

2022 级工科数学分析基础 1 试题与答案

一. 单选题 (共 13 题 52 分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((\cos x)^{\frac{1}{x^2}} + \frac{\tan x - x}{x^3} \right) = (\quad)$

A、 $e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}$. B、 $e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$. C、 $e^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}$. D、 $e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 ()

A、 $f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{3}$. B、 $f'(0) = 0, f''(0) = -\frac{1}{6}$.

C、 $f'(0) = 1, f''(0) = \frac{1}{3}$. D、 $f'(0) = 1, f''(0) = \frac{1}{6}$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^5 \sin \frac{1}{x}}{e^x + \ln(1+x^3)} = (\quad)$

A、 0. B、 1. C、 4. D、 ∞ .

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - ax - bx^2}{x^3} = \frac{1}{3}$, 则 ()

A、 $a=1, b=-\frac{1}{2}$. B、 $a=1, b=\frac{1}{2}$.

C、 $a=-1, b=\frac{1}{2}$. D、 $a=-1, b=-\frac{1}{2}$.

5. 设 $f(x) = (x^2 - 1) \arctan \frac{1+2x^2}{1+x+x^2}$, 则 $f'(1) = (\quad)$

A、 $\frac{\pi}{2}$. B、 $\frac{\pi}{3}$. C、 $\frac{\pi}{4}$. D、 $\frac{\pi}{6}$.

6. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt + \sin^8 x$, 则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = (\quad)$

A、 $\frac{5\pi}{32}$. B、 $\frac{\pi}{8}$. C、 $\frac{5}{16}$. D、 $\frac{5}{32}$.

7. 设 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$, 则 ()

A、 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6t+5)(1+t)}{t}$. B、 $\frac{d^2y}{dx^2} = 6t+5$.

C、 $\frac{d^2y}{dx^2} = (6t+2)(1+t)^2$. D、 $\frac{d^2y}{dx^2} = -(6t+2)(1+t)^2$.

8. 设 D 是由曲线 $y=x^2$ 和直线 $y=1$ 所围成的平面图形, 则 D 绕直线 $y=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积 $V=(\quad)$

A、 $\frac{16\pi}{15}$. B、 $\frac{4\pi}{3}$. C、 $\frac{2\pi}{5}$. D、 $\frac{8\pi}{15}$.

9. 在以下命题中, 错误的是 ()

A、 函数 $\sin^{2022} x$ 的所有原函数都是周期函数, 并且也以 π 为周期.

B、 函数 $\frac{\cos x}{1+x^2}$ 有且仅有一个原函数是奇函数.

C、 函数 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的所有原函数都是偶函数.

D、 函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上可积, 但是在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2} + \frac{\sqrt{n^2-2^2}}{n^2} + \cdots + \frac{\sqrt{n^2-n^2}}{n^2} \right) = (\quad)$

A、 $\frac{\pi}{4}$. B、 $\frac{1}{2} \ln 2$. C、 0. D、 1.

11. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{(x-1)^2} = 1$, 则 ()

A、 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

B、 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点.

C、 $(1, f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D、 其它选项均不对.

12. 曲线 $y = \frac{x^3 e^{\frac{1}{x^2}}}{(x-1)^2}$ 的渐近线的条数为()

A、 3. B、 2. C、 1. D、 4.

13. 在以下反常积分中，发散的是()

A、 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$. B、 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$. C、 $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$. D、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

二. 计算题 (共 2 题 22 分)

1. (10 分) 设函数 $g(x)$ 连续，且 $g(x) > 0$ ， $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)g(t^2)dt$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间； (2) 求 $f(x)$ 的极小值.

解 $f(x) = x^2 \int_1^{x^2} g(t^2) dt - \int_1^{x^2} t \cdot g(t^2) dt$, —— 1 分

$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} g(t^2) dt + x^2 \cdot g(x^4) \cdot 2x - x^2 \cdot g(x^4) \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} g(t^2) dt$, —— 3 分

令 $f'(x) = 0$ ，解得驻点 $-1, 0, 1$. —— 4 分

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow	极大值	\searrow	极小值	\nearrow

—— 8 分

(1) $f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ ；单调增加区间为 $[-1, 0]$ 和 $[1, +\infty)$.

(2) 极小值为 $f(-1) = f(1) = 0$. —— 10 分

2. (12 分) 设函数 $g(x)$ 有一阶连续导数, $g(0)=1$, $g'(0)=2$, $g''(0)=3$, 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

解 (1) $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{x(g'(x) + \sin x) - (g(x) - \cos x)}{x^2}$;

—— 2 分

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x) - \cos x}{x} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x - 2x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + \sin x - 2}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - 2}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(0)}{x} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} (g''(0) + 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

—— 6 分

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - g(x) + x \sin x + \cos x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg'(x) - xg'(0)}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 2x - 1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \\ &= g''(0) - \frac{1}{2} g''(0) + 1 - \frac{1}{2} = 2 = f'(0), \end{aligned}$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

—— 12 分

三. 论述题 (共 3 题 26 分)

1. (10 分) 设 $a_1 = \sqrt{6}$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ ($n=1, 2, \dots$).

证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限.

证明 用数学归纳法证明数列 $\{a_n\}$ 的单调性和有界性:

单调性 $a_2 = \sqrt{6+6} > \sqrt{6} = a_1$. 若 $a_k > a_{k-1}$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} > \sqrt{6+a_{k-1}} = a_k$.

所以数列 $\{a_n\}$ 单调增加.

—— 4 分

有界性 $a_1 = \sqrt{6} < 3$. 若 $a_k < 3$, 则 $a_{k+1} = \sqrt{6+a_k} < \sqrt{6+3} = 3$. 所以数列 $\{a_n\}$ 有上界.

—— 8 分

综上, 由单调有界原理知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $A = \sqrt{6+A}$, 解方程 $A^2 = 6+A$, 得 $A=3$ 或 $A=-2$ (舍去), 所以

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

—— 10 分

2. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数,

证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

证明 $f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\xi_x)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$, —— 2 分

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 0 + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx. \quad \text{—— 4 分}$$

设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$\frac{m}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq \frac{M}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx,$$

$$\frac{(b-a)^3}{24} m \leq \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \leq \frac{(b-a)^3}{24} M,$$

存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $\int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$, —— 7 分

从而有 $\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$. —— 8 分

证法 2

设 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则 $g'(x) = f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有三阶连续导数.

$$g(x) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2!} g''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{g'''(\xi_x)}{3!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3$$

—— 2 分

分别令 $x = a$ 和 $x = b$, 则有

$$0 = g(a) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) - g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2!} g''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \frac{g'''(\xi_1)}{3!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

$$\int_a^b f(x) dx = g(b) = g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{1}{2!} g''\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{g'''(\xi_2)}{3!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^3$$

两式相减, 注意到 $g'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a) + \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \frac{(b-a)^3}{24}$$

—— 5 分

设 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 M , 最小值为 m , 则

$$m \leq \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} \leq M$$

由介值定理, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}$,

—— 7 分

从而有 $\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$.

—— 8 分

3. (8 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f''(x) \geq 0$.

证明: $\int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx \geq 0$.

证明 证法 1

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx &= \int_0^{2\pi} f(x) d \sin x = (\sin x \cdot f(x))_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \cdot f'(x) dx && \text{—— 2 分} \\ &= \int_0^{2\pi} f'(x) d \cos x = (\cos x \cdot f'(x))_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x \cdot f''(x) dx && \text{—— 4 分} \\ &= (f'(2\pi) - f'(0)) - \int_0^{2\pi} \cos x \cdot f''(x) dx && \text{—— 5 分} \\ &= \int_0^{2\pi} f''(x) dx - \int_0^{2\pi} \cos x \cdot f''(x) dx && \text{—— 7 分} \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \cdot f''(x) dx \geq 0. && \text{—— 8 分} \end{aligned}$$

证法 2

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cdot \cos x dx &= \int_0^{2\pi} f(x) d \sin x = (\sin x \cdot f(x))_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin x \cdot f'(x) dx && \text{—— 2 分} \\ &= -\int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \cdot f'(x) dx && (\text{第二个积分做换元: } x = \pi + t) \\ &= -\int_0^{\pi} \sin x \cdot f'(x) dx - \int_0^{\pi} (-\sin t) \cdot f'(\pi + t) dt && \text{—— 5 分} \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \cdot (f'(\pi + x) - f'(x)) dx = \int_0^{\pi} \sin x \cdot f''(\xi_x) \pi dx \geq 0. && \text{—— 8 分} \end{aligned}$$