MODELO EXPONENCIAL

Introducción

La ecuación diferencial $\frac{dA}{dt} = kA$ describe el crecimiento exponencial, donde la tasa de cambio de A con respecto al tiempo es proporcional a la cantidad actual de A. Esta ecuación es común en muchos campos, incluyendo la biología, la química y la economía.

Solución Analítica

Para resolver la ecuación $\frac{dA}{dt} = kA$, separamos las variables y luego integramos:

$$\frac{dA}{A} = k\,dt$$

Integrando ambos lados:

$$\int \frac{1}{A}\,dA = \int k\,dt$$

Esto nos da:

$$\ln |A| = kt + C$$

Donde C es la constante de integración. Exponenciando ambos lados, obtenemos:

$$A(t) = A_0 e^{kt}$$

Donde $A_0 = e^C$ es la constante de integración que se determina a partir de la condición inicial $A(0) = A_0$.

Interpretación

La solución $A(t) = A_0 e^{kt}$ muestra que la cantidad A crece (o decrece, si k es negativo) exponencialmente con el tiempo.

Aplicaciones

- En biología, esta ecuación puede modelar el crecimiento de poblaciones bajo condiciones ideales sin restricciones.
- En química, puede describir la cinética de una reacción de primer orden.
- En economía, puede representar el crecimiento de una inversión con interés compuesto continuo.

Conclusiones

El modelo exponencial es fundamental para entender el comportamiento de sistemas donde la tasa de cambio es proporcional a la cantidad actual. Su solución analítica es simple pero extremadamente poderosa en una amplia variedad de aplicaciones.