Calcul du diagramme de plongement

17 février 2020

Ce diagramme permet de visualiser la forme du tenseur de Rieamann-Christoffel dans l'espace plat euclidien, ie la courbure de l'espace temps à proximité d'un objet massique. L'espace-temps étant de dimensions 4, avoir un vision en 3 dimension nécéssite de fixer 2 variables. Ici, on va fixet le temps et θ.

On va tout d'abord obtenir les équations de la métrique puis exprimer la fonction que l'on trace.

1 Obtention de la métrique à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet compact

La gravitation est une propriété de l'espace temps qui dépend localement du contenu en masse et en énergie.

Équation d'Einstein :

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Comme on est à symétrie sphérique, on peut trouver un système de coordonnées (ct, r, θ, ϕ) tq

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2(r)c^2dt^2 + A^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2(\theta)d\phi^2)$$

1.1 Solution de Schwarzschild (valable uniquement en dehors de l'astre $T_{\mu\nu} = 0,$) :

$$N(r) = \sqrt{1 - \tfrac{2GM}{rc^2}} \text{ et } A(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= -c^2\mathrm{d}\tau^2 \\
&= -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) \\
&= -\left(1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r}\right) c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{R_\mathrm{S}}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2
\end{aligned}$$

On retrouve l'espace-temps plat de Minkowski à grande distance. On peut tracer cette métrique dans un diagramme de plongement mais on aura une divergence pour $r = R_c$(cela correspond au rayon de l'horizon du trou noir, c'est une singularité de la métrique de Schwarschild).

1.2 Équation d'Einstein à l'intérieur d'un astre statique à symétrie sphérique (système TOV) :

$$N(r) = e^{\frac{\Phi(r)}{c^2}} \text{ et } A(r) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}}}$$

avec

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2}\left(1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1}\left(1+4\pi\frac{P(r)r^3}{m(r)c^2}\right)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\left(\rho(r)+\frac{P(r)}{c^2}\right)\frac{d\Phi}{dr}$$

Cas d'une étoile homogène : On prend $\rho(r) = \rho_c$

$$m(r) = \begin{cases} M(r/R)^3 & pour\ r \leq R \\ M & pour\ r \geq R \end{cases}$$

$$P(r) = \begin{cases} \rho_c \frac{\sqrt{1-2\Xi(r/R)^2}-\sqrt{1-2\Xi}}{3\sqrt{1-2\Xi}-\sqrt{1-2\Xi(r/R)^2}} & pour\ r \leq R \\ 0 & pour\ r \geq R \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} c^2 ln\left(\frac{3\sqrt{1-2\Xi}-\sqrt{1-2\Xi(r/R)^2}}{2}\right) & pour\ r \leq R \\ \frac{c^2}{2} ln\left(1-2\Xi\frac{R}{r}\right) & pour\ r \geq R \end{cases}$$

2 Expression de la fonction de plongement

On veut plonger un espace à 3 dimensions dans un espace à deux dimensions. On fixe $\theta = \pi/2$ et on prend t constant. On appelle $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la fonction de plongement.

On veut que ${ds^2}_{courbe} = {ds^2}_{espace-temps}$, de sorte que la métrique soit respectée.

$$\begin{cases} {ds^2}_{courbe} & = dr^2 + dz^2 = dr^2 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr^2 \\ {ds^2}_{espace-temps} & = g_{rr}dr^{\mathbf{2}} \end{cases}$$

D'où :

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = g_{rr}$$

On résout ensuite en utilisant l'expression de la métrique de Schwarzschild :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\left|\frac{rc^2}{2Gm(r)} - 1\right|}}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{f(r) = \begin{cases} 2R_S\sqrt{\frac{r}{R_s} - 1} + C & pour\ r \leq R \\ -\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho} - r^2} + C & pour\ r \geq R \end{cases}}$$