

# Calcul du diagramme de plongement

17 février 2020

Ce diagramme permet de visualiser la forme du tenseur de Riemann-Christoffel dans l'espace plat euclidien, ie la courbure de l'espace temps à proximité d'un objet massif. L'espace-temps étant de dimensions 4, avoir une vision en 3 dimension nécessite de fixer 2 variables. Ici, on va fixer le temps et  $\theta$ .

On va tout d'abord obtenir les équations de la métrique puis exprimer la fonction que l'on trace.

## 1 Obtention de la métrique à l'intérieur et à l'extérieur de l'objet compact

La gravitation est une propriété de l'espace temps qui dépend localement du contenu en masse et en énergie.

**Équation d'Einstein :**

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Comme on est à symétrie sphérique, on peut trouver un système de coordonnées  $(ct, r, \theta, \phi)$  tq

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2(r) c^2 dt^2 + A^2(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$$

### 1.1 Solution de Schwarzschild (valable uniquement en dehors de l'astre $T_{\mu\nu} = 0$ , ) :

$$N(r) = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}} \text{ et } A(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2 d\tau^2 \\ &= - \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ &= - \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) c^2 dt^2 + \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

On retrouve l'espace-temps plat de Minkowski à grande distance. On peut tracer cette métrique dans un diagramme de plongement mais on aura une divergence pour  $r = R_c$  (cela correspond au rayon de l'horizon du trou noir, c'est une singularité de la métrique de Schwarzschild).

## 1.2 Équation d'Einstein à l'intérieur d'un astre statique à symétrie sphérique (système TOV) :

$$N(r) = e^{\frac{\Phi(r)}{c^2}} \text{ et } A(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}}}$$

avec

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} \left(1 + 4\pi \frac{P(r)r^3}{m(r)c^2}\right)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

$$\frac{dP}{dr} = - \left( \rho(r) + \frac{P(r)}{c^2} \right) \frac{d\Phi}{dr}$$

**Cas d'une étoile homogène :** On prend  $\rho(r) = \rho_c$

$$\begin{aligned} m(r) &= \begin{cases} M(r/R)^3 & \text{pour } r \leq R \\ M & \text{pour } r \geq R \end{cases} \\ P(r) &= \begin{cases} \rho_c \frac{\sqrt{1-2\Xi(r/R)^2} - \sqrt{1-2\Xi}}{3\sqrt{1-2\Xi} - \sqrt{1-2\Xi(r/R)^2}} & \text{pour } r \leq R \\ 0 & \text{pour } r \geq R \end{cases} \\ \Phi(r) &= \begin{cases} c^2 \ln \left( \frac{3\sqrt{1-2\Xi} - \sqrt{1-2\Xi(r/R)^2}}{2} \right) & \text{pour } r \leq R \\ \frac{c^2}{2} \ln \left( 1 - 2\Xi \frac{R}{r} \right) & \text{pour } r \geq R \end{cases} \end{aligned}$$

## 2 Expression de la fonction de plongement

On veut plonger un espace à 3 dimensions dans un espace à deux dimensions. On fixe  $\theta = \pi/2$  et on prend  $t$  constant. On appelle  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction de plongement.

On veut que  $ds^2_{\text{courbe}} = ds^2_{\text{espace-temps}}$ , or :

$$\begin{cases} ds^2_{\text{courbe}} &= dr^2 + dz^2 = dr^2 + \left(\frac{df}{dr}\right)^2 dr^2 \\ ds^2_{\text{espace-temps}} &= g_{rr} dr^2 \end{cases}$$

D'où :

$$1 + \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)^2 = g_{rr}$$

On résout ensuite en utilisant l'expression de la métrique de Schwarzschild :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{rc^2}{2Gm(r)} - 1 \right|}}$$

Ce qui donne :

$$f(r) = \begin{cases} 2R_S \sqrt{\frac{r}{R_s} - 1} + C & \text{pour } r \leq R \\ -\sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G\rho} - r^2} + C & \text{pour } r \geq R \end{cases}$$