

一. 单选

1. 研究约瑟夫环问题时, 所有人 1, 2, 1, 2, 报数, 每当有人报 2 此人就出局, 最初有编号 1~42 的 42 个人, 最后仅有 1 人时, 他的最初编号为 ()

A. 15 B. 17 C. 19 D. 21

2. 已知 $f(0)=2$, $nf(n)=(n-1)f(n-1)+2n$, 求和因子 s_n 应选取 () 以便于采用求和方式求解。

A. 1 B. n C. $n-1$ D. $n/(n-1)$

3. k 为非负整数, 则二项式系数 $\binom{-1}{k}$ 的值为?

A. $(-1)^k$ B. k^{-1} C. $(-1)^k$ D. k^{-1}

4. 对于整数 k , 已知 $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} k$, 则 $S_n = ?$

A. 6 B. 9 C. 36 D. 0

5. 已知 $\sum_{j=1}^k [1 \leq j \leq k \leq 10]$ 的值是?

A. 10 B. 45 C. 55 D. 100

6. 对于正整数 n 下列说法正确 ()

A. $x^n \cdot x^n = x^{2n}$

B. $\frac{x^n}{x^n} = \frac{(x+1)^{n-1}}{(x+1)^{n-1}}$

C. $x^n \cdot x^n = (x^n)^2$

D. $\frac{x^n}{x^n} = \frac{(x-1)^n}{(x-1)^n}$

7. n 为非负整数, 关于以下式子,

I. $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

II. $n = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$

III. $n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$

IV. $n = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$

下列说法正确的是 ()

A. 只有 I 成立

B. 只有 I、II 成立

C. 只有 I、II、III 成立

D. 都成立

8. 对于整数 $\alpha < \beta$, 下列不一定成立的 ()

A. 区间 $[\alpha, \beta]$ 包含整数个数为 $\beta - \alpha + 1$

B. $\dots [\alpha, \beta) \dots \beta - \alpha$

C. $\dots (\alpha, \beta) \dots \beta - \alpha$

D. $\dots (\alpha, \beta] \dots \beta - \alpha$

9. 下列关于第二类斯特林数与第一类斯特林数关系中不正确的是 (n 为正整数) ()

A. $\{0^n\} = \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ B. $\{1^n\} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ C. $\{n-1^n\} = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$ D. $\{n^n\} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}$

10. 下列关于调和数的式子中正确的是? ($n > 1$)

A. $H_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k}$ B. $\ln n < H_n < \ln n + 1$ C. $H_n^{(2)} = H_n^2$ D. $H_n \cdot H_n = H_{2n}$

11. n 个不同的球放入 m 个无区别箱子, 允许空箱子存在, 方案共有多少种?

A. $\{m^n\}$ B. $\{m^n\} / m!$ C. $\sum_{k=0}^m \{k^n\}$ D. $\begin{pmatrix} n+1 \\ m \end{pmatrix}$

12. 给定一个随机变量 X , 假设其概率分布为 $\Pr(X=1)=0.6$, $\Pr(X=0)=0.4$, 则 X 方差 VX 为?

($VX = E((X-EX)^2)$ 或 $E((X^2)-(EX)^2)$)

A. 0.2 B. 0.5 C. 0.3 D. 0.24

13. 随机事件 $X=x$ 和 $Y=y$ 相互独立, 且 $\Pr(X=x)=1/3$, $\Pr(Y=y)=1/5$, 则 $\Pr(X=x \text{ and } Y=y)=?$

A. 1/15 B. 8/15 C. 2/15 D. 3/5

14.

已知 $\binom{n-1}{k-1} = 4$, $\binom{n}{k-1} = 5$, $\binom{n-1}{k} = 6$, 则 $\binom{n}{k} = ?$

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

15. 设 x 和 y 都是实数且 y 不等于 0, x 不被 y 整除, 那么下列不成立的是?

A. $(x \bmod y) + (-x \bmod -y) = 0$
 B. $-(x \bmod y) - (x \bmod -y) = y$
 C. $(x \bmod y) + (-x \bmod y) = y$
 D. $(x \bmod y) - (-x \bmod -y) = 0$

以下为大题

二. n 个圆最多可将平面划分为多少个区域? 给出递推式并用数学归纳法证明。(Tip: 每增加一个圆, 判断新增区域数量与交点数目有关)

三. 对于整数 m, n 有 $0 < m \leq n$,

$$\text{证明 } \sum_{0 \leq k < m} \left\lceil \frac{n-k}{m} \right\rceil = \sum_{0 \leq k < m} \left\lfloor \frac{n+k}{m} \right\rfloor$$

$$\text{即 } \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \frac{n-1}{m} \right\rceil + \dots + \left\lceil \frac{n-m+1}{m} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{m} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+m-1}{m} \right\rfloor.$$

四.

$$\text{用摄动法求 } S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (-2)^{n-k}.$$

五. 设待排序的 n 项记录的初始次序是随机排列的, 则快速排序所需的平均比较次数 C_n 满足递归式

$$C_0 = 0$$

$$C_n = n+1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k$$

求: C_n 的基于调和数 H_n 封闭解. (就是说最终结果可以包含常数、 n 和 H_n)