离散数学

大连理工大学软件学院

第十章 几种图的介绍

回顾

- 欧拉图
  - 定义
  - 性质
- 哈密尔顿图
  - 定义
  - 性质

本章内容

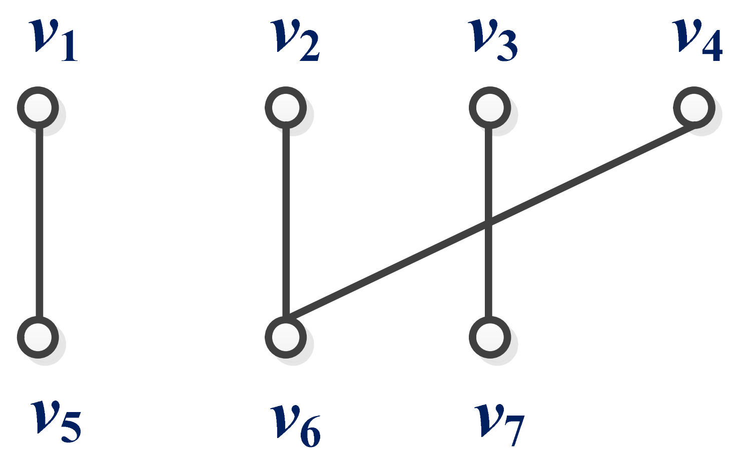
- 欧拉图
- 哈密尔顿图
- 二部图及匹配
  - 二部图的概念及性质
  - 二部图匹配
- 平面图
  - 平面图的概念及性质
  - 多边形图、对偶图及平面图着色

10.3 二部图及匹配

二部图

定义：设无向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$。如果存在$V$的划分$\{V_1,V_2\}$，使得$V_i$中的任何两个结点都不相邻$(i = 1,2)$，则称$G$为二部图，$V_1$和$V_2$称为$G$的互补结点子集。

- 二部图没有自圈。
- 与二部图的一条边关联的两个结点一定分属于两个互补结点子集。
- 一般来说，二部图的互补结点子集的划分不是唯一的。



二部图

定理：设G是阶大于1的无向图。G是二部图，当且仅当G的所有回路长度均为偶数。

证：先证明必要性。

- 设V_1和V_2是二部图G的互补结点子集，C是G的长度为m的回路
- 取v_0为C的某一结点，在C中存在从v_0至v_0长度为m的路径，设为$v_0e_1v_1\cdots v_{m\text{-}1}e_mv_0$
- 不妨设$v_0 \in V_1$，则对于一切的$i < m$，$v_i \in V_2$，当且仅当i为奇数
- v_{m-1}与v_0相邻，故$v_{m-1} \in V_2$，则m-1是奇数，所以m为偶数。

二部图

再证充分性。

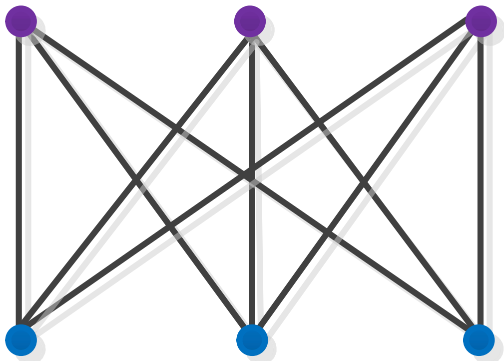
- 设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是连通的。任取$v_0\in V$，做$V_1=\{v_i|v_i\in V$且$v_i$到$v_0$的距离为偶数$\}$，$V_2=V-V_1$，
- 则$e\in E$必连接V_1中的一点和V_2中的一个点。
  - 因为若$u,v\in V_1$且e连接u和v，则当v_0到u的距离为偶数，v_0到v的距离为偶数，加上u和v的边e为奇数，与题设矛盾。
  - 同理可证$u,v\in V_2$且e连接u和v时，产生矛盾
- 若G不是连通的，可以用以上办法证明G的每个分支是二部图，则G也是二部图。

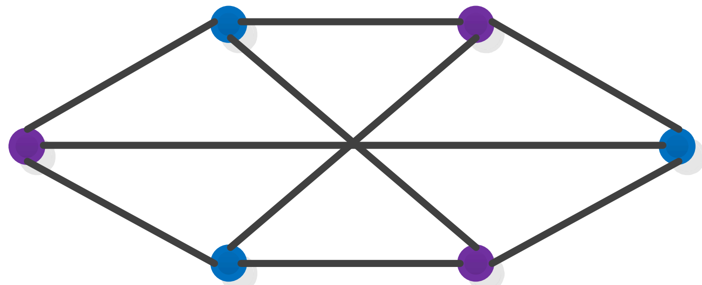
得证。

二部图

定义：设V_1和V_2是简单二部图G的互补结点子集，如果V_1中的每个结点与V_2中的每个结点相邻，则称G为完全二部图。

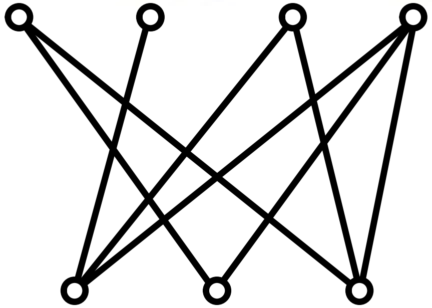
我们把互补结点子集分别包含m和n个结点的完全二部图记为$K_{m,n}$。



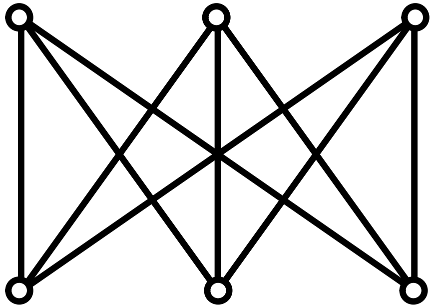


$K_{3,3}$

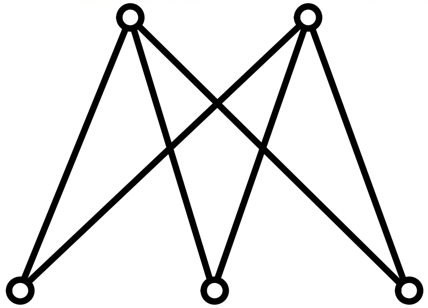
二部图



(a)



(b)



(c)

匹配

定义：设无向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，$\boldsymbol{E}'\subseteq\boldsymbol{E}$。

(1)如果E'不包含自圈，并且E'中的任何两条边都不邻接，则称E'为G中的匹配。

(2)如果E'是G中的匹配，并且对于G中的一切匹配E''，只要$\boldsymbol{E}'\subseteq\boldsymbol{E}''$必有$\boldsymbol{E}'=\boldsymbol{E}''$，则称$E'$为$G$中的极大匹配。

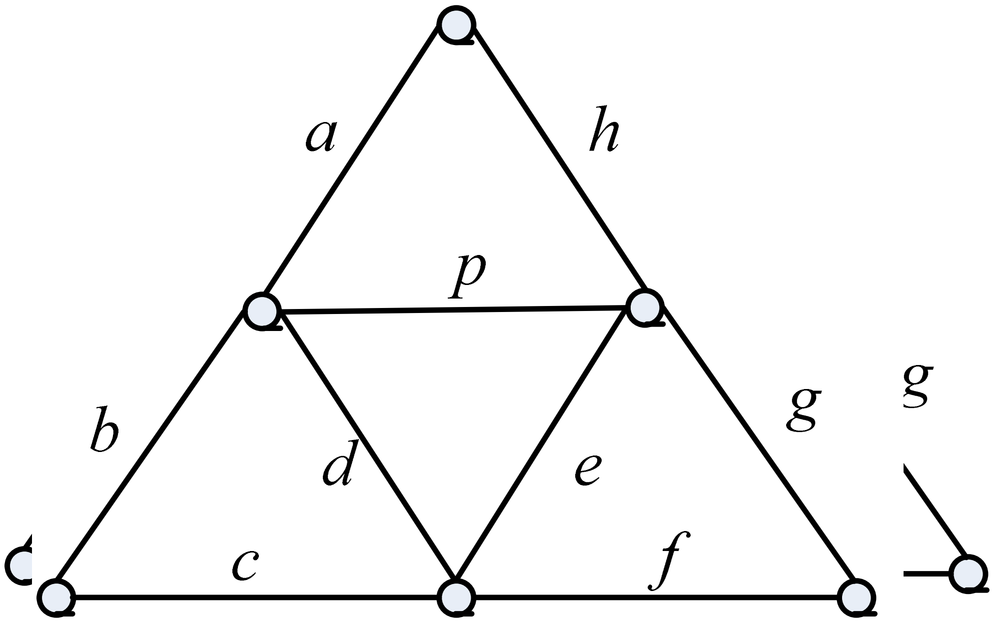
(3)G中的边数最多的匹配称为G中的最大匹配。

(4)G中的最大匹配包含的边数称为G的匹配数。

- 最大匹配一定是极大匹配，而极大匹配不一定是最大匹配。
- 在一个无向图中，可以有多个极大匹配和最大匹配

匹配

例：



极大匹配： $\{a,c,g\}$ $\{a,e\}$ $\{a,f\}$, $\{b,e\}$,$\{b,g\}$
$\{b,f,h\}$, $\{c,h\}$, $\{c,p\}$, $\{d,g\}$, $\{d,h\}$, $\{f,p\}$

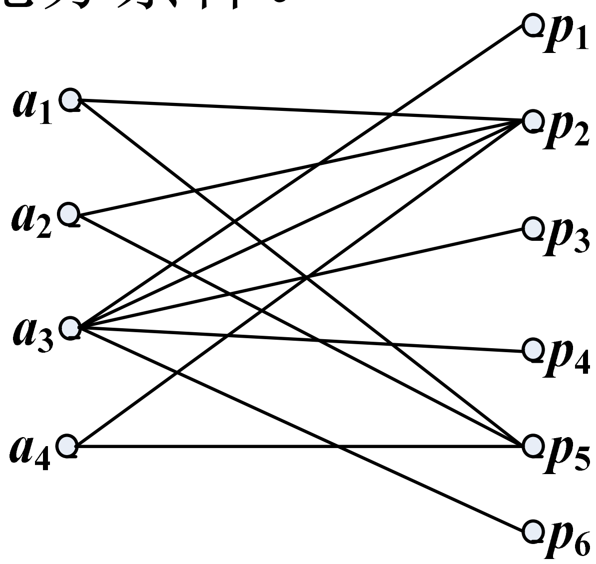
最大匹配： $\{a,c,g\}$, $\{b,f,h\}$

匹配数：3

完美匹配

定义：设V_1和V_2是二部图G的互补结点子集。如果G的匹配数等于$|V_1|$，则称G中的最大匹配为V_1到V_2的完美匹配。

只有$|V_1|\leqslant|V_2|$时可能存在从V_1到V_2的完美匹配。但这个条件并不是充分条件。



上图不存在V_1到V_2的完美匹配。

完美匹配

定理：设V_1和V_2是二部图G的互补结点子集。存在V_1到V_2的完美匹配，当且仅当对于任意$S \subseteq V_1$，$|N_G(S)| \geq |S|$，其中
$N_G(S) = \{v | v \in V_2 \wedge (\exists v')(v' \in S \wedge v\text{与}v'\text{在}G\text{中相邻接})\}$

当二部图的结点数目比较大时，上述定理用起来不太方便

下面给出存在完美匹配的一个充分条件，判断二部图是否存在完美匹配时，可以先用这个充分条件，如果得不出结论，再用上述定理。

完美匹配

定理： 设V_1和V_2是二部图G的互补结点子集，t是正整数。对于V_1中的每个结点，在V_2中至少有t个结点与其邻接。对于V_2中的每个结点，在V_1中至多有t个结点与其邻接。则存在V_1到V_2的完美匹配。

证：因为去掉平行边不会影响V_1到V_2的完美匹配的存在性，因此不妨假设G是简单图。

- 任取$S \subseteq V_1$，设$|S| = n$，$|N_G(S)| = m$。
- 如果边e与S中的某结点关联，则必有$N_G(S)$中的结点与e关联，所以$\sum_{v \in S} d_G(v) \le \sum_{v \in N_G(S)} d_G(v)$。
- 由于$t \cdot n \le \sum_{v \in S} d_G(v)$和$\sum_{v \in N_G(S)} d_G(v) \le t \cdot m$
- 故$t \cdot n \le \sum_{v \in S} d_G(v) \le \sum_{v \in N_G(S)} d_G(v) \le t \cdot m$
- 则$m \ge n$。根据前一个定理，存在V_1到V_2的完美匹配。

二部图

例：有q个委员会$C_1, C_2, \cdots, C_q$，要从每个委员会的委员中选出该委员会的主任，并限定任何人不得兼任一个以上委员会的主任。问是否可能按照要求选出主任？

- 思路：把这个问题化为图论的问题。
- 令V_1是所有委员会的集合，
- V_2是参加这些委员会的人的集合，
- 若某人m是委员会C的委员，则在m和C之间连一条边
- 这样就构成了以V_1和V_2为互补结点子集的二部图
- 可能按照要求选出主任，当且仅当存在V_1到V_2的完美匹配
- 每个委员会至少有t个委员，每个委员至多参加t个委员会，这时主任是可以选出的

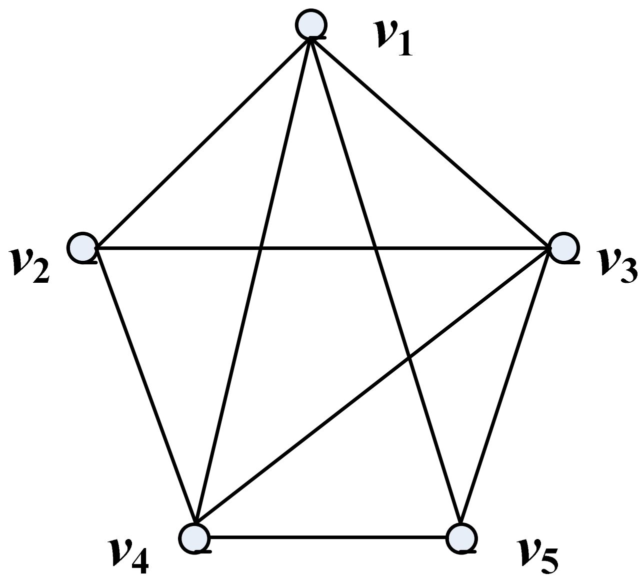
10.4 平面图

- 在生活中，通常有这样一类问题，涉及到图的平面性的研究，比如大家都知道的印刷线路板的布线问题。近些年来，大规模集成电路的发展，进一步促进了图的平面性的研究。

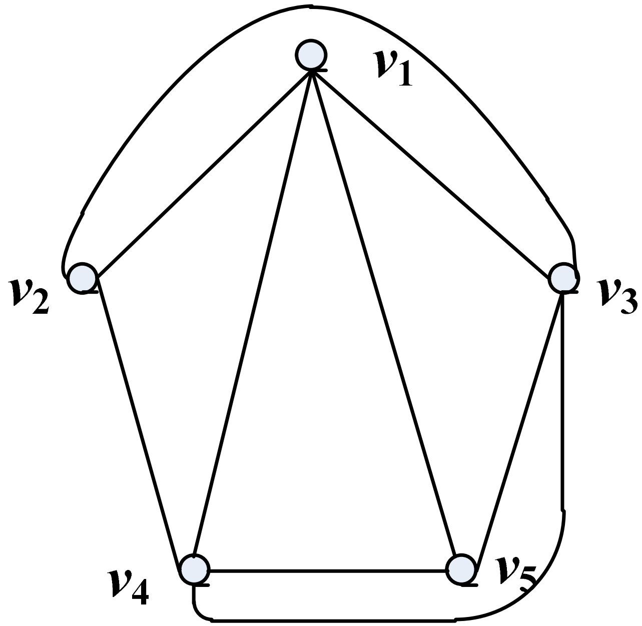
平面图

定义：在一个平面上，如果能够画出无向图G的图解，其中没有任何边的交叉，则称图G是个平面图；否则，称G是非平面图。

例：将下列非平面图转化为平面图。



例10. 9, 图10. 18（d）



例10. 9, 图10. 18（h）

平面图

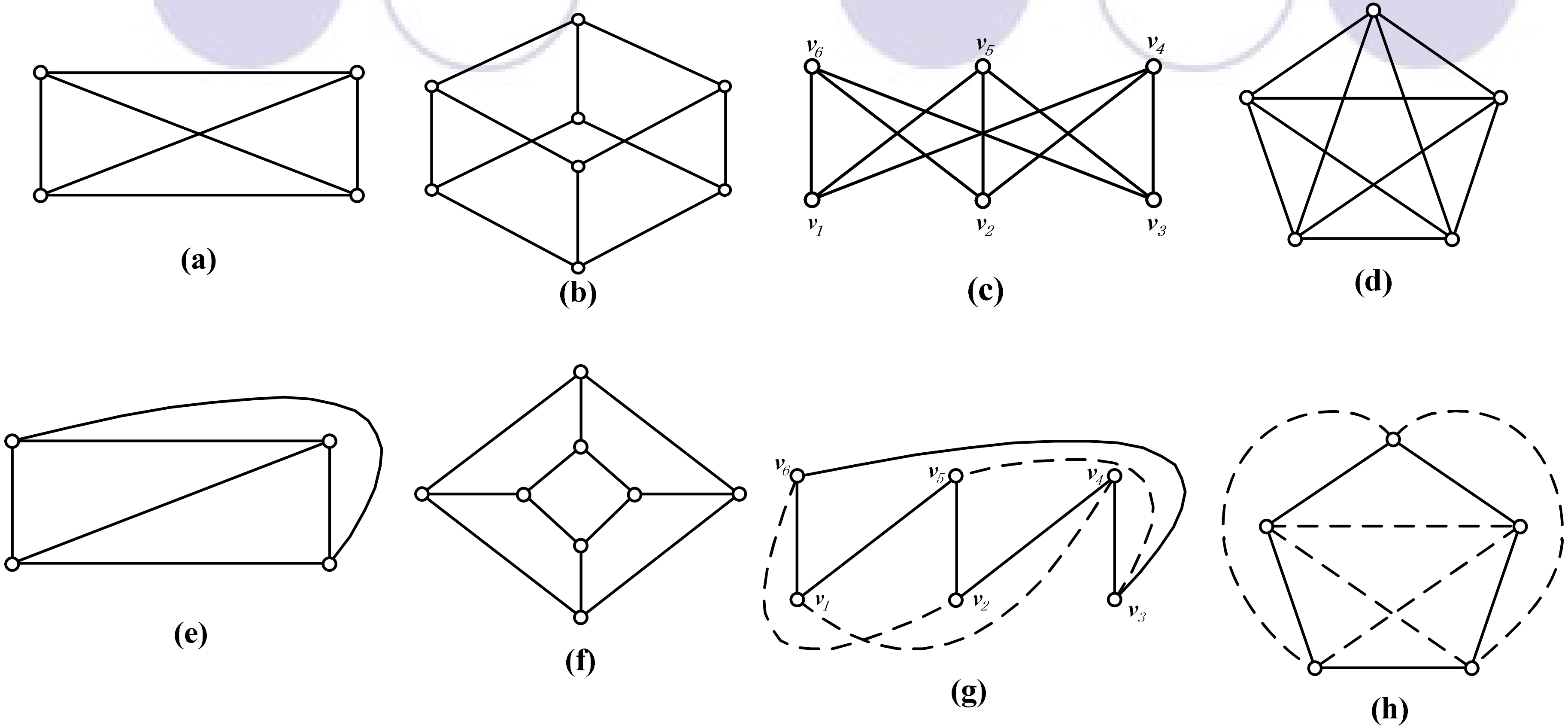


图 10.18（例10.9）

平面图

- 根据平面图的定义，非循环图显然是平面图。
- 故，研究图的平面性问题，只需要限制有回路的一类图即可。判别方法是：

① 对于有回路的图找出一个长度尽可能大的且边不相交的基本回路。

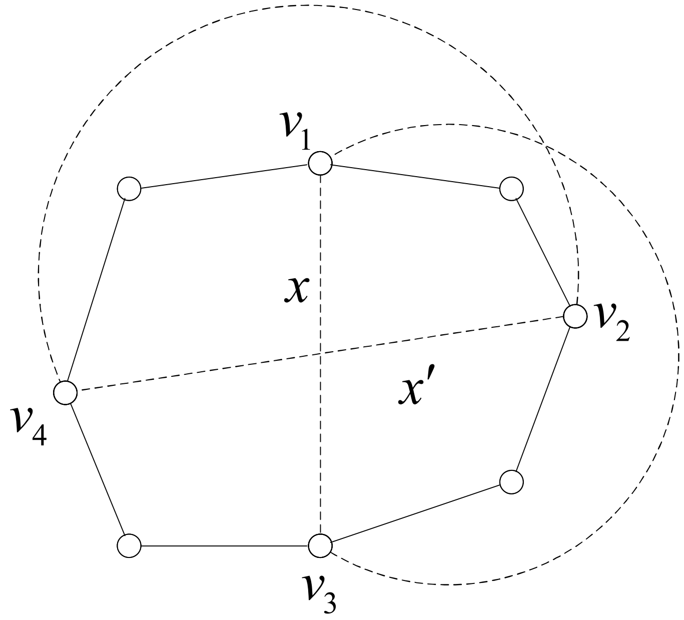
② 将图中那些相交的边，适当放置在已选定的基本圈内侧或外侧，若能避免除结点之外边的相交，则该图是平面图；否则，便是非平面图。

平面图

设$G = \langle V, E, \psi \rangle$是能够画于平面上的图解中的无向图，并且设$C = v_1 \cdots v_2 \cdots v_3 \cdots v_4 \cdots v_1$是图中的任何基本循环。

此外，设$x=v_1 \cdots v_3$和$x'=v_2 \cdots v_4$是图G中的任意两条基本路径。

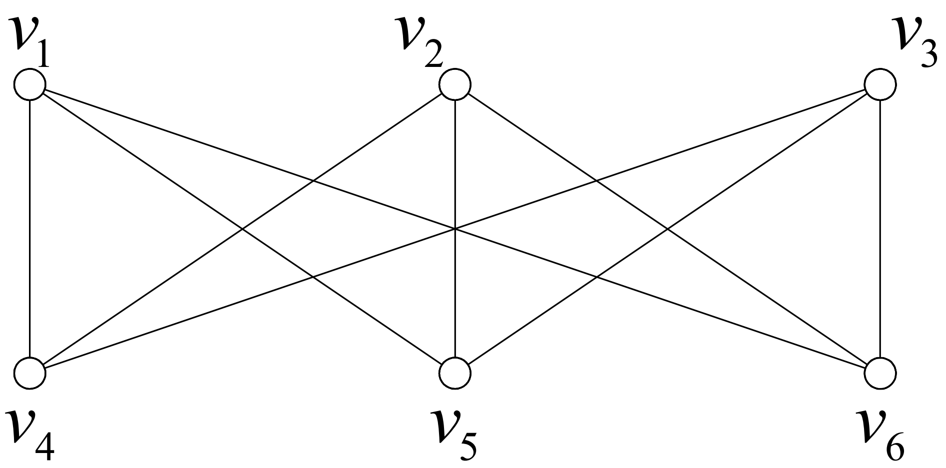
在左图中给出了两种可能的结构。显然，x和x'或都在基本循环的内部，或者都在基本循环的外部，当且仅当G是个非平面图。因为这时基本路径x和x'是相互交叉的。



平面图

例：设有一个电路，它含有两个结点子集V_1和V_2，且有$|V_1|=|V_2|=3$。用导线把一个集合中的每一个结点，都与另外一个集合中的每一个结点连通，如下图所示。

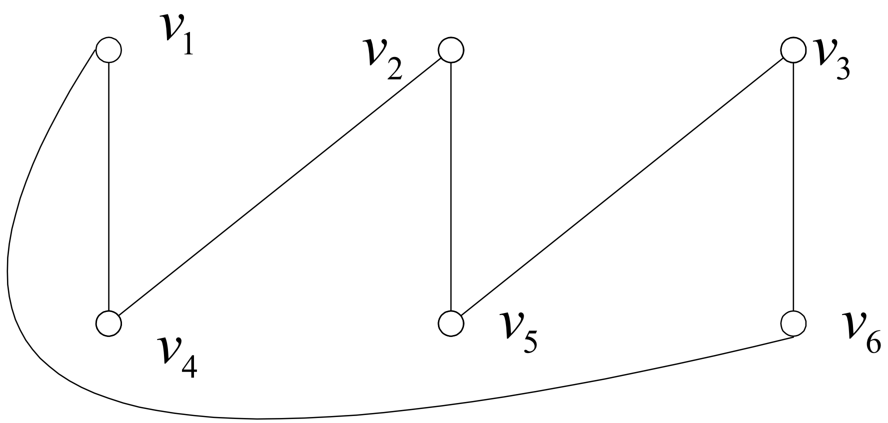
试问，是否有可能这样来接线，使得导线相互不交叉。对于印刷电路，避免交叉具有实际意义。

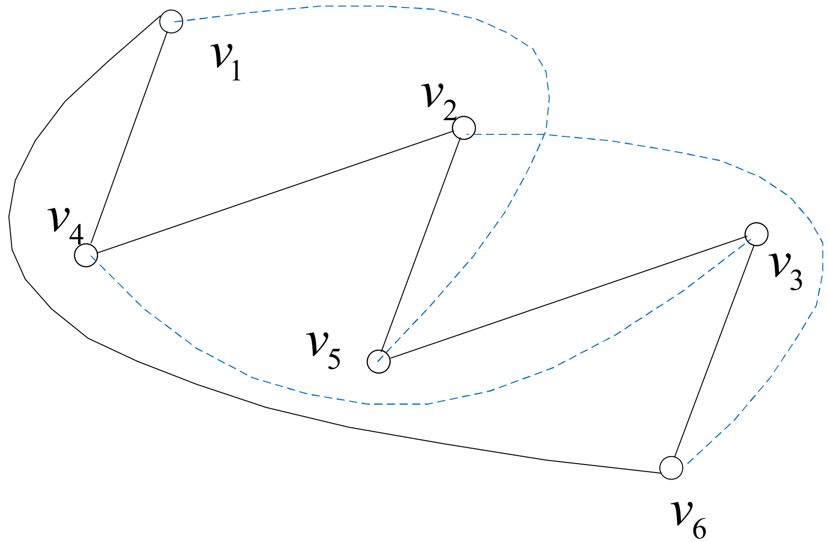


平面图

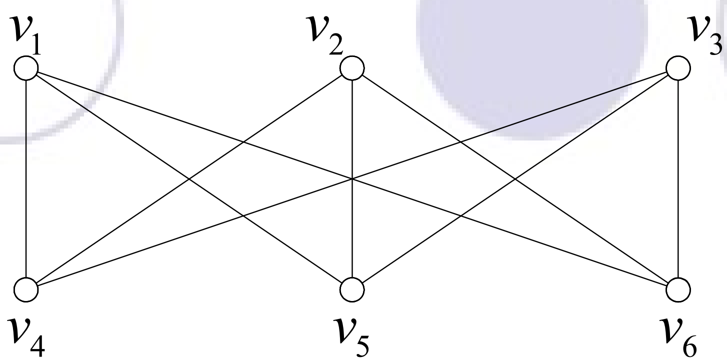
解：这个问题等价于判定上图是否是个平面图。

- 可以看出，给定图中有一个基本循环 $C = v_1v_6v_3v_5v_2v_4v_1$ ，如下列左图所示。
- 试考察三条边$\{v_1, v_5\}$，$\{v_2, v_6\}$，$\{v_3, v_4\}$，上述每条边或是处于循环C的内部，或是处于C的外部。
- 显然，三条边中至少有两条边同时处于的同一侧，因此避免不了交叉，如下列右图所示。故给定的图是非平面图。

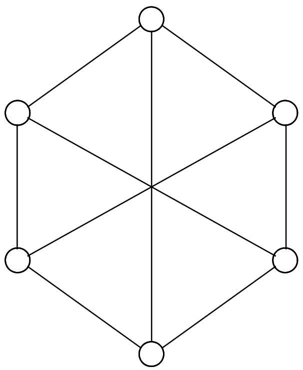




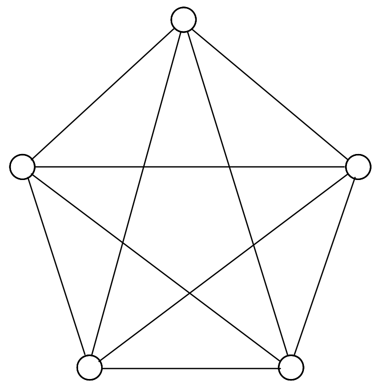
库拉托夫斯基图



- 上图跟下图图（*a*）等价，由于已经证明了上图是非平面图，因此下图（*a*）也是非平面图。
- 同样方法，知（*b*）也是非平面图。
- 图（*a*）和（*b*）都称为库拉托夫斯基图。

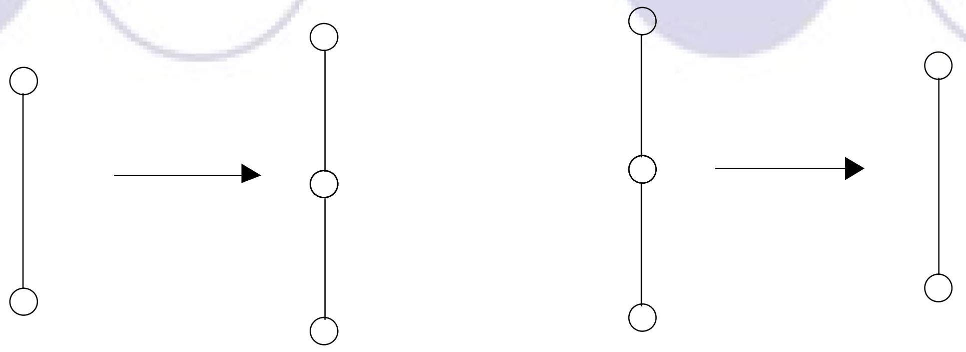


(*a*)



(*b*)

库拉托夫斯基图

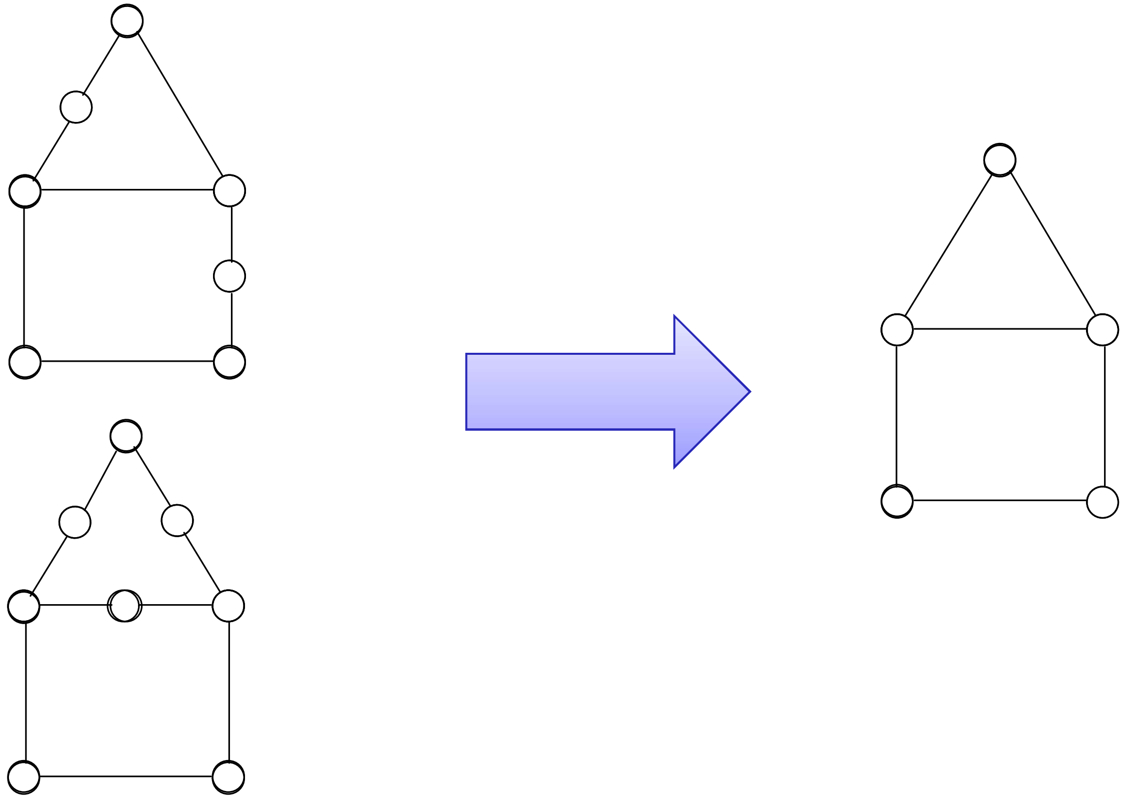


（a）　　　　（b）

- 如上图（a）所示，试往图中的一条边上，插上一个新的次数为2的结点，把一条边分解成两条边，则不会改变给定图的平面性。
- 另外，如图(b)所示，把联系于一个次数为2的结点的两条边，合并成一条边，也不会改变给定图的平面性。

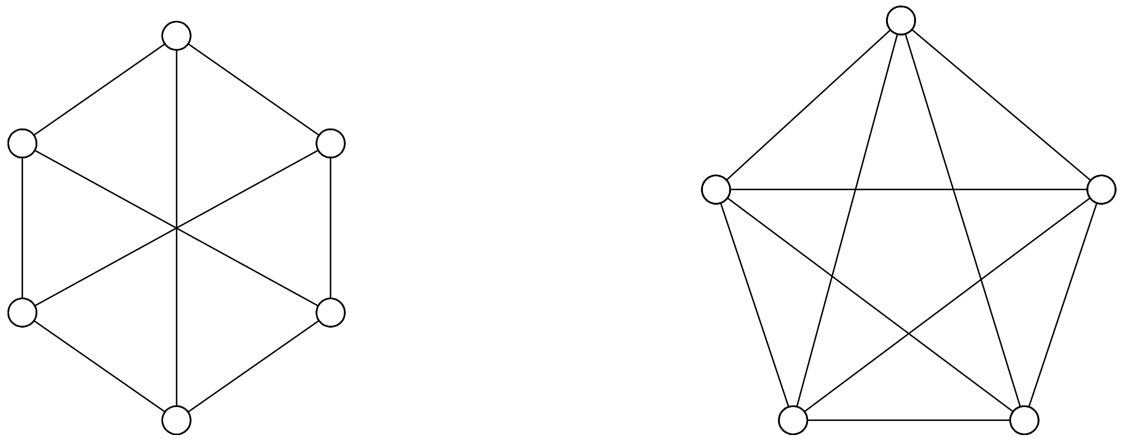
库拉托夫斯基图

定义：设G_1和G_2是两个无向图。如果G_1和G_2是同构的，或者是通过反复插入和(或)删除次数为2的结点，能够把G_1和G_2转化成同构的图，则称G_1和G_2在次数为2的结点内是同构的。



库拉托夫斯基图

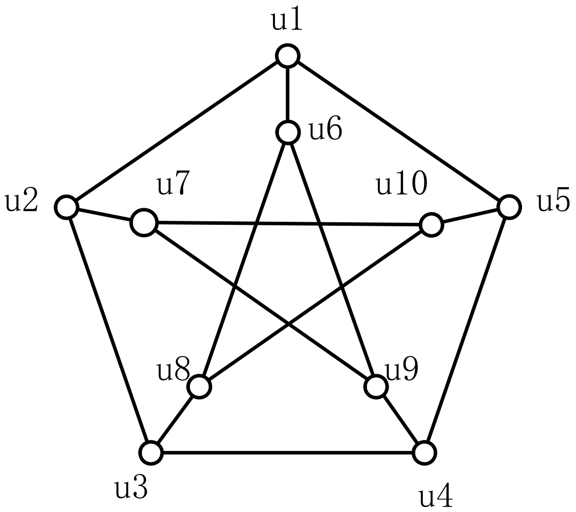
库拉托夫斯基定理： 设G是一个无向图。图G中不存在任何与下图的两个图同构的子图，当且仅当图G是个平面图。

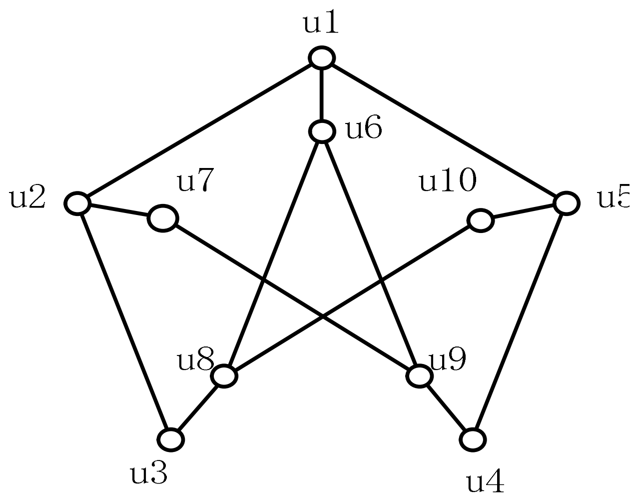


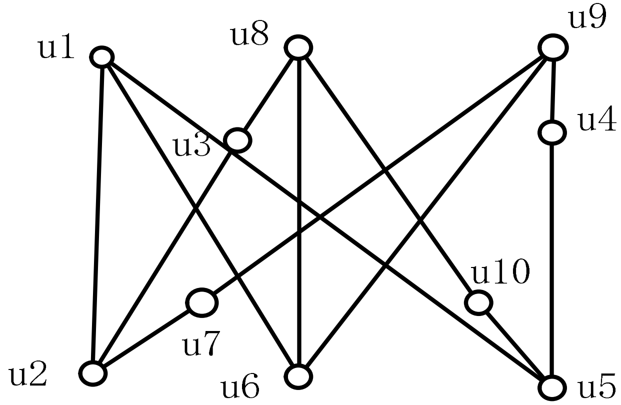
(a) (b)

库拉托夫斯基图

例：判断下图是否是可平面图。







多边形

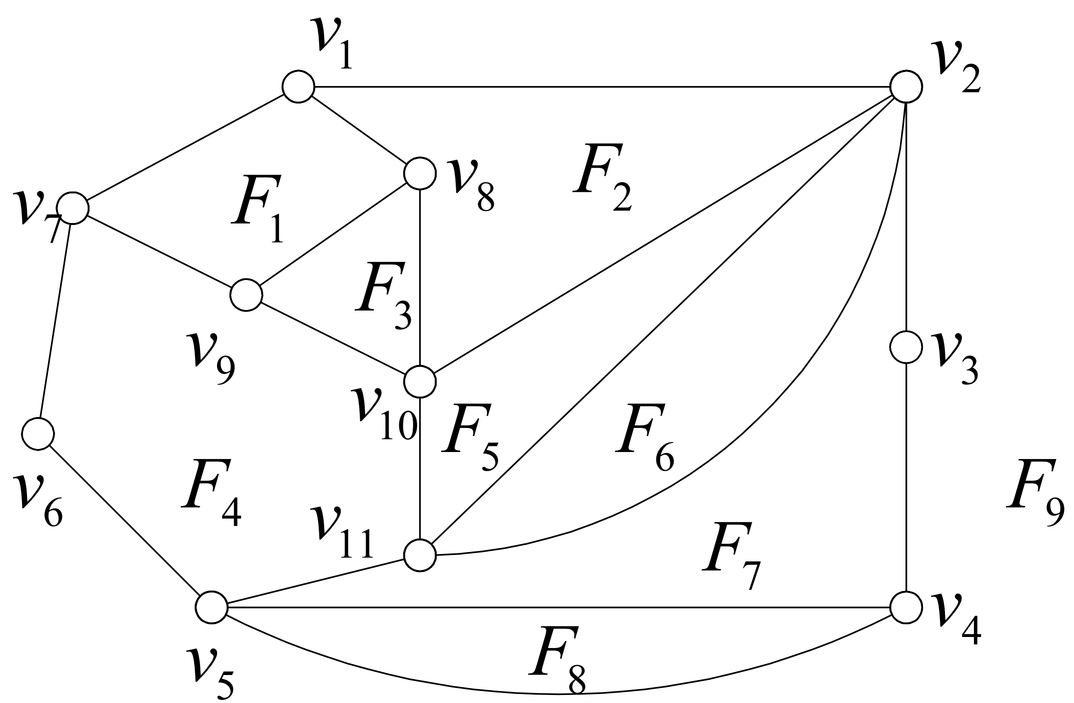
定义：多边形的图的归纳法定义如下：

- 一个多边形是一个多边形的图。
- 设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是一个多边形的图，再设$P=v_i u_1 u_2 \cdots u_{l-1} v_j$是长度为$l\geq 1$的任何基本路径，它不与图$G$中任一路径交叉，且有$v_i, v_j \in V$，但是对于$n=1,2,\cdots,l-1$来说，$u_n \notin V$。于是，由图$G$和$P$所构成的图$G'=\langle V',E',\psi'\rangle$也是一个多边形的图，其中

$$V'=V\cup\{u_1,u_2,\cdots,u_{l-1}\}$$
$$E'=E\cup\{\{v_i,u_1\},\{u_1,u_2\},\cdots,\{u_{l-1},v_j\}\}$$

多边形

多边形的图是个平面图(或多重边图，因为允许长度为2的循环存在)，它能够把平面划分成数个区域，每一个区域都是由一个多边形定界。

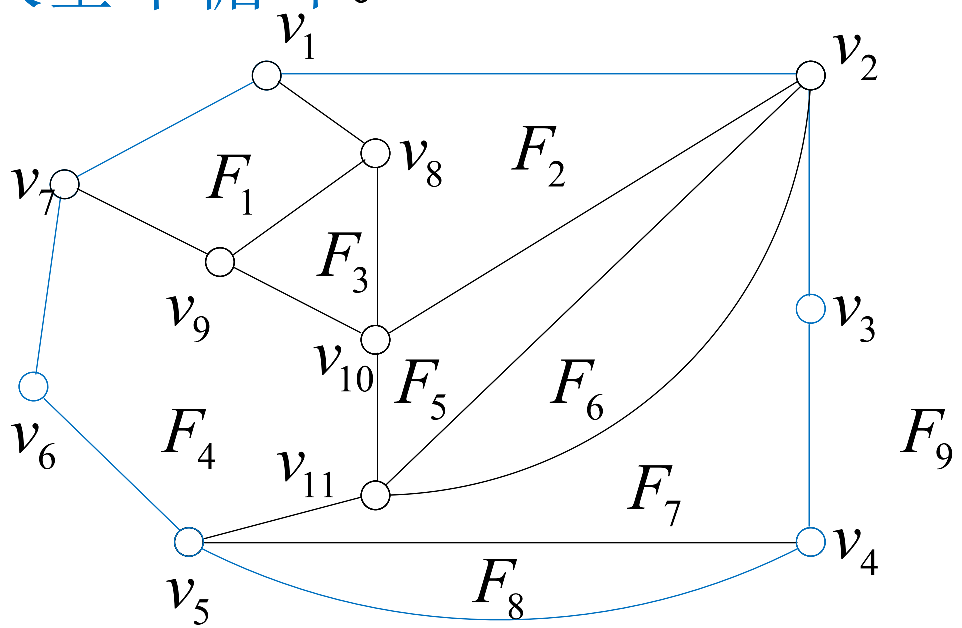


多边形

定义：由多边形的图定界的每一个区域，都称为图G的面。

定义：包含有多边形的图G的所有面的边界的多边形，称为G的极大基本循环。

例：上页图中的循环$v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_1$就是该多边形图的极大基本循环。



多边形

- 给定图G的极大基本循环外侧的无限区域，是另外一个面，一般称为G的无限面。
- 事实上，如果把图G的图解画在球面上，则G的无限面与其它的有限面并没有什么区别。
- 定义：如果图G的两个面共有一条边，则称这样的两个面是<u>邻接的面</u>。

多边形

定理：(欧拉公式)设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是个具有$k$个面(包括无限面在内)的$(n,m)$多边形的图。则

$$n-m+k=2$$

证：对于面的数目k用归纳法证明。

- 面的最少数目(包括无限面在内)是$k=2$。在这种情况下，图G是个多边形，因而应有$n=m$。这样，有$n-m+k=2$。
- 假设对于具有k-1个面(包括无限面)的图来说，定理成立。
- 往证对于具有k个面(包括无限面)的图，定理亦成立。

多边形

- 为此，首先构成具有$k'=k-1$个面的(n',m')图G'，然后附加上一条长度为$l \geq 1$的基本路径，它与G'仅共有两个结点，则

$$\begin{aligned} & n-m+k \\ & =\left(n'+l-1\right)-\left(m'+l\right)+\left(k'+1\right) \\ & =n'-m'+k' \end{aligned}$$

- 根据归纳假设可知，$n'-m'+k'=2$，因此应有

$$n-m+k=2$$

- 得证。

对偶图

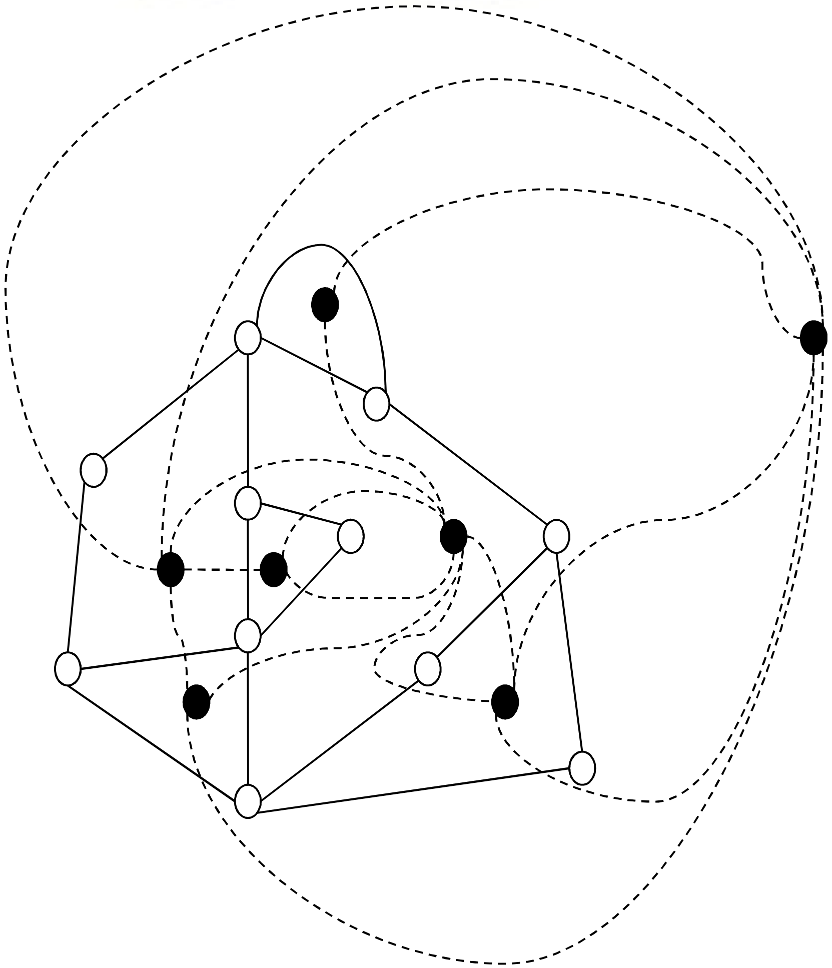
定义：设平面图G有k个面$F_0, F_1, \cdots, F_{k-1}$。对每个面$F_i$在其内部指定一个新顶点$f_i$；对$F_i$和$F_j$公共的边，指定一条新边$\{f_i,f_j\}$与其相交。这些新顶点和新边组成的图用$G^*$来表示，并称$G^*$为图$G$的对偶图。

由G求G^*的方法：

- 对于G中的任何一个面F_i，给G^*指定一个结点f_i，
- 对于面F_i和F_j所共有的一条边，给G^*指定一条边$\{f_i,f_j\}$。
- 实际上，首先在F_i内指定每个结点f_i，并且用连通f_i和f_j的一条边，去交叉F_i和F_j所共有的边，这样就可求得对偶图G^*。

对偶图

例：给定下图的对偶图。

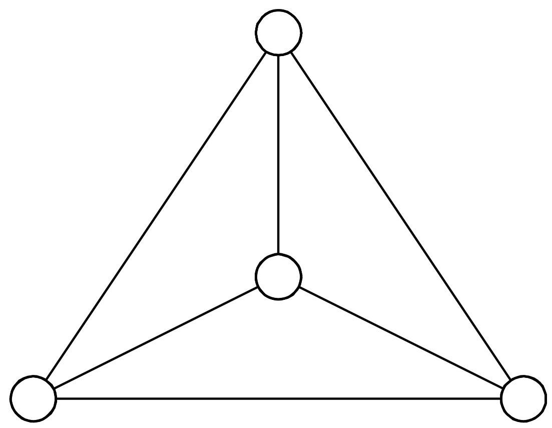


结论：

- 每一个多边形的图G，其对偶图G^*也必定是一个多边形的图
- G和G^*是互为对偶的

自对偶图

定义：如果多边形的图G的对偶G^*同构于G，则称G是自对偶图。



- 与平面图相关的应用：四色问题。
- 是否可用四种颜色对任何平面图形的区域染色，使得任何两个邻接区域，包括无限区域都不会呈现相同的颜色？

图着色

- 平面图的着色问题，最早起源于地图的着色。
  - 在一张地图中，若相邻国家着以不同的颜色，那么最少需要多少种颜色呢？
- 1840年，德国数学家麦比乌斯(A.F.Mŏbius)在他的讲稿中第一次提出了确信用四种颜色可以对地图着色的问题(以下简称四色猜想)。
- 1879年肯普(Kempe)给出了这个猜想的第一个证明，但到1890年希伍德(Hewood)发现肯普证明是有错误的，然而他指出了肯普的方法虽不能证明地图着色用四种颜色就够了，但却可以证明用五种颜色是够的，即五色定理成立。
- 直到1976年，美国数学家阿普尔(K.I.Apple)和黑肯(W.Haken)在考西(J.koch)的帮助下，用计算机作了一百多亿次逻辑判断，花了1200多机时才证明了四色猜想是成立的，从此，四色猜想成为四色定理。
- 1994年西缪尔给出了第二代证明，24小时机时。

图着色

- 平面里的每幅地图都可以表示成一个图。
  - 为了建立这样的对应关系，地图的每个区域用一个点表示
  - 若两个顶点表示的区域有公共边界，则用边连接这两个顶点。只相交于一个点的两个区域不算是相邻的
- 给地图着色的问题等价于这样一个问题：找出给对偶图$G=<V，E>$的顶点着色α，
  - 即找到从结点集V到色集$C=\{c_1，c_2，…，c_n\}$上一个映射α，使对任意边$[v_i，v_j]\in E$均有$\alpha(v_i)\neq\alpha(v_j)$
  - 即对G的每个结点指派一种颜色，使得相邻结点都有不同的颜色。

图着色

定义：对于平面图G着色时，需要的最少颜色数称为G的着色数，记为$\chi(G)$。

四色定理：对于任何平面图G，有$\chi(G)\leq 4$。

在2004年贡蒂埃形式化地证明了四色定理，是为四色定理的第三代证明。

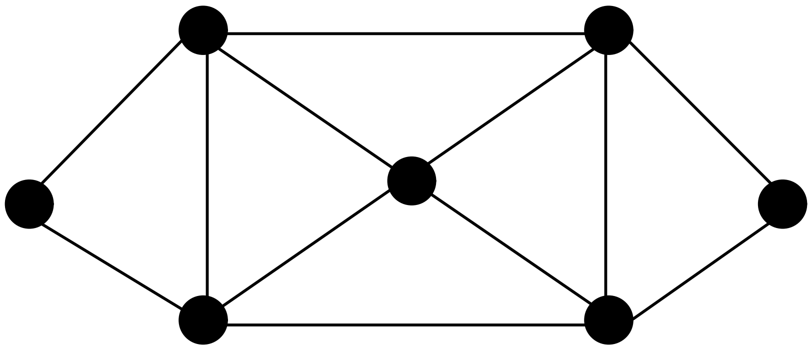
第一代证明有长达743页的计算机辅助证明文档，第二代证明为43页修正了第一代证明。

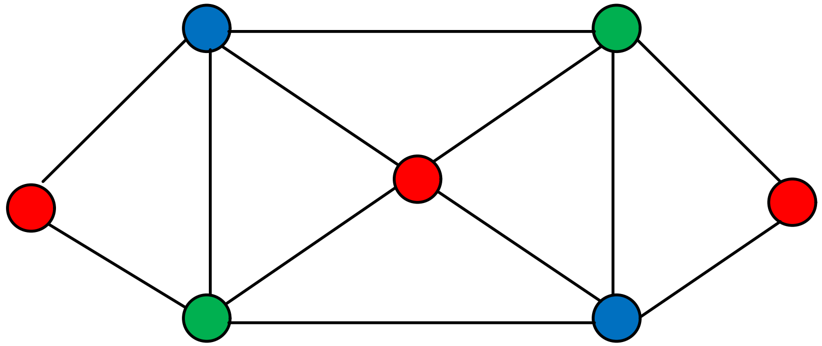
感兴趣的同学可以查阅相关文献：

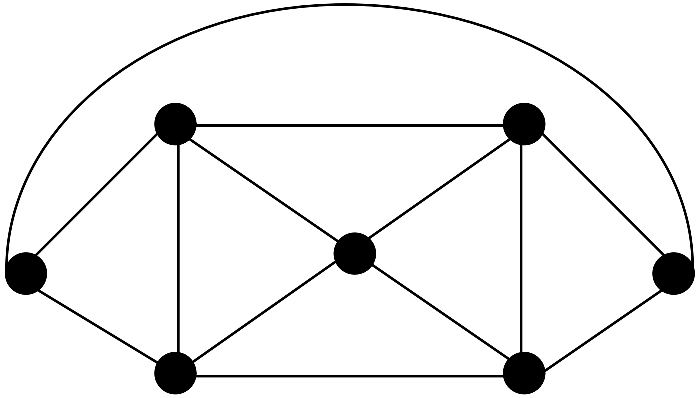
自然辩证法通讯：2010年，vol.32， No.4, 总188期。

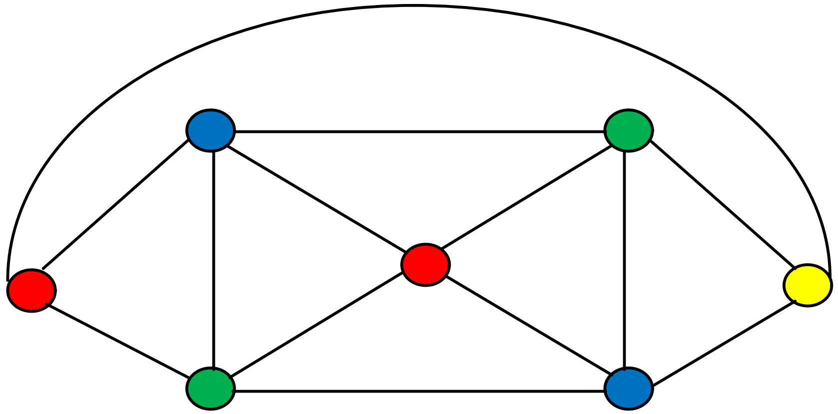
图的着色数

将图的着色数从平面图推广到所有图中，判断下图的着色数。

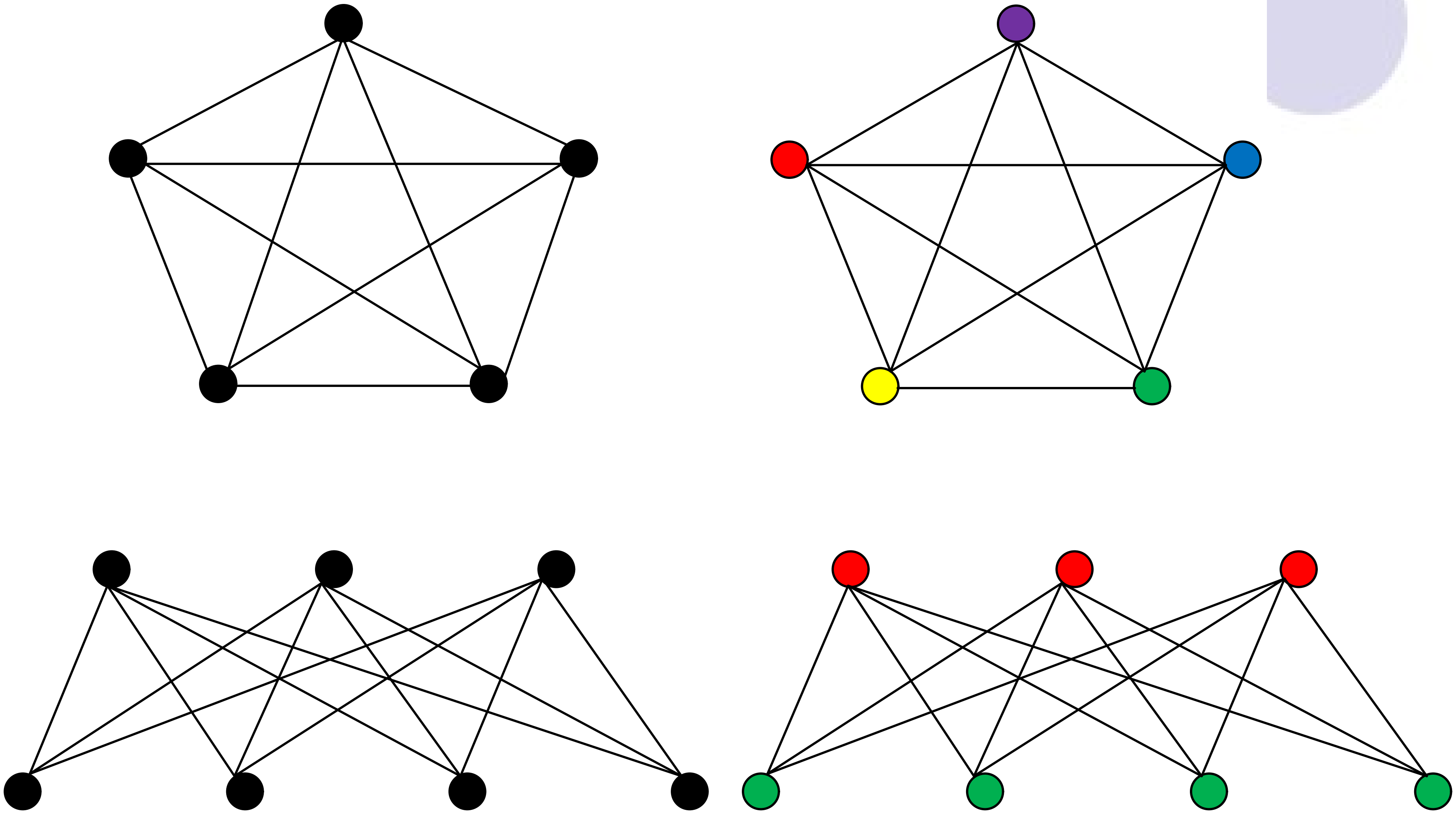




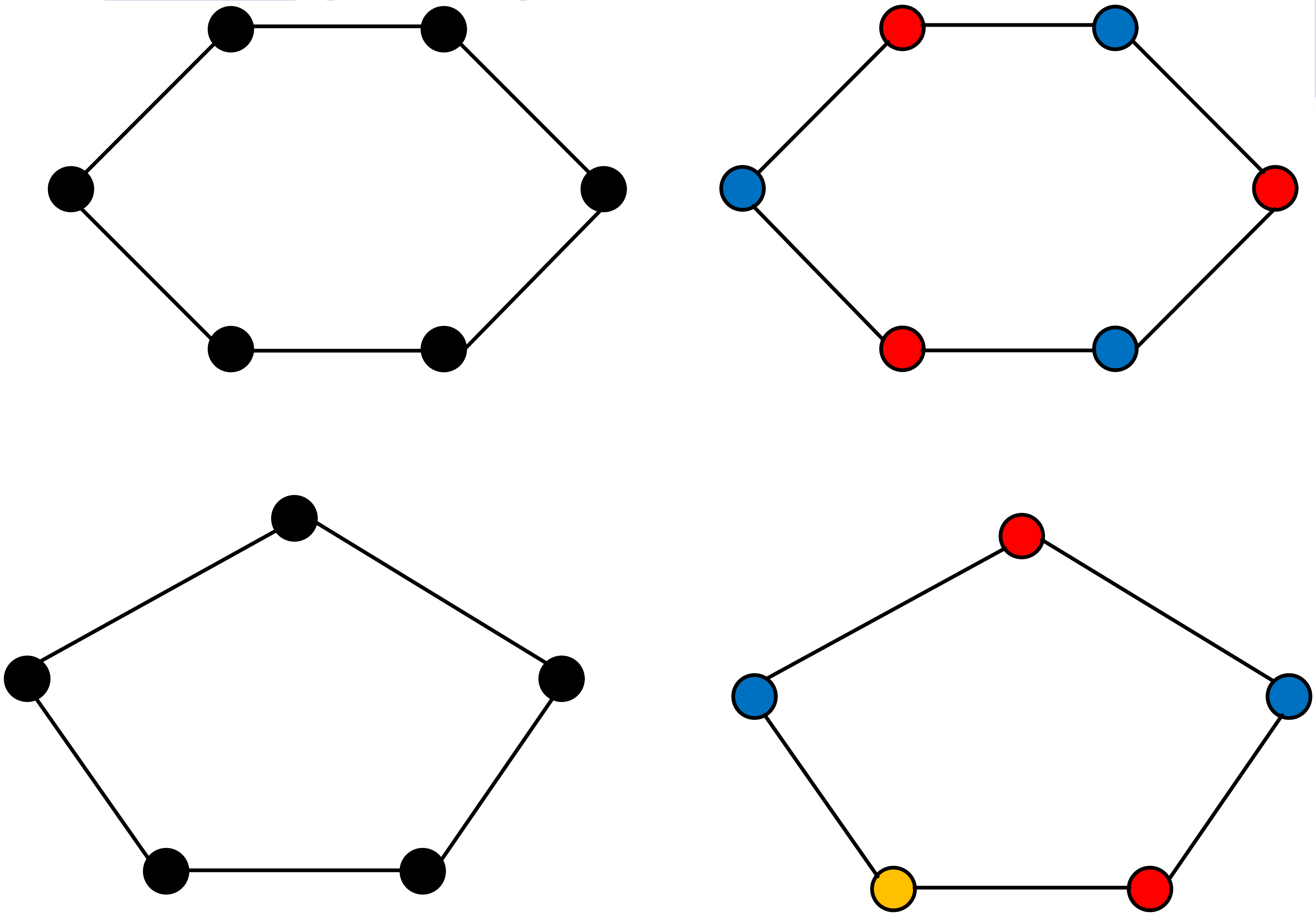




图的着色数



图的着色数



图的着色数

总结：

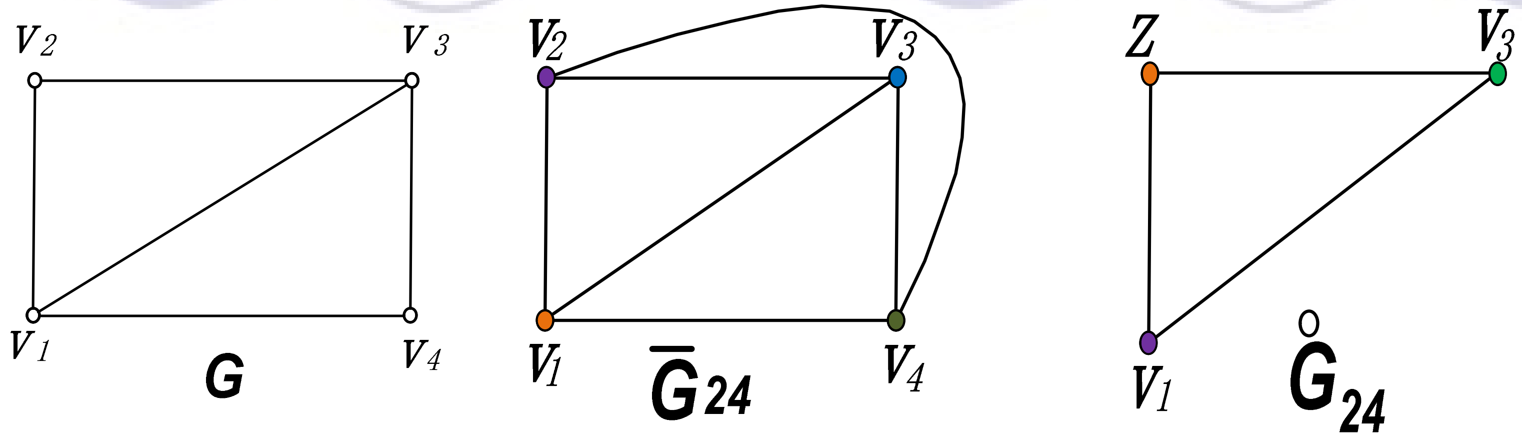
- 图G只有孤立结点时，即G是平面图，$\chi(G)=1$.
- 图G为n阶完全图时，$\chi(G)=n$.
- 若图G是n个结点回路时，则当n为偶数，$\chi(G)=2$；当n为奇数，$\chi(G)=3$。
- 若图G是二部图时， $\chi(G)=2$.

求图的着色数

- 设图$G=\langle V,E\rangle$，且v_i,v_j是G中不相邻两结点。现引进下面二个符号。
- $\overline{G}_{ij}$表示G中加上一条连接v_i和v_j的边所得到的图。显然$\overline{G}_{ij}$与$G+(v_i,v_j)$相同。
- $\dot{G}_{ij}$表示把v_i和v_j两结点收缩为一个结点z所得到的图，即图G中凡是与v_i和v_j关联的边都改为与z关联。
- $\chi(G)=\min\{\chi(\overline{G}_{ij}),\chi(\dot{G}_{ij})\}$

求图的着色数

例：求下图G的着色数。



注意：已知的最好的求图的着色数的算法（对图的顶点个数来说）具有指数的最坏情形时间复杂度。即使是求图的色数的近似值也是很难的。

图着色的应用

图着色在与调度和分配有关的问题中有多种应用（注意：由于不知道图着色的有效算法，所以并不能得出调度和分配的有效方法），这里仅给出一个重要的例子：安排期末考试。

安排期末考试问题：如何安排一个大学里的期末考试，使得没有学生要同时考两门试。

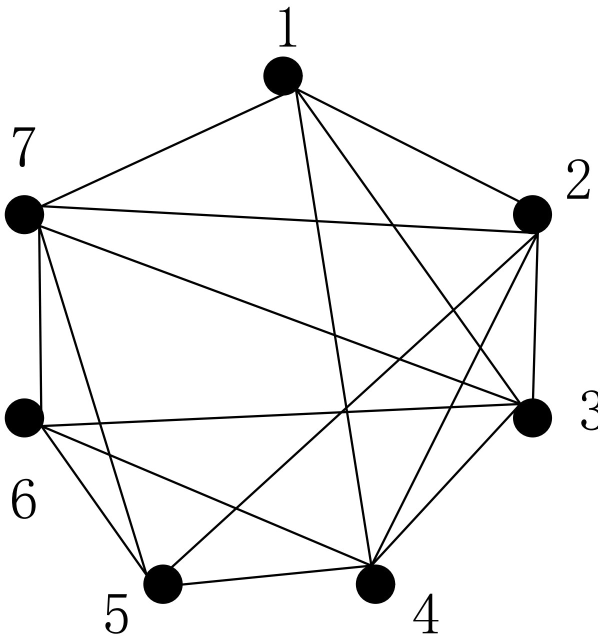
图模型：

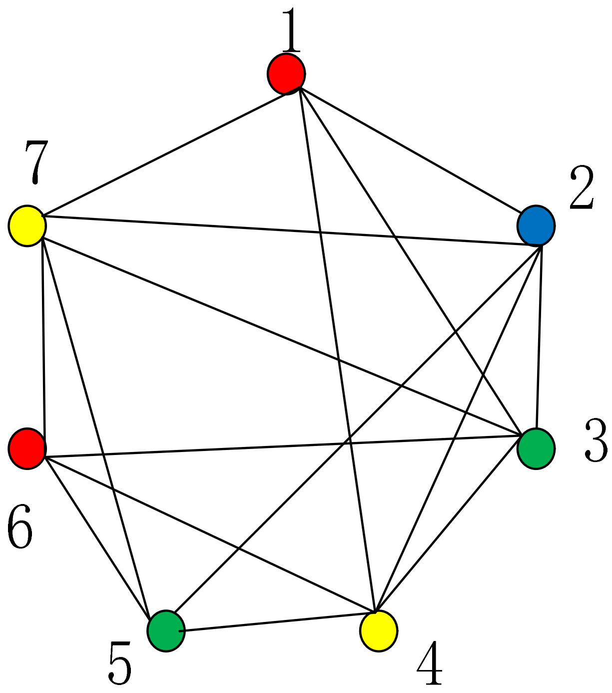
- 用顶点表示科目，若有学生要考两门试，则在表示考试科目的两个顶点之间用边连接。
- 用不同颜色来表示期末考试的不同时间段，考试的安排就对应于图的着色问题。

图着色的应用

例：安排七门考试，假定科目从1到7编号，

下列各对科目的考试都有学生要同时参加：1和2，1和3，1和4，1和7，2和3，2和4，2和5，2和7，3和4，3和6，3和7，4和5，4和6，5和6，5和7，6和7。





时间段1: 科目1，6

时间段2: 科目2

时间段3: 科目3，5

时间段4: 科目4，7

作业

- **P257:11-20**