第六章 代数系统

大连理工大学软件学院

陈志奎 教授

办公室： 综合楼**405**，**Tel**：**62274392**
实验室：综合楼
Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com

回顾

- 代数系统
  - 定义
  - 性质
- 同态定义
  - 定义
  - 性质
- 同构定义
  - 定义
  - 性质

- **6.4 同余关系**

- 定义**6.4.1** 给定$\langle \boldsymbol{S}, \odot \rangle$且$\boldsymbol{E}$为$\boldsymbol{S}$中的等价关系。
- $\boldsymbol{E}$关于$\odot$有代换性质：$(\forall \boldsymbol{x_1})(\forall \boldsymbol{x_2})(\forall \boldsymbol{y_1})(\forall \boldsymbol{y_2})((\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2} \in \boldsymbol{S} \wedge \boldsymbol{x_1 E x_2} \wedge \boldsymbol{y_1 E y_2}) \rightarrow (\boldsymbol{x_1} \odot \boldsymbol{y_1}) \boldsymbol{E} (\boldsymbol{x_2} \odot \boldsymbol{y_2}))$。
- $\boldsymbol{E}$为$\langle \boldsymbol{S}, \odot \rangle$中的同余关系：$\boldsymbol{E}$有代换性质。
- 与此同时，称同余关系$\boldsymbol{E}$的等价类为同余类。

- 由定义可知，同余关系是代数结构的集合中的等价关系，并且在运算的作用下，能够保持关系的等价类。即在$x_1 \odot y_1$中，如果用集合S中的与x_1等价的任何其它元素x_2代换x_1，并且用与y_1等价的任何其它元素y_2代换y_1，则所求的结果$x_2 \odot y_2$与$x_1 \odot y_1$位于同一等价类之中。亦即若$[x_1]_E = [x_2]_E$并且$[y_1]_E = [y_2]_E$，则$[x_1 \odot y_1]_E = [x_2 \odot y_2]_E$。此外，同余关系与运算密切相关。如果一个代数结构中有多个运算，则需要考察等价关系对于所有这些运算是否都有代换性质。如果有，则说该代数结构存在同余关系；否则，同余关系不存在。

- 例6.4.1 给定$\langle Z, +, \times\rangle$，其中$Z$是整数集合，+和$\times$是一般加、乘法。假设$Z$中的关系$R$定义如下：
- i_1Ri_2：$|i_1|=|i_2|$ 其中i_1、$i_2\in Z$
- 试问，R为该结构的同余关系吗？
- 其中$|i_1|$表示i_1的绝对值.
- 相等关系是等价关系是明显的，只要证它满足代换性即可．即证对任意的$i_1,i_2,i_3,i_4\in Z$和$i_1Ri_2\wedge i_3Ri_4\Leftrightarrow |i_1|=|i_2| \wedge |i_3|=|i_4|$
- $\Rightarrow |i_1+i_3|=|i_2+i_4|$
- 对$i_1=1$, $i_2=1$, $i_3=3$, $i_4=-3$

- $|\,i_1+i_3\,|=4$
- $|\,i_2+i_4\,|=2$
- 即对+不满足代换性，即R不是$\langle Z,+,\times\rangle$的同余关系.

- 可见，考察一个等价关系*E*对于有多个运算的代数结构是否为同余关系，这里有个次序先后问题，选择得好，即你一下子就考察到了*E*对某个运算是不具有代换性质，那么立刻便可断定*E*不是该结构的同余关系，否则验证应继续下去，直至遇到不具有代换性质的运算为止。如果对于所有运算都有代换性质，则*E*为该结构的同余关系。在例**6.4.1**中，首先发现***R***对于+不具有代换性质，那么可断定***R***不是该结构的同余关系。如果你首先验证是***R***对于×的代换性质，结果***R***对于×有代换性质，至此你只是有希望*E*是同余关系，但还得继续工作，考察***R***对于+的代换性质，由此结果才能判定***R***是否为该结构的同余关系。

- 有了同余关系的概念后，现在可以给出它与同态映射的关系了，请看下面定理：
- 定理**6.4.1** 设$\langle S,\odot\rangle$与$\langle T,*\rangle$是同类型的且f为其同态映射。对应于f，定义关系E_f如下：
- xE_fy：$f(x)=f(y)$，　　其中$x,y\in S$
- 则E_f是$\langle S,\odot\rangle$中的同余关系，并且称E_f为由同态映射f所诱导的同余关系。
- 由于同态映射不惟一，根据定理**6.4.1**，可以推知同余关系也不惟一。

- 例**6.4.2** 设$\langle Z,{}' \rangle$与$\langle B,{}^{-} \rangle$是同类型的，其中**Z**是整数集合，***B* = {0，1}**，$'$ 和 $^{-}$定义如下：
- $\boldsymbol{i' = i + 1, i \in Z}$
- $\boldsymbol{\overline{b} = (b + 1)(\mathrm{mod}\ 2), b \in B}$
- 又设$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{Z} \rightarrow \boldsymbol{B}$：
- $\boldsymbol{f(i) = (i)(\mathrm{mod}\ 2)}$　　其中$\boldsymbol{i \in Z}$
- 试指出$\boldsymbol{f}$所诱导的同余关系。

- 解：f诱导的同余关系为E_f
- $iE_fj : f(i) = f(j)$即$i(\bmod 2) = j(\bmod 2)$
- 显然E_f是个 (自反、对称、可传递)，现在我们只要等价关系说明E_f满足代换性.
- 对任何$i, j \in Z$和iE_fj来推证$i'E_fj'$，即
  $i(\bmod 2) = j(\bmod 2) \Rightarrow (i+1)(\bmod 2) = (j+1)(\bmod 2)$
- 因为
  $$(i+1)(\bmod 2) = \big((i)(\bmod 2) + 1(\bmod 2)\big)(\bmod 2)$$
  $$(j+1)(\bmod 2) = \big((j)(\bmod 2) + 1(\bmod 2)\big)(\bmod 2)$$
- 于是$(i+1)(\bmod 2) = (j+1)(\bmod 2)$
- 即E_f是满足代换性的，从而证明了E_f是同余关系而且是由f所诱导的.

• 6.5 商代数

- 定义6.5.1 给定$\langle S,\odot\rangle$及其上的同余关系E，且由E对S所产生同余类构成一个商集S/E。若在S/E中定义运算*如下：

$$[x]_E * [y]_E = [x\odot y]_E$$

- 其中$[x]_E$，$[y]_E \in S/E$
- 于是$\langle S/E,*\rangle$构成了一个代数结构，则称$\langle S/E,*\rangle$为代数结构$\langle S,\odot\rangle$的商代数。
- 可以看出，给定一个代数结构，利用结构中的同余关系可以构造一个新的代数结构即商代数，两者有何联系，下面定理指明这一点。

- 定理6.5.1 给定$\langle S, \odot \rangle$及其上的商代数$\langle S/E, * \rangle$，则$\langle S, \odot \rangle \simeq \langle S/E, * \rangle$。
- 通常，称g_E为从S到S/E上的正则映射，并且称g_E为从$\langle S, \odot \rangle$到$\langle S/E, * \rangle$的与E相关的自然同态映射，简称自然同态。
- 此外，容易看出自然同态g_E是满同态映射，根据定理6.3.2可知，代数结构$\langle S, \odot \rangle$的各种性质在其商代数$\langle S/E, * \rangle$中都被保持了下来。

- 例6.5.1 给定$\langle N,+\rangle$，其中N是自然数集合，+是普通加法运算。
- 又知例6.3.1中$\langle Z_m,+_m\rangle$，并且在N中定义关系E:
- $n_1 E n_2$ ： $m|(n_1-n_2) \vee m|(n_2-n_1)$ ，其中m，n_1，$n_2 \in N$， $m|(n_1-n_2)$表示n_1-n_2可被m整除.
- 试证E为$\langle N,+\rangle$中的同余关系且给出与E相关的自然同态映射g_E。

- E为N中的等价关系是明显的.
- 只要证明E对+满足代换性即可.
- 设$n_1, n_2, n_3, n_4 \in N \wedge n_1 E n_2 \wedge n_3 E n_4$来证明$(n_1+n_3)E(n_2+n_4)$, 即由
  - $m|(n_1 - n_2)$和$m|(n_3 - n_4)$来证明有 $m|(n_1+n_3) - (n_2+n_4)$
- 而$(n_1+n_3) - (n_2+n_4) = (n_1 - n_2) + (n_3 - n_4)$
- 显然有$m|(n_1 - n_2) + (n_3 - n_4)$即
- $m|(n_1+n_3) - (n_2+n_4)$
- 问题得证.

- **定理6.5.2** 设 $\langle S,\odot\rangle \simeq \langle T,*\rangle$ 且f为其满同态映射，E_f为f所诱导的同余关系，g_{Ef}是从$\langle S,\odot\rangle$到$\left\langle S/E_f,☆\right\rangle$的与$E_f$相关的自然同态，则$\left\langle S/E_f,☆\right\rangle \cong \langle T,*\rangle$。

$$
\begin{tikzcd}
\langle S,\odot\rangle \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \langle T,*\rangle \arrow[dl, "\cong"] \\
& \left\langle S/E_f,☆\right\rangle &
\end{tikzcd}
$$

• 6.6 积代数

- 定义6.6.1 设$\langle S,\odot\rangle$与$\langle T,*\rangle$是同类型的，而$\langle S\times T,\otimes\rangle$成为新的代数结构，其中$S\times T$是集合$S$和集合$T$的笛卡儿积，且$\otimes$定义如下：
- $\langle s_1,t_1\rangle\otimes\langle s_2,t_2\rangle=\langle s_1\odot s_2,t_1*t_2\rangle$，其中$s_1$，$s_2\in S$，$t_1$，$t_2\in T$。
- 则称$\langle S\times T,\otimes\rangle$为代数结构$\langle S,\odot\rangle$和$\langle T,*\rangle$的积代数，而代数结构$\langle S,\odot\rangle$和$\langle T,*\rangle$称为$\langle S\times T,\otimes\rangle$的因子代数。

- 类似地可把积代数的定义推广到任何两个同类型的代数结构。另外，重复地使用定义中的方法，也可以定义任何有限数目的同类型代数结构的积代数。
- 可以看出，两个代数结构的积代数，与两个因子代数是同一类型的。而且还要注意到，在积代数的定义中，是用因子代数中的相应运算定义了积代数中的运算。

- 例6.6.1 给定$\langle Z_2, +_2\rangle$和$\langle Z_3, +_3\rangle$，其中Z_2={[0]，[1]}，Z_3={[0]，[1]，[2]}，表6.6.1和表6.6.2分别给出$+_2$和$+_3$的运算表，为简便记[i]为i。试求$\langle Z_2 \times Z_3, \otimes\rangle$。

表6.6.1

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

表6.6.2

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

总结

- 一般二元运算的一些性质。

1. 封闭性

定义 设 $*$ 是定义在集合A上的二元运算，如果对于任意的 $x, y \in A$，都有 $x * y \in A$，则称二元运算$*$在A上是封闭的。

- 例题1 设$A=\{x|x=2n，n \in N\}$，问乘法运算是否封闭?加法运算呢?
- 解：乘法运算是封闭的
  加法运算是封闭的

- **2 交换性**
  - 定义 设$*$是定义在集合$\boldsymbol{A}$上的二元运算，如果对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{A}$，都有$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}*\boldsymbol{x}$，则称该二元运算$*$是可交换的。
  - 例题2 设$\boldsymbol{Q}$是有理数集合，$\triangle$是$\boldsymbol{Q}$上的二元运算，对任意的$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{a}\triangle\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，问运算$\triangle$是否可交换。
  - 解: 因为$\boldsymbol{a}\triangle\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，所以运算$\triangle$是可交换的。

- **3 结合性**
  - 定义 设$*$是定义在集合***A***上的二元运算，如果对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{A}$，都有$(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})*\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}*(\boldsymbol{y}*\boldsymbol{z})$则称该二元运算$*$是可结合的。
  - 例题3 设***A***是一个非空集合，★是***A***上的二元运算，对于任意$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{A}$，有$\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$，证明★是可结合运算
  - 证明: 因为对于任意的$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{A}$

$$(a\bigstar b)\bigstar c=b\bigstar c=c$$

而 $$a\bigstar(b\bigstar c)=a\bigstar c=c$$

所以 $$(a\bigstar b)\bigstar c=a\bigstar(b\bigstar c)$$

总结

- **4 分配性**
  - 定义 设$*$，$\triangle$是定义在集合$\boldsymbol{A}$上的两个二元运算，如果对于任意的$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{A}$，都有

$$\boldsymbol{x}*(\boldsymbol{y}\triangle\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y})\triangle(\boldsymbol{x}*\boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{y}\triangle\boldsymbol{z})*\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{y}*\boldsymbol{x})\triangle(\boldsymbol{z}*\boldsymbol{x})$$

则称运算*对于运算△是可分配的。

- 例题4 设集合**$A=\{\alpha, \beta\}$**，在**A**上定义两个二元运算*和△如表6补.1所示。运算△对于运算*可分配吗? 运算*对于运算△呢?
- 解: 容易验证运算△对于运算*是可分配的。但是运算*对于运算△是不可分配的，因为

$$\beta*(\alpha\triangle\beta)=\beta*\alpha=\beta$$

而 $$(\beta*\alpha)\triangle(\beta*\beta)=\beta\triangle\alpha=\alpha$$

*	α	β
α	α	β
β	β	α

△	α	β
α	α	α
β	α	β

- **5 吸收性**
  - 定义 设$*$，$\triangle$是定义在集合A上的两个可交换二元运算，如果对于任意的$x, y \in A$，都有

$$x * (x \triangle y) = x$$
$$x \triangle (x * y) = x$$

则称运算$*$和运算$\triangle$满足吸收律。

- 例题5 设集合*N*为自然数全体，在*N*上定义两个二元运算$*$和★，对于任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{N}$，有

$$\boldsymbol{x}*\boldsymbol{y}=\max(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{x}\bigstar\boldsymbol{y}=\min(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$$

  验证运算$*$和★的吸收律。

- 解: 对于任意$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{a}*(\boldsymbol{a}\bigstar\boldsymbol{b})=\max(\boldsymbol{a},\ \min(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}))=\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\bigstar(\boldsymbol{a}*\boldsymbol{b})=\min(\boldsymbol{a},\ \max(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}))=\boldsymbol{a}$$

  因此，*和★满足吸收律。

总结

- 6 等幂性
  - 定义 设*是定义在集合A上的一个二元运算，如果对于任意的$x \in A$，都有$x * x = x$，则称运算*是等幂的。
  - 例题6 设$\rho(S)$是集合S的幂集，在$\rho(S)$上定义的两个二元运算，集合的“并”运算∪和集合的“交”运算∩，验证∪，∩是等幂的。
  - 解: 对于任意的$A \in \rho(S)$，有$A \cup A = A$和$A \cap A = A$，因此运算∪和∩都满足等幂律。

- **7 幺元**

定义 设$*$是定义在集合A上的一个二元运算，如果有一个元素$e_l \in A$，对于任意的元素$x \in A$都有$e_l * x = x$，则称e_l为A中关于运算$*$的左幺元；如果有一个元素$e_r \in A$，对于任意的元素$x \in A$都有$x * e_r = x$，则称e_r为A中关于运算$*$的右幺元；如果A中的一个元素e，它既是左幺元又是右幺元，则称e为A中关于运算$*$的幺元。显然，对于任意$x \in A$，有$e * x = x * e = x$。

- 例题7 设集合S＝{α，β，γ，δ}，在S上定义的两个二元运算*和★如表6补.2所示。试指出左幺元或右幺元。

表6补.2

*	α	β	γ	δ
α	δ	α	β	γ
β	α	β	γ	δ
γ	α	β	γ	γ
δ	α	β	γ	δ

★	α	β	γ	δ
α	α	β	δ	γ
β	β	α	γ	δ
γ	γ	δ	α	β
δ	δ	δ	β	γ

- 解：　由表6补.2可知β、δ都是S中关于运算*的左幺元，而α是S中关于运算★的右幺元。

- 定理 设*是定义在集合A上的一个二元运算，且在A中有关于运算*的左幺元e_l，和右幺元e_r，则$e_l = e_r = e$，且A中的幺元是唯一的。

证明 因为e_l和e_r分别是A中关于运算*的左幺元和右幺元，所以

$$e_l = e_l * e_r = e_r = e$$

设另有一幺元$e_l \in A$，则

$$e_l = e_l * e = e。$$

8 零元

定义 设*是定义在集合A上的一个二元运算，如果有一个元素$\theta_l \in A$，对于任意的元素$x \in A$都有$\theta_l * x = \theta_l$，则称θ_l为A中关于运算*的左零元；

如果有一个元素$\theta_r \in A$，对于任意的元素$x \in A$都有$x * \theta_r = \theta_r$，则称θ_r为A中关于运算*的右零元；

如果A中的一个元素θ，它既是左零元又是右零元，则称θ为A中关于运算*的零元。显然，对于任意$x \in A$，有

$$\theta * x = x * \theta = \theta$$

- 例题8 设集合S＝{浅色，深色}，定义在S上的一个二元运算*如表6补.3所示。
- 表6补.3

*	浅色	深色
浅色	浅色	深色
深色	深色	深色

- 试指出零元和幺元。

- 解 深色是S中关于运算*的零元，浅色是S中关于运算*的幺元。

- 定理6补.2 设*是定义在集合*A*上的一个二元运算，且在A中有关于运算*的左零元θ_l和右零元θ_r，那么，$\theta_l = \theta_r = \theta$，且*A*中的零元是唯一的。

  这个定理的证明与定理6补.1相仿。

- 定理 设$\langle A,*\rangle$是一个代数系统，且集合***A***中元素的个数大于1。如果该代数系统中存在幺元e和零元$\boldsymbol{\theta}$，则$\boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{e}$。
- 证明: 用反证法。设$\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{e}$，那么对于任意的$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$，必有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e} * \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta} * \boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{e}$$

于是，***A***中的所有元素都是相同的，这与***A***中含有多个元素相矛盾。

- 9 逆元
- 定义6补.9 设代数系统$\langle A,*\rangle$，这里*是定义在A上的一个二元运算，且e是A中关于运算*的幺元。
  - 如果对于A中的一个元素a存在着A中的某个元素b，使得$b * a = e$，那么称b为a的左逆元；
  - 如果$a * b = e$成立，那么称b为a的右逆元；
  - 如果一个元素b，它既是a的左逆元又是a的右逆元，那么就称b是a的一个逆元。

- 很明显，如果b是a的逆元，那么a也是b的逆元，简称为a与b互为逆元。今后，一个元素x的逆元记为x^{-1} 。

  一般地说，一个元素的左逆元不一定等于该元素的右逆元。而且，一个元素可以有左逆元而没有右逆元，甚至一个元素的左(右)逆元还可以不是唯一的。

总结

- 例题9 设集合S={α，β，γ，δ，ζ}，定义在S上的一个二元运算*如表6补.4所示。 试指出代数系统⟨S,*⟩中各个元素的左、右逆元情况。
- 表6补.4

*	α	β	γ	δ	ζ
α	α	β	γ	δ	ζ
β	β	δ	α	γ	δ
γ	γ	α	β	α	β
δ	δ	α	γ	δ	γ
ζ	ζ	δ	α	γ	ζ

- 解: α是幺元；
  - β的左逆元和右逆元都是γ；即β和γ互为逆元；
  - δ的左逆元是γ而右逆元是β；β有两个左逆元γ和δ；
  - ζ的右逆元是γ，但ζ没有左逆元。

- 定理：设代数系统$\langle A,*\rangle$，这里$*$是定义在**A**上的一个二元运算，***A***中存在幺元***e***，且每一个元素都有左逆元。如果*是可结合的运算，那么，这个代数系统中任何一个元素的左逆元必定也是该元素的右逆元，且每个元素的逆元是唯一的。

- 证明 设$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c} \in \boldsymbol{A}$，且$\boldsymbol{b}$是$\boldsymbol{a}$的左逆元，$\boldsymbol{c}$是$\boldsymbol{b}$的左逆元。因为

$$(\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

所以

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{c} * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} * ((\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a})) * \boldsymbol{b} = ((\boldsymbol{c} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{e} * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}$$

因此，$\boldsymbol{b}$也是$\boldsymbol{a}$的右逆元。

设元素$\boldsymbol{a}$有两个逆元$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$，那么

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} * (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{a}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}$$

因此，$\boldsymbol{a}$的逆元是唯一的。

- 例题10 试构造一个代数系统，使得其中只有一个元素具有逆元。
- 解： 设$\boldsymbol{m,n} \in \boldsymbol{I}$， $\boldsymbol{T}=\{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I},\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}\}$，那么，代数系统$\langle \boldsymbol{T}, \mathbf{max}\rangle$
  - 有一个幺元是$\boldsymbol{m}$
  - 只有$\boldsymbol{m}$有逆元因为$\boldsymbol{m}=\max(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})$。

- 例题11 对于代数系统$\langle \boldsymbol{R},\cdot\rangle$。这里$\boldsymbol{R}$是实数的全体，·是普通的乘去运算，是否每个元素都有逆元。
- 解: 该代数系统中的幺元是1，
  - 除了零元素0外，所有的元素都有逆元。

- 例题12 对于代数系统$\langle N_k, +_k \rangle$，这里$N_k = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$，$+_k$是定义在$N_k$上的模$k$加法运算，定义如下：
  对于任意x，$y \in N_k$

  $$x +_k y = (x + y) \bmod k$$

  试问是否每个元素都有逆元。
- 解:
  - N_k中关于运算$+_k$的幺元是0
  - 可以验证，$+_k$是一个可结合的二元运算
  - N_k中的每一个元素都有唯一的逆元，即0的逆元是0，每个非零元素x的逆元是k-x。

总结

- **可以指出：$\langle A,*\rangle$是一个代数系统，$*$是A上的一个二元运算，那么该运算的有些性质可以从运算表中直接看出。那就是：**
  1. 运算$*$具有封闭性，当且仅当运算表中的每个元素都属于A。
  2. 运算$*$具有可交换性，当且仅当运算表关于主对角线是对称的。
  3. 运算$*$具有等幂性，当且仅当运算表的主对角线上的每一元素与它所在行(列)的表头元素相同。
  4. A关于$*$有零元，当且仅当该元素所对应的行和列中的元素都与该元素相同。
  5. A中关于$*$有幺元，当且仅当该元素所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致。
  6. 设A中有幺元，a和b互逆，当且仅当位于a所在行，b所在列的元素以及b所在行，a所在列的元素都是幺元。

作业

- 151：14,15,16（246）