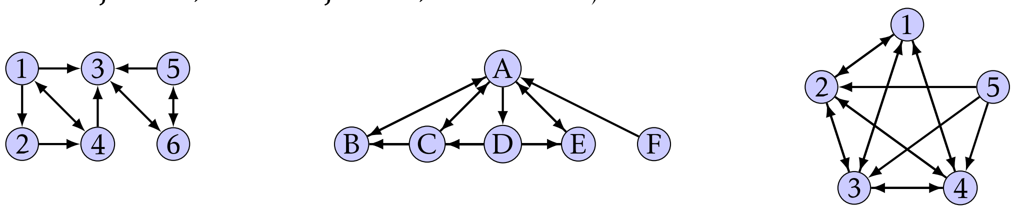
TD 3 Graphes : représentations et généralités

Exercice 1. Donnez une représentation de ces graphes pour chacune des trois formes vues en cours (matrice d'adjacence, liste d'adjacence, dictionnaire) :

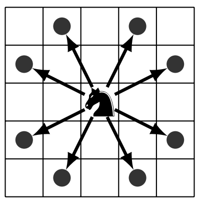


Exercice 2. Dessinez et donnez les listes d'adjacence des graphes suivants :

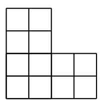
$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lesquels sont orientés ? Que pouvez-vous en déduire sur la forme de la matrice dans le cas orienté ?

Exercice 3. La Reine nous ayant quitté, il ne nous reste qu'un cavalier sur notre échiquier. On rappelle qu'un cavalier peut se déplacer uniquement de la manière suivante sur un échiquier :



1. On place un cavalier sur la case en bas à gauche d'un échiquier 4x4, on veut trouver un chemin allant à la case dans le coin supérieur gauche. Est-ce possible ? Toutes les cases sont-elles accessibles ?
2. Mêmes questions pour la forme suivante :



Exercice 4. Une composante connexe est un sous-ensemble de sommets qui sont reliés par des chemins à l'intérieur de ce sous-ensemble :

1. Donner un exemple de graphe non-connexe.
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe connexe avec n sommets ?
3. Quel est le nombre maximal d'arêtes dans un graphe qui a k composantes connexes avec n_i sommets chacune ?
4. Quel est le nombre minimum de composantes connexes dans un graphe à n sommets avec $n-k$ arêtes.

5. Étant donné un graphe (V,E), montrer que soit (V,E) est connexe, soit $(V,\overline{E})$ l'est.

Exercice 5. Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe G :

1. Montrer par récurrence que $\left(M^k\right)_{i,j}$ contient le nombre de chemins de i à j de longueur exactement k.
2. En déduire un algorithme en $\mathcal{O}(m(n)\log k)$ pour compter le nombre de chemins de i à j de longueur k où $m(n)$ est la complexité de la multiplication d'une matrice de taille $n \times n$.