第四章 二元关系

回顾

- 关系的定义和性质
- 关系的表示方法
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 关系的合成运算
  - 关系的合成
  - 关系合成的规则
  - 关系的幂
    - $R^0 = I_X = \{\langle x, x\rangle | x \in X\}$
  - 合成关系的矩阵表达与图解
- 关系的逆运算
  - 逆运算规则

三、关系的求逆运算

- 关系$\boldsymbol{R}$的逆关系$\tilde{\boldsymbol{R}}$定义如下：对于所有的$x \in X$和$y \in Y$来说，$xRy \Leftrightarrow y\tilde{R}x$
- 逆关系的关系矩阵：原关系矩阵转置
- 逆关系的关系图：原关系图中颠倒弧线上箭头的方向。
- 区分：逆关系**vs**补关系

  在关系图和关系矩阵上的体现？

四、关系的闭包运算

- 闭包的定义：给定集合X，R是X中的二元关系。如果有另一个关系R'满足

① R'是自反的(对称的、可传递的)；

② $R' \supseteq R$

③ 对于任何自反的(对称的、可传递的)关系R''，如果$R'' \supseteq R$，则$R'' \supseteq R'$

- 则称关系R'为R的自反的(对称的，可传递的)闭包。
- 用$r(R)$表示的R自反闭包，用$s(R)$表示R的对称闭包，用$t(R)$表示R的可传递闭包。

四、关系的闭包运算

- 定理：给定集合***X***，***R***是***X***中的关系。于是可有

  (*a*) 当且仅当$r(R) = R$，***R***才是自反的。

  (*b*) 当且仅当$s(R) = R$，***R***才是对称的。

  (*c*) 当且仅当$t(R) = R$，***R***才是传递的。

- 证明：仅给出（***a***）的证明过程

  - 如果***R***是自反的，则***R***具有定义给出的应具备R'的全部性质。因此有$r(R) = R$。

  - 反之，如果$r(R) = R$，则由定义的**(1)**得***R***是自反的。

四、关系的闭包运算

- **定理**：设X是任意集合，R是X中的二元关系，I_X是X中的恒等关系。于是可有

$$r(R) = R \cup I_X$$

- **例如**：在整数集合中，
  – 小于关系“$<$”的自反闭包是“$\leq$”；
  – 恒等关系I_X的自反闭包是I_X。
  – 不等关系“$\neq$”的自反闭包是全域关系；
  – 空关系的自反闭包是恒等关系。

四、关系的闭包运算

- 定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$S(R)=R\cup\widetilde{R}$$

- 例如：在整数集合中，
  - 小于关系“$<$”的对称闭包是不等关系“$\neq$”；
  - 小于或等于关系“$\leq$”的对称闭包是全域关系；
  - 恒等关系I_X的对称闭包是I_X；
  - 不等关系“$\neq$”的对称闭包是不等关系“$\neq$”。

四、关系的闭包运算

- 定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

- 当X是有限集时，X上只有有限个不同的关系，因此，存在某个正整数m，使得

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{m} R^i$$

- 事实上，可以证明，若$\#X = n$，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

四、关系的闭包运算

- 例：给定集合$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$，**R**和**S**是**X**中的关系，给定

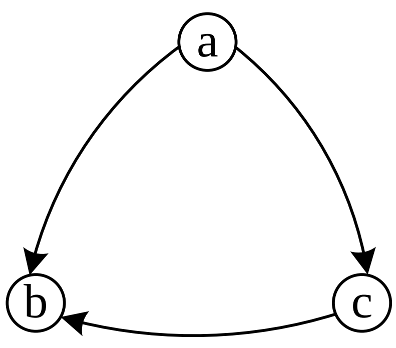
$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$
$$S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

试求出***t*(*R*)**，***t*(*S*)**，并画出关系图

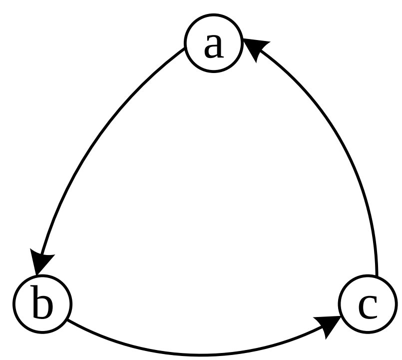
- 解：$t(R)=R^1\cup R^2\cup R^3=R$

$$t(S)=S^1\cup S^2\cup S^3\cup\cdots=S^1\cup S^2\cup S^3$$

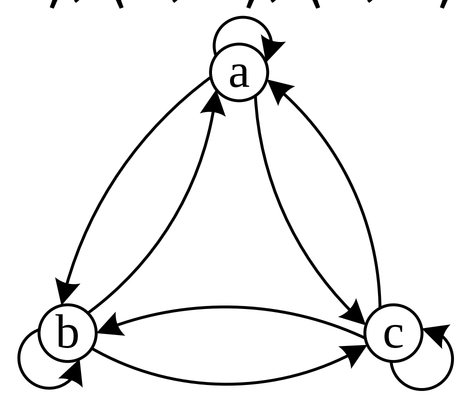
$$=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$



***R*,*t*(*R*)**



S



***t*(*S*)**

四、关系的闭包运算

- **定理：** 设*X*是集合，***R***是*X*中的二元关系，于是有

（1）如果***R***是自反的，那么***s*(*R*),*t*(*R*)**也是自反的；

（2）如果***R***是对称的，那么***r*(*R*),*t*(*R*)**也是对称的；

（3）如果***R***是可传递的，那么***r*(*R*)**也是可传递的。

- 证明（1）：若***R***是自反的，则对于所有的$x \in X$都有

$$\langle x, x\rangle \in R \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R \cup \tilde{R} = s(R)$$

$$\langle x, x\rangle \in R \Rightarrow \langle x, x\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^{i} = t(R)$$

即***s*(*R*),*t*(*R*)**是自反的

四、关系的闭包运算

- 证明（2）：首先证明$r(R)$的对称性
- 对于任意的$\langle x, y\rangle \in r(R)$，由于$r(R) = R \cup I_X$，因此$\langle x, y\rangle \in R$或$\langle x, y\rangle \in I_X$。
  - 若$\langle x, y\rangle \in R$，由$\boldsymbol{R}$的对称性可知，$\langle y, x\rangle \in R$，也即$\langle y, x\rangle \in r(R)$
  - 若$\langle x, y\rangle \in I_X$，则$x = y$，于是有$\langle y, x\rangle \in r(R)$

  因此，无论何种情况，都有$\langle y, x\rangle \in r(R)$

  由x, y的任意性可知，$r(R)$是对称的。

四、关系的闭包运算

- 证明（2）：**证明$t(R)$的对称性**
- 对于**任意的$\langle x,y\rangle \in t(R)$**，由于$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$，因此$\langle x,y\rangle \in R^i (i \in N)$，也即$\langle y,x\rangle \in \widetilde{R^i}\ (i \in N)$
- 下面用数学归纳法证明当R满足对称性时，$\widetilde{R^i}=R^i$
- (1) 当$i=1$时，由R的对称性知，$\tilde{R}=R$
- (2) 假设对于任意正整数n，有$\widetilde{R^n}=R^n$
- (3) 当$i=n+1$时，$\widetilde{R^{n+1}}=\widetilde{R^n \circ R}=\tilde{R}\circ\widetilde{R^n}=R\circ R^n=R^{n+1}$
- 由n的任意性可知，对于任意的$i \in N$，均有$\widetilde{R^i}=R^i$
- 于是由$\langle y,x\rangle \in \widetilde{R^i}\ (i \in N)$知，$\langle y,x\rangle \in R^i(i \in N)$，即$\langle y,x\rangle \in t(R)$
- 由x,y的任意性可知，$t(R)$是对称的

四、关系的闭包运算

- 证明（3）： R是可传递的，那么$r(R)$也是可传递的
- 任取$x, y, z \in X$， 当$\langle x, y\rangle \in r(R)$，$\langle y, z\rangle \in r(R)$时， 由于$r(R) = R \cup I_x$， 于是可得($\langle x, y\rangle \in R$或者$\langle x, y\rangle \in I_X$)并且($\langle y, z\rangle \in R$或者$\langle y, z\rangle \in I_X$)，组合可以得到四种情况：
- (1) $\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in R$， 由$R$的传递性可知$\langle x, z\rangle \in R$， 于是$\langle x, z\rangle \in r(R)$
- (2) $\langle x, y\rangle \in I_X$，$\langle y, z\rangle \in R$，由$I_X$的性质可知$x = y$，于是$\langle x, z\rangle \in R$，得到$\langle x, z\rangle \in r(R)$
- (3) $\langle x, y\rangle \in R$，$\langle y, z\rangle \in I_X$，由$I_X$的性质可知$y = z$，于是$\langle x, z\rangle \in R$，得到$\langle x, z\rangle \in r(R)$
- (4) $\langle x, y\rangle \in I_X$，$\langle y, z\rangle \in I_X$，由$I_X$的性质可知$x = y = z$，于是$\langle x, z\rangle \in I_X$，得到$\langle x, z\rangle \in r(R)$
- 由上可知，无论哪种情况，都有$\langle x, z\rangle \in r(R)$
- 由于x, y, z的任意性可知，$r(R)$是可传递的

四、关系的闭包运算

- **定理：** 设X是集合，R是集合X中的二元关系，于是有

$$(a)\quad rs(R) = sr(R)$$
$$(b)\quad rt(R) = tr(R)$$
$$(c)\quad ts(R) \supseteq st(R)$$

- **证明：(a)** $sr(R) = s(R \cup I_X)$

$$= (R \cup I_X) \cup (\widetilde{R \cup I_X})$$
$$= R \cup I_X \cup \tilde{R} \cup \tilde{I}_X$$
$$= (R \cup \tilde{R}) \cup I_X$$
$$= r\left(R \cup \tilde{R}\right)$$
$$= rs(R)$$

四、关系的闭包运算

证明（b）：$rt(R)=tr(R)$

因为 $tr(R)=t(R\cup I_X)$，

$rt(R)=t(R)\cup I_X$，

而对于所有的$n\in N$有$I_X^n=I_X$，以及$I_X\circ R=R\circ I_X=R$。

根据这些关系式，可有$(R\cup I_X)^n=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{n}R^i$

于是 $$\begin{aligned}tr(R)&=t(R\cup I_X)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(R\cup I_X)^i\\&=(R\cup I_X)\cup(R\cup I_X)^2\cup(R\cup I_X)^3\cup\cdots\\&=I_X\cup R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\\&=I_X\cup t(R)\\&=rt(R)\end{aligned}$$

四、关系的闭包运算

- 证明（c）：$\boldsymbol{ts(R) \supseteq st(R)}$
- 如果$R_1 \supseteq R_2$，则$s(R_1) \supseteq s(R_2)$，$t(R_1) \supseteq t(R_2)$
- 根据对称闭包的定义，有$s(R) \supseteq R$。
- 首先构成上式两侧的可传递闭包，再依次构成两侧的对称闭包，可以求得$\boldsymbol{ts(R) \supseteq t(R)}$以及$sts(R) \supseteq st(R)$。而**ts(R)**是对称的，所以$sts(R) = ts(R)$，从而有$ts(R) \supseteq st(R)$。

四、关系的闭包运算

注意：

（1）通常用R^+表示R的可传递闭包$t(R)$，并读作“R加”。

（2）通常用R^*表示R的自反可传递闭包$tr(R)$，并读作“R星”。

4.5特殊关系

- 一、集合的划分和覆盖
- 定义：给定非空集合S，设非空集合$A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$，如果有

$$(a)\quad A_i \subseteq S \ \ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$(b)\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

则称集合A是集合S的覆盖。

- 注意：集合的覆盖不唯一。
- 例如：$S=\{a,b,c\}$，$A=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$，$B=\{\{a\},\{b,c\}\}$，A和B都是集合S的覆盖。

一、集合的划分和覆盖

- 定义：给定非空集合S，设非空集合$A=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$，如果有

  $(a)\quad A_i \subseteq S\ (i=1,2,\cdots,n)$

  $(b)\quad A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$或$A_i \cap A_j \neq \emptyset\ (i=j)$

  $(c)\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

  则称集合A是集合S的一个划分。
- 划分中的元素A_i称为划分的类。
- 划分的类的数目叫划分的秩。
- 划分是覆盖的特定情况，即A中元素互不相交的特定情况。

一、集合的划分和覆盖

例：设$S=\{1,2,3\}$，考虑下列集合

$A=\{\{1,2\},\{2,3\}\};$ S的覆盖

$B=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\};$ S的覆盖

$C=\{\{1\},\{2,3\}\};$ S的覆盖、划分，秩为2

$D=\{\{1,2,3\}\};$ S的覆盖、划分，秩为1，最小划分

$E=\{\{1\},\{2\},\{3\}\};$ S的覆盖、划分，秩为3，最大划分

$F=\{\{1\},\{1,3\}\};$

一、集合的划分和覆盖

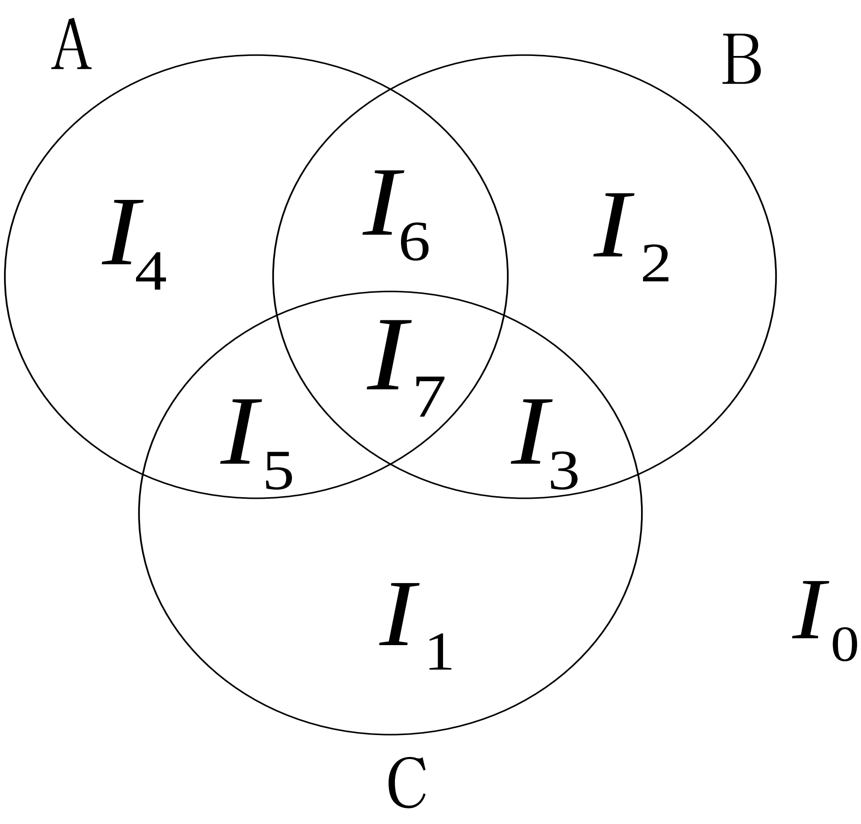
- 定义：设A和A'是非空集合S的两种划分，并可以表示成

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i \qquad A' = \bigcup_{j=1}^{n} A'_j$$

- 如果A'的每一类A'_j，都是A的某一类A_i的子集，那么称划分A'是划分A的加细，并称A'加细了A。
- 如果A'是A的加细并且$A' \neq A$，则称A'是A的真加细。
- 例如：$S = \{1,2,3\}$，$A = \{\{1\},\{2,3\}\}$，$A' = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

极小项、完全交集

定义：划分全集E的过程，可看成是在表达全集的文氏图上划出分界线的过程。设A，B，C是全集E的三个子集。由A，B和C生成的E的划分的类，称为**极小项或完全交集**。



$$I_0 = \sim A \cap \sim B \cap \sim C$$
$$I_1 = \sim A \cap \sim B \cap C$$
$$I_2 = \sim A \cap B \cap \sim C$$
$$I_3 = \sim A \cap B \cap C$$
$$I_4 = A \cap \sim B \cap \sim C$$
$$I_5 = A \cap \sim B \cap C$$
$$I_6 = A \cap B \cap \sim C$$
$$I_7 = A \cap B \cap C$$

n个子集生成2^n个极小项，用$I_0, I_1, \cdots, I_{2^n-1}$表示。

作业

- 21
- 23
- 25
- 27