离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

离散数学

第一章 命题逻辑

回顾

- 命题变元
- 合式公式
- 重言式—永真式
- 矛盾式—永假式
- 永真蕴含式
- 代入规则
- 替换规则
- 常用逻辑恒等式（30）
- 常用永真蕴含式（16）

1.5对偶原理

- 定义：

  设有公式A，其中仅含有联结词$\neg$、$\wedge$和$\vee$，在A中将$\wedge, \vee, T, F$分别换以$\vee, \wedge, F, T$得公式A^*，则称A^*为A的对偶式。

- 注意:求对偶式并不要求将“非”变原，而且对偶式是相互的。
- 举例：
  - 求 $\neg P \vee (Q \wedge R)$的对偶式

$$\neg P \wedge (Q \vee R)$$

  - 求 $P \vee F$ 的对偶式 $P \wedge T$

对偶原理

- **定理1.5-1：**

  设A和A^*互为对偶式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$是出现于A和A^*中的所有命题变元，于是有：

  $$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \qquad (1)$$

  $$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \qquad (2)$$

- **证明：**
  - 由德•摩根律 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
    $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
  - 可知，对公式A求否定，直到¬深入到命题变元之前位置，在这个过程中，所有的∨变∧，∧变∨，T变F，F变T。得证(1)。

对偶原理

- 定理**1.5-2:**

  若 $A \Leftrightarrow B$，且 A，B 为命题变元 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ 及联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 构成的公式，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$

- 证明：
  - $A \Leftrightarrow B$ 意味着 $A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 永真
  - 于是有 $\neg A(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ 永真
  - 由定理1.5-1知，下式也永真

    $$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n) \leftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \ldots, \neg P_n)$$

  - 利用带入规则，以 $\neg P_i (i=1,2,\ldots,n)$ 取代 P_i，得永真

    $$A^*(P_1, P_2, \ldots, P_n) \leftrightarrow B^*(P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

$$A^* \Leftrightarrow B^*$$

对偶原理

例：已知 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，试证

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P \wedge Q$$

证明：设 $A = (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q))$

$B = \neg P \vee Q$

则 $A^* = (P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q))$

$B^* = \neg P \wedge Q$

由于，$A \Leftrightarrow B$

因此，$A^* \Leftrightarrow B^*$

对偶原理

- 试证明：$(1)(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow T$

  $(2)(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$

证明：$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q) \vee (\neg P \vee Q) \qquad E_{27}$

$\Leftrightarrow \neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \vee Q) \qquad E_{26}$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \vee (\neg P \vee Q) \qquad E_{11}, E_{12}$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge ((P \vee Q) \vee (\neg P \vee Q)) \quad E_{8}$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee Q) \wedge (P \vee Q \vee \neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee T) \wedge (Q \vee T) \qquad E_{17}, E_{19}$

$\Leftrightarrow T \wedge T \qquad E_{17}, E_{19}$

$\Leftrightarrow T \qquad E_{16}$

对偶原理

- 试证明：$(1)(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow T$

  $(2)(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$

证明: $(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg P \wedge Q) \qquad E_{26}$

由$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)) \vee (\neg P \vee Q) \qquad E_{11}, E_{12}$

知$(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q)$和$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$互为对偶式

由于T的对偶式是F，因此由定理1.5–1知

$(P \leftrightarrow Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F$

对偶原理

- 定理**1.5-3:**

  若$A \Rightarrow B$，且A、B为命题变元$P_1, P_2, \cdots, P_n$及联结词$\wedge, \vee, \neg$构成的公式，则$B^* \Rightarrow A^*$.

- 证明：
  - $A \Rightarrow B$ 意味着 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \to B(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 永真
  - 由逆反律得 $\neg B(P_1, P_2, \cdots, P_n) \to \neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 永真
  - 根据定理1.5-1
  - $B^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \to A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$ 永真
  - 利用带入规则，以$\neg P_i (i = 1, 2 \cdots, n)$ 取代P_i，得
  - $B^*(P_1, P_2, \cdots, P_n) \to A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$ 永真
  - 即 $B^* \Rightarrow A^*$

1.6范式和判定问题

公式的标准形式——范式

用来在有限步内判定公式永真、永假、可满足的

析取范式和合取范式

- 定义：
  - 若一个命题公式是一些命题变元及其否定的积，则称之为基本积；若这个命题公式是一些变元及其否定之和，称为基本和。

    [illegible]

    [illegible]

  - 一个由基本积的和组成的公式，如果与给定的公式*A*等价，则称它是*A*的析取范式。

    [illegible]

  - 一个由基本和的积组成的公式，如果与给定的命题公式*A*等价，则称它是*A*的合取范式。

    [illegible]

析取范式和合取范式

- 定理**1.6-1**： 一个基本积是永假式，当且仅当它含有 $P, \neg P$形式的两个因子。
- 证明：
  - （充分性）由于$P \wedge \neg P$是永假式，而 $Q \wedge F \Leftrightarrow F$，所以含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子时基本积是永假式。
  - （必要性）用反证法。设基本积为假但不含P和 $\neg P$形式的因子，于是给这个基本积中的命题变元指派真值*T*，给带有否定的命题变元指派真值*F*，得基本积的真值是*T*，与假设矛盾。证毕。

析取范式和合取范式

- 定理**1.6-2**：一个基本和是永真式，当且仅当它含有 $P, \neg P$ 形式的两个因子。

析取范式和合取范式

例：求命题公式$P \wedge (Q \rightarrow R)$的析取范式

解： $P \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee R)$

/*这是一个合取范式*/

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R)$

/*使用与对或的分配律，化成析取范式*/

析取范式与合取范式

例：求命题公式$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$的合取范式

解：$(\neg P \wedge Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \vee (\neg(\neg P \wedge Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q))$

/*消$\leftrightarrow$*/

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee Q)) \vee ((P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge \neg Q))$

/*消$\rightarrow$ 并且否定深入到单个变元前*/

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$ /*析取范式*/

$\Leftrightarrow ((\neg P \wedge Q) \vee P) \wedge ((\neg P \wedge Q) \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

/*使用或对与的分配律及补余律，现在是合取范式的形式*/

析取范式和合取范式

[illegible]

解： $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q) \vee \neg(\neg(P \vee Q)) \wedge \neg(P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$

$\Leftrightarrow F \vee (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

$\Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q)$

$\Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee Q \wedge \neg Q$

$\Leftrightarrow F \vee \neg P \wedge Q \vee P \wedge \neg Q \vee F$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

析取范式和合取范式

解：令$A \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$，那么

$\neg A \Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (P \vee Q))$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee (\neg(\neg(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)))$

$\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q$

由于$A \Leftrightarrow \neg\neg A = \neg(\neg P \wedge \neg Q \vee P \wedge Q)$

所以$A \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

主析取范式

- 定义**1.6-4**： 在含*n*个变元的基本积中，若每个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为<u>极小项</u>。
- 例：
  - 两个命题变元*P*、*Q*的极小项为

[illegible]

- *n*个变元，极小项个数2^n

主析取范式

- 假定有***P***、***Q***、***R***三个变元

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	— 000	0
$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	— 001	1
$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	— 010	2
$\neg P \wedge Q \wedge R$	— 011	3
$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	— 100	4
$P \wedge \neg Q \wedge R$	— 101	5
$P \wedge Q \wedge \neg R$	— 110	6
$P \wedge Q \wedge R$	— 111	7

主析取范式

- 每个极小项只有一个真值指派使其为T
- 任何两个极小项的合取必为假（因为在2^n种真值指派中，只有一个极小项取值为真）
- 所有极小项的析取必为真

主析取范式

- 定义**1.6-5**：一个由极小项的和组成的公式，如果与命题公式*A*等价，则称它是公式*A*的主析取范式。

- 对任何命题公式(永假式除外)都可求得与其等价的主析取范式，而且主析取范式的形式唯一。

主析取范式

- 求主析取范式的方法：
  - 先化成与其等价的析取范式；
  - 若析取范式的基本积中同一命题变元出现多次，则将其化成只出现一次；
  - 去掉析取范式中所有为永假式的基本积，即去掉基本积中含有形如$P\wedge\neg P$的子公式的那些基本积；
  - 若析取范式中缺少某一命题变元如P，则可用公式 $(P\vee\neg P)\wedge Q\Leftrightarrow Q$ 将命题变元P补充进去，并利用分配律展开，然后合并相同的基本积

主析取范式

$$A \Leftrightarrow P \wedge Q \vee R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge R$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge R) \vee (\neg P \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$\vee (\neg P \wedge R) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow (P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

$$\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1$$

$$\Leftrightarrow \sum (1,3,5,6,7)$$

主析取范式

- 主析取范式和真值表的关系：
- 右图为 $A \Leftrightarrow P\wedge Q\vee R$ 对应的真值表：

P	Q	R	极小项	$P\wedge Q\vee R$
0	0	0	$\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	0
0	0	1	$\neg P\wedge\neg Q\wedge R$	1
0	1	0	$\neg P\wedge Q\wedge\neg R$	0
0	1	1	$\neg P\wedge Q\wedge R$	1
1	0	0	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	0
1	0	1	$P\wedge\neg Q\wedge R$	1
1	1	0	$P\wedge Q\wedge\neg R$	1
1	1	1	$P\wedge Q\wedge R$	1

主合取范式

- 定义**1.6-6**： 在含*n*个变元的基本和中，若每个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本和为<u>极大项</u>。
- 例：
  - 两个命题变元*P*、*Q*的极大项为

[illegible]

- n个变元，极大项个数2^n

主合取范式

- 假定有***P***、***Q***、***R***三个变元

$P \vee Q \vee R$	— 000	0
$P \vee Q \vee \neg R$	— 001	1
$P \vee \neg Q \vee R$	— 010	2
$P \vee \neg Q \vee \neg R$	— 011	3
$\neg P \vee Q \vee R$	— 100	4
$\neg P \vee Q \vee \neg R$	— 101	5
$\neg P \vee \neg Q \vee R$	— 110	6
$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$	— 111	7

- 每个极大项只有一组真值指派使其为F
- 任何两个极大项的析取必为真（因为在2^n种真值指派中，只有一个极大项取值为假）
- 所有极大项的合取必为假。

主合取范式

- 定义**1.6-7**：一个由极大项的积组成的公式，如果与命题公式***A***等价，则称它是公式***A***的主合取范式。

- 对任何命题公式**(**永真式除外 **)**都可求得与其等价的主合取范式，而且主合取范式的形式唯一。

主合取范式

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \\
&\Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow ((P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q)) \wedge ((Q \vee R) \vee (P \wedge \neg P)) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \\
&\qquad \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \\
&\Leftrightarrow \prod(0, 2, 4)
\end{aligned}
$$

主合取范式

- 主合取范式和真值表的关系：
- 右图为 $A \Leftrightarrow P\wedge Q\vee R$ 对应的真值表：

P	Q	R	极大项	$P\wedge Q\vee R$
0	0	0	$P\vee Q\vee R$	0
0	0	1	$P\vee Q\vee \neg R$	1
0	1	0	$P\vee \neg Q\vee R$	0
0	1	1	$P\vee \neg Q\vee \neg R$	1
1	0	0	$\neg P\vee Q\vee R$	0
1	0	1	$\neg P\vee Q\vee \neg R$	1
1	1	0	$\neg P\vee \neg Q\vee R$	1
1	1	1	$\neg P\vee \neg Q\vee \neg R$	1

极小项和极大项的关系

- 极小项m_i和极大项M_i有下列的关系：

$$M_i \Leftrightarrow \neg m_i$$

$$m_i \Leftrightarrow \neg M_i$$

由合取（析取）范式求主析取（合取）范式

- 二者可以互相转化
- 已知公式*A*的主合取范式为：

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

- 求主析取范式。
- 解：
  - *A*的主合取范式为$M_1 \wedge M_3$，可知*A*的主析取范式为 $\sum(0,2,4,5,6,7)$
  - 于是可直接写出*A*的主析取范式

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$
$$\vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

主析取范式和主合取范式

- 一个命题公式是永真式，它的命题变元的所有极小项均出现在其主析取范式中，不存在与其等价的主合取范式；
- 一个命题公式是永假式，它的命题变元的所有极大项均出现在其主合取范式中，不存在与其等价的主析取范式;
- 一个命题公式是可满足的，它既有与其等价的主析取范式，也有与其等价的主合取范式.

主析取范式和主合取范式

例:求下列公式的主范式:

$(P\rightarrow\neg Q)\rightarrow\neg R$

解: $(P\rightarrow\neg Q)\rightarrow\neg R$

$\Leftrightarrow\ \neg(\neg P\ \vee\ \neg Q\ )\vee\neg R$

$\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee\neg R$

$\Leftrightarrow(P\ \vee\neg R)\ \ \wedge(Q\ \vee\neg R)$

$\Leftrightarrow(P\vee\neg R\vee(Q\wedge\neg Q))\wedge(Q\ \vee\neg R\ \vee(P\wedge\neg P))$

$\Leftrightarrow(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(P\vee\neg Q\ \vee\neg R))\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee\neg R)$

$\Leftrightarrow\prod M_{1,3,5}$ /*其中$\prod$表示求合取*/

$\Leftrightarrow\sum m_{0,2,4,6,7}$ /*即该公式是可满足的，应存在与其等价的主析取范式*/

主析取范式和主合取范式

例：求下列命题公式的主范式：

$(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg S)$

解： $(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg S)$

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge S)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R\wedge\neg S)$

$\vee(\neg P\wedge Q\wedge R\wedge\neg S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R\wedge\neg S)$

$\Leftrightarrow\sum m_{11,10,6,4}$ /*这里∑代表析取*/

$\Leftrightarrow\prod M_{0,1,2,3,5,7,8,9,10,12,13,14,15}$

从上面的解题过程中我们可以看出，如果与一个命题公式等价的一种主范式一经求出，另一种形式立刻可以得出，除非是永真（或永假）式。

作业

- **P28**
  - **16、17(1)(3)、18(2)(4)**