A 卷

一、选择题（共 45 分，每小题 3 分）

1、设 $f(x)=\dfrac{\tan x}{|x|}\arctan\dfrac{1}{x}$，则（　C　）

(A) $x=0$ 是振荡间断点.　(B) $x=0$ 是无穷间断点.

(C) $x=0$ 是可去间断点.　(D) $x=0$ 是跳跃间断点.

2、$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=$（　A　）

(A) $\dfrac{1}{2}$.　(B) $-\dfrac{1}{2}$.　(C) 0.　(D) ∞.

3、设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-ax-b)=0$，则常数（　A　）

(A) $a=1$，$b=1$.　(B) $a=1$，$b=-1$.

(C) $a=-1$，$b=1$.　(D) $a=-1$，$b=-1$.

4、设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=$（　B　）

(A) $6t+5$.　(B) $\dfrac{(6t+5)(1+t)}{t}$.

(C) $(6t+2)(1+t)^2$.　(D) $-(6t+2)(1+t)^2$.

5、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^3-ax^2y^2+by^3=0$ 所确定，$y(1)=1$，$x=1$ 是 $y=y(x)$ 的驻点，则常数（　C　）

(A) $a=3$，$b=2$.　(B) $a=\dfrac{5}{2}$，$b=\dfrac{3}{2}$.

(C) $a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$.　(D) $a=-2$，$b=-3$.

6、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$，则（　C　）

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不连续.

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，但不可导.

(C) $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处可导.

(D) $f(x)$ 处处可导，且 $f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\text{为有理数} \\ 0, & x\text{为无理数} \end{cases}$.

7、设$f(x)$在点x_0的某邻域内有三阶连续导数，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)=0$，

$f'''(x_0)>0$，则（ **D** ）

(A) $f(x_0)$是$f(x)$的一个极大值.

(B) $f(x_0)$是$f(x)$的一个极小值.

(C) $f'(x_0)$是$f'(x)$的一个极大值.

(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的一个拐点.

8、设$f(x)=\cos^4 x+\sin^4 x$，则$f^{(2020)}(0)=$（ **B** ）

(A) 4^{2018}. **(B)** 4^{2019}. **(C)** 4^{2020}. **(D)** 4^{2021}.

9、定积分$\int_0^1 \frac{1-x}{(1+x)(1+x^2)}\mathrm{d}x=$（ **D** ）

(A) $\ln 2+\frac{\pi}{4}$. **(B)** $\ln 2-\frac{\pi}{4}$. **(C)** 0. **(D)** $\frac{1}{2}\ln 2$.

10、定积分$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x}\mathrm{d}x=$（ **D** ）

(A) $\frac{1}{3}$. **(B)** $\frac{\pi}{3}$. **(C)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **(D)** $\frac{4}{3}$.

11、定积分$\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x=$（ **D** ）

(A) $\frac{\pi}{3}-1$. **(B)** $1-\frac{\pi}{4}$. **(C)** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$. **(D)** $\frac{\pi}{2}-1$.

12、定积分$\int_0^{6\pi}(\sin x+\sin^2 x)\cos^4 x\,\mathrm{d}x=$（ **D** ）

(A) $\frac{3}{2}$. **(B)** $\frac{3\pi}{4}$. **(C)** $\frac{3}{4}$. **(D)** $\frac{3\pi}{8}$.

13、设D是由抛物线$y=x(1-x)\ (0\le x\le 1)$与x轴围成的平面图形，则D绕y轴旋转一周所形成的旋转体的体积$V=$（ **A** ）

(A) $\frac{\pi}{6}$. **(B)** $\frac{\pi}{4}$. **(C)** $\frac{\pi}{3}$. **(D)** $\frac{\pi}{2}$.

14、设曲线$y=y(x)$在其上任一点(x,y)处的切线斜率是$-\frac{2x}{y}$（$y\neq 0$时），则此曲线是（ **C** ）

(A) 摆线. **(B)** 抛物线. **(C)** 椭圆. **(D)** 双曲线.

15、(工数)以下命题中错误的是（ **B** ）

(A) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

(B) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续且有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(C) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(D) 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)$ 有界，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

15、（高数、微积分）

设 $f(x)$ 连续、单调增加，$f(0)=0$，$F(x)=\int_0^x xf(x-t)\,\mathrm{d}t$，则（ **B** ）

(A) $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少.　　**(B)** $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

(C) $F'(x)\equiv 0$.　　**(D)** $F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上变号.

二、（高数、微积分）（15 分）

求二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+y'-2y=3\mathrm{e}^x$ 的通解.

解 特征方程 $r^2+r-2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=-2$.

对应的齐次方程的通解 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}$.

设原方程特解 $y^*=Ax\mathrm{e}^x$，则 $y^{*\prime}=A(x+1)\mathrm{e}^x$，$y^{*\prime\prime}=A(x+2)\mathrm{e}^x$，

代入原方程，得 $A(x+2)\mathrm{e}^x+A(x+1)\mathrm{e}^x-2Ax\mathrm{e}^x=3\mathrm{e}^x$，解得 $A=1$，所以 $y^*=x\mathrm{e}^x$.

原方程的通解为 $y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-2x}+x\mathrm{e}^x$.

二、（工数）（15 分）求伯努利方程 $y'=\dfrac{y^2+x^3}{2xy}\ (x>0)$ 的通解.

解 $y'-\dfrac{1}{2x}y=\dfrac{x^2}{2}y^{-1}$，变形 $yy'-\dfrac{1}{2x}y^2=\dfrac{x^2}{2}$.

令 $z=y^2$，则 $\dfrac{1}{2}z'-\dfrac{1}{2x}z=\dfrac{x^2}{2}$，即 $z'-\dfrac{1}{x}z=x^2$.

$$z=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int x^2\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+c\right)=x\left(\int x^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x+c\right)=\frac{x^3}{2}+cx.$$

原方程的通解为 $y^2=\dfrac{x^3}{2}+cx$.

三、（15 分）求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}}$.

解 $\left(\dfrac{1+x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}}=e^{\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}\ln\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)}$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2\ln(1+2x)}\ln\left(\frac{1+x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^3}\ln\left(1+\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^3}\cdot\frac{x-\sin x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-\sin x}{2x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{6x^2}=\frac{1}{12},$$

原极限 $=\mathrm{e}^{\frac{1}{12}}$.

四、（15 分）设 $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，证明** $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$，**并由此计算** $\int_0^{\pi}\dfrac{x}{2+\sin x}\mathrm{d}x$.

解 换元，令 $x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(a+b-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x$$

所以 $\int_0^{\pi}\dfrac{x}{2+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\dfrac{(\pi-x)}{2+\sin(\pi-x)}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\dfrac{\pi-x}{2+\sin x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x$.

再令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$，则 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$， $\mathrm{d}x=\dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$，

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}}\cdot\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2+u}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\arctan\frac{u+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}.$$

五、（10 分）设函数 $f(x)$ **在** $[0,1]$ **上连续，在** $(0,1)$ **内二阶可导，且** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$. **证明：**

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，**使得** $f(\xi)=0$.

(2) 存在 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，$\xi_1\neq\xi_2$，**使得** $f'(\xi_1)-f(\xi_1)=f'(\xi_2)-f(\xi_2)=0$.

(3) 存在$\eta \in (0,1)$，使得$f''(\eta) - 3f'(\eta) + 2f(\eta) = 0$.

证 由$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$，知$f(0) = 0$，$f'(0) = 1$；由$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$，知$f(1) = 0$，$f'(1) = 2$.

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} > 0$，由极限的局部保号性，知存在$a \in (0, \frac{1}{2})$，使得$f(a) > 0$；

同理，由$\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{x-1} > 0$，知存在$b \in (\frac{1}{2}, 1)$，使得$f(b) < 0$.

由连续函数的零点定理，存在$\xi \in (a,b) \subset (0,1)$，使得$f(\xi) = 0$.

(2) 令$g(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x)$ $(x \in [0,1])$，则$g(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且

$g(0) = g(\xi) = g(1) = 0$，所以由 **Rolle** 定理，存在$\xi_1 \in (0,\xi)$，$\xi_2 \in (\xi,1)$，使得

$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$，$f'(\xi_1) - f(\xi_1) = f'(\xi_2) - f(\xi_2) = 0$.

(3) 令$h(x) = \mathrm{e}^{-2x}(f'(x) - f(x))$ $(x \in [\xi_1, \xi_2])$，则$h(x)$在$[\xi_1, \xi_2]$上可导，且

$h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$，所以由 **Rolle** 定理，存在$\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0,1)$，使得$h'(\eta) = 0$，

$f''(\eta) - 3f'(\eta) + 2f(\eta) = 0$.

B 卷

一、1A；2A；3C；4C；5C；6B；7B；8D；9D；10D；11D；12D；13B；14A；15C.

二、同 A 三

三、同 A 四

四、同 A 二

五、同 A 五