CAPÍTULO 4

Solución de problemas de programación lineal: método símplex

Es el momento de comenzar a estudiar el *método símplex*, un procedimiento general para resolver problemas de programación lineal. Desarrollado por George Dantzig[1] en 1947, se ha comprobado su extraordinaria eficiencia, y se usa en forma rutinaria para resolver problemas grandes en las computadoras de hoy en día. Excepto en el caso de problemas muy pequeños, se ejecuta siempre en una computadora y existe una amplia variedad de paquetes complejos de software para ello. También se usan extensiones y variaciones del método símplex para realizar *análisis posóptimo* (que incluye el análisis de sensibilidad) del modelo.

En este capítulo se describen y ejemplifican las características principales del método símplex. En la primera sección se presenta su naturaleza general junto con su representación geométrica. En las tres secciones subsecuentes se desarrolla el procedimiento para resolver cualquier modelo de programación lineal que se establezca en nuestra forma estándar (maximización, todas las restricciones funcionales de la forma $\leq$ y restricciones de no negatividad sobre todas las variables) y que sólo tenga cantidades *no negativas* en el lado derecho b_i de las restricciones funcionales. En la sección 4.5 se presentan ciertos detalles sobre cómo romper empates, y en la sección 4.6 se describe la adaptación del método símplex a otras formas de modelos. Después se presenta el análisis posóptimo (sección 4.7) y se describe el manejo de este método en computadora (sección 4.8). En la sección 4.9 se introduce una alternativa al método símplex (el enfoque de punto interior) para resolver problemas de programación lineal grandes.

4.1 ESENCIA DEL MÉTODO SÍMPLEX

El método símplex es un procedimiento *algebraico*. Sin embargo, sus conceptos fundamentales son *geométricos*. La comprensión de estos conceptos geométricos proporciona una fuerte intuición sobre la forma en que opera el método símplex y las razones de su elevada eficiencia. Por lo tanto, antes de profundizar en los detalles algebraicos, se dedicará esta sección a enfocar el método desde un punto de vista geométrico.

Para ilustrar los conceptos geométricos generales se usará el ejemplo de la Wyndor Glass Co. de la sección 3.1. (En las secciones 4.2 y 4.3 se usa el *álgebra* del método símplex para resolver este mismo ejemplo.) En la sección 5.1 se profundiza en estos conceptos para resolver problemas grandes.

[1] Ampiamente reconocido como el pionero más importante de la investigación de operaciones, a George Dantzig se le conoce comúnmente como el *padre de la programación lineal* debido al desarrollo del método símplex y a una serie de contribuciones clave subsecuentes. Los autores tuvieron el privilegio de ser sus colegas en el Departamento de Investigación de Operaciones de la Universidad de Stanford por casi 30 años. El doctor Dantzig permaneció profesionalmente activo hasta su fallecimiento en 2005 a la edad de 90 años.

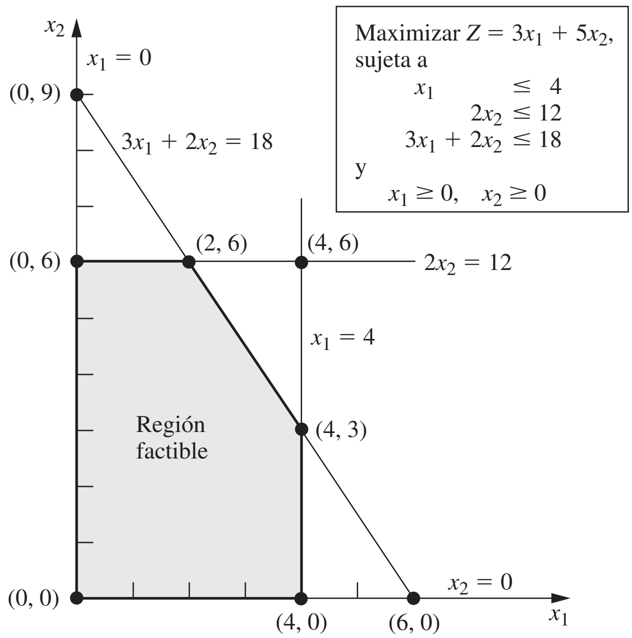

FIGURA 4.1
Restricciones de frontera y soluciones en los vértices del problema de la Wyndor Glass Co.

Para refrescar la memoria, el modelo y la gráfica de este ejemplo se repiten en la figura 4.1. Se marcaron las cinco fronteras de restricción y sus puntos de intersección puesto que son puntos clave para el análisis. Aquí, cada **frontera de restricción** es una recta que marca el límite de lo que permite la restricción correspondiente. Los puntos de intersección son las **soluciones en los vértices** del problema. Los cinco puntos que se encuentran en los vértices de la *región factible* —(0, 0), (0, 6), (2, 6), (4, 3) y (4, 0)— son las *soluciones factibles en los vértices* (**soluciones FEV**). [Los otros tres —(0, 9), (4, 6) y (6, 0)— se llaman *soluciones no factibles en un vértice*.]

En este ejemplo, cada solución en un vértice se encuentra en la intersección de *dos* fronteras de restricción. (En el caso de un problema de programación lineal con n variables de decisión, cada una de sus soluciones en los vértices se encuentra en la intersección de n fronteras de restricciones.)[2] Algunos pares de soluciones FEV de la figura 4.1 comparten una frontera de restricción, y otros no. Será importante distinguir estos casos con la siguiente definición general.

> En cualquier problema de programación lineal con n variables de decisión, dos soluciones FEV son **adyacentes** entre sí cuando comparten $n - 1$ fronteras de restricción. Dos soluciones FEV adyacentes están conectadas por un segmento de recta que se encuentra en estas mismas fronteras de restricción compartidas. Dicho segmento de recta recibe el nombre de **arista** de la región factible.

Como en el ejemplo $n = 2$, dos de sus soluciones FEV son adyacentes si comparten *una* frontera de restricción; por ejemplo, (0, 0) y (0, 6) son adyacentes porque comparten la frontera $x_1 = 0$. La región factible de la figura 4.1 tiene cinco aristas que consisten en los cinco segmentos que forman la frontera de esta región. Observe que de cada solución FEV salen dos aristas. En consecuencia, cada solución FEV tiene dos soluciones FEV adyacentes (cada una se encuentra en el otro punto terminal de una de las dos aristas), como se enumera en la tabla 4.1. (En cada renglón de esta tabla, la solución FEV de la primera columna es adyacente a las dos soluciones FEV de la segunda columna, pero las dos soluciones de esta última *no* son adyacentes entre sí.)

Una razón para analizar las soluciones FEV adyacentes es la siguiente propiedad general de las soluciones, que proporciona una manera muy útil de verificar si una solución FEV es óptima.

[2] Aunque una solución en un vértice está definida en términos de n fronteras de restricciones cuyas intersecciones dan esta solución, también es posible que una o más fronteras adicionales pasen por este mismo punto.

TABLA 4.1 Soluciones FEV adyacentes para cada solución FEV del problema de la Wyndor Glass Co.

Solución FEV	Sus soluciones FEV adyacentes
(0, 0)	(0, 6) y (4, 0)
(0, 6)	(2, 6) y (0, 0)
(2, 6)	(4, 3) y (0, 6)
(4, 3)	(4, 0) y (2, 6)
(4, 0)	(0, 0) y (4, 3)

> **Prueba de optimalidad:** Considere cualquier problema de programación lineal que posea al menos una solución óptima. Si una solución FEV no tiene soluciones FEV *adyacentes* que sean *mejores* (según el valor de Z), entonces ésa *debe* ser una solución *óptima*.

Así, por ejemplo (2, 6) debe ser óptima sólo porque su valor correspondiente de $Z = 36$ es más grande que $Z = 30$ para (0, 6) y $Z = 27$ para (4, 3). (En la sección 5.1 se analizará con mayor profundidad por qué se cumple esta propiedad.) Esta prueba de optimalidad se usa en el método símplex para determinar cuándo se ha llegado a una solución óptima.

En este momento, es posible aplicar el método símplex a un ejemplo.

Solución del ejemplo

Se presenta aquí un bosquejo de cómo utilizar el método símplex (desde el punto de vista geométrico) para resolver el problema de la Wyndor Glass Co. En cada paso, primero se establece la conclusión y después se expone la razón entre paréntesis. (Remítase a la figura 4.1 para tener una imagen gráfica del problema.)

Paso inicial: Elija (0, 0) como la solución FEV *inicial* para examinarla. (Ésta es una elección conveniente porque no se requieren cálculos para identificarla.)

Prueba de optimalidad: Concluya que (0, 0) *no* es una solución óptima. (Las soluciones FEV adyacentes son mejores.)

Iteración 1: Muévase a una solución FEV *adyacente* mejor, (0, 6), y realice los siguientes tres pasos.

1. Entre las dos aristas de la región factible que salen de (0, 0), elija desplazarse a lo largo de la arista que aumenta el valor de x_2. (Con una función objetivo $Z = 3x_1 + 5x_2$, cuando aumenta el valor de x_2 el valor de Z crece más rápido que si aumentara el valor de x_1.)
2. Deténgase al llegar a la primera frontera de restricción: $2x_2 = 12$. [Si va más lejos en la dirección seleccionada en el paso 1, saldrá de la región factible; por ejemplo, cuando se desplaza hasta la segunda frontera de restricción en esa dirección se llega a (0, 9), que es una solución *no factible* en un vértice.]
3. Obtenga la intersección del nuevo conjunto de fronteras de restricción: (0, 6). (Las ecuaciones de estas fronteras de restricción, $x_1 = 0$ y $2x_2 = 12$, conducen de inmediato a esta solución.)

Prueba de optimalidad: Concluya que (0, 6) *no* es una solución óptima. (Existe una solución FEV adyacente que es mejor.)

Iteración 2: Muévase a una mejor solución FEV (2, 6), mediante la realización de los siguientes pasos.

1. En las dos aristas de la región factible que salen de (0, 6) elija moverse a lo largo de la que va hacia la derecha. (Moverse a lo largo de esta arista aumenta el valor de Z, mientras que ir para atrás hacia abajo del eje x_2 lo disminuye.)
2. Deténgase al encontrar la primera nueva frontera de restricción en esa dirección: $3x_1 + 2x_2 = 12$. (Si se mueve más lejos en la dirección elegida en el paso 1, saldrá de la región factible.)
3. Determine la intersección del nuevo conjunto de fronteras de restricción: (2, 6). (Las ecuaciones de estas fronteras de restricción, $3x_1 + 2x_2 = 18$ y $2x_2 = 12$, conducen de inmediato a esta solución.)

Prueba de optimalidad: Concluya que (2, 6) *es* una solución óptima y deténgase. (Ninguna de las soluciones FEV adyacentes es mejor.)

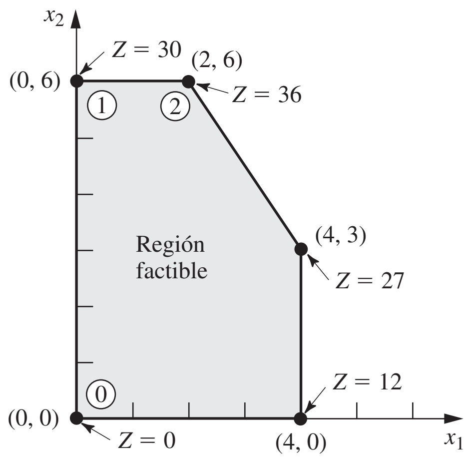

FIGURA 4.2
Esta gráfica muestra la secuencia de soluciones FEV (⓪, ①, ②) examinadas por el método símplex para el problema de la Wyndor Glass Co. La solución óptima (2, 6) se encuentra después de examinar tres soluciones.

En la figura 4.2 se muestra la secuencia de solución FEV que se examinó, donde cada número dentro de un círculo identifica la iteración que obtuvo esa solución. (Vea la sección de Ejemplos resueltos en al sitio en internet del libro donde encontrará **otro ejemplo** que muestra la forma en la que el método símplex itera a través de una secuencia de soluciones FEV antes de llegar a la solución óptima.)

A continuación se analizarán los seis conceptos clave para solución con el método símplex que proporcionan el razonamiento que lleva a los pasos anteriores. (Considere que estos conceptos también se aplican para resolver problemas con más de dos variables de decisión para los que no se dispone de una gráfica parecida a la que se muestra en la figura 4.2 como ayuda para encontrar una solución óptima.)

Conceptos clave de solución

El primer concepto de solución se basa de manera directa en la relación entre las soluciones óptimas y las soluciones factibles en los vértices explicada al final de la sección 3.2.

> **Concepto de solución 1:** El método símplex analiza sólo las soluciones FEV. Para cualquier problema con al menos una solución óptima, la ubicación de una de ellas sólo requiere encontrar una mejor solución FEV.[3]

Debido a que, por lo general, el número de soluciones factibles es infinito, la reducción del número de soluciones que deben examinarse a un pequeño número finito (sólo tres en la figura 4.2) es una simplificación enorme.

El siguiente concepto de solución define el flujo del método símplex.

> **Concepto de solución 2:** El método símplex es un *algoritmo iterativo* (procedimiento de solución sistemático que repite una serie fija de pasos, llamada *iteración*, hasta que se obtiene el resultado deseado) con la siguiente estructura.

Inicialización: Preparación para comenzar las iteraciones, que incluye encontrar una solución FEV inicial.

↓

Prueba de optimalidad: ¿Es óptima la solución FEV actual?

No ↓ Sí → Termina.

Iteración: Realizar una iteración para encontrar una mejor solución FEV.

[3] La única restricción es que el problema debe tener soluciones factibles en los vértices, lo cual se asegura si la región factible es acotada.

Observe que cuando se resolvió el ejemplo se siguió este diagrama de flujo de dos iteraciones hasta que se encontró una solución óptima.

Ahora se analizará la forma de comenzar.

> **Concepto de solución 3:** Siempre que es posible, en el paso inicial del método símplex se elige el *origen* (todas las variables de decisión iguales a cero) como la solución FEV inicial. Cuando se tienen demasiadas variables de decisión para encontrar una solución FEV inicial en una gráfica, esta elección elimina la necesidad de usar procedimientos algebraicos para obtenerla.

Casi siempre es posible seleccionar el origen cuando todas las variables de decisión tienen restricciones de no negatividad, porque la intersección de estas fronteras de restricción lleva al origen como una solución en un vértice. En consecuencia, esta solución es una solución FEV *a menos* que sea *no factible* porque viole una o más restricciones funcionales. Si es no factible, se necesitan los procedimientos especiales descritos en la sección 4.6 para encontrar la solución FEV inicial.

El siguiente concepto de solución se refiere a la selección de una mejor solución FEV en cada iteración.

> **Concepto de solución 4:** Dada una solución FEV, en términos de cómputo, es más rápido reunir información sobre sus soluciones FEV *adyacentes* que sobre otras soluciones FEV. Por lo tanto, cada vez que el método símplex realiza una iteración para moverse de la solución FEV actual a una mejor, *siempre* escoge una solución FEV *adyacente* a la actual. No considera otras soluciones FEV. En consecuencia, toda la trayectoria que sigue hasta alcanzar una solución óptima es a lo largo de las *aristas* de la región factible.

A continuación se verá cuál solución FEV adyacente se debe seleccionar en cada iteración.

> **Concepto de solución 5:** Después de identificar la solución FEV actual, el método símplex examina cada una de las aristas de la región factible que salen de esta solución. Estas aristas conducen a una solución FEV *adyacente* en el otro punto extremo, pero el método símplex ni siquiera se toma la molestia de obtener la solución FEV adyacente. Sólo identifica la *tasa de mejoramiento de* Z que se obtendría al moverse por esa arista. Entre las aristas con una tasa *positiva* de mejoramiento de Z, selecciona moverse por aquella con la tasa *más grande* de mejoramiento de Z. La iteración termina cuando se obtiene primero la solución FEV al final de esta arista y después se reetiqueta esta solución FEV adyacente como la solución FEV *actual* para pasar a la prueba de optimalidad y (si es necesario) a la siguiente iteración.

En la primera iteración del ejemplo, al moverse de (0, 0) a lo largo de la arista sobre el eje x_1 se obtendría una tasa de mejoramiento de Z de 3 (Z crece 3 por cada incremento de una unidad de x_1), mientras que al moverse por la arista sobre el eje x_2 se tendría una tasa de mejoramiento de Z de 5 (Z aumenta 5 por cada incremento de una unidad de x_2), de manera que se toma la decisión de desplazarse a lo largo de esta última arista. En la segunda iteración, la única arista que sale de (0, 6) que daría una tasa de mejoramiento de Z *positiva* es la que conduce a (2, 6), por lo que se toma la decisión de moverse a lo largo de ella.

El concepto de solución final aclara la manera en que se realiza la prueba de optimalidad en forma eficiente.

> **Concepto de solución 6:** El concepto de solución 5 describe la manera en que el método símplex examina cada arista de la región factible que sale de la solución FEV actual. A través de este examen de una arista es sencillo identificar la tasa de mejoramiento de Z que se obtendría al moverse por ella hasta la solución FEV adyacente en el otro extremo. Una tasa *positiva* de mejoramiento de Z implica que la solución FEV adyacente es *mejor* que la actual, mientras que una tasa *negativa* de mejoramiento de Z indica que la solución FEV adyacente es *peor*. Por lo tanto, la prueba de optimalidad consiste sólo en verificar si alguna de las aristas conduce a una tasa *positiva* de mejoramiento de Z. Si *ninguna* lo hace, la solución FEV actual es óptima.

En el ejemplo, al moverse por *cualquiera* de las dos aristas desde (2, 6), el valor de Z disminuye. Como se desea maximizar Z, este hecho lleva de inmediato a la conclusión de que (2, 6) es óptima.

4.2 PREPARACIÓN PARA EL MÉTODO SÍMPLEX

En la sección 4.1 se hizo hincapié en los conceptos geométricos fundamentales del método símplex. Sin embargo, lo común es que este algoritmo se trabaje en una computadora que sólo puede seguir instrucciones algebraicas. Por lo tanto, es necesario transformar el procedimiento geométrico conceptual que se acaba de describir en un procedimiento algebraico que se pueda usar. En esta sección se introducirá el *lenguaje algebraico* del método símplex y se relacionará con los conceptos de la sección anterior.

El procedimiento algebraico se basa en la solución de sistemas de ecuaciones. Por lo tanto, el primer paso para preparar el método símplex es convertir las *restricciones funcionales de desigualdad* en *restricciones de igualdad equivalentes*. (Las restricciones de no negatividad se dejan como desigualdades porque se manejan por separado.) Esta conversión se logra mediante la introducción de **variables de holgura**. Para ejemplificar, considere la primera restricción funcional del problema de la Wyndor Glass Co. de la sección 3.1

$$x_1 \leq 4.$$

La variable de holgura de esta restricción se define como

$$x_3 = 4 - x_1,$$

que es la holgura que queda en el lado izquierdo de la desigualdad. Entonces,

$$x_1 + x_3 = 4.$$

Dada esta ecuación, $x_1 \leq 4$ se cumple si y sólo si $4 - x_1 = x_3 \geq 0$. En consecuencia, la restricción original $x_1 \leq 4$ es por completo *equivalente* al par de restricciones

$$x_1 + x_3 = 4 \quad \text{y} \quad x_3 \geq 0.$$

Al introducir variables de holgura en las otras restricciones funcionales, el modelo de programación lineal original de este ejemplo (que se muestra debajo a la izquierda) se puede sustituir por el modelo equivalente (llamado *forma aumentada* del modelo) que se encuentra a la derecha:

Forma original del modelo	*Forma aumentada del modelo*[4]
Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$, sujeta a $x_1 \leq 4$ $2x_2 \leq 12$ $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ y $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$	Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$, sujeta a 1) $x_1 + x_3 = 4$ 2) $2x_2 + x_4 = 12$ 3) $3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18$ y $x_j \geq 0$, para $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

Aun cuando ambas formas del modelo representan exactamente el mismo problema, la nueva forma es mucho más conveniente para la manipulación algebraica y la identificación de las soluciones FEV. Se le da el nombre de **forma aumentada** del problema, porque la forma original se *aumentó* con algunas variables suplementarias necesarias para aplicar el método símplex.

Si una variable de holgura es igual a 0 en la solución actual, entonces esta solución se encuentra sobre la frontera de restricción de la restricción funcional correspondiente. Un valor mayor que 0 significa que la solución está en el lado *factible* de la frontera de restricción, mientras que un valor menor que 0 señala que está en el lado *no factible* de esta frontera. La demostración de estas propiedades proporcionada por el **ejemplo de demostración** en el OR Tutor tiene el nombre de *Interpretation of the Slack Variables*.

[4] Las variables de holgura no se muestran en la función objetivo porque sus coeficientes son iguales a cero.

La terminología que se utiliza en la sección 4.1 (soluciones en los vértices, etc.) se aplica a la forma original del problema. A continuación se introducirá la terminología correspondiente a la forma aumentada.

Una **solución aumentada** es una solución de las variables originales (las *variables de decisión*) que se aumentó con los valores correspondientes de las *variables de holgura*.

Por ejemplo, si se aumenta la solución (3, 2) en el ejemplo, logra obtenerse la solución aumentada (3, 2, 1, 8, 5) debido a que los valores correspondientes de las variables de holgura son $x_3 = 1$, $x_4 = 8$ y $x_5 = 5$.

Una **solución básica** es una solución en un vértice *aumentada*.

Para ilustrar lo que decimos, considere la solución no factible del vértice (4, 6) de la figura 4.1. Al aumentarla con los valores que se obtuvieron para las variables de holgura $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $x_5 = -6$ se obtiene la solución básica correspondiente (4, 6, 0, 0, −6).

El hecho de que las soluciones en los vértices (y por ende las soluciones básicas) puedan ser o no factibles implica la siguiente definición:

Una **solución básica factible (BF)** es una solución FEV *aumentada*.

Así, la solución FEV (0, 6) del ejemplo es equivalente a la solución BF (0, 6, 4, 0, 6) del problema en la forma aumentada.

La única diferencia entre las soluciones básicas y las soluciones en un vértice (o entre las soluciones BF y soluciones FEV) es el hecho de que están incluidos los valores de las variables de holgura. Dada cualquier solución básica, la solución en el vértice correspondiente se obtiene con sólo quitar las variables de holgura. En consecuencia, las relaciones geométricas y algebraicas entre estas dos soluciones son muy estrechas, como se verá en la sección 5.1.

Debido a que los términos *solución básica* y *solución básica factible* son partes muy importantes del vocabulario normal de programación lineal, es necesario aclarar sus propiedades algebraicas. En el caso de la forma aumentada del ejemplo observe que el sistema de restricciones funcionales tiene 5 variables y 3 ecuaciones, esto es,

Número de variables − número de ecuaciones $= 5 - 3 = 2$.

Este hecho proporciona 2 *grados de libertad* cuando se debe resolver el sistema puesto que se pueden elegir dos variables cualesquiera e igualarlas a cualquier valor arbitrario para resolver las tres ecuaciones en términos de las tres variables restantes.[5] El método símplex usa cero para este valor arbitrario. Así, dos de las variables (llamadas *variables no básicas*) se igualan a cero y, entonces, la solución simultánea de las tres ecuaciones de las otras tres variables (llamadas *variables básicas*) es una *solución básica*. Estas propiedades se describen en las siguientes definiciones generales.

Una **solución básica** tiene las siguientes propiedades:

1. Cada variable se designa ya sea como variable básica o como variable no básica.
2. El *número de variables básicas* es igual al número de restricciones funcionales (ahora ecuaciones). Por lo tanto, el *número de variables no básicas* es igual al número total de variables *menos* el número de restricciones funcionales.
3. Las **variables no básicas** se igualan a cero.
4. Los valores de las **variables básicas** se obtienen como la solución simultánea del sistema de ecuaciones (restricciones funcionales en la forma aumentada). (Con frecuencia se hace referencia al conjunto de variables básicas como **la base**.)
5. Si las variables básicas satisfacen las *restricciones de no negatividad*, la solución básica es una **solución BF**.

[5] Este método de determinar el número de grados de libertad de un sistema de ecuaciones es válido *siempre y cuando* el sistema no incluya ecuaciones redundantes. Esta condición siempre se cumple para el sistema de ecuaciones formado por las restricciones funcionales en la forma aumentada de un modelo de programación lineal.

Con el fin de ilustrar estas definiciones se considerará de nuevo la solución BF (0, 6, 4, 0, 6). Esta solución se obtuvo al aumentar la solución FEV (0, 6). Sin embargo, otra manera de obtenerla es elegir x_1 y x_4 como variables no básicas, es decir, como las dos variables que se igualan a cero. Las tres ecuaciones respectivas llevan a $x_3 = 4$, $x_2 = 6$ y $x_5 = 6$ como la solución de las tres variables básicas, según se muestra en seguida (las variables básicas aparecen en **negritas**):

$$
\begin{array}{llcl}
 & & & x_1 = 0 \text{ y } x_4 = 0 \text{ entonces} \\
(1) & x_1 + \mathbf{x_3} & = 4 & \mathbf{x_3} = 4 \\
(2) & 2\mathbf{x_2} + x_4 & = 12 & \mathbf{x_2} = 6 \\
(3) & 3x_1 + 2\mathbf{x_2} + \mathbf{x_5} & = 18 & \mathbf{x_5} = 6
\end{array}
$$

Como estas tres variables básicas son no negativas, esta *solución básica* (0, 6, 4, 0, 6) sin duda es una *solución BF*. En la sección Worked Examples del sitio en internet del libro se incluye **otro ejemplo** de la relación entre las soluciones FEV y BF.

Como sólo ciertos pares de soluciones FEV son *adyacentes*, a los pares correspondientes de soluciones BF se les denomina adyacentes. Un modo simple de reconocer si dos soluciones BF son adyacentes es el siguiente.

> Dos soluciones BF son **adyacentes** si *todas menos una* de sus *variables no básicas* son las mismas. Esto implica que *todas menos una* de sus *variables básicas* son también las mismas, aunque tal vez con valores numéricos diferentes.

En consecuencia, al trasladarse de la solución BF actual a una adyacente se cambia una variable no básica a básica y viceversa para otra variable (y después se ajustan los valores de las variables básicas para que satisfagan el sistema de ecuaciones).

Para dar un ejemplo de *soluciones básicas factibles adyacentes*, considere un par de soluciones factibles en vértices adyacentes en la figura 4.1: (0, 0) y (0, 6). Sus soluciones aumentadas (0, 0, 4, 12, 18) y (0, 6, 4, 0, 6) son, de manera automática, soluciones BF adyacentes. Sin embargo, no es necesario ver la figura 4.1 para llegar a esta conclusión. Otra forma de verlo es observar que sus variables no básicas (x_1, x_2) y (x_1, x_4), son las mismas excepto en una, x_4 sustituye a x_2. En consecuencia, trasladarse de (0, 0, 4, 12, 18) a (0, 6, 4, 0, 6) implica cambiar a x_2 de variable no básica a básica y lo contrario para x_4.

Cuando se trabaja con el problema en la forma aumentada conviene tomar en cuenta y manipular la ecuación de la función objetivo al mismo tiempo que las nuevas ecuaciones de las restricciones. Antes de comenzar con el método símplex es necesario escribir el problema una vez más en una forma equivalente:

Maximizar Z,

sujeta a

$$
\begin{array}{llcl}
(0) & Z - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\
(1) & x_1 + x_3 & = & 4 \\
(2) & 2x_2 + x_4 & = & 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

y

$x_j \geq 0$, para $j = 1, 2, \ldots, 5$.

Es justo como si la ecuación (0) fuera una de las restricciones originales; pero como ya se encuentra en forma de igualdad, no necesita variable de holgura. Al mismo tiempo que se agregó una ecuación, también se añadió una variable (Z) al sistema de ecuaciones. Por lo tanto, al usar las ecuaciones (1) a (3) para obtener una solución básica como se describió, se usa la ecuación (0) para encontrar al mismo tiempo el valor de Z.

Por casualidad, el modelo del problema de la Wyndor Glass Co. se ajusta a *nuestra forma estándar*, y todas sus restricciones funcionales tienen valores no negativos b_i en el lado derecho. Si el caso fuera diferente, sería necesario hacer ajustes adicionales en este punto antes de aplicar el método símplex. Estos detalles se abordarán en la sección 4.6 para ahora dedicar toda la atención a este método.

4.3 ÁLGEBRA DEL MÉTODO SÍMPLEX

Con propósitos ilustrativos se seguirá con el ejemplo modelo de la sección 3.1, como se escribió al final de la sección 4.2. Para comenzar a relacionar los conceptos geométricos con los algebraicos del método símplex, en la tabla 4.2 se describirán, en paralelo, los pasos que siguen el enfoque geométrico y el algebraico para resolver este ejemplo. Como el punto de vista geométrico (que se presentó por primera vez en la sección 4.1) se basa en la *forma original* del modelo (sin variables de holgura), es necesario consultar de nuevo la figura 4.1 para tener una imagen mental de lo descrito en la segunda columna de la tabla. Examine la *forma aumentada* del modelo que se presenta al final de la sección 4.2 cuando se analice la tercera columna de la tabla.

A continuación se darán los detalles de cada paso en la tercera columna de la tabla 4.2.

TABLA 4.2 Interpretaciones geométrica y algebraica de los pasos del método símplex para resolver el ejemplo de la Wyndor Glass Co.

Secuencia del método	Interpretación geométrica	Interpretación algebraica
Paso inicial	Se selecciona (0, 0) como la solución FEV inicial.	Se selecciona x_1 y x_2 como variables no básicas (= 0) para la solución BF inicial: (0, 0, 4, 12, 18).
Prueba de optimalidad	No es óptima porque al moverse por cualquier arista que parte desde (0, 0), Z crece.	No es óptima porque cuando aumenta el valor de cualquier variable no básica (x_1 o x_2), el valor de Z aumenta.
Iteración 1		
Paso 1	Se mueve por la arista sobre el eje x_2.	Se aumenta el valor de x_2 y se ajustan los valores de las otras variables para que satisfagan el sistema de ecuaciones.
Paso 2	Se detiene cuando encuentra la primera frontera de restricción ($2x_2 = 12$).	Se detiene cuando el valor de la primera variable básica (x_3, x_4 o x_5) llega a cero (x_4).
Paso 3	Se encuentra la intersección del nuevo par de fronteras de restricción: (0, 6) es la nueva solución FEV.	Con x_2 como variable básica y x_4 no básica, se resuelve el sistema de ecuaciones: (0, 6, 4, 0, 6) es la nueva solución BF.
Prueba de optimalidad	No es óptima porque al moverse por la arista que parte desde (0, 6) hacia la derecha, Z crece.	No es óptima porque cuando aumenta el valor de una variable no básica (x_1), el valor de Z aumenta.
Iteración 2		
Paso 1	Se mueve por la arista que va hacia la derecha.	Se aumenta el valor x_1 y se ajustan los de las demás variables para que satisfagan el sistema de ecuaciones.
Paso 2	Se detiene cuando encuentra la primera frontera de restricción ($3x_1 + 2x_2 = 18$).	Se detiene cuando la primera variable básica (x_2, x_3 o x_5) llega a cero (x_5).
Paso 3	Se encuentra la intersección del nuevo par de fronteras de restricción: (2, 6) es la nueva solución FEV.	Con x_1 como variable básica y x_5 no básica, se resuelve el sistema de ecuaciones: (2, 6, 2, 0, 0) es la nueva solución BF.
Prueba de optimalidad	(2, 6) es óptima porque al moverse por cualquier arista que sale de (2, 6), Z decrece.	(2, 6, 2, 0, 0) es óptima porque cuando aumenta el valor de cualquier variable no básica (x_4 o x_5) el valor de Z disminuye.

Recuadro de aplicación

La compañía **Samsung Electronics Corp., Ltd. (SEC)** es líder en la fabricación de memorias de acceso aleatorio estático y dinámico y de otros circuitos integrados digitales avanzados. En sus instalaciones en Kiheung, Corea del Sur (probablemente sea la fábrica más grande de semiconductores del mundo), se producen más de 300 000 obleas de silicio al mes, y da trabajo a más de 10 000 empleados.

La *duración del ciclo* es el término que se usa en la industria para definir el tiempo que transcurre desde que se ingresa un lote de obleas de silicio en blanco al proceso de fabricación hasta que se terminan de fabricar los dispositivos en ellas. La reducción de la duración del ciclo es un objetivo constante ya que así se reducen costos y se pueden ofrecer tiempos de entrega más cortos a los clientes potenciales, lo que significa un aspecto clave para mantener o incrementar la participación de mercado en una industria extremadamente competitiva.

Existen tres factores que, en particular, presentan grandes retos cuando se quiere reducir la duración de los ciclos. Uno de ellos estriba en el hecho de que la mezcla de productos cambia de manera continua. Otro es que, a menudo, la compañía debe llevar a cabo cambios significativos en el programa de fabricación dentro de la duración del ciclo objetivo a medida que revisa los pronósticos de la demanda del cliente. El tercero es que las máquinas de un tipo genérico son heterogéneas de tal forma que sólo un reducido número de ellas son aptas para realizar cada etapa del proceso de fabricación del dispositivo.

Un equipo especializado en investigación de operaciones desarrolló *un modelo de programación lineal de gran tamaño con decenas de miles de variables de decisión y restricciones funcionales* para poder lidiar con estos retos. La función objetivo involucraba minimizar las órdenes de compra y el inventario de los bienes terminados. A pesar del enorme tamaño de este modelo, se resolvía en cuestión de minutos siempre que se necesitaba mediante el uso de una compleja implementación del método símplex (y ciertas técnicas relacionadas) en el software de optimización CPLEX. (Este software se estudiará más adelante en la sección 4.8.)

La implantación continua de este modelo hizo posible que la compañía redujera los tiempos de fabricación de memorias dinámicas de acceso aleatorio de más de 80 días a menos de 30. Esta mejora significativa y la consecuente reducción de los costos de fabricación y los precios de venta hicieron posible que Samsung obtuviera una *ganancia adicional de* **200 millones de dólares** *en ventas anuales.*

Fuente: R.C. Leachman, J. Kang y Y. Lin, "SLIM: Short Cycle Time and Low Inventory in Manufacturing at Samsung Electronics", en *Interfaces*, **32**(1): 61-77, enero-febrero de 2002. (En nuestro sitio en internet www.mhhe.com/hillier se puede encontrar una liga hacia este artículo.)

Paso inicial

La elección de x_1 y x_2 como las variables *no básicas* (las variables que se igualan a cero) para la solución BF inicial se basa en el concepto de solución 3 de la sección 4.1. Esta elección elimina el trabajo que se requiere para despejar las *variables básicas* (x_3, x_4, x_5) del siguiente sistema de ecuaciones (donde las variables básicas se muestran en **negritas**):

$$
\begin{array}{llcl}
 & & & x_1 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \text{ entonces} \\
(1) & x_1 + \boldsymbol{x_3} & = 4 & \boldsymbol{x_3} = 4 \\
(2) & 2x_2 + \boldsymbol{x_4} & = 12 & \boldsymbol{x_4} = 12 \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{x_5} & = 18 & \boldsymbol{x_5} = 18
\end{array}
$$

En consecuencia, la **solución BF inicial** es (0, 0, 4, 12, 18).

Observe que esta solución se puede leer de inmediato porque cada ecuación tiene sólo una variable básica con coeficiente 1, la cual no aparece en ninguna otra ecuación. Pronto se verá que cuando cambia el conjunto de variables básicas, el método símplex recurre a un procedimiento algebraico (eliminación gaussiana) para convertir las ecuaciones en la misma forma conveniente para leer las soluciones BF subsecuentes. Esta forma se llama **forma apropiada de eliminación de Gauss**.

Prueba de optimalidad

La función objetivo es

$$Z = 3x_1 + 5x_2,$$

de manera que $Z = 0$ en la solución BF inicial. Debido a que ninguna variable básica (x_3, x_4, x_5) tiene coeficiente *distinto de cero* en esta función objetivo, el coeficiente de las variables no básicas (x_1, x_2) proporciona la tasa de mejoramiento de Z si se aumentara el valor de esa variable a más de cero (mientras que los valores de las variables básicas se ajustan para que satisfagan el sistema de ecuaciones).[6] Estas tasas de mejoramiento (3 y 5) son *positivas*. Por lo tanto, según el concepto de solución 6 de la sección 4.1, se concluye que (0, 0, 4, 12, 18) no es óptima.

En el caso de cada una de las soluciones BF que se examinan después de varias iteraciones, al menos una variable básica tiene coeficiente diferente de cero en la función objetivo. Por lo tanto, la prueba de optimalidad usará la nueva ecuación (0) para reescribir la función objetivo en términos de las variables no básicas, como se verá más adelante.

Determinación de la dirección de movimiento (paso 1 de una iteración)

Cuando aumenta el valor de una variable no básica (y se ajustan los valores de las variables básicas para que satisfagan el sistema de ecuaciones) se realiza una acción equivalente a moverse a lo largo de una arista que sale de la solución FEV actual. Según los conceptos de solución 4 y 5 de la sección 4.1, la elección de cuál variable no básica debe aumentar su valor se hace como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
 & Z = 3x_1 + 5x_2 & \\
\text{¿Aumenta } x_1\text{?} & \text{Tasa de mejoramiento} & Z = 3. \\
\text{¿Aumenta } x_2\text{?} & \text{Tasa de mejoramiento} & Z = 5. \\
\multicolumn{3}{l}{5 > 3, \text{ de manera que se elije } x_2 \text{ para aumentar su valor}}
\end{array}
$$

Como se indica en seguida, x_2 se llama *variable básica entrante* de la iteración 1.

> En cada iteración del método símplex el propósito del paso 1 es elegir una *variable no básica* para que aumente su valor (y se ajustan los valores de las variables básicas para que satisfagan el sistema de ecuaciones). Si aumenta el valor de esta variable no básica se convertirá en *variable básica* de la siguiente solución BF. Por lo tanto, esta variable se llama **variable básica entrante** de la iteración actual (porque es la que entrará a la base).

Determinación de dónde detenerse (paso 2 de una iteración)

El paso 2 contesta la pregunta de cuánto aumentar el valor de la variable básica entrante x_2 antes de detenerse. Si aumenta la variable x_2 crece el valor de Z, el cual se desea incrementar lo más posible sin salirse de la región factible. El requerimiento de satisfacer las restricciones funcionales de la forma aumentada (que se muestra en seguida) significa que al aumentar x_2 (al mismo tiempo que se mantiene la variable no básica $x_1 = 0$) cambia el valor de algunas variables básicas, como se observa en el lado derecho.

$$
\begin{array}{llll}
 & & x_1 = 0, & \text{por lo tanto} \\
(1) & x_1 \qquad + \boldsymbol{x_3} \qquad\qquad = 4 & \boldsymbol{x_3} = 4 & \\
(2) & \qquad 2x_2 \qquad + \boldsymbol{x_4} \qquad = 12 & \boldsymbol{x_4} = 12 - 2x_2 & \\
(3) & 3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + \boldsymbol{x_5} = 18 & \boldsymbol{x_5} = 18 - 2x_2. &
\end{array}
$$

El otro requisito para lograr la factibilidad es que todas las variables sean *no negativas*. Las variables no básicas (entre ellas la variable entrante) son no negativas, pero es necesario verificar cuánto puede crecer x_2 sin violar las restricciones de no negatividad de las variables básicas.

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{x_3} = 4 \geq 0 & \Rightarrow \text{ no hay cota superior sobre } x_2. \\
\boldsymbol{x_4} = 12 - 2x_2 \geq 0 & \Rightarrow x_2 \leq \dfrac{12}{2} = 6 \quad \leftarrow \text{mínimo.} \\
\boldsymbol{x_5} = 18 - 2x_2 \geq 0 & \Rightarrow x_2 \leq \dfrac{18}{2} = 9.
\end{array}
$$

En consecuencia, x_2 puede crecer exactamente hasta 6, punto en el que $\boldsymbol{x_4}$ ha llegado a 0. Si se aumentara x_2 a más de 6 se provocaría que $\boldsymbol{x_4}$ adquiriese signo negativo, lo que violaría la factibilidad.

---

[6] Observe que esta interpretación de los coeficientes de x_j se basa en que estas variables se encuentren en el lado derecho, $Z = 3x_1 + 5x_2$. Cuando se pasan al lado izquierdo de la ecuación (0), $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$, los coeficientes distintos de cero cambian su signo.

Estos cálculos reciben el nombre de **prueba del cociente mínimo**. El objetivo de la prueba es determinar qué variable básica llega a cero primero cuando crece la variable entrante. De inmediato se puede descartar la variable básica en las ecuaciones donde el coeficiente de la variable básica entrante es cero o negativo, puesto que estas variables no decrecen si la variable básica entrante aumenta. [Esto ocurrió con x_3 en la ecuación (1) del ejemplo.] Sin embargo, por cada ecuación donde el coeficiente de la variable básica entrante es *estrictamente positivo* (> 0), esta prueba calcula el *cociente* del lado derecho entre el coeficiente de la variable básica entrante. La variable básica de la ecuación con el *cociente mínimo* es la que llega a cero primero cuando crece la variable básica entrante.

> En cualquier iteración del método símplex, el paso 2 utiliza la prueba del *cociente mínimo* para determinar cuál variable básica llega primero a cero cuando aumenta el valor de la variable básica entrante. Al disminuir hasta cero el valor de esta variable básica se convierte en *variable no básica* de la siguiente solución BF. Por lo tanto, esta variable se llama **variable básica saliente** de la iteración actual (puesto que es la que deja la base).

De esta manera, $\boldsymbol{x}_4$ es la variable básica que sale de la iteración 1 del ejemplo.

Resolución de una nueva solución BF (paso 3 de una iteración)

Cuando aumenta $x_2 = 0$ hasta $x_2 = 6$ el procedimiento se mueve de la solución BF *inicial* que se muestra a la izquierda hacia la *nueva* solución BF de la derecha.

	Solución BF inicial	Nueva solución BF
Variables no basicas:	$x_1 = 0, \quad x_2 = 0$	$x_1 = 0, \quad x_4 = 0$
Variables básicas:	$x_3 = 4, \quad x_4 = 12, \quad x_5 = 18$	$x_3 = ?, \quad x_2 = 6, \quad x_5 = ?$

El propósito del paso 3 es convertir el sistema de ecuaciones en una forma más conveniente (la forma adecuada de eliminación gaussiana) para llevar a cabo la prueba de optimalidad y la siguiente iteración (si es necesario) con la nueva solución BF. En el proceso, esta forma también identificará los valores de x_3 y x_5 de la nueva solución.

Se escribirá de nuevo el sistema de ecuaciones completo, con las *nuevas* variables básicas en **negritas** (Z es la variable básica en la ecuación de la función objetivo):

$$\begin{array}{llll}
(0) & \boldsymbol{Z} - 3x_1 - 5\boldsymbol{x}_2 & & = 0 \\
(1) & \quad x_1 + \boldsymbol{x}_3 & & = 4 \\
(2) & \quad 2\boldsymbol{x}_2 + x_4 & & = 12 \\
(3) & \quad 3x_1 + 2\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_5 & & = 18.
\end{array}$$

Entonces, x_2 sustituyó a x_4 como la variable básica en la ecuación (2). Para despejar Z, x_2, x_3 y x_5 de este sistema de ecuaciones es necesario realizar algunas **operaciones algebraicas elementales** para reproducir el patrón actual de coeficientes de x_4 (0, 0, 1, 0) como los nuevos coeficientes de x_2. Se pueden realizar cualquiera de los dos tipos de operaciones algebraicas elementales:

1. Multiplicar (o dividir) una ecuación por una constante distinta de cero.
2. Sumar (o restar) un múltiplo de una ecuación a (o de) otra ecuación.

Para preparar la ejecución de estas operaciones, observe que los respectivos coeficientes de x_2 en el sistema de ecuaciones anterior son -5, 0, 2 y 2, y se intenta convertirlos en 0, 0, 1 y 0, respectivamente. Para convertir el coeficiente 2 de la ecuación (2) en un 1, se usa el primer tipo de operación algebraica elemental y se divide esta ecuación entre 2 para obtener

$$(2) \qquad \boldsymbol{x}_2 + \frac{1}{2}x_4 = 6.$$

Para convertir los coeficientes -5 y 2 en ceros, es necesario usar un segundo tipo de operación elemental. En particular, se suma a la ecuación (0) esta nueva ecuación (2) multiplicada por 5, y se resta de la ecuación (3) esta nueva ecuación multiplicada por 2. El nuevo sistema de ecuaciones que resulta es

$$\begin{array}{llcl}
(0) & \boldsymbol{Z} - 3x_1 + \frac{5}{2}x_4 & = & 30 \\
(1) & x_1 + \boldsymbol{x_3} & = & 4 \\
(2) & \boldsymbol{x_2} + \frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\
(3) & 3x_1 - x_4 + \boldsymbol{x_5} & = & 6.
\end{array}$$

Como $x_1 = 0$ y $x_4 = 0$, las ecuaciones de esta forma llevan de inmediato a la nueva solución BF, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 6, 4, 0, 6)$, de donde se obtiene $Z = 30$.

Este procedimiento para obtener la solución simultánea de un sistema de ecuaciones lineales se llama *método de eliminación de Gauss-Jordan*, o, de manera más breve, **eliminación gaussiana**.[7] El concepto clave de este método es usar las operaciones algebraicas elementales para reducir el sistema de ecuaciones original a la forma apropiada de eliminación gaussiana, en donde cada variable básica se elimina de todas las ecuaciones menos de una (*su* ecuación), en la cual tiene coeficiente $+1$.

Prueba de optimalidad de la nueva solución básica factible

La ecuación (0) actual proporciona el valor de la función objetivo en términos nada más de las variables no básicas actuales,

$$Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4.$$

Al aumentar el valor de cualquiera de estas variables no básicas (con el ajuste de los valores de las variables básicas para que cumplan con el sistema de ecuaciones) se realiza una acción equivalente a trasladarse a una de las dos soluciones BF *adyacentes*. Como x_1 tiene coeficiente *positivo*, cuando crece conduce a una solución BF adyacente que es mejor que la solución actual, por lo que ésta todavía no es óptima.

Iteración 2 y la solución óptima que resulta

Como $Z = 30 + 3x_1 - \frac{5}{2}x_4$, Z se puede aumentar si aumenta el valor de x_1, pero no el de x_4. Por lo tanto, el paso 1 elige a x_1 como la variable básica entrante.

En el paso 2, el sistema de ecuaciones actual lleva a las siguientes conclusiones sobre qué tanto se puede aumentar x_1 (con $x_4 = 0$):

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{x_3} = 4 - x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq \frac{4}{1} = 4. \\
\boldsymbol{x_2} = 6 \geq 0 & \Rightarrow \text{no hay cota superior sobre } x_1. \\
\boldsymbol{x_5} = 6 - 3x_1 \geq 0 & \Rightarrow x_1 \leq \frac{6}{3} = 2 \quad \leftarrow \text{mínimo.}
\end{array}$$

Por lo tanto, la prueba del cociente mínimo indica que x_5 es la variable básica que sale.

En el paso 3 se sustituye x_1 por x_5 como variable básica, se realizan las operaciones algebraicas elementales en el sistema de ecuaciones actual para reproducir el patrón de coeficientes de x_5 (0, 0, 0, 1) como los nuevos coeficientes de x_1. De aquí se obtiene el siguiente nuevo sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{llcl}
(0) & \boldsymbol{Z} + \frac{3}{2}x_4 + x_5 & = & 36 \\
(1) & \boldsymbol{x_3} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 & = & 2 \\
(2) & \boldsymbol{x_2} + \frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\
(3) & \boldsymbol{x_1} - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 & = & 2.
\end{array}$$

[7] En realidad existen algunas diferencias técnicas entre el método de eliminación de Gauss-Jordan y la eliminación gaussiana, pero no se hará esta distinción.

Por lo tanto, la siguiente solución BF es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 6, 2, 0, 0)$, de donde se obtiene $Z = 36$. Para aplicar la *prueba de optimalidad* a esta nueva solución BF se usa la ecuación (0) actual para expresar Z sólo en términos de las variables no básicas actuales,

$$Z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5.$$

Cuando se incrementa x_4 o x_5 el valor de Z *disminuirá*, de manera que ninguna solución BF adyacente es tan buena como la actual. Entonces, según el concepto de solución 6 de la sección 4.1, la solución BF actual debe ser óptima.

En términos de la forma original del problema (sin variables de holgura), la solución óptima es $x_1 = 2$, $x_2 = 6$, lo que lleva a $Z = 3x_1 + 5x_2 = 36$.

Para ver **otro ejemplo** de aplicación del método símplex se recomienda que en este momento se vea, en el OR Tutor, la demostración llamada *Simplex Method—Algebraic Form* (método símplex: forma algebraica). Esta demostración despliega de manera simultánea el álgebra y la geometría del método símplex y va paso a paso en forma dinámica. Igual que en otros ejemplos de demostración que acompañan otras secciones del libro (incluso la siguiente), esta demostración computacional pone de relieve los conceptos que son difíciles de plasmar en el papel. Además, en la sección Worked Examples del sitio en internet del libro se incluye **otro ejemplo** de aplicación del método símplex.

Para ayudar más en el aprendizaje eficiente del método símplex, el tutorial IOR en su OR Courseware incluye un procedimiento llamado **Solve Interactively by the Simplex Method** (solución interactiva por el método símplex). Esta rutina realiza todos los cálculos mientras se toman las decisiones paso a paso, lo cual permite concentrarse en los conceptos en lugar de hacerlo en todos los números y cálculos. En consecuencia, podría ser recomendable usar esta rutina para resolver los problemas de esta sección. El software resulta útil en el inicio del empleo del método puesto que indica cuando se comete un error en la primera iteración de un problema.

Después de aprender el método símplex, el lector deseará simplemente aplicar una implantación computacional de éste para obtener soluciones óptimas inmediatas para los problemas de programación lineal. Por ello, se ha considerado conveniente también incluir en el IOR Tutorial un procedimiento automático llamado **Solve Automatically by the Simplex Method** (solución automática por el método símplex). Este procedimiento está diseñado para tratar sólo con problemas del tamaño de los que se incluyen en libros de texto y, además, cuenta con un procedimiento interactivo que incluye la comprobación de respuestas. En la sección 4.8 se describirán opciones de software para programación lineal más poderosas, que también se proporcionan en el sitio en internet del libro.

La siguiente sección incluye un resumen del método símplex en una forma tabular más conveniente.

4.4 EL MÉTODO SÍMPLEX EN FORMA TABULAR

La forma algebraica del método símplex que se presentó en la sección 4.3 puede ser la mejor para entender la lógica que fundamenta el algoritmo. Sin embargo, no es la más conveniente para realizar los cálculos necesarios. Cuando se tenga que resolver un problema a mano (o en forma interactiva con su tutorial IOR) se recomienda la *forma tabular* descrita en esta sección.[8]

La forma tabular del método símplex registra sólo la información esencial, a saber: 1) los coeficientes de las variables, 2) las constantes del lado derecho de las ecuaciones y 3) la variable básica que aparece en cada ecuación. Esta forma evita tener que escribir los símbolos de las variables en cada ecuación, pero es más importante el hecho de que permite hacer hincapié en los números que se usan en los cálculos aritméticos y registrarlos en forma muy compacta.

En la tabla 4.3 se hace una comparación entre el sistema de ecuaciones inicial del problema de la Wyndor Glass Co. en forma algebraica (en el lado izquierdo) y la forma tabular (a la derecha), donde la tabla de la derecha se conoce como *tabla símplex*. La variable básica que aparece en cada

[8] En la sección 5.2 se presenta una forma más adecuada para ejecutarse en la computadora.

■ **TABLA 4.3 Tabla símplex inicial del problema de la Wyndor Glass Co.**

a) Forma algebraica	*b*) Forma tabular								
	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho
(0) $\boldsymbol{Z} - 3x_1 - 5x_2 = 0$	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
(1) $x_1 + \boldsymbol{x_3} = 4$	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
(2) $2x_2 + \boldsymbol{x_4} = 12$	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
(3) $3x_1 + 2x_2 + \boldsymbol{x_5} = 18$	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18

ecuación se muestra en **negritas** en la columna de la izquierda y en la primera columna de la tabla símplex de la derecha. [Aunque sólo las variables x_j son básicas o no básicas, Z tiene el papel de la variable básica para la ecuación (0).] En forma automática se sabe que las variables que *no* se enumeran en esta columna de *variables básicas* (x_1, x_2) son *variables no básicas*. Después de establecer $x_1 = 0, x_2 = 0$, la columna denominada *lado derecho* proporciona la solución de las variables básicas, de manera que la solución BF inicial es $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 4, 12, 18)$ con $Z = 0$.

> La *forma tabular* del método símplex utiliza una **tabla símplex** para desplegar de manera compacta el sistema de ecuaciones que conduce a la solución BF actual. De acuerdo con esta solución, cada variable de la columna de la izquierda es igual al número correspondiente en la columna de la derecha (y las variables que no aparecen son iguales a cero). Cuando se realiza la prueba de optimalidad o una iteración, los únicos números relevantes son los que están a la derecha de la columna Z.[9] El término **renglón** se refiere a una fila horizontal de números a la derecha de la columna Z (que incluyen el número del *lado derecho*), donde el renglón i corresponde a la ecuación (i).

En seguida se resume la forma tabular del método símplex y, al mismo tiempo, en forma breve, se describe su aplicación al problema de Wyndor Glass Co. No debe perderse de vista que la lógica es idéntica a la de la forma algebraica que se presentó en la sección anterior; sólo cambia la forma para desplegar tanto el sistema de ecuaciones actual como la iteración subsecuente (además de que ya no se tendrán que pasar las variables al lado derecho de una ecuación antes de llegar a las conclusiones de la prueba de optimalidad o en los pasos 1 y 2 de una iteración).

Resumen del método símplex (y la iteración 1 del ejemplo)

Paso inicial. Se introducen las variables de holgura. Se seleccionan las *variables de decisión* como las *variables no básicas iniciales* (es decir, iguales a cero) y las *variables de holgura* como las *variables básicas iniciales*. (Vea la sección 4.6 para hacer los ajustes necesarios al modelo si no se encuentra en nuestra forma estándar —maximización, sólo restricciones funcionales tipo $\leq$ y todas las restricciones de no negatividad— o si el valor de alguna b_i es negativo.)

En el ejemplo: Esta selección conduce a la tabla símplex inicial que se muestra en la tabla 4.3, por lo que la solución BF inicial es (0, 0, 4, 12, 18).

Prueba de optimalidad. La solución BF es óptima si y sólo si *todos* los coeficientes del renglón 0 son no negativos (≥ 0). Si es así, el proceso se detiene; de otra manera, sigue a una iteración para obtener la siguiente solución BF, que incluye cambiar una variable no básica a básica (paso 1) y viceversa (paso 2) y después despejar la nueva solución (paso 3).

En el ejemplo: Igual que $Z = 3x_1 + 5x_2$ indica que al aumentar x_1 o x_2 el valor de Z aumenta, de manera que la solución BF actual no es óptima, se llega a la misma conclusión a partir de la ecuación $Z - 3x_1 - 5x_2 = 0$. Los coeficientes −3 y −5 se muestran en el renglón 0 de la tabla 4.3.

Iteración. *Paso 1*: Se determina la *variable básica entrante* con la selección de la variable (que de modo automático es no básica) con el *coeficiente negativo* que tiene el mayor valor absoluto

[9] Por esta razón, se pueden suprimir la ecuación y las columnas correspondientes a Z con el fin de reducir el tamaño de la tabla símplex. Preferimos conservar estas columnas como recordatorio de que la tabla símplex está desplegando el sistema actual de ecuaciones y que Z es una de las variables de la ecuación (0).

TABLA 4.4 Aplicación de la prueba del cociente mínimo para determinar la primera variable básica saliente en el problema de la Wyndor Glass Co.

Variable básica	Ec.	Coeficiente de:						Lado derecho	Cociente
		Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0	
x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	$\rightarrow \frac{12}{2} = 6 \leftarrow$ mínimo
x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	$\rightarrow \frac{18}{2} = 9$

(es decir, el coeficiente "más negativo") de la ecuación (0). Se pone un recuadro alrededor de la columna abajo de este coeficiente y se le da el nombre de **columna pivote**.

En el ejemplo: El coeficiente más negativo es -5 para x_2 ($5 > 3$), de manera que x_2 debe convertirse en variable básica. (Este cambio se indica en la tabla 4.4 mediante el recuadro alrededor de la columna abajo de -5.)

Paso 2: Se determina la *variable básica que sale* con la prueba del cociente mínimo.

Prueba del cociente mínimo

1. Elija los coeficientes estrictamente positivos (>0) de la columna pivote.
2. Divida el elemento del *lado derecho* del mismo renglón entre dicho coeficiente.
3. Identifique el renglón que tiene el *menor* de estos cocientes.
4. La variable básica de ese renglón es la variable básica que sale; sustitúyala con la variable básica entrante en la columna de la variable básica de la siguiente tabla.

Ponga un recuadro en este renglón que se llama **renglón pivote**. El número que se encuentra en *ambos* recuadros se llama **número pivote**.

En el ejemplo: Los cálculos de la prueba del cociente mínimo se muestran a la derecha de la tabla 4.4. El renglón 2 es el renglón pivote (vea el recuadro alrededor de ese renglón en el primer cuadro símplex de la tabla 4.5), mientras que x_4 es la variable básica que sale. En la siguiente tabla símplex (vea la tabla 4.5) x_2 sustituye a x_4 como la variable básica del renglón 2.

Paso 3: Se despeja la *nueva solución BF* mediante **operaciones elementales con renglones** (multiplicación o división de un renglón por una constante diferente de cero; suma o resta de un múltiplo de un renglón con otro) para construir una nueva tabla símplex en la forma apropiada de eliminación gaussiana, abajo de la tabla actual, y después se regresa a la prueba de optimalidad. Las operaciones elementales con renglones que deben realizarse son:

TABLA 4.5 Tabla símplex del problema de la Wyndor Glass Co. despúes de dividir el primer renglón pivote entre el primer número pivote

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de:						Lado derecho
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1						
	x_3	(1)	0						
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0						

TABLA 4.6 Primeras dos tablas símplex del problema de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6

1. Divida el renglón pivote entre el número pivote. Use este *nuevo* renglón pivote en los pasos 2 y 3.
2. En los renglones (incluso el renglón 0) que tienen un coeficiente *negativo* en la columna pivote, se *suma* a este renglón el *producto* del valor absoluto de este coeficiente por el nuevo renglón pivote.
3. En el caso de los renglones que tienen un coeficiente *positivo* en la columna pivote, se les *resta* el *producto* de este coeficiente por el nuevo renglón pivote.

En el ejemplo: Debido a que x_2 sustituye a x_4 como variable básica, se necesita reproducir el patrón de la primera tabla de coeficientes de la columna de x_4 (0, 0, 1, 0) en la columna de x_2 de la segunda tabla símplex. Para comenzar, se divide el renglón pivote (renglón 2) entre el número pivote (2), de donde se obtiene el nuevo renglón 2 que aparece en la tabla 4.5. Después, se suma al renglón 0 el nuevo renglón 2 multiplicado por 5. Luego se resta del renglón 3 el nuevo renglón 2 multiplicado por 2 (o de manera equivalente, se resta del renglón 3 el renglón 2 *anterior*). Estos cálculos llevan a la nueva tabla símplex que se muestra en la tabla 4.6 de la iteración 1. Así, la nueva solución BF es (0, 6, 4, 0, 6), con $Z = 30$. Después se regresa a la prueba de optimalidad para verificar si la nueva solución BF es óptima. Como el nuevo renglón 0 todavía tiene un coeficiente negativo (−3 para x_1), la solución no es óptima, y se necesita por lo menos una iteración más.

Iteración 2 del ejemplo y la solución óptima que resulta

La segunda iteración comienza de nuevo en la segunda tabla símplex de la tabla 4.6 para encontrar la siguiente solución BF. Si se siguen las instrucciones de los pasos 1 y 2 se encuentra que x_1 es la variable básica entrante y x_5 la variable básica que sale, como se muestra en la tabla 4.7.

TABLA 4.7 Pasos 1 y 2 de la iteración 2 del problema de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho	Cociente
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30	
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{1} = 4$
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6	$\frac{6}{3} = 2 \leftarrow$ mínimo

TABLA 4.8 Tabla símplex completa para el problema de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de:						Lado derecho
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	Z	(0)	1	−3	−5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	−3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	−1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

En el paso 3 se divide el renglón pivote (renglón 3) de la tabla 4.7 entre el número pivote (3). Después, se suma al renglón 0 el nuevo renglón 3 multiplicado por 3. Luego, se resta el nuevo renglón 3 del renglón 1.

En la tabla 4.8 se tiene ahora el conjunto de tablas símplex completo. La nueva solución BF es (2, 6, 2, 0, 0), con $Z = 36$. Al hacer la prueba de optimalidad se encuentra que la solución es *óptima* porque no hay coeficientes negativos en el renglón 0, de manera que el algoritmo termina. En consecuencia, la solución óptima del problema de la Wyndor Glass Co. (antes de introducir variables de holgura) es $x_1 = 2, x_2 = 6$.

Ahora compare la tabla 4.8 con el trabajo que se hizo en la sección 4.3 para verificar que, en realidad, estas dos formas del método símplex son *equivalentes*. Después observe que la forma algebraica es mejor para entender la lógica que fundamenta el método símplex, pero la forma tabular organiza el trabajo de manera más conveniente y compacta. En general, de ahora en adelante se usará la forma tabular.

En el OR Tutor puede encontrar un **ejemplo adicional** de aplicación del método símplex en forma tabular. Vea la demostración llamada *Simplex Method—Tabular Form*. En la sección Worked Examples del sitio en internet del libro también se incluye **otro ejemplo** de este tipo.

4.5 ROMPIMIENTO DE EMPATES EN EL MÉTODO SÍMPLEX

Es posible que haya observado que en las dos secciones anteriores no se dijo qué hacer cuando las reglas de selección del método símplex no son suficientes para tomar una decisión clara, ya sea porque hay empates (valores iguales) o por otras ambigüedades parecidas. A continuación se estudiarán estos detalles.

Empate de la variable básica entrante

El paso 1 de cada iteración elige la variable no básica que tiene el coeficiente *negativo* con el *mayor valor absoluto* en la ecuación (0) actual como la variable básica entrante. Ahora suponga que dos o más variables no básicas tienen el coeficiente negativo más grande (en valor absoluto), es decir, que hay un empate. Por ejemplo, esto ocurriría en la primera iteración del problema de la Wyndor

TABLA 4.9 Tabla símplex inicial para el problema de la Wyndsor Glass Co. sin las dos últimas restricciones funcionales

Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	Lado derecho	Cociente
Z	(0)	1	-3	-5	0	0	
x_3	(1)	0	1	$\boxed{0}$	1	4	Ninguno

Donde $x_1 = 0$ y x_2 aumenta, $x_3 = 4 - 1x_1 - 0x_2 = 4 > 0$.

Glass Co. si se cambiara la función objetivo a $Z = 3x_1 + 3x_2$, con lo que la ecuación (0) inicial sería $Z - 3x_1 - 3x_2 = 0$. ¿Cómo debe romperse este empate?

La respuesta es que se puede elegir entre estos dos competidores de manera *arbitraria*. Tarde o temprano se llegará a la solución óptima, sin importar cuál de las variables empatadas se haya escogido, y no existe un método incontrovertible para predecir cuál conduce a la solución óptima con mayor rapidez. En este ejemplo, si se escoge x_1 como variable entrante, el método símplex alcanza la solución óptima (2, 6) en tres iteraciones, mientras que si se elige x_2 llega en dos.

Empate de la variable básica que sale: degeneración

Ahora suponga que el empate ocurre entre dos o más variables básicas cuando se elige la variable que sale en el paso 2 de una iteración. ¿Importa cuál se escoge? En teoría, sí, y en una forma crítica debido a lo que puede ocurrir en la siguiente sucesión de eventos. Primero, todas las variables empatadas se hacen cero al mismo tiempo cuando aumenta el valor de la variable entrante. Por lo tanto, aquellas que *no* se eligieron como variable básica saliente también tendrán un valor de cero en la nueva solución BF. (Las variables básicas con valor de *cero* se llaman **degeneradas**, y el mismo nombre se da a la solución BF correspondiente.) Segundo, si una de estas variables básicas degeneradas sigue con valor de cero hasta que se selecciona como variable básica que sale en una iteración posterior, la variable básica entrante deberá también quedar con valor de cero (ya que no puede crecer sin que la variable básica que sale se vuelva negativa), por lo que el valor de Z no cambiará. Tercero, si Z permanece igual en lugar de mejorar en cada iteración, el método símplex puede caer en un ciclo que repite la misma secuencia de soluciones en forma periódica, en lugar de aumentar en algún momento para llegar a la solución óptima. En realidad, se han construido ejemplos artificiales que se quedan atrapados en un ciclo perpetuo de este tipo.[10]

Por fortuna, aunque en teoría es posible que haya ciclos perpetuos, muy rara vez han ocurrido en problemas reales. Si ocurriera un ciclo siempre se puede salir de él al cambiar la elección de la variable básica que sale. Aún más, se han construido reglas especiales[11] para romper empates que siempre evitan los ciclos. Sin embargo, con frecuencia estas reglas se ignoran en las aplicaciones reales, y no se repetirán aquí. Para propósitos prácticos se recomienda romper los empates de modo arbitrario y seguir el proceso sin preocuparse de las variables degeneradas que puedan resultar.

Cuando no hay variable básica saliente: *Z* no acotada

Existe otra posibilidad en el paso 2 de una iteración, de la que no se ha hablado: aquella en la que *ninguna* variable califica como variable básica saliente.[12] Esta situación puede ocurrir si la variable básica entrante puede crecer de manera *indefinida* sin que *ninguna* de las variables básicas actuales adquiera valores negativos. En la forma tabular, esto significa que *todos* los coeficientes de la columna pivote (se excluye el renglón 0) son negativos o cero.

[10] Para obtener información adicional acerca de circular en un ciclo perpetuo, consulte la referencia J. A. J. Hall y K. I. M. McKinnon, "The Simplest Examples Where the Simplex Method Cycles and Conditions Where EXPAND Fails to Prevent Cycling", en *Mathematical Programming*, Series B, **100**(1): 135-150, mayo de 2004.

[11] Vea R. Bland, "New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method", en *Mathematics of Operations Research*, **2**: 103-107, 1977.

[12] Note que el caso análogo (sin variable básica *entrante*) no puede ocurrir en el paso 1 de una iteración porque la prueba de optimalidad detendría el algoritmo antes, lo que indica que se ha alcanzado una solución óptima.

Como se ilustra en la tabla 4.9, esta situación surge en el ejemplo que se presentó en la figura 3.6. En él se pasaron por alto las dos últimas restricciones funcionales del problema de la Wyndor Glass Co., por lo cual no se incluyen en el modelo. Observe en la figura 3.6 que el valor de x_2 puede aumentar de manera indefinida (lo que hace que Z también lo haga) sin salir de la región factible. Después vea en la tabla 4.9 que x_2 es la variable básica entrante pero el único coeficiente en la columna pivote es cero. Como la prueba del cociente mínimo sólo utiliza coeficientes mayores que cero, no se cuenta con un cociente que proporcione una variable básica saliente.

La interpretación de una tabla símplex como la que se muestra en la tabla 4.9 sostiene que las restricciones no impiden el crecimiento indefinido de la función objetivo Z, de manera que el método símplex se detiene con el mensaje de que Z es *no acotada*. Debido a que ni siquiera la programación lineal ha descubierto la manera de lograr ganancias infinitas, el mensaje real en problemas prácticos es que se ha cometido un error. Tal vez el modelo esté mal formulado, ya sea por haber omitido una restricción relevante o por haberla establecido de modo incorrecto. De manera alternativa, pudo haber ocurrido un error en los cálculos.

Soluciones óptimas múltiples

En la sección 3.2 (en la definición de **solución óptima**) se mencionó que un problema puede tener más de una solución óptima. Este hecho se ejemplificó en la figura 3.5 cuando se cambió la función objetivo del problema de la Wyndor Glass Co. a $Z = 3x_1 + 2x_2$, de lo que resultó que todos los puntos sobre el segmento de recta entre (2, 6) y (4, 3) eran óptimos. En consecuencia, todas las soluciones óptimas son un *promedio ponderado* de estas dos soluciones FEV óptimas

$$(x_1, x_2) = w_1(2, 6) + w_2(4, 3).$$

donde los pesos w_1 y w_2 son números que satisfacen las relaciones

$$w_1 + w_2 = 1 \quad \text{y} \quad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0.$$

Por ejemplo, $w_1 = \frac{1}{3}$ y $w_2 = \frac{2}{3}$

$$(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(2, 6) + \frac{2}{3}(4, 3) = \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3}, \quad \frac{6}{3} + \frac{6}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \quad 4\right)$$

como una solución óptima.

En general, cualquier promedio ponderado de dos o más soluciones (vectores) donde los pesos son no negativos y suman 1 se llama **combinación convexa** de estas soluciones. Entonces, toda solución óptima del ejemplo es una combinación convexa de (2, 6) y (4, 3).

Este ejemplo es representativo de problemas con soluciones óptimas múltiples.

> Como se indica al final de la sección 3.2, *cualquier* problema de programación lineal con soluciones óptimas múltiples (y una región factible acotada) tiene al menos dos soluciones FEV que son óptimas. *Toda* solución óptima es una combinación convexa de estas soluciones FEV óptimas. En consecuencia, en la forma aumentada, toda solución óptima es una combinación convexa de las soluciones BF óptimas.

(Los problemas 4.5-5 y 4.5-6 son una guía para el razonamiento que fundamenta esta conclusión.)

El método símplex se detiene en forma automática cuando encuentra *una* solución BF óptima. Sin embargo, en muchas aplicaciones de programación lineal existen factores intangibles que no se incorporan al modelo y que pueden ser útiles para tomar decisiones significativas entre las soluciones óptimas alternativas. En esos casos, deben identificarse las otras soluciones óptimas. Como se indicó, esto requiere encontrar todas las otras soluciones BF óptimas, y entonces toda solución óptima es una combinación convexa de las soluciones BF óptimas.

Una vez que el método símplex encuentra una solución BF óptima se puede detectar si existen otras y, si así es, se encuentran como sigue:

> Siempre que un problema tiene más de una solución BF óptima, al menos una variable no básica tiene coeficiente cero en el renglón (0) final, de manera que si aumenta su valor, el valor de la función Z no cambia. Por lo tanto, estas otras soluciones BF óptimas se pueden identificar (si

TABLA 4.10 Tabla símplex completa para obtener todas las soluciones BF óptimas con c_2 = 2, en el problemas de la Wyndor Glass Co.

Iteración	Variable básica	Ec.	Coeficiente de: Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Lado derecho	¿Solución óptima?
0	Z	(0)	1	-3	-2	0	0	0	0	No
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18	
1	Z	(0)	1	0	-2	3	0	0	12	No
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12	
	x_5	(3)	0	0	2	-3	0	1	6	
2	Z	(0)	1	0	0	**0**	0	1	18	Sí
	x_1	(1)	0	1	0	1	0	0	4	
	x_4	(2)	0	0	0	3	1	-1	6	
	x_2	(3)	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3	
Extra	Z	(0)	1	0	0	0	**0**	1	18	Sí
	x_1	(1)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2	
	x_2	(3)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6	

se desea) mediante iteraciones adicionales del método símplex, en las que cada vez se elige una variable no básica con coeficiente cero como variable básica entrante.[13]

A manera de ilustración, considere el caso anterior del problema de la Wyndor Glass Co., donde la función objetivo se cambia a $Z = 3x_1 + 2x_2$. En la tabla 4.10 se muestran las primeras tres tablas que obtiene el método símplex antes de detenerse con una solución básica factible óptima. No obstante, como una variable no básica (x_3) de esa iteración tiene coeficiente cero en el renglón 0, se realiza una iteración más en esa misma tabla para identificar la otra solución BF óptima. En consecuencia, las dos soluciones básicas factibles óptimas son (4, 3, 0, 6, 0) y (2, 6, 2, 0, 0), y ambas producen un valor de $Z = 18$. Observe que la última tabla símplex también tiene una variable *no básica* (x_4) con coeficiente cero en el renglón (0). Esta situación es inevitable porque las iteraciones adicionales no modifican el renglón 0, y cada una de las variables básicas que salen conserva su coeficiente cero. Si ahora se eligiera x_4 como variable básica entrante, sólo se regresaría a la tercera tabla símplex. (Verifique esto.) Por lo tanto, estas dos son las únicas soluciones BF óptimas, mientras que todas *las demás* son una combinación convexa de ellas.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = w_1(2, 6, 2, 0, 0) + w_2(4, 3, 0, 6, 0),$$
$$w_1 + w_2 = 1, \qquad w_1 \geq 0, \qquad w_2 \geq 0.$$

4.6 ADAPTACIÓN A OTRAS FORMAS DE MODELO

Hasta ahora se han presentado los detalles del método símplex bajo el supuesto de que el problema se encuentra en nuestra forma estándar (maximizar Z sujeta a restricciones funcionales de la forma

[13] Si una de estas iteraciones no tiene una variable básica *saliente*, esto indica que la región factible es no acotada y la variable básica entrante puede crecer de manera indefinida sin cambiar el valor de Z.