《高等数学》,《工科数学分析基础》和《微积分》A 卷参考答案

一、填空题 (每题 6 分, 共 30 分)

1. $x^4 f_1' + x^2 f_2', \quad 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''$

2. $e, \quad 2\ln 2$

3. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$ 或 $\begin{cases} x+z=2 \\ y=-2 \end{cases}, \quad x-z=0$

4. $\left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right), \quad \dfrac{1}{2}$

5. $\dfrac{3}{4}, \quad 0$

二、单项选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. C　**2.** D　**3.** C　**4.** B　**5.** A

三、(10 分) (高等数学) 在经过直线 $\begin{cases} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{cases}$ 的平面中, 求两个互相垂直的平面, 其中一个经过点 $(4,-3,1)$.

解. 经过已知直线的平面束方程为 $(2x+y-3z+2)+\lambda(5x+5y-4z+3)=0$, 即

$$(2+5\lambda)x+(1+5\lambda)y+(-3-4\lambda)z+(2+3\lambda)=0 \qquad \textbf{(2 分)}$$

因一平面过点 $(4,-3,1)$, 则得 $4+4\lambda=0$, 解得 $\lambda=-1$, (**4 分**)

于是，过点 $(4,-3,1)$ 的平面方程为

$$3x+4y-z+1=0. \qquad \textbf{(5 分)}$$

另一平面与上述平面垂直，故

$$3\cdot(2+5\lambda)+4\cdot(1+5\lambda)-(-3-4\lambda)=0, \qquad \textbf{(8 分)}$$

即 $13+39\lambda=0$, 解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$, 代入平面束方程, 于是得另一平面为

$$x-2y-5z+3=0. \qquad \textbf{(10 分)}$$

(工科数学分析基础) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的通解.

解. 由方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$,

特征根为: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, (**2 分**)

故方程 $y'' - 3y' + 2y = 0$ 的通解为:

$$\overline{y} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}. \qquad (\textbf{4 分})$$

设 $y'' - 3y' + 2y = 2xe^x$ 的特解为 $y^* = x(ax+b)e^x$, (**6 分**)

则

$$(y^*)' = \left(ax^2 + 2ax + bx + b\right)e^x, (y^*)'' = \left(ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b\right)e^x$$

代入原方程, 解得 $a = -1,\ b = -2$, 故特解为 $y^* = x(-x-2)e^x$, (**8 分**)

所以原方程的通解为

$$y = \overline{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{2x} - x(x+2)e^x \qquad (\textbf{10 分})$$

(微积分) 设 $z = f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^k}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 其中 $k \geq 0$,

k 为何值时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微, k 为何值时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微?

解. 由 $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$,

$$\Delta z = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^k}$$

考虑

$$\frac{\Delta z - (f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{k+\frac{1}{2}}}$$

当 $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$ 时的极限. (**3 分**)

当 $0 \leq k < \dfrac{1}{2}$ 时, 即 $k + \dfrac{1}{2} < 1$ 时, 因 $|\Delta x\Delta y| \leq \dfrac{1}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2)$, 从而

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left|\frac{\Delta z - (f_x(0,0)\Delta x + f_y(0,0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}\right| \\ &= \frac{|\Delta x\Delta y|}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{k+\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right)^{1-\left(k+\frac{1}{2}\right)} \to 0 \end{aligned}$$

由夹逼准则知, $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z-|f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$,

故此时 z 在 $(0,0)$ 可微. (**6 分**)

当 $k\geq\dfrac{1}{2}$ 时, $k+\dfrac{1}{2}\geq 1$, 令点 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿直线 $\Delta y=\Delta x$ 趋于 $(0,0)$, 有

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\ &=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{k+\frac{1}{2}}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x^2}{2^{k+\frac{1}{2}}\Delta x^{2(k+\frac{1}{2})}}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & k=\dfrac{1}{2}\\ \infty, & k>\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{aligned}$$

可见, $\Delta z-|f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y|$ 不是 $\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 的高阶无穷小, 故此时 z 在 $(0,0)$ 处不可微. (**10 分**)

四、(10 分) 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值和最小值.

解. 由方程组$\begin{cases}f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$,

得 $x=0$, $(0\leq y\leq 6)$ 及点 $(4,0),(2,1)$.

点 $(4,0)$ 及线段 $x=0$ 在 D 的边界上, 故点 $M(2,1)$ 为内部可能的极值点. (**2 分**)

$$f''_{xx}=8y-6xy-2y^2,\quad f''_{xy}=8x-3x^2-4xy,\quad f''_{yy}=-2x^2$$

在点$M(2,1)$处,

$$A=f''_{xx}(2,1)=-6<0,\ B=f''_{xy}(2,1)=-4,\ C=f''_{yy}(2,1)=-8$$

由 $AC-B^2>0$, $A<0$, 故M是极大值点, 对应的极大值为$f(2,1)=4$. (**4 分**)

在D的边界$x=0$和$y=0$上, $f(x,y)=0$. (**6 分**)

在边界$x+y=6$上, 求条件极值：$L(x,y,\lambda)=x^2y(4-x-y)+\lambda(x+y-6)$,

$$\begin{cases}L_x(x,y,\lambda)=2xy(4-x-y)-x^2y+\lambda=0,\\ L_y(x,y,\lambda)=x^2(4-x-y)-x^2y+\lambda=0,\\ L_\lambda(x,y,\lambda)=x+y-6=0\end{cases}$$

得点 $(0,6)$ 和 $(4,2)$. 而 $f(0,6)=0$, $f(4,2)=-64$,

故最大值为 $f(2,1)=4$, 最小值为 $f(4,2)=-64$. (**10 分**)

注: 又法, 可令 $y=6-x$, 带入利用一元函数极值最值求解方法, 求解在边界 $x+y=6$ 上的最值.

五、**(10 分)** 设函数 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases} u=x+ay \\ v=x+by \end{cases}$ 可把方程 $3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数 a, b.

解. 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=a\dfrac{\partial z}{\partial u}+b\dfrac{\partial z}{\partial v}$, 所以

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=a\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a+b)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2ab\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+b^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{aligned}$$

代入原方程, 得

$$\left(3-2a-a^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2(3-a-b-ab)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\left(3-2b-b^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0. \qquad (\mathbf{5\ 分})$$

由题意, 令

$$\begin{cases} 3-2a-a^2=0 \\ 3-2b-b^2=0 \\ 3-a-b-ab\neq 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{7\ 分})$$

解得 $a=1$ 或 -3, $b=1$ 或 -3, 注意到 $a=b=1$ 或 -3 时, $3-a-b-ab=0$, 故舍去. 因此 $a=1$, $b=-3$ 或 $a=-3$, $b=1$. (**10 分**)

六、**(10 分)** 将函数 $f(x)=x^2$, $x\in[-1,1]$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 的和.

解. 因为 $f(x)$ 为偶函数, 故 $b_n=0, n=1,2,\cdots$, 而

$$\begin{aligned} a_0&=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3} \\ a_n&=2\int_0^1 x^2\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x^2\mathrm{d}(\sin n\pi x) \\ &=-\frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n, n=1,2,\cdots \end{aligned} \qquad (\mathbf{5\ 分})$$

当 $x=\pm 1$ 时, $\dfrac{f(-1+0)+f(1-0)}{2}=1=f(\pm 1)$, 所以

$$\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=x^2,\quad x\in[-1,1] \qquad (\textbf{8 分})$$

令 $x=0$, 得 $\dfrac{1}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}=0$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=-\dfrac{\pi^2}{12}$. (**10 分**)

七、(10 分) 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解. 因为

$$f'(x)=\frac{-2}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n}, x\in\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big) \qquad (\textbf{2 分})$$

又 $f(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以

$$\begin{aligned} f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\mathrm{d}t\\ &=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big). \end{aligned} \qquad (\textbf{5 分})$$

因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛, 函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续, 所以

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\ x\in\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big] \qquad (\textbf{8 分})$$

令 $x=\dfrac{1}{2}$, 得 $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{\pi}{4}-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n4^n}{2n+1}\cdot\dfrac{1}{2^{2n+1}}\right]$, 再由 $f\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f\Big(\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{4}. \qquad (\textbf{10 分})$$

==

《高等数学》，《工科数学分析基础》和《微积分》B 卷参考答案

一、填空题 (每题 6 分, 共 30 分)

1. $e,\quad 2\ln 2$

2. $x^4f_1'+x^2f_2',\quad 4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$

3. $\left(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{2}\right),\quad \dfrac{1}{2}$

4. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{0}=\dfrac{z-1}{-1}$ 或 $\begin{cases} x+z=2 \\ y=-2 \end{cases},\quad x-z=0$

5. $\dfrac{3}{4},\quad 0$

二、单项选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. C　**2.** C　**3.** D　**4.** A　**5.** B

三、**(10 分)** 同 A 卷第四题.

四、**(10 分)** 同 A 卷第三题.

五、**(10 分)** 同 A 卷第五题.

六、**(10 分)** 同 A 卷第七题.

七、**(10 分)** 同 A 卷第六题.