第四章 二元关系

回顾：等价关系

- **定义**：设X是任意集合，R是集合中的二元关系。如果R是自反的、对称的和可传递的， 则称R是等价关系。即满足以下几点：

$$(a)\quad (\forall x)(x \in X \to xRx)$$

$$(b)\quad (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \to yRx)$$

$$(c)\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

定理：任何集合$X \subseteq I$中的模m相等关系，是一个等价关系。

可以看出，给定集合的一种划分，就可以写出一个等价关系。反过来，集合中的等价关系也能够生成该集合的划分。

回顾：相容关系

- 定义： 给定集合X中的二元关系R，如果R是自反的，对称的，则称R是相容关系，记作≈。也就是说，可以把R规定成：

(1) $(\forall x)(x \in X \rightarrow xRx)$

(2) $(\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$

- 显然，所有的等价关系都是相容关系，但相容关系并不一定是等价关系。

结论：集合中的相容关系能够定义集合的覆盖；

而集合中的等价关系能够确定集合的划分。

最大相容类

- 定义： 设$\approx$是集合X中的相容关系。假定$A \subseteq X$。如果任何一个$x \in A$，都与A中其它所有的元素有相容关系，而$X - A$中没有能与A中所有元素都有相容关系的元素，则子集$A \subseteq X$称为最大相容类。
- 寻找最大相容类的方法：
  - 关系图法
  - 关系矩阵法

四、次序关系

- 次序关系是集合中的可传递关系，它能提供一种比较集合各元素的手段。
- 定义：设R是集合P中的二元关系。如果R是自反的、反对称的和可传递的，亦即有

$$(a)\quad (\forall x)(x \in P \to xRx)$$

$$(b)\quad (\forall x)(\forall y)(x \in P \wedge y \in P \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$$

$$(c)\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in P \wedge y \in P \wedge z \in P \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

则称R是集合P中的偏序关系，简称偏序。

序偶$\langle P, \leq \rangle$称为偏序集合。

偏序关系

- 通常用符号“$\leq$”表示偏序。
  - 这样，符号≤就不单纯意味着实数中的“小于或等于”关系。
  - 事实上，这是从特定情况中，借用符号≤去表示更为普遍的偏序关系。
  - 对于偏序关系来说，如果有$x, y \in P$且$x \leq y$，则按不同情况称它是“小于或等于”，“包含”，“在之前”等等。
- 如果R是集合P中的偏序关系，则R^{-1}也是P中的偏序关系。
- 如上所述，如果用$\leq$表示R，则用$\geq$表示R^{-1}。
- 如果$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，则$\langle P, \geq \rangle$也是一个偏序集合，称$\langle P, \geq \rangle$是$\langle P, \leq \rangle$的对偶。

偏序关系

- 判断下列关系：
  - 人的年龄大小关系
  - 字符串的字母序关系
  - 自然数集合N上的模n同余关系；
  - 人群中的“父子”关系。

偏序关系

- 例：设R是实数集合。“小于或等于”关系是R中的偏序关系；这个关系的逆关系“大于或等于”关系也是R中的偏序关系。
- 例：设$\rho(A) = X$是A的幂集。X中的包含关系$\subseteq$是个偏序关系；这个关系的逆关系$\supseteq$也是个偏序关系。
- 例：设I_+是正整数集合，且$x, y, z \in I_+$,当且仅当存在z，能使$xz = y$，才有“x整除y”(可写成$x|y$)，换言之，“y是x的整倍数”。“整除”和“整倍数”互为逆关系，它们都是I_+中的偏序关系。

偏序关系

例：设I_+={2,3,6,8}，≤是I_+中的“整除”关系。试表达出“整除”和“整倍数”关系。

解：“整除”关系≤为

$$\leq=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle\}$$

“整倍数”关系是 ≥

$$\geq=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$$

- 实数集合R中的“小于”关系<和“大于”关系>，都不是偏序关系，因为它们都不是自反的。
- 但它们是实数集合中的另一种关系——拟序关系。

拟序关系

- 定义：设$\boldsymbol{R}$是集合$\boldsymbol{X}$中的二元关系。如果$\boldsymbol{R}$是反自反的和可传递的，亦即有

$$(a)\quad (\forall x)(x \in X \to x \not{R} x)$$

$$(b)\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

则称$\boldsymbol{R}$是拟序关系，并借用符号“<”表示。

- 注意：在上述定义中，没有明确列举反对称性的条件$xRy \wedge yRx \to x = y$，事实上关系<若是反自反的和可传递的．则一定是反对称的，否则会出现矛盾。
  - 这是因为，假定$\boldsymbol{x < y}$和$\boldsymbol{y < x}$，因为是可传递的，可得出$\boldsymbol{x < x}$，而$\boldsymbol{R}$是反自反的，故总是反对称的。

拟序关系

- 拟序关系和偏序关系的关系：
- 定理：设R是集合X中的二元关系。于是可有
  - a) 如果R是个拟序关系,则$r(R) = R \cup I_X$是一个偏序关系。
  - b) 如果R是个偏序关系，则$R - I_X$是个拟序关系。

全序关系

- **定义**：设$\langle P,\leq\rangle$是个偏序集合。如果对于每一个$x,y\in P$，或者$x\leq y$或者$y\leq x$，亦即

$$(\forall x)(\forall y)(x\in P\wedge y\in P\rightarrow x\leq y\vee y\leq x)$$

则称偏序关系≤是全序关系，简称全序，

序偶$\langle P,\leq\rangle$称为全序集合。

- **注意**：P中具有全序关系的各元素，总能按线性次序$x_1,x_2,\ldots$排列起来，这里当且仅当$i\leq j$，才有$x_i\leq x_j$,故全序也称为简单序或线性序，因此，序偶$\langle P,\leq\rangle$在这种情况下也被称为线性序集或链。

全序关系

- 元素的可比性：
  - 设$\leq$是集合P中的偏序关系。对于$x, y \in P$，如果有$x \leq y$或$y \leq x$,则P中的元素x和y称为可比的。
- 在偏序集合中，并非任何两个元素x和y都存在有$x \leq y$或$y \leq x$的关系。
- 事实上，对于某些x和y来说， x和y可能没有关系。在这种情况下，称x和y是不可比的。正是由于这种原因，才把称作“偏”序关系。
- 在全序集合中，任何两个元素都是可比的。

全序关系

- 例：设$\boldsymbol{R}$是实数集合，$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{R}$的元素。对于每一个实数$\boldsymbol{a}$，设$S_a = \{x|0 \le x < a\}$和$\boldsymbol{S}$是集合并且$S = \{S_a|a \ge 0\}$。如果$\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$，则$S_a \subseteq S_b$，因此$\langle S, \subseteq\rangle$是一个全序集合。
- 如果$\boldsymbol{A}$是个含有多于一个元素的集合，则$\langle \rho(A), \subseteq\rangle$不是一个全序集合。
  - 例如，设$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$,

$$\rho(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

  - 在$\rho(A)$上定义一个包含关系$\subseteq$，可以看出$\{\boldsymbol{a}\}$和$\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$，$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$和$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$等等都是不可比的。

字母次序关系

定义：设R是实数集合且$P = R \times R$。假定R中的关系$\geq$是一般的“大于或等于”关系。对于P中的任何两个序偶$\langle x_1, y_1 \rangle$和$\langle x_2, y_2 \rangle$，可以定义一个关系S

$$\langle x_1, y_1 \rangle S \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow (x_1 > x_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \geq y_2)$$

如果$\langle x_1, y_1 \rangle \not S \langle x_2, y_2 \rangle$，则有$\langle x_2, y_2 \rangle S \langle x_1, y_1 \rangle$，因此$S$是$P$中的全序关系。并称它是字母次序关系或字母序。

字母次序关系

- 设R是X中的全序关系，并设

$$P = X \cup X^2 \cup \cdots \cup X^n = \bigcup_{i=1}^{n} X^i \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

- 这个方程式说明，P是由X中长度小于或等于n的元素串组成的。
- 假定n取某个固定值，可把长度为p的元素串看成是p重序元。
- 这样就可以定义P中的全序关系S，并称它是字母次序关系。

字母次序关系

- 为此，设$< x_1, x_2, \ldots x_p >$和$< y_1, y_2, \ldots, y_q >$是集合中的任何两个元素，且有$p \le q$。为了满足$P$中的次序关系．首先对两个元素串进行比较。如果需要的话，把两个元素串加以交换，使得$q \le p$。
- 如果要使$\langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle S \langle y_1, y_2, \cdots, y_q \rangle$，就必须满足下列条件之一：

(1) $\langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle = \langle y_1, y_2, \cdots, y_p \rangle$

(2) $x_1 \neq y_1$且X中有$x_1 R y_1$

(3) $x_i = y_i . i = 1, 2, \cdots, k (k < p)$且$x_{k+1} \neq y_{k+1}$和$X$中有$x_{k+1} R y_{k+1}$

- 如果上述条件中一个也没有得到满足，则应有

$$\langle y_1, y_2, \cdots, y_q \rangle S \langle x_1, x_2, \cdots, x_p \rangle$$

字母次序关系

- 考察字母次序关系的一个特定情况。
  - 设$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \dots, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$，又设$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{X}$中的全序关系，并用≤表示它，这里$a \le b \le \cdots \le y \le z$
  - $P = X \cup X^2 \cup X^3$。这就是说，字符串中有三个来自$\boldsymbol{X}$中的字母，或少于三个字母而且是由所有这样的字符串组成集合$\boldsymbol{P}$。
- 例如，
  - **me *S* met** (由条件1)
  - **bet *S* met** (由条件2)
  - **beg *S* bet** (自条件3)
  - **go *S* get** (自最后的规则)
  - 因为比较的是单词go和get，故条件1，2和3都未得到满足。
- 在英文字典中，单词的排列次序就是字母次序关系的一例。在计算机上对字符数据进行分类时，经常使用字母次序关系。

五、偏序集合与哈斯图

- 像表达相容关系时用简化关系图一样，通常使用较为简便的偏序集合图——**哈斯(Hass)图**来表达**偏序关系**。
- **定义**：设$\langle P, \leq\rangle$是一个偏序集，如果对任何$x, y \in P$，$\boldsymbol{x \leq y}$和$\boldsymbol{x \neq y}$，而且不存在任何其它元素$z \in P$能使$\boldsymbol{x \leq z}$和$\boldsymbol{z \leq y}$，即$(x \leq y \wedge x \neq y \wedge (x \leq z \leq y \Rightarrow x = z \vee z = y))$成立，则称**元素*y*盖覆*x***。
- **例**：$\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$上的整除关系：
  - **$6|36$，$6 \leq 36$**
  - **但36没有盖覆6，因为$6 \leq 12$，$12 \leq 36$**
  - **36盖覆12，12盖覆6**

偏序集合与哈斯图

- 对偏序关系的关系图可进行如下简化：
  - **自反性：可以将各顶点上的环全部略去；**
  - **反对称性：边为单向，可以规定向上方向为箭头方向，省略箭头；**
  - **传递性：可以将由传递性导出的边省去。**

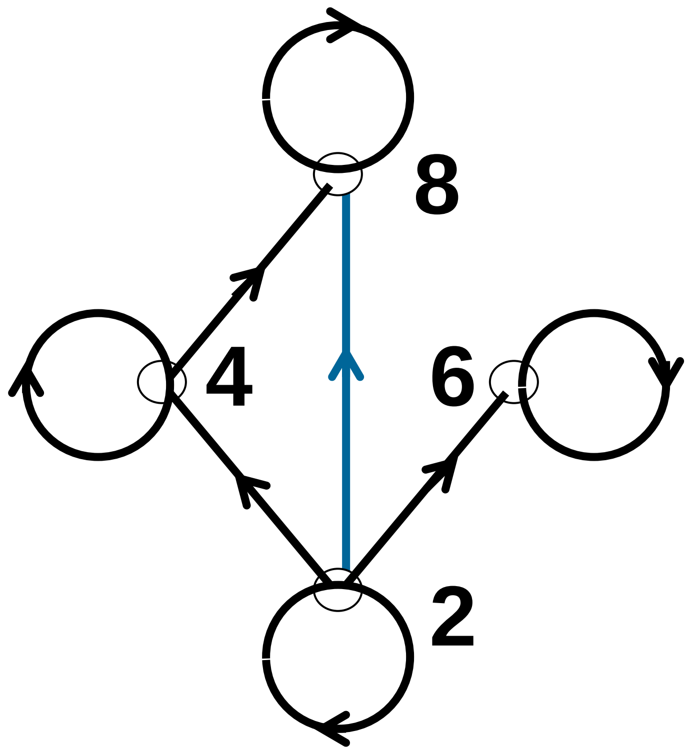
将经过上述简化后得到的关系图称为哈斯图。

偏序集合与哈斯图

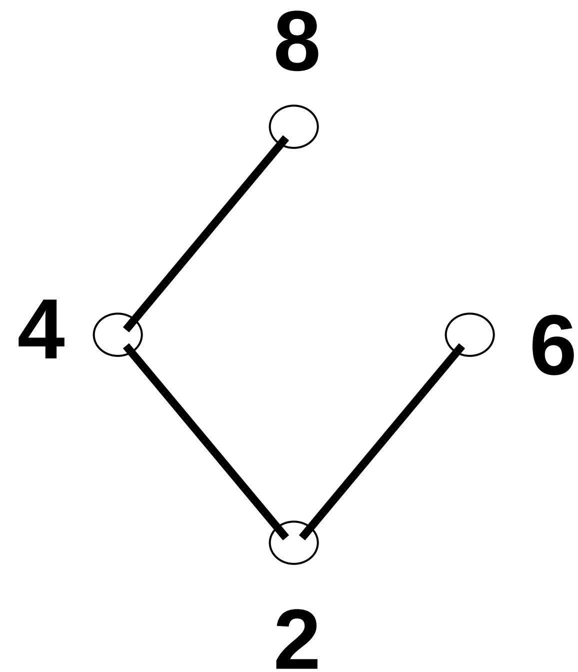
- 偏序集合$\langle \boldsymbol{P}, \leq \rangle$的哈斯图：
  - 用小圈表示每个元素。
  - 如果有$x, y \in P$，且$x \leq y$和$x \neq y$，则把表示x的小圈画在表示y的小圈之下。
  - 如果y盖覆x，则在x和y之间画上一条直线。
  - 如果$x \leq y$和$x \neq y$，但是y不盖覆x，则不能把x和y直接用直线连结起来，而是要经过P的一个或多个元素把它们连结起来。
  - 这样，所有的边的方向都是自下朝上，故可略去边上的全部箭头表示。

对于有穷偏序集，哈斯图是关系图的简化。

例：{2,4,6,8}上的整除关系



关系图

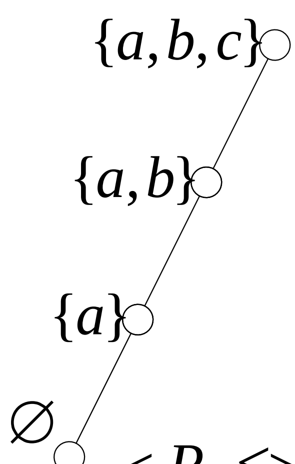


哈斯图

偏序集合与哈斯图

- 例如： 设$\boldsymbol{P_1} = \{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$，$\leq$是“小于或等于”关系，则$\langle P_1, \leq\rangle$是个全序集合。
- 设$P_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$，$\leq$是$\boldsymbol{P_2}$中的包含关系$\subseteq$，则$\langle P_2, \leq\rangle$是全序集合.
- 试画出$\langle P_1, \leq\rangle$和$\langle P_2, \leq\rangle$的哈斯图.
- 解：

$< P_1, \leq >$

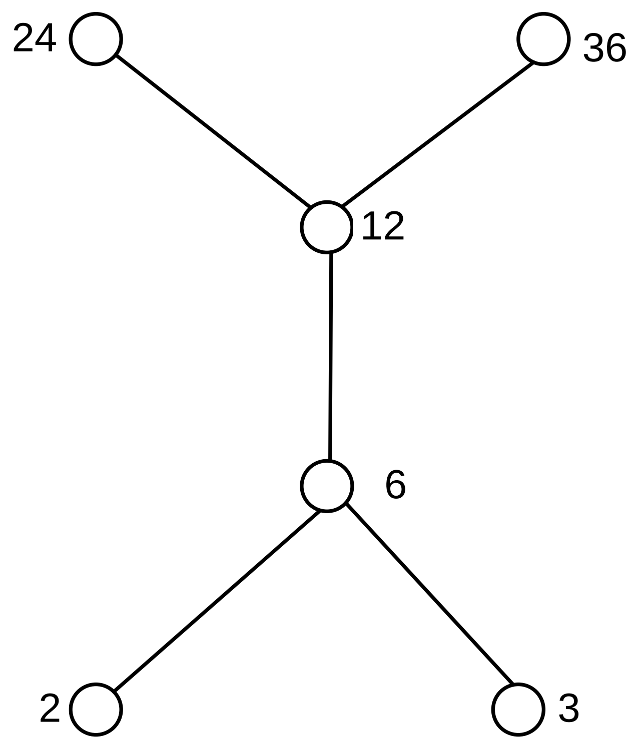


$< P_2, \leq >$

注意：虽然两个全序关系的定义不同，但它们可能具有同样结构的哈斯图

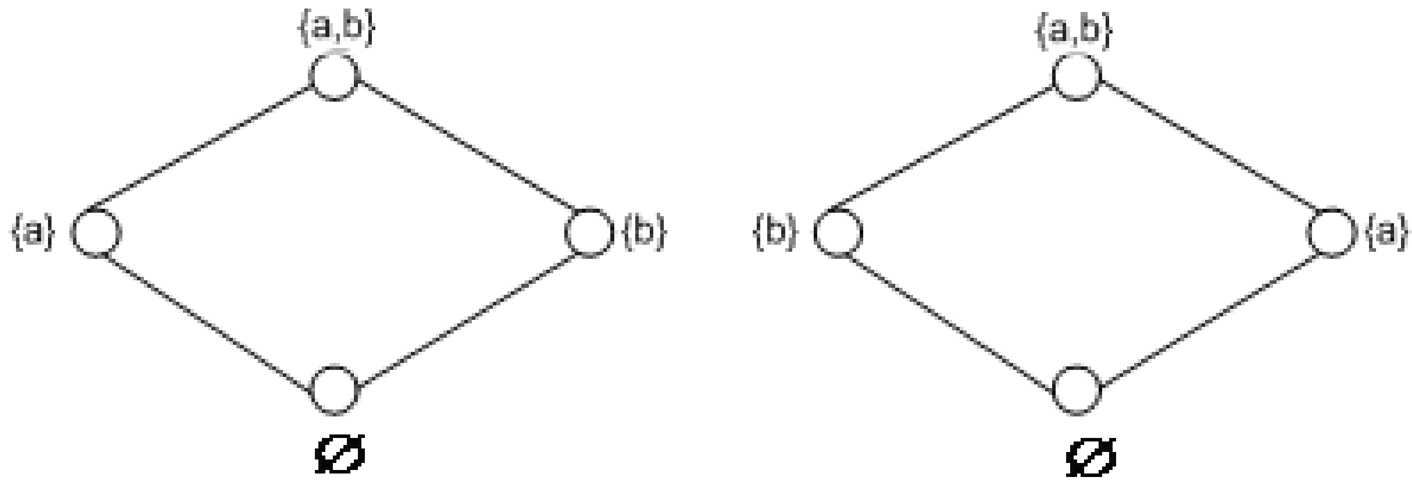
偏序集合与哈斯图

例： 设集合$\boldsymbol{X} = \{\mathbf{2, 3, 6, 12, 24, 36}\}$，$\leq$是$\boldsymbol{X}$中的偏序关系并定义成：如果$\boldsymbol{x}$整除$\boldsymbol{y}$，则$\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{y}$。试画$\langle X, \leq\rangle$的哈斯图。



偏序集合与哈斯图

例： 设集合$X=\{a,b\}$，$\rho(X)$是它的幂集。$\rho(X)$的元素间的偏序关系≤是包含关系⊆。试画出$\langle\rho(X),\le\rangle$的哈斯图。



- 注意：对于给定偏序集合来说，其哈斯图不是唯一的。
- 由$\langle P,\le\rangle$的哈斯图，可以求得其对偶$\langle P,\ge\rangle$的哈斯图．只需把它的哈斯图反转180°即可，使得原来是顶部的结点变成底部上各结点。

偏序集合与哈斯图

- 偏序集中一些特殊元素

最小元	最大元
极小元	极大元
下界	上界
下确界	上确界

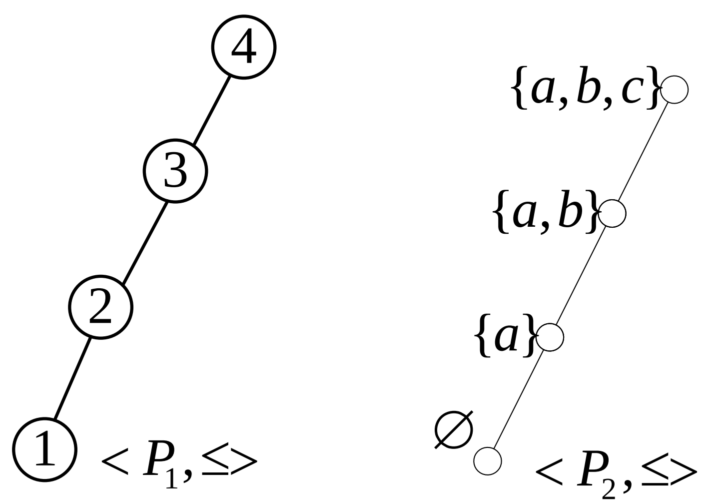
偏序集合与哈斯图

- **定义：** 设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$。

  a) 如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q\leq q'$，则元素$q\in Q$称为Q的<u>最小成员</u>，通常记作**0**。

  b) 如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q'\leq q$，则元素$q\in Q$称为Q的<u>最大成员</u>，通常记作**1**。

如果能画出哈斯图，就可以看出是否存在最大成员和最小成员。

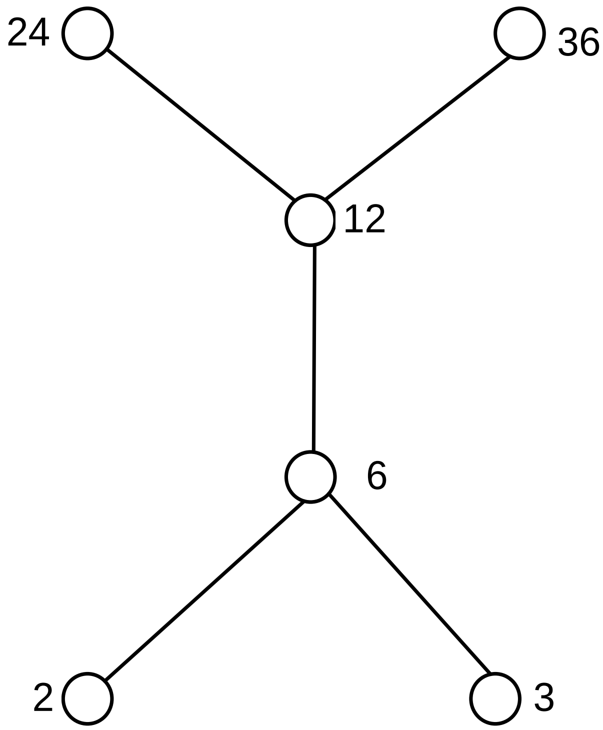


偏序集合与哈斯图

- **定理：** 设X是一个偏序集合，且有$Q \subseteq P$。如果x和y都是Q的最小(最大)成员，则$x = y$。
- 证明：
  - 假定x和y都是Q的最小成员。
  - 于是可有$x \leq y$和$y \leq x$。
  - 根据偏序关系的反对称性，可以得出 $x = y$ 。
  - 当x和y都是Q的最大成员时，定理的证明类似于上述的证明。

偏序集合与哈斯图

- 定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。
  a) 如果$q \in Q$，且不存在元素$q' \in Q$能使$q' \neq q$和$q' \leq q$，则称q是Q的极小成员。
  b) 如果$q \in Q$，且不存在元素$q' \in Q$能使$q' \neq q$和$q \leq q'$，则称q是Q的极大成员。



- 极大成员和极小成员都不是唯一的。
- 不同的极大成员(或不同的极小成员)是不可比的。

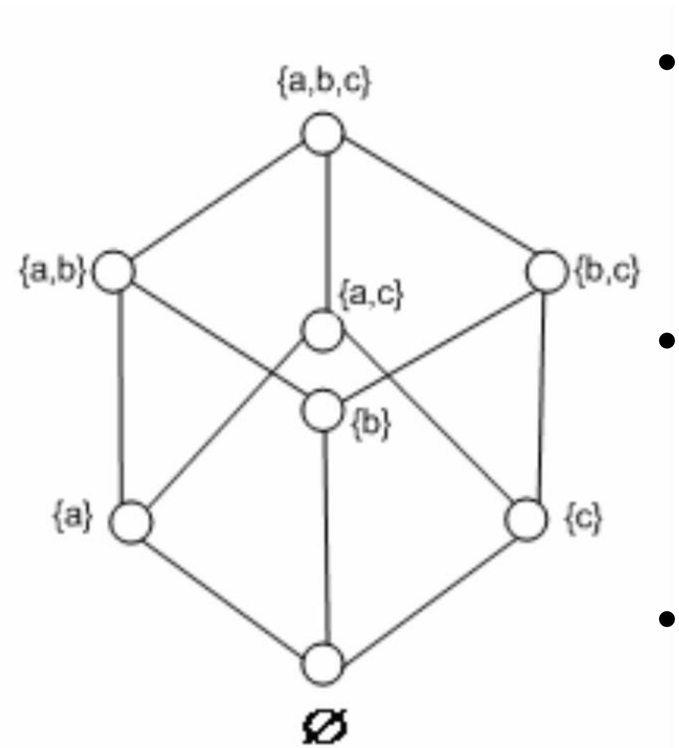
偏序集合与哈斯图

- 定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。
  a) 如果对于每一个元素$q' \in Q$有$q' \leq q$，则元素$q \in P$称为**Q**的上界。
  b) 如果对于每一个元素$q' \in Q$有$q \leq q'$，则元素$q \in P$称为**Q**的下界。

偏序集合与哈斯图

- 例：设集合$X=\{a,b,c\}$, $\rho(X)$是它的幂集。$\rho(X)$中的偏序关系≤是包含关系⊆。试画出$\langle\rho(X),\le\rangle$的哈斯图，并指出$\rho(X)$的子集的上界和下界。

- 解：先画出哈斯图



- 首先选取 $\rho(X)$ 的子集$A=\{\{b,c\}, \{b\},\{c\}\}$。
  - X和$\{b,c\}$是A的上界，
  - Φ是它的下界。
- 对于$\rho(X)$的子集$B=\{\{a,c\},\{c\}\}$，
  - 上界是X和$\{a,c\}$；
  - 下界是$\{c\}$和Φ。
- 子集的上界和下界不是唯一的。

偏序集合与哈斯图

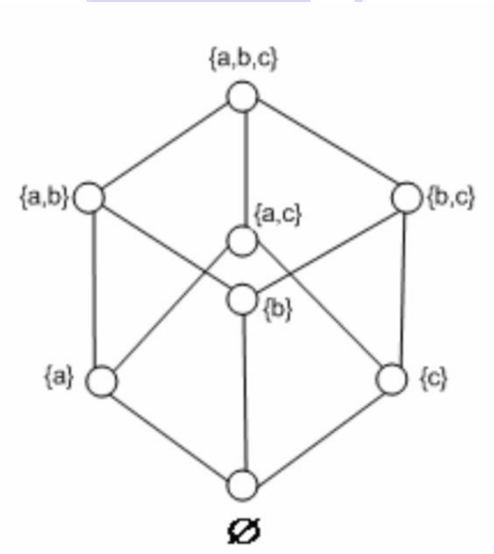
定义： 设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$ 。

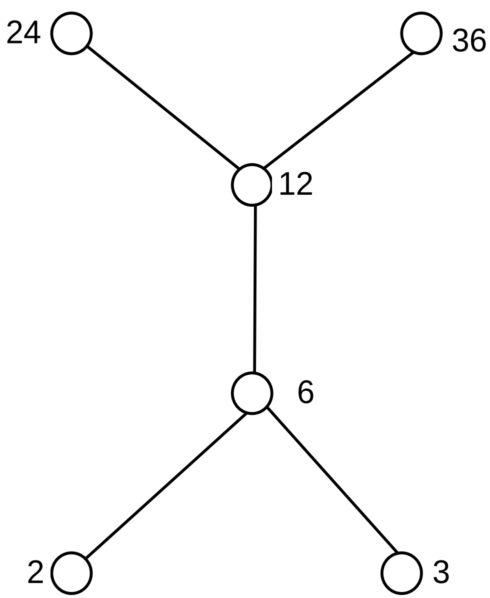
(1) 如果$q\in P$是Q的一个上界，且对于Q的每一个上界q'都有$q\leq q'$，则称q是Q的最小上界，通常记作LUB。

(2) 如果$q\in P$是Q的一个下界，且对于Q的每一个下界q'都有$q'\leq q$，则称q是Q的最大下界，通常记作GLB。

- 如果存在最小上界的话，它是唯一的；
- 如果存在最大下界的话，它也是唯一的。

偏序集合与哈斯图





- 它的每一个子集都有一个最小上界和一个最大下界。

- 子集A={2,3,6}
  - 有上确界LUB=6，
  - 但这里没有下确界GLB。
- 对于子集B={2,3}来说，
  - 最小上界还是6，
  - 但是仍没有下界。
- 对于子集C={12,6}来说，
  - 最小上界是12，
  - 最大下界是6。

偏序集合与哈斯图

- 对于偏序集合$\langle P, \leq \rangle$来说，它的对偶$\langle P, \geq \rangle$也是一个偏序集合。
- 相对于偏序关系≤的***P***中的最小成员，就是相对于偏序关系≥的***P***中的最大成员；反之亦然。
- 与此类似，可以交换极小成员和极大成员。
- 对于任何子集$Q \subseteq P$来说，$\langle P, \leq \rangle$中的**GLB**和$\langle P, \geq \rangle$中的**LUB**是一样的。

良序关系

- 定义：给定集合X，R是X中的二元关系。如果R是个全序关系，且X的每一个非空子集都有一个最小成员，则称R是个良序关系。与此对应，序偶$< X, R >$称为良序集合。

- 每一个良序集合必定是全序集台，因为对于任何子集来说，其本身必定有一个元素是它的最小成员。

- 但是每一个全序集合不一定都是良序的，有限全序集合必定是良序的。

- 例如：
  ① 自然数集在通常序下是良序集。
  ② 整数集在通常序下不是良序集，例如该集合本身就没有一个最小元素。

总结

- 偏序关系
- 拟序关系
- 全序关系
- 哈斯图

作业

- **38-50**（奇数）