Sei $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ eine Matrix dessen Elemente unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind und ihr Erwartungswert 0 mit Varianz σ^2 ist. Weiter sind $x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk})$, $\boldsymbol{X} = (x_1, \dots, x_m)$ und $\bar{x} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_k$. Dann ist die empirische Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(x_k - \bar{x})(x_k - \bar{x})^H$$

0.1 Marčenko-Pastur Momente

Die Dichtefunktion der Marčenko-Pastur-Verteilung $F_y(x)$ ist duch

$$p_y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi x y \sigma^2}\sqrt{(b-x)(x-a)}\,, & \text{wenn } a \le x \le b \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{0.1}$$

gegeben. Debei sind $a = \sigma^2\left(1-\sqrt{y}\right)^2$ und $b = \sigma^2\left(1+\sqrt{y}\right)^2$ jeweils mit $y = \frac{n}{m}$ die Träger der Dichtefunktion. Wenn $\sigma^2 = 1$ ist, dann sprechen wir von der standard M-P-Verteilung. Die k-ten Momente der M-P-Verteilung sind durch die Erwartungswerte der k-ten Potenz $\beta_k := \mathbb{E}(X^k)$ definiert. Da die Dichtefunktion innerhalb ihrer Träger stetig ist, können wir die Momente auch durch

$$\beta_k = \beta_k\left(y, \sigma^2\right) = \int_a^b x^k p_y(x) dx \tag{0.2}$$

beschreiben. An der Definition über den Erwartungswert kann man jetzt sehen, dass wir für das explizite Ausrechnen der Momente durch

$$\beta_k\left(y, \sigma^2\right) = \mathbb{E}\left(\left(\sigma^2 X\right)^k\right) = \sigma^{2k}\mathbb{E}\left(X^k\right) = \sigma^{2k}\beta_k\left(y, 1\right)$$

immer über die standard M-P-Verteilung gehen können.

Lemma 0.1. Die explizite Darstellung der Momente ist

$$\beta_k = \sum_{r=0}^{k-1}\frac{1}{r+1}\binom{k}{r}\binom{k-1}{r}y^r\,. \tag{0.3}$$

Beweis. Wir haben nach Definition 0.2

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y}\int_a^b x^{k-1}\sqrt{(b-x)(x-a)}dx\,.$$

Substituieren wir hier mit $x = 1 + y + z$ und setzen a und b ein, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (1+y+z)^{k-1} \sqrt{\left((1+\sqrt{y})^2 - 1 - y - z\right)\left(1 + y + z - (1-\sqrt{y})^2\right)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} (1+y+z)^{k-1} \sqrt{4y - z^2} dz\,.
\end{aligned}$$

Hier können wir durch Einsetzen des Binomischen Lehrsatzes das Integral zu

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} z^l \sqrt{4y - z^2} dz \\
&= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-2\sqrt{y}}^{2\sqrt{y}} z^l \sqrt{4y - z^2} dz
\end{aligned}$$

umformen. Um das integral weiter zu vereinfachen, substituieren wir mit $z = 2\sqrt{y}u$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} \int_{-1}^{1} (2\sqrt{y}u)^l \sqrt{4y - 4yu^2} du \\
&= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} (1+y)^{k-1-l} (2\sqrt{y})^l 4y \int_{-1}^{1} u^l \sqrt{1 - u^2} du\,.
\end{aligned}$$

Durch die symmetrisch um den Nullpunkt liegenden Integralgrenzen und einem ungeraden Integranten für alle ungeraden l ist jeder zweite Summand gleich 0. Wir können also jeden zweiten Summanden überspringen. Dafür lassen wir die Summe bis zur Hälfte von $k-1$ laufen und summieren über $2l$ statt l. Für den Fall, dass $k-1$ ungerade ist, runden wir ab, weil es dann nur $\frac{k-2}{2}$ Summanden gibt die ungleich 0 sind. Wir haben also

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (2\sqrt{y})^{2l} 4y \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1 - u^2} du \\
&= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^{1} u^{2l} \sqrt{1 - u^2} du\,.
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt mit $u = \sqrt{w}$ Subtituieren,

$$= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{-1}^{1} w^l \sqrt{1-w} \frac{1}{2\sqrt{w}} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} dw$$

erhalten wir durch Vereinfachen dank eines geraden Integranten

$$= \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \int_{0}^{1} w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} dw$$

ein Integral, dass wir mittels eulerschen Betafunktion lösen können. Die eulersche Betafunktion ist durch

$$\int_0^1 t^{g-1}(1-t)^{h-1} dt := \frac{\Gamma(g)\Gamma(h)}{\Gamma(g+h)}$$

definiert. Wir können also mit $g = l + \frac{1}{2}$ und $h = 1 + \frac{1}{2}$ das Integral durch die Gammafunktionen

$$\begin{aligned} \int_0^1 w^{l-\frac{1}{2}} \sqrt{1-w} dw &= \frac{\Gamma(l+\frac{1}{2})\Gamma(1+\frac{1}{2})}{\Gamma(l+2)} \\ &= \frac{\frac{(2l)!\sqrt{\pi}}{l!4^l} \frac{2!\sqrt{\pi}}{4^l}}{(l+1)!} \\ &= \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l} \frac{1}{2}\pi}{(l+1)!} \end{aligned} \tag{0.4}$$

beschreiben. Nach Einsetzen von 0.4 erhalten wir

$$\beta_k = \frac{1}{2\pi y} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k-1}{2l} (1+y)^{k-1-2l} (4y)^{l+1} \frac{\frac{(2l)!}{l!4^l} \frac{1}{2}\pi}{(l+1)!}.$$

□

0.2 Marčenko-Pastur-Verteilung für i.i.d