

1.**弹性力学**—研究弹性体由于受外力、边界约束或温度改变等原因而发生的应力、形变和位移。
2.**研究对象：材料力学**研究杆件（如梁、柱和轴）的拉压、弯曲、剪切、扭转和组合变形等问题。**结构力学**在材料力学基础上研究杆系结构（如桁架、刚架等）。弹性力学研究各种形状的弹性体，如杆件、平面体、空间体、板壳、薄壁结构等问题。
3.**研究方法：弹力**在区域V内严格考虑静力学、几何学和物理学三方面条件，建立三套方程；在边界s上考虑受力或约束条件，并在边界条件下求解上述方程，得出较精确的解答。**材料力学**也考虑这几方面的条件，但不是十分严格的：常常引用近似的计算假设（如平面截面假设）来简化问题，并在许多方面进行了近似的处理。因此材料力学建立的是近似理论，得出的是近似的解答。从其精度来看，材力解法只能适用于杆件形状的结构。

4.**外力**—其他物体对研究对象（弹性体）的作用力。按其作用的方式，可分为体力、面力。**体力**是作用于物体体积内的力。如：重力、惯性力。（表示）以单位体积内所受的力来量度，坐标正向为正。 $ML^{-2}T^{-2}$ ·力/长度³，如：N/m³。**面力**是作用于物体表面上的力。如：风压力、水压力、土压力。以单位面积所受的力来量度 $ML^{-1}T^{-2}$ ·力/长度²，如：N/m²坐标正向为正。
5.**内力**—假想切开物体，截面两边相互作用的力（合力和合力矩），称为内力。**应力**—截面上某一点处，单位截面面积上的内力值。 $ML^{-1}T^{-2}$ ·力/长度²，如：N/m²。 σ_x :x面上沿x向正应力， τ_{xy} ：x面上沿y向切应力。符号:应力成对出现，坐标面上的应力以正面正向，负面负向为正。正面:截面的外法线沿坐标轴正向,负面:截面的外法线沿坐标轴负向。**形变**：形状的改变。以通过一点的沿坐标正向微分线段的正应变和切应变来表示。正应变 ϵ_x 以伸长为正。切应变 γ_{xy} 以直角减小为正,用弧度表示。
位移:一点位置的移动，记号为uvw，量纲为L（m），以坐标正向为正。

6. 弹力的**研究方法**，在体积V内由微分体的平衡条件，建立**平衡微分方程**；由微分线段上形变与位移的**几何关系**，建立几何方程；由应力与形变之间的物理关系,建立**物理方程**；在边界S面上:在给定点力的边界上建立**应力边界条件**;在给定点约束的边界上，建立**位移边界条件**；然后在边界条件下求解上述方程，得出应力、形变和位移。

7.**基本假定**:**理想弹性体**假定**一连续性**（各物理量可用连续函数表示），**完全弹性**（无残余变形，应力与应变成正比。应力与应变关系可用胡克定律表示），**均匀性**（E、μ等与位置uvw无关），**各向同性**（E、μ等与方向无关）E、μ等为常数。
小变形假定（简化平衡条件用变形前的尺寸代替变形后的尺寸；简化几何方程使几何方程成为线性方程）。

8.**平面问题**:**a.平面应力**: $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ 只有平面应力 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 存在，应力和应变均只是x,y的函数。**b.平面应变**: $\epsilon_z=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ 只有平面应变 $\epsilon_x,\epsilon_y,\gamma_{xy}$ 存在；应力、应变和位移只是x,y的函数。**c.区别**：平面应力等厚度薄板，平面应变常截面长柱体。这两类平面问题的平衡微分方程、几何方程、应力和位移边界条件都完全相同，只有物理方程的系数不同。如果将平面应力的物理方程

$E \rightarrow \frac{E}{1-\mu^2}, \mu \rightarrow \frac{\mu}{1-\mu}$ ，便可得到平面应变的物理方程。 $E \rightarrow \frac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}, \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$ 应变换成应力。**通用，重要！！！！**

9.**平衡微分方程**：应力与体力a.假设：连续性假定：应力用连续函数来表示。小变形假定：用变形前的尺寸代替变形后的尺寸。合力=应力×面积，体力×体积；以正向物理量来表示。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

10.**几何方程**：形变与位移a.假设：连续性；小变形（略去了高阶小量）。位移确定形变完全确定；形变确定位移不完全确定U0、v0表示x、y向的刚体平移，w表示物体绕原点z轴的刚体转动。平面问题八个未知量如下：

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}; \quad \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}; u, v$$

11. **物理方程**：应力和形变，理想弹性体(连续，完全弹性，均匀，各向同性)。正应力只与线应变有关；切应力只与切应变有关。平面应力中应力z=0，应变z≠0，z面切应力切应变均为0；平面应变中应力z≠0，应变z为0，切~同平面应力。

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu \sigma_y), \quad \epsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu \sigma_x), \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy} \text{ (平面应力)} \quad \epsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

12. 已知坐标面上应力求斜面上的应力：①求Px,Py ②求斜面上的正应力和切应力 ③求主应力 ④求最大、最小应力

$$13. \text{斜面上应力: } l=\cos(n,x); m=\cos(n,y); \quad p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx}, \quad p_y = m\sigma_y + l\tau_{xy}$$

14. 经过P点的某一斜面上的**切应力等于零**，则该斜面上的正应力称为在P点的一个**主应力**，而该斜面称为在P点的一个**应力主面**，该斜面的法线方向（即主应力的方向）称为在P点的一个**应力主向**。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= lp_x + mp_y = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + 2lm\tau_{xy}, \\ \tau_n &= lp_y - mp_x = lm(\sigma_y - \sigma_x) + (l^2 - m^2)\tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{aligned} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \text{ (主应力)} \\ \tan \alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} \text{ (应力主向)}$$

$$\begin{aligned} \max_{\min} \sigma_n &= \frac{\sigma_1}{\sigma_2}, \max_{\min} \tau_n = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ &\text{切应力最值在应力主向45度角上。} \end{aligned}$$

15. **边界条件**：表示在边界上位移与约束或应力与面力之间的关系。分为16 **位移边界条件**、17 **应力边界条件**、混合边界条件。

$$(u)_s = \bar{u}, (v)_s = \bar{v} \quad \text{u 横线, v 横线均为关于 s 的函数。}$$

$$(l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \overline{f_x}, (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \overline{f_y} \quad \text{fx 横线、fy 横线均为已知的面力（关于 s 的函数）}$$

18. **圣维南原理**：如果把物体的一小部分边界上的面力，变换为分布不同但**静力等效的面力**（主矢量相同，对同一点的主矩也相同），那么，近处（指面力变换范围的一、二倍的局部区域）的应力分量将有显著的改变，但远处所受的影响可以不计。推广：如果物体一小部分边界上的面力是一个**平衡力系**（主矢量及主矩都等于零），那么，这个面力只会使近处产生显著的应力，而远处的应力可以不计。**在小边界的应用**：同一小边界上，应力的主矢和主矩应分别等于面力的主矢和主矩（大小方向）。应力的主矢量的正方向，即应力的正方向，应力的主矩的正方向，即正应力对原点的力矩的方向

19. **按位移求解平面问题（位移u、v为基本未知数，把其他的物理量用位移表示）**
（1）平面应力问题（三个条件）【平面应变：转换E、u，公式见上文】

①用位移表示的平衡微分方程

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y &= 0. \end{aligned}$$

②用位移表示的应力边界条件

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x &= 0, \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{③位移边界条件} \quad (u)_s = \bar{u}, (v)_s = \bar{v}$$

20. **按应力求解平面问题（应力正应力x、正应力y、切应力xy为基本未知数，把其他的物理量用位移表示）**
（1）平面应力问题（四个条件）【平面应变：转换E、u，公式见上文】

①平衡微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y &= 0. \end{aligned}$$

②相容方程（用应力表示的）

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu) \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \text{ [平面应力]}$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\mu} \left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \right) \text{ [平面应变，变换方法同上]}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

④对于多连体，还须满足位移的单值条件

①应力边界条件—假定全部边界上均为应力边界条件

$(s = s_\sigma, s_u = 0)$ $(l\sigma_x + m\tau_{yx})_s = \overline{f_x}, (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \overline{f_y}$

21. 相容方程 (形变协调条件)

物理意义: ①形变协调条件是位移连续性的必然结果。连续体→位移连续→几何方程→形变协调条件。②形变协调条件是形变对应的位移存在且连续的必要条件。

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

22. 在常体力情况下, 按应力求解可进一步简化为按应力函数求解。按应力求解的条件

- ①相容方程 $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$ ②平衡微分方程【同上】③应力边界条件【同上】

平衡微分方程的全解 (如何求应力函数见下文:逆解法、半逆解法)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

23. 应力函数 (艾里应力函数) 须满足三个条件

①相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$ 。即②应力边界条件 (假设全部为应力边界条件 $S = S_\sigma$) 【公式同上】③多连体须满足位移单值条件

24. 逆解法: ①先找出满足相容方程的解②代入平衡微分方程的全解, 求出应力分量③将应力分量代入应力边界条件反推面力

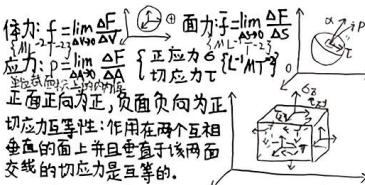
25. 半逆解法: ①假设应力的函数形式 (根据受力情况, 边界条件等) (1) 由材料力学解答提出假设, (2) 由边界受力情况提出假设, (3) 用量纲分析方法提出假设。②由平衡微分方程的全解公式, 推测应力函数的函数形式; ③代入相容方程, 解出应力函数④由平衡微分方程的全解公式式, 求出应力⑤校核全部应力边界条件 (对于多连体, 还须满足位移单值条件)。如能满足, 则为正确答案; 否则修改假设, 重新求解。

26. 当求出应力后, 由应力求位移的步骤是:(1)将应力分量代入物理方程, 求出应变分量; (2)将应变分量代入几何方程, 由前两种方式分别积分, 求出 u 和 v , 其中包含待定的积分函数; (3)由物体的刚体约束条件, 求出待定的刚体位移分量 u_0 , 0 , 和 ω 。

27. 校核应力边界条件时, 必须注意以下几点: (1)首先应考虑主要边界(大边界), 并必须精确地满足应力边界条件式(2-15), 每边有两个条件, 都是函数方程; (2)在小边界上, 如不能精确地满足应力边界条件式(2-15), 可以用三个积分的边界条件(即主矢量和主矩的条件)来代替, 每边有三个条件, 都是代数方程; (3)应力边界条件是在边界上建立的, 必须把边界方程代入应力公式, 方程才成立; (4)注意边界条件中, 应力和面力的不同符号规定; (5)所有的边界条件都必须进行校核并使之满足。在平衡微分方程和其他的应力边界条件都已满足的条件下, 最后一个小边界的三个积分的边界条件(主矢量和主矩的条件)是自然满足的, 可以不必校核。

28. 应力边界条件两种表达: (1)根据边界点的微分体的平衡条件得出; (2)在同一边界面上, 应力分量应等于对应的面力分量。

29. 当应用圣维南原理时, 也可有两种表达方式: (1)在同一小边界上, 应力的主矢量和主矩应等于对应的面力的主矢量和主矩; (2)在小边界附近取出一脱离体, 考虑它的主矢量和主矩的平衡条件。



体力: $f = \lim \frac{\Delta F}{\Delta V}$ 面力: $\bar{s} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta S}$
应力: $p = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}$ 正应力 σ 切应力 τ
正面向上为正, 负面向下为正
切应力互等性: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的。
连续性: 使建立基本方程时可以用连续函数表示
完全弹性: 物理方程成为线性的, 物理指标
均匀性: 使物理的弹性常数不随位置而变
各向同性: 使物理的弹性常数不随方向而变
小变形假设: 使微分方程的线性微分方程
形变: 线应变者以伸长为正, 缩短为负
切应变以角减小为正, 增大时为负
位移 (u, v, w) 正负号
弹性: 平衡微分方程
几何方程: 应力
物理方程: 位移
研究方法: 应力分析, 位移分析, 能量法

平面应力问题: ①只有平面应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 存在, ②只是平面应变问题: ①只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 存在, ②只是平面应力问题: ①在区域A内满足平衡微分方程 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + f_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$$

②在 S_σ 上满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) &= \bar{f}_x \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
③在 S_u 上满足位移边界条件 $(u, v) = \bar{u}, (v) = \bar{v}$
△求解平面应变问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
△求应力函数平面问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

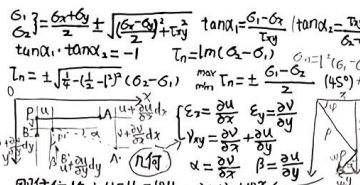
①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
几何方程 $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right.$
物理方程 $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \right.$
应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
位移单值条件 $\left\{ \begin{aligned} (u)_s &= \bar{u} \\ (v)_s &= \bar{v} \end{aligned} \right.$

任意: $\sigma_n = l\sigma_x + m\sigma_y + 2l\tau_{xy}$
斜截面: $\tau_n = l\tau_{xy} - m\sigma_x + (l^2 - m^2)\tau_{xy}$
主应力: $\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
主方向: $\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$



体力: $f = \lim \frac{\Delta F}{\Delta V}$ 面力: $\bar{s} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta S}$
应力: $p = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}$ 正应力 σ 切应力 τ
正面向上为正, 负面向下为正
切应力互等性: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的。
连续性: 使建立基本方程时可以用连续函数表示
完全弹性: 物理方程成为线性的, 物理指标
均匀性: 使物理的弹性常数不随位置而变
各向同性: 使物理的弹性常数不随方向而变
小变形假设: 使微分方程的线性微分方程
形变: 线应变者以伸长为正, 缩短为负
切应变以角减小为正, 增大时为负
位移 (u, v, w) 正负号
弹性: 平衡微分方程
几何方程: 应力
物理方程: 位移
研究方法: 应力分析, 位移分析, 能量法

平面应力问题: ①只有平面应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 存在, ②只是平面应变问题: ①只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 存在, ②只是平面应力问题: ①在区域A内满足平衡微分方程 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + f_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$$

②在 S_σ 上满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) &= \bar{f}_x \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
③在 S_u 上满足位移边界条件 $(u, v) = \bar{u}, (v) = \bar{v}$
△求解平面应变问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
△求应力函数平面问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

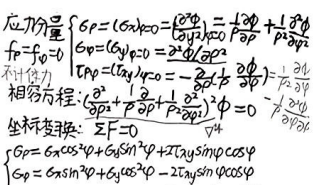
①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
几何方程 $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right.$
物理方程 $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1+\mu}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1+\mu}(\mu\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \right.$
应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
位移单值条件 $\left\{ \begin{aligned} (u)_s &= \bar{u} \\ (v)_s &= \bar{v} \end{aligned} \right.$

任意: $\sigma_n = l\sigma_x + m\sigma_y + 2l\tau_{xy}$
斜截面: $\tau_n = l\tau_{xy} - m\sigma_x + (l^2 - m^2)\tau_{xy}$
主应力: $\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
主方向: $\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$



体力: $f = \lim \frac{\Delta F}{\Delta V}$ 面力: $\bar{s} = \lim \frac{\Delta F}{\Delta S}$
应力: $p = \lim \frac{\Delta F}{\Delta A}$ 正应力 σ 切应力 τ
正面向上为正, 负面向下为正
切应力互等性: 作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的。
连续性: 使建立基本方程时可以用连续函数表示
完全弹性: 物理方程成为线性的, 物理指标
均匀性: 使物理的弹性常数不随位置而变
各向同性: 使物理的弹性常数不随方向而变
小变形假设: 使微分方程的线性微分方程
形变: 线应变者以伸长为正, 缩短为负
切应变以角减小为正, 增大时为负
位移 (u, v, w) 正负号
弹性: 平衡微分方程
几何方程: 应力
物理方程: 位移
研究方法: 应力分析, 位移分析, 能量法

平面应力问题: ①只有平面应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 存在, ②只是平面应变问题: ①只有 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 存在, ②只是平面应力问题: ①在区域A内满足平衡微分方程 $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = 0$
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + f_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$$

②在 S_σ 上满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) &= \bar{f}_x \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy} + \frac{1}{2}\tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y + \frac{1}{2}\sigma_y) &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
③在 S_u 上满足位移边界条件 $(u, v) = \bar{u}, (v) = \bar{v}$
△求解平面应变问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
△求应力函数平面问题: $E \rightarrow \frac{E}{1+\mu}; \mu \rightarrow \frac{\mu}{1+\mu}$
①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + f_y &= 0 \end{aligned} \right.$
②在区域A内: 满足相容方程 $\nabla^4 \Phi = 0$
应力: $\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - f_x \times x \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - f_y \times y \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right.$
应变: $\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned} \right.$
③在面边界上: 满足应力边界条件 $\left\{ \begin{aligned} (l\sigma_x + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x \\ (m\sigma_y + l\tau_{xy})_s &= \bar{f}_y \end{aligned} \right.$
④对于多连体, 还须满足位移单值条件 $\nabla^4 \Phi = 0$
常体力条件下, Φ 为应力函数: $\nabla^4 \Phi = 0$
满足相容方程: $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + f_x = 0$
应力边界条件: $(l\sigma_x + m\tau_{xy})_s = \bar{f}_x(s)$
位移单值条件: $(m\sigma_y + l\tau_{xy})_s = \bar{f}_y(s)$

①在区域A内: 满足平衡微分方程 $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^$