

7. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $e^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 所确定, 则 $y''(0) =$ (A)

- A. -2. B. 2.
C. -3. D. 3.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \ln(1+x))^{\frac{2}{x}} =$ (C)

- A. ∞ . B. 1.
C. e^2 . D. e^{-2} .

9. 设函数 $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$, 则 (C)

- A. 函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$, 曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.
B. 函数 $f(x)$ 有极值点 $x=0$, 曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.
C. 函数 $f(x)$ 没有极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有拐点 $(0,0)$.
D. 函数 $f(x)$ 没有极值点, 曲线 $y=f(x)$ 没有拐点.

10. 下列各定积分不等于零的是 (C)

- A. $\int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{2-x}{2+x} dx$. B. $\int_{-1}^1 \frac{x \cos^3 x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.
C. $\int_0^{\frac{9\pi}{2}} \sin^9 x dx$. D. $\int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$.

A 卷第二题, B 卷第三题 (14 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{(\sqrt[3]{1 + \sin^3 x} - 1)(3 + \sin x)}$.

解 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{\frac{\sin^3 x}{3} \cdot 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin t^2 dt}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)^2 \cdot \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

A 卷第三题, B 卷第二题 (14 分)

(工数) 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^x \cos x}{1+x^2}$ 的通解.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y &= e^{-\int \frac{2x}{1+x^2} dx} \left(\int \frac{e^x \cos x}{1+x^2} e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{1+x^2} \left(\int \frac{e^x \cos x}{1+x^2} (1+x^2) dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{1+x^2} \left(\int e^x \cos x dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \right).
 \end{aligned}$$

A 卷第三题, B 卷第二题 (14 分)

(高数, 微积分) 求微分方程 $y'' + y' - 6y = (x+1)e^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$, 特征根 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$,

对应的齐次方程的通解 $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.

设原方程的特解 $y^* = x(ax+b)e^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x}$, 则

$$y^{*'} = (2ax^2 + (2a+2b)x + b)e^{2x}, \quad y^{*''} = (4ax^2 + (8a+4b)x + (2a+4b))e^{2x},$$

代入原方程整理, 得 $10ax + (2a+5b) = x+1$,

$$\text{所以 } a = \frac{1}{10}, b = \frac{4}{25},$$

$$\text{特解 } y^* = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x \right) e^{2x},$$

$$\text{原方程通解 } y = \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x \right) e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

A 卷第四题, B 卷第五题 (12 分)

四、(12 分) 设由曲线 $y = x^2 - 2x (1 \leq x \leq 2)$, 直线 $y = 0$ 及 $x = 1$ 所围成的平面图形为 D_1 ; 由曲线 $y = x^2 - 2x (2 \leq x \leq 3)$, 直线 $y = 0$ 及 $x = 3$ 所围成的平面图形为 D_2 .

(1) 求 D_1 的面积 A .

(2) 求 D_2 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积 V .

$$\text{解 (1)} \quad A = \int_1^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{3}.$$

$$(2) \quad V = \int_2^3 2\pi x(x^2 - 2x) dx = 2\pi \left(\frac{1}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \right) \Big|_2^3 = \frac{43}{6} \pi. \quad (\text{柱壳法})$$

$$\text{或 } V = 27\pi - \int_0^3 \pi (1 + \sqrt{1+y})^2 dy = \frac{43}{6} \pi. \quad (\text{截面法})$$

A 卷第五题, B 卷第四题 (12 分)

五、(12 分) 设 a 为实数, 讨论方程 $\ln^4 x - 4 \ln x + 4x - a = 0$ 的实根个数.

解 令 $f(x) = \ln^4 x - 4 \ln x + 4x - a$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $f(x)$ 可导, 且

$$f'(x) = \frac{4 \ln^3 x}{x} - \frac{4}{x} + 4 = 4 \cdot \frac{\ln^3 x - 1 + x}{x},$$

$$f'(1) = 0,$$

$x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调减少;

$x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调增加;

$f(1) = 4 - a$ 为 $f(x)$ 的极小值.

又注意到 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 所以

(1) 当 $4 - a < 0$, 即 $a > 4$ 时, 方程有两个实根;

(2) 当 $4 - a = 0$, 即 $a = 4$ 时, 方程有唯一实根;

(3) 当 $4 - a > 0$, 即 $a < 4$ 时, 方程没有实根.

A 卷第六题, B 卷第六题 (8 分)

六、(8 分) 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$, $f(0) = 0$, 求 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

解 $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \arcsin(t-1)^2 dt$,

$$I = \int_0^1 f(x) dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 xf'(x) dx = f(1) - \int_0^1 x \arcsin(x-1)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) \arcsin(x-1)^2 dx = \int_0^1 t \arcsin t^2 dt \quad (t=1-x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \arcsin u \, du \quad (u=t^2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(u \arcsin u \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$