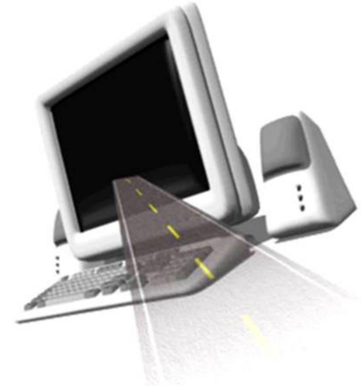
离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎



第9章
图的基本概念及其矩阵表示论

回顾

- 图的基本概念
- 子图和图的运算
- 路径、回路、连通性

9.4图的矩阵表示

邻接矩阵

定义： 设$G = \langle V, E, \psi \rangle$是一个简单有向图，其中的结点集合$V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，并且假定各结点已经有了从结点$v_1$到$v_n$的次序。试定义一个$n \times n$的矩阵$A$，使得其中的元素

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & 当\langle v_i, v_j \rangle \in E \\ 0 & 当\langle v_i, v_j \rangle \notin E \end{cases}$$

则称这样的矩阵A是图G的邻接矩阵。

邻接矩阵

图的邻接矩阵不具有唯一性。

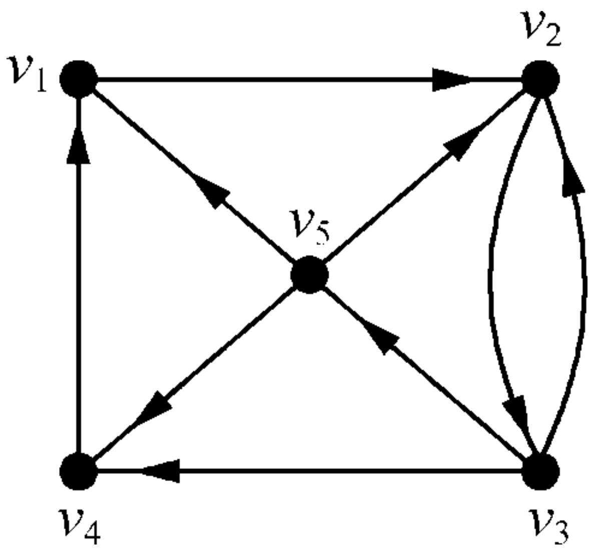
对于给定简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$来说，其邻接矩阵依赖于集合$V$中的各元素间的次序关系。

给定两个有向图和相对应的邻接矩阵，如果首先在一个图的邻接矩阵中交换一些行，而后交换相对应的各列，从而有一个图的邻接矩阵，能够求得另外一个图的邻接矩阵，则事实上这样的两个有向图，必定是互为同构的。

邻接矩阵

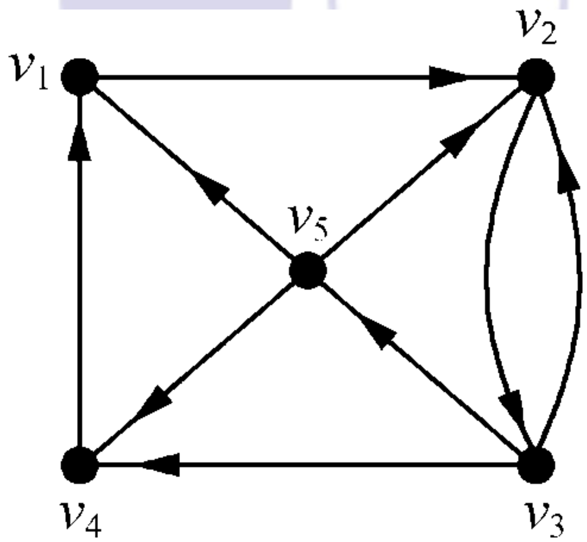
例：写出下图的邻接矩阵，并计算各个节点的出度和入度。

解：首先给各结点安排好一个次序，譬如说是 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 。得出邻接矩阵如下：



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵



上例中，如果重新把各结点排列成v_5, v_2, v_3, v_4, v_1，就能写出另外一个矩阵如下：

$$A' = \begin{array}{c} \\ v_5 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_5 & v_2 & v_3 & v_4 & v_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

如果首先交换第一行和第五行，而后交换第一列与第五列，那么就能够由邻接矩阵A'求得邻接矩阵A。

邻接矩阵

- 对于给定图G，显然不会因结点编序不同而使其结构会发生任何变化
  - 即图的结点所有不同编序实际上仍表示同一个图
  - 换句话说，这些结点的不同编序的图都是同构的，并且它们的$n!$个邻接矩阵都是相似的
- 今后将略去这种由于V中结点编序而引起邻接矩阵的任意性
  - 而取该图的任一个邻接矩阵作为该图的矩阵表示

邻接矩阵

由邻接矩阵判断有向图的性质：

- 如果有向图是自反的，则邻接矩阵的主对角线上的各元素，必定都是1。
- 如果有向图是反自反的，则邻接矩阵的主对角线上的各元素，必定都是0。
- 对于对称的有向图来说，其邻接矩阵也是对称的，也就说，对于所有的i和j而言，都应有$a_{ij}=a_{ji}$。
- 如果给定有向图是反对称的，则对于所有的i和j和$i\neq j$而言，$a_{ij}=1$ 蕴含$a_{ji}=0$。

邻接矩阵

- 可以把简单有向图的矩阵表示的概念，推广到简单无向图、多重边图和加权图。
  - 对于简单无向图来说，这种推广会给出一个对称的邻接矩阵
  - 在多重边图或加权图的情况下，可以令

$$a_{ij} = w_{ij}$$

其中的w_{ij}，或者是边$\langle v_i, v_j\rangle$的重数，或者是边$\langle v_i, v_j\rangle$的权。另外，若$\langle v_i, v_j\rangle \notin E$，则$w_{ij} = 0$。

- 在零图的邻接矩阵中，所有元素都应该是0，亦即其邻接矩阵是个零矩阵。

邻接矩阵

逆图的邻接矩阵：

如果给定的图$G = \langle V, E, \psi \rangle$是一个简单有向图，并且其邻接矩阵是$A$，则图$G$的逆图$G^{-1}$的邻接矩阵是$A$的转置$A^T$。

对于无向图或者对称的有向图来说，应有$A^T = A$。

$B = AA^T$在图上的意义

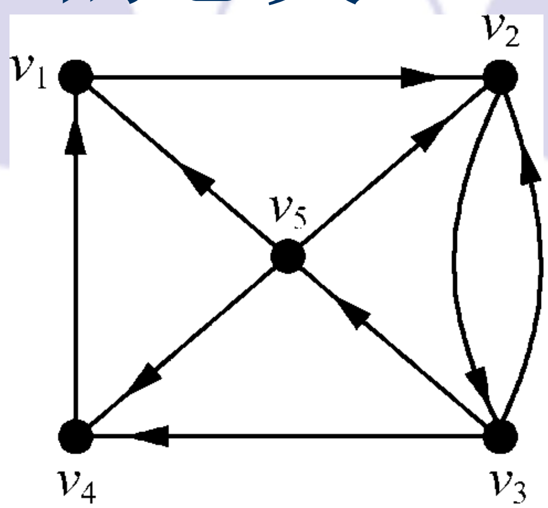
定义矩阵$B = AA^T$。设a_{ij}是邻接矩阵中的第i行和第j列上的(i,j)元素，b_{ij}是矩阵B中的第i行和第j列上的元素(i,j)。于是，对于$i,j = 1,2,3,\cdots,n$来说，有

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

- 如果边$\langle v_i, v_k\rangle \in E$，则有$a_{ik} = 1$，如果边$\langle v_j, v_k\rangle \in E$，则有$a_{jk} = 1$。
- 对于某一个确定的k来说，如果$\langle v_i, v_k\rangle$和$\langle v_j, v_k\rangle$都是给定图的边，则在表示b_{ij}的上述求和表达式中，应该引入基值1。
- 从结点v_i和v_j二者引出的边，如果能共同终止于一些结点的话，那么这样的一些结点的数目，就是元素b_{ij}的值。

$B=AA^T$在图上的意义

例：如图，求AA^T



解：

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^T=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

简单算法：

原矩阵A中，第i行和第j行相交，有几个1，AA^T的第i行第j列就是几。

矩阵的主对角线的元素对应了各个节点的出度。

$C = A^T A$在图上的意义

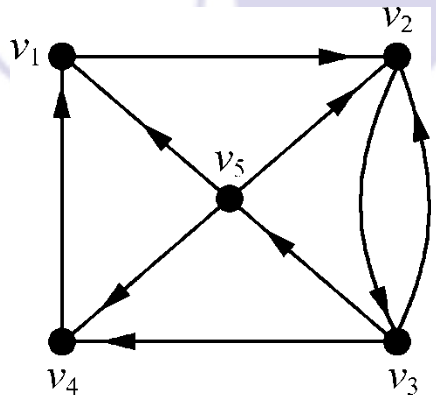
设a_{ij}是邻接矩阵A中的(i,j)元素；c_{ij}是矩阵C中的元素。于是，对于$i,j = 1,2,3,\cdots,n$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

- 对于某一个确定的k来说，如果$\langle v_k, v_i \rangle$，$\langle v_k, v_j \rangle$都是给定图的边，则在上式中应引入基值1。
- 可得从图中的一些点所引出的边，如果能够同时终止于结点v_i和v_j的话，那么这样的一些结点的数目，就是元素c_{ij}的值。

$C = A^T A$在图上的意义

例：如图，求$A^T A$



解：

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

简单算法：

原矩阵A中，第i列和第j列相交，有几个1，$A^T A$的第i行第j列就是几。

矩阵的主对角线的元素对应了各个节点的入度。

邻接矩阵的幂

- 对于$n=2,3,4,\cdots$来说，考察邻接矩阵A的幂A^n可知
  - 邻接矩阵A中的第i行和第j列上的元素值1，说明了图G中存在一条边$\langle v_i, v_j\rangle$，也就是说，存在一条从结点v_i到v_j长度为1的路径。
  - 定义矩阵A^2，使得A^2中的各元素a_{ij}^2为

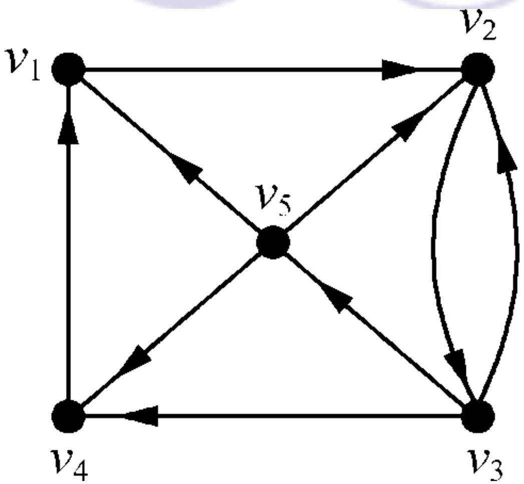
$$a_{ij}^2=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, a_{kj}$$

元素值a_{ij}^2等于从v_i到v_j长度为2的不同路径的数目。

  - 显然，矩阵A^2中主对角线上的元素a_{ii}^2的值，表示了结点 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$上长度为2的循环的个数。
  - 矩阵A^3中的元素值(i,j)依次类推。

邻接矩阵的幂

例：



$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},\qquad A^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&2&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=\begin{bmatrix}2&1&1&1&0\\1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\0&1&0&1&1\\2&2&2&2&1\end{bmatrix},\qquad A^5=\begin{bmatrix}1&3&1&1&1\\2&3&3&2&1\\3&6&3&4&3\\2&1&1&1&0\\3&5&2&3&2\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的幂

定理：设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是一简单有向图，并且$A$是$G$的邻接矩阵。对于$m=1,2,3,\cdots$来说，矩阵$A^m$中的元素$(i,j)$的值，等于从$v_i$到$v_j$长度为$m$的路径数目。

证：对于m进行归纳证明。当m=1时，由邻接矩阵的定义中能够得到A^m=A。

设矩阵A^l中的元素(i,j)值是a_{ij}^l，且对于m=l来说结论为真。

因为$A^{l+1}=A^lA$，所以应有

$$a_{ij}^{l+1}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^{l}\,a_{kj}$$

$a_{ik}^{l}a_{kj}$是从结点v_i出发，经过结点v_k到v_j的长度为l+1的各条路径的数目。

这里v_k是倒数第二个结点。因此，a_{ij}^{l+1}应是从结点v_i出发，经过任意的倒数第二个结点到v_j的长度为l+1的路径总数。

因此，对于m=l+1，定理成立。

邻接矩阵的幂

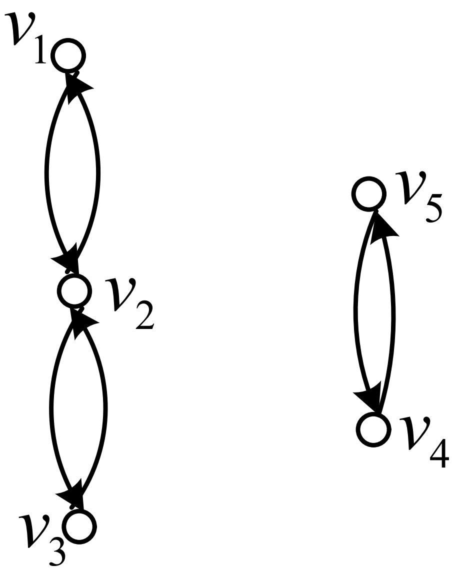
根据上述定理，可得出结论：

- 能使矩阵A^m中的元素(i,j)值是非零的最小正整数m，就是距离$d\langle v_i, v_j\rangle$。

- 对于$m = 1,2,\cdots n-1$和$i \neq j$来说，如果矩阵A^m中的(i,j)元素值和(j,i)元素值都为0，那么就不会有任何路径连通结点v_i和v_j。因此，结点v_i和v_j必定是属于图G的不同分图。

邻接矩阵的幂

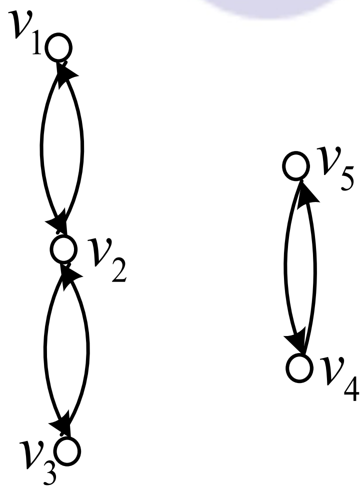
例：给定一个简单有向图$G=\langle V,E,\psi\rangle$，如下图所示，其中的结点集合$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$。试求出图$G$的邻接矩阵$A$和$A$的幂$A^2$，$A^3$，$A^4$。



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的幂

解：



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&2&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&4&0&0&0\\2&0&2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

可达性矩阵

- 给定一个简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$，并且设结点$v_i, v_j \in V$。
  - 可知，由图G的邻接矩阵A能够直接确定G中是否存在一条从v_i到v_j的边。
  - 设$r \in I_+$，由矩阵A^k能够求得从结点v_i到v_j长度为k的路径数目r。
- 试构成矩阵

$$B_k = A + A^2 + \cdots A^k$$

  - 矩阵B_k的(i,j)元素值表示了从结点v_i到v_j长度小于或等于k的路径数目r。
- 当图中的结点数目为n时，矩阵B_n都能够提供足够的信息，以表明从图中的任何结点到其它结点的可达性。

可达性矩阵

定义：给定一个简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$，其中$|V|=n$，并且假定$G$中的各结点是有序的。试定义一个$n \times n$的路径矩阵$P$，使得其元素为

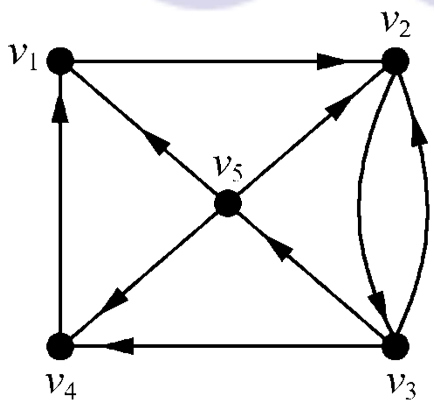
$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{至少存在一条路径} \\ 0 & \text{如果从}v_i\text{到}v_j\text{不存在任何路径} \end{cases}$$

路径矩阵P仅表明了图中的任何结点偶对之间是否至少存在一条路径，以及在任何结点上存在循环与否；

路径矩阵P并不能指明存在的所有路径。

可达性矩阵

例：试构成下列有向图的路径矩阵P。



解：设邻接矩阵$A=A^1$。在前面的例中，已经求出过矩阵的幂A^2，A^3和A^4, A^5。求出矩阵B_5和路径矩阵P如下：

$$B_5 = A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 9 & 14 & 8 & 9 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 11 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

可达性矩阵

注意：

对于具有n个结点的图而言，长度为n的路径不可能是基本路径。

假定图中的每一个结点，从它本身出发总是可达的，由矩阵B_{n-1}构成路径矩阵P，或由矩阵B_n构成路径矩阵P，这两种方法都可以采纳。

布尔矩阵

定义：元素或为0或为1的任何矩阵，都称为<u>比特矩阵</u>或<u>布尔矩阵</u>。

- 邻接矩阵也是布尔矩阵
  - 第i行上值为1的元素的个数，等于结点v_i的出度；
  - 第j列上值为1的元素的个数，等于结点v_j的入度。

可达性矩阵

首先构成矩阵$A, A^2, \ldots, A^n$，而后由他们构成矩阵B_n，再由矩阵B_n构成路径矩阵P，太麻烦了。

为了减少计算工作量，应该设法使得不产生这些不必要的信息。

生成路径矩阵$\boldsymbol{P}$的简单方法：布尔矩阵法。

布尔和和布尔积：

对于两个$n \times n$的布尔矩阵A和B，A和B的布尔和是$A \vee B$，A和B的布尔积是$A \wedge B$，并分别称为矩阵C和D，它们也都是布尔矩阵。

把布尔和矩阵$C = A \vee B$的元素定义成

$$c_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$$

布尔积矩阵$D = A \wedge B$的元素定义成

$$d_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

可达性矩阵

邻接矩阵A是个布尔矩阵。路径矩阵P也是个布尔矩阵。对于$r = 2,3,\ldots$来说，令

$$A \wedge A = A^{(2)}$$

$$A^{(r-1)} \wedge A = A^{(r)}$$

于是，可以把路径矩阵P表示成

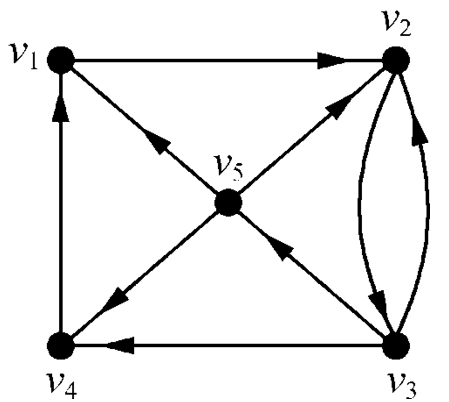
$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots \vee A^{(n)} = \bigvee_{k=1}^{n} A^{(k)}$$

注意：

- $A^{(m)}$表示布尔矩阵，如果从v_i到v_j有长度为m的路径的话，$A^{(m)}$矩阵中(i,j)元素为1；
- A^m中(i,j)元素表示从v_i到v_j的长度为m的路径的个数。

可达性矩阵

例：对于下述的有向图来说，试求出矩阵$A^{(2)}$,$A^{(3)}$,$A^{(4)}$),$A^{(5)}$和P。



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&0&0&0&0\\1&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\end{bmatrix},\quad A^{(3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&1&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{(4)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\0&1&0&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix},\quad A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$P=A\vee A^{(2)}\vee A^{(3)}\vee A^{(4)}\vee A^{(5)}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

可达性矩阵

- 可以用不同的方法解释矩阵$A, A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$。
- 在简单有向图$G = \langle V, E, \psi \rangle$中，应有$E \subseteq V \times V$，因此可以把集合$E$看成是$V$中的二元关系。
- 邻接矩阵A是关系E的关系矩阵。
- 在第四章中，曾经把合成关系$\boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^2$定义成这样一种关系：如果存在一个结点$\boldsymbol{v}_k$，能使$\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{E} \boldsymbol{v}_k$和$\boldsymbol{v}_k \boldsymbol{E} \boldsymbol{v}_j$，则必有$\boldsymbol{v}_i \boldsymbol{E}^2 \boldsymbol{v}_j$。
- 换句话说，从v_i到v_j如果至少存在一条长度为2的路径的话，那么E^2的关系矩阵中的(i,j)元素值是1。这就说明了，矩阵$A^{(2)}$是关系E^2的关系矩阵。
- 与此类似，$A^{(3)}$是V中的关系 $\boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} \circ \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^3$ 的关系矩阵，类推。

可达性矩阵

- 设E_1和E_2是V中的两种关系，并且A_1和A_2分别是E_1和E_2的关系矩阵。
- 于是，关系$E_1 \cup E_2$和$E_1 \circ E_2$的关系矩阵分别是$A_1 \vee A_2$和$A_1 \wedge A_2$。

闭包

对于集合V中的关系E来说，E的可传递闭包E^+应是

$$E^+ = E \cup E^2 \cup E^3 \cup \cdots$$

可传递闭包E^+的关系矩阵A^+应为：

$$A^+ = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots$$

式中的A是关系E的关系矩阵。

如果$|V|=n$，则图中的基本路径或基本循环的长度不会超过n。因此

$$A^+ = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee \cdots \vee A^{(n)} = P$$

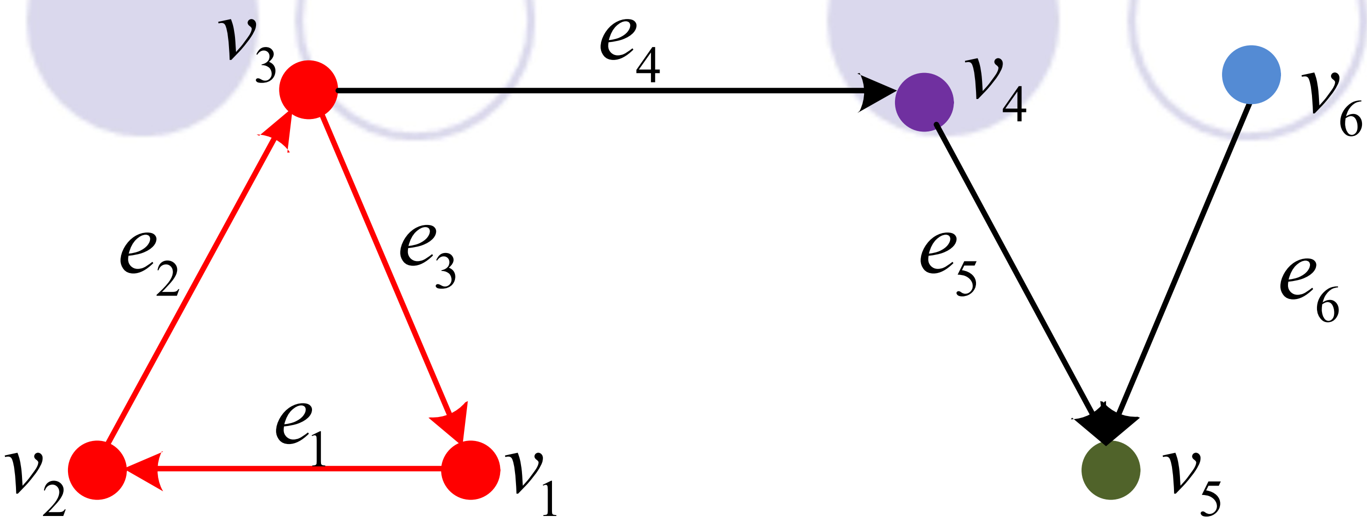
可见，矩阵A^+与路径矩阵P相同。

计算关系的可传递闭包等同于计算对应关系图的路径矩阵。

可达性矩阵判断强分图

- 由路径矩阵P可以求得含有给定图的任何特定结点的强分支。
- 设$G=\langle V,E,\psi\rangle$是一个简单有向图，并且$G\neq\Phi$。$P$是图$G$的路径矩阵，$P^T$是矩阵$P$的转置。
  - 设矩阵P中的(i,j)元素为p_{ij}，而矩阵P^T中的(i,j)元素为$p_{ij}{}^T$。
  - 试定义一个矩阵$P\wedge P^T$，使得它的(i,j)元素为$p_{ij}p_{ij}^T$。于是，矩阵$P\wedge P^T$中的第i行，就确定了含有结点v_i的强分支。

可达性矩阵判断强分图



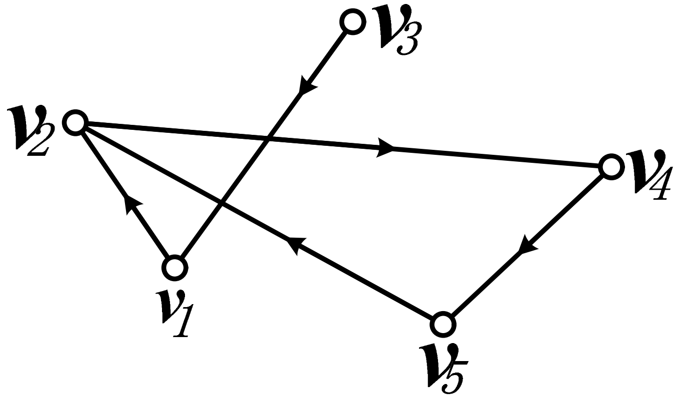
$$P=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1&1\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{P}\wedge\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\end{bmatrix}$$

可达性矩阵判断递归过程

- 利用简单有向图的可达矩阵，能够确定某过程是否为递归的。
- 假设$V_{Prg}=\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$是程序$Prg$中的过程集合，做有向图$G=<V_{Prg}, E>$，其中$p_i \in V_{Prg}$，$i=1, 2, \ldots, n$；$<p_i, p_j> \in E$ *iff* p_i调用p_j。
- 如果图G中有包含p_i的回路，则断言p_i是递归的。
- 为此，由图G的邻接矩阵$A=(a_{ij})$计算出关系矩阵$A^+=(a_{ij}^+)$。如果A^+中的主对角线上的某元素$a_{ii}^+ = 1$，则p_i是递归的

可达性矩阵判断递归过程

例如，已知程序*Prg*中的过程集合$V_{Prg}=\{p_1,p_2,p_3,p_4,p_5\}$，其过程的调用关系可表成下图所示的有向图，该图的邻接矩阵*A*为：



$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

可达性矩阵判断递归过程

于是可求得$\boldsymbol{A}^{+}$:

$$A^{+}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

由此可知，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_4$和$\boldsymbol{p}_5$是递归的。

关联矩阵

- 定义：设G=(V,E)是一个无环的、至少有一个有向边的有向图，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$。

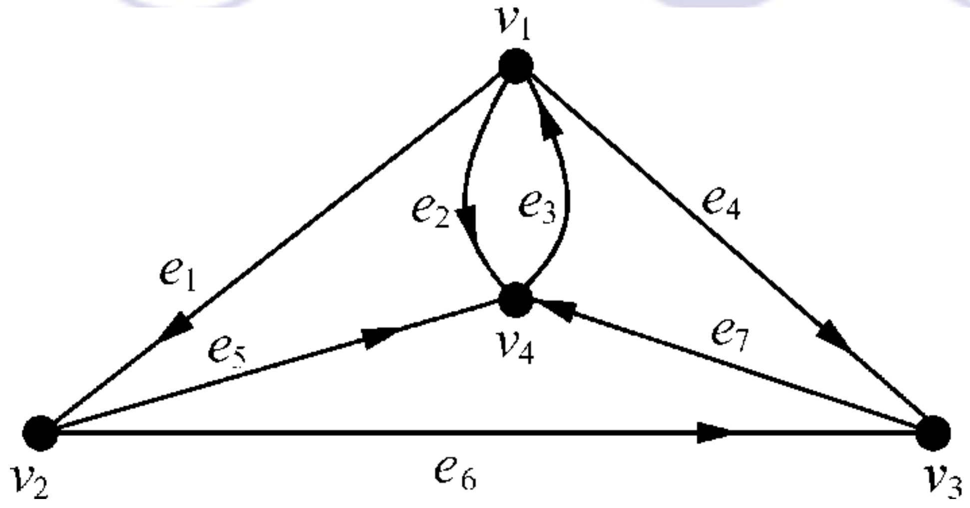
  构造$n\times m$的矩阵M，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的出边}\\ -1 & \text{当}e_j\text{是}v_i\text{的入边}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

  则称矩阵M是图G的关联矩阵

关联矩阵

例，求下图所示的有向图的关联矩阵。



$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \end{array}$$

$$M = \begin{array}{c|ccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ v_4 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}_{4\times 7}$$

关联矩阵

- 同邻接矩阵一样，关联矩阵也给出了一个图的全部信息。从定义不难发现：

① 第i行中$(1 \le i \le n)$，1的个数是v_i的出度，-1的个数是v_i的入度

② 矩阵中每一列都有且仅有一个1和一个-1

③ 若矩阵中有全零元素行，则图有孤立点

④ 若有向图G的结点和边在一种编号(定序)下的关联矩阵是M_1，在另一种编号下的关联矩阵是M_2，则必存在置换阵P和Q，使$M_1 = PM_2Q$

习题

- **27，29，31，32**