第五章 函数

大连理工大学软件学院

陈志奎 教授

办公室： 综合楼**405**，**Tel**： **62274392**

实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921

Email: zkchen@dlut.edu.cn

zkchen00@hotmail.com

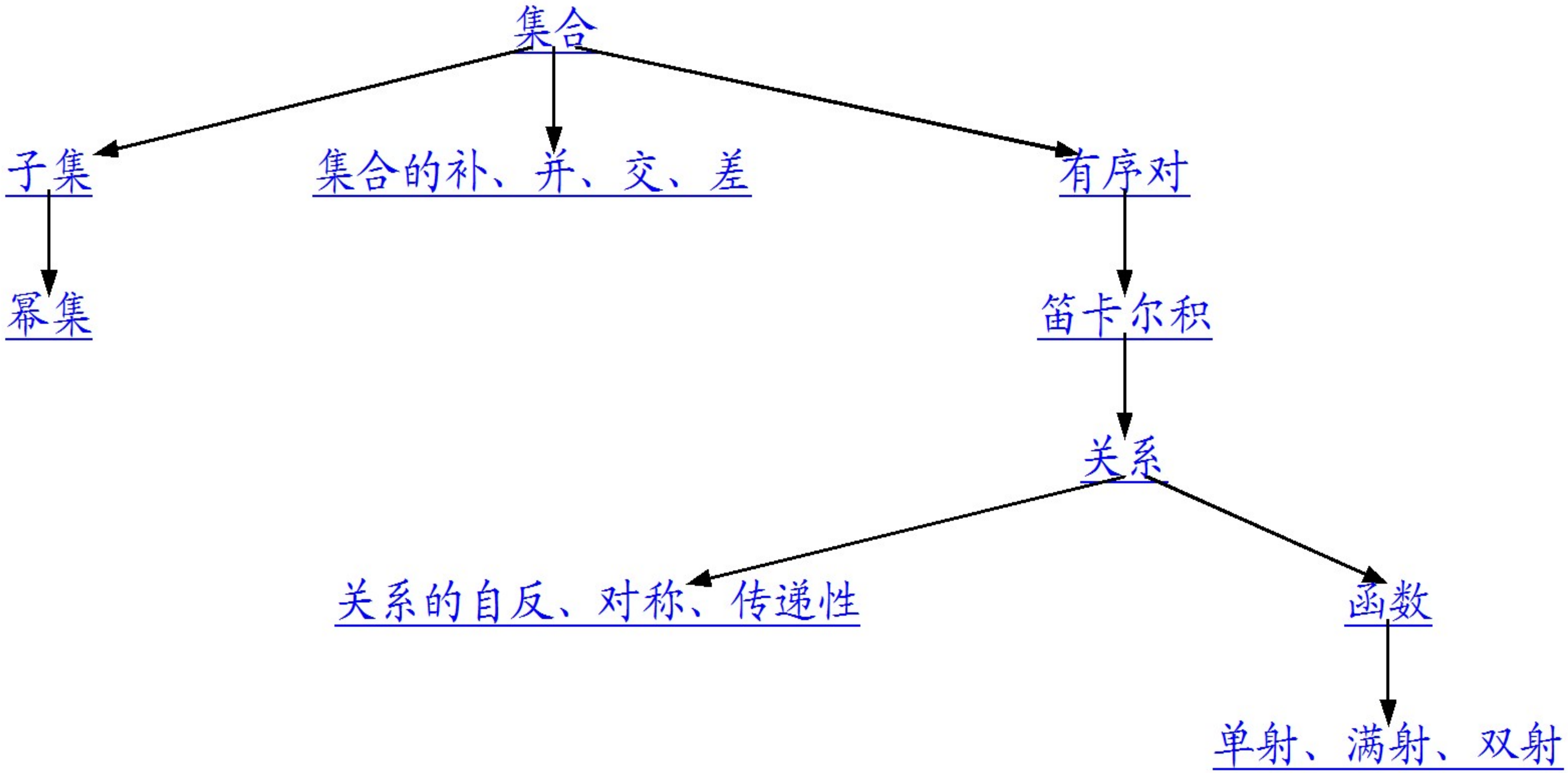
回顾关系的主要内容

- 序偶与迪卡尔乘积
- 关系的基本概念
- 关系的性质
- 关系的描述
- 关系的运算
- 合成关系的关系图、关系矩阵
- 逆关系，逆关系的运算
- 关系的闭包与运算
- 特殊关系：等价关系和划分，相容关系和覆盖，次序关系-偏序关系，拟序关系，全序关系，字母次序关系和哈斯图等。
- 几个概念：最大小成员，极大小成员，上下界，上下确界

主要内容

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成、合成函数的性质
- 特殊函数
- 反函数、特征函数
- 基数
- 二元运算

回顾



5.1函数的基本概念和性质

函数（或称映射）是满足某些条件的关系，关系又是笛卡尔乘积的子集。

定义：设X和Y是两个任意的集合，并且f是从X到Y的一种关系。如果对于每一个$x \in X$，都存在唯一的$y \in Y$，使得$\langle x, y\rangle \in f$，则称关系$f$为函数或映射，并记作$f: X \to Y$。

对于函数来说$f: X \to Y$，如果有$\langle x, y\rangle \in f$，则称$x$是自变量；与$x$相对应的$y$，称为在$f$作用下$x$的象点，或称$y$是函数$f$在$x$处的值。通常用$y = f(x)$表示$\langle x, y\rangle \in f$。

函数的基本概念

从X到Y的函数f，是具有下列性质的从X到Y的二元关系：

(1) 每一个元素$x \in X$，都必须关系到某一个$y \in Y$；也就是说，关系f的域是集合X本身，而不是X的真子集。 任意性

(2) 如果有$\langle x, y \rangle \in f$，则函数$f$在$x$处的值$y$是唯一的，亦即

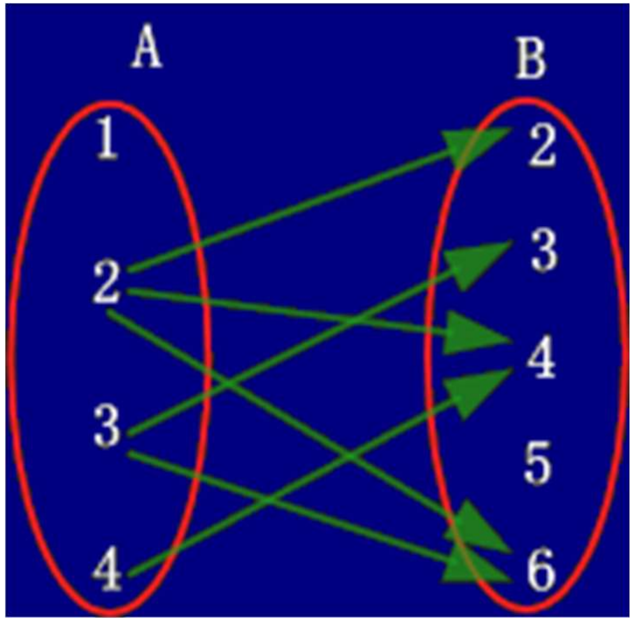
$$\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$$

唯一性

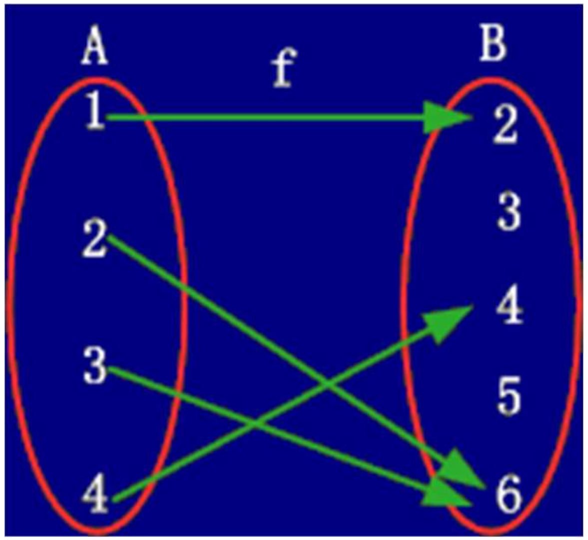
函数的基本概念

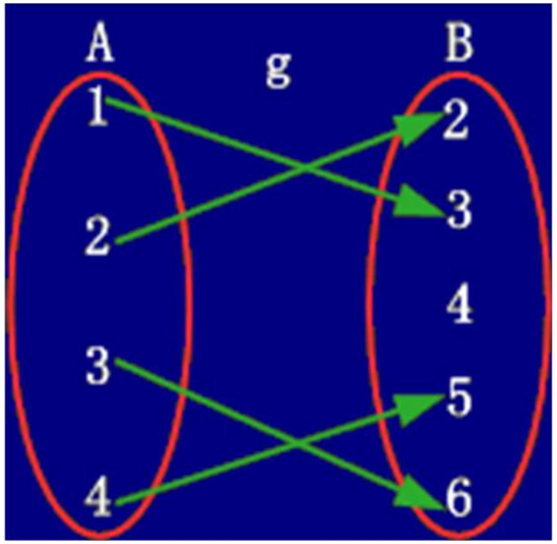
例：设$A=\{1, 2, 3, 4\}$,$B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$,A到B的关系$\rho=\{\langle 2, 2\rangle,\langle 2, 4\rangle,\langle 2, 6\rangle,\langle 3, 3\rangle,\langle 3, 6\rangle,\langle 4, 4\rangle\}$

ρ是否是由A到B的函数？



若调整为$f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,4\rangle\}$或$g=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,5\rangle\}$呢？





函数的定义域和值域

设$\boldsymbol{f}$是从$\boldsymbol{X}$到$\boldsymbol{Y}$的函数，函数的定义域$\boldsymbol{D_f = X}$,而不会是$\boldsymbol{X}$的真子集。 函数的值域满足$\boldsymbol{R_f \subseteq Y}$. 对于函数$\boldsymbol{f}$,常用$\boldsymbol{f(X)}$表示$\boldsymbol{R_f}$。集合$\boldsymbol{Y}$称作$\boldsymbol{f}$的陪域。

$$\boldsymbol{f(X) = R_f = \{y|y \in Y \wedge (\exists x)(x \in X \wedge y = f(x))\}}$$

也称$\boldsymbol{f(x)}$是函数$\boldsymbol{f}$的象点

注意：函数$\boldsymbol{f}$的象点与自变量$\boldsymbol{x}$的象点是不同的。我们这里给出的函数的定义是全函数的定义，所以$\boldsymbol{D_f = X}$.

函数的基本概念和性质

例：设$\boldsymbol{E}$是全集，$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$是$\boldsymbol{E}$的幂集。对任何两个集合$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$，它们的并运算和相交运算都是从$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$到$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$的映射；对任何集合$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$求补运算，则是从$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$到$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{E})$的映射。

例：试说明下列二元关系是否是函数？

(1) $\exp=\{\langle x,e^x\rangle|x\in R\}$

(2) $arcsin\{\langle x,y\rangle|x,y\in R\wedge\sin y=x\}$

(1)是函数，**(2)**不是函数

函数的基本概念和性质

例：设N是自然数集合，函数$\boldsymbol{S}: \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ 定义成$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{n} + \mathbf{1}$。显然，$\boldsymbol{S}(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$，$\boldsymbol{S}(\mathbf{1}) = \mathbf{2}$，$\boldsymbol{S}(2) = \mathbf{3}\cdots$。这样的函数，通常称为皮亚诺后继函数。

注意：有时为了某种需要，要特别强调函数的任意性和唯一性性质：函数$\boldsymbol{f}$的域$\boldsymbol{D_f}$中的每一个$\boldsymbol{x}$，在值域$\boldsymbol{R_f}$中都恰有一个象点$\boldsymbol{y}$，这种性质通常被称为函数的良定性。

函数的相等

定义： 给定函数$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ 和$\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{W}$。如果$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$具有同样的域和陪域，亦即$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}$和$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W}$，并且对于所有的$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$或$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}$都有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$，则称函数$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{g}$是相等的，记作$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$。

求/证明函数相等的方法？

函数的扩大和缩小

定义：给定函数f: $X \to Y$，且有$A \subseteq X$。

(1) 试构成一个从A到Y的函数

$$g = f \cap (A \times Y)$$

通常称g是函数f的缩小，并记作f/A。

(2)如果g是f的缩小，则称f是g的扩大。

从定义可以看出，函数f/A: $A \to Y$的域是集合A，而函数f的域则是集合X。f/A和f的陪域均是集合Y。于是若g是f的缩小，则应有

$$D_g \subseteq D_f \text{和} g \subseteq f$$

并且对于任何$x \in D_g$都有$g(x) = (f/A)(x) = f(x)$。

函数的扩大和缩小

例：令$\boldsymbol{X_1}=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$，$\boldsymbol{X_2}=\{\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2}\}$，$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$。定义从$\boldsymbol{X_1}^2$到$\boldsymbol{Y}$的函数$\boldsymbol{f}$为：

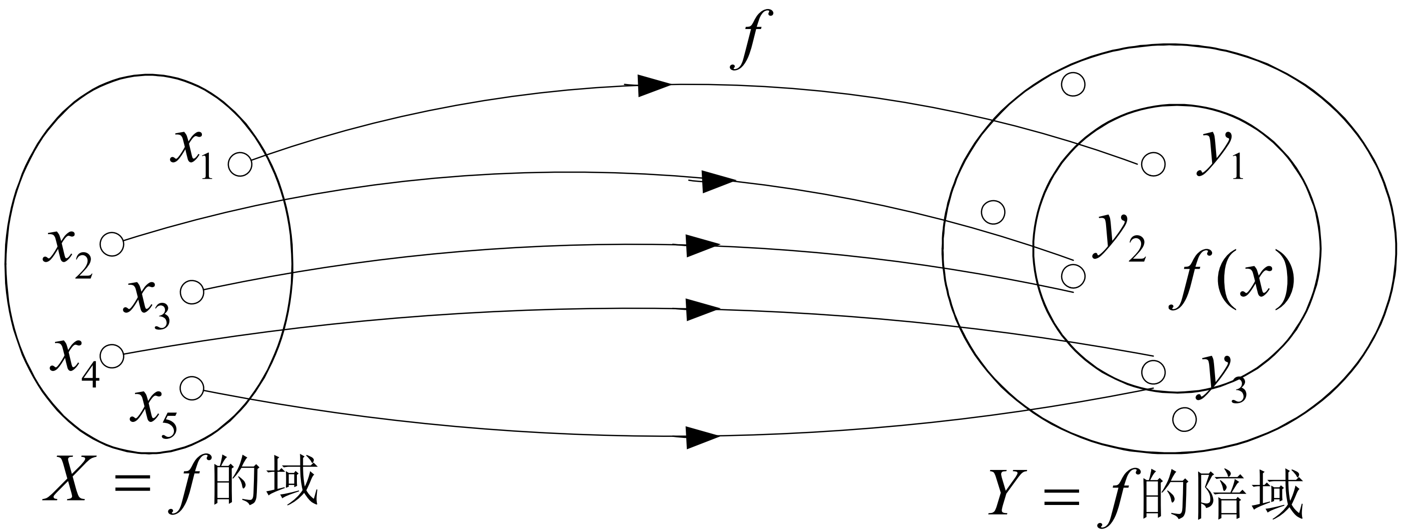
$$\boldsymbol{f}=\{\langle\mathbf{0},\mathbf{0},\boldsymbol{a}\rangle,\langle\mathbf{0},\mathbf{1},\boldsymbol{b}\rangle,\langle\mathbf{1},\mathbf{0},\boldsymbol{c}\rangle,\langle\mathbf{1},\mathbf{1},\boldsymbol{b}\rangle\}。$$

$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{f}\cup\{\langle\mathbf{0},\mathbf{2},\boldsymbol{a}\rangle,\langle\mathbf{2},\mathbf{2},\boldsymbol{d}\rangle\}$是从$\boldsymbol{X_1}^2\cup\{\langle\mathbf{0},\mathbf{2}\rangle,\langle\mathbf{2},\mathbf{2}\rangle\}$到$\boldsymbol{Y}$的函数。

于是$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}/\boldsymbol{X_1}^2$，因此$\boldsymbol{f}$是$\boldsymbol{g}$在$\boldsymbol{X_1}^2$上的缩小（或称限制），$\boldsymbol{g}$是$\boldsymbol{f}$到$\boldsymbol{X_1}^2\cup\{\langle\mathbf{0},\mathbf{2}\rangle,\langle\mathbf{2},\mathbf{2}\rangle\}$上的扩大（或称延拓）。

函数的表示

因为函数是二元关系，所以可以用关系图和关系矩阵来表达函数。



函数$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$的图解

函数的表示

例： 设集合$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$和$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\boldsymbol{4},\boldsymbol{5}\}$，并且有 $\boldsymbol{f}=\{\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{1}\rangle,\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{3}\rangle,\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{4}\rangle,\langle\boldsymbol{d},\boldsymbol{4}\rangle\}$

试求出$\boldsymbol{D_f}$，$\boldsymbol{R_f}$和$\boldsymbol{f}$的矩阵表达式。

解：$\boldsymbol{D_f}=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\}$

$\boldsymbol{R_f}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{3},\boldsymbol{4}\}$

$$M_f=\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

函数的表示

由函数的定义可知，在关系矩阵的每一个行上，都有且仅有一个元素的值是**1**，而此行上的其他元素都必定为**0**。因此，可以用一个单独的列来代替关系矩阵。在这个单独的列上，应标明所对应的给定函数的各个值。这样，该列上的各元素也说明了自变量与其函数值之间的对应关系。

上例中 f 的简化关系矩阵为：

$$\boldsymbol{M_f} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{b} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{4} \\ \boldsymbol{d} & \mathbf{4} \end{bmatrix}$$

函数的构成

设$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$是任意的两个集合。在$\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$的所有子集中，并不全都是从$\boldsymbol{X}$到$\boldsymbol{Y}$的函数，仅有一些子集可以用来定义函数。

定义：设$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$是任意两个集合，记

$$\boldsymbol{B}^{A} = \{\boldsymbol{f} | \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\}$$

函数的构成

例：设集合$X=\{a,b,c\}$和集合$Y=\{0,1\}$。试求出所有可能的函数$f: X\rightarrow Y$。

解：首先求出的$X\times Y$所有序偶，于是应有

$$X\times Y=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

于是，有2^6个可能的子集，但其中仅有下列2^3个子集可以用来定义函数：

$$f_0=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\ f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

$$f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\ f_3=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

$$f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\ f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

$$f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\ f_7=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

函数的构成

设A和B都是有限集合，且$|A| = m$和$|B| = n$，因为任何函数$f: A \to B$的域都是集合A， 所以每个函数中都恰有m个序偶。而且，任何元素$x \in A$，都可以在B的n个元素中任选其一作为自己的象点。因此，应有n^m 个可能的不同函数，亦即

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|} = n^m$$

例：设A为任意集合，B为任意非空集合。

（1）因为存在唯一的一个从Φ到A的函数，所以$A^\Phi = \{\Phi\}$。

（2）因为不存在从B到Φ的函数，所以$\Phi^B = \Phi$。

5.2函数的合成和合成函数的性质

定义：设$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$是两个函数。于是，合成关系$f \circ g$为f与g的合成函数，并用$g \circ f$表示。即
$g \circ f = \{\langle x, z\rangle | (x \in X) \wedge (z \in Z) \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$

注意：合成函数$g \circ f$与合成关系$f \circ g$实际上表示同一个集合。这种表示方法的不同有其方便之处：

对合成函数$g \circ f$, 当$z = (g \circ f)(x)$时, 必有$z = g(f(x))$

$g \circ f$与$g(f(x))$ 的次序是理想的。

函数的合成和合成函数的性质

函数f的值域是函数g的域Y的子集，亦即 $R_f \subseteq D_g$ 。条件$R_f \subseteq D_g$能确保合成函数$g \circ f$是非空的。否则，合成函数$g \circ f$是空集。如果$g \circ f$非空，则能保证$g \circ f$是从X到Z的函数。

定理：设$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$是两个函数：

（1）合成函数$g \circ f$是从$X \to Z$的函数，并且对于每一个$x \in X$，都有$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

（2）$D_{g \circ f} = f^{-1}[D_g]$，$R_{g \circ f} = g[R_f]$

其中$f^{-1}[D_g]$,表示g的域在f下的原象集，
$g[R_f]$表示f的值域在g下的象点集。

函数的合成和合成函数的性质

证明: (1)假设$x \in X$和$z_1, z_2 \in Z$，再假设$\langle x, z_1 \rangle \in g \circ f$和$\langle x, z_2 \rangle \in g \circ f$。这个假设要求存在$y \in Y$，能使$y = f(x)$，$z_1 = g(y)$以及$z_2 = g(y)$。因为$g$是一个函数，所以由函数值的唯一性可知，除非$z_1 = z_2$，否则不可能有$z_1 = g(y)$和$z_2 = g(y)$。也就是说，仅能有$z_1 = z_2 = z$和$\langle x, z \rangle \in g \circ f$。因此$g \circ f$是一个从$X$到$Z$的函数，且

$$(g \circ f)(x) = z = g(y) = g(f(x))$$

函数的合成和合成函数的性质

证明： (2)若 $x \in D_{g \circ f}$，则存在$z \in Z$使$\langle x, z\rangle \in g \circ f$。因此，必有$y \in Y$使$\langle x, y\rangle \in f$且$\langle y, z\rangle \in g$。但由$\langle y, z\rangle \in g$知 $y \in D_g$，再由$\langle x, y\rangle \in f$，即得$x \in f^{-1}[D_g]$。另一方面，若$x \in f^{-1}[D_g]$，则有$y \in D_g$使$\langle x, y\rangle \in f$。但由$y \in D_g$知，有$z \in Z$使$\langle y, z\rangle \in g$，所以$\langle x, z\rangle \in g \circ f$，这表明$x \in D_{g \circ f}$。

同理可证$R_{g \circ f} = g[R_f]$。

函数的合成和合成函数的性质

例：设集合$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$，$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$。函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$分别是

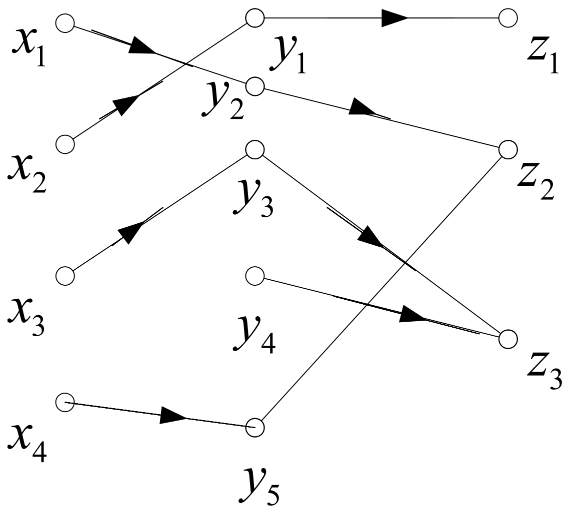
$$f = \{\langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_1\rangle, \langle x_3, y_3\rangle, \langle x_4, y_5\rangle\}$$

$$g = \{\langle y_1, z_1\rangle, \langle y_2, z_2\rangle, \langle y_3, z_3\rangle, \langle y_4, z_3\rangle, \langle y_5, z_2\rangle\}$$

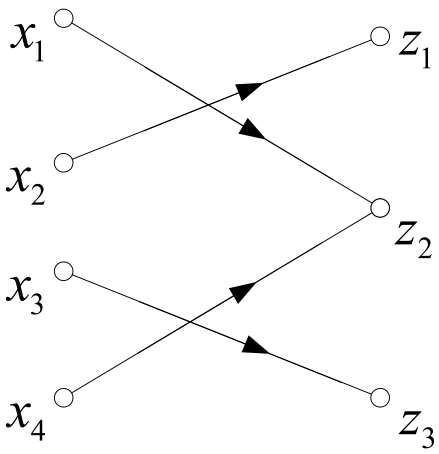
试求出函数$g \circ f = X \to Z$，并给出它的图解。

解：$g \circ f = \{\langle x_1, z_2\rangle, \langle x_2, z_1\rangle, \langle x_3, z_3\rangle, \langle x_4, z_2\rangle\}$

$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$



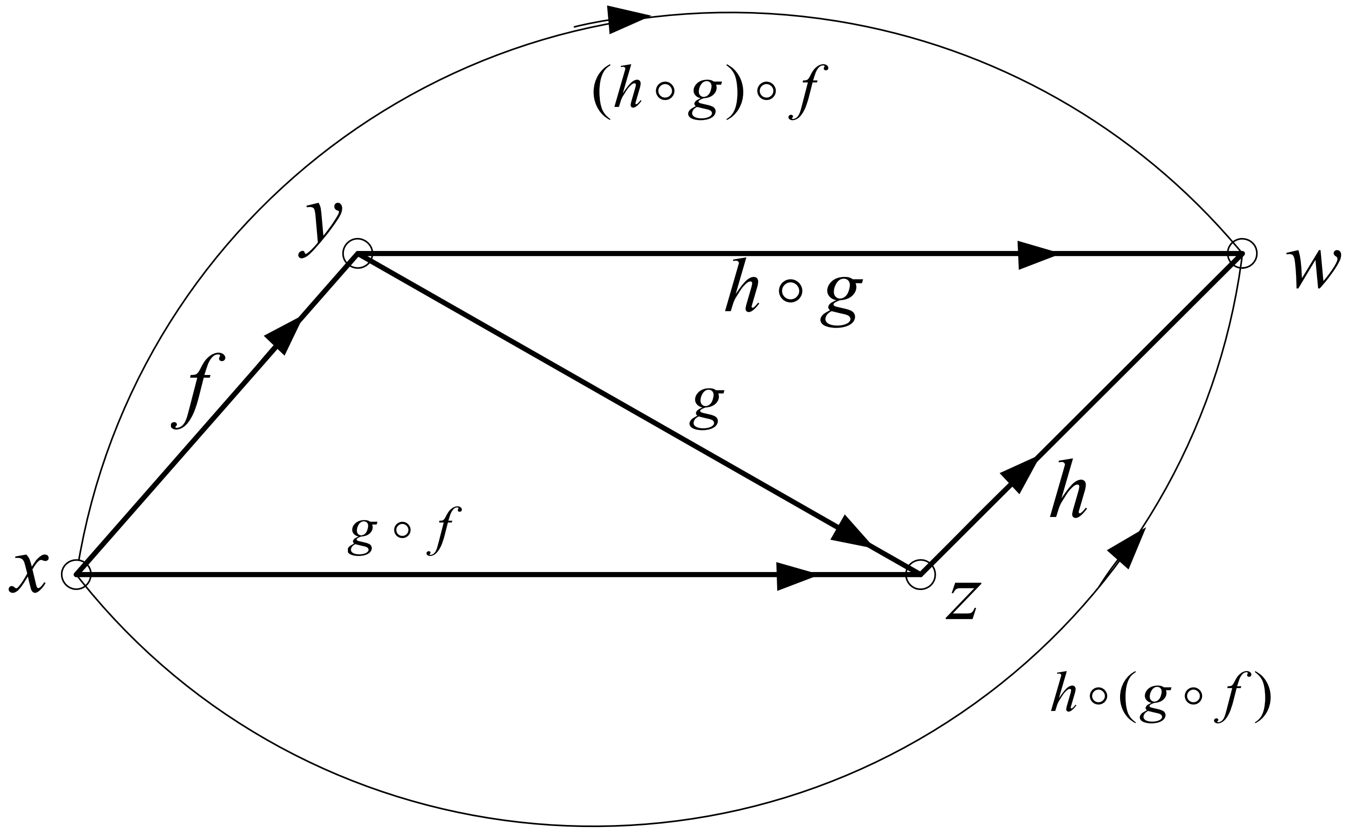
$X \xrightarrow{fog} Z$



函数的合成和合成函数的性质

定理：函数的合成运算是可结合的，即如果***f*,*g*,*h***都是函数，则应有

$$\boldsymbol{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f}$$



函数的合成和合成函数的性质

因为函数的合成运算是可结合的，所以在表达合成函数时，可以略去圆括号，即

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

推广：设有n个函数：$f_1: X_1 \to X_2$，$f_2: X_2 \to X_3, \ldots,$ $f_n: X_n \to X_{n+1}$，于是无括号表达式唯一地表达了从X_1到X_{n+1}的函数。如果$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X_{n+1}$和$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$，则可用$f^n$表示从$X$到$X$的合成函数$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$。

函数的合成和合成函数的性质

例：设I是整数集合，并且函数$f: I\to I$给定成$f(i)=2i+1$。试求出合成函数$f^3(i)$。

解：合成函数$f^3(i)$是一个由I到I的函数，于是有

$$f^3(i) = f^2(i) \circ f(i) = \big(f(i) \circ f(i)\big) \circ f(i)$$
$$= f\Big(f\big(f(i)\big)\Big) = f\big(f(2i+1)\big) = f(4i+3)$$
$$= 2(4i+3)+1 = 8i+7$$

等幂函数

定义：给定函数$f: X \to X$，如果有$f^2 = f$，则称f是个等幂函数。

例：设I是整数集合和N_m={0,1,2,⋯m−1}，并且函数f: $I \to N_m$是$f(i)=i(\text{mod } m)$。试证明，对于$n \geq 1$都有$f^n=f$。

证明：（归纳证法）当$n=2$时

$$f^2 = f \circ f = f\big(f(i)\big) = f\big(i(\text{mod } m)\big) = \big(i(\text{mod } m)\big)(\text{mod } m) = i(\text{mod } m) = f$$

假设当$n=k$时，满足$f^k=f$;

那么当$n=k+1$时，

$$f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f = f$$

得证。对于所有的$n \geq 1$，都有$f^n = f$

5.3特殊函数

定义：给定函数$f: X \to Y$。

（a）如果函数f的值域$R_f = Y$，则称f为映上的映射，或称满射函数。

（b）如果函数f的值域$R_f \subset Y$，则称f为映入的映射或内射。

定义：给定函数$f: X \to Y$,对于$x_1, x_2 \in X$来说，如果有$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

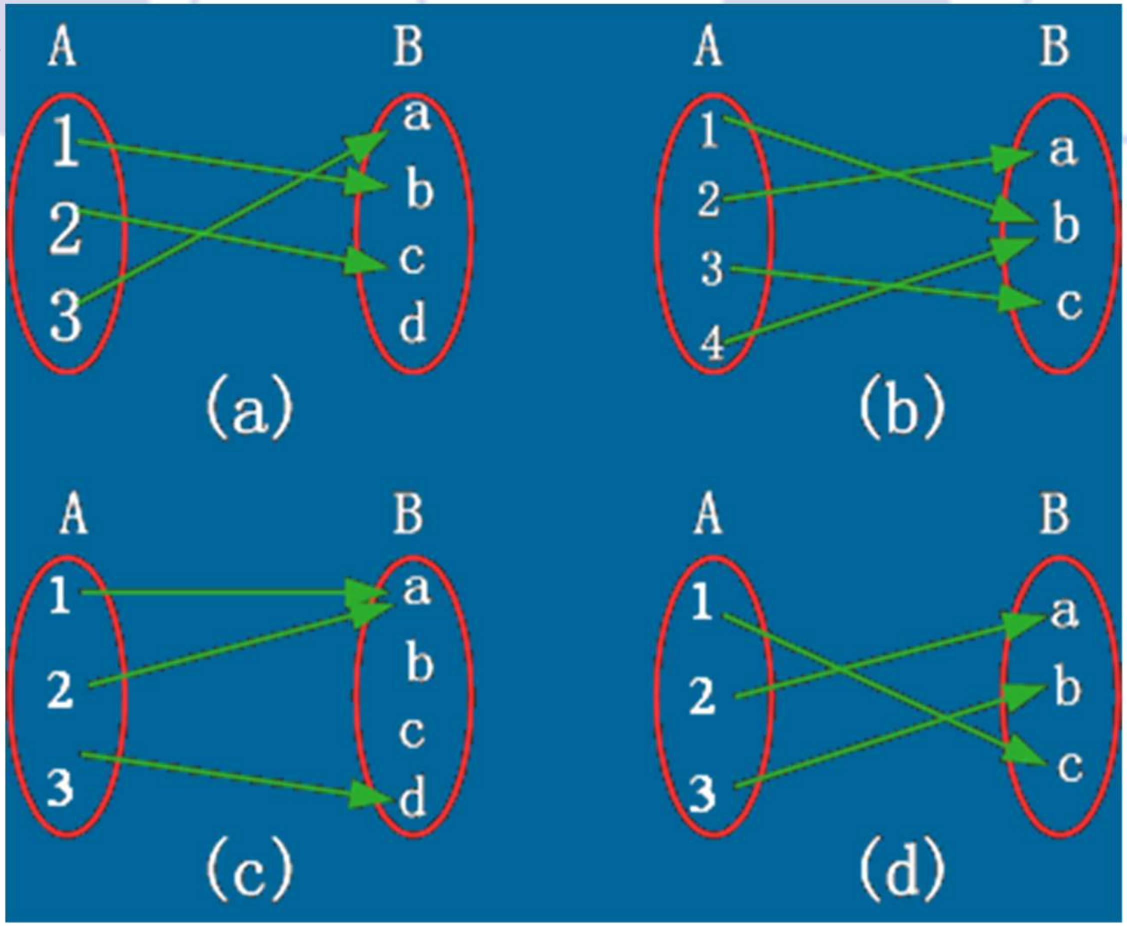
或者是$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

则称f为一对一的映射，或称f为单射函数。

定义：给定函数$f: X \to Y$。如果f既是满射的又是单射的，则称f为一对一映满的映射，或称f为双射。

5.3特殊函数

例：



（**a**）内射，单射；（**b**）满射；（**c**）内射；
（**d**）双射，单射，满射

补充

函数$f: X \rightarrow Y$是双射函数，必须要求X和Y含有的元素数目相等，也就是基数相等，设为n。

思考：从X到Y上存在多少个双射函数？

$$n!$$

定理：假设m和n是正整数并且满足$n \geq m$，那么从m元素集合到n元素集合的单射函数的个数为：P_n^m

补充

函数$\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$是满射函数，$\boldsymbol{X}$中的元素个数是$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{Y}$中的元素个数是$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{m}\geq\boldsymbol{n}$，问可以定义多少个这样的满射函数？

例：$\boldsymbol{X}=\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$，$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$，可以定义多少个$\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$的满射函数？

$$\mathbf{2^4-2=14}$$

补充

例：X={1,2,3,4,5,6}，Y={a,b,c}，可以定义多少个$X \to Y$的满射函数？

解：设P_1,P_2,P_3为a,b,c分别不在函数值域内的情况。一个函数是满射的，当且仅当满足函数概念并且不是P_1,P_2,P_3三种情况时。

设所有的函数为全集，P_1,P_2,P_3是在全集上的集合，表征意义如上，那么满射函数必须满足$\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3$

用$N(A)$表示满足情况A的集合的基数，N表示全集的基数，也就是从6元素集合到3元素集合的函数总数，根据包含排斥原理，有

补充

$$
\begin{aligned}
&N(\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3) \\
&= N - N(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \\
&= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) - N(P_1 \cup P_2) - N(P_1 \cup P_3) \\
&\quad - N(P_2 \cup P_3) + N(P_1 \cap P_2 \cap P_3)) \\
&= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)) + (N(P_1 \cup P_2) + N(P_1 \cup P_3) \\
&\quad + N(P_2 \cup P_3)) - N(P_1 \cap P_2 \cap P_3)) \\
&= 3^6 - C(3,1) * 2^6 + C(3,2) * 2^6 - 0 \\
&= 729 - 192 + 3 \\
&= 540
\end{aligned}
$$

补充

定理：假设$\boldsymbol{m}$和$\boldsymbol{n}$是正整数并且满足$\boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{n}$，那么从$\boldsymbol{m}$元素集合到$\boldsymbol{n}$元素集合的满射函数的个数为：

$$\boldsymbol{n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n,n-1) \cdot 1^m}$$

特殊函数

定理：给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$。于是

（a）如果f和g都是满射函数，则合成函数$g \circ f$也是个满射函数。

（b）如果f和g都是单射函数，则合成函数$g \circ f$也是个单射函数。

（c）如果f和g都是双射函数，则合成函数$g \circ f$也是个双射函数。

证明：给定集合X，Y和Z，并且有函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$。

特殊函数

证明：

(a)设任意的元素$z \in Z$,由于g是个满射函数，因而存在某一个元素$y \in Y$，能使$g(y) = z$。

另外，因为f是个满射函数，所以存在某一个元素$x \in X$，能使$f(x) = y$，

于是有$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

即$z \in (g \circ f)(X)$。

由元素$z \in Z$的任意性，知命题（a）为真。

特殊函数

证明：

（b）设任意的元素$x_i, x_j \in X$且有$x_i \neq x_j$,因为f是单射的，所以必定有$f(x_i) \neq f(x_j)$。由于g是单射的和$f(x_i) \neq f(x_j)$可推出$g\left(f(x_i)\right) \neq g\left(f(x_j)\right)$，即如果$x_i \neq x_j$，则有$(g \circ f)(x_i) \neq (g \circ f)(x_j)$。于是命题（$b$）的真值为真。

由命题（a）和命题（b）可直接推出命题（c）

注意：以上定理各部分的逆定理均不成立。

特殊函数

定理： 给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$,于是

（1）如果$g \circ f$是满射函数，则g必定是满射的。

（2）如果$g \circ f$是个单射函数，则f必定是个单射函数。

（3）如果$g \circ f$是个双射函数，则g必定是满射的，f是单射的

证明：给定集合X，Y和Z，并且有函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$。

(1)合成函数$g \circ f: X \to Z$。因为$g \circ f$是个满射函数，所以$g \circ f$的值域$R_{g \circ f} = Z$。设任意的元素$x \in X$，某些$y \in Y$和$z \in Z$，于是应有

$$(g \circ f)(x) = z = g(f(x)) = g(y)$$

可见，$R_g = R_{g \circ f} = Z$，即g是满射的，得证。

特殊函数

（1）反证法证明。设$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，因为$g\circ f$是满射函数，若g不是满射函数，则必存在Z中的元素z_0，使得对于任意的Y中的元素y，$g(y)\neq z_0$，这样，对于X中的任意元素x，$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)\neq z_0$,故$g\circ f$不是满射函数，与假设矛盾，因此，$g$一定是满射函数。

特殊函数

（2）合成函数$g\circ f$: $X\to Z$。设$x_i, x_j\in X$和$x_i\neq x_j$。

因为$g\circ f$是单射的，所以应有

$$(x_i\neq x_j)\Rightarrow (g\circ f)(x_i)\neq (g\circ f)(x_j)\Leftrightarrow$$

$$g(f(x_i))\neq g\left(f(x_j)\right)$$

因为g是函数，所以象点不同时，原象一定不相同，

即$g(f(x_i))\neq g\left(f(x_j)\right)\Rightarrow f(x_i)\neq f(x_j)$

根据永真蕴含关系的可传递性，应有

$$(x_i\neq x_j)\Rightarrow f(x_i)\neq f(x_j)$$

得证。

由（1）和（2）可知（3）成立。

特殊函数

（2）反证法证明。设f：$X \to Y$， g：$Y \to Z$，因为$g \circ f$是单射函数，若f不是单射函数，则必存在X中的元素x_1，x_2，且$x_1 \neq x_2$，使得$f(x_1) = f(x_2)$。由于g是函数，因此，$g\left(f(x_1)\right) = g\left(f(x_2)\right)$,也即$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$，即 $g \circ f$ 不是单射函数，矛盾，所以，f是单射函数。

恒等函数

定义：给定集合$\boldsymbol{X}$，并且有函数$\boldsymbol{I_X}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$。对于所有的$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$，有$\boldsymbol{I_X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$，亦即$\boldsymbol{I_X} = \{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle | \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}$

则称$\boldsymbol{I_X}$为恒等函数。

定理：给定集合$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$。对于任何函数$\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$，都有

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I_X} = \boldsymbol{I_Y} \circ \boldsymbol{f}$$

证明：设$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$，根据定义$\boldsymbol{I_X}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{I_Y}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{I_X})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{I_X}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$$(\boldsymbol{I_Y} \circ \boldsymbol{f})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I_Y}\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

得证。

偏函数

定义：设X和Y是两个集合，并且有$X' \subseteq X$。于是，任何函数$f{:}\, X' \to Y$都称为域X和陪域Y的偏函数。对于任何元素$x \in X - X'$，$f(x)$的值是没有定义的。

例：设R是实数集合，并且偏函数$f{:}\ R \to R$是$f(x) = 1/x$。对于$x = 0$，偏函数$f(x)$没有定义。

作业

- **125页：3-7,8（2,4,6,8,10）,9**