离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

回顾

- 集合的定义
- 集合的描述
- 内涵与外延
- 集合的基数
- 集合间的关系
  - 相等
  - 包含、真包含
- 全集
- 补集
- 子集、幂集
- 集合的交并运算
- 集合的差分运算
- 集合对称差分运算

回顾

- 集合运算的**40**条规律
- 包含排斥原理

回顾—数学符号的书写与阅读

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

1 逻辑(Logic)

$\exists$ **there exists**

$\forall$ **for all**

$p \Rightarrow q$ p implies q / if p, then q

$p \Leftrightarrow q$ p if and only if q
p is equivalent to q
p and q are equivalent

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

2 集合(Sets)

$x \in A$　x belongs to A / x is an element (or a member) of A

$x \notin A$　x does not belong to A / x is not an element (or a member) of A

$A \subset B$　A is contained in B / A is a subset of B

$A \supset B$　A contains B / B is a subset of A

$A \cap B$　A cap B / A meet B/ A intersection B

$A \cup B$　A cup B/ A join B / A union B

B/A　A minus B/the difference between A and B

$A \times B$　A cross B / the Cartesian product of A and B(A与B的笛卡尔积)

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

3 实数(Real numbers)

$x+1$	x plus one
$x-1$	x minus one
$x \pm 1$	x plus or minus one
xy	xy / x multiplied by y
$(x-y)(x+y)$	x minus y, x plus y
$\frac{x}{y}$	x over y
$=$	the equals sign
$x=5$	x equals 5 / x is equal to 5
$x \neq 5$	x (is) not equal to 5
$x \equiv y$	x is equivalent to (or identical with) y

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

3 实数(Real numbers)

$x>y$	**x is greater than y**
$x\geq y$	**x is greater than or equal to y**
$x< y$	**x is less than y**
$x\leq y$	**x is less than or equal to y**
$0<x<1$	**zero is less than x is less than 1**
$0\leq x\leq 1$	**zero is less than or equal to x is less than or equal to 1**
$\lvert x\rvert$	**mod x / modulus x**
x^2	**x squared / x (raised) to the power 2**
x^3	**x cubed**
x^4	**x to the fourth / x to the power four**
x^n	**x to the nth / x to the power n**
x^{-n}	**x to the (power) minus n**

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

3 实数(Real numbers)

$n!$ **n factorial**

$(x+y)^2$ **x plus y all squared**

x_i **x_i / x subscript i / x suffix i / x sub i**

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ **the sum from i equals one to n a_i / the sum as i runs from 1 to n of the a_i**

$\left(\frac{x}{y}\right)^2$ **x over y all squared**

$\hat{x}$ **x hat** $\bar{x}$ **x bar** $\tilde{x}$ **x tilde**

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

4 线性代数(Linear algebra)

‖A‖	**the norm (or modulus) of x**
$\overrightarrow{OA}$	**OA / vector OA**
□ OA	**OA / the length of the segment OA**
A^T	**A transpose / the transpose of A**
A^{-1}	**A inverse / the inverse of A**

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

5 函数(Functions)

f(x)	fx / f of x / the function f of x
f : S→T	a function f from S to T
$x \mapsto y$	x maps to y / x is sent (or mapped) to y
f′(x)	f prime x / f dash x / the (rst) derivative of f with respect to x
f″(x)	f double–prime x / f double–dash x / the second derivative of f with respect to x
f‴(x)	f triple–prime x / f triple–dash x / the third derivative of f with respect to x
$F^{(4)}(x)$	four x / the fourth derivative of f with respect to x
ln y	log y to the base e / log to the base e of y / natural log (of) y

回顾

数学公式的读法(Pronunciation of mathematical expressions)

5 函数(Functions)

$\frac{\partial f}{\partial x_1}$ **the partial (derivative) of f with respect to x_1**

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ **the second partial (derivative) of f with respect to x_1**

$\int_0^\infty$ **the integral from zero to infinity**

$\lim_{x \to +0}$ **the limit as x approaches zero from above**

第四章 二元关系

- 本章讨论的关系（主要是二元关系），它仍然是一种集合，但它是比前一章更为复杂的集合。
- 关系是笛卡尔乘积的子集，它的元素是有序二元组的形式，这些有序二元组中的两个元素来自于两个不同或者相同的集合。因此，关系是建立在其它集合基础之上的集合。
- 关系中的有序二元组反映了不同集合中元素与元素之间的关系，或者同一集合中元素之间的关系。本章首先讨论关系的基本表达形式，然后给出关系的运算，最后讨论几种常用的关系。

回顾

- 集合
  - 子集
    - 幂集
  - 集合的补、并、交、差
  - 有序对
    - 笛卡尔积
      - 关系
        - 关系的自反、对称、传递性
        - 函数
          - 单射、满射、双射

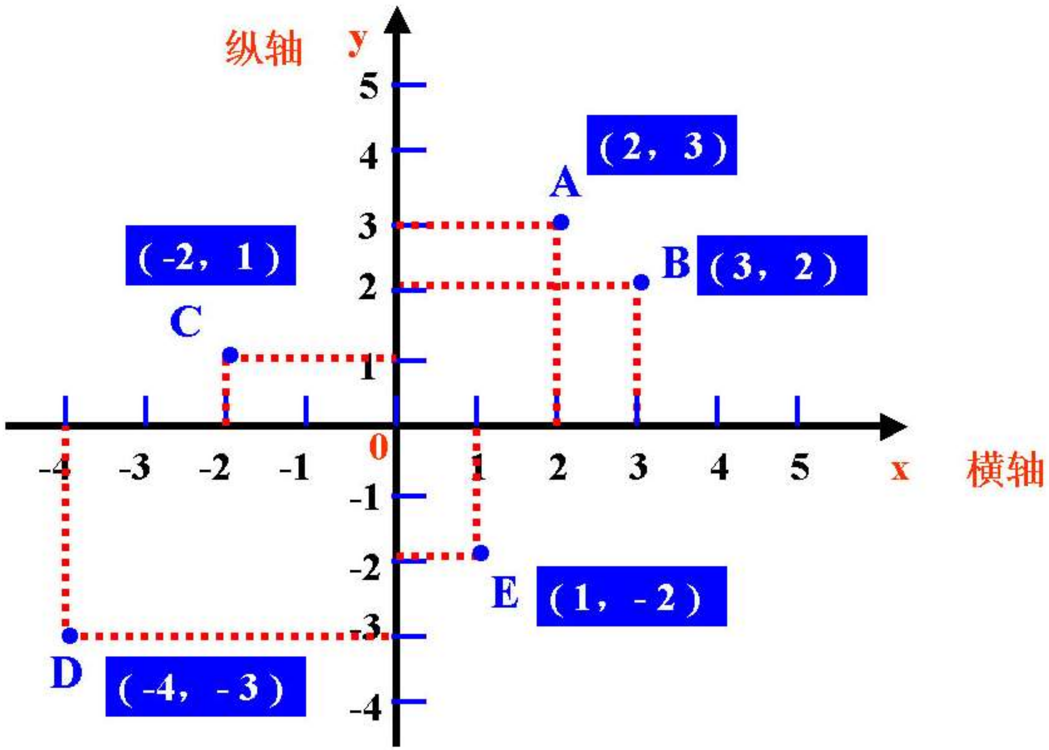
主要内容

- 序偶与迪卡尔乘积
- 关系的基本概念
- 关系的性质
- 关系的表示
- 关系的运算
- 合成关系的关系图、关系矩阵
- 特殊关系：等价关系和划分，相容关系和覆盖，偏序关系和哈斯图等。

4.1 多重序元与迪卡尔乘积

一、序偶

定义：由两个具有固定次序的客体组成的序列，称序偶，记作$<x,y>$。



$$\{2,3\}=\{3,2\}$$

$$<2,3>\neq<3,2>$$

一、序偶

序偶的相等：

$$\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle \Leftrightarrow ((x = a) \wedge (y = b))$$

序偶<**a,b**>中，**a**称为第一元素，**b**称为第二元素。两个元素不一定来自同一个集合，他们可以代表不同类型的事务。

二、多重序元

定义：***n***重序元是一个序偶，它的第一元素是**(*n*-*1*)**重序元。

3重序元：**<<*x*,*y*>,*z*>**，简单记作**<*x*,*y*,*z*>**

n重序元：$<<x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}>,x_n>$

n重序元的相等：

$$\langle\langle x_1,x_2\ldots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle=\langle\langle a_1,a_2\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle\Leftrightarrow$$
$$((x_1=a_1)\wedge(x_2=a_2)\wedge\ldots\wedge(x_n=a_n))$$

三、迪卡尔乘积

定义：设***A***和***B***是任意两个集合。若序偶的第一个元素是***A***的一个元素，第二个元素是***B***的一个元素，则所有这样的序偶集合，称为***A***和***B***的笛卡尔乘积，记作 $A \times B$ ，即

$$A \times B = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

若A中有m个元素，B中有n个元素， **A**和**B**的笛卡尔乘积中元素个数为？

例：设$A=\{\alpha,\beta\},B=\{1,2\}$，求$A\times B, B\times A, A\times A, (A\times B)\bigcap(B\times A)$.

解：$A\times B=\{\langle\alpha,1\rangle,\langle\alpha,2\rangle,\langle\beta,1\rangle,\langle\beta,2\rangle\}$

$B\times A=\{\langle 1,\alpha\rangle,\langle 2,\alpha\rangle,\langle 1,\beta\rangle,\langle 2,\beta\rangle\}$

$A\times A=\{\langle\alpha,\alpha\rangle,\langle\beta,\beta\rangle,\langle\alpha,\beta\rangle,\langle\beta,\alpha\rangle\}$

$(A\times B)\bigcap(B\times A)=\varnothing$

三、迪卡尔乘积

例：设$A=\{\alpha,\beta\}$, $B=\{1,2\}$和$C=\{c\}$,

试求$(A\times B)\times C$和$A\times(B\times C)$

解:$(A\times B)\times C=\{\langle\alpha,1\rangle,\langle\alpha,2\rangle,\langle\beta,1\rangle,\langle\beta,2\rangle\}\times\{c\}$

$=\{\langle\langle\alpha,1\rangle,c\rangle,\langle\langle\alpha,2\rangle,c\rangle,\langle\langle\beta,1\rangle,c\rangle,\langle\langle\beta,2\rangle,c\rangle\}$

$A\times(B\times C)=\{\alpha,\beta\}\times\{\langle 1,c\rangle,\langle 2,c\rangle\}$

$=\{\langle\alpha,\langle 1,c\rangle\rangle,\langle\alpha,\langle 2,c\rangle\rangle,\langle\beta,\langle 1,c\rangle\rangle,\langle\beta,\langle 2,c\rangle\rangle\}$

可见

$$(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$$

三、迪卡尔乘积

定理：设有***A,B,C***三个集合，则

$$(a)\ A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$$

$$(b)\ A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$$

$$(c)\ (A\bigcup B)\times C=(A\times C)\bigcup(B\times C)$$

$$(d)\ (A\bigcap B)\times C=(A\times C)\bigcap(B\times C)$$

证：设$\langle x,y\rangle$是$A\times(B\bigcup C)$的任意元素，根据$\wedge$对$\vee$的分配律，有：

$$\langle x,y\rangle\in A\times(B\bigcup C)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\bigcup C$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$$

$$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A)\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in(A\times B)\bigcup(A\times C)$$ 得证。

n个集合的迪卡尔乘积

定义：集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$的笛卡尔乘积可以表示成

$$\underset{i \in I_n}{X} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots A_n$$

$$= ((A_1 \times A_2) \times A_3) \times \cdots \times A_n$$

$$= \{\langle x_1, x_2, \cdots, x_n \rangle \mid x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \cdots \wedge x_n \in A_n\}$$

集合**A**的笛卡尔乘积$A \times A$ 记作$\mathbf{A}^2$,类推

$$A \times A \times A = A^3$$

如果所有的集合$\mathbf{A_i}$都是有限集合，则他们笛卡尔乘积的基数为：

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1||A_2|\cdots|A_n|$$

4.2关系的基本概念

一、关系的定义

定义：设$n \in I_+$且$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为$\boldsymbol{n}$个任意集合，

$$R \subseteq \mathop{X}_{i=1}^{n} A_i$$

(a) 称$\boldsymbol{R}$为$A_1, A_2, \cdots, A_n$间的$\boldsymbol{n}$元关系；

(b) 若$\boldsymbol{n=2}$，则称$\boldsymbol{R}$为$\boldsymbol{A_1}$到$\boldsymbol{A_2}$的二元关系；

(c) 若$R = \varnothing$，则称$\boldsymbol{R}$为空关系；若$R = \mathop{X}_{i=1}^{n} A_i$，则称$\boldsymbol{R}$为全关系；

(d) 若$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$，则称$\boldsymbol{R}$为$\boldsymbol{A}$上的$\boldsymbol{n}$元关系。

一、关系的定义

例：令 $R_1 = \{\langle 2n \rangle \mid n \in N\}$

$$R_2 = \{\langle n, 2n \rangle \mid n \in N\}$$

$$R_3 = \{\langle n, m, k \rangle \mid n, m, k \in N \wedge n^2 + m^2 = k^2\}$$

则称$\boldsymbol{R_1}$是$\boldsymbol{N}$上的一元关系，$\boldsymbol{R_2}$是$\boldsymbol{N}$上的二元关系，$\boldsymbol{R_3}$是$\boldsymbol{N}$上的三元关系。

如无特殊指定，“关系”概指二元关系。

若序偶$\langle x, y\rangle$属于$\boldsymbol{R}$，则记作$\langle x, y\rangle \in R$ 或 xRy ，否则，记作$\langle x, y\rangle \notin R$ 或 $x \not{R} y$。

一、关系的定义

例：设集合**A={a,b},B={2,5,8}**

则 $A\times B=\{\langle a,2\rangle,\langle a,5\rangle,\langle a,8\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,5\rangle,\langle b,8\rangle\}$

令 $\rho_1=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,8\rangle\}$ $\rho_2=\{\langle a,5\rangle\}$

则 ρ_1,ρ_2 均是由***A***到***B***的关系。

同理，$\rho_3=\{\langle 2,a\rangle,\langle 5,b\rangle\}\subseteq B\times A$

则 ρ_3是由***B***到***A***的关系。

同理，$\rho_4=\{\langle 2,2\rangle,\langle 5,8\rangle\}\subseteq B\times B$

则 ρ_4是由***B***到***B***的关系。

一、关系的定义

例：设集合A={2,3,5,9}，试给出集合A上的小于或等于关系，大于或等于关系。

解：令集合A上的小于或等于关系为R_1，大于或等于关系为R_2，根据定义有：

$$R_1 = \{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 9,9\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 2,9\rangle,\langle 3,5\rangle,\langle 3,9\rangle,\langle 5,9\rangle\}$$

$$R_2 = \{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 9,9\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 5,2\rangle,\langle 9,2\rangle,\langle 5,3\rangle,\langle 9,3\rangle,\langle 9,5\rangle\}$$

二、关系的相等

定义：设R_1为$A_1,A_2,\ldots,A_n$间的n元关系，R_2为$B_1,B_2,\ldots,B_m$间的m元关系，如果：

（1）$n=m$

（2）若$1 \le i \le n$，则 $A_i = B_i$

（3）把R_1和R_2作为集合看，$R_1=R_2$。

则称n元关系R_1和m元关系R_2相等，记作$R_1=R_2$

二、关系的相等

例：设$\boldsymbol{R_1}$为从$\boldsymbol{Z}$到$\boldsymbol{I_+}$的二元关系，$\boldsymbol{R_2}$和$\boldsymbol{R_3}$都是$\boldsymbol{I}$上的二元关系

$$R_1 = \{\langle n, m\rangle \mid n \in Z \wedge m \in I \wedge m = n+1\}$$

$$R_2 = \{\langle n, n+1\rangle \mid n \in I \wedge n \geq 0\}$$

$$R_3 = \{\langle |n|, |n|+1\rangle \mid n \in I\}$$

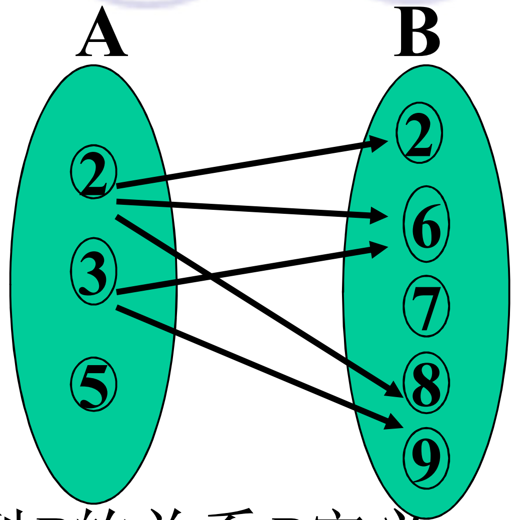
从集合的观点来看，$\boldsymbol{R_1=R_2=R_3}$。

但是就二元关系来说，$\boldsymbol{R_2=R_3}$，不等于$\boldsymbol{R_1}$。

三、关系的定义域和值域

关系***R***(从***A***到***B***的关系)的定义域(简称为域)定义为：

$$D(R)=\{x \mid (\exists y)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$



关系***R***的值域定义为：

$$R(R)=\{y \mid (\exists x)(\langle x, y\rangle \in R)\}$$

显然，有 $D(R) \subseteq A, R(R) \subseteq B$

例：设***A***={2,3,5},***B***={2,6,7,8,9}，由***A***到***B***的关系***R***定义为：当且仅当***a***整除***b***时，有***aRb***。

可得: $R=\{\langle 2,2\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 3,9\rangle\}$

D(R)={2,3}

R(R)={2,6,8,9}

四、关系的性质

定义：设***R***为***A***上的二元关系

(1)若对每个$x \in A$，皆有$\langle x,x\rangle \in R$，则称***R***为自反的。用式子来表述即是：

$$\boldsymbol{R}\text{是自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to \langle x,x\rangle \in R)$$

(2)若对每个$x \in A$，皆有$\langle x,x\rangle \notin R$，则称***R***为反自反的。用式子来表述即是：

$$\boldsymbol{R}\text{是反自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to \langle x,x\rangle \notin R)$$

四、关系的性质

(3) 对任意的$x, y \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R$，则$\langle y, x\rangle \in R$，就称***R***为对称的。用式子来表述即是：

R是对称的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \rightarrow \langle y, x\rangle \in R)$

(4) 对任意的$x, y \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, x\rangle \in R$，则***x=y***，就称***R***为反对称的。用式子来表述即是：

R是反对称的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x, y \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, x\rangle \in R \rightarrow x = y)$

四、关系的性质

(5) 对任意的 $x, y, z \in A$，若$\langle x, y\rangle \in R$且$\langle y, z\rangle \in R$，则$\langle x, z\rangle \in R$，就称***R***为可传递的。用式子来表述即是：

R是可传递的$\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x, y, z \in A \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$

(6) 存在 $x, y, z \in A$，并且$\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R$而$\langle x, z\rangle \notin R$，就称***R***为不可传递的。用式子来表述即是：

R是不可传递的$\Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \notin R)$

四、关系的性质

例1：考虑自然数集合上的普通相等关系“=”，大于关系“>”和大于等于关系“≥”具有的性质。

解：(1) “=”关系是自反的、对称的、反对称的、可传递的；

(2)“>”关系是反自反的、反对称的、可传递的；

(3)“≥”关系是自反的、反对称的、可传递的。

例2：空集上的二元关系的性质。

自反的、对称的、反对称的、反自反的、可传递的

区分概念：空关系vs空集上的关系

空关系：对于任何集合A, 称空集为A上的空关系.

性质：若A非空，空关系是反自反的，对称的，反对称的，可传递的；

若A是空集，该空关系是自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

空集上的关系：自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的。在空集上可定义任意元关系。

- 作业：
- **P102：1-10**（奇数）