第四章 二元关系

回顾

- 关系的定义和性质
- 关系的表示方法
  - 关系图
  - 关系矩阵
- 关系的合成运算
  - 关系的合成
  - 关系合成的规则
  - 关系的幂
    - $R^0 = I_X = \{\langle x, x\rangle | x \in X\}$
  - 合成关系的矩阵表达与图解
- 关系的逆运算、补运算
  - 逆运算规则

回顾

- 关系的闭包
  - $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cup \boldsymbol{I}_X$
  - $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cup \widetilde{\boldsymbol{R}}$
  - $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$
- 若$\#\boldsymbol{X} = \boldsymbol{n}$，则

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{R}^i = R^1 \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

回顾

- 一、集合的划分和覆盖
- 定义：给定非空集合S，设非空集合$A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$，如果有

$$(a)\quad A_i \subseteq S \;\; (i=1,2,\cdots,n)$$

$$(b)\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

则称集合A是集合S的覆盖。

回顾

- 集合的划分和覆盖
  - 定义：给定非空集合$\boldsymbol{S}$，设非空集合$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A_1},\boldsymbol{A_2},\ldots,\boldsymbol{A_n}\}$，如果有

$$(a)\quad A_i \subseteq S\ (i=1,2,\cdots,n)$$

$$(b)\quad A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)\text{或}A_i \cap A_j \neq \emptyset\ (i=j)$$

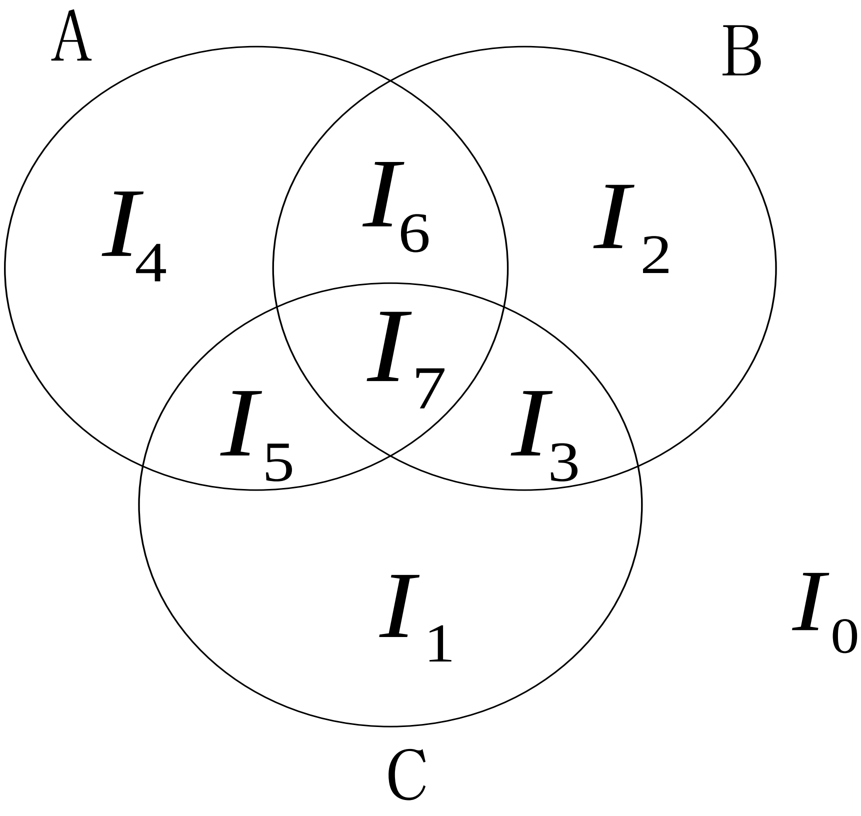
$$(c)\quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

则称集合$\boldsymbol{A}$是集合$\boldsymbol{S}$的一个划分。

- 划分中的元素$\boldsymbol{A_i}$称为划分的类。
- 划分的类的数目叫划分的秩。
- 划分是覆盖的特定情况，即$\boldsymbol{A}$中元素互不相交的特定情况。

极小项、完全交集

定义： 划分全集E的过程，可看成是在表达全集的文氏图上划出分界线的过程。设A，B，C是全集E的三个子集。由A，B和C生成的E的划分的类，称为极小项或完全交集。



$$I_0 = \sim A \cap \sim B \cap \sim C$$
$$I_1 = \sim A \cap \sim B \cap C$$
$$I_2 = \sim A \cap B \cap \sim C$$
$$I_3 = \sim A \cap B \cap C$$
$$I_4 = A \cap \sim B \cap \sim C$$
$$I_5 = A \cap \sim B \cap C$$
$$I_6 = A \cap B \cap \sim C$$
$$I_7 = A \cap B \cap C$$

n个子集生成2^n个极小项，用$I_0, I_1, \cdots, I_{2^n-1}$表示。

一、集合的划分和覆盖

- 定理：由全集E的n个子集$A_1, A_2, \ldots, A_n$所生成的全部极小项集合，能够构成全集E的一个划分。
- 证明：证明这个定理，只需证明全集E中的每一个元素，都仅属于一个完全交集就够了。
- 如果$x \in E$，则$x \in A_1$，或$x \in \sim A_1$，$x \in A_2$或$x \in \sim A_2$；…；$x \in A_n$或$x \in \sim A_n$。由此可见，定有

$$x \in (\bigcap_{i=1}^{n} \hat{A}_i)$$

- 这里$\hat{A}_i$或是A_i或是$\sim A_i$。试考察两个不同的完全交集T。因为两个完全交集是不同的，就是说存在这样一个i，使得$T \subseteq A_i$和$T \subseteq \sim A_i$，因此可有$T \subseteq A_i \cap \sim A_i$，即$T = \emptyset$；因而任何一个$x \in E$都不能同时属于两个不同的完全交集。

一、集合的划分和覆盖

- 注意：

  不难看出，这里所说的完全交集，与命题演算中的极小项相似。但是和极小项的集合不同，极大项的集合不能构成全集的划分。

二、等价关系

- **定义：** 设X是任意集合, R是集合中的二元关系。如果R是自反的、对称的和可传递的， 则称R是等价关系。即满足以下几点：

$$(a)\quad (\forall x)(x \in X \rightarrow xRx)$$

$$(b)\quad (\forall x)(\forall y)(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

$$(c)\quad (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

如果R是集合X中的等价关系，则R的域是集合X自身，所以，称R是定义于集合X中的关系。

例如　数的相等关系是任何数集上的等价关系。

又例如一群人的集合中姓氏相同的关系也是等价关系

但朋友关系不是等价关系，因为它不可传递。

二、等价关系

例： 给定集合$X=\{1,2,\ldots,7\}$，R是X中的二元关系，并且给定成

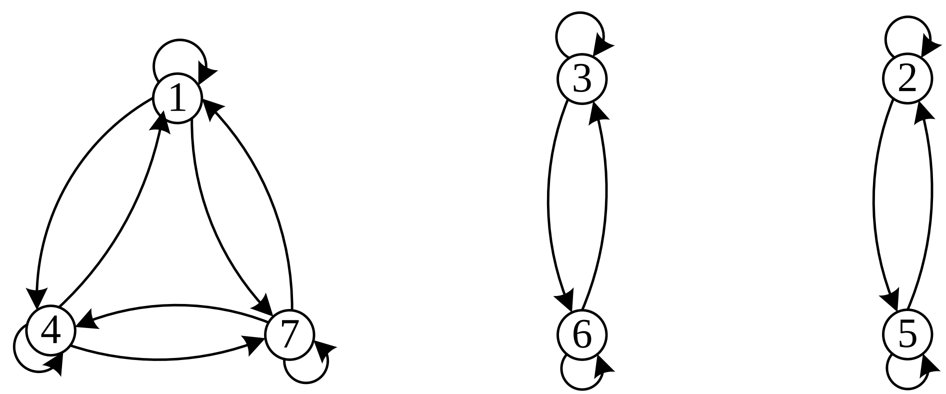
$$R=\{\langle x,y\rangle | x\in X\wedge y\in X\wedge((x-y)\text{可被 3 整除})\}$$

试证明R是等价关系。

解：R的关系矩阵如下：

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

R的关系图如下：



二、等价关系

注意：

上例是模数系统中模等价关系的特定情况。

设$\boldsymbol{I}_+$是正整数集合，$\boldsymbol{m}$是个正整数。对于$x, y \in I_+$来说，可将$\boldsymbol{R}$定义成 $\boldsymbol{R} = \{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle | \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$可被$\boldsymbol{m}$整除$\}$。这里，“*x-y*可被*m*整除”等价于命题“当用*m*去除*x*和*y*时，它们都有同样的余数”。故关系*R*也称为模*m*同余关系。

元素的等价

- 设$\boldsymbol{R}$是集合$\boldsymbol{A}$上的等价关系，若元素$\boldsymbol{aRb}$，则称$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$等价，或称$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$等价。
- 定义：设$\boldsymbol{m}$是个正整数，$x,y \in I$。如果对于某一个整数$\boldsymbol{n}$，有$\boldsymbol{x - y = n \cdot m}$，则称$\boldsymbol{x}$模等价于$\boldsymbol{y}$，并记作

$$x \equiv y (\bmod m)$$

- 整数$\boldsymbol{m}$称为等价的模数。
- “≡”表示模$\boldsymbol{m}$等价关系$\boldsymbol{R}$。

二、等价关系

- 定理：任何集合$X \subseteq I$中的模**m**相等关系，是一个等价关系。
- 证明：设$\boldsymbol{R}$是任何集合$X \subseteq I$中的模**m**相等关系。如果$\boldsymbol{X} = \emptyset$，则$\boldsymbol{R}$是个空关系，显然有是自反的、对称的和可传递的。如果$\boldsymbol{X} \neq \emptyset$，则需考察下列三条：
- **(1)**对于任何$x \in X$来说，因为$\boldsymbol{x - x = 0 \cdot m}$，所以有$x \equiv x(\mathrm{mod} m)$。因此，模**m**相等关系是自反的。
- **(2)**对于任何$x, y \in X$来说，如果$x \equiv y(\mathrm{mod}\ m)$，则存在某一个$n \in I$，能使$\boldsymbol{x - y = n \cdot m}$。于是可有$\boldsymbol{y - x = (-n) \cdot m}$，因此有$y \equiv x(\mathrm{mod}\ m)$，即模**m**相等关系是对称的。
- **(3)**设$x, y, z \in X$，$x \equiv y(\mathrm{mod}\ m)$和$y \equiv z(\mathrm{mod}\ m)$。于是存在$n_1, n_2 \in I$，能使$(x - y) = n_1 \cdot m$和$(y - z) = n_2 \cdot m$。

而$x - z = x - y + y - z = n_1 \cdot m + n_2 \cdot m = (n_1 + n_2) \cdot m$，从而可有$x \equiv z(\mathrm{mod} m)$，即模**m**相等关系是可传递的。

等价类

- 定义：设R是集合A上的等价关系，则A 中等价于元素a的所有元素组成的集合称为a生成的等价类，用$[a]_R$表示，即

$$[a]_R = \{b|b \in A \text{且} aRb\}$$

- 说明：简单起见，有时候把$[a]_R$简单写作$[a]$或a/R。

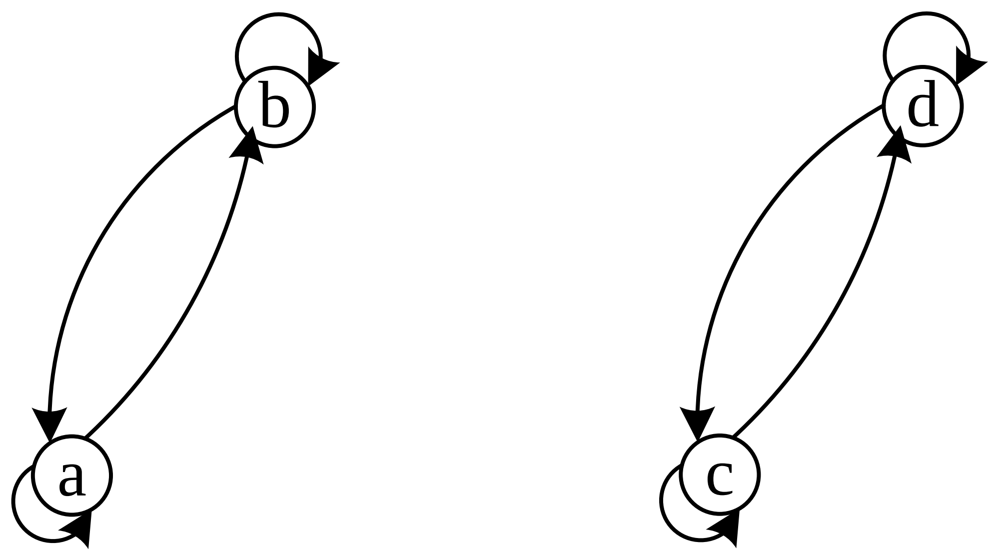
等价类

例：设**X={a,b,c,d}**，**R**是**X**中的等价关系，并把**R**给定成

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

则： $[a]_R=[b]_R=\{a,b\}$

$[c]_R=[d]_R=\{c,d\}$



等价类的性质

- 设X是一集合，R是X中的等价关系
- 1．如果$x \in X$,则$x \in [x]_R$。
  - 该性质是明显的，因为R是自反的，所以有xRx,于是$x \in [x]_R$
- 2. 对于所有的$x, y \in X$，或者$[x]_R = [y]_R$，或者$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$
  - 证明：当$X = \emptyset$，上述结论肯定为真。
  - 当$X \neq \emptyset$时，分两种情况讨论
  - (1) xRy
  - (2) $\langle x, y \rangle \notin R$

等价类的性质

(1) xRy 若$z \in [x]_R$，则xRz，

由R的对称性有zRx，

又由R的传递性有zRy，因此$z \in [y]_R$

故$[x]_R \subseteq [y]_R$。

类似地可以证明$[y]_R \subseteq [x]_R$

由上得$[x]_R = [y]_R$

(2) $\langle x, y\rangle \notin R$ 假设$[x]_R \cap [y]_R \neq \phi$,

因此有$z \in [x]_R$且$z \in [y]_R$，

于是由xRz，zRy，得xRy，与$\langle x, y\rangle \notin R$相矛盾

故$[x]_R \cap [y]_R = \phi$

等价类的性质

3．对任何$x \in X$，　$\bigcup[x]_R = X$

- 我们用证左边是右边的子集并且右边也是左子集的方法来证上面的等式.
- 对任何$x \in X$, 则$x \in [x]_R$而$[x]_R \subseteq \bigcup[x]_R$于是

  $x \in \bigcup[x]_R$即$X \subseteq \bigcup[x]_R$
- 而$x \in \bigcup[x]_R$则有$x \in [x]_R$而$[x]_R \subseteq X$于是有$x \in X$

  即$\bigcup[x]_R \subseteq X$
- 综上$\bigcup[x]_R = X$

等价类的性质

例 设$A=\{a,b,c,d\}$，A上的关系

$$R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,a\rangle,\langle d,d\rangle\}$$

R是A上的等价关系

$$[a]_R=[b]_R=[c]_R=\{a,b,c\}$$

$$[d]_R=\{d\}$$

- 同一个等价类中元素均相互等价。不同等价类中的元素互不等价。
- 由A的各元素所生成的等价类必定覆盖A，决定了集合A的一种划分。

二、等价关系

- 定理：设R是非空集合X中的等价关系。R的等价类的集合$\{[x]_R | x \in X\}$，是X的一个划分。
- 定义：设R是非空集合X中的等价关系。R的各元素生成的等价类集合$\{[x]_R | x \in X\}$叫按R去划分X的商集，记作X/R，也可以写成$X(\bmod R)$。
- 由定义可知，按R对集合X的划分X/R是一个集合，并且X/R的基数是X的不同的R等价类的数目，因此X/R的基数又称为等价关系R的秩。

特殊的等价关系

- 全域关系：令等价关系$R_1 = X \times X$，这里X的每一个元素与X的所有元素都有R_1的关系。按R_1划分X的商集乃是集合$\{X\}$。等价关系R_1是全域关系。全域关系会造成集合X的最小划分。

- 恒等关系R：X的每一个元素仅关系到它自身，而不关系到其它元素。显然，R是个恒等关系。按R划分X的商集，仅由单元素集合组成。恒等关系R会造成集合X的最大划分。

- 这些划分均称作X的平凡划分。

等价关系与集合的划分

例：令R是整数集合I中的“模3同余”关系，R可给定成 $R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in I \wedge y\in I \wedge (x-y)\text{被3整除}\}$

求I的元素所生成的R等价类。

解：等价类是

$$[0]_R=\{\cdots,-6,-3,0,3,6,\cdots\}$$

$$[1]_R=\{\cdots,-5,-2,1,4,7,\cdots\}$$

$$[2]_R=\{\cdots,-4,-1,2,5,8,\cdots\}$$

$$I/R=\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$$

可以看出，等价关系可以造成集合的一个划分。

等价关系与集合的划分

- **定理**：设C是非空集合X的一个划分，则由这个划分所确定的下述关系R

$$xRy \Leftrightarrow (\exists S)(S \in C \wedge x \in S \wedge y \in S)$$

必定是个等价关系，并称R为由C划分导出的X中的等价关系。

- 证明：要证明R是个等价关系，就必须证明R是自反的、对称的和可传递的。

- (a)由于C是X的划分，C必定覆盖X。

对任意的$x \in X$，必有x属于C的某一个元素S。

所以对于每一个$x \in X$，都有xRx，即R是自反的。

等价关系与集合的划分

- 证明(续):
- （b） 假定$\boldsymbol{xRy}$。于是存在一个$S \in C$，且$x \in S$和$y \in S$，所以有$\boldsymbol{yRx}$。因此，$\boldsymbol{R}$是对称的。
- （c）假定$\boldsymbol{xRy}$和$\boldsymbol{yRz}$。
  - 于是存在两个元素$S_1 \in C$和$S_2 \in C$，且$x, y \in S_1$和$y, z \in S_2$，
  - 所以有$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$。这样就有$\boldsymbol{S_1 = S_2}$，因此，$z \in S_1$。从而$\boldsymbol{xRz}$，所以有$\boldsymbol{R}$是可传递的。
- 综上，$\boldsymbol{R}$是个等价关系。证毕。

可以看出，给定集合的一种划分，就可以写出一个等价关系。反过来，集合中的等价关系也能够生成该集合的划分。

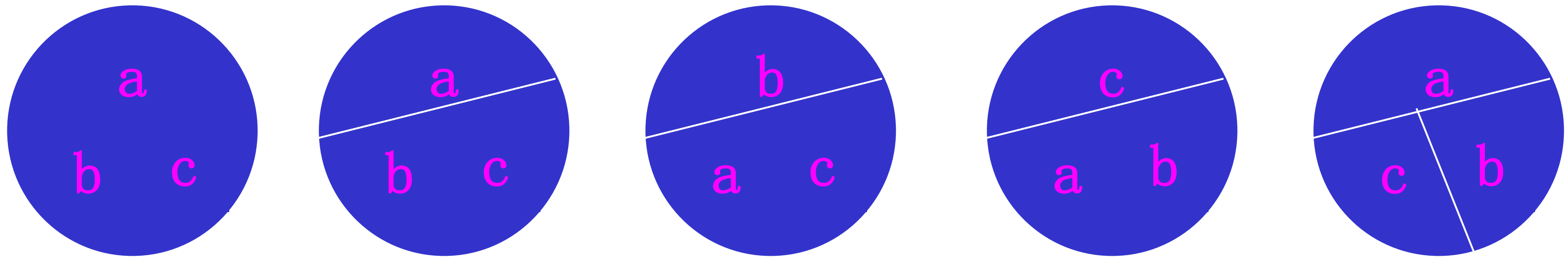
等价关系与集合的划分

例：设$X = \{a, b, c, d, e\}$和$C = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d, e\}\}$。试写出由划分$C$导出的$X$中的等价关系。

解：用R表示这个等价关系，（每一个类与自身做笛卡尔乘积）

$$R = \{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle d,d\rangle,\langle d,e\rangle,\langle e,d\rangle,\langle e,e\rangle\}$$

注意：集合中的等价关系能够生成该集合的划分，反过来集合中的任何一种划分又能确定一种等价关系。



Π_1 Π_2 Π_3 Π_4 Π_5

等价关系与集合的划分

- 有时，用不同的方法定义的两种等价关系，可能会产生同一个划分。
- 例如，设集合$X=\{1,2,\dots,9\}$，R_1和R_2是X中的两种关系，并把R_1和R_2规定成

$$R_1=\{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in X\wedge (x-y)\text{被3整除}\}$$

$$R_2=\{\langle x,y\rangle \mid x\in X\wedge y\in X\wedge (x\text{和}y\text{在}A\text{的同一列中})\}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$$

- 两者虽然定义不同，但是$R_1=R_2$
- “划分”的概念和“等价关系”的概念本质上是相同的。

作业

- **28-37**（奇数小题）