第四章 二元关系

回顾

- 序偶$\langle x, y\rangle$
- 笛卡尔积: $\boldsymbol{A \times B}$
- 关系的定义，二元关系
  - 笛卡尔积–构成集合（子集）
- 关系相等
- 关系的性质
  - 自反，反自反，对称，反对称，传递，不可传递

集合的压缩和开拓

定义：设$\boldsymbol{R}$为集合$\boldsymbol{A}$上的二元关系且$\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{A}$，则称$\boldsymbol{S}$上的二元关系$\boldsymbol{R} \cap (\boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S})$为$\boldsymbol{R}$在$\boldsymbol{S}$上的压缩，记为$\boldsymbol{R}|\boldsymbol{S}$， 并称$\boldsymbol{R}$为$R|S$在$\boldsymbol{A}$上的开拓。

定理：设$\boldsymbol{R}$为$\boldsymbol{A}$的二元关系且$S \subseteq A$，那么：

(1)若$\boldsymbol{R}$是自反的，则$R|S$也是自反的；

(2)若$\boldsymbol{R}$是反自反的，则$R|S$也是反自反的；

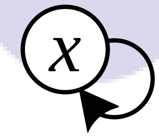
(3)若$\boldsymbol{R}$是对称的，则$R|S$也是对称的；

(4)若$\boldsymbol{R}$是反对称的，则$R|S$也是反对称的；

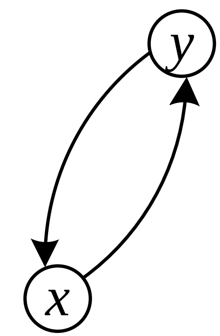
(5)若$\boldsymbol{R}$是可传递的，则$R|S$也是可传递的；

利用关系图判断关系的性质

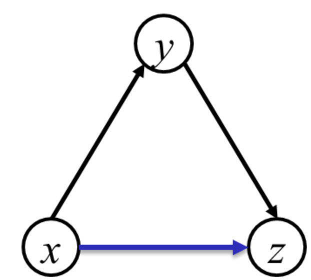
- R是自反的：关系图中每个结点都有自圈



- R是反自反的：关系图中每个结点都无自圈
- R是对称的：关系图任意两个结点间若存在有向边，那么必有双向的有向边



- R是反对称的：关系图中任意两个结点间必无双向边
- R是可传递的：关系图中任意的x和y、y和z之间存在有向边，则x和z之间也存在有向边



- R是不可传递的：关系图中存在x和y、y和z之间存在有向边，则x和z之间没有有向边

二、关系矩阵

- 如果关系矩阵主对角线上的记入值全为1，则R是自反的；
- 如果主对角线上的记入值全为0，则R是反自反的；
- 如果矩阵关于主对角线是对称的，则R是对称的；
- 如果矩阵关于主对角线是反对称的，(亦即$r_{ij}=1$时则一定有$r_{ji}=0$),则R是反对称的；
- 如果对于任意的i,j,k, $r_{ij}=1$并且$r_{jk}=1$时一定有$r_{ik}=1$，则R是可传递的；
- 如果存在i,j,k, $r_{ij}=1$并且$r_{jk}=1$时，有r_{ik}不等于1，则R是不可传递的；

4.4关系的运算

- 注意：由于关系也是特殊的集合，因此集合的运算也适用于关系中。
- 设$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$是从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的二元关系，那么$R_1 \cap R_2$，$R_1 \cup R_2$，$R_1 - R_2$，$R_1 \oplus R_2$也是从$\boldsymbol{A}$到$\boldsymbol{B}$的二元关系，它们分别被称为二元关系$\boldsymbol{R_1}$和$\boldsymbol{R_2}$的交、并、差分和对称差分。

4.4关系的运算

- 例：设集合$A=\{a,b,c\}$，$B=\{d,e\}$，定义A到B的二元关系

$$R_1=\{<a,d>,<a,e>,<b,d>,<c,e>\}$$
$$R_2=\{<a,d>,<b,e>,<c,d>\}$$

则

$$R_1\cap R_2=\{<a,d>\}$$
$$R_1\cup R_2=\{<a,d>,<a,e>,<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>\}$$
$$R_1-R_2=\{<a,e>,<b,d>,<c,e>\}$$
$$R_2-R_1=\{<b,e>,<c,d>\}$$
$$\sim R_1=\{<b,e>,<c,d>\}$$
$$R_1\oplus R_2=\{<a,e>,<b,d>,<b,e>,<c,d>,<c,e>\}$$

4.4关系的运算

- 一、关系的合成
- 定义：设R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，于是可用$R\circ S$表示从X到Z的关系，通常称它是R和S的合成关系，用式子表示即是：

$$R\circ S=\{\langle x,z\rangle \mid x\in X\wedge z\in Z\wedge(\exists y)(y\in Y\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in S)\}$$

- 例： 给定集合$X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{2,3,4\}$和$Z=\{1,2,3\}$。设R是从X到Y的关系，并且S是从Y到Z的关系，并且R和S给定成：

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x+y=6\}=\{\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,2\rangle\}$$

$$S=\{\langle y,z\rangle \mid y-z=1\}=\{\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle\}$$

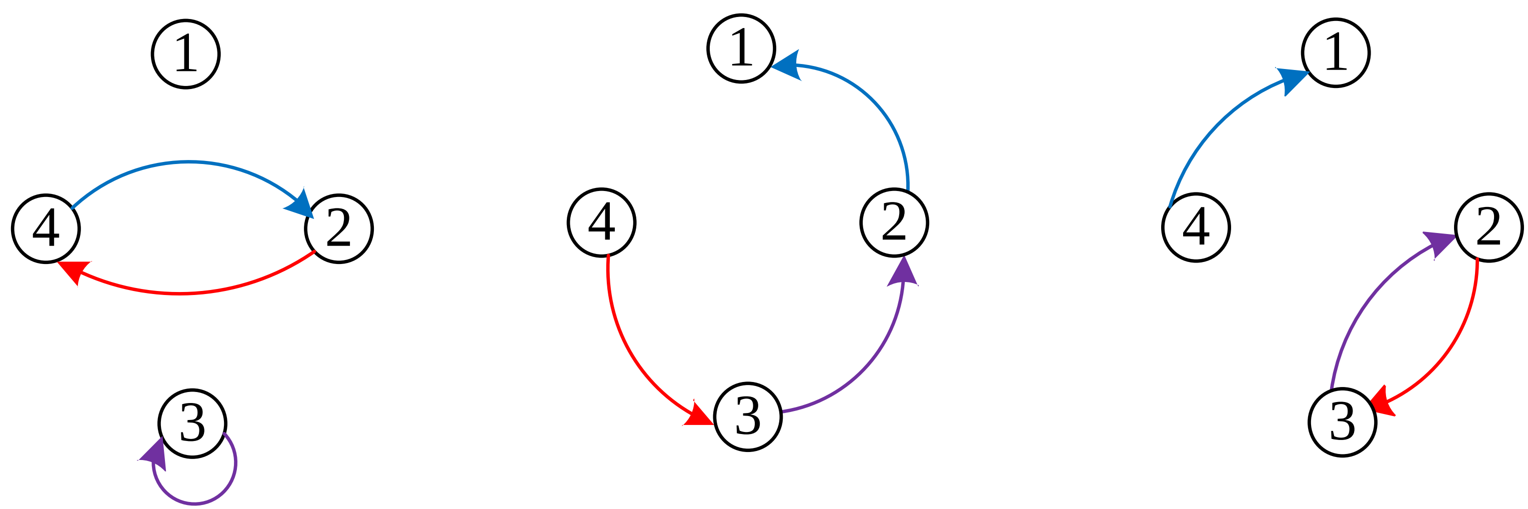
- 试求R和S的合成关系，并画出合成关系图给出合成关系的关系矩阵。

一、关系的合成

解： 找出所有这样的偶对$\langle x, z\rangle$对于某一个y来说，能有$\boldsymbol{x+y=6}$和$\boldsymbol{y-z=1}$，由上述的偶对就可构成从X到Z的关系$\boldsymbol{R \circ S}$。

$$R \circ S = \{\langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 4,1\rangle\}$$

$x \xrightarrow{R} y$ $\qquad$ $y \xrightarrow{S} z$ $\qquad$ $x \xrightarrow{R \circ S} z$



一、关系的合成

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad M_{R\circ S} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 定义布尔运算：
- 布尔加：**0+0=0，1+0=0+1=1+1=1**
- 布尔乘：**1·1=1， 0·1= 1·0= 0·0=0**
- 对两个关系矩阵求其合成时，其运算算法则与一般矩阵的乘法是相同的，但其中的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

一、关系的合成

- 注意：设***R***是从集合***X***到集合***Y***的关系，***S***是从集合***Y***到集合***Z***的关系，于是有：
  - ✓如果***R***关系的值域与***S***关系的定义域的交集是个空集，则合成关系***R***◦***S***也是个空关系；
  - ✓若至少有一个序偶$< x, y > \in R$，其中第二个成员是***S***中的某一个序偶的第一个成员，则合成关系就是个非空关系。
  - ✓对于合成关系***R***◦***S***来说，它的定义域是集合***X***的子集，而它的值域则是***Z***的子集，事实上，它的定义域是关系***R***的定义域的子集，它的值域是关系***S***的值域的子集。

一、关系的合成

- **定理：**给定集合X，Y，Z和W，设R_1是从 X到Y的关系，R_2和R_3是Y到Z的关系，R_4是从Z到W的关系，于是有：

$$(a)\ \ R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$$

$$(b)\ \ R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$$

$$(c)\ \ (R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$$

$$(d)\ \ (R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$$

一、关系的合成

$$(a)\ \ R_1 \circ (R_2 \bigcup R_3) = (R_1 \circ R_2) \bigcup (R_1 \circ R_3)$$

证明： **当且仅当存在某一个$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$，能使$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \in \boldsymbol{R_1}$和$\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle \in \boldsymbol{R_2} \cup \boldsymbol{R_3}$，才有$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle \in \boldsymbol{R_1} \circ (\boldsymbol{R_2} \cup \boldsymbol{R_3})$，而**

对任意的$<x,z> \in R_1 \circ (R_2 \cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2 \cup R_3)$

$\Leftrightarrow \exists y\big(<x,y> \in R_1 \wedge (<y,z> \in R_2 \vee <y,z> \in R_3)\big)$

$\Leftrightarrow \exists y\big((<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2) \vee (<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_3)\big)$

$\Leftrightarrow \exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_2) \vee \exists y(<x,y> \in R_1 \wedge <y,z> \in R_3)$

$\Leftrightarrow <x,z> \in R_1 \circ R_2 \vee <x,z> \in R_1 \circ R_3$

$\Leftrightarrow <x,z> \in (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$ 得证

一、关系的合成

$$(b)\ R_1\circ(R_2\cap R_3)\subseteq(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$$

证明：当且仅当存在某一个$y\in Y$，能使$\langle x,y\rangle\in R_1$和$\langle y,z\rangle\in R_2\cap R_3$，才有$\langle x,z\rangle\in R_1\circ(R_2\cap R_3)$，而

对任意的$<x,z>\in R_1\circ(R_2\cap R_3)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2\cap R_3)$

$\Leftrightarrow(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge(\langle y,z\rangle\in R_2\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$

$\Leftrightarrow(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2\wedge(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$

$\Rightarrow(\exists y)((\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_2)\wedge(\exists y)(\langle x,y\rangle\in R_1\wedge\langle y,z\rangle\in R_3))$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in R_1\circ R_2\wedge\langle x,z\rangle\in R_1\circ R_3$

$\Leftrightarrow\langle x,z\rangle\in(R_1\circ R_2)\cap(R_1\circ R_3)$

- 对以上证明过程(a)式使用的是存在量词对$\vee$满足分配律
- 对(b)存在量词对$\wedge$不满足分配律，但它满足蕴涵式$\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x\, B(x)$
  - 这里应注意$A \Rightarrow B$是$A \subseteq B$

一、关系的合成

- 合成运算是对关系的二元运算，使用这种运算，能够由两个关系生成一个新的关系，对于这个新的关系又可进行合成运算，从而生成其它关系。
- **定理**：设R_1是从X到Y的关系，R_2是从Y到Z的关系，R_3是从Z到W的关系，于是有

$$(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

一、关系的合成

$\langle x,w\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow (\exists z)(\langle x,z\rangle \in R_1 \circ R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow (\exists z)((\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2) \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$

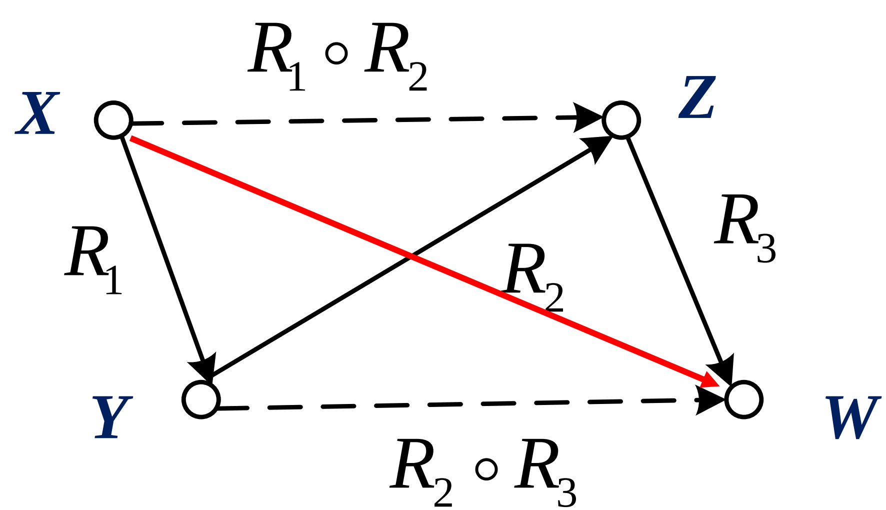
$\Leftrightarrow (\exists z)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\exists z)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow (\exists y)\big(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge (\exists z)(\langle y,z\rangle \in R_2 \wedge \langle z,w\rangle \in R_3)\big)$

$\Leftrightarrow (\exists y)(\langle x,y\rangle \in R_1 \wedge \langle y,w\rangle \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow \langle x,w\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$



一、关系的合成

例：给定关系***R***和***S***，并且 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$

$$S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$$

则

$$R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\}$$

$$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\}$$

$$R\circ(S\circ R)=\{\langle 3,2\rangle\}$$

$$(R\circ S)\circ R=\{\langle 3,2\rangle\}$$

$$R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$S\circ S=\{\langle 4,5\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,1\rangle\}$$

$$R\circ R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

关系的幂

定义：如果$\boldsymbol{R_1}$是从$\boldsymbol{X_1}$到$\boldsymbol{X_2}$的关系，$\boldsymbol{R_2}$是从$\boldsymbol{X_2}$到的$\boldsymbol{X_3}$关系，…，$\boldsymbol{R_n}$是从$\boldsymbol{X_n}$到$\boldsymbol{X_{n+1}}$的关系，则无括号表达式$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$表达了从$\boldsymbol{X_1}$到$\boldsymbol{X_{n+1}}$的关系。

当$\boldsymbol{X_1 = X_2 = \cdots = X_{n+1}}$和$\boldsymbol{R_1 = R_2 = \cdots = R_n}$时，也就是说当集合$\boldsymbol{X}$中的所有$\boldsymbol{R_i}$都是同样的关系时，$\boldsymbol{X}$中的合成关系$R_1 \circ R_2 \circ \cdots \circ R_n$可表达成$\boldsymbol{R^n}$，并称作**关系$\boldsymbol{R}$的幂**。

定义：给定集合$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{X}$中的二元关系。设$n \in N$，于是$\boldsymbol{R}$的$\boldsymbol{n}$次幂$\boldsymbol{R^n}$可定义成

a) $\boldsymbol{R^0}$是集合$\boldsymbol{X}$中的恒等关系$\boldsymbol{I_X}$，亦即

$$R^0 = I_X = \{\langle x, x\rangle | x \in X\}$$

b) $R^{n+1} = R^n \circ R$

关系的幂

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。设$m, n \in N$，于是可有

$$(a) \quad R^m \circ R^n = R^{m+n}$$

$$(b) \quad (R^m)^n = R^{mn}$$

例：给定集合$X=\{a,b,c\}$，R_1,R_2,R_3,R_4是X中的关系，并给定

$$R_1 = \{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

$$R_3 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$R_4 = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

给出这些关系的各次幂

关系的幂

解：

$$R_1^2=\{\langle a,b\rangle\},R_1^3=\varnothing,R_1^4=\varnothing,\cdots$$

$$R_2^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle\},$$

$$R_2^3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_2^0$$

$$R_2^4=R_2,R_2^5=R_2^2$$

$$R_2^6=R_2^3,\cdots$$

$$R_3^2=\{\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_3^3=R_3^4=R_3^5\cdots$$

$$R_4^2=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}=R_4^0$$

$$R_4^3=R_4,R_4^5=R_4^3\cdots$$

关系的幂

定理： 设X是含有n个元素的有限集合，R是X中的二元关系。于是存在这样的s和t，能使$R^t = R^s$，$0 \le s < t \le 2^{n^2}$

- 证明：
  - 集合X中的每一个二元关系都是$X \times X$的子集，
  - X有n个元素，$X \times X$有n^2个元素，
  - $\rho(X \times X)$有2^{n^2}个元素，每一个元素都是$X \times X$的一个子集，也是一种二元关系，
  - 因而，在X中有2^{n^2}个不同的二元关系。所以，不同的二元关系R的幂不会多于个2^{n^2}。
  - 但是序列$R^0, R^1, \cdots, R^{2^{n^2}}$中有$2^{n^2}+1$项，因此这些的幂中至少有两个是相等的。证毕。

二、合成关系的矩阵表达和图解

设集合$X=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$，$Z=\{z_1,z_2,\dots,z_p\}$，R是从X到Y的关系，S是从Y到Z的关系，M_R和M_S第i行第j列的元素分别是a_{ij}和b_{ij}，它们是0或者1。则合成关系$R\circ S$关系矩阵上的元素为

$$c_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n} a_{ik}\wedge b_{kj} \qquad i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,p$$

- 定义布尔运算：
  - 布尔加∨ : 0+0=0，1+0=0+1=1+1=1
  - 布尔乘∧: 1·1=1， 0·1= 1·0= 0·0=0
- 对两个关系矩阵求其合成时，其运算法则与一般矩阵的乘法是相同的，但其中的加法运算和乘法运算应改为布尔加和布尔乘。

二、合成关系的矩阵表达和图解

例：求合成关系 $R \circ S$ 的关系矩阵 $M_{R \circ S}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R \circ S} = M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二、合成关系的矩阵表达和图解

$$\boxed{M_{R_1} \circ (M_{R_2} \circ M_{R_3}) = (M_{R_1} \circ M_{R_2}) \circ M_{R_3} = M_{R_1} \circ M_{R_2} \circ M_{R_3}}$$

当 $M_{R_1} = M_{R_2} = \cdots = M_{R_n} = M_R$

用M_{R^n}表示这些矩阵的合成矩阵

二、合成关系的矩阵表达和图解

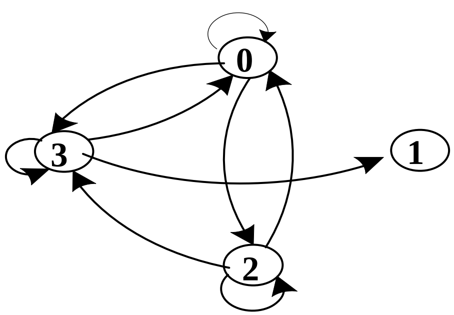
例： 设集合 $X=\{0,1,2,3\}$，R是X中的关系，并且

$$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$$

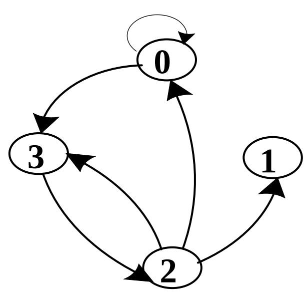
画出R^2和R^3的关系图

解：$R^2=R\circ R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,0\rangle\}$

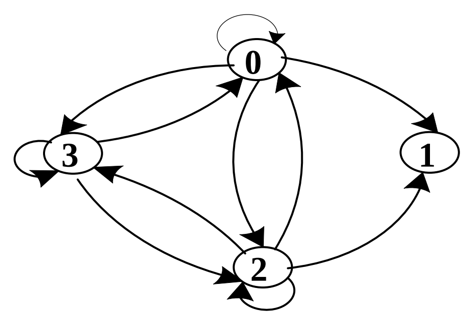
$R^3=R^2\circ R=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 3,3\rangle\}$



(b)



(a)



(c)

三、关系的求逆运算

- 关系$\boldsymbol{R}$的逆关系$\widetilde{\boldsymbol{R}}$定义如下：对于所有的$x \in X$和$y \in Y$来说，$xRy \Leftrightarrow y\tilde{R}x$
- 逆关系的关系矩阵：原关系矩阵转置
- 逆关系的关系图：原关系图中颠倒弧线上箭头的方向。
- 区分： 逆关系**vs**补关系

  在关系图和关系矩阵上的体现？

三、合成关系的求逆运算

- 定理：设R是从集合X到Y的关系。S是从集合Y到Z的关系。于是有

$$\widetilde{R \circ S} = \tilde{S} \circ \tilde{R}$$

- 证明：
  - 对于任何$x \in X$，$y \in Y$和$z \in Z$来说，如果xRy和ySz，则会有$x(R \circ S)z$和$z(\widetilde{R \circ S})\, x$，
  - 因为还有$z\tilde{S}y$和$y\tilde{R}x$，所以又有$z(\tilde{S} \circ \tilde{R})x$。因此可有$\widetilde{R \circ S} = \tilde{S} \circ \tilde{R}$。
- 利用关系矩阵也可以理解，$M_{R \circ S}$的转置和$M_{\tilde{S} \circ \tilde{R}}$是一样的。

三、合成关系的求逆运算

例：给定关系矩阵M_R和M_S。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

则：

$$M_{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{R\circ S}=M_R\wedge M_S=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{\tilde{S}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad M_{\tilde{S}\circ\tilde{R}}=M_{\tilde{S}}\wedge M_{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=M_{\widetilde{R\circ S}}$$

三、关系的求逆运算

定理：给定集合X和Y，R、R_1、R_2是从X到Y的关系，于是有：

1. $\widetilde{\widetilde{R}} = R$
2. $\widetilde{R_1 \cup R_2} = \widetilde{R_1} \cup \widetilde{R_2}$
3. $\widetilde{R_1 \cap R_2} = \widetilde{R_1} \cap \widetilde{R_2}$
4. $\widetilde{X \times Y} = Y \times X$
5. $\widetilde{\emptyset} = \emptyset$
6. $\widetilde{\sim R} = \sim(\widetilde{R})$, 这里$\sim R = X \times Y - R$
7. $\widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R_1} - \widetilde{R_2}$, 这里$\widetilde{R_1 - R_2}$表示$R_1 - R_2$的逆关系
8. $R_1 = R_2 \Rightarrow \widetilde{R_1} = \widetilde{R_2}$
9. $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow \widetilde{R_1} \subseteq \widetilde{R_2}$

三、关系的求逆运算

- 1. $\tilde{\tilde{R}} = R$
- 证明：设$\langle x, y\rangle$是R的任意元素。于是

  $\langle x, y\rangle \in R \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{R} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{\tilde{R}}$,

  所以有 $\tilde{\tilde{R}} = R$
- 2. $\widetilde{R_1 \cup R_2} = \widetilde{R_1} \cup \widetilde{R_2}$
- 证明：$\langle x, y\rangle \in R_1 \tilde{\cup} R_2 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$

  $\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2$

  $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \vee \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_2$

  $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$

  得证

三、关系的求逆运算

- **6.** $\widetilde{\sim R} = \sim(\tilde{R})$，这里$\sim R = X \times Y - R$
- 证明：$\langle x, y\rangle \in \widetilde{(\sim \mathrm{R})} \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \sim R$

$$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \notin R$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \notin \tilde{\mathrm{R}}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \sim(\tilde{R})$$

- **7.** $\widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R_1} - \widetilde{R_2}$，这里$\widetilde{R_1 - R_2}$表示$R_1 - R_2$的逆关系
- 证明：因为$R_1 - R_2 = R_1 \cap \sim R_2$，于是有

$$\widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R_1 \cap \sim R_2} = \tilde{R}_1 \cap (\widetilde{\sim R_2}) = \tilde{R}_1 \cap \sim\widetilde{R_2}$$

$$= \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$$

得证。

三、关系的求逆运算

- **定理**：设$\boldsymbol{R}$是集合$\boldsymbol{X}$中的关系。于是当且仅当$\boldsymbol{R}=\widetilde{\boldsymbol{R}}$，$\boldsymbol{R}$才是对称的。

- 证明:

  - (充分性)若$\boldsymbol{R}=\widetilde{\boldsymbol{R}}$则$\langle x,y\rangle\in R\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\tilde{R}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R$，即$\boldsymbol{R}$是对称的。

  - (必要性)设$\boldsymbol{R}$是对称的，那么对任何

$$\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\tilde{R}$$

即$R\subseteq\tilde{R}$;

对任何$\langle x,y\rangle\in\tilde{R}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R$

即$\tilde{R}\subseteq R$

必要性证明完毕。

作业

- **103页11,13,15,17,19**