一．填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 事件A、B、C相互独立，概率相等，$P(A\cup B\cup C)=\frac{19}{27}$，则

$P(A)=$ _1/3_。

2. 在[0, 1]区间随机取两点，则两点距离大于 1/2 的概率为_1/4___。

3. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\sin x,(0<x<\frac{\pi}{2})$，$Y=1-\cos X$, 则

Y的密度函数 $f_Y(y)=$ _1，0＜ y ＜1____________。

4.设随机变量 $X\sim P(\lambda),E[(X-1)(X-2)]=1$, 则 $P(X=0)=$ ___

e^{-1} ___。

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{10}$ 是来自总体 X 的一组样本，样本一阶矩和二阶矩分别

是 2.6 和 12.9，则样本方差 $S^2=$ _6.82_____。(精确到小数点后两

位)

二．选择题（每题 3 分，共 12 分）

1. 若随机变量 $X \sim B(8,p)$，则 $EX(X-1)=$（A ）

(A) $56p^2$ (B) $56p$ (C) $8p^2$ (D) $8p$

2. 设 $X \sim U(0,1), P(Y=1)=0.4, P(Y=0)=0.6$，且$X,Y$相互独立。

则$P(\max(X,Y)>1/2)=$（ D ）

(A) 0.9 (B) 0.5； (C) 0.8 (D) 0.7

3. 有三朋友去喝咖啡，他们决定用掷硬币的方式确定谁付账，每人掷一次硬币，如果有人掷出的结果与其他两人不一样，那么由他付账，问进行了 3 轮确定付账人的概率为（ C ）

(A) $\frac{3}{16}$; (B) $\frac{9}{16}$;

(C) $\frac{3}{64}$; (D) $\frac{9}{64}$;

4. 设总体 $X \sim N(0,\sigma^2)$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自 X 的样本，σ^2 的最大似然估计量为（D）

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ B. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

C. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

三．（10 分）已知随机变量 $X \sim N(0,1), Y=X^2$，求Y 的概率密度。

解：$Y \in [0,\infty)$

$$F_Y(y)=P(X^2 \le y)=P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})\frac{-1}{2\sqrt{y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}(y \ge 0)$$

四.（8分）设随机变量 X,Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0.9, Z=5-X$，求 ρ_{YZ}.

$$\operatorname{cov}(Y,Z)=\operatorname{cov}(Y,5-X)=-\operatorname{cov}(Y,X),\quad DZ=D(5-X)=DX$$

$$\rho_{YZ}=\frac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}}=\frac{-\operatorname{cov}(Y,X)}{\sqrt{DY}\sqrt{DX}}=-\rho_{XY}=-0.9$$

五.（15分）设 (X,Y) 的联合密度函数为：$f(x,y)=\dfrac{1}{x},\quad 0<y<x<1,$

求 1）边缘分布 $f_Y(y)$；2）EY 3）$Z=\dfrac{Y}{X}$ 的密度函数。

解:1) $f_Y(y)=\int_y^1\frac{1}{x}dx=-\ln y\quad(0<y<1)$

2) $EY=\int_0^1dx\int_0^x\frac{y}{x}dy=\int_0^1\frac{x}{2}dx=\frac{1}{4}$

3) $Z=\dfrac{Y}{X}\in(0,1)$

$$F_Z(z)=P(\frac{Y}{X}\le z)=P(Y\le Xz)=\int_0^1dx\int_0^{xz}\frac{1}{x}dy$$
$$=\int_0^1 zdx=z$$

$f_Z(z)=1,\quad z\in(0,1)$

六.（10 分）设 X、Y 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.1	0.2	a
1	b	0.3	0.2

若 $P(Y=0|X=1)=0.5$，求 1）a, b ；2） $Z=X-Y$ 的分布律。

解:1) $\begin{cases} a+b=0.2 \\ P(Y=0|X=1)=0.5=\dfrac{0.3}{0.5+b} \end{cases}$,解得 $\begin{cases} a=0.1 \\ b=0.1 \end{cases}$

2） $Z=X-Y$: -1, 0, 1, 2

$$P(Z=-1)=0.1; P(Z=0)=0.4; P(Z=1)=0.4; P(Z=2)=0.1;$$

第七题找不到了，反正是个矩估计然后判断是否是无偏估计的题.

八.（8 分）假设人体身高服从正态分布，今抽测甲、乙两地区 18 岁-25 岁女青年身高数据如下：甲地抽取 10 名，样本标准方差 0.2，乙地抽取 10 名，样本标准方差 0.4，求两正态总体方差比的置信度为 0.95 的置信区间。$(F_{0.025}(9,9)=4.03)$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) \le \frac{s_1^2}{s_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\}=1-\alpha$$

得到置信区间并带入数据得

$$\left[\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.025}(9,9)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{0.975}(9,9)}\right]=[0.062, 1.0075]$$

九.（10 分）一位中学校长在报纸上看到这样一则报道：中学生每周至少看 8 小时电视。他认为他所在学校学生看电视的时间明显小于 8 小时。为此在该校随机调查了 100 名学生，计算平均每周看电视的时间 6.5 小时。假设学生每周看电视时间均服从正态分布，总体方差为 4，在显著性水平 0.05 的条件下，是否可以认为这位校长的看法是对的？$(z_{0.05}=1.64)$

$H_0 \quad \mu \geq 8, H_1 \quad \mu < 8$

取检验统计量 $Z=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$,

$P\{Z<z_{1-\alpha}\}=\alpha$,拒绝域为$Z<z_{0.95}$

代入数据得$\dfrac{\bar{x}-8}{2/10}=-7.5$,

$z_{0.95}=-z_{0.05}=-1.64$

$-7.5<-1.64$

拒绝H_0