



离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405, Tel: 62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ: 1062258606

回顾

- 相容关系
- 偏序关系
- 拟序关系
 - 全序关系

五、偏序集合与哈斯图

像表达相容关系时用简化关系图一样，通常使用较为简便的偏序集合图——哈斯(Hass)图来表达偏序关系。

定义：设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集，如果对任何 $x, y \in P$ ， $x \leq y$ 和 $x \neq y$ ，而且不存在任何其它元素 $z \in P$ 能使 $x \leq z$ 和 $z \leq y$ ，即 $(x \leq y \wedge x \neq y \wedge (x \leq z \leq y \Rightarrow x = z \vee z = y))$ 成立，则称元素 y 盖覆 x 。

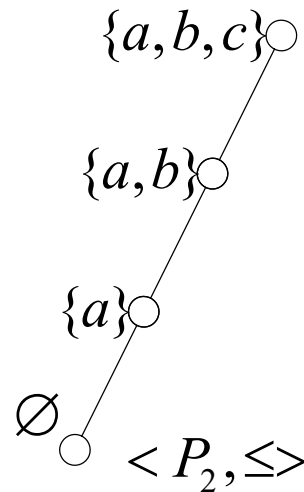
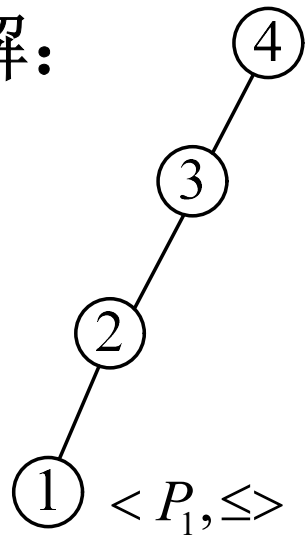
偏序集合与哈斯图

在哈斯图中，用小圈表示每个元素。如果有 $x, y \in P$ ，且 $x \leq y$ 和 $x \neq y$ ，则把表示 x 的小圈画在表示 y 的小圈之下。如果 y 盖覆 x ，则在 x 和 y 之间画上一条直线。如果 $x \leq y$ 和 $x \neq y$ ，但是 y 不盖覆 x ，则不能把 x 和 y 直接用直线连结起来，而是要经过 P 的一个或多个元素把它们连结起来。这样，所有的边的方向都是自下朝上，故可略去边上的全部箭头表示。

偏序集合与哈斯图

例如： 设 $P_1=\{1,2,3,4\}$, \leq 是“小于或等于”关系, 则 $\langle P_1, \leq \rangle$ 是个全序集合。 设 $P_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$, \leq 是 P_2 中的包含关系 \subseteq , 则 $\langle P_2, \leq \rangle$ 是全序集合。 试画出 $\langle P_1, \leq \rangle$ 和 $\langle P_2, \leq \rangle$ 的哈斯图。

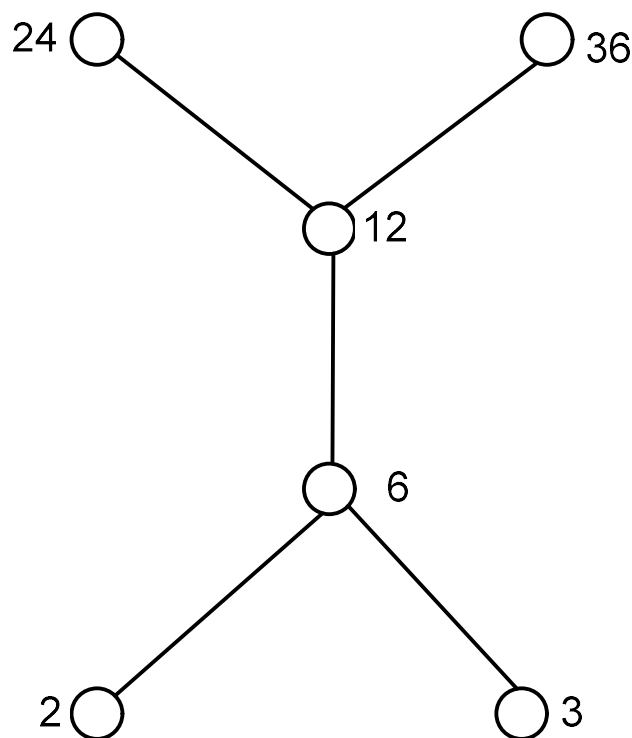
解：



注意：虽然两个全序关系的定义不同，但它们可能具有同样结构的哈斯图

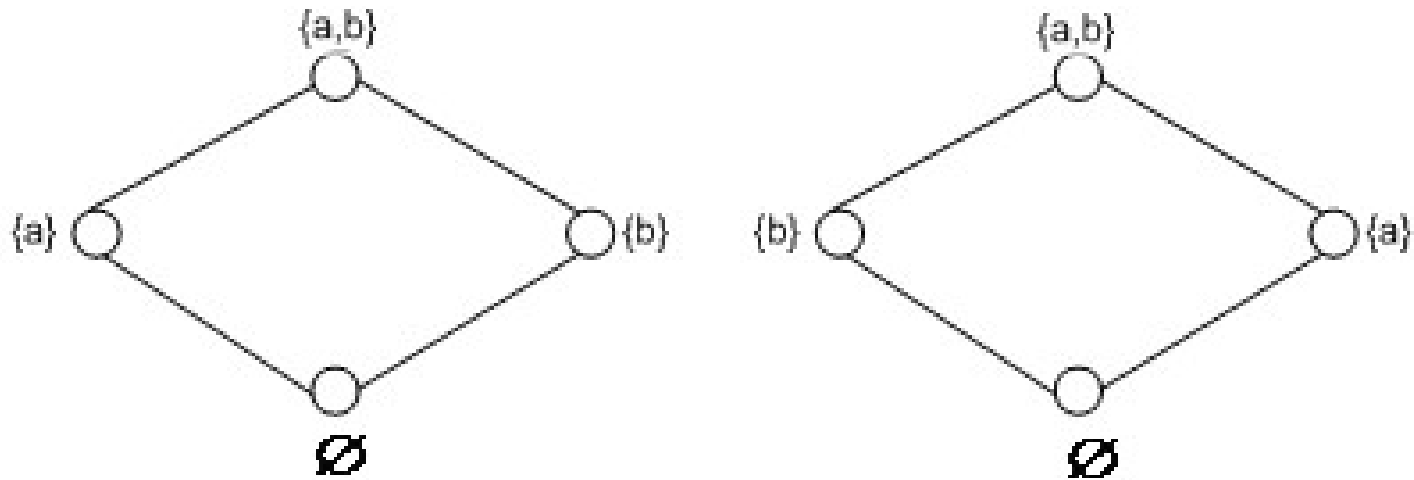
偏序集合与哈斯图

例： 设集合 $X=\{2,3,6,12,24,36\}$ ， \leq 是 X 中的偏序关系并定义成：如果 x 整除 y ，则 $x\leq y$ 。试画 $\langle X, \leq \rangle$ 的哈斯图。



偏序集合与哈斯图

例：设集合 $X=\{a,b\}$ ， $\rho(X)$ 是它的幂集。 $\rho(X)$ 的元素间的偏序关系 \leq 是包含关系 \subseteq 。试画出 $\langle \rho(X), \leq \rangle$ 的哈斯图。



注意：对于给定偏序集合来说，其哈斯图不是唯一的。由 $\langle P, \leq \rangle$ 的哈斯图，可以求得其对偶 $\langle P, \geq \rangle$ 的哈斯图。只需把它的哈斯图反转 180° 即可，使得原来是顶部的结点变成底部上各结点。

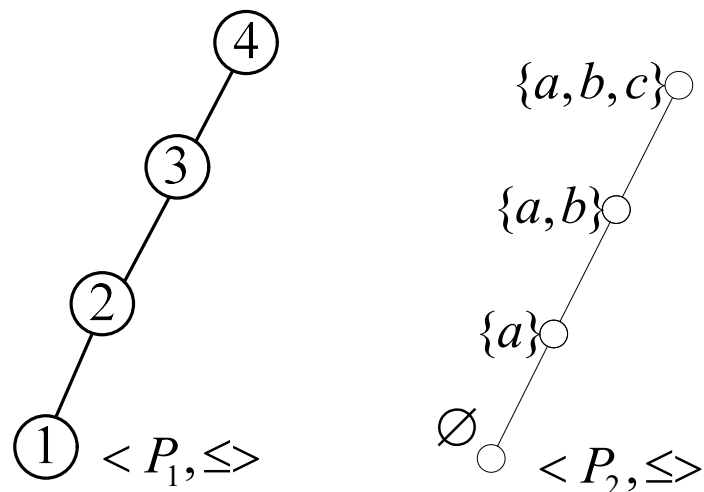
偏序集合与哈斯图

定义： 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集合， 并有 $Q \subseteq P$ 。

(a) 如果对于每一个元素 $q' \in Q$ 有 $q \leq q'$ ， 则元素 $q \in Q$ 称为 Q 的最小成员， 通常记作0。

(b) 如果对于每一个元素 $q' \in Q$ 有 $q' \leq q$ ， 则元素 $q \in Q$ 称为 Q 的最大成员， 通常记作1。

如果能画出哈斯图， 就可以看出是否存在最大成员和最小成员。



偏序集合与哈斯图

定理：设 X 是一个偏序集合，且有 $Q \subseteq P$ 。如果 x 和 y 都是 Q 的最小(最大)成员,则 $x=y$ 。

证：假定 x 和 y 都是 Q 的最小成员。于是可有 $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 。根据偏序关系的反对称性，可以得出 $x=y$ 。当 x 和 y 都是 Q 的最大成员时，定理的证明类似于上述的证明。

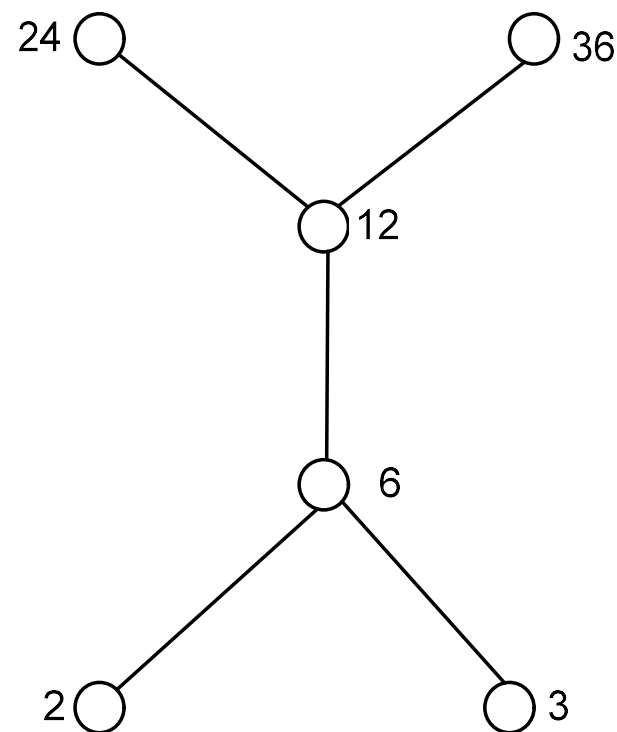
偏序集合与哈斯图

定义： 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集合， 并有 $Q \subseteq P$ 。

(a) 如果 $q \in Q$ ， 且不存在元素 $q' \in Q$ 能使 $q' \neq q$ 和 $q' \leq q$ ， 则称 q 是 Q 的极小成员。

(b) 如果 $q \in Q$ ， 且不存在元素 $q' \in Q$ 能使 $q' \neq q$ 和 $q \leq q'$ ， 则称 q 是 Q 的极大成员。

极大成员和极小成员都不是唯一的。不同的极大成员(或不同的极小成员)是不可比的。



偏序集合与哈斯图

定义： 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集合，并有 $Q \subseteq P$ 。

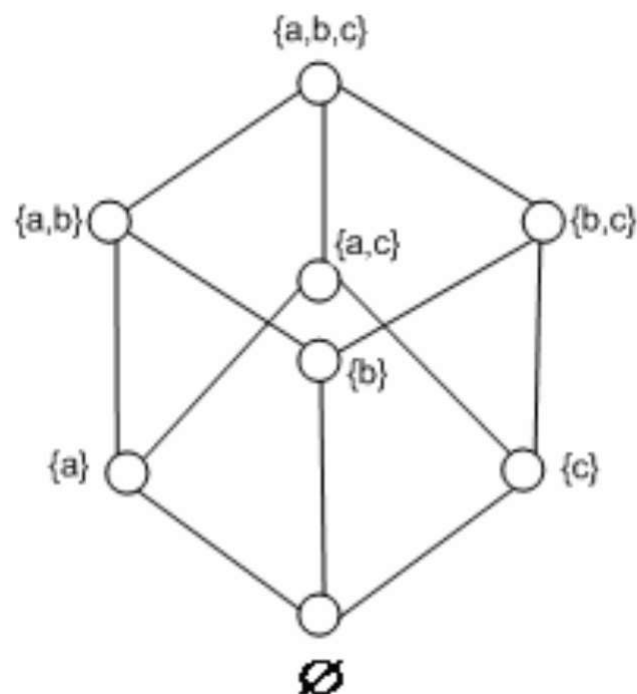
(a) 如果对于每一个元素 q 有 $q' \leq q$ ，则元素 $q \in P$ 称为 Q 的上界。

(b) 如果对于每一个元素 q 有 $q \leq q'$ ，则元素 $q \in P$ 称为 Q 的下界。

偏序集合与哈斯图

例：设集合 $X=\{a,b,c\}$ ， $\rho(X)$ 是它的幂集。 $\rho(X)$ 中的偏序关系 \leq 是包含关系 \subseteq 。试画出 $\langle \rho(X), \leq \rangle$ 的哈斯图，并指出 $\rho(X)$ 的子集的上界和下界。

解：先画出哈斯图



首先选取 $\rho(X)$ 的子集 $A=\{\{b,c\}, \{b\}, \{c\}\}$ 。于是 X 和 $\{b,c\}$ 是 A 的上界， \emptyset 是它的下界。对于 $\rho(X)$

的子集 $B=\{\{a,c\}, \{c\}\}$ ，上界是 X 和 $\{a,c\}$ ；而下界是 $\{c\}$ 和 \emptyset 。

子集的上界和下界不是唯一的。

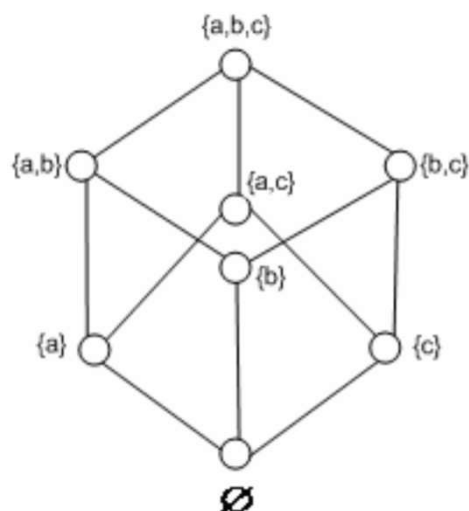
偏序集合与哈斯图

定义： 设 $\langle P, \leq \rangle$ 是一个偏序集合，并有 $Q \subseteq P$ 。

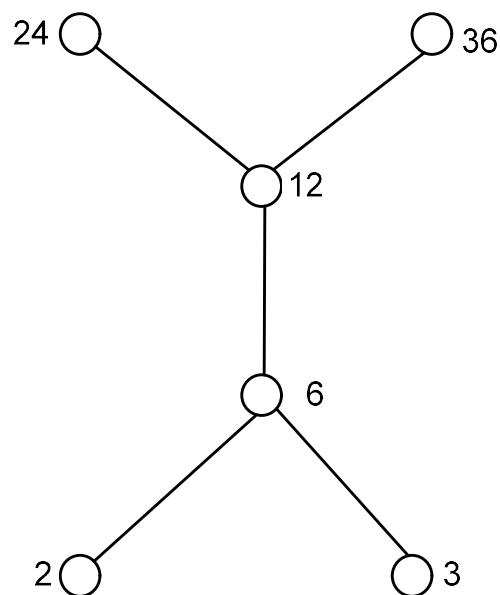
- (1) 如果 q 是 Q 的一个上界，且对于 Q 的每一个上界 q' 都有 $q \leq q'$ ，则称 q 是 Q 的最小上界，通常记作**LUB**。
- (2) 如果 q 是 Q 的一个下界，且对于 Q 的每一个下界 q' 都有 $q' \leq q$ ，则称 q 是 Q 的最大下界，通常记作**GLB**。

如果存在最小上界的话，它是唯一的；如果存在最大下界的话，它也是唯一的。

偏序集合与哈斯图



它的每一个子集都有一个最小上界和一个最大下界。



子集 $A=\{2,3,6\}$ 有上确界 $\text{LUB}A=6$,
但这里没有下确界 GLBA 。与此类似,
对于子集 $B=\{2,3\}$ 来说,最小
上界还是6,但是仍没有下界。对于
子集 $C=\{12,6\}$ 来说,最小上界是
12,最大下界是6。

偏序集合与哈斯图

对于偏序集合 $\langle P, \leq \rangle$ 来说，它的对偶 $\langle P, \geq \rangle$ 也是一个偏序集合。相对于偏序关系 \leq 的 P 中的最小成员，就是相对于偏序关系 \geq 的 P 中的最大成员；反之亦然。与此类似，可以交换极小成员和极大成员。对于任何子集 $Q \subseteq P$ 来说， $\langle P, \leq \rangle$ 中的**GLBA**和 $\langle P, \geq \rangle$ 中的**LUBA**是一样的。

良序关系

定义：给定集合 X ， R 是 X 中的二元关系。如果 R 是个全序关系，且 X 的每一个非空子集都有一个最小成员，则称 R 是个良序关系。与此对应，序偶 $\langle X, R \rangle$ 称为良序集合。

每一个良序集合必定是全序集合,因为对于任何子集来说，其本身必定有一个元素是它的最小成员。但是每一个全序集合不一定是良序的，有限全序集合必定是良序的。

作业

- **106: 44-50** （奇数）