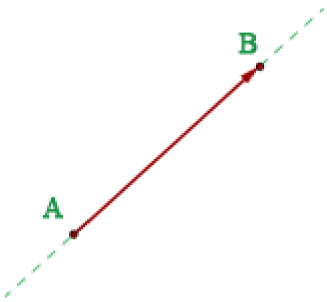
UNIDAD 4: Parte I

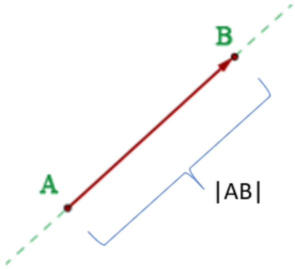
Vectores

Un Vector es un segmento de recta orientado. que va del punto A (**origen**) al punto B (**extremo**).

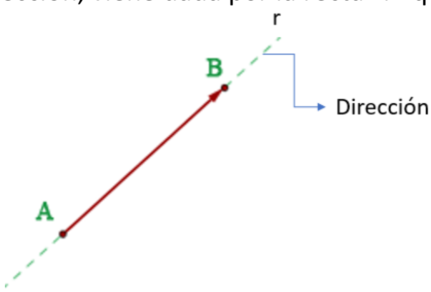


Se caracteriza por:

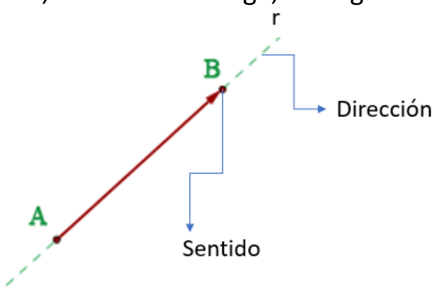
1. Su módulo, que es la longitud del segmento AB.
   Se expresa: $|AB|$



2. Su dirección, viene dada por la recta "r" que la atraviesa, o en la que se apoya.



3. Su sentido, es donde se dirige, en el gráfico de referencia $\overrightarrow{AB}$. Es decir, va desde A hasta B.



Un vector no tiene una ubicación definida; puede trasladarse a cualquier lugar del plano sin modificar ni su módulo, ni su orientación (dirección y sentido). Por esta razón se dice que los vectores son libres.

Los vectores se expresan con una letra minúscula de la siguiente forma "$\vec{v}$"; o con dos letras mayúsculas, su origen y su extremo respectivos. Por ejemplo, " $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ " indica el vector que tiene origen en A y su extremo en el B.

Los vectores sirven para representar magnitudes geométricas y físicas que tienen módulo, dirección y sentido, como traslaciones, velocidades y fuerzas. Como lo que caracteriza a un vector es su módulo, su dirección y su sentido, dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

SISTEMA DE REFERENCIA:

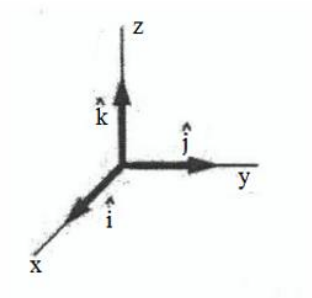
Reciben el nombre de ejes coordenados
(eje x , eje y en el plano es decir en R2 y eje x, eje y, eje z en el espacio es decir R3).

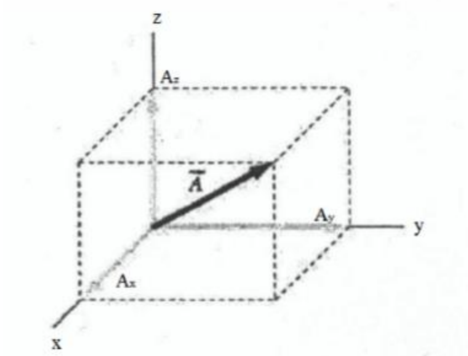
Cada dirección de los ejes coordenados viene indicada por un vector unitario:

al eje de las X, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{i}$ o también denominado $\hat{i}$.

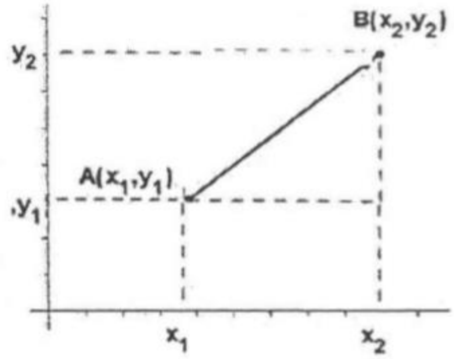
al eje Y, le corresponderá el vector unitario $\vec{j}$ o también denominado $\hat{j}$.

Finalmente, al eje Z, le dejaremos corresponder el vector unitario $\vec{k}$ o también denominado $\hat{k}$ Estos vectores unitarios indican además el sentido positivo de los ejes





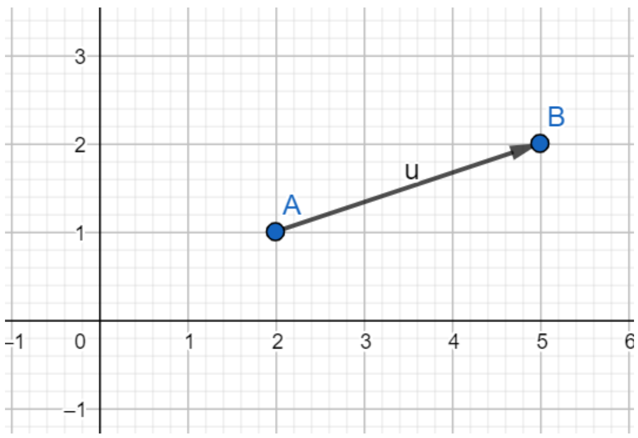
COMPONENTES DE UN VECTOR:



Un vector puede ponerse en función del sistema de referencia.
Se puede expresar el vector como las coordenadas de su extremo y su origen.

Coordenadas: $A\ x_1;y_1\ ;B\ x_2;y_2$

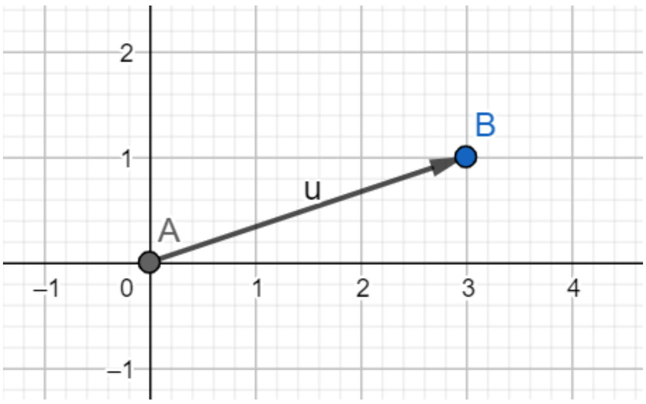
$\overrightarrow{AB}= x_2-x_1;y_2-y_1$



Coordenada de los puntos: A= (2; 1)   B(5; 2)

Vector libre:

$\vec{u}=(5-2;2-1)=(3;1)$



Podemos expresar el vector en el origen de la siguiente forma:

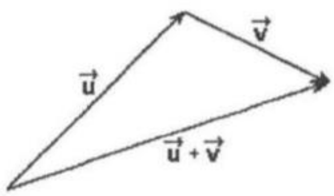
En función de los vectores unitarios (i y j)

$\vec{u} = 3i + 1j$

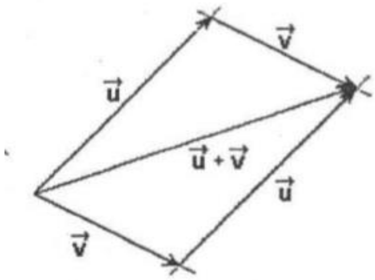
OPERACIONES CON VECTORES: FORMA GRÁFICA Y ANALÍTICA

Suma y resta

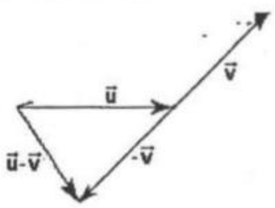
La **suma** de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es otro vector $\vec{u}+\vec{v}$ obtenido de la siguiente forma:



O mediante la regla del paralelogramo:



Para restar, al primer vector le sumamos el vector opuesto del segundo:
Gráficamente:



Para sumar/restar vectores, se suman/resta, componente a componentes.

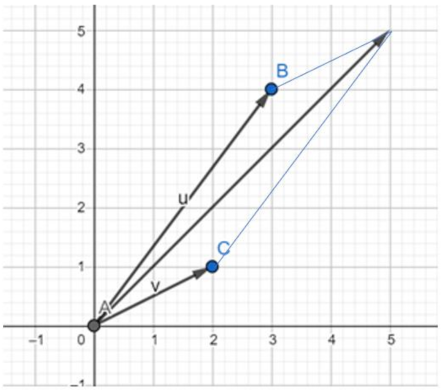
Ejemplo: Sean los vectores

$\vec{u} = (3; 4) \quad y \quad \vec{v} = (2; 1)$

Suma

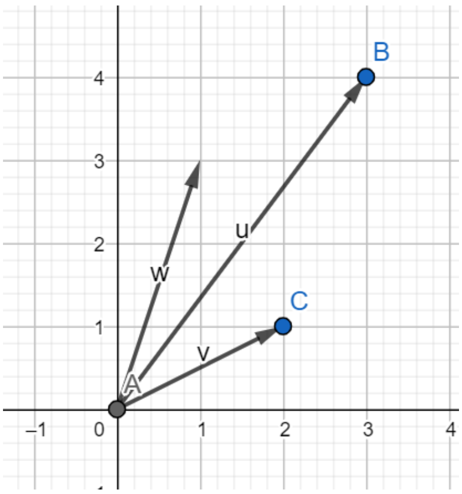
$\vec{u} + \vec{v} = (3 + 2; 4 + 1) \qquad \vec{u} + \vec{v} = 5i + 5j$

Gráficamente,



Resta

$\vec{u} - \vec{v} = (3 - 2; 4 - 1) \qquad \vec{u} - \vec{v} = \vec{w} = 1i + 3j$



MÓDULO DE UN VECTOR

Es la longitud del segmento, por lo tanto siempre es un número positivo. También se denomina norma.
Lo calculamos de la siguiente forma:

En R^2 : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

En R^3 : $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y + u^2{}_z} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Si $\|\vec{u}\| = 1$, es un vector unitario o versor.

Cumple las siguientes propiedades:

a - $\|\vec{u}\| \geq 0,$

b - $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

c - $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

d - $\|k.\vec{u}\| = |k|.\|\vec{u}\|$

Ejemplo

$\vec{u} = (3;4)$

$\|\vec{u}\| = \sqrt[2]{3^2+4^2} = \sqrt{25}$

$\|\vec{u}\| = 5$

¿Es un vector Normalizado?

La Normalización de Vectores consiste en obtener un vector unitario (de módulo igual a 1) con la misma dirección y sentido.

El vector $\vec{u} = (3;4)$ no está normalizado, ya que su módulo es 5.

¿Podemos normalizarlo?

Normalizar un vector dado: es encontrar el versor u asociado a él, tal que:

u es de norma 1

u tiene la misma dirección y sentido que u

u es múltiplo escalar del vector u con $\vec{u} = k.u$

Para normalizar el vector $\vec{u}$ se debe multiplicar a dicho vector por el recíproco de su módulo

$$u = \frac{1}{\|u\|}\vec{u}$$

$$\vec{u} = (u_x, u_y) \Rightarrow u = \left(\frac{u_x}{\|\vec{u}\|}, \frac{u_y}{\|\vec{u}\|}\right)$$

Se Busca el vector Normal asociado a $\vec{u}$:

$\vec{u} = (3;4)$

$\vec{u} = \left(\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ esta ahora Normalizado.

¿Podemos verificarlo?

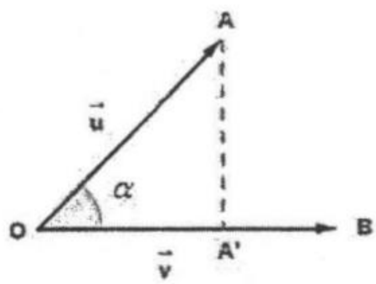
Si, podemos calcular la norma y nos tiene que dar 1

$\|\vec{u}\| = \sqrt[2]{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}$

$\|\vec{u}\| = 1$

Ángulo entre vectores:

Ángulo entre dos vectores $\vec{u},\vec{v}$ no nulos, es $\alpha = ang(\vec{u},\vec{v})$, el ángulo que determinan las direcciones de los vectores $\vec{u},\vec{v}$ cuando se los toma ubicados en un origen común y se satisface la relación $0 \le \alpha \le \pi$, Cuando el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{2}$ diremos que los dos vectores son **ortogonales (perpendiculares)**

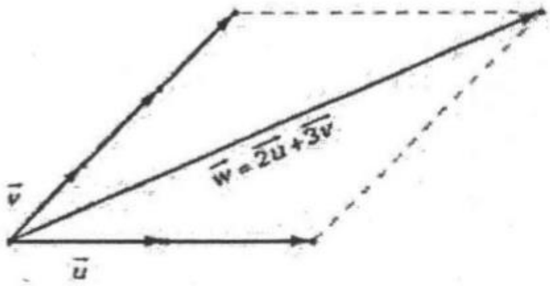


COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados dos vectores: $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números: a y b, el vector $a\vec{u}+b\vec{v}$ se dice que es una combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Una combinación lineal de dos o más vectores es el vector que se obtiene al sumar esos vectores multiplicados por sendos escalares.

$$v = a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n}$$

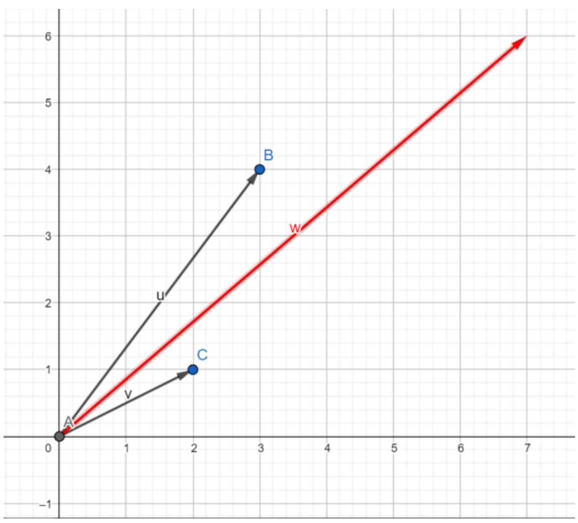


Cualquier vector se puede poner como combinación lineal de otros dos que tengan distinta dirección.

$$\vec{w} = \overrightarrow{2u} + \overrightarrow{3v}$$

Esta combinación lineal es única.

$\boldsymbol{\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}}$



Ejemplos:

1. Verificar si el vector $\vec{w} = (2;5)$ es Combinación Lineal de $\vec{u} = (2;3)\ y\ \vec{v} = (4;2)$
   ¿Cómo lo podemos resolver?

   Sabemos que si w es C.L de los otros dos vectores, entonces:

   $\vec{w} = a * \vec{u} + b * \vec{v}$
   Buscamos los valores de "a" y "b", ¿Cómo?
   Igualamos componente a componente, luego de distribuir el valor numérico.

   $(2;5) = a * (2;3) + b * (4;2)$

   $(2;5) = (2a + 4b; 3a + 2b)$

   Entonces, al igualar nos queda…

$2 = 2a + 4b$
$5 = 3a + 2b$

Podemos resolverlo al unirlo con un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 = 2a + 4b \\ 5 = 3a + 2b \end{cases}$$

Cálculo Auxiliar

$$\begin{array}{l} \ \ 2 = 2a + 4b \\ \underline{10 = 6a + 4b} \\ -8 = -4a + 0b \end{array}$$

$\frac{-8}{-4} = a$

$a = 2$ reemplazo en cualquier ecuación anterior $2 = 2 * 2 + 4 * b,\ despejamos\ b = -\frac{1}{2}$

Como obtuvimos que " $a = 2$ y $b = -\frac{1}{2}$ ", por lo tanto, el vector w es C.L de u y v.

$\boxed{(2;5) = 2 * (2;3) + (-\frac{1}{2}) * (4;2)}$ $\boxed{\vec{w} = 2 * \vec{u} + (-\frac{1}{2}) * \vec{v}}$

2. Expresa el vector $\vec{m}$ = (1, 2, 3) como combinación lineal de los vectores: $\vec{u}$ = (1, 0, 1), $\vec{v}$ = (1, 1, 0) y $\vec{w}$ = (0, 1, 1).

   Si existen, " a, b y c diferentes de cero de forma simultánea, entonces $\vec{m}$ es CL entre los otros tres.

   $\vec{m} = a * \vec{u} + b * \vec{v} + c * \vec{w}$

   $(1;2;3) = a * (1,0,1),\ + b * (1,1,0) + c * (0,1,1)$

   Lo expresamos como sistema, y resolvemos el mismo:

   $$\begin{cases} 1 = a + b \\ 2 = b + c \\ 3 = a + c \end{cases}$$

   El resultado es

   $a = 1$ $b = 0$ $c = 2$

   $\vec{m} = 1 * \vec{u} + 0 * \vec{v} + 2 * \vec{w}$

   Entonces, $\vec{m}$ es CL de los otros tres vectores.

Vectores linealmente dependientes

Varios vectores libres del plano se dice que son linealmente dependientes si hay una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal.

$$\boxed{a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \cdots + a_n \vec{v_n} = \vec{0}}$$

Propiedades

1. Si varios vectores son linealmente dependientes, entonces al menos uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los demás.

$$a_1\,\overrightarrow{v_1}+a_2\,\overrightarrow{v_2}+\cdots+a_3\,\overrightarrow{v_3}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{v_1}=-\frac{a_2}{a_1}\overrightarrow{v_2}-\frac{a_3}{a_1}\overrightarrow{v_3}$$

También se cumple el reciproco: si un vector es combinación lineal de otros, entonces todos los vectores son linealmente dependientes.

2. Dos vectores del plano son linealmente dependientes si, y sólo si, son paralelos.

3. Dos vectores libres del plano $\vec{u}$ = (u1, u2) y $\vec{v}$ = (v1, v2) son linealmente dependientes si sus componentes son proporcionales.

$$\vec{u}=k\vec{v} \qquad\qquad (u_1,\ u_2)=k\,(v_1,\ v_2)$$

$$\frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=k$$

Vectores linealmente independientes

Varios vectores libres son linealmente independientes si ninguno de ellos puede ser escrito con una combinación lineal de los restantes.

$$a_1\,\overrightarrow{v_1}+a_2\,\overrightarrow{v_2}+\cdots+a_n\,\overrightarrow{v_n}=\vec{0}$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

Los vectores linealmente independientes tienen distinta dirección y sus componentes no son proporcionales.

Podemos analizar primero, los tipos de solución posibles:

$\begin{cases} \_a+\_b+\_c=0 \\ \_a+\_b+\_c=0 \\ \_a+\_b+\_c=0 \end{cases}$ Para resolver el sistema utilizamos Método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ - & - & - & 0 \\ - & - & - & 0 \end{array}\right) \quad Triangulamos\ para\ ver\ los\ posibles\ resultados\ de\ a, b\ y\ c$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$ A partir de esta expresión podemos sacar las conclusiones

1. Nunca podrá ser un sistema incompatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & a & tendria\ que\ ser\ un\ número\ diferente\ a\ cero \end{array}\right)$$

2. Si a=0, entonces: se anula toda la fila 3. Quedando

   $\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Entonces encontramos que se combinan, por lo tanto, son vectores L. Dependientes

3. Si a≠0, entonces: nos queda la solución trivial

   $a=b=c=0$

   $\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ 0 & - & - & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$ Entonces son vectores L. Independientes

Ejemplo:

1. **Indicar si los vectores u, v y w son linealmente dependientes o independientes.**
   $\boldsymbol{a.}\ \vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1,1,0})\ \ \vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{0,2,3})\ \ \vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{1,2,3})$

$$\vec{o} = a * (1{,}1{,}0) + b * (0{,}2{,}3) + c * (1{,}2{,}3)$$
$$\vec{o} = (a + c; a + 2b + 2c; 3b + 3c)$$

Comparamos componentes

$$0 = a + c$$
$$0 = a + 2b + 2c$$
$$0 = 3b + 3c$$

Tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas, debemos armar un sistema para poder encontrar las 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases}$$

Como vemos, es un Sistema Homogéneo.
Pueden suceder dos cuestiones:

1. Nunca puede ser sistema Incompatible.

2. Pasamos el Sistema a Matriz para resolver por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) f2 - f1 \ldots f2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \frac{1}{2} f2 \ldots f2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) f3 - 3f2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, $\frac{3}{2}$ c=0…………
c=0, b=0 y a=0.

Por lo tanto, los vectores son Linealmente Independiente.

Otra forma de ver si son L. I o L. D. es a través de los determinantes de la matriz

Recordatorio

$$\text{Sistema} \begin{cases} \Delta \neq 0 & \Rightarrow \text{Única Solución} \qquad \Rightarrow \text{S.C.D} \\ \Delta = 0 \begin{cases} \Delta_x = 0\ ;\ \Delta_y = 0\ ;\ \Delta_z = 0 \Rightarrow \text{Tiene Infinitas Soluciones} \Rightarrow \text{S.C.I} \\ \Delta_x \text{ ó } \Delta_y \text{ ó } \Delta_z \neq 0 \qquad \Rightarrow \text{No tiene Solución} \qquad \Rightarrow \text{S.I} \end{cases} \end{cases}$$

- **Si Δ = 0, entonces el sistema es compatible indeterminado. Conclusión, loa Vectores son L. D**

- **Si Δ ≠ 0, entonces el sistema es compatible determinado. Conclusión, tiene solución trivial, es decir, lo Vectores son L. I.**

Ejemplo

$a.\ \vec{u} = (1{,}1{,}0)\ \ \vec{v} = (0{,}2{,}3)\ \ \vec{w} = (1{,}2{,}3)$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2b + 2c = 0 \\ 3b + 3c = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \cancel{0 *.(-1)^{1+2}} * \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{1+3} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

- $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix} = 0 + 3 = 3$ Como el **$\Delta \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado.**

  Conclusión, tiene solución trivial, es decir, lo Vectores son L. I

  Cuando los vectores son Linealmente Independientes, no se puede formar una combinación Lineal.

Ejemplo

$\boldsymbol{b.}\ \vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})\quad \vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{3}, \mathbf{5}, \mathbf{5})\quad \vec{\boldsymbol{w}} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{8})$

$$\vec{o} = a * (1,1,3) + b * (3,5,5) + c * (2,1,8)$$

Comparamos componentes

$$0 = a + 3b + 2c$$
$$0 = a + 5b + c$$
$$0 = 3a + 5b + 8c$$

Tenemos 3 ecuaciones con 3 incógnitas, debemos armar un sistema para poder encontrar las 3 incógnitas:

$$\begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ a + 5b + c = 0 \\ 3a + 5b + 8c = 0 \end{cases}$$

Como vemos, es un Sistema Homogéneo.
Pueden suceder dos cuestiones:

1. Nunca puede ser sistema Incompatible.

2. Pasamos el Sistema a Matriz para resolver por el método de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 1 & 5 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0\end{array}\right) f2 - f1 \ldots f2 \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 5 & 8 & 0\end{array}\right) \underset{f3 - 3f1 \ldots f3}{\frac{1}{2} f2 \ldots f2} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 0\end{array}\right) f3 + 4f2 \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Entonces, $b - \frac{1}{2}c = 0$ $\qquad \boldsymbol{b = \frac{1}{2} c}$ $\qquad$ *No encontramos que* **c=0, b=0 y a=0.**

Por lo tanto, los vectores son Linealmente Dependiente.

Otra forma

$$\begin{cases} a + 3b + 2c = 0 \\ a + 5b + c = 0 \\ 3a + 5b + 8c = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1} * \begin{vmatrix}5 & 1\\ 5 & 8\end{vmatrix} + 1 *.(-1)^{2+1} * \begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 8\end{vmatrix} + 3.(-1)^{3+1} * \begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 5 & 8\end{vmatrix} = 35 - 14 - 21 = 0$$

Como $\Delta = 0$, entonces el sistema es compatible indeterminado. Conclusión, los Vectores son L. D

Trabajo Práctico UNIDAD 4:

Vectores (Parte I)

1.

Sean los vectores u = 2i – 3j + 4k, v = - 2i -3j + 5k, w = i -7j + 3k, t = 3i + 4j + 5k. Calcular.

a) u + v

b) t + 3w - v

c) 2v + 7t - w

d) u . v

e) el ángulo entre u y w

f) 2u – 7w +5v

g) el ángulo entre t y w

h) u . w – w .t

2.

Calcular la norma de los siguientes vectores:

a) u = (−2 , 1, 2)
b) v = (0, 2, 0)
c) w = (3, 0, −4)

3.

a) *. Exprese el vector v = (1, 2) como una combinación lineal de los vectores u = (-1, 0) y w = (3, 3).*

b) *. Exprese el vector v = (1, 1, -4) como una combinación lineal de los vectores u = (5, 0, 1) ,*

w = (3, 3 , 2) y z = (0, 2, 4)

4. Determinar los valores de k para que sean linealmente dependientes los vectores $\vec{u} = (3, k, -6)$ $\vec{v} = (-2, 1, k+3)$ $\vec{w} = (1, k+2, 4)$. Escribir vector u como combinación lineal de v y w, siendo k el valor calculado.

5. Indicar si los vectores u, v y w son linealmente dependientes o independientes. (Resuelto en el teórico)

   a. $\vec{u} = (1,1,0)$ $\vec{v} = (0,2,3)$ $\vec{w} = (1,2,3)$

   b. $\vec{u} = (1,1,3)$ $\vec{v} = (3,5,5)$ $\vec{w} = (2,1,8)$

6. Expresa el vector $\vec{m}$ = (1, 2, 3) como combinación lineal de los vectores: $\vec{u}$ = (1, 0, 1), $\vec{v}$ = (1, 1, 0) y $\vec{w}$ = (0, 1, 1). (resuelto en el teórico)

7.

Calcular el producto vectorial para los siguientes vectores

a) u = - 2i + 3j; v = - 7i + 4j

b) u = 10i + 7j - 3k; v = - 3i + 4j – 3k

c) u = i + 7j – 3k; v = - i – 7j + 3k

d) u = 2i + 4j - 6k; v = - i – j + 3k

8.

Comprobar si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes (para comprobarlo, utilizar el método del cálculo del determinante de la matriz que forman).

a) (1, 2, 0), (2, 3, 1), (1, 1, 1)
b) (−2, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 2)
c) (5, 0, 4), (0, 2, 0), (−6, 0, −5)

9.

Comprobar si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes.

a) $(1, 0, 1), (-2, 2, 1), (0, 0, 1)$
b) $(-1, 1, -1), (1, 1, 1), ((-1, 3, -1)$
c) $(3, 1, 3), (8, 1, 3), (4, 2, 3)$

10.

Calcular el valor de "a" para que los siguientes vectores sean linealmente independientes y linealmente dependientes:

a) $(2, -3, 1), (1, a, 3), (a, 1, 1)$
b) $(1, -2, a), (2, 1, 4), (1, 0, 1)$
c) $(a, 2, -1), (a, 2, 0), (1, 1, a)$

d) $(0, -1, 1), (2, -a, 2), (1, a, 1)$
e) $(2, -1, a), (2a, 1, 1), (1, 0, 1)$
f) $(1, a, -1), (a, 2, 0), (0, 2, -3a)$

UNIDAD 4: Parte II
Vectores

Producto escalar de dos vectores.
También llamado producto interior o producto punto.
Da por resultado un número real y está definido así:

En $\mathbb{R}^2$**:**

$\vec{v} = v_x, v_y \qquad \vec{u} = u_x, u_y \quad \Rightarrow \underline{\vec{v}.\vec{u} = v_x.u_x + v_y.u_y}$

Otra definición:

En R^2:

$\vec{v} = (v_x, v_y) \qquad \vec{u} = (u_x, u_y) \Rightarrow \vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.\cos\alpha, \quad \forall \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$

$\vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0$

En R^3, se hace en forma análoga.

El producto punto de dos vectores lo obtenemos multiplicando las componentes correspondientes y sumando los productos obtenidos, el resultado es un número real (escalar) por tal razón se llama producto escalar. Si $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $\vec{b} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, entonces el producto punto es el número dado por

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Teorema Si α es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

Dos vectores diferentes de cero se llaman perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es recto y por tanto el producto punto de los dos vectores es igual a cero.

Propiedades del producto escalar

1-Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

2 -Asociativa $\quad k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v}$

3- Distributiva $\quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \ \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

4-El producto escalar de un vector no nulo por sí mismo siempre es positivo.

$\vec{u} \neq 0 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

5 – Dos vectores no nulos son ortogonales (perpendiculares) si su producto interior es nulo.

6 – Si el producto interior de dos vectores es nulo, entonces alguno de los vectores es el vector nulo o los vectores son ortogonales

7 – El producto interior de un vector por si mismo es igual al cuadrado de la norma de dicho vector y recíprocamente la norma del vector es igual a la raíz cuadrada positiva del producto interior del vector por si mismo.

$R^2 : \vec{u}.\vec{u} = u_x u_x + u_y.u_y = u^2{}_x + u^2{}_y = \|\vec{u}\|^2$

Ángulo entre vectores:

De la definición de producto interno concluimos que el ángulo entre dos vectores esta dado por:

$$R^2 : \vec{u} = (u_x, u_y); \vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{u_x.v_x + u_y.v_y}{\sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y}.\sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y}}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{u_x.v_x + u_y.v_y}{\sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y}.\sqrt{u^2{}_x + u^2{}_y}}\right)$$

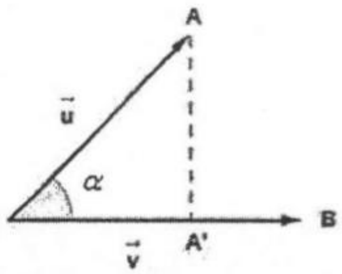
Análogamente en R^3.

Proyección

Cuando proyectamos ortogonalmente un vector sobre otro vector, el vector proyectado será múltiplo escalar del vector sobre el cual se proyecta.

Lo que nos interesa entonces es calcular el escalar k que determinará la multiplicidad del vector proyectado respecto del vector sobre el cual se realizó la proyección.

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores no nulos con origen en el mismo punto O. Llamamos $\vec{u_1}$ y $\vec{u_2}$ a la proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ y a la proyección de $\vec{u}$ sobre la dirección ortogonal a $\vec{v}$ .respectivamente.



En la figura, vemos que OA' es la proyección del vector u sobre el v.

$$COS\ \alpha = \frac{OA'}{|\vec{u}|} \Rightarrow OA' = |\vec{u}| \cdot COS\ \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot OA' \Rightarrow \boxed{OA' = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}} \Rightarrow$$ **PROYECCIÓN ESCALAR.**

$proy_{\vec{v}}\, \vec{u} = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} * \vec{v}$ ………….Proyección Ortogonal

Producto vectorial o producto cruz.

El producto vectorial de dos vectores es otro vector cuya dirección es perpendicular a los dos vectores y su sentido sería igual al avance de un sacacorchos al girar de u a v. Su módulo es igual a

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\, sen\, \alpha$$

Se puede expresar también mediante el siguiente determinante:

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = u_x\hat{i} + u_y.j + u_z.k \qquad \vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = v_x\hat{i} + v_y.j + v_z.k$

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} k =$$

$$= (u_y.v_z - v_y.u_z)\hat{i} - (u_x.v_z - v_x.u_z).j + (u_x.v_y - v_x.u_y).k$$

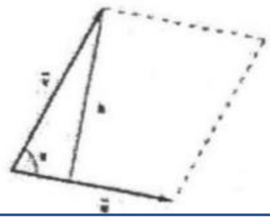
o

$$\vec{u}x\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix} \hat{j} \pm \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \hat{k}$$

$$= (u_y.v_z - v_y.u_z)\hat{i} - (u_x.v_z - v_x.u_z).\hat{j} + (u_x.v_y - v_x.u_y).\hat{k}$$

Geométricamente, el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo que tiene por lados a esos vectores.

$$\boxed{A = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}||\vec{v}| \operatorname{sen} \alpha = |\vec{u} \times \vec{v}|}$$



Propiedades:

1- Anticonmutativa: $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

2- Homogénea: $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v})$

3- Distributiva: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$.

4- El **producto vectorial** de dos **vectores paralelos** en igual al **vector nulo**:

$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

5- El **producto vectorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ es **perpendicular** a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.

Producto mixto

El producto mixto de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es igual al producto escalar del primer vector por el producto vectorial de los otros dos. El producto mixto se representa por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{w}\right)$$

El producto mixto de tres vectores es igual al determinante que tiene por filas las coordenadas de dichos vectores respecto a una base ortonormal.

$$\vec{w}.(\vec{u}x\vec{v}) = \begin{vmatrix} w_x & w_y & w_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Geométricamente el valor absoluto del producto mixto representa el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son três vectores que concurren en un mismo vértice.

Propiedades

1- El **producto mixto** no varía si se permutan circularmente sus factores, pero cambia de signo si éstos se trasponen.

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right] = \left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = -\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right] = -\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right] = -\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]$$

2-

Si **tres vectores** son **linealmente dependientes**, es decir si son coplanares, su producto mixto es nulo, vale 0

Trabajo Práctico UNIDAD 4:

Vectores (Parte II)

1. Determinar el valor del parámetro k para que los vectores

   $\vec{x} = k\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$, $\vec{y} = -\vec{u} + k\vec{v} + \vec{w}$ sean: a. ortogonales y b. paralelos

2.

   A) *Halle un vector unitario que resulte ortogonal a los vectores u = (1, 1,-3) v = (0,2, 4)*

   B) *Sean los vectores u = 3i + 4j y v = i + α j. Determine α tal que:*

   a) u y v sean ortogonales

   b) u y v sean paralelos

3.

   Halle dos vectores unitarios ortogonales tanto a w = 2i – 3j como a v = 4j + 3k.

4.

   En cada caso calcule el producto escalar de los dos vectores y el coseno del ángulo que forman.

   a) u = 2i + 5j; v = 5i + 2j *c) u = - 5i; v = 18j*

   b) u = -3i + 4j; v = - 2i - 7j *d) u = 4i + 5j; v = 5i – 4j*

5. .

.*Determina si los vectores son paralelos, ortogonales o ninguno de los dos casos. Luego dibuje cada*

.

a) $u = 3i + 5j;\ v = -6i - 10j$

b) $u = 2i + 3j;\ v = 6i + 4j$

c) $u = 2i + 3j;\ v = -6i + 4j$

d) $u = 2i - 6j;\ v = -i + 3j$

6. .

·*Determine el área del triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores u, v y w*

$$u = (1,0,-2)\quad v = (-1,1,0)\quad w = (2,-1,1)$$

7. .

Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $u = (-2, 1, 1)\ v = (1, 3, 0)$
b) $u = (-5, 4, -2)\ v = (2, -1, 2)$
c) $u = (3, -1, 1)\ v = (2, -1, 6)$

8. .

Calcule el área del paralelogramo de lados:

a) $(-2, 0,-2)$ y $(3, 1,-1)$
b) $2i + j$ y $5i - 2j + 2k$

9. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son:

a) A=(5, 2, -1), B=(3, 1, -1) y C=(-1, 4, -4)

b) A=(2, -1, 3), B=(3, 1, -1) y C=(-2, 1, 1)

c) A=(3, 2, 1), B=(4, 5, -1) y C=(-1, 3, -2)

d) A=(1, 1, 3), B=(2, -1, 5) y C=(-3, 3, 1)

e) A=(2, -1, 3), B=(-2, 1, 1) y C=(3, 1, -1)

f) A=(1, 1, 1), B=(3, 2, 1) y C= (-1, 3, 2)

g) A=(-1, 2, 4), B=(0, -1, 2) y C=(1, 1, 3)

h) A=(2, 1, -2), B=(-1, 3, 2) y C=(-3, -2, 1)

10. Hallar el área del triángulo que se encuentran formado por dos vectores:

a) $\vec{u} = (2,\ 1,\ -3)$ y $\bar{v} = (4,\ -1,\ 2)$
b) $\vec{u} = (3,\ -2,\ 5)$ y $\bar{v} = (2,\ 2,\ -1)$
c) $\vec{u} = (2,\ -2,\ 3)$ y $\bar{v} = (2,\ 1,\ 0)$

11. Hallar el volumen de los siguientes paralelepípedos:

a. $\vec{u} = (3;-2;5)\quad \vec{v} = (2;2;-1)\quad \vec{w} = (-4;3;2)$
b. $\vec{a} = (-1;1;2)\quad \vec{b} = (0;-3;1)\quad \vec{c} = (1;-1;3)$
c. $\vec{r} = (1;-2;2)\quad \vec{s} = (3;3;-1)\quad \vec{t} = (-3;-2;-3)$
d. $\vec{r} = (1;2;3)\quad \vec{s} = (-2;1;-1)\quad \vec{t} = (3;-1;-1)$