



离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授

办公室： 综合楼405, Tel: 62274392
实验室： 综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ: 1062258606



离散数学

第一章 命题逻辑

回顾

- 命题变元
- 合式公式
- 重言式—永真式
- 矛盾式—永假式
- 永真蕴含式
- 代入规则
- 替换规则
- 常用逻辑恒等式 (**30**)
- 常用永真蕴含式 (**16**)

1.5对偶原理

- 定义:

设有公式 A , 其中仅含有逻辑联结词 \neg, \wedge, \vee 和逻辑常值 T 和 F 。在 A 中将 \wedge, \vee, T, F 分别换以 \vee, \wedge, F, T , 得公式 A^* , 则称 A^* 为 A 的对偶式。

- 注意:求对偶式并不要求将“非”变原, 而且对偶式是相互的。

- 举例:

- 求 $\neg P \vee (Q \vee R)$ 的对偶式

$$\neg P \wedge (Q \wedge R)$$

- 求 $P \vee F$ 的对偶式 $P \wedge T$

对偶原理

- 定理**1.5-1** :

设 A 和 A^* 互为对偶式, P_1, P_2, \dots, P_n 是出现于 A 和 A^* 中的所有命题变元, 于是有:

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \quad (1)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad (2)$$

- 证明:

- 由德·摩根律

$$P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$$

- 可知, 对公式 A 求否定, 直到 \neg 深入到命题变元之前位置, 在这个过程中, 所有的 \vee 变 \wedge , \wedge 变 \vee , T 变 F , F 变 T 。得证(1)。

对偶原理

- 定理**1.5-2**:

若 $A \Leftrightarrow B$, 且 A 、 B 为命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 及联结词 \wedge, \vee, \neg 构成的公式, 则 $A^* \Leftrightarrow B^*$.

- 证明:

- $A \Leftrightarrow B$ 意味着 $A(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 永真

- 于是有 $\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 永真

- 由定理**1.5-1**知, 下式也永真

$$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

- 利用带入规则, 以 $\neg P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 取代 P_i , 得永真

$$A^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

$$A^* \Leftrightarrow B^*$$

对偶原理

例：若 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ ，试证明
 $(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

证明：设 $A = (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$
 $B = \neg P \vee Q$

则 $A^* = (P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q))$
 $B^* = \neg P \wedge Q$

由于， $A \Leftrightarrow B$

因此， $A^* \Leftrightarrow B^*$

对偶原理

- 试证明: (1) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow T$
(2) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$

证明: $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \vee Q) \quad E_{27}$$

$$\Leftrightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \vee Q) \quad E_{26}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \vee (\neg P \vee Q) \quad E_{11}, E_{12}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)) \quad E_8$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q \vee \neg P \vee Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \vee T) \wedge (Q \vee T) \quad E_{17}, E_{19}$$

$$\Leftrightarrow T \wedge T \quad E_{17}, E_{19}$$

$$\Leftrightarrow T \quad E_{16}$$

对偶原理

- 试证明: (1) $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow T$
(2) $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$

证明: $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg P \wedge Q) \quad E_{26}$$

由 $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \vee (\neg P \vee Q) \quad E_{11}, E_{12}$$

知 $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$ 和 $(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$ 互为对偶式

由于 T 的对偶式是 F , 因此由定理 1.5-1 知

$$(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$$

对偶原理

- 定理**1.5-3**:

若 $A \Rightarrow B$, 且 A 、 B 为命题变元 P_1, P_2, \dots, P_n 及联结词 \wedge, \vee, \neg 构成的公式, 则 $B^* \Rightarrow A^*$.

- 证明:

- $A \Rightarrow B$ 意味着 $A(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow B(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 永真
- 由逆反律得 $\neg B(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow \neg A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 永真
- 根据定理1.5-1
- $B^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n) \rightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$ 永真
- 利用带入规则, 以 $\neg P_i (i=1, 2, \dots, n)$ 取代 P_i , 得
- $B^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow A^*(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 永真
- 即 $B^* \Rightarrow A^*$

1. 6范式 and 判定问题

公式的标准形式——范式

用来在有限步内判定公式永真、永假、可满足的

析取范式和合取范式

- 定义:

- 若一个命题公式是一些命题变元及其否定的积, 则称之为基本积; 若这个命题公式是一些变元及其否定之和, 称为基本和。

基本积: $P, Q, \neg P, \neg Q, \neg P \wedge Q, P \wedge Q, \neg P \wedge P, \neg Q \wedge P \wedge Q$

基本和: $P, \neg P, Q, \neg Q, P \vee \neg Q, P \vee Q, \neg P \vee P$

- 一个由基本积的和组成的公式, 如果与给定的公式**A**等价, 则称它是**A**的析取范式。

析取范式: $P, Q, \neg P, \neg Q, \neg P \wedge Q, (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

- 一个由基本和的积组成的公式, 如果与给定的命题公式**A**等价, 则称它是**A**的合取范式。

合取范式: $P, \neg P, Q, \neg Q, P \vee \neg Q, (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee P)$

析取范式和合取范式

- 定理**1.6-1**: 一个基本积是永假式, 当且仅当它含有 $P, \neg P$ 形式的两个因子。
- 证明:
 - (充分性) 由于 $P \wedge \neg P$ 是永假式, 而 $Q \wedge F \Leftrightarrow F$, 所以含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子时基本积是永假式。
 - (必要性) 用反证法。设基本积为假但不含 P 和 $\neg P$ 形式的因子, 于是给这个基本积中的命题变元指派真值 **T**, 给带有否定的命题变元指派真值 **F**, 得基本积的真值是 **T**, 与假设矛盾。证毕。

析取范式和合取范式

- 定理**1.6-2**：一个基本和是永真式，当且仅当它含有 $P, \neg P$ 形式的两个因子。

析取范式和合取范式

例：求命题公式 $P \wedge (Q \rightarrow R)$ 的析取范式

解： $P \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee R)$

/*这是一个合取范式*/

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$

/*使用与对或的分配律，化成析取范式*/

析取范式与合取范式

例：求命题公式 $(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$ 的合取范式

解： $(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \vee (\neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q))$$

/*消 \leftrightarrow */

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \vee ((P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge \neg Q))$$

/*消 \rightarrow 并且否定深入到单个变元前*/

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \quad /*析取范式*/$$

$$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \vee P) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

/*使用或对与的分配律及补余律，现在是合取范式的形式*/

析取范式和合取范式

例：求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的析取范式。

解： $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q) \vee \neg(\neg(P \vee Q)) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$

$$\Leftrightarrow F \vee (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee Q \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow F \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee F$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

析取范式和合取范式

例：求 $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ 的合取范式。

解：令 $A \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$ ，那么

$$\neg A \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))))$$

$$\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)))$$

$$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$$

$$\text{由于 } A \Leftrightarrow \neg\neg A = \neg(\neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q)$$

$$\text{所以 } A \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

主析取范式

- 定义**1.6-4**: 在含 **n** 个变元的基本积中, 若每个变元与其否定不同时存在, 而二者之一必出现且仅出现一次, 则称这种基本积为极小项。
- 例:
 - 两个命题变元 **P** 、 **Q** 的极小项为
$$P \wedge Q, P \wedge \neg Q, \neg P \wedge Q, \neg P \wedge \neg Q$$
- **n** 个变元, 极小项个数 **2^n**

主析取范式

- 假定有 ***P***、***Q***、***R*** 三个变元

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	—000	0	m_0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	—001	1	m_1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	—010	2	m_2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	—011	3	m_3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	—100	4	m_4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	—101	5	m_5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	—110	6	m_6
$P \wedge Q \wedge R$	—111	7	m_7

主析取范式

- 每个极小项只有一个真值指派使其为T
- 任何两个极小项的合取必为假（因为在 2^n 种真值指派中，只有一个极小项取值为真）
- 所有极小项的析取必为真

主析取范式

- 定义**1.6-5**: 一个由极小项的和组成的公式, 如果与命题公式 **A** 等价, 则称它是公式 **A** 的**主析取范式**。
- 对任何命题公式(永假式除外)都可求得与其等价的主析取范式, 而且主析取范式的形式唯一。

主析取范式

- 求主析取范式的方法：
 - 先化成与其等价的析取范式；
 - 若析取范式的基本积中同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次；
 - 去掉析取范式中所有为永假式的基本积，即去掉基本积中含有形如 $P \wedge \neg P$ 的子公式的那些基本积；
 - 若析取范式中缺少某一命题变元如 P ，则可用公式 $(P \vee \neg P) \wedge Q \Leftrightarrow Q$ 将命题变元 P 补充进去，并利用分配律展开，然后合并相同的基本积

主析取范式

$$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$\vee (\neg P \wedge R) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1$$

$$\Leftrightarrow \Sigma(1, 3, 5, 6, 7)$$

主析取范式

- 主析取范式 and 真值表的关系:
- 右图 of $A = P \wedge Q \vee R$ 对应的真值表:

P	Q	R	极小项	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
0	0	1	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	1
0	1	0	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0
0	1	1	$\neg P \wedge Q \wedge R$	1
1	0	0	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
1	0	1	$P \wedge \neg Q \wedge R$	1
1	1	0	$P \wedge Q \wedge \neg R$	1
1	1	1	$P \wedge Q \wedge R$	1

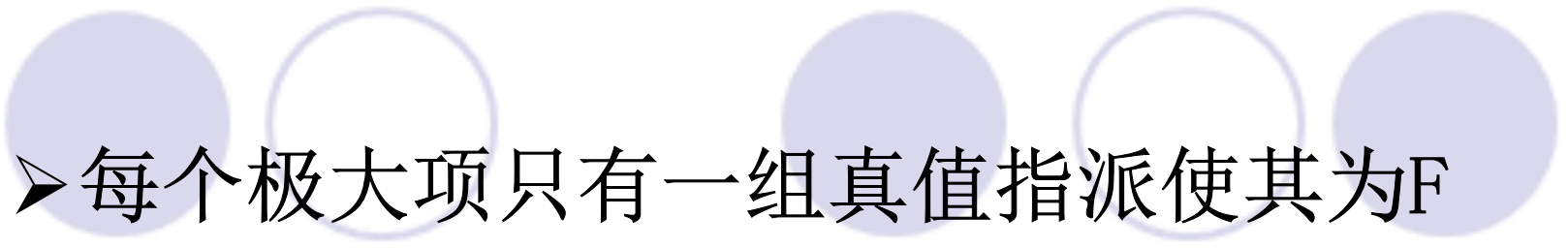
主合取范式

- 定义**1.6-6**: 在含 **n** 个变元的基本和中, 若每个变元与其否定不同时存在, 而二者之一必出现且仅出现一次, 则称这种基本和为极大项。
- 例:
 - 两个命题变元 **P** 、 **Q** 的极大项为
$$P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee Q, \neg P \vee \neg Q$$
- **n** 个变元, 极大项个数 **2^n**

主合取范式

- 假定有 ***P***、***Q***、***R*** 三个变元

$P \vee Q \vee R$	—000	0	M_0
$P \vee Q \vee \neg R$	—001	1	M_1
$P \vee \neg Q \vee R$	—010	2	M_2
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	—011	3	M_3
$\neg P \vee Q \vee R$	—100	4	M_4
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	—101	5	M_5
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	—110	6	M_6
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	—111	7	M_7

- 
- 每个极大项只有一组真值指派使其为F
 - 任何两个极大项的析取必为真（因为在 2^n 种真值指派中，只有一个极大项取值为假）
 - 所有极大项的合取必为假。

主合取范式

- 定义**1.6-7**: 一个由极大项的积组成的公式, 如果与命题公式 **A** 等价, 则称它是公式 **A** 的**主合取范式**。
- 对任何命题公式(永真式除外)都可求得与其等价的主合取范式, 而且主合取范式的形式唯一。

主合取范式

$$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((Q \vee R) \vee (P \wedge \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \\ \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4$$

$$\Leftrightarrow \Pi(0, 2, 4)$$

主合取范式

- 主合取范式和真值表的关系:
- 右图为 $A = P \wedge Q \vee R$ 对应的真值表:



与极小项联系?

P	Q	R	极大项	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	$P \vee Q \vee R$	0
0	0	1	$P \vee Q \vee \neg R$	1
0	1	0	$P \vee \neg Q \vee R$	0
0	1	1	$P \vee \neg Q \vee \neg R$	1
1	0	0	$\neg P \vee Q \vee R$	0
1	0	1	$\neg P \vee Q \vee \neg R$	1
1	1	0	$\neg P \vee \neg Q \vee R$	1
1	1	1	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	1

极小项和极大项的关系

- 极小项 m_i 和极大项 M_i 有下列的关系：

$$M_i \Leftrightarrow \neg m_i$$

$$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$$

由合取（析取）范式求主析取（合取）范式

- 二者可以互相转化
- 已知公式**A**的主合取范式为：

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

- 求主析取范式。
- 解：
 - **A**的主合取范式为 **$M_1 \wedge M_3$** ，可知**A**的主析取范式为 $\sum(0, 2, 4, 5, 6, 7)$
 - 于是可直接写出**A**的主析取范式

$$\begin{aligned} &(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \\ &\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \end{aligned}$$

主析取范式 and 主合取范式

- 一个命题公式是永真式，它的命题变元的所有极小项均出现在其主析取范式中，不存在与其等价的主合取范式；
- 一个命题公式是永假式，它的命题变元的所有极大项均出现在其主合取范式中，不存在与其等价的主析取范式；
- 一个命题公式是可满足的，它既有与其等价的主析取范式，也有与其等价的主合取范式。

主析取范式 and 主合取范式

例：求下列公式的主范式：

$$(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg R$$

解： $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow \neg R$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee \neg R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow (P \vee \neg R \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge (Q \vee \neg R \vee (P \wedge \neg P))$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R)$$

$$\Leftrightarrow \Pi M_{1,3,5} \quad /*其中 \Pi 表示求合取*/$$

$$\Leftrightarrow \Sigma m_{0,2,4,6,7} \quad /*即该公式是可满足的，应存在与其等价的主析取范式*/$$

主析取范式 and 主合取范式

例：求下列命题公式的主范式：

$$(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg S)$$

解： $(P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg S)$

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R \wedge \neg S)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R \wedge \neg S)$$

$$\Leftrightarrow \Sigma m_{11, 10, 6, 4} /*这里\Sigma代表析取*/$$

$$\Leftrightarrow \Pi M_{0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15}$$

从上面的解题过程中我们可以看出，如果与一个命题公式等价的一种主范式一经求出，另一种形式立刻可以得出，除非是永真（或永假）式。

作业

P28

- 16、17(1)(3)、18(2)(4)