

## 0.1 Dynamic Mode Decomposition (DMD) [1]

In diesem Kapitel wollen wir noch einmal genauer den DMD Algorithmus erklären. Es ist aber nicht notwendig für das weitere Verstehen dieser Arbeit.

Aus der Einleitung wissen wir, dass die Singulärwertzerlegung und die Frobeniusnorm wichtige Werkzeuge des Algorithmus sind, weshalb wir sie hier einmal konkret definieren.

**Definition 0.1** (Frobeniusnorm). Sei  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  eine Matrix und  $x_{ij}$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Die Frobeniusnorm ist definiert durch

$$\|X\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |x_{ij}|^2}.$$

**Lemma 0.2.** Sei  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  eine Matrix. Dann gilt

$$\|X\|_F = \sqrt{\text{tr}(X^H X)}.$$

*Beweis.* Sei  $x_i$  ein Spaltenvektor von  $X$  und  $\bar{x}_{ij}$  in diesem Kapitel das komplex konjugierte. Dann ist

$$\begin{aligned} X^H X &= \begin{pmatrix} - & x_1^H & - \\ & \vdots & \\ - & x_m^H & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ x_1 & \dots & x_m \\ | & & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n x_{1j}^H x_{1j} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1}^n x_{mj}^H x_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \bar{x}_{1j} x_{1j} & & * \\ & \ddots & \\ * & & \sum_{j=1}^n \bar{x}_{mj} x_{mj} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit  $\bar{x}x = |x|^2$  erhalten wir

$$\text{tr}(X^H X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{x}_{ij} x_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |x_{ij}|^2 = \|X\|_F^2. \quad (0.1)$$

□

Die Frobeniusnorm wird im weiteren Verlauf aufgrund ihrer Invarianz bezüglich unitärer Transformation verwendet, welche wir durch folgendes Lemma zeigen.

**Lemma 0.3.** Sei  $X \in \mathbb{C}^{n \times m}$  eine Matrix und  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  und  $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$  unitäre Matrizen. Dann gilt

1.  $\|X\|_F = \|X^H\|_F$ ,
2.  $\|UX\|_F = \|X\|_F$ ,
3.  $\|XV\|_F = \|X\|_F$ .

*Beweis.*

1. Aus Gleichung (0.1) folgt

$$\|X\|_F^2 = \text{tr}(X^H X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{x_{ij}} x_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{x_{ij}} x_{ij} = \text{tr}(X X^H) = \|X^H\|_F^2.$$

2. Es ist

$$\|UX\|_F^2 = \text{tr}(X^H U^H U X) = \text{tr}(X^H \mathbb{1} X) = \text{tr}(X^H X) = \|X\|_F^2.$$

3. Mit 1. und 2. folgt

$$\|XV\|_F = \|V^H X^H\|_F = \|X^H\|_F = \|X\|_F. \quad \square$$

**Satz 0.4** (Singularwertzerlegung [2]). Sei  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix und  $r := \text{rang } X$  mit  $r \leq \min(n, m)$ . Dann existieren orthogonale Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und eine Diagonalmatrix  $\hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) \in \mathbb{R}^{r \times r}$  mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$  so, dass

$$X = U \Sigma V^T \text{ mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

gilt.

Der Beweis des Satzes 0.4 folgt etwas später, da dafür noch etwas Vorbereitung benötigt wird.

**Bemerkung 0.5.** Unter den in Satz 0.4 genannten Voraussetzungen, ist  $\hat{\Sigma}$  durch  $X$  eindeutig bestimmt. Die beiden orthogonalen Matrizen  $U$  und  $V$  hingegen sind nicht eindeutig.

**Lemma 0.6.** Sei  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $\lambda_i$  die Eigenwerte von  $X^\top X$ . Dann gilt für die Singulärwerte unter den Voraussetzungen aus Satz 0.4

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

*Beweis.* Durch

$$\begin{aligned} X^\top X &= (U \Sigma V^\top)^\top (U \Sigma V^\top) \\ &= V \Sigma^\top U^\top U \Sigma V^\top \\ &= V \Sigma^\top \Sigma V^\top \end{aligned}$$

ist  $X^\top X$  ähnlich zu  $\Sigma^\top \Sigma$ . Also haben  $X^\top X$  und  $\Sigma^\top \Sigma$  auch die gleichen Eigenwerte.  $\square$

**Bemerkung 0.7.** Damit gilt für die Diagonalelemente von  $\hat{\Sigma}$  aus Satz 0.4,

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i},$$

dass deren Wurzeln gleich der Eigenwerte von  $X^\top X$  sind.

**Definition 0.8.** Wir nennen die Diagonalelemente  $\sigma_i$  von  $\hat{\Sigma}$  *Singulärwerte*.

**Bemerkung 0.9.** Die aus der Singulärwertzerlegung in 0.4 entstehenden Singulärwerte sind invariant bezüglich Transposition von  $X$ .

*Beweis.* Seien die Voraussetzungen aus Satz 0.4 gegeben, dann gilt

$$X^\top = (U \Sigma V^\top)^\top = V \Sigma^\top U^\top.$$

Da  $\Sigma$  nur auf der Hauptdiagonalen Einträge hat und sonst mit Nullen gefüllt ist, erhalten wir

$$\text{diag } \Sigma^\top = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\} = \text{diag } \Sigma$$

$\square$

**Lemma 0.10** ([2, S. 191]). Sei  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine orthogonale Matrix  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und eine Diagonalmatrix  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so, dass

$$U^\top X U = D$$

gilt.

**Lemma 0.11** ([2, S. 227]). Sei  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix mit  $\text{rang } X = r < \min(n, m)$ . Dann existieren orthogonale Matrizen  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sowie eine reguläre obere Dreiecksmatrix  $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  so, dass

$$U^\top X V = R \text{ mit } R = \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

gilt.

*Beweis Satz 0.4.* Nach Bemerkung 0.9 nehmen wir o.B.d.A an, dass  $m \leq n$  gilt. Zunächst betrachten wir den Fall des vollen Ranges von  $X$ , also  $\text{rang } X = r = m$ . Bei vollem Rang ist  $X^\top X \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sowohl symmetrisch als auch positiv definit. Die Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $X^\top X$  sortieren wir nach ihrer Größe, also

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0.$$

Mit Lemma 0.10 finden wir ein orthogonales  $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , sodass

$$V^\top X^\top X V = D = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Weiter definieren wir

$$\hat{\Sigma} := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$$

mit  $\sigma_i := \sqrt{\lambda_i} \in (0, \infty]$ , für  $i = 1, \dots, m$ , und setzen

$$\hat{U} := X V \hat{\Sigma}^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Jetzt kann man durch Umformung von

$$\begin{aligned} \hat{U}^\top \hat{U} &= \hat{\Sigma}^{-\top} V^\top X^\top X V \hat{\Sigma}^{-1} \\ &= \hat{\Sigma}^{-1} D \hat{\Sigma}^{-1} \\ &= \hat{\Sigma}^{-1} \hat{\Sigma}^{-1} D \\ &= D^{-1} D \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

die Orthonormalität der Spalten von  $\hat{U}$  sehen.

Da  $\hat{U}$  in  $\mathbb{R}^{n \times m}$  mit  $m < n$  liegt und aus orthonormalen Spaltenvektoren besteht, finden wir ein  $Z \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)}$ , welches  $\hat{U}$  so um  $n - m$  orthonormale Spaltenvektoren ergänzt,

dass

$$U = (\hat{U} \ Z) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

eine orthogonale Matrix ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} Z^\top X V \hat{\Sigma}^{-1} &= Z^\top \hat{U} \\ &= 0 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times n}. \end{aligned}$$

Da  $\hat{\Sigma} \hat{\Sigma}^{-1} = \mathbb{1}$  ist, folgt auch direkt

$$Z^\top X V = 0.$$

Zusammengetragen haben wir dann

$$\begin{aligned} U^\top X V &= \begin{pmatrix} \hat{U}^\top \\ Z^\top \end{pmatrix} X V = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} V^\top X^\top X V \\ Z^\top X V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} D \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

womit wir den Fall des vollen Ranges bewiesen hätten.

Seien  $\lambda_i$  wie oben definiert wieder die Eigenwerte von  $X^\top X$  und sei  $X_r \in \mathbb{R}^{n \times m}$  eine Matrix mit  $\text{rang } X_r = r < m$ . Nach Lemma 0.11 gibt es zwei orthogonale Matrizen  $\tilde{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\tilde{V} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , sowie eine obere Dreiecksmatrix  $\hat{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , sodass

$$\tilde{U}^\top X_r \tilde{V} = R \text{ mit } R = \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

gilt. Nach obigem Fall mit vollem Rang, wissen wir, dass es orthogonale Matrizen  $U_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $V_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ , sodass

$$U_r^\top \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} V_r = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r}.$$

Dabei ist  $\hat{\Sigma}_r := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  mit  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ . Im Folgenden erweitern wir

$$\begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

und finden eine orthogonale Fortsetzung für  $V_r$  zu

$$\bar{V}_r = \begin{pmatrix} V_r & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Wenn wir uns jetzt die orthogonalen Matrizen

$$U := \tilde{U}U_r \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{und} \quad V := \tilde{V}\bar{V}_r \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

definieren, erhalten wir durch

$$\begin{aligned} U^\top X_r V &= U_r^\top \tilde{U} X_r \tilde{V} \bar{V}_r \\ &= U_r^\top \begin{pmatrix} \hat{R} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bar{V}_r \\ &= \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: \Sigma \end{aligned}$$

eine erfolgreiche Zerlegung von  $X_r$  durch orthogonale Matrizen. □

Da Wir das jetzt verstanden haben können wir mit DMD anfangen.

Sei nun  $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$  der Zustand des Systems zu  $m$  diskreten Zeitpunkten  $t_k = k\Delta t$  mit  $k \in \mathbb{N}$  also

$$X = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t_1) & x(t_2) & \dots & x(t_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

und  $X' \in \mathbb{R}^{n \times m}$  der Zustand mit jedem Punkt einen Zeitschritt weiter mit  $t'_k = t_k + \Delta t$

$$X' = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x(t'_1) & x(t'_2) & \dots & x(t'_m) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

dann versuchen wir die Matrix  $A$  zu finden, der dieses System beschreiben kann und wir

mit möglichst geringem Fehler

$$X' \approx AX$$

bestimmen können. Ein ideales  $A$  finden wir durch

$$A = \arg \min_A \|X' - AX\|_F = X'X^\dagger$$

mit  $X^\dagger$  als Pseudoinversen von  $X$ . Dabei sind die hier betrachteten Pseudoinversen alle Moore-Penrose-Inverse. Um die zu bestimmen, machen wir eine Singulärwertzerlegung von  $X$ . Damit erhalten wir wie in 0.4 und ??

$$X = U\Sigma V^\top = U \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top$$

und

$$X^\dagger = V \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^\top$$

so, dass  $XX^\dagger = \mathbb{1}$  ergibt. Da wir aber häufig mit sehr großen Matrizen arbeiten, liegt es nahe zu versuchen die Dimensionen weitgehend zu reduzieren. **Motivation für Paper.** Haben wir ein passendes  $r \leq m$  zum Reduzieren gefunden, erhalten wir

$$X \approx U_r \Sigma_r V_r^\top$$

und

$$X^\dagger \approx V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top.$$

Dabei sind  $U_r \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $\Sigma_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  und  $V_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$ .

$A$  würde man also mit

$$A \approx X'X^\dagger \approx X'V_r \Sigma_r^{-1} U_r^\top \quad (0.2)$$

näher approximieren können. Da wir aber nicht an ganz  $A$  interessiert sind, sondern nur die ersten  $r$  Eigenwerte, Projizieren wir  $A$  auf **die POD modes von  $U$** .

- DMD mode ist eigenvektor von  $A$
-