第三章 集合论

回顾

- 集合的定义
- 集合的描述
- 内涵与外延
- 集合的基数
- 集合间的关系
  - 相等
  - 包含、真包含
- 全集
- 子集、幂集运算
  - 子集的二进制描述
- 集合的交并运算

二、集合的并

- 定理3.2-1：设A,B,C为三个集合，那么

$$(a)\ A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$(b)\ A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

- 证明：对于任意的x，若

$$\begin{aligned}
& x\in A\cap(B\cup C)\\
&= x\in A\wedge x\in B\cup C\\
&= x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&= (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\
&= x\in A\cap B\vee x\in A\cap C\\
&= x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

由x的任意性可知(a)成立。

同理可以证明(b)。

二、集合的并

- 定理3.2-2：设A,B为两个集合，那么

$$(a)\ A \cup (A \cap B) = A$$
$$(b)\ A \cap (A \cup B) = A$$

- 证明: $(a)\ A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$

$$= A \cap (E \cup B)$$
$$= A \cap E$$
$$= A$$

$$(b)\ A \cap (A \cup B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$$
$$= A \cup (A \cap B)$$
$$= A$$

二、集合的并

- 定理3.2-3：$A \subseteq B$，当且仅当$A \cup B = B$（或$A \cap B = A$）
- 证明：
- (1) 若$A \subseteq B$，对任意$x \in A$，必有$x \in B$;

  对任意$x \in A \cup B$，则$x \in A$或$x \in B$，即$x \in B$，

  所以$A \cup B \subseteq B$。

  又$B \subseteq A \cup B$，故得到$A \cup B = B$。
- (2) 若$A \cup B = B$，因为$A \subseteq A \cup B$，故$A \subseteq B$。

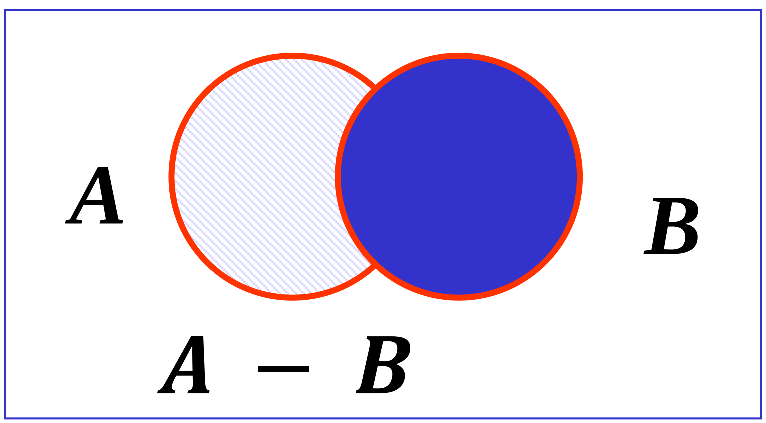
- 同理可证明$A \subseteq B$，当且仅当$A \cap B = A$。

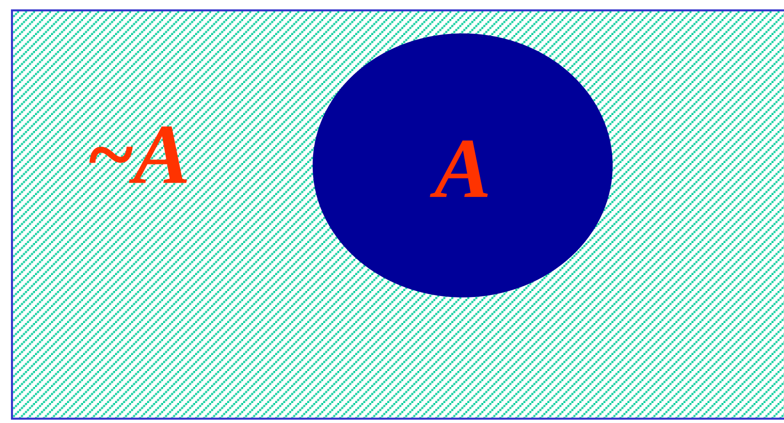
三、差分运算（集合的补）

- 定义：设*A*,*B*是两个集合，所有属于*A*而不属于*B*的元素组成的集合，称为*A*和*B*的差集或*B*对*A*的相对补集。记作$A-B$

$$A-B=\{x|x\in A\wedge x\notin B\}$$

- 绝对补集：*A*对*E*的相对补集叫做绝对补集，简称补集，记作$\sim A$





三、差分运算（集合的补）

例：设*A*是小于10的素数集合，*B*是奇数集合，求*A*-*B*。

解： $\boldsymbol{A} = \{2,3,5,7\}$　　$\boldsymbol{B} = \{1,3,5,7,9\}$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \{2\}$$

例：设*U*=*I* (*I*是整数集合)

$$A = \{i | i \in I, i > 0\}$$

解： $U - A = \{i | i \in I, i \leq 0\}$

$$A - U = \emptyset$$

三、差分运算（集合的补）

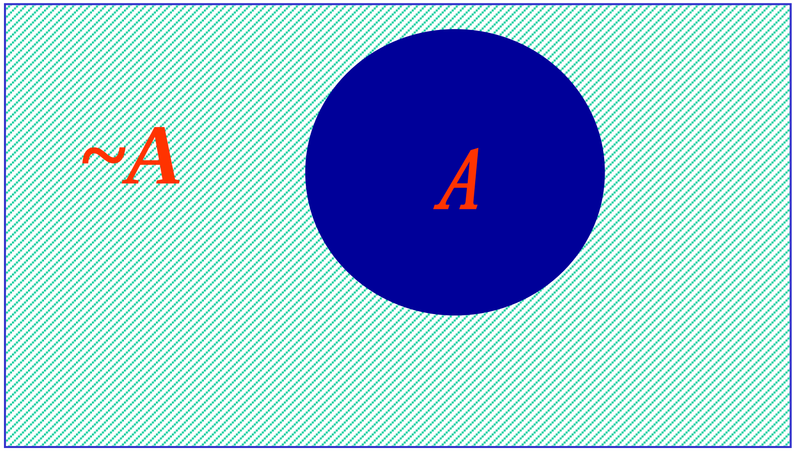
集合的差分运算还具有如下性质：

$$(a)\ \sim(\sim A) = A$$

$$(b)\ \sim E = \emptyset$$

$$(c)\ A \cup \sim A = E$$

$$(d)\ A \cap \sim A = \emptyset$$



三、差分运算（集合的补）

- **定理3.2-4**：设*A*,*B*为任意两个集合，则下列关系式成立。

$$(a)\ {\sim}(A\cup B)={\sim}A\cap{\sim}B$$
$$(b)\ {\sim}(A\cap B)={\sim}A\cup{\sim}B$$

- 证明:

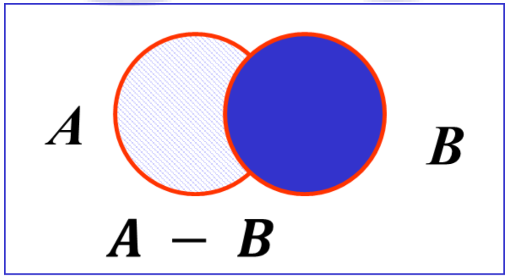
$$\begin{aligned}(a){\sim}(A\cup B)&=\{x|x\in{\sim}(A\cup B)\}\\&=\{x|x\notin(A\cup B)\}\\&=\{x|\neg x\in(A\cup B)\}\\&=\{x|\neg(x\in A\vee x\in B)\}\\&=\{x|\neg x\in A\wedge\neg x\in B\}\\&=\{x|x\in{\sim}A\wedge x\in{\sim}B\}\\&=\{x|x\in({\sim}A\cap{\sim}B)\}\\&={\sim}A\cap{\sim}B\end{aligned}$$

三、差分运算（集合的补）

- **定理3.2-5：设A,B为任意两个集合，则下列关系式成立。**

$$(a)\ A-B=A\bigcap\sim B$$

$$(b)\ A-B=A-(A\bigcap B)$$



- 证明: (b) 设$x\in A-B$，即$x\in A$且$x\notin B$，
  - 因为$x\notin B$，则必有$x\notin A\cap B$，
  - 故有$x\in A-(A\cap B)$，即为 $A-B\subseteq A-(A\cap B)$
- 设$x\in A-(A\cap B)$，则$x\in A$且$x\notin A\cap B$，即$x\in A$且$x\in\sim A$或$x\in\sim B$，
  - 显然只能$x\in A$与$x\in\sim B$成立。即$x\in A-B$。因此$A-(A\cap B)\subseteq A-B$
- 综上$A-B=A-(A\cap B)$

三、差分运算（集合的补）

- **定理3.2-6**：设A,B,C为任意三个集合，则下列关系式成立。

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

- 证明：$A \cap (B - C) = A \cap (B \cap \sim C)$

$$= A \cap B \cap \sim C$$

又$(A \cap B) - (A \cap C)$

$$= (A \cap B) \cap \sim (A \cap C)$$

$$= (A \cap B) \cap (\sim A \cup \sim C)$$

$$= (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C)$$

$$= A \cap B \cap \sim C$$

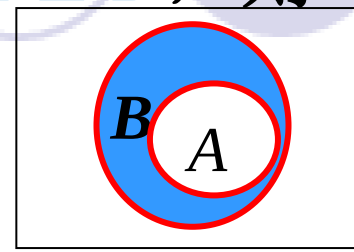
因此，$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

三、差分运算（集合的补）

- **定理3.2-7**：设A,B为任意两个集合，若$A \subseteq B$，则

$$(a)\ {\sim}B \subseteq {\sim}A$$

$$(b)\ (B-A)\cup A = B$$



- 证明：(a)

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \notin B \rightarrow x \notin A)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in {\sim}B \rightarrow x \in {\sim}A)$$

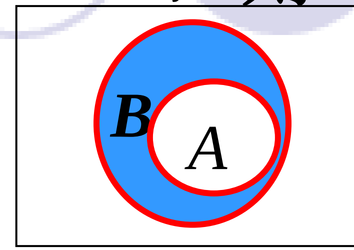
$$\Leftrightarrow {\sim}B \subseteq {\sim}A$$

三、差分运算（集合的补）

- **定理3.2-7**：设***A*,*B***为任意两个集合，若$A \subseteq B$，则

$$(a)\ \sim B \subseteq \sim A$$

$$(b)\ (B - A) \cup A = B$$



- 证明：$(b)\ (B - A) \cup A$

$$= (B \cap \sim A) \cup A$$

$$= (B \cup A) \cap (\sim A \cup A)$$

$$= (B \cup A) \cap E$$

$$= (B \cup A)$$

因为$A \subseteq B$，所以$B \cup A = B$。(b)得证。

四、对称差分运算

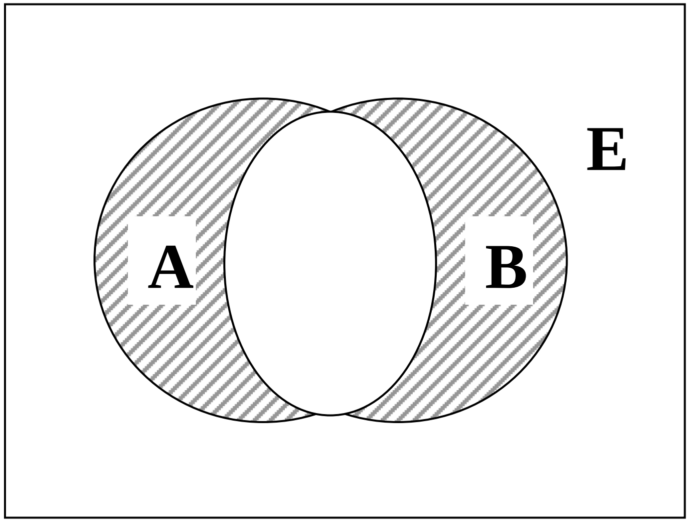
- 定义：设*A*、*B*为任意两个集合。属于*A*但不属于*B*的所有元素和属于*B* 但不属于*A*的所有元素的并集，称为*A*和*B*的对称差集，记作$A \oplus B$。

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$
$$= (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$
$$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

例如：$\boldsymbol{A} = \{1, 2, 3\}$

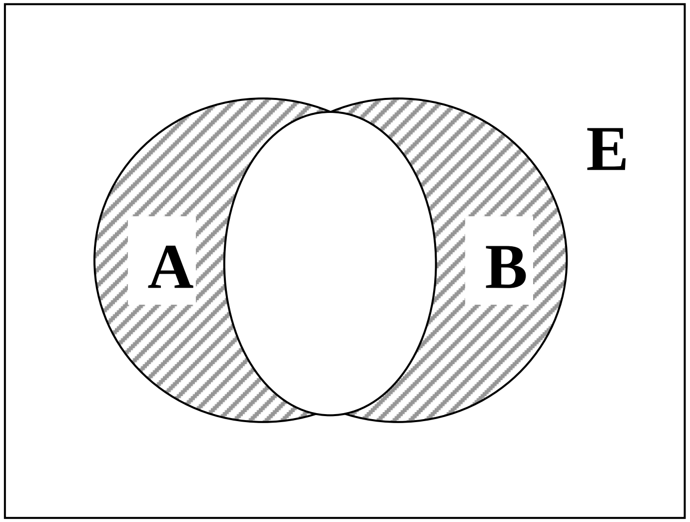
$\boldsymbol{B} = \{3, 2, 4\}$

则$A \oplus B = \{1, 4\}$



四、对称差分运算

集合的对称差分运算满足如下性质：



$$(a)\ A \oplus B = B \oplus A$$

$$(b)\ A \oplus \emptyset = A$$

$$(c)\ A \oplus A = \emptyset$$

$$(d)\ A \oplus B = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

$$(e)\ (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$$

四、对称差分运算

- 求证$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$。
- 证: $(A \oplus B) \oplus C = ((A \oplus B) \cap \sim C) \cup (\sim(A \oplus B) \cap C)$

$$= \big(((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap \sim C\big) \cup \big(\sim((A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B)) \cap C\big)$$

$$= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup \big((\sim A \cup B) \cap (A \cup \sim B) \cap C\big)$$

由于 $(\sim A \cup B) \cap (A \cup \sim B) \cap C$

$$= \big((\sim A \cup B) \cap A\big) \cup \big((\sim A \cup B) \cap \sim B\big) \cap C$$

$$= \big((\sim A \cap A) \cup (A \cap B)\big) \cup \big((\sim A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim B)\big) \cap C$$

$$= \big(\emptyset \cup (A \cap B)\big) \cup \big((\sim A \cap \sim B) \cup \emptyset\big) \cap C$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

所以，$(A \oplus B) \oplus C$

$$= (A \cap \sim B \cap \sim C) \cup (\sim A \cap B \cap \sim C) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

四、对称差分运算

- 由因为，$A \oplus (B \oplus C)$

$$= (A \cap \sim(B \oplus C)) \cup (\sim A \cap (B \oplus C))$$

$$= \Big(A \cap \sim\big((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C)\big)\Big)$$

$$\cup \Big(\sim A \cap \big((B \cap \sim C) \cup (\sim B \cap C)\big)\Big)$$

$$= \big(A \cap (\sim B \cup C) \cap (B \cup \sim C)\big)$$

$$\cup \big((\sim A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)\big)$$

$$= \big((A \cap \sim B \cap B) \cup (A \cap \sim B \cap C) \cup (A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \sim C)\big)$$

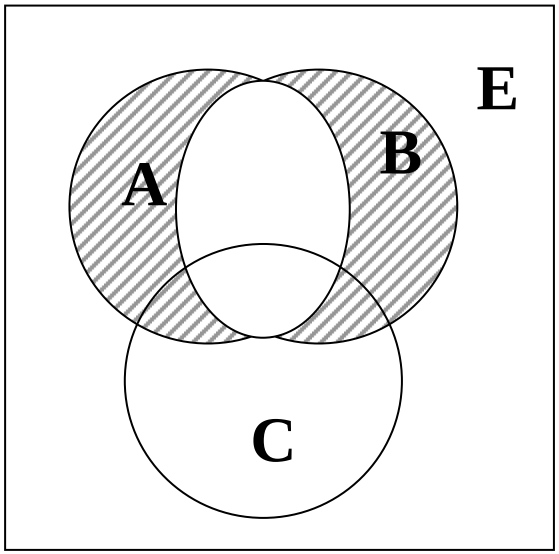
$$\cup \big((\sim A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)\big)$$

$$= (A \cap \sim B \cap C) \cup (A \cap C \cap B) \cup (\sim A \cap B \cap C) \cup (\sim A \cap \sim B \cap C)$$

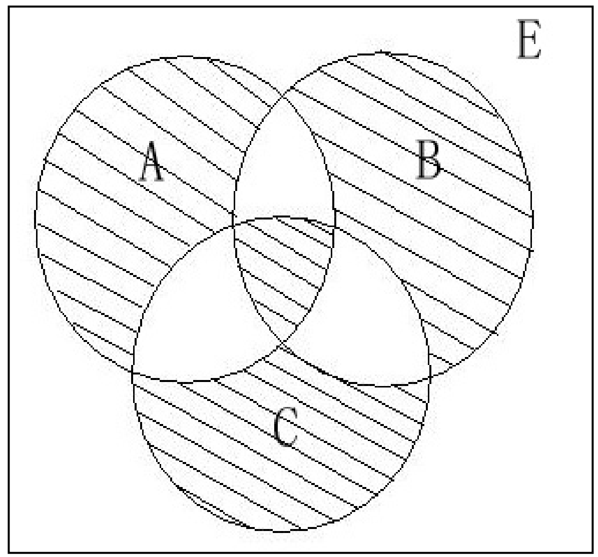
得证$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

四、对称差分运算

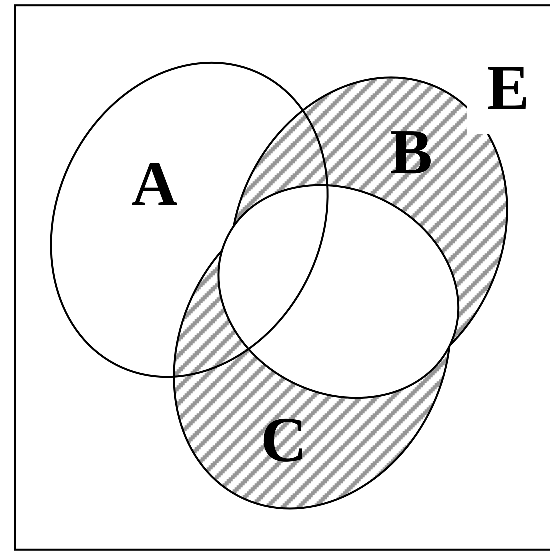
上述证明结果可以通过以下文氏图清楚看出。



$A \oplus B$



$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$



$B \oplus C$

3.3集合定律

$S_1 \quad A \cap B \subseteq A$

$S_2 \quad A \cap B \subseteq B$

$S_3 \quad A \subseteq A \cup B$

$S_4 \quad B \subseteq A \cup B$

$S_5 \quad A - B \subseteq A$

$S_6 \quad A \oplus B \subseteq A \cup B$

$$\left.\begin{array}{ll} S_7 & A \cup B = B \cup A \\ S_8 & A \cap B = B \cap A \\ S_9 & A \oplus B = B \oplus A \end{array}\right\} \text{交换律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{10} & A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ S_{11} & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ S_{12} & (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \end{array}\right\} \text{结合律}$$

3.3集合定律

$$\left.\begin{array}{ll} S_{13} & A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \\ S_{14} & A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \end{array}\right\} \text{分配律}$$

$$S_{15} \quad \sim\sim A=A \qquad \text{双重否定律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{16} & \sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B \\ S_{17} & \sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B \end{array}\right\} \text{德•摩根律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{18} & A\cap A=A \\ S_{19} & A\cup A=A \end{array}\right\} \text{等幂律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{20} & A\cap\sim A=\varnothing \\ S_{21} & A\cup\sim A=E \end{array}\right\} \text{补余律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{22} & A\cap E=A \\ S_{23} & A\cup\varnothing=A \\ S_{24} & A-\varnothing=A \\ S_{25} & A\oplus\varnothing=A \end{array}\right\} \text{同一律}$$

3.3集合定律

$$\left.\begin{array}{ll} S_{26} & A \cap \varnothing = \varnothing \\ S_{27} & A \cup E = E \end{array}\right\} \text{零律}$$

$$\left.\begin{array}{ll} S_{28} & A \cup (A \cap B) = A \\ S_{29} & A \cap (A \cup B) = A \end{array}\right\} \text{吸收律}$$

$$S_{30} \quad \sim \varnothing = E$$

$$S_{31} \quad \sim E = \varnothing$$

$$S_{32} \quad A \oplus A = \varnothing$$

$$S_{33} \quad A \cap (B - A) = \varnothing$$

$$S_{34} \quad A \cup (B - A) = A \cup B$$

$$S_{35} \quad A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

3.3集合定律

$S_{36}\quad A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

$S_{37}\quad A-B=A\cap\sim B$

$S_{38}\quad A\oplus B=(A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B)$

$S_{39}\quad (A\cup B\neq\varnothing)\Rightarrow(A\neq\varnothing)\vee(B\neq\varnothing)$

$S_{40}\quad (A\cap B\neq\varnothing)\Rightarrow(A\neq\varnothing)\wedge(B\neq\varnothing)$

- **证明: (39)** 转化为假设$(A\neq\emptyset)\vee(B\neq\emptyset)$为假，证明$A\cup B\neq\emptyset$为假。
- 由$(A\neq\emptyset)\vee(B\neq\emptyset)$为假可知，$A\neq\emptyset$和$B\neq\emptyset$均为假，即$A=\emptyset$并且$B=\emptyset$为真，也就是$A\cup B=\emptyset$为真，使得$A\cup B\neq\emptyset$为假。

3.4 包含排斥原理

- 集合的运算，可用于有限个元素的计数问题。
- 集合的基数：集合所含元素的个数。集合**A**的基数用$|A|$或$\#A$表示。
- 设A_1, A_2是有限集合，用$|A_1|, |A_2|$分别表示它们的基数，那么可以推出：

$$|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$$

$$|A_1 \cap A_2| \leq \min(|A_1|, |A_2|)$$

$$|A_1 - A_2| \geq |A_1| - |A_2|$$

$$|A_1 \oplus A_2| = |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|$$

3.4包含排斥原理

定理3.4-1： 设A_1, A_2是有限集合，$|A_1|, |A_2|$为其基数，则

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- 证明： (1)当A_1和A_2不相交，即$A_1 \cap A_2 = \emptyset$时，

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

(2)当$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$，那么

$$|A_1| = |A_1 \cap {\sim}A_2| + |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_2| = |{\sim}A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

所以$|A_1| + |A_2| = |A_1 \cap {\sim}A_2| + |{\sim}A_1 \cap A_2| + 2|A_1 \cap A_2|$

由于$|A_1 \cap {\sim}A_2| + |{\sim}A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1 \cup A_2|$

因此$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$

3.4包含排斥原理

- **例3.4.1**：假设在**10**名青年中有**5**名是工人，**7**名是学生，其中兼具有工人与学生双重身份的青年有**3**名，问既不是工人又不是学生的青年有几名？
- **解**：设工人的集合为**W**，学生的集合为**S**，则根据题设应有：

$|W| = 5$，$|S| = 7$，$|W \cap S| = 3$，

又因为$|\sim W \cap \sim S| + |W \cup S| = 10$，则

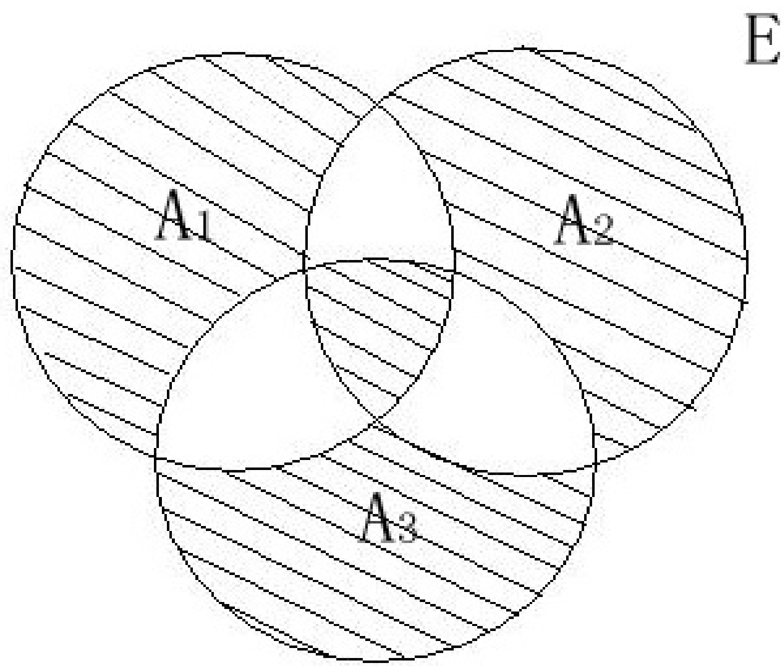
$$
\begin{aligned}
|\sim W \cap \sim S| &= 10 - |W \cup S| \\
&= 10 - (|W| + |S| - |W \cap S|) \\
&= 10 - (5 + 7 - 3) = 1
\end{aligned}
$$

因此既不是工人又不是学生的青年有**1**人

3.4包含排斥原理

包含排斥原理在三个有限集和上的推广：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|)$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$



- 例3.4.2 求1到1000之间（包含1和1000在内）既不能被5和6，也不能被8整除的数有多少个？
- 解：设

$$S=\{x \mid x \in Z \wedge 1 \leqslant x \leqslant 1000\}$$

$$A=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被5整除}\}$$

$$B=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被6整除}\}$$

$$C=\{x \mid x \in S \wedge x\text{可被8整除}\}$$

用$|P|$表示有穷集P中的元素数，$\lfloor x\rfloor$表示小于等于x的最大整数，$\mathrm{lcm}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示$x_1, x_2, \ldots, x_n$的最小公倍数，则有

$$|A| = \lfloor 1000/5 \rfloor = 200$$

$$|B| = \lfloor 1000/6 \rfloor = 166$$

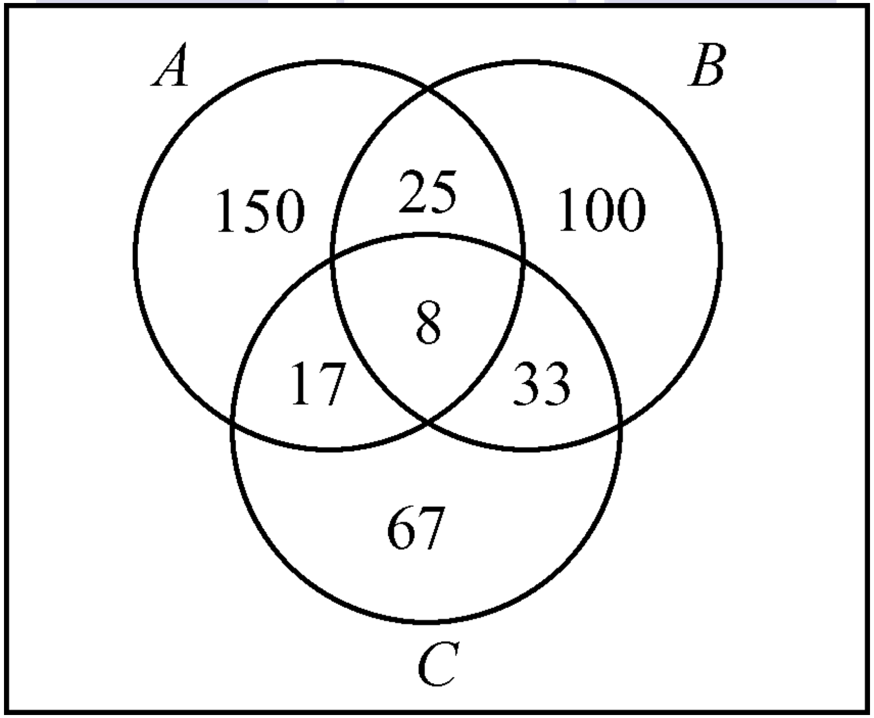
$$|C| = \lfloor 1000/8 \rfloor = 125$$

$$|A \cap B| = \lfloor 1000/lcm(5,6) \rfloor = 33$$

$$|A \cap C| = \lfloor 1000/lcm(5,8) \rfloor = 25$$

$$|B \cap C| = \lfloor 1000/lcm(6,8) \rfloor = 41$$

$$|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/lcm(5,6,8) \rfloor = 8$$



根据包含排斥原理，所求的元素数为

$$|\sim A \cap \sim B \cap \sim C| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$$

$$-|A \cap B \cap C|$$

$$= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 = 600$$

3.4包含排斥原理

- 例3.4.3: 某工厂装配30辆汽车，可供选择的设备是收音机、空气调节器和对讲机。已知其中15辆 汽车有收音机、8辆有空气调节器，6辆有对讲机，而且其中有3辆这三种设备都有。我们希望知道有几辆汽车没有提供任何设备。
- 解：设A_1，A_2和A_3分别表示配有收音机、空气调节器和对讲机的汽车集合，因此由题设知

$|A_1| = 15$， $|A_2| = 8$，$|A_3| = 6$，$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$

因为
$$|A_1 \cap A_2| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$
$$|A_1 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$
$$|A_2 \cap A_3| \geq |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$$

得
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 + 8 + 6 - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + 3$$
$$\leq 32 - 3 - 3 - 3 = 23$$

3.4包含排斥原理

- 把包含排斥原理推广到n个集合。
- 定理3.4-2：设$A_1, A_2, \ldots, A_n$为n个有限集合，它们的基数分别为$|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|$，可得：

$$|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n|$$

$$= |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| +$$

$$\sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

证明： 设 **S** 为全集，由德·摩根定律可得

$$\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n = \sim(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$

因此，

$$|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n| = |\sim(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)|$$
$$= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$

由此，原定理可变为

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i \le j \le n} |A_i \cap A_j|$$
$$+ \sum_{1 \le i \le j \le k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- 应用数学归纳法对上式进行证明，
- 当n=2 时，证明$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
  - 若$A_1 \cap A_2 = \emptyset$，有$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$，
    则 $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ 成立。
  - 若$A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$，有

$$\begin{aligned} |A_1| &= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\ &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \end{aligned}$$

于是$|A_1 \cap \sim A_2| = |A_1| - |A_1 \cap A_2|$，

则

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2| \\
&= |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2) \cup A_2| \\
&= |((A_1 \cap A_2) \cup A_2) \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\
&= |A_2 \cup (A_1 \cap \sim A_2)| \\
&= |A_2| + |A_1 \cap \sim A_2| \\
&= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|
\end{aligned}
$$

因此当n=2 时，$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$成立。

假设

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left|A_i\right| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \left|A_i \cap A_j\right|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| + \cdots + (-1)^{n-1} \left|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right|$$

成立，则，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}|$$
$$= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|$$

$$= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}|$$
$$- |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

$$+ |A_{n+1}| - (\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_{n+1}|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_{n+1}| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}|)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k \leqslant n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}|$$

因此定理得证。

3.4包含排斥原理

- 例3.4.4：求1到250之间能被2，3，5和7中任何一个整除的整数个数。

- 解：设A_1表示1到250之间能被2整除的整数集合，A_2表示能被3整除的整数集合，A_3表示能被5整除的整数集合，A_4表示能被7整除的整数集合。$\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数。

$$|A_1| = \left\lfloor \frac{250}{2} \right\rfloor = 125 \qquad |A_2| = \left\lfloor \frac{250}{3} \right\rfloor = 83 \qquad |A_3| = \left\lfloor \frac{250}{5} \right\rfloor = 50$$

$$|A_4| = \left\lfloor \frac{250}{7} \right\rfloor = 35 \qquad |A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3} \right\rfloor = 41$$

$$|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5} \right\rfloor = 25 \qquad |A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 7} \right\rfloor = 17$$

3.4包含排斥原理

$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5} \right\rfloor = 16 \qquad |A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 7} \right\rfloor = 11$$

$$|A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{5 \times 7} \right\rfloor = 7 \qquad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 8$$

$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 3 \qquad |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 7} \right\rfloor = 5$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{250}{2 \times 3 \times 5 \times 7} \right\rfloor = 1$$

于是有

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11$$
$$- 7 + 8 + 5 + 3 + 2 - 1 = 193$$

- **例3.4.5: 某系有 100 个学生至少要学法、德、英三种语言中的一种。现在这 100 个学生中有42人学法语，45人学德语，65人学英语，15人学法语和德语，20人学法语和英语，25 人学德语和英语。问同时学三种语言的有多少? 仅学英语的有多少?**

- **解:令*A*,*B*,*C*分别表示学法语、德语、英语学生的集合。则**

  $|A| = 42, |B| = 45, |C| = 65, |A \cap B| = 15,$

  $|A \cap C| = 20, |B \cap C| = 25, |A \cup B \cup C| = 100$。

  由容斥原理得:

  $|A \cup B \cup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C|$

  所以$|A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C| - (|A| + |B| + |C|) + (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) = 8$

  仅学英语的人数为:

  $|C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 28$

- **例3.4.6 求欧拉函数的值。欧拉函数$\phi(n)$表示$\{0, 1, \ldots, n-1\}$中与n互素的数的个数。例如$\phi(12)=4$，因为与12互素的数有1,5,7,11。下面利用包含排斥原理给出欧拉函数的计算公式。**
- **解：**给定正整数n，$\mathbf{n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}}$**为$n$的素因子分解式**，令

$$A_i = \{x \mid 0 \leqslant x < n-1 \wedge p_i \text{整除} x\}$$

那么

$$\phi(n) = \left| \sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k \right|$$

下面计算等式右边的各项，

$$\left|A_i\right| = \frac{n}{p_i}, i = 1, 2, \ldots, k$$

$$\left|A_i \cap A_j\right| = \frac{n}{p_i p_j}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$$

…

根据包含排斥原理

$$\phi(n) = \left|\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_k\right|$$

$$= n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_k}\right) + \left(\frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{k-1} p_k}\right) + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k}$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

例如，

$$\phi(12) = 12\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = 4$$

作业

- 第三章习题：
- 10，14（2），15，16(1),17(4),19(1),20(8,10),23-24

总结

- 集合的交并运算
- 集合的差分运算
- 集合对称差分运算
- 集合运算的**40**条规律
- 包含排斥原理