离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授、博士生导师

办公室：　综合楼405，Tel：　62274392
实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ：　1062258606

回顾

- 关系的定义和性质
- 关系的表示方法
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 关系的运算
  - 关系的合成
  - 关系合成的规则
  - 关系的幂
  - 合成关系的矩阵表达与图解

三、关系的求逆运算

关系$\boldsymbol{R}$的逆关系$\tilde{R}$定义如下：对于所有的 $x \in X$和$y \in Y$来说， $xRy \Leftrightarrow y\tilde{R}x$

逆关系的关系矩阵：原关系矩阵转置

逆关系的关系图：原关系图中颠倒弧线上箭头的方向。

区分：逆关系vs补关系

在关系图和关系矩阵上的体现？

三、合成关系的求逆运算

定理：设***R***是从集合***X***到***Y***的关系。***S***是从集合***Y***到***Z***的关系。于是有

$$\widetilde{R\circ S}=\tilde{S}\circ\tilde{R}$$

证明：对于任何$x\in X, y\in Y$和$z\in Z$来说，如果***xRy***和***ySz***，则会有$x(R\circ S)z$和$z(\widetilde{R\circ S})x$，因为还有$z\tilde{S}y$和$y\tilde{R}x$，所以又有$z(\tilde{S}\circ\tilde{R})x$。因此可有$\widetilde{R\circ S}=\tilde{S}\circ\tilde{R}$。

利用关系矩阵也可以理解，$M_{R\circ S}$的转置和$M_{\tilde{S}\circ\tilde{R}}$是一样的。

三、合成关系的求逆运算

例：给定关系矩阵$\boldsymbol{M_R}$和$\boldsymbol{M_S}$。

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\qquad M_S=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

则：

$$M_{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\qquad M_{R\circ S}=M_R\wedge M_S=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0\\1&0&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$M_{\tilde{S}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\qquad M_{\tilde{S}\circ\tilde{R}}=M_{\tilde{S}}\wedge M_{\tilde{R}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}=M_{\widetilde{R\circ S}}$$

三、关系的求逆运算

定理：给定集合***X***和***Y***，***R***、$\boldsymbol{R_1}$、$\boldsymbol{R_2}$是从***X***到***Y***的关系，于是有：

$$(a)\qquad \tilde{\tilde{R}} = R$$

$$(b)\qquad \widetilde{R_1 \bigcup R_2} = \tilde{R}_1 \bigcup \tilde{R}_2$$

$$(c)\qquad \widetilde{R_1 \bigcap R_2} = \tilde{R}_1 \bigcap \tilde{R}_2$$

$$(d)\qquad \widetilde{X \times Y} = Y \times X$$

$$(e)\qquad \tilde{\phi} = \phi$$

$(f)\qquad (\sim \tilde{R}) = \sim (\tilde{R})$，这里～R $= X \times Y - R$

$(g)\qquad \widetilde{R_1 - R_2} = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$,这里 $\widetilde{R_1 - R_2}$ 表示R_1-R_2的逆关系

$$(h)\qquad R_1 = R_2 \to \tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$$

$$(i)\qquad R_1 \subseteq R_2 \to \tilde{R}_1 \subseteq \tilde{R}_2$$

三、关系的求逆运算

(a) $\tilde{\tilde{R}} = R$

证明：设$\langle x, y\rangle$是$\boldsymbol{R}$的任意元素。于是$\langle x, y\rangle \in R$

$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \tilde{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{\tilde{\mathrm{R}}}$所以有 $R = \tilde{\tilde{\mathrm{R}}}$。

(b) $\widetilde{R_1 \cup R_2} = \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$

证明：$\langle x, y\rangle \in R_1 \tilde{\cup} R_2 \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \cup R_2$

$$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in R_1 \vee \langle y, x\rangle \in R_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \vee \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \tilde{R}_1 \cup \tilde{R}_2$$

得证

三、关系的求逆运算

(f) $(\sim\widetilde{R}) = \sim(\widetilde{R})$，这里 $\sim R = X \times Y - R$

证明：$\langle x, y\rangle \in (\widetilde{\sim R}) \Leftrightarrow \langle y, x\rangle \in \sim R$

$$\Leftrightarrow \langle y, x\rangle \notin R$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \notin \widetilde{R}$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in \sim(\widetilde{R})$$ 得证。

(g) $\widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R}_1 - \widetilde{R}_2$，这里 $\widetilde{R_1 - R_2}$ 表示 $R_1 - R_2$ 的逆关系

证明：因为 $R_1 - R_2 = R_1 \cap \sim R_2$，于是有

$$\widetilde{R_1 - R_2} = \widetilde{R_1 \cap \sim R_2} = \tilde{R}_1 \cap (\sim \tilde{R}_2) = \tilde{R}_1 - \tilde{R}_2$$

得证。

三、关系的求逆运算

定理：设R是集合X中的关系。于是当且仅当 $R=\widetilde{R}$ ，R才是对称的。

证明:(充分性)若 $R=\widetilde{R}$ 则$\langle x,y\rangle\in R\leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\widetilde{R}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R$

即**R**是对称的。

(必要性)设**R**是对称的，那么对任何

$$\langle x,y\rangle\in R\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in\widetilde{R}$$

即 $R\subseteq\widetilde{R}$;

对任何$\langle x,y\rangle\in\widetilde{R}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in R\Rightarrow\langle x,y\rangle\in R$

即 $\widetilde{R}\subseteq R$

必要性证明完毕。

四、关系的闭包运算

闭包的定义：给定集合**X**，**R**是**X**中的二元关系。如果有另一个关系 R' 满足

（1） R' 是自反的(对称的、可传递的)；

（2） $R' \supseteq R$

（3）对于任何自反的(对称的、可传递的)关系 R''，如果 $R'' \supseteq R$，则 $R'' \supseteq R'$

则称关系 R' 为**R**的自反的(对称的，可传递的)闭包。并用***r*(*R*)**表示的**R**自反闭包，用***s*(*R*)**表示**R**的对称闭包，用***t*(*R*)**表示**R**的可传递闭包。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合***X***，***R***是***X***中的关系。于是可有

(a) 当且仅当$r(R)=R$，***R***才是自反的。

(b) 当且仅当$s(R)=R$，***R***才是对称的。

(c) 当且仅当$t(R)=R$，***R***才是传递的。

证明：仅给出（***a***）的证明过程

如果是***R***自反的，则***R***具有定义给出的应具备 R'的全部性质。因此有$r(R)=R$ 。反之，如果$r(R)=R$，则由定义的**(1)**得***R***是自反的。

四、关系的闭包运算

定理： 设X是任意集合，R是X中的二元关系，I_X是X中的恒等关系。于是可有

$$r(R) = R \cup I_X$$

在整数集合中，小于关系“<”的自反闭包是“$\leq$”；恒等关系I_X的自反闭包是I_X。不等关系“$\neq$”的自反闭包是全域关系；空关系的自反闭包是恒等关系。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$S(R) = R \cup \tilde{R}$$

在整数集合中，小于关系“<”的对称闭包是不等关系“≠”；小于或等于关系“≤”的对称闭包是全域关系；恒等关系I_X的对称闭包是I_X；不等关系“≠”的对称闭包是不等关系“≠”。

四、关系的闭包运算

定理：给定集合X，R是X中的二元关系。于是可有

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ \cdots$$

当A是有限集时，A上只有有限个不同的关系，因此，

存在某个正整数m，使得 $$t(R)=\bigcup_{i=1}^{m}R^i$$

事实上，可以证明，若 $\# A=n$ ，则

$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n}R^i$$

四、关系的闭包运算

例：给定集合***X*={*a*,*b*,*c*}**，***R***和***S***是***X***中的关系，给定

$$R=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

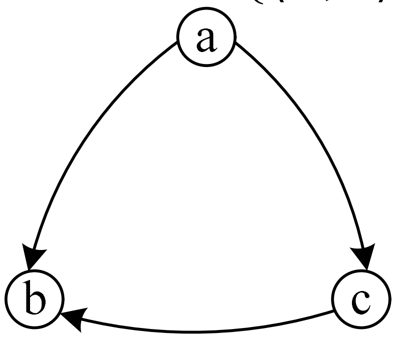
$$S=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$$

试求出***t*(*R*)**,***t*(*S*)**，并画出关系图

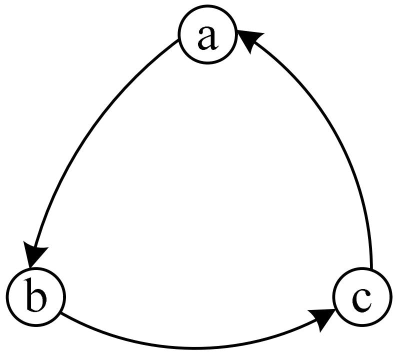
解：
$$t(R)=R^1\cup R^2\cup R^3\cup\cdots=R$$

$$t(S)=S^1\cup S^2\cup S^3\cup\cdots=S^1\cup S^2\cup S^3$$

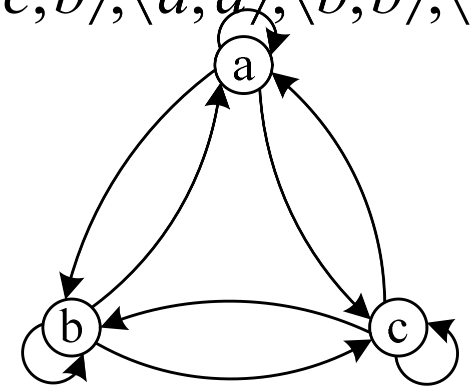
$$\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$



***R*,*t*(*R*)**



S



***t*(*S*)**

四、关系的闭包运算

定理：设X是集合，R是X中的二元关系，于是有

（1）如果R是自反的，那么$s(R),t(R)$也是自反的；

（2）如果R是对称的，那么$r(R),t(R)$也是对称的；

（3）如果R是可传递的，那么$r(R)$也是可传递的。

证明（1）：若R是自反的，则对于所有的$x \in X$都有

$$\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in R \cup \tilde{R} = s(R)$$

$$\langle x,x\rangle \in R \Rightarrow \langle x,x\rangle \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = t(R)$$

即$s(R),t(R)$是自反的

四、关系的闭包运算

证明（2）：

对于任意的$<x,y>\in r(R)$，由于$r(R)=R\bigcup I_x$，因此$<x,y>\in R$或$<x,y>\in I_x$。

若$<x,y>\in R$，由R的对称性可知，$<y,x>\in R$，也即$<y,x>\in r(R)$

若$<x,y>\in I_x$，则$x=y$，于是有$<y,x>\in r(R)$

因此，无论何种情况，都有$<y,x>\in r(R)$

由x,y的任意性可知，$r(R)$是对称的。

四、关系的闭包运算

证明（2）：

对于任意的$<x,y>\in t(R)$，由于$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$，因此$<x,y>\in R^i(i\in N)$ ，也即

$<y,x>\in \widetilde{R^i}(i\in N)$

下面用数学归纳法证明当 R 满足对称性时，$\widetilde{R^i}=R^i$

（1） 当 i=1 时，由 R 的对称性知，$\widetilde{R}=R$

（2） 假设对于任意正整数 n，有$\widetilde{R^n}=R^n$

（3） 当 i=n+1 时，$\widetilde{R^{n+1}}=\widetilde{R^n\circ R}=\widetilde{R}\circ\widetilde{R^n}=R\circ R^n=R^{n+1}$

由 n 的任意性可知，对于任意的$i\in N$，均有$\widetilde{R^i}=R^i$

于是由$<y,x>\in\widetilde{R^i}(i\in N)$知，$<y,x>\in R^i(i\in N)$，即$<y,x>\in t(R)$

由由x,y的任意性可知，$t(R)$是对称的。

四、关系的闭包运算

证明（3）：

任取$x,y,z\in X$，当$<x,y>\in r(R),<y,z>\in r(R)$时，由于$r(R)=R\cup I_x$

于是可得（$<x,y>\in R$或者$<x,y>\in I_x$）并且（$<y,z>\in R$或者$<y,z>\in I_x$），组合可以得到四种情况：

（1）$<x,y>\in R$，$<y,z>\in R$，由R的传递性可知$<x,z>\in R$，于是$<x,z>\in r(R)$

（2）$<x,y>\in I_x$，$<y,z>\in R$，由I_x的性质可知，$x=y$，于是$<x,z>\in R$，得到$<x,z>\in r(R)$

（3）$<x,y>\in R$，$<y,z>\in I_x$，由I_x的性质可知，$y=z$，于是$<x,z>\in R$，得到$<x,z>\in r(R)$

（4）$<x,y>\in I_x$，$<y,z>\in I_x$，由I_x的性质可知，$x=y=z$，于是$<x,z>\in I_x$，得到$<x,z>\in r(R)$

由上可知，无论哪种情况，都有$<x,z>\in r(R)$

由x,y,z的任意性可知，$r(R)$是可传递的。

四、关系的闭包运算

定理：设X是集合，R是集合中的二元关系，于是有

$$(a)\quad rs(R) = sr(R)$$

$$(b)\quad rt(R) = tr(R)$$

$$(c)\quad ts(R) \supseteq st(R)$$

证明：

$$
\begin{aligned}
(a)\quad sr(R) &= s(R \cup I_X) \\
&= (R \cup I_X) \cup (R \,\tilde{\cup}\, I_X) \\
&= R \cup I_X \cup \tilde{R} \cup \tilde{I}_X \\
&= R \cup \tilde{R} \cup I_X \\
&= r(R \cup \tilde{R}) \\
&= rs(R)
\end{aligned}
$$

四、关系的闭包运算

证明（$\boldsymbol{b}$）：因为$tr(R)=t(R\cup I_X)$，$rt(R)=t(R)\cup I_X$，而对于所有的 $n\in N$有$I_X^n=I_X$，以及$I_X\circ R=R\circ I_X=R$。根据这些关系式，可有 $(R\cup I_X)^n=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{n}R^i$

于是

$$\begin{aligned}tr(R)=t(R\cup I_X)&=\bigcup_{i=1}^{\infty}(R\cup I_X)^i\\&=(R\cup I_X)\cup(R\cup I_X)^2\cup(R\cup I_X)^3\cup\cdots\\&=I_X\cup R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\\&=I_X\cup t(R)\\&=rt(R)\end{aligned}$$

四、关系的闭包运算

证明（**c**）：如果$R_1 \supseteq R_2$，则$s(R_1) \supseteq s(R_2)$, $t(R_1) \supseteq t(R_2)$

根据对称闭包的定义，有 $s(R) \supseteq R$。首先构成上式两侧的可传递闭包，再依次构成两侧的对称闭包,可以求得$ts(R) \supseteq t(R)$ 以及$sts(R) \supseteq st(R)$ 。而$\boldsymbol{ts(R)}$是对称的，所以$sts(R) = ts(R)$，从而有 $ts(R) \supseteq st(R)$ 。

四、关系的闭包运算

注意：

（1）通常用R^+表示R的可传递闭包$t(R)$，并读作“R加”。

（2）通常用R^*表示R的自反可传递闭包$tr(R)$，并读作“R星”。

作业

- P103 21,23,25,27