离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授、博士生导师

办公室：　综合楼405，Tel：　62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
　　　 zkchen00@hotmail.com
QQ：　1062258606

回顾

- 序偶
- 笛卡尔积
- 关系的定义，二元关系
  - 笛卡尔积—构成集合（子集）
- 关系的性质
  - 自反，反自反，对称，反对称，传递，不可传递
- 关系相等

集合的压缩和开拓

定义：设***R***为集合***A***上的二元关系且$S \subseteq A$，则称***S***上的二元关系$R \cap (S \times S)$为***R***在***S***上的压缩，记为$R|_S$，并称***R***为$R|_S$在***A***上的开拓。

定理：设***R***为***A***的二元关系且$S \subseteq A$，那么：

(1)若***R***是自反的，则$R|_S$也是自反的；

(2)若***R***是反自反的，则$R|_S$也是反自反的；

(3)若***R***是对称的，则$R|_S$也是对称的；

(4)若***R***是反对称的，则$R|_S$也是反对称的；

(5)若***R***是可传递的，则$R|_S$也是可传递的；

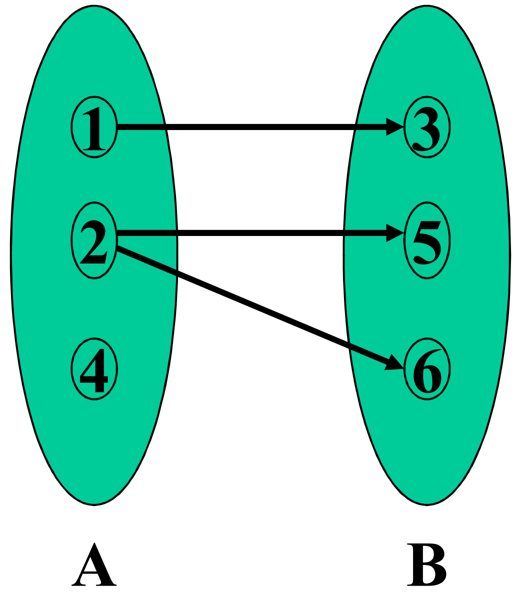
4.3关系的表示

一、关系图

定义：设A和B为任意的非空有限集，R为任意一个从A到B的二元关系。以$A \cup B$中的每个元素为结点．对每个$\langle x, y\rangle \in R \wedge x \in A \wedge y \in B$皆画一条从$x$到$y$的有向边，这样得到的一个图称为关系$R$的关系图。

例：A={1,2,4}; B={3,5,6};

关系R={<1,3>,<2,6>,<2,5>}

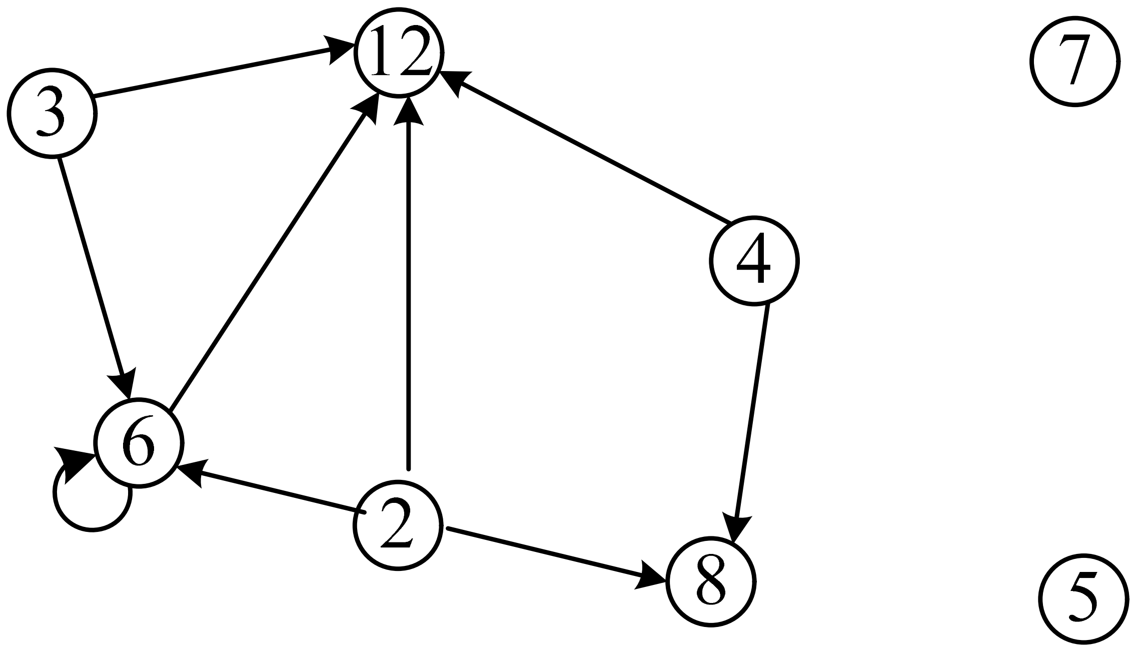


一、关系图

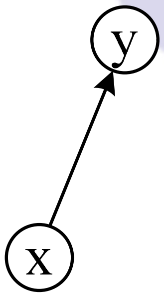
例：设A={2,3,4,5,6},B={6,7,8,12}，从A到B的二元关系R为$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \wedge x\text{整除}y\}$，画出其关系图。

解：先求出R

$$R=\{\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 2,12\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,12\rangle,\langle 4,8\rangle,\langle 4,12\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 6,12\rangle\}$$

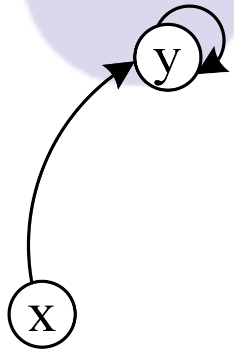


一、关系图

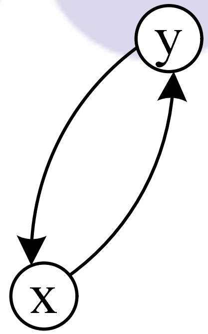


xRy

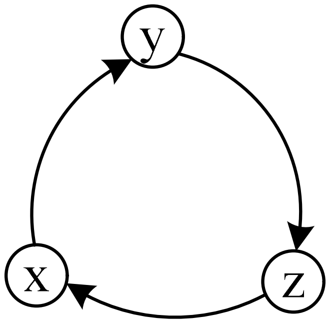
xRx



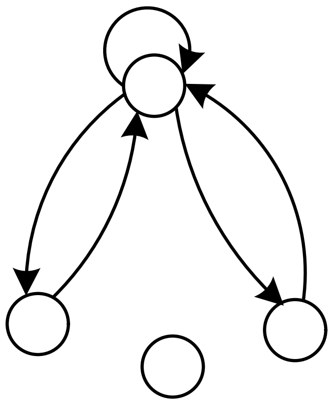
$xRy \wedge yRy$



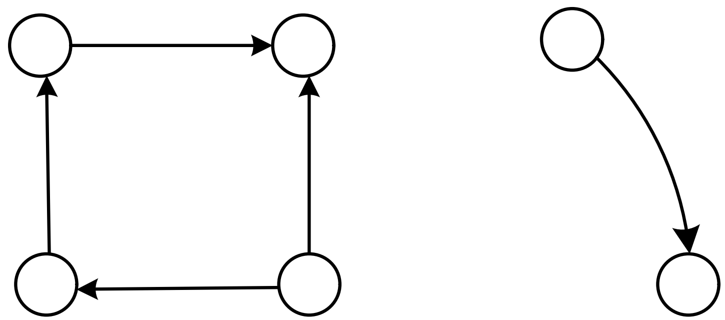
$xRy \wedge yRx$



$xRy \wedge yRz \wedge zRx$



对称关系



反对称关系

二、关系矩阵

定义：给定两个有限集合$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$和$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，R是从X到Y的二元关系，如果有：

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 如果\langle x_i,y_j\rangle\in R\\ 0 & 如果\langle x_i,y_j\rangle\notin R\end{cases}$$

则称$[r_{ij}]_{|X\cup Y|\times|X\cup Y|}$是$R$的关系矩阵，记作$M_R$

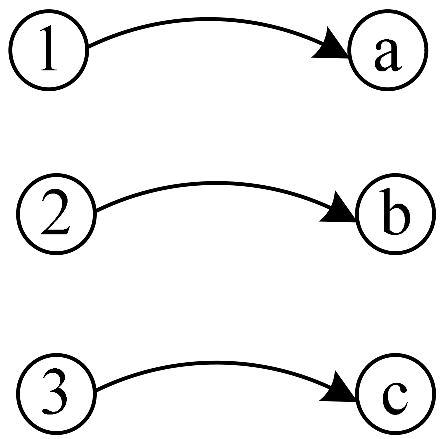
例：设**A={1,2,3,4},R**为定义在**A**上的二元关系，**R={<2,1>,<3,1>,<3,2>,<4,1>}**，写出关系矩阵。

$$M_R=[r_{ij}]_{4\times4}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

二、关系矩阵

例：设$\boldsymbol{A}$={1,2,3},$\boldsymbol{B}$={$\boldsymbol{a,b,c}$}, $\boldsymbol{R}$是A到B的二元关系，并且$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,c\rangle\}$，试画出$\boldsymbol{R}$的关系图，给出关系矩阵。

$$M_R=[r_{ij}]_{6\times 6}=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc}1 & 2 & 3 & a & b & c\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\a\\b\\c\end{array} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$



二、关系矩阵

- 如果关系矩阵主对角线上的记入值全为1，则R是自反的；
- 如果主对角线上的记入值全为0，则R是反自反的；
- 如果矩阵关于主对角线是对称的，则R是对称的；
- 如果矩阵关于主对角线是反对称的，(亦即r_{ij}=1时则一定有r_{ji}=0),则R是反对称的；
- 如果对于任意的i,j,k, r_{ij}=1并且r_{jk}=1时一定有r_{ik}=1，则R是可传递的；
- 如果存在i,j,k, r_{ij}=1并且r_{jk}=1时，有r_{ik}不等于1，则R是不可传递的；

4.4关系的运算

注意：由于关系也是特殊的集合，因此集合的运算也适用于关系中。

设$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的二元关系，那么$R_1 \cap R_2$，$R_1 \cup R_2$，$R_1 - R_2$，$R_1 \oplus R_2$也是从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的二元关系，它们分别被称为二元关系$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$的交、并、差分和对称差分。

4.4关系的运算

例：设集合**A={a,b,c}**，**B={d,e}**，定义**A**到**B**的二元关系

$R_1=\{<a,d>,<a,e>,<b,d>,<c,e>\}$

$R_2=\{<a,d>,<b,e>,<c,d>\}$

则

$$R_1 \cap R_2 = \{<a,d>\}$$

$$R_1 \cup R_2 = \{<a,d>,<a,e>,<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>\}$$

$$R_1 - R_2 = \{<a,e>,<b,d>,<c,e>\}$$

$$R_2 - R_1 = \{<b,e>,<c,d>\}$$

$$\sim R_1 = \{<b,e>,<c,d>\}$$

$$R_1 \oplus R_2 = \{<a,e>,<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>\}$$

4.4关系的运算

一、关系的合成

定义：设***R***是从***X***到***Y***的关系，***S***是从***Y***到***Z***的关系，于是可用***R***∘***S***表示从***X***到***Z***的关系，通常称它是***R***和***S***的合成关系，用式子表示即是：

$$R \circ S = \{\langle x, z\rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists\ y)(y \in Y \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in S)\}$$

例： 给定集合***X*={1,2,3,4}**，***Y*={2,3,4}**和***Z*={1,2,3}**。设***R***是从***X***到***Y***的关系，并且***S***是从***Y***到***Z***的关系，并且***R***和***S***给定成：

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x + y = 6\} = \{\langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$$

$$S = \{\langle y, z\rangle \mid y - z = 1\} = \{\langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,3\rangle\}$$

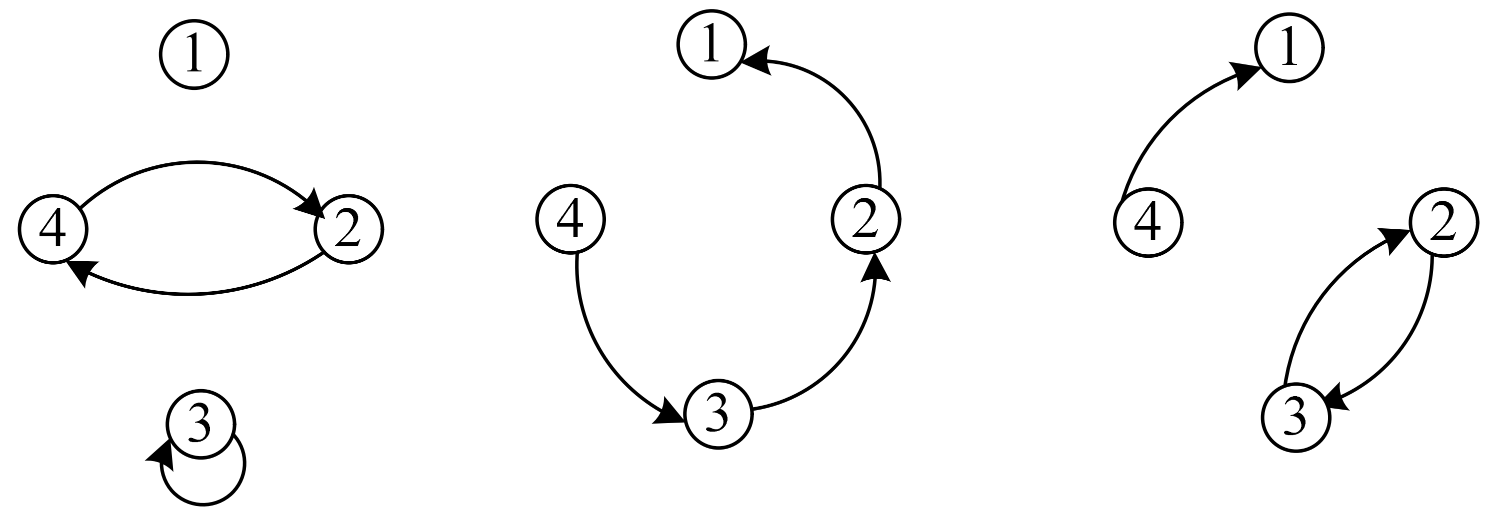
试求***R***和***S***的合成关系，并画出合成关系图给出合成关系的关系矩阵。

一、关系的合成

解：找出所有这样的偶对$\langle x,z\rangle$对于某一个y来说，能有$x+y=6$和$y-z=1$，由上述的偶对就可构成从X到Z的关系$R\circ S$ 。

$$R\circ S=\{\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,1\rangle\}$$

$$x \xrightarrow{R} y \qquad y \xrightarrow{S} z \qquad x \xrightarrow{R\circ S} z$$



一、关系的合成

$$M_R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad M_S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad M_{R \circ S} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

定义布尔运算：

0+0=0，1+0=0+1=1+1=1

1·1=1，　0·1= 1·0= 0·0=0

对两个关系矩阵求其合成时，其运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，但其中的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

一、关系的合成

注意：设R是从集合X到集合Y的关系，S是从集合Y到集合Z的关系，于是有：

- ✓如果R关系的值域与S关系的定义域的交集是个空集，则合成关系$R \circ S$也是个空关系；
- ✓若至少有一个序偶$<x, y> \in R$，其中第二个成员是S中的某一个序偶的第一个成员，则合成关系就是个非空关系。
- ✓对于合成关系$R \circ S$来说，它的定义域是集合X的子集，而它的值域则是Z的子集，事实上，它的定义域是关系R的定义域的子集，它的值域是关系S的值域的子集。

一、关系的合成

定理：给定集合***X*,*Y*,*Z***和***W***，设R_1是从***X***到***Y***的关系，R_2和R_3是***Y***到***Z***的关系，R_4是从***Z***到***W***的关系，于是有：

$$(a)\quad R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$(b)\quad R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

$$(c)\quad (R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$$

$$(d)\quad (R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$$

一、关系的合成

$$(a)\ \ R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

证明：当且仅当存在某一个 $y \in Y$，能使 $\langle x, y\rangle \in R_1$ 和 $\langle y, z\rangle \in R_2 \cup R_3$ ，才有 $\langle x, z\rangle \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$ ，而

对任意的 $<x,z> \in R_1 o(R_2 \cup R_3) \Leftrightarrow$

$\exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2 \cup R_3) \Leftrightarrow$

$\exists y(<x,y> \in R_1 \wedge (<y,z> \in R_2 \vee <y,z> \in R_3)) \Leftrightarrow$

$\exists y((<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2) \vee$

$(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2) \vee$

$\exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_3)$

$\Leftrightarrow <x,z> \in R_1 o R_2 \vee <x,z> \in R_1 o R_3$

$\Leftrightarrow <x,z> \in$ （$R_1 o R_2$）$\cup$（$R_1 o R_3$） 得证

一、关系的合成

$(b)\ \ R_1\circ(R_2\bigcap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\bigcap(R_1\circ R_3)$

证明：当且仅当存在某一个$y\in Y$，能使$\langle x,y\rangle\in R_1$和$\langle y,z\rangle\in R_2\bigcap R_3$，才有$\langle x,z\rangle\in R_1\circ(R_2\bigcap R_3)$，而

$$(\exists\ y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2\bigcap R_3)$$

$$\Leftrightarrow(\exists\ y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge(\langle y,z\rangle\in R_2\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$$

$$\Leftrightarrow(\exists\ y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2\wedge(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$$

$$\Rightarrow(\exists\ y)((\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2)\wedge(\exists\ y)(\langle x,\mathrm{y}\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$$

$$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\circ R_2\wedge\langle x,z\rangle\in R_1\circ R_3$$

$$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in(R_1\circ R_2)\bigcap(R_1\circ R_3)$$

- 对以上证明过程**(a)**式使用的是存在量词对$\vee$满足分配律
- 对**(b)**存在量词对$\wedge$不满足分配律，但它满足蕴涵式$\exists$**x(A(x)** $\wedge$**B(x))**$\Rightarrow\exists$**xA(x)** $\wedge$ $\exists$**x B(x)**
- 这里应注意 A $\Rightarrow$ B 是
- A $\subseteq$ B
-

一、关系的合成

合成运算是对关系的二元运算，使用这种运算，能够由两个关系生成一个新的关系，对于这个新的关系又可进行合成运算，从而生成其它关系。

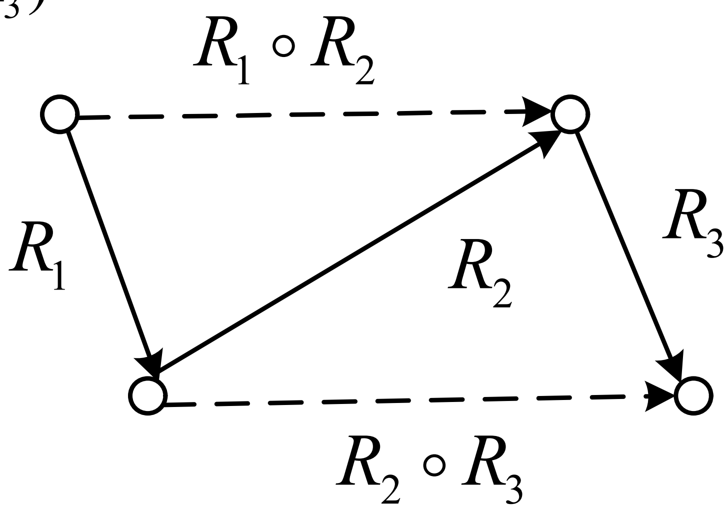
定理：设$\boldsymbol{R_1}$是从$\boldsymbol{X}$到$\boldsymbol{Y}$的关系，$\boldsymbol{R_2}$是从$\boldsymbol{Y}$到$\boldsymbol{Z}$的关系，$\boldsymbol{R_3}$是从$\boldsymbol{Z}$到$\boldsymbol{W}$的关系，于是有

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

一、关系的合成

$$\langle x,w\rangle \in (R_1\circ R_2)\circ R_3$$
$$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle \in R_1\circ R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$$
$$\Leftrightarrow (\exists z)((\exists y\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2) \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$$
$$\Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge (\exists z)(\langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3))$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,w\rangle \in R_2\circ R_3)$$
$$\Leftrightarrow \langle x,w\rangle \in R_1\circ (R_2\circ R_3)$$

证毕。



一、关系的合成

例：给定关系**R**和**S**，并且$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$

则 $R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\}$

$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$

$R\circ(S\circ R)=\{\langle 3,2\rangle\}$

$(R\circ S)\circ R=\{\langle 3,2\rangle\}$

$R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$S\circ S=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$R\circ R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

关系的幂

定义：如果$\mathbf{R}_1$是从X_1到X_2的关系，R_2是从X_2到的X_3关系，…，R_n是从X_n到X_{n+1}的关系，则无括号表达式$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$表达了从$X_1$到$X_{n+1}$的关系。当$X_1=X_2=\ldots=X_{n+1}$和$R_1=R_2=\ldots=R_n$时，也就是说当集合$X$中的所有$R_i$都是同样的关系时，$X$中的合成关系$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$可表达成$R^n$，并称作关系$R$的幂。

定义：给定集合X，R是X中的二元关系。设$n \in N$，于是R的n次幂R^n可定义成

(a) R^0是集合X中的恒等关系I_X，亦即

$$R^0 = I_X = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$$

(b) $R^{n+1} = R^n \circ R$

关系的幂

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。设$m,n \in N$，于是可有

$$(a) \quad R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(b) \quad (R^m)^n = R^{mn}$$

例：给定集合$X=\{a,b,c\}$，R_1,R_2,R_3,R_4是X中的关系，并给定

$$R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$R_4 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

给出这些关系的各次幂

关系的幂

解：

$$R_1^2=\{\langle a,b\rangle\},R_1^3=\varnothing,R_1^4=\varnothing,\cdots$$

$$R_2^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\},$$

$$R_2^3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_2^0$$

$$R_2^4=R_2,R_2^5=R_2^2$$

$$R_2^6=R_2^3,\cdots$$

$$R_3^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_3^3=R_3^4=R_3^5\cdots$$

$$R_4^2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_4^0$$

$$R_4^3=R_4,R_4^5=R_4^3\cdots$$

关系的幂

定理：设***X***是含有***n***个元素的有限集合，***R***是***X***中的二元关系。于是存在这样的***s***和***t***，能使$R^t = R^s,\ 0 \le s < t \le 2^{n^2}$

证明：集合***X***中的每一个二元关系都是$X \times X$ 的子集，***X***有***n***个元素，$X \times X$ 有$\boldsymbol{n^2}$个元素，$\rho(X \times X)$ 有 2^{n^2} 个元素，每一个元素都是$X \times X$ 的一个子集，也是一种二元关系，因而，在***X***中有 2^{n^2} 个不同的二元关系。所以，不同的二元关系***R***的幂不会多于个 2^{n^2}。但是序列 $R^0, R^1, \cdots, R^{2^{n^2}}$ 中有 $2^{n^2}+1$ 项，因此这些的方幂中至少有两个是相等的。证毕。

二、合成关系的矩阵表达和图解

设集合$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\ldots,z_p\}$，R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，M_R和M_S第i行第j列的元素分别是a_{ij}和b_{ij}，它们是0或者1。则合成关系$R\circ S$关系矩阵上的元素为

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik}\wedge b_{kj} \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p$$

定义布尔运算：

0+0=0，1+0=0+1=1+1=1

1·1=1，0·1= 1·0= 0·0=0

对两个关系矩阵求其合成时，其运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，但其中的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

二、合成关系的矩阵表达和图解

例：求合成关系 $R\circ S$ 的关系矩阵 $M_{R\circ S}$

$$M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M_{R\circ S}=M_R\wedge M_S=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

二、合成关系的矩阵表达和图解

$$M_{R_1} \circ (M_{R_2} \circ M_{R_3}) = (M_{R_1} \circ M_{R_2}) \circ M_{R_3} = M_{R_1} \circ M_{R_2} \circ M_{R_3}$$

当 $M_{R_1} = M_{R_2} = \cdots = M_{R_n} = M_R$

用 M_{R^n}表示这些矩阵的合成矩阵

二、合成关系的矩阵表达和图解

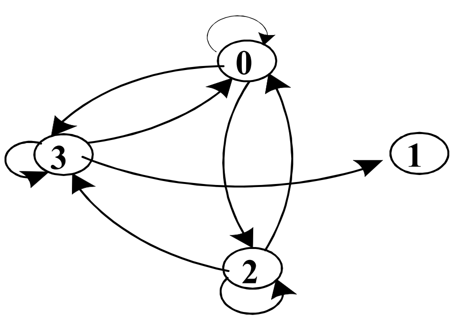
例：设集合X=\{0,1,2,3\}，R是X中的关系，并且

$$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

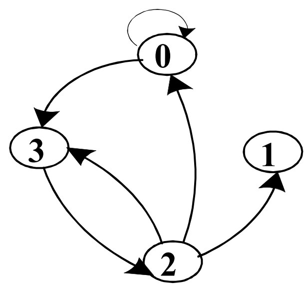
画出R^2和R^3的关系图

解：$R^2=R\circ R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,0\rangle$

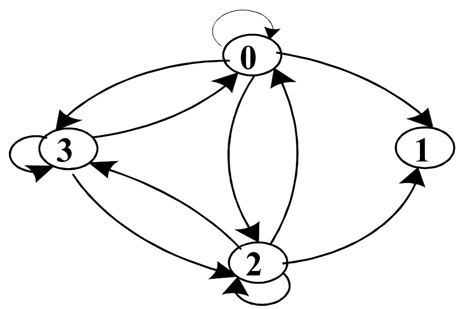
$R^3=R^2\circ R=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 3,3\rangle$



(b)



(a)



(c)

作业

- 103页11,13,15,17,19