
Лекция 10. Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$ и $x \in (a; b)$. Пусть Δx произвольное число такое, что $x + \Delta x \in (a; b)$. Число $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x .

Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x)$ или y' .

Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **правой производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x+0)$ или y'_+ .

Определение. Если существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, то он называется **левой производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f'(x-0)$ или y'_- .

По свойству пределов, производная в точке существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют правая и левая производные и они равны.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x , если её приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. A не зависит от Δx

По определению о-малое, получаем $\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$. В самой точке $\Delta x = 0$ функция $\alpha(\Delta x)$ может быть и не определена. Ей можно приписать любое значение. Для дальнейшего удобно считать, что $\alpha(0) = 0$. При такой договорённости эта функция будет непрерывна в точке 0.

Теорема. Если функция дифференцируема в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Имеем

$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + (x - x_0)) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \alpha((x - x_0)) \cdot (x - x_0)$. Так как $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x - x_0) = 0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. **Теорема доказана.**

Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой производную.

Доказательство. Пусть функция дифференцируема, тогда $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \alpha(\Delta x) = A.$$

Следовательно, производная в точке x существует и равна A . Обратно, пусть существует производная в точке x . Тогда $\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Следовательно, если обозначить $\alpha(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x)$, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ и $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$. **Теорема доказана.**

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x . Тогда, по доказанной теореме, имеем $\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$. Следовательно, линейная функция $f'(x)\Delta x$ переменной Δx является главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x . Эта линейная функция называется **дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $dy = f'(x)\Delta x$. Обозначим Δx как dx и назовём **дифференциалом независимой переменной**.

Теорема. Если каждая из функций $f(x)g(x)$ дифференцируемы в точке, то сумма, разность, произведение и частное (при условии $g(x) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x , причем имеют место формулы:

1. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$;
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

Доказательство. Докажем для частного. Имеем

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta f + f(x)}{\Delta g + g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\Delta f g(x) - \Delta g f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right) = \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) - \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Следствие. Если функции $f(x)g(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, то:

$$\begin{aligned} d(f \pm g) &= df \pm dg; \\ d(f \cdot g) &= g \cdot df + f \cdot dg; \\ d\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}. \end{aligned}$$

Теорема. Пусть функция $x = \phi(t)$ дифференцируема в точке t_0 , а функция $y = \phi(t_0)$, следовательно она определена в некоторой окрестности $W(x_0)$ точки x_0 . Функция $x = \phi(t)$ дифференцируема в точке t_0 , следовательно, она непрерывна в этой точке. Поэтому $\exists U(t_0) : \phi(U(t_0)) \subset W(x_0)$.