



离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室：综合楼405，Tel： 62274392

实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921

Email: zkchen@dlut.edu.cn

zkchen00@hotmail.com

QQ: 1062258606

引言

离散数学是计算机和软件工程专业的一门重要大类核心基础课。是人工智能的基础。

它所研究的对象是离散数量关系和离散结构数学结构模型。

离散数学课程主要介绍离散数学的各个分支的基本概念、基本理论和基本方法。这些概念、理论以及方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、大数据计算、人工智能、计算机网络等专业课程中。

同时，该课程所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养。

学习方法

- 精确严格地掌握好概念和术语，正确理解它们的内涵和外延；
- 独立完成作业，自觉归纳基本解题方法；
- 阅读和复习时，随时备好纸笔，以便进行详细的推导和计算；
- 学习和理解术语，给术语赋予特殊的含义，加深理解。
- 多做习题，加深理解。

要求

- 基本要求：

- **1.** 考勤-按大学生手册执行（缺三次取消考试资格，迟到**10**分钟不能进入教室）
- **2.** 作业独立完成
- **3.** 每周三上交作业（按自然班，班长负责），周一发还

- 考核

- 平时成绩**30%**-每次作业成绩的算术平均+考勤
- 期末成绩**70%**

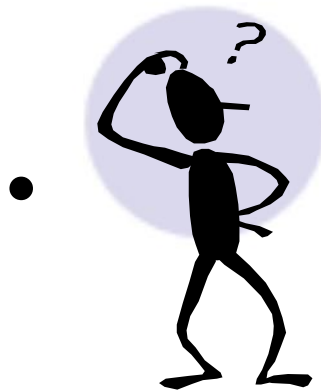
教材及资料

- 教材：《离散数学》陈志奎 周勇 高静 编著 清华大学出版社
- 主要参考书：
 - 《**DISCRETE MATHEMATICAL STRUCTURES**》**Bernard Kolman Robert C. Busby, Shron Cutler Ross** 高等教育出版社
 - 《**DISCRETE MATHEMATICS and its applications**》**Rosen** 华章出版社
 - 《离散数学与算法》曹晓东 原旭 编著 机械工业出版社
 - 《离散数学》曲婉玲，耿素云，张立昂著 高等教育出版社
- 网站：
 - <http://incodat.dlut.edu.cn/Lisan/>
 - <http://www.ubinec.org>
 - 可以在线答疑
 - 讲义在线或下载
 - 教材勘误信息在线查询，作业共性问题在线



离散数学

第一章 命题逻辑



什么是数理逻辑？

数理逻辑是用数学方法研究思维规律的一门学科。所谓数学方法是指：用一套数学的符号系统来描述和处理思维的形式与规律。因此，**数理逻辑又称为符号逻辑。**

数理逻辑的创始人--莱布尼茨

(Leibniz, Gottfried Wilhelm)

1646.7.1-1716.11.14



➤德国数学家、物理学家、哲学家等，一个举世罕见的科学天才。研究领域涉及到逻辑学、数学、力学、地质学、法学、历史学、语言学、生物学以及外交、神学等诸多方面。

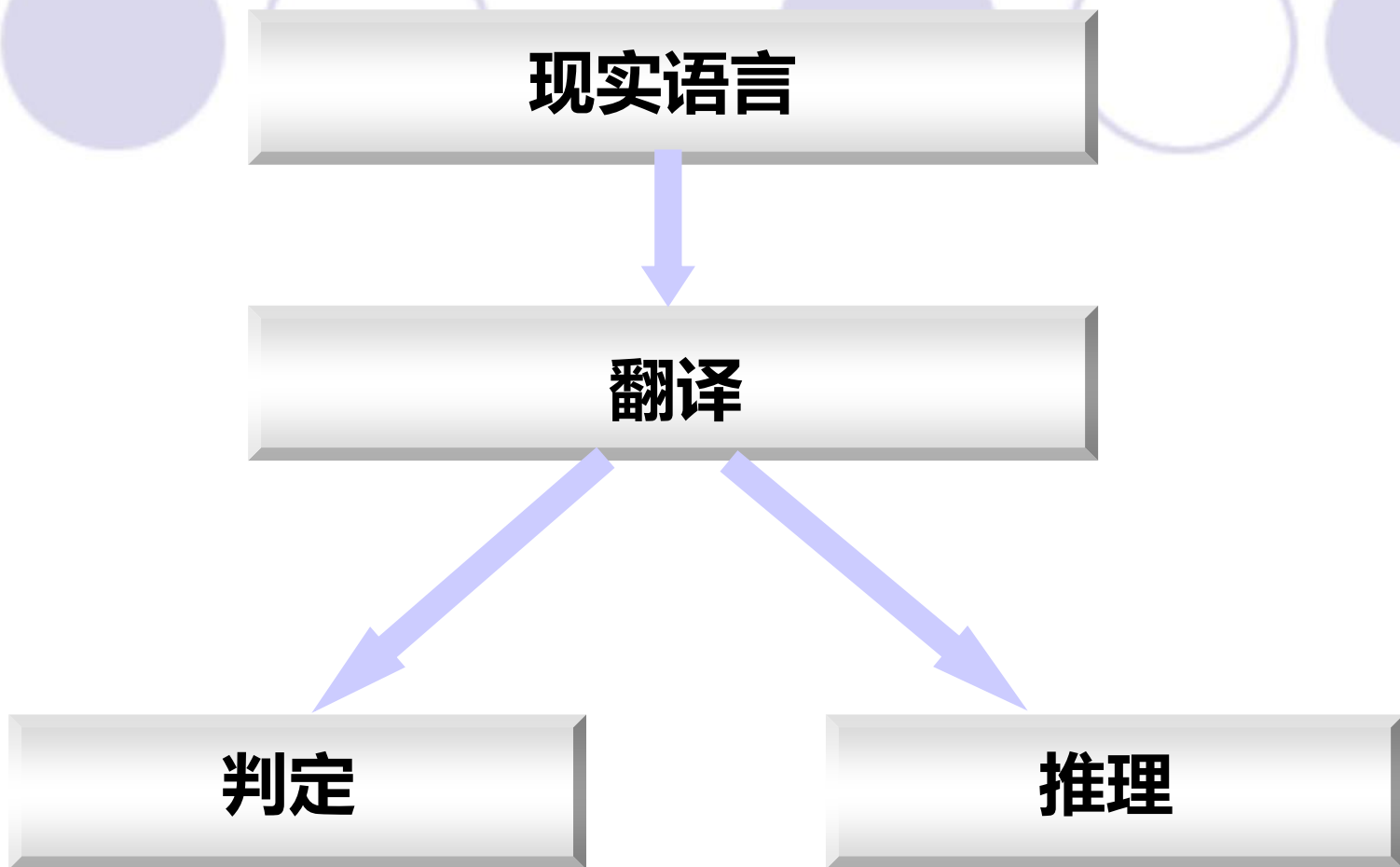
➤出生于德国东部莱比锡的一个书香之家，父亲是莱比锡大学的道德哲学教授，母亲出生在一个教授家庭。莱布尼兹的父亲在他年仅6岁时便去世了，给他留下了丰富的藏书。

- 15岁时，进了莱比锡大学学习法律，一进校便跟上了大学二年级标准的人文学科的课程，还广泛阅读了培根、开普勒、伽利略等人的著作，并对他们的著述进行深入的思考和评价。在听了教授讲授欧几里德的《几何原本》的课程后，莱布尼兹对数学产生了浓厚的兴趣。17岁时他在耶拿大学学习了短时期的数学，并获得了哲学硕士学位。
- 19岁设计出世界第一台乘法器，被认为是现代机器数学的先驱者。
- Leibniz 之梦：有一天所有的知识，包括精神和无形的真理，能够通过通用的代数演算放入一个单一的演绎系统。
- 1693年，发现了机械能的能量守恒定律。
- 与牛顿并称为微积分的创立者。
- 系统阐述了二进制记数法，并把它和中国的八卦联系起来。

主要内容

- 命题、命题逻辑联结词
- 命题变元、合式公式
- 重言式、永真蕴含、恒等式
- 代入规则、替换规则
- 对偶原理
- 范式及其判定问题
- 命题演算的推理

1.1概述



应用：文本分析实例；计算机电路设计；计算机程序构造；程序正确性证明，知识库提取，知识库构建，知识推理等。

1.2命题与命题逻辑联结词

一、命题

所谓命题，是指具有非真必假的陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等因都不能判断其真假，故都不是命题。

1.定义：一个具有真假意义的陈述句被称为一个命题。

或真或假，不能既真又假。

或真或假，
不能既真
又假

例1:判断下面语句是否是命题

- 华盛顿是美国的首都。
- 多伦多是加拿大的首都。
- **$1+101=110$**
- 几点了？
- **$x+1=3$**
- 真热呀！

1.2命题与命题逻辑联结词

- 理发师问题：

- 理发师给所有不给自己理发的人理发

分析：

(1) 理发师给自己理发 \longrightarrow 不能给自己理发

(2) 理发师不给自己理发

\longrightarrow 需要给自己理发



悖论

1.2命题与命题逻辑联结词

一、命题

2.命题的真值及表示

➤ 命题用大写的英文字母，如 $P, Q, R...$ 表示。

P : 今天是星期二。

➤ 命题仅有两种可能的真值—真和假，且二者只能居其一。如果一个命题的真值是真，则用1或(True)来表示；如果一个命题的真值是假，则用0或(False)来表示。

定义：

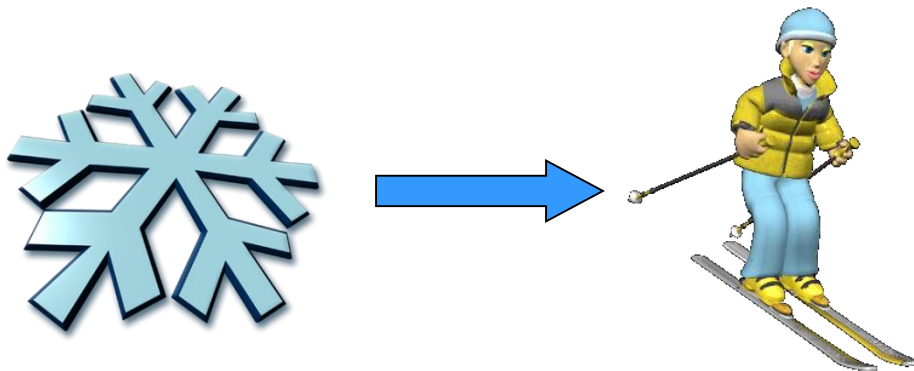
一个命题不能再分解为更简单的命题，这个命题称为**原子命题**。

命题

原子命题

分子命题 (复合命题)

如果下周日下雪，那么我就去滑雪。



如果下周日不下雨并且没有考试，那么我去海边玩。

这次演讲比赛，我们班将由赵明或者张强参加。

6种逻辑联结词

- 否定词 “并非”
- 合取词 “并且”
- 析取词 “或者”
- 异或词 “或者(不可兼或)”
- 蕴含词 “如果.....， 那么.....”（单向词）
- 双向蕴含词 “当且仅当”（双向词）

否定—— \neg

- 定义：
 - 设 P 是一个命题，则 P 的否定是一个新的命题，记作“ $\neg P$ ”，读作“非 P ”。

真值表：利用运算对象真值的所有可能组合判断命题的真假。

- 否定词“ \neg ”的真义如下表：

| P | $\neg P$ |
|-----|----------|
| T | F |
| F | T |

或

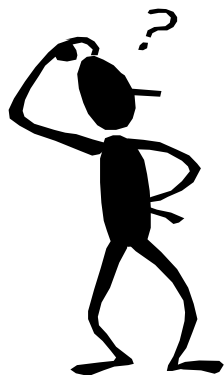
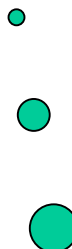
| P | $\neg P$ |
|-----|----------|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

否定—— \neg

- 例：找出命题“所有的素数都是奇数”的否定。

“并非所有的素数都是奇数。”

“所有的素数都不是奇数。”



对整体否定，不是对局部的否定

合取—— \wedge

- 定义：

设 P 和 Q 是命题，则用 $P \wedge Q$ 表示命题“ P 并且 Q ”。

- 表征意义（在命题 P 和 Q 均为真时为真，否则为假。）

两命题合取的真值表

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

或

| P | Q | $P \wedge Q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

合取—— \wedge

命题 P : 今天是星期五。

命题 Q : 今天下雨。

找出命题 P 和 Q 的合取

解: $P \wedge Q$ 表示“今天是星期五并且下雨”。

这一命题在下雨的星期五成真，不下雨的星期五和不是星期五的日子都为假。

析取—— \vee

- 定义:

设 P 和 Q 是命题，则用 $P \vee Q$ 表示命题“ P 或者 Q ”。

- 表征意义(在命题 P 和 Q 均为假时为假，否则为真。)

两命题析取的真值表

| P | Q | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |

或

| P | Q | $P \vee Q$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

析取—— \vee

例：命题 P ：李明在教室。

命题 Q ：张强是个好教练。

找出命题 P 和 Q 的析取

可兼或

解： $P \vee Q$ 表示“李明在教室或张强是个好教练”。

例：命题 P ：李明在教室。

命题 Q ：李明在网球场。

不可兼或

表示命题“李明在教室或在网球场”？

异或—— ∇ （不可兼或）

- 定义： 设 P 和 Q 是命题， 则用 $P\nabla Q$ 表示命题“ P 异或 Q ”。
- 表征意义：(在 P 和 Q 中恰有一个为真时为真， 否则为假。)
- 例如， 实数 a 要么是有理数， 要么是无理数。
- 又如， 大连到北京的**Z81**卧铺车要么是**18:26**， 要么是**8:26**发车

异或 $P\nabla Q$ 的真值表

| P | Q | $P\nabla Q$ |
|-----|-----|-------------|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |

或

| P | Q | $P\nabla Q$ |
|-----|-----|-------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

单条件—— \rightarrow （蕴含）

- 定义：设 P 和 Q 是命题，则用 $P \rightarrow Q$ 表示命题“如果 P 那么 Q ”。
- 表征意义（在 P 为真而 Q 为假时为假，否则为真。）

蕴含 $P \rightarrow Q$ 的真值表

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

或

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

单条件——→

- 政治家竞选时许诺
 - “如果我当选了，那么我将会减税”。
- 如果今天是星期五，那么 **$2+2=4$** .

现实世界中无意义的语言也可以翻译
- 与程序设计中if p then S语句的区别。

单条件——→

- 在日常生活中，用条件式表示前提和结论之间的因果或实质关系，这种条件式称为**形式条件命题**。
- 然而在命题逻辑中，一个条件式的前提并不要求与结论有任何关系，这种条件式称为**实质条件命题**。

双条件—— \leftrightarrow （等值）

- 定义：

设 P 和 Q 是命题，则用 $P \leftrightarrow Q$ 表示命题“ P 等值于 Q ”

- 表征意义（在 P 和 Q 具有相同的真值时为真，否则为假。）

双条件 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

或

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|-----|-----|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

1.2命题与命题逻辑联结词

- 注意：
 - 由逻辑联结词联结的命题之间不需要任何关系。
- 如无特殊说明，一般的优先次序：

\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow

$$P \vee Q \wedge R$$

$$(P \vee Q) \wedge R$$

句子到逻辑表达式的翻译

- 步骤：
 - 确定给定的句子**是否为命题**；
 - 找出各**原子命题**并确定句子中的连词为对应的**联结词**；
 - 用**正确的语法**把原命题表示成由原子命题、联结词和圆括号组成的公式。

句子到逻辑表达式的翻译

- 翻译下列命题：

(1)他既聪明又用功。

(2)他虽聪明但不用功。

解：

原子命题 P ：他聪明。

Q ：他用功。

则有：

(1)翻译成： $P \wedge Q$

(2)翻译成： $P \wedge \neg Q$

句子到逻辑表达式的翻译

- 除非有时间，我才去看电影
 - **A**: 我有时间。
 - **B**: 我去看电影。
 - 翻译为: $B \rightarrow A$
- 我不承认你是对的，除非太阳从西边出来
 - **A**: 我不承认你是对的。
 - **B**: 太阳从西边出来。
 - 翻译为: $\neg B \rightarrow A$

句子到逻辑表达式的翻译

- 如果你和他都不固执己见的话，那么不愉快的事情就不会发生了。
 - P : 你固执己见。
 - Q : 他固执己见。
 - R : 不愉快的事情不会发生。
 - 翻译为: $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
- 如果你和他不都是固执己见的话，那么不愉快的事情就不会发生了。
 - $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

句子到逻辑表达式的翻译

P: 这个材料很有趣。

Q: 这个习题很难。

R: 这门课程使人喜欢。

- 1、这个材料很有趣，而且这些习题很难。
- 2、这个材料无趣，习题也不难，那么，这门课程就不会使人喜欢。
- 3、这个材料无趣，习题也不难，而且这门课程也不使人喜欢。
- 4、这个材料很有趣意味着这些习题很难，反之亦然。
- 5、或者这个材料很有趣，或者这些习题很难，而且两者恰具其一。

句子到逻辑表达式的翻译

- 除非你已满**16**周岁， 否则只要你的身高不足**4**英尺就不能乘公园滑行铁道游乐车。
 - ***P***: 你能乘坐公园滑行铁道游乐车。
 - ***Q***: 你身高不足**4**英尺。
 - ***R***: 你已满**16**周岁。
 - 翻译成:

$$(\neg R \wedge Q) \rightarrow \neg P$$

逻辑难题

- 一个岛上居住着两类人——骑士和流氓。骑士说的都是实话，而流氓只会说谎。你碰到两个人**A**和**B**，如果**A**说“**B**是骑士”，**B**说“我们两个不是一类人”，请判断**A**、**B**到底是流氓还是骑士。
- 解：解析原子命题，**P**: **A**是骑士； **Q**: **B**是骑士；
A说的翻译：Q，B说的翻译： $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

| P | Q | $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$ |
|----------|----------|--|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

例外一种解法

- 解答：枚举法，只有4种可能。

假设都是骑士。B说的是谎话，不成立。

假设A是骑士，B是流氓。A是说假话了，不成立。

假设A是流氓，B是骑士。A说真话了，不成立。

假设都是流氓，成立。

答案是都是流氓。

作业

- **P26: 1, 2, 3, 4 (1)、(3), 6 (2)**
(4)
- **P27: 9**