2021/12/30 计算机数学(具体数学)

一、选择题(15题共30分)

1. $(a+b)^8$展开式中，a^4b^4的二项式系数值为(　　)

A. ~~34~~52　　B. ~~33~~56　　C. ~~63~~70　　D. ~~84~~75

2. 汉诺塔的递推公式为$T(n)=2T(n-1)+1$，且$T(1)=1$，则$T(6)=$(　　)

A. 31　　B. 32　　C. 63　　D. 64

3. 对于$m=2$(每隔一人出局一人)的约瑟夫环问题，初始人数$n=65535$，则最终胜利者对应的初始编号为(　　)

A. 32767　　B. 65533　　C. 65534　　D. 65535

4. 已知$f(0)=1$，$nf(n)=(n+1)f(n-1)+6$，求和因子S_n应选取(　　)以便于利用求和方式求解

A. 1　　B. n　　C. $n-1$　　D. $2/(n^2+n)$

5. 已知$S_n=\sum_{0\le k<n} k\cdot x^k$，当$x=1$时，$S_n=$(　　)

A. $1+n$　　B. n　　C. $n-1$　　D. $n(n+1)/2$

6. 对于二重和式，与$[1\le j<k\le n]$不等价的是(　　)

A. $[1\le j\le n][j<k\le n]$　　B. $[1\le j<k][1\le k\le n]$

C. $[1\le k\le n][1\le j<k]$　　D. $[1\le k\le n][1\le j\le n]$

7. 已知$R_0=\alpha$，$R_n=R_{n-1}+\beta+\gamma n$，设封闭形式解为$R_n=A(n)\alpha+B(n)\beta+C(n)\gamma$，令$R_n=n^2$，则$(\alpha,\beta,\gamma)$取值为(　　)

A. $(1,1,2)$　　B. $(0,0,1)$　　C. $(0,-1,2)$　　D. $(0,1,-1)$

8. 下列选项错误的是(　　)

A. $x^{\underline{0}}=x^{\overline{0}}=1$　　B. $x^{\underline{1}}=x^{\overline{1}}=x$

C. $x^{\underline{-1}}/x^{\underline{-2}}=(x+1)^{-1}$　　D. $x^{\overline{2}}/x^{\underline{2}}=(x+1)^{1}/(x-1)^{1}$

9. 给定一个随机变量X，假设其变量值只能取非负整数，则其概率生成函数(probability generating function)的定义为$G_X(z)=\sum_{k\ge0}\Pr(X=k)z^k$，那么$G_X(z)$的说法不正确的是(　　)

A. $G_X(z)=E(z^X)$　　B. $G_X(z=1)=1$　　C. $G_X(z=0)=1$　　D. $EX=G'_X(1)$

10. 下列选项错误的是(　　)

A. 如果$\lfloor x\rfloor=n$，则$x-1<n\le x$

B. 如果n是整数，则$\lfloor nx\rfloor=n\cdot\lfloor x\rfloor$

C. 如果n是整数，则$\lfloor x+n\rfloor=n+\lfloor x\rfloor$

D. 如果x不是整数，则$\lceil x\rceil-\lfloor x\rfloor=1$

11. 当$n=2$，$r=1/2$时，$\sum_{k\le n}\binom{r+k}{k}$的值为(　　)

A. 1　　B. 5/2　　C. 35/8　　D. 105/16

12、下列关于第二类斯特林数的等式中 $(n>0)$，不正确的是（　　）

A、$\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$　　B、$\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$　　C、$\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$　　D、$\left\{ {n \atop n-1} \right\} = n$

13、下列关于第一类斯特林数的等式中 $(n>1)$，不正确的是（　　）

A、$\left[{n \atop n} \right] = 1$　　B、$\left[{n \atop 1} \right] = (n-1)!$　　C、$\left[{n \atop n-1} \right] = n(n-1)/2$　　D、$\left[{n \atop k} \right] = \left[{n-1 \atop k} \right] + \left[{n-1 \atop k-1} \right]$

14、n 个不同球，放入 m 个有区别的盒子，不允许盒子为空，共有（　　）种方案

A、$\left\{ {n \atop m} \right\}$　　B、$\left\{ {n \atop m} \right\} m!$　　C、$\binom{n}{m}$　　D、$\binom{n}{m} m!$

15、如果随机事件 $X=x$ 与 $Y=y$ 相互独立，且 $Pr(X=x)=1/5$，$Pr(Y=y)=3/5$，则 $Pr(X=x \text{ and } Y=y)$ 为（　　）

A、3/25　　B、17/25　　C、4/5　　D、23/25

二、对于 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，给出基于调和数的化简后表达式（10分）

三、利用基于求和因子的方式求解下面递归方程（10分）

$T_0 = 5 \quad 2T_n = nT_{n-1} + 3 \cdot n!, \ n>0$

四、计算下面求和

$$\sum_{1 \le k \le n} \frac{(-1)^k k}{4k^2-1}$$

五、当 n 为固定的非负整数时，计算 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-n}$ 的结果（结果表达式中只有 n）

六、给出 $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$ 的充要条件，n 为正整数

七、已知 n 条直线将平面最多划分为 L_n 个不同区域，递推式为 $L_n = L_{n-1}+n$，且 $L_0=1$
那么请问这其中的封闭区域 R_n 有多少个？请写出其递推式并求出 R_n 的解

八、令事件 A 和事件 B 满足 $A \cup B = \Omega$，请证明

$Pr(\omega \in A \cap B) = Pr(\omega \in A)Pr(\omega \in B) - Pr(\omega \notin A)Pr(\omega \notin B)$

2021/12/30 计算机数学(具体数学)答案 (个人撰写,不保证全对)

CCDDD DCCCB CDDBA

1. $\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

2. $T_n=2^n-1$ 故 $T(6)=2^6-1=63$

3. $65535=2^{15}+32767$ 符合 (2^m+l)

故 $J(65535)=2l+1=32767\times2+1=65535$

另有 $(65535)_{10}=(\underbrace{111\cdots111}_{16个})_2$

根据左循环移位的公式 $J((b_m b_{m-1}\cdots b_0)_2)=(b_{m-1}\cdots b_0 b_m)_2$

可知 $J(65535)=J((111\cdots111)_2)=(111\cdots111)_2=65535$

4. $a_nT_n=b_nT_{n-1}+c_n$

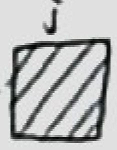
$nf(n)=(n+1)f(n-1)+6$

有 $a_n=n$, $b_n=n+1$, $c_n=6$

$S_n=\frac{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}{b_nb_{n-1}\cdots b_2}=\frac{n(n+1)}{2}$

5. $S_n=\sum_{0\le k\le n}k\cdot1^k=\sum_{0\le k\le n}k=\frac{n(n+1)}{2}$

6. $[1\le j<k\le n]\longrightarrow$ k  求 j 

而 $[1\le k\le n][1\le j\le n]\longrightarrow$ k 

7. 将 $R_n=n^2$ 代入,有

$$\begin{cases}R_0=0^2=\alpha\\ n^2=(n-1)^2+\beta+\gamma n\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=-1\\ \gamma=2\end{cases}$$

8. $x^{\underline{-1}}/x^{\underline{-2}}=\frac{1}{x+1}\Big/\frac{1}{(x+1)(x+2)}=x+2$

$(x+1)^{\underline{-1}}=\frac{1}{x+2}$

9. $G_X(z=0)=0$

10. 不一定成立

例: $n=2$, $x=1.5$

$\lfloor 2\times1.5\rfloor=3$ 而 $2\times\lfloor1.5\rfloor=2$

11. 根据下指标求和公式,有 $\sum_{k\le n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n}$

代入有 $\binom{\frac72}{2}=\frac{(\frac72)^{\underline{2}}}{2!}=\frac{\frac72\times\frac52}{2}=\frac{35}{8}$

12. $\left\{{n\atop n-1}\right\}=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$

13. $\left[{n\atop k}\right]=(n-1)\left[{n-1\atop k}\right]+\left[{n-1\atop k-1}\right]$

14. 不允许有空盒,故n个球都须放入,则有n选m;又m个盒有区别,对m的全排列

故 $\left\{{n\atop m}\right\}m!$

15. $Pr(X=x)\times Pr(Y=y)=\frac15\times\frac35=\frac{3}{25}$

二、$H_n=1+\frac12+\cdots+\frac1n$

$H_{2n+1}=1+\frac12+\cdots+\frac{1}{2n+1}$ ①

$\frac12H_n=\frac12+\frac14+\cdots+\frac{1}{2n}$ ②

①-②:

$H_{2n+1}-\frac12H_n=1+\frac13+\frac15+\cdots+\frac{1}{2n+1}$

故答案为 $H_{2n+1}-\frac12H_n$

三、$a_n=2$ $b_n=n$ $c_n=3\cdot n!$

$S_n=\frac{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}{b_nb_{n-1}\cdots b_2}=\frac{2^{n-1}}{n!}$

$2S_nT_n=nS_nT_{n-1}+3\cdot n!\,S_n$

$\frac{2^n}{n!}T_n=\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}T_{n-1}+3\cdot2^{n-1}$

令 $A_n=\frac{2^n}{n!}T_n$, $A_0=5$

$A_n=A_{n-1}+3\cdot2^{n-1}=A_{n-2}+3\cdot2^{n-1}+3\cdot2^{n-2}=\cdots$

$=A_0+3\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}$

$=5+3\cdot2^n-3$

$=2+3\cdot2^n$

又 $A_n=\frac{2^n}{n!}T_n$

$T_n=n!(2^{1-n}+3)$

四、原式 $=\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k}{4}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac14\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k}{2k-1}+\frac14\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k}{2k+1}$

后式中令 $k=k-1$

原式 $=\frac14\sum_{1\le k\le n}\frac{(-1)^k}{2k-1}-\frac14\sum_{2\le k\le n+1}\frac{(-1)^k}{2k-1}$

$=-\frac14-\frac14\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

$=\frac14\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}-1\right)$

五、原式 $=2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$

$=2^{-n}\sum_{0\le k\le n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}$

$=2^{-n}(2+1)^n$

$=2^{-n}3^n$

六、$\lfloor nx\rfloor=\lfloor n\lfloor x\rfloor+n\{x\}\rfloor$

∵ n为正整数

故 原式 $=n\lfloor x\rfloor+\lfloor n\{x\}\rfloor$

故 $\lfloor nx\rfloor=n\lfloor x\rfloor$ 的充要条件为 $\lfloor n\{x\}\rfloor=0$

$\Leftrightarrow 0\le n\{x\}<1$

$\Leftrightarrow 0\le\{x\}<\frac1n$

七、当平面中有n条直线时,每增加1条直线,增加n个交点,同时增加n-1个封闭区域

故有递推式

$$R_n=\begin{cases}0, & n=0,1,2\\ R_{n-1}+n-2, & n\geq 3\end{cases}$$

当$n\geq 3$时,

$$R_n=R_{n-1}+n-2=R_{n-2}+n-2+n-3=\cdots$$

$$=R_2+1+2+\cdots+n-2$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

下用归纳法证明当$n\geq 3$时 $R_n=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

当$n=3$时, $R_3=R_2+3-2=1=\frac{(3-1)(3-2)}{2}$,成立

假设当$n=k$时, $R_k=\frac{(k-1)(k-2)}{2}$成立

则当$n=k+1$时, $R_{k+1}=R_k+k-1$

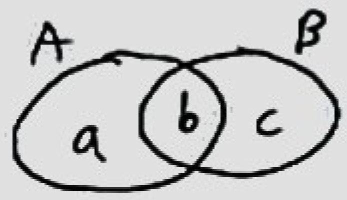
$$=\frac{(k-1)(k-2)}{2}+k-1$$

$$=\frac{k(k-1)}{2}$$,成立

证毕

综上, $R_n=\begin{cases}0, & n=0,1,2\\ \frac{(n-1)(n-2)}{2}, & n\geq 3\end{cases}$

八、



设 $a=Pr(w\notin B)$

$b=Pr(w\in A\cap B)$

$c=Pr(w\notin A)$

且 $a+b+c=Pr(w\in\Omega)=1$

则证明 $Pr(w\in A\cap B)=Pr(w\in A)Pr(w\in B)-Pr(w\notin A)Pr(w\notin B)$

即证 $b=(a+b)(b+c)-ac$

右式 $=ab+ac+b^2+bc-ac$

$=b(a+b+c)$

$=b$

$=$左式

证毕

祝考试顺利!