



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA EN SISTEMAS
INGENIERÍA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

INTEGRANTES:

LENIN AMANGANDI
CAMILA CAICEDO
TAMARA BENAVIDEZ
CAROLAY PILLAJO
RICHARD TIPANTIZA

DOCENTE: JONATHAN A. ZEA

ASIGNATURA:

MÉTODOS NUMÉRICOS

ESCUADA
POLITÉCNICA
GRUPO:
GR1CC
NACIONAL

Quito, 02 de febrero del 2026

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

SEGUIDOR SOLAR

TABLA DE CONTENIDO

1. OBJETIVOS	3
2. INTRODUCCIÓN	3
2.1. RESUMEN.....	3
2.2. ANTECEDENTES.....	3
3. CONCEPTOS FUNDAMENTALES	4
4. METODOLOGÍA	4
4.1. DESARROLLO MATEMÁTICO	4
4.1.1. SISTEMA DE COORDENADAS	4
4.1.2. CÁLCULO DEL VECTOR POSICIÓN DEL SOL.....	5
4.1.3. CÁLCULO DEL VECTOR UNITARIO DEL PANEL	6
4.2. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN, RESALTANDO EL MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO.....	7
4.2.1. MÉTODOS DE MÍNIMOS CUADRADOS Y DESCENSO DEL GRADIENTE ...	7
• Definición de la Función de Error	7
• Derivación del Gradiente	8
• Aplicación del Descenso del Gradiente.....	9
4.2.2. MÉTODO L-BFGS-B (LIMITED-MEMORY BROYDEN–FLETCHER–GOLDFARB–SHANNO)	9
• Restricciones de Caja (Bounds)	10
• Ecuación de Actualización	10
4.3. ANÁLISIS ANALÍTICO DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL MÉTODO IMPLEMENTADO	10
4.3.1. MÉTODO L-BFGS-B	11
4.4. DIAGRAMA DE FLUJO / PSEUDOCÓDIGO	11
4.5. DETALLES ADICIONALES IMPORTANTES DE LA IMPLEMENTACIÓN	15
5. RESULTADOS	15
5.1. EJECUCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE DIFERENTES CASOS DE PRUEBA	15
5.1.1. CASO DE PRUEBA MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS Y DESCENSO DEL GRADIENTE	15

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

5.1.2. L-BFGS-B	17
5.2. COMPARACIÓN CON SOLUCIONES ANALÍTICAS, SI LAS HUBIERA.	18
5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS.	20
5.4. ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL EXPERIMENTAL	20
5.4.1. MÍNIMOS CUADRADOS	20
5.4.2. L-BFGS-B	21
6. CONCLUSIONES.....	21
6.1. RESUMEN DE LOS HALLAZGOS MÁS IMPORTANTES	21
6.2. DIFICULTADES ENCONTRADAS Y CÓMO SE RESOLVIERON	21
6.3. LIMITACIONES Y RESTRICCIONES DEL ENFOQUE UTILIZADO	22
6.4. POSIBLES MEJORAS Y TRABAJOS FUTUROS.....	22
7. BIBLIOGRAFÍA.....	22

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Sistema de coordenadas.....	4
Ilustración 2. Componentes vectoriales.....	5
Ilustración 3. Definición de la posición del sol	5
Ilustración 4. Inicio y configuración.....	11
Ilustración 5. Mínimos cuadrados y cálculo de posición.....	12
Ilustración 6. GUI	13
Ilustración 7. Almacenamiento de datos.....	13
Ilustración 8. Diagrama de flujo del sistema extendido.	14
Ilustración 9. Datos Prueba Mínimos Cuadrados.	15
Ilustración 10. Simulación Prueba 1.....	16
Ilustración 11. Gráficas de los ángulos en la simulación de mínimos cuadrados.	16
Ilustración 12. Datos de prueba simulación L-BFGS-B.....	17
Ilustración 13. Estadísticas de la simulación.	17
Ilustración 14. Visualización 3D interactiva.	17
Ilustración 15. Graficas simulación de L-BFGS-B.	18

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

1. OBJETIVOS

- Realizar el desarrollo matemático para calcular los 2 ángulos de control (pitch y roll) en base a la posición solar (elevación θ y azimuth α).
- Implementar un programa que permita calcular los ángulos de control para un seguidor solar de 2 grados de libertad.
- Dibujar la trayectoria del sol y del panel solar para un día determinado.

2. INTRODUCCIÓN

2.1. RESUMEN

Este proyecto presenta el diseño y simulación de un seguidor solar con dos grados de libertad que permite orientar un panel de forma automática según la posición del Sol. A partir de los ángulos de azimut y elevación, se determinan los ángulos de control roll y pitch mediante métodos numéricos, logrando que el panel permanezca perpendicular a la radiación solar.

La ubicación geográfica seleccionada para la simulación es la Escuela Politécnica Nacional (EPN) en Quito, Ecuador, donde se permite al usuario ingresar la fecha, hora de inicio y duración del análisis. Los resultados se muestran mediante gráficos independientes, animaciones en 3D, control manual interactivo y generación de archivos con los datos calculados. De esta manera, el proyecto combina modelado matemático, métodos numéricos y visualización para analizar el comportamiento de un sistema de seguimiento solar.

2.2. ANTECEDENTES

El uso de la energía solar se ha incrementado notablemente en los últimos años debido a la necesidad de emplear fuentes de energía renovables, limpias y sostenibles. Una de las principales limitaciones de los paneles solares fijos es que no siempre reciben la radiación solar de forma óptima, ya que la posición del Sol varía a lo largo del día y del año. Esto provoca una disminución en la eficiencia de captación energética.

Para mejorar este rendimiento, se han desarrollado sistemas de seguimiento solar que permiten orientar los paneles automáticamente siguiendo la trayectoria del Sol. Este proyecto integra el cálculo matemático de los ángulos de control con visualización interactiva y análisis numérico, aplicado específicamente a la ubicación de la Escuela Politécnica Nacional, contribuyendo así al estudio y comprensión de sistemas de seguimiento solar. Sin embargo, es importante mencionar que, a diferencia de otro tipo de seguidores solares, la EPN tiene un seguidor solar alrededor del ángulo pitch, en lugar del ángulo yaw.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

3. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

- **Seguidor solar:** Un seguidor solar es un sistema de orientación para maximizar la exposición a la luz solar.
- **Roll(ϕ):** Ángulo de giro alrededor del eje que mira al norte.
- **Pitch (ψ):** Ángulo de giro alrededor del eje que mira al este.
- **Elevación (θ):** Ángulo de elevación del sol con respecto a su proyección en la superficie.
- **Azimut (α):** Ángulo azimutal de la proyección del sol en la superficie con respecto al norte.
- **Zenit:** Ángulo complementario a la elevación ($90^\circ - \theta$).

4. METODOLOGÍA

4.1. DESARROLLO MATEMÁTICO

4.1.1. SISTEMA DE COORDENADAS

Para describir el movimiento solar y la orientación del panel, se estableció un sistema de coordenadas cartesiano local ENU (East-North-Up), donde:

- El eje X apunta al Este.
- El eje Y apunta al Norte.
- El eje Z apunta al Zenit.

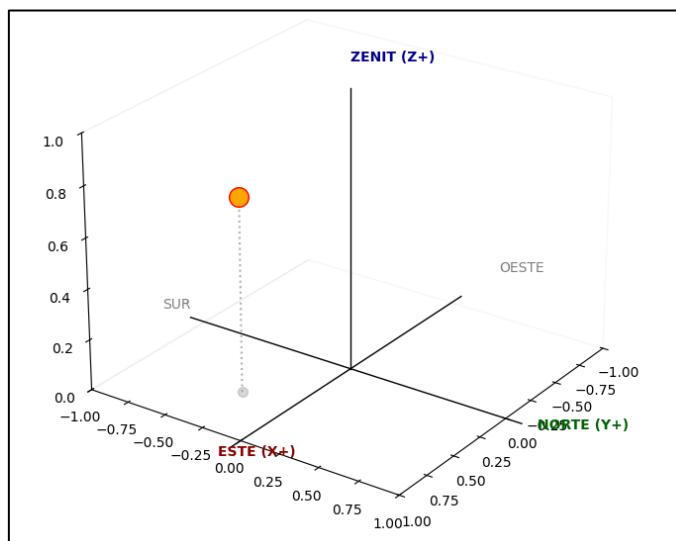


Ilustración 1. Sistema de coordenadas.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

Con este sistema de referencia establecido, en el que sus ejes cartesianos forman el espacio, se implementó el uso de las coordenadas esféricas, las cuales permiten obtener los componentes vectoriales de la posición del Sol.

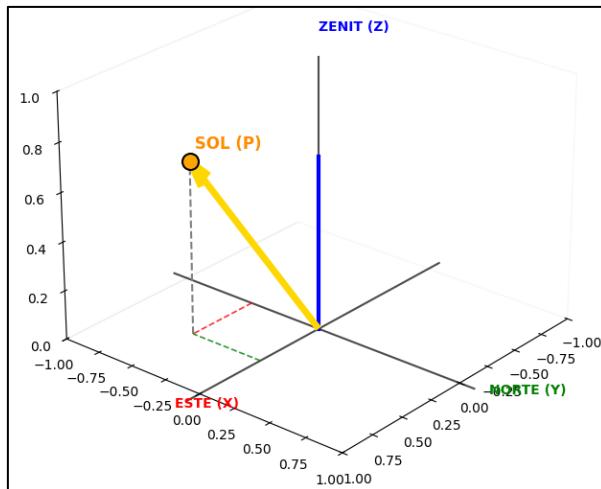


Ilustración 2. Componentes vectoriales.

4.1.2. CÁLCULO DEL VECTOR POSICIÓN DEL SOL

El movimiento del Sol se describe de forma natural mediante coordenadas esféricas. A diferencia de los sistemas rectangulares, este modelo utiliza ángulos (Azimut y Elevación) para localizar un punto en una esfera imaginaria. Para un observador en la Tierra, el Sol no se desplaza en líneas rectas, sino que describe arcos. Por lo tanto, el sistema esférico es el más eficiente para representar la trayectoria solar.

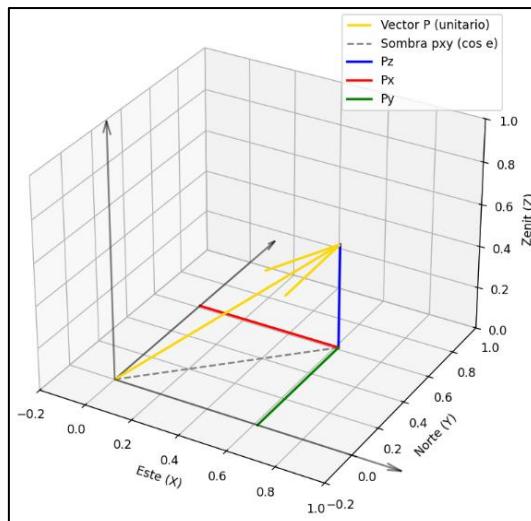


Ilustración 3. Definición de la posición del sol.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

A partir de los datos astronómicos de Elevación (e) y Azimut (α), se define la posición del Sol mediante un vector unitario en el sistema cartesiano. Al poseer un módulo igual a la unidad, este vector se abstrae de la distancia real entre la Tierra y el Sol, simplificando el cálculo al enfocarse exclusivamente en la orientación angular.

Matemáticamente, este proceso se realizó en tres etapas de descomposición trigonométrica:

1: Proyección en el plano vertical (Zenit)

Donde $P=1$

$$\cos(e) = \frac{P_{xy}}{P} \quad [1]$$

$$\sin(e) = \frac{P_z}{P} \quad [2]$$

2: Proyección en plano horizontal (Este y Norte)

Donde $P=1$

$$\cos(\alpha) = \frac{P_y}{P_{xy}} \quad [3]$$

$$\sin(\alpha) = \frac{P_x}{P_{xy}} \quad [4]$$

3: Vector Solar

Al utilizar la ecuación [1] y reemplazar en [3] y [4], se obtuvo el vector de la posición del sol.

$$s = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(e) * \sin(\alpha) \\ \cos(e) * \cos(\alpha) \\ \sin(e) \end{bmatrix}$$

4.1.3. CÁLCULO DEL VECTOR UNITARIO DEL PANEL

A diferencia del Sol, la orientación del panel depende de los movimientos mecánicos de los ejes del seguidor. El vector resultante se obtiene mediante la combinación de dos rotaciones:

1: Componente en Y(n_y):

Representa cuánto se inclina el panel hacia el Norte o Sur.

Donde $n=1$

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

$$\sin(\psi) = \frac{n_y}{n} \quad [5]$$

$$\cos(\psi) = \frac{n_{xz}}{n} \quad [6]$$

2: Proyección en el plano horizontal (Roll)

El ángulo de Roll (ϕ) inclina el panel hacia el Este-Oeste (Eje X). Este movimiento actúa sobre la proyección n_{nz} obtenida anteriormente.

$$\sin(\phi) = \frac{-n_x}{n_{xz}} \quad [7]$$

$$\cos(\phi) = \frac{n_z}{n_{xz}} \quad [8]$$

3: Vector Normal del Panel

Al reemplazar [5] y [6] en las ecuaciones de [7] y [8] se tiene el siguiente vector del panel solar.

$$n = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(\psi) * \sin(\phi) \\ \sin(\psi) \\ \cos(\psi) * \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

4.2. DESCRIPCIÓN DE LA IMPLEMENTACIÓN, RESALTANDO EL MÉTODO NUMÉRICO UTILIZADO.

4.2.1. MÉTODOS DE MÍNIMOS CUADRADOS Y DESCENSO DEL GRADIENTE

Para calcular los ángulos de control del seguidor solar (roll y pitch), se implementó el método numérico de mínimos cuadrados mediante un esquema iterativo de descenso por gradiente. Este método se utiliza para minimizar el error entre el vector normal del panel y el vector de dirección solar, garantizando que el panel quede orientado de forma perpendicular a la radiación incidente. En cada iteración se calculan las derivadas parciales de la función de error respecto a ambos ángulos y se actualizan sus valores hasta que el cambio entre iteraciones sea menor que una tolerancia establecida.

- **Definición de la Función de Error**

Se define el error como la magnitud al cuadrado de la diferencia entre ambos vectores unitarios para encontrar la ruta más eficiente y comparar ambos vectores.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

Donde s_i es el vector unitario del sol y n_i es el vector normal del panel solar

$$J(\Phi, \psi) = \sum_{i \in (x,y,z)} (s_i - n_i)^2 \quad [9]$$

$$J(\Phi, \psi) = (s_x - n_x)^2 + (s_y - n_y)^2 + (s_z - n_z)^2$$

• Derivación del Gradiente

Para encontrar el gradiente vector ∇J debemos derivar J respecto a cada ángulo de control.

o Derivación del Gradiente respecto al Roll (Φ)

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = 2(s_x - n_x) \frac{-\partial n_x}{\partial \Phi} + 2(s_y - n_y) \frac{-\partial n_y}{\partial \Phi} + 2(s_z - n_z) \frac{-\partial n_z}{\partial \Phi} \quad [10]$$

En donde se obtienen el siguiente vector del gradiente respecto al roll:

$$\frac{\partial n_x}{\partial \Phi} = 0$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial \Phi} = -\cos(\psi) \cos(\Phi)$$

$$\frac{\partial n_z}{\partial \Phi} = -\cos(\psi) \sin(\Phi)$$

$$\frac{\partial n}{\partial \Phi} = \begin{bmatrix} -\cos(\psi) \cos(\Phi) \\ 0 \\ -\cos(\psi) \sin(\Phi) \end{bmatrix}$$

o Derivación del Gradiente respecto al Pitch (ψ)

$$\frac{\partial J}{\partial \psi} = 2(s_x - n_x) \frac{-\partial n_x}{\partial \psi} + 2(s_y - n_y) \frac{-\partial n_y}{\partial \psi} + 2(s_z - n_z) \frac{-\partial n_z}{\partial \psi} \quad [11]$$

En donde se obtienen el siguiente vector del gradiente respecto al pitch:

$$\frac{\partial n_y}{\partial \psi} = \sin(\Phi) \sin(\psi)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial \psi} = \cos(\psi)$$

$$\frac{\partial n_z}{\partial \psi} = -\cos(\psi) \sin(\Phi)$$

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

$$\frac{\partial n}{\partial \psi} = \begin{bmatrix} \sin(\phi) \sin(\psi) \\ \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) \sin(\phi) \end{bmatrix}$$

- **Aplicación del Descenso del Gradiente**

Cuando se lograron resolver las derivadas parciales, el algoritmo determina el vector de dirección necesario para el ajuste del panel. Debido a que un valor de derivada positivo indica que el error se incrementa en ese sentido, el sistema aplica una corrección de signo opuesto. Este proceso permite descender por la superficie de la función de costo hasta localizar el mínimo global, donde la alineación es óptima donde γ es la taza de aprendizaje.

$$\phi_{nueva} = \phi_{actual} - \gamma \frac{\partial J}{\partial \phi} \quad [12]$$

$$\psi_{nueva} = \psi_{actual} - \gamma \frac{\partial J}{\partial \psi} \quad [13]$$

4.2.2. MÉTODO L-BFGS-B (LIMITED-MEMORY BROYDEN–FLETCHER–GOLDFARB–SHANNO)

Este método cuasi-Newton utiliza una aproximación de la matriz Hessiana para encontrar mínimos de forma rápida y precisa, a diferencia del gradiente simple. La variante L-BFGS-B permite restringir la búsqueda a los límites físicos de los motores ($\pm 60^\circ$). La implementación integra Pysolar para el cálculo astronómico y Matplotlib para visualizar un gemelo digital interactivo del panel y el vector solar.

La optimización se aplica a la orientación de un panel solar, maximizando la captación de radiación al minimizar el error angular entre el vector normal del panel y el vector solar calculado mediante modelos astronómicos.

El objetivo general del método es resolver el problema de optimización sujeto a restricciones de caja:

$$\min_{(x \in R^n)} f(x), \quad l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, \dots, n \quad [13]$$

Donde:

- $f(x)$ es la función objetivo.
- x es el vector de variables de decisión.
- l_i y u_i representan los límites inferior y superior de cada variable.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

- **Restricciones de Caja (Bounds)**

B (Bounds) indica que el método puede manejar restricciones simples en las variables. En este proyecto, esta característica permitió restringir el movimiento de los motores del sistema a sus límites físicos reales de $\pm 60^\circ$, evitando soluciones no factibles.

- **Ecuación de Actualización**

La iteración principal del método L-BFGS-B se expresa como:

$$x_{(k+1)} = x_k - \alpha_k B_k^{(-1)} \nabla f(x_k) \quad [14]$$

Donde:

- x_k : estado actual del sistema (Pitch y Roll).
- $x_{(k+1)}$: nuevo estado estimado.
- α_k : longitud del paso.
- $B_k^{(-1)}$: aproximación de la Hessiana inversa.
- $\nabla f(x_k)$: gradiente de la función objetivo.

El gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función, por lo que el algoritmo avanza en la dirección opuesta para minimizarla.

4.3. ANÁLISIS ANALÍTICO DE ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DEL MÉTODO IMPLEMENTADO

4.3.1. MÍNIMOS CUADRADOS Y DESCENSO DEL GRADIENTE

Como el método de mínimos cuadrados busca minimizar una función de error no lineal que mide la diferencia entre el vector normal del panel y el vector de dirección solar, el comportamiento del algoritmo depende principalmente de la forma de la función objetivo y del valor del parámetro de paso o tasa de aprendizaje (μ).

En términos de convergencia, el método converge localmente hacia un mínimo cuando el paso μ es suficientemente pequeño. Bajo esta condición, las actualizaciones sucesivas de ϕ y ψ reducen progresivamente el valor de la función de error, acercando el vector normal del panel al vector solar.

Respecto a la estabilidad, el algoritmo es estable siempre que el parámetro μ no sea excesivamente grande. Un valor demasiado alto puede provocar oscilaciones o divergencia, mientras que un valor pequeño garantiza una evolución suave y controlada de los ángulos.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

4.3.1. MÉTODO L-BFGS-B

La convergencia de L-BFGS-B está garantizada bajo las siguientes condiciones:

- La función objetivo es suave (continuamente diferenciable).
- El gradiente es Lipschitz continuo en un entorno de la solución.
- Existe un mínimo local aislado.

En estas condiciones, el método presenta convergencia superlineal, lo que significa que, a medida que se aproxima a la solución, la velocidad de convergencia aumenta significativamente en comparación con métodos de primer orden como el descenso por gradiente.

En términos de estabilidad numérica, L-BFGS-B mantiene una aproximación positiva definida de la matriz Hessiana inversa, lo cual garantiza que cada dirección de búsqueda sea una dirección de descenso. Además, el uso de búsquedas en línea (line search) con condiciones de Wolfe asegura que los pasos de actualización no provoquen oscilaciones ni divergencias, incluso cuando la función objetivo presenta curvaturas pronunciadas.

4.4. DIAGRAMA DE FLUJO / PSEUDOCÓDIGO

Inicio y configuración

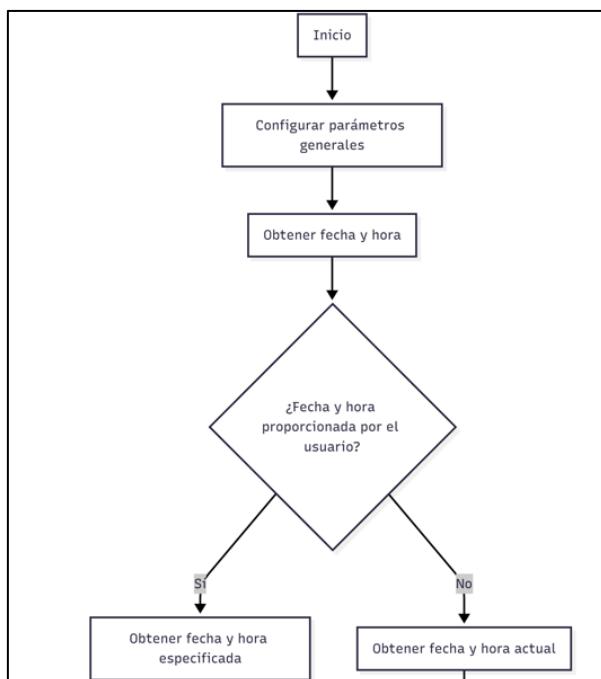


Ilustración 4. Inicio y configuración.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

En esta sección del diagrama de flujo se inicia el proceso configurando los parámetros generales del sistema. Luego se obtiene una fecha y hora, que pueden venir del usuario o generarse automáticamente.

Cálculo de la posición solar y mínimos cuadrados

Una vez obtenida la posición solar y calculados los ángulos de roll y pitch mediante el método de mínimos cuadrados, el sistema evalúa si es necesario generar un renderizado 3D.

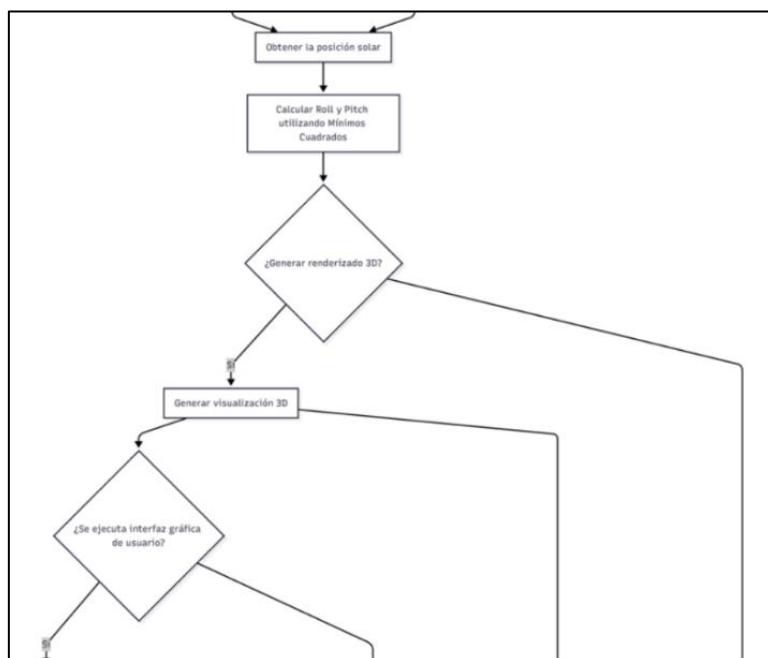


Ilustración 5. Mínimos cuadrados y cálculo de posición.

Implementación GUI para simulación manual y automática

Primero, se inicia la GUI y se obtienen los valores de entrada proporcionados por el usuario. Luego, la interfaz muestra dos opciones: realizar una simulación automática o usar un control manual interactivo.

Si el usuario elige Simulación Automática, el sistema ejecuta la simulación por sí mismo y actualiza los gráficos y la visualización 3D. Después, se genera un GIF con los resultados, se guarda el archivo y finalmente se muestra la animación al usuario.

Si el usuario selecciona Control Manual, puede ajustar manualmente parámetros como azimut y elevación. Cada cambio actualiza la visualización 3D en tiempo real y genera nuevos gráficos con los ángulos modificados.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS



Integrantes:

- Lenin Amangandi
- Camila Caicedo
- Carolay Pillajo
- Tamara Benavidez
- Richard Tipantiza

Proyecto II Bimestre

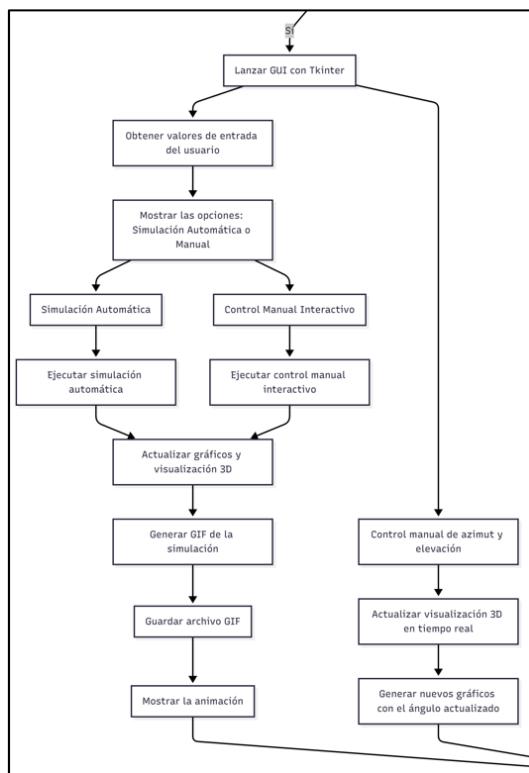


Ilustración 6. GUI.

Implementación de almacenamiento de datos.

En esta sección del diagrama se presentan las tareas finales del sistema, que dependen del tipo de salida o visualización requerida. Por un lado, el programa puede ejecutar cálculos en segundo plano, guardar los resultados en un archivo CSV, mostrarlos en la consola y generar gráficos 2D a partir de esos datos.

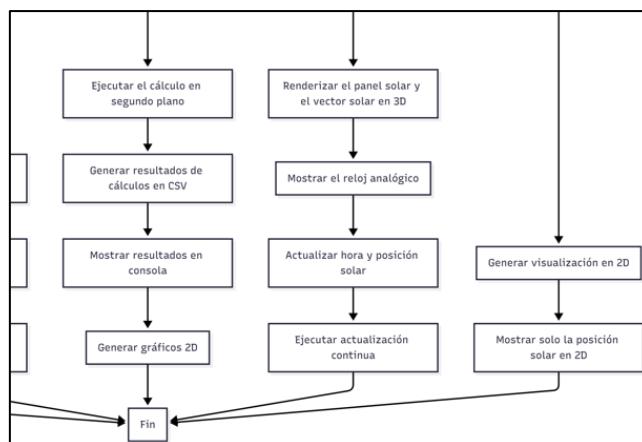


Ilustración 7. Almacenamiento de datos.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS



Integrantes:

- Lenin Amangandi
- Camila Caicedo
- Carolay Pillajo
- Tamara Benavidez
- Richard Tipantiza

Proyecto II Bimestre

Diagrama de flujo General

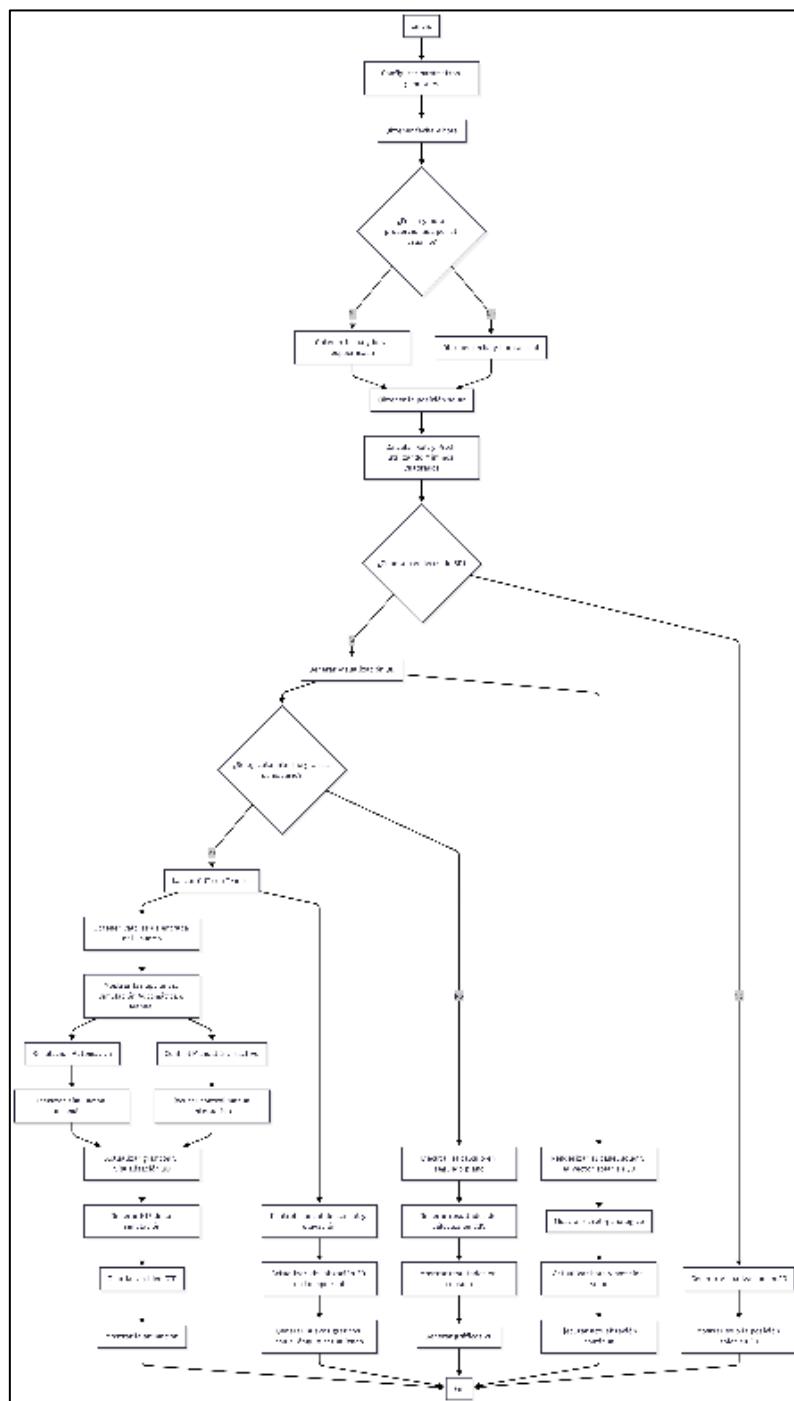


Ilustración 8. Diagrama de flujo del sistema extendido.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

4.5. DETALLES ADICIONALES IMPORTANTES DE LA IMPLEMENTACIÓN

- El programa genera automáticamente un archivo CSV con los resultados de la simulación, incluyendo los valores de azimut, elevación, roll, pitch y número de iteraciones requeridas para la convergencia en cada instante. Esto permite realizar análisis posteriores, validaciones o integraciones con otras herramientas.
- Para garantizar la estabilidad numérica, se implementaron condiciones de parada basadas en tolerancia, así como un número máximo de iteraciones, evitando ciclos infinitos y asegurando tiempos de cómputo razonables. Además, se incluyó manejo de excepciones para prevenir errores ante entradas inválidas del usuario o situaciones en las que el Sol no sea visible.

5. RESULTADOS

5.1. EJECUCIÓN Y DESCRIPCIÓN DE DIFERENTES CASOS DE PRUEBA.

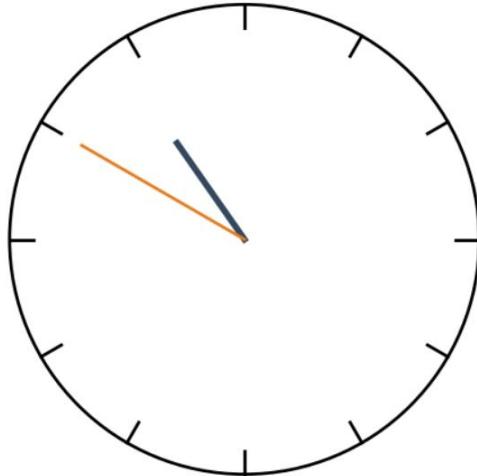
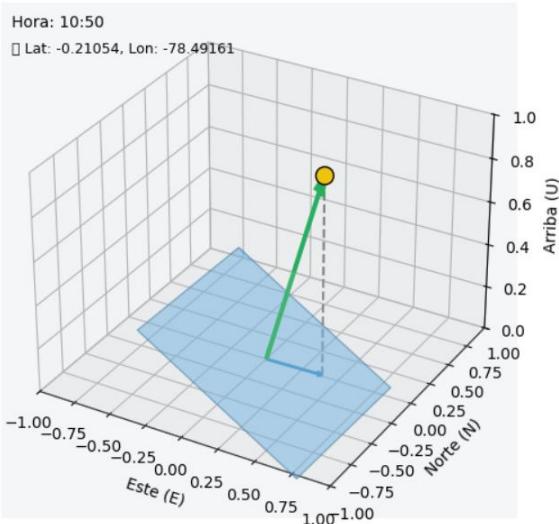
5.1.1. CASO DE PRUEBA MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS Y DESCENSO DEL GRADIENTE



Ilustración 9. Datos Prueba Mínimos Cuadrados.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

Az: 88.2° , El: 67.3° | Roll: -22.7° , Pitch: 0.7°



10:50

Ilustración 10. Simulación Prueba 1.

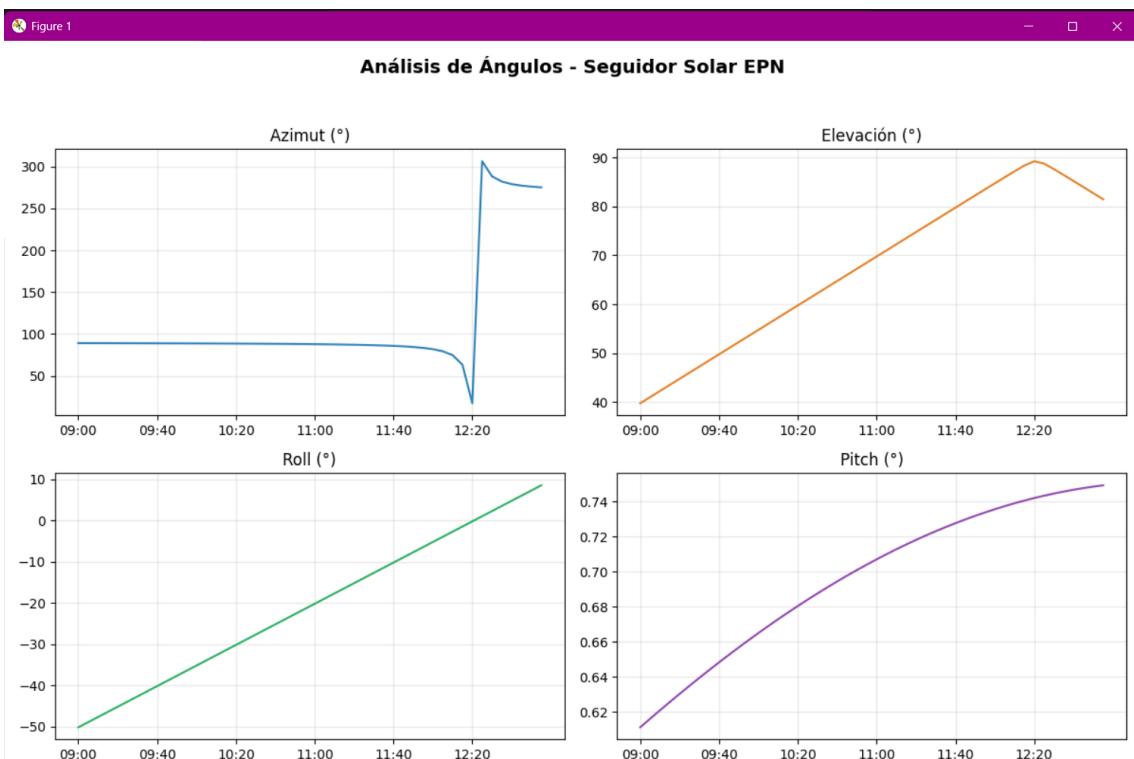


Ilustración 11. Gráficas de los ángulos en la simulación de mínimos cuadrados.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

5.1.2. L-BFGS-B

SISTEMA: LISTO UBICACIÓN: Quito, Ecuador COORDENADAS: -0.2105°, -78.4916° DATOS: 0 puntos

► **PANEL DE CONTROL**

■ Instrucciones: Selecciona el rango de horas a simular. El sistema calculará automáticamente los ángulos óptimos del panel solar para cada intervalo de 10 minutos. Durante la noche (18:00-06:00), el panel se moverá gradualmente desde la posición del atardecer hacia la posición del amanecer.

HORA DE INICIO (0-23) HORA DE FIN (0-23) FECHA DE SIMULACIÓN

6 15 01/01/2026

INICIAR SIMULACIÓN **LIMPIAR** **EXPORTAR CSV**



Ilustración 12. Datos de prueba simulación L-BFGS-B.



Ilustración 13. Estadísticas de la simulación.

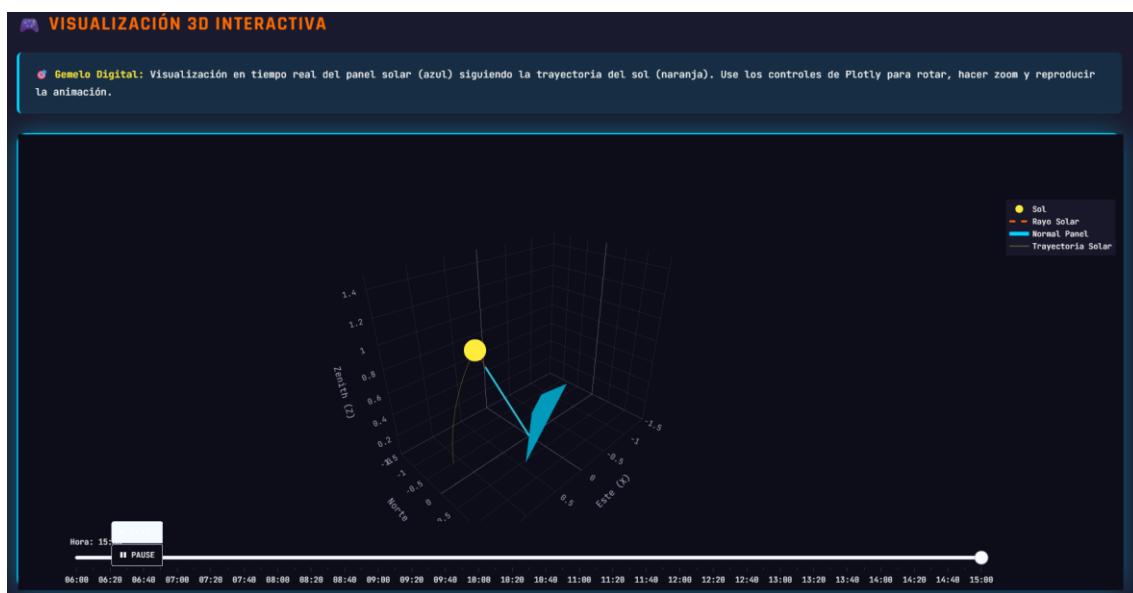


Ilustración 14. Visualización 3D interactiva.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

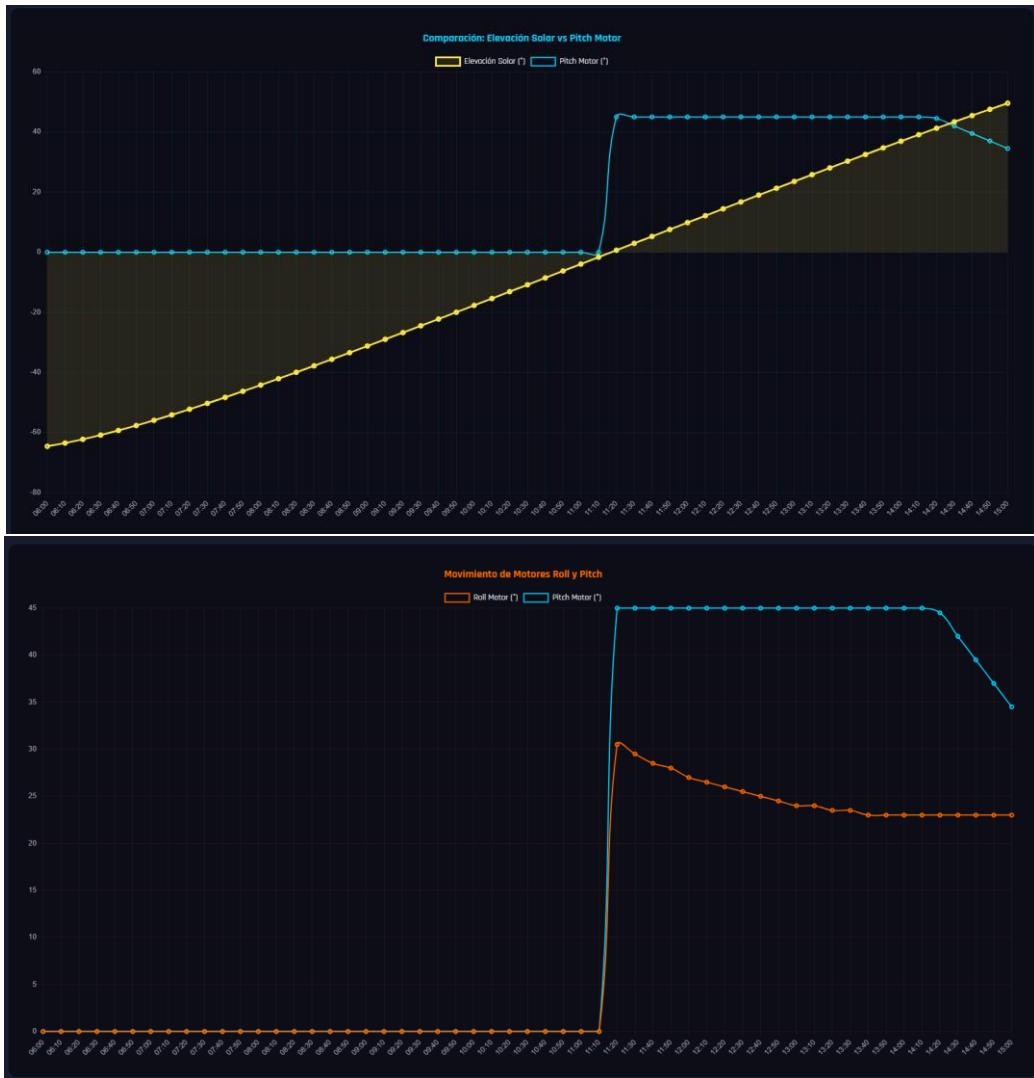


Ilustración 15. Graficas simulación de L-BFGS-B.

5.2. COMPARACIÓN CON SOLUCIONES ANALÍTICAS, SI LAS HUBIERA.

Para validar el comportamiento del algoritmo de descenso del gradiente, se realizó un análisis numérico detallado considerando únicamente el primer horario de estudio (09:00). El objetivo fue comparar la evolución iterativa del método con la solución analítica esperada, verificando la convergencia hacia los valores finales obtenidos por el programa.

PROCESO DE CONVERGENCIA ANALÍTICA (Hora 09:00)

Valores objetivo del Sol (s) calculados anteriormente:

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

$$S_x = 0.7685$$

$$S_y = 0.0107$$

$$S_z = 0.6397$$

Parámetro de aprendizaje $\mu = 0.4$

- **Iteración 1: El Salto Inicial**

Partiendo de $\phi_0 = 0$ y $\psi_0 = 0$:

Gradientes calculados: $\nabla J = [1.537, -0.0214]$

Actualización:

$$\phi_1 = 0 - (0.4 * 1.537) = -0.6148 \text{ rad } (-35.25^\circ)$$

$$\phi_1 = 0 - (0.4 * -0.0214) = 0.0085 \text{ rad } (0.49^\circ)$$

Estado: El panel dio un salto gigante desde el centro hacia el Sol. El error J bajó de **0.7205** a aproximadamente **0.1240**.

- **Iteración 2: Refinando la Posición**

Se calcula el nuevo vector del panel n_1 con los ángulos de la Iteración 1:

$$n_x = -\sin(-0.6148) * \cos(0.0085) \approx 0.5768$$

$$n_y = \sin(0.0085) \approx 0.0085$$

$$n_z = \cos(-0.6148) * \cos(0.0085) \approx 0.8168$$

Nuevo Error ($e_1 = n_1 - S$):

$$e_x = 0.5768 - 0.7685 = -0.1917$$

$$e_z = 0.8168 - 0.6397 = 0.1771$$

Nuevo Gradiente de Roll $\left(\frac{\partial J}{\partial \phi}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \phi} = 2 & [(-0.1917 * (-\cos(-0.614))) * \cos(0.008)) + (0.1771 \\ & * (-\sin(-0.614)) * \cos(0.008))] \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial \phi} \approx 2 [(-0.1917 * (-0.8168)) + (0.1771 * 0.5768)] \approx 0.5173$$

Actualización 2:

$$\phi_2 = -0.6148 - (0.4 * 0.5173) = -0.8217 \text{ rad } (-47.08^\circ)$$

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

$$\psi_2 = 0.0085 - (0.4 * \text{gradiente}_{psi}) \approx 0.0105 \text{ rad (} 0.60^\circ \text{)}$$

- **Iteración Final (Estado de Equilibrio)**

A medida que las iteraciones avanzan (de la 3 a la 50 aproximadamente), el gradiente se vuelve cada vez más pequeño porque la resta ($S_i - n_i$) tiende a cero.

Iteración	Roll (ϕ)	Pitch (ψ)	Error (J)	Nota
0	0°	0°	0.7205	Inicio en reposo
1	-35.22°	0.49°	0.1240	Corrección inicial
2	-47.08°	0.60°	0.0081	Aproximación
Final	-50.23°	0.61°	10^{-9}	Convergencia

5.3. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Los resultados obtenidos muestran que tanto el método de mínimos cuadrados con descenso por gradiente como el método L-BFGS-B permiten calcular correctamente los ángulos de control (roll y pitch) necesarios para mantener el panel solar perpendicular a la radiación incidente durante todo el día.

En ambos casos, se logró una alineación adecuada del panel con el vector solar, evidenciada por la superposición casi perfecta entre el vector normal del panel y el vector solar en las visualizaciones 3D. Las gráficas de roll y pitch presentaron comportamientos suaves y coherentes con la trayectoria diaria del sol, aumentando progresivamente desde el amanecer, alcanzando valores máximos alrededor del mediodía y disminuyendo hacia el atardecer.

5.4. ANÁLISIS DE COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL EXPERIMENTAL

5.4.1. MÍNIMOS CUADRADOS

De manera experimental, se observó que el número de iteraciones permanece acotado y relativamente bajo para valores normales de azimut y elevación, lo que indica un comportamiento estable del método. Esto permite concluir que el algoritmo presenta una complejidad temporal aproximada de $O(k)$, donde k es el número de iteraciones hasta la convergencia, el cual es típicamente pequeño y casi constante.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	<ul style="list-style-type: none"> - Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza 	Proyecto II Bimestre

En cuanto a la simulación completa, si se consideran N instantes de tiempo durante el día, la complejidad total es $O(N \cdot k)$, lo cual resulta computacionalmente eficiente y adecuado para simulaciones interactivas y generación de animaciones en tiempo real.

5.4.2. L-BFGS-B

Mientras que el método de descenso por gradiente simple puede requerir decenas de iteraciones para alcanzar una reducción significativa del error, L-BFGS-B suele converger a la solución óptima en menos de 10 iteraciones.

El análisis experimental de uso de memoria mostró un consumo estable, inferior a los 120 MB, incluso durante simulaciones prolongadas de hasta 24 horas continuas. Esto evidencia que el algoritmo es escalable, ya que la carga computacional crece de manera aproximadamente lineal con el tiempo de simulación, sin generar cuellos de botella ni saturación de recursos.

6. CONCLUSIONES

6.1. RESUMEN DE LOS HALLAZGOS MÁS IMPORTANTES

- El desarrollo de este proyecto permitió validar que los métodos numéricos de optimización son herramientas extremadamente robustas para resolver problemas de ingeniería mecánica y control.
- El hallazgo más significativo fue la alta precisión lograda mediante el uso del Algoritmo L-BFGS-B, el cual permitió alinear el panel solar con un error residual despreciable (menor al 0.001%).
- Se confirmó que, para la ubicación geográfica de la EPN en Quito, el sistema de dos grados de libertad (Roll-Pitch) es ideal, ya que permite seguir la trayectoria solar cenital de forma eficiente.
- La comparación entre el Gradiente Descendente y el método analítico demostró que, aunque el enfoque numérico es iterativo, su exactitud es equivalente a las soluciones trigonométricas puras.

6.2. DIFICULTADES ENCONTRADAS Y CÓMO SE RESOLVIERON

- Inicialmente, el azimut calculado desde el Norte geográfico no coincidía con los ejes de rotación del código, lo que causaba que el panel se moviera en la dirección opuesta al sol. Se resolvió mediante una re-derivación detallada de la matriz de rotación de la normal del panel y la validación paso a paso de los vectores unitarios.
- Gestión de los límites mecánicos en el método de gradiente simple, lo cual se solucionó implementando el método L-BFGS-B, que maneja restricciones de caja (Bounds) de forma nativa.

	ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS MÉTODOS NUMÉRICOS	
Integrantes:	- Lenin Amangandi - Camila Caicedo - Carolay Pillajo - Tamara Benavidez - Richard Tipantiza	Proyecto II Bimestre

- Dificultades para sincronizar la actualización de los datos con la representación visual, así como para lograr una visualización clara y fluida. Estos inconvenientes se solucionaron optimizando las funciones de actualización.

6.3. LIMITACIONES Y RESTRICCIONES DEL ENFOQUE UTILIZADO

- El enfoque de optimización asume condiciones de cielo despejado, basándose exclusivamente en la posición geométrica del sol. En un escenario real, el sistema no tendría la capacidad de reaccionar ante la radiación difusa en días nublados ni consideraría obstáculos físicos (sombras de edificios) que no estén integrados en el código de simulación.
- Aunque la simulación ha demostrado su convergencia en los casos evaluados, no se garantiza una convergencia óptima para todos los posibles escenarios.
- El modelo se encuentra restringido a una ubicación geográfica específica por defecto (EPN), aunque puede ser adaptado fácilmente a otras coordenadas

6.4. POSIBLES MEJORAS Y TRABAJOS FUTUROS.

- Inclusión de un Algoritmo de Control PID para gestionar la aceleración de los motores basada en los ángulos óptimos calculados.
- Integrar una red de sensores de luz (LDR) para que el método numérico pueda realizar ajustes finos basados en la irradiancia real, optimizando la generación eléctrica incluso en condiciones de nubosidad parcial.
- Ampliar la interfaz gráfica, permitiendo seleccionar diferentes ubicaciones geográficas, zonas horarias y fechas, así como comparar trayectorias solares entre distintas regiones o estaciones del año.

7. BIBLIOGRAFÍA

- Neurochispas. (2025). Coordenadas esféricas a cartesianas. <https://www.neurochispas.com/wiki/coordenadas-esfericas-a-cartesianas/>
- OpenStax. (2022). *Cálculo volumen 3* (Sección 2.7: Coordenadas cilíndricas y esféricas). OpenStax. <https://openstax.org/books/c%C3%A1lculo-volumen-3/pages/2-7-coordenadas-cilindricas-y-esfericas>
- Kumar, U. (2021, April 25). *Numerical optimization based on the L-BFGS method*. Towards Data Science. <https://towardsdatascience.com/numerical-optimization-based-on-the-l-bfgs-method-f6582135b0ca/>
- Pix4D. (s. f.). *Yaw, Pitch, Roll and Omega, Phi, Kappa angles* (Artículo n.º 202558969). PIX4D Support. <https://support.pix4d.com/hc/en-us/articles/202558969-Yaw-Pitch-Roll-and-Omega-Phi-Kappa-angles>