



第五章 函数

大连理工大学软件学院

陈志奎 教授

办公室：综合楼405， Tel： 62274392

实验室：综合楼一楼

Mobile: 13478461921

Email: zkchen@dlut.edu.cn

zkchen00@hotmail.com

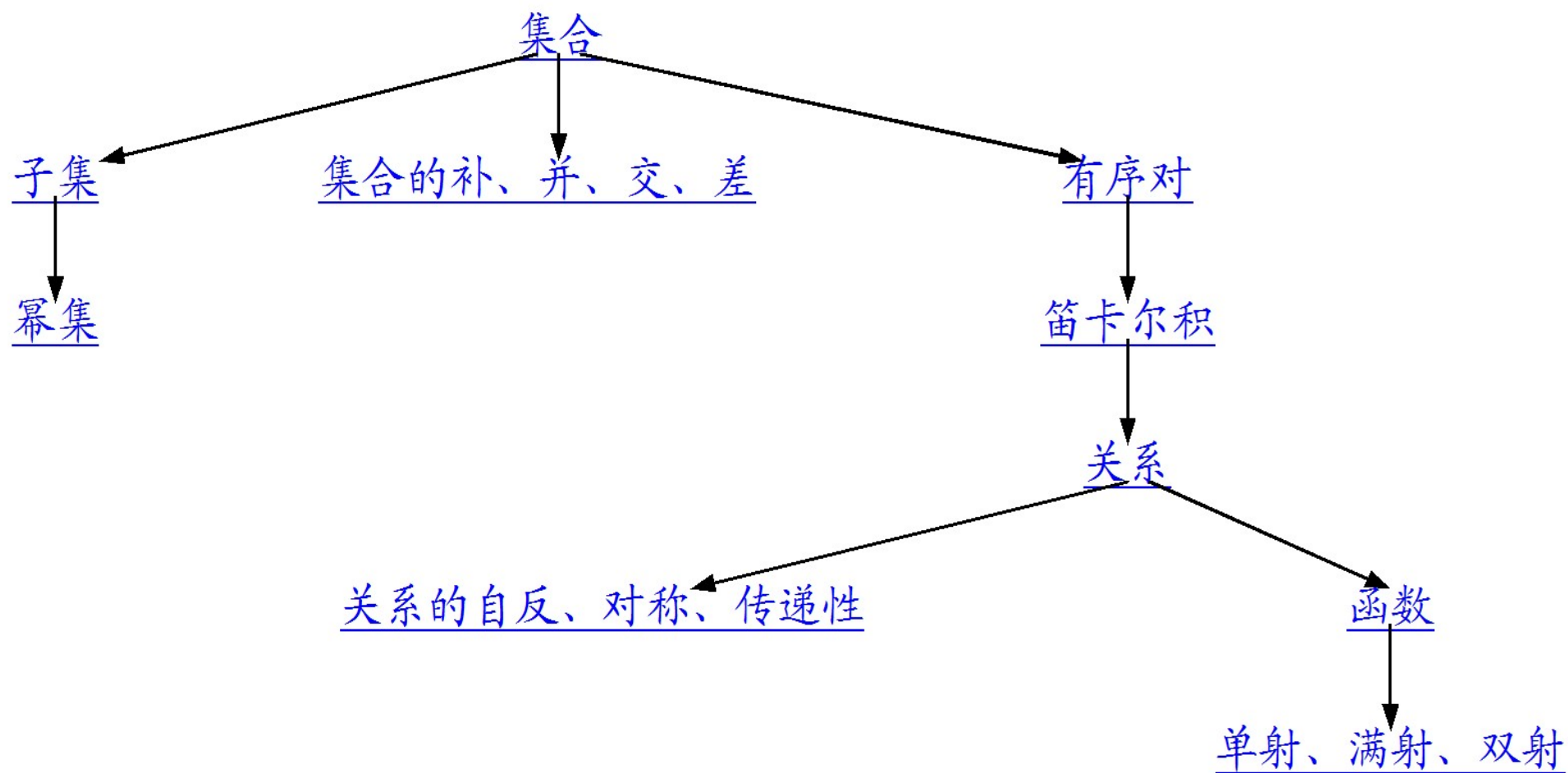
回顾关系的主要内容

- 序偶与迪卡尔乘积
- 关系的基本概念
- 关系的性质
- 关系的描述
- 关系的运算
- 合成关系的关系图、关系矩阵
- 逆关系，逆关系的运算
- 关系的闭包与运算
- 特殊关系：等价关系和划分，相容关系和覆盖，次序关系-偏序关系，拟序关系，全序关系，字母次序关系和哈斯图等。
- 几个概念：最大小成员，极大小成员，上下界，上下确界

主要内容

- 函数的基本概念
- 函数的性质
- 函数的合成、合成函数的性质
- 特殊函数
- 反函数、特征函数
- 基数
- 二元运算

回顾



5.1 函数的基本概念和性质

函数（或称映射）是满足某些条件的关系，关系又是笛卡尔乘积的子集。

定义：设 X 和 Y 是两个任意的集合，并且 f 是从 X 到 Y 的一种关系。如果对于每一个 $x \in X$ ，都存在唯一的 $y \in Y$ ，使得 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则称关系 f 为函数或映射，并记作 $f: X \rightarrow Y$ 。

对于函数来说 $f: X \rightarrow Y$ ，如果有 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则称 x 是自变量；与 x 相对应的 y ，称为在 f 作用下 x 的象点，或称 y 是函数 f 在 x 处的值。通常用 $y = f(x)$ 表示 $\langle x, y \rangle \in f$ 。

函数的基本概念

从 X 到 Y 的函数 f ，是具有下列性质的从 X 到 Y 的二元关系：

- (1) 每一个元素 $x \in X$ ，都必须关系到某一个 $y \in Y$ ；
也就是说，关系 f 的域是集合 X 本身，而不是 X 的真子集。
- (2) 如果有 $\langle x, y \rangle \in f$ ，则函数 f 在 x 处的值 y 是唯一的，
亦即

$$\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x, z \rangle \in f \Rightarrow y = z$$

任意性

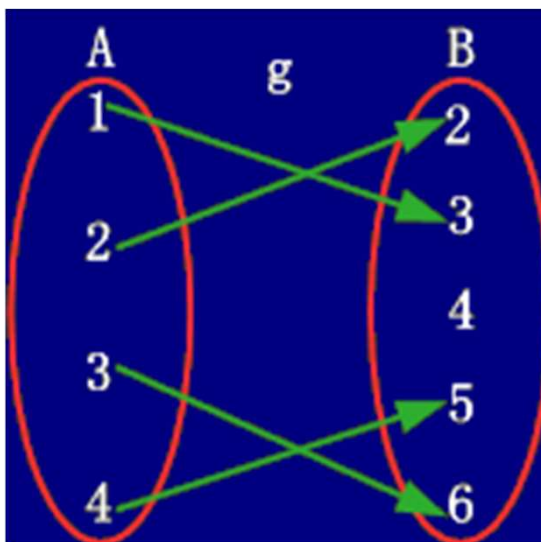
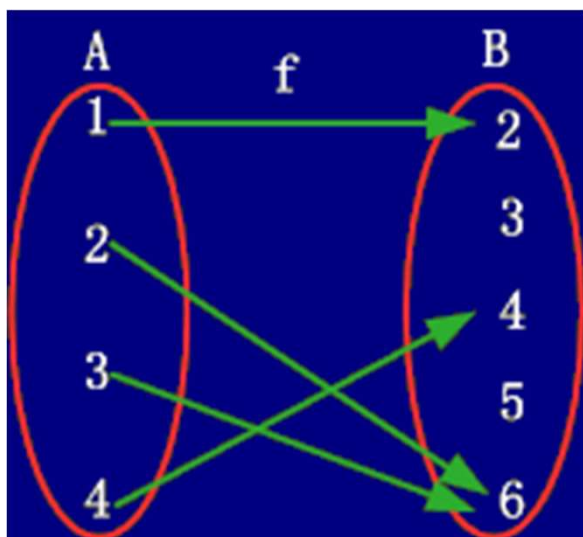
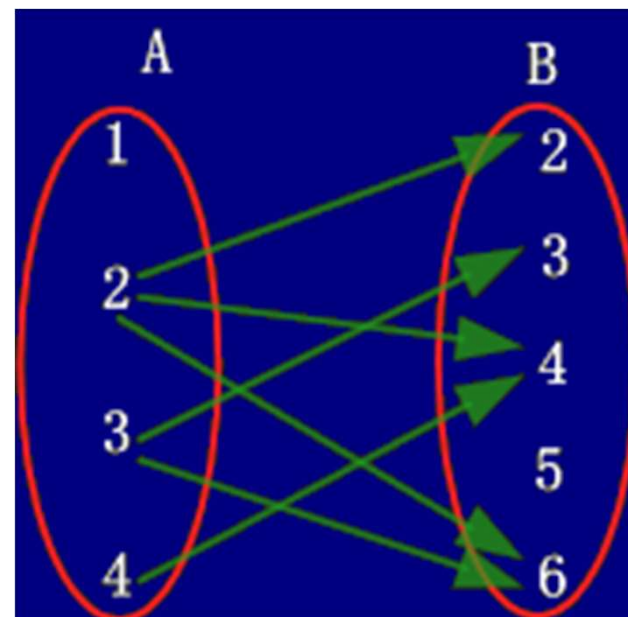
唯一性

函数的基本概念

例： 设 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6\}$, A 到 B 的关系
 $\rho=\{<2, 2>, <2, 4>, <2, 6>, <3, 3>, <3, 6>, <4, 4>\}$

ρ 是否是由 A 到 B 的函数？

若调整为 $f=\{<1,2>, <2,6>, <3,6>, <4,4>\}$ 或 $g=\{<1,3>, <2,2>, <3,6>, <4,5>\}$ 呢？



函数的定义域和值域

设 f 是从 X 到 Y 的函数，函数的定义域 $D_f = X$ ，而不会是 X 的真子集。函数的值域满足 $R_f \subseteq Y$ 。对于函数 f ，常用 $f(X)$ 表示 R_f 。集合 Y 称作 f 的陪域。

$$f(X) = R_f = \{y | y \in Y \wedge (\exists x)(x \in X \wedge y = f(x))\}$$

也称 $f(x)$ 是函数 f 的象点

注意：函数 f 的象点与自变量 x 的象点是不同的。我们这里给出的函数的定义是全函数的定义，所以 $D_f = X$ 。

函数的基本概念和性质

例：设 E 是全集， $\rho(E)$ 是 E 的幂集。对任何两个集合 $X, Y \subseteq \rho(E)$ ，它们的并运算和相交运算都是从 $\rho(E) \times \rho(E)$ 到 $\rho(E)$ 的映射；对任何集合 $X \subseteq \rho(E)$ 求补运算，则是从 $\rho(E)$ 到 $\rho(E)$ 的映射。

例：试说明下列二元关系是否是函数？

$$(1) \quad \exp = \{\langle x, e^x \rangle | x \in R\}$$

$$(2) \quad \arcsin\{\langle x, y \rangle | x, y \in R \wedge \sin y = x\}$$

(1)是函数，(2)不是函数

函数的基本概念和性质

例：设 N 是自然数集合，函数 $S: N \rightarrow N$ 定义成 $S(n) = n + 1$ 。显然， $S(0) = 1$ ， $S(1) = 2$ ， $S(2) = 3 \cdots$ 。这样的函数，通常称为皮亚诺后继函数。

注意：有时为了某种需要，要特别强调函数的任意性和唯一性性质：函数 f 的域 D_f 中的每一个 x ，在值域 R_f 中都恰有一个象点 y ，这种性质通常被称为函数的良定性。

函数的相等

定义： 给定函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Z \rightarrow W$ 。如果 f 和 g 具有同样的域和陪域，亦即 $X = Z$ 和 $Y = W$ ，并且对于所有的 $x \in X$ 或 $x \in Z$ 都有 $f(x) = g(x)$ ，则称函数 f 和 g 是相等的，记作 $f = g$ 。

求/证明函数相等的方法？

函数的扩大和缩小

定义：给定函数 $f: X \rightarrow Y$ ，且有 $A \subseteq X$ 。

(1) 试构成一个从 A 到 Y 的函数

$$g = f \cap (A \times Y)$$

通常称 g 是函数 f 的缩小，并记作 f/A 。

(2) 如果 g 是 f 的缩小，则称 f 是 g 的扩大。

从定义可以看出，函数 $f/A: A \rightarrow Y$ 的域是集合 A ，而函数 f 的域则是集合 X 。 f/A 和 f 的陪域均是集合 Y 。于是若 g 是 f 的缩小，则应有

$$D_g \subseteq D_f \text{ 和 } g \subseteq f$$

并且对于任何 $x \in D_g$ 都有 $g(x) = (f/A)(x) = f(x)$ 。

函数的扩大和缩小

例：令 $X_1 = \{0, 1\}$, $X_2 = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 。
定义从 X_1^2 到 Y 的函数 f 为：

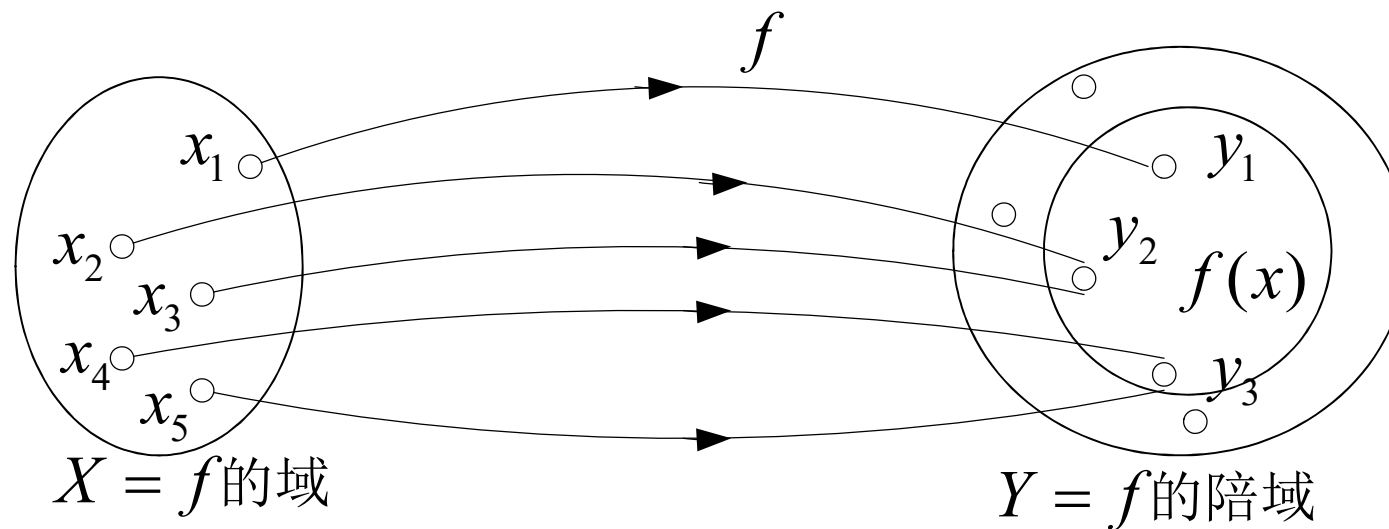
$$f = \{\langle 0, 0, a \rangle, \langle 0, 1, b \rangle, \langle 1, 0, c \rangle, \langle 1, 1, b \rangle\}.$$

$g = f \cup \{\langle 0, 2, a \rangle, \langle 2, 2, d \rangle\}$ 是从 $X_1^2 \cup \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 到 Y 的函数。

于是 $f = g/X_1^2$ ，因此 f 是 g 在 X_1^2 上的缩小（或称限制）， g 是 f 到 $X_1^2 \cup \{\langle 0, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ 上的扩大（或称延拓）。

函数的表示

因为函数是二元关系，所以可以用关系图和关系矩阵来表达函数。



函数 $f: X \rightarrow Y$ 的图解

函数的表示

例： 设集合 $X = \{a, b, c, d\}$ 和 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ， 并且有 $f = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 3 \rangle, \langle c, 4 \rangle, \langle d, 4 \rangle\}$

试求出 D_f ， R_f 和 f 的矩阵表达式。

解： $D_f = \{a, b, c, d\}$

$R_f = \{1, 3, 4\}$

$$M_f = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

函数的表示

由函数的定义可知，在关系矩阵的每一个行上，都有且仅有一个元素的值是**1**，而此行上的其他元素都必定为**0**。因此，可以用一个单独的列来代替关系矩阵。在这个单独的列上，应标明所对应的给定函数的各个值。这样，该列上的各元素也说明了自变量与其函数值之间的对应关系。

上例中 f 的简化关系矩阵为：

$$M_f = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 3 \\ c & 4 \\ d & 4 \end{bmatrix}$$

函数的构成

设 X 和 Y 是任意的两个集合。在 $X \times Y$ 的所有子集中，并不全都是从 X 到 Y 的函数，仅有一些子集可以用来定义函数。

定义：设 A 和 B 是任意两个集合，记

$$B^A = \{f | f: A \rightarrow B\}$$

函数的构成

例：设集合 $X = \{a, b, c\}$ 和集合 $Y = \{0, 1\}$ 。试求出所有可能的函数 $f: X \rightarrow Y$ 。

解：首先求出的 $X \times Y$ 所有序偶，于是应有

$$X \times Y = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle, \langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

于是，有 2^6 个可能的子集，但其中仅有下列 2^3 个子集可以用来定义函数：

$$f_0 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle\}, f_1 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle\}, f_3 = \{\langle a, 0 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 0 \rangle\}, f_5 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 0 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

$$f_6 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 0 \rangle\}, f_7 = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 1 \rangle\}$$

函数的构成

设 A 和 B 都是有限集合，且 $|A| = m$ 和 $|B| = n$ ，因为任何函数 $f: A \rightarrow B$ 的域都是集合 A ，所以每个函数中都恰有 m 个序偶。而且，任何元素 $x \in A$ ，都可以在 B 的 n 个元素中任选其一作为自己的象点。因此，应有 n^m 个可能的不同函数，亦即

$$|B^A| = |B|^{|A|} = n^m$$

例：设 A 为任意集合， B 为任意非空集合。

(1) 因为存在唯一的一个从 Φ 到 A 的函数，所以 $A^\Phi = \{\Phi\}$ 。

(2) 因为不存在从 B 到 Φ 的函数，所以 $\Phi^B = \Phi$ 。

5.2函数的合成和合成函数的性质

定义：设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 是两个函数。于是，合成关系 $f \circ g$ 为 f 与 g 的合成函数，并用 $g \circ f$ 表示。即
$$g \circ f = \{\langle x, z \rangle \mid (x \in X) \wedge (z \in Z) \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y))\}$$

注意：合成函数 $g \circ f$ 与合成关系 $f \circ g$ 实际上表示同一个集合。这种表示方法的不同有其方便之处：

对合成函数 $g \circ f$ ，当 $z = (g \circ f)(x)$ 时，必有 $z = g(f(x))$

$g \circ f$ 与 $g(f(x))$ 的次序是理想的。

函数的合成和合成函数的性质

函数 f 的值域是函数 g 的域 Y 的子集, 亦即 $R_f \subseteq D_g$ 。
条件 $R_f \subseteq D_g$ 能确保合成函数 $g \circ f$ 是非空的。否则,
合成函数 $g \circ f$ 是空集。如果 $g \circ f$ 非空, 则能保证 $g \circ f$ 是从 X 到 Z 的函数。

定理: 设 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 是两个函数:

(1) 合成函数 $g \circ f$ 是从 $X \rightarrow Z$ 的函数, 并且对于
每一个 $x \in X$, 都有 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$(2) D_{g \circ f} = f^{-1}[D_g], R_{g \circ f} = g[R_f]$$

其中 $f^{-1}[D_g]$ 表示 g 的域在 f 下的原象集,
 $g[R_f]$ 表示 f 的值域在 g 下的象点集。

函数的合成和合成函数的性质

证明: (1) 假设 $x \in X$ 和 $z_1, z_2 \in Z$, 再假设 $\langle x, z_1 \rangle \in g \circ f$ 和 $\langle x, z_2 \rangle \in g \circ f$. 这个假设要求存在 $y \in Y$, 能使 $y = f(x)$, $z_1 = g(y)$ 以及 $z_2 = g(y)$. 因为 g 是一个函数, 所以由函数值的唯一性可知, 除非 $z_1 = z_2$, 否则不可能有 $z_1 = g(y)$ 和 $z_2 = g(y)$. 也就是说, 仅能有 $z_1 = z_2 = z$ 和 $\langle x, z \rangle \in g \circ f$. 因此 $g \circ f$ 是一个从 X 到 Z 的函数, 且

$$(g \circ f)(x) = z = g(y) = g(f(x))$$

函数的合成和合成函数的性质

证明: (2) 若 $x \in D_{g \circ f}$, 则存在 $z \in Z$ 使 $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ 。因此, 必有 $y \in Y$ 使 $\langle x, y \rangle \in f$ 且 $\langle y, z \rangle \in g$ 。但由 $\langle y, z \rangle \in g$ 知 $y \in D_g$, 再由 $\langle x, y \rangle \in f$, 即得 $x \in f^{-1}[D_g]$ 。另一方面, 若 $x \in f^{-1}[D_g]$, 则有 $y \in D_g$ 使 $\langle x, y \rangle \in f$ 。但由 $y \in D_g$ 知, 有 $z \in Z$ 使 $\langle y, z \rangle \in g$, 所以 $\langle x, z \rangle \in g \circ f$, 这表明 $x \in D_{g \circ f}$ 。同理可证 $R_{g \circ f} = g[R_f]$ 。

函数的合成和合成函数的性质

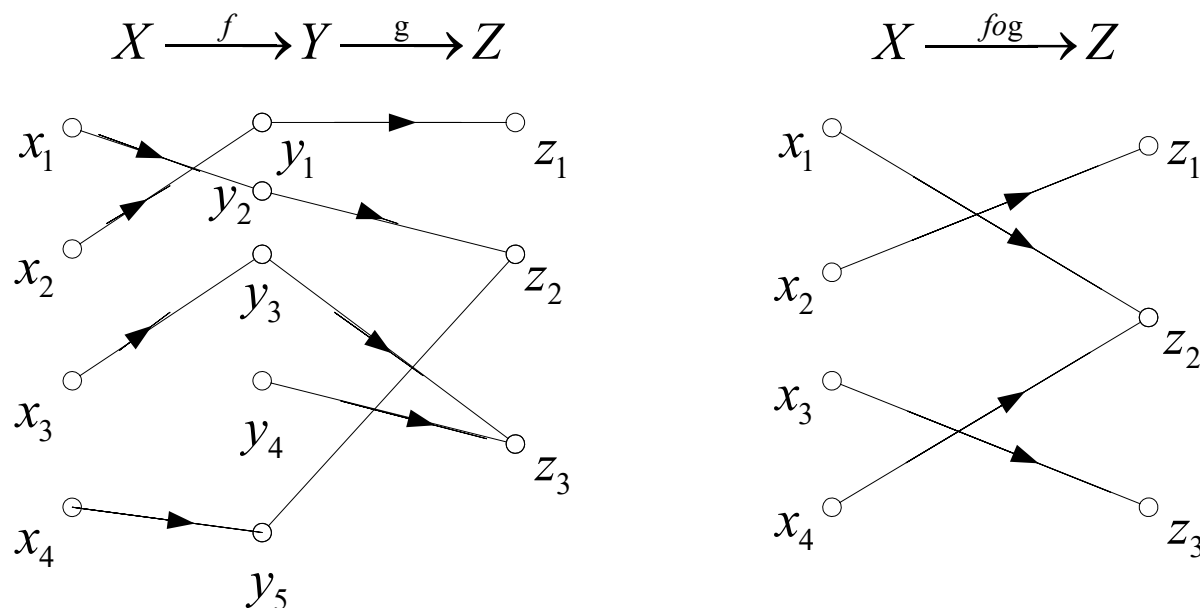
例：设集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$ 。函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 分别是

$$f = \{\langle x_1, y_2 \rangle, \langle x_2, y_1 \rangle, \langle x_3, y_3 \rangle, \langle x_4, y_5 \rangle\}$$

$$g = \{\langle y_1, z_1 \rangle, \langle y_2, z_2 \rangle, \langle y_3, z_3 \rangle, \langle y_4, z_3 \rangle, \langle y_5, z_2 \rangle\}$$

试求出函数 $g \circ f = X \rightarrow Z$ ，并给出它的图解。

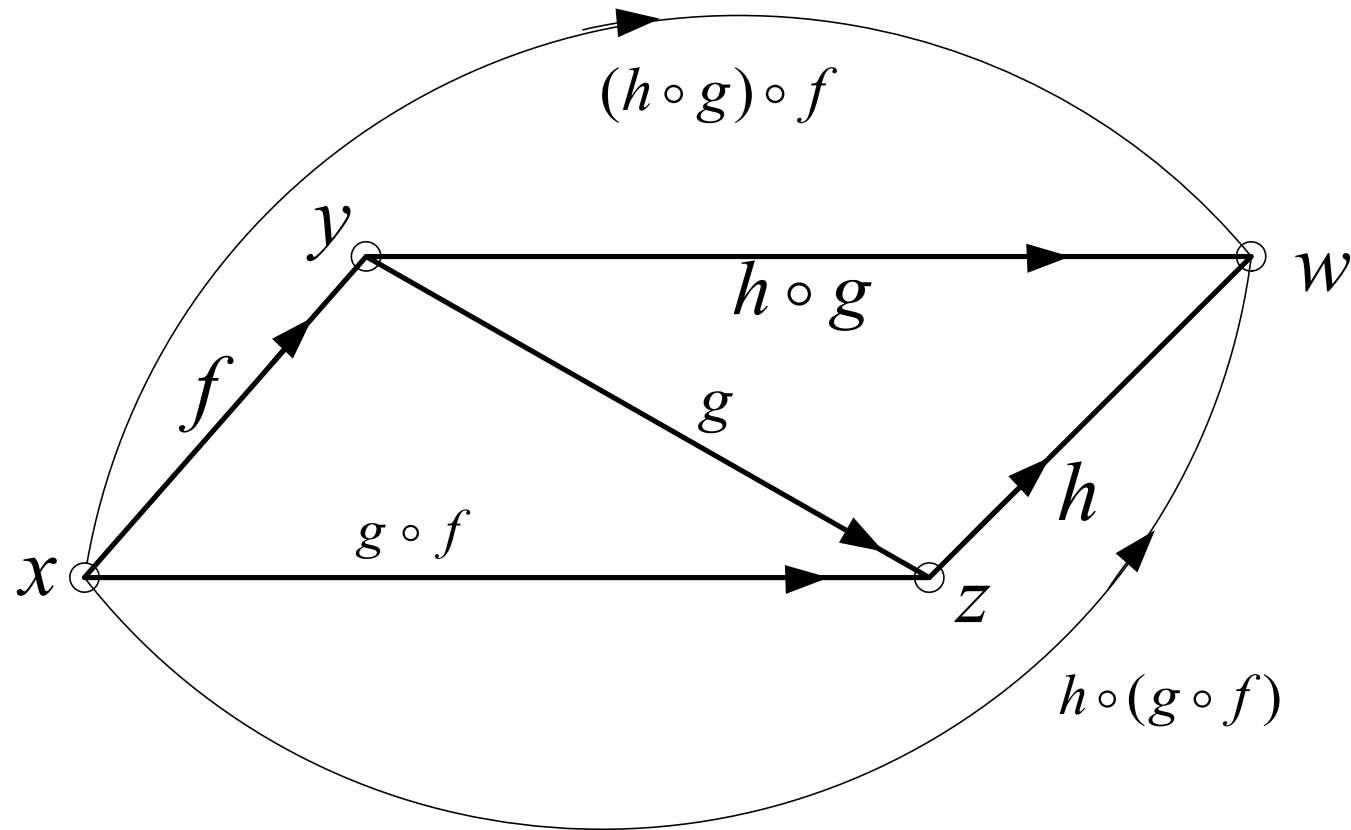
解： $g \circ f = \{\langle x_1, z_2 \rangle, \langle x_2, z_1 \rangle, \langle x_3, z_3 \rangle, \langle x_4, z_2 \rangle\}$



函数的合成和合成函数的性质

定理：函数的合成运算是可结合的，即如果 f, g, h 都是函数，则应有

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$



函数的合成和合成函数的性质

因为函数的合成运算是可结合的，所以在表达合成函数时，可以略去圆括号，即

$$h \circ g \circ f = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

推广：设有 n 个函数： $f_1: X_1 \rightarrow X_2$ ， $f_2: X_2 \rightarrow X_3$ ， \dots ， $f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}$ ，于是无括号表达式唯一地表达了从 X_1 到 X_{n+1} 的函数。如果 $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X_{n+1}$ 和 $f_1 = f_2 = \dots = f_n = f$ ，则可用 f^n 表示从 X 到 X 的合成函数 $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ 。

函数的合成和合成函数的性质

例：设 I 是整数集合，并且函数 $f: I \rightarrow I$ 给定成 $f(i)=2i+1$ 。试求出合成函数 $f^3(i)$ 。

解：合成函数 $f^3(i)$ 是一个由 I 到 I 的函数，于是有

$$\begin{aligned} f^3(i) &= f^2(i) \circ f(i) = (f(i) \circ f(i)) \circ f(i) \\ &= f(f(f(i))) = f(f(2i+1)) = f(4i+3) \\ &= 2(4i+3) + 1 = 8i+7 \end{aligned}$$

等幂函数

定义：给定函数 $f: X \rightarrow X$ ，如果有 $f^2 = f$ ，则称 f 是个等幂函数。

例：设 I 是整数集合和 $N_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ ，并且函数 $f: I \rightarrow N_m$ 是 $f(i) = i(\bmod m)$ 。试证明，对于 $n \geq 1$ 都有 $f^n = f$ 。

证明：（归纳证法）当 $n=2$ 时

$$f^2 = f \circ f = f(f(i)) = f(i(\bmod m)) = (i(\bmod m))(\bmod m) = i(\bmod m) = f$$

假设当 $n=k$ 时，满足 $f^k = f$ ；

那么当 $n=k+1$ 时，

$$f^{k+1} = f^k \circ f = f \circ f = f$$

得证。对于所有的 $n \geq 1$ ，都有 $f^n = f$

5.3 特殊函数

定义：给定函数 $f: X \rightarrow Y$ 。

(a) 如果函数 f 的值域 $R_f = Y$ ，则称 f 为映上的映射，或称满射函数。

(b) 如果函数 f 的值域 $R_f \subset Y$ ，则称 f 为映入的映射或内射。

定义：给定函数 $f: X \rightarrow Y$ ，对于 $x_1, x_2 \in X$ 来说，如果有 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

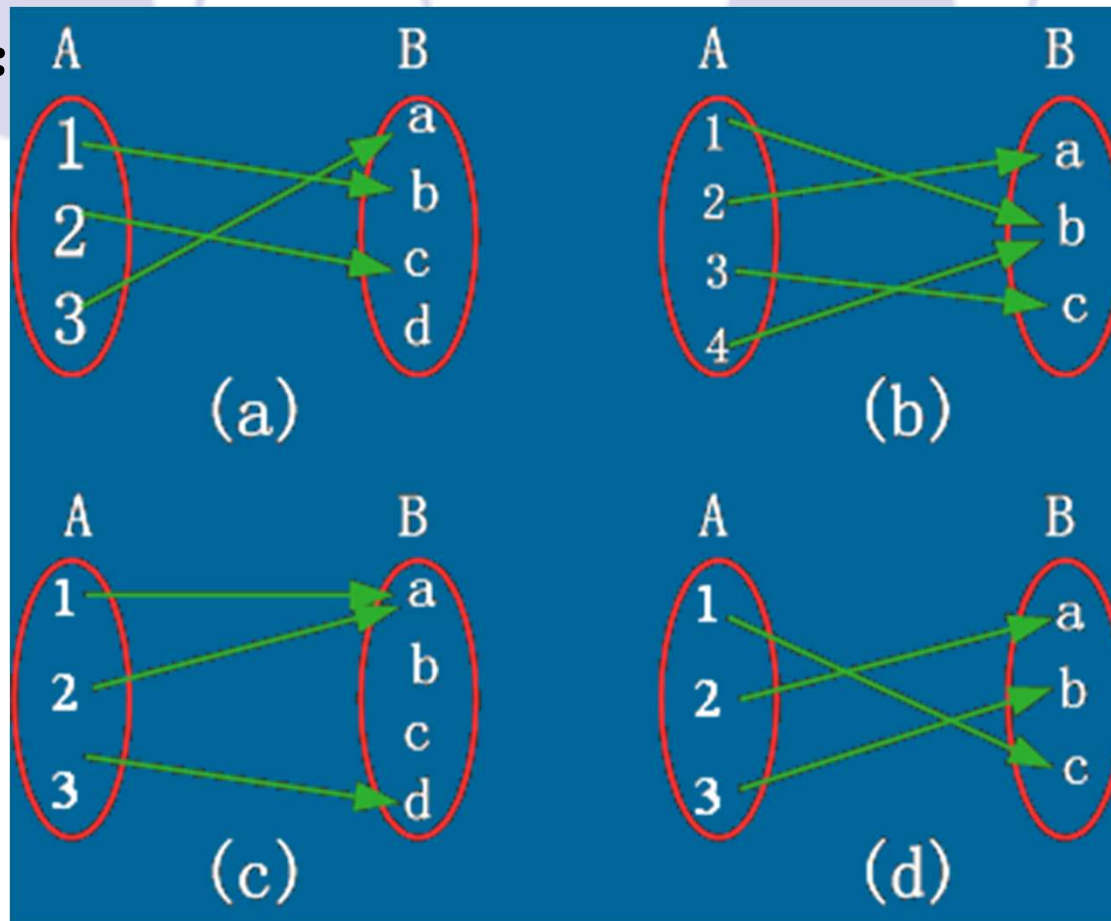
或者是 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

则称 f 为一对一的映射，或称 f 为单射函数。

定义：给定函数 $f: X \rightarrow Y$ 。如果 f 既是满射的又是单射的，则称 f 为一对一映满的映射，或称 f 为双射。

5.3 特殊函数

例:



(a) 内射, 单射; (b) 满射; (c) 内射;
(d) 双射, 单射, 满射

补充

函数 $f: X \rightarrow Y$ 是双射函数，必须要求 X 和 Y 含有的元素数目相等，也就是基数相等，设为 n 。

思考：从 X 到 Y 上存在多少个双射函数？

$$n!$$

定理：假设 m 和 n 是正整数并且满足 $n \geq m$ ，那么从 m 元素集合到 n 元素集合的单射函数的个数为： P_n^m

补充

函数 $f: X \rightarrow Y$ 是满射函数， X 中的元素个数是 m ， Y 中的元素个数是 n ， $m \geq n$ ，问可以定义多少个这样的满射函数？

例： $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $Y = \{a, b\}$ ，可以定义多少个 $X \rightarrow Y$ 的满射函数？

$$2^4 - 2 = 14$$

补充

例： $X=\{1,2,3,4,5,6\}$, $Y=\{a,b,c\}$, 可以定义多少个 $X \rightarrow Y$ 的满射函数？

解： 设 P_1, P_2, P_3 为 a, b, c 分别不在函数值域内的情况。
一个函数是满射的，当且仅当满足函数概念并且不是 P_1, P_2, P_3 三种情况时。

设所有的函数为全集， P_1, P_2, P_3 是在全集上的集合，
表征意义如上，那么满射函数必须满足 $\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3$

用 $N(A)$ 表示满足情况 A 的集合的基数， N 表示全集的基数，也就是从 6 元素集合到 3 元素集合的函数总数，
根据包含排斥原理，有

补充

$$\begin{aligned} & N(\sim P_1 \cap \sim P_2 \cap \sim P_3) \\ &= N - N(P_1 \cup P_2 \cup P_3) \\ &= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3) - N(P_1 \cup P_2) \\ &\quad - N(P_1 \cup P_3) \\ &\quad - N(P_2 \cup P_3) + N(P_1 \cap P_2 \cap P_3)) \\ &= N - (N(P_1) + N(P_2) + N(P_3)) + (N(P_1 \cup P_2) \\ &\quad + N(P_1 \cup P_3) + N(P_2 \cup P_3)) - N(P_1 \cap P_2 \cap P_3)) \\ &= 3^6 - C(3,1) * 2^6 + C(3,2) * 1^6 - 0 \\ &= 729 - 192 + 3 \\ &= 540 \end{aligned}$$

补充

定理：假设 m 和 n 是正整数并且满足 $m \geq n$ ，那么从 m 元素集合到 n 元素集合的满射函数的个数为：

$$n^m - C(n, 1)(n-1)^m + C(n, 2)(n-2)^m - \dots + (-1)^{n-1} C(n, n-1) \cdot 1^m$$

特殊函数

定理：给定函数 f 和 g ，并且有合成函数 $g \circ f$ 。于是

(a) 如果 f 和 g 都是满射函数，则合成函数 $g \circ f$ 也是个满射函数。

(b) 如果 f 和 g 都是单射函数，则合成函数 $g \circ f$ 也是个单射函数。

(c) 如果 f 和 g 都是双射函数，则合成函数 $g \circ f$ 也是个双射函数。

证明：给定集合 X ， Y 和 Z ，并且有函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 。

特殊函数

证明:

(a) 设任意的元素 $z \in Z$, 由于 g 是个满射函数, 因而存在某一个元素 $y \in Y$, 能使 $g(y) = z$ 。

另外, 因为 f 是个满射函数, 所以存在某一个元素 $x \in X$, 能使 $f(x) = y$,

于是有 $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

即 $z \in (g \circ f)(X)$ 。

由元素 $z \in Z$ 的任意性, 知命题 (a) 为真。

特殊函数

证明:

(**b**) 设任意的元素 $x_i, x_j \in X$ 且有 $x_i \neq x_j$, 因为 f 是单射的, 所以必定有 $f(x_i) \neq f(x_j)$ 。由于 g 是单射的和 $f(x_i) \neq f(x_j)$ 可推出 $g(f(x_i)) \neq g(f(x_j))$, 即如果 $x_i \neq x_j$, 则有 $(g \circ f)(x_i) \neq (g \circ f)(x_j)$ 。于是命题 (**b**) 的真值为真。

由命题 (**a**) 和命题 (**b**) 可直接推出命题 (**c**)

注意: 以上定理各部分的逆定理均不成立。

特殊函数

定理： 给定函数 f 和 g ，并且有合成函数 $g \circ f$ ，于是

(1) 如果 $g \circ f$ 是满射函数，则 g 必定是满射的。

(2) 如果 $g \circ f$ 是个单射函数，则 f 必定是个单射函数。

(3) 如果 $g \circ f$ 是个双射函数，则 g 必定是满射的， f 是单射的。

证明： 给定集合 X ， Y 和 Z ，并且有函数 $f: X \rightarrow Y$ 和 $g: Y \rightarrow Z$ 。

(1) 合成函数 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。因为 $g \circ f$ 是个满射函数，所以 $g \circ f$ 的值域 $R_{g \circ f} = Z$ 。设任意的元素 $x \in X$ ，某些 $y \in Y$ 和 $z \in Z$ ，于是应有

$$(g \circ f)(x) = z = g(f(x)) = g(y)$$

可见， $R_g = R_{g \circ f} = Z$ ，即 g 是满射的，得证。

特殊函数

(1) 反证法证明。设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 因为 $g \circ f$ 是满射函数, 若 g 不是满射函数, 则必存在 Z 中的元素 z_0 , 使得对于任意的 Y 中的元素 y , $g(y) \neq z_0$, 这样, 对于 X 中的任意元素 x , $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) \neq z_0$, 故 $g \circ f$ 不是满射函数, 与假设矛盾, 因此, g 一定是满射函数。

特殊函数

(2) 合成函数 $g \circ f: X \rightarrow Z$ 。设 $x_i, x_j \in X$ 和 $x_i \neq x_j$ 。
因为 $g \circ f$ 是单射的，所以应有

$$(x_i \neq x_j) \Rightarrow (g \circ f)(x_i) \neq (g \circ f)(x_j) \Leftrightarrow g(f(x_i)) \neq g(f(x_j))$$

因为 g 是函数，所以象点不同时，原象一定不相同，

$$\text{即 } g(f(x_i)) \neq g(f(x_j)) \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_j)$$

根据永真蕴含关系的可传递性，应有

$$(x_i \neq x_j) \Rightarrow f(x_i) \neq f(x_j)$$

得证。

由 (1) 和 (2) 可知 (3) 成立。

特殊函数

(2) 反证法证明。设 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, 因为 $g \circ f$ 是单射函数, 若 f 不是单射函数, 则必存在 X 中的元素 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 。由于 g 是函数, 因此, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, 也即 $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$, 即 $g \circ f$ 不是单射函数, 矛盾, 所以, f 是单射函数。

恒等函数

定义：给定集合 X ，并且有函数 $I_X: X \rightarrow X$ 。对于所有的 $x \in X$ ，有 $I_X(x) = x$ ，亦即 $I_X = \{\langle x, x \rangle | x \in X\}$

则称 I_X 为恒等函数。

定理：给定集合 X 和 Y 。对于任何函数 $f: X \rightarrow Y$ ，都有

$$f = f \circ I_X = I_Y \circ f$$

证明：设 $x \in X$ 和 $y \in Y$ ，根据定义 $I_X(x) = x$ ， $I_Y(y) = y$

$$(f \circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$$

$$(I_Y \circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$$

得证。

偏函数

定义：设 X 和 Y 是两个集合，并且有 $X' \subseteq X$ 。于是，任何函数 $f: X' \rightarrow Y$ 都称为域 X 和陪域 Y 的偏函数。对于任何元素 $x \in X - X'$ ， $f(x)$ 的值是没有定义的。

例：设 R 是实数集合，并且偏函数 $f: R \rightarrow R$ 是 $f(x) = 1/x$ 。对于 $x = 0$ ，偏函数 $f(x)$ 没有定义。

作业

- **125页： 3-7,8 (2,4,6,8,10) ,9**