(In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer Möglichkeit, den Rechenaufwand des Dynamic Mode Decomposition Algorithmus, kurz DMD, zu verringern.) DMD ist ein Algorithmus, der ursprünglich im Feld der Strömungsdynamik entwickelt wurde. Er dient dazu, anhand von Messdaten mehrerer Zeitpunkte die Dynamik eines Systems zu approximieren.
Im Laufe der letzten Jahre wurden eine Vielzahl von Varianten der DMD Algorithmen entwickelt. Wir betrachten hier aber nur exact DMD. Diese Variante hat den Vorteil gegenüber des ursprünglichen DMD, dass die Messzeitpunkte keine einheitlichen Zeitabstände benötigen. Für jede Messung werden alle Daten der Messpunkte in eine Spalte x_i einer Datenmatrix X eingetragen. Wenn man zusätzlich parallel nur um einen Zeitpunkt versetzt misst, erhält man zwei Datenmatrizen, die zwei sich überlappende Zeitintervalle abdecken. Genau $X = (x_1, \dots, x_{k-1})$ und $X' = (x_2, \dots, x_k)$.
Das Ziel von DMD ist es nun einen linearen Operator A zu finden, der das System $X' = AX$ so gut wie möglich beschreibt. Diesen Operator bestimmt man mittels Singulärwertzerlegung unserer Datenmatrix X.
Bei der Singulärwertzerlegung (SVD) finden wir für ein $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ zwei orthogonale Matrizen U und V mit passenden Dimensionen und $\hat{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots \sigma_r)$ mit $r \leq \min(n, m)$ und $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ so, dass

$$X = U\Sigma V^\top \text{ mit } \Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

gilt. (Damit können wir die SVD mit u_i und v_i als linke und rechte Singulärvektoren auch durch $X = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^\top$ beschreiben.) hab ich erstmal eingeführt um einfacher auf die notation vom paper zu verweisen (das ist ja aber noch wip)
Um für die folgenden Schritte der DMD den Rechenaufwand zu minimieren, lohnt es sich eine Dimensionsreduktion durchzuführen. Eine Möglichkeit ist unter ökonomischer SVD (TSVD) bekannt. Dabei wird Σ auf eine $r \times r$ große Matrix reduziert und die Spalten von U und V abgeschnitten, sodass wir mit den reduzierten Matrizen U_r, Σ_r und V_r,

$$X_r = U_r \Sigma_r V_r^\top = U_r \hat{\Sigma} V_r^\top$$

erhalten. Mit

$$||X_r||_F^2 = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2$$

lässt sich dann zeigen, dass X_r nach dem Eckart-Young-Mirsky-Theorem die beste rang r

Approximation bezüglich der Frobeniusnorm ist.

Grobe richtung Im Paper [1] von Matan Gavish and David L. Donoho erhalten wir durch ..., dass noise-freie Datenmatrizen ab einem Singulärwert von $\frac{4}{\sqrt{3}}$ abgeschnitten wird. ...
In der Realität tauchen beim Messen aber Fehler auf. Das heißt, unsere Singulärwerte sind zu einem Teil echt aber auch zu einem Teil Messfehler. Wir definieren die Datenmatrix also durch

$$X \coloneqq X^{\text{true}} + \gamma X^{\text{noise}}$$

einen echten Teil und einem durch γ skalierten Fehleranteil.

Gavish Donoho weiter ausführen

Überleitung zu MP Bei kleinen Matrizen, ist die Noise kaum ein Problem aber für "große" Matrizen kann der Noiseanteil der Singulärwerte sehr groß werden.

Ziel ist die Rekonstruktion von X^{true} aus X, insbesondere bei großem n, m