

离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405, Tel: 62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ: 1062258606

回顾

- 集合的定义
- 集合的描述
- 内涵与外延
- 集合的基数
- 集合间的关系
 - 相等
 - 包含、真包含
- 全集
- 补集
- 子集、幂集运算
 - 子集的二进制描述

3.2集合的运算

一、相交运算

定义：由集合 A 和 B 的所有公共元素所组成的集合，称为集合 A 和 B 的交集。记作 $A \cap B$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

例如： 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{d,f,a\}$, $C=\{e,f,g\}$

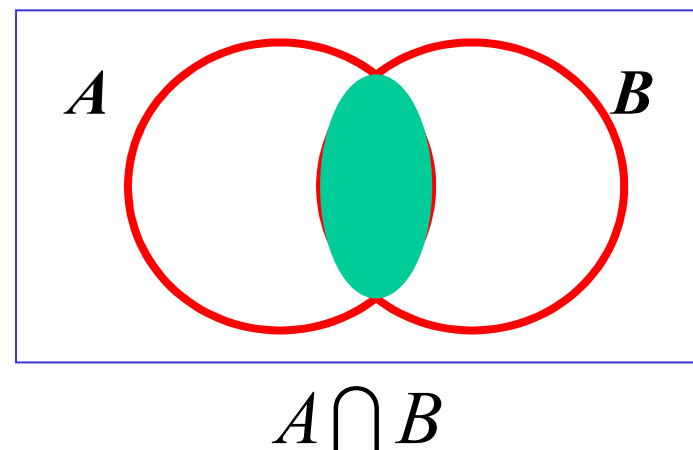
则 $A \cap B = \{a, d\}$

$$B \cap C = \{f\}$$

$$A \cap C = \emptyset$$

可以看出

$$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$$



一、相交运算

设 $A \subseteq B$, 求证 $A \cap C \subseteq B \cap C$.

证明：若 $x \in A$ 则 $x \in B$ ，对任一 $x \in A \cap C$ ，则 $x \in A$ 且，
即 $x \in C$ 且 $x \in B$ ，故 $x \in C$ ，因此 $x \in B \cap C$ 。

$$A \cap C \subseteq B \cap C$$

集合的交运算具有如下性质：

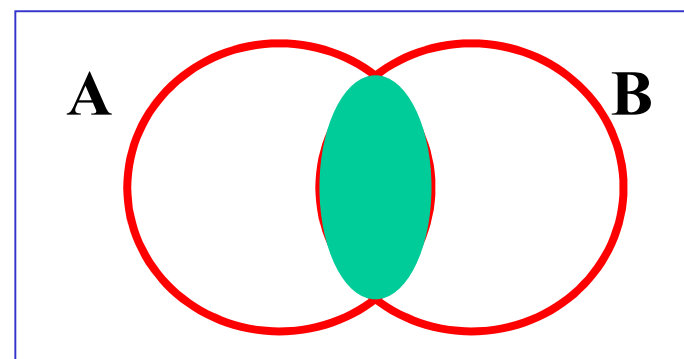
(a) $A \cap A = A$

(b) $A \cap \emptyset = \emptyset$

(c) $A \cap E = A$

(d) $A \cap B = B \cap A$

(e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$



$$A \cap B$$

一、相交运算

试证明 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

$$\begin{aligned}\text{证明: } (A \cap B) \cap C &= \{x \mid x \in A \cap B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cap C\} \\ &= \{x \mid x \in A \cap (B \cap C)\}\end{aligned}$$

类推至多个集合的情况，集合的交运算仍满足结合律。

假设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n ，那么这些集合的交集可表示为：

$$P = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

$$= \bigcap_{i=1}^n A_i$$

二、联合运算（集合的并）

定义：由集合 A 和 B 的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的并集，记作 $A \cup B$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

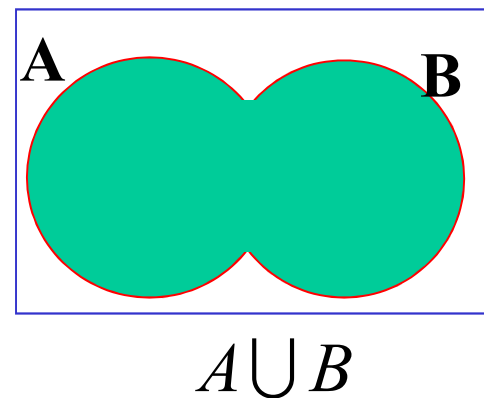
例如 设 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{c,d,f\}$, $C=\{b,e\}$

那么 $A \cup B = \{a,b,c,d,f\}$

$$A \cup C = \{a,b,c,e\}$$

$$B \cup C = \{b,c,d,e,f\}$$

可以看出 $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$



二、集合的并

集合的并运算具有如下性质：

$$(a) A \cup A = A$$

$$(b) A \cup E = E$$

$$(c) A \cup \emptyset = A$$

$$(d) A \cup B = B \cup A$$

$$(e) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

注意：假设有 n 个集合 A_1, A_2, \dots, A_n ，那么这些集合的并集可表示为：

$$W = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$= \bigcup_{i=1}^n A_i$$

二、集合的并

例1：假设 $A \subseteq B, C \subseteq D$, 则 $A \cup C \subseteq B \cup D$.

证明：对任意 $x \in A \cup C$, 有 $x \in A \vee x \in C$,

若 $x \in A$, 由 $A \subseteq B$ 可得 $x \in B$, 故 $x \in B \cup D$;

若 $x \in C$, 由 $C \subseteq D$ 可得 $x \in D$, 故 $x \in B \cup D$ 。

因此, $A \cup C \subseteq B \cup D$

二、集合的并

定理3.2-1: 设 A, B, C 为三个集合, 那么

$$(a) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$(b) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

证明: 对于任意的 x , 若

$$\begin{aligned} & x \in A \cap (B \cup C) \\ &= x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &= x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &= (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &= x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &= x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

由 x 的任意性可知(a)成立。

同理可以证明(b)。

二、集合的并

定理3.2-2: 设 A, B 为任意两个集合, 那么

$$(a) A \cup (A \cap B) = A$$

$$(b) A \cap (A \cup B) = A$$

$$\begin{aligned} \text{证明:} (a) A \cup (A \cap B) &= (A \cap E) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (E \cup B) \\ &= A \cap E \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{证明:} (b) A \cap (A \cup B) &= (A \cup A) \cap (A \cup B) \\ &= A \cup (A \cap B) \\ &= A \end{aligned}$$

二、集合的并

定理3.2-3: $A \subseteq B$, 当且仅当 $A \cup B = B$ 或 $A \cap B = A$

证明: (1) 若 $A \subseteq B$, 对任意 $x \in A$, 必有 $x \in B$;

对任意 $x \in A \cup B$, 则 $x \in A$ 或 $x \in B$, 即 $x \in B$,

所以 $A \cup B \subseteq B$ 。

又 $B \subseteq A \cup B$, 故得到 $A \cup B = B$ 。

(2) 若 $A \cup B = B$, 因为 $A \subseteq A \cup B$, 故 $A \subseteq B$ 。

同理可证明 $A \subseteq B$, 当且仅当 $A \cap B = A$ 。

交集、并集的思考题

老师讲完交集、并集的概念之后，提问学生：

- (1) 设 $A=\{x \mid x \text{ 是参加百米赛跑的同学}\}$,
 $B=\{x \mid x \text{ 是参加跳高比赛的同学}\}$, 求 $A \cap B$.
- (2) 设 $A=\{x \mid x \text{ 是红星农场的汽车}\}$, $B=\{x \mid x \text{ 是红星农场的拖拉机}\}$, 求 $A \cup B$.

一学生答道：

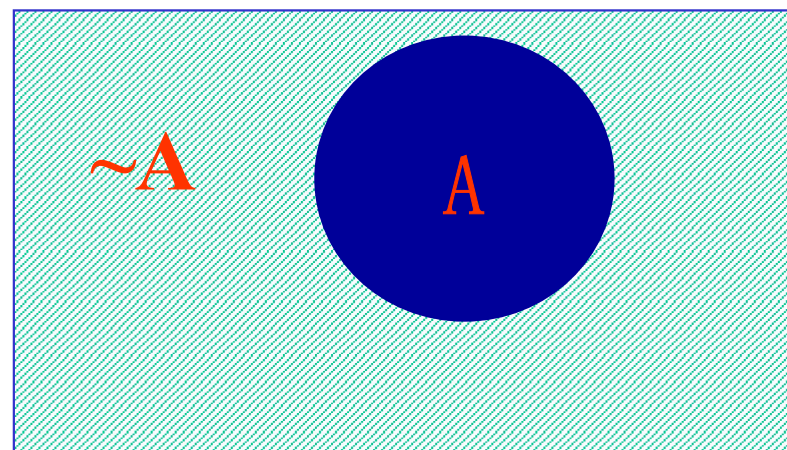
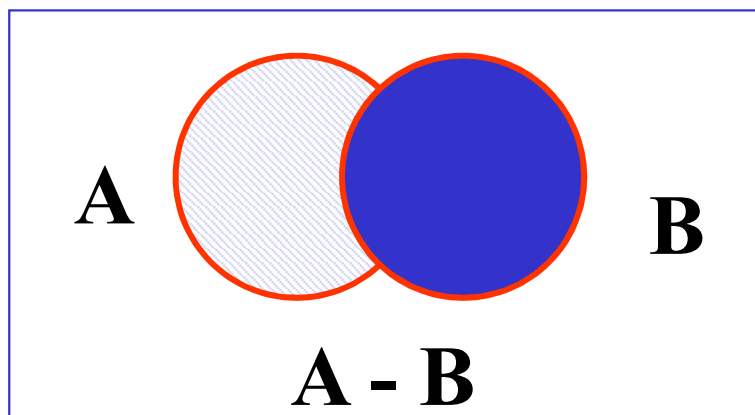
- (1) 中 $A \cap B=\{x \mid x \text{ 是参加百米障碍赛的同学}\}$.
- (2) 中 $A \cup B=\{x \mid x \text{ 是红星农场的联合收割机}\}$.

三、差分运算（集合的补）

定义：设 A, B 是两个集合，所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的差集或 B 对 A 的相对补集。记作 $A - B$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

绝对补集： B 对 E 的相对补集叫做绝对补集，简称补集，记作 $\sim B$



三、差分运算（集合的补）

例：设 A 是小于10的素数集合， B 是奇数集合，求 $A-B$ 。

解： $A=\{2,3,5,7\}$ $B=\{1,3,5,7,9\}$
 $A-B=\{2\}$

例：设 $U=I$ (I 是整数集合)

$$A = \{i \mid i \in I, i > 0\}$$

解： $U - A = \{i \mid i \in I, i \leq 0\}$

$$A - U = \emptyset$$

三、差分运算（集合的补）

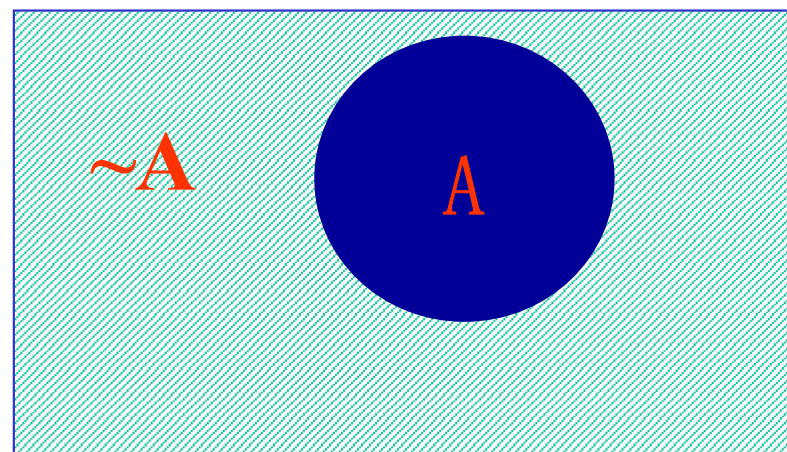
集合的差分运算还具有如下性质：

$$(a) \sim(\sim A) = A$$

$$(b) \sim E = \emptyset$$

$$(c) A \cup \sim A = E$$

$$(d) A \cap \sim A = \emptyset$$



三、差分运算（集合的补）

定理3.2-4： 设A,B为任意两个集合，则下列关系式成立。

$$(a) \sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B$$

$$(b) \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

证明： $(a) \sim (A \cup B) = \{x \mid x \in \sim (A \cup B)\}$

$$\begin{aligned} &= \{x \mid x \notin A \cup B\} \\ &= \{x \mid \neg x \in A \cup B\} \\ &= \{x \mid \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\ &= \{x \mid \neg x \in A \wedge \neg x \in B\} \\ &= \{x \mid x \in \sim A \wedge x \in \sim B\} \\ &= \{x \mid x \in \sim A \cap \sim B\} \\ &= \sim A \cap \sim B \end{aligned}$$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2-5： 设 A, B 为任意两个集合， 则下列关系式成立。

$$(a) A - B = A \cap \sim B$$

$$(b) A - B = A - (A \cap B)$$

证明: (b) 设 $x \in A - B$ ， 即 $x \in A$ 且 $x \notin B$ ， 因为 $x \notin B$

则必有 $x \notin A \cap B$ ， 故有 $x \in A - (A \cap B)$ ， 即为

$$A - B \subseteq A - (A \cap B)。$$

设 $x \in A - (A \cap B)$ ， 则 $x \in A$ 且 $x \notin (A \cap B)$ ， 即

$x \in A$ 且 $x \in \sim A$ 或者 $x \in \sim B$ ， 显然只能 $x \in A$ 与

$x \in \sim B$ 成立。 即 $x \in A - B$ 。 $A - (A \cap B) \subseteq A - B$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2-6： 设A,B,C为任意三个集合，则下列关系式成立。

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证： $A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \sim C)$
 $= A \cap B \cap \sim C$

$$\begin{aligned} & \text{又} (A \cap B) - (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cap \sim (A \cap C) \\ &= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C) \\ &= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C) \\ &= A \cap B \cap \sim C \end{aligned}$$

因此， $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

三、差分运算（集合的补）

定理3.2-7: 设 A, B 是任意两个集合, 若 $A \subseteq B$, 则

$$(a) \sim B \subseteq \sim A$$

$$(b) (B - A) \cup A = B$$

证: (a) 若 $x \in A$, 则 $x \in B$; 因此, 若 $x \notin B$, 必有 $x \notin A$ 。
即若 $x \in \sim B$, 则 $x \in \sim A$ 。即 $\sim B \subseteq \sim A$ 。

$$\begin{aligned} \text{证:} & (b) (B - A) \cup A \\ &= (B \cap \sim A) \cup A \\ &= (B \cup A) \cap (\sim A \cup A) \\ &= (B \cup A) \cap E \\ &= B \cup A \end{aligned}$$

因为 $A \subseteq B$, 所以 $B \cup A = B$ 。(b)得证。

四、对称差分运算

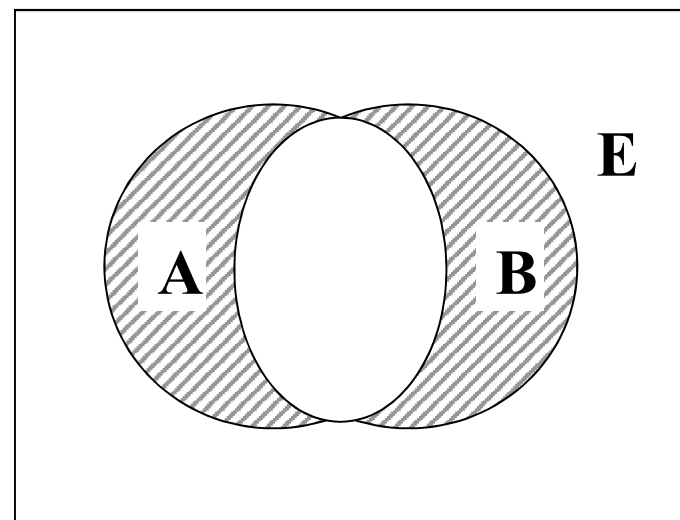
定义：设 A 、 B 为任意两个集合。属于 A 但不属于 B 的所有元素和属于 B 但不属于 A 的所有元素的并集，称为 A 和 B 的**对称差集**，记作 $A \oplus B$ 。

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

例如： $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 2, 4\}$

则 $A \oplus B = \{1, 4\}$



四、对称差分运算

集合的对称差分运算满足如下性质：

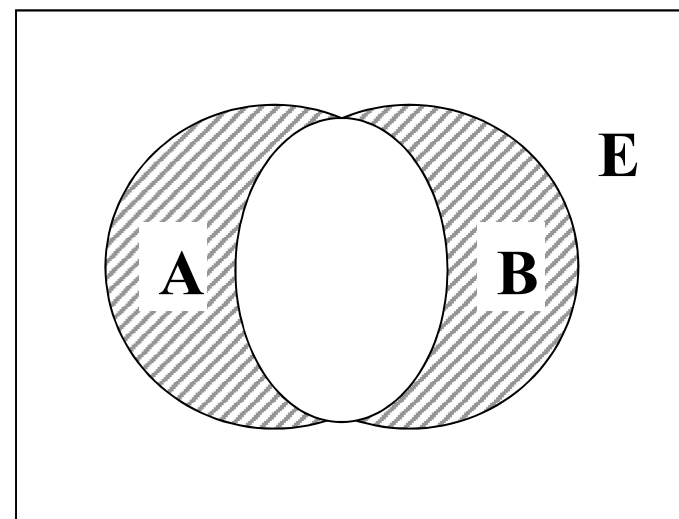
$$(a) A \oplus B = B \oplus A$$

$$(b) A \oplus \emptyset = A$$

$$(c) A \oplus A = \emptyset$$

$$(d) A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

$$(e) (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



四、对称差分运算

求证 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ 。

$$\begin{aligned}\text{证: } (A \oplus B) \oplus C &= ((A \oplus B) \cap \sim C) \cup (\sim (A \oplus B) \cap C) \\ &= (((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C) \cup (\sim ((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap C) \\ &= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cup B) \cap (A \cup \sim B) \cap C\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}&(\sim A \cup B) \cap (A \cup \sim B) \cap C \\ &= ((\sim A \cup B) \cap A) \cup ((\sim A \cup B) \cap \sim B) \cap C \\ &= ((\sim A \cap A) \cup (A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim B)) \cap C \\ &= (\emptyset \cup (A \cap B) \cup (\sim A \cap \sim B) \cup \emptyset) \cap C \\ &= (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)\end{aligned}$$

四、对称差分运算

所以, $(A \oplus B) \oplus C$

$$= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C) \\ \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

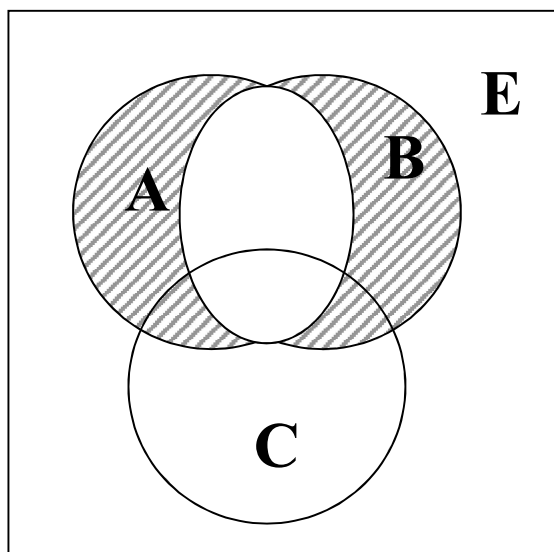
又因为, $A \oplus (B \oplus C)$

$$= (A \cap \sim (B \oplus C)) \cup (\sim A \cap (B \oplus C)) \\ = (A \cap \sim ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C))) \cup (\sim A \cap ((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C))) \\ = (A \cap (\sim B \cup C) \cap (B \cup \sim C)) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C \cup \sim A \cap \sim B \cap C) \\ = (A \cap \sim B \cap B) \cup (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap C \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \\ B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C) \\ = (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

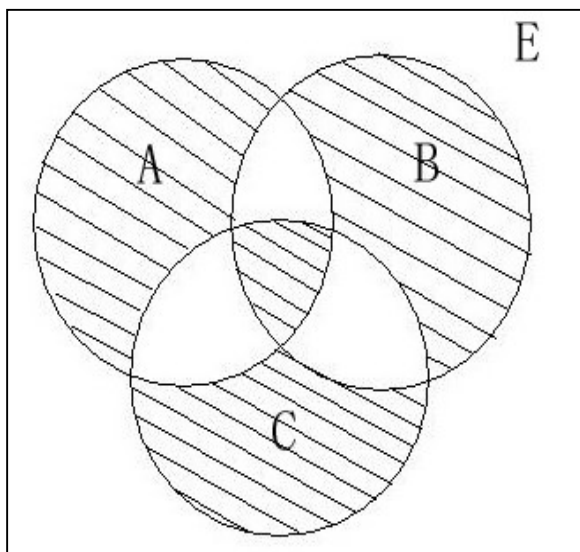
得证 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

四、对称差分运算

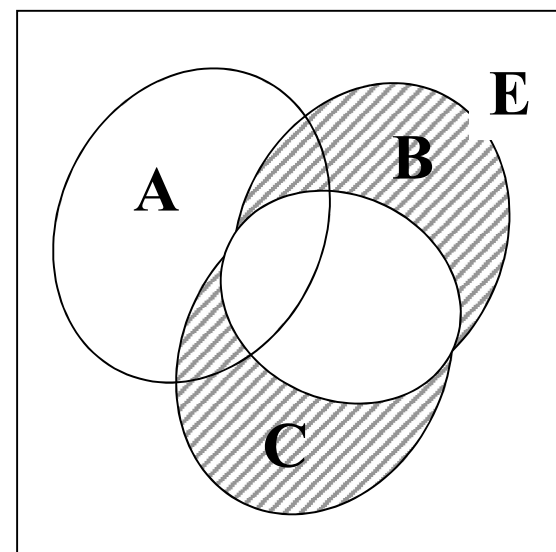
上述证明结果可以通过以下文氏图清楚看出。



$$A \oplus B$$



$$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$



$$B \oplus C$$

3.3 集合定律

$$S_1 \quad A \cap B \subseteq A$$

$$S_2 \quad A \cap B \subseteq B$$

$$S_3 \quad A \subseteq A \cup B$$

$$S_4 \quad B \subseteq A \cup B$$

$$S_5 \quad A - B \subseteq A$$

$$S_6 \quad A \oplus B \subseteq A \cup B$$

$$\left. \begin{array}{l} S_7 \quad A \cup B = B \cup A \\ S_8 \quad A \cap B = B \cap A \\ S_9 \quad A \oplus B = B \oplus A \end{array} \right\} \text{交换律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{10} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ S_{11} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ S_{12} \quad (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \end{array} \right\} \text{结合律}$$

3.3 集合定律

$$\left. \begin{array}{l} S_{13} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ S_{14} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array} \right\} \text{分配律}$$

$$S_{15} \quad \sim \sim A = A \quad \text{双重否定律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{16} \quad \sim (A \cap B) = \sim A \cup \sim B \\ S_{17} \quad \sim (A \cup B) = \sim A \cap \sim B \end{array} \right\} \text{德·摩根律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{18} \quad A \cap A = A \\ S_{19} \quad A \cup A = A \end{array} \right\} \text{等幂律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{20} \quad A \cap \sim A = \emptyset \\ S_{21} \quad A \cup \sim A = E \end{array} \right\} \text{补余律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{22} \quad A \cap E = A \\ S_{23} \quad A \cup \emptyset = A \\ S_{24} \quad A - \emptyset = A \\ S_{25} \quad A \oplus \emptyset = A \end{array} \right\} \text{同一律}$$

3. 3集合定律

$$\left. \begin{array}{l} S_{26} \quad A \cap \emptyset = \emptyset \\ S_{27} \quad A \cup E = E \end{array} \right\} \text{零律}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_{28} \quad A \cup (A \cap B) = A \\ S_{29} \quad A \cap (A \cup B) = A \end{array} \right\} \text{吸收律}$$

$$S_{30} \quad \sim \emptyset = E$$

$$S_{31} \quad \sim E = \emptyset$$

$$S_{32} \quad A \oplus A = \emptyset$$

$$S_{33} \quad A \cap (B - A) = \emptyset$$

$$S_{34} \quad A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$S_{35} \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$S_{36} \quad A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$S_{37} \quad A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$S_{38} \quad A - B = A \cap \sim B$$

$$S_{39} \quad A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)$$

$$S_{40} \quad (A \cup B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \neq \emptyset) \vee (B \neq \emptyset)$$

$$S_{41} \quad (A \cap B \neq \emptyset) \Rightarrow (A \neq \emptyset) \wedge (B \neq \emptyset)$$

证明: **(39)** 转化为假设 $(A \neq \emptyset) \vee (B \neq \emptyset)$ 为假, 证明 $A \cup B \neq \emptyset$ 为假。

由 $(A \neq \emptyset) \vee (B \neq \emptyset)$ 为假可知, $A \neq \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 均
__为假, 即 $A = \emptyset$ 并且 $B = \emptyset$ 为真, 也就是 $A \cup B = \emptyset$
为真, 使得 $A \cup B \neq \emptyset$ 为假。

3.4 包含排斥原理

集合的运算，可用于有限个元素的技术问题。

集合的基数：集合所含元素的个数。集合**A**的基数用**|A|**或**#A**表示。

设 A_1, A_2 是有限集合，用 $|A_1|, |A_2|$ 分别表示它们的基数，那么可以推出：

$$|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$$

$$|A_1 \cap A_2| \leq \min(|A_1|, |A_2|)$$

$$|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$$

$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

3.4 包含排斥原理

定理3.4-1: 设 A_1, A_2 是有限集合, $|A_1|, |A_2|$ 为其基数, 则

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

证:(1)当 A_1 和 A_2 不相交, 即 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ 时,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \end{aligned}$$

(2)当 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 那么

$$|A_1| = |A_1 \cap \sim A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_2| = |\sim A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

$$\text{所以 } |A_1| + |A_2| = |A_1 \cap \sim A_2| + |\sim A_1 \cap A_2| + 2|A_1 \cap A_2|$$

$$\text{由于 } |A_1 \cap \sim A_2| + |\sim A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cup A_2|$$

$$\text{因此 } |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

3.4 包含排斥原理

例3.4.1: 假设在**10**名青年中有**5**名是工人，**7**名是学生，其中兼具有工人与学生双重身份的青年有三名，问既不是工人又不是学生的青年有几名？

解：设工人的集合为 W ，学生的集合为 S ，则根据题设应有：

$|W| = 5, |S| = 7, |W \cap S| = 3$, 又因为 $|\sim W \cap \sim S| + |W \cup S| = 10$, 则

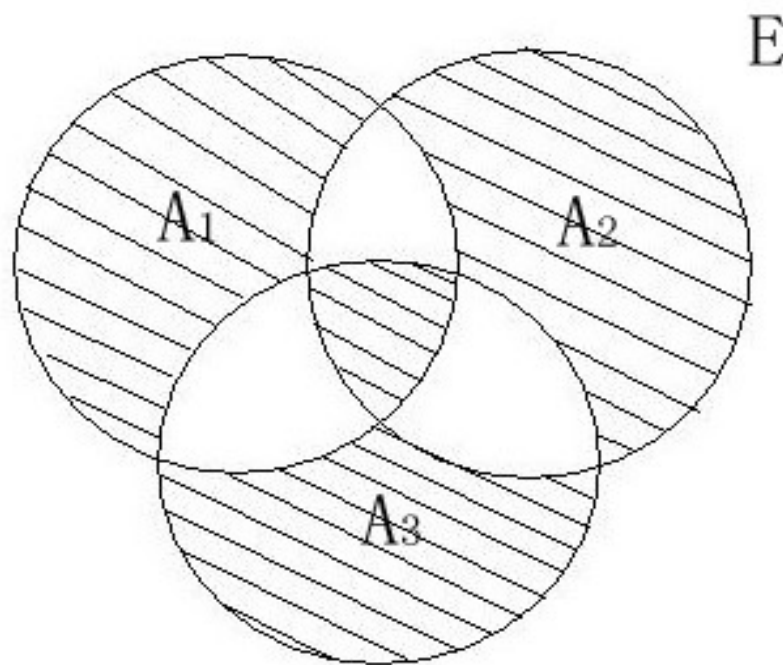
$$\begin{aligned} |\sim W \cap \sim S| &= 10 - |W \cup S| \\ &= 10 - (|W| + |S| - |W \cap S|) \\ &= 10 - (5 + 7 - 3) = 1 \end{aligned}$$

因此既不是工人又不是学生的青年有**1**人

3. 4包含排斥原理

包含排斥原理在三个有限集和上的推广：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



例**3.4.2** 求**1**到**1000**之间（包含**1**和**1000**在内）既不能被**5**和**6**，也不能被**8**整除的数有多少个？

解： 设

$$S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \leq x \leq 1000\}$$

$$A = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被 } 5 \text{ 整除}\}$$

$$B = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被 } 6 \text{ 整除}\}$$

$$C = \{x \mid x \in S \wedge x \text{ 可被 } 8 \text{ 整除}\}$$

用 $|P|$ 表示有穷集***P***中的元素数， $\lfloor x \rfloor$ 表示小于等于***x***的最大整数， $lcm(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示 x_1, x_2, \dots, x_n 的最小公倍数，则有

$$|A| = \lfloor 1000 / 5 \rfloor = 200$$

$$|B| = \lfloor 1000 / 6 \rfloor = 166$$

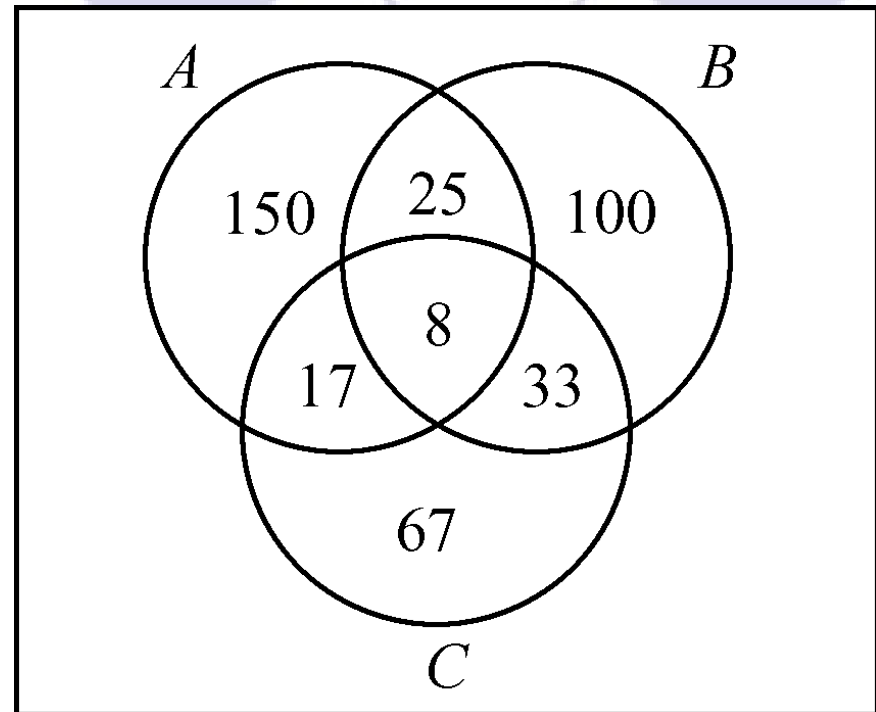
$$|C| = \lfloor 1000 / 8 \rfloor = 125$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000 / \text{lcm}(5, 6) \rfloor = 33$$

$$|A \cap C| = \lfloor 1000 / \text{lcm}(5, 8) \rfloor = 25$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000 / \text{lcm}(6, 8) \rfloor = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000 / \text{lcm}(5, 6, 8) \rfloor = 8$$



根据包含排斥原理，所求的元素数为

$$|\sim A \cap \sim B \cap \sim C|$$

$$= |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) - |A \cap B \cap C|$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

3.4 包含排斥原理

例3.4.3: 某工厂装配30辆汽车，可供选择的设备是收音机、空气调节器和对讲机。已知其中15辆汽车有收音机、8辆有空气调节器，6辆有对讲机，而且其中有3辆这三种设备都有。我们希望知道有几辆汽车没有提供任何设备。

解：设 A_1 ， A_2 和 A_3 分别表示配有收音机、空气调节器和对讲机的汽车集合，因此由题设知

$$|A_1| = 15, |A_2| = 8, |A_3| = 6, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$\text{因为 } |A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$|A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$|A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

$$\begin{aligned} \text{得 } |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= 15 + 8 + 6 - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + 3 \\ &\leq 32 - 3 - 3 - 3 = 23 \end{aligned}$$

3.4 包含排斥原理

把包含排斥原理推广到 n 个集合。

定理3.4-2： 设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 n 个有限集合，它们的基数分别为 $|A_1|, |A_2|, \dots, |A_n|$ ，可得：

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ & \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

证明： 设 **S** 为全集， 由德·摩根定律可得

$$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n = \sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

因此，

$$\begin{aligned} |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n| &= |\sim (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| \\ &= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \end{aligned}$$

由此， 原定理可变为

$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\ &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \end{aligned}$$



应用数学归纳法对上式进行证明,

当 $n=2$ 时, 证明 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

若 $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, 有 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$,

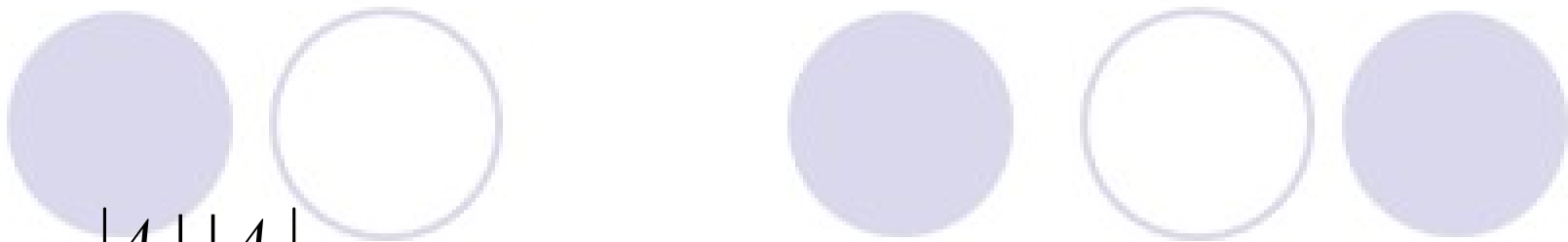
则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。

若 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 有

$$\begin{aligned} |A_1| &= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \end{aligned}$$

于是 $|A_1 \cap \sim A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$,

则



$$\begin{aligned} &|A_1 \cup A_2| \\ &= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2) \cup A_2| \\ &= |((A_1 \cap A_2) \cup A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_2 \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \\ &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \end{aligned}$$

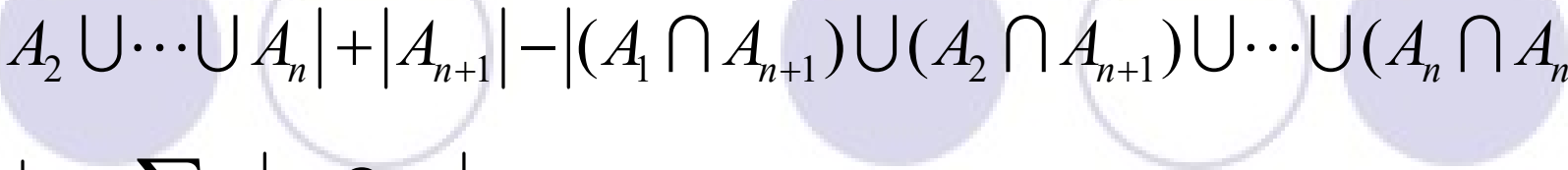
因此当 $n=2$ 时, $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。
假设



$$\begin{aligned}
 & |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \\
 &= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\
 &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
 \end{aligned}$$

成立，则，

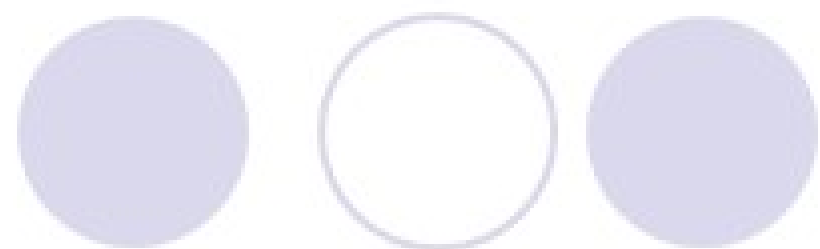
$$\begin{aligned}
 & |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| \\
 &= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}| \\
 &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&\quad + |A_{n+1}| - \left(\sum_{i=1}^n |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}| \right. \\
&\quad \left. + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}| \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} |A_i \cap A_j| \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|
\end{aligned}$$



因此定理得证。



3.4 包含排斥原理

例**3.4.4**: 求1到250之间能被2, 3, 5和7中任何一个整除的整数个数。

解: 设 A_1 表示1到250之间能被2整除的整数集合,
 A_2 表示能被3整除的整数集合, A_3 表示能被5整除
的整数集合, A_4 表示能被7整除的整数集合。 $|x|$
表示小于或等于 x 的最大整数。

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125 \quad |A_2| = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83 \quad |A_3| = \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50$$

$$|A_4| = \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35 \quad |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3} \right\rfloor = 41$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5} \right\rfloor = 25 \quad |A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 7} \right\rfloor = 17$$

3.4 包含排斥原理

$$|A_2 \cap A_3| = \left| \frac{250}{3 \times 5} \right| = 16$$

$$|A_2 \cap A_4| = \left| \frac{250}{3 \times 7} \right| = 11$$

$$|A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{5 \times 7} \right| = 7$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left| \frac{250}{2 \times 3 \times 5} \right| = 8$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2 \times 5 \times 7} \right| = 3$$


$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{3 \times 5 \times 7} \right| = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right| = 1$$


$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left| \frac{250}{2 \times 3 \times 7} \right| = 5$$

于是有

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11 \\ &\quad - 7 + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193 \end{aligned}$$



例3.4.5: 某系有 100 个学生至少要学法、德、英三种语言中的一种。现在这 100 个学生中有42人学法语，45人学德语，65人学英语，15人学法语和德语，20人学法语和英语，25 人学德语和英语。问同时学三种语言的有多少？仅学英语的有多少？



解:令A,B,C分别表示学法语、德语、英语学生的集合。则

$$|A|=42, |B|=45, |C|=65, |A \cap B|=15, |A \cap C|=20, |B \cap C|=25, |A \cup B \cup C|=100。$$

由容斥原理得:

$$|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$$

$$\text{所以 } |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) = 8$$

仅学英语的人数为:

$$|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 28$$

例3.4.6 求欧拉函数的值。欧拉函数 $\phi(n)$ 表示 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 中与 n 互素的数的个数。例如 $\phi(12) = 4$ ，因为与**12**互素的数有**1, 5, 7, 11**。下面利用包含排斥原理给出欧拉函数的计算公式。

解：给定正整数 n ， $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ 为 n 的素因子分解式，令

$$A_i = \{x \mid 0 \leq x < n-1 \wedge p_i \text{ 整除 } x\}$$

那么
$$\phi(n) = |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k|$$

下面计算等式右边的各项,

$$|A_i| = \frac{n}{p_i}, i = 1, 2, \dots, k$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, 1 \leq i \leq j \leq k$$

...

根据包含排斥原理

$$\begin{aligned} \phi(n) &= |\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \dots \cap \sim A_k| \\ &= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \dots + \frac{n}{p_k} \right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \dots + \frac{n}{p_{k-1} p_k} \right) + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \dots p_k} \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \end{aligned}$$

例如,

$$\phi(12) = 12 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4$$

作业

- **P,63:**
- **10,11, 14 (2) , 15,
16(1,3),17(2,4),18(1,3,5,7,9),19,20(2,4,6,
8,10),21-24**