第五章 函数

回顾

- 函数的概念与性质
  - 注意定义与传统定义的区别
- 函数的描述方法
  - 关系描述：定义（文字描述）
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 函数的合成与性质
- 特殊函数
  - 满射
  - 单射
  - 双射
  - 恒等函数
  - 偏函数

补充

- 函数f: $X \to Y$是双射函数，必须要求X和Y含有的元素数目相等，也就是基数相等，设为n。
- 思考：从X到Y上存在多少个双射函数？

$$n!$$

- 定理：假设m和n是正整数并且满足 $n \geq m$，那么从m元素集合到n元素集合的单射函数的个数为：

$$P_n^m = C_n^m m!$$

补充

- **定理：**假设m和n是正整数并且满足$m \geq n$，那么从m元素集合到n元素集合的**满射函数**的个数为：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n,n-1) \cdot 1^m$$

特殊函数

- 定理：给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$。于是
  a) 如果f和g都是满射函数，则合成函数$g \circ f$也是个满射函数。
  b) 如果f和g都是单射函数，则合成函数$g \circ f$也是个单射函数。
  c) 如果f和g都是双射函数，则合成函数$g \circ f$也是个双射函数。

特殊函数

- 定理： 给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$,于是

① 如果$g \circ f$是满射函数，则g必定是满射的。

② 如果$g \circ f$是个单射函数，则f必定是个单射函数。

③ 如果$g \circ f$是个双射函数，则g必定是满射的，f是单射的。

恒等函数

- 定义：给定集合X，并且有函数$I_X: X \to X$。对于所有的$x \in X$，有$I_X(x) = x$，亦即

  $I_X = \{< x, x > | x \in X\}$，则称$I_X$为恒等函数。

- 定理：给定集合X和Y。对于任何函数$f: X \to Y$，都有

$$f = f \circ I_X = I_Y \circ f$$

偏函数

- 定义：设X和Y是两个集合，并且有$X' \subseteq X$。于是，任何函数$f: X' \to Y$都称为域X和陪域Y的偏函数。对于任何元素$x \in X - X'$，$f(x)$的值是没有定义的。

5.4反函数

- 可以用关系的合成直接定义了函数的合成。那么，能否用关系的逆关系直接定义函数的反函数呢？
- 例：考察函数$f: I \to I$;

$$f = \{< i, i^2 > | i \in I\}$$

于是 $$f^{-1} = \{< i^2, i > | i \in I\}$$

显然，f^{-1}不是从I到I的函数。

- 因此，不能直接用关系的逆关系来定义函数的反函数。

反函数

- 定义：设$f: X \to Y$是一个双射函数。于是f的逆关系是f的反函数（或称逆函数），并记作f^{-1}。对于f来说，如果存在f^{-1}，则函数f是可逆的。
- 注意：仅当f是双射函数时，才有对应于f的反函数 f^{-1}。
- 定义：设$f: X \to Y$，若存在函数 $g: Y \to X$，使得 $g \circ f = I_X$，则称g为f的左逆；若存在函数$g: Y \to X$，使得$f \circ g = I_Y$，则称g为f的右逆。

反函数

- 定理：设$f: X \to Y$是一个双射函数。于是，反函数 f^{-1} 也是一个双射函数，并且是从Y到X的函数。
- 证明：首先证明反函数 f^{-1} 是一个从Y到X的函数。为此，可把f和f^{-1}表达成

$$f = \{\langle x, y\rangle | x \in X \wedge y \in Y \wedge f(x) = y\}$$

$$f^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in f\}$$

- 因为f是双射函数，所以每一个$y \in Y$都必定出现于一个序偶 $\langle x, y\rangle \in f$ 中，从而也出现于一个序偶 $\langle y, x\rangle \in f^{-1}$ 中。这说明反函数f^{-1}的定义域是集合Y，而不是Y的子集。
- 另外，由于f是单射函数，故对于每一个$y \in Y$，至多存在一个$x \in X$，能使$\langle x, y\rangle \in f$；因而，仅有一个$x \in X$，能使$\langle y, x\rangle \in f^{-1}$。这说明反函数$f^{-1}$也是单射的，即$f^{-1}$是从$Y$到$X$的函数。

反函数

- 证明：再来证明f^{-1}是双射函数。为此，假设反函数$f^{-1}: Y \to X$不是双射函数，亦即f^{-1}不是单射或满射的。
- 如果f^{-1}不是单射的，
  - 则可能有$\langle y_i, x_i \rangle \in f^{-1}$和$\langle y_j, x_i \rangle \in f^{-1}$。
  - 又有$\langle x_i, y_i \rangle \in f$和$\langle x_i, y_j \rangle \in f$。
  - 这就是说， f不满足像点的唯一性条件，因此f不是函数。
  - 这与假设相矛盾，故f^{-1}应是单射函数。
- 如果f^{-1}不是满射的，
  - 那么就不是每一个$x \in X$都出现于序偶$\langle y, x \rangle \in f^{-1}$中。
  - 也就不是每一个$x \in X$都出现于序偶$\langle x, y \rangle \in f$之中。
  - 因此f不是函数，与假设矛盾，故f^{-1}是满射函数。
- 因为f^{-1}既是单射的又是满射的，所以f^{-1}是双射函数。

反函数

- 定理：如果函数$f: X \to Y$是可逆的，则有

$$f^{-1} \circ f = I_X$$
$$f \circ f^{-1} = I_Y$$

- 证明：
  - 设$x \in X$和$y \in Y$，如果$f(x) = y$，则会有$f^{-1}(y) = x$，
  - 于是能够得到

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

  因此应有$f^{-1} \circ f = I_X$。
  - 与此类似，还可得出

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

  于是应有$f \circ f^{-1} = I_Y$。
- 注意：函数f和f^{-1}的合成，总会生成一个恒等函数，由于合成的次序不同，合成函数的值域或者是集合X，或者是集合Y。

反函数

- 例：在自然数集合上定义四个函数

$$f_1 = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,0\rangle\} \cup \{\langle n+2,\ n\rangle \mid n \in N\}$$

$$f_2 = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle\} \cup \{\langle n+2,\ n\rangle \mid n \in N\}$$

$$g_1 = \{\langle n,\ n+2\rangle \mid n \in N\}$$

$$g_2 = \{\langle 0,0\rangle\} \cup \{\langle n+1,\ n+3\rangle \mid n \in N\}$$

- 可以证明

$$f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_1 = f_1 \circ g_2 = I_N$$

- 可见，g_1和g_2都是f_1的右逆，而f_1和f_2又都是g_1的左逆。此例说明，一个函数的左逆和右逆不一定是唯一的。

反函数

- **定理：** 如果f是个双射函数，则应有$(f^{-1})^{-1}=f$
- **证明：** 假设$<x,y>\in(f^{-1})^{-1}$，于是有

$$\langle x,y\rangle\in(f^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in f^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in f$$

- 由$<x,y>$的任意性可知，$(f^{-1})^{-1}=f$

反函数

- **定理：**给定函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$，并且f和g都是可逆的。于是应有

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

- 证明：$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f$

$f^{-1} \circ g^{-1}$是$g \circ f$的左逆

$$= f^{-1} \circ I_Y \circ f$$

$$= f^{-1} \circ f = I_X$$

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$$

$f^{-1} \circ g^{-1}$是$g \circ f$的右逆

$$= g \circ I_Y \circ g^{-1}$$

$$= g \circ g^{-1} = I_Z$$

- 得证。

反函数

- 例：给定集合$X=\{1,2,3\}$，$Y=\{a,b,c\}$和$Z=\{\alpha,\beta,\gamma\}$设函数$f: X\to Y$和$g: Y\to Z$分别为：$f=\{<1,c>,<2,a>,<3,b>\}$，$g=\{<a,\gamma>,<b,\beta>,<c,\alpha>\}$试说明$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$。
- 解：$f^{-1}=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle,\langle c,1\rangle\}$

$$g^{-1}=\{\langle \alpha,\ c\rangle,\langle \beta,\ b\rangle,\langle \gamma,\ a\rangle\}$$

$$g\circ f=\{\langle 1,\alpha\rangle,\langle 2,\gamma\rangle,\langle 3,\beta\rangle\}$$

$$(g\circ f)^{-1}=\{\langle \alpha,1\rangle,\langle \beta,3\rangle,\langle \gamma,2\rangle\}$$

$$f^{-1}\circ g^{-1}=\{\langle \alpha,1\rangle,\langle \beta,3\rangle,\langle \gamma,2\rangle\}=(g\circ f)^{-1}$$

5.5特征函数

- 用一种很简单的函数来确定集合与集合间的关系，这种函数就是特征函数。
- 定义：设X为任意集合，$Y \subseteq R$，f和g是从X到Y的函数。

1. $f \leq g$表示，对每个$x \in X$，皆有$f(x) \leq g(x)$。
2. $f+g$: $X \to Y$，对每个$x \in X$，皆有

   $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$，称$f+g$为f和g的和。
3. $f-g$: $X \to Y$，对每个$x \in X$，皆有

   $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$，称$f-g$为f和g的差。
4. $f * g$: $X \to Y$，对每个$x \in X$，皆有

   $(f*g)(x) = f(x) * g(x)$，称$f*g$为f和g的积。

特征函数

- 定义：设E为全集，$A \subseteq E$，Ψ_A为如下定义的从E到$\{0,1\}$的函数：

$$\psi_A(x)=\begin{cases}1 & x \in A\\ 0 & x \notin A\end{cases}$$

称$\Psi_A(x)$为集合A的特征函数。

特征函数的性质

(1) $0 \le \psi_A \le 1$，对于任意的$A \subseteq E$成立

(2) $\psi_A = 0$，当且仅当$A = \emptyset$

(3) $\psi_A = 1$，当且仅当$A = E$

(4) $\psi_A \le \psi_B$，当且仅当$A \subseteq B$

(5) $\psi_A = \psi_B$，当且仅当$A = B$

(6) $\psi_{\sim A} = 1 - \psi_A$

(7) $\psi_{A \cap B} = \psi_A * \psi_B$

(8) $\psi_{A \cup B} = \psi_A + \psi_B - \psi_A * \psi_B$

(9) $\psi_{A-B} = \psi_A - \psi_A * \psi_B$

(10) $\psi_A * \psi_B = \psi_A$，当且仅当$A \subseteq B$

(11) $\psi_A * \psi_A = \psi_A$

特征函数的性质

(8) $\psi_{A\cup B}=\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B$

- 证明：当$x\in A\cup B$时，$\psi_{A\cup B}(x)=1$，由于

$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A\vee x\in B$，于是可能有这样几种情况：

a) $x\in A$使$\psi_A=1$，$x\notin B$使$\psi_B=0$，于是

$$\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B=1$$

a) $x\in B$但$x\notin A$，此时也有$\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B=1$

b) $x\in A$并且$x\in B$，此时

$$\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B=1+1-1*1=1$$

- 即当$x\in A\cup B$时，$\psi_{A\cup B}=\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B=1$
- 当$x\notin A\cup B$时，$\psi_{A\cup B}=0$，而

$x\notin A\cup B\Leftrightarrow\neg x\in A\cup B\Leftrightarrow\neg(x\in A\vee x\in B)\Leftrightarrow x\notin A\wedge x\notin B$

- 可得$\psi_A+\psi_B-\psi_A*\psi_B=0=\psi_{A\cup B}$
- 得证。

特征函数的性质

(9) $\psi_{A-B}=\psi_A-\psi_A*\psi_B$

- 证明：当$x\in A-B$时，$\psi_{A-B}=1$，同时

  $x\in A-B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Leftrightarrow \psi_A=1\wedge\psi_B=0$，

  得$\psi_A-\psi_A*\psi_B=1-1*0=1$，上式成立。
- 当$x\notin A-B$时，$\psi_{A-B}=0$，同时

  $x\notin A-B\Leftrightarrow \neg x\in A-B\Leftrightarrow \neg(x\in A\wedge x\notin B)$

  $\Leftrightarrow x\notin A\vee x\in B\Leftrightarrow \psi_A=0\vee\psi_B=1$
- 于是有

  a) $\psi_A-\psi_A*\psi_B=0-0*0=0$

  b) $\psi_A-\psi_A*\psi_B=1-1*1=0$

  c) $\psi_A-\psi_A*\psi_B=0-0*1=0$
- 即$x\notin A-B$时，总有 $\psi_{A-B}(x)=\psi_A-\psi_A*\psi_B=0$
- 得证。

特征函数

- 例：用特征函数证明

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- 解：$\psi_{A\cup(B\cap C)} = \psi_A + \psi_{B\cap C} - \psi_A * \psi_{B\cap C}$

$$= \psi_A + \psi_B * \psi_C - \psi_A * \psi_B * \psi_C$$

- 及$\psi_{(A\cup B)\cap(A\cup C)} = \psi_{A\cup B} * \psi_{A\cup C}$

$$= (\psi_A + \psi_B - \psi_A * \psi_B) * (\psi_A + \psi_C - \psi_A * \psi_C)$$

$$= \psi_A\psi_A + \psi_A\psi_C - \psi_A\psi_A\psi_C + \psi_B\psi_A + \psi_B\psi_C$$

$$-\psi_B\psi_A\psi_C - \psi_A\psi_A\psi_B - \psi_A\psi_B\psi_C + \psi_A\psi_B\psi_A\psi_C$$

$$= \psi_A + \psi_B\psi_C - \psi_A\psi_B\psi_C$$

- 故$\psi_{A\cup(B\cap C)} = \psi_{(A\cup B)\cap(A\cap C)}$
- 因此，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

5.6基数

- 有限集合的基数是集合中不同元素的个数，无限集合呢？
- 定义：设A和B是两个集合。从A到B如果存在一个双射函数$f: A \to B$，则称A和B是等位的或等势的，记作$A \sim B$，读作A等势于B。
- 例：设集合$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$，$N_1 = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$，$N \sim N_1$，同时$N_1 \subset N$。

基数

- 定义：设A和B为两个集合
  a) 如果$A \sim B$，就称A和B的基数相等，记为
  $$|A| = |B|$$
  a) 如果存在从A到B的单射，就称A的基数小于等于的基数B，记为$|A| \leq |B|$。
  b) 如果$|A| \leq |B|$且$|A| \neq |B|$，就称A的基数小于B的基数，记为$|A| < |B|$。
- 规定：
  - 自然数集合N的基数为$|N| = \aleph_0$，读作阿列夫零；
  - 实数集合R的基数为$|R| = \aleph_1$，读作阿列夫一。
- 定义：等势于自然数集合N的任何集合，称为可数集。

基数

- 为了确认集合A是有穷的或可数的，可以把集合A的各元素排列起来，并令序列中的第一个元素对应1，第二个元素对应2等等，这样就能建立一个从A到$I_m(m \in N, I_m = \{1,2,\cdots,m\})$或$N$的双射函数关系。
- 这种安排，目的在于计数集合A的各元素。因此，有限集合及无限可数集合都称作可计数的集合。
- 定义：如果集合A是有限的或无限可数的，则称A是可计数的；如果集合A是无限的且不是可数的，则称A是不可计数的。

基数

- **定理：**实数集合$R_1 = \{x | x \in R \wedge (0 < x < 1)\}$是不可计数的。
- 证明：（反证法）
  - 假设$\boldsymbol{R_1}$是可计数的，因此可把$\boldsymbol{R_1}$的元素排成无穷序列$\boldsymbol{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots}$。
  - 任何小于1的正数都可表达成$\boldsymbol{x = 0.y_1y_2y_3\cdots}$。这里$y_i \in \{0,1,2,\cdots,9\}$,而$\{\boldsymbol{y_1, y_2, \ldots}\}$有无穷个非零元素。例如，小数0.2和0.123可分别写成0.1999…和0.122999…。于是可把$\boldsymbol{R_1}$的各元素表达成

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots$$

$$x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots$$

$$x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots$$

$$\cdots$$

基数

- 对于每一个$n \geq 1$,可把上述元素一般地表示成

$$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots$$

- 既然R_1是可数的，则从实数集合R_1到自然数集合，存在一个双射函数$f: R_1 \to N$，x_n的像点是$n \in N$，即$f(x_n) = n$。这样，映射f可给定成

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \end{array}$$

基数

- 于是，试构成一个实数

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots b_n \cdots$$

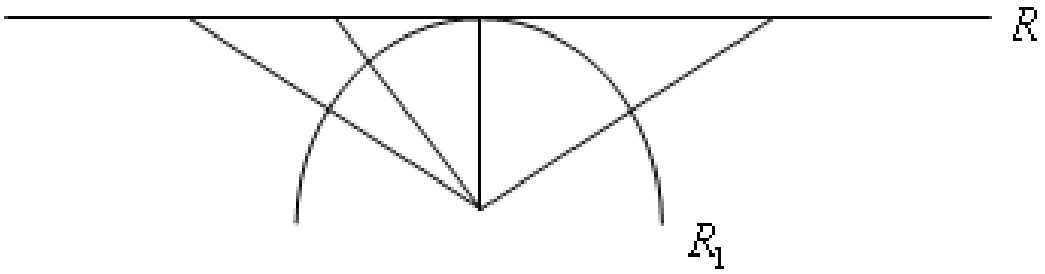
- 这里，对于$j = 1,2,3,\cdots$来说，如果$a_{jj} \neq 1$，则选定$b_j = 1$；如果$a_{jj} = 1$，则选定$b_j = 2$；如此等等。

- 显然，x与所有的元素$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$都不相同。因为在第一个位置上它不同于$x_1$，在第二个位置上它不同于$x_2$，如此等等。

- 因此$x \notin R_1$，亦即它不属于f的定义域，当然也就不存在从R_1到N的双射函数。这与假设相矛盾，因此是R_1不可计数的。

基数

- 例：用图解法来说明上述定理中R_1的基数是$\aleph_1$
- 解：即说明$R_1 \sim R$
- 用无限长的坐标轴表示集合R，亦即直线上的各点表示不同的实数；
- 用有限长的线段表示集合R_1，亦即线段上的各点，表示0和1之间的不同实数。
- 接着把线段R_1弯曲成半圆，并使R轴与半圆相切于线段的中间点，如下图所示。



- 如果从半圆的中心引出直线，并与半圆和轴相交，则各交点必成对地出现，从而形成了从R_1到R的双射函数。因此R_1和R具有同样的基数$\aleph_1$。

基数

- 实际上，对于处于任何区间的实数集合$(a,b)=\{x|x\in R$并且$a<x<b\}$来说，都有$\aleph_1$表示这些等势集合的基数，并称它为闭联集的势。
- 是否存在基数不同于$\aleph_0$和$\aleph_1$的其他无限集合？能否将它们按一定次序排列，并比较它们的基数？

基数

- 定理：对于每个集合A，皆有$|A| < |\rho(A)|$。
- 证：定义$g: A \to \rho(A)$，并且令$g(a) = \{a\}$，显然g是内射函数（不是满射）。所以，由定义5.6-2的（b）知$|A| \leq |\rho(A)|$。
- 下面用反证法来证明$|A| \neq |\rho(A)|$。
- 假设$|A| = |\rho(A)|$，则有双射函数$f: A \to \rho(A)$。令$B = \{a | a \in A \wedge a \notin f(a)\}$，则$B \in \rho(A)$，所以有$t \in A$使$f(t) = B$。
- 若$t \in B$,按B的定义，$t \notin f(t)$即$t \notin B$。
- 若$t \notin B$，即$t \notin f(t)$，按B的定义$t \in B$。
- 总之$t \in B$当且仅当$t \notin B$，这是一个矛盾，所以，只有$|A| \neq |\rho(A)|$。

基数

- 例：试证$\boldsymbol{\rho(N)}$的基数是$\boldsymbol{\aleph_1}$。
- 证明：只需证$\boldsymbol{[0,1] \sim \rho(N)}$即可。
  - 定义$\boldsymbol{g}$: $\boldsymbol{\rho(N) \to [0,1]}$为

$$g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\psi_A(i)}{2^{i+1}}$$

  - 显然$\boldsymbol{g}$是双射的，所以$\boldsymbol{|\rho(N)| = |[0,1]| = \aleph_1}$

基数

结论：

（1）和自然数集合等势的无限集的基数为 $\aleph_0$ 。

（2）和实数集合等势的无限集的基数为$\aleph_1$ 。

（3） $\aleph_0 < \aleph_1$

5.7* 不可解问题

现代数字计算机已经应用于社会生活的各个方面，似乎计算机无所不能，若不考虑运算时间的限制，对于任何问题，只要能把它抽象成计算机可接受的输入形式，就能用计算机进行求解。然而，实际情况并非如此，可计算性理论告诉我们：确实存在计算机无法解决的问题，尽管他们可以表示成计算机可接受的输入形式。

以下将粗浅的讨论一下可计算性的问题，首先利用可数集的概念证明不可计算的问题确实存在，然后给出著名的不可判定的停机问题。

5.7* 不可解问题

不可解问题存在性

所谓不可解问题是指使用数字计算机无法解决的问题，在这里更具体地说，就是指使用某种程序设计语言无法解决的问题，即不存在可为它们求解的程序。

下面将说明不可解问题确实存在。基本方法是：首先说明程序的集合是无限可数的，然后说明问题的集合是无限不可数的，所以问题比程序多得多，确实无法为每个问题都编写出解决它的程序。

假定所考察的程序设计语言是C语言（其他程序设计语言也可以）。C语言的字符集是有限集，设为Σ。C语言（源程序）是Σ中的字符所构成的有限字符串。设所有的合法的C程序组成集合C则$C \subseteq \Sigma^*$，其中Σ^*是Σ上有限字符串的集合。由于Σ是有限集，而字符串长度$n \in N$，因此Σ^*是可数集，所以C也是可数集。

5.7* 不可解问题

不可解问题存在性

任何问题都可以抽象为从输入到输出的函数，通过适当的编码，输入和输出可以分别编码为两个自然数，所以可以用自然数集 N上的函数来为问题建模。反过来， N上的函数也都是问题。于是，可以用 N上的函数的集合来为问题的集合建立数学模型。

设自然数集 N 上的函数的集合是 *F*，则

$$F = \{ f \mid f : \mathrm{N} \to \mathrm{N} \}$$

由康托定理可知*F*是不可数集。因此 *C*为可数，*F*为不可数，$|C| < |F|$，所以一定存在某个函数（问题），计算它的程序是不存在的。

5.7* 不可解问题

停机问题

具有实际应用价值的不可解问题是否存在？答案是肯定的，著名的**停机问题**就是其中之一。

停机问题是不可解问题的经典例子，它的不可解性是计算机科学中最著名的定理之一，图灵在1936年证明了**停机问题的不可解性**。停机问题的定义如下。

输入：一个**程序**和这个程序要处理的一个**输入**。

输出：若程序在该输入下能终止，则输出“**是**”，否则，输出“**否**”。

停机问题是一个很有意义的现实问题，它的成功解决将对程序员的工作提供很大的帮助，比如，自动判断程序中是否有死循环等等。但是，遗憾的是这样的检测工具是构造不出来的

5.7* 不可解问题

停机问题

在证明停机问题的不可解性之前，首先注意，**不能通过简单的运行一个程序并观察它的行为来确定在给定的输入下它是否能终止**。若程序运行一段时间后停止了，则可以简单的得出答案。但是若在运行一段时间之后未停止，则无法确定它是永不停机，还是我们等待的时间不够。

假定停机问题是可解的，有一个名为halt的解决停机问题的C函数：

```
int halt(char *prog, char *input)
```

它有两个输入：“*prog”是一个C函数的源代码字符串，“*input”是表示输入的字符串。如果函数“*prog”在给定的输入“*input”下能终止，halt返回1，否则返回0。

5.7* 不可解问题

停机问题

再给出一个简单的函数contrary如下。

```
void contrary(char *prog)
{ if (halt(prog,prog))
  while (1);}
```

现将函数contrary本身作为输入调用contrary，考察其执行过程。

（1）若其中对halt的调用返回1，则表明contrary在对自身运行时将会停机。但是分析contrary的源代码可以发现，在这种情况下，contrary将进入一个无限循环，从而不会停机。这是矛盾的。

（2）若其中对halt的调用返回0，则表明contrary在对自身运行时将不会停机。但是contrary的源代码表明，在这种情况下，contrary不会进入无限循环，从而将停机。这也是矛盾的。

两种情况都有矛盾，所以，函数halt实际上是构造不出来的，即停机问题不可解。通过把某个已知的不可解问题归约到新问题的方法，可以证明新问题也是不可解的。

5.7* 不可解问题

停机问题

■**例5.23** 考虑如下的停机问题的变体——零输入停机问题。

输入：一个没有输入的程序。

输出：若该程序能终止，则输出“是”，否则输出“否”。

解：假定零输入停机问题是可解的，有一个函数

int ehalt(char *prog)

其输入是一个没有输入的程序。若被输入的程序能终止，则ehalt返回1，否则ehalt返回0。

可以利用ehalt构造halt，即把停机问题归约到零输入停机问题，这样就得到解决停机问题的一个算法，这与已证明的结论（停机问题是不可解的）矛盾，从而证明零输入停机问题也是不可解的。

5.7* 不可解问题

停机问题

■具体归纳方法如下。

✓（1）把halt的输入程序 P和输入字符串 I 改造成一个没有输入的程序 P'，并使得 P' 能终止当且仅当程序 P 在输入 I 下能终止。这种改造可以通过修改程序 P，把 I 作为它的一个静态变量 S 存储，并进一步修改 P 中对输入的引用，使它们从 S中得到输入，经过如此改造的程序即为 P'。

✓（2）对 P' 调用ehalt。

✓（3）直接输出ehalt(P')的返回值。

上述证明使用了可计算性证明中的一个常规技术，即用一个程序修改另一个程序。

作业

- 第五章习题：
  - **11 ~ 14,**
  - **17(2,4),**
  - **18(2,3),**
  - **21**