0.1 Dynamic Mode Decomposition (DMD) [1]

Sei nun $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ der Zustand des Systems zu m diskreten Zeitpunkten $t_k = k\Delta t$ mit $k \in \mathbb{N}$ also

$$X = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t_1) & x(t_2) & \dots & x(t_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

und $X' \in \mathbb{R}^{n \times m}$ der Zustand mit jedem Punkt einen Zeitschritt weiter mit $t'_k = t_k + \Delta t$

$$X' = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t'_1) & x(t'_2) & \dots & x(t'_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

dann versuchen wir die Matrix A zu finden, der dieses System beschreiben kann und wir mit möglichst geringem Fehler

$$X' \approx AX$$

bestimmen können. Ein ideales A finden wir durch

$$A = \arg\min_A ||X' - AX||_F = X'X^\dagger$$

mit $X^\dagger$ als Pseudoinversen von X. Dabei sind die hier betrachteten Pseudoinversen alle Moore-Penrose-Inverse. Um die zu bestimmen, machen wir eine Singulärwertzwerlegung von X. Damit erhalten wir wie in **??** und **??**

$$X = U\Sigma V^\top = U \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top$$

und

$$X^\dagger = V \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\top$$

so, dass $XX^\dagger = \mathbb{1}$ ergibt. Da wir aber häufig mit sehr großen Matrizen arbeiten, liegt es nahe zu versuchen die Dimensionen weitgehend zu reduzieren. Motivation für Paper. Haben wir ein passendes $r \leq m$ zum Reduzieren gefunden, erhalten wir

$$X \approx U_r \Sigma_r V_r^\top$$

und

$$X^\dagger \approx V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top \, .$$

Dabei sind $U_r \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r\times r}$ und $V_r \in \mathbb{R}^{m\times r}$.
A würde man also mit

$$A \approx X' X^\dagger \approx X' V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top \tag{0.1}$$

näher approximieren können. Da wir aber nicht an ganz A interessiert sind, sondern nur die ersten r Eigenwerte, Projizieren wir A auf die POD modes von U.

- DMD mode ist eigenvektor von A
-