1.**弹性力学—**研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。

2.**研究对象**：**材料力学**研究杆件（如梁、柱和轴）的拉压、弯曲、剪切、扭转和组合变形等问题。**结构力学**在材料力学基础上研究杆系结构（如桁架、刚架等）。弹性力学研究各种形状的弹性体，如杆件、平面体、空间体、板壳、薄壁结构等问题。

3.**研究方法**：**弹力**在区域 V 内严格考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，建立三套方程；在边界 s 上考虑受力或约束条件，并在边界条件下求解上述方程，得出较精确的解答。**材料力学**也考虑这几方面的条件，但不是十分严格的：常常引用近似的计算假设（如平面截面假设）来简化问题，并在许多方面进行了近似的处理。因此材料力学建立的是近似理论，得出的是近似的解答。从其精度来看，材力解法只能适用于杆件形状的结构。

4.**外力—**其他物体对研究对象（弹性体）的作用力。按其作用的方式，可分为体力、面力。**体力**是作用于物体体积内的力。如：重力、惯性力。（表示）以单位体积内所受的力来量度，坐标正向为正。$ML^{-2}T^{-2}$. 力/长度³，如：N/m³。**面力**是作用于物体表面上的力。如：风压力、水压力、土压力。以单位面积所受的力来量度 $ML^{-1}T^{-2}$. 力/长度²，如：N/m ² 坐标正向为正。

5.**内力—**假想切开物体，截面两边相互作用的力（合力和合力矩)，称为内力。**应力—**截面上某一点处，单位截面面积上的内力值。$ML^{-1}T^{-2}$. 力/长度²，如：N/m²。σ_x :x 面上沿 x 向正应力，τ_{xy} ：x 面上沿 y 向切应力。符号:应力成对出现，坐标面上的应力以正面正向，负面负向为正。正面:截面的外法线沿坐标轴正向,负面:截面的外法线沿坐标轴负向。**形变** ：形状的改变。以通过一点的沿坐标正向微分线段的正应变和切应变来表示。正应变 ε_x, ε_y 以伸长为正。切应变 γ_{xy} 以直角减小为正,用弧度表示。**位移**:一点位置的移动，记号为 uvw，量纲为 L（m），以坐标正向为正。

6. 弹力的**研究方法**，在体积 V 内由微分体的平衡条件，建立**平衡微分方程**；由微分线段上形变与位移的**几何关系**，建立几何方程；由应力与形变之间的物理关系,建立**物理方程**；在边界 S 面上:在给定面力的边界上建立**应力边界条件**;在给定约束的边界上，建立**位移边界条件**；然后在边界条件下求解上述方程，得出应力、形变和位移。

7.**基本假定**：<u>理想弹性体</u>假定—**连续性**（各物理量可用连续函数表示），**完全弹性**（无残余变形，应力与应变成正比。应力与应变关系可用胡克定律表示），**均匀性**（E、μ 等与位置 uvw 无关），**各向同性**（E、μ 等与方向无关）E、μ 等为常数。**小变形假定**（简化平衡条件用变形前的尺寸代替变形后的尺寸；简化几何方程使几何方程成为线性方程）。

8.**平面问题**：a.**平面应力**：$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0$ 只有平面应力 $\sigma_x\sigma_y\tau_{xy}$ 存在，应力和应变均只是 x,y 的函数。b.**平面应变**：$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$ 只有平面应变 $\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \gamma_{xy}$ 存在；应力、应变和位移只是 x,y 的函数。c.**区别**：平面应力等厚度薄板，平面应变常截面长柱体。这两类平面问题的平衡微分方程、几何方程、应力和位移边界条件都完全相同，只有物理方程的系数不同。如果将平面应力的物理方程 $E\rightarrow\frac{E}{1-\mu^2},\ \mu\rightarrow\frac{\mu}{1-\mu}$，便可得到平面应变的物理方程。$E\rightarrow\frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2},\ \mu\rightarrow\frac{\mu}{1+\mu}$ 应变换成应力。**通用，重要！！！!!**

9.**平衡微分方程**：应力与体力 a.假设：连续性假定：应力用连续函数来表示。小变形假定：用变形前的尺寸代替变形后的尺寸。合力=<u>应力×面积，体力×体积；</u>以正向物理量来表示。$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}$

10.**几何方程**：形变与位移 a.假设：连续性；小变形（略去了高阶小量）。位移确定形变完全确定；形变确定位移不完全确定 U0、v0 表示 x，y 向的刚体平移，w 表示物体绕原点 z 轴的刚体转动。 平面问题八个未知量如下：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.\qquad \sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy};\quad \varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy};u,v$$

11. **物理方程**：应力和形变，理想弹性体(连续，完全弹性，均匀，各向同性)。正应力只与线应变有关；切应力只与切应变有关。平面应力中应力 z=0，应变 z≠0，z 面切应力切应变均为 0；平面应变中应力 z≠0，应变 z 为 0，切~同平面应力。

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\quad \gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\text{（平面应力）}\qquad \varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y)$$

12. 已知坐标面上应力求斜面上的应力：①求 Px,Py ②求斜面上的正应力和切应力 ③求主应力 ④求最大、最小应力

13. **斜面应力**：l=cos(n,x)；m=cos(n,y)； $p_x=l\sigma_x+m\tau_{yx},\quad p_y=m\sigma_y+l\tau_{xy}$

14. 经过 P 点的某一斜面上的<u>切应力等于零</u>，则该斜面上的正应力称为在 P 点的一个**主应力**，而该斜面称为在 P 点的一个**应力主面**，该斜面的法线方向（即主应力的方向）称为在 P 点的一个**应力主向**。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n&=lp_x+mp_y=l^2\sigma_x+m^2\sigma_y+2lm\tau_{xy},\\ \tau_n&=lp_y-mp_x=lm(\sigma_y-\sigma_x)+(l^2-m^2)\tau_{xy}.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\text{（主应力）}\\ &\tan\alpha_1=\frac{\sigma_1-\sigma_x}{\tau_{xy}}\text{（应力主向）}\end{aligned}\right\}$$

$$\max_{\min}\sigma_n=\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix},\ \max_{\min}\tau_n=\pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

切应力最值在应力主向 45 度角上。

15. **边界条件**：表示在边界上位移与约束或应力与面力之间的关系。分为 16 **位移边界条件**、17 **应力边界条件**、混合边界条件。

16. $(u)_s=\overline{u},(v)_s=\overline{v}$ u 横线，v 横线均为关于 s 的函数。

17. $(l\sigma_x+m\tau_{yx})_s=\overline{f_x},(m\sigma_y+l\tau_{xy})_s=\overline{f_y}$ fx 横线、fy 横线均为已知的面力（关于 s 的函数）

18. **圣维南原理**：如果把物体的一<u>小部分边界</u>上的面力，变换为分布不同但<u>静力等效的面力</u>（主矢量相同，对同一点的主矩也相同），那么，<u>近处（指面力变换范围的一、二倍的局部区域）</u>的应力分量将有显著的改变，但<u>远处</u>所受的影响可以不计。推广：如果物体一小部分边界上的面力是一个<u>平衡力系</u>（主矢量及主矩都等于零），那么，这个面力只会使近处产生显著的应力，而远处的应力可以不计。**在小边界的应用**：同一小边界上，应力的主矢和主矩应分别等于面力的主矢和主矩（大小方向）。应力的主矢量的正方向，即应力的正方向，应力的主矩的正方向，即正应力对原点的力矩的方向

19. <u>**按位移求解平面问题（位移 u、v 为基本未知数，把其他的物理量用位移表示）**</u>

（1）平面应力问题（三个条件）【平面应变：转换 E、u，公式见上文】

①用位移表示的平衡微分方程

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0,$$
$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0.$$

②用位移表示的应力边界条件

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+f_x=0,$$
$$\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+f_y=0.$$

③位移边界条件 $(u)_s=\overline{u},(v)_s=\overline{v}$

20. <u>**按应力求解平面问题（应力正应力 x、正应力 y、切应力 xy 为基本未知数，把其他的物理量用位移表示）**</u>

（1）平面应力问题（四个条件）【平面应变：转换 E、u，公式见上文】

①平衡微分方程

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0,$$
$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0.$$

②相容方程（用应力表示的）

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\text{[平面应力]}$$

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=-\frac{1}{1-\mu}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\right)\text{[平面应变，变换方法同　上]}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

④对于多连体，还须满足位移的单值条件

③应力边界条件—假定全部边界上均为应力边界条件

$$(s = s_\sigma, s_u = 0) \qquad (l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \overline{f_x}, (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \overline{f_y}.$$

21. 相容方程（**形变协调条件**）

物理意义：①形变协调条件是位移连续性的必然结果。连续体→位移连续→几何方程→形变协调条件。②形变协调条件是与形变对应的位移存在且连续的必要条件。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

22. 在**常体力**情况下，**按应力求解**可进一步简化为**按应力函数**求解。按应力求解的条件

①相容方程 $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ ②平衡微分方程【同上】③应力边界条件【同上】

平衡微分方程的全解（**如何求应力函数见下文:逆解法、半逆解法**）

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

23. **应力函数**（**艾里应力函数**）须满足三个条件

①相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$. 即②应力边界条件（假设全部边界上均为应力边界条件 $S = S_\sigma$）【公式同上】③多连体须满足位移单值条件

24. **逆解法**：①先找出满足相容方程的解②代入平衡微分方程的全解，求出应力分量③将应力分量代入应力边界条件反推面力

25. **半逆解法**：①假设应力的函数形式（根据受力情况，边界条件等）（1）由材料力学解答提出假设，（2）由边界受力情况提出假设，（3）用量纲分析方法提出假设。②由平衡微分方程的全解公式，推测应力函数的函数形式；③代入相容方程，解出应力函数④由平衡微分方程的全解公式，求出应力⑤校核全部应力边界条件（对于多连体，还须满足位移单值条件）。如能满足，则为正确解答；否则修改假设，重新求解。

26. 当求出应力后，**由应力求位移**的步骤是:(1)将应力分量代入物理方程，求出应变分量；(2)将应变分量代入几何方程，由前两式分别积分，求出 u 和 v，其中包含待定的积分函数；再由第三式求出这些积分函数；(3)由物体的刚体约束条件，求出待定刚体位移分量 u_0，v_0 和ω。

27. **校核**应力边界条件时，必须注意以下几点：(1)首先应考虑主要边界(大边界)，并必须精确地满足应力边界条件式(2-15)，每边有两个条件，都是函数方程；(2)在小边界上，如不能精确地满足应力边界条件式(2-15)，可以用三个积分的边界条件(即主矢量和主矩的条件)来代替，每边有三个条件，都是代数方程；(3)应力边界条件是在边界上建立的，必须把边界方程代入应力公式，方程才成立；(4)注意边界条件中，应力和面力的不同符号规定;(5)所有的边界条件都必须进行校核并使之满足。在平衡微分方程和其他的应力边界条件都已满足的条件下，最后一个小边界的三个积分的边界条件(主矢量和主矩的条件)是自然满足的，可以不必校核。

28. 应力边界条件两种表达：(1)根据边界点的微分体的平衡条件得出；(2)在同一边界面上，应力分量应等于对应的面力分量。

29. 当应用圣维南原理时，也可有两种表达方式:(1)在同一小边界上，应力的主矢量和主矩应等于对应的面力的主矢量和主矩；(2)在小边界附近取出一脱离体，考虑它的主矢量和主矩的平衡条件。