Definition 0.1. [1, S. 10] Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge (von Ereignissen) und $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ ein Mengensystem aus der Potenzmenge von Ω.
Mit den Eigenschaften

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $E \in \mathcal{A} \implies \Omega \setminus E \in \mathcal{A}$
3. und $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$

nennt man $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ einen (Ereignis-)Messraum.

Definition 0.2. [1, S. 13] Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum. Sei weiter $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$ eine Funktion. Mit den Eigenschaften

1. $\mu(\Omega) = 1$
2. und $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, E_i paarweise disjunkte Elemente $\implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$

ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß oder eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (Verteilung) auf $\mathcal{A}$. Dann nennt man das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 0.3. [1, S. 21] Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ zwei Messräume. Sei weiter $\mathcal{Z}\colon \Omega \to \Omega'$ eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft:

$$E' \in \mathcal{A}' \implies \mathcal{Z}^{-1}E' \in \mathcal{A}\,.$$

Dann heißt $\mathcal{Z}$ Zufallsvariable von $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\Omega', \mathcal{A}')$.
Man schreibt auch $\mathcal{Z}\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$.

Definition 0.4. [2, S. 4] unzufrieden weil nur $\mathbb{R}$. Sei $\mathcal{Z}\colon (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine Zufallsvariable in $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ als borelsche σ-Algebra. Sei weiter das Bildmaß von μ bezüglich $\mathcal{Z}$ gleich

$$B \mapsto \mu_{\mathcal{Z}}(B) := \mu(\mathcal{Z}^{-1}(B)) \quad \text{mit} \quad B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\,.$$

Dann ist der Erwartungswert einer reellen Zufallsvariable $\mathcal{Z}$ genau

$$\mathbb{E}(\mathcal{Z}) = \int \mathcal{Z}\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathcal{Z}(\omega)\mu(\,\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{R}} z\mu_{\mathcal{Z}}(dz)\,.$$

Definition 0.5. Varianz

Definition 0.6. Moment

Definition 0.7. Kovarianz