TD1 Diviser pour régner

1 Ordres de grandeur et complexité

Exercice 1. Ordonnez les complexités suivantes de la plus petite à la plus grande :

1. $n!$
2. 2^n
3. n^n
4. $n \log n$
5. $n^2 \log n$
6. n^3
7. $n \log^4 n$
8. $\log n$
9. $n^{1.5}$
10. $\sqrt{n}$

Exercice 2. Donnez l'ordre de grandeur des expressions suivantes :

1. $5 + 0,001n^3 + 0,024n$
2. $100 \log n + 0.1n$
3. $5n \log n + 100n$
4. $n \log_3 n + n$
5. $100n + 0,001n^2$
6. $0,01n \log_2 n + n(\log_2 n)^2$

Exercice 3. Donnez la complexité asymptotique d'algorithmes récursifs dont la complexité peut être exprimée avec les récurrences suivantes :

1. $T(n) = T(n/2) + n$
2. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
4. $T(n) = 4T(n/2) + \log n$
5. $T(n) = T(n-1) + n$
6. $T(n) = 6T(n/2) + n^2 \log n$
7. $T(n) = 8T(n/3) + 2^n$

2 Algorithmique

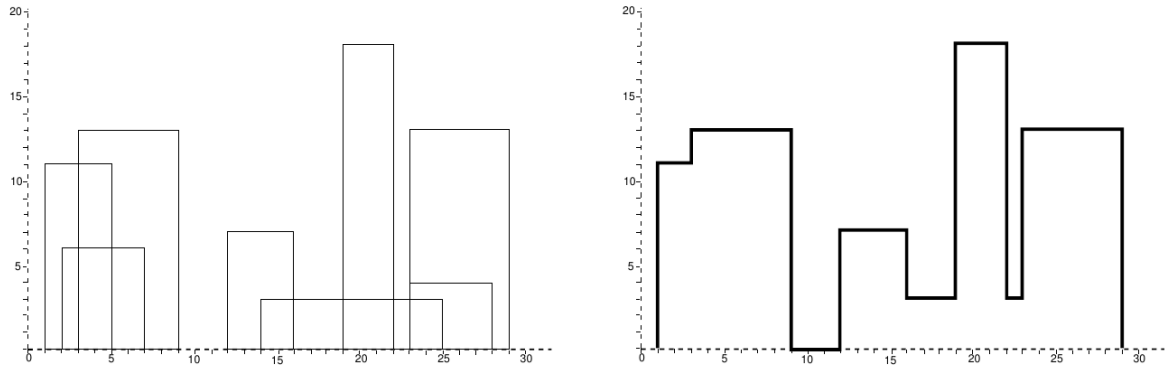
Exercice 4. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un nombre x et un entier n et qui calcule x^n. Quelle est sa complexité en nombre de multiplications ?

Exercice 5. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un tableau T d'entiers trié par ordre croissant et tel que tous les éléments sont distincts et qui retourne un indice i tel que $T[i] = i$ si celui-ci existe. La complexité de l'algorithme devra être en $\mathcal{O}(\log n)$.

Exercice 6. Un élément est *majoritaire* dans un tableau de taille n s'il y occupe au moins $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ cases.

1. Donner un algorithme simple en $\Theta\left(n^2\right)$ qui retourne l'élément majoritaire s'il existe et Faux sinon.
2. Même question en $\mathcal{O}(n \log n)$ en utilisant l'approche diviser pour régner.
3. Même questons en $\mathcal{O}(n \log n)$ sans utiliser diviser pour régner.
4. Même question en $\mathcal{O}(n)$. *Indication :* lorsque deux éléments du tableau sont différents et que l'on les enlève, s'il y avait un élément majoritaire il le reste dans le tableau restant.

Exercice 7. On s'intéresse ici au problème de la *skyline* d'immeubles. Un immeuble B_i est représenté par un triplet (L_i, H_i, R_i) où L_i et R_i sont les coordonnées en x du début et de la fin de l'immeuble et H_i sa hauteur. La *skyline* est la courbe des hauteurs maximales d'immeubles pour chaque coordonnée. Par exemple, avec les immeubles à gauche, la skyline est représentée à droite.



Une skyline pour un ensemble de n immeubles sera représentée par une liste de couples $[(x_1, h_1) \ \ldots \ (x_n, h_n)]$ où x_i représente la coordonnée d'un changement de hauteur et h_i la nouvelle hauteur. Ainsi, h_n sera toujours égale à 0 par exemple et h_i est la hauteur de la skyline entre x_i et x_{i+1}.

Si on reprend la liste d'immeubles de l'exemple précédent :

$$\{(3,13,9),(1,11,5),(12,7,16),(14,3,25),(19,18,22),(2,6,7),(23,13,29),(23,4,28)\}$$

sa skyline est $[(1,11)\ (3,13)\ (9,0)\ (12,7)\ (16,3)\ (19,18)\ (22,3)\ (23,13)\ (29,0)]$.

Donnez un algorithme pour trouver la skyline de n immeubles qui fonctionne en $\mathcal{O}(n \log n)$.

Exercice 8. Soit A est un arbre binaire de recherche (ABR) : pour tout noeud x, sa valeur est inférieure strictement à toute valeur qui est dans son sous-arbre droit et supérieure ou égale à toute valeur qui est dans son sous-arbre gauche.

1. Écrire un algorithme pour trouver le nombre d'apparitions d'une valeur x dans un arbre de binaire de recherche. Les paramètres d'entrée de votre algorithme sont A, un ABR, et x, une valeur. L'algorithme doit retourner un entier qui est 0 si $x \notin A$ et le nombre d'apparitions sinon.
2. Calculer, en notation asymptotique Θ, le nombre de comparaisons dans le meilleur des cas
3. Calculer, en notation asymptotique Θ, le nombre de comparaisons dans le pire des cas.
4. Vous devez commenter votre algorithme et justifier les complexités.