

# 大连理工大学 2020 年软件学院离散数学 2 补考真题

注：本 PDF 来源于某学长提供的极其模糊的照片，如有肉眼识别错误属于正常情况，文档最后有原图，可自行查看

注：本 PDF 于 2023 年 11 月 1 日制作，完全用爱发电，由于作者的某些特殊经历，本 PDF 添加了水印且为纯图 PDF

一、设  $S = Q \times Q$ ，其中  $Q$  是有理数集合，令  $\cdot$  为  $S$  上的二元运算，对于任意的  $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in S$ ，有  $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle$ ，求  $S$  关于二元运算  $\cdot$  的单位元，以及当  $a \neq 0$  时  $\langle a, b \rangle$  关于  $\cdot$  运算的逆元 (10 分)

二、设半群  $\langle S, * \rangle$  中消去律成立，证明  $\langle S, * \rangle$  是可交换半群当且仅当  $\forall a, b \in S, (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$  (10 分)

三、给定群  $\langle G, * \rangle$ ，且  $\langle A, * \rangle$  和  $\langle B, * \rangle$  都是群  $\langle G, * \rangle$  的子群，证明：若  $A \cup B = G$ ，则  $A = G$  或  $B = G$  (10 分)

四、 $f$  和  $g$  都是群  $\langle S, \star \rangle$  到群  $\langle G, * \rangle$  的同态映射，证明  $\langle C, \star \rangle$  是  $\langle S, \star \rangle$  的子群，其中  $C = \{x | x \in S \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$  (10 分)

五、试求 8 阶循环群  $G = \langle a \rangle$  的所有生成元和所有子群 (10 分)

六、有向图  $D = \langle V, E \rangle$ ，其中结点集  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，有向边集  $E$  可表示为：  
 $E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_1, v_4 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle\}$  (实在是看不清  $E$  是什么了，不确定正确)

(1) 求  $D$  的邻接矩阵  $A$

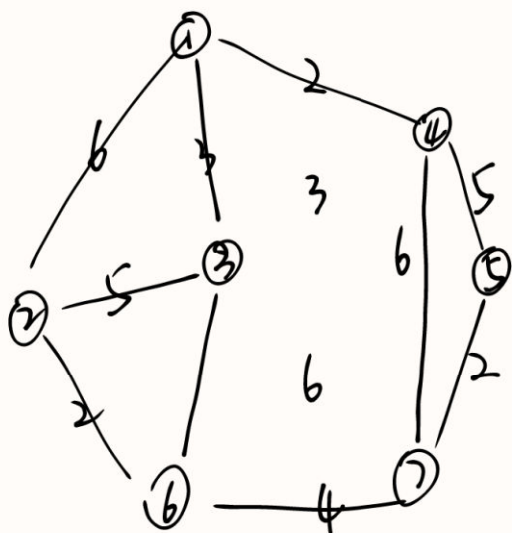
(2) 求  $D$  的可达性矩阵  $P$

(3) 说明  $v_2$  到  $v_3$  长度为 4 的路径有几条？

(4)  $v_2$  到其它各顶点长度为 3 的路径有几条？ (10 分)

七、叶结点的权值分别为：1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100，请构造一棵最优二叉树 (10 分)

八、求下面图的最小生成树，并给出生成树的加权长度 (10 分)



九、若无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中只有两个奇数度结点  $u$  和  $v$ ，证明  $u$  和  $v$  之间一定存在至少一条路径 (10分)

十、设连通无向图  $G$  有  $k$  个奇数度的结点，证明在图  $G$  中至少需要添加  $\frac{k}{2}$  条边才能使其成为欧拉图 (10分)

一、设  $S = Q \times Q$ ，其中  $Q$  是有理数集合，令  $\cdot$  为  $S$  上的二元运算，对于任意的  $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in S$ ，有  $\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle = \langle ac, ad + b \rangle$ ，求  $S$  关于二元运算  $\cdot$  的单位元，以及当  $a \neq 0$  时  $\langle a, b \rangle$  的逆元，(10分)

得分	
----	--

二、设半群  $\langle S, \cdot \rangle$  中消去律成立，证明  $\langle S, \cdot \rangle$  是可交换半群当且仅当  $\forall a, b \in S, (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$ 。(10分)

三、给定群  $\langle G, * \rangle$ ，且  $\langle A, * \rangle$  和  $\langle B, * \rangle$  都是群  $\langle G, * \rangle$  的子群，证明：若  $A \cup B = G$ ，则  $A = G$  或  $B = G$ 。(10分)

四、 $f$  和  $g$  都是群  $\langle S, \star \rangle$  到群  $\langle G, \star \rangle$  的同态映射，证明  $\langle C, \star \rangle$  是  $\langle S, \star \rangle$  的一个子群，其中  $C = \{x | x \in S \text{ 且 } f(x) = g(x)\}$ 。(10 分)

五、试求 8 阶循环群  $G = \langle a \rangle$  的所有生成元和所有子群。(10 分)

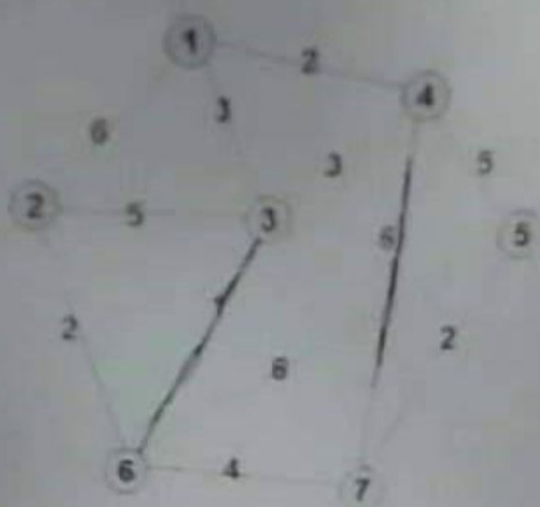
六、有向图  $D = \langle V, E \rangle$ ，其中结点集  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ，有向边集  $E$  可表示为：

$$E = \{\langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_1 \rangle, \langle v_3, v_2 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_4, v_1 \rangle, \langle v_4, v_2 \rangle\}$$

- (1) 求  $D$  的邻接矩阵  $A$ ；(2) 求  $D$  的可达性矩阵  $P$ ；  
(3) 说明  $v_2$  到  $v_3$  长度为 4 的路径有几条？(4)  $v_2$  到其它各顶点长度为 3 的路径有几条？(共 10 分)

七、叶节点的权值分别为 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100。请构造一棵最优二叉树。(10 分)

八、求下图的最小生成树，并给出生成树的加权长度。（10分）



九、若无向图  $G = \langle V, E \rangle$  中只有两个奇数度节点  $u$  和  $v$ ，证明  $u$  和  $v$  之间一定存在至少一条路径。（10分）

十、设连通无向图  $G$  有  $k$  个奇数度的结点，证明在图  $G$  中至少需要添加  $\frac{k}{2}$  条边才能使其成为欧拉图。（10分）