CAPÍTULO 5

Teoría del método símplex

En el capítulo 4 se presentó el mecanismo básico del método símplex. Ahora se profundizará un poco en este algoritmo al examinar parte de la teoría en que se apoya. En esta primera sección se estudian a detalle las propiedades algebraicas y geométricas generales que constituyen el fundamento del método símplex. Después se describe la *forma matricial* del método símplex, que simplifica en gran medida el procedimiento para realizarlo en computadora. En seguida, se utiliza esta forma matricial para presentar la idea fundamental sobre la propiedad del método símplex que permite deducir de qué manera los cambios que se hacen en el modelo original repercuten en la tabla símplex final. Esta idea proporcionará la clave para los temas importantes del capítulo 6 (teoría de dualidad y análisis de sensibilidad). Este capítulo concluye con la presentación del *método símplex revisado*, que simplifica aún más la forma matricial del método símplex. Por lo general, los programas de cómputo comerciales del método símplex están basados en el método símplex revisado.

5.1 FUNDAMENTOS DEL MÉTODO SÍMPLEX

En la sección 4.1 se introdujo el concepto de *soluciones factibles en un vértice* (*FEV*) y la función clave que desempeñan en el método símplex. Estos conceptos geométricos se relacionaron con el álgebra del método símplex de las secciones 4.2 y 4.3. Sin embargo, todo esto se hizo en el contexto del problema de la Wyndor Glass Co., que tiene sólo *dos variables de decisión* y, por lo mismo, tiene una interpretación geométrica directa. ¿Cómo pueden generalizarse estos conceptos a dimensiones mayores cuando se manejan problemas más grandes? La respuesta se dará en esta sección.

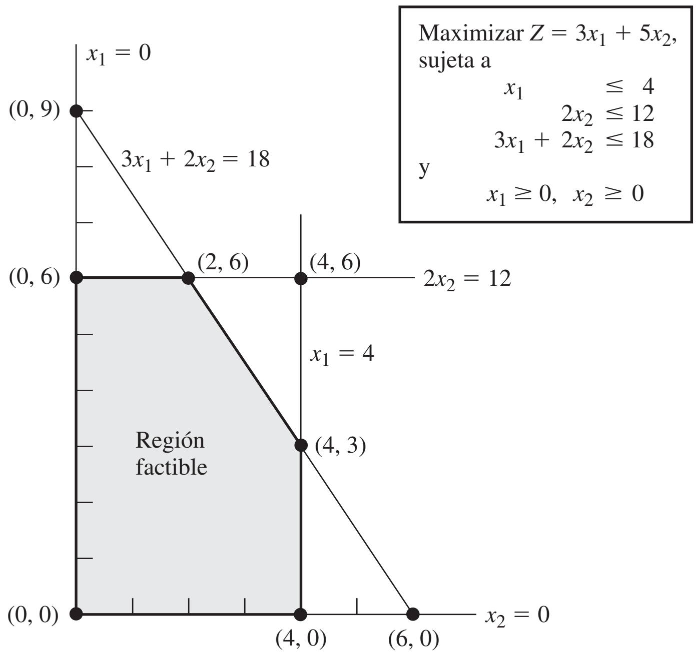
Para comenzar se introducirá parte de la terminología básica de cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión. Mientras se desarrolla esta tarea puede ser útil que el lector consulte la figura 5.1 (que es una repetición de la figura 4.1) para interpretar estas definiciones en dos dimensiones ($n = 2$).

Terminología

Puede entenderse de manera intuitiva que las soluciones óptimas de cualquier problema de programación lineal deben estar sobre la frontera de la región factible y, de hecho, ésta es una propiedad general. Como la frontera es un concepto geométrico, las definiciones iniciales aclaran cómo se puede identificar en forma algebraica la frontera de la región factible.

> La **ecuación de la frontera de restricción** de cualquier restricción se obtiene al sustituir su signo $\leq$, $=$ o $\geq$ por un signo $=$.

En consecuencia, la forma de la ecuación de una frontera de restricción es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ para las restricciones funcionales y $x_j = 0$ en el caso de las de no negatividad. Estas ecuaciones definen una figura geométrica "plana" (llamada **hiperplano**) en un espacio n dimensional, análoga a la recta en el espacio bidimensional y al plano en el espacio tridimensional. Este hiperplano forma la **frontera de restricción** de la restricción correspondiente. Cuando la restricción



■ **FIGURA 5.1**
Fronteras de restricción, ecuaciones de las fronteras de restricción y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

tiene signo $\leq$ o $\geq$, esta *frontera de restricción* separa los puntos que satisfacen la restricción (todos los puntos que se encuentran en un lado e incluyen a la frontera de restricción) de los puntos que la violan (todos aquellos que se encuentran del otro lado de la frontera de restricción). Cuando la restricción tiene un signo $=$, sólo los puntos sobre la frontera de restricción la satisfacen.

Por ejemplo, el problema de la Wyndor Glass Co. tiene cinco restricciones (tres funcionales y dos de no negatividad), de manera que tiene las cinco *ecuaciones de frontera de restricción* que se muestran en la figura 5.1. Como $n = 2$, los hiperplanos definidos por estas ecuaciones de frontera de restricción son simples rectas. Por lo tanto, las fronteras de restricción de las cinco restricciones son las cinco rectas que se muestran en la figura 5.1.

La **frontera** de la región factible consiste en aquellas soluciones factibles que satisfacen una o más de las ecuaciones de frontera de las restricciones.

En el sentido geométrico, cualquier punto sobre la frontera de la región factible se encuentra sobre uno o más de los hiperplanos definidos por las ecuaciones de frontera de restricción respectivas. En la figura 5.1, la frontera consiste en los cinco segmentos de recta más oscuros.

En seguida se da una definición general de *solución FEV* en el espacio de n dimensiones.

Una **solución factible en un vértice** (**FEV**) es una solución factible que no se encuentra en *cualquier* segmento rectilíneo[1] que conecta a *otras* dos soluciones factibles.

Como está implícito en esta definición, una solución factible que *está* sobre un segmento rectilíneo que conecta a otras dos soluciones factibles *no* es una solución FEV. Para ilustrar el caso en que $n = 2$, considere la figura 5.1. El punto (2, 3) *no* es una solución FEV, puesto que se encuentra en varios de estos segmentos, por ejemplo, en el segmento de recta que conecta los puntos (0, 3) y (4, 3). De igual manera, (0, 3) *no* es una solución FEV, porque se encuentra sobre el segmento de recta que conecta a (0, 0) con (0, 6). Sin embargo, (0, 0) es una solución FEV, porque es imposible hallar *otras* dos soluciones factibles que se encuentren en lados completamente opuestos de (0, 0). (Intente encontrarla.)

Cuando el número n de variables de decisión es mayor que 2 o 3, esta definición de *soluciones FEV* no es muy conveniente para identificarlas. Por lo tanto, una interpretación algebraica de estas soluciones resultará más útil. En el ejemplo de la Wyndor Glass Co., cada solución FEV de la figura 5.1 está en la intersección de dos rectas de restricción ($n = 2$), es decir, es una *solución simultánea*

[1] En el apéndice 2 se presenta una expresión algebraica de un segmento de recta.

de un sistema de dos ecuaciones de frontera de restricción. Esta situación se resume en la tabla 5.1, en la que las **ecuaciones de definición** se refieren a las ecuaciones de frontera de restricción que conducen a, o definen, las soluciones FEV indicadas.

> Para cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión, cada solución FEV se encuentra en la intersección de n fronteras de restricción; esto es, se trata de una *solución simultánea* de un sistema de n ecuaciones de frontera de restricción.

No obstante, esto no quiere decir que *todo* conjunto de n ecuaciones de frontera de restricción que se elija entre las $n + m$ restricciones (n restricciones de no negatividad y m restricciones funcionales) conduce a una solución factible en un vértice. En particular, la solución simultánea de un sistema de ecuaciones tal, puede violar una o más de las otras m restricciones no seleccionadas, en cuyo caso se trata de una solución *no factible* en un vértice. El ejemplo tiene tres soluciones de este tipo, como se resume en la tabla 5.2. (Verifique por qué son no factibles.)

Más aún, un sistema de n ecuaciones de frontera de restricción puede no tener solución. Esto ocurre dos veces en el ejemplo con los pares de ecuaciones: 1) $x_1 = 0$ y $x_1 = 4$, y 2) $x^2 = 0$ y $2x_2 = 12$. Tales sistemas no son de interés en el contexto de este libro.

La última posibilidad (que no ocurre en el ejemplo) es que un sistema de n ecuaciones de frontera de restricción tenga soluciones múltiples debido a ecuaciones redundantes. Tampoco es necesario preocuparse por un hecho de este tipo, puesto que el método símplex evita las dificultades del caso.

Debemos también hacer mención que es posible que más de un sistema con n ecuaciones de frontera de restricción nos arroje la misma solución CP. Por ejemplo, si la restricción $x_1 \leq 4$ en el caso del problema de Wyndor Glass Co. se fuera a reemplazar por $x_1 \leq 2$, observe en la figura 5.1 cómo se puede deducir la solución (2, 6) de cualquiera de los tres pares de ecuaciones de frontera de restricción. (Éste es un ejemplo de la *degeneración* que se estudió en un contexto diferente en la sección 4.5.)

Con el fin de resumir el ejemplo, con cinco restricciones y dos variables, existen 10 pares de ecuaciones de frontera de restricción. Cinco de ellos definieron las ecuaciones de las soluciones FEV (tabla 5.1), tres definieron las ecuaciones de las soluciones en vértice no factibles (tabla 5.2) y los dos pares del final no tuvieron solución.

Soluciones FEV adyacentes

En la sección 4.1 se presentaron las soluciones FEV adyacentes y su función en la solución de problemas de programación lineal. Ahora, se profundizará sobre esto.

Recuerde que en el capítulo 4 (cuando se ignoran las variables de holgura, de exceso y artificiales) cada iteración del método símplex se mueve de la solución FEV actual a una *adyacente*. ¿Cuál es la *trayectoria* que sigue este proceso? ¿Qué significa en realidad una solución FEV *adyacente*? Primero se contestará a estas preguntas desde el punto de vista geométrico y después se darán las interpretaciones algebraicas.

TABLA 5.1 Ecuaciones de definición de cada solución FEV del problema de la Wyndor Glass Co.

Solución FEV	Ecuaciones de definición
(0, 0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$
(0, 6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$
(2, 6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
(4, 3)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$
(4, 0)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$

TABLA 5.2 Ecuaciones de definición de cada solución no factible en un vértice del problema de la Wyndor Glass Co.

Solución no factible en un vértice	Ecuaciones de definición
(0, 9)	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$
(4, 6)	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$
(6, 0)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$

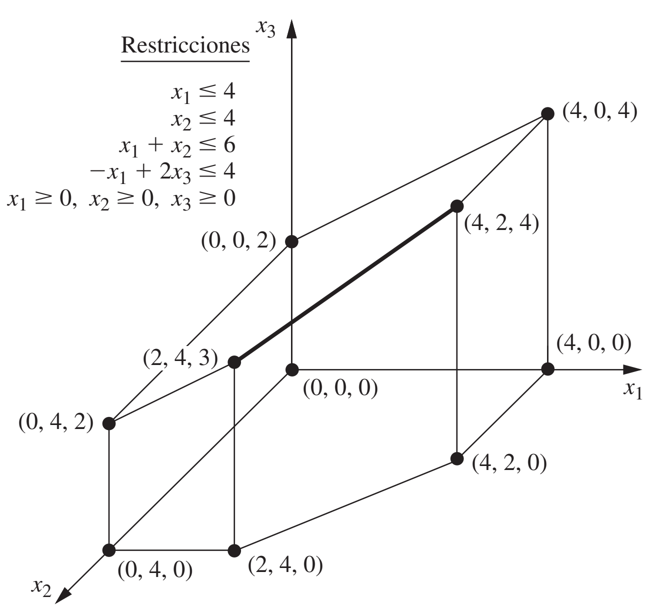
La respuesta a estas preguntas es sencilla cuando $n = 2$. En este caso, la *frontera* de la región factible consiste en varios *segmentos de recta* conectados de manera que forman un *polígono*, como lo muestran, en la figura 5.1, los cinco segmentos más oscuros. Estos segmentos de recta se conocen como *aristas* de la región factible. De cada solución FEV se originan dos de estas aristas que llevan a una solución FEV adyacente en el otro punto terminal. (Observe en la figura 5.1 que cada solución FEV tiene dos soluciones adyacentes.) Cada iteración sigue una trayectoria a lo largo de estas aristas al moverse de un punto terminal a otro. En la figura 5.1 la primera iteración se mueve a lo largo de la arista que va de (0, 0) a (0, 6), y luego la siguiente iteración se mueve por la arista que va de (0, 6) a (2, 6). Como se puede ver en la tabla 5.1, cada uno de estos movimientos a una solución FEV adyacente significa sólo un cambio en el conjunto de ecuaciones de definición (fronteras de restricción sobre las que se encuentra la solución).

Cuando $n = 3$, las respuestas son un poco más complejas. Para ayudar a visualizar lo que ocurre, la figura 5.2 muestra un dibujo en tres dimensiones de una región factible representativa para este caso, en la que los puntos son las soluciones FEV. Esta región factible es un *poliedro* en lugar del polígono que se tenía con $n = 2$ (figura 5.1), ya que las fronteras de restricción son ahora planos y no rectas. Las caras del poliedro forman la *frontera* de la región factible, donde cada cara es la porción de la frontera de restricción que también satisface las otras restricciones. Observe que cada solución FEV se encuentra en la intersección de tres fronteras de restricción (a veces incluye parte de las fronteras de restricción $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ para las restricciones de no negatividad) y que la solución también satisface las otras restricciones. Las intersecciones que no satisfacen una o más de las otras restricciones conducen a soluciones *no factibles* en un vértice.

El segmento de recta más oscuro de la figura 5.2 indica la trayectoria que sigue el método símplex en una iteración normal. El punto (2, 4, 3) es la solución FEV *actual* que se usa para iniciar una iteración y el punto (4, 2, 4) será la nueva solución FEV al término de la iteración. El punto (2, 4, 3) se encuentra en la intersección de las fronteras de restricción $x_2 = 4$, $x_1 + x_2 = 6$ y $-x_1 + 2x_3 = 4$, por lo que estas tres ecuaciones son las ecuaciones de definición para esta solución FEV. Si se eliminara la *ecuación de definición* $x_2 = 4$, la intersección de las otras dos fronteras de restricción (planos) formarían una recta. Un segmento de esta recta, que aparece en la figura 5.2 como el segmento más oscuro que va desde (2, 4, 3) hasta (4, 2, 4), está sobre la frontera de la región factible, mientras que el resto de la recta es no factible. Este segmento de recta se llama arista de la región factible y sus puntos terminales (2, 4, 3) y (4, 2, 4) son soluciones FEV adyacentes.

De esta manera, para $n = 3$, todas las *aristas* de la región factible se forman como el segmento factible de la recta que está en la intersección de dos fronteras de restricción, y los dos puntos terminales de una arista son soluciones FEV *adyacentes*. En la figura 5.2 hay 15 aristas de la región factible y, por lo tanto, hay 15 pares de soluciones FEV adyacentes. Para la solución FEV (2, 4, 3) actual,

FIGURA 5.2
Región factible y soluciones FEV de un problema de programación lineal de tres variables.



hay tres formas de eliminar una de sus tres ecuaciones de definición para obtener la intersección de las otras dos fronteras de restricción, así que hay tres aristas que se originan de (2, 4, 3). Estas aristas conducen a (4, 2, 4), (0, 4, 2) y (2, 4, 0), y son las soluciones FEV adyacentes a (2, 4, 3).

En la siguiente iteración, el método símplex elige una de estas tres aristas; por ejemplo, el segmento de recta más oscuro en la figura 5.2, y se mueve a lo largo de él cada vez más lejos de (2, 4, 3) hasta que llega a la primera frontera de restricción nueva, $x_1 = 4$, en la otra punta. [No se puede continuar por esta recta hasta la siguiente frontera de restricción, $x_2 = 0$, porque se llegaría a una solución no factible en un vértice: (6, 0, 5).] La intersección de esta primera frontera de restricción nueva con las dos fronteras de restricción que forman la arista conduce a la *nueva* solución FEV, (4, 2, 4).

Cuando $n > 3$, estos mismos conceptos se generalizan a dimensiones mayores, sólo que las fronteras de restricción son ahora *hiperplanos* en lugar de planos. En resumen:

> Considere cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión y una región factible acotada. Una solución FEV se encuentra en la intersección de n fronteras de restricción (y satisface también las otras restricciones). Una **arista** de la región factible es un segmento de recta factible que está en la intersección de $n - 1$ fronteras de restricción, donde cada punto terminal se encuentra en una frontera de restricción adicional (por lo que estos puntos terminales son soluciones FEV). Dos soluciones factibles en un vértice son **adyacentes** si el segmento de recta que las conecta es una arista de la región factible. De cada solución FEV se originan n aristas, cada una de las cuales conduce a una de las n soluciones FEV adyacentes. Cada iteración del método símplex se mueve de la solución FEV actual a una adyacente a lo largo de una de estas n aristas.

Al cambiar del punto de vista geométrico al algebraico, la *intersección de las fronteras de restricción* cambia a una *solución simultánea de las ecuaciones de frontera de restricción*. Las n ecuaciones de frontera de restricción que conducen a (o definen) una solución FEV son sus ecuaciones de definición; al eliminar una de estas ecuaciones se obtiene una recta cuyo segmento factible es una arista de la región factible.

En seguida se analizarán algunas propiedades importantes de las soluciones FEV y luego se describirán las implicaciones de todos estos conceptos al interpretar el método símplex. Sin embargo, ahora que se tiene fresco el resumen anterior, se expondrá un panorama general de estas implicaciones. Cuando el método símplex elige una variable básica entrante, la interpretación geométrica es que está eligiendo una de las aristas que se originan de la solución FEV actual para trasladarse por ella. El aumento del valor de esta variable a partir de cero (y al mismo tiempo el cambio en los valores de las otras variables básicas según sea necesario) corresponde a moverse a lo largo de esta arista. El hecho de que una de estas variables básicas (la variable básica que sale) disminuya su valor hasta que llega a cero corresponde a llegar a la primera frontera de restricción nueva en el otro punto terminal de esta arista de la región factible.

Propiedades de las soluciones FEV

En este momento la atención se enfocará en tres propiedades fundamentales de las soluciones FEV que se cumplen en el caso de *cualquier* problema de programación lineal que tiene soluciones factibles y una región factible acotada.

> **Propiedad 1:** *a*) Si el problema tiene sólo una solución óptima, ésta debe ser una solución FEV. *b*) Si el problema tiene soluciones óptimas múltiples (y una región factible acotada), entonces al menos dos deben ser soluciones FEV adyacentes.

La propiedad 1 es un concepto bastante intuitivo desde el punto de vista geométrico. Primero, considere el caso *a*), que se ilustra con el problema de la Wyndor Glass Co. (vea la figura 5.1), donde la única solución óptima (2, 6) es, sin duda, una solución FEV. Observe que no hay nada especial en el ejemplo que conduzca a este resultado. Para cualquier problema con una sola solución óptima, siempre es posible elevar cada vez más la recta (hiperplano) de la función objetivo hasta que toque sólo un punto (la solución óptima) en un vértice de la región factible.

Ahora se dará una demostración algebraica de este caso.

> **Demostración del caso *a*) de la propiedad 1:** Se desarrolla una *demostración por contradicción* que se basa en el supuesto de que existe sólo una solución óptima y que *no* es

una solución FEV. Después se demuestra que este supuesto lleva a una contradicción y, por lo tanto, no puede ser cierta. (La solución que se supone óptima se denota por $\mathbf{x}^*$ y el valor correspondiente de la función objetivo por Z^*.)

Recuerde la definición de la *solución FEV* (una solución factible que no está en ningún segmento que conecte a otras dos soluciones factibles). Como se ha supuesto que la solución óptima $\mathbf{x}^*$ no es una solución FEV, se desprende que deben existir otras dos soluciones factibles tales que el segmento de recta que las une contiene la solución óptima. Sean $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ las otras dos soluciones factibles y sean Z_1 y Z_2 los valores respectivos de la función objetivo. Igual que para cualquier otro punto sobre el segmento de recta que conecta a $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$,

$$\mathbf{x}^* = \alpha\mathbf{x}'' + (1 - \alpha)\mathbf{x}'$$

para algún valor de α tal que $0 < \alpha < 1$. Entonces, puesto que los coeficientes de las variables son idénticos para Z^*, Z_1 y Z_2, se puede deducir que

$$Z^* = \alpha Z_2 + (1 - \alpha)Z_1.$$

Como las ponderaciones α y $1 - \alpha$ suman 1, las únicas posibilidades que se tienen al comparar Z^*, Z_1 y Z_2 son: 1) $Z^* = Z_1 = Z_2$, 2) $Z_1 < Z^* < Z_2$ y 3) $Z_1 > Z^* > Z_2$. La primera posibilidad implica que $\mathbf{x}'$ y $\mathbf{x}''$ también son óptimas, lo que contradice la suposición de que existe sólo una solución óptima. Las otras dos posibilidades contradicen la suposición de que $\mathbf{x}^*$ (no una solución FEV) es óptima. En conclusión, es imposible tener una solución óptima que no sea una solución FEV.

Ahora considere el caso *b*) que se demostró en la sección 3.2 bajo la definición de *solución óptima* al cambiar la función objetivo del ejemplo a $Z = 3x_1 + 2x_2$ (vea la figura 3.5 en la sección 3.2). Lo que ocurrió en el procedimiento gráfico es que la recta que representa a la función objetivo se mueve hacia arriba hasta que contiene el segmento de recta que conecta las dos soluciones FEV (2, 6) y (4, 3). Lo mismo pasa en dimensiones mayores, excepto que la función objetivo es un *hiperplano* que se mueve hasta que contiene el o los segmentos que conectan dos (o más) soluciones FEV adyacentes. Como consecuencia, es posible obtener *todas* las soluciones óptimas como promedios ponderados de soluciones FEV óptimas. (Esta situación se describe con más detalle en los problemas 4.5-5 y 4.5-6.)

El significado real de la propiedad 1 es que simplifica mucho la búsqueda de una solución óptima, ya que ahora sólo tienen que tomarse en cuenta las soluciones FEV. La propiedad 2 pone de relieve la magnitud de esta simplificación.

Propiedad 2: Existe sólo un número *finito* de soluciones FEV.

Esta propiedad sin duda se cumple en las figuras 5.1 y 5.2, donde nada más se tienen 5 y 10 soluciones FEV, respectivamente. Para ver por qué en general este número es finito, recuerde que cada solución factible en un vértice es la solución simultánea de un sistema de n ecuaciones elegidas entre $m + n$ ecuaciones de frontera de restricción. El número de combinaciones de las $m + n$ ecuaciones tomadas n a la vez es

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{m!n!},$$

que es un número finito. Este número, a su vez, es la *cota superior* del número de soluciones FEV. En la figura 5.1, $m = 3$ y $n = 2$, de manera que existen 10 sistemas diferentes de dos ecuaciones, pero sólo de la mitad de ellos se obtienen soluciones FEV. En la figura 5.2, $m = 4$ y $n = 3$, de manera que hay 35 sistemas diferentes de tres ecuaciones, pero sólo 10 conducen a soluciones FEV.

La propiedad 2 sugiere que, en principio, puede obtenerse una solución óptima mediante la enumeración exhaustiva; esto es, se pueden encontrar y comparar todas las soluciones FEV, que son un número finito. Desafortunadamente existen números finitos que (para propósitos prácticos) bien podrían considerarse infinitos. Por ejemplo, un problema de programación lineal bastante pequeño con $m = 50$ y $n = 50$ tendría $100!/(50!)^2$, aproximadamente 10^{29} sistemas de ecuaciones que resolver. En contraste, el método símplex necesitaría examinar nada más alrededor de 100 soluciones FEV para resolver un problema de este tamaño. Este ahorro tan grande se puede obtener gracias a la prueba de optimalidad dada en la sección 4.1 y que se establece aquí como la propiedad 3.

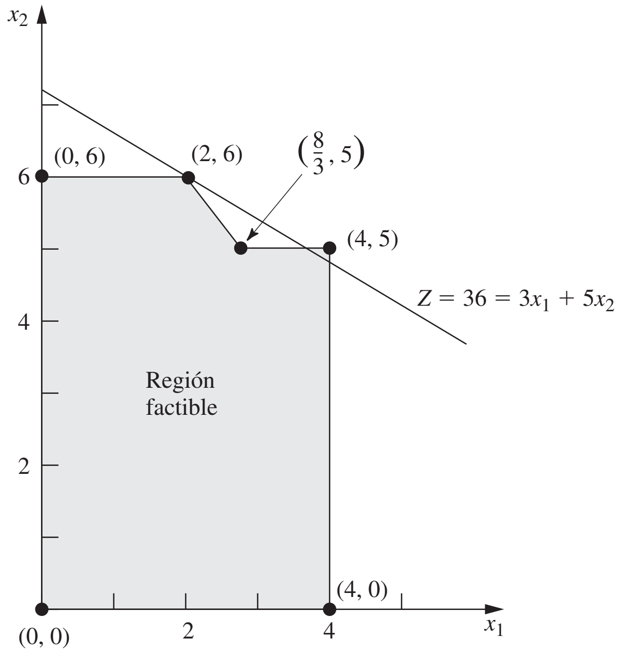


FIGURA 5.3
Modificación del problema de la Wyndor Glass Co., que viola tanto la programación lineal como la propiedad 3 de las soluciones FEV en programación lineal.

Propiedad 3: Si una solución FEV no tiene soluciones FEV *adyacentes* que sean *mejores* que ella (en términos del valor de *Z*), entonces no existen soluciones FEV que sean *mejores* en cualquier otra parte. Por lo tanto, se garantiza que tal solución FEV es una solución *óptima* (por la propiedad 1), si se supone que el problema tiene al menos una solución óptima (lo que se garantiza si el problema tiene soluciones factibles y una región factible acotada).

Para ilustrar la propiedad 3 considere la figura 5.1 del ejemplo de la Wyndor Glass Co. Las soluciones FEV (0, 6) y (4, 3) son adyacentes a la solución FEV (2, 6) y ninguna de las dos tiene un valor mejor de *Z*. Esto implica que ninguna de las otras soluciones FEV, (0, 0) y (0, 4), pueden ser mejores que (2, 6), por lo cual (2, 6) debe ser óptima.

Por el contrario, en la figura 5.3 se muestra una región factible que *nunca* se puede presentar en un problema de programación lineal [puesto que la continuación de la recta de la frontera de restricción que pasa por ($\frac{8}{3}$, 5) cortaría una parte de esta región], pero esto viola la propiedad 3. El problema que se muestra es idéntico al de la Wyndor Glass Co. (incluso con la misma función objetivo), *excepto* que se aumentó la región factible hacia la derecha de ($\frac{8}{3}$, 5). En consecuencia, las soluciones FEV adyacentes a (2, 6) son ahora (0, 6) y ($\frac{8}{3}$, 5), y de nuevo ninguna de las dos es mejor que (2, 6). Sin embargo, ahora otra solución FEV, (4, 5), es mejor que (2, 6), lo que viola la propiedad 3. La razón es que la frontera de la región factible va hacia abajo desde (2, 6) hacia ($\frac{8}{3}$, 5) y después "dobla hacia afuera" hasta (4, 5), más allá de la recta de la función objetivo que pasa por (2, 6).

El punto clave es que el tipo de situación que se ilustra en la figura 5.3 no se puede presentar en programación lineal. La región factible de esta figura implica que las restricciones $2x_2 \leq 12$ y $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ se cumplen para $0 \leq x_1 \leq \frac{8}{3}$. Sin embargo, bajo la condición de que $\frac{8}{3} \leq x_1 \leq 4$, la restricción $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ se elimina y es reemplazada por $x_2 \leq 5$. Este tipo de "restricciones condicionales" no están permitidas en programación lineal.

La razón básica de que la propiedad 3 se cumpla es que en cualquier problema de programación lineal, la región factible siempre tiene la propiedad de ser un *conjunto convexo*,[2] según se de-

[2] Si ya se tiene conocimiento de los conjuntos convexos es posible notar que el conjunto de soluciones que satisfacen cualquier restricción de programación lineal (ya sea una restricción de igualdad o desigualdad) es un conjunto convexo. La región factible de cualquier problema de programación lineal es la *intersección* de los conjuntos de soluciones que satisfacen sus restricciones individuales. Como la intersección de conjuntos convexos es otro conjunto convexo, esta región factible necesariamente también lo es.

fine en el apéndice 2 y se ilustra en varias figuras. En un problema de dos variables, esta propiedad de convexidad significa que el *ángulo* dentro de la región factible en *todas* las soluciones FEV es menor que 180°, situación que se ilustra en la figura 5.1, donde los ángulos en (0, 0), (0, 6) y (4, 0) son de 90° y los que se encuentran en (2, 6) y (4, 3) tienen entre 90 y 180°. Por el contrario, la región factible de la figura 5.3 *no* es un conjunto convexo debido a que el ángulo en ($\frac{8}{3}$, 5) es mayor que 180°. Éste es el tipo de "doblez hacia afuera" con un ángulo mayor que 180° que no puede ocurrir en programación lineal. En problemas de *n* dimensiones se sigue aplicando este concepto intuitivo de "nunca doblar hacia afuera" (una propiedad fundamental de un conjunto convexo).

Para aclarar el significado de región factible convexa, considere el hiperplano de la función objetivo que pasa por una solución FEV y que es igual o mejor que todas las soluciones FEV adyacentes. [En el ejemplo original de la Wyndor Glass Co. este hiperplano es la recta de la función objetivo que pasa por (2, 6).] Todas estas soluciones adyacentes [(0, 6) y (4, 3) en el ejemplo] deben estar ya sea en el hiperplano o en el lado no favorable de éste (de acuerdo con el valor de *Z*). Cuando la región factible es convexa, su frontera no se puede "doblar hacia afuera" más allá de una solución FEV adyacente para dar otra solución FEV que se encuentre en el lado favorable del hiperplano, para que la propiedad 3 se cumpla.

Extensiones a la forma aumentada del problema

En cualquier problema de programación lineal en nuestra forma estándar (inclusive las restricciones funcionales de la forma ≤), la apariencia de las restricciones funcionales después de introducir variables de holgura es la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
(1) & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} \qquad\qquad = b_1 \\
(2) & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} \qquad = b_2 \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(m) & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} = b_m,
\end{array}$$

donde $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ son las variables de holgura. En la sección 4.6 se describió cómo puede obtenerse esta misma forma (la forma apropiada de eliminación gaussiana) en otros problemas de programación lineal, mediante la introducción de variables artificiales, etc. En consecuencia, las soluciones originales ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) quedan aumentadas con los valores correspondientes de las variables de holgura o artificiales ($x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$) y quizá también algunas variables de exceso. A partir de este aumento, en la sección 4.2 se definieron las **soluciones básicas** como *soluciones en un vértice aumentadas* y las **soluciones básicas factibles (soluciones BF)** como *soluciones FEV aumentadas*. En consecuencia, las tres propiedades anteriores de las soluciones FEV también se cumplen para las soluciones BF.

Ahora deben aclararse las relaciones algebraicas entre las soluciones básicas y las soluciones en los vértices. Recuerde que cada solución en un vértice es la solución simultánea de un sistema de *n* ecuaciones de frontera, a las que se dio el nombre de *ecuaciones de definición*. La pregunta clave es: ¿cómo puede distinguirse cuando una ecuación de frontera en particular es una de las ecuaciones de definición si el problema se encuentra en la forma aumentada? Por fortuna, la respuesta es sencilla. Cada restricción tiene una **variable indicativa** que señala claramente (según su valor sea cero o no) cuándo la solución actual satisface la ecuación de frontera de esa restricción. En la tabla 5.3 aparece un resumen. En el caso del tipo de restricción de cada renglón de la tabla, observe que la ecuación de frontera de restricción correspondiente (cuarta columna) se satisface si y sólo si la variable indicativa de esta restricción (quinta columna) es igual a cero. En el último renglón (restricción funcional de la forma ≥), de hecho, la variable indicativa $\bar{x}_{n+i} - x_{s_i}$ es realmente la diferencia entre la variable artificial $\bar{x}_{n+i}$ y la variable de exceso x_{s_i}.

Así, siempre que la ecuación de frontera de restricción sea una de las ecuaciones de definición de una solución en un vértice, su variable indicativa tiene valor de cero en la forma aumentada del problema. Cada una de estas variables indicativas se llama *variable no básica* de la solución básica correspondiente. En seguida se resumen las conclusiones y la terminología (que se introdujo en la sección 4.2).

> Cada **solución básica** tiene *m* **variables básicas**, y el resto son **variables no básicas** iguales a cero. (El número de variables no básicas es igual a *n* más el número de variables de exceso.) Los valores de las **variables básicas** constituyen la solución simultánea del

TABLA 5.3 Variables indicativas de las ecuaciones de frontera de restricción*

Tipo de la restricción	Forma de la restricción	Restricción en la forma aumentada	Ecuación de frontera restricción	Variable indicativa
No negatividad	$x_j \geq 0$	$x_j \geq 0$	$x_j = 0$	x_j
Funcional ($\leq$)	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	x_{n+i}
Funcional ($=$)	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \overline{x}_{n+i} = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\overline{x}_{n+i}$
Funcional ($\geq$)	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \overline{x}_{n+i} - x_{s_i} = b_i$	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	$\overline{x}_{n+i} - x_{s_i}$

* Variable indicativa $= 0 \Rightarrow$ se satisface la ecuación de frontera de restricción.
Variable indicativa $\neq 0 \Rightarrow$ se viola la ecuación de frontera de restricción.

sistema de m ecuaciones del problema en la forma aumentada (después de igualar a cero las variables no básicas). Esta solución básica es la solución en el vértice aumentada cuyas n ecuaciones de definición son las indicadas por las variables no básicas. En particular, siempre que una variable indicativa de la quinta columna de la tabla 5.3 sea una variable no básica, la ecuación de frontera de restricción en la cuarta columna es una ecuación de definición para la solución en el vértice. (Para restricciones funcionales de la forma $\geq$, al menos una de las dos variables suplementarias $\overline{x}_{n+i}$ y x_{s_i} es siempre una variable no básica, pero la ecuación de frontera de restricción se convierte en una ecuación de definición sólo si *ambas* variables son no básicas.)

Ahora considere las soluciones básicas *factibles*. Se puede observar que los únicos requisitos para que una solución sea factible en la forma aumentada del problema son que satisfaga el sistema de ecuaciones y que *todas* las variables sean *no negativas*.

Una **solución BF** es una solución básica en la que las m variables básicas son no negativas (≥ 0). Se dice que una solución BF es **degenerada** si cualquiera de estas m variables es igual a cero.

En consecuencia, es posible que una variable sea igual a cero y no sea una variable no básica de la solución BF actual. (Este caso corresponde a una solución FEV que satisface otra frontera de restricción además de sus n ecuaciones de definición.) Por lo tanto, es necesario saber con exactitud cuál es el conjunto actual de variables no básicas (o el conjunto actual de variables básicas) y no confiar en sus valores iguales a cero.

Ya se hizo notar que no todo sistema de n ecuaciones de frontera conduce a una solución en un vértice, ya sea porque el sistema no tiene soluciones o porque tiene soluciones múltiples. Por razones análogas, no todo conjunto de n variables no básicas conduce a una solución básica. Sin embargo, el método símplex evita estos casos.

Para ejemplificar estas definiciones considere una vez más el ejemplo de la Wyndor Glass Co. Sus ecuaciones de frontera y las variables indicativas se muestran en la tabla 5.4.

TABLA 5.4 Variables indicativas de las ecuaciones de frontera de restricción para el problema de la Wyndor Glass Co.*

Restricción	Restricción en la forma aumentada	Ecuación de frontera de restricción	Variable indicativa
$x_1 \geq 0$	$x_1 \geq 0$	$x_1 = 0$	x_1
$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_2 = 0$	x_2
$x_1 \leq 4$	(1) $x_1 + x_3 = 4$	$x_1 = 4$	x_3
$2x_2 \leq 12$	(2) $2x_2 + x_4 = 12$	$2x_2 = 12$	x_4
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$	(3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$	$3x_1 + 2x_2 = 18$	x_5

* Variable indicativa $= 0 \Rightarrow$ se satisface la ecuación de frontera de restricción.
Variable indicativa $\neq 0 \Rightarrow$ se viola la ecuación de frontera de restricción.

TABLA 5.5 Soluciones BF para el problema de la Wyndor Glass Co.

Solución FEV	Ecuaciones de definición	Solución BF	Variables no básicas
(0, 0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0, 0, 4, 12, 18)	x_1 x_2
(0, 6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(0, 6, 4, 0, 6)	x_1 x_4
(2, 6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(2, 6, 2, 0, 0)	x_4 x_5
(4, 3)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_1 = 4$	(4, 3, 0, 6, 0)	x_5 x_3
(4, 0)	$x_1 = 4$ $x_2 = 0$	(4, 0, 0, 12, 6)	x_3 x_2

Cuando aumentan las soluciones FEV (vea la tabla 5.1) se obtienen las soluciones BF que se presentan en la tabla 5.5, en la cual se han colocado juntas las soluciones básicas factibles adyacentes, excepto el par formado por la primera y la última. Observe que, en todos los casos, las variables no básicas son necesariamente las variables indicativas de las ecuaciones de definición. Entonces, las soluciones BF adyacentes difieren en que tienen sólo una variable no básica distinta. También observe que cada solución BF es la solución simultánea del sistema de ecuaciones del problema en forma aumentada (vea la tabla 5.4) cuando las variables no básicas se igualan a cero.

De manera similar, las otras tres soluciones *no factibles* en los vértices (vea la tabla 5.2) conducen a las otras soluciones básicas *no factibles* que se muestran en la tabla 5.6.

Los otros dos conjuntos de variables no básicas, 1) x_1 y x_3 y 2) x_2 y x_4, no conducen a una solución básica porque al hacer cualquier par de variables igual a cero no se llega a tener una solución del sistema formado por las ecuaciones (1) a (3) de la tabla 5.4. Esta conclusión es paralela a la observación que se hizo antes respecto de que los conjuntos correspondientes de ecuaciones de frontera de restricción no conducen a una solución.

El *método símplex* comienza en una solución básica factible y se mueve en forma iterativa hacia una solución básica factible adyacente mejor, hasta que logra una solución óptima. ¿Cómo se alcanza la solución BF adyacente en cada iteración?

En el caso de la forma original del problema se debe recordar que se obtiene una solución factible en un vértice adyacente a partir de la solución actual cuando: 1) se elimina una restricción de frontera (ecuación de definición) del conjunto de n restricciones que definen la solución actual, 2) se hace un movimiento alejándose de la solución actual, en la dirección factible a lo largo de las $n - 1$ restricciones de frontera (una arista de la región factible) restantes y 3) el movimiento se detiene al encontrar la *primera* restricción (ecuación de definición) nueva.

De manera equivalente, en la terminología nueva, el método símplex llega a una solución BF adyacente a partir de la solución actual cuando: 1) se elimina una variable (la variable básica entrante) del conjunto de n variables no básicas que definen la solución actual, 2) se aleja de la so-

TABLA 5.6 Soluciones básicas no factibles para el problema de la Wyndor Glass Co.

Solución no factible en un vértice	Ecuaciones de definición	Solución básica no factible	Variables no básicas
(0, 9)	$x_1 = 0$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(0, 9, 4, −6, 0)	x_1 x_5
(4, 6)	$2x_2 = 12$ $x_1 = 4$	(4, 6, 0, 0, −6)	x_4 x_3
(6, 0)	$3x_1 + 2x_2 = 18$ $x_2 = 0$	(6, 0, −2, 12, 0)	x_5 x_2

TABLA 5.7 Secuencias de soluciones que se obtuvieron por el método símplex para el problema de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Solución FEV	Ecuaciones de definición	Solution BF	Variables no básicas	Restricciones funcionales en la forma aumentada
0	(0, 0)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	(0, 0, 4, 12, 18)	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$	$x_1 + \mathbf{x_3} = 4$ $2x_2 + \mathbf{x_4} = 12$ $3x_1 + 2x_2 + \mathbf{x_5} = 18$
1	(0, 6)	$x_1 = 0$ $2x_2 = 12$	(0, 6, 4, 0, 6)	$x_1 = 0$ $x_4 = 0$	$x_1 + \mathbf{x_3} = 4$ $2\mathbf{x_2} + x_4 = 12$ $3x_1 + 2\mathbf{x_2} + \mathbf{x_5} = 18$
2	(2, 6)	$2x_2 = 12$ $3x_1 + 2x_2 = 18$	(2, 6, 2, 0, 0)	$x_4 = 0$ $x_5 = 0$	$\mathbf{x_1} + \mathbf{x_3} = 4$ $2\mathbf{x_2} + x_4 = 12$ $3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} + x_5 = 18$

lución actual al *incrementar* el valor de esta variable a partir de cero (y al ajustar las otras variables básicas para que aún satisfagan el sistema de ecuaciones) al mismo tiempo que se mantienen las $n - 1$ variables no básicas restantes iguales cero y 3) se detiene cuando el valor de la *primera* variable básica (la variable básica saliente) llega a cero (a su restricción de frontera). Con cualquiera de estas dos interpretaciones, para elegir entre las n alternativas del paso 1 se selecciona aquella que proporciona la tasa más alta de mejoramiento del valor de Z (por cada unidad de incremento de la variable básica entrante) durante el paso 2.

En la tabla 5.7 se ilustra la cercana correspondencia entre estas interpretaciones geométrica y algebraica del método símplex. Con los resultados que se presentaron en las secciones 4.3 y 4.4, en la cuarta columna se resume la secuencia de soluciones BF del problema de la Wyndor Glass Co., y en la segunda columna se muestran las soluciones FEV correspondientes. En la tercera columna se puede observar que en cada iteración se elimina una frontera de restricción (ecuación de definición) y se incluye otra para obtener la nueva solución FEV. De manera similar, en la quinta columna se puede ver que cada iteración elimina una variable básica e incluye otra para obtener la nueva solución BF. Aún más, las variables no básicas que se quitan y se agregan son las variables indicativas de las ecuaciones de definición que se eliminan y se incluyen en la tercera columna. En la última columna se muestra el sistema de ecuaciones inicial [sin incluir la ecuación (0)] de la forma aumentada del problema, con las variables básicas actuales en **negritas**. En cada caso puede observarse cómo al hacer cero las variables no básicas y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene la misma solución para (x_1, x_2) que con el par de ecuaciones de definición correspondiente en la tercera columna.

En la sección Worked Examples del sitio en internet de este libro se proporciona **otro ejemplo** en el que se desarrolla el tipo de información que se proporciona en la tabla 5.7 de un problema de minimización.

5.2 FORMA MATRICIAL DEL MÉTODO SÍMPLEX

En el capítulo 4 se describe el método símplex tanto en forma algebraica como tabular. Se puede obtener una visión más profunda de la teoría y del potencial del método símplex mediante el análisis de su forma *matricial*. Se comienza utilizando la notación matricial para representar problemas de programación lineal. (En el apéndice 4 se presenta un repaso del álgebra matricial.)

Para ayudar al lector a distinguir entre matrices, vectores y escalares, se usarán siempre letras **MAYÚSCULAS EN NEGRITAS** para representar matrices, letras **minúsculas en negritas** para representar vectores y letras *cursivas* normales en el caso de los escalares. También se usará el cero en negritas (**0**) para denotar el *vector nulo* (un vector cuyos elementos son todos iguales a cero) ya sea en forma de columna o de renglón (lo que debe ser claro por la forma del problema), mientras que el cero normal (0) seguirá representando al número cero.

Si se emplean matrices, nuestra forma estándar del modelo general de programación lineal establecido en la sección 3.2 se convierte en:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & Z = \mathbf{cx}, & \\ \text{sujeta a:} & & \\ \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} & \text{y} & \mathbf{x} \ge \mathbf{0}, \end{array}}$$

donde **c** es el vector renglón

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n],$$

x, **b** y **0** son vectores columna tales que

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

y **A** es la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Para obtener la *forma aumentada* del problema se introduce el vector columna de las variables de holgura

$$\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$$

de manera que las restricciones se convierten en

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} \ge \mathbf{0},$$

donde **I** es la matriz identidad de orden $m \times m$ y el vector nulo **0** ahora tiene $n + m$ elementos. (Al final de la sección se hacen comentarios sobre cómo manejar problemas que no están en nuestra forma estándar.)

Obtención de una solución básica factible

En este punto es necesario recordar que el enfoque general del método símplex radica en obtener una secuencia de *soluciones BF mejoradas* hasta alcanzar la solución óptima. Una de las características clave de la forma matricial del método símplex revisado está relacionada con la forma en que obtiene cada nueva solución BF después de identificar sus variables básicas y no básicas. Dadas estas variables, la solución básica que resulta es la solución de las m ecuaciones

$$[\mathbf{A}, \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

en las que las *n variables no básicas* de entre los $n + m$ elementos de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix}$$

se igualan a cero. Cuando se eliminan estas n variables al igualarlas a cero queda un conjunto de m ecuaciones con m incógnitas (las *variables básicas*). Este sistema de ecuaciones se puede denotar por

$$\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b},$$

donde el **vector de variables básicas**

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix}$$

se obtiene al eliminar las variables no básicas de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix},$$

y la **matriz base**

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mm} \end{bmatrix}$$

se obtiene al eliminar las columnas correspondientes a los coeficientes de las variables no básicas de $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$. (Aún más, los elementos de $\mathbf{x}_B$ y, por lo tanto, las columnas de $\mathbf{B}$ pueden colocarse en orden diferente al ejecutar el método símplex.)

El método símplex introduce sólo variables básicas tales que $\mathbf{B}$ sea *no singular*, de manera que $\mathbf{B}^{-1}$ siempre existe. De esta forma, para resolver $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, se premultiplican ambos lados por $\mathbf{B}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

Como $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$, la solución deseada para las variables básicas es

$$\boxed{\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.}$$

Sea $\mathbf{c}_B$ el vector cuyos elementos son los coeficientes de la función objetivo (incluye los ceros para las variables de holgura) que corresponden a los elementos de $\mathbf{x}_B$. El valor de la función objetivo de esta solución básica es, entonces,

$$\boxed{Z = \mathbf{c}_B\mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.}$$

Ejemplo. Para ilustrar este método y obtener una solución básica factible, considere otra vez el problema de la Wyndor Glass Co., que se presentó en la sección 3.1, que se resolvió mediante el método símplex original en la tabla 4.8. En este caso,

$$\mathbf{c} = [3, 5], \quad [\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Con referencia a la tabla 4.8, la serie de soluciones básicas factibles que se obtiene mediante el método símplex es la siguiente:

Iteración 0

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \text{ de manera que } \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 0, 0], \quad \text{de manera que } Z = [0, 0, 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = 0.$$

Iteración 1

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

de manera que

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 0], \qquad \text{entonces} \quad Z = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = 30.$$

Iteración 2

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

de manera que

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_B = [0, 5, 3], \qquad \text{entonces} \quad Z = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = 36.$$

Forma matricial del conjunto de ecuaciones actual

La última consideración preliminar antes de resumir el método símplex revisado es mostrar la forma matricial del conjunto de ecuaciones que aparece en la tabla símplex en cualquier iteración del método símplex original.

En el caso del conjunto *original* de ecuaciones, la forma matricial es

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}.}$$

Este conjunto de ecuaciones se presenta también en la primera tabla símplex de la tabla 5.8.

Las operaciones algebraicas que se realizan por el método símplex (multiplicar una ecuación por una constante y sumar un múltiplo de una ecuación a otra) se expresan en forma matricial al premultiplicar ambos lados del conjunto original de ecuaciones por la matriz apropiada. Esta matriz tiene el mismo número de elementos que la matriz identidad, *excepto* que cada múltiplo de una operación algebraica se debe colocar en el lugar en que se necesita para que la multiplicación de matrices realice esta operación. Aun después de una serie de operaciones algebraicas a través

TABLA 5.8 Primera y última tabla símplex en forma matricial

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	Variables originales	Variables de holgura	Lado derecho
0	Z	(0)	1	$-\mathbf{c}$	$\mathbf{0}$	0
	$\mathbf{x}_B$	(1, 2, . . . , m)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Cualquiera	Z	(0)	1	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
	$\mathbf{x}_B$	(1, 2, . . . , m)	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$	$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

de varias iteraciones se puede deducir cuál debe ser esta matriz (de manera simbólica) en cada paso, al usar lo que ya se sabe sobre el lado derecho del nuevo conjunto de ecuaciones. En particular, después de cualquier iteración, $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, por lo que el lado derecho de las ecuaciones se convierte en

$$\begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Debido a que se realiza la misma serie de operaciones algebraicas en *ambos* lados del conjunto original de ecuaciones, se usa esta misma matriz que premultiplica el lado derecho original para premultiplicar el lado izquierdo original. En consecuencia, como

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix},$$

la forma matricial que se busca para el *conjunto de ecuaciones después de cualquier iteración* es

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{c} & \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} & \mathbf{B}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}.}$$

La segunda tabla símplex de la tabla 5.8 también muestra este mismo conjunto de ecuaciones.

Ejemplo. Para ilustrar esta forma matricial del conjunto actual de ecuaciones, considere el conjunto final de ecuaciones que se obtiene en la iteración 2 para el problema de la Wyndor Glass Co. Si se usan las $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{c}_B$ dadas para la iteración 2 al final de la subsección anterior se tiene

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = [0, \tfrac{3}{2}, 1],$$

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 3] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - [3, 5] = [0, 0].$$

Además, si se utilizan los valores de $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ y $Z = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ que se calcularon al final de la subsección anterior, de estos resultados se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{bmatrix} Z \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

como se observa en la tabla símplex final de la tabla 4.8.

La forma matricial del conjunto de ecuaciones que queda después de cualquier iteración (como se muestra en el cuadro que está justo antes del ejemplo anterior) proporciona la clave para la ejecución de la forma matricial del método símplex. Las expresiones matriciales que muestran estas ecuaciones (o en la parte inferior de la tabla 5.8) proporcionan una forma directa de calcular todos los números que aparecerían en el conjunto de ecuaciones actual (para la forma algebraica del método símplex) o en la tabla símplex actual (para la forma tabular del método símplex). Las tres formas del método símplex realizan exactamente las mismas decisiones (variable básica entrante, variable básica saliente, etc.) paso a paso e iteración tras iteración. La única diferencia entre dichas formas radica en los métodos que se utilizan para calcular los números que se necesitan para realizar dichas decisiones. Como se resumirá en seguida, la forma matricial proporciona una forma conveniente y compacta de calcular dichos números sin tener que llevar a cabo una serie de sistemas de ecuaciones o de tablas símplex.

Resumen de la forma matricial del método símplex

1. *Inicialización*: Ingrese las variables de holgura, etc., para obtener las variables básicas iniciales como se describió en el capítulo 4. Lo anterior nos da $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{c}_B$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}^{-1}$ (donde $\mathbf{B} = \mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}$ bajo nuestra suposición actual de que el problema que se pretende resolver se adapta a nuestra forma estándar). Después se procede a la prueba de optimalidad.

2. *Iteración*:

Paso 1. Determine la variable básica entrante: Remítase a los coeficientes de las variables no básicas de la ecuación (0) que se obtuvieron en la aplicación anterior de la prueba de optimalidad. Después (de la misma manera como se describió en la sección 4.4), seleccione la variable de *coeficiente negativo* que tenga el valor absoluto mayor como la variable básica entrante.

Paso 2. Determine la variable básica saliente: Utilice las expresiones matriciales $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ (para los coeficientes de las variables orginales) y $\mathbf{B}^{-1}$ (para los coeficientes de las variables de holgura), para calcular los coeficientes de la variable básica entrante en cada una de las ecuaciones excepto la ecuación (0). Asimismo, utilice los cálculos anteriores de $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ (véase el paso 3) para identificar el lado derecho de dichas ecuaciones. Después (de la misma forma como se describió en la sección 4.4), utilice la *prueba del cociente mínimo* para seleccionar la variable básica saliente.

Paso 3. Determine la nueva solución BF: Actualice la matriz base $\mathbf{B}$, esto es, reemplace la columna de la variable básica saliente por la columna correspondiente en $[\mathbf{A}, \mathbf{I}]$ para la variable básica entrante. Asimismo, lleve a cabo los reemplazos correspondientes en $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{c}_B$. Después deduzca $\mathbf{B}^{-1}$ (como se ilustra en el apéndice 4) y fije el valor de $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$.

3. *Prueba de optimalidad*: Use las expresiones matriciales, $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c}$ (para los coeficientes de las variables originales) y $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ (para los coeficientes de las variables de holgura), para calcular los coeficientes de las variables no básicas de la ecuación (0). La solución BF actual es óptima si y sólo si todos estos coeficientes son no negativos. Si la solución es óptima, deténgase. De otra forma, realice otra iteración a fin de obtener la solución BF siguiente.

Ejemplo. Ya hemos llevado a cabo algunos cálculos matriciales para el problema Wyndor Glass Co. dentro de esta sección. En seguida integraremos todas las partes con el fin de aplicar el método símplex en su totalidad en su forma matricial a este problema. Como punto de inicio recuerde que

$$\mathbf{c} = [3, 5], \quad [\mathbf{A}, \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}.$$

Inicialización
Las variables básicas iniciales son las variables de holgura, así que (como se pudo observar en la iteración 0 del primer ejemplo dentro de esta sección)

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_B = [0, 0, 0], \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}.$$

Prueba de optimalidad
Los coeficientes de las variables no básicas (x_1 y x_2) son

$$\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 0] - [3, 5] = [-3, -5]$$

por lo que dichos coeficientes negativos indican que la solución BF inicial ($\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$) no es óptima.

Iteración 1
Puesto que –5 es mayor que –3 en valor absoluto, la variable básica entrante es x_2. Llevando a cabo sólo la porción relevante de la multiplicación matricial, los coeficientes de x_2 en todas las ecuaciones excepto en la (0) son

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} — & 0 \\ — & 2 \\ — & 2 \end{bmatrix}$$

y el lado derecho de dichas ecuaciones está dado por el valor de $\mathbf{x}_B$ que se muestra en la etapa de inicialización. Por lo tanto, la prueba del cociente mínimo muestra que la variable básica saliente es x_4 puesto que $12/2 < 18/2$. La iteración 1 del primer ejemplo en esta sección muestra los valores de $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}_B$, $\mathbf{c}_B$ y $\mathbf{B}^{-1}$ actualizados, esto es:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_B = [0, 5, 0],$$

por lo que x_2 reemplaza a x_4 en $\mathbf{x}_B$, para proporcionar un elemento de $\mathbf{c}_B$ de [3, 5, 0, 0, 0] y en proporcionar una columna de [$\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$] en $\mathbf{B}$.

Prueba de optimalidad
Las variables no básicas son ahora x_1 y x_4, y sus coeficientes en la ecuación (0) son

$$\text{Para } x_1: \qquad \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} - \mathbf{c} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - [3, 5] = [-3, —, —]$$

$$\text{Para } x_4: \qquad \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1} = [0, 5, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [—, 5/2, —]$$

Puesto que x_1 tiene un coeficiente negativo, la solución BF actual no es óptima, por lo que procedemos a realizar la siguiente iteración.

Iteración 2:
Puesto que x_1 es la variable no básica con un coeficiente negativo en la ecuación (0), ahora se convierte en la variable básica entrante. Sus coeficientes en las demás ecuaciones son

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & — \\ 0 & — \\ 3 & — \end{bmatrix}$$

Asimismo, utilizando la $\mathbf{x}_B$ obtenida al final de la iteración anterior, la prueba de cociente mínimo indica que x_5 es la variable básica de egreso, puesto que $6/3 < 4/1$. La iteración 2 del primer ejemplo de esta sección muestra los valores de $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{x}_B$ y $\mathbf{c}_B$ actualizados que resultan,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{c}_B = [0, 5, 3],$$

de tal forma que x_1 ha reemplazado a x_5 en $\mathbf{x}_B$, al proporcionar un elemento de $\mathbf{c}_B$ a partir de [3, 5, 0, 0, 0] y al proporcionar una columna de [$\mathbf{A}$, $\mathbf{I}$] en $\mathbf{B}$.

Prueba de optimalidad
Las variables no básicas son ahora x_4 y x_5. Mediante el uso de los cálculos que se mostraron en el segundo ejemplo de esta sección, sus coeficientes en la ecuación (0) son 3/2 y 1, respectivamente. Puesto que ninguno de dichos coeficientes es negativo, la solución BF actual ($x_1 = 2, x_2 = 6, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 0$) es óptima por lo que aquí termina el proceso.

Observaciones finales

En el ejemplo anterior se muestra que la forma matricial del método símplex utiliza sólo algunas expresiones matriciales para llevar a cabo todos los cálculos necesarios. Dichas expresiones matriciales se resumen en la parte final de la tabla 5.8. Un hallazgo fundamental de esta tabla es que sólo se necesita conocer el $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ actuales, los cuales aparecen en la porción de las variables de holgura de la tabla símplex actual, con la finalidad de calcular todos los demás números de esta tabla en términos de los parámetros originales ($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$) del modelo que se pretende resolver. Cuando se trate de la tabla símplex *final*, este hallazgo es muy valioso, como se estudiará en la sección siguiente.

Una desventaja de la forma matricial del método símplex que se ha descrito en esta sección es que es necesario calcular $\mathbf{B}^{-1}$, la inversa de la matriz base actualizada, al final de cada iteración. A pesar de que existen rutinas para invertir matrices (no singulares) cuadradas pequeñas (y éstas pueden resolverse a mano en el caso de matrices de 2×2 o, inclusive en matrices de 3×3), el tiempo que se requiere para invertir matrices se incrementa muy rápido en función al tamaño de las matrices. Por fortuna, existe un procedimiento mucho más eficiente para actualizar $\mathbf{B}^{-1}$ de una iteración a la siguiente en lugar de invertir la matriz básica nueva desde el principio. Cuando este procedimiento se aplica a la forma matricial del método símplex, esta versión mejorada de la forma matricial se conoce convencionalmente con el nombre de **método símplex revisado**. Ésta es la versión del método símplex (junto con otras mejoras) que por lo general se utiliza en los paquetes de software comerciales de programación lineal. Se describirá el procedimiento de actualización de $\mathbf{B}^{-1}$ en la sección 5.4.

La sección de ejemplos del sitio en internet del libro proporciona **otro ejemplo** de la aplicación de la forma matricial del método símplex. Este ejemplo también incorpora un procedimiento eficiente para actualizar $\mathbf{B}^{-1}$ en cada iteración en lugar de invertir la matriz básica actualizada desde el principio, por lo que se aplica el método símplex revisado completo.

Por último, debemos recordarle que la descripción de la forma matricial del método símplex de esta sección supuso que el problema a resolver se adecua a *nuestra forma estándar* para el modelo de programación lineal general dado en la sección 3.2. Sin embargo, las modificaciones de las demás versiones del modelo son relativamente directas. La fase de inicialización se llevaría a cabo de la manera que se describió en la sección 4.6 tanto para la forma algebraica como la tabular del método símplex. Cuando esta fase involucra la introducción de variables artificiales para obtener una solución BF inicial (y, por lo tanto, obtener una *matriz identidad como matriz base inicial*), estas variables se encuentran incluidas entre los m elementos de $\mathbf{x}_s$.

5.3 UNA IDEA FUNDAMENTAL

En esta sección se hará hincapié en una propiedad del método símplex (en cualquiera de sus formas) que el método símplex revisado puso de manifiesto en la sección anterior. Esta idea fundamental proporciona la clave tanto de la teoría de dualidad como del análisis de sensibilidad (capítulo 6), dos partes muy importantes de la programación lineal.

En primera instancia se describe esta idea cuando el problema que se está resolviendo se adecua a *nuestra forma estándar* para modelos de programación lineal (sección 3.2) y, después, se analiza cómo se adapta a otras formas. La idea se basa en la tabla 5.8 de la sección 5.2, como se describe a continuación.

Idea que se proporciona en la tabla 5.8: Mediante el uso de la notación matricial, la tabla 5.8 proporciona las filas de la tabla símplex *inicial* como $[-\mathbf{c}, \mathbf{0}, 0]$ para el renglón 0 y como $[\mathbf{A}, \mathbf{I}, \mathbf{b}]$ para el resto de los renglones. Después de cualquier iteración, los coeficientes de las variables de holgura en la tabla símplex actual se convierte en $\mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ y en $\mathbf{B}^{-1}$ para los demás renglones, donde $\mathbf{B}$ es la matriz base actual. Si se examina el resto de la tabla símplex actual, la idea que surge es que dichos coeficientes de las variables de holgura inmediatamente ponen de manifiesto la forma en que *todos* los renglones de la tabla símplex actual se han obtenido a partir de los renglones en la tabla símplex *inicial*. En particular, después de cualquier iteración,

Renglón 0 $= [-\mathbf{c}, \mathbf{0}, 0] + \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{A}, \mathbf{I}, \mathbf{b}]$

Renglón 1 a $m = \mathbf{B}^{-1}[\mathbf{A}, \mathbf{I}, \mathbf{b}]$

Se describirán las aplicaciones de esta idea al final de esta sección. Dichas aplicaciones son particularmente importantes sólo cuando lidiamos con la tabla símplex *final*, una vez que se ha obtenido la solución óptima. Por lo tanto, se hará hincapié de aquí en adelante en el análisis de la "idea fundamental" sólo en términos de la solución óptima.

Con la finalidad de distinguir entre la notación matricial utilizada después de *cualquier* iteración ($\mathbf{B}^{-1}$, etc.) y la correspondiente notación justo después de la *última* iteración, presentamos la notación siguiente para el último caso.

Cuando $\mathbf{B}$ es la matriz base de la *solución óptima* calculada mediante el método símplex, sea

$\mathbf{S}^* = \mathbf{B}^{-1}$ = coeficientes de las variables *de holgura* de los renglones 1 a m
$\mathbf{A}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ = coeficientes de las variables *originales* de los renglones 1 a m
$\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$ = coeficientes de las variables *de holgura* del renglón 0
$\mathbf{z}^* = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, de tal forma que $\mathbf{z}^* - \mathbf{c}$ = coeficientes de las variables *originales* del renglón 0
$Z^* = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ = valor óptimo de la función objetivo
$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ = lados derechos óptimos de los renglones 1 a m

La mitad inferior de la tabla 5.9 muestra en qué parte de la tabla símplex final entra cada uno de estos símbolos. Para ilustrar la notación completa, la mitad superior de la tabla 5.9 incluye la tabla inicial del problema de la Wyndor Glass Co. y la mitad inferior incluye la tabla final de dicho problema.

Remítase de nuevo a este punto y suponga que le proporcionan a usted la tabla inicial, $\mathbf{t}$ y $\mathbf{T}$, y sólo $\mathbf{y}^*$ y $\mathbf{S}^*$ de la tabla final. ¿Cómo puede utilizarse únicamente esta información para calcular el resto de la tabla final? La respuesta se encuentra en la idea fundamental que se resume a continuación.

Idea fundamental

(1) $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{y}^*\mathbf{T} = [\mathbf{y}^*\mathbf{A} - \mathbf{c} \quad \mathbf{y}^* \mid \mathbf{y}^*\mathbf{b}]$.
(2) $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}^*\mathbf{T} = [\mathbf{S}^*\mathbf{A} \quad \mathbf{S}^* \mid \mathbf{S}^*\mathbf{b}]$.

■ **TABLA 5.9 Notificación general de las tablas símplex inicial y final en forma matricial para el problema de la Wyndor Glass Co.**

Tabla inicial

Renglón 0: $\mathbf{t} = [-3, -5 \,\vdots\, 0, 0, 0 \quad 0] = [-\mathbf{c} \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, 0]$.

Otros renglones: $\mathbf{T} = \left[\begin{array}{cc:ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] = [\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I} \quad \mathbf{b}]$.

Combinado: $\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c:c} -\mathbf{c} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{A} & \mathbf{I} & \mathbf{b} \end{array}\right]$.

Tabla final

Renglón 0: $\mathbf{t}^* = [0, 0 \,\vdots\, 0, \frac{3}{2}, 1 \,\vdots\, 36] = [\mathbf{z}^* - \mathbf{c} \,\vdots\, \mathbf{y}^* \,\vdots\, Z^*]$.

Otros renglones: $\mathbf{T}^* = \left[\begin{array}{cc:ccc:c} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{array}\right] = [\mathbf{A}^* \quad \mathbf{S}^* \quad \mathbf{b}^*]$.

Combinado: $\begin{bmatrix} \mathbf{t}^* \\ \mathbf{T}^* \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} \mathbf{z}^* - \mathbf{c} & \mathbf{y}^* & Z^* \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{S}^* & \mathbf{b}^* \end{array}\right]$.

Por lo tanto, conociendo los parámetros del modelo en la tabla inicial (**c**, **A** y **b**) y *sólo* los coeficientes de las variables de holgura en la tabla final (**y*** y **S***), estas ecuaciones permiten calcular *todos* los demás valores de la tabla final.

Resumamos la lógica matemática que existe detrás de las dos ecuaciones de la idea fundamental. Para llegar a la ecuación (2) recuerde que la secuencia completa de operaciones algebraicas que realiza mediante el método símplex (excluyendo las que se encuentran en el renglón 0) es equivalente a premultiplicar **T** por alguna matriz, llamada **M**. Por lo tanto,

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{MT},$$

sin embargo, ahora necesitamos identificar **M**. Reescribiendo las partes componentes de **T** y **T***, esta ecuación se transforma en

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}^* \,\vdots\, \mathbf{S}^* \,\vdots\, \mathbf{b}^*] &= \mathbf{M}\,[\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I} \quad \mathbf{b}] \\ &= [\mathbf{MA} \,\vdots\, \mathbf{M} \,\vdots\, \mathbf{Mb}].\end{aligned}$$

Debido a que el componente en la mitad (o en cualquier otra parte) de estas matrices iguales deben ser las mismas, se deduce que $\mathbf{M} = \mathbf{S}^*$, de tal forma que la ecuación (2) es válida.

La ecuación (1) se deduce de manera similar si se observa que toda la secuencia de operaciones algebraicas que involucren al renglón 0 se forma sumando alguna combinación lineal de los renglones de **T** a **t**, lo cual es equivalente a sumarle a **t** algún *vector* multiplicado por **T**. Representando este vector mediante la letra **v**, se tiene

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{vT},$$

pero aún es necesario que **v** sea identificado. Escribiendo de nuevo las partes componentes de **t** y **t*** obtenemos

$$\begin{aligned}[\mathbf{z}^* - \mathbf{c} \,\vdots\, \mathbf{y}^* \,\vdots\, Z^*] &= [-\mathbf{c} \,\vdots\, \mathbf{0} \,\vdots\, 0] + \mathbf{v}\,[\mathbf{A} \,\vdots\, \mathbf{I} \,\vdots\, \mathbf{b}] \\ &= [-\mathbf{c} + \mathbf{vA} \,\vdots\, \mathbf{v} \,\vdots\, \mathbf{vb}].\end{aligned}$$

Igualando el componente del medio de estos vectores idénticos obtenemos $\mathbf{v} = \mathbf{y}^*$, lo cual valida la ecuación (1).

Adaptación de otras formas de modelos

Hasta ahora, la idea fundamental se ha descrito bajo el supuesto de que el modelo original se encuentra en nuestra forma estándar de la sección 3.2. No obstante, la lógica matemática anterior revela con exactitud qué ajustes se necesitan para otras formas del modelo original. La clave es la matriz identidad $\mathbf{I}$ de la tabla símplex inicial, la que se convierte en $\mathbf{S}^*$ en la tabla símplex final. Si es necesario introducir algunas variables artificiales en la tabla símplex inicial para que sirvan de variables básicas iniciales, entonces $\mathbf{I}$ en esta tabla símplex está formada por el conjunto de columnas (ordenadas en forma apropiada) de *todas* las variables básicas iniciales (tanto de holgura como artificiales). (Las columnas de cualesquiera variables de exceso son irrelevantes.) Las *mismas* columnas de la tabla símplex final proporcionan $\mathbf{S}^*$ de la ecuación $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}^*\mathbf{T}$ y $\mathbf{y}^*$ de la ecuación $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{y}^*\mathbf{T}$. Si se introdujeran algunos valores de M en el renglón 0 preliminar como coeficientes de las variables artificiales, entonces la $\mathbf{t}$ de la ecuación $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{y}^*\mathbf{T}$ es el renglón 0 de la tabla símplex inicial después de eliminar en forma algebraica estos coeficientes distintos de cero de las variables básicas. (De otra manera, el renglón 0 preliminar se puede usar como $\mathbf{t}$, pero deben restarse estas M del renglón 0 final para obtener $\mathbf{y}^*$.) (Vea el problema 5.3-9.)

Aplicaciones

La idea fundamental tiene una gran variedad de aplicaciones en programación lineal. Una de ellas involucra el método símplex revisado, que se basa principalmente en la forma matricial del método símplex presentado en la sección 5.2. Según se describió en la sección anterior (vea la tabla 5.8), este método utiliza $\mathbf{B}^{-1}$ y la tabla símplex inicial para calcular todos los números relevantes de la tabla símplex actual en *cada* iteración. Va aún más lejos que la idea fundamental al utilizar $\mathbf{B}^{-1}$ para calcular el mismo $\mathbf{y}^*$ como $\mathbf{y}^* = \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}$.

Otra aplicación incluye la interpretación de los *precios sombra* ($y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$) descritos en la sección 4.7. La idea fundamental revela que Z^* (el valor de Z para la solución óptima) es

$$Z^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i,$$

así, por ejemplo,

$$Z^* = 0b_1 + \frac{3}{2}b_2 + b_3$$

para el problema de la Wyndor Glass Co. Esta ecuación conduce de inmediato a la interpretación de las y_i^* dada en la sección 4.7.

Otro grupo de aplicaciones importantes en extremo incluye varias de las *tareas de posoptimalidad* (la técnica de reoptimización, el análisis de sensibilidad y la programación lineal paramétrica, descritas en la sección 4.7) que investigan el efecto que causan uno o más cambios en el modelo original. En particular, suponga que ya se aplicó el método símplex para obtener una solución óptima (y también $\mathbf{y}^*$ y $\mathbf{S}^*$) del modelo original y que estos cambios se hacen después. ¿Cuáles serían los cambios resultantes en la tabla símplex final si se aplicara en forma exacta la misma secuencia de operaciones algebraicas a la tabla inicial revisada? Como $\mathbf{y}^*$ y $\mathbf{S}^*$ no cambian, la idea fundamental revela de inmediato la respuesta.

Un tipo particularmente usual de análisis de posoptimalidad involucra investigar posibles cambios en $\mathbf{b}$. A menudo, los elementos de $\mathbf{b}$ representan decisiones gerenciales acerca de la cantidad de diferentes recursos que se ponen a disposición de las actividades bajo consideración en el modelo de programación lineal. Por lo tanto, una vez que se ha obtenido la solución óptima mediante el método símplex, a menudo la gerencia desea conocer qué hubiera pasado si algunas de estas decisiones gerenciales acerca de la asignación de recursos se fueran a modificar de diferentes formas. Mediante el uso de las fórmulas,

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{S}^*\mathbf{b}$$
$$\mathbf{Z}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b},$$

usted puede ver exactamente cómo varía la solución BF óptima (o si ésta se hace no factible debido a las variables negativas), así como la forma en que el valor óptimo de la función objetivo varía en función a $\mathbf{b}$. Usted *no* tiene que volver a aplicar el método símplex una y otra vez para cada nueva $\mathbf{b}$, ya que los coeficientes de las variables de holgura ¡lo dicen todo!

Por ejemplo, considere el cambio de $b_2 = 12$ a $b_2 = 13$ tal como se ilustra en la figura 4.8 en el problema de la Wyndor Glass Co. No es necesario resolver todo el problema para obtener la nueva solución óptima $(x_1, x_2) = (\frac{5}{3}, \frac{13}{2})$ porque la idea fundamental proporciona en seguida los valores de las variables básicas (**b***) en la tabla símplex final:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \mathbf{b}^* = \mathbf{S}^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{13}{2} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Existe todavía una manera más sencilla de efectuar estos cálculos. Como el único cambio ocurre en la *segunda* componente de **b** ($\Delta b_2 = 1$), y este vector está premultiplicado nada más por la *segunda* columna de S^*, el *cambio* en **b*** se puede calcular tan fácil como

$$\Delta\mathbf{b}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \Delta b_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

por lo que los valores originales de las variables básicas de la tabla símplex final ($x_3 = 2$, $x_2 = 6$, $x_1 = 2$) ahora se convierten en

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{13} \\ \frac{13}{2} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

(Si cualquiera de estos nuevos valores fuera *negativo* y, por lo tanto, no factible, se debería aplicar la técnica de reoptimización descrita en la sección 4.7; se iniciaría con esta tabla final revisada.) Al aplicar el *análisis incremental* a la ecuación anterior de Z^* también se obtiene

$$\Delta Z^* = \frac{3}{2}\Delta b_2 = \frac{3}{2}.$$

La idea fundamental también se puede aplicar a la investigación de otro tipo de cambios en el modelo original de una manera muy parecida; ésta es la parte crucial del procedimiento de análisis de sensibilidad que se describirá en la última parte del capítulo 6.

En el siguiente capítulo también se podrá ver que la idea fundamental tiene un papel clave en la teoría de dualidad para programación lineal.

5.4 EL MÉTODO SÍMPLEX REVISADO

El método símplex revisado se basa directamente en la forma matricial del método símplex que se presentó en la sección 5.2. Sin embargo, como se mencionó al final de dicha sección, la diferencia es que el método símplex revisado incorpora una mejora clave a la forma matricial. En lugar de que sea necesario invertir la nueva matriz base **B** después de cada iteración, lo cual es muy costoso desde el punto de vista computacional para matrices de gran tamaño, el método símplex revisado utiliza un procedimiento mucho más eficiente que simplemente actualiza $\mathbf{B}^{-1}$ de una iteración a la siguiente. Haremos hincapié en la descripción e ilustración de este procedimiento en esta sección.

Este procedimiento se basa en dos propiedades del método símplex. Una de ellas se describe en la *idea que se proporciona en la tabla 5.8* al comienzo de la sección 5.3. En particular, después de cualquier iteración, los coeficientes de las *variables de holgura* en todos los renglones excepto del 0 en la tabla símplex actual se hacen igual a $\mathbf{B}^{-1}$, donde **B** es la matriz base actual. Esta propiedad es válida siempre y cuando el problema que se trata de resolver se ajuste a *nuestra forma estándar* que se describió en la sección 3.2 de modelos de programación lineal. (Para formas no estándares donde sea necesario introducir variables artificiales, la única diferencia es que es el conjunto de columnas adecuadamente ordenadas que forme una matriz identidad **I** debajo del renglón 0 en la tabla símplex inicial, después proporciona $\mathbf{B}^{-1}$ en cualquier tabla subsecuente.)

La otra propiedad relevante del método símplex es que el paso 3 de una iteración cambia los números de la tabla símplex, incluyendo los números que generan $\mathbf{B}^{-1}$, sólo si se realizan las operaciones algebraicas elementales (tales como dividir una ecuación entre una constante o restar un múltiplo de alguna ecuación de otra ecuación) que sean necesarias para recuperar la forma apropiada a partir de la eliminación gaussiana. Por lo tanto, todo lo que se necesita para actualizar $\mathbf{B}^{-1}$ de una iteración a la siguiente es obtener la nueva $\mathbf{B}^{-1}$ (representada por $\mathbf{B}^{-1}_{\text{nueva}}$) a partir de la $\mathbf{B}^{-1}$ vieja (representada por $\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}}$) realizando las operaciones algebraicas usuales en $\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}}$ que la forma alegabraica del método símplex llevaría a cabo en todo el sistema de ecuaciones [excepto en la ecuación (0)] para esta iteración. Por lo tanto, después de definir a la variable básica entrante y a la variable básica saliente de los pasos 1 y 2 de una iteración, el procedimiento consiste en aplicar el paso 3 de una iteración (como se describió en las secciones 4.3 y 4.4) a la porción $\mathbf{B}^{-1}$ de la tabla símplex actual o sistema de ecuaciones.

Para describir este procedimiento formalmente, sea

$x_k =$ variable básica entrante
$a'_{ik} =$ coeficiente de x_k en la ecuación (i) actual, para $i = 1,2, \ldots, m$ (identificada en el paso 2 de una iteración),
$r =$ número de la ecuación que contiene la variable básica saliente.

Recuerde que el nuevo conjunto de ecuaciones [excluyendo la ecuación (0)] puede obtenerse a partir del conjunto anterior restando a'_{ik}/a'_{rk} veces la ecuación (r) de la ecuación (i), para toda $i = 1, 2, \ldots, m$ excepto $i = r$ y después dividir la ecuación (r) por a'_{rk}. Por lo tanto, el elemento en el renglón i y la columna j de $\mathbf{B}^{-1}_{\text{nueva}}$ es

$$(\mathbf{B}^{-1}_{\text{nueva}})_{ij} = \begin{cases} (\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}})_{ij} - \dfrac{a'_{ik}}{a'_{rk}}(\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}})_{rj} & \text{si } i \neq r, \\ \dfrac{1}{a'_{rk}}(\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}})_{rj} & \text{si } i = r. \end{cases}$$

Estas fórmulas pueden expresarse en notación matricial como

$$\mathbf{B}^{-1}_{\text{nueva}} = \mathbf{E}\mathbf{B}^{-1}_{\text{vieja}},$$

donde la matriz $\mathbf{E}$ es una matriz identidad excepto que si la columna r-ésima está reemplazada por el vector

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{bmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \eta_i = \begin{cases} -\dfrac{a'_{ik}}{a'_{rk}} & \text{si } i \neq r, \\ \dfrac{1}{a'_{rk}} & \text{si } i = r. \end{cases}$$

Así, $\mathbf{E} = [\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \ldots, \mathbf{U}_{r-1}, \boldsymbol{\eta}, \mathbf{U}_{r+1}, \ldots, \mathbf{U}_m]$, donde los m elementos de cada vector columna $\mathbf{U}_i$ son 0 a excepción de un 1 en la i-ésima posición.

Ejemplo. Se ilustrará este procedimiento aplicándolo al problema de la compañía Wyndor Glass Co. Ya hemos aplicado la forma matricial del método símplex a este mismo problema en la sección 5.2, de tal forma que nos referiremos a los resultados obtenidos en cada iteración (la variable básica entrante, la variable básica saliente, etc.) para obtener la informacion necesaria para aplicar el procedimiento.

Iteración 1

Se pudo observar en la sección 5.2 que la $\mathbf{B}^{-1}$ inicial es igual a $\mathbf{I}$, la variable básica de ingreso es x_2 (de tal forma que $k = 2$), los coeficientes de x_2 en las ecuaciones 1, 2 y 3 son $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$ y $a_{32} = 2$, la variable básica saliente es x_4, y el número de la ecuación que contiene x_4 es $r = 2$. Para obtener la nueva $\mathbf{B}^{-1}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{22}} \\ \dfrac{1}{a_{22}} \\ -\dfrac{a_{32}}{a_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix},$$

de tal forma que

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Iteración 2

Se pudo observar en la sección 5.2 que la variable básica entrante en esta iteración es x_1 (de tal forma que $k = 1$), los coeficientes de x_1 en las ecuaciones 1, 2 y 3 actuales son $a'_{11} = 1$, $a'_{21} = 0$ y $a'_{31} = 3$, la variable básica saliente es x_5 y el número de la ecuación que contiene a x_5 es $r = 3$. Estos resultados nos dan

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a'_{11}}{a'_{31}} \\ -\dfrac{a'_{21}}{a'_{31}} \\ \dfrac{1}{a'_{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{3} \\ 0 \\ \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la $\mathbf{B}^{-1}$ nueva es

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

No son necesarias más iteraciones por ahora, por lo que este ejemplo ha finalizado.

Puesto que el método símplex revisado consiste en combinar este procedimiento para actualizar $\mathbf{B}^{-1}$ en cada iteración con el resto de la forma matricial del método símplex que se presentó en la sección 5.2, la combinación de este ejemplo con el de la sección 5.2 aplicando la forma matricial al mismo problema proporciona un ejemplo muy completo de cómo aplicar el método símplex revisado. Como se mencionó al final de la sección 5.2, la sección de Worked Examples del sitio en internet de este libro también proporciona **otro ejemplo** de cómo aplicar el método símplex revisado.

Concluimos esta sección con un resumen de las ventajas del método símplex revisado con respecto a la forma algebraica o tabular del método símplex. Una de ellas es que puede reducirse el número de cálculos aritméticos. Ello es especialmente cierto cuando la matriz **A** contiene un gran número de elementos igual a cero (lo cual por lo general es el caso en problemas de gran tamaño que se presentan en la práctica). La cantidad de información que debe almacenarse en cada iteración es menor y, a veces, mucho menor. El método símplex revisado también permite el control de los errores de redondeo que inevitablemente generan las computadoras. Dicho control puede ejecutarse si se obtiene de manera periódica al valor actual de $\mathbf{B}^{-1}$ invirtiendo directamente **B**. Además, algunos de los problemas del análisis de postoptimalidad que se analizaron en la sección 4.7 y al final de la 5.3 pueden manejarse de una forma más conveniente mediante el uso del método símplex revisado. Por todas estas razones, el método símplex revisado por lo general es la forma de método símplex que se prefiere para su ejecución por computadora.

5.5 CONCLUSIONES

Aunque el método símplex es un procedimiento algebraico está basado en algunos conceptos geométricos bastante sencillos. Estos conceptos permiten usar el algoritmo para examinar un número relativamente pequeño de soluciones básicas factibles antes de alcanzar e identificar la solución óptima.

En el capítulo 4 se describe cómo se utilizan las *operaciones algebraicas elementales* para ejecutar la *forma algebraica* del método símplex, y después el modo en que la *forma tabular* del método símplex utiliza las *operaciones elementales en los renglones* equivalentes de la misma manera. El estudio del método símplex en estas formas es una buena manera de iniciar el aprendizaje de los conceptos básicos. Sin embargo, estas formas del método símplex no proporcionan la manera más eficiente de ejecutarlo en computadora. Las *operaciones con matrices* son un camino más rápido para combinar y realizar operaciones algebraicas elementales u operaciones con renglones. Por lo tanto, al usar la *forma matricial* del método símplex, proporciona una manera eficaz de adaptar el método símplex para programarlo en una computadora. El *método símplex revisado* proporciona una mejora adicional para su implementación por computadora mediante la combinación de la forma matricial del método símplex con un procedimiento eficiente para actualizar la inversa de la matriz básica actual de iteración en iteración.

La tabla símplex final incluye la información completa para poderla reconstruir de manera algebraica a partir de la tabla símplex inicial. Esta idea fundamental tiene aplicaciones muy importantes, en especial en el análisis de posoptimalidad.

REFERENCIAS SELECCIONADAS

1. Dantzig, G. B. y M. N. Thapa, *Linear Programming 1: Introduction*, Springer, Nueva York, 1997.
2. Dantzig, G. B. y M. N. Thapa, *Linear Programming 2: Theory and Extensions*, Springer, Nueva York, 2003.
3. Luenberger, D. y Y. Ye: *Linear and Nolinear Programming*, 3a. ed. Springer, Nueva York, 2008.
4. Vanderbei, R. J., *Linear Programming*: *Foundations and Extensions*, 3a. ed., Springer, Nueva York, 2008.

AYUDAS DE APRENDIZAJE PARA ESTE CAPÍTULO EN NUESTRO SITIO EN INTERNET (www.mhhe.com/hillier)

Ejemplos resueltos:

Ejemplos del capítulo 5

Ejemplo de demostración en el OR Tutor:

Idea fundamental

Rutinas interactivas en el IOR Tutorial:

Método gráfico interactivo
Introducción o revisión de un modelo general de programación lineal
Preparación para el método símplex, sólo interactivo
Solución interactiva mediante el método símplex

Rutinas automáticas en el IOR Tutorial:

Solución automática mediante el método símplex
Método gráfico y análisis de sensibilidad

Archivos (capítulo 3) para resolver el ejemplo Wyndor:

Archivos de Excel
Archivo LINGO/LINDO
Archivo MPL/CPLEX

Glosario del capítulo 5

Vea el apéndice 1 para la documentación del software.

PROBLEMAS

Los símbolos a la izquierda de algunos problemas (o de sus incisos) significan lo siguiente:

D: El ejemplo de demostración que se presentó antes puede ser útil.
I: Puede verificar algunos de sus trabajos por medio de los procedimientos listados anteriormente.

Un asterisco en el número del problema indica que al final del libro se da al menos una respuesta parcial.

5.1-1.* Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$,

sujeta a

$$2x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

I ***a***) Resuelva este problema en forma gráfica. Identifique las soluciones FEV en la gráfica encerrándolas en un círculo.
b) Identifique todos los conjuntos de dos ecuaciones de definición del problema. En cada uno obtenga (si existe) la solución correspondiente en el vértice y clasifíquela como solución FEV o como no factible.
c) Introduzca las variables de holgura con objeto de expresar las ecuaciones funcionales en la forma aumentada. Utilice estas variables de holgura para identificar la solución básica que corresponde a cada solución en un vértice, que haya encontrado en el inciso *b*).
d) Haga lo siguiente en *cada* conjunto de dos ecuaciones de definición del inciso *b*): identifique las variables indicativas de cada ecuación de definición; escriba los conjuntos de ecuaciones del inciso *c*) *después* de eliminar estas dos variables indicativas (no básicas); luego use el último conjunto de ecuaciones para obtener las dos variables restantes (variables básicas); compare la solución básica que resulta con la solución básica correspondiente que obtuvo en el inciso *c*).
e) Sin ejecutar el método símplex, utilice su interpretación geométrica (y la función objetivo) para identificar la trayectoria (secuencia de soluciones FEV) que seguiría para llegar a la solución óptima. En cada solución FEV identifique la decisión tomada para la siguiente iteración: *i*) cuál ecuación de definición se elimina y cuál se agrega; *ii*) cuál variable indicativa se elimina (variable básica entrante) y cuál se introduce (variable básica que sale).

5.1-2. Repita el problema 5.1-1 en el modelo del problema 3.1-6.

5.1-3. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 5x_1 + 8x_2$,

sujeta a

$$4x_1 + 2x_2 \le 80$$
$$-3x_1 + x_2 \le 4$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 20$$
$$4x_1 - x_2 \le 40$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

I ***a***) Resuelva este problema en forma gráfica. Identifique las soluciones FEV y señálelas en la gráfica.
b) Desarrolle una tabla que muestre cada solución FEV y las ecuaciones de definición correspondientes, la solución BF y las variables no básicas. Calcule Z de cada solución y utilice sólo esta información para identificar la solución óptima.
c) Desarrolle la tabla correspondiente de las soluciones no factibles en los vértices, etc. Además, identifique los conjuntos de ecuaciones de definición y las variables no básicas que no conducen a una solución.

5.1-4. Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 2x_1 - x_2 + x_3$,

sujeta a

$$3x_1 + x_2 + x_3 \le 60$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \le 10$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \le 20$$

y

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Después de introducir las variables de holgura y de realizar una iteración completa del método símplex se obtiene la siguiente tabla símplex.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Lado derecho
1	Z	(0)	1	0	−1	3	0	2	0	20
	x_4	(1)	0	0	4	−5	1	−3	0	30
	x_1	(2)	0	1	−1	2	0	1	0	10
	x_6	(3)	0	0	2	−3	0	−1	1	10

a) Identifique la solución FEV que se obtuvo mediante la iteración 1.
b) Identifique las ecuaciones de frontera de restricción que definen la solución FEV.

5.1-5. Considere el problema de programación lineal de tres variables que se muestra en la figura 5.2.
a) Construya una tabla similar a la 5.1 que muestre el conjunto de ecuaciones de definición de cada solución FEV.
b) ¿Cuáles son las ecuaciones de definición de la solución no factible en el vértice (6, 0, 5)?
c) Identifique uno de los sistemas de tres ecuaciones de frontera de restricción que no conduzca a una solución FEV ni a una solución no factible en un vértice. Explique por qué ocurre esto en ese sistema.

5.1-6. Considere el siguiente problema.

Minimizar $Z = 8x_1 + 5x_2$,

sujeta a

$$-3x_1 + 2x_2 \le 30$$
$$2x_1 + x_2 \ge 50$$
$$x_1 + x_2 \ge 30$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

a) Identifique los 10 conjuntos de ecuaciones de definición del problema. Para cada uno, obtenga (si existe) la solución correspondiente en el vértice y clasifíquela como solución FEV o como solución no factible en un vértice.

b) En cada solución en un vértice, obtenga la solución básica correspondiente y su conjunto de variables no básicas.

5.1-7. Reconsidere el modelo del problema 3.1-5.

a) Identifique los 15 conjuntos de ecuaciones de definición de este problema. En cada uno, obtenga (si existe) la solución correspondiente en un vértice y clasifíquela como solución FEV o como solución no factible en un vértice.

b) En cada solución en un vértice obtenga la solución básica correspondiente y su conjunto de variables no básicas.

5.1-8. Cada una de las siguientes afirmaciones es cierta en casi todas las circunstancias, pero no siempre. En cada caso, indique cuándo no lo es y por qué.

a) La mejor solución FEV es una solución óptima.

b) Una solución óptima es una solución FEV.

c) Una solución FEV es la única solución óptima si ninguna de las soluciones FEV adyacentes es mejor (según la medida del valor de la función objetivo).

5.1-9. Considere la forma original (antes de aumentar) de un problema de programación lineal con n variables de decisión (cada una con una restricción de no negatividad) y m restricciones funcionales. Diga si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas y después justifique su respuesta con referencias específicas al material del capítulo (incluya cita de la página).

a) Si una solución factible es óptima, debe ser una solución FEV.

b) El número de soluciones FEV es al menos

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}.$$

c) Si una solución FEV tiene soluciones adyacentes que son mejores (de acuerdo con el valor de Z), entonces una de estas soluciones FEV adyacentes debe ser óptima.

5.1-10. Diga si las siguientes afirmaciones sobre problemas de programación lineal son falsas o verdaderas y después justifique su respuesta.

a) Si una solución factible es óptima pero no FEV, existe un número infinito de soluciones óptimas.

b) Si el valor de la función objetivo es igual en dos puntos factibles diferentes $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x}^{**}$, entonces todos los puntos sobre el segmento de recta que conecta a $\mathbf{x}^*$ y $\mathbf{x}^{**}$ son factibles y Z tiene el mismo valor en todos ellos.

c) Si el problema tiene n variables (antes de aumentar), entonces la solución simultánea de cualquier conjunto de n ecuaciones de frontera de restricción es una solución FEV.

5.1-11. Considere la forma aumentada de los problemas de programación lineal que tienen soluciones factibles y una región factible acotada. Diga si cada una de las afirmaciones siguientes es falsa o verdadera y después justifique su respuesta con una referencia a afirmaciones específicas del capítulo (incluya cita de la página).

a) Debe haber al menos una solución óptima.

b) Una solución óptima debe ser una solución BF.

c) El número de soluciones BF es finito.

5.1-12.* Reconsidere el modelo del problema 4.6-9. Ahora se sabe que las variables básicas de la solución óptima son x_2 y x_3. Use esta información para identificar un sistema de tres ecuaciones de frontera de restricción cuya solución simultánea sea esta solución óptima. Resuelva este sistema de ecuaciones para obtener esa solución.

5.1-13. Reconsidere el problema 4.3-6. Ahora use la información dada y la teoría del método símplex para identificar un sistema de tres ecuaciones de frontera de restricción (en x_1, x_2, x_3) cuya solución simultánea sea la solución óptima, sin aplicar el método símplex. Resuelva el sistema de ecuaciones para encontrar la solución óptima.

5.1-14. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \qquad Z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4 y x_5 las variables de holgura de las restricciones funcionales respectivas. Comience con estas dos variables como las variables básicas de la solución BF inicial, y se obtiene la información de que el método símplex procede de la siguiente manera para obtener la solución óptima en dos iteraciones: 1) en la iteración 1, la variable básica entrante es x_3 y la variable básica saliente es x_4; 2) en la iteración 2, la variable básica entrante es x_2 y la que sale es x_5.

a) Desarrolle un dibujo de tres dimensiones de la región factible del problema y muestre la trayectoria que sigue el método símplex.

b) Dé una interpretación geométrica de las razones por las cuales el método símplex sigue esta trayectoria.

c) En cada una de las dos aristas de la región factible por las que se desplaza el método símplex, dé la ecuación de las dos fronteras de restricción sobre las que está y después la ecuación de la frontera de restricción adicional en cada punto extremo.

d) Identifique el conjunto de ecuaciones de definición de las tres soluciones FEV (incluso la inicial) que obtuvo por el método símplex. Use las ecuaciones de definición para obtener estas soluciones.

e) En cada solución FEV que obtuvo en el inciso *d*), proporcione la solución BF correspondiente y su conjunto de variables no básicas. Explique en qué forma estas variables no básicas identifican las ecuaciones de definición del inciso *d*).

5.1-15. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \qquad Z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 30 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4 y x_5 las variables de holgura de las restricciones funcionales respectivas. Si se inicia con estas dos variables como variables básicas de la solución BF inicial, se recibe la información de que el método símplex procede de la siguiente manera para obtener la solución óptima en dos iteraciones: 1) en la iteración 1, la variable básica entrante es x_2 y la variable básica que sale es x_5; 2) en la iteración 2, la variable básica entrante es x_1 y la que sale es x_4.

Siga las mismas instrucciones del problema 5.1-14 para este caso.

5.1-16. Después de observar la figura 5.2, explique por qué la propiedad 1*b* de las soluciones FEV se cumple en este problema si tiene la siguiente función objetivo.

***a*)** Maximizar $Z = x_3$.
***b*)** Maximizar $Z = -x_1 + 2x_3$.

5.1-17. Considere el problema de programación lineal de tres variables que se muestra en la figura 5.2.

***a*)** Explique en términos geométricos por qué el conjunto de soluciones que satisfacen cualquier restricción individual es convexo según se define en el apéndice 2.
***b*)** Utilice la conclusión del inciso *a*) para explicar por qué la región factible completa (el conjunto de soluciones que satisfacen de manera simultánea todas las restricciones) es un conjunto convexo.

5.1-18. Suponga que el problema de programación lineal de tres variables que se presenta en la figura 5.2 tiene la función objetivo

$$\text{Maximizar} \qquad Z = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Sin emplear el álgebra del método símplex, aplique sólo el razonamiento geométrico (incluso la elección de la arista que proporcione la tasa máxima de incremento de *Z*) para determinar y explicar la trayectoria que seguiría en la figura 5.2 desde el origen hasta la solución óptima.

5.1-19. Considere el problema de programación lineal de tres variables que se muestra en la figura 5.2.

***a*)** Construya una tabla similar a la 5.4 que muestre las variables indicativas de cada ecuación de frontera de restricción y cada restricción original.
***b*)** Para la solución FEV (2, 4, 3) y sus tres soluciones FEV adyacentes (4, 2, 4), (0, 4, 2) y (2, 4, 0) construya una tabla similar a la 5.5 que muestre las ecuaciones de definición correspondientes, las soluciones BF y las variables no básicas.
***c*)** Utilice los conjuntos de ecuaciones de definición del inciso *b*) para demostrar que (4, 2, 4), (0, 4, 2) y (2, 4, 0) son en realidad adyacentes a (2, 4, 3), pero que ninguna de estas tres soluciones FEV son adyacentes entre sí. Después utilice los conjuntos de variables no básicas del inciso *b*) para demostrar lo mismo.

5.1-20. La fórmula de la recta que pasa por (2, 4, 3) y (4, 2, 4) de la figura 5.2 se puede escribir como

$$(2, 4, 3) + \alpha[(4, 2, 4) - (2, 4, 3)] = (2, 4, 3) + \alpha(2, -2, 1),$$

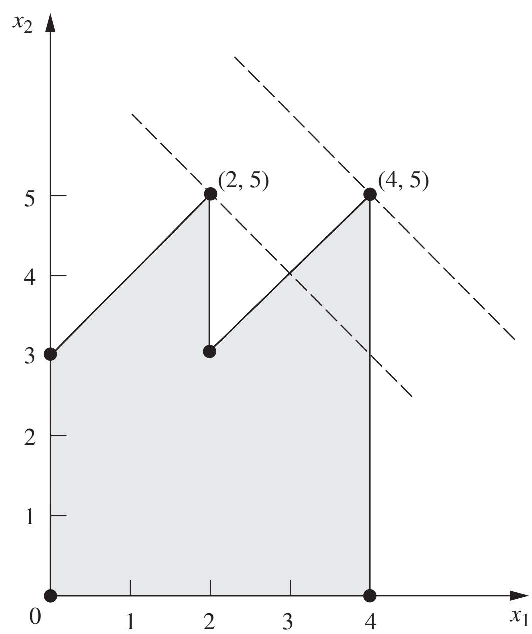
donde $0 \leq \alpha \leq 1$ para el segmento de recta que une estos dos puntos. Después de aumentar las restricciones respectivas con las variables de holgura x_4, x_5, x_6, x_7 esta fórmula se convierte en

$$(2, 4, 3, 2, 0, 0, 0) + \alpha(2, -2, 1, -2, 2, 0, 0).$$

Utilice esta fórmula directamente para contestar lo siguiente y relacionar el álgebra y la geometría del método símplex al ir de una iteración a otra, desde el punto (2, 4, 3) hasta (4, 2, 4). (Se tiene información de que se mueve a lo largo de este segmento de recta.)

***a*)** ¿Cuál es la variable básica entrante?
***b*)** ¿Cuál es la variable básica que sale?
***c*)** ¿Cuál es la nueva solución BF?

5.1-21. Considere un problema de programación matemática con dos variables cuya región factible se muestra en la gráfica; los seis puntos corresponden a las soluciones FEV. El problema tiene una función objetivo lineal y las dos rectas punteadas indican rectas de función objetivo que pasan por la solución óptima (4, 5) y por la segunda mejor solución FEV (2, 5). Observe que la solución no óptima (2, 5) es mejor que las dos soluciones FEV adyacentes, lo cual viola la propiedad 3 de programación lineal que se explicó en la sección 5.1 para soluciones FEV. Construya la región factible que resultaría si los seis segmentos de la frontera fueran restricciones de frontera para las restricciones de programación lineal, con el fin de demostrar que este problema *no puede ser* un problema de programación lineal.



5.2-1. Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \qquad Z = 8x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 9x_5,$$

sujeta a

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcll} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & & & \leq & 180 & \quad \text{(recurso 1)} \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 270 & \quad \text{(recurso 2)} \\ x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & + & 3x_5 & \leq & 180 & \quad \text{(recurso 3)} \end{array}$$

y

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, 5.$$

Se sabe que las variables básicas de la solución óptima son x_3, x_1 y x_5 y que

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{27}\begin{bmatrix} 11 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

***a*)** Con esta información identifique la solución óptima.
***b*)** Use esta información para identificar los precios sombra de los tres recursos.

I **5.2-2.*** Aplique la forma matricial del método símplex para resolver el siguiente problema.

Maximizar $Z = 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5$,

sujeta a

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \leq 20$$
$$3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 30$$

y

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

5.2-3. Reconsidere el problema 5.1-1. Para la sucesión de soluciones FEV que se identificó en el inciso *e*), construya la matriz base **B** de cada solución BF correspondiente. En cada caso, invierta **B** en forma manual y utilice esta $\mathbf{B}^{-1}$ para calcular la solución actual; después realice la siguiente iteración (o demuestre que la actual es óptima).

I **5.2-4.** Aplique la forma matricial del método símplex para resolver el modelo que se presentó en el problema 4.1-5.

I **5.2-5.** Aplique la forma matricial del método símplex para resolver el modelo que se presentó en el problema 4.7-6.

D **5.3-1.*** Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = x_1 - x_2 + 2x_3$,

sujeta a

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 \leq 2$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4, x_5 y x_6 las variables de holgura de las restricciones respectivas. Después de aplicar el método símplex, una parte de la tabla símplex final es como se muestra a continuación:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:							Lado derecho
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1				1	1	0	
x_2	(1)	0				1	3	0	
x_6	(2)	0				0	1	1	
x_3	(3)	0				1	2	0	

a) Utilice la idea fundamental presentada en la sección 5.3 para identificar los números que faltan en esta tabla símplex final. Muestre sus cálculos.

b) Identifique las ecuaciones de definición de la solución FEV correspondiente a la solución BF óptima de la tabla símplex final.

D **5.3-2.** Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$,

sujeta a

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 4$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

Sean x_5 y x_6 las variables de holgura de las restricciones respectivas. Después de aplicar el método símplex, una parte de la tabla final es como se muestra a continuación:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:							Lado derecho
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1					1	1	
x_2	(1)	0					1	−1	
x_4	(2)	0					−1	2	

a) Utilice la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar los números que faltan en esta tabla. Muestre sus cálculos.

b) Identifique las ecuaciones de definición de la solución FEV que corresponde a la solución BF óptima de la tabla símplex final.

D **5.3-3.** Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 6x_1 + x_2 + 2x_3$,

sujeta a

$$2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$
$$-4x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \leq 3$$
$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1$$

y

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4, x_5 y x_6 las variables de holgura de las restricciones respectivas. Después de aplicar el método símplex, una parte de la tabla símplex final es como se muestra a continuación:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:							Lado derecho
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
Z	(0)	1				2	0	2	
x_5	(1)	0				1	1	2	
x_3	(2)	0				−2	0	4	
x_1	(3)	0				1	0	−1	

Utilice la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar los números que faltan en esta tabla símplex final. Muestre sus cálculos.

D **5.3-4.** Considere el siguiente problema.

Maximizar $Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$,

sujeta a

$$\begin{aligned} 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 200 \\ 4x_1 + 3x_2 \qquad &\leq 100 \\ 2x_1 \qquad + x_3 &\leq 50 \\ x_3 &\leq 20 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4, x_5, x_6 y x_7 las variables de holgura de las restricciones respectivas. Después de aplicar el método símplex, una parte de la tabla símplex final es como se muestra a continuación:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:								Lado derecho
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
Z	(0)	1				$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_1	(1)	0				$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	
x_2	(2)	0				$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	
x_6	(3)	0				$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	1	0	
x_7	(4)	0				0	0	0	1	

a) Utilice la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar los números que faltan en esta tabla símplex final. Muestre sus cálculos.

b) Indique cuáles de estos números se generarían con la forma matricial del método símplex para poder realizar la siguiente iteración.

c) Identifique las ecuaciones de definición de la solución FEV correspondiente a la solución BF de la tabla símplex actual.

D **5.3-5.** Considere el siguiente problema.

$$\text{Maximizar} \qquad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq b \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 2b \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

Observe que no se asignaron valores a los coeficientes de la función objetivo (c_1, c_2, c_3), y que la única especificación para los valores del lado derecho de las restricciones funcionales es que el segundo ($2b$) es el doble del primero (b).

Ahora suponga que su jefe decidió insertar su mejor estimación de los valores de c_1, c_2, c_3 y b sin informarle y después corrió el método símplex. El resultado es la tabla símplex final resultante que se muestra a continuación (donde x_4 y x_5 son las variables de holgura de las restricciones funcionales respectivas), pero no puede leer el valor de Z^*.

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:						Lado derecho
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
Z	(0)	1	$\frac{7}{10}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	Z^*
x_2	(1)	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1
x_3	(2)	0	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	3

a) Utilice la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar el valor de (c_1, c_2, c_3) que se usó.

b) Utilice la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar el valor de b que se usó.

c) Calcule el valor de Z^* de dos maneras; en una de ellas utilice los resultados del inciso *a*) y en la otra los resultados del inciso *b*). Muestre los métodos para encontrar Z^*.

5.3-6. La siguiente expresión se obtuvo en la iteración 2 del ejemplo de la sección 5.3:

$$\text{Renglón final } 0 = [-3, \quad -5 \mid 0, \quad 0, \quad 0 \mid 0] + [0, \quad \tfrac{3}{2}, \quad 1]\left[\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 12 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right].$$

Obtenga esta expresión mediante la combinación de las operaciones algebraicas (en forma matricial) que afectan el renglón 0, en las iteraciones 1 y 2.

5.3-7. La mayor parte de la descripción de la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 supone que el problema se encuentra en nuestra forma estándar. Ahora considere otras formas que requieren los ajustes adicionales del paso inicial expuestos en la sección 4.6, inclusive el uso de variables artificiales y el método de la gran M cuando sea apropiado. Describa los ajustes que deben hacerse a la idea fundamental para:

a) Restricciones de igualdad

b) Restricciones funcionales de la forma $\geq$

c) Lados derechos negativos

d) Variables que pueden tomar valores negativos (sin cota inferior)

5.3-8. Reconsidere el problema 4.6-5. Utilice variables artificiales y el método de la gran M para construir la primera tabla símplex completa para el método símplex y después identifique las columnas que formarán $\mathbf{S}^*$ para aplicar la idea fundamental en la tabla símplex final. Explique por qué éstas son las columnas apropiadas.

5.3-9. Considere el siguiente problema.

$$\text{Minimizar} \qquad Z = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

sujeta a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 6 \end{aligned}$$

y

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0.$$

Sean x_4 y x_6 las respectivas variables de superávit de las dos primeras restricciones. Sean $\bar{x}_5$ y $\bar{x}_7$ las variables artificiales correspondientes. Después de hacer los ajustes descritos en la sección 4.6 para esta forma de modelo cuando se usa el método de la gran M, la tabla símplex inicial lista para aplicar el método símplex es la siguiente:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	Lado derecho
Z	(0)	-1	$-4M+2$	$-6M+3$	$-2M+2$	M	0	M	0	$-14M$
$\bar{x}_5$	(1)	0	1	4	2	-1	1	0	0	8
$\bar{x}_7$	(2)	0	3	2	0	0	0	-1	1	6

Después de aplicar el método símplex, una parte de la tabla símplex final es la que sigue:

Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\bar{x}_5$	x_6	$\bar{x}_7$	Lado derecho
Z	(0)	-1					$M - 0.5$		$M - 0.5$	
x_2	(1)	0					0.3		-0.1	
x_1	(2)	0					-0.2		0.4	

a) Con base en la tabla símplex anterior, use la idea fundamental que se presentó en la sección 5.3 para identificar los números que faltan en esa tabla símplex final. Muestre sus cálculos.

b) Examine la lógica matemática que se presentó en la sección 5.3 para validar la idea fundamental (vea las ecuaciones $\mathbf{T}^* = \mathbf{MT}$ y $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{vT}$ y los desarrollos subsecuentes de $\mathbf{M}$ y $\mathbf{v}$). Esta lógica supone que el modelo original se ajusta a nuestra forma estándar mientras que este problema no lo hace. Muestre cómo, con ajustes menores, se puede aplicar la misma lógica a este problema, donde $\mathbf{t}$ es el renglón 0 y $\mathbf{T}$ está formada por los renglones 1 y 2 de la tabla símplex inicial. Obtenga $\mathbf{M}$ y $\mathbf{v}$ de este problema.

c) Al aplicar la ecuación $\mathbf{t}^* = \mathbf{t} + \mathbf{vT}$ una alternativa es usar $\mathbf{t} = [2, 3, 2, 0, M, 0, M, 0]$, que es el renglón 0 *preliminar* antes de eliminar en forma algebraica los coeficientes distintos de cero de las variables básicas iniciales $\bar{x}_5$ y $\bar{x}_7$. Repita el inciso *b*) para esta ecuación con esta nueva $\mathbf{t}$. Después de obtener la nueva $\mathbf{v}$, demuestre que esta ecuación conduce al mismo renglón 0 final que la ecuación que obtuvo en el inciso *b*).

d) Identifique las ecuaciones de definición de la solución FEV correspondiente a la solución BF óptima de la tabla símplex final.

5.3-10. Considere el siguiente problema.

Maximizar $\quad Z = 3x_1 + 7x_2 + 2x_3,$

sujeta a

$$-2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 \le 20$$

y

$$x_1 \ge 0, \qquad x_2 \ge 0, \qquad x_3 \ge 0.$$

Se conoce el hecho de que las variables básicas de la solución óptima son x_1 y x_3.

a) Introduzca las variables de holgura y después utilice la información que se proporcionó para encontrar la solución óptima en forma directa mediante la eliminación gaussiana.

b) Amplíe el trabajo del inciso *a*) para encontrar los precios sombra.

c) Utilice la información que se proporcionó para identificar las ecuaciones de definición de la solución FEV óptima y después resuelva estas ecuaciones para obtener la solución óptima.

d) Construya la matriz base $\mathbf{B}$ de la solución BF óptima, invierta $\mathbf{B}$ manualmente y después use esta $\mathbf{B}^{-1}$ para obtener la solución óptima y los precios sombra $\mathbf{y}^*$. Luego aplique la prueba de optimalidad del método símplex revisado para verificar que esta solución es óptima.

e) Dados $\mathbf{B}^{-1}$ y $\mathbf{y}^*$ del inciso *d*), utilice la idea fundamental presentada en la sección 5.3 para construir la tabla símplex final.

5.4-1. Considere el modelo que se presentó en el problema 5.2-2. Sean x_6 y x_7 las variables de holgura para la primera y segunda restricciones, respectivamente. Se le proporciona la información de que x_2 es a variable básica entrante y x_7 la variable básica saliente de la primera iteración del método símplex y, por lo tanto, x_4 es la variable básica de ingreso y x_6 es la variable básica de egreso de la segunda iteración (final). Utilice el procedimiento que se presentó en la sección 5.4 para actualizar $\mathbf{B}^{-1}$ de una iteración a la siguiente con el fin de encontrar $\mathbf{B}^{-1}$ después de la primera iteración y, luego, después de la segunda.

I **5.4-2.*** Utilice el método símplex revisado paso a paso para resolver el modelo que se muestra en el problema 4.3-4.

I **5.4-3.** Utilice el método símplex revisado paso a paso para resolver el modelo que se muestra en el problema 4.7-5.

I **5.4-4.** Utilice el método símplex revisado paso a paso para resolver el modelo que se muestra en el problema 3.1-6.