Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix dessen Elemente unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind und ihr Erwartungswert 0 mit Varianz σ^2 ist. Weiter sind $x_k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk})$, $\boldsymbol{X} = (x_1, \ldots, x_m)$ und $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k$. Dann ist die empirische Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})^H$$

0.1 Marčenko-Pastur Momente

Die Dichtefunktion der Marčenko-Pastur-Verteilung $F_y(x)$ ist duch

$$p_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi x y \sigma^2}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,, & \text{wenn } a \le x \le b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{0.1}$$

gegeben. Dabei sind $a = \sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2$ und $b = \sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2$ jeweils mit $y = \frac{n}{m}$ die Träger der Dichtefunktion. Wenn $\sigma^2 = 1$ ist, dann sprechen wir von der standard M-P-Verteilung. Die k-ten Momente der M-P-Verteilung sind durch die Erwartungswerte der k-ten Potenz $\beta_k := \mathbb{E}(X^k)$ definiert. Da die Dichtefunktion innerhalb ihrer Träger stetig ist, können wir die Momente auch durch

$$\beta_k = \beta_k\left(y, \sigma^2\right) = \int_a^b x^k p_y(x)\,\mathrm{d}x \tag{0.2}$$

beschreiben. An der Definition über den Erwartungswert kann man jetzt sehen, dass wir für das explizite Ausrechnen der Momente durch

$$\beta_k\left(y,\sigma^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sigma^2 X\right)^k\right) = \sigma^{2k}\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sigma^{2k}\beta_k\left(y,1\right)$$

immer über die standard M-P-Verteilung gehen können.

Lemma 0.1. Die explizite Darstellung der Momente ist

$$\beta_k = \sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r+1}\binom{k}{r}\binom{k-1}{r}y^r\,. \tag{0.3}$$

Beweis. Wir haben nach Definition 0.2

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y}\int_a^b x^{k-1}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Substituieren wir hier mit $x = 1 + y + z$ und setzen a und b ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (1+y+z)^{k-1} \sqrt{\left((1+\sqrt{y})^2 - 1 - y - z\right)\left(1+y+z-(1-\sqrt{y})^2\right)} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (1+y+z)^{k-1} \sqrt{4y - z^2} \,\mathrm{d}z \,.\end{aligned}$$

Hier können wir durch Einsetzen des Binomischen Lehrsatzes das Integral zu

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} z^l \sqrt{4y - z^2} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} z^l \sqrt{4y - z^2} \,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

umformen. Um das integral weiter zu vereinfachen, substituieren wir mit $z = 2\sqrt{y}u$ und erhalten

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-1}^{1} (2\sqrt{y}u)^l \sqrt{4y - 4yu^2} \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} (2\sqrt{y})^l 4y \int_{-1}^{1} u^l \sqrt{1 - u^2} \,\mathrm{d}u \,.\end{aligned}$$

Durch die symmetrisch um den Nullpunkt liegenden Integralgrenzen und einem ungeraden Integranten für alle ungeraden l ist jeder zweite Summand gleich 0. Wir können also jeden zweiten Summanden überspringen. Dafür lassen wir die Summe bis zur Hälfte von $k-1$ laufen und summieren über $2l$ statt l. Für den Fall, dass $k-1$ ungerade ist, runden wir ab, weil es dann nur $\frac{k-2}{2}$ Summanden gibt die ungleich 0 sind. Wir haben also

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (2\sqrt{y})^{2l} 4y \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1 - u^2} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1 - u^2} \,\mathrm{d}z \,.\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt mit $u = \sqrt{w}$ subtituieren,

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^{1} w^l \sqrt{1-w} \frac{1}{2\sqrt{w}} \, \mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} \, \mathrm{d}w
\end{aligned}$$

erhalten wir durch Vereinfachen dank eines geraden Integranten

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{0}^{1} w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} \, \mathrm{d}w$$

ein Integral, dass wir mittels Eulerschen Betafunktion Quelle! lösen können. Die Eulersche Betafunktion ist durch

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

definiert. Wir können also mit $p = l + \frac{1}{2}$ und $q = 1 + \frac{1}{2}$ das Integral durch die Gammafunktionen

$$\begin{aligned}
\int_0^1 w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} \, \mathrm{d}w &= \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(l+2)} \\
&= \frac{\frac{(2l)!\sqrt{\pi}}{l!4^l} \frac{2!\sqrt{\pi}}{4^l}}{(l+1)!} \\
&= \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l} \frac{1}{2}\pi}{(l+1)!} \qquad (0.4)
\end{aligned}$$

beschreiben. Nach Einsetzen von 0.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l} \frac{1}{2}\pi}{(l+1)!} \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2\pi y} \frac{(k-1)!}{(2l)!(k-1-2l)!} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l} \frac{1}{2}\pi}{(l+1)!} \, .
\end{aligned}$$

Hier lassen sich diverse variablen kürzen, sodass wir

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(k-1-2l)!} y^l (1+y)^{k-1-2l}$$

erhalten. Wenn wir den Binomischen Lehrsatz mit

$$\begin{aligned}(1+y)^{k-1-2l} &= \sum_{s=0}^{k-1-2l} \binom{k-1-2l}{s} y^s \\ &= \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1-2l)!}{s!(k-1-2l-s)!} y^s\end{aligned}$$

einsetzen, haben wir

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(k-1-2l)!} y^l \frac{(k-1-2l)!}{s!(k-1-2l-s)!} y^s \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!s!(k-1-2l-s)!} y^{l+s} .\end{aligned}$$

Jetzt wollen wir den Term wieder vereinfachen. Dafür setzen wir $r = s + l$

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(r-l)!(k-1-2l-s)!} y^r$$

und erweitern mit zwei Einsen

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(r-l)!(k-1-2l-s)!} \frac{r!}{r!} \frac{(k-r)!}{(k-r)!} y^r \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{r!(k-r)!} \frac{r!}{l!(l-r)!} \frac{(k-r)!}{(k-r-l-1)!(l+1)!} y^r \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{1}{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{r!}{l!(l-r)!} \frac{(k-r)!}{(l+1)!(k-r-(l+1))!} y^r \\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} y^r .\end{aligned}$$

Für den nächsten Schritt müssen wir die Laufvariablen voneinander unabhängig machen. Momentan haben wir erst das l und ermitteln damit, inwieweit das r eingeschränkt ist. Für ein festes aber beliebiges k liegen unsere Laufvariablen in

$$A = \left\{ (l, r) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor, \, l \leq r \leq k - 1 - l \right\} .$$

Daraus wissen wir, dass

$$0 \leq l, \; r \leq k - 1 - l$$

gilt, woraus wir

$$l \leq k - 1 - r$$

folgern können. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} &0 \leq l \leq r \leq k - 1 - l \leq k - 1 \\ \Longrightarrow \; &0 \leq r \leq k - 1, \; 0 \leq l \leq \min(r, k - 1 - r) \end{aligned}$$

damit können wir also die Summen äquivalent über

$$A = \left\{ (l, r) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, 0 \leq r \leq k - 1, \; 0 \leq l \leq \min(r, k - 1 - r) \right\} \tag{0.5}$$

laufen lassen.

Wir haben also mit 0.5

$$\begin{aligned} \beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{\min(r,k-1-r)} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{\min(r,k-1-r)} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} . \end{aligned}$$

Das Minimum können wir noch weiter vereinfachen, da die Summanden gleich 0 sind, sobald $l > r$ oder $l > k - 1 - r$ ist. Wenn wir die Summe also bis r laufen lassen, ändern wir nichts am Ergebnis.

$$\beta_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} .$$

An diesem Punkt müssen wir nur noch die innere Summe vereinfachen. Dafür machen wir einen Indexshift und formen die Binomialkoeffizienten etwas um. Wir haben also

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{l-1} \binom{k-r}{l} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{r-(l-1)} \binom{k-r}{l} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{(r+1)-l} \binom{k-r}{l} .
\end{aligned}$$

summen untergrenze noch auf null setzen argumentieren In dieser Form lässt sich die Vandermonde Identität Quelle!

$$\sum_{ö=0}^{ü} \binom{n}{ö} \binom{m}{ü-ö} = \binom{n+m}{ü}$$

anwenden. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \binom{k}{r+1} y^r \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \frac{r+1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k}{r+1} y^r \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r+1} \binom{k}{r} \binom{k-1}{r} y^r .
\end{aligned}$$

$\square$