№1

Типовой расчёт 2 Ленков Н. гр. 14

$(P \to (Q \wedge R)) \leftrightarrow ((P \to Q) \wedge (P \to R))$

Таблица истинности для выражения $P \to (Q \wedge R)$

P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \to (Q \wedge R)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

$f_1(P,Q,R) = (11110001)$

Таблица истинности для выражения $(P \to Q) \wedge (P \to R)$

P	Q	R	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$f_2(P,Q,R) = (11110001)$

$\Rightarrow f_1 \leftrightarrow f_2 = 1 = (11111111)$

$f_1 = f_2 = (1111{,}0001) \Rightarrow$ формула – тавтология

$\Downarrow$

Проверка на фиктивность:

$P(0): 1111$
$P(1): 1111$ $\Rightarrow$ P – фикт. переменная

Все перем. фиктивны

$Q(0): 1111$
$Q(1): 1111$ $\Rightarrow$ Q – фикт. переменная

$R(0): 1111$
$R(1): 1111$ $\Rightarrow$ R – фикт. переменная

№2

$f(A,B,C,D) = (A+\bar{D})(B+C+D)(D+A\bar{C}) + \bar{A}CD =$

A	B	C	D	$\bar{D}$	$\overset{e}{A+\bar{D}}$	$\overset{d}{B+C+D}$	$e \cdot d$	$\bar{C}$	$A\bar{C}$	$\overset{m}{D+A\bar{C}}$	$e \cdot d \cdot m$	$\bar{A}$	$\bar{A}CD$	$f(A,B,C,D)$	№
0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	2
0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	3
0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	4
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	5
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	6
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	7
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	8
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	9
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	10
1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	11
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	12
1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	13
1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	14
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	15

не перем. → существ.

СДНФ: $f(A,B,C,D) = \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD +$
$+ AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD$

СКНФ: $F(A,B,C,D) = (A+B+C+D)\cdot(A+B+C+\bar{D})\cdot(A+B+\bar{C}+D)\cdot$
$\cdot(A+\bar{B}+C+D)\cdot(A+\bar{B}+C+\bar{D})\cdot(A+\bar{B}+\bar{C}+D)\cdot(\bar{A}+B+C+D)\cdot$
$\cdot(\bar{A}+B+\bar{C}+D)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D)$

Добавим аргумент E:

СДНФ: $F(A,B,C,D,E) = \bar{A}\bar{B}CDE + \bar{A}\bar{B}CD\bar{E} + \bar{A}BCDE + \bar{A}BCD\bar{E} +$
$+ A\bar{B}\bar{C}DE + A\bar{B}\bar{C}D\bar{E} + A\bar{B}CDE + A\bar{B}CD\bar{E} + AB\bar{C}\bar{D}E + AB\bar{C}\bar{D}\bar{E} +$
$+ AB\bar{C}DE + AB\bar{C}D\bar{E} + ABCDE + ABCD\bar{E}$

СКНФ: $F(A,B,C,D,E) = (A+B+C+D+E)\cdot(A+B+C+D+\bar{E})\cdot$
$\cdot(A+B+C+\bar{D}+E)\cdot(A+B+C+\bar{D}+\bar{E})\cdot(A+B+\bar{C}+D+E)\cdot(A+B+\bar{C}+D+\bar{E})$
$\cdot(A+\bar{B}+C+D+E)\cdot(A+\bar{B}+C+D+\bar{E})\cdot(A+\bar{B}+C+\bar{D}+E)\cdot(A+\bar{B}+C+\bar{D}+\bar{E})$
$\cdot(A+\bar{B}+\bar{C}+D+E)\cdot(A+\bar{B}+\bar{C}+D+\bar{E})\cdot(\bar{A}+B+C+D+E)\cdot(\bar{A}+B+C+D+\bar{E})$
$\cdot(\bar{A}+B+\bar{C}+D+E)\cdot(\bar{A}+B+\bar{C}+D+\bar{E})\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D+E)\cdot(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+D+\bar{E})$

(№3)

$f(A,B,C,D) = (0,1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$

Построим полином Жегалкина методом треугольника:

ABCD 0000	1000	0100	1100	0010	1010	0110	1110	0001	1001	0101	1101	0011	1011	0111	1111
→ 1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0		
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1					
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
1	0	0	0	0	0	0	0	1							
1	0	0	0	0	0	0	1								
1	0	0	0	0	0	1									
1	0	0	0	0	1										
1	0	0	0	1											
1	0	0	1												
1	0	1													
1	1														
0															

$F(A,B,C,D) = 1 \oplus CD \oplus BCD \oplus ACD$

Построим полином Жегалкина по таблице истинности:

↓

A	B	C	D	f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

$f(0,0,0,0) = 1 \Rightarrow a_{0000} = \boxed{1}$

$f(0,1,0,0) = a_{0000} \oplus a_{0100} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{0100} = 0$

$f(1,0,0,0) = a_{0000} \oplus a_{1000} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{1000} = 0$

$f(0,0,1,0) = a_{0000} \oplus a_{0010} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{0010} = 0$

$f(0,0,0,1) = a_{0000} \oplus a_{0001}$
$\Rightarrow a_{0001} = 0$

$f(1,1,0,0) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus$
$\oplus \overset{1}{a_{1100}} = 0$

$f(1,0,1,0) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{1}{a_{1010}} =$
$= 0$

$f(1,0,0,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{1}{a_{1001}} =$
$= 0$

$f(0,1,1,0) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{1}{a_{0110}} = 0$

$f(0,1,0,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{1}{a_{0101}} = 0$

$f(0,0,1,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus a_{0011} = \boxed{1}$

$f(1,1,1,0) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{0}{a_{1100}} \oplus$
$\overset{0}{a_{1010}} \oplus \overset{0}{a_{0110}} \oplus \overset{1}{a_{1110}} = 0$

$f(1,1,0,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{0}{a_{1100}} \oplus$
$\overset{0}{a_{1001}} \oplus \overset{0}{a_{0101}} \oplus \overset{1}{a_{1101}} = 0$

$f(1,0,1,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{0}{a_{1010}} \oplus \overset{0}{a_{1001}}$
$\oplus \overset{1}{a_{0011}} \oplus \overset{1}{a_{1011}} = \boxed{1}$

$f(0,1,1,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{0}{a_{0110}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{0101}} \oplus \overset{1}{a_{0011}} \oplus \overset{1}{a_{0111}} = \boxed{1}$

$f(1,1,1,1) = \overset{1}{a_{0000}} \oplus \overset{0}{a_{1000}} \oplus \overset{0}{a_{0100}} \oplus \overset{0}{a_{0010}} \oplus \overset{0}{a_{0001}} \oplus \overset{0}{a_{1001}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{1100}} \oplus \overset{0}{a_{1010}} \oplus \overset{0}{a_{0110}} \oplus \overset{0}{a_{0101}} \oplus \overset{1}{a_{0011}} \oplus \overset{0}{a_{1110}} \oplus$
$\oplus \overset{0}{a_{1101}} \oplus \overset{1}{a_{1011}} \oplus \overset{1}{a_{0111}} \oplus \overset{0}{a_{1111}} = 0$

Полином: $1 \oplus CD \oplus ACD \oplus BCD$

(№4) (ψ_1) $\{[(BC \to \bar B D)(\bar C \to D)] \oplus B\} \to (A\bar B C \to BC)$

A	B	C	D	BC	$\bar B$	$\bar B D$	$BC\to\bar B D$ (m)	$\bar C$	$\bar C \to D$ (k)	$m\cdot k$	$(m\cdot k)\oplus B$ (w)	$A\bar B$	$A\bar B C$	$A\bar B C \to BC$ (y)	$w \to y$	
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	
0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	
0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	
0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	10
1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	11
1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	12
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	13
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	14
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	15

Воспользуемся картой Вейча

A, B, C, D

1	1	1	1
1	1	1	1
1	0	1	1
1	0	1	1

мин. ДНФ = $B + \bar A \bar B + \bar B \bar C$ (смотрим 1) (5 вхожд. перем.)

мин. КНФ = $A\bar B C$ (3 вхождения перем.) (смотрим 0)

(f_2) = (0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14)

Воспользуемся картой Вейча

A, B, C, D

12	14	6	4
13	15	7	5
9	11	3	1
8	10	2	0

⇒

A, B, C, D

1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1

мин. ДНФ = $A\bar D + A\bar B C + \bar A B D + \bar B \bar D + \bar A \bar C + B\bar C$ (14 вхожд. перем.)

мин. КНФ = $\overline{f_{\text{макстермов}}} = \overline{A\bar B\bar C D + ABCD + \bar A B C \bar D + \bar A \bar B C D}$.

де Морган + инволюция

$= (\bar A + B + C + \bar D)\cdot(\bar A + \bar B + \bar C + \bar D)\cdot(A + \bar B + \bar C + D)\cdot(A + B + \bar C + \bar D)$

(16 вхождений перем.)

№5

$F = \{ f_1(A,B) = A \vee B,\ f_2(A,B) = A \to B,\ f_3(A,B) = \neg(A \downarrow B) \}$

		f_1	f_2	$\overline{f_3}$	f_3
A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$A \downarrow B$	$\neg(A\downarrow B)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1

	P_0	P_1	L	S	M
① $A \vee B$ ② $\neg(A\downarrow B)$	+	+	−	−	+
③ $A \to B$	−	+	−	−	−
④ $A \leftrightarrow B$	−	+	+	−	−
⑤ 1	−	+	+	−	+
⑥ $A \wedge B$	+	+	−	−	+
⑦ A	+	+	+	+	+
⑧ $A \leftarrow B$	−	+	−	−	−

1) Рассмотрим $A \vee B$, $\neg(A \downarrow B)$:

$f_1(0,0) = f_3(0,0) = 0 \Rightarrow f_1, f_3 \in P_0$

$f_1(1,1) = f_3(1,1) = 1 \Rightarrow f_1, f_3 \in P_1$

$f_1 = A + B = B \oplus A \oplus A \cdot B = f_3$

Есть конъюнкция $\Rightarrow f_1, f_3 \notin L$

$\left.\begin{array}{l} f_1(0,1) = f_3(0,1) = 1 \\ f_1(1,0) = f_3(1,0) = 1 \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow f_1, f_3 \notin S$

$\left.\begin{array}{ll} (0,0) < (0,1) & f_1(0,0) < f_1(0,1) \\ (0,0) < (1,0) & f_1(0,0) < f_1(1,0) \\ (0,0) < (1,1) & f_1(0,0) < f_1(1,1) \\ (0,1) < (1,0) & f_1(0,1) = f_1(1,0) \\ (0,1) < (1,1) & f_1(0,1) = f_1(1,1) \\ (1,0) < (1,1) & f_1(1,0) = f_1(1,1) \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow f_1 \in M$ (аналогично f_3)

2) Рассмотрим $A \to B$:

$f_2(0,0) = 1 \Rightarrow f_2 \notin P_0$

$f_2(1,1) = 1 \Rightarrow f_2 \in P_1$

$f_2 = 1 \oplus A \oplus AB$ Есть конъюнкция $\Rightarrow f_2 \notin L$

$\left.\begin{array}{l} f_2(0,0) = 1 \\ f_2(1,1) = 1 \neq 0 \end{array}\right| \Rightarrow f_2 \notin S$

$\left.\begin{array}{l} (0,0) < (1,0) \\ f(0,0) > f(1,0) \end{array}\right| \Rightarrow f_2 \notin M$

3) Добавим функцию эквивал.

Рассмотрим $A \leftrightarrow B$:

$f_4(0,0) = 1 \Rightarrow f_4 \notin P_0$

$f_4(1,1) = 1 \Rightarrow f_4 \in P_1$

$f_4 = 1 \oplus A \oplus B$ Нет конъюнкции $\Rightarrow f_4 \in L$

	A	B	$A \leftrightarrow B$	1	$A \wedge B$	$A \leftarrow B$
0+1	0	0	1		0	1
0+1	0	1	0	1	0	0
	1	0	0		0	1
	1	1	1		1	1

$f_4(0,0)=1$
$f_4(1,1)=1\neq 0$ $\Big| \Rightarrow f_4 \notin S$

$(0,0)<(0,1)$
$f_4(0,0)>f_4(0,1)$ $\Big| \Rightarrow f_4 \notin M$

Рассмотрим функцию 1:

4) Так как функция 1 всегда возвр. 1, то:

$f_5 \notin P_0$ $f_5 \in P_1$ $f_5 \notin S$ $f_5 \in M$

$f_5 = 1$ (полином Жегалкина). Нет конъюнкций $\Rightarrow f_5 \in L$

5) Рассмотрим функцию $A \wedge B$:

$f_6(0,0)=0 \Rightarrow f_6 \in P_0$

$f_6(1,1)=1 \Rightarrow f_6 \in P_1$

$f_6 = AB$ Есть конъюнк. $\Rightarrow f_6 \notin L$

$f_6(0,1)=0$
$f_6(1,0)=0\neq 1$ $\Big| \Rightarrow f_6 \notin S$

$(0,0) \leq (0,1)$ $f_6(0,0)=f_6(0,1)$
$(0,0)<(1,0)$ $f_6(0,0)=f_6(1,0)$
$(0,0)<(1,1)$ $f_6(0,0)<f_6(1,1)$
$(0,1)<(1,0)$ $f_6(0,1)=f_6(1,0)$
$(0,1)<(1,1)$ $f_6(0,1)<f_6(1,1)$
$(1,0)<(1,1)$ $f_6(1,0)<f_6(1,1)$ $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow f_6 \in M$

6) Рассмотрим функцию A:

$f_7(0)=0$
$f_7(1)=1$ $\Big| \Rightarrow f_7 \in P_0$ $f_7 \in P_1$

$f_7 = A$ Нет конъюнкций $\Rightarrow f_7 \in L$

$f_7 \in M$

$f_7 \in S$ (смотреть табл. истинности)

7) Рассмотрим функцию $A \leftarrow B$:

$f_8(0,0)=1\neq 0 \Rightarrow f_8 \notin P_0$

$f_8(1,1)=1 \Rightarrow f_8 \in P_1$

$f_8 = 1 \oplus B \oplus AB$ Есть конъюнкция $\Rightarrow f_8 \notin L$

$f_8(0,0)=1$
$f_8(1,1)=1\neq 0$ $\Big| \Rightarrow f_8 \notin S$

$(0,0)<(0,1)$
$f_8(0,0)>f_8(0,1)$ $\Big| \Rightarrow f_8 \notin M$

Так как в классе P_1 не существует в множестве функций, не принадл. этому классу $\Rightarrow$ по Т. Поста F — функ. неполное множество

Ответ! $F=\{f_1(A,B)=A\vee B,\ f_2(A,B)=A\rightarrow B,\ f_3(A,B)=\overline{A\downarrow B},\ f_4(A,B)=A\leftrightarrow B,\ f_5(A,B)=1,\ f_6(A,B)=A\wedge B,\ f_7(A,B)=A,\ f_8(A,B)=A\leftarrow B\}$

№6

$F = \{ \cancel{+}, \oplus, \vee, \sim \}$

x	y	$f(x,y)$: $x \oplus y$	$g(x,y)$: $x \vee y$	$t(x,y)$: $x \sim y$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1

По теореме Поста

	P_0	P_1	L	S	M
$\oplus$	+	−	+	−	−
$\vee$	+	+	−	−	+
$\sim$	−	+	+	−	−

P_0: $f(0,0) = 0 \Rightarrow f \in P_0$
$g(0,0) = 0 \Rightarrow g \in P_0$
$t(0,0) = 1 \neq 0 \Rightarrow t \notin P_0$

P_1: $f(1,1) = 0 \neq 1 \Rightarrow f \notin P_1$
$g(1,1) = 1 \Rightarrow g \in P_1$
$t(1,1) = 1 \Rightarrow t \in P_1$

S: $f(0,0) = 0 \quad f(1,1) = 0 \neq 1 \Rightarrow f \notin S$
$g(0,1) = 1 \quad g(1,0) = 1 \neq 0 \Rightarrow g \notin S$
$t(0,0) = 1 \quad t(1,1) = 1 \neq 0 \Rightarrow t \notin S$

M: $\left.\begin{array}{l} (0,1) < (1,1) \\ f(0,1) > f(1,1) \end{array}\right| \Rightarrow f \notin M$

$\left.\begin{array}{ll} (0,0) < (0,1) & g(0,0) < g(0,1) \\ (0,0) < (1,0) & g(0,0) < g(1,0) \\ (0,0) < (1,1) & g(0,0) < g(1,1) \\ (0,1) < (1,0) & g(0,1) = g(1,0) \\ (0,1) < (1,1) & g(0,1) = g(1,1) \\ (1,0) < (1,1) & g(1,0) = g(1,1) \end{array}\right| \Rightarrow g \in M$

$\left.\begin{array}{l} (0,0) < (0,1) \\ t(0,0) > t(0,1) \end{array}\right| \Rightarrow t \notin M$

L: В полиноме Жегалкина для f нет ни одной конъюнкции: $x \oplus y \Rightarrow f \in L$

В полиноме Жегалкина для g есть конъюнкция: $\cancel{xy}$ $y \oplus x \oplus xy \Rightarrow g \notin L$

В полиноме Жегалкина для t нет конъюнкций $1 \oplus y \oplus x \Rightarrow t \in L$

По т. Поста:
Из каждого класса Поста существует в множестве функция, не принадл. этому классу $\Rightarrow$ F - функ. полное

№7

$f_1(A,B) = \bar{A}B + A\bar{B} = A \oplus B$

$f_2(A,D) = \overline{\bar{A} \to D} = A + D$

$f_3(A,C) = \overline{\bar{A} \to C} = A + C$

Проверим набор функций на полноту:

f_1: $f_1(0,0) = 1\cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow f_1 \in P_0$

$f_1(1,1) = 0\cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow f_1 \notin P_1$

в $f_1(A,B) = A \oplus B$ нет конъюнкций $\Rightarrow f_1 \in L$

$(1,0) < (1,1)$

$f_1(1,0) > f_1(1,1)$ $\Rightarrow f_1 \notin M$

$f_1(0,0) = f_1(1,1) = 0 \Rightarrow f_1 \notin S$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

f_2 + f_3

$f_2(0,0) = f_3(0,0) = 0 \Rightarrow f_2, f_3 \in P_0$

$f_2(1,1) = f_3(1,1) = 1 \Rightarrow f_2, f_3 \in P_1$

$f_2(A,D) = A \oplus D \oplus AD$

Есть конъюнкции $\Rightarrow f_2 \notin L$

A	C/D	A+D / A+C
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$f_3(A,C) = A \oplus C \oplus AC$ Есть конъюнкция

$\Rightarrow f_3 \notin L$

$$\left.\begin{array}{ll}
(0,0) < (0,1), & f_2(0,0) < f_2(0,1) \\
(0,0) < (1,0), & f_2(0,0) < f_2(1,0) \\
(0,0) < (1,1), & f_2(0,0) < f_2(1,1) \\
(0,1) < (1,0), & f_2(0,1) = f_2(1,0) \\
(0,1) < (1,1), & f_2(0,1) = f_2(1,1) \\
(1,0) < (1,1), & f_2(1,0) = f_2(1,1)
\end{array}\right| \Rightarrow f_2 \in M$$

Аналогично доказываете $f_3 \in M$

$$\left.\begin{array}{l}
f_2(0,1) = 1 \\
f_2(1,0) = 1 \neq 0
\end{array}\right| \Rightarrow f_2 \notin S$$

$$\left.\begin{array}{l}
f_3(0,1) = 1 \\
f_3(1,0) = 1 \neq 0
\end{array}\right| \Rightarrow f_3 \notin S$$

	P_0	P_1	S	L	M
f_1	+	−	−	+	−
f_2	+	+	−	−	+
f_3	+	+	−	−	+

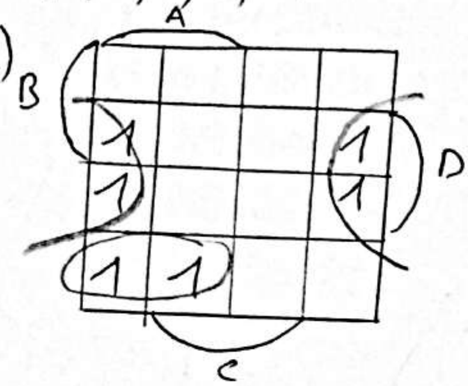
По критерию Поста множество функционально неполное, так как в классе P_0 НЕ существует в множестве функция, не принадл. этому классу.

Так как набор наз-ся функционально полным, если с его помощью можно выразить любую булеву функцию, используя операцию суперпозиции функций, и так как в нашем случае множество - неполное => суперпозицию получить нельзя.

№8

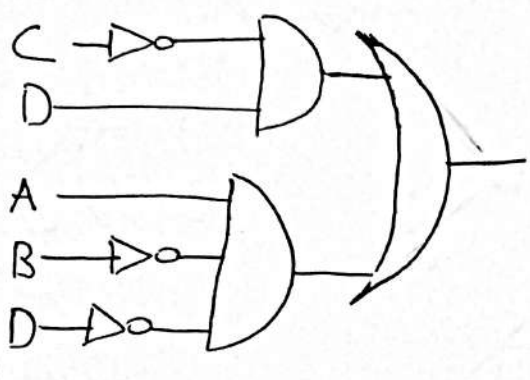
$f(A,B,C,D) = \bar{C}D + A\bar{B}\bar{D}$

а)



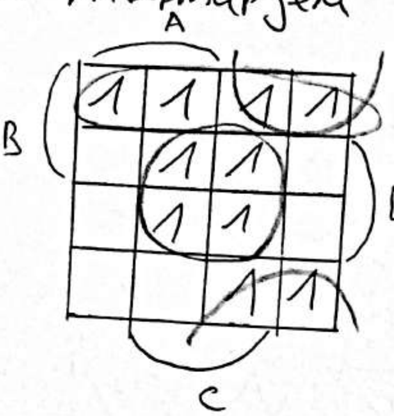
мин. $f_{ДНФ} = \bar{C}D + A\bar{B}\bar{D}$

Схема:



Всего: 6 функция. элементов

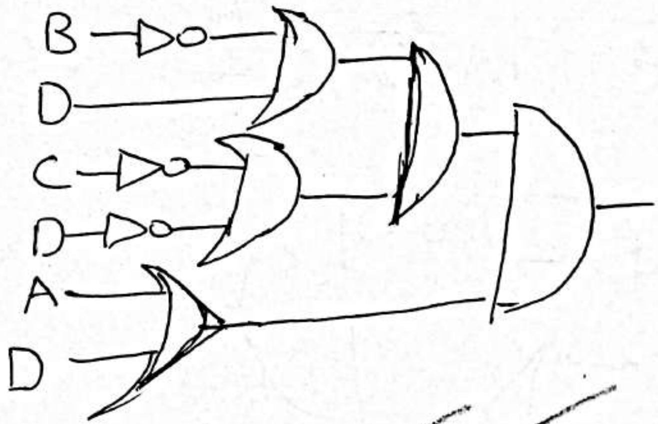
б) Инвертируем карту Вейча из а):



мин $f_{КНФ} = \bar{f} = \overline{B\bar{D} + CD + \bar{A}\bar{D}} \underset{+\ 3.\ инволюц}{\overset{де\ Морган}{=}}$

$= (\bar{B} + D)\cdot(\bar{C} + \bar{D})\cdot(A + D)$

Схема:



Всего: 8 фун. элементов

в) $f(A,B,C,D) = \bar{C}D + A\bar{B}\bar{D} = (C\downarrow C)\cdot D + A\cdot(B\downarrow B)\cdot D =$

$= ((C\downarrow C)\downarrow(C\downarrow C))\downarrow(D\downarrow D) + [((B\downarrow B)\downarrow(B\downarrow B))\downarrow(A\downarrow A)]\cdot D =$

$= C\downarrow(D\downarrow D) + (B\downarrow(A\downarrow A))\cdot D = C\downarrow(D\downarrow D) +$

$+ (B\downarrow(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow(A\downarrow A))\downarrow(D\downarrow D) =$

$= [C\downarrow(D\downarrow D)\downarrow\{(B\downarrow(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow(A\downarrow A))\downarrow(D\downarrow D)\}] \downarrow$

$[C\downarrow(D\downarrow D)\downarrow\{(B\downarrow(A\downarrow A)\downarrow(B\downarrow(A\downarrow A))\downarrow(D\downarrow D)\}]$

Схема:

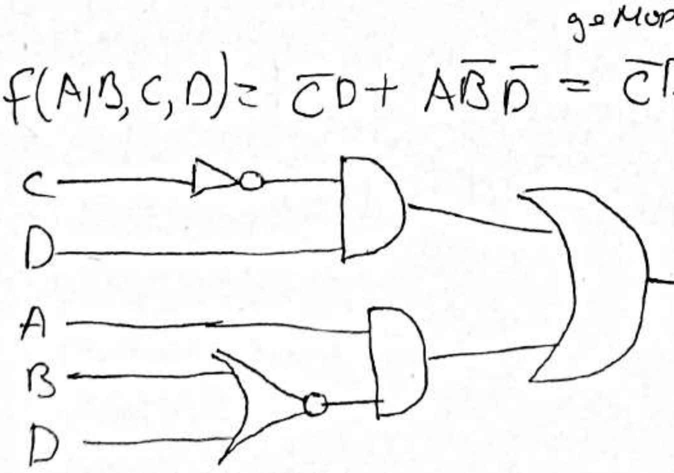
Всего: 21 операций

г) $\overline{f_{\text{мин. ДНФ}}} = \overline{\overline{C}D + A\overline{B}\overline{D}} \xrightarrow[]{\text{де Морган + 3. инволюции}} (C+\overline{D})\cdot(\overline{A}+B+D)$

Всего 5 фун. элементов

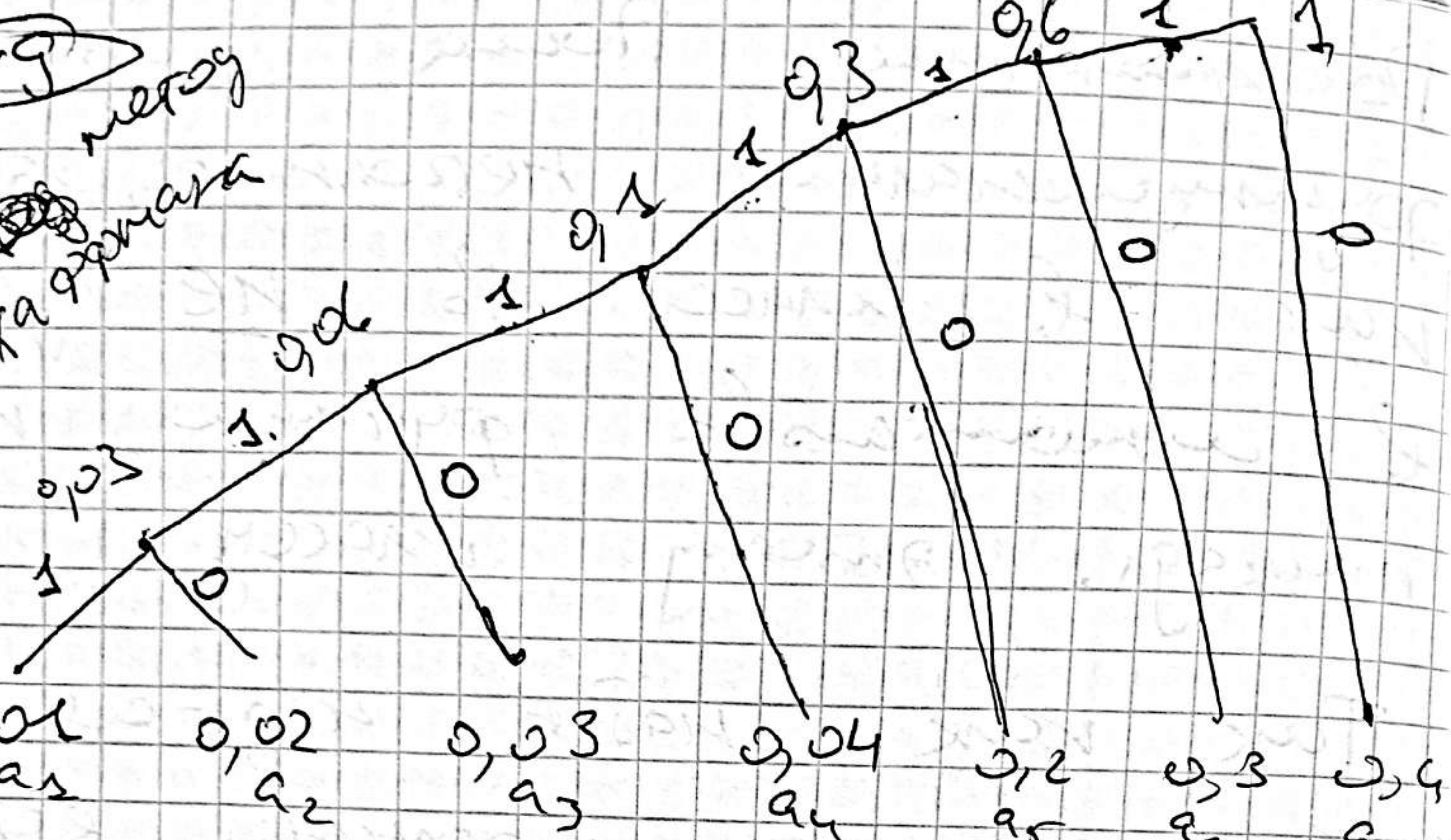
Ответ: оптимизирование мин. ДНФ и с исп. фун. элементов для стрелки Пирса два. самой оптимальной функцией.

б) $f(A,B,C,D) = \overline{C}D + A\overline{B}\overline{D} \overset{\text{де Морган}}{=} \overline{C}D + A(\overline{B+D}) = \overline{C}D + A(B\downarrow D)$



Всего 5 фун элементов

№9 ~~метод~~ метод Хаффмана



$a_1 = [1111111]$ 0,01

$a_2 = [111110]$ 0,02

$a_3 = [11110]$ 0,03

$a_4 = [1110]$ 0,04

$a_5 = [110]$ 0,2

$a_6 = [10]$ 0,3

$a_7 = [0]$ 0,4

$$l_{ср} = \frac{6+6+5+4+3+2+1}{7} = \frac{27}{7} \approx 3{,}857$$

Метод Шенона-Фано

Буква	P	1	2	3	4	5	6	7	Код комб-и
a_7	0,4	1							1
a_6	0,3	0	1						01
a_5	0,2	0	0	1					001
a_4	0,04	0	0	0	1				0001
a_3	0,03	0	0	0	0	1			00001
a_2	0,02	0	0	0	0	0	1		000001
a_1	0,01	0	0	0	0	0	0		000000

$$l_{срф} = \frac{1+2+3+4+5+6+6}{7} =$$

$$= \frac{27}{7} \approx 3,857$$

Средняя длина кодового слова, получ. с помощью метода Хаффмана, равна средней длине код. слова, получ. с помощью метода Шеннона-Фано

Равномерный код: 7 букв $\approx 8 = 2^3 \Rightarrow$ длина слова $= 3$

Ответ: 3.