



Universitat Autònoma de Barcelona

FACULTAT DE CIÈNCIES

MÉTODOS NUMÉRICOS II

*Práctica I: EDDP, Modelización del tratamiento de ablación cardiaca
IVS*

Francisco Rodríguez (1600436)

Carlos Herrera (1604354)

Alberto Rodríguez(1600220)

Ignacio Gil (1601156)

Diciembre del 2022

Contents

1	Introducción y planteamiento del problema	3
2	Solución analítica	3
3	Modelización numérica del problema	4
3.1	Normalización	4
3.2	Método de Euler explícito	5
3.3	Método de Euler implícito	6
4	Presentación de los resultados	7
5	Conclusiones	8
6	Vínculo al programa	8

1 Introducción y planteamiento del problema

La idea del problema es la siguiente: tenemos una arritmia, es decir, una parte de tejido de corazón enfermo (parte descoordiada eléctricamente). Para curarlo utilizaremos la ablación cardiaca IVS; queremos matar las células del tejido enfermo a base de calentarlas con dos catéteres con electrodos de polaridades opuestas y con una diferencia de potencial para, en virtud del efecto Joule, calentar el tejido. Hemos de tener cuidado de no matar las células del tejido sano, ni tampoco de calentar excesivamente la parte enferma, ya que podríamos causar una trombosis mortal.

Entendida la idea, pasemos a explicar el problema que se nos plantea: tenemos una simplificación de la arritmia y de la curación, donde entre los catéteres, hay una parte de tejido sano y otra del enfermo, que mide 0.5 cm, en el centro. Los dos tejidos juntos miden 2 cm. El voltaje aplicado es de 40 V. Este calentará el tejido que hay dentro, sobre toodo por el centro, que es donde tenemos el tejido enfermo.

Es por ello que si dejamos pasar un tiempo t , en la parte central de tejido enfermo habrá una temperatura suficiente como para matar las células enfermas. Esta temperatura deberá ser mayor a 50 °C en dicha zona, pero fuera todavía no estará suficientemente caliente como para matar las sanas. El tiempo máximo, llamado también óptimo será cuando se maximice la cicatrización sin afectar al tejido sano, y para encontrarlo habrá que imponer que la temperatura justo donde se pasa de tejido enfermo a tejido sano (a los 0.75 cm y 1.25 cm, donde pasa de color rojo a azul) sea de 50 °C. Es importante comprobar que en todo el proceso no se pasa nunca de los 80 °C, ya que a esta temperatura podríamos tener la trombosis antes mencionada.

2 Solución analítica

La finalidad de calcular la ecuación analítica de este problema es que, con ella, podemos determinar el error que efectuamos con cada uno de los métodos empleados para resolver EDDPs. Para resolver el problema planteado analíticamente recurriremos a la ecuación normalizada 1, que corresponde a la solución de la ecuación adimensionalizada y normalizada 4. Las variables adimensionalizadas requeridas se encuentran expresadas en 3.

$$\hat{T}(\hat{z}, \hat{t}) = \hat{T}_c + 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - e^{-\pi^2(2n+1)^2 \hat{t}}}{(\pi(2n+1))^3} \sin((2n+1)\pi\hat{z}). \quad (1)$$

Para encontrar la ecuación hemos tenido en cuenta las condiciones de contorno $\hat{T}(0, \hat{t}) = T(1, \hat{t}) = \hat{T}_c$ y la condición inicial $\hat{T}(\hat{z}, 0) = \hat{T}_c$, donde $\hat{z} = 0$ y $\hat{z} = 1$ corresponden a las condiciones de frontera normalizadas. Debido a que al momento de programar un proceso iterativo para obtener la matriz analítica de temperaturas respecto al tiempo y posición debemos delimitar el sumatorio, hemos tomado como último valor del mismo $N_{\max} = 800$, que consideramos suficientemente grande como para que el resultado obtenido concuerde con el real). Seguidamente, hemos dotado a todas las variables normalizadas y adimensionalizadas de sus dimensiones correspondientes y hemos representado el mapa de temperaturas, el cual se muestra en el gráfico 1a. Finalmente, y debido a que en los métodos de Euler explícito e implícito nos piden que calculemos el error de la temperatura que se comete con cada

uno de estos para un tiempo adimensional $\hat{t}_a = 0.025$; hemos calculado la solución analítica para el susodicho tiempo, tal y como se muestra en el gráfico 1b :

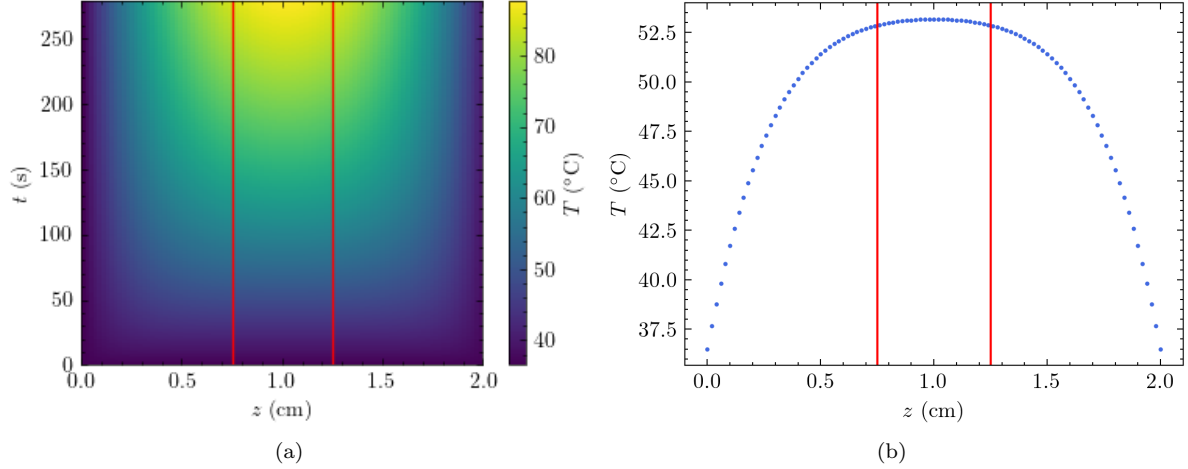


Figure 1: Empleando el método analítico: en el gráfico 1a se representa su mapa de temperaturas, tomando un sumatorio de $N_{max} = 800$ términos. En el gráfico 1b se representa la temperatura en función del espacio calculada para un tiempo adimensional $\hat{t}_a = 0.025$. Nótese que las dos barras rojas delimitan la región enferma.

Vemos en el gráfico 1a que, efectivamente, las condiciones iniciales y de frontera planteadas la temperatura es una constante, y toma un valor $T_c = 36.5$ °C, a demás, dentro del rango de $z \in [0.75; 1.25]$ cm, es decir, en el espacio donde se encuentra el tejido enfermo la temperatura aumenta rápidamente con el tiempo.

Seguidamente, hemos impuesto las condiciones necesarias para que las células del tejido enfermo mueran ($T \geq 50$ °C para todos los z del intervalo $[0.75; 1.25]$ cm y la temperatura máxima no sobrepase los 80 °C), el tiempo óptimo y, por tanto, máximo, es de 57.965 s.

3 Modelización numérica del problema

3.1 Normalización

La modelización correspondiente al problema físico que tenemos viene descrita por la ecuación de Fourier para la conducción térmica:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_v \rho} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{P_{ext}}{c_v \rho}. \quad (2)$$

Como la ecuación 2 no está formada por variables adimensionales, procedemos a adimensionalizar y, de paso, normalizar dichas variables:

$$\alpha = \frac{\kappa}{c_v \rho} \approx 1.41 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, \hat{t} = \frac{\alpha}{l^2} t, \hat{z} = \frac{z}{l}, T_0 = \frac{l^2 P}{\kappa} = 0.272 \text{ K} \Rightarrow \hat{T} = \frac{T}{T_0}. \quad (3)$$

Con la normalización de las ecuaciones 3, el ordenador trabajará con números cercanos a la unidad, en los cuales el error numérico se reduce. La ecuación adimensionalizada y normalizada se reduce a la ecuación 4:

$$\frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial \hat{z}^2} + 1. \quad (4)$$

Para resolver la ecuación diferencial 4, hemos procedido con los métodos de Euler explícito e implícito con un mallado espacial $\Delta \hat{z} = 1/100$ con 101 pasos y un mallado temporal que depende en cada caso del espacial. Las condiciones de contorno son que en $z = 0 \text{ cm}$ y $z = 2 \text{ cm}$ la temperatura será siempre la corporal, $T = 36.5 \text{ }^\circ\text{C}$, igual que en cualquier posición en $t = 0$.

3.2 Método de Euler explícito

Este método consiste en la obtención del valor numérico de la temperatura adimensionalizada de la componente i, j , sea el índice i el correspondiente al tiempo y j a la posición, mediante derivadas discretas y a partir de los valores anteriores y las condiciones de contorno ya mencionadas. Nos queda:

$$\hat{T}_j^{i+1} = \frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{z}^2} \left(\hat{T}_{j+1}^i - 2\hat{T}_j^i + \hat{T}_{j-1}^i \right) + \Delta \hat{t} + \hat{T}_j^i. \quad (5)$$

Para la ecuación 5, hemos usado tres mallados temporales distintos: $\Delta \hat{t}/\Delta \hat{z}^2 = 0.25$, $\Delta \hat{t}/\Delta \hat{z}^2 = 0.49$ y $\Delta \hat{t}/\Delta \hat{z}^2 = 0.51$.

Como podemos observar en las figuras 3a, 3b y 3c, el mallado que presenta una menor error y que, por tanto, se ajusta mejor a los valores de temperatura obtenidos mediante el método analítico es el de: $\Delta \hat{t} = 0.25 \Delta \hat{z}^2$. Para el ratio de 0.25, tenemos un mapa de temperaturas, donde tenemos la temperatura (representada por colores) en función de la posición y del tiempo donde nos encontremos.

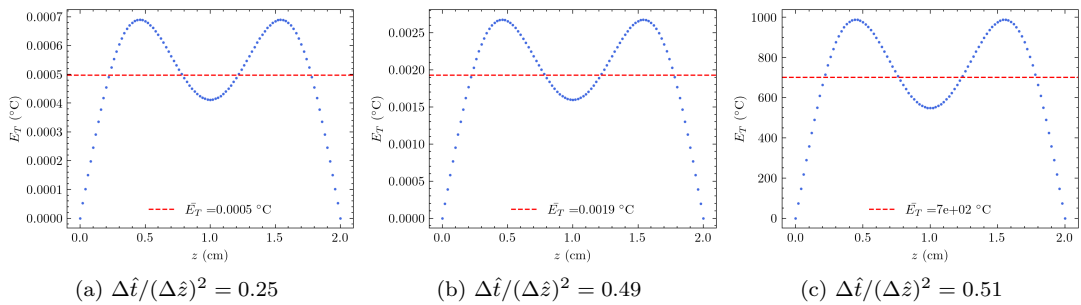


Figure 3: En 3a, 3b y 3c se representan los errores en la temperatura obtenidos mediante el método de Euler explícito para sendos mallados observándose un error inasumible en 3c fruto de dicha divergencia. Las desviaciones estándar de 3a, 3b y 3c son $1.7 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$, $6.7 \times 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}$ y $2.5 \times 10^2 \text{ }^\circ\text{C}$ respectivamente.

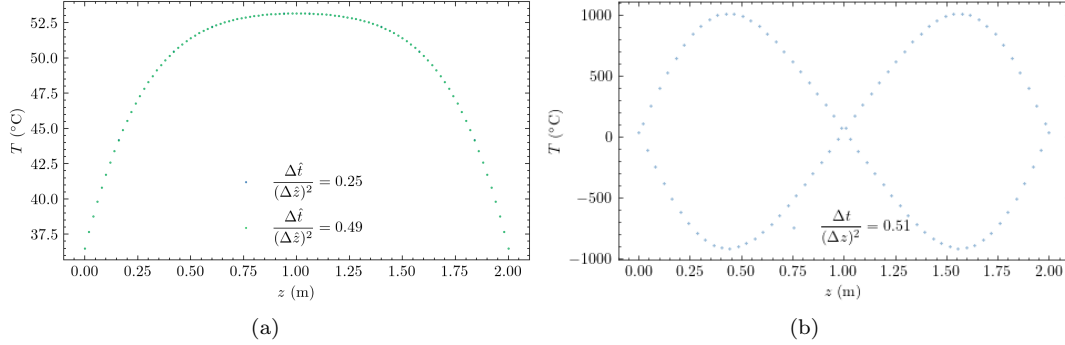


Figure 2: En 2a y 2b se representa la temperatura calculada en función de la posición y el mallado temporal para el tiempo adimensional $\hat{t}_a = 0.025$ correspondiente a $t = 71.095$ s. Nótese que las representaciones para los dos primeros mallados en 2a se solapan y que el mallado representado en 2b diverge dando resultados físicamente imposibles.

3.3 Método de Euler implícito

En este método la temperatura de cada coordenada depende de las temperaturas de espacios adyacentes pero del mismo instante de tiempo, tal y como queda manifestado en la ecuación 6:

$$\hat{T}_j^i = \frac{\gamma (\hat{T}_{j+1}^i + \hat{T}_{j-1}^i) + \hat{T}_j^{i-1} + \Delta \hat{t}}{1 + 2\gamma}, \quad (6)$$

donde $\gamma = \Delta \hat{t} / (\Delta \hat{z})^2$. Esta vez, $\Delta \hat{t} = 0.5 \Delta \hat{z}$ y $\Delta \hat{t} = \Delta \hat{z}$.

Como método implícito, para cada tiempo primero necesitamos usar como *placeholder* el vector de temperaturas del tiempo anterior, siendo el primer caso correspondiente a las condiciones iniciales. Calculamos cada vector un gran número de veces, 1000 en nuestro caso, para asegurarnos de que cada valor converga a la solución deseada mediante este método similar al Gauss-Seidel.

Para el tiempo \hat{t}_a podemos representar las temperaturas en función de la posición para cada ratio. En el gráfico 4a vemos esta representación para el ratio de 0.5 y para el de 1.

Los errores en la temperatura para el tiempo adimensional \hat{t}_a los calculamos igual que en el método anterior, obteniendo los siguientes gráficos: 4b y 4c, para los mallados $\frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{z}} = 0.5$ y $\frac{\Delta \hat{t}}{\Delta \hat{z}} = 0.1$ respectivamente.

Como podemos observar en las figuras 4b y 4c, el mallado que presenta una menor error es el de: $\Delta \hat{t} = 0.5 \Delta \hat{z}^2$, aunque podemos ver que aún así no es muy preciso. Probando con un ratio más pequeño para ver si mejora el resultado, uno de 0.25, obtenemos un resultado más preciso que los anteriores implícitos, pero no tanto como en el método explícito para el mismo mallado de 0.25.

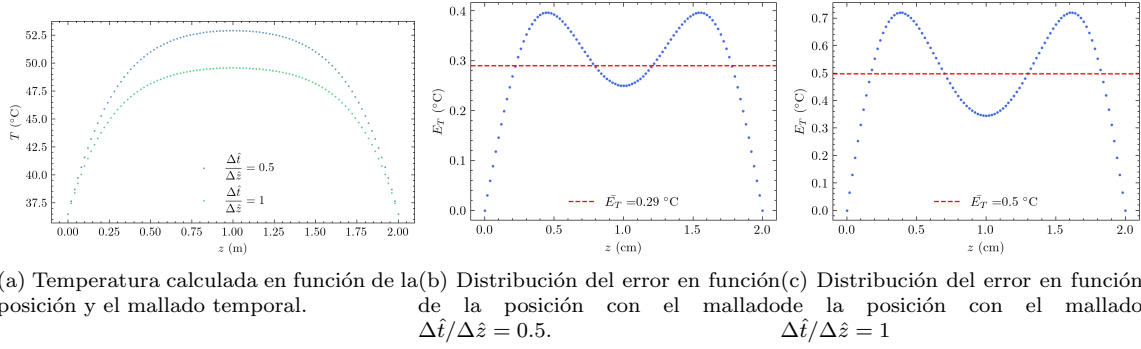


Figure 4: Empleando el método de Euler implícito: en la figura 4a se representan la variaciones de la temperatura respecto al espacio para el tiempo adimensional $\hat{t}_a = 0.025$ correspondiente a $t = 71.095$ s. En 4b y 4c se representan los errores en la temperatura para el mismo instante obtenidos con cada uno de los mallados temporales descritos. Las desviaciones estándar de 4b y 4c son 0.099 °C y 0.179 °C respectivamente.

Podemos observar que el método implícito goza de mayor error y de mayor dispersión de dicho error ya que el paso temporal es muy grande, por lo que perdemos precisión.

4 Presentación de los resultados

Después de ver los dos métodos de Euler (explícito e implícito) con distintos mallados, vemos que el de menor error es el explícito con mallado de 0.25 (mejor que el implícito con el mismo mallado), por tanto es el método con el que nos quedamos para resolver la cuestión planteada.

El tiempo óptimo con este método es: $t_{\text{máx}} = 58.085$ s, el cual difiere 0.120 del calculado analíticamente.

Podemos observar en la figura 5a que la zona central, precisamente la enferma, se calienta mas rápidamente que la externa. Esto nos es de especial utilidad ya que nos interesa maximizar la cicatrización en dicha zona sin afectar a la zona sana. Esto ocurre en $t_{\text{máx}}$, el cual podemos ver representado con una línea roja en la figura 5b de abajo, la cual nos muestra las células enfermas curadas y sanas muertas. Vemos, como hemos comentado, que en dicho tiempo se alcanza el máximo número de células problemáticas curadas y se empiezan a morir células sanas.

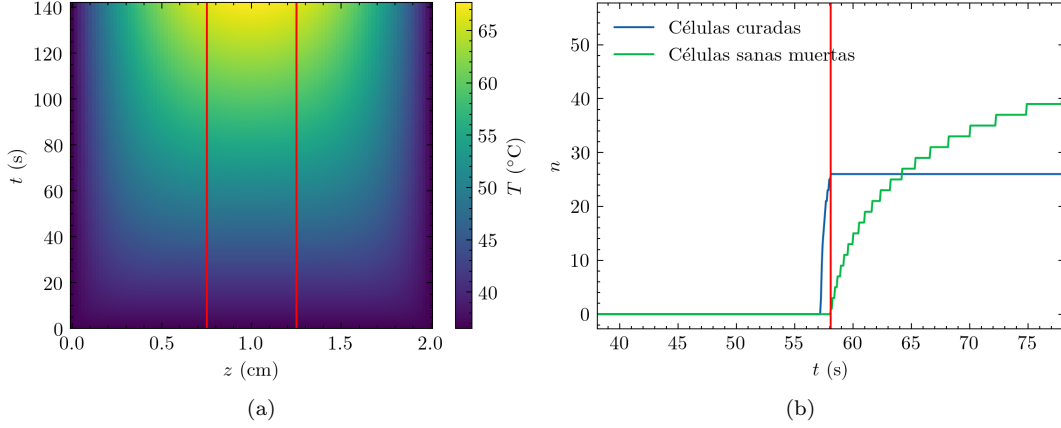


Figure 5: En 5a se muestra la evolución temporal de la temperatura. En 5b se muestran las células sanas y curadas en función del tiempo. Nótese que el tiempo máximo y óptimo para que el tratamiento no sea perjudicial está en rojo.

Además comentar que el mallado de 0.51 para el método explícito no es bueno, ya que se diverge con este mallado.

5 Conclusiones

Después de ver los resultados, se puede concluir rápidamente que el mejor método numérico de los utilizados en la práctica, es decir, aquel que se aproxima más a la realidad, al método analítico, es el explícito con mallado de 0.25, con un resultado de $t_{\text{máx}} = 58.085$ s dado que es el método que tiene menos error respecto al analítico.

Por tanto, el tiempo durante el que tenemos que aplicar el tratamiento de ablación cardíaca para que este sea óptimo es el comentado, $t = 58.085$, ya que maximiza el número de células malignas cicatrizadas sin poner en riesgo por quemadura a las sanas.

6 Vínculo al programa

Todos los cálculos y gráficos han sido programados con C++ y Python. Dejamos [aquí](#) un vínculo al repositorio donde tenemos todo lo utilizado.