Dieses Kapitel ist noch seeeehr work in progress also ich hab erstmal grob Gedanken aufgeschrieben.

0.1 paper [1]

0.2 Idee

Wir betrachten die gemessene Datenmatrix

$$X = X^{\text{true}} + \gamma X^{\text{noise}} \tag{0.1}$$

mit $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, X^{true} als *echte* Datenmatrix und approximately of low rank und X^{noise} als Messfehlermatrix welche Unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen enthält vielleicht noch definieren.

Hier benutzen wir die *truncated* Singulärwertzerlegung also

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i' \,. \tag{0.2}$$

Schätzen kann man die *truncation* jetzt mit

$$\hat{X}_r = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i' \,. \tag{0.3}$$

mit $r = \text{rang}(X^{\text{true}})$ und den Singulärwerten wieder nach größe absteigend sortiert.

Da aber der Rang von X^{true} nicht unbedingt bekannt ist kann man versuchen, anhand der Größe, der Singulärwerte zu Kürzen. Dafür bauen wir mithilfe einer Indikatorfunktion $\eta_H(\sigma_i; \tau) = \sigma \chi_{\{\sigma \geq \tau\}}$ die gekürzte Matrix

$$\hat{X}_\tau = \sum_{i=1}^{r} \eta_H(\sigma_i; \tau) u_i v_i' \,. \tag{0.4}$$

Jetzt gilt es aber herauszufinden wie wir dieses τ wählen damit wir immernoch sinnvolle Ergebnisse erhalten, aber gleichzeitig zu viel rechenaufwand spaaren wie möglich.

0.3 Setting

Definition 0.1 (denoiser)**.** Ein *Denoiser* reduziert eine Matrix auf nur noch *relevante* Ränge mit der Form

$$\hat{X}\colon \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i' \to \sum_{i=1}^{n} \eta(\sigma_i;\lambda) u_i v_i' \tag{0.5}$$

Definition 0.2 (Mean Square Error (MSE))**.** Mit dem MSE wird der Fehler der beim *denoising* Prozess entsteht, durch

$$\left|\left|\hat{X}(X) - X^{\text{true}}\right|\right|_F^2 = \sum_{i,j} \left(\hat{X}(X)_{i,j} - X_{i,j}^{\text{true}}\right)^2 \tag{0.6}$$

quantifiziert.

Wir betrachten eine Folge an denoising Problemen, die immer größer werden.

$$X_k = X_k^{\text{true}} + \gamma X_k^{\text{noise}} \tag{0.7}$$

mit $X_k^{\text{true}}, X_k^{\text{noise}} \in M_{n_k,m}$.
Jedes X_k^{noise} erfüllt die Eigenschaften von X^{noise}. Gegeben sei ein fixer Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$, mit $r > 0$, den Einträgen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ und $x_i \geq x_{i+1} > 0$. Für alle k gilt

$$X_k^{\text{true}} = U_k \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) V_k' \,. \tag{0.8}$$

Definition 0.3 (Asymptotic Mean Square Error (AMSE))**.** lalala