plan factible que maximice la ganancia total: ingreso por ventas totales *menos* la suma de los costos totales de producción, inventario y envío.

Se debe considerar de nuevo que éste es un ejemplo simplificado en varias formas. Se ha supuesto que el número de plantas, máquinas, productos y meses es exactamente el mismo (10). En situaciones más reales es probable que el número de productos sea mucho más grande y que el horizonte de planeación sea mucho más grande que 10 meses; asimismo, el número de "máquinas" (tipos de procesos de producción) debería ser menor a 10. También se ha supuesto que todas las plantas tienen los mismos tipos de máquinas (procesos de producción) y que cada tipo de máquina puede fabricar todos los productos. En realidad, las plantas pueden tener algunas diferencias en términos de tipos de máquinas y de los productos que pueden manufacturar. El resultado neto es que el modelo correspondiente para algunas corporaciones puede ser más pequeño que el de este ejemplo, pero el modelo para otras puede ser mucho más grande.

Estructura del modelo resultante

Debido a los costos de inventario y a que las capacidades de almacenamiento son limitadas, es necesario mantener un registro de la cantidad de cada producto que se guarda en cada planta durante cada mes. En consecuencia, el modelo de programación lineal tiene cuatro tipos de variables de decisión: cantidades de producción, cantidades de inventario, cantidades de venta y cantidades enviadas. Con 10 plantas, 10 máquinas, 10 productos y 10 meses, esto da un total de 21 000 variables de decisión, como se describe a continuación.

Variables de decisión

10 000 variables de producción: una por cada combinación de planta, máquina, producto y mes
1 000 variables de inventario: una por cada combinación de planta, producto y mes
1 000 variables de ventas: una por cada combinación de planta, producto y mes
9 000 variables de envío: una por cada combinación de producto, mes, planta (planta origen, *fromplant*) y otra planta (la planta destino, *toplant*).

Cuando se multiplica cada variable de decisión por el costo unitario o ingreso unitario correspondiente y después se suma según cada tipo, se puede calcular la siguiente función objetivo:

Función objetivo

Maximizar ganancia = ingresos totales por ventas – costo total,

donde

Costo total = costo total de producción + costo total de inventario + costo total de envío.

Cuando se maximiza esta función objetivo, las 21 000 variables de decisión deben satisfacer las restricciones de no negatividad al igual que los cuatro tipos de restricciones funcionales: de capacidad de producción, de balanceo de plantas (restricciones de igualdad que proporcionan valores adecuados para las variables de inventario), de inventario máximo y de ventas máximas. Como se enumeran en seguida, existe un total de 3 100 restricciones funcionales, pero todas las de un mismo tipo siguen el mismo patrón.

Restricciones funcionales

1 000 restricciones de capacidad de producción (una por cada combinación de planta, máquina y mes):

Días de producción usados ≤ días de producción disponibles,

donde el lado izquierdo es la suma de 10 fracciones, una por cada producto, donde cada fracción es la cantidad de ese producto (una variable de decisión) *dividida* entre la tasa de producción del producto (una constante dada).

1 000 restricciones de balance de las plantas (una por cada combinación de planta, producto y mes):

Cantidad producida + inventario del mes pasado + cantidad recibida = ventas + inventario actual + cantidad enviada,

donde la *cantidad producida* es la suma de las variables de decisión que representan las cantidades de producción de las máquinas, la *cantidad recibida* es la suma de las variables de decisión que representan las cantidades enviadas desde otras plantas y la *cantidad enviada* es la suma de las variables de decisión correspondientes a las cantidades que se mandan a las otras plantas.

100 restricciones de inventario máximo (una por cada combinación de planta y mes):

Inventario total ≤ capacidad de inventario,

donde el lado izquierdo es la suma de las variables de decisión que representan las cantidades de inventario de los productos individuales.

1 000 restricciones de ventas (una por cada combinación de planta, producto y mes):

Ventas ≤ demanda.

Ahora se estudiará la manera en que el lenguaje de modelado MPL, un producto de Maximal Software, Inc., puede formular este enorme modelo en forma muy compacta.

Formulación del modelo en MPL

Quien construye el modelo comienza por asignarle un título y enumerar un *índice* por cada elemento del problema, como se ilustra en seguida.

```
TITLE
  Production_Planning;
INDEX
  product   :=(A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10);
  month     :=(Jan, Feb, Mar, Apr, May, Jun, Jul, Aug, Sep, Oct);
```

```
plant     :=(p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, p10);
fromplant:= plant;
toplant   :=plant;
machine   :=(m1, m2, m3, m4, m5, m6, m7, m8, m9, m10);
```

Excepto por los meses, los elementos del lado derecho son etiquetas arbitrarias de los respectivos productos, plantas y máquinas, donde las mismas etiquetas se usan en los archivos de datos. Observe que se colocan dos puntos después del nombre de cada elemento y punto y coma al final de cada instrucción (pero una instrucción puede extenderse más de un renglón).

El trabajo pesado en cualquier modelo grande es la recolección y organización de los distintos tipos de datos en archivos de datos, los cuales pueden estar en formato denso o disperso. En el *formato denso*, el archivo contiene una entrada para cada posible combinación de los índices sobre los que corren los datos. Por ejemplo, suponga que el archivo de datos contiene las tasas de producción para elaborar los diferentes productos con las distintas máquinas (procesos de producción) en las diversas plantas. En formato denso, el archivo contiene una entrada para cada combinación de una planta, una máquina y un producto. Sin embargo, la entrada puede necesitar ser cero para la mayoría de las combinaciones porque esa planta en particular puede no tener esa máquina específica o, incluso si la tiene, esa máquina individual puede no ser capaz de producir ese producto particular en esa planta en específico. El porcentaje de las entradas en formato denso que son *distintas de cero* se conoce como densidad del conjunto de datos. En la práctica, es común que los conjuntos de datos tengan una *densidad* de datos por debajo de 5%, y a veces está por debajo de 1%. Los conjuntos de datos que tienen una densidad tan baja se dice que están dispersos. En tales situaciones, resulta más eficiente utilizar un archivo de datos en *formato disperso*. En este formato sólo se introducen al archivo de datos los valores distintos de cero (y una identificación de los valores índice a los que se refieren). Por lo general, los datos se leen en formato disperso desde un archivo de texto o de las bases de datos corporativas. La capacidad de manejar conjuntos de datos dispersos de manera eficiente es una de las claves para el éxito de la formulación y la resolución de modelos de optimización a gran escala. MPL puede trabajar con facilidad tanto con el formato denso como con el disperso.

En el ejemplo de la Worldwide Corp. se necesitan ocho archivos para precios de productos, demandas, costos de producción, tasas de producción, días de producción disponibles, costos de inventario, capacidades de inventario y costos de envío. Se supone que estos archivos de datos están disponibles en formato disperso. El siguiente paso es dar un nombre sugestivo corto a cada uno e identificar (entre paréntesis cuadrados) el índice o índices sobre los que corren los datos en los archivos como se muestra a continuación.

```
DATA
Price[product]      := SPARSEFILE("Price.dat");
Demand[plant,   product,    month] := SPARSEFILE("Demand.dat");
ProdCost[plant, machine, product] := SPARSEFILE("Produce.dat", 4);
ProdRate[plant, machine, product] := SPARSEFILE("Produce.dat", 5);
ProdDaysAvail[month]      := SPARSEFILE("ProdDays.dat");
InvtCost[plant, product] := SPARSEFILE("InvtCost.dat");
InvtCapacity[plant]       := SPARSEFILE("InvtCap.dat");
ShipCost[fromplant, toplant] := SPARSEFILE ("ShipCost.dat");
```

Para ilustrar lo que contienen estos archivos de datos, considere el que proporciona los costos y las tasas de producción. En seguida se presenta una muestra pequeña de las primeras entradas del archivo disperso produce.dat:

```
!
    ! Produce.dat - Production Cost and Rate
    !
    ! ProdCost[plant, machine, product]:
    ! ProdRate[plant, machine, product]:
    !
      p1, m11, A1, 73.30, 500,
      p1, m11, A2, 52.90, 450,
      p1, m12, A3, 65.40, 550,
      p1, m13, A3, 47.60, 350,
```

Después, el modelador da un nombre corto a cada tipo de variable de decisión. Después del nombre, entre paréntesis cuadrados, se escribe el (los) índice(s) sobre el (los) que corre el subíndice.

```
VARIABLES
  Produce[plant, machine, product, month]     -> Prod;
  Inventory[plant, product, month]            -> Invt;
  Sales[plant, product, month]                -> Sale;
  Ship[product, month, fromplant, toplant]
      WHERE (fromplant <> toplant);
```

En el caso de variables de decisión con nombres de más de cuatro letras, las flechas de la derecha señalan las abreviaturas de cuatro letras que se ajustan a las limitaciones de tamaño de varios solucionadores. La última línea indica que los subíndices de la planta origen y la planta destino no pueden tener el mismo valor.

Se debe dar un paso más antes de elaborar el modelo. A fin de que sea más sencillo leerlo es útil introducir primero *macros* que representan las sumas en la función objetivo.

```
MACROS
  Total Revenue := SUM(plant, product, month: Price*Sales);
  TotalProdCost := SUM(plant, machine, product, month:
                   ProdCost*Produce);
  TotalInvtCost := SUM(plant, product, month:
                   InvtCost*Inventory);
  TotalShipCost := SUM(product, month, fromplant, toplant:
                   ShipCost*Ship);
  TotalCost     := TotalProdCost + TotalInvtCost + TotalShipCost;
```

Los primeros cuatro macros usan la palabra reservada SUM de MPL para ejecutar las sumas involucradas. Después de cada palabra SUM (entre paréntesis) se coloca, primero, el (los) índice(s) sobre el (los) que corre la suma. Después (en seguida de dos puntos), el vector producto de un vector de datos (uno de los archivos de datos) multiplicado por un vector variable (uno de los cuatro tipos de variables de decisión).

Ahora, este modelo con 3 100 restricciones funcionales y 21 000 variables de decisión se puede escribir en la siguiente forma compacta.

```
MODEL
  MAX Profit = TotalRevenue - TotalCost;
SUBJECT TO
  ProdCapacity[plant, machine, month] -> PCap:
    SUM(product: Produce/ProdRate) <=  ProdDaysAvail;
  PlantBal[plant, product, month] -> PBal:
      SUM(machine: Produce) + Inventory [month - 1]
    + SUM(fromplant: Ship[fromplant, toplant: 5 plant])
  =
      Sales + Inventory
    + SUM(toplant: Ship[from plant: = plant, toplant]);

  MaxInventory [plant, month] -> MaxI:
    SUM(product: Inventory) <= InvtCapacity;
BOUNDS
    Sales <= Demand;
END
```

Por cada uno de los cuatro tipos de restricciones, el primer renglón da el nombre del tipo. Existe una restricción de este tipo para cada combinación de valores de los índices en los corchetes que siguen al nombre. A la derecha del paréntesis cuadrado, la flecha señala la abreviatura de cuatro letras que el solucionador puede usar. Abajo de este primer renglón se muestra la forma general de las restricciones de este tipo mediante el operador SUM.

Para cada restricción de capacidad de producción, los términos de la suma consisten en una variable de decisión (la cantidad de producción de ese producto en esa máquina en esa planta durante ese mes) dividida entre la tasa de producción correspondiente, que da el número de días de producción empleados. Al sumar todos los productos se obtiene el número total de días de producción usados en esa máquina de esa planta durante ese mes, de modo que este número no debe exceder el número de días de producción disponibles.

El propósito de la restricción de balanceo de plantas de cada planta, producto y mes es proporcionar el valor correcto a la variable de inventario actual, dados los valores de todas las demás variables de decisión, incluso el nivel de inventario del mes anterior. En estas restricciones, cada operador SUM es sólo una suma de variables de decisión en vez de un producto vectorial. Ocurre lo mismo con el operador SUM en la restricción de inventario máximo. Por el contrario, el lado izquierdo de las restricciones de ventas máximas es una sola variable de decisión para cada una de las 1 000 combinaciones de planta, producto y mes. (La separación de estas restricciones de cota superior sobre las variables individuales de las restricciones funcionales normales tiene ventajas, debido a la eficiencia computacional que se logra cuando se emplea la *técnica de la cota superior* descrita en la sección 7.3.) No hay restricciones de cota inferior porque MPL supone de modo automático que las 21 000 variables de decisión tienen restricciones de no negatividad a menos que especifiquen cotas inferiores distintas de cero. En cada una de las 3 100 restricciones funcionales, observe que el lado izquierdo es una función lineal de las variables de decisión y que el lado derecho es una constante tomada del archivo de datos adecuado. Como la función objetivo también es una función lineal de las variables de decisión, se trata de un modelo legítimo de programación lineal.

Para resolver el modelo, MPL cuenta con varios **solucionadores** (paquetes de software para resolver modelos de programación lineal y modelos relacionados) que se pueden instalar en el MPL. Como se ve en la sección 4.8, **CPLEX** es un solucionador en especial poderoso. La versión de MPL en el OR Courseware ya tiene instalado la versión para estudiantes de CPLEX, que usa el método símplex para resolver estos modelos. Por lo tanto, para resolver un modelo formulado con MPL, todo lo que debe hacerse es elegir *Solve CPLEX* en el menú *Run* o seleccionar el botón *Run Solve* en la *barra de herramientas*. Después se puede ver el archivo con la solución en una ventana si se oprime el botón *View* en la parte inferior de la ventana *Status Window*.

Esta breve introducción a MPL ilustra la facilidad con que se pueden usar los lenguajes de modelado para formular modelos de programación lineal muy grandes de manera clara y concisa. Como ayuda cuando se utiliza MPL se incluye en el sitio web un tutorial, que revisa todos los detalles de construcción del modelo de las versiones más pequeñas de los ejemplos de planeación de la producción considerados aquí. En otro lugar del sitio web se puede ver cómo se formulan con MPL y se resuelven con CPLEX todos los ejemplos de programación lineal en este capítulo y los subsecuentes.

Lenguaje de modelado LINGO

LINGO es otro lenguaje de modelado conocido que se presenta en este libro. La compañía que lo produce, LINDO Systems, se dio a conocer primero por el optimizador **LINDO**, que es fácil de usar y es un subprograma del software LINGO. LINDO Systems también produce un solucionador en hoja de cálculo, ***What's Best!***, y una rutina solucionadora adicional, el **LINDO API**. La versión para el estudiante de LINGO se proporciona en el sitio web del libro. (Las versiones de prueba más recientes de todo lo anterior pueden bajarse de www.lindo.com.) Tanto LINDO como What's*Best!* comparten a LINDO API como el mecanismo de solución. El LINDO API tiene solucionadores basados en el método símplex y solucionadores de punto interior o barrera (como los que se estudian en las secciones 4.9 y 7.4), más un solucionador global para resolver modelos no lineales.

Como MPL, LINGO permite al modelador formular con eficiencia un modelo de programación lineal grande de manera clara y concisa que separa los datos de la formulación del modelo. Esta separación significa que a medida que ocurren cambios diarios en los datos que describen el problema que se debe resolver (los cambios pueden ser incluso minuto a minuto), el usuario sólo necesita cambiar los datos y no involucrarse con la formulación del modelo. Es posible desarrollar un modelo con un conjunto pequeño de datos y después, cuando se le agregan al modelo una cantidad de datos más grande, la formulación del modelo se ajusta de manera automática al nuevo conjunto de datos.

LINGO utiliza los *conjuntos* como sus conceptos fundamentales de construcción. Por ejemplo, en el problema de planeación de la producción de Worlwide Corp., los conjuntos de interés incluyen las colecciones de productos, plantas, máquinas y meses. Cada miembro de un conjunto puede tener uno o más *atributos* asociados, como el precio de un producto, la capacidad del inventario de una planta, la tasa de producción de una máquina y el número de días de producción disponible en un mes. Algunos de estos atributos son datos de entrada, mientras que otros, como las cantidades de producción y embarque son variables de decisión del modelo. También es posible definir conjuntos derivados que se construyen a partir de combinaciones de otros conjuntos. Igual que en MPL, el operador SUM por lo común se usa para escribir la función objetivo y cada tipo de restricción de manera compacta.

Existe un manual impreso disponible de LINGO. Se puede acceder a él directamente en LINGO vía el comando Help, y puede explorarse de diferentes maneras.

Un suplemento de este capítulo en el sitio web del libro describe un poco más de LINGO e ilustra su uso con un par de ejemplos pequeños. Un segundo suplemento muestra cómo se puede usar LINGO para formular el modelo para el ejemplo de planeación de la producción de Worldwide Corp. Un tutorial de LINGO en el sitio web proporciona los detalles necesarios para realizar el modelado básico con este lenguaje. Las formulaciones y soluciones de LINGO para los distintos ejemplos tanto en este capítulo como en otros también se incluyen en el sitio web.

3.7 CONCLUSIONES

La programación lineal es una técnica poderosa para tratar problemas de asignación de recursos escasos entre actividades que compiten, al igual que otros problemas cuya formulación matemática es parecida. Se ha convertido en una herramienta estándar de gran importancia para muchas organizaciones industriales y de negocios. Aún más, casi cualquier organización social tiene el problema de asignar recursos en algún contexto y cada vez es mayor el reconocimiento de la aplicación tan amplia de esta técnica.

Sin embargo, no todos los problemas de asignación de recursos limitados se pueden formular de manera que se ajusten a un modelo de programación lineal, ni siquiera como una aproximación razonable. Cuando no se cumplen uno o más de los supuestos de programación lineal, tal vez sea posible aplicar otro tipo de modelos matemáticos, por ejemplo, los modelos de programación entera (capítulo 11) o de programación no lineal (capítulo 12).

REFERENCIAS SELECCIONADAS

1. Baker, K. R., *Optimization Modeling with Spreadsheets*, Duxbury, Pacific Grove, CA, 2006.
2. Hillier, F. S. y M. S. Hillier, *Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets*, 2a. ed., McGraw-Hill/Irwin, Burr Ridge, IL, 2003, caps. 2, 4.
3. *LINGO User's Guide*, LINDO Systems, Inc., Chicago, IL, 2008.
4. Manual de *MPL Modeling System* (*Release* 4.2), Maximal Software, Inc., Arlington, VA, e-mail: info@maximalsoftware.com, 2008.
5. Schrage, L., *Optimization Modeling with LINGO*, LINDO Systems Press, Chicago, IL, 2003.
6. Williams, H. P., *Model Building in Mathematical Programming*, 4a. ed., Wiley, Nueva York, 1999.

Algunas aplicaciones de programación lineal ganadoras de premios

(En nuestro sitio web www.mhhe.com/hillier se proporciona un vínculo a todos estos artículos.)

A1. Ambs, K., S. Cwilich, M. Deng, D. J. Houck, D. F. Lynch y D. Yan, "Optimizing Restoration Capacity in the AT&T Network", en *Interfaces*, **30**(1): 26-44, enero-febrero de 2000.

A2. Caixeta-Filho, J. V., J. M. van Swaay-Neto y A. de P Wagemaker, "Optimization of the Production Planning and Trade of Lily Flowers at Jan de Wit Company", en *Interfaces*, **32**(1): 35-46, enero-febrero de 2002.

A3. Chalermkraivuth, K. C., S. Bollapragada, M. C. Clark, J. Deaton, L. Kiaer, J. P. Murdzek, W. Neeves, B. J. Scholz y D. Toledano, "GE Asset Managemet, Genworth Financial and GE Insurance Use a Sequential-Linear-Programming Algorithm to Optimize Portfolios", en *Interfaces*, **35**(5): 370-380, septiembre-octubre de 2005.

A4. Elimam, A. A., M. Girgis y S. Kotob, "A Solution to Post Crash Dedt Entanglements in Kuwait's al-Manakh Stock Market", en *Interfaces*, **27**(1): 89-106, enero-febrero de 1997.

A5. Epstein, R., R. Morales, J. Serón y A. Weintraub, "Use of OR Systems in the Chilean Forest Industries", en *Interfaces*, **29**(1): 7-29, enero-febrero de 1997.

A6. Geraghty, M. K. y E. Johnson, "Revenue Management Saves National Car Rental", en *Interfaces*, **27**l(1), 107-127, enero-febrero de 1997.

A7. Leachman, R. C., R. F. Benson, C. Liu y D. J, Raar, "IMPReSS: An Automed Production-Planning and Delivery-Quotation System at Harris Corporation—Semiconductor Sector", en Interfaces, **26**(1): 6-37, enero-febrero de 1996.
A8. Mukuch, W. M., J. L. Dodge, J. G. Ecker, D. C Granfors y G. J. Hahn, "Managing Consumer Credit Delinquency in the U. S. Economy: A Multi-Billion Dollar Management Science Application", en *Interfaces*, **22**(1): 90-109, enero-febrero de 1992.
A9. Murty, K. G., Y.-w. Wan, J. Liu, M. M. Tseng, E. Leung, K.-K. Lai y H. W. C. Chiu, "Hongkong International Terminals Gains Elastic Capacity Using a Data-Intensive Decision-Support System", en *Interfaces*, **35**(1): 61-75, enero-febrero de 2005.
A10. Yoshino, T., T. Sasaki y T. Hasegawa, "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway", en *Interfaces*, **25**(1): 94-108, enero-febrero de 1995.

AYUDAS DE APRENDIZAJE PARA ESTE CAPÍTULO EN NUESTRO SITIO WEB (www.mhhe.com/hillier)

Ejemplos resueltos:

Ejemplos del capítulo 3

Ejemplo de demostración en OR Tutor:

Método gráfico

Procedimientos en IOR Tutorial:

Método gráfico interactivo
Método gráfico y análisis de sensibilidad

Complemento de Excel:

Premium Solver for Education

"Cap. 3. Introd. a archivos LP" para resolver los ejemplos:

Archivos Excel
Archivo LINGO/LINDO
Archivo MPL/CPLEX

Glosario del capítulo 3

Suplementos de este capítulo:

Lenguaje de modelado LINGO.
Más acerca de LINGO.

Vea el apéndice 1 de la documentación del software.

PROBLEMAS

Los símbolos a la izquierda de algunos problemas (o de sus incisos) significan lo siguiente:

D: El ejemplo de demostración indicado puede ser útil.
I: El uso del procedimiento correspondiente en IOR Tutorial puede resultar útil (la impresión registra su trabajo).
C: Utilice la computadora para resolver el problema con el método símplex. Las opciones de software disponibles incluyen Excel Solver o Premium Solver (sección 3.5). MPL/CPLEX (sección 3.6), LINGO (suplementos 1 y 2 de este capítulo en el sitio web del libro y apéndice 4.1) y LINDO (apéndice 4.1), pero siga las instrucciones de su profesor sobre cuál opción usar.

Un asterisco en el número del problema indica que al final del libro se da al menos una respuesta parcial.

3.1-1. Lea el artículo referenciado que describe todo el estudio de IO que se resume en el recuadro de aplicación que se presenta en la sección 3.1. Describa brevemente cómo se aplicó la programación lineal en este estudio. Después enumere los diferentes beneficios financieros y de otro tipo que resultaron de este estudio.

D **3.1-2.*** Para cada una de las siguientes restricciones, dibuje una gráfica individual para mostrar las soluciones no negativas que las satisfacen.

a) $x_1 + 3x_2 \leq 6$
b) $4x_1 + 3x_2 \leq 12$
c) $4x_1 + x_2 \leq 8$
d) Ahora combine estas restricciones en una sola gráfica para mostrar la región factible del conjunto completo de restricciones funcionales más las de no negatividad.

D **3.1-3.** Considere la siguiente función objetivo de un modelo de programación lineal:

Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2$

a) Dibuje en una gráfica las rectas correspondientes a la función objetivo de $Z = 6$, $Z = 12$ y $Z = 18$.
b) Encuentre la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de estas tres rectas de la función objetivo. Compare las pendientes y las intersecciones con el eje x_2.

3.1-4. Considere la siguiente ecuación de una recta:

$60x_1 + 40x_2 = 600$

a) Encuentre la forma pendiente-ordenada al origen de esta ecuación.
b) Use esta forma para identificar la pendiente y la intersección de esta línea con el eje x_2.
c) Use la información del inciso *b*) para dibujar una gráfica de la recta.

D,I **3.1-5.*** Utilice el método gráfico para resolver el problema:

Maximizar $\quad Z = 2x_1 + x_2,$

sujeta a

$$x_2 \le 10$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\le 60 \\ x_1 + x_2 &\le 18 \\ 3x_1 + x_2 &\le 44 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

D,I **3.1-6.** Utilice el método gráfico para resolver el problema:

Maximizar $\quad Z = 10x_1 + 20x_2,$

sujeta a

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 15 \\ x_1 + x_2 &\le 12 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 45 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

3.1-7. La empresa Whitt Window tiene sólo tres empleados que hacen dos tipos de ventanas a mano: con marco de madera y con marco de aluminio. La ganancia es de \$180 por cada ventana con marco de madera y de \$90 por cada una con marco de aluminio. Doug hace marcos de madera y puede terminar 6 al día. Linda hace 4 marcos de aluminio por día. Bob forma y corta el vidrio y puede hacer 48 pies cuadrados de vidrio por día. Cada ventana con marco de madera emplea 6 pies cuadrados de vidrio y cada una de aluminio, 8 pies cuadrados.

La compañía desea determinar cuántas ventanas de cada tipo debe producir al día para maximizar la ganancia total.

a) Describa la analogía entre este problema y el de Wyndor Glass Co. que se presentó en la sección 3.1. Después construya y llene una tabla como la 3.1 de este problema, e identifique las actividades y los recursos.
b) Formule un modelo de programación lineal para este problema.
D,I ***c***) Use el método gráfico para resolver el modelo.
I ***d***) Un nuevo competidor también produce ventanas con marco de madera. Esta circunstancia puede forzar a la compañía a reducir el precio y por ende la ganancia debida a este tipo de ventanas. ¿Cómo cambiaría la solución óptima (si cambia) si la ganancia por ventana de madera disminuyera de \$180 a \$120? ¿Y de \$180 a \$60? (Puede resultar útil emplear el procedimiento de análisis gráfico y análisis de sensibilidad del IOR Tutorial.)
I ***e***) Doug piensa disminuir sus horas de trabajo, lo cual reduciría el número de ventanas de madera que produce por día. ¿Cómo cambiaría la solución óptima si hace sólo 5 marcos diarios? (Puede resultar útil emplear el procedimiento de análisis gráfico y análisis de sensibilidad del IOR Tutorial.)

3.1-8. La compañía WorldLight produce dos dispositivos para lámparas (productos 1 y 2) que requieren partes de metal y componentes eléctricos. La administración desea determinar cuántas unidades de cada producto debe fabricar para maximizar la ganancia. Por cada unidad del producto 1 se requieren 1 unidad de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricos. Por cada unidad del producto 2 se necesitan 3 unidades de partes de metal y 2 unidades de componentes eléctricos. La compañía tiene 200 unidades de partes de metal y 300 de componentes eléctricos. Cada unidad del producto 1 da una ganancia de \$1 y cada unidad del producto 2, hasta 60 unidades, da una ganancia de \$2. Cualquier exceso de 60 unidades del producto 2 no genera ganancia, por lo que fabricar más de esa cantidad está fuera de consideración.

a) Formule un modelo de programación lineal.
D,I ***b***) Utilice el método gráfico para resolver este modelo. ¿Cuál es la ganancia total que resulta?

3.1-9. La compañía de seguros Primo está en proceso de introducir dos nuevas líneas de productos: seguro de riesgo especial e hipotecas. La ganancia esperada es de \$5 por el seguro de riesgo especial y de \$2 por unidad de hipoteca.

La administración desea establecer las cuotas de venta de las nuevas líneas para maximizar la ganancia total esperada. Los requerimientos de trabajo son los siguientes:

	Horas de trabajo por unidad		Horas de trabajo disponibles
Departamento	**Riesgo especial**	**Hipoteca**	
Suscripciones	3	2	2 400
Administración	0	1	800
Reclamaciones	2	0	1 200

a) Formule un modelo de programación lineal.
D,I ***b***) Use el método gráfico para resolver el modelo.
c) Verifique el valor exacto de su solución óptima del inciso *b*) con la solución algebraica de las dos ecuaciones simultáneas relevantes.

3.1-10. Weenies and Buns es una planta procesadora de alimentos que fabrica hot dogs y pan para hot dogs. Muelen su propia harina a una tasa máxima de 200 libras por semana. Cada pan requiere 0.1 libras. Tienen un contrato con Pigland, Inc., que especifica la entrega de 800 libras de productos de puerco cada lunes. Cada hot dog requiere $\frac{1}{4}$ de libra de producto de puerco. Se cuenta con suficiente cantidad del resto de los ingredientes de ambos productos. Por último, la mano de obra consiste en 5 empleados de tiempo completo (40 horas por semana). Cada hot dog requiere 3 minutos de trabajo y cada pan 2 minutos de este insumo. Cada hot dog proporciona una ganancia de \$0.80 y cada pan \$0.30.

Weenies and Buns desea saber cuántos hot dogs y cuántos panes debe producir cada semana para lograr la ganancia más alta posible.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

D,I ***b)*** Use el método gráfico para resolver el modelo.

3.1-11.* La compañía manufacturera Omega discontinuó la producción de cierta línea de productos no redituable. Esta medida creó un exceso considerable de capacidad de producción. La administración quiere dedicar esta capacidad a uno o más de tres productos, llamados 1, 2 y 3. En la siguiente tabla se resume la capacidad disponible de cada máquina que puede limitar la producción:

Tipo de máquina	Tiempo disponible (en horas-máquina por semana)
Fresadora	500
Torno	350
Rectificadora	150

El número de horas-máquina que se requieren para elaborar cada unidad de los productos respectivos es

Coeficiente de productividad (en horas-máquina por unidad)

Tipo de máquina	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Fresadora	9	3	5
Torno	5	4	0
Rectificadora	3	0	3

El departamento de ventas indica que las ventas potenciales de los productos 1 y 2 exceden la tasa máxima de producción y que las ventas potenciales del producto 3 son de 20 unidades por semana. La ganancia unitaria sería de \$50, \$20 y \$25, para los productos 1, 2 y 3, respectivamente. El objetivo es determinar cuántos productos de cada tipo debe producir la compañía para maximizar la ganancia.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

C ***b)*** Utilice una computadora para resolver este modelo mediante el método símplex.

D **3.1-12.** Considere el siguiente problema, donde el valor de c_1 todavía no se ha establecido.

Maximizar $Z = c_1x_1 + x_2$,

sujeta a

$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Use el método gráfico para determinar la(s) solución(es) óptima(s) de (x_1, x_2) para los diferentes valores posibles de $c_1(-\infty < c_1 < \infty)$.

D **3.1-13.** Considere el siguiente problema, donde el valor de k todavía no se ha establecido.

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_2 \leq 3$$
$$kx_1 + x_2 \leq 2k + 3, \quad \text{donde } k \geq 0$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

La solución que se usa por ahora es $x_1 = 2, x_2 = 3$. Utilice el análisis gráfico para determinar los valores de k tales que esta solución sea de hecho óptima.

D **3.1-14.** Considere el siguiente problema para el que no se han determinado los valores de c_1 y c_2.

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2$,

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \leq 11$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Utilice el análisis gráfico para determinar la o las soluciones óptimas de (x_1, x_2) para los diferentes valores posibles de c_1 y c_2. (*Sugerencia:* Separe los casos en los cuales $c_2 = 0$, $c_2 > 0$ y $c_2 < 0$. En los dos últimos casos centre su atención en la razón de c_1 sobre c_2.)

3.2-1. La siguiente tabla resume los hechos importantes sobre dos productos, A y B y los recursos Q, R y S que se requieren para producirlos.

Recurso	Recursos utilizados por unidad de producto: Producto A	Producto B	Cantidad de recursos disponibles
Q	2	1	2
R	1	2	2
S	3	3	4
Ganancia por unidad	3	2	

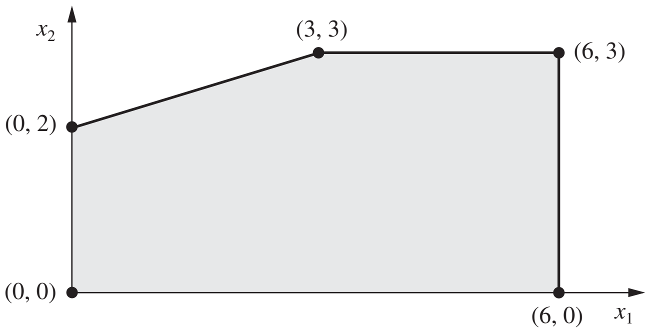
Todos los supuestos de programación lineal se cumplen.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

D,I ***b)*** Resuelva este modelo en forma gráfica.

c) Verifique el valor exacto de la solución óptima en *b)* mediante la solución algebraica simultánea de las dos ecuaciones relevantes.

3.2-2. El área sombreada de la siguiente gráfica representa la región factible de un problema de programación lineal cuya función objetivo debe maximizarse.



Diga si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera y después justifique su respuesta con base en el método gráfico. En cada caso dé un ejemplo de una función objetivo que ilustre su respuesta.

a) Si (3, 3) produce un valor más grande de la función objetivo que (0, 2) y (6, 3), entonces (3, 3) debe ser una solución óptima.
b) Si (3, 3) es una solución óptima y existen soluciones óptimas múltiples, entonces uno de los dos, (0, 2) o (6, 3), también debe ser una solución óptima.
c) El punto (0, 0) no puede ser una solución óptima.

3.2-3.* Hoy es su día de suerte. Acaba de ganar un premio de \$10 000. Dedicará \$4 000 a impuestos y diversiones, pero ha decidido invertir los otros \$6 000. Al oír esta noticia, dos amigos le han ofrecido una oportunidad de convertirse en socio en dos empresas distintas, cada una planeada por uno de ellos. En ambos casos, la inversión incluye dedicar parte de su tiempo el siguiente verano y dinero en efectivo. Para ser un socio *pleno* en el caso del primer amigo debe invertir \$5 000 y 400 horas, y su ganancia estimada (sin tomar en cuenta el valor de su tiempo) sería de \$4 500. Las cifras correspondientes para el segundo caso son \$4 000 y 500 horas, con una ganancia estimada igual a la anterior. Sin embargo, ambos amigos son flexibles y le permitirían asociarse con cualquier *fracción* de participación que quiera. Si elige una participación parcial, todas las cifras dadas para la sociedad plena (inversión de dinero y tiempo, y la ganancia) se pueden multiplicar por esta fracción.

Como de todas formas usted busca un trabajo de verano interesante (máximo 600 horas), ha decidido participar en una o ambas empresas en alguna combinación que maximice su ganancia total estimada. Usted debe resolver el problema de encontrar la mejor combinación.

a) Describa la analogía entre este problema y el de la Wyndor Glass Co. que se presentó en la sección 3.1. Después construya y llene una tabla como la 3.1 para manejar este problema, e identifique las actividades y los recursos.
b) Formule un modelo de programación lineal para este problema.
D,I ***c***) Use el método gráfico para resolver el modelo. ¿Cuál es su ganancia total estimada?

D,I **3.2-4.** Use el método gráfico para encontrar todas las soluciones óptimas del siguiente modelo:

Maximizar $Z = 500x_1 + 300x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 15x_1 + 5x_2 &\le 300 \\ 10x_1 + 6x_2 &\le 240 \\ 8x_1 + 12x_2 &\le 450 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

D **3.2-5.** Utilice el método gráfico para demostrar que el siguiente modelo no tiene soluciones factibles.

Maximizar $Z = 5x_1 + 7x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\le -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\le -1 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

D **3.2-6.** Suponga que se proporcionaron las siguientes restricciones de un modelo de programación lineal.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\le 50 \\ -2x_1 + x_2 &\le 50 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

a) Demuestre que la región factible no está acotada.
b) Si el objetivo es maximizar $Z = -x_1 + x_2$, ¿tiene el modelo una solución óptima? Si es así, encuéntrela. Si no, explique las razones de ello.
c) Repita el inciso *b*) cuando el objetivo es maximizar $Z = x_1 - x_2$.
d) En las funciones objetivo con las cuales el modelo no tiene solución óptima, ¿significa que no existen buenas soluciones según el modelo? Explique. ¿Qué es probable que esté mal en la formulación del modelo?

3.3-1. Reconsidere el problema 3.2-3. Indique por qué cada uno de los cuatro supuestos de programación lineal (sección 3.3) parece que se satisface de modo razonable. ¿Es algún supuesto más dudoso que los otros? Si es así, ¿qué debe hacerse para tomar esto en cuenta?

3.3-2. Considere un problema con dos variables de decisión, x_1 y x_2, que representan los niveles de las actividades 1 y 2, respectivamente. Los valores permitidos para cada variable son 0, 1 y 2, en donde las combinaciones factibles de estos valores de las dos variables están determinadas por una serie de restricciones. El objetivo es maximizar cierta medida de desempeño denotada por *Z*. Se estima que los valores de *Z* para los valores posiblemente factibles de (x_1, x_2) son los que se dan en la siguiente tabla:

	x_2		
x_1	0	1	2
0	0	4	8
1	3	8	13
2	6	12	18

Con base en esta información indique si este problema satisface por completo cada uno de los supuestos de programación lineal. Justifique sus respuestas.

3.4-1. Lea el artículo mencionado que describe todo el estudio de IO que se resume en el primer recuadro de aplicación de la sección 3.4. Describa de manera breve cómo se aplicó la programación lineal en este estudio. Después enumere los diferentes beneficios financieros y de otro tipo que resultaron de este estudio.

3.4-2. Lea el artículo referenciado que describe todo el estudio de IO que se resume en el segundo recuadro de aplicación de la sección 3.4. Describa de manera breve cómo se aplicó la programación lineal en este estudio. Después enumere los diferentes beneficios financieros y no financieros que resultaron de este estudio.

3.4-3.* Para cada uno de los cuatro supuestos de programación lineal de la sección 3.3 escriba un análisis de un párrafo sobre la medida en que se aplican correctamente a los siguientes ejemplos que se presentan en la sección 3.4:
a) Diseño de terapia de radiación (Mary).
b) Planeación regional (Southern Confederation of Kibbutzim).
c) Control de contaminación del aire (Nori & Leets Co.).

3.4-4. Para cada uno de los cuatro supuestos de programación lineal de la sección 3.3 escriba un análisis de un párrafo sobre la medida en que se aplican correctamente a los siguientes ejemplos que se presentan en la sección 3.4.
a) Reciclado de desechos sólidos (Save-It Co.).
b) Programación de personal (Union Airways).
c) Distribución de bienes a través de una red (Distribution Unlimited Co.).

D,I **3.4-5.** Utilice el método gráfico para resolver el problema:

Minimizar $Z = 15x_1 + 20x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

D,I **3.4-6.** Utilice el método gráfico para resolver este problema:

Minimizar $Z = 3x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 8 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

D **3.4-7.** Considere el siguiente problema, donde el valor de c_1 no se ha determinado.

Maximizar $Z = c_1x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1 - x_2 &\geq 2 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Use el método gráfico para determinar la(s) solución(es) de (x_1, x_2) para los valores posibles de c_1.

D,I **3.4-8.** Considere el siguiente modelo:

Minimizar $Z = 40x_1 + 50x_2$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 30 \\ x_1 + x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 20 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

a) Use el método gráfico para resolver este modelo.
b) ¿Cómo varía la solución óptima si la función objetivo cambia a $Z = 40x_1 + 70x_2$? (Puede resultar útil emplear el procedimiento de análisis gráfico y análisis de sensibilidad mediante el IOR Tutorial.)
c) ¿Cómo varía la solución óptima si la tercera restricción funcional cambia a $2x_1 + x_2 \geq 15$? (Puede resultar útil emplear el procedimiento de análisis gráfico y análisis de sensibilidad mediante el IOR Tutorial.)

3.4-9. La carne con papas es el plato favorito de Ralph Edmund. Por eso decidió hacer una dieta continua de sólo estos dos alimentos (más algunos líquidos y suplementos de vitaminas) en todas sus comidas. Ralph sabe que ésa no es la dieta más sana y quiere asegurarse de que toma las cantidades adecuadas de los dos alimentos para satisfacer los requerimientos nutricionales. Él ha obtenido la información nutricional y de costo que se muestra en el siguiente cuadro.

Ralph quiere determinar el número de porciones diarias (pueden ser fraccionales) de res y papas que cumplirían con estos requerimientos a un costo mínimo.
a) Formule un modelo de programación lineal.
D,I ***b***) Use el método gráfico para resolver el modelo.
C ***c***) Utilice una computadora para resolver este modelo por el método símplex.

	Gramos de ingrediente por porción		
Ingrediente	**Res**	**Papas**	**Requerimiento diario (gramos)**
Carbohidratos	5	15	≥ 50
Proteínas	20	5	≥ 40
Grasa	15	2	≤ 60
Costo por porción	$4	$2	

3.4-10. Web Mercantile vende muchos productos para el hogar mediante un catálogo en línea. La compañía necesita un gran espacio para almacenar los productos. En la actualidad planea rentar espacio para los siguientes 5 meses. Se sabe cuánto espacio necesitará cada mes, pero como dicha superficie es muy variable, puede ser más económico rentar sólo la cantidad necesaria cada mes con contratos mensuales. Por otro lado, el costo adicional de rentar espacio para meses adicionales es menor que para el primero, y puede ser menos costoso rentar el espacio máximo los 5 meses. Otra opción es el enfoque intermedio de cambiar la cantidad total de espacio rentado (con un nuevo contrato y/o la terminación del anterior) al menos una vez pero no cada mes.

El espacio que se requiere y los costos de los periodos de arrendamiento son los siguientes:

Mes	Espacio requerido (ft^2)
1	30 000
2	20 000
3	40 000
4	10 000
5	50 000

Periodo de arrendamiento (meses)	Costo por ft^2 arrendado
1	$ 65
2	$100
3	$135
4	$160
5	$190

El objetivo es minimizar el costo total de arrendamiento para cumplir con los requerimientos.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

C ***b***) Resuelva este modelo por el método símplex.

3.4-11. Larry Edison es el director del centro de cómputo de Buckly College, en donde debe programar las horas de trabajo del personal del centro. Abre desde las 8 a.m. hasta la medianoche. Larry estudió el uso del centro en las diferentes horas del día y determinó los siguientes números de asesores en computación necesarios:

Horarios	Número mínimo de asesores requeridos
8 a.m.-12 p.m.	4
12 p.m.-4 p.m.	8
4 p.m.-8 p.m.	10
8 p.m.-12 a.m.	6

Puede contratar dos tipos de asesores: de tiempo completo y de tiempo parcial. Los primeros trabajan 8 horas consecutivas en cualquiera de los siguientes turnos: matutino (8 a.m.-4 p.m.), vespertino (12 p.m.-8 p.m.) y nocturno (4 p.m.-12 a.m.). Estos asesores ganan $40 por hora.

Los asesores de tiempo parcial pueden trabajar cualquiera de los cuatro turnos enumerados en la tabla anterior y ganan $30 por hora.

Un requisito adicional es que durante todos los periodos debe haber al menos dos asesores de tiempo completo por cada uno de tiempo parcial.

Larry desea determinar cuántos asesores de tiempo completo y cuántos de tiempo parcial debe haber en cada turno para cumplir con los requisitos a un costo mínimo.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

C ***b***) Resuelva este modelo por el método símplex.

3.4-12.* La Medequip Company produce equipos de precisión de diagnóstico médico en dos fábricas. Se han recibido pedidos de tres centros médicos para la producción de este mes. La tabla presenta el costo unitario de envío desde cada fábrica a cada centro. Además, muestra el número de unidades que se producirán en cada fábrica y el número de unidades ordenadas por cada cliente.

De \ A	Costo unitario de envío			Producción
	Cliente 1	Cliente 2	Cliente 3	
Fábrica 1	$600	$800	$700	400 unidades
Fábrica 2	$400	$900	$600	500 unidades
Tamaño de unidades	300 unidades	200 unidades	400 unidades	

Ahora debe tomar la decisión sobre el plan de cuántas unidades enviar de cada fábrica a cada cliente.

a) Formule un modelo de programación lineal.

C ***b***) Resuelva el modelo por el método símplex.

3.4-13.* Al Ferris tiene $60 000 que desea invertir ahora para usar lo que se acumule en la compra de un fondo de retiro en 5 años. Después de consultar a su asesor financiero, le ofrecieron cuatro tipos de inversiones de ingreso fijo, las inversiones A, B, C y D.

Las inversiones A y B están disponibles al principio cada uno de los siguientes 5 años (años 1 a 5). Cada dólar invertido en A al iniciar el año reditúa $1.40 (ganancia de $0.40) 2 años después (a tiempo para invertir de inmediato). Cada dólar invertido en B al principio de un año ofrece $1.70 tres años después.

Las inversiones C y D estarán disponibles una sola vez en el futuro. Cada dólar invertido en C al principio del año 2 genera $1.90 al final del 5. Cada dólar invertido en D al principio del año 5 produce $1.30 al final de ese año.

Al desea saber cuál plan de inversión maximiza la cantidad de dinero acumulada al principio del año 6.

a) Todas las restricciones funcionales de este problema se pueden expresar como igualdades. Para hacerlo, sean A_t, B_t, C_t y D_t las cantidades respectivas invertidas en A, B, C y D al principio del año t si la inversión está disponible y llegará a su madurez al final del año 5. También sea R_t la cantidad de dinero disponible *no* invertida al principio del año t (también disponible para invertir en un año posterior). Así, la cantidad invertida al principio del año t *más* R_t debe ser igual a la cantidad disponible para inversión en ese tiempo. Escriba una ecuación en términos de las variables relevantes para el inicio de cada uno de los 5 años para obtener las cinco restricciones funcionales de este problema.

b) Formule un modelo de programación lineal completo.

C ***c***) Resuelva este modelo por el método símplex.

3.4-14. Metalco Company desea hacer una nueva aleación con 40% de aluminio, 35% de zinc y 25% de plomo a partir de varias aleaciones disponibles que tienen las siguientes propiedades:

Propiedad	Aleación 1	2	3	4	5
Porcentaje de aluminio	60	25	45	20	50
Porcentaje de zinc	10	15	45	50	40
Porcentaje de plomo	30	60	10	30	10
Costo ($/libra)	77	70	88	84	94

El objetivo es determinar las proporciones de estas aleaciones que deben mezclarse para producir la nueva aleación a un costo mínimo.

a) Formule un modelo de programación lineal.
C *b*) Resuelva este modelo por el método símplex.

3.4-15.* Un avión de carga tiene tres compartimientos para almacenar: delantero, central y trasero. Estos compartimientos tienen un límite de capacidad tanto de *peso* como de *espacio*. Los datos se resumen a continuación:

Compartimiento	Capacidad de peso (ton)	Capacidad de espacio (ft^3)
Delantero	12	7 000
Central	18	9 000
Trasero	10	5 000

Más aún, para mantener el avión balanceado, el peso de la carga en los respectivos compartimientos debe ser proporcional a su capacidad.

Se tienen ofertas para transportar cuatro cargamentos en un vuelo próximo ya que se cuenta con espacio:

Carga	Peso (ton)	Volumen (ft^3/ton)	Ganancia ($/ton)
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Se puede aceptar cualquier fracción de estas cargas. El objetivo es determinar cuál cantidad de cada carga debe aceptarse (si se acepta) y cómo distribuirla en los compartimientos para maximizar la ganancia del vuelo.
a) Formule un modelo de programación lineal.
C *b*) Resuelva el modelo por el método símplex para encontrar una de sus soluciones óptimas múltiples.

3.4-16. Oxbridge University tiene una computadora grande para uso de académicos, estudiantes de doctorado y ayudantes de investigación. Durante las horas hábiles debe haber un trabajador para operar y dar mantenimiento a la computadora y realizar algunos servicios de programación. Beryl Ingram, director del centro de cómputo, coordina la operación.

Al principio del semestre de otoño, Beryl se enfrenta al problema de asignar horas de trabajo distintas a sus operadores. Debido a que éstos son estudiantes de la universidad, están disponibles para el trabajo sólo un número limitado de horas al día, como se muestra en la tabla.

		Máximo de horas disponibles				
Operadores	**Tasa salarial**	**Lun.**	**Mar.**	**Mier.**	**Jue.**	**Vie.**
K. C.	$10.00/hora	6	0	6	0	6
D. H.	$10.10/hora	0	6	0	6	0
H. B.	$ 9.90/hora	4	8	4	0	4
S. C.	$ 9.80/hora	5	5	5	0	5
K. S.	$10.80/hora	3	0	3	8	0
N. K.	$11.30/hora	0	0	0	6	2

Hay seis operadores (cuatro de licenciatura y dos de posgrado). Todos tienen salarios diferentes según su experiencia con computadoras y su aptitud para programar. La tabla muestra estos salarios junto con el número máximo de horas al día que cada uno puede trabajar.

Se garantiza a cada operador un número mínimo de horas de trabajo a la semana que lo mantendrán con un conocimiento adecuado de la operación. Este nivel se estableció de modo arbitrario en 8 horas por semana para licenciatura (K. C., D. H., H. B. y S. C.) y 7 horas por semana para posgrado (K. S. y N. K).

El centro de cómputo debe abrir de 8 a.m. a 10 p.m. de lunes a viernes con un operador de guardia en este horario. Sábados y domingos, lo operan otras personas.

Debido al presupuesto reducido, Beryl tiene que minimizar el costo. Por lo tanto, quiere determinar el número de horas que debe asignar a cada operador cada día.
a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.
C *b*) Resuelva este modelo por el método símplex.

3.4-17. Joyce y Marvin tienen una guardería. Intentan decidir qué dar a los niños de almuerzo. Desean mantener sus costos bajos, pero también deben cumplir con los requerimientos nutritivos de los niños. Ya decidieron darles sándwiches de mantequilla de maní y mermelada y alguna combinación de galletas, leche y jugo de naranja. El contenido nutritivo de cada alimento y su costo se presenta en la siguiente tabla.

Ingredientes	Calorías de grasa	Calorías totales	Vitamina C (mg)	Proteína (g)	Costo (¢)
Pan (l rebanada)	10	70	0	3	5
Mantequilla de maní (1 cuch.)	75	100	0	4	4
Mermelada de fresa (1 cuch.)	0	50	3	0	7
Galleta (1 pieza)	20	60	0	1	8
Leche (1 taza)	70	150	2	8	15
Jugo (1 taza)	0	100	120	1	35

Los requerimientos nutritivos son los siguientes. Cada niño debe recibir de 400 a 600 calorías. No más de 30% de las calorías totales deben provenir de grasas. Cada niño debe consumir al menos 60 mg de vitamina C y 12 g de proteína. Todavía más, por razones prácticas, cada niño necesita 2 rebanadas de pan (para un sándwich), al menos el doble de mantequilla de maní que de mermelada y al menos una tasa de líquido (leche y/o jugo de naranja).

Joyce y Marvin desean seleccionar las opciones de alimento para cada niño que minimice el costo mientras cumple con los requerimientos establecidos.
a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.
C *b*) Resuelva el modelo por el método símplex.

3.5-1. Lea el artículo referenciado que describe el estudio de IO que se resume en el Recuadro de aplicación de la sección 3.5. Describa brevemente cómo se aplicó la programación lineal en este estudio. Después enumere los diferentes beneficios financieros y de otro tipo que resultaron de este estudio.

3.5-2.* Se cuenta con los siguientes datos de un problema de programación lineal cuyo objetivo es maximizar la ganancia de asignar tres recursos a dos actividades no negativas.

Recurso	Uso de recursos por unidad de cada actividad		Cantidad de recursos disponible
	Actividad 1	Actividad 2	
1	2	1	10
2	3	3	20
3	2	4	20
Contribución por unidad	\$20	\$30	

Contribución por unidad = ganancia por unidad de la actividad.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

D,I *b*) Use el método gráfico para resolver este modelo.

c) Despliegue el modelo en una hoja de cálculo.

d) Use la hoja de cálculo para verificar las siguientes soluciones: $(x_1, x_2) = (2, 2), (3, 3), (2, 4), (4, 2), (3, 4), (4, 3)$. ¿Cuáles son factibles? ¿Cuál de las soluciones factibles tiene el mejor valor de la función objetivo?

C *e*) Utilice el Excel Solver para resolver el modelo por el método símplex.

3.5-3. Ed Butler es gerente de producción de Bilco Corporation, que produce tres tipos de refacciones para automóviles. La manufactura de cada parte requiere procesamiento en dos máquinas, con los siguientes tiempos de procesado (en horas):

Máquina	Parte		
	A	B	C
1	0.02	0.03	0.05
2	0.05	0.02	0.04

Cada máquina está disponible 40 horas al mes. La ganancia unitaria de cada parte fabricada está dada por:

	Parte		
	A	B	C
Utilidad	\$300	\$250	\$200

Ed quiere determinar la mezcla de refacciones que debe producir para maximizar la ganancia total.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

b) Despliegue el modelo en una hoja de Excel.

c) Realice tres estimaciones de la solución óptima. Use la hoja de cálculo para verificar la factibilidad de cada una y, si es posible, encuentre el valor de la función objetivo. ¿Qué estimación tiene el mejor valor de la función objetivo?

d) Utilice Excel Solver para resolver este modelo por el método símplex.

3.5-4. Usted cuenta con los siguientes datos de un problema de programación lineal cuyo objetivo es minimizar el costo de realizar dos actividades no negativas para lograr tres beneficios que nunca estén por debajo de ciertos niveles mínimos.

Beneficio	Contribución al beneficio por unidad de actividad		Nivel mínimo aceptable
	Actividad 1	Actividad 2	
1	5	3	60
2	2	2	30
3	7	9	126
Costo unitario	\$60	\$50	

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.

D,I *b*) Utilice el método gráfico para resolver este modelo.

c) Despliegue el modelo en una hoja de Excel.

d) Use la hoja de cálculo para verificar las siguientes soluciones: $(x_1, x_2) = (7, 7), (7, 8), (8, 7), (8, 8), (8, 9), (9, 8)$. ¿Cuáles soluciones son factibles? ¿Cuál de ellas tiene el mejor valor objetivo?

C *e*) Use el Excel Solver para resolver el modelo por el método símplex.

3.5-5.* Fred Jonasson administra la granja de su familia. Para complementar varios alimentos que se cultivan en la granja, Fred también cría cerdos para venta y desea determinar las cantidades de los distintos tipos de alimento disponibles (maíz, grasas y alfalfa) que debe dar a cada cerdo. Como éstos se comerán cualquier mezcla de estos tipos de alimento, el objetivo es determinar cuál de ellas cumple ciertos requisitos nutritivos a un *costo mínimo*. En la siguiente tabla se presentan las unidades de cada tipo de ingrediente nutritivo básico que contiene 1 kilogramo de cada tipo de alimento, junto con los requisitos de nutrición diarios y los costos de los alimentos:

Ingrediente nutritivo	Kilogramo de maíz	Kilogramo de nutrimento	Kilogramo de alfalfa	Requerimiento mínimo diario
Carbohidratos	90	20	40	200
Proteína	30	80	60	180
Vitaminas	10	20	60	150
Costo (¢)	84	72	60	

a) Formule el modelo de programación lineal para este problema.

b) Despliegue el modelo en una hoja de Excel.

c) Utilice la hoja de cálculo para verificar: si $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 2)$ es factible y, si lo es, cuál sería el costo diario de esta dieta. ¿Cuántas unidades de cada ingrediente nutritivo proporciona al día esta dieta?

d) Tome unos minutos para usar un enfoque de prueba y error con la hoja de cálculo a fin de obtener la mejor estimación de la solución óptima. ¿Cuál es el costo diario de su solución?

C *e*) Use el Excel Solver para resolver el modelo por el método símplex.

3.5-6. Maureen Laird es directora de inversiones de Alva Electric Co., empresa importante en el medio oeste. La compañía ha programado la construcción de nuevas plantas hidroeléctricas a 5, 10 y 20 años para cumplir con las necesidades de la creciente población en la región que sirve. Maureen debe invertir parte del dinero de la compañía para cubrir sus necesidades de efectivo futuras. Puede comprar sólo tres tipos de activos, cada una de las cuales cuesta 1 millón. Se pueden comprar unidades fraccionarias. Los activos producen ingresos a 5, 10 y 20 años, y el ingreso se necesita para cubrir necesidades mínimas de flujos de efectivo en esos años. (Cualquier ingreso arriba del mínimo que se requiere para cada periodo se usará para incrementar el pago de dividendos a los accionistas en lugar de ahorrarlo para ayudar a cumplir con los requerimientos mínimos de efectivo del siguiente periodo.) La tabla que se presenta a continuación muestra la cantidad de ingreso generada por cada unidad de acciones y la cantidad mínima de ingreso requerida para cada periodo futuro en que se construirá una nueva planta.

	Ingresos por acción			Flujo de efectivo requerido
Año	**Activo 1**	**Activo 2**	**Activo 3**	
5	\$2 millones	\$1 millón	\$0.5 millones	\$400 millones
10	\$0.5 millones	\$0.5 millones	\$1 millón	\$100 millones
20	0	\$1.5 millones	\$2 millones	\$300 millones

Maureen desea determinar la mezcla de inversiones en estas acciones que cubrirá los requerimientos de efectivo y que minimizará la cantidad total invertida.

a) Formule un modelo de programación lineal para este problema.
b) Despliegue el modelo en una hoja de cálculo.
c) Utilice la hoja de cálculo para verificar la posibilidad de comprar 100 unidades de la acción 1, 100 de la acción 2 y 200 de la 3. ¿Cuánto efectivo generará esta mezcla de inversiones dentro de 5, 10 y 20 años, respectivamente? ¿Cuál será la cantidad total invertida?
d) Utilice el enfoque de prueba y error con la hoja de cálculo para obtener su mejor solución óptima. ¿Cuál es la inversión total de su solución?
C ***e***) Use Excel Solver para resolver el modelo por el método símplex.

3.6-1. La Philbrick Company tiene dos plantas en lados opuestos de Estados Unidos. Cada una produce los mismos dos productos y los vende a distribuidores en su mitad del país. Ya se recibieron las órdenes de los distribuidores para los próximos 2 meses (febrero y marzo); el número de unidades que se requieren se muestra en la tabla. (La compañía no está obligada a cumplir totalmente estas órdenes, pero lo hará, si puede, sin disminuir sus ganancias.)

	Planta 1		Planta 2	
Producto	**Febrero**	**Marzo**	**Febrero**	**Marzo**
1	3 600	6 300	4 900	4 200
2	4 500	5 400	5 100	6 000

Cada planta tiene 20 días de producción disponibles en febrero y 23 en marzo para producir y enviar los productos. Los inventarios se agotan al final de enero, pero cada planta tiene suficiente capacidad de inventario para 1 000 unidades en total de los dos productos, si se produce un exceso en febrero para venta en marzo. En cualquier planta, el costo de mantener inventario de esta manera es de \$3 por unidad del producto 1 y \$4 por unidad del producto 2.

Cada planta tiene los mismos dos procesos de producción que se pueden usar para producir cualquiera de estos productos. El costo de producción por unidad producida se muestra en la tabla para cada proceso en cada planta.

	Planta 1		Planta 2	
Producto	**Proceso 1**	**Proceso 2**	**Proceso 1**	**Proceso 2**
1	\$62	\$59	\$61	\$65
2	\$78	\$85	\$89	\$86

A continuación se presenta la tasa de producción de cada producto (número de unidades de ese producto fabricadas por día) mediante cada proceso en cada planta.

	Planta 1		Planta 2	
Producto	**Proceso 1**	**Proceso 2**	**Proceso 1**	**Proceso 2**
1	100	140	130	110
2	120	150	160	130

El ingreso neto por ventas (precio de venta menos costos de envío normal) que recibe la compañía cuando una planta vende los productos a sus propios clientes (distribuidores en su mitad del país) es de \$83 por unidad del producto 1 y \$112 por unidad del producto 2. Sin embargo, también es posible (y en ocasiones deseable) que una planta haga un envío a la otra mitad del país para ayudar a satisfacer la venta de la otra. Cuando esto ocurre se incurre en un costo adicional de \$9 en el caso del producto 1 y \$7 en el del producto 2.

La administración debe determinar cuánto fabricar de cada producto mediante cada proceso en cada planta cada mes, al igual que cuánto debe vender cada planta de cada producto cada mes y cuánto debe enviar cada planta de cada producto cada mes a los clientes de la otra planta. El objetivo es determinar el plan factible que maximice la ganancia total (ingresos netos por venta menos la suma de los costos de producción, de inventario y los costos adicionales de envío).

a) Formule un modelo completo de programación lineal en forma algebraica para mostrar las restricciones individuales y las variables de decisión.
C ***b***) Formule el mismo modelo en una hoja de Excel. Después use Excel Solver para resolverlo.
C ***c***) Use MPL para formular el modelo en forma compacta. Después use CPLEX de MPL para resolverlo.
C ***d***) Use LINGO para formular el modelo en forma compacta. Después use LINGO para resolverlo.

C **3.6-2.** Reconsidere el problema 3.1-11.
a) Use MPL/CPLEX para formular y resolver el modelo para este problema.
b) Use LINGO para formular y resolver este modelo.

C **3.6-3.** Reconsidere el problema 3.4-12.
a) Use MPL/CPLEX para formular y resolver el modelo para este problema.
b) Use LINGO para formular y resolver este modelo.

C **3.6-4.** Reconsidere el problema 3.4-16.
a) Use MPL/CPLEX para formular y resolver el modelo para este problema.
b) Use LINGO para formular y resolver este modelo.

C **3.6-5.** Reconsidere el problema 3.5-5.
***a*)** Use MPL/CPLEX para formular y resolver el modelo para este problema.
***b*)** Use LINGO para formular y resolver este modelo.

C **3.6-6.** Reconsidere el problema 3.5-6.
***a*)** Use MPL/CPLEX para formular y resolver el modelo para este problema.
***b*)** Use LINGO para formular y resolver este modelo.

3.6-7. Una fábrica grande de papel, la Quality Paper Corporation, tiene 10 molinos de papel para surtir a 1 000 clientes. Usa tres tipos alternativos de máquinas y cuatro tipos de materia prima para hacer cinco tipos diferentes de papel. Por lo tanto, la compañía debe desarrollar un plan detallado para distribuir mensualmente la producción, con el objeto de minimizar el costo total de producir y distribuir el papel durante el mes. En particular, es necesario determinar conjuntamente la cantidad de cada tipo de papel que debe producir en cada planta, en cada tipo de máquina *y* la cantidad de cada tipo de papel que debe enviar de cada planta a cada cliente.

Los datos relevantes se pueden expresar de manera simbólica como sigue:

D_{jk} = número de unidades del tipo de papel k demandadas por el cliente j,
r_{klm} = número de unidades de materia prima m necesarias para producir 1 unidad del tipo de papel k en la máquina tipo l,
R_{im} = número de unidades de materia prima m disponibles en la planta i,
c_{kl} = número de unidades de capacidad de la máquina tipo l que producirán una unidad de papel tipo k,
C_{il} = número de unidades de capacidad de la máquina tipo l disponibles en la planta i,
P_{ikl} = costo de producción de cada unidad de papel tipo k producida en la máquina tipo l en la planta i,
T_{ijk} = costo de transporte de cada unidad de papel tipo k enviada de la planta i al cliente j.

***a*)** Utilice estos símbolos para formular a mano un modelo de programación lineal para este problema.
***b*)** ¿Cuántas restricciones funcionales y variables de decisión tiene este modelo?
C ***c*)** Use MPL para formular este problema.
C ***d*)** Use LINGO para formular este problema.

3.7-1. De la última parte de las referencias seleccionadas que se presentan al final del capítulo, seleccione una de las aplicaciones de programación lineal ganadoras de premios. Lea el artículo y después escriba un resumen de dos páginas de la aplicación y los beneficios que proporcionó (incluya los beneficios no financieros).

3.7-2. De la última parte de las referencias seleccionadas que se presentan al final del capítulo, seleccione tres de las aplicaciones de programación lineal ganadoras de premios. Para cada una, lea el artículo y después escriba un resumen de una página de la aplicación y los beneficios que proporcionó (incluya los beneficios no financieros).

CASOS

CASO 3.1 Ensamble de automóviles

Automobile Alliance, una gran compañía manufacturera de automóviles, organiza los vehículos que fabrica en tres familias: camiones, automóviles pequeños y una familia de autos medianos y de lujo. Una planta fuera de Detroit, MI, ensambla dos modelos de la familia de autos medianos y de lujo. El primer modelo, el Thrillseeker, es un sedán cuatro puertas con asientos de vinil, interiores de plástico, características estándar y un excelente rendimiento. Se promociona como una buena compra para familias de clase media con presupuestos reducidos. Cada Thrillseeker que se vende genera una ganancia modesta de $3 600 para la compañía. El segundo modelo, el Classy Cruiser, es un sedán de lujo de dos puertas con asientos de piel, interiores de madera, características personalizadas y gran capacidad de navegación. Se vende como un símbolo de opulencia a familias de clase media-alta y cada uno genera una buena ganancia de $5 400.

Rachel Rosencrantz, gerente de la planta de ensamblado, debe decidir el programa de producción del próximo mes. En especial, debe determinar cuántos Thrillseekers y cuántos Classy Cruisers se tienen que ensamblar en la planta para maximizar la ganancia de la compañía. Sabe que la planta tiene una capacidad de 48 000 horas de mano de obra al mes. También, que para ensamblar un Thrillseeker se emplean 6 horas-hombre y un Cruise Classy 10.5 horas-hombre.

Debido a que en la planta sólo se ensambla, las partes que se requieren para los dos modelos no se producen en ella. En su lugar, se envían de otras plantas ubicadas en el área de Michigan. Por ejemplo, llantas, volantes, ventanas, asientos y puertas llegan de varias plantas proveedoras. Para el próximo mes, Rachel sabe que podrá obtener sólo 20 000 puertas (10 000 izquierdas y 10 000 derechas) del proveedor de ellas. Una huelga de trabajadores forzó el cierre de esa fábrica durante varios días, y no podrá cumplir con su programa de producción para el siguiente mes. Tanto el Thrillseeker como el Classy Cruiser usan la misma puerta.

Además, un pronóstico reciente de la compañía sobre la demanda del mes de los diferentes modelos sugiere que la venta del Classy Cruiser se limitaría a 3 500 autos. No existe un tope a la demanda del Thrillseeker dentro de los límites de capacidad de la planta de ensamblado.

***a*)** Formule y resuelva un problema de programación lineal para determinar el número de autos Thrillseeker y Classy Cruiser que deben ensamblarse.

Antes de tomar las decisiones de producción finales, Rachel planea explorar los siguientes aspectos por separado, excepto donde se indique otra cosa.

***b*)** El departamento de marketing sabe que puede intentar una campaña de publicidad de $500 000 que elevará la demanda del Classy Cruiser 20% el próximo mes. ¿Debe realizarse la campaña?

c) Rachel sabe que puede aumentar la capacidad de producción de la planta el próximo mes si usa tiempo extra. El incremento de horas-hombre puede ser de 25%. Con la nueva capacidad, ¿cuántos modelos Thrillseeker y cuántos Classy Cruiser deben ensamblarse?

d) Rachel sabe que el tiempo extra genera un costo adicional. ¿Cuál es la máxima cantidad que debe estar dispuesta a pagar por todo el tiempo extra adicional al costo del tiempo normal? Exprese su respuesta como una sola suma.

e) Rachel estudia la opción de usar tanto la campaña de publicidad como las horas de tiempo extra. La campaña eleva 20% la demanda del Classy Cruiser y el tiempo extra aumenta 25% la capacidad de la planta. ¿Cuántos modelos Thrillseeker y cuántos Classy Cruiser deben ensamblarse con la campaña publicitaria y las horas extra si cada Classy Cruiser que se venda mantendrá su contribución de 50% más que la venta de un Thrillseeker?

f) Si se sabe que la campaña de publicidad cuesta $500 000 y el uso máximo de horas-trabajo de tiempo extra cuesta $ 1 600 000 más que el tiempo normal, la solución que se encontró en el inciso *e*) ¿es adecuada comparada con la solución del inciso *a*)?

g) Automobile Alliance ha determinado que, en realidad, los distribuidores hacen grandes descuentos al precio del Thrillseeker para sacarlo del lote. Por un acuerdo de ganancias compartidas con ellos, la compañía no obtendrá la ganancia de $3 600 en el Thrillseeker sino que ganará sólo $2 800. Determine el número de autos Thrillseeker y de Classy Cruiser que deben ensamblarse dado este nuevo precio con descuento.

h) La compañía descubrió problemas de calidad en el Thrillseeker mediante pruebas aplicadas aleatoriamente a unidades del Thrillseeker al final de la línea de ensamblado. Los inspectores detectaron que en más de 60% de los casos, dos de las cuatro puertas del automóvil no sellaban bien. Como el porcentaje de autos Thrillseeker defectuosos determinado por el muestreo aleatorio es tan alto, el supervisor de planta decidió realizar pruebas de control de calidad a todos los vehículos al final de la línea. Debido a las pruebas adicionales, el tiempo para ensamblar un auto aumentó de 6 a 7.5 horas. Determine el número de unidades de cada modelo que deben ensamblarse dado este nuevo tiempo de ensamblado.

i) El consejo directivo de Alliance desea captar un mayor porcentaje de mercado para el sedán de lujo y quisiera cumplir con toda la demanda del Classy Cruiser. Por ello, pidieron a Rachel que determine cuánto disminuiría la ganancia de su planta de ensamblado comparada con la ganancia del inciso *a*). Pueden pedirle que cumpla con toda la demanda de este modelo sólo si la disminución de la ganancia no supera los $2 000 000.

j) Rachel quiere tomar la decisión final combinando todas las consideraciones de los incisos *f*), *g*) y *h*). ¿Cuáles son sus decisiones finales respecto de la campaña publicitaria, las horas extra y el número de autos Thrillseeker y Classy Cruiser que se deben ensamblar?

RESUMEN DE LOS CASOS ADICIONALES EN NUESTRO SITIO WEB (www.mhhe.com/hillier)

Caso 3.2 Disminución de costos en una cafetería

Este caso se enfoca en cierto problema que tiene un interés especial para muchos estudiantes. ¿Cómo puede el administrador de una cafetería universitaria elegir los ingredientes de un platillo para darle un sabor suficientemente bueno para los estudiantes, al mismo tiempo que disminuye sus costos? En este caso se pueden utilizar modelos de programación lineal con sólo dos variables de decisión para abordar siete diferentes aspectos a los que se tiene que enfrentar el administrador.

Caso 3.3 Asignación de personal en un centro de llamadas

El California Children's Hospital ha recibido numerosas quejas de clientes debido a su confuso proceso descentralizado de citas y registro. Por lo tanto, se ha decidido centralizar el proceso mediante un centro de llamadas dedicado sólo a citas y registro. El administrador del hospital debe desarrollar un plan que le ayude a decidir cuántos empleados de cada tipo (de tiempo completo o de medio tiempo, que hablen inglés, español o que sean bilingües) se deben contratar para cada uno de los posibles turnos de trabajo. Se requiere de programación lineal para encontrar un plan que minimice el costo total de proporcionar un nivel de servicio satisfactorio a lo largo de las 14 horas que el centro de llamadas estará abierto todos los días de la semana. El modelo requiere más de dos variables de decisión, por lo cual se necesitará algún paquete de software como los descritos en las secciones 3.5 y 3.6 o en el apéndice 3.1 para resolver las dos versiones del modelo.

Caso 3.4 Promoción de un cereal para el desayuno

El vicepresidente de comercialización de la Super Grain Corporation necesita desarrollar una campaña promocional para el nuevo cereal para el desayuno que ha lanzado su compañía. Se han elegido tres medios de comunicación para la campaña, pero ahora se deben tomar las decisiones acerca de cuánto se utilizará en cada medio. Las restricciones incluyen límites a los presupuestos para publicidad y planeación, el limitado número de anuncios de televisión que se pueden realizar, así como ciertos requerimientos para llegar a dos audiencias objetivo especiales (niños pequeños y sus padres) y para hacer uso completo de un programa de rebajas. El modelo de programación lineal correspondiente requiere más de dos variables de decisión, por lo que se necesitará algún paquete de software como los descritos en las secciones 3.5 y 3.6 o en el apéndice 3.1 para resolver el modelo. En este caso también se pide un análisis para determinar en qué medida satisface el problema los cuatro supuestos de la programación lineal. ¿La programación lineal en realidad proporciona una base racional para tomar la decisión en esta situación? (El caso 12.3 será una continuación de este caso.)