

离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405, Tel: 62274392

实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921

Email: zkchen@dlut.edu.cn

zkchen00@hotmail.com

QQ: 1062258606



离散数学

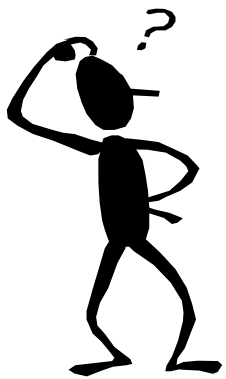
第二章 谓词逻辑

第一章回顾

- 命题
- 命题公式
- 命题翻译—符号化
- 命题推理
 - ✓ 真值表
 - ✓ 范式与主范式
 - ✓ 逻辑推演

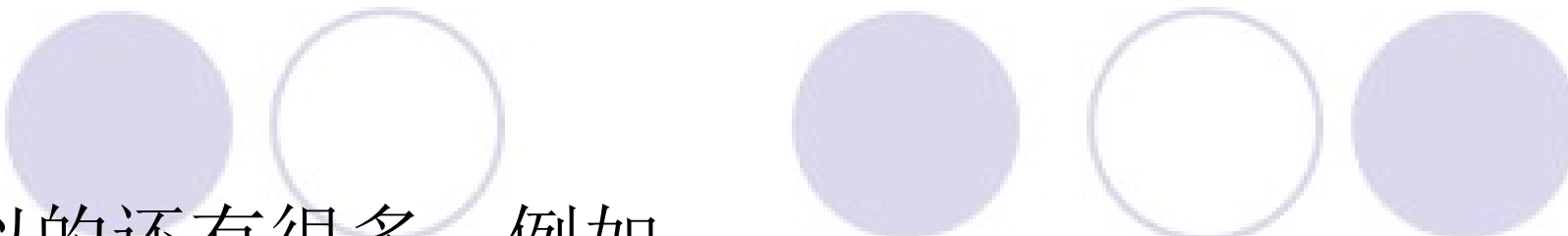
谓词逻辑的引入

- 在命题逻辑中，试进行下列推理：
 - “苏格拉底三段论”：
 - 凡人都是要死的， P
 - 苏格拉底是人， Q
 - 所以苏格拉底是要死的。 R



$$(P \wedge Q) \rightarrow R$$

命题逻辑中，命题被当作一个基本的，不可分割的单位，只研究由原子命题和联接词所组成的复合命题，没有研究命题内部的内部结构以及命题之间的内在关系。

- 
- 类似的还有很多，例如：
 - 所有的人都要呼吸，李华是人，所以李华要呼吸。
 - 所有的正整数都大于**0**，**3**是正整数，所以**3**大于**0**。
 - 本章介绍的谓词逻辑，对原子命题的成份、结构和原子命题间的共同特性等作了进一步分析。引入了个体词、谓词、量词、谓词公式等概念，在此基础上研究谓词公式间的等值关系和蕴含关系，并且对命题逻辑中的推理规则进行扩充和进行谓词演绎。

本章内容

- 谓词、个体、量词
- 合式谓词公式
- 自由变元和约束变元
- 含有量词的等价式和永真蕴含式
- 谓词逻辑中的推理理论
- 前束范式、斯柯林范式

2.1谓词演算

本质上是把数学中的逻辑论证加以符号化。

- 原子命题被分解为谓词和个体两部分。
- 个体：可以独立存在的事物。
 - 老师，计算机，证书，道德，智商等。
- 谓词：用来刻划个体的性质或个体之间关系的词称为谓词，刻划一个个体性质的词称为一元谓词；刻划 n 个个体之间关系的词称为 n 元谓词。

谓词和个体

- 例:

- (1) 李明是学生;
- (2) 张亮比陈华高;
- (3) 陈华坐在张亮与李明之间。

- 个体: 李明, 张亮, 陈华

- 谓词: ...是学生; ...比...高; ...坐在...
和...之间

- 一元谓词: ...是学生

- 二元谓词: ...比...高

- 三元谓词: ...坐在... 和...之间

谓词和个体

- (1) 李明是学生;
- (2) 张亮比陈华高;
- (3) 陈华坐在张亮与李明之间。

- 一般用大写的英文字母表示谓词，而用小写的英文字母表示个体。
- 上述命题可分别表示为
 $Q(a), P(b, c), R(c, b, a)$
- 一般地，由 n 个个体和 n 元谓词所组成的命题可表示为 $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，其中 F 表示 n 元谓词， a_1, a_2, \dots, a_n 分别表示 n 个个体。
- 注意： a_1, a_2, \dots, a_n 的排列次序是重要的。

谓词和个体

- 对于 $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ，如果括号内的个体是抽象的可变化的，那么 $F(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 称为 n 元原子谓词公式或 n 元命题函数。
- 注意：命题的 n 元谓词表示形式和 n 元命题函数不同？
 - a : 张明。
 - 命题函数: $P(x)$ x 是学生。
 - 谓词表示形式: $P(a)$ 张明是学生。

个体域。

任何个体的变化都有一个范围，这个变化范围称为个体域(或论域)。

- 个体域可以是有限的，也可以是无限制的。所有个体域的总和叫作全总个体域。以某个个体域为变化范围的变元叫个体变元。
- 个体域的变换范围影响到谓词公式的真假
- $R(x)$: x 是大连理工大学软件学院的学生。
 - 如果 x 的讨论范围是大工软件学院某个班级的学生 **永真**
 - 如果 x 的讨论范围是某个幼儿园里的小朋友 **永假**
 - 如果 x 的讨论范围是大连的所有市民 **可满足**

谓词的阶

- 在谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中，如果个体变元是一些简单的事物，那么 P 为一阶谓词；
- 若个体变元中有一些是一阶谓词，那么 P 为二阶谓词；二阶以上递推。



本门课程仅研究
一阶谓词

量词

- 使用前面介绍的谓词和个体变元，还不足以描述自然界的所有命题。
- 例：
 - 描述命题“所有的正整数都大于**0**”以及命题“有些正整数是素数”。
- 量词的引入：量词指在命题里表示数量的词。

全称量词 \forall

- 符号 “ $(\forall x)P(x)$ ” 表示命题：“对于个体域中所有个体 x ，谓词 $P(x)$ 均为 T ”。其中 “ $(\forall x)$ ” 叫作**全称量词**，读作“对于所有的 x ”。谓词 $P(x)$ 称为全称量词的**辖域**或作用范围。
- 例如：
 - 所有的人都是要死的
 - 令 $D(x)$: x 是要死的。
 - 则命题可表示为 $\forall x D(x)$
 - 取个体域为全体人的集合，是真命题。
 - 所有的正整数都是素数；
 - 令 $P(x)$: x 是素数
 - 则命题可表示成 $\forall x P(x)$
 - 取个体域为正整数集，是假命题。

存在量词 \exists

- 符号 “ $(\exists x)P(x)$ ” 表示命题：“在个体域中存在某些个体使谓词 $P(x)$ 为 T ”其中 “ $(\exists x)$ ” 叫作**存在量词**，读作“存在 x ”。谓词 $P(x)$ 称为存在量词的**辖域**或作用范围。
- 例如：
 - 有些正整数是素数；
 - 令 $P(x)$: x 是素数
 - 则命题可表示成 $\exists x P(x)$
 - 取个体域为正整数集，是真命题。

量词

- 量词本身不是一个独立的逻辑概念，可以用 \wedge, \vee 联结词取代。

- 设个体域 $S : S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$,
谓词可以表示成以下形式:

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$$

- 由量词确定的命题真值与个体域有关。
 - 令 $P(x)$: x 是素数
 - 则 $\forall x P(x)$, 如果取个体域为素数集, 为真;
如果个体域为整数集, 为假。

量词

以后不加强调个体域
均指全总个体域

- 为了方便起见，个体域为全总个体域，每个个体变元的真正变化范围则用一个特性谓词来刻画。
- 注意：对于全称量词应使用单条件逻辑联结词；对于存在量词应使用逻辑联结词合取。

– $R(x)$: x 是自然数； $P(x)$: x 大于0.

$$(\forall x)(R(x) \rightarrow P(x))$$

$$(\exists x)(R(x) \wedge P(x))$$

量词

- 全称量词和存在量词不仅可以单独出现，还可以组合形式出现。
- 对于二元谓词 $P(x,y)$ ，可能有以下几种量化的可能：

$$(\forall x)(\forall y)P(x, y), (\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x, y), (\exists x)(\exists y)P(x, y)$$

$$(\forall y)(\forall x)P(x, y), (\exists y)(\forall x)P(x, y)$$

$$(\forall y)(\exists x)P(x, y), (\exists y)(\exists x)P(x, y)$$

组合量词的含义

翻译时从左向右

- 设 $A(x,y)$ 表示 x,y 同姓, x 的个体域是1班同学, y 的个体域是2班同学。
 - $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$: 1班任何一个同学与2班的所有同学同姓;
 - $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$: 2班任何一个同学与1班的所有同学同姓;
 - $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$: 对1班的任意一个同学, 2班都有人跟他同姓;
 - $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$: 存在一个2班同学和1班的所有同学同姓。

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

合式谓词公式

- 若 P 为不能再分解的 n 元谓词变元, x_1, x_2, \dots, x_n 是个体变元, 则称 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为原子公式或原子谓词公式。当 $n=0$ 时, P 表示命题变元即原子命题公式。所以, 命题逻辑实际上是谓词逻辑的特例。
- 由原子谓词公式出发, 通过命题联结词, 可以组成复合谓词公式, 叫分子谓词公式。

合式谓词公式

- 定义：
 - **(1)** 原子谓词公式是合式的公式；
 - **(2)** 若 A 是合式的公式，则 $\neg A$ 也是合式的公式；
 - **(3)** 若 A 和 B 都是合式的公式，则 $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ 也都是合式的公式；
 - **(4)** 如果 A 是合式的公式， x 是任意变元，且 A 中无 $(\forall x)$ 或 $(\exists x)$ 出现，则 $(\exists x)A(x)$ 和 $(\forall x)A(x)$ 都是合式的公式；
 - **(5)** 当且仅当有限次使用规则 **(1)** ~ **(4)** 由逻辑联结词、圆括号构成的有意义的字符串是合式的公式。

自由变元和约束变元

- 在谓词公式中，如果有形如 $(\forall x)A(x)$ 或者 $(\exists x)A(x)$ ，则称它们是 x 的约束部分。
- 每个量词后面的最短公式，称为量词的辖域。
- 约束变元：一个变元若出现在包含这个变元的量词(全称量词或存在量词)的辖域之内，则该变元称为约束变元，其出现称为约束出现。
- 自由变元：变元的非约束出现叫作自由出现，该变元叫作自由变元。

自由变元和约束变元

- 例：说明以下各式量词的辖域与变元的约束情况。

(1) $(\forall x)P(x, y)$

(2) $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(x, y))$

(3) $(\forall x)(\forall y)(P(x, y) \wedge Q(y, z)) \wedge (\exists x)(P(x, y))$

(4) $((\forall x)(P(x) \wedge (\exists x)Q(x, z)) \rightarrow (\exists y)R(x, y)) \vee Q(x, y)$

自由变元和约束变元

- 从约束变元的概念可知，谓词 $P(x)$ 的量化，就是从变元 x 的整个个体域着眼，对性质 $P(x)$ 所作的一个全称判断或特称判断。其结果是将谓词变成一个命题。因此， $(\forall x)$ 和 $(\exists x)$ ，可以看成消元运算。
- 对 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 量化后，假设有 k 个自由变元，则降为 k 元谓词。

$(\forall x)P(x, y, z)$ 二元谓词

$(\exists y)(\forall x)(P(x, y, z))$ 一元谓词

自由变元和约束变元

- 一般情况下给定一个谓词公式 $A(x)$ ，仅表明在该公式中只有一个自由变元，但并不限制在该公式中还存在若干约束变元。
- 以下各式都可以写成 $A(x)$:

$$(1) (\forall y)(P(y) \wedge Q(x, y))$$

$$(2) (\forall x)R(x) \vee S(x)$$

$$(3) (\exists y)S(y) \rightarrow S(x)$$

$$(4) (\forall y)P(x, y) \vee Q(x)$$

谓词公式的解释

- 在命题逻辑中对一个公式的解释，是对每个命题变元进行取值指派，如果公式有 n 个变元，则有 2^n 种解释。
- 谓词公式的解释，涉及到命题变元、谓词变元、个体变元、符号函数……



真值表法不可行

谓词公式的解释

- 定义：设 A 的个体域是 D ，如果用一组谓词常量、命题常量和 A 中的个体及函数符号（将它们简记为 I ）代换公式 A 中相应的变元，则该公式 A 转化为一个命题，可以确定其真值（记作 P ）。称 I 为公式 A 在 D 中的解释（或指派），称 P 为公式 A 关于解释 I 的真值。
- 永真
- 永假
- 可满足

谓词公式的解释

- 给定两个谓词公式 A 和 B ， D 是它们共同的个体域，若 $A \rightarrow B$ 在 D 中是永真式，则称遍及 D 有 $A \Rightarrow B$ ；若 D 是全总个体域，则称 $A \Rightarrow B$ 。若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$ ，则称 $A \Leftrightarrow B$ 。
- 命题逻辑中的恒等式和永真蕴含式全部可以推广到谓词逻辑中

$$I'_1: P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow P(x)$$

$$E'_{10}: \neg\neg P(x_1, x_2, \dots, x_n) \Leftrightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

含有量词的等价式和永真蕴含式

- 量词转换律

- 例：设 $P(x)$ ： x 今天来上课。 $x \in$ 软件工程系**15级4-7**班全体同学。

- $(\forall x)(P(x))$ ：所有同学今天都来上课了。

- $\neg(\forall x)(P(x))$ ：不是所有人今天都来上课了。

- $(\exists x)\neg P(x)$ ：今天有人没有来上课。

$$\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

- $(\exists x)(P(x))$ ：有人今天来上课了。

- $\neg(\exists x)(P(x))$ ：没有人今天来上课。

- $(\forall x)\neg P(x)$ ：所有的人今天都没有来上课。

$$\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

量词转换律

$$\neg(\forall x)(A(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

$$\neg(\exists x)(A(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x) \quad (\text{其中 } A(x) \text{ 是任意的公式})$$

证明 设个体域 $E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则

$$\begin{aligned}\neg\forall x A(x) &\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee \dots \vee \neg A(a_n) \\ &\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg\exists x A(x) &\Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)) \\ &\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge \dots \wedge \neg A(a_n) \\ &\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)\end{aligned}$$

作业



- **P47**

- **1,2**