

Encontrar la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz aumentada:}$$

$$\begin{array}{l} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_1+F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_2+F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ -F_3 + F_2 \rightarrow F_2; SF_1 \rightarrow F_1 \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 15 & 20 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{4F_3+F_1 \rightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 15 & 0 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ 3F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right) \end{array}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$\begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \end{array} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Matriz aumentada:} \\ -5F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

15 6 0 / Matriz aumentada.

$$A_2 | I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$-5F_1 + F_2 \rightarrow F_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$+4F_2 + F_3 \rightarrow F_3$

$-4F_3 + F_2 \rightarrow F_2$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

$3F_3 + F_1 \rightarrow F_1$

$-2F_2 + F_1 \rightarrow F_1$

$$\tilde{A}_2^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1 \quad F_3 \rightarrow F_3 + 4F_2 \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A | I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2S & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & 3,75 & -0,25 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\frac{1}{2}F_1 \rightarrow F_1$

$\frac{1}{4}F_1 + F_3 \rightarrow F_3$

$-\frac{1}{2}F_1 + F_2 \rightarrow F_2$

$-\frac{1}{4}F_1 + F_3 \rightarrow F_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 3,75 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right)$$

$\frac{1}{2}F_2 \rightarrow F_2$

$-3,75F_3 + F_2 \rightarrow F_2$

$-F_3 + F_1 \rightarrow F_1$

$\frac{1}{4}F_1 \rightarrow F_1$

$-2F_2 + F_1 \rightarrow F_1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0,12 & -0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & 0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & 0 & 1,2 & -0,4 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0,12 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & -0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorización

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 25 \\ 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

no hay factorización directa
porque hay intercambio de filas

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 18 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 38 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - 1F_1$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 13 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 4F_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & -4 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{9}F_4 \rightarrow F_4$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_4$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 8F_4$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_4$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & -1 & -7 & 0 & 6 & -\frac{23}{9} & -\frac{32}{9} & \frac{8}{9} \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -4 & \frac{13}{9} & \frac{13}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{array} \right)$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 7F_3$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - 6F_3$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - 4F_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 288 & -754 & -374 & 133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -36 & 48 & 138 & -66 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -72 & 26 & 26 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 90 & -40 & -40 & 10 \end{array} \right)$$

$$A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 288 & -754 & -374 & 133 \\ -36 & 48 & 138 & -66 \\ -72 & 26 & 26 & -2 \\ 90 & -40 & -40 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} \frac{1}{2}C_1 \rightarrow C_1 \\ F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \rightarrow F_4 - 3F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 20 & 13 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array} \right) = U$$

$$L'U' = A'$$

$$LU^{-1}U = AU^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1/5 & -9/40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & -1/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{array} \right)$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 & 1/5 & -9/40 \\ 0 & -1 & -7/5 & 4/15 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot U^{-1} = L$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{array} \right) \times \begin{pmatrix} 0,5 & 2 & 1/5 & -9/40 \\ 0 & -1 & -7/5 & 4/15 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/40 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$