Лекция 10. Производная функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $(a;b)$ и $x\in(a;b)$. Пусть Δx произвольное число такое, что $x+\Delta x\in(a;b)$. Число $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ или y'.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется правой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x+0)$.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется левой **производной** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x-0)$.

По свойству пределов, производная в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правая и левая производные и они равны.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, A не зависит от Δx.

По опрделению о-малое, получаем $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$. В самой точке $\Delta x=0$ функция $\alpha(\Delta x)$ может быть и не определена. Ей можно приписать любое значение. Для дальнейшего удобно считать, что $\alpha(0)=0$. При такой договоренности эта функция будет непрерывной в точке 0.

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Имеем

$$f(x)-f(x_0)=f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)=A\cdot(x-x_0)+\alpha((x-x_0))\cdot(x-x_0).$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x-x_0)=0$, то $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. **Теорема доказана**.

Теорема. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке производную.

Доказательство. Пусть функция дифференцируема, тогда $\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\alpha(\Delta x)\right)=A.$$

Следовательно, производная в точке x существует и равна A. Обратно, пусть существует производная в точке x. Тогда $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$. Следовательно, если обозначить

$\alpha(\Delta x)=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)$, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$ и $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$. **Теорема доказана**.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда, по доказанной теореме, имеем $\Delta y=f'(x)\Delta x+o(\Delta x),\ \Delta x\to 0$. Следовательно, линейная функция $f'(x)\Delta x$ переменной Δx является главной частью приражения функции $y=f(x)$ в точке x. Эта линейная функция называется **дифференциалом** функции $y=f(x)$ в точке x и обозначается $dy=f'(x)\Delta x$. Обозначим Δx как dx и назовем **дифференциалом независимой переменной**.

Теорема. Если каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное (при условии $g(x)\neq 0$) также дифференцируемы в точке x, причем имеют место формулы

1. $(f\pm g)'(x)=f'(x)\pm g'(x)$;
2. $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$;
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Доказательство. Докажем для частного. Имеем

$$\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f+f(x)}{\Delta g+g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f\, g(x)-\Delta g\, f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\right)=$$

$$=\frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}g(x)-\frac{\Delta g}{\Delta x}f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана**.

Следствие. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то

$$d(f\pm g)=df\pm dg;$$
$$d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg;$$
$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}.$$

Теорема. Пусть функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$. Тогда композиция $f\circ\varphi$ определена в некотрой окрестности точки t_0, дифференцируема в точке t_0 и имеет место формула

$$(f\circ\varphi)(t_0)=f'(x_0)\varphi'(t_0).$$

Доказательство. Функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке $x_0=\varphi(t_0)$, следовательно, она определена в некотрой окрестности $W(x_0)$ точки x_0. Функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, следовательно, она непрерывна в этой точке. Поэтому $\exists U(t_0):\varphi(U(t_0))\subset W(x_0)$.