第五章 函数

回顾

- 集合
  - 子集
    - 幂集
  - 集合的补、并、交、差
  - 有序对
    - 笛卡尔积
      - 关系
        - 关系的自反、对称、传递性
        - 函数
          - 单射、满射、双射

主要内容

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成、合成函数的性质
- 特殊函数
- 反函数、特征函数
- 基数

5.1函数的基本概念和性质

- 函数（或称映射）是满足某些条件的关系，关系又是笛卡尔乘积的子集。

- 定义：设X和Y是两个任意的集合，并且f是从X到Y的一种关系。如果对于每一个$x \in X$，都存在唯一的$y \in Y$，使得$< x, y > \in f$，则称关系f为函数或映射，并记作 f: $X \to Y$。

- 对于函数来说$f: X \to Y$，如果有$< x, y > \in f$ ，则称x是自变量；与x相对应的y，称为在f作用下x的像点，或称y是函数f在x处的值。通常用$y = f(x)$表示$< x, y > \in f$ 。

函数的基本概念

- 从X到Y的函数f，是具有下列性质的从X到Y的二元关系：

(1)每一个元素$x \in X$，都必须关系到某一个$y \in Y$；也就是说，关系f的定义域是集合X本身，而不是X的真子集。

任意性

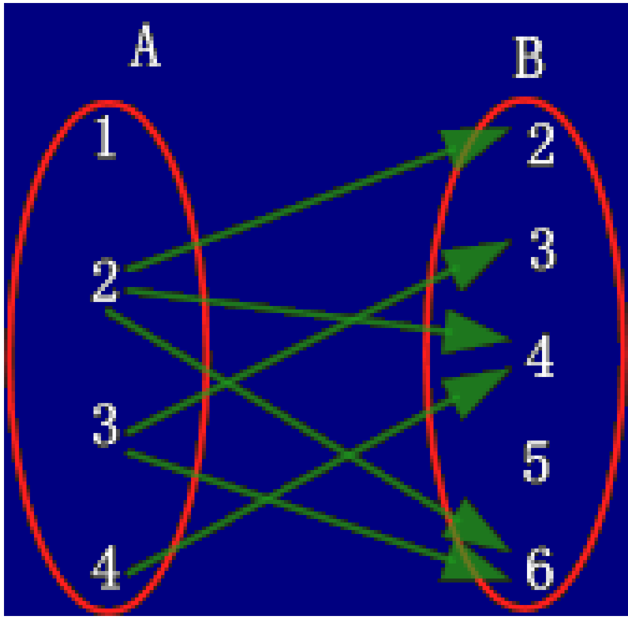
(2)如果有$< x, y > \in f$，则函数f在x处的值y是唯一的，亦即

$$\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$$

唯一性

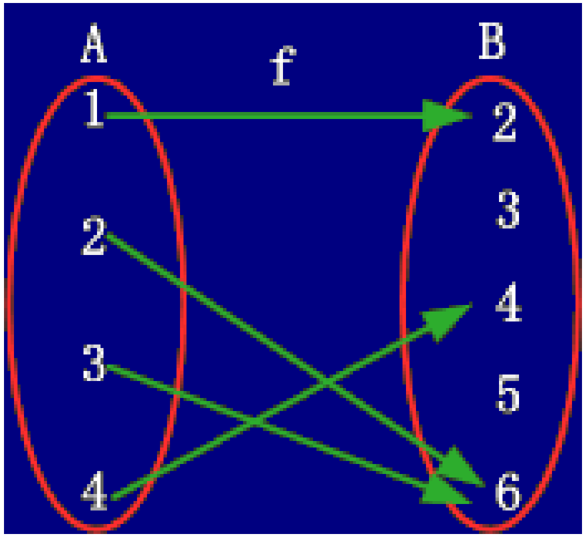
函数的基本概念

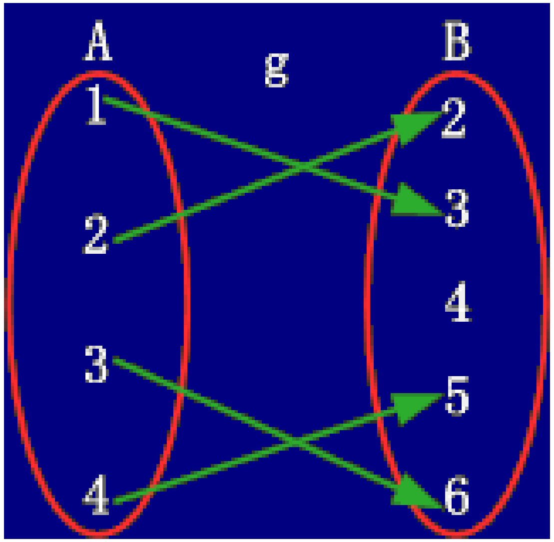
例：设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5,6\}$，A到B的关系$\rho=\{<2,2>,<2,4>,<2,6>,<3,3>,<3,6>,<4,4>\}$，$\rho$是否是由$A$到$B$的函数？



若调整为$f=\{<1,2>,<2,6>,<3,6>,<4,4>\}$或

$g=\{<1,3>,<2,2>,<3,6>,<4,5>\}$呢？





函数的定义域和值域

- 设f是从X到Y的函数，
  - 函数的定义域$D_f = \mathrm{dom}\ f = X$,而不会是$X$的真子集。
  - 函数的值域满足$R_f = \mathrm{ran}\ f \subseteq Y$。对于函数$f$，常用$f(X)$表示$R_f$。

    $$f(X) = R_f = \{y | y \in Y \wedge (\exists x)(x \in X \wedge y = f(x))\}$$

    也称$f(X)$是函数f的像点
  - 集合Y称作f的陪域。

函数的基本概念和性质

- 例：设E是全集，$\rho(E)$是E的幂集。对任何两个集合$X,Y\in\rho(E)$，它们的并运算和相交运算都是从$\rho(E)\times\rho(E)$到$\rho(E)$的映射；对任何集合$X\in\rho(E)$的求补运算，则是从$\rho(E)$到$\rho(E)$的映射。
- 例：试说明下列二元关系是否是函数？

  (1) $\exp=\{\langle x,e^x\rangle \mid x\in R\}$

  (2) $\arcsin=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in R\wedge \sin y=x\}$

- **(1)是函数，(2)不是函数**

函数的基本概念和性质

- 例：设N是自然数集合，函数$\boldsymbol{S}$: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$定义成$\boldsymbol{S(n) = n + 1}$。显然，$\boldsymbol{S(0) = 1}$，$\boldsymbol{S(1) = 2}$，$\boldsymbol{S(2) = 3 \cdots}$。这样的函数，通常称为皮亚诺后继函数。

- 注意：有时为了某种需要，要特别强调函数的任意性和唯一性性质：函数$\boldsymbol{f}$的定义域$\boldsymbol{D_f}$中的每一个$\boldsymbol{x}$，在值域$\boldsymbol{R_f}$中都恰有一个像点$\boldsymbol{y}$，这种性质通常被称为函数的良定性。

函数的相等

- **定义：** 给定函数$f: X \to Y$和$g: Z \to W$。如果f和g具有同样的定义域和陪域，亦即$X = Z$和$Y = W$，并且对于所有的$x \in X$或$x \in Z$都有$f(x) = g(x)$，则称函数f和g是相等的，记作$f = g$。
- 求/证明函数相等的方法？

函数的扩大和缩小

- 定义：给定函数$f: X \to Y$，且有$A \subseteq X$。

  ① 试构成一个从A到Y的函数

$$g = f \cap (A \times Y)$$

  通常称g是函数f的缩小，并记作f/A。

  ② 如果g是f的缩小，则称f是g的扩大。

- 从定义可以看出，函数$f/A: A \to Y$的定义域是集合A，而函数f的域则是集合X。f/A和f的陪域均是集合Y。于是若g是f的缩小，则应有

$$D_g \subseteq D_f \text{和} g \subseteq f$$

- 并且对于任何$x \in D_g$都有

$$g(x) = (f/A)(x) = f(x)$$

函数的扩大和缩小

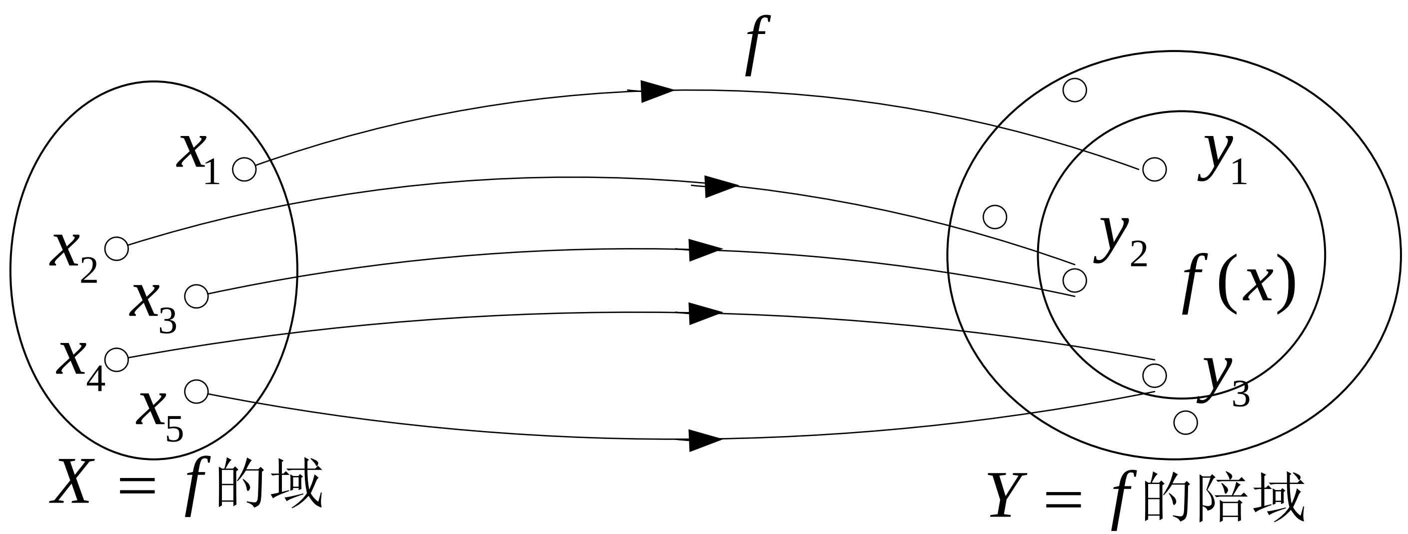
- 例：令$X_1=\{0,1\}$,$X_2=\{0,1,2\}$,$Y=\{a,b,c,d\}$。定义从X_1^2到Y的函数f为：
- $f=\{<0,0,a>,<0,1,b>,<1,0,c>,<1,1,b>\}$。
- $g=f\cup\{<0,2,a>,<2,2,d>\}$是从

  $X_1^2\cup\{<0,2>,<2,2>\}$到Y的函数。

于是$f=g/X_1^2$，因此f是g在X_1^2上的缩小（或称限制），g是f到$X_1^2\cup\{<0,2>,<2,2>\}$上的扩大（或称延拓）。

函数的表示

因为函数是二元关系，所以可以用关系图和关系矩阵来表达函数。



函数f: $X \to Y$的图解

函数的表示

- **例：** 设集合$X=\{a,b,c,d\}$和$Y=\{1,2,3,4,5\}$，并且有

$$f=\{<a,1>,<b,3>,<c,4>,<d,4>\}$$

试求出D_f，R_f和f的矩阵表达式。

- **解：** $D_f=\{a,b,c,d\}$

$$R_f=\{1,3,4\}$$

$$M_f=\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

函数的表示

- 由函数的定义可知，在关系矩阵的每一个行上，都有且仅有一个元素的值是1，而此行上的其他元素都必定为0。
- 因此，可以用一个单独的列来代替关系矩阵。在这个单独的列上，应标明所对应的给定函数的各个值。这样，该列上的各元素也说明了自变量与其函数值之间的对应关系。

上例中f的简化关系矩阵为：

$$M_f = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 3 \\ c & 4 \\ d & 4 \end{bmatrix}$$

函数的构成

- 设X和Y是任意的两个集合。在$X \times Y$的所有子集中，并不全都是从X到Y的函数，仅有一些子集可以用来定义函数。
- 定义：设A和B是任意两个集合，记

$$B^A = \{f | f: A \to B\}$$

函数的构成

- **例：** 设集合$X=\{a,b,c\}$和集合$Y=\{0,1\}$。试求出所有可能的函数$f: X\to Y$。
- **解：** 首先求出的$X\times Y$所有序偶，于是应有

$$X\times Y=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

- 于是，有2^6个可能的子集，但其中仅有下列2^3个子集可以用来定义函数：

$$f_0=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\quad f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\quad f_3=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\},\quad f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\},\quad f_7=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

函数的构成

- 设A和B都是有限集合，且$|A| = m$和$|B| = n$，因为任何函数$f: A \to B$的定义域都是集合A， 所以每个函数中都恰有m个序偶。而且，任何元素$x \in A$，都可以在B的n个元素中任选其一作为自己的像点。因此，应有n^m个可能的不同函数，亦即

$$|B^A| = |B|^{|A|} = n^m$$

- 例：设A为任意集合，B为任意非空集合。

（1）因为存在唯一的一个从$\emptyset$到A的函数，所以

$$A^{\emptyset} = \{\emptyset\}。$$

（2）因为不存在从B到$\emptyset$的函数，所以$\emptyset^B = \emptyset$。

5.2函数的合成和合成函数的性质

- 定义：设$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$是两个函数。于是，合成关系$f \circ g$为f与g的合成函数，并用$g \circ f$表示。即

$$g \circ f = \{\langle x, z\rangle | (x \in X) \wedge (z \in Z) \wedge (\exists\, y)(y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

- 注意：合成函数$g \circ f$与合成关系$f \circ g$实际上表示同一个集合。这种表示方法的不同有其方便之处：
  - 对合成函数$g \circ f$，当$z = (g \circ f)(x)$时，必有

    $$z = g(f(x))$$

  - $g \circ f$与$g(f(x))$的次序是理想的。

函数的合成和合成函数的性质

- 函数 f 的值域是函数 g 的定义域Y的子集，亦即 $R_f \subseteq Dg$ 。条件$R_f \subseteq D_g$能确保合成函数$g \circ f$是非空的。否则，合成函数$g \circ f$是空集。如果$g \circ f$非空，则能保证$g \circ f$是从X到Z的函数。
- 定理：设$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$是两个函数：

  ① 合成函数$g \circ f$是从$X \to Z$的函数，并且对于每一个$x \in X$，都有$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

  ② $D_{g \circ f} = f^{-1}[D_g]$, $R_{g \circ f} = g[R_f]$

其中$f^{-1}[D_g]$表示g的定义域在f下的原像集，$g[R_f]$表示f的值域在g下的像点集。

函数的合成和合成函数的性质

(1)证明: $g \circ f$: $X \to Z$，且$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- 假设$x \in X$和$z_1, z_2 \in Z$，
- 再假设$< x, z_1 > \in g \circ f$和$< x, z_2 > \in g \circ f$。
- 这个假设要求存在$y \in Y$，能使$y = f(x)$，$z_1 = g(y)$以及$z_2 = g(y)$。
- 因为g是一个函数，所以由函数值的唯一性可知，除非$z_1 = z_2$，否则不可能有$z_1 = g(y)$和$z_2 = g(y)$。
- 也就是说，仅能有 $z_1 = z_2 = z$ 和 $< x, z > \in g \circ f$ 。因此$g \circ f$是一个从X到Z的函数，且

$$(g \circ f)(x) = z = g(y) = g(f(x))$$

函数的合成和合成函数的性质

(2)证明：　$D_{g\circ f} = f^{-1}[D_g]$，$R_{g\circ f} = g[R_f]$

- 若 $x \in D_{g\circ f}$，则存在$z \in Z$使$< x, z > \in g \circ f$。
- 因此，必有$y \in Y$使$< x, y > \in f$且$< y, z > \in g$。
- 但由 $< y, z > \in g$知 $y \in D_g$，再由 $< x, y > \in f$，即得$x \in f^{-1}[D_g]$。即$D_{g\circ f} \subseteq f^{-1}[D_g]$
- 另一方面，若$x \in f^{-1}[D_g]$，则有$y \in D_g$使

$$< x, y > \in f。$$

- 但由$y \in D_g$知，有$z \in Z$使$< y, z > \in g$，　所以$< x, z > \in g \circ f$，这表明$x \in D_{g\circ f}$。

　　即$f^{-1}[D_g] \subseteq D_{g\circ f}$

同理可证$R_{g\circ f} = g[R_f]$。

函数的合成和合成函数的性质

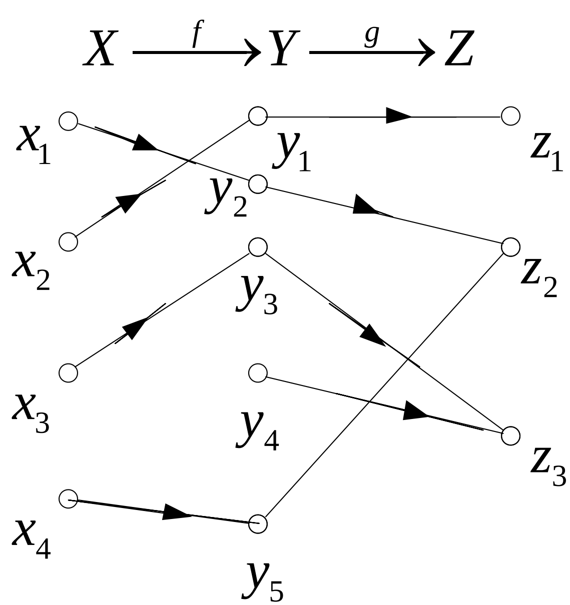
- **例：** 设集合$X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$, $Z=\{z_1,z_2,z_3\}$。函数$f\colon X\to Y$和$g\colon Y\to Z$分别是

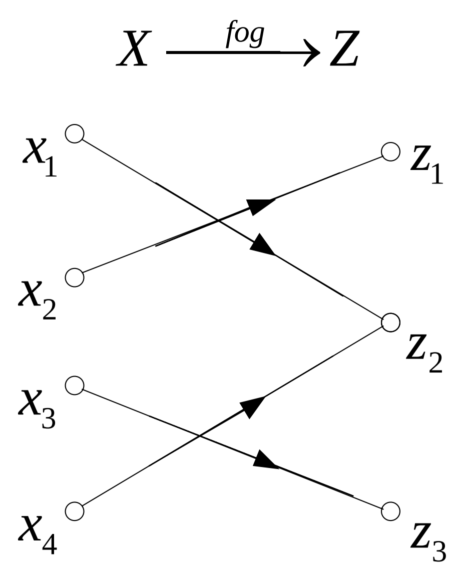
$$f=\{\langle x_1,y_2\rangle,\langle x_2,y_1\rangle,\langle x_3,y_3\rangle,\langle x_4,y_5\rangle\}$$

$$g=\{\langle y_1,z_1\rangle,\langle y_2,z_2\rangle,\langle y_3,z_3\rangle,\langle y_4,z_3\rangle,\langle y_5,z_2\rangle\}$$

试求出函数$g\circ f=X\to Z$，并给出它的图解。

- **解：** $g\circ f=\{\langle x_1,z_2\rangle,\langle x_2,z_1\rangle,\langle x_3,z_3\rangle,\langle x_4,z_2\rangle\}$

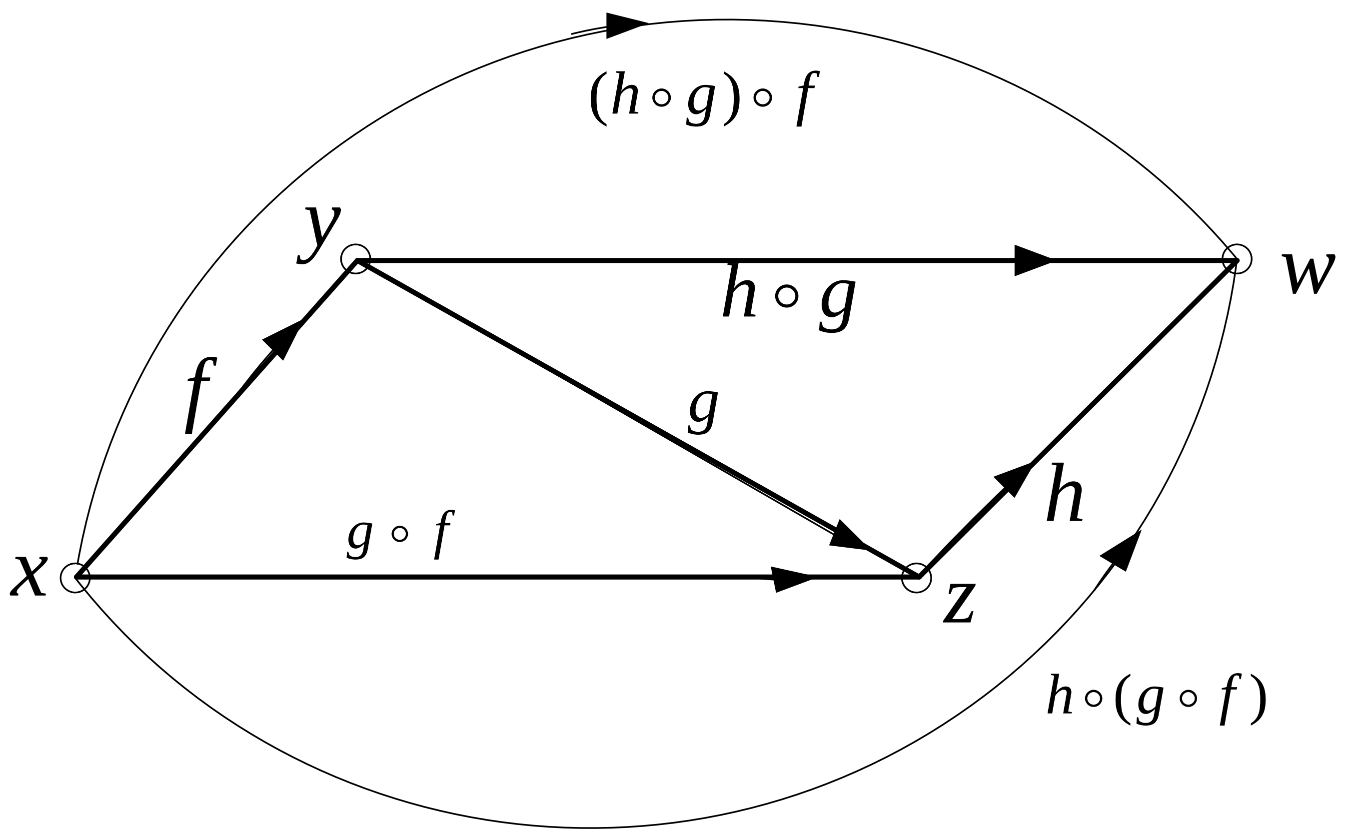




函数的合成和合成函数的性质

- **定理**：函数的合成运算是可结合的，即如果f,g,h都是函数，则应有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$



函数的合成和合成函数的性质

- 因为函数的合成运算是可结合的，所以在表达合成函数时，可以略去圆括号，即

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- 推广：设有n个函数：$f_1: X_1 \rightarrow X_2$，$f_2: X_2 \rightarrow X_3$，…，$f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$，于是

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$$

无括号表达式唯一地表达了从X_1到X_{n+1}的函数。

- 如果$X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X_{n+1} = X$和$f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$，则可用$f^n$表示从$X$到$X$的合成函数 $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$。

函数的合成和合成函数的性质

- **例：** 设I是整数集合，并且函数$f: I \to I$给定成$f(i) = 2i + 1$。试求出合成函数$f^3(i)$。
- **解：** 合成函数$f^3(i)$是一个由I到I的函数，于是有

$$
\begin{aligned}
f^3(i) &= f^2(i) \circ f(i) = \big(f(i) \circ f(i)\big) \circ f(i) \\
&= f(f(f(i))) \\
&= f\big(f(2i+1)\big) = f(2(2i+1)+1) \\
&= f(4i+3) = 2(4i+3)+1 = 8i+7
\end{aligned}
$$

等幂函数

- 定义：给定函数f: $X \to X$，如果有$f^2 = f$，则称f是个等幂函数。
- 例：设I是整数集合和$N_m = \{0,1,2,\ldots m-1\}$，并且函数$f$: $I \to N_m$是$f(i) = i(\mathrm{mod}\, m)$。试证明，对于$n \geq 1$都有$f^n = f$。
- 证明：（归纳证法）
  - 当$n = 2$时

$$f^2 = f \circ f = f(f(i)) = f\big(i(\mathrm{mod}\, m)\big)$$

$$= \big(i(\mathrm{mod}\, m)\big)(\mathrm{mod}\, m) = i(\mathrm{mod}\, m) = f$$

  - 假设当$n = k$时，满足$f^k = f$;
  - 那么当$n = k + 1$时，

$$f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f = f$$

得证。对于所有的$n \geq 1$，都有$f^n = f$

5.3特殊函数

- 定义：给定函数$f: X \to Y$。
  a) 如果函数f的值域$R_f = Y$，则称f为映上的映射，或称满射函数。
  b) 如果函数f的值域$R_f \subset Y$，则称f为映入的映射或内射函数。
- 定义：给定函数$f: X \to Y$,对于$x_1, x_2 \in X$来说，如果有

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

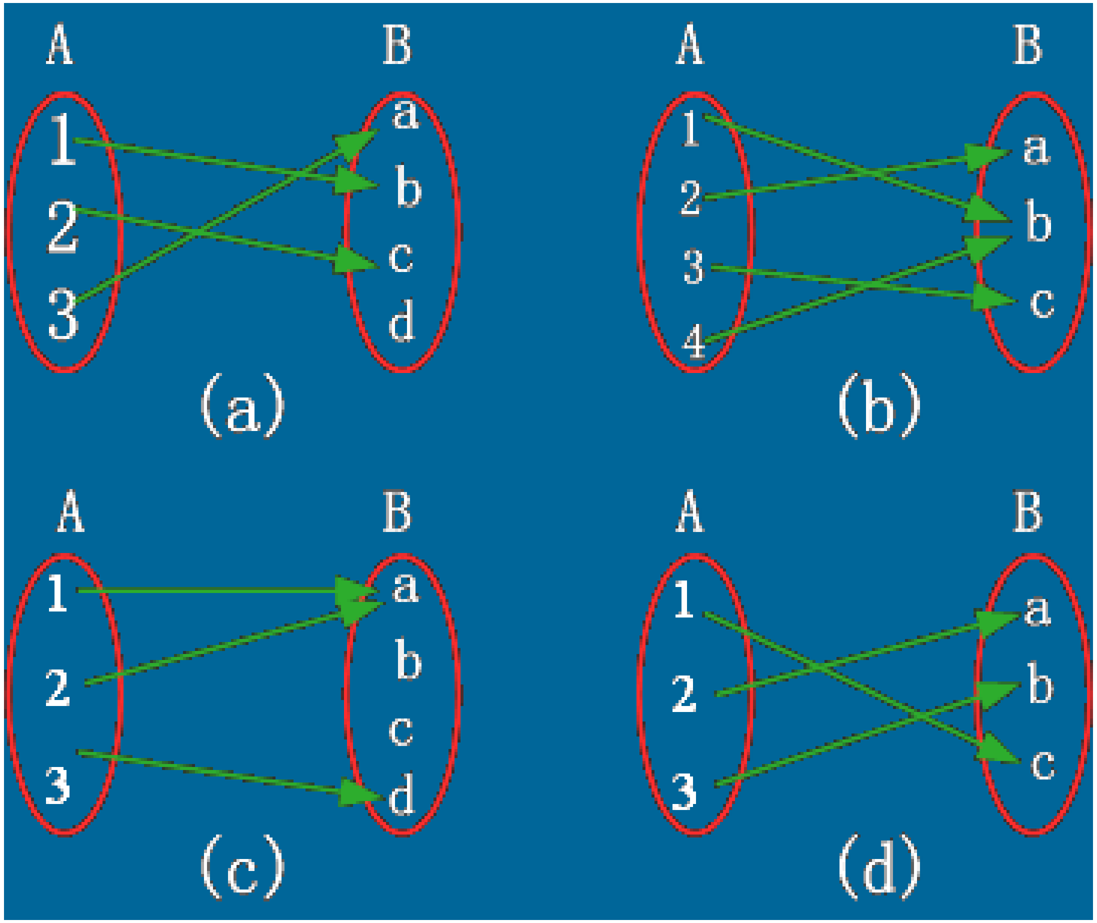
或者是

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

则称f为一对一的映射，或称f为单射函数。
- 定义：给定函数$f: X \to Y$。如果f既是满射的又是单射的，则称f为一对一映满的映射，或称f为双射。

5.3特殊函数

- 例:



- (a) 内射，单射;
- (b) 满射;
- (c) 内射;
- (d) 双射, 单射, 满射

补充

- 函数f: $X\to Y$是双射函数，必须要求X和Y含有的元素数目相等，也就是基数相等，设为n。
- 思考：从X到Y上存在多少个双射函数?

$$n!$$

- 定理：假设m和n是正整数并且满足 $n\geq m$ ，那么从m元素集合到n元素集合的单射函数的个数为：

$$P_n^m = C_n^m m!$$

补充

- 函数$f: X \to Y$是满射函数，X中的元素个数是m，Y中的元素个数是n，$m \geq n$，问可以定义多少个这样的满射函数?
- 例：$X = \{1, 2, 3, 4\}$，$Y = \{a, b\}$，可以定义多少个$X \to Y$的满射函数?

$$2^4 - 2 = 14$$

补充

- 例：$X=\{1,2,3,4,5,6\}$，$Y=\{a,b,c\}$，可以定义多少个$X \to Y$的满射函数？
- 解：设P_1,P_2,P_3为a,b,c分别不在函数值域内的情况。一个函数是满射的，当且仅当满足函数概念并且不是P_1,P_2,P_3三种情况时。
- 设所有的函数为全集，P_1,P_2,P_3是在全集上的集合，表征意义如上，那么满射函数必须满足 $\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3$
- 用$N(A)$表示满足情况A的集合的基数，N表示全集的基数，也就是从6元素集合到3元素集合的函数总数，根据包含排斥原理，有

补充

$$
\begin{aligned}
&N(\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3) \\
&= N - N(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \\
&= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) - N(P_1 \cap P_2) - N(P_1 \cap P_3) \\
&\qquad - N(P_2 \cap P_3) + N(P_1 \cap P_2 \cap P_3)) \\
&= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)) + (N(P_1 \cap P_2) + N(P_1 \cap P_3) \\
&\qquad + N(P_2 \cap P_3)) - N(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
&= 3^6 - C(3,1) * 2^6 + C(3,2) * 1^6 - 0 \\
&= 729 - 192 + 3 \\
&= 540
\end{aligned}
$$

补充

- **定理：**假设m和n是正整数并且满足$m \ge n$，那么从m元素集合到n元素集合的**满射函数**的个数为：

$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1} C(n,n-1) \cdot 1^m$$

特殊函数

- 定理：给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$。于是
  a) 如果f和g都是满射函数，则合成函数$g \circ f$也是个满射函数。
  b) 如果f和g都是单射函数，则合成函数$g \circ f$也是个单射函数。
  c) 如果f和g都是双射函数，则合成函数$g \circ f$也是个双射函数。

- 证明：给定集合X，Y和Z，并且有函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$。

特殊函数

- **(*a*)证明(满射函数)：**
- 设任意的元素$z \in Z$,
- 由于g是个满射函数，因而存在某一个元素 $y \in Y$，能使$g(y) = z$。
- 另外，因为f是个满射函数，所以存在某一个元素$x \in X$，能使$f(x) = y$,
- 于是有$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

  即$z \in (g \circ f)(X)$。
- 由元素$z \in Z$的任意性，知命题（a）为真。

特殊函数

- （b）证明(单射函数):
  - 设任意的元素$x_i, x_j \in X$且有$x_i \neq x_j$,
  - 因为f是单射的，所以必定有$f(x_i) \neq f(x_j)$。
  - 由于g是单射的和$f(x_i) \neq f(x_j)$可推出
    $g(f(x_i)) \neq g(f(x_j))$,
  - 即如果$x_i \neq x_j$，则有
    $$(g \circ f)(x_i) \neq (g \circ f)(x_j)$$
  - 于是命题（b）的真值为真。
- 由命题（a）和命题（b）可直接推出命题（c）
- 注意：以上定理各部分的逆定理均不成立。

特殊函数

- **定理**：给定函数f和g，并且有合成函数$g \circ f$,于是

① 如果$g \circ f$是满射函数，则g必定是满射的。
② 如果$g \circ f$是个单射函数，则f必定是个单射函数。
③ 如果$g \circ f$是个双射函数，则g必定是满射的，f是单射的。

- **(1)证明**：给定集合X，Y和Z，并且有函数$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$。合成函数$g \circ f: X \to Z$。
  - 因为$g \circ f$是个满射函数，所以$g \circ f$的值域$R_{g \circ f} = Z$。
  - 设任意的元素$x \in X$，某些$y \in Y$和$z \in Z$，于是应有

$$(g \circ f)(x) = z = g(f(x)) = g(y)$$

  - 可见，$R_g = R_{g \circ f} = Z$，即g是满射的，得证。

特殊函数

- （1）反证法证明:
- 设f：$X \to Y$，g：$Y \to Z$，合成函数$g \circ f$: $X \to Z$
- 因为$g \circ f$是满射函数，若g不是满射函数，则必存在Z中的元素z_0，使得对于任意的Y中的元素y，$g(y) \neq z_0$，
- 这样，对于X中的任意元素x，

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) \neq z_0,$$

- 故$g \circ f$不是满射函数，与假设矛盾，因此，g一定是满射函数。

特殊函数

- （2）证明：
- 合成函数$g\circ f$: $X\to Z$。设$x_i, x_j\in X$和$x_i\neq x_j$。因为$g\circ f$是单射的，所以应有

$$(x_i\neq x_j)\Rightarrow (g\circ f)(x_i)\neq (g\circ f)(x_j)$$

$$\Leftrightarrow g(f(x_i))\neq g\left(f(x_j)\right)$$

- 因为g是函数，所以像点不同时，原象一定不相同，即

$$g(f(x_i))\neq g(f(x_j))\Rightarrow f(x_i)\neq f(x_j)$$

- 根据永真蕴含关系的可传递性，应有

$(x_i\neq x_j)\Rightarrow f(x_i)\neq f(x_j)$得证。

- 由（1）和（2）可知（3）成立。

特殊函数

- （2）反证法证明。
- 设f：$X \to Y$，g：$Y \to Z$，合成函数$g \circ f$: $X \to Z$。
- 因为$g \circ f$是单射函数，若f不是单射函数，则必存在X中的元素x_1,x_2，且$x_1 \neq x_2$，使得$f(x_1) = f(x_2)$。
- 由于g是函数，因此，

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$,也即

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2),$$

即$g \circ f$不是单射函数，矛盾，所以，f是单射函数。

恒等函数

- **定义**：给定集合X，并且有函数$I_X: X \to X$。对于所有的$x \in X$，有$I_X(x) = x$，亦即

  $I_X = \{< x, x > | x \in X\}$，则称$I_X$为恒等函数。

- **定理**：给定集合X和Y。对于任何函数$f: X \to Y$，都有

$$f = f \circ I_X = I_Y \circ f$$

- 证明：设$x \in X$和$y \in Y$， 根据定义$I_X(x) = x$，$I_Y(y) = y$

$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$$

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$$

得证。

偏函数

- 定义：设$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$是两个集合，并且有$\boldsymbol{X}' \subseteq \boldsymbol{X}$。于是，任何函数$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{X}' \to \boldsymbol{Y}$都称为域$\boldsymbol{X}$和陪域$\boldsymbol{Y}$的偏函数。对于任何元素$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'$，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$的值是没有定义的。
- 例：设$\boldsymbol{R}$是实数集合，并且偏函数$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$是$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{1}/\boldsymbol{x}$。对于$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$，偏函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$没有定义。

作业

- 第五章习题：
  - 3-7
  - 8 （2,4,6,8,10）
  - 9