Universität
Bremen

An example document

Eingereicht von

Kennart Loliwer

`koliwer1@uni-bremen.de`

Gutachter:innen

Prof. Dr. Anke Pohl
Dr. Maxim Kirsebom

Fachbereich 3
Universität Bremen
WiSe 2025/26
14. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Dynamic Mode Decomposition, kurz DMD, ist ein datengetriebener Algorithmus, der ursprünglich im Feld der Strömungsdynamik entwickelt wurde. Grundsätzlich dient er zur Analyse dynamischer Systeme mittels Sigulärwertzerlegung großer Datenmatrizen. DMD kann anhand von Messdaten mehrerer Zeitpunkte die Dynamik eines Systems approximieren. Die Genauigkeit hängt unter anderem davon ab, wie viele Informationen in Form von Messdaten man über das System hat und wie groß die Messfehler also das Rauschen der Daten ist. Dabei ist DMD gut im Erkennen von Mustern, wie im Falle der Strömungsdynamik z.B. Verwirbelungen. Ein Problem das beim klassischen DMD auftaucht, ist das die Zeitabstände zwischen den Messdaten einheitlich sein muss, was spätestens, wenn man DMD außerhalb von Simulationen anwenden will, zu Problemen führen wird. Im Laufe der letzten Jahre wurden eine Vielzahl von Varianten der DMD Algorithmen entwickelt, um zum Beispiel unterschiedliche Schwächen des Algorithmus auszugleichen. Wir betrachten hier zur Vereinfachung den exact DMD Algorithmus. Diese Variante hat den Vorteil gegenüber des ursprünglichen DMD, dass die Messzeitpunkte keine einheitlichen Zeitabstände benötigen. Für jede Messung werden alle Daten in eine Spalte x_i einer Datenmatrix X eingetragen. Zusätzlich legen wir eine zweite Datenmatrix X' so an, dass wir in X die Messungen $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ und in X' die Messungen $(x_2, \ldots, x_k)$ haben. Das Ziel von DMD ist es nun einen linearen Operator A zu finden, welcher das optimale Ergebnis von

$$A = \arg\min_A \left|\left|X' - AX\right|\right|_F ,$$

der das System $X' \approx AX$ so gut wie möglich beschreibt. Hier ist $||\cdot||_F$ die Frobeniusnorm, welche wir später noch genauer beschreiben werden. Diesen Operator bestimmt man mittels Singulärwertzerlegung unserer Datenmatrix X. Die Singulärwertzerlegung (SVD) beschreiben wir auch später nochmal genauer, liefern aber für einen kleinen Überblick eine vereinfachte Beschreibung. Bei der SVD finden wir für ein $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zwei orthogonale Matrizen U und V mit passenden Dimensionen und $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ mit

$r \leq \min(n, m)$ und $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ so, dass

$$X = U\Sigma V^\top \text{ mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

gilt. (Damit können wir die SVD mit u_i und v_i als linke und rechte Singulärvektoren auch durch $X = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top$ beschreiben.) hab ich erstmal eingeführt, um einfacher auf die Notation vom Paper zu verweisen (das ist ja aber noch wip)
Um für die folgenden Schritte der DMD den Rechenaufwand zu minimieren, lohnt es sich eine Dimensionsreduktion durchzuführen. Eine Möglichkeit ist als ökonomischer SVD (TSVD) bekannt. Dabei wird Σ auf eine $r \times r$ große Matrix reduziert und die Spalten von U und V abgeschnitten, sodass wir mit den reduzierten Matrizen U_r, Σ_r und V_r,

$$X_r = U_r \Sigma_r V_r^\top = U_r \hat{\Sigma} V_r^\top$$

erhalten. Mit der Frobeniusnorm

$$||X_r||_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$$

lässt sich dann zeigen, dass X_r nach dem Eckart-Young-Mirsky-Theorem die beste Rang r-Approximation bezüglich der Frobeniusnorm ist.
In der Realität tauchen beim Messen aber Fehler auf. Das heißt, unsere Singulärwerte sind zu einem Teil echt, aber auch zu einem Teil Messfehler. Wir definieren die Datenmatrix also durch

$$X := X^{\text{true}} + \gamma X^{\text{noise}}$$

einen echten Teil und einem durch γ skalierten Fehleranteil.
Grobe Richtung Im Paper [3] von Matan Gavish und David L. Donoho erhalten wir durch ..., dass quadratische $n \times n$ Matrizen ab einem Singulärwert von $\tau = \frac{4}{\sqrt{3}}\gamma\sqrt{n}$ abgeschnitten werden. ...
Gavish Donoho weiter ausführen
Überleitung zu MP Bei kleinen Matrizen ist das Rauschen kaum ein Problem aber für „große“ Matrizen kann der Noiseanteil der Singulärwerte sehr groß werden.

2. Definitionen

In diesem Kapitel wird eine Grundlage für einheitliche und verständliche Notation geschaffen. Zudem werden einige Sätze und Definitionen eingeführt, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwendet werden.

Die Elemente einer Matrix A werden mit a_{ij} bezeichnet. Dabei gibt i die Zeilen- und j die Spaltenposition des Elements an. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, dann hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Weiter bezeichnen wir $A^\top$ als Transponierte und A^H als Adjungierte von A. Matrizen sind orthogonal bezüglich des standard Skalarproduktes. Das komplex konjugierte von a bezeichnen wir als $\overline{a}$.

Definition 2.1 (Frobeniusnorm)**.** Sei $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ eine Matrix und x_{ij} mit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Die Frobeniusnorm ist definiert durch

$$||X||_F := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |x_{ij}|^2}\,.$$

Lemma 2.2. Sei $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ eine Matrix. Dann gilt

$$||X||_F = \sqrt{\operatorname{tr}\left(X^H X\right)}\,.$$

Beweis. Sei x_i ein Spaltenvektor von X. Dann ist

$$X^H X = \begin{pmatrix} - & x_1^H & - \\ & \vdots & \\ - & x_m^H & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^H x_{1j} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1}^{n} x_{mj}^H x_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{1j} x_{1j} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_{mj} x_{mj} \end{pmatrix}.$$

Mit $\overline{x}x = |x|^2$ erhalten wir

$$\operatorname{tr}\left(X^H X\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_{ij}} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij}|^2 = ||X||_F^2 . \tag{2.2}$$

□

Die Frobeniusnorm wird im weiteren Verlauf aufgrund ihrer Invarianz bezüglich unitärer Transformation verwendet, welche wir durch folgendes Lemma zeigen.

Lemma 2.3. Sei $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$ eine Matrix und $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitäre Matrizen. Dann gilt

1. $||X||_F = ||X^H||_F$,
2. $||UX||_F = ||X||_F$,
3. $||XV||_F = ||X||_F$.

Beweis.

1. Aus Gleichung (2.2) folgt

$$||X||_F^2 = \operatorname{tr}\left(X^H X\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \overline{x_{ij}} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \overline{x_{ij}} x_{ij} = \operatorname{tr}\left(X X^H\right) = ||X^H||_F^2 .$$

2. Es ist

$$||UX||_F^2 = \operatorname{tr}\left(X^H U^H U X\right) = \operatorname{tr}\left(X^H \mathbb{1} X\right) = \operatorname{tr}\left(X^H X\right) = ||X||_F^2 .$$

3. Mit 1. und 2. folgt

$$||XV||_F = ||V^H X^H||_F = ||X^H||_F = ||X||_F \,. \qquad \square$$

Satz 2.4 (Singulärwertzerlegung [5])**.** Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix und $r := \operatorname{rang} X$ mit $r \leq \min(n, m)$. Dann existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine Diagonalmatrix $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ so, dass

$$X = U\Sigma V^\top \text{ mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

gilt.

Der Beweis des Satzes 2.4 folgt etwas später, da dafür noch etwas Vorbereitung benötigt wird.

Bemerkung 2.5. Unter den in Satz 2.4 genannten Voraussetzungen, ist $\hat{\Sigma}$ durch X eindeutig bestimmt. Die beiden orthogonalen Matrizen U und V hingegen sind nicht eindeutig.

Lemma 2.6. Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und λ_i die Eigenwerte von $X^\top X$. Dann gilt für die Singulärwerte unter den Voraussetzungen aus Satz 2.4

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \,.$$

Beweis. Durch

$$\begin{aligned} X^\top X &= \left(U\Sigma V^\top\right)^\top \left(U\Sigma V^\top\right) \\ &= V\Sigma^\top U^\top U\Sigma V^\top \\ &= V\Sigma^\top \Sigma V^\top \end{aligned}$$

ist $X^\top X$ ähnlich zu $\Sigma^\top\Sigma$. Also haben $X^\top X$ und $\Sigma^\top\Sigma$ auch die gleichen Eigenwerte. $\square$

Definition 2.7. Die Diagonalelemente von $\hat{\Sigma}$ aus Satz 2.4, wobei $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von $X^\top X$ und werden als Singulärwerte bezeichnet.

Definition 2.8. Wir bezeichnen bei der Singulärwertzerlegung die Spaltenvektoren u_i mit $i = 1, \ldots, n$ von U als Links-Singulärvektoren und die Spaltenvektoren v_i mit $i = 1, \ldots, m$ von V als Rechts-Singulärvektoren. Lasse ich erstmal drinnen, für den Fall, dass ich diese Begriffe später noch verwenden werde

Bemerkung 2.9. Die aus der Singulärwertzerlegung in 2.4 entstehenden Singulärwerte sind invariant bezüglich Transposition vom X.

Beweis. Seien die Voraussetzungen aus Satz 2.4 gegeben, dann gilt

$$X^\top = \left(U\Sigma V^\top\right)^\top = V\Sigma^\top U^\top .$$

Da die Singulärwerte in Σ auf der Diagonalen liegen, erhalten wir

$$X^\top = V\Sigma U^\top .$$

□

Lemma 2.10 ([5, S. 191])**.** Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine orthogonale Matrix $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so, dass

$$U^\top XU = D$$

gilt.

Lemma 2.11 ([5, S. 227])**.** Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix mit $\operatorname{rang} X = r < \min(n, m)$. Dann existieren orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sowie eine reguläre obere Dreiecksmatrix $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ so, dass

$$U^\top XV = R \text{ mit } R = \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

gilt.

Beweis Satz 2.4. Nach Bemerkung 2.9 nehmen wir o.B.d.A an, dass $m \leq n$ gilt. Zunächst betrachten wir den Fall des vollen Ranges von X, also $\operatorname{rang} X = r = m$. Bei vollem Rang ist $X^\top X \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sowohl symmetrisch als auch positiv definit. Die Eigenwerte λ_i von $X^\top X$ sortieren wir nach ihrer Größe, also

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0 .$$

Mit Lemma 2.10 finden wir ein orthogonales $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$, sodass

$$V^\top X^\top XV = D = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in \mathbb{R}^{m\times m} .$$

Weiter definieren wir

$$\hat{\Sigma} \coloneqq \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$$

mit $\sigma_i \coloneqq \sqrt{\lambda_i} \in (0, \infty]$, für $i = 1, \ldots, m$, und setzen

$$\hat{U} \coloneqq XV\hat{\Sigma}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}\,.$$

Jetzt kann man durch Umformung von

$$\begin{aligned}
\hat{U}^\top \hat{U} &= \hat{\Sigma}^{-\top} V^\top X^\top XV\hat{\Sigma}^{-1} \\
&= \hat{\Sigma}^{-1} D\hat{\Sigma}^{-1} \\
&= \hat{\Sigma}^{-1}\hat{\Sigma}^{-1} D \\
&= D^{-1} D \\
&= \mathbb{1}
\end{aligned}$$

die Orthonormalität der Spalten von $\hat{U}$ sehen.
Da $\hat{U}$ in $\mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m < n$ liegt und aus orthonormalen Spaltenvektoren besteht, finden wir ein $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$, welches $\hat{U}$ so um $n - m$ orthonormale Spaltenvektoren ergänzt, dass

$$U = (\hat{U}\ Z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine orthogonale Matrix ist. Es gilt also

$$\begin{aligned}
Z^\top XV\hat{\Sigma}^{-1} &= Z^\top \hat{U} \\
&= 0 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}\,.
\end{aligned}$$

Da $\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^{-1} = \mathbb{1}$ ist, folgt auch direkt

$$Z^\top XV = 0\,.$$

Zusammengetragen haben wir dann

$$
\begin{aligned}
U^\top X V = \begin{pmatrix} \hat{U}^\top \\ Z^\top \end{pmatrix} X V &= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} V^\top X^T X V \\ Z^\top X V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} D \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

womit wir den Fall des vollen Ranges bewiesen hätten.
Seien λ_i wie oben definiert wieder die Eigenwerte von $X^\top X$ und sei $X_r \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix mit $\operatorname{rang} X_r = r < m$. Nach Lemma 2.11 gibt es zwei orthognonale Matrizen $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, sowie eine obere Dreiecksmatrix $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r\times r}$, sodass

$$
\tilde{U}^\top X_r \tilde{V} = R \text{ mit } R = \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}
$$

gilt. Nach obigem Fall mit vollem Rang, wissen wir, dass es orthogonale Matrizen $U_r \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$, sodass

$$
U_r^\top \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} V_r = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r} .
$$

Dabei ist $\hat{\Sigma}_r := \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$. Im Folgenden erweitern wir

$$
\begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times r} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \in \mathbb{R}^{n\times m}
$$

und finden eine orthogonale Fortsetzung für V_r zu

$$
\bar{V}_r = \begin{pmatrix} V_r & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m} .
$$

Wenn wir uns jetzt die orthogonalen Matrizen

$$
U := \tilde{U} U_r \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad \text{und} \quad V := \tilde{V} \bar{V}_r \in \mathbb{R}^{n\times m}
$$

definieren, erhalten wir durch

$$\begin{aligned} U^\top X_r V &= U_r^\top \tilde{U} X_r \tilde{V} \bar{V}_r \\ &= U_r^\top \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V}_r \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \Sigma \end{aligned}$$

eine erfolgreiche Zerlegung von X_r durch orthogonale Matrizen. □

Satz 2.12 (Moore-Penrose-Inverse [5])**.** Sei $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Matrix und $U, \hat{\Sigma}$ und V die Matrizen aus der Singulärwertzerlegung in Satz 2.4. Dann existiert genau eine Moore-Penrose-Inverse der Form

$$X^\dagger = V \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}\,.$$

Definition 2.13 (arg min)**.** Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist die Menge arg min definiert durch

$$\operatorname*{arg\,min}_{x\in X} f(x) := \{x \in X \mid f(x) \text{ ist minimal}\}\,.$$

3. DMD

3.1. Dynamic Mode Decomposition (DMD) [1]

Sei nun $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ der Zustand des Systems zu m diskreten Zeitpunkten $t_k = k\Delta t$ mit $k \in \mathbb{N}$ also

$$X = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t_1) & x(t_2) & \dots & x(t_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

und $X' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ der Zustand mit jedem Punkt einen Zeitschritt weiter mit $t'_k = t_k + \Delta t$

$$X' = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t'_1) & x(t'_2) & \dots & x(t'_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

dann versuchen wir die Matrix A zu finden, der dieses System beschreiben kann und wir mit möglichst geringem Fehler

$$X' \approx AX$$

bestimmen können. Ein ideales A finden wir durch

$$A = \arg\min_A ||X' - AX||_F = X'X^\dagger$$

mit $X^\dagger$ als Pseudoinversen von X. Dabei sind die hier betrachteten Pseudoinversen alle Moore-Penrose-Inverse. Um die zu bestimmen, machen wir eine Singulärwertzwerlegung von X. Damit erhalten wir wie in 2.4 und 2.12

$$X = U\Sigma V^\top = U \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top$$

und

$$X^\dagger = V \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\top$$

so, dass $XX^\dagger = \mathbb{1}$ ergibt. Da wir aber häufig mit sehr großen Matrizen arbeiten, liegt es nahe zu versuchen die Dimensionen weitgehend zu reduzieren. Motivation für Paper. Haben wir ein passendes $r \leq m$ zum Reduzieren gefunden, erhalten wir

$$X \approx U_r \Sigma_r V_r^\top$$

und

$$X^\dagger \approx V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top \,.$$

Dabei sind $U_r \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ und $V_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$.
A würde man also mit

$$A \approx X' X^\dagger \approx X' V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top \tag{3.1}$$

näher approximieren können. Da wir aber nicht an ganz A interessiert sind, sondern nur die ersten r Eigenwerte, Projizieren wir A auf die POD modes von U.

- DMD mode ist eigenvektor von A
-

4. BuchChapter3

Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix dessen Elemente unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind und ihr Erwartungswert 0 mit Varianz σ^2 ist. Weiter sind $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})$, $\boldsymbol{X} = (x_1, \dots, x_m)$ und $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k$. Dann ist die empirische Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})^H$$

lalala A.2 und A.2

4.1. Marčenko-Pastur Momente

Die Dichtefunktion der Marčenko-Pastur-Verteilung $F_y(x)$ ist duch

$$p_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi x y \sigma^2}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,, & \text{wenn } a \leq x \leq b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{4.1}$$

gegeben. Dabei sind $a = \sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2$ und $b = \sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2$ jeweils mit $y = \frac{n}{m}$ die Träger der Dichtefunktion. Wenn $\sigma^2 = 1$ ist, dann sprechen wir von der standard M-P-Verteilung. Die k-ten Momente der M-P-Verteilung sind durch

$$\beta_k = \beta_k\left(y, \sigma^2\right) \coloneqq \int_a^b x^k p_y(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.2}$$

definiert. Wir können die Momente der M-P-Verteilung durch ihren Standardfall beschreiben.

Lemma 4.1. Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\beta_k\left(y, \sigma^2\right) = \sigma^{2k}\beta_k\left(y, 1\right)\,.$$

Beweis. Nach Definition 4.2 haben wir

$$\begin{aligned}
\beta_k\left(y,\sigma^2\right) &= \int_a^b x^k p_y(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2}^{\sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2} x^k \frac{1}{2\pi x y \sigma^2}\sqrt{\left(\sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - x\right)\left(x-\sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Substituieren wir mit $x = u\sigma^2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta_k\left(y,\sigma^2\right) &= \int_{\left(1-\sqrt{y}\right)^2}^{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} \left(u\sigma^2\right)^k \frac{1}{2\pi u y \sigma^2}\sqrt{\left(\sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - u\sigma^2\right)\left(u\sigma^2-\sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{\left(1-\sqrt{y}\right)^2}^{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} u^k\sigma^{2k} \frac{1}{2\pi u y \sigma^2}\sqrt{\sigma^4\left(\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - u\right)\left(u-\left(1-\sqrt{y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \sigma^{2k}\int_{\left(1-\sqrt{y}\right)^2}^{\left(1+\sqrt{y}\right)^2} u^k \frac{1}{2\pi u y}\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{y}\right)^2 - u\right)\left(u-\left(1-\sqrt{y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}u \\
&= \sigma^{2k}\beta_k\left(y,1\right)\,.
\end{aligned}$$

□

Damit können wir die Momente explizit bestimmen.

Lemma 4.2. Die explizite Darstellung der Momente ist

$$\beta_k = \sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r+1}\binom{k}{r}\binom{k-1}{r}y^r\,. \tag{4.3}$$

Beweis. Wir haben nach Definition 4.2

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y}\int_a^b x^{k-1}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Substituieren wir mit $x = 1 + y + z$ und setzen a und b ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}(1+y+z)^{k-1}\sqrt{\left(\left(1+\sqrt{y}\right)^2-1-y-z\right)\left(1+y+z-\left(1-\sqrt{y}\right)^2\right)}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2\pi y}\int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}}(1+y+z)^{k-1}\sqrt{4y-z^2}\,\mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen des Binomischen Lehrsatzes lässt sich das Integral zu

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} z^l \sqrt{4y - z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} z^l \sqrt{4y - z^2}\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

umformen. Um das Integral weiter zu vereinfachen, substituieren wir mit $z = 2\sqrt{y}u$ und erhalten

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-1}^{1} (2\sqrt{y}u)^l \sqrt{4y - 4yu^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} (2\sqrt{y})^l 4y \int_{-1}^{1} u^l \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u\,.\end{aligned}$$

Hier ist unser Integrand ungerade, sofern l ungerade ist. Da die Integralgrenzen symmetrisch um den Nullpunkt liegen ist das Integral für alle ungeraden l gleich 0. Dadurch ist jeder zweite Summand 0. Wir können also jeden zweiten Summanden überspringen. Dafür lassen wir die Summe bis zur Hälfte von $k-1$ laufen und summieren über $2l$ statt l. Für den Fall, dass $k-1$ ungerade ist, runden wir ab, weil es dann nur $\frac{k-2}{2}$ Summanden gibt die ungleich 0 sind. Wir haben also

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (2\sqrt{y})^{2l} 4y \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}z\,.\end{aligned}$$

Hier ist der Integrand eine gerade Funktion für alle $0 \leq l$. Da die Integralgrenzen symmetrisch um den Nullpunkt liegen können wir auch zwei mal über das halbe Intervall integrieren. Folglich gilt

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} 2 \int_{0}^{1} u^{2l} \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}z\,.$$

Wenn wir jetzt mit $u = \sqrt{w}$ subtituieren,

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\binom{k-1}{2l}(1+y)^{k-1-2l}(4y)^{l+1}\int_0^1 w^l\sqrt{1-w}\frac{1}{\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w\\ &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\binom{k-1}{2l}(1+y)^{k-1-2l}(4y)^{l+1}\int_0^1 w^{l-\frac{1}{2}}\sqrt{1-w}\,\mathrm{d}w\end{aligned}$$

erhalten wir ein Integral, dass wir mittels Eulerschen Betafunktion Quelle! lösen können. Die Eulersche Betafunktion ist durch

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

definiert. Wir können also mit $p = l + \frac{1}{2}$ und $q = 1 + \frac{1}{2}$ das Integral durch die Gammafunktionen

$$\begin{aligned}\int_0^1 w^{l-\frac{1}{2}}\sqrt{1-w}\,\mathrm{d}w &= \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(l+2)}\\ &= \frac{\frac{(2l)!\sqrt{\pi}}{l!4^l}\frac{2!\sqrt{\pi}}{4^l}}{(l+1)!}\\ &= \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l}\frac{1}{2}\pi}{(l+1)!} \qquad (4.4)\end{aligned}$$

beschreiben. Nach Einsetzen von 4.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta_k &= \frac{1}{2\pi y}\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\binom{k-1}{2l}(1+y)^{k-1-2l}(4y)^{l+1}\frac{\frac{(2l)!}{l!4^l}\frac{1}{2}\pi}{(l+1)!}\\ &= \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\frac{1}{2\pi y}\frac{(k-1)!}{(2l)!(k-1-2l)!}(1+y)^{k-1-2l}(4y)^{l+1}\frac{\frac{(2l)!}{l!4^l}\frac{1}{2}\pi}{(l+1)!}.\end{aligned}$$

Hier lassen sich diverse variablen kürzen, sodass wir

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor}\frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(k-1-2l)!}y^l(1+y)^{k-1-2l}$$

erhalten. Wenn wir den Binomischen Lehrsatz mit

$$
\begin{aligned}
(1+y)^{k-1-2l} &= \sum_{s=0}^{k-1-2l} \binom{k-1-2l}{s} y^s \\
&= \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1-2l)!}{s!(k-1-2l-s)!} y^s
\end{aligned}
$$

einsetzen, haben wir

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(k-1-2l)!} y^l \frac{(k-1-2l)!}{s!(k-1-2l-s)!} y^s \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=0}^{k-1-2l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!s!(k-1-2l-s)!} y^{l+s} \,.
\end{aligned}
$$

Jetzt wollen wir den Term wieder vereinfachen. Dafür setzen wir $r = s + l$

$$
\beta_k = \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(r-l)!(k-1-2l-s)!} y^r
$$

und erweitern mit zwei Einsen

$$
\begin{aligned}
\beta_k &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{l!(l+1)!(r-l)!(k-1-2l-s)!} \frac{r!}{r!} \frac{(k-r)!}{(k-r)!} y^r \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{(k-1)!}{r!(k-r)!} \frac{r!}{l!(l-r)!} \frac{(k-r)!}{(k-r-l-1)!(l+1)!} y^r \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{1}{k} \frac{k!}{r!(k-r)!} \frac{r!}{l!(l-r)!} \frac{(k-r)!}{(l+1)!(k-r-(l+1))!} y^r \\
&= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \sum_{s=l}^{k-1-l} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} y^r \,.
\end{aligned}
$$

Für den nächsten Schritt müssen wir die Laufvariablen voneinander unabhängig machen. Momentan haben wir erst das l und ermitteln damit, inwieweit das r eingeschränkt ist.

Für ein festes aber beliebiges k liegen unsere Laufvariablen in

$$A = \left\{ (l, r) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, 0 \leq l \leq \left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor, \, l \leq r \leq k-1-l \right\} .$$

Daraus wissen wir, dass

$$0 \leq l, \, r \leq k-1-l$$

gilt, woraus wir

$$l \leq k-1-r$$

folgern können. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & 0 \leq l \leq r \leq k-1-l \leq k-1 \\ \Longrightarrow \; & 0 \leq r \leq k-1, \, 0 \leq l \leq \min(r, k-1-r) \end{aligned}$$

damit können wir also die Summen äquivalent über

$$A = \left\{ (l, r) \in \mathbb{N}^2 \,\middle|\, 0 \leq r \leq k-1, \, 0 \leq l \leq \min(r, k-1-r) \right\} \tag{4.5}$$

laufen lassen.

Wir haben also mit 4.5

$$\begin{aligned} \beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{\min(r,k-1-r)} \frac{1}{k} \binom{k}{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{\min(r,k-1-r)} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} . \end{aligned}$$

Das Minimum können wir noch weiter vereinfachen, da die Summanden gleich 0 sind, sobald $l > r$ oder $l > k-1-r$ ist. Wenn wir die Summe also bis r laufen lassen, ändern wir nichts am Ergebnis.

$$\beta_k = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k} \binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{r} \binom{r}{l} \binom{k-r}{l+1} .$$

An diesem Punkt müssen wir nur noch die innere Summe vereinfachen. Dafür machen wir einen Indexshift und formen die Binomialkoeffizienten etwas um. Wir haben also

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{l-1}\binom{k-r}{l} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{r-(l-1)}\binom{k-r}{l} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\binom{k}{r} y^r \sum_{l=1}^{r+1} \binom{r}{(r+1)-l}\binom{k-r}{l}.\end{aligned}$$

Wir wollen hier die Vandermonde Identität Quelle!

$$\sum_{ö=0}^{ü} \binom{n}{ö}\binom{m}{ü-ö} = \binom{n+m}{ü}$$

nutzen. Dafür lassen wir die Summe von $l = 0$ beginnen, da der Summand das Ergebnis nicht ändert. Mit der Identität 5.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\binom{k}{r} y^r \sum_{l=0}^{r+1} \binom{r}{(r+1)-l}\binom{k-r}{l} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\binom{k}{r}\binom{k}{r+1} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{k}\frac{r+1}{r+1}\binom{k}{r}\binom{k}{r+1} y^r \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{1}{r+1}\binom{k}{r}\binom{k-1}{r} y^r .\end{aligned}$$

□

5. Marchenko-Pastur-Verteilung

Lemma 5.1. Sei $\beta \in (0,1]$ und $\beta_\pm = (1 \pm \sqrt{\beta})^2$. Dann gilt

$$\beta_+ - \beta_- = 4\sqrt{\beta} \tag{5.1}$$

$$\beta_+ + \beta_- = 2\beta + 2 \tag{5.2}$$

$$\beta_+\beta_- = (\beta - 1)^2 \tag{5.3}$$

$$m = \beta + 1 \tag{5.4}$$

$$r = 4\sqrt{\beta} \tag{5.5}$$

Beweis, dass die Lösung der Marchenko Pastur Verteilung mit $\beta_- \le \mu_\beta \le \beta_+$ und $\beta_\pm = (1 \pm \sqrt{\beta})^2$ also

$$\int_{\beta_-}^{\mu_\beta} \frac{\sqrt{(\beta_+ - t)(t - \beta_-)}}{2\pi\beta t} dt = \frac{1}{2} \tag{5.6}$$

ergeben kann.

Umgangssprache ist überall :(. Definitionen und Sätze aufschreiben. Und aus den align Umgebungen vielleicht noch die Label auf ein angenehmes Minimum reduzieren.

Beweis. Da das Integral mit $\mu_\beta = \beta_-$ gleich 0 ist und das Integral stetig innerhalb des Intervalls $[\beta_-, \beta_+]$ ist, müssen wir nur noch zeigen, dass das Integral bei $\mu_\beta = \beta_+$ gleich 1 ist, damit wir den Zwischenwertsatz nutzen können. Dafür bietet sich an, das Integral

$$\frac{1}{2\pi\beta} \int_{\beta_-}^{\beta_+} \frac{\sqrt{(\beta_+ - t)(t - \beta_-)}}{t} dt \tag{5.7}$$

mit $\mu_\beta = \beta_+$ auszurechnen. Wir beginnen damit eine Substitution zu finden. Dafür bauen wir uns also einen Weg δ, der von β_- zu β_+ läuft. Sei $m = \frac{\beta_+ + \beta_-}{2}$ der Mittelpunkt zwischen β_- und β_+ und $r = \frac{\beta_+ - \beta_-}{2}$ der Abstand von Mittelpunkt zu den Grenzen, dann brauchen wir nur noch eine Funktion, die von -1 bis 1 läuft, damit wir den Weg von einer Grenze zur anderen ablaufen. Dafür eignet sich der Cosinus von $-\pi$ bis 0. Da dieser aber eine gerade Funktion ist, können wir auch von 0 bis π gehen.

Damit erhalten wir

$$\delta\colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \tag{5.8}$$

$$\varphi \mapsto m + r\cos(\varphi)\,. \tag{5.9}$$

Da δ injektiv und stetig differenzierbar ist, substituieren wir t mit δ und erhalten

$$-\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{\sqrt{(\beta_+ - (m + r\cos(\varphi)))\,((m + r\cos(\varphi)) - \beta_-)}}{m + r\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)d\varphi$$

setzen wir $\beta_+ = m + r$ und $\beta_- = m - r$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{\sqrt{((m+r) - (m + r\cos(\varphi)))\,((m + r\cos(\varphi)) - (m-r))}}{m + r\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)d\varphi \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{\sqrt{(r - r\cos(\varphi))\,(r + r\cos(\varphi))}}{m + r\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)d\varphi \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{\sqrt{(r^2 - r^2\cos^2(\varphi))}}{m + r\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)d\varphi \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{(r - r\cos(\varphi))}{m + r\cos(\varphi)} r\sin(\varphi)d\varphi \\
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{r^2\sin^2(\varphi)}{m + r\cos(\varphi)} d\varphi
\end{aligned}$$

Nutzen wir hier Lemma 5.1, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi\beta}\int_{\pi}^{0}\frac{4\beta\sin^2(\varphi)}{\beta + 1 + 2\sqrt{\beta}\cos(\varphi)} d\varphi \\
&= \frac{1}{2\pi\beta}\int_{0}^{\pi}\frac{4\beta\sin^2(\varphi)}{\beta + 1 + 2\sqrt{\beta}\cos(\varphi)} d\varphi\,.
\end{aligned}$$

Ab hier müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen.

Fall 1: $\beta = 1$.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{4\sin^2(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)}d\varphi && (5.10)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{2^2-2^2\cos^2(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)}d\varphi && (5.11)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{(2-2\cos(\varphi))\,(2+2\cos(\varphi))}{2+2\cos(\varphi)}d\varphi && (5.12)\\
=&\frac{1}{\pi}\int_0^\pi 1-\cos(\varphi)\,d\varphi && (5.13)\\
=&1\,. && (5.14)
\end{aligned}$$

Fall 2: $\beta \in (0,1)$. hier noch eine Motivation finden den Residuensatz nutzen zu wollen
Bei genauerer Betrachtung des Integranten, nennen wir ihn f, kann man erkennen, dass man ihn in zwei Teile separieren kann, genau

$$f(\varphi) = a \cdot \sin^2(\varphi) \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{m + r\cos(\varphi)}\,. \tag{5.15}$$

Da der Cosinus 2π-periodisch ist und m und r konstant sind, ist auch a 2π-periodisch undspiegelt sich an $\varphi = \pi$. $\sin^2(\varphi)$ hingegen ist π-periodisch. Daraus erkennen wir in f eine 2π-Periodizität mit einer Symmetrie um π. Wir können das integral also von 0 bis 2π laufen lassen und dann halbieren. Wir haben also jetzt

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\varphi)}{\beta+1+2\sqrt{\beta}\cos(\varphi)}d\varphi \tag{5.16}$$

Sei nun $z = Re^{i\varphi}$, $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$ und setzen ein

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)^2}{\left(e^{i\varphi}+\sqrt{\beta}\right)\left(e^{-i\varphi}+\sqrt{\beta}\right)}d\varphi\,. \tag{5.17}$$

Um den Residuensatz anwenden zu wollen brauchen wir ein Wegintegral, das wir uns bauen können, indem wir eine Definition für komplexe Wegintegrale nutzen (Definition

3.7 Funktheo Skript). Durch Multiplizieren mit einer passenden 1 können wir also aus

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right)^2}{\left(e^{i\varphi}+\sqrt{\beta}\right)\left(e^{-i\varphi}+\sqrt{\beta}\right)}\cdot\frac{ie^{i\varphi}}{ie^{i\varphi}}d\varphi && (5.18)\\
&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{\left(z-z^{-1}\right)^2}{z\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z^{-1}+\sqrt{\beta}\right)}dz && (5.19)\\
&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^2-2+z^{-2}}{\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)}dz && (5.20)
\end{aligned}
$$

machen. Um die z^{-2} in Zähler zu eliminieren multiplizieren wir erneut mit einer passenden 1

$$
=-\frac{1}{4\pi i}\int_{|z|=1}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)}dz\,. \tag{5.21}
$$

Sichtbar werden hier die Singularitäten $z=0$, welche eine Polstelle 2. Ordnung ist und $z=-\sqrt{\beta}$, welche eine einfache Polstelle ist. Die Singularität $-\sqrt{\beta}^{-1}$ liegt außerhalb des Einheitskreises und damit ind $\left(\gamma,-\sqrt{\beta}^{-1}\right)=0$. Weiter nennen wir den Weg des Einheitskreises γ. Der Residuensatz gibt uns dann

$$
\begin{aligned}
&=-\frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)}dz && (5.22)\\
&=-\frac{1}{4\pi i}2\pi i\sum_{z\in\mathbb{C}}\operatorname{ind}(\gamma,z)\operatorname{res}(f,z) && (5.23)
\end{aligned}
$$

Für unsere beiden Singularitäten bekommen wir also

$$
=-\frac{1}{2}\left(\operatorname{res}(f,-\sqrt{\beta})+\operatorname{res}(f,0)\right)\,. \tag{5.24}
$$

Fangen wir mit $z=-\sqrt{\beta}$ an.

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{res}(f,-\sqrt{\beta})=\lim_{z\to-\sqrt{\beta}}\left(\left(z+\sqrt{\beta}\right)f(z)\right) && (5.25)\\
&=\lim_{z\to-\sqrt{\beta}}\frac{z^4-2z^2+1}{z^2\left(z\sqrt{\beta}+1\right)} && (5.26)\\
&=\frac{1-\beta}{\beta} && (5.27)
\end{aligned}
$$

Weiter mit $z = 0$.

$$\operatorname{res}(f,0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^4-2z^2+1}{\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)} \tag{5.28}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{\left(4z^3-4z\right)\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)-\left(z^4-2z^2+1\right)\left(2z\sqrt{\beta}+1+\beta\right)}{\left(\left(z+\sqrt{\beta}\right)\left(z\sqrt{\beta}+1\right)\right)^2} \tag{5.29}$$

$$= -\frac{1+\beta}{\beta}\,. \tag{5.30}$$

Zusammengefasst erhalten wir

$$= -\frac{1}{2}\left(\operatorname{res}(f,-\sqrt{\beta})+\operatorname{res}(f,0)\right) \tag{5.31}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1-\beta}{\beta}-\frac{1+\beta}{\beta}\right) \tag{5.32}$$

$$=1\,. \tag{5.33}$$

Juhu □

Satz 5.2 (Zwischenwertsatz [2]weiß noch nicht ob das rein sollte oder nicht weil zu trivial vielleicht)**.** Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $n \in \mathbb{R}$. Weiter sei $f(a) < n$ und $f(b) > n$. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$, sodass $f(c) = n$.

A. Stochastische Grundlagen

Definition A.1. [4, S. 10] Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge (von Ereignissen) und $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Mengensystem aus der Potenzmenge von Ω.
Mit den Eigenschaften

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $E \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus E \in \mathcal{A}$
3. und $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

nennt man $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ einen (Ereignis-)Messraum.

Definition A.2. [4, S. 13] Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Sei weiter $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ eine Funktion. Mit den Eigenschaften

1. $\mu(\Omega) = 1$
2. und $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, E_i paarweise disjunkte Elemente $\implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Verteilung) auf $\mathcal{A}$. Dann nennt man das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition A.3. [4, S. 21] Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume. Sei weiter $\mathcal{Z}\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:

$$E' \in \mathcal{A}' \implies \mathcal{Z}^{-1}E' \in \mathcal{A}\,.$$

Dann heißt $\mathcal{Z}$ Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\Omega', \mathcal{A}')$.
Man schreibt auch $\mathcal{Z}\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.

Definition A.4. [6, S. 4] unzufrieden weil nur $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{Z}\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable in $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ als borelsche σ-Algebra. Sei weiter das Bildmaß von μ bezüglich $\mathcal{Z}$ gleich

$$B \mapsto \mu_{\mathcal{Z}}(B) \coloneqq \mu(\mathcal{Z}^{-1}(B)) \quad \text{mit} \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,.$$

Dann ist der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariable $\mathcal{Z}$ genau

$$\mathbb{E}(\mathcal{Z}) = \int \mathcal{Z}\,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega} \mathcal{Z}(\omega)\mu(\,\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}} z\mu_{\mathcal{Z}}(dz)\,.$$

Definition A.5. Varianz

Definition A.6. Moment

Definition A.7. Kovarianz

Literatur

[1] S. L. Brunton und J. N. Kutz. *Data-driven science and engineering. Machine learning, dynamical systems, and control*. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. DOI: 10.1017/9781009089517.

[2] O. Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. 11th revised ed. Grundkurs Math. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013. DOI: 10.1007/978-3-658-00317-3.

[3] M. Gavish und D. L. Donoho. *The optimal hard threshold for singular values is* $4/\sqrt{3}$. IEEE Trans. Inf. Theory 60.8 (2014), S. 5040–5053. DOI: 10.1109/TIT.2014.2323359.

[4] H.-O. Georgii. *Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 5th, revised and expanded ed. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter, 2015. DOI: 10.1515/9783110359701.

[5] A. Meister und T. Sonar. *Numerik. Eine lebendige und gut verständliche Einführung mit vielen Beispielen*. Berlin: Springer Spektrum, 2019. DOI: 10.1007/978-3-662-58358-6.

[6] R. L. Schilling. *Wahrscheinlichkeit. Stochastik: von Abweichungen bis Zufall*. 2nd edition. De Gruyter Stud. Berlin: De Gruyter, 2025. DOI: 10.1515/9783111342252.

Universität
Bremen

Hinweise zu den offiziellen Erklärungen

1. Die folgende Seite mit den offiziellen Erklärungen

   A) Eigenständigkeitserklärung

   B) Erklärung zur Veröffentlichung von Bachelor- oder Masterarbeiten

   C) Einverständniserklärung über die Bereitstellung und Nutzung der Bachelorarbeit / Masterarbeit in elektronischer Form zur Überprüfung durch eine Plagiatssoftware

   ist entweder direkt in jedes Exemplar der Bachelor- oder Masterarbeit fest mit einzubinden oder unverändert im Wortlaut in jedes Exemplar der Bachelor- oder Masterarbeit zu übernehmen.

   Bitte achten Sie darauf, jede Erklärung in allen drei Exemplaren der Arbeit zu unterschreiben.

2. In der digitalen Fassung kann auf die Unterschrift verzichtet werden. Die Angaben und Entscheidungen müssen jedoch enthalten sein.

Zu B)
Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden.

Zu C)
Das Einverständnis der dauerhaften Speicherung des Textes ist freiwillig.
Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden.
Weitere Informationen zur Überprüfung von schriftlichen Arbeiten durch die Plagiatsoftware sind im Nutzungs- und Datenschutzkonzept enthalten. Diese finden Sie auf der Internetseite der Universität Bremen.

Notes on the official declarations

1. The following pages with the official declarations
   A) Declaration of Authorship
   B) Declaration on the Publication of Bachelor's or Master's Thesis
   C) Declaration of Consent for the Provision and Use of the Bachelor's Thesis / Master's Thesis in Electronic Form for Review by Plagiarism Software

   is to be either integrated directly into each copy of the bachelor's or master's thesis or adopted unchanged in the wording of each copy of the bachelor's or master's thesis.

   Please be sure to sign each declaration in all three copies of the thesis.

2. The signature can be omitted from the digital version. However, the information and decisions must be included.

Regarding B)
The consent can be revoked at any time with future effect by notifying the University of Bremen.

Regarding C)
Consent for the permanent storage of the text is voluntary.The consent can be revoked at any time with future effect by notifying the University of Bremen.

Further information on the checking of written work using plagiarism software can be found in the data protection and usage concept. This can be found on the University of Bremen website.

Universität Bremen

Eigenständigkeits- und Einverständniserklärung zur Überprüfung mit Plagiatssoftware sowie die Erklärung zur Veröffentlichung bei Bachelor- und Masterarbeiten

Declarations of Authorship and Consent for Checking with Plagiarism Software and the Declaration of Publication for Bachelor's and Master's Thesis

Studierenden-Angaben / Student Information:

Matrikelnr./ Student ID ____________________

Nachname / Surname ____________________

Vorname / First Name ____________________

Titel der Arbeit / Title of Thesis

A) Eigenständigkeitserklärung / Declaration of Authorship

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe. Alle Teile meiner Arbeit, die wortwörtlich oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht. Gleiches gilt auch für Zeichnungen, Skizzen, bildliche Darstellungen sowie für Quellen aus dem Internet, dazu zählen auch KI-basierte Anwendungen oder Werkzeuge.
Die Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch nicht als Prüfungsleistung eingereicht.

I hereby affirm that I have written the present work independently and have used no sources or aids other than those indicated. All parts of my work that have been taken from other works, either verbatim or in terms of meaning, have been marked as such, indicating the source. The same applies to drawings, sketches, pictorial representations and sources from the Internet, including AI-based applications or tools. The work has not yet been submitted in the same or a similar form as a final examination paper.

☐ Ich habe KI-basierte Anwendungen und/oder Werkzeuge genutzt und diese im Anhang "Nutzung KI basierte Anwendungen" dokumentiert.

I have used AI-based applications and/or tools and documented them in the appendix "Use of AI-based applications".

B) **Erklärung zur Veröffentlichung von Bachelor- oder Masterarbeiten**
Declaration regarding the publication of bachelor's or master's thesis

Die Abschlussarbeit wird zwei Jahre nach Studienabschluss dem Archiv der Universität Bremen zur dauerhaften Archivierung angeboten. Archiviert werden:

Two years after graduation, the thesis is offered to the archive of the University of Bremen for permanent archiving. The following are archived:

1) Masterarbeiten mit lokalem oder regionalem Bezug sowie pro Studienfach und Studienjahr 10 % aller Masterarbeiten
Master's theses with a local or regional focus, as well as per subject and academic year 10% of all Master's thesis

2) Bachelorarbeiten des jeweils ersten und letzten Bachelorabschlusses pro Studienfach und Jahr.
Bachelor's thesis for the first and last bachelor's degrees per subject and year.

☐ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.
I agree that my thesis may be viewed by third parties in the university archive for academic purposes.

☐ Ich bin damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit nach 30 Jahren (gem. §7 Abs. 2 BremArchivG) im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.
I agree that my thesis may be viewed by third parties for academic purposes in the university archive after 30 years (in accordance with §7 para. 2 BremArchivG).

☐ Ich bin **nicht** damit einverstanden, dass meine Abschlussarbeit im Universitätsarchiv für wissenschaftliche Zwecke von Dritten eingesehen werden darf.
I do not consent to my thesis being made available in the university archive for third parties to view for academic purposes.

C) Einverständniserklärung zur elektronischen Überprüfung der Arbeit auf Plagiate
Declaration of consent for electronic checking of the work for plagiarism

Eingereichte Arbeiten können nach § 18 des Allgemeinen Teil der Bachelor- bzw. der Masterprüfungsordnungen der Universität Bremen mit qualifizierter Software auf Plagiatsvorwürfe untersucht werden.
Zum Zweck der Überprüfung auf Plagiate erfolgt das Hochladen auf den Server der von der Universität Bremen aktuell genutzten Plagiatssoftware.

Submitted papers can be checked for plagiarism using qualified software in accordance with § 18 of the General Section of the Bachelor's or Master's Degree Examination Regulations of the University of Bremen. For the purpose of checking for plagiarism, the upload to the server is done using the plagiarism software currently used by the University of Bremen.

☐ Ich bin damit einverstanden, dass die von mir vorgelegte und verfasste Arbeit zum oben genannten Zweck dauerhaft auf dem externen Server der aktuell von der Universität Bremen genutzten Plagiatssoftware, in einer institutionseigenen Bibliothek (Zugriff nur durch die Universität Bremen), gespeichert wird.

I agree that the work I have submitted and written will be stored permanently on the external server of the plagiarism software currently used by the University of Bremen, in a library belonging to the institution (accessed only by the University of Bremen), for the above-mentioned purpose.

☐ Ich bin **nicht** damit einverstanden, dass die von mir vorgelegte und verfasste Arbeit zum o.g. Zweck dauerhaft auf dem externen Server der aktuell von der Universität Bremen genutzten Plagiatssoftware, in einer institutionseigenen Bibliothek (Zugriff nur durch die Universität Bremen), gespeichert wird.

I do not consent to the work I submitted and wrote being permanently stored on the external server of the plagiarism software currently used by the University of Bremen, in a library belonging to the institution (accessed only by the University of Bremen), for the above-mentioned purpose.

Das Einverständnis der dauerhaften Speicherung des Textes ist freiwillig. Die Einwilligung kann jederzeit durch Erklärung gegenüber der Universität Bremen, mit Wirkung für die Zukunft, widerrufen werden. Weitere Informationen zur Überprüfung von schriftlichen Arbeiten durch die Plagiatsoftware sind im Nutzungs- und Datenschutzkonzept enthalten. Diese finden Sie auf der Internetseite der Universität Bremen.

Consent to the permanent storage of the text is voluntary. Consent can be withdrawn at any time by making a declaration to this effect to the University of Bremen, with effect for the future. Further information on the checking of written work using plagiarism software can be found in the data protection and usage concept. This can be found on the University of Bremen website.

Mit meiner Unterschrift versichere ich, dass ich die obenstehenden Erklärungen gelesen und verstanden habe und bestätige die Richtigkeit der gemachten Angaben.

With my signature, I confirm that I have read and understood the above explanations and confirm the accuracy of the information provided.

Datum / Date   Unterschrit/ Signature