第1章 命题逻辑

逻辑为确定一个给出的论证是否有效提供各种方法和技巧，而根据研究对象和方法的不同，可以分为形式逻辑、辩证逻辑和数理逻辑。其中数理逻辑就是用数学方法研究人的思维形式和规律，通过建立一套表意符号体系对事物进行抽象并推理，从而研究前提和结论间的形式关系的科学。其研究对象是对证明和计算这两个直观概念进行符号化以后的形式系统。

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在17世纪就有人提出过。莱布尼茨(Gottfried Leibniz，1646—1716)就曾经设想过能不能创造一种"通用的科学语言"，可以把推理过程像数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。由于当时的社会条件限制，他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽，从这个意义上讲，莱布尼茨可以说是数理逻辑的先驱。

一般认为，旧逻辑学的创始人是公元前4世纪的希腊思想家亚里士多德(Aristotle，公元前384—前322)；新逻辑学的创始人是17世纪的德国哲学家莱布尼茨和19世纪中叶的英国数学家乔治·布尔(George Boole，1815—1864)。1847年，布尔发表了《逻辑的数学分析》一文，建立了"布尔代数"，并创造一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

19世纪末20世纪初，数理逻辑有了比较大的发展。1884年，德国数学家戈特洛布·弗雷格(Gottlob Frege，1848—1925)出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。对建立这门学科做出贡献的还有美国人查尔斯·皮尔斯(Charles Peirce，1839—1914)，他也在著作中引入了逻辑符号，从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。之后英国数学家德·摩根(Augustus De Morgan，1806—1871)和罗素(Bertrand Russell，1872—1970)等人丰富和完善了数理逻辑。

命题逻辑和谓词逻辑是计算机科学领域中所必需的数理逻辑基础知识。在本章中，将对命题逻辑进行介绍和讨论。

1.1 命题和联结词

1.1.1 命题的概念

定义 1.1 命题是或者为真，或者为假，而不是两者同时成立的陈述句。

作为命题的陈述句所表达的判断结果称作命题的真值，真值只能取两个值：真或假。真值为真的命题称为真命题，真值为假的命题称为假命题。注意：任何命题的真值都是唯一的。

如果一个命题的真值是真，则用 1 或 T(True)来表示；如果一个命题的真值是假，则用 0 或 F(False)来表示。

命题用大写的英文字母，如 P,Q,R……来表示。

判断给定句子是否为命题分为两步：首先判断该句子是否为陈述句；其次判断它是否有唯一的一个真值。

例 1.1 判断下面句子是否是命题。

(1) 2013 年是闰年。

(2) 2×2=5。

(3) 小明晚上去看电影。

(4) 这朵花真漂亮啊！

(5) 请不要在此处吸烟！

(6) 你下午会出去吗？

(7) 2 既是素数又是偶数。

(8) 本句话是错的。

以上句子中(1)、(2)、(3)和(7)都是命题。注意：一个陈述句能否判断真假与现在能否判断真假是两件事。(4)、(5)是感叹句，(6)是疑问句，不是命题。对于(8)，如果本句话确实是错的，那么“本句话是错的”便是真；另一方面，如果“本句话是错的”是真，那么本句话便是假。从以上分析只能得出这样的结论：本句话既不是对的又不是错的，这显然是矛盾的，也就是说对于该陈述句无法指定它的真值。这样的陈述句称为悖论，不是命题。

在上面的命题中，(1)、(2)、(3)都不能再被分割成为更小的命题，它们是基本的、原始的，这样的命题被称为原子命题。而命题(7)则不是最基本的，它还可以被分解为更小的命题：可将“2 是素数”和“2 是偶数”这两个命题由“与”联结词组合而成。像这种由更小的命题组合而成的命题称为复合命题。

1.1.2 联结词

联结词是逻辑联结词或者命题联结词的简称，它是自然语言中连词的逻辑抽象。有了联结词，就可以通过它和原子命题构成复合命题。常用的逻辑联结词主要包括以下 6 种。

(1) 联结词“非”，记为“$\neg P$”，表示“否定”的意思。

(2) 联结词“合取”，记为“$\wedge$”，表示“且”的意思。

(3) 联结词“析取”，记为“$\vee$”，表示“或”的意思。

(4) 联结词“蕴涵”，记为“$\rightarrow$”，表示“如果…，则…”的意思。

(5) 联结词“等价”，记为“$\leftrightarrow$”，表示“当且仅当”的意思。

(6) 联结词“异或”，记为“∇”，表示“要么…，要么…”的意思。

下面给出这 6 种联结词的详细定义。

1. 逻辑联结词否定——¬

设 P 是一个命题，则联结词 ¬ 和命题 P 构成 $\neg P$，$\neg P$ 为命题 P 的否定式复合命题，读作"非 P"。联结词 ¬ 是自然语言中的"非"、"不"和"没有"等的逻辑抽象。

其真值是这样定义的，若 P 的真值是 T，那么 $\neg P$ 的真值是 F；若 P 的真值是 F，则 $\neg P$ 的真值是 T。命题 P 与其否定 $\neg P$ 的真值如表 1.1 所示。

表 1.1　逻辑联结词"¬"的定义

P	$\neg P$		P	$\neg P$
F	T	或	0	1
T	F		1	0

例 1.2　给出下列命题的否定。

(1) 令 P 表示：大连是北方香港。

于是 $\neg P$ 表示：大连不是北方香港。

注意：逻辑联结词否定是个一元运算符。

(2) 令 Q 表示：所有的素数都是奇数。

于是 $\neg Q$ 表示：并非所有的素数都是奇数。

注意：翻译成"所有的素数都不是奇数"是错误的，因为否定是对整个命题进行的。

2. 逻辑联结词合取——∧

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，由联结词 ∧ 把 P 和 Q 连接成 $P \wedge Q$，称 $P \wedge Q$ 为 P 和 Q 的合取式复合命题，$P \wedge Q$ 读作"P 与 Q"或者"P 合取 Q"。联结词 ∧ 是"并且"的逻辑抽象。

它的真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 的真值都为 T 时，$P \wedge Q$ 的真值才为 T，否则 $P \wedge Q$ 的真值为 F。逻辑联结词"∧"的定义如表 1.2 所示。

表 1.2　逻辑联结词"∧"的定义

P	Q	$P \wedge Q$		P	Q	$P \wedge Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.3　令 P 表示：外面正在下雪。

令 Q 表示：3 小于 5。

于是 $P \wedge Q$ 表示：外面正在下雪并且 3 小于 5。

从自然语言看，上述命题是不合理的、没有意义的，因为 P 和 Q 毫不相关。但是，在数理逻辑中是被允许的，也是正确的。P 和 Q 再合取 $P \wedge Q$ 仍可成为一个新的命题。只要 P 和 Q 的真值给定，$P \wedge Q$ 的真值即可确定。

逻辑联结词"$\wedge$"是个二元运算符，且具有对称性，即 $P\wedge Q$ 和 $Q\wedge P$ 具有相同真值。

3. 逻辑联结词析取——$\vee$

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，由联结词$\vee$把 P、Q 连接成 $P\vee Q$，称 $P\vee Q$ 为 P、Q 的析取式复合命题，读作"P 或 Q"或"P 析取 Q"。

其真值是这样的定义的：当且仅当 P 和 Q 的真值均为 F 时，$P\vee Q$ 的真值为 F，其余情况均为 T。逻辑联结词"$\vee$"的定义如表 1.3 所示。

表 1.3　逻辑联结词"$\vee$"的定义

P	Q	$P\vee Q$		P	Q	$P\vee Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	T		1	1	1

联结词$\vee$是自然语言中"或"、"或者"的逻辑抽象。而在自然语言中，"或"是多义的。从析取的定义不难看出，逻辑联结词"$\vee$"和自然汉语中的"或"的意义并不完全相同。因为汉语中的"或"可表示"排斥或"，亦可表示"可兼或"，而逻辑联结词"析取"指的仅仅是"可兼或"，并不表示其他意义的"或"。

例 1.4　令 P 表示：小明现在正在睡觉。

令 Q 表示：小明现在正在打球。

则命题"小明现在正在睡觉或者正在打球"不能用 $P\vee Q$ 来表示。因为这里自然语言陈述的或是排斥或，这种意义的或用另一个逻辑联结词"异或"(∇)来表示，后面我们将给出它的定义。

例 1.5　将句子"他昨晚做了 20 或者 30 道作业题"表示为复合命题。

在此例中，该句子不能被表示成复合命题，因为这里的"或"表示的是近似或者猜测的意思。

例 1.6　令 P 表示：张亮是跳高运动员。

令 Q 表示：张亮是跳远运动员。

于是命题，张亮可能是跳高或跳远运动员就可以用 $P\vee Q$ 来表示，因为这里的或是可兼或。

逻辑联结词析取也是个二元运算符。

4. 逻辑联结词单条件——$\rightarrow$

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，由联结词$\rightarrow$把 P、Q 连接成 $P\rightarrow Q$，称 $P\rightarrow Q$ 为 P、Q 的条件式复合命题，把 P 和 Q 分别称为 $P\rightarrow Q$ 的前件和后件，或者前提和结论。$P\rightarrow Q$ 读作"如果 P 则 Q"或"如果 P 那么 Q"。其中 P 被称为前件，Q 被称为后件。很多时候联结词$\rightarrow$也被称为蕴涵。

$P\rightarrow Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 $P\rightarrow Q$ 的前件 P 的真值为 T，后件 Q 的真值为 F

时，$P \to Q$ 的真值为 F，否则，$P \to Q$ 的真值为 T。单条件逻辑联结词“$\to$”的定义如表 1.4 所示。

表 1.4 逻辑联结词“$\to$”的定义

P	Q	$P \to Q$		P	Q	$P \to Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	T	或	0	1	1
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.7

(1) 令 P 表示：天不下雨。

令 Q 表示：植物枯萎。

于是 $P \to Q$ 表示：如果天不下雨，则植物枯萎。

(2) 令 R 表示：我有时间。

令 S 表示：我一定去学画画。

于是 $R \to S$ 表示：如果我有时间，那我一定去学画画。

(3) 令 U 表示：大海的颜色是蓝色的。

令 V 表示：雪的颜色是白色的。

于是 $U \to V$ 表示：如果大海的颜色是蓝色的，那么雪的颜色是白色的。

此例中(1)和(2)是有因果关系的，而(3)在自然科学中毫无道理。在自然语言中，条件式的前提和结论之间必含有某种因果关系，但是在命题演算中，一个单条件逻辑联结词的前件并不需要联系到它的后件，它给出的是一种实质性的因果关系，而不单单是形式上的因果关系。也就是说只要前件 P 和后件 Q 的真值确定下来，命题 $P \to Q$ 的真值就可以确定。

例 1.8

(1) 令 P 表示：发现大自然的奥秘。

令 Q 表示：勤于思考。

于是 $P \to Q$ 表示：只有勤于思考，才能发现大自然的奥秘。

(2) 令 P 表示：付出努力。

令 Q 表示：会有收获。

于是 $P \to Q$ 表示：只要付出努力，就会有收获。

(3) 令 P 表示：能获得好成绩。

令 Q 表示：用认真的态度对待学习。

于是 $P \to Q$ 表示：除非你用认真的态度对待学习，你才能获得好成绩。

逻辑联结词单条件是个二元运算符。

5. 逻辑联结词双条件——$\leftrightarrow$

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是联结词$\leftrightarrow$把 P、Q 连接成 $P \leftrightarrow Q$，称 $P \leftrightarrow Q$ 为 P 和

Q 的双条件式复合命题，读作“P 当且仅当 Q”或“P 等值于 Q”。

$P\leftrightarrow Q$ 的真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 有相同的真值时，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 T，否则，$P\leftrightarrow Q$ 的真值为 F。$P\leftrightarrow Q$ 的运算如表 1.5 所示。

表 1.5 逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义

P	Q	$P\leftrightarrow Q$		P	Q	$P\leftrightarrow Q$
F	F	T		0	0	1
F	T	F	或	0	1	0
T	F	F		1	0	0
T	T	T		1	1	1

例 1.9 使用联结词翻译以下命题。

(1) 三角形是等边的，当且仅当它的 3 个内角相等。

(2) 电灯不亮，当且仅当灯泡发生故障或开关发生故障。

(3) $2+2=4$，当且仅当今天天晴。

解：

(1) 令 P：三角形是等边的。

Q：三角形 3 个内角相等。

于是(1)可表示为：$P\leftrightarrow Q$。

(2) 令 R：电灯不亮。

S：灯泡发生故障。

T：开关发生故障。

于是(2)可表示成：$R\leftrightarrow(S\vee T)$。

(3) 令 A：$2+2=4$。

B：今天天晴。

于是(3)可表示为：$A\leftrightarrow B$。

注意：从上面的例子中可以看出，等值式也和前面的逻辑联结词 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$ 一样可以毫无因果关系，而其真值仅仅从等值的定义而确定。

双条件逻辑联结词也是个二元运算符。

6. 逻辑联结词异或——∇

设 P 是一个命题，Q 是一个命题，于是“P 异或 Q”是一个新的命题，记作“$P\nabla Q$”，读作“P 异或 Q”。其真值是这样定义的：当且仅当 P 和 Q 有不同的真值时，$P\nabla Q$ 的真值为 T，否则 $P\nabla Q$ 的真值为 F。

$P\nabla Q$ 的运算如表 1.6 所示。

例 1.10 令 P 表示：某电视频道今晚八点播放电视剧。

令 Q 表示：某电视频道今晚八点播放女排比赛。

于是 $P\nabla Q$ 表示某电视频道今晚八点播放电视剧或播放女排比赛。

表 1.6　逻辑联结词“∇”的定义

P	Q	$P \nabla Q$		P	Q	$P \nabla Q$
F	F	F		0	0	0
F	T	T	或	0	1	1
T	F	T		1	0	1
T	T	F		1	1	0

从逻辑联结词“∇”的定义和逻辑联结词“$\leftrightarrow$”的定义不难得出，它们之间有如下的关系。

$P \nabla Q \Leftrightarrow \neg(P \leftrightarrow Q)$，也就是说逻辑联结词异或可以用双条件逻辑联结词的否定来代替。

以上我们介绍了 5 个基本的逻辑联结词：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，它们运算的优先级为：$\neg$ 优先级最高，其后依次是 $\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$；如果有括号，则括号优先，在括号里从左往右依然遵守这个顺序。

1.2　合式公式与真值表

1.2.1　合式公式

在 1.1 节中我们曾指出，不可再分的命题称为原子命题。换句话说，不包含任何逻辑联结词的命题称为原子命题。应该指出的是，这里所说的原子命题，是指其中的原子是有了确定的真值的；否则，原子没有确定的真值，指派原子的取值而是在{T，F}这个域上的，则称此原子为命题变元。由命题变元、逻辑联结词及圆括号可以构成合式的公式。下面给出命题演算中合式公式的递归定义。

定义 1.2　合式公式。

(1) 真值 T 和 F 是合式公式。

(2) 原子命题公式是一个合式公式。

(3) 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

(4) 如果 A 和 B 均是合式公式，那么$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$和$(A \leftrightarrow B)$都是合式公式。

(5) 当且仅当有限次地应用(1)～(4)条规则由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。

以上定义方法称为递归定义法。其中(1)和(2)称为递归定义的基础，(3)和(4)称为递归定义的归纳，(5)称为递归定义的界限。

后续章节我们还会经常使用这种递归定义的方法。

按照上面的定义，下面的字符串都是合式公式。

(1) $\neg(P \wedge Q)$；

(2) $\neg(P \rightarrow Q)$；

(3) $(P \rightarrow (P \wedge \neg Q))$；

(4) $(((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T))$。

下面的字符串则不是合式公式。

(1) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(\wedge Q)$;

(2) $P\rightarrow Q$;

(3) $(P\wedge Q)\rightarrow Q$。

本章把合式公式简称为命题公式。一般一个命题公式的真值是不确定的，只有用确定的命题去取代命题公式中的命题变元，或对其中的命题变元进行真值指派时，命题公式才成为具有确定真值的命题。

给定两个命题公式，若对其中变元的所有可能的真值指派两个命题公式使其具有相同的真值，则称它们是相互等价的。可以利用真值表来判定两个命题公式的等价性。

1.2.2 真值表

定义 1.3 设 A 为一命题公式，对其中出现的命题变元所有可能的每一组真值指派 S，连同公式 A 及相应 $S(A)$ 的取值汇列成表，称为 A 的真值表。一个真值表由以下两部分构成：

(1) 表的左半部分列出公式的每一种解释；

(2) 表的右半部分给出相应每种解释公式得到的真值。

为使构造的真值表方便和一致，有如下约定：

(1) 命题变元按字典序排列；

(2) 对公式的每种解释，以二进制数从小到大或者从大到小顺序排列；

(3) 若公式复杂，可先列出各子公式的真值(若有括号从里层向外展开)，最后列出所给公式的真值。

例 1.11

(1) 给出命题公式 $\neg((P\vee Q)\wedge P)$ 的真值表。

(2) 使用真值表证明命题公式 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是相互等价的。

解：构造(1)的真值表如表 1.7 所示。

表 1.7 $\neg((P\vee Q)\wedge P)$ 的真值表

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

对于构造(2)真值表如表 1.8 所示。

表 1.8 $P\leftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 的真值表

P	Q	$P\leftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

从真值表可以清楚地看出，命题公式 $P \leftrightarrow Q$ 与 $P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ 对于变元 P 和 Q 的各种真值指派，它们的真值表完全一致，所以它们是相互等价的。

1.3　永真式和等价式

1.3.1　永真式

通过对命题公式真值表的讨论，可以清楚地看出对于命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots, P_n)(n \geqslant 1)$，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合。每一种组合叫作一种真值指派，也就是说，命题公式含有 n 个变元时有 2^n 种真值指派。而对应于每一组真值指派，命题公式将有一个确定的值，从而使命题公式成为具有确定真值的命题。

例 1.12　对命题公式 $P \vee \neg P, P \wedge \neg P, P \rightarrow Q$ 做出真值表。

解：3 个命题公式的真值表如表 1.9 和表 1.10 所示。

表 1.9　命题公式 $P \vee \neg P, P \wedge \neg P$ 的真值表

P	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	1	0

表 1.10　命题公式 $P \rightarrow Q$ 的真值表

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

例 1.12 中，命题公式 $P \vee \neg P$ 和 $P \wedge \neg P$，虽然都仅含一个命题变元，都有两组真值指派，但是对应于每一组真值指派，命题公式 $P \vee \neg P$ 均取值为 T(即 1)，而命题公式 $P \wedge \neg P$ 却取值为 F(即 0)。之所以有这样的结果是因为这些命题公式的真值与其变元的真值指派无关，而根本问题在于它们的自身结构。命题公式 $P \rightarrow Q$ 含有两个命题变元，有四组真值指派。对于第 1、第 2 和第 4 这 3 组真值指派，公式取值为 1(即 T)；而对于第 3 组真值指派，公式却取值为 0(即 F)。

通过上面对有关公式真值表的讨论，总结出如下的定义。

定义 1.4　永真式、永假式与可满足式。

(1) 不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 T(即 1)的命题公式，称为永真式或重言式。

(2) 不依赖于命题变元的真值指派，而总是取值为 F(即 0)的命题公式，称为永假式或矛盾式。

(3) 至少存在一组真值指派使命题公式取值为 T 的命题公式，称为可满足式。

1.3.2 等价式

在有限步内判定一个命题公式是永真式、永假式或是可满足式的问题被称为命题公式的判定问题。我们的着眼点放在对重言式的研究上，因为它最有用，重言式有以下特点。

（1）重言式的否定是一个矛盾式，一个矛盾式的否定是重言式，所以只研究其中之一就可以了。

（2）重言式的析取、合取、单条件和双条件都是重言式，于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。

（3）由重言式可以产生许多有用的恒等式。

设　$A:A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，

$B:B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$，

是两个命题公式，这里 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不一定在两个公式中同时出现。

由此也可以归纳出等价式的定义。

定义 1.5　设 A 和 B 是两个命题公式，如果 A、B 在任意解释下，其真值都是相同的，即 $A\leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 和 B 是等价的或逻辑相等，记作 $A\Leftrightarrow B$，读作 A 恒等于 B 或 A 等价于 B。

注意符号“$\Leftrightarrow$”与符号“$\leftrightarrow$”的意义是有区别的。符号“$\leftrightarrow$”是逻辑联结词，是个运算符；而符号“$\Leftrightarrow$”是关系符，它表示 A 和 B 有逻辑等价关系。

常用的逻辑恒等式如表 1.11 所示。

表中符号 P、Q、R 代表任意命题，符号 T 代表真命题，符号 F 代表假命题。表 1.11 中所有公式是进行等价变换和逻辑推理的重要依据。表 1.11 中所有公式均可使用真值表得到证明，读者可作为练习。

表 1.11　常用逻辑恒等式

E_1	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$	
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$	交换律
E_3	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow Q\leftrightarrow P$	
E_4	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$	
E_5	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$	结合律
E_6	$(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R\Leftrightarrow P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$	
E_7	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$	
E_8	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$	分配律
E_9	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$	
E_{10}	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$	双重否定律
E_{11}	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$	德·摩根律
E_{12}	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$	
E_{13}	$\neg(P\leftrightarrow Q)\Leftrightarrow P\nabla Q$	
E_{14}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg Q\rightarrow\neg P$	逆反律
E_{15}	$\neg P\leftrightarrow\neg Q\Leftrightarrow P\leftrightarrow Q$	
E_{16}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$	等幂律
E_{17}	$P\vee P\Leftrightarrow P$	

续表

E_{18}	$P\wedge\neg P\Leftrightarrow F$	
E_{19}	$P\vee\neg P\Leftrightarrow T$	
E_{20}	$P\wedge T\Leftrightarrow P$	
E_{21}	$P\wedge F\Leftrightarrow F$	
E_{22}	$P\vee T\Leftrightarrow T$	
E_{23}	$P\vee F\Leftrightarrow P$	
E_{24}	$P\leftrightarrow T\Leftrightarrow P$	
E_{25}	$P\leftrightarrow F\Leftrightarrow\neg P$	
E_{26}	$P\leftrightarrow Q\Leftrightarrow(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow P)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$	
E_{27}	$P\rightarrow Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$	
E_{28}	$(P\wedge Q)\rightarrow R\Leftrightarrow(P\rightarrow(Q\rightarrow R))$	输出律
E_{29}	$P\wedge(P\vee Q)\Leftrightarrow P$	吸收律
E_{30}	$P\vee(P\wedge Q)\Leftrightarrow P$	

1.3.3　代入规则和替换规则

1. 代入规则

在一个重言式中，某个命题变元出现的每一处均代以同一个公式后，所得到的新的公式仍是重言式，这条规则称为代入规则。

这条规则之所以正确，是因为永真式对于任何解释，其值都是真，与所给的某个变元指派的真值是真还是假无关，因此，用一个命题公式代入到原子命题变元 R 出现的每一处后，所得命题公式的真值还是真。例如：

$P\wedge\neg P\leftrightarrow F$，令 $R\wedge Q$ 代 P 得，

$(R\wedge Q)\wedge\neg(R\wedge Q)\leftrightarrow F$ 仍是重言式。

2. 替换规则

设有恒等式 $A\Leftrightarrow B$，若在公式 C 中出现 A 的地方替换以 B（不一定是每一处都进行）而得到公式 D，则 $C\Leftrightarrow D$，这条规则称为替换规则。

如果 A 是公式 C 中完整的部分，且 A 是合式公式，则称 A 是 C 的子公式。规则中“公式 C 中出现 A”即“A 是 C 的子公式”。

这条规则之所以正确，是因为在公式 C 和 D 中替换部分以外的部分均相同，所以 C 和 D 的真值也相同，故 $C\Leftrightarrow D$。

应用代入规则和替换规则及已有的重言式可以证明新的重言式。

例如对公式 E_{12}：$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$，以 $A\wedge B$ 代 E_{12} 中的 P，而以 $\neg A\wedge\neg B$ 代 E_{12} 中的 Q 就得出公式 $\neg((A\wedge B)\wedge(\neg A\wedge\neg B))\Leftrightarrow\neg(A\wedge B)\vee\neg(\neg A\wedge\neg B)$。

对公式 E_{20}：$P\wedge T\Leftrightarrow P$，利用公式 $P\vee\neg P\Leftrightarrow T$，对其中的 T 作替换（对命题常元不能做代换）得公式 $P\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow P$。

…

因此，可以说表 1.11 和表 1.13 中的字符 P、Q 和 R 不仅代表命题变元，而且可以代表命题公式；T 和 F 不仅代表真命题和假命题，而且可以代表重言式和永假式。用这样的观点看待表 1.11 中的公式，应用就显得更方便。

例 1.13

(1) 试证 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow Q\to(P\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$。

证：$P\to(Q\to R)$

$\Leftrightarrow\neg P\vee(\neg Q\vee R)$　　两次替换

$\Leftrightarrow\neg Q\vee(\neg P\vee R)$　　结合、交换、结合

$\Leftrightarrow Q\to(P\to R)$　　两次替换

类似可证 $P\to(Q\to R)\Leftrightarrow\neg R\to(Q\to\neg P)$。

(2) 试证 $(P\to Q)\to(Q\vee R)\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$。

证：$(P\to Q)\to(Q\vee R)$

$\Leftrightarrow\neg(P\vee Q)\vee(Q\vee R)$　　E_{27} 和替换规则

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(Q\vee R)$　　E_{12} 和替换规则

$\Leftrightarrow((P\wedge\neg Q)\vee Q)\vee R$　　E_4

$\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(Q\vee\neg Q))\vee R$

$\Leftrightarrow P\vee Q\vee R$　　例 1.13 的(1)和替换规则

(3) 试将语句“情况并非如此，如果他不来，那么我也不去”化简。

解：设 P 表示：他来。Q 表示：我去。于是上述语句可符号化为：

$\neg(\neg P\to\neg Q)$

对此式化简得

$\neg(\neg P\to\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg\neg P\vee\neg Q)$　　E_{27} 和替换规则

$\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$

化简后的语句是“我去了，而他没来”。

从定理及例题可以看到，代入和替换有两点区别：

(1) 代入是对原子命题变元而言，替换通常是可对命题公式实行；

(2) 代入必须是处处代入，替换则可部分替换或全部替换。

1.4 对偶式与蕴涵式

1.4.1 对偶式

定义 1.6 设有公式 A，其中仅含逻辑联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 和逻辑常值 T 和 F。在 A 中将 $\wedge$，$\vee$，T，F 分别换以 $\vee$，$\wedge$，F，T 得公式 A^*，则称 A^* 为 A 的对偶式。同理，A 也可称为 A^* 的对偶式，即对偶式是相互的。

定理 1.1 设 A 和 A^* 互为对偶式，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 是出现于 A 和 A^* 中的所有命题变元，于是

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n) \tag{1}$$

$$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\Leftrightarrow\neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n) \qquad (2)$$

证明：由德·摩根律

$$P\wedge Q\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee\neg Q)$$
$$P\vee Q\Leftrightarrow\neg(\neg P\wedge\neg Q)$$

故

$$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\Leftrightarrow A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$$

同理

$$A(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\Leftrightarrow\neg A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$$

例 1.14　证明：$\neg P\vee(Q\wedge R)$和$\neg P\wedge(Q\vee R)$为对偶式。

证明：$A(P,Q,R)\Leftrightarrow\neg P\vee(Q\wedge R)$

$\neg A(P,Q,R)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee(Q\wedge R))$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P)\wedge\neg(Q\wedge R)$

$\Leftrightarrow\neg(\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg R)$

$A^*(P,Q,R)\Leftrightarrow\neg P\wedge(Q\vee R)$

$A^*(\neg P,\neg Q,\neg R)\Leftrightarrow\neg(\neg P)\wedge(\neg Q\vee\neg R)$

所以

$\neg A(P,Q,R)\Leftrightarrow A^*(\neg P,\neg Q,\neg R)$

$A(\neg P,\neg Q,\neg R)\Leftrightarrow\neg(\neg P)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$

$\neg A^*(P,Q,R)\Leftrightarrow\neg(\neg P)\vee\neg(Q\vee R)\Leftrightarrow\neg(\neg P)\vee(\neg Q\wedge\neg R)$

所以

$$A(\neg P,\neg Q,\neg R)\Leftrightarrow\neg A^*(P,Q,R)$$

定理 1.2　若$A\Leftrightarrow B$，且A,B为命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$及联结词$\wedge,\vee,\neg$构成的公式，则$A^*\Leftrightarrow B^*$。

证明：$A\Leftrightarrow B$意味着$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\leftrightarrow B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为永真式，

于是$\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\leftrightarrow\neg B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为永真式，

由定理 1.1 得

$A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\leftrightarrow B^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$为永真式。

因为上式是永真式，使用带入规则所得仍为永真式，以$\neg P_i$代$P_i(i=1,2,\cdots,n)$，得$A^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)\leftrightarrow B^*(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为永真式，所以$A^*\Leftrightarrow B^*$。

本定理称为**对偶原理**。

例 1.15　若$(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee(\neg P\vee Q))\Leftrightarrow\neg P\vee Q$，试证$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge(\neg P\wedge Q))\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$。

证明：由对偶原理得

$$((P\wedge Q)\vee(\neg P\vee(\neg P\vee Q)))^*\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)^*$$

即$(P\vee Q)\wedge(\neg P\wedge(\neg P\wedge Q))\Leftrightarrow\neg P\wedge Q$。

定理 1.3　如果$A\Rightarrow B$且A,B为命题变元$P_1,P_2,\cdots,P_n$及联结词$\wedge,\vee,\neg$构成的公式，则$B^*\Rightarrow A^*$。

证明：$A\Rightarrow B$意味着$A(P_1,P_2,\cdots,P_n)\rightarrow B(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为永真式。

由逆反律得

$\neg B(P_1,P_2,\cdots,P_n)\to\neg A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$为永真式。

由定理 1.1 得

$B^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)\to A^*(\neg P_1,\neg P_2,\cdots,\neg P_n)$为永真式。

因为上式是永真式，使用带入规则仍为永真式，以 $\neg P_i$ 代 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$ 得 $B^*\Rightarrow A^*$。

1.4.2 蕴涵式

如果单条件联结式 $A\to B$ 是一个永真式，则它被称为永真蕴涵式，记为"$A\Rightarrow B$"，读作"A 永真蕴涵 B"。其中 A 称为 B 的有效前提，B 称为 A 的逻辑结果，可以说由 A 推出 B，也可以说 B 是由 A 推出的。从 $A\Rightarrow B$ 的定义不难看出，要证明 A 永真蕴涵 B，只要证明 $A\to B$ 是一个永真式即可。而从 $A\to B$ 的定义不难知道要说明 $A\to B$ 是永真式，只要说明下面两点之一即可。

(1) 假定前件 A 是真，若能推出后件 B 必为真，则 $A\to B$ 永真，于是 $A\Rightarrow B$。

(2) 假定后件 B 是假，若能推出前件 A 必为假，则 $A\to B$ 永真，于是 $A\Rightarrow B$。

也可以用真值表法来证明永真蕴涵式，即证明对于命题公式中命题变元的所有真值指派来说，若其中使逻辑前提取值为真的那些真值指派，必然使逻辑结果取值为真，则说 $A\Rightarrow B$。

例 1.16 证明 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

证明：方法一，

设 $\neg Q\wedge(P\to Q)$为真，于是 $\neg Q$，$P\to Q$ 均为真，从而得出 Q 为假，因而 $\neg P$ 是真。

所以 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

方法二，

设 $\neg P$ 是假，于是 P 为真，这时不论 Q 是真是假都使 $\neg Q\wedge(P\to Q)$为假。于是 $\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

方法三，

使用真值表，构造前提和结论的真值表如表 1.12 所示。

表 1.12 例 1.16 的方法三

P	Q	$\neg Q\wedge(P\to Q)$	$\neg P$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	0	0

从真值表可以看出，使 $\neg Q\wedge(P\to Q)$取 T 值的那些变元的真值指派，也使 $\neg P$ 取 T 值；而使 $\neg P$ 取 F 值的那些变元的真值指派，也使 $\neg Q\wedge(P\to Q)$取 F 值，因此，$\neg Q\wedge(P\to Q)\Rightarrow\neg P$。

常用的永真蕴涵式如表 1.13 所示。

表 1.13 常用永真蕴涵式

I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$	化简式
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$	
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$	附加式
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$	
I_5	$\neg P\Rightarrow P\to Q$	
I_6	$Q\Rightarrow P\to Q$	
I_7	$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$	
I_8	$\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$	
I_9	$\neg P, P\vee Q\Rightarrow Q$	析取三段论
I_{10}	$P, P\to Q\Rightarrow Q$	假言推论
I_{11}	$\neg Q, P\to Q\Rightarrow\neg P$	拒取式
I_{12}	$P\to Q, Q\to R\Rightarrow P\to R$	假言三段论
I_{13}	$P\vee Q, P\to R, Q\to R\Rightarrow R$	二难推论
I_{14}	$P\to Q\Rightarrow R\vee P\to R\vee Q$	
I_{15}	$P\to Q\Rightarrow R\wedge P\to R\wedge Q$	
I_{16}	$P, Q\Rightarrow P\wedge Q$	

1.5 范式和判定问题

前面曾提及过在有限步内确定一个合式公式是永真的、永假的或是可满足的，这类问题称为命题公式的判定问题。

在前面的介绍中，可以看到，由于合式公式的形式不唯一，给判定工作带来一定难度，虽然使用真值表可以解决命题公式的判定问题，但是，当命题变元数目多时，使用真值表也不是很方便。所以必须通过其他的途径来解决判定问题——把合式公式化为标准型（范式）。

1.5.1 析取范式和合取范式

为叙述方便，把合取称为积，把析取称为和。

定义 1.7 命题公式中的一些变元和一些变元的否定之积，称为基本积；一些变元和变元的否定之和，称为基本和。

例如，给定命题变元 P 和 Q，则：

$P, Q, \neg P, \neg Q, \neg P\wedge Q, P\wedge Q, \neg P\wedge P, \neg Q\wedge P\wedge Q$ 都是基本积；$P, Q, \neg P, \neg Q, P\vee\neg Q, P\vee Q, P\vee\neg P, P\vee Q\vee\neg P$ 都是基本和。

基本积（和）中的子公式称为基本积（和）的因子。

定理 1.4 一个基本积是永假式，当且仅当它含有 $P, \neg P$ 形式的两个因子。

证明：（充分性）$P\wedge\neg P$ 是永假式，而 $Q\wedge F$ 含有两个因子时，此基本积是永假式，所以含有 P 和 $\neg P$ 形式的两个因子的基本积是永假式。

（必要性）用反证法。设基本积永假但不含 P 和 $\neg P$ 形式的因子，于是给这个基本积中的命题变元指派真值 T，给带有否定的命题变元指派真值 F，得基本积的真值是 T，与假设

矛盾。证毕。

定理 1.5 一个基本和是永真式,当且仅当它含有 $P,\neg P$ 形式的两个因子。

证明留给读者作为练习。

定义 1.8 一个由基本积的和组成的公式,如果与给定的公式 A 等价,则称它是 A 的析取范式,记为:$A=A_1\lor A_2\lor\cdots\lor A_n,n\geqslant 1$,其中 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$是基本积。

对于任何命题公式,都可求得与其等价的析取范式,这是因为命题公式中出现的→和↔可用∧、∨和¬表达,括号可通过德·摩根定律和∧对∨的分配律消去。但是一个命题公式的析取范式不是唯一的。

如果析取范式中每个基本积都是永假式,则该范式必定是永假式。

例 1.17

(1) 求$(P\land(Q\to R))\to S$ 的析取范式。

解:$(P\land(Q\to R))\to S\Leftrightarrow\neg(P\land(\neg Q\lor R))\lor S$

$\Leftrightarrow(\neg P\lor(Q\land\neg R))\lor S$

$\Leftrightarrow\neg P\lor(Q\land\neg R)\lor S$ 析取范式

(2) 求$\neg(P\lor Q)\leftrightarrow(P\land Q)$的析取范式。

解:$\neg(P\lor Q)\leftrightarrow(P\land Q)$

$\Leftrightarrow\neg(P\lor Q)\land(P\land Q)\lor\neg(\neg(P\lor Q))\land\neg(P\land Q)$

$\Leftrightarrow(\neg P\land\neg Q\land P\land Q)\lor((P\lor Q)\land(\neg P\lor\neg Q))$

$\Leftrightarrow F\lor(P\lor Q)\land(\neg P\lor\neg Q)$

$\Leftrightarrow(P\lor Q)\land(\neg P\lor\neg Q)$

$\Leftrightarrow((P\lor Q)\land\neg P)\lor((P\lor Q)\land\neg Q)$

$\Leftrightarrow P\land\neg P\lor\neg P\land Q\lor P\land\neg Q\lor Q\land\neg Q$

$\Leftrightarrow F\lor\neg P\land Q\lor P\land\neg Q\lor F\Leftrightarrow(\neg P\land Q)\lor(P\land\neg Q)$。

定义 1.9 一个由基本和的积组成的公式,如果与给定的命题公式 A 等价,则称它是 A 的合取范式,记为:$A=A_1\land A_2\land\cdots\land A_n,n\geqslant 1$,其中 $A_1,A_2,\cdots,A_n$是基本和。

对任何命题公式都可求得与其等价的合取范式,道理同析取范式。同样,一个命题公式的合取范式也不唯一。

如果一个命题公式的合取范式的每个基本和都是永真式,则该式也必定是永真式。

例 1.18

(1) 试证 $Q\lor P\land\neg Q\lor\neg P\land\neg Q$ 是永真式。

解:$Q\lor P\land\neg Q\lor\neg P\land\neg Q$

$\Leftrightarrow Q\lor(P\lor\neg P)\land\neg Q$

$\Leftrightarrow Q\lor T\land\neg Q$

$\Leftrightarrow Q\lor\neg Q$

$\Leftrightarrow T$

(2) 求$\neg(P\lor Q)\to(P\land Q)$的合取范式。

解:令 $A\Leftrightarrow\neg(P\lor Q)\to(P\land Q)$,则

$\neg A\Leftrightarrow\neg(\neg(P\lor Q)\lor(P\land Q))$

$\Leftrightarrow\neg((\neg(P\lor Q)\land(P\land Q))\lor(\neg(\neg(P\lor Q)\land\neg(P\land Q))))$

$\Leftrightarrow \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)))$

$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$

由于 $A \Leftrightarrow \neg\neg A = \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q))$

所以 $A \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

1.5.2 主析取范式和主合取范式

定义 1.10 在含 n 个变元的基本积中，若每个变元与其否定不同时存在，而二者之一必出现且仅出现一次，则称这种基本积为极小项。

n 个变元可构成 2^n 个不同的极小项。例如 3 个变元 P,Q,R 可构成 8 个极小项。如果把命题变元看成 1，命题变元的否定看成 0，于是每个极小项对应于一个二进制数，也对应一个十进制数。对应情况如下。

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——000——0

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$ ——001——1

$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$ ——010——2

$\neg P \wedge Q \wedge R$ ——011——3

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$ ——100——4

$P \wedge \neg Q \wedge R$ ——101——5

$P \wedge Q \wedge \neg R$ ——110——6

$P \wedge Q \wedge R$ ——111——7

把极小项对应的十进制数当作下标，并用 $m_i(i=0,1,2,\cdots,2^n-1)$ 表示这一项，即

$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_0$

$\neg P \wedge \neg Q \wedge R = m_1$

$\neg P \wedge Q \wedge \neg R = m_2$

$\neg P \wedge Q \wedge R = m_3$

$P \wedge \neg Q \wedge \neg R = m_4$

$P \wedge \neg Q \wedge R = m_5$

$P \wedge Q \wedge \neg R = m_6$

$P \wedge Q \wedge R = m_7$

一般，n 个变元的极小项是：

$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_n = m_0$

$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_{n-1} \wedge P_n = m_1$

$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge P_{n-1} \wedge \neg P_n = m_2$

…

$\neg P_1 \wedge \neg P_2 \wedge \cdots \wedge \neg P_n = m_{2^n-1}$

定义 1.11 一个由极小项的和组成的公式，如果与命题公式 A 等价，则称它是公式 A 的主析取范式。

对任何命题公式(永假式除外)都可求得与其等价的主析取范式，而且主析取范式的形式唯一。它给范式判定问题带来很大益处。例如：

$$
\begin{aligned}
A &\Leftrightarrow P \wedge Q \vee R \\
&\Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge (R \vee \neg R) \vee (P \vee \neg P) \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge R \vee \neg P \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge R \wedge (Q \vee \neg Q) \vee (\neg P \wedge R) \wedge (Q \vee \neg Q) \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge \neg Q \\
&\quad \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R \vee P \wedge Q \wedge \neg R \vee P \wedge \neg Q \wedge R \vee \neg P \wedge Q \wedge R \vee \neg P \wedge \neg Q \wedge R \\
&\Leftrightarrow m_7 \vee m_6 \vee m_5 \vee m_3 \vee m_1 \\
&\Leftrightarrow \sum(1,3,5,6,7)
\end{aligned}
$$

其中,符号“$\sum$”是借用数学中求和的符号,这里代表析取。

命题公式 A 不是永真式也不是永假式,而是可满足的。关于这一点将通过考查一个命题公式的主析取范式和它的真值表的关系而得出。

下面研究命题公式 $A=P \wedge Q \vee R$ 的真值表,如表 1.14 所示。

表 1.14 $A=P \wedge Q \vee R$ 的真值表及对应的极小项

P	Q	R	极小项	$P \wedge Q \vee R$
0	0	0	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
0	0	1	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$	1
0	1	0	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$	0
0	1	1	$\neg P \wedge Q \wedge R$	1
1	0	0	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	0
1	0	1	$P \wedge \neg Q \wedge R$	1
1	1	0	$P \wedge Q \wedge \neg R$	1
1	1	1	$P \wedge Q \wedge R$	1

从公式 $P \wedge Q \vee R$ 的真值表中不难看出,使命题公式取值为 T 的每一组变元的真值指派也使同行上的极小项取值为 T。如果把这些极小项析取起来,显然它应该和命题公式 $P \wedge Q \vee R$ 是等价的。当然使命题公式取值为 F 的那些组命题变元所对应的极小项对公式是不起作用的。

如果命题公式是永真式,则对应于命题变元的所有极小项应在其主析取范式中全部出现。

如果所给命题公式是永假式,则它不存在主析取范式。

定义 1.12 在含 n 个变元的基本和中,若每个变元与其否定不同时存在,而二者之一必出现且仅出现一次,则称这种基本和为极大项。

n 个变元可以构成 2^n 个不同的极大项。例如 3 个变元 P,Q,R 可构成 8 个极大项。在极大项中,把命题变元看成 0,而把命题变元的否定看成 1,于是每一个极大项对应于一个二进制数,也对应一个十进制数。对应情况如下。

$P \vee Q \vee R$ ——000——0

$P \vee Q \vee \neg R$ ——001——1

$P \vee \neg Q \vee R$ ——010——2

$P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——011——3

$\neg P \vee Q \vee R$ ——100——4

$\neg P \vee Q \vee \neg R$ ——101——5

$\neg P \vee \neg Q \vee R$ ——110——6

$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ ——111——7

把极大项对应的十进制数当作下标，并用 $M_i(i=0,1,2,\cdots,2^n-1)$ 表示这一项，即

$P \vee Q \vee R = M_0$

$P \vee Q \vee \neg R = M_1$

$P \vee \neg Q \vee R = M_2$

$P \vee \neg Q \vee \neg R = M_3$

$\neg P \vee Q \vee R = M_4$

$\neg P \vee Q \vee \neg R = M_5$

$\neg P \vee \neg Q \vee R = M_6$

$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R = M_7$

一般 n 个变元的极大项是：

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n = M_0$

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_{n-1} \vee P_n = M_1$

$P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee \neg P_{n-1} \vee P_n = M_2$

…

$\neg P_1 \vee \neg P_2 \vee \cdots \vee \neg P_n = M_{2^n-1}$

定义 1.13 一个由极大项的积组成的公式，如果与命题公式 A 等价，则称它是 A 的主合取范式。

对任何命题公式(永真式除外)都可求得与其等价的主合取范式，且主合取范式的形式唯一。例如：

$$
\begin{aligned}
A &= P \wedge Q \vee R \\
&= (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \\
&= (P \vee R) \vee (Q \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee R) \vee (P \wedge \neg P) \\
&= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&= (P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R) \\
&= M_0 \wedge M_2 \wedge M_4 \\
&= \prod(0,2,4)
\end{aligned}
$$

其中，符号“$\prod$”是借用数学中求积的符号，这里代表合取。从 A 的主合取范式，立刻可以判断出 A 是可满足的。下面通过考查 $A = P \wedge Q \vee R$ 及其真值表来说明极大项和主合取范式的关系及极大项和极小项的关系，如表 1.15 所示。

从表 1.15 中可以清楚地看出，使公式 A 取 F(即 0)的那些真值指派也必然使同行上对应的极大项取 F 值，把所有这些极大项合取起来当然应和命题公式 A 等价，省略使命题公式 A 取 T(即 1)值的极大项是因为合取上 T 还等价于原来的命题。

表 1.15　$A=P\wedge Q\vee R$ 的真值表及对应的极大项

P	Q	R	极大项	$P\wedge Q\vee R$
0	0	0	$P\vee Q\vee R$	0
0	0	1	$P\vee Q\vee\neg R$	1
0	1	0	$P\vee\neg Q\vee R$	0
0	1	1	$P\vee\neg Q\vee\neg R$	1
1	0	0	$\neg P\vee Q\vee R$	0
1	0	1	$\neg P\vee Q\vee\neg R$	1
1	1	0	$\neg P\vee\neg Q\vee R$	1
1	1	1	$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$	1

对照表 1.14 和表 1.15 可以发现极小项 m_i 和极大项 M_i 有下列的关系式：

$$M_i=\neg m_i,\quad m_i=\neg M_i$$

利用求一个命题公式的主析取范式和主合取范式的方法，可以很快地判断一个命题公式是永真的、永假的或是可满足的。一个命题公式是永真式，它的命题变元的所有极小项均出现在其主析取范式中，不存在与其等价的主合取范式；一个命题公式是永假式，它的命题变元的所有极大项均出现在其主合取范式中，不存在与其等价的主析取范式；一个命题公式是可满足的，它既有与其等价的主析取范式，也有与其等价的主合取范式。通过对公式 $A=P\wedge Q\vee R$ 的讨论，不难看出通过公式直接求主析取、主合取范式的方法。从真值表中也可以看出，如果一个命题公式含有 n 个变元，则可以写出 2^n 个极小项和 2^n 个极大项，并且如果这个命题公式的主析取范式含有 $i(i<n)$ 个极小项，则它的主合取范式应含有 2^n-i 个极大项，每个极大项可由将相应 2^n-i 个极小项取否定而得到，即如果已求出一个命题公式的主析取（或主合取）范式，则可通过上面所说的关系直接写出公式的主合取（或主析取）范式。

1.6　命题演算的推理理论

逻辑学的主要任务是提供一套推论规则，按照公认的推论规则，从前提集合中推导出一个结论来，这样的推导过程称为演绎或形式证明。

在任何论证中，倘若认定前提是真的，从前提推导出结论的论证遵守了逻辑推论规则，则认为此结论是真的，并且认为这个论证过程是合法的。也就是说，对于任何论证来说，人们所注意的是论证的合法性。数理逻辑则把注意力集中于推论规则的研究，依据这些推论规则推导出的任何结论，称为有效结论，而这种论证规则被称为有效论证。数理逻辑所关心的是论证的有效性而不是合法性，也就是说数理逻辑所注重的是推论过程中推论规则使用是否有效，而并不关心前提的实际真值。

推论理论对计算机科学中的程序验证、定理的机械证明和人工智能都十分重要。

定义 1.14　设 $H_1,H_2,\cdots,H_m,C$ 是一些命题公式，当且仅当 $H_1\wedge H_2\wedge\cdots\wedge H_m\Rightarrow C$，则说 C 是前提集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 的有效结论。

显然，给定一个前提集合和一个结论，用构成真值表的方法，在有限步内能够确定该结

论是否是该前提集合的有效结论。这种方法被称为真值表法。下面举例说明。

例 1.19　考查结论 C 是否是下列前提 H_1，H_2 和 H_3 的有效结论。

(1) H_1：$\neg P \vee Q$

H_2：$\neg(Q \wedge \neg R)$

H_3：$\neg R$

C：$\neg P$

(2) H_1：$P \to (Q \to R)$

H_2：$P \wedge Q$

C：R

(3) H_1：$\neg P$

H_2：$P \vee Q$

C：$P \wedge Q$

解：首先构造(1)、(2)和(3)的真值表，如表 1.16，表 1.17 和表 1.18 所示。

表 1.16　例 1.19 中(1)的真值表

P　Q　R	$\neg P \vee Q$	$\neg(Q \wedge \neg R)$	$\neg R$	$\neg P$
0　0　0	1	1	1	1
0　0　1	1	1	0	1
0　1　0	1	0	1	1
0　1　1	1	1	0	1
1　0　0	0	1	1	0
1　0　1	0	1	0	0
1　1　0	1	0	1	0
1　1　1	1	1	0	0

在表 1.16 中仅第一行各前提的真值都为 1，结论也有真值 1，因此(1)的结论是有效的。

表 1.17　例 1.19 中(2)的真值表

P　Q　R	$P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q$	R
0　0　0	1	0	0
0　0　1	1	0	1
0　1　0	1	0	0
0　1　1	1	0	1
1　0　0	1	0	0
1　0　1	1	0	1
1　1　0	0	1	0
1　1　1	1	1	1

在表 1.17 中仅第 8 行上各前提的真值都为 1，结论也有真值 1，因此(2)的结论也是有效的。

表 1.18 例 1.19 中(3)的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	1

在表 1.18 中,使前提取值均为 1 的是第二行,但结论却取值为 0,因此,(3)的结论无效。

使用真值表可以证明某一个结论是否是某一组前提的有效结论,如上面所举的例子。但是,当变元多或前提规模大时,这种方法就显得不是很方便了。为此,下面介绍一套推论理论的推论规则,如果推论规则使用有效,则说由这套推论规则所推出的结论也是有效的。

规则 P:引入一个前提称为使用一次 P 规则。

规则 T:在推导中,如果前面有一个或多个公式永真蕴涵公式 S,则可以把公式 S 引进推导过程中。换句话说,引进前面推导过程中的推论结果称为使用 T 规则。

规则 CP:如果能从 R 和前提集合中推导出 S 来,就能够从前提集合中推导出 $R \rightarrow S$。实际上从恒等式 E_{28} 就可以推出规则 CP。

$$
\begin{aligned}
(P \wedge Q \rightarrow R) &\Leftrightarrow \neg(P \wedge Q) \vee R \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \vee R \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (\neg Q \vee R) \\
&\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \rightarrow R) \\
&\Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)
\end{aligned}
$$

设 P 表示前提的合取,Q 是任意公式,则上述恒等式可表述成:在前提集合中若包含有附加前提 Q,并且从 $P \wedge Q$ 中可以推导出 R 来,则可从前提 P 中推导出 $Q \rightarrow R$ 来。

下面举例说明如何使用以上规则进行有效推论。

例 1.20 试证明 $\neg P$ 是 $\neg(P \wedge \neg Q)$,$\neg Q \vee R$,$\neg R$ 的有效结论。

解:

{1}	(1) $\neg(P \wedge \neg Q)$	P 规则
{1}	(2) $\neg P \vee Q$	T 规则(1)和 E_{11}
{1}	(3) $P \rightarrow Q$	T 规则(2)和 E_{27}
{4}	(4) $\neg Q \vee R$	P 规则
{4}	(5) $Q \rightarrow R$	T 规则(4)和 E_{27}
{1,4}	(6) $P \rightarrow R$	T,(3),(5)和 I_{12}
{7}	(7) $\neg R$	P 规则
{1,4,7}	(8) $\neg P$	T 规则(6),(7)和 I_{11}

其中,第一列上花括号中的数字集合,指明了本行上的公式所依赖的前提。第二列中的编号既代表了该公式又代表了该公式所处的行。最右边给出的是推论规则和注释,注释包括本行是哪行的结论及所依据的恒等式和永真蕴涵式。

例 1.21 证明 $R \rightarrow S$ 是前提 $P \rightarrow (Q \rightarrow S)$,$Q$ 和 $\neg R \vee P$ 的有效结论。

解：把 R 作为附加前提，首先推导出 S 来，再由此推导出 $R\rightarrow S$ 来。

{1}	(1) R	P 规则(附加前提)
{2}	(2) $\neg R\lor P$	P 规则
{1,2}	(3) P	T 规则(1),(2),和 I_9
{4}	(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	P 规则
{1,2,4}	(5) $Q\rightarrow S$	T 规则(3),(4)和 I_{10}
{6}	(6) Q	P 规则
{1,2,4,6}	(7) S	T 规则,(5),(6)和 I_{10}
{1,2,4,6}	(8) $R\rightarrow S$	CP 规则(1),(7)

前面曾讨论过范式判定问题。显然，如果在有限步内能断定论证是否有效，也就解决了论证的判定问题。然而，前面讨论过的推导方法，实际上仅是部分地解决了判定问题的求解。也就是说，如果一个论证是有效的，则使用这种方法可以证明论证是有效的；反之，如果论证不是有效的，则经过有限步之后，还难于断定这个论证不是有效的。

下面介绍第 4 个推论规则。

规则 F：也称间接证明法(或反证法)。为了说明规则 F，给出下面的定义和定理。

定义 1.15　设公式 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 中的原子变元是 $P_1,P_2,\cdots,P_n$，

如果给各原子变元 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 指派某一个真值集合，能使 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m$ 具有真值 T，则命题公式集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 称为一致的(或相容的)；对于各原子变元的每一个真值指派，如果命题公式 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ 中至少有一个是假，从而使得 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m$ 是假，则称命题公式集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 是非一致的(或不相容的)。

设 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 是一个命题公式集合，如果它们的合取蕴涵着一个永假式，也就是说 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m\Rightarrow R\land\neg R$，这里 R 是任何一个公式，则公式集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 必然是非一致的。因为 $R\land\neg R$ 是一个永假式，所以它充分而又必要地决定了 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m$ 是一个永假式。

在间接证明法中，就应用了非一致的概念。

定理 1.6　设命题公式集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m,\neg C\}$ 是非一致的，亦即它蕴涵着一个永假式，则可以从前提集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中推导出命题公式 C 来。

证明：因为 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m\land\neg C\Rightarrow R\land\neg R$，所以 $H_1\land H_2\land\cdots\land\neg C$ 必定是永假式。因为前提集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 是一致的，所以能使 $H_1\land H_2\land\cdots\land H_m$ 的真值为 T 的真值指派，必然会使 $\neg C$ 的真值为 F，从而使 C 的真值为 T，故有：

$$H_1,H_2,\cdots,H_m\Rightarrow C$$

这样就可以从前提集合 $\{H_1,H_2,\cdots,H_m\}$ 中推导出命题公式 C 来。

例 1.22　证明 $\neg(P\land Q)$ 是 $\neg P\land\neg Q$ 的有效结论。

解：把 $\neg\neg(P\land Q)$ 作为假设前提，并证明该假设前提导致一个永假式。

{1}	(1) $\neg\neg(P\land Q)$	P 规则(假设前提)
{2}	(2) $P\land Q$	T 规则(1)和 E_{10}
{1}	(3) P	T 规则,(2),和 I_1
{4}	(4) $\neg P\land\neg Q$	P 规则
{4}	(5) $\neg P$	T 规则,(4)和 I_1

{1,4}	(6) $P\wedge\neg P$	T 规则(3),(5)和 I_{16}
{1,4}	(7) $\neg(P\wedge Q)$	F 规则(1),(6)

由以上几个例子,可以总结出这样的经验:当要证明的结论是条件式时,可考虑使用CP 规则;当要证明的结论比较简单,而仅仅使用前提推导不明显时,可考虑使用间接证明法即 F 规则,以使推导过程变得简洁。

1.7 基于布尔逻辑的信息检索

布尔逻辑(Boolean Logic)是根据 19 世纪英国数学家乔治.布尔(George Boole)而命名的。布尔逻辑在电子学、计算机硬件和软件上有很多应用。如在电子工程的电路设计中,可以用 0 和 1 代表数字电路中的不同状态;在软件设计中,也常常使用布尔逻辑来表示程序的运行状况。

基于布尔逻辑的信息检索也称为布尔逻辑搜索,指利用布尔逻辑运算符连接各个检索词构成逻辑检索式,然后由计算机进行相应运算,以找出所需信息的方法。常用的布尔逻辑运算符包含“与”、“或”、“非”和一些位置运算符。Google(www.google.com)是世界上最流行的搜索引擎之一,支持高达 130 多种语言,提供智能化的互联网搜索服务。下面以Google 为例对这些运算符进行简单介绍。

1.7.1 布尔逻辑运算符

1. 逻辑与

该运算符用符号“and”或“*”表示,相应的逻辑表达式为“A and B”或“A * B”,检索记录同时含有检索词 A 和 B 的网页被命中。应用该运算符可以缩小检索范围,提高查询准确率。

Google 中使用符号“+”来表示逻辑“与”操作,事实上,无须用明文的“+”,只要使用空格就默认为关键词之间的逻辑“与”运算。例如:要查找“胰岛素治疗糖尿病”,只需在搜索引擎的检索框内输入“胰岛素 糖尿病”,其作用与“胰岛素+糖尿病”完全相同,查询效率和准确率相比“胰岛素”或“糖尿病”有明显提高。

2. 逻辑或

该运算符用符号“or”表示,相应的逻辑表达式为“A or B”,在检索记录中凡含有检索词A 或检索词 B 或同时含有检索词 A 和 B 的,均为命中网页。应用该运算符可以扩大检索范围,提高查全率。

Google 用大写的“OR”或者符号“|”表示逻辑“或”操作。例如查找有关计算机辅助设计方面的文献,用英文检索时若只输入这个词组的缩写“CAD”或全称“Computer Aided Design”就会造成漏检,必须输入检索式“CAD OR Computer Aided Design”才能保证查全率。

3. 逻辑非

该运算符用符号“not”或“—”表示，相应的逻辑表达式为“A not B”或“A—B”，在检索记录中含有检索词 A 但不包含检索词 B 的文献，才算命中文献。使用该运算符可以缩小检索范围，提高查找准确率。

Google 用减号“－”表示逻辑“非”操作。如查找“动物的乙肝病毒(非人类)”的检索式为“乙肝病毒－人类”。

在一个检索式中，可以同时使用多个逻辑运算符，构成一个复合逻辑检索式。运算优先级从高至低依次是 not、and、or，可使用括号改变运算次序。

例如：(A or B)and C 先运算(A or B)，再运算 and C。Google 中括号“()”是分组符号，用来避免多个逻辑操作连用产生的混乱。

除去上述的逻辑运算，Google 还支持其他的搜索命令。

4. 其他搜索命令

1) 把搜索范围限定在网页标题中——intitle

网页的标题通常是对网页内容的归纳和总结。把查询内容范围限定在网页标题中，方便在浩如烟海的大量网页中获得更精确的效果。例如“intitle:AlphaGo”表示搜索标题中包含 AlphaGo 的内容。

2) 把搜索范围限定在特定站点中——site

在查询关键字后面加上“site:站点域名”就可以把搜索范围限定在这个站点中，提高检索效率。例如“AlphaGo site: sina. com. cn”表示搜索网站 sina. com. cn 上包含关键字 AlphaGo 的内容。

3) 限定文档类型——filetype

Google 支持对一些类型文档全文搜索，在搜索的关键词后面加一个“filetype:文档类型限定”就可以将搜索范围限定在特定类型的文档中。例如，如果需要查找 flash 类型的文件，只需在检索框内输入“关键词 filetype: swf”。“filetype:”后可以跟以下文件格式：DOC、XLS、PPT、PDF、RTF 和 ALL 等。其中，ALL 包含所有文件类型。

4) 同义词搜索——～

搜索字词前加上一个代字符“～”可以实现对该检索词的同义词检索。

5) 完整匹配——" "

Google 支持引号("")查找完全匹配的内容。如果需要包含某个完整词组的结果，那么需要用引号将搜索字词括住。例如：“‘Computer Aided Design’”表示将 Computer Aided Design 看作专有名词。Google 的关键字可以是单词(中间没有空格)，也可以是短语(中间有空格)。但是，用短语作为关键字，必须加英文引号，否则空格会被当作“与”操作符。

以上仅介绍了 Google 常用的搜索命令。随着用户对智能搜索需求的提高，Google 逐步支持越来越多功能强大的搜索命令。其他的搜索引擎，例如 Baidu 等，其支持的逻辑表达式和搜索命令与 Google 类似，这里不多加赘述。

1.7.2 应用技巧

编写布尔逻辑检索式应注意以下技巧。

(1) 把出现频率低的检索词放在逻辑“与”(and)的左边,可缩短计算机处理时间。例如检索有关“计算机在机器人应用方面”的文献,检索式应为“机器人 and 计算机”。

(2) 把出现频率高的检索词放在逻辑“或”(or)的左边,有利于提高检索速度。例如检索有关“计算机或者有关机器人”的文献,构造检索式为“计算机 or 机器人。”

(3) 在同时使用逻辑“与”和逻辑“或”检索时,应把“或”运算放在“与”运算的左边。

使用布尔逻辑运算符可以将能表达题目概念的检索词按照查全率和查准率的要求连接起来,形成检索式。在实际应用中,还可以通过邻近检索技术和截词检索技术的辅助,进一步提高查找效率。基于布尔逻辑的信息检索技术是命题逻辑知识的典型应用之一,也是进行信息检索中经常用到的技术。读者可以运用本章的知识,在学习过程中自己进行尝试和比较。

习 题

1. 下面哪些是命题?

(1) 2 是整数吗?

(2) 研究逻辑。

(3) $x^2+x+1=0$。

(4) 一月份将会下雪。

(5) 如果股市下跌,我将会赔钱。

2. 给出下列命题的否定命题。

(1) 大连的每条街道都临海。

(2) 2 是一个偶数和 8 是一个奇数。

(3) 2 是偶数或-3是负数。

3. 给定命题 $P\rightarrow Q$,则把 $Q\rightarrow P$, $\neg P\rightarrow\neg Q$, $\neg Q\rightarrow\neg P$ 分别叫作命题 $P\rightarrow Q$ 的逆命题、反命题和逆反命题。

给出下列命题的逆命题、反命题和逆反命题。

(1) 如果天不下雨,我将去公园。

(2) 仅当你去我才逗留。

(3) 如果 n 是大于 2 的正整数,那么方程 $x^n+y^n=z^n$ 无整数解。

(4) 如果我不获得更多的帮助,那么我不能完成这项任务。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T,给 R 和 S 指派真值 F,求出下列命题的真值。

(1) $\neg(P\wedge Q\vee\neg R)\vee((Q\vee\neg P)\rightarrow(R\vee\neg S))$

(2) $Q\wedge(P\rightarrow Q)\rightarrow P$

(3) $(P\vee(Q\rightarrow(R\wedge\neg P)))\leftrightarrow(Q\vee\neg S)$

(4) $(P\rightarrow R)\wedge(\neg P\rightarrow S)$

5. 构成下列公式的真值表。

(1) $P\to(Q\vee R)$

(2) $Q\wedge(P\to Q)\to P$

(3) $(P\vee Q\to Q\wedge P)\to P\wedge\neg R$

(4) $((\neg P\to P\wedge\neg Q\to R)\to R)\wedge Q\vee\neg R$

6. 符号化以下命题。

(1) 他既聪明又用功。

(2) 除非天气好,我才骑自行车上班。

(3) 老李或者小李是球迷。

(4) 只有休息好,才能身体好。

7. 使用真值表证明如果 $P\leftrightarrow Q$ 为 T,那么 $P\to Q$ 和 $Q\to P$ 都为 T,反之亦然。

8. 设“$*$”是具有两个运算对象的逻辑运算符,如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价,那么运算符 $*$ 是可结合的。

(1) 确定逻辑运算符“$\wedge$”,“$\vee$”,“$\to$”,“$\leftrightarrow$”哪些可是可结合的?

(2) 用真值表证明你的判断。

9. 令 P 表示命题“苹果是甜的”,Q 表示命题“苹果是红的”,R 表示命题“我买苹果”。试将下列命题符号化。

(1) 如果苹果甜而红,那么我买苹果。

(2) 苹果不甜。

(3) 我没买苹果,因为苹果不红也不甜。

10. 指出下列命题公式哪些是重言式、永假式或可满足式。

(1) $P\vee\neg P$

(2) $P\wedge\neg P$

(3) $P\to\neg(\neg P)$

(4) $\neg(P\wedge Q)\leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$

(5) $\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$

(6) $(P\to Q)\leftrightarrow(\neg Q\to\neg P)$

(7) $((P\to Q)\wedge(Q\to P))\leftrightarrow(P\leftrightarrow Q)$

(8) $P\wedge(Q\vee R)\to(P\wedge Q\vee P\wedge R)$

(9) $P\wedge\neg P\to Q$

(10) $((P\to Q)\vee(R\to S))\to((P\vee R)\to(Q\vee S))$

11. 写出与下面给出的公式等价并且仅含联结词 $\wedge$ 及 $\neg$ 的最简公式。

(1) $\neg(P\leftrightarrow(Q\to(R\vee P)))$

(2) $((P\vee Q)\wedge R)\to(P\vee R)$

(3) $P\vee Q\vee\neg R$

(4) $P\vee(\neg Q\wedge R\to P)$

(5) $P\to(Q\to R)$

12. 写出与下面给出的公式等价并且仅含联结词 $\vee$ 及 $\neg$ 的最简公式。

(1) $(P\wedge Q)\wedge\neg P$

(2) $(P\rightarrow(Q\vee\neg Q))\wedge\neg P\wedge Q$

(3) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\rightarrow P)$

13. 使用常用恒等式证明下述各式，并给出下述各式的对偶式。

(1) $\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q)\Leftrightarrow P$

(2) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

(3) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge Q)\Leftrightarrow T$

14. 试证明下述公式是永真式。

(1) $(P\wedge(P\rightarrow Q))\rightarrow Q$

(2) $\neg P\rightarrow(P\rightarrow Q)$

(3) $((P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow(P\rightarrow R)$

(4) $(P\rightarrow(Q\rightarrow R))\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$

15. 不构造真值表证明下列蕴涵式。

(1) $P\wedge Q\Rightarrow P\rightarrow Q$

(2) $P\rightarrow(Q\rightarrow R)\Rightarrow(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R)$

(3) $P\rightarrow Q\Rightarrow P\rightarrow P\wedge Q$

(4) $(P\rightarrow Q)\rightarrow Q\Rightarrow P\vee Q$

(5) $(P\vee\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(P\vee\neg P\rightarrow R)\Rightarrow Q\rightarrow R$

(6) $(Q\rightarrow P\wedge\neg P)\rightarrow(R\rightarrow P\wedge\neg P)\Rightarrow R\rightarrow Q$

16. 求出下列各式的代入实例。

(1) $(((P\rightarrow Q)\rightarrow P)\rightarrow P)$，用 $P\rightarrow Q$ 代 P，用$((P\rightarrow Q)\rightarrow R)$代 Q。

(2) $((P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P))$，用 Q 代 P，用 $\neg P$ 代 Q。

17. 求下列各式的主合取范式和合取范式。

(1) $(\neg P\vee\neg Q)\rightarrow(P\wedge\neg Q)$

(2) $(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg Q)$

(3) $(P\rightarrow(Q\wedge R))\wedge(\neg P\rightarrow(\neg Q\wedge\neg R))$

(4) $(P\wedge\neg Q\wedge S)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)$

18. 试采用将公式化为主范式的方法，证明下列各等价式。

(1) $(\neg P\vee Q)\wedge(P\rightarrow R)\Leftrightarrow P\rightarrow(Q\wedge R)$

(2) $(P\wedge Q)\wedge(P\rightarrow\neg Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)\wedge(P\vee Q)$

(3) $(P\rightarrow Q)\rightarrow(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\vee\neg Q)$

(4) $P\vee(P\rightarrow(P\vee Q))\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q\vee(P\wedge Q)$

19. 试用真值表法证明 $A\wedge E$ 不是 $A\leftrightarrow B$，$B\leftrightarrow(C\wedge D)$，$C\leftrightarrow(A\vee E)$和 $A\vee E$ 的有效结论。

20. H_1，H_2和 H_3是前提。在下列情况下，试确定结论 C 是否有效(可以使用真值表法证明)。

(1) H_1：$P\rightarrow Q$

C：$P\rightarrow(P\wedge Q)$

(2) H_1：$\neg P\vee Q$

H_2：$\neg(Q\wedge\neg R)$

H_3：$\neg R$

C：$\neg P$

(3) H_1:$P \to (Q \to R)$

H_2:$P \wedge Q$

C:R

(4) H_1：　$P \to Q$

H_2：　$Q \to R$

C：　$P \to R$

21. 不构成真值表证明下列命题公式不能同时全是真的。

(1) $P \leftrightarrow Q$, $Q \to R$, $\neg R \vee S$, $\neg P \to S$, $\neg S$

(2) $R \vee M$, $\neg P \vee S$, $\neg M$, $\neg S$

22. 足坛4支劲旅举行友谊比赛。已知情况如下,请问结论是否成立?

(1) 若中国队获得冠军,则巴西队或德国队获得亚军。

(2) 若德国队获得亚军,则中国队不能获得冠军。

(3) 若英格兰队获得亚军,则巴西队不能获得亚军。

(4) 最后中国队获得冠军。

结论:英格兰队未能获得亚军。

23. 证明下列论证的有效性(如果需要,就使用规则CP)。

(1) $\neg(P \wedge \neg Q)$, $\neg Q \vee R$, $\neg R \Rightarrow \neg P$

(2) $(P \wedge Q) \to R$, $\neg R \vee S$, $\neg S \Rightarrow \neg P \vee \neg Q$

(3) $\neg P \vee Q$, $\neg Q \vee R$, $R \to S \Rightarrow P \to S$

(4) $P \to Q \Rightarrow P \to (P \wedge Q)$

24. 证明下列各式的有效性(如果需要,就使用间接证明法)。

(1) $R \to \neg Q$, $R \vee S$, $S \to \neg Q$, $P \to Q \Rightarrow \neg P$

(2) $S \to \neg Q$, $R \vee S$, $\neg R$, $P \leftrightarrow Q \Rightarrow \neg P$

(3) $\neg(P \to Q) \to \neg(R \vee S)$, $((Q \to P) \vee \neg R)$, $R \Rightarrow P \leftrightarrow Q$