



离散数学

大连理工大学软件学院

课程简介

- 教师：赵亮
- 电话：13610952262
- 邮箱：liangzhao@dlut.edu.cn
- 办公室：综合楼417

教材及资料

- 教材：《离散数学》 陈志奎 周勇 高静 编著 清华大学出版社
- 主要参考书：
 - 《DISCRITE MATHEMATICAL STRUCTURES》
Bernard Kolman Robert C. Busby, Shron Cutler Ross 高等教育出版社
 - 《DISCRITE MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS》 Kenneth Rosen 华章出版社
 - 《离散数学与算法》 曹晓东 原旭 编著 机械工业出版社
 - 《离散数学》 曲婉玲，耿素云，张立昂著 高等教育出版社

课程基本情况

- 学时： 32学时
- 授课周次： 9-16周
- 授课时间： 周一3、4节
 周三1、2节
- 授课地点： B104

考核方法

- 平时成绩30%
 - 每次作业成绩的算术平均
 - 出勤情况
 - 学习态度
- 期末成绩70%
 - 闭卷考试
 - 教考分离

课程要求

- 遵守基本的课堂纪律
- 按时完成作业
 - 作业**独立完成**
 - 每周三上交作业（按自然班），下周一发还

引言

离散数学是计算机专业的一门重要基础课。

它所研究的对象是离散数量关系和离散结构数学结构模型。

离散数学课程主要介绍离散数学的各个分支的基本概念、基本理论和基本方法。这些概念、理论以及方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法的分析与设计、人工智能、计算机网络等专业课程中。

同时，该课程所提供的训练十分有益于学生概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，十分有益于学生严谨、完整、规范的科学态度的培养。

课程内容

- 数理逻辑
- 集合和关系理论
- 近世代数
- 图论

课程内容

- 数理逻辑
 - 一阶命题逻辑
 - 一阶谓词逻辑
- 集合和关系理论
 - 集合
 - 关系
 - 函数
- 近世代数
- 图论

课程内容

- 数理逻辑
- 集合和关系理论
- 近世代数
 - 代数系统基本概念
 - 典型的代数系统
- 图论
 - 图的基本概念
 - 特殊的图
 - 树

学习方法

- 精确严格地掌握好概念和术语，正确理解它们的内涵和外延；
- 独立完成作业，自觉归纳基本解题方法；
- 阅读和复习时，随时备好纸笔，以便进行详细的推导和计算；
- 学习和理解术语，给术语赋予特殊的含义，加深理解。
- 多做习题，加深理解。



离散数学

第一部分 数理逻辑



什么是数理逻辑?

- 数理逻辑是用数学方法研究思维规律的一门学科。
- 所谓数学方法是指：用一套数学的符号系统来描述和处理思维的形式与规律。因此，数理逻辑又称为符号逻辑。

数理逻辑的创始人--莱布尼茨

(Leibniz, Gottfried Wilhelm)

1646.7.1-1716.11.14

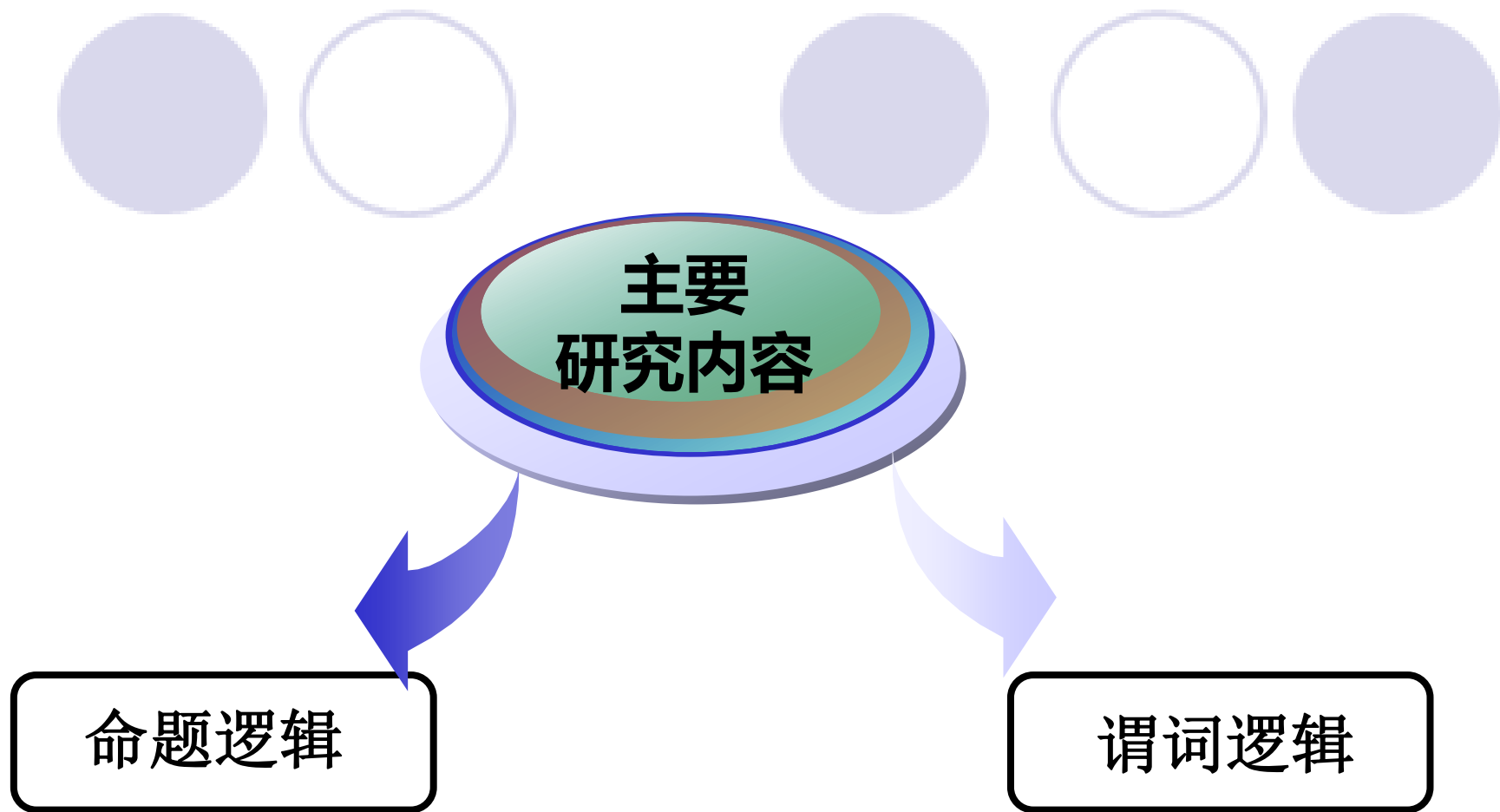


- 德国数学家、物理学家、哲学家等，一个举世罕见的科学天才。研究领域涉及到逻辑学、数学、力学、地质学、法学、历史学、语言学、生物学以及外交、神学等诸多方面。
- 出生于德国东部莱比锡的一个书香之家，父亲是莱比锡大学的道德哲学教授，母亲出生在一个教授家庭。**莱布尼兹的父亲在他年仅6岁时便去世了，给他留下了丰富的藏书。**

- 15岁时，进了莱比锡大学学习法律，一进校便跟上了大学二年级标准的人文学科的课程，还广泛阅读了培根、开普勒、伽利略等人的著作，并对他们的著述进行深入的思考和评价。在听了教授讲授欧几里德的《几何原本》的课程后，莱布尼兹对数学产生了浓厚的兴趣。17岁时他在耶拿大学学习了短时期的数学，并获得了哲学硕士学位。
- 19岁设计出世界第一台乘法器，被认为是现代机器数学的先驱者。
- Leibniz(1646 ~ 1716年) 之梦：“通用的科学语言”，可以把推理过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。
- 1693年，发现了机械能的能量守恒定律。
- 与牛顿并称为微积分的创立者。
- 系统阐述了二进制记数法，并把它和中国的八卦联系起来。

数理逻辑的发展

- 1847年，英国数学家布尔发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，并创造一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。
- 十九世纪末二十世纪初，数理逻辑有了比较大的发展
 - 1884年，德国数学家弗雷格出版了《算术基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备
 - 对建立这门学科做出贡献的，还有美国人皮尔斯，他也在著作中引入了逻辑符号。从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科



第一章 命题逻辑

- 主要内容
 - 命题、命题逻辑联结词
 - 命题变元、合式公式
 - 重言式、永真蕴含、恒等式
 - 带入规则、替换规则
 - 对偶原理
 - 范式及其判定问题
 - 命题演算的推理

本章学习要求

- 掌握命题、命题联结词及简单命题的符号化；
- 理解命题变元、命题公式及其真值表；
- 掌握永真式、矛盾式与可满足式及其判定
- 熟记等价式与基本等价式，带入规则与替换规则；
- 掌握范式与主范式及其求解方法；理解主范式的用途与应用；
- 掌握推理的形式结构及证明方法。

1.1命题与命题逻辑联结词

- **命题**：一个具有**真假**意义的**陈述句**被称为一个命题。
 - 所谓命题，是指具有**非真必假**的**陈述句**。
 - 而疑问句、祈使句和感叹句，**不能判断其真假**，故都不是命题。
- **例1**：判断下面语句是不是命题。
 - ① 华盛顿是美国的首都。
 - ② 多伦多是加拿大的首都。
 - ③ 十进制 $1+101=110$
 - ④ 几点了？
 - ⑤ $x+1=3$
 - ⑥ 真热呀！

或真或假，不能既真又假

1.1 命题与命题逻辑联结词

- 理发师问题：

- 理发师给所有不给自己理发的人理发

分析：

(1) 理发师给自己理发  不能给自己理发

(2) 理发师不给自己理发

 需要给自己理发



悖论

1.1命题与命题逻辑联结词

一、命题

2.命题的真值及表示

➤ 命题用大写的英文字母，如 P ， Q ， R ... 表示。

P ：今天是星期二。

➤ 命题仅有两种可能的真值——真和假，且二者只能居其一。

➤ 如果一个命题的真值是真，则用1或(True)来表示；

➤ 如果一个命题的真值是假，则用0或(False)来表示。

定义：

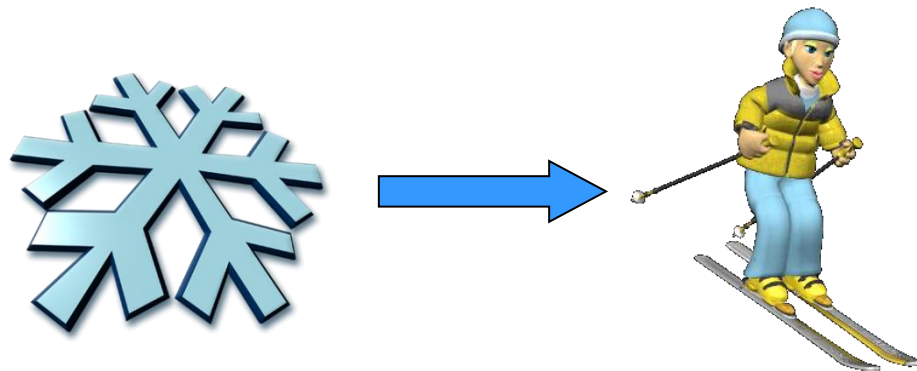
一个命题不能再分解为更简单的命题，这个命题称为原子命题。

命题

原子命题

分子命题 (复合命题)

— 如果下周日下雪，那么我就去滑雪。



— 如果下周日不下雨并且没有考试，那么我去海边玩。

— 这次演讲比赛，我们班将由赵明或者张强参加。

6种逻辑联结词

1. 否定词，记为“ \neg ”，表示“并非”
2. 合取词，记为“ \wedge ”，表示“并且”
3. 析取词，记为“ \vee ”，表示“或者”
4. 异或词，记为“ ∇ ”，表示“异或”
5. 蕴含词，记为“ \rightarrow ”，表示“如果……，那么……”（单向词）
6. 双向蕴含词，记为“ \leftrightarrow ”，表示“当且仅当”（双向词）

1. 否定—— \neg

- 定义：
 - 设 P 是一个命题，则 P 的否定是一个新的命题，记作“ $\neg P$ ”，读作“非 P ”。
- 否定词“ \neg ”的

真值表：利用运算对象真值的所有可能组合判断命题的真假。

P	$\neg P$
T	F
F	T

或

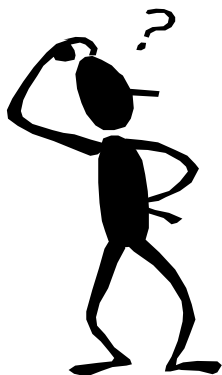
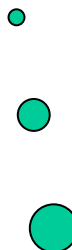
P	$\neg P$
1	0
0	1

1. 否定—— \neg

- 例：找出命题“所有的素数都是奇数”的否定。

“并非所有的素数都是奇数。”

“所有的素数都不是奇数。”



对整体否定，不是对局部的否定

2. 合取—— \wedge

- 定义：
- 设 P 和 Q 是命题，则用 $P \wedge Q$ 表示命题“ P 并且 Q ”
- 表征意义：在命题 P 和 Q 均为真时， $P \wedge Q$ 为真，否则为假

两命题合取的真值表

P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. 合取—— \wedge

命题 P : 今天是星期五。

命题 Q : 今天下雨。

找出命题 P 和 Q 的合取

解: $P \wedge Q$ 表示“今天是星期五并且下雨”。

这一命题在下雨的星期五成真, 不下雨的星期五和不是星期五的日子都为假。

3.析取—— \vee

- 定义:

设***P***和***Q***是命题，则用***P* \vee *Q***表示命题“***P*或者*Q***”

- 表征意义:

在命题***P***和***Q***均为假时，***P* \vee *Q***为假，否则为真

两命题析取的真值表

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>P</i> \vee <i>Q</i>
<i>F</i>	<i>F</i>	<i>F</i>
<i>F</i>	<i>T</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>F</i>	<i>T</i>
<i>T</i>	<i>T</i>	<i>T</i>

或

<i>P</i>	<i>Q</i>	<i>P</i> \vee <i>Q</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3.析取—— \vee

例：命题 P ：李明在教室。

命题 Q ：张强是个好教练。

找出命题 P 和 Q 的析取

可兼或

解： $P \vee Q$ 表示“李明在教室或张强是个好教练”。

例：命题 P ：李明在教室。

命题 Q ：李明在网球场。

表示命题“李明在教室或在网球场”？

不可兼或

4. 异或—— ∇

- 定义：设 **P** 和 **Q** 是命题，则用 **$P \nabla Q$** 表示命题“ **P 异或 **Q** ”**
- 表征意义： **P** 和 **Q** 中恰有一个为真时为真，否则为假
- 例如，实数 **a** 要么是有理数，要么是无理数。
- 又如，大连到北京的 **$Z81$** 卧铺车要么是 **$18:26$** ，要么是 **$8:26$** 发车

$P \nabla Q$ 的真值表

P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

或

P	Q	$P \nabla Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

5. 单条件 \rightarrow

- 定义：设 P 和 Q 是命题，则用 $P \rightarrow Q$ 表示命题“如果 P 那么 Q ”
- 表征意义：在 P 为真 Q 为假时为假，否则为真

蕴含 $P \rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5. 单条件—— \rightarrow

- 政治家竞选时许诺

“如果我当选了，那么我将会减税”。

- **P**: 我当选
- **Q**: 我将会减税
- 形式化为: $P \rightarrow Q$

- 如果今天是星期五，那么 **$2+2=4$** .

- **P**: 今天是星期五
- **Q**: **$2+2=4$**
- 形式化为: $P \rightarrow Q$

现实世界中无意义的
语言也可以翻译

5. 单条件—— \rightarrow

- 在日常生活中，用条件式表示前提和结论之间的因果或实质关系，这种条件式称为**形式条件命题**。
- 然而在命题逻辑中，一个条件式的前提并不要求与结论有任何关系，这种条件式称为**实质条件命题**。

6. 双条件—— \leftrightarrow

- 定义：设 P 和 Q 是命题，则用 $P \leftrightarrow Q$ 表示命题“ P 等值于 Q ”
- 表征意义：在 P 和 Q 具有相同的真值时为真，否则为假

双条件 $P \leftrightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

或

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1.1命题与命题逻辑联结词

- 注意:

- 由逻辑联结词联结的命题之间不需要任何关系。

- 优先次序:

\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow

$$P \vee Q \wedge R$$

$$(P \vee Q) \wedge R$$

句子到逻辑表达式的翻译

- 步骤：
 - 确定给定的句子**是否为命题**；
 - 找出各**原子命题**并确定句子中的连词为对应的**联结词**；
 - 用**正确的语法**把原命题表示成由原子命题、联结词和圆括号组成的公式。

句子到逻辑表达式的翻译

- 翻译下列命题：

(1) 他既聪明又用功。

(2) 他虽聪明但不用功。

解：

原子命题 P ：他聪明。

Q ：他用功。

则有：

(1) 翻译成： $P \wedge Q$

(2) 翻译成： $P \wedge \neg Q$

句子到逻辑表达式的翻译

- 除非有时间，我才去看电影
 - **A**: 我有时间。
 - **B**: 我去看电影。
 - 翻译为: $B \rightarrow A$
- 我不承认你是对的，除非太阳从西边出来
 - **A**: 我不承认你是对的。
 - **B**: 太阳从西边出来。
 - 翻译为: $\neg B \rightarrow A$

句子到逻辑表达式的翻译

- 如果你和他都不固执己见的话，那么不愉快的事情就不会发生了。
 - P : 你固执己见。
 - Q : 他固执己见。
 - R : 不愉快的事情不会发生。
 - 翻译为: $(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$
- 如果你和他不都是固执己见的话，那么不愉快的事情就不会发生了。
 - 翻译为: $\neg(P \wedge Q) \rightarrow R$

句子到逻辑表达式的翻译

- 除非你已满16周岁， 否则只要你的身高不足4英尺就不能乘公园滑行星穹铁道。
 - ***P***: 你能乘坐公园滑行星穹铁道。
 - ***Q***: 你身高不足4英尺。
 - ***R***: 你已满16周岁。
 - 翻译成:

$$(\neg R \wedge Q) \rightarrow \neg P$$

逻辑难题

- 一个岛上居住着两类人——骑士和流氓。骑士说的都是实话，而流氓只会说谎。你碰到两个人 A 和 B ，如果 A 说“ B 是骑士”， B 说“我们两个不是一类人”，请判断 A 、 B 到底是流氓还是骑士。
- 解：
 - 首先假设 P : A 是骑士； Q : B 是骑士
 - ① 如果 A 是骑士
 - ② 如果 A 是流氓

作业

- 第一章习题

- 1, 2, 3

- 4 (1) 、 (3)

- 6 (2) 、 (4)

- 9