

Encontrar la inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz aumentada:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4F_1 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -15 & | & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_3 + F_2 \rightarrow F_2; 5F_1 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 5 & 15 & 20 & | & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4F_3 + F_1 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 5 & 15 & 0 & | & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3F_2 + F_1 \rightarrow F_1} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -F_2 \rightarrow F_2 \\ -F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & | & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & | & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$\begin{aligned} F_2 &\rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 &\rightarrow F_3 - 4F_1 \\ F_3 &\rightarrow F_3 - 2F_2 \end{aligned} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada.

$$-5F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$

13 6 0 1 Matriz aumentada.

$$A_1|I = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad -5F_1 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad +4F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \quad -4F_3 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad 3F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \quad -2F_2 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = LU$$

$$\begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 4F_2 \end{array} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A|I = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 2,5 & 3,75 & -0,25 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -\frac{1}{2}F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -\frac{1}{4}F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5 & 3,75 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2,5}F_2 \rightarrow F_2 \\ F_2 \leftrightarrow F_3 \end{array} \quad \begin{array}{l} -3,75F_3 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \end{array} \quad \frac{1}{2,5}F_2 \rightarrow F_2$$

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \frac{1}{4}F_1 \rightarrow F_1 \\ -2F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \end{array}$$



$$\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1,2 & -0,4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & 1 & 0 & 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 1 & -0,2 & 0,4 & 0 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 & -0,2 \\ 0,2 & -0,6 & 0,4 \\ -0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}$$

Factorizar

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 25 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

no hay factorización directa  
LU por que hay intercambio de  
filas

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 5 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 18 & 10 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 12 & 38 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} F_2 &\rightarrow F_2 - 2F_1 \\ F_3 &\rightarrow F_3 - F_1 \\ F_4 &\rightarrow F_4 - 3F_1 \end{aligned}$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 13 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$F_3 \rightarrow F_3 + F_2$$

$$F_4 \rightarrow F_4 - 4F_3$$

$$\sim \left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 & -4 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{9} F_4 \rightarrow F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & -2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4/9 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$F_3 \rightarrow F_3 - F_4$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 8F_4$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 0 & 0 & 4/9 & 4/9 & -1/9 \\ 0 & -1 & -7 & 0 & 6 & -23/9 & -32/9 & 8/9 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -4 & 13/9 & 13/9 & -1/9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4/9 & -4/9 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$F_2 \rightarrow F_2 + 7F_3$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - 6F_3$$

$$F_1 \rightarrow F_1 - 4F_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 288 & -154 & -334 & 133 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -36 & 48 & 138 & -66 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -72 & 26 & 26 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 90 & -40 & -40 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 288 & -154 & -334 & 133 \\ -36 & 48 & 138 & -66 \\ -72 & 26 & 26 & -2 \\ 90 & -40 & -40 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} C_1 \rightarrow C_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & -8 \\ 0 & -1 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 20 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} F_3 &\rightarrow F_3 + F_2 \\ F_4 &\rightarrow F_4 - 4F_3 \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{aligned} LU' &= A \\ LU'U &= AU' \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -8 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1/5 & -49/40 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3/5 & 4/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & -1/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 2 & 1/5 & -49/40 \\ 0 & -1 & -3/5 & 4/15 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot U^{-1} = L$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 5 & -6 \\ 2 & 5 & 18 & 10 \\ 6 & 12 & 38 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,5 & 2 & 1/5 & -49/40 \\ 0 & -1 & -3/5 & 4/15 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/45 \\ 0 & 0 & 0 & 1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$