第六章 代数系统

大连理工大学软件学院

陈志奎 教授

办公室： 综合楼405，Tel：62274392
实验室：综合楼
Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com

回顾

- 二元运算
- **N-**元运算
- 代数系统
- 代数系统的基本性质

- 6.3 同态与同构
- 定义**6.3.1** 设$\langle X, \odot\rangle$与$\langle Y, *\rangle$是同类型的。称$\langle X, \odot\rangle$同态于$\langle Y, *\rangle$或$\langle Y, *\rangle$为$\langle X, \odot\rangle$的同态象，记为$\langle X, \odot\rangle \simeq \langle Y, *\rangle$，其定义如下：
- $\langle X, \odot\rangle \simeq \langle Y, *\rangle$：$(\exists f)(f \in Y^X \wedge (\forall x_1)(\forall x_2)(x_1, x_2 \in X \to f(x_1 \odot x_2) = f(x_1) * f(x_2)))$

其中Y^X表示从X到Y的函数.

- 同时，称f为从$\langle X, \odot \rangle$到$\langle Y, * \rangle$的同态映射。
- 可以看出，同态映射f不必是惟一的。
- 例6.3.1 给定$\langle I, + \rangle$和$\langle S, \oplus \rangle$，其中$I$是整数集合，+是加法运算，$S=\{0,1\}$，$\oplus$定义如下，试证$\langle I, + \rangle \simeq \langle S, \oplus \rangle$。

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

- 两个同类型的代数结构间的同态定义不仅适用于具有一个二元运算的代数结构，也可以推广到具有多个二元运算的任何两个同类型代数结构。例如，对于具有两个二元运算的两个同类型代数结构$\langle X, \odot, * \rangle$和$\langle Y, \oplus, \otimes \rangle$的同态定义如下：
- $\langle X, \odot, * \rangle \simeq \langle Y, \oplus, \otimes \rangle$:
- $(\exists f)(f \in Y^X \wedge (\forall x_1)(\forall x_2)$
$(x_1, x_2 \in X \to (f(x_1 \odot x_2)$
$= f(x_1) \oplus f(x_2) \wedge f(x_1 * x_2) = f(x_1) \otimes f(x_2)))$
- 同样，f称为从$\langle X, \odot, * \rangle$到$\langle Y, \oplus, \otimes \rangle$的同态映射。

- 例6.3.2 给定$\langle Z,+,\times\rangle$，其中$Z$为整数集合，+和×是一般的加法和乘法运算。又有$\langle Z_m,+_m,\times_m\rangle$，
- 这里$Z_m=\{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$，$+_m$和$\times_m$分别是模$m$加法和模$m$乘法，它们详细定义如下:
- $a +_m b = (a+b)(\mathrm{mod}\ m)$
- $a \times_m b = (a\times b)(\mathrm{mod}\ m)$ 其中a，$b\in Z_m$

- 现在定义函数$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{Z_m}^{\boldsymbol{Z}}: \boldsymbol{f}(\boldsymbol{i}) = (\boldsymbol{i})(\mathbf{mod}\,\boldsymbol{m})$，其中$\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{Z}$
- 试证 $\langle \boldsymbol{Z}, +, \times \rangle \simeq \langle \boldsymbol{Z_m}, +_{\boldsymbol{m}}, \times_{\boldsymbol{m}} \rangle$。
- 定理6.3.1 如果 $\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle \simeq \langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$ 且$\boldsymbol{f}$为其同态映射，则$\langle \boldsymbol{R}(\boldsymbol{f}), * \rangle$是$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的子代数系统。
- 由于函数$\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{X}}$的不同性质，将给出不同种类的同态定义。

- 定义**6.3.2** 设$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle \simeq \langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$且$\boldsymbol{f}$为其同态映射。
- **(*i*)**如果$\boldsymbol{f}$为满射，则称$\boldsymbol{f}$是从$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle$到$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的满同态映射。
- **(*ii*)**如果$\boldsymbol{f}$为单射**(**或一对一映射**)**，则称$\boldsymbol{f}$为从$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle$到$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的单一同态映射。
- **(*iii*)**如果$\boldsymbol{f}$为双射**(**或一一对应**)**，则称$\boldsymbol{f}$为从$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle$到$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的同构映射。
- 显然，若$\boldsymbol{f}$是从$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle$到$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的同构映射，则$\boldsymbol{f}$为从$\langle \boldsymbol{X}, \odot \rangle$到$\langle \boldsymbol{Y}, * \rangle$的满同态映射及单一同态映射，反之亦然。

- 例6.3.3 设$\langle \boldsymbol{\Sigma}^*, // \rangle$与$\langle \boldsymbol{N}, + \rangle$是同类型的，其中$\boldsymbol{\Sigma}^*$为有限字母表上的字母串集合，//为并置运算，$N$为自然数集合，+为普通加法。若定义$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Sigma}^* \to \boldsymbol{N}$为$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$其中$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$
- 这里$|\boldsymbol{x}|$表示字母串的长度。
- 因为对任意$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\Sigma}^*$，有$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}//\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}//\boldsymbol{y}| = |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}| = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$，故$\langle \boldsymbol{\Sigma}^*, // \rangle \simeq \langle \boldsymbol{N}, + \rangle$。
- 显然，f是满射，因此，f为从$\langle \boldsymbol{\Sigma}^*, // \rangle$到$\langle \boldsymbol{N}, + \rangle$的满同态映射。

- 例6.3.4 给定$\langle Z,+\rangle$，其中Z为整数集合，+为一般加法。作函数$f \in Z^Z: f(x) = kx$, 其中x, $k \in Z$
- 则当$k \neq 0$时，f为$\langle Z,+\rangle$到$\langle Z,+\rangle$的单一同态映射。当$k = -1$或$k = 1$时，f为从$\langle Z,+\rangle$到$\langle Z,+\rangle$的同构映射。
- 综上可以看出，同态映射具有一个特性，即“保持运算”。对于满同态映射来说，它能够保持运算的更多性质。为此，给出如下定理：

- 定理**6.3.2** 给定$\langle \boldsymbol{X}, \odot, * \rangle \simeq \langle \boldsymbol{Y}, \oplus, \otimes \rangle$且$\boldsymbol{f}$为其满同态映射，则
- **(*a*)**如果⊙和*满足结合律，则⊕和⊗也满足结合律。
- **(*b*)**如果⊙和*满足交换律，则⊕和⊗也满足交换律。
- **(*c*)**如果⊙对于*或*对于⊙满足分配律，则⊕对于⊗或⊗对于⊕也相应满足分配律。
- **(*d*)**如果⊙对于*或*对于⊙满足吸收律，则⊕对于⊗或⊗对于⊕也满足吸收律。

- (e)如果⊙和*满足等幂律，则⊕和⊗也满足等幂律。
- (f)如果e_1和e_2分别是关于⊙和*的幺元，则$f(e_1)$和$f(e_2)$分别为关于⊕和⊗的幺元。
- (g)如果θ_1和θ_2分别是关于⊙和*的零元，则$f(\theta_1)$和$f(\theta_2)$分别为关于⊕和⊗的零元。
- (h)如果对每个$x \in X$均存在关于⊙的逆元x^{-1}，则对每个$f(x) \in Y$ 也均存在关于⊕的逆元$f(x^{-1})$；如果对每个$z \in X$均存在关于*的逆元z^{-1}，则对每个$f(z) \in Y$也均存在关于⊗的逆元$f(z^{-1})$。

- 定义6.3.3 设$\langle X,\odot\rangle$与$\langle Y,*\rangle$是同类型的。称$\langle X,\odot\rangle$同构于$\langle Y,*\rangle$，记为$\langle X,\odot\rangle\cong\langle Y,*\rangle$，其定义如下：
- $\langle X,\odot\rangle\cong\langle Y,*\rangle$：$(\exists f)$($f$为从$\langle X,\odot\rangle$到$\langle Y,*\rangle$的同构映射)或更详细地定义为：
- $\langle X,\odot\rangle\cong\langle Y,*\rangle$：$(\exists f)(f\in Y^X\wedge f$为双射$\wedge f$为从$\langle X,\odot\rangle$到$\langle Y,*\rangle$的同态映射)
- 由定义可知，同构的条件比同态强，关键是同构映射是双射，即一一对应。而同态映射不一定要求是双射。正因为如此，同构不再仅仅象满同态那样对保持运算是单向的了，而对保持运算成为双向的。两个同构的代数，表面上似乎很不相同，但在结构上实际是没有什么差

别，只不过是集合中的元素名称和运算的标识不同而已，而它们的所有发生“彼此相通”。这样，当探索新的代数结构的性质时，如果发现或者能够证明该结构同构于另外一个性质已知的代数结构，便能直接地知道新的代数结构的各种性质了。对于同构的两个代数系统来说，在它们的运算表中除了元素和运算的标记不同外，其它一切都是相同的。因此，可以根据这些特征来识别同构的代数系统。

- 例6.3.5 令$\langle F,\bigcirc\rangle$与$\langle Z_4,+_4\rangle$是同类型的，其中$F=\{f^0, f^1, f^2, f^3\}$，“$\bigcirc$”定义如表6.3.1所示；$Z_4=\{[0], [1], [2], [3]\}$，$+_4$定义如表6.3.2，
- 试说明$\langle F,\bigcirc\rangle \cong \langle Z_4,+_4\rangle$。
- 表6.3.1

$\bigcirc$	f^0	f^1	f^2	f^3
f^0	f^0	f^1	f^2	f^3
f^1	f^1	f^2	f^3	f^0
f^2	f^2	f^3	f^0	f^1
f^3	f^3	f^0	f^1	f^2

表6.3.2

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

- 例6.3.6 给定 $\langle S,\cap,\cup\rangle$，其中$S=\{\varnothing$，$A$，$B$，$C\}$，$\cup$和$\cap$是一般的集合运算；又有$\langle T,\oplus,\otimes\rangle$，这里$T=\{1$，$2$，$5$，$10\}$，且对于$a,b\in T$有 $a\oplus b=\mathrm{lcm}\{a,b\}$，$a\otimes b=\mathrm{gcd}\{a,b\}$，表6.3.3至表6.3.6给出四个运算表。试说明 $\langle S,\cap,\cup\rangle\cong\langle T,\oplus,\otimes\rangle$
- 其中$\mathrm{lcm}\{a,b\}$表示a和b的最小公倍数，
- $\mathrm{gcd}\{a,b\}$表示a和b的最大公约数.

表6.3.3

$\cup$	$\varnothing$	A	B	C
$\varnothing$	$\varnothing$	A	B	C
A	A	A	C	C
B	B	C	B	C
C	C	C	C	C

表6.3.4

$\cap$	$\varnothing$	A	B	C
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
A	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A
B	$\varnothing$	$\varnothing$	B	B
C	$\varnothing$	A	B	C

表6.3.5

$\oplus$	1	2	5	10
1	1	2	5	10
2	2	2	10	10
5	5	10	5	10
10	10	10	10	10

表6.3.6

$\otimes$	1	2	5	10
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
5	1	1	5	5
10	1	2	5	10

- 通过对 4 张表的考察我们来构造以下的证明：
- 定义$\boldsymbol{f}: \{\cap,\cup\} \rightarrow \{\oplus,\otimes\}$
- 并且令$\boldsymbol{f}(\cap) = \otimes, \boldsymbol{f}(\cup) = \oplus$
- 显然$\boldsymbol{f}$是个双射函数．再令
- $\boldsymbol{g}: \{\varnothing，\boldsymbol{A}，\boldsymbol{B}，\boldsymbol{C}\} \rightarrow \{\mathbf{1}，\mathbf{2}，\mathbf{5}，\mathbf{10}\}$并且给定为：
- $\boldsymbol{g}(\emptyset) = \mathbf{1},\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{5}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{C}) = \mathbf{10}$
- 显然$\boldsymbol{g}$是个双射函数，可以一一验证$\boldsymbol{g}$满足运算的象等于象的运算．

- $g(\emptyset \cap A) = g(\emptyset) = 1$
- $g(\emptyset) \otimes g(A) = 1 \otimes 2 = 1$
- $g(\emptyset \cap B) = g(\emptyset) = 1$
- $g(\emptyset) \otimes g(B) = 1 \otimes 5 = 1$
- $g(\emptyset \cap C) = g(\emptyset) = 1$
- $g(\emptyset) \otimes g(C) = 1 \otimes 10 = 1$
- $g(A \cap B) = g(\emptyset) = 1$
- $g(A) \otimes g(B) = 2 \otimes 5 = 1$
- $g(A \cap C) = g(A) = 2$
- $g(A) \otimes g(C) = 2 \otimes 10 = 2$
- …

- 对 $\cup$ 和 $\oplus$ 作以下的验证：
- $\boldsymbol{g(\emptyset \cup A) = g(A) = 2}$
- $\boldsymbol{g(\emptyset) \oplus g(A) = 1 \oplus 2 = 2}$
- $\boldsymbol{g(\emptyset \cup B) = g(B) = 5}$
- $\boldsymbol{g(\emptyset) \oplus g(B) = 1 \oplus 5 = 5}$
- $\boldsymbol{g(\emptyset \cup C) = g(C) = 10}$
- $\boldsymbol{g(\emptyset) \oplus g(C) = 1 \oplus 10 = 10}$
- …
- 综上，$\langle \boldsymbol{S}, \cap, \cup \rangle \cong \langle \boldsymbol{T}, \oplus, \otimes \rangle$.

- 定理**6.3.3** 代数系统间的同构关系是等价关系。
- 由于同构关系是等价关系，故令所有的代数系统构成一个集合***S***，于是可按同构关系将其分类，得到商集$S/\cong$。因为同构的代数系统具有相同的性质，故实际上代数系统所需要研究的总体并不是***S***而是$S/\cong$。
- 在同态与同构中有一个特例，即具有相同集合的任两个代数系统的同态与同构，这便是自同态与自同构。

- 定义6.3.4 给定$\langle S, \odot\rangle$及$f \in S^S$。
- f为自同态映射：f为从$\langle S, \odot\rangle$到$\langle S, \odot\rangle$的同态映射。
- f为自同构映射：f为从$\langle S, \odot\rangle$到$\langle S, \odot\rangle$的同构映射。
- 例6.3.7 在例6.3.4中，当$k \neq 0$时，$f = kx$是从$\langle Z, +\rangle$到$\langle Z, +\rangle$的自同态映射；当$k = 1$或$k = -1$时，$f = kx$是从$\langle Z, +\rangle$到$\langle Z, +\rangle$的自同构映射。

作业

- **150**页，**9-13**