离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

回顾

- 关系的定义和性质
- 关系的表示方法
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 关系的运算
  - 关系的合成
  - 关系合成的规则
  - 关系的幂
  - 合成关系的矩阵表达与图解

三、关系的求逆运算

关系**R**的逆关系$\tilde{R}$定义如下：对于所有的 $x \in X$和 $y \in Y$来说，$xRy \Leftrightarrow y\tilde{R}x$

逆关系的关系矩阵：原关系矩阵转置

逆关系的关系图：原关系图中颠倒弧线上箭头的方向。

区分：逆关系vs补关系
在关系图和关系矩阵上的体现？

三、合成关系的求逆运算

定理：设***R***是从集合***X***到***Y***的关系。***S***是从集合***Y***到***Z***的关系。于是有

$$\widetilde{R\circ S}=\tilde{S}\circ\tilde{R}$$

证明：对于任何 $x\in X, y\in Y$ 和 $z\in Z$ 来说，如果***xRy***和***ySz***，则会有 $x(R\circ S)z$ 和 $z(\widetilde{R\circ S})x$，因为还有 $z\tilde{S}y$ 和 $y\tilde{R}x$，所以又有 $z(\tilde{S}\circ\tilde{R})x$ 。因此可有 $\widetilde{R\circ S}=\tilde{S}\circ\tilde{R}$。

利用关系矩阵也可以理解，$M_{R\circ S}$的转置和$M_{\tilde{S}\circ\tilde{R}}$是一样的。

三、合成关系的求逆运算

例：给定关系矩阵$\boldsymbol{M_R}$和$\boldsymbol{M_S}$。

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则：

$$M_{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{R\circ S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\tilde{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{\tilde{S}\circ\tilde{R}} = M_{\tilde{S}} \wedge M_{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = M_{\widetilde{R\circ S}}$$

三、关系的求逆运算

定理：给定集合*X*和*Y*，*R*、R_1、R_2是从*X*到*Y*的关系，于是有：

$(a)\qquad \widetilde{\widetilde{R}} = R$

$(b)\qquad \widetilde{R_1 \bigcup R_2} = \widetilde{R_1} \bigcup \widetilde{R_2}$

$(c)\qquad \widetilde{R_1 \bigcap R_2} = \widetilde{R_1} \bigcap \widetilde{R_2}$

$(d)\qquad \widetilde{X \times Y} = Y \times X$

$(e)\qquad \widetilde{\phi} = \phi$

$(f)\qquad (\sim \widetilde{R}) = \sim (\widetilde{R})$，这里～R $= X \times Y - R$

$(g)\qquad \widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R_1} - \widetilde{R_2}$，这里 $\widetilde{R_1 - R_2}$ 表示R_1-R_2的逆关系

$(h)\qquad R_1 = R_2 \to \widetilde{R_1} = \widetilde{R_2}$

$(i)\qquad R_1 \subseteq R_2 \to \widetilde{R_1} \subseteq \widetilde{R_2}$

三、关系的求逆运算

(a) $\tilde{\tilde{R}} = R$

证明：设$\langle x, y\rangle$是$\boldsymbol{R}$的任意元素。于是$\langle x, y\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{\tilde{\mathrm{R}}}$所以有 $R = \tilde{\tilde{\mathrm{R}}}$。

(b) $\widetilde{R_1 \cup R_2} = \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$

证明：$\langle x, y\rangle \in R_1 \tilde{\cup} R_2 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \vee \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_2$

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$

得证

三、关系的求逆运算

$(f)\quad \widetilde{(\sim R)} = \sim(\tilde{R})$，这里 $\sim R = X \times Y - R$

证明：$\langle x,y\rangle \in \widetilde{(\sim R)} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in \sim R$

$$\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \notin R$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \notin \tilde{R}$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \sim(\tilde{R})$$ 得证。

$(g)\quad R_1 \tilde{-} R_2 = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$，这里 $R_1 \tilde{-} R_2$ 表示 $R_1 - R_2$ 的逆关系

证明：因为 $R_1 - R_2 = R_1 \cap \sim R_2$，于是有

$$R_1 \tilde{-} R_2 = R_1 \tilde{\cap} \sim R_2 = \tilde{R}_1 \cap (\sim \tilde{R}_2) = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$$

得证。

三、关系的求逆运算

定理：设R是集合X中的关系。于是当且仅当 $R=\tilde{R}$ ，R才是对称的。

证明:(充分性)若 $R=\tilde{R}$ 则$\langle x,y\rangle \in R \leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \tilde{R} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R$

即**R**是对称的。

(必要性)设**R**是对称的，那么对任何

$$\langle x,y\rangle \in R \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in \tilde{R}$$

即 $R\subseteq \tilde{R}$;

对任何$\langle x,y\rangle \in \tilde{R} \Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,y\rangle \in R$

即 $\tilde{R}\subseteq R$

必要性证明完毕。

四、关系的闭包运算

闭包的定义：给定集合***X***，***R***是***X***中的二元关系。如果有另一个关系 R' 满足

（**1**） R'是自反的(对称的、可传递的)；

（**2**） $R' \supseteq R$

（**3**）对于任何自反的(对称的、可传递的)关系R''，如果$R'' \supseteq R$，则 $R'' \supseteq R'$

则称关系 R'为***R***的自反的(对称的，可传递的)闭包。并用***r***(***R***)表示的***R***自反闭包，用***s***(***R***)表示***R***的对称闭包，用***t***(***R***)表示***R***的可传递闭包。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合***X***，***R***是***X***中的关系。于是可有

(a) 当且仅当$r(R)=R$，***R***才是自反的。

(b) 当且仅当$s(R)=R$，***R***才是对称的。

(c) 当且仅当$t(R)=R$，***R***才是传递的。

证明：仅给出（***a***）的证明过程

如果是***R***自反的，则***R***具有定义给出的应具备 R'的全部性质。因此有$r(R)=R$ 。反之，如果$r(R)=R$，则由定义的**(1)**得***R***是自反的。

四、关系的闭包运算

定理： 设X是任意集合，R是X中的二元关系，I_X是X中的恒等关系。于是可有

$$r(R) = R \cup I_X$$

在整数集合中，小于关系“<”的自反闭包是“≤”；恒等关系I_X的自反闭包是I_X。不等关系“≠”的自反闭包是全域关系；空关系的自反闭包是恒等关系。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$S(R) = R \cup \tilde{R}$$

在整数集合中，小于关系“<”的对称闭包是不等关系“≠”；小于或等于关系“≤”的对称闭包是全域关系；恒等关系I_X的对称闭包是I_X；不等关系“≠”的对称闭包是不等关系“≠”。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R^1\cup R^2\cup R^3\cup \cdots$$

当A是有限集时，A上只有有限个不同的关系，因此，存在某个正整数m，使得

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{m}R^i$$

事实上，可以证明，若 $\#A=n$ ，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$$

四、关系的闭包运算

例：给定集合***X*={*a*,*b*,*c*}**，***R***和***S***是***X***中的关系，给定

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

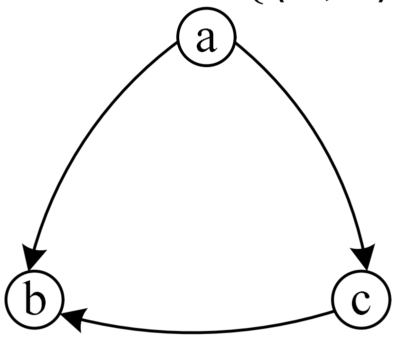
$$S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

试求出***t*(*R*),*t*(*S*)**，并画出关系图

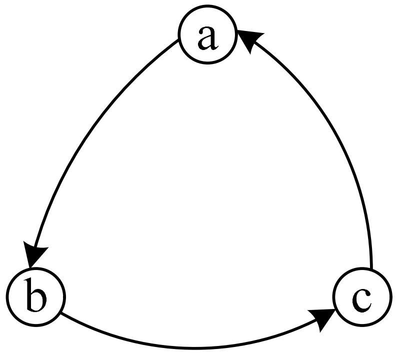
解：
$$t(R)=R^1\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=R$$

$$t(S)=S^1\cup S^2\cup S^3\cup\cdots=S^1\cup S^2\cup S^3$$

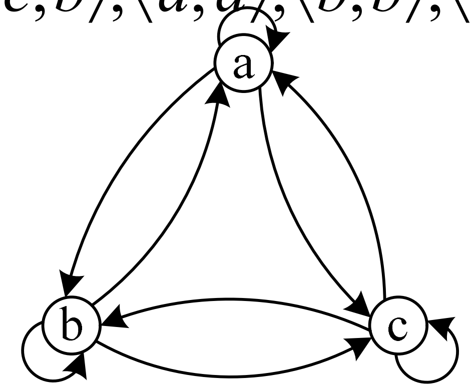
$$\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$



***R*,*t*(*R*)**



S



***t*(*S*)**

四、关系的闭包运算

定理：设X是集合，R是X中的二元关系，于是有

（1）如果R是自反的，那么$s(R),t(R)$也是自反的；

（2）如果R是对称的，那么$r(R),t(R)$也是对称的；

（3）如果R是可传递的，那么$r(R)$也是可传递的。

证明（1）：若R是自反的，则对于所有的$x \in X$都有

$$\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R \cup \tilde{R} = s(R)$$

$$\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = t(R)$$

即$s(R),t(R)$是自反的

四、关系的闭包运算

证明（**2**）：

对于任意的$<x,y>\in r(R)$，由于$r(R)=R\bigcup I_x$，因此$<x,y>\in R$或$<x,y>\in I_x$。

若$<x,y>\in R$，由 R 的对称性可知，$<y,x>\in R$，也即$<y,x>\in r(R)$

若$<x,y>\in I_x$，则$x=y$，于是有$<y,x>\in r(R)$

因此，无论何种情况，都有$<y,x>\in r(R)$

由x,y的任意性可知，$r(R)$是对称的。

四、关系的闭包运算

证明（2）：

对于任意的$<x,y>\in t(R)$，由于$t(R)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}R^i$，因此$<x,y>\in R^i(i\in N)$，也即

$<y,x>\in \widetilde{R^i}(i\in N)$

下面用数学归纳法证明当 R 满足对称性时，$\widetilde{R^i}=R^i$

（1） 当 i=1 时，由 R 的对称性知，$\widetilde{R}=R$

（2） 假设对于任意正整数 n，有$\widetilde{R^n}=R^n$

（3） 当 i=n+1 时，$\widetilde{R^{n+1}}=\widetilde{R^n\circ R}=\widetilde{R}\circ\widetilde{R^n}=R\circ R^n=R^{n+1}$

由 n 的任意性可知，对于任意的$i\in N$，均有$\widetilde{R^i}=R^i$

于是由$<y,x>\in\widetilde{R^i}(i\in N)$知，$<y,x>\in R^i(i\in N)$，即$<y,x>\in t(R)$

由由x,y的任意性可知，$t(R)$是对称的。

四、关系的闭包运算

证明（3）：

任取$x,y,z \in X$，当$<x,y> \in r(R),<y,z> \in r(R)$时，由于$r(R)=R \cup I_x$

于是可得（$<x,y> \in R$或者$<x,y> \in I_x$）并且（$<y,z> \in R$或者$<y,z> \in I_x$），组合可以得到四种情况：

（1）$<x,y> \in R$，$<y,z> \in R$，由R的传递性可知$<x,z> \in R$，于是$<x,z> \in r(R)$

（2）$<x,y> \in I_x$，$<y,z> \in R$，由I_x的性质可知，$x=y$，于是$<x,z> \in R$，得到$<x,z> \in r(R)$

（3）$<x,y> \in R$，$<y,z> \in I_x$，由I_x的性质可知，$y=z$，于是$<x,z> \in R$，得到$<x,z> \in r(R)$

（4）$<x,y> \in I_x$，$<y,z> \in I_x$，由I_x的性质可知，$x=y=z$，于是$<x,z> \in I_x$，得到$<x,z> \in r(R)$

由上可知，无论哪种情况，都有$<x,z> \in r(R)$

由x,y,z的任意性可知，$r(R)$是可传递的。

四、关系的闭包运算

定理：设***X***是集合，***R***是集合中的二元关系，于是有

$$(a)\quad rs(R)=sr(R)$$

$$(b)\quad rt(R)=tr(R)$$

$$(c)\quad ts(R)\supseteq st(R)$$

证明：

$$(a)\quad sr(R)=s(R\cup I_X)$$

$$=(R\cup I_X)\cup\widetilde{(R\cup I_X)}$$

$$=R\cup I_X\cup\tilde{R}\cup\tilde{I}_X$$

$$=R\cup\tilde{R}\cup I_X$$

$$=r(R\cup\tilde{R})$$

$$=rs(R)$$

四、关系的闭包运算

证明（**b**）：因为$tr(R)=t(R\cup I_X)$，$rt(R)=t(R)\cup I_X$，而对于所有的$n\in N$有$I_X^n=I_X$，以及$I_X\circ R=R\circ I_X=R$。根据这些关系式，可有$(R\cup I_X)^n=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{n}R^i$

于是

$$
\begin{aligned}
tr(R)=t(R\cup I_X)&=\bigcup_{i=1}^{\infty}(R\cup I_X)^i\\
&=(R\cup I_X)\cup(R\cup I_X)^2\cup(R\cup I_X)^3\cup\cdots\\
&=I_X\cup R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\\
&=I_X\cup t(R)\\
&=rt(R)
\end{aligned}
$$

四、关系的闭包运算

证明（**c**）：如果$R_1 \supseteq R_2$，则$s(R_1) \supseteq s(R_2)$, $t(R_1) \supseteq t(R_2)$

根据对称闭包的定义，有 $s(R) \supseteq R$。首先构成上式两侧的可传递闭包，再依次构成两侧的对称闭包,可以求得$ts(R) \supseteq t(R)$ 以及$sts(R) \supseteq st(R)$ 。而$\boldsymbol{ts(R)}$是对称的，所以$sts(R) = ts(R)$，从而有 $ts(R) \supseteq st(R)$ 。

四、关系的闭包运算

注意：

（1）通常用R^+表示R的可传递闭包$t(R)$，并读作“R加”。

（2）通常用R^*表示R的自反可传递闭包$tr(R)$，并读作“R星”。

作业

- **P103 21,23,25,27**