



# 离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405, Tel: 62274392  
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921  
Email: zkchen@dlut.edu.cn  
zkchen00@hotmail.com  
QQ: 1062258606

# 回顾

- 关系的合成
- 关系的逆运算
- 关系的闭包

## 4.5 特殊关系

### 一、集合的划分和覆盖

定义：给定非空集合 $S$ ，设非空集合 $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，如果有

$$(a) \quad A_i \subseteq S \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(b) \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

则称集合 $A$ 是集合 $S$ 的覆盖。

注意：集合的覆盖不唯一。

例如： $S=\{a,b,c\}$ ， $A=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$ ，  
 $B=\{\{a\},\{b,c\}\}$ ， $A$ 和 $B$ 都是集合 $S$ 的覆盖。

# 一、集合的划分和覆盖

定义：给定非空集合 $S$ ，设非空集合 $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ，如果有

$$(a) \quad A_i \subseteq S \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(b) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \text{ 或 } A_i \cap A_j \neq \emptyset \quad (i = j)$$

$$(c) \quad \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

则称集合 $A$ 是集合 $S$ 的一个划分。

划分中的元素 $A_i$ 称为划分的类。

划分的类的数目叫划分的秩。

划分是覆盖的特定情况，即中元素互不相交的特定情况。

# 一、集合的划分和覆盖

例：设 $S=\{1,2,3\}$ ，考虑下列集合

$A = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ ;  $S$ 的覆盖

$B = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$ ;  $S$ 的覆盖

$C = \{\{1\}, \{2,3\}\}$ ;  $S$ 的覆盖、划分，秩为2

$D = \{\{1,2,3\}\}$ ;  $S$ 的覆盖、划分，秩为1，最小划分

$E = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ ;  $S$ 的覆盖、划分，秩为3，  
最大划分

$F = \{\{a\}, \{a,c\}\}$ ;

# 一、集合的划分和覆盖

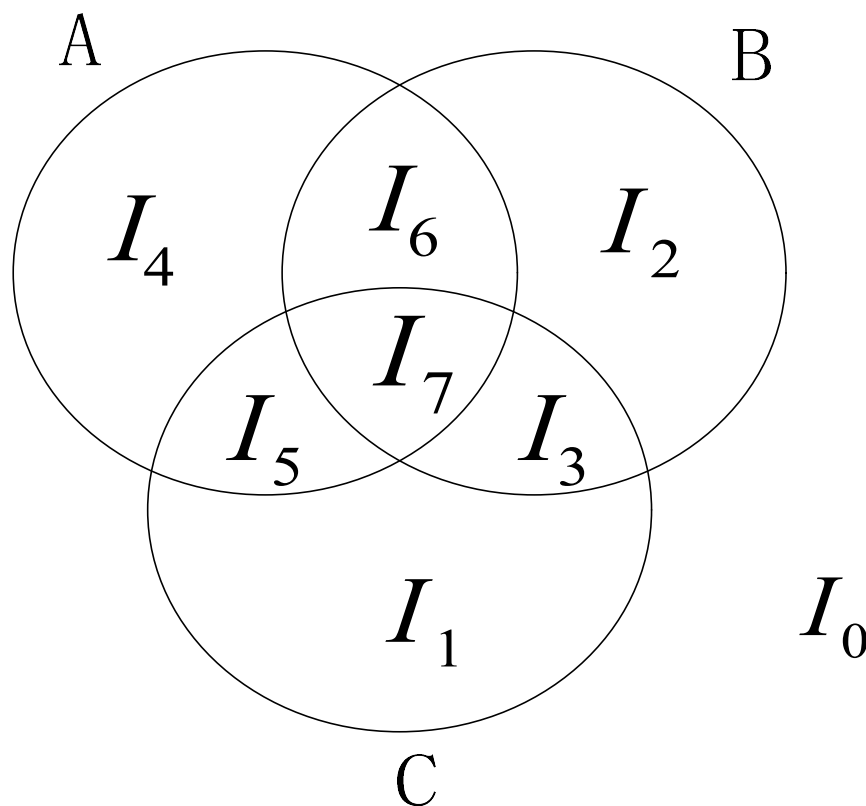
定义：设 $A$ 和 $A'$ 是非空集合 $S$ 的两种划分，并可以表示成

$$A = \bigcup_{i=1}^m A_i \quad A' = \bigcup_{j=1}^n A'_j$$

如果 $A'$ 的每一类 $A'_j$ ，都是 $A$ 的某一类 $A_i$ 的子集，那么称划分 $A'$ 是划分 $A$ 的加细，并称 $A'$ 加细了 $A$ 。如果 $A'$ 是 $A$ 的加细并且 $A' \neq A$ ，则称 $A'$ 是 $A$ 的真加细。

# 极小项、完全交集

定义：划分全集 $E$ 的过程，可看成是在表达全集的文氏图上划出分界线的过程。设 $A$ ， $B$ ， $C$ 是全集 $E$ 的三个子集。由 $A$ ， $B$ 和 $C$ 生成的 $E$ 的划分的类，称为极小项或完全交集。



$$I_0 = \sim A \cap \sim B \cap \sim C$$

$$I_1 = \sim A \cap \sim B \cap C$$

$$I_2 = \sim A \cap B \cap \sim C$$

$$I_3 = \sim A \cap B \cap C$$

$$I_4 = A \cap \sim B \cap \sim C$$

$$I_5 = A \cap \sim B \cap C$$

$$I_6 = A \cap B \cap \sim C$$

$$I_7 = A \cap B \cap C$$

$n$ 个子集生成 $2^n$ 个极小项，  
用  $I_0, I_1, \dots, I_{2^n-1}$  表示。

# 一、集合的划分和覆盖

定理：由全集的 $n$ 个子集 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 所生成的全部极小项集合，能够构成全集 $E$ 的一个划分。

证明：证明这个定理，只需证明全集 $E$ 中的每一个元素，都仅属于一个完全交集就够了。如果 $x \in E$ ，则 $x \in A_1$ ，或 $x \in \sim A_1, x \in A_2$  或 $x \in \sim A_2$ ； $\dots$ ； $x \in A_n$  或 $x \in \sim A_n$ 。由此可见，定有

$$x \in \left( \bigcap_{i=1}^n \hat{A}_i \right)$$

这里 $\hat{A}_i$ 或是 $A_i$ 或是 $\sim A_i$ 。试考察两个不同的完全交集 $T$ 。因为两个完全交集是不同的，就是说存在这样一个 $i$ ，使得 $T \subseteq A_i$ 和 $T \subseteq \sim A_i$ ，因此可有 $T \subseteq A_i \cap \sim A_i$ ，即 $T = \emptyset$ ；因而任何一个 $x \in E$ 都不能同时属于两个不同的完全交集。



# 一、集合的划分和覆盖

- 注意：

不难看出，这里所说的完全交集，与命题演算中的极小项相似。但是和极小项的集合不同，极大项的集合不能构成全集的划分。

## 二、等价关系

定义：设 $X$ 是任意集合， $R$ 是集合中的二元关系。如果 $R$ 是**自反的、对称的和可传递**的，则称 $R$ 是等价关系。即满足以下几点：

$$(a) \quad (\forall x)(x \in X \rightarrow xRx)$$

$$(b) \quad (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

$$(c) \quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

如果 $R$ 是集合 $X$ 中的等价关系，则 $R$ 的域是集合 $X$ 自身，所以，称 $R$ 是定义于集合 $X$ 中的关系。

**例如** 数的相等关系是任何数集上的等价关系。

**又例如** 一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系。

但朋友关系不是等价关系，因为它不可传递。

## 二、等价关系

例：给定集合 $X=\{1,2,\cdots, 7\}$ ， $R$ 是 $X$ 中的二元关系，并且给定成

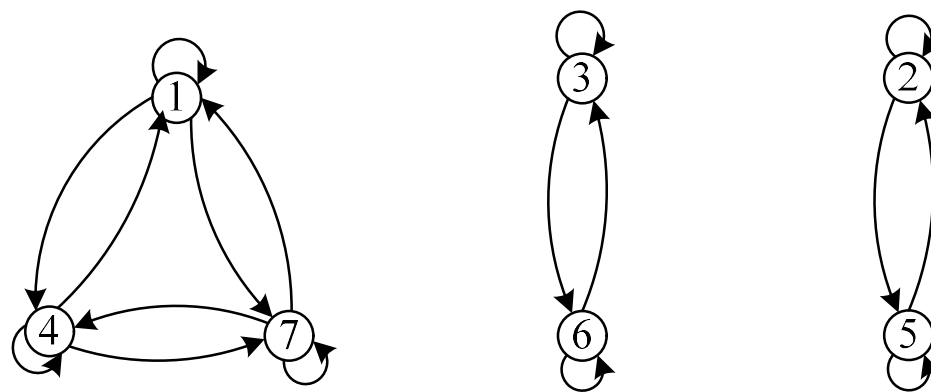
$$R = \{\langle x, y \rangle | x \in X \wedge y \in X \wedge ((x - y) \text{ 可被 } 3 \text{ 整除})\}$$

试证明 $R$ 是等价关系。

解： $R$ 的关系矩阵如下：

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$R$ 的关系图如下：



## 二、等价关系

注意：

上例是模数系统中模等价关系的特定情况。

设 $R_+$ 是正整数集合， $m$ 是正整数。对于 $x, y \in I_+$ 来说，可将 $R$ 定义成  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x - y \text{ 可被 } m \text{ 所整除}\}$ 。这里，“ $x - y$ 可被 $m$ 整除”等价于命题“当用 $m$ 去除 $x$ 和 $y$ 时，它们都有同样的余数”。故关系 $R$ 也称为模 $m$ 同余关系。

# 元素的等价

设 $R$ 是集合 $A$ 上的等价关系，若元素 $aRb$ ，则称 $a$ 与 $b$ 等价，或称 $b$ 与 $a$ 等价。

定义：设 $m$ 是个正整数， $x, y \in I$ 。如果对于某一个整数 $n$ ，有 $x-y=n \cdot m$ ，则称 $x$ 模 $m$ 等价于 $y$ ，并记作

$$x \equiv y(\text{mod } m)$$

整数 $m$ 称为等价的模数。

“ $\equiv$ ”表示模 $m$ 等价关系 $R$ 。

## 二、等价关系

定理：任何集合  $X \subseteq I$  中的模  $m$  相等关系，是一个等价关系。

证明：设  $R$  是任何集合  $X \subseteq I$  中的模  $m$  相等价关系。如果  $X = \Phi$ ，则  $R$  是个空关系，显然有是自反的、对称的和可传递的。如果  $X \neq \Phi$ ，则需考察下列三条：

(1) 对于任何  $x \in X$  来说，因为  $x - x = 0 \cdot m$ ，所以有  $x \equiv x \pmod{m}$ 。因此，模  $m$  相等关系是自反的。

(2) 对于任何  $x, y \in X$  来说，如果  $x \equiv y \pmod{m}$ ，则存在某一个  $n$ ，能使  $x - y = n \cdot m$ 。于是可有  $y - x = (-n) \cdot m$ ，因此有  $y \equiv x \pmod{m}$ ，即模  $m$  相等关系是对称的。

(3) 设  $x, y, z \in X$ ， $x \equiv y \pmod{m}$  和  $y \equiv z \pmod{m}$ 。于是存在  $n_1, n_2 \in I$ ，能使  $(x - y) = n_1 \cdot m$  和  $(y - z) = n_2 \cdot m$ 。

而  $x - z = x - y + y - z = n_1 \cdot m + n_2 \cdot m = (n_1 + n_2) \cdot m$ ，从而可有  $x \equiv z \pmod{m}$ ，即模  $m$  相等关系是可传递的。

# 等价类

定义 设  $R$  是集合  $A$  上的等价关系，则  $A$  中等价于元素  $a$  的所有元素组成的集合称为  $a$  生成的等价类，用  $[a]_R$  表示，即

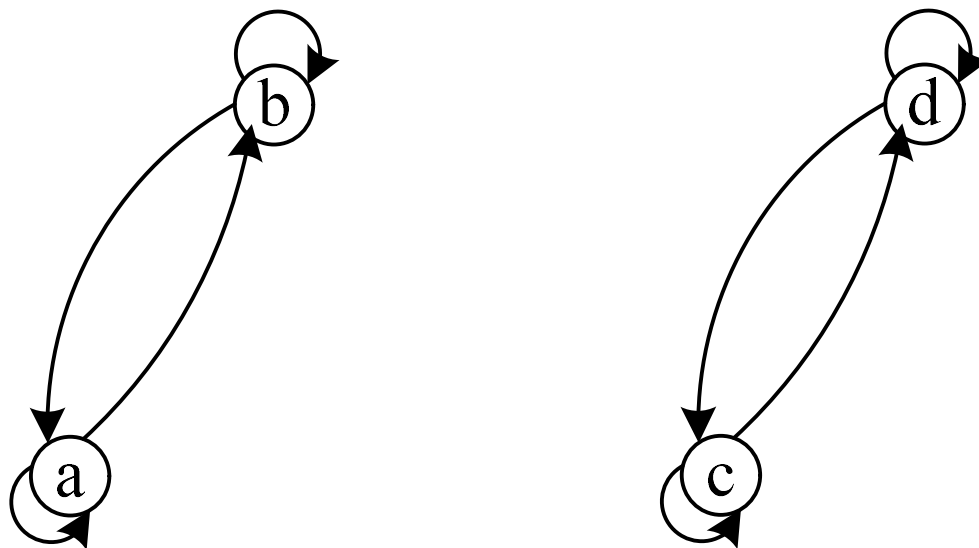
$$[a]_R = \{b \mid b \in A \text{ 且 } aRb\}$$

说明：简单起见，有时候把  $[a]_R$  简单写作  $[a]$  或  $a/R$ 。

# 等价类

例： 设 $X=\{a,b,c,d\}$ ， $R$ 是 $X$ 中的等价关系，并把 $R$ 给定成  
 $R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$

则：  $[a]_R = [b]_R = \{a,b\}$   
 $[c]_R = [d]_R = \{c,d\}$





# 等价类的性质

设 $X$ 是一集合， $R$ 是 $X$ 中的等价关系

1. 如果 $x \in X$ , 则 $x \in [x]_R$ 。该性质是明显的，因为 $R$ 是自反的，所以有 $xRx$ , 于是 $x \in [x]_R$

2. 对于所有的 $x, y \in X$ , 或者 $[x]_R = [y]_R$ , 或者 $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

证明：当 $X = \Phi$ , 上述结论肯定为真。

当 $X \neq \Phi$ 时，分两种情况讨论

(1)  $xRy$

(2)  $x \not R y$

# 等价类的性质

(1)  $xRy$  若  $z \in [x]_R$  , 则  $xRz$  ,  
由  $R$  的对称性有  $zRx$  ,  
又由  $R$  的传递性有  $zRy$  , 因此  $z \in [y]_R$   
故  $[x]_R \subseteq [y]_R$  。  
类似地可以证明  $[y]_R \subseteq [x]_R$   
由上得  $[x]_R = [y]_R$

(2)  $x \not R y$  假设  $[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$  ,  
因此有  $z \in [x]_R$  且  $z \in [y]_R$  ,  
于是由  $xRz, zRy$  , 得  $xRy$  , 与  $x \not R y$  相矛盾  
故  $[x]_R \cap [y]_R = \phi$

## 等价类的性质

3、对任何  $x \in X$ ,  $\cup [x]_R = X$

我们用证左边是右边的子集并且右边也是左子集的方法来证上面的等式.

对任何  $x \in X$ , 则  $x \in [x]_R$  而  $[x]_R \subseteq \cup [x]_R$  于是  
 $x \in \cup [x]_R$  即  $X \subseteq \cup [x]_R$

而  $x \in \cup [x]_R$  则有  $x \in [x]_R$  而  $[x]_R \subseteq X$  于是  
有  $x \in X$  即  $\cup [x]_R \subseteq X$

综上  $\cup [x]_R = X$

# 等价类的性质

4.  $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$

证明：假定  $z \in \bigcup_{x \in X} [x]_R$ ，对于某个  $x \in X$ ，有  $z \in [x]_R$ 。  
由于  $[x]_R \subseteq X$ ，会有  $z \in X$ ，因而  $\bigcup_{x \in X} [x]_R \subseteq X$ 。

设  $z \in X$ ，于是  $z \in [z]_R \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_R$

因而  $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]_R$   
证毕。

# 等价类的性质

**例** 设  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $A$  上的关系  
 $R = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle, \langle c, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle c, a \rangle, \langle d, d \rangle\}$

**R** 是 **A** 上的等价关系

$$[a]_R = [b]_R = [c]_R = \{a, b, c\}$$

$$[d]_R = \{d\}$$

同一个等价类中元素均相互等价。不同等价类中的元素互不等价。

由  $A$  的各元素所生成的等价类必定覆盖  $A$ , 决定了集合  $A$  的一种划分。

## 二、等价关系

定理：设 $R$ 是非空集合 $X$ 中的等价关系。 $R$ 的等价类的集合  $\{[x]_R \mid x \in X\}$  是 $X$ 的一个划分。

定义：设 $R$ 是非空集合 $X$ 中的等价关系。 $R$ 的各元素生成的等价类集合  $\{[x]_R \mid x \in X\}$  叫按 $R$ 去划分 $X$ 的商集，记作 $X/R$ ，也可以写成 $X(\bmod R)$ 。

由定义可知，按 $R$ 对集合 $X$ 的划分 $X/R$ 是一个集合，并且 $X/R$ 的基数是 $X$ 的不同的 $R$ 等价类的数目，因此 $X/R$ 的基数又称为等价关系 $R$ 的秩。

# 特殊的等价关系

全域关系：令等价关系 $R_I = X \times X$ ，这里 $X$ 的每一个元素与 $X$ 的所有元素都有 $R_I$ 的关系。按 $R_I$ 划分 $X$ 的商集乃是集合 $\{X\}$ 。等价关系 $R_I$ 是全域关系。全域关系会造成集合 $X$ 的最小划分。

恒等关系 $R$ ： $X$ 的每一个元素仅关系到它自身，而不关系到其它元素。显然， $R$ 是个恒等关系。按 $R$ 划分 $X$ 的商集，仅由单元素集合组成。恒等关系 $R$ 会造成集合 $X$ 的最大划分。这些划分均称作 $X$ 的平凡划分。

# 等价关系与集合的划分

例：令 $R$ 是整数集合 $I$ 中的“模3同余”关系， $R$ 可给定成  $R = \{\langle x, y \rangle \mid x \in I \wedge y \in I \wedge (x - y) \text{ 被 } 3 \text{ 整除} \}$

求 $I$ 的元素所生成的 $R$ 等价类。

解：等价类是

$$[0]_R = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$$

$$[1]_R = \{\cdots, -5, -2, 1, 4, 7, \cdots\}$$

$$[2]_R = \{\cdots, -4, -1, 2, 5, 8, \cdots\}$$

$$I/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R\}$$

可以看出，等价关系可以造成集合的一个划分。



# 等价关系与集合的划分

定理：设**C**是非空集合**X**的一个划分，则由这个划分所确定的下述关系**R**

$$xRy \Leftrightarrow (\exists S)(S \subseteq C \wedge x \in S \wedge y \in S)$$

必定是个等价关系，并称**R**为由**C**划分导出的**X**中的等价关系。

证明：要证明**R**是个等价关系，就必须证明**R**是自反的、对称的和可传递的。

(a)由于**C**是**X**的划分，**C**必定覆盖**X**。对任意的  $x \in X$ ，必有**X**属于**C**的某一个元素**S**。所以对于每一个  $x \in X$ ，都有  $xRx$ ，即**R**是自反的。

# 等价关系与集合的划分

证明:

(b) 假定 $xRy$ 。于是存在一个 $S \subseteq C$ ，且 $x \in S$ 和 $y \in S$ ，所以有 $yRx$ 。因此， $R$ 是对称的。

(c) 假定 $xRy$ 和 $yRz$ 。于是存在两个元素 $S_1 \subseteq C$ 和 $S_2 \subseteq C$ ，且 $x, y \in S_1$ 和 $y, z \in S_2$ ，所以有 $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ 。这样就有 $S_1 = S_2$ ，因此， $z \in S_1$ 。从而 $xRz$ ，所以有 $R$ 是可传递的。综上， $R$ 是个等价关系。证毕。

可以看出，给定集合的一种划分，就可以写出一个等价关系。反过来，集合中的等价关系也能够生成该集合的划分。

# 等价关系与集合的划分

例：设 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 和 $C=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$ 。试写出由划分 $C$ 导出的 $X$ 中的等价关系。

解：用 $R$ 表示这个等价关系，（每一个类做笛卡尔乘积）

$$R = \{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle c,c \rangle, \langle d,d \rangle, \langle d,e \rangle, \langle e,d \rangle, \langle e,e \rangle\}$$

**注意：集合中的等价关系能够生成该集合的划分，反过来集合中的任何一种划分又能确定一种等价关系。**

# 等价关系与集合的划分

有时，用不同的方法定义的两两种等价关系，可能会产生同一个划分。

例如，设集合 $X=\{1,2,\cdots, 9\}$ ， $R_1$ 和 $R_2$ 是 $X$ 中的两种关系，并把 $R_1$ 和 $R_2$ 规定成

$$R_1 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge (x - y) \text{ 被 } 3 \text{ 整除} \}$$

$$R_2 = \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in X \wedge (x \text{ 和 } y \text{ 在 } A \text{ 的同一列中}) \}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

两者虽然定义不同，但是 $R_1=R_2$

“划分”的概念和“等价关系”的概念本质上是相同的。

# 作业

- **104: 29, 31, 33, 35, 37**