第 2 章 谓词逻辑

命题逻辑对于反映在自然语言中的逻辑思维进行了精确的形式化描述，能够对一些比较复杂的逻辑推理，用形式化方法进行分析。在命题逻辑中，把命题分解到原子命题为止，认为原子命题是不能再分解的，仅仅研究以原子命题为基本单位的复合命题之间的逻辑关系和推理。但这对科学中的演绎推理和数学中的推理是不够的，有些推理用命题逻辑就难以确切地表示出来。

例如，数学中常用的判断：$x>3$，$x+y=z$ 等就无法用命题的形式表达出来，因为这两个数学判断中都含有变量。一般而言，我们不能判断 $x>3$ 是真还是假。只有我们把变量 x 代之以具体的值时，如以 5 代替 x 的值时，这是一个真命题；而当 x 取值为 2 时，就成了一个假命题。因此，对于含有变量的数学判断通常不能用命题来描述。在自然语言以及某些数学推理中也不能仅用命题逻辑加以描述和研究。

又如著名的亚里士多德三段论中苏格拉底推理：

所有的人都是要死的。

因为苏格拉底是人，

所以，苏格拉底是要死的。

根据常识，认为这个推理是正确的。但是，若用命题逻辑来表示，设 P，Q，R 分别表示这 3 个原子命题，则有：$(P\wedge Q)\rightarrow R$。然而，这个式子却不是永真式，故上述推理形式又是错误的。

产生这些问题的根本原因在于命题逻辑仅对复合命题进行研究分析，原子命题作为基本单位不允许再被分解。因此命题逻辑就不能表达任何两个原子命题内部所具有的共同特点，也不能表达两者间的差异。即在命题逻辑中是无法对原子命题内部更细微的构造进行分析研究的。然而，在某些推理中，有必要进一步分析命题与命题之间的逻辑关系，更加深入地分析命题的内部构造。为此，就需要在原子命题中引入谓词的概念，构造新的模型——谓词逻辑。

2.1 基本概念和表示

在命题逻辑中，命题是具有真假意义的陈述句。从语法上分析，一个陈述句由主语和谓语两部分组成。在谓词逻辑中，为揭示命题内部结构及不同命题的内部结构关系，就按照这两部分对命题进行分析，并且把主语称为个体或者客体，把谓语称为谓词。

2.1.1 个体、谓词和谓词形式

定义 2.1 在原子命题中，所描述的对象称为个体；用以描述个体的性质或个体间关系的部分，称为谓词。

个体，是指可以独立存在的事物。它可以是抽象的概念，也可以是一个具体的实体。如计算

机，自然数，智能，情操等。表示特定的个体，称为个体常元，以 a，b，c，…或带下标的 a_i，b_i，c_i，…表示。

任何个体的变化都有一个范围，这个变化范围称为个体域(或论域)。个体域可以是有限的，也可以是无限的。所有个体域的总和叫作全总个体域。以某个个体域为变化范围的变元叫个体变元。以 x，y，z，…或者 x_i，y_i，z_i，…表示。

谓词，当与一个个体相联系时，刻画了个体的性质；当与两个或多个个体相联系时，刻画了个体之间的关系。通常都用大写英文字母，如 P，Q，R，…来表示。

例如有以下两个命题：

李雷是大学生。

张亮是大学生。

其中"…是大学生"是谓词，"李雷"、"张亮"是个体。谓词在这里是用来刻划个体的性质的。如用 $S(x)$表示"x 是大学生"，a 表示李雷，b 表示张亮，则上述两个命题可以表示成 $S(a)$，$S(b)$。

又如命题：

武汉位于北京和广州之间。

其中"…位于…和…之间"是谓词，是用来刻画多个个体之间的关系的。如果用 $L(x, y, z)$表示"x 位于 y 和 z 之间"，a 表示武汉，b 表示北京，c 表示广州，则上述命题可表示成 $L(a, b, c)$。以后我们简称 $S(x)$，$L(x, y)$等谓词和个体的联合体为谓词。

定义 2.2 一个原子命题用一个谓词（如 P）和 n 个有次序的个体常元（如 a_1，a_2，…，a_n）表示成 $P(a_1$，a_2，…，$a_n)$，称它为该原子命题的谓词形式或命题的谓词形式。

应注意：命题的谓词形式中个体的出现顺序影响命题的真值，不能随意变动。否则真值会变化，如上面所举的例子中 $L(b$，a，$c)$为假。

在谓词中包含的个体数目称为谓词的元数。与一个个体变元相联系的谓词叫一元谓词，与多个个体变元相联系的谓词叫多元谓词。例如 $S(x)$是一元谓词，$L(x$，$y)$是二元谓词。

一个 n 元谓词常可以表示成 $P(x_1$，x_2，…，$x_n)$，一般讲它是一个以变元的个体域为定义域，以$\{T, F\}$为值域的 n 元泛函。常称 $P(x_1$，x_2，…，$x_n)$为 n 元谓词变元命名式。它还不是一个命题，仅告诉我们该谓词变元是 n 元的以及个体变元之间的顺序如何。只有将其中的谓词赋予确定的含意，给每个个体变元都代之以确定的个体后，该谓词才变成一个确定的命题，有确定的真值。

例如，有一个谓词变元命名式 $S(x$，y，$z)$，它还不是一个命题，当然也就无真值可言。如果令 $S(x$，y，$z)$表示"x 在 y 和 z 之间"，则它是谓词常量命名式，但仍然不是命题，无真值可言。若进一步代入确定的个体表示 x，y，z 如"武汉在北京和广州之间"，则是一个真命题；而"广州在北京和武汉之间"则是一个假命题。以上两个具体的命题称为 $S(x$，y，$z)$的代换实例。

在一阶谓词逻辑中，个体域的确定可以和谓词在语义上没有任何联系。如有谓词 $S(x)$: x 是大学生。X 的个体域可以是{小明，桌子，计算机，理想}。在自然语言中这是不允许的。

2.1.2 量词

使用 n 元谓词和它的论域的概念，有时候还是不能够很好地符号化表达某些命题。如果用 $S(x)$

表示 x 是大学生，而 x 的个体域为某公司员工，那么 $S(x)$可以表示某公司员工都是大学生，也可以表示某公司有一部分员工是大学生。为了避免理解上的歧义，我们还需要引入用来刻画“所有的”、“存在一部分”等表示不同数量的词，即量词。

我们首先给出量词的定义：

定义 2.3　全称量词、存在量词、存在唯一量词。

（1）符号∀称为全称量词符，用来表达“对所有的”、“任意的”、“每一个”等词语。“$(\forall x)P(x)$”表示命题：“对于个体域中所有个体 x，谓词 $P(x)$均为 T”。其中“$(\forall x)$”称为全称量词，读作“对于所有的 x”。谓词 $P(x)$称为全称量词$(\forall x)$的辖域或作用范围。

（2）符号∃称为存在量词符，用来表达“存在一些”、“对于一些”、“至少有一个”等词语。“$(\exists x)Q(x)$”表示命题:“在个体域中存在某些个体使谓词 $Q(x)$为 T”。其中“$(\exists x)$”称为存在量词，读作“存在 x”。谓词 $Q(x)$称为存在量词$(\exists x)$的辖域或存在范围。

（3）符号∃!称为存在唯一量词符，用来表达“恰有一个”、“存在唯一”等词语。“$(\exists !x)R(x)$”表示命题：“在个体域中恰好有一个个体使谓词 $R(x)$为 T”。其中“$(\exists !x)$”称为存在量词，读作“恰有一个 x”。谓词 $R(x)$称为存在量词$(\exists !x)$的辖域或存在范围。

全称量词、存在量词和存在唯一量词统称量词。量词是由逻辑学家 Fray 引入的，有了量词之后，用逻辑符号表示命题的能力大大增强。

例 2.1　使用量词、谓词表示下列命题：

（1）每个自然数都是实数。

（2）一些大学生想继续攻读研究生。

（3）所有大学生都热爱祖国。

解：令 $S(x)$：x 是自然数，$R(x)$：x 是实数，$G(x)$：x 是大学生，$I(x)$：x 想继续攻读研究生，$L(x)$：x 热爱祖国。则各命题分别表示为：

（1）$(\forall x)(\mathrm{S(x)}\rightarrow \mathrm{R(x)})$

（2）$(\exists x)(G(x)\wedge I(x))$

（3）$(\forall x)(G(x)\rightarrow L(x))$

谓词前加上量词，称为谓词的量化。当一个一元谓词常量命名式的个体域确定之后，经过量化，将被转化为一个命题，可以确定其真值。将谓词转化为命题的方法有两种：①将谓词中的个体变元全部换成确定的个体；②使谓词量化。

注意：

（1）量词本身不是一个独立的逻辑概念，可以用∧，∨联结词代替。设个体域是 S：

$S=\{a_1，a_2，\ldots，a_n\}$

由量词的定义不难看出，对任意谓词 $A(x)$有:

$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge\ldots\wedge A(a_n)$

$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee\ldots\vee A(a_n)$

上述关系可以推广至 $n\rightarrow\infty$ 的情形。

（2）由量词所确定的命题的真值与个体域有关。如用 $Q(x)$表示 x 是有理数,命题$(\exists x)Q(x)$的真值，当个体域是有理数或整数时为 T；当个体域是无理数时为 F。

有时为了方便起见，个体域一律用全总个体域，每个个体变元的真正变化范围则用一个特性谓词来刻画。但需注意：对于全称量词应使用单条件逻辑联结词；对于存在量词应使用逻辑联结词合取。例如用 $R(x)$表示 x 是实数，$P(x)$表示 x 是复数，$Q(x)$表示 x 是有理数，则可有下述永真命题成立：

$(\forall x)(R(x)\rightarrow P(x))$

$(\exists x)(R(x) \wedge P(x))$

$(\exists x)(R(x) \wedge Q(x))$

对于二元谓词 $P(x, y)$，可能有以下几种量化的可能。

$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$，$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$

$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$，$(\exists x)(\exists y)P(x,y)$

$(\forall y)(\forall x)P(x,y)$，$(\exists y)(\forall x)P(x,y)$

$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$，$(\exists y)(\exists x)P(x,y)$

其中，$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$代表$(\exists x)((\forall y)P(x,y))$。

（3）一般来讲，量词的先后次序不可随意交换。

例如：x 和 y 的个体域都是所有鞋子的集合，$P(x,y)$表示一只鞋子 x 可与另一只鞋子 y 配对，则

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y)$$

表示“存在一只鞋 x，它可以与任何一只鞋 y 配对”，这显然是不可能的，是个假命题。

而
$$(\forall y)(\exists x)P(x,y)$$

表示“对任何一只鞋 y，总存在一些鞋 x 可与它配对”，这是真命题。

可见：$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \neq (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

2.1.3　合式谓词公式

若 P 为不能再分解的 n 元谓词变元，x_1，x_2，…，x_n 是个体变元，则称 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$为原子公式或原子谓词公式。当 n=0 时，P 表示命题变元即原子命题公式。所以，命题逻辑实际上是谓词逻辑的特例。

由原子谓词公式出发，通过命题联结词，可以组合成复合谓词公式，叫分子谓词公式。下面给出谓词逻辑的合式公式(简称公式)的递归定义。

定义 2.4　谓词逻辑的合式公式：

（1）原子谓词公式是合式公式；

（2）若 A 是合式公式，则$\neg A$ 也是合式公式；

（3）若 A 和 B 都是合式公式，则 $A\wedge B$，$A\vee B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$ 也都是合式公式；

（4）如果 A 是合式公式，x 是任意变元，且 A 中无$(\forall x)$或$(\exists x)$出现，则$(\forall x)A(x)$和$(\exists x)A(x)$都是合式公式；

（5）当且仅当有限次使用规则(1)-(4)由逻辑联结词、圆括号构成的有意义的字符串是合式公

式。

以下字符串均是谓词逻辑中合式公式的例子：

$A(x)$；$B(x)$；$(\forall x)A(x)$；$(\exists x)B(x)$; $\neg A(x)$；$(\forall x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)\rightarrow(\exists x)B(x)$。

下面的字符串不是谓词逻辑中合法的合式公式。

$(A(x)\wedge(\exists x)B(x)$　（括号不配对）

$(\forall x)A(x)\rightarrow(\exists x)B(x)\wedge\neg$（其中逻辑联结词$\neg$缺少运算）

2.1.4　自由变元和约束变元

定义 2.5　给定一个谓词公式 A，其中有一部分公式形如$(\forall x)B(x)$或$(\exists x)B(x)$，则称它为 A 的 x 约束部分，称 $B(x)$为相应量词的作用域或者辖域。在辖域中，x 的所有出现为约束出现，x 称为约束变元；B 中不是约束出现的其他变元的出现称为自由出现，这些个体变元称为自由变元。

对于给定的谓词公式，能够准确地判断它的辖域、约束变元和自由变元是很重要的。

通常，一个量词的辖域是某公式 A 的一部分，称为 A 的子公式。因此，确定一个量词的辖域即是找出位于该量词之后的相邻接的子公式，具体来说：

（1）若量词后有括号，则括号内的子公式就是该量词的辖域；

（2）若量词后无括号，则与该量词邻接的子公式为该量词的辖域。

判断给定公式 A 中的个体变元是约束变元还是自由变元，关键是要看它在 A 中是约束出现还是自由出现。

例 2.2　指出下列合式公式中的量词辖域、个体变元的约束出现和自由出现。

（1）$(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x, y))$

（2）$(\exists x)H(x)\wedge L(x, y)$

（3）$(\forall x)(\forall y)(P(x, y)\vee Q(y, z))\wedge(\exists x)R(x, y)$

解：（1）$(\forall x)$的辖域是$(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x, y))$，$(\exists y)$的辖域是 $Q(x, y)$。对于$(\exists y)$辖域而言，y 为约束出现，x 为自由出现。对于$(\forall x)$辖域而言，x 和 y 均为约束出现。

（2）$(\exists x)$的辖域是 $H(x)$，x 为约束出现，$L(x, y)$中的 x 和 y 都为自由出现。

（3）在$(\forall x)(\forall y)(P(x, y)\vee Q(y, z))$中，$(\forall x)$和$(\forall y)$的辖域分别为$(\forall y)(P(x, y)\vee Q(y, z))$和$(P(x, y)\vee Q(y, z))$，显然 x 和 y 为约束出现，z 为自由出现。$(\exists x)$的辖域为 $R(x, y)$，x 约束出现而 y 自由出现。在整个式子中，y 既约束出现又自由出现。

一个谓词 $P(x)$的量化，就是从变元 x 的整个个体域着眼，对性质 $P(x)$所作的一个全称判断或特称判断。其结果是将谓词变成一个命题。所以，$(\forall x)$和$(\exists x)$可以看成是一个消元运算。对于多元谓词来说，仅使其中一个变元量化仍不能将谓词变成命题。若 n 元谓词 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$经量化后仍有 k 个自由变元，则降为一个 k 元谓词 $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)(k<n)$。只有经过 n 次量化使其中的所有变元都成为约束变元时，n 元谓词才成为一个命题。

所以，一般情况下给定一个谓词公式 $A(x)$，仅表明在该公式中只有一个自由变元 x，但并不限制在该公式中还存在若干约束变元。例如，以下各公式都可以写成 $A(x)$。

（1）$(\forall y)(P(x)\wedge L(x, y))$

（2）$(\forall y)(P(x) \vee Q(y))$

（3）$(\exists y)S(y) \rightarrow S(x)$

（4）$(\forall y)P(x, y) \vee Q(x)$

在上述公式中，作为公式 $A(x)$来说，它们对于 y 的关系是不一样的，如在(1)式中以 y 代换 x，会出现新的约束变元；而在(3)式中以 y 代换 x，则不会出现新的约束变元。

如果用 y 代替公式 $A(x)$中的 x，不会产生变元的新的约束出现，则称 $A(x)$对于 y 是自由的。

上面的(3)式对 y 是自由的，(2)式对 y 亦是自由的，(1)式和(4)式对 y 是不自由的。

2.2　谓词逻辑的翻译与解释

2.2.1　谓词逻辑的翻译

把一个文字叙述的命题，用谓词公式表示出来，称为谓词逻辑的翻译或符号化。一般来说，符号化的步骤如下。

（1）正确理解给定命题。必要时把命题改叙，使其中每个原子命题及原子命题之间的关系能明显表达出来。

（2）把每个原子命题分解成个体、谓词和量词。在全总论域中讨论时，要给出特性谓词。

（3）找出适当量词。注意全称量词后跟条件式，存在量词后跟合取式。

（4）用适当联结词把给定命题表示出来。

下面通过例子来说明翻译过程及需要注意的问题。

例 2.3　试将命题：“任何整数都是实数”符号化。

解：根据实际问题的需要，首先定义谓词如下。

令 $I(x)$：x 是整数。

$R(x)$：x 是实数。

于是问题可符号化为：$(\forall x)(I(x) \rightarrow R(x))$。

例 2.4　将语句：“今天有雨雪，有些人会摔跤”符号化。

解：本语句可理解为：“若今天下雨又下雪，则存在 x，x 是人且 x 会摔跤”。

令 R：今天下雨，S：今天下雪，$M(x)$：x 是人，$F(x)$：x 会摔跤，则本语句可表示为：$R \wedge S \rightarrow (\exists x)(M(x) \wedge F(x))$。

注意

由于人们对命题的文字叙述含义理解的不同，强调的重点不同。命题符号化的形式也会不相同。

例 2.5　试将语句：“有一个大于 10 的偶数”符号化。

解：根据实际问题的需要，首先定义谓词如下。

$E(x)$：x 是偶数。

$G(x, y)$：x 大于 y。

于是问题可符号化为：$(\exists x)(E(x) \wedge G(x, 10))$。

例 2.6　将命题："没有最大的自然数"符号化。

解：命题中"没有最大的"显然是对所有的自然数而言，所以可以理解为："对于所有的 x，如果 x 是自然数，则一定还有比 x 大的自然数"，再具体点，即"对于所有的 x，如果 x 是自然数，则一定存在 y，y 也是自然数且 y 比 x 大"。

令 $N(x)$：x 是自然数，$G(x, y)$：x 大于 y。则原命题表示为：$(\forall x)(N(x) \to (\exists y)(N(y) \wedge G(y, x)))$。

2.2.2　谓词公式的解释

在命题逻辑中我们讨论过一个公式的解释，一个命题变元只有两种可能的指派，即 F 或 T，若公式含有 n 个变元，则有 2^n 种解释。如果对这 2^n 种解释公式 A 都取值为 T，则说 A 是永真式；都取值为 F 则说公式 A 为永假式；若至少有一组解释使公式 A 为真；则说 A 是可满足的。

在谓词逻辑中，因为涉及命题变元、谓词变元还有个体变元和函数符号，一个公式的解释就变得比较复杂了，判定一个谓词公式的属性也就远比命题公式复杂得多。为此引入如下的定义。

定义 2.6　设 A 的个体域是 D，如果用一组谓词常量、命题常量和 D 中的个体及函数符号（将它们简记为 I）代换公式 A 中相应的变元，则该公式 A 转化成一个命题，可以确定其真值（记作 P）。称 I 为公式 A 在 D 中的解释（或指派），称 P 为公式 A 关于解释 I 的真值。

给定一个谓词公式 A，它的个体域是 D，若在 D 中无论怎样构成 A 的解释，其真值都为 T，则称公式 A 在 D 中是永真的；如果公式 A 对任何个体域都是永真的，则称公式 A 是永真的；如果公式 A 对于任何个体域中的任何解释都为 F，则称公式 A 为永假的（或不可满足的）；若公式 A 不是永假的，则公式 A 是可满足的。

给定两个谓词公式 A 和 B，D 是它们共同的个体域，若 $A \to B$ 在 D 中是永真式，则称遍及 D 有 $A \Rightarrow B$；若 D 是全总个体域，则称 $A \Rightarrow B$。若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则称 $A \Leftrightarrow B$。

上面我们已经把命题逻辑中的永真式、等价式和永真蕴涵的概念推广到谓词逻辑。显然，命题逻辑中的那些常用恒等式（即等价式）和永真蕴涵式可以全部推广到谓词逻辑中来。一般来说，只要把原式中的命题公式用谓词公式代替，并且把这种代替贯穿于整个表达式时，命题逻辑中的永真式就转化成谓词逻辑中的永真式了。例如：

$$I'_1 : P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow P(x)$$

$$E'_{10} : \neg\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

2.3　谓词逻辑的等价式与蕴涵式

下面介绍谓词逻辑中一些特有的等价式和永真蕴涵式，它们是由于量词的引入而产生的。无论对有限个体域还是无限个体域，它们都是正确的。

（1）量词转化律

设 x 的个体域为 $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$。

令 $\neg(\forall x)A(x)$ 表示对整个被量化的命题 $(\forall x)A(x)$ 的否定，而不是对 $(\forall x)$ 的否定，于是有：

$$\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1)\vee\neg A(a_2)\vee\dots\vee\neg A(a_n) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

同样可有：

$$\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1)\vee A(a_2)\vee\dots\vee A(a_n))$$
$$\Leftrightarrow \neg A(a_1)\wedge\neg A(a_2)\wedge\dots\wedge\neg A(a_n)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$$

上述等价关系推广到无限个体域后仍成立。

（2）量词辖域扩张及收缩律

设 P 中不出现约束变元 x，则有：

$$(\forall x)A(x)\vee P \Leftrightarrow (A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n))\vee P$$
$$\Leftrightarrow (A(a_1)\vee P)\wedge(A(a_2)\vee P)\wedge\dots\wedge(A(a_n)\vee P)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee P)$$

用同样的方法可以证明以下 3 个等价式也成立。

$$(\forall x)A(x)\wedge P \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge P)$$
$$(\exists x)A(x)\vee P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee P)$$
$$(\exists x)A(x)\wedge P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge P)$$

（3）量词分配律

对任意谓词公式 $A(x)$和 $B(x)$有：

$$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$$
$$\Leftrightarrow (A(a_1)\wedge B(a_1))\wedge(A(a_2)\wedge B(a_2))\wedge\dots\wedge(A(a_n)\wedge B(a_n))$$
$$\Leftrightarrow (A(a_1)\wedge A(a_2)\wedge\dots\wedge A(a_n))\wedge(B(a_1)\wedge B(a_2)\wedge\dots\wedge B(a_n))$$
$$\Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$$

即 $(\forall x)$ 对“$\wedge$”满足分配律。同样

$$(\exists x)(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$$

即 $(\exists x)$ 对“$\vee$”满足分配律。

但是，$(\forall x)$ 对“$\vee$”，$(\exists x)$ 对“$\wedge$”不满足分配律，仅满足

$$(\exists x)(A(x)\wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)A(x)$$
$$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x)\vee B(x))$$

总结以上讨论，并用类似的方法，可得出谓词逻辑中特有的一些重要等价式和永真蕴涵式如下。

E_{31} $(\exists x)(A(x)\vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x)\vee(\exists x)B(x)$

E_{32} $(\forall x)(A(x)\wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x)\wedge(\forall x)B(x)$

E_{33} $\neg(\exists x)A(x) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$

E_{34} $\neg(\forall x)A(x) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$

E_{35} $(\forall x)A(x)\vee P \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee P)$

E_{36} $(\forall x)A(x)\wedge P \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\wedge P)$

E_{37} $(\exists x)A(x)\vee P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\vee P)$

E_{38}　$(\exists x)A(x) \wedge P \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge P)$

E_{39}　$(\forall x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x) \rightarrow B)$

E_{40}　$(\exists x)A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B)$

E_{41}　$A \rightarrow (\forall x)B(x) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow B(x))$

E_{42}　$A \rightarrow (\exists x)B(x) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow B(x))$

E_{43}　$(\exists x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)B(x)$

永真蕴涵式:

I_{17}　$(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$

I_{18}　$(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$

I_{19}　$(\exists x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

I_{20}　$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$

从量词意义出发，还可以给出一组量词交换式：

B_1　$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$

B_2　$(\forall x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\forall x)P(x,y)$

B_3　$(\forall y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

B_4　$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \Rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x,y)$

B_5　$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

B_6　$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

B_7　$(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

B_8　$(\exists x)(\exists y)P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

为了便于读者记忆，我们给出了 B_1～B_8 的图解表示（见图 2.1）。使用前面给出的等价式和永真蕴涵式就可以证明上述的永真式。

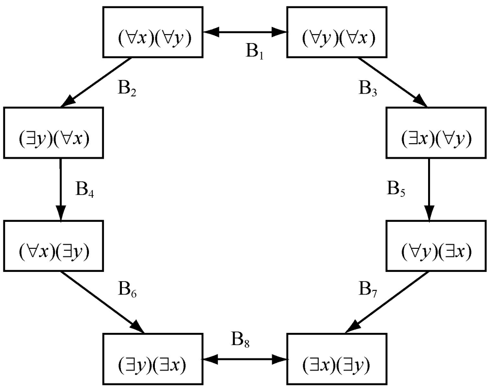

图 2.1　B_1 ~ B_8 的图解表示

2.4　谓词逻辑中的推论理论

谓词逻辑是命题逻辑的进一步深化和发展，是一种比命题逻辑范围更加广泛的形式语言系统。因此，命题逻辑中的推论规则都可以无条件地推广到谓词逻辑中来。在谓词逻辑中，某些前提和结论可能受到量词的约束，为确立前提和结论之间的内部联系，有必要消去量词和添加量词，因

此，正确理解和运用有关量词规则是谓词逻辑推理理论中的关键所在。除此之外，谓词逻辑中还有一些自己独有的推论规则。本小节将对谓词逻辑中的推理理论进行全面的介绍。

2.4.1 推理规则

1．约束变元的改名规则

谓词公式中约束变元的名称是无关紧要的，$(\forall x)P(x)$和$(\forall y)P(y)$具有相同的意义。需要时可以改变约束变元的名称。但必须遵守以下改名的规则。

（1）欲改名之变元应是某量词作用范围内的变元，且应同时更改该变元在此量词辖域内的所有约束出现，而公式的其余部分不变。

（2）新的变元符号应是此量词辖域内原先没有使用过的。

2．自由变元的代入规则

自由变元也可以改名，但必须遵守以下代入规则。

（1）欲改变自由变元 x 的名，必改 x 在公式中的每一处自由出现。

（2）新变元不应在原公式中以任何约束形式出现。

3．命题变元的代换规则

用任一谓词公式 A_i 代换永真公式 B 中某一命题变元 P_i 的所有出现，所得到的新公式 B' 仍然是永真式（但在 A_i 的个体变元中不应有 B 中的约束变元出现），并有 $B \Rightarrow B'$ 。

4．取代规则

设 $A'(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow B'(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 都是含 n 个自由变元的谓词公式，且 A' 是 A 的子公式。若在 A 中用 B' 取代 A' 的一处或多处出现后所得的新公式为 B，则有 $A \Leftrightarrow B$ 。如果 A 为永真式，则 B 也是永真式。

5．关于量词的增加和删除规则

（1）全称特指规则 US

从 $(\forall x)A(x)$ 可得出结论 $A(y)$ ，其中 y 是个体域中任一个体。亦即 $(\forall x)A(x) \Rightarrow A(y)$ 。

使用 US 规则的条件是对于 y，公式 $A(x)$ 必须是自由的。根据 US 规则，在推论的过程中可以去掉全称量词。

（2）存在特指规则 ES

从 $(\exists x)A(x)$ 可得出结论 $A(a)$ ，其中 a 是 $(\exists x)A(x)$ 和在此之前不曾出现过的个体常量。即 $(\exists x)A(x) \Rightarrow A(a)$ 。

根据 ES 规则，在推论的过程中可删掉存在量词。

（3）存在推广规则 EG

从 $A(x)$ 可得出结论 $(\exists y)A(y)$ ，其中 x 是个体域中某一个个体。即 $A(x) \Rightarrow (\exists y)A(y)$ 。

使用 EG 规则的条件是对于 y，公式 $A(x)$ 必须是自由的。根据 EG 规则，在推论的过程中可以添加上存在量词。

（4）全称推广规则 UG

从 $A(x)$ 可得出结论 $(\forall y)A(y)$，其中 x 应是个体域中任意个体。即 $A(x) \Rightarrow (\forall y)A(y)$。

使用 UG 规则的条件是，①在任何给定前提中 x 都不是自由的；②在使用 ES 规则的一个居先步骤上，如果 x 是自由的，那么在后继步骤中，则由于使用 ES 规则而引入的新变元在 $A(x)$ 中都不是自由出现。换句话说使用 ES 规则引入的新变元，不得使用 UG 规则推广。根据 UG 规则，在推论的过程中可以加上全称量词。

2.4.2　推理实例

谓词逻辑的推理方法是命题逻辑推理方法的拓展，因此在谓词逻辑中利用的推理规则也是 T 规则、P 规则和 CP 规则，还有已知的等价式、蕴涵式以及有关量词的消去和产生规则。使用的推理方法是直接构造法和间接证明法。下面举例说明。

例 2.7　试证明

$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$，$(\forall x)(Q(x) \to R(x)) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \to R(x))$

解：

$\{1\}$	(1)	$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	P
$\{1\}$	(2)	$P(x) \to Q(x)$	US，（1）
$\{3\}$	(3)	$(\forall x)(Q(x) \to R(x))$	P
$\{3\}$	(4)	$Q(x) \to R(x)$	UG，（3）
$\{1,3\}$	(5)	$P(x) \to R(x)$	T，（2），（4），I_{12}
$\{1,3\}$	(6)	$(\forall x)(P(x) \to R(x))$	UG，（5）

例 2.8　试证明 $(\exists x)M(x)$ 是前提 $(\forall x)(H(x) \to M(x))$ 和 $(\exists x)H(x)$ 的逻辑结果。

解：即证 $(\forall x)(H(x) \to M(x))$，$(\exists x)H(x) \Rightarrow (\exists x)M(x)$

$\{1\}$	(1)	$(\exists x)H(x)$	P
$\{1\}$	(2)	$H(a)$	ES，(1)
$\{3\}$	(3)	$(\forall x)(H(x) \to M(x))$	P
$\{3\}$	(4)	$H(a) \to M(a)$	US，(3)
$\{1,3\}$	(5)	$M(a)$	T，（2），（4）和 I_{10}
$\{1,3\}$	(6)	$(\exists x)M(x)$	UG，（5）

例 2.9　给定下列前提

$(\exists x)(R(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x, y)))$

$(\forall x)(R(x) \to (\forall y)(S(y) \to \neg L(x,y)))$

试推导出下列结论

$(\forall x)(D(x) \to \neg S(x))$

证明：$\{1\}$　(1)　$(\exists x)(R(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x, y)))$　P

{1}	(2)	$(R(a)\wedge(\forall y)(D(y)\to L(a,y)))$	ES，(1)
{1}	(3)	$R(a)$	T，(2)
{1}	(4)	$(\forall y)(D(y)\to L(\mathrm{a},y))$	T，(2)
{1}	(5)	$D(u)\to L(a,u)$	US，(4)
{6}	(6)	$(\forall x)(R(x)\to(\forall y)(S(y)\to\neg L(x,y)))$	P
{6}	(7)	$R(a)\to(\forall y)(S(y)\to\neg L(a,y))$	US，(6)
{1,6}	(8)	$(\forall y)(S(y)\to\neg L(a,y))$	T，(3), (7)
{1,6}	(9)	$S(u)\to\neg L(a,u)$	US，(8)
{1,6}	(10)	$L(a,u)\to\neg S(u)$	T，(9)
{1,6}	(11)	$D(u)\to\neg S(u)$	T，(5)，(10)
{1,6}	(12)	$(\forall x)(D(x)\to\neg S(x))$	UG，(11)

上面的例子告诉我们在证明的过程中，若有带存在量词的前提要首先引入，即 ES 规则尽量提前使用，以保证 ES 规则使用的有效性。

例 2.10　给定下列前提：

$(\forall x)(A(x)\vee \mathrm{B}(x))$，$(\forall x)(B(x)\to\neg C(x))$，$(\forall x)C(x)$

试推导出下列结论来：

$(\forall x)A(x)$

证明：

{1}	(1)	$\neg(\forall x)A(x)$	P（假设前提）
{1}	(2)	$(\exists x)\neg A(x)$	T，(1)
{1}	(3)	$\neg A(a)$	ES，(2)
{4}	(4)	$(\forall x)(A(x)\vee B(x))$	P
{4}	(5)	$A(a)\vee B(a)$	US，(4)
{1,4}	(6)	$B(a)$	T，(3)，(5)
{7}	(7)	$(\forall x)(B(x)\to\neg C(x)), (\forall x)C(x)$	P
{7}	(8)	$B(a)\to\neg C(a))$	US，(7)
{1,4,7}	(9)	$\neg C(a)$	T，(6)，(8)
{10}	(10)	$(\forall x)C(x)$	P
{10}	(11)	$C(a)$	US，(10)
{1,4,7,10}	(12)	$C(a)\wedge\neg C(a)$	T，(9)，(11)
{1,4,7,10}	(13)	$(\forall x)A(x)$	F，(1)，(12)

注意

使用反证法时

（1）首先要引入结论的否定作为一个前提，但要说明是假设前提；

（2）在演绎的第 n−1 步上一定要推出一个 $P\wedge\neg P$ 形式的矛盾式；

（3）在第 n 步上则可直接引入结论，并说明这是 F 规则、由第 1 步使用假设前提和第 n-1 步推出矛盾式造成的。

例 2.11　给定下列前提，使用 CP 规则证明

$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))\Rightarrow(\forall x)\neg P(x)\vee(\forall y)Q(y)$

证明：因为$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y)) \Rightarrow (\forall x)\neg P(x) \vee(\forall y)Q(y) \Leftrightarrow\neg(\exists x) P(x) \vee(\forall y)Q(y)$
$\Leftrightarrow(\exists x) P(x) \to (\forall y)Q(y)$
于是问题转化成证：$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y)) \Rightarrow(\exists x) P(x) \to (\forall y)Q(y)$，即是证明了原式。

{1}	(1)	$(\exists x) P(x)$	P（附加前提）
{1}	(2)	$P(a)$	ES，(1)
{3}	(3)	$(\forall x)(\forall y)(\neg P(x)\vee Q(y))$	P
{3}	(4)	$(\forall y)(\neg P(a)\vee Q(y))$	US，(3)
{3}	(5)	$\neg P(a)\vee Q(b)$	US，(4)
{1,3}	(6)	$Q(b)$	T，(2)，(5)
{1,3}	(7)	$(\forall y)Q(y)$	UG，(6)
{1,3}	(8)	$(\exists x) P(x) \to (\forall y)Q(y)$	CP，(1)，(7)

注意

只有当结论是 $P\to Q$ 的形式时，才可以考虑使用 CP 规则。
（1）把结论的前件作为一个前提引入，但要说明是附加前提；
（2）和前提一起在演绎的第 $n-1$ 步推出结论的后件；
（3）在第 n 步引入结论。

例 2.12　符号化下列命题并推证其结论：

所有的自然数都是整数，任何整数不是奇数就是偶数，并非每个自然数都是偶数。

所以，某些自然数是奇数。

解：首先定义如下谓词：

$N(x)$：x 是自然数

$I(x)$：x 是整数

$Q(x)$：x 是奇数

$O(x)$：x 是偶数

于是 问题可符号化为：

$(\forall x)(N(x) \to I(x))$
$(\forall x)(I(x) \to (Q(x) \nabla O(x)))$
$\neg (\forall x)(N(x) \to O (x))$
$\Rightarrow (\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$

推理如下：

{1}	(1)	$\neg (\forall x)(N(x) \to O (x))$	P
{1}	(2)	$(\exists x) \neg(\neg N(x) \vee O (x))$	T, (1)
{1}	(3)	$N(a) \wedge \neg O (a)$	ES, (2)
{1}	(4)	$N(a)$	T, (3)
{1}	(4)	$\neg O (a)$	T, (3)
{5}	(5)	$(\forall x)(N(x) \to I(x))$	P
{5}	(6)	$N(a) \to I(a)$	US, (5)
{1,5}	(7)	$I(a)$	T, (4), (6)
{8}	(8)	$(\forall x)(I(x) \to (Q(x) \nabla O(x)))$	P
{8}	(9)	$I(a) \to (Q(a) \nabla O(a))$	US, (8)
{1,5,8}	(10)	$Q(a) \nabla O(a)$	T, (7), (9)

{1,5,8}	(11)	$Q(a)$	T, (4), (10)
{1,5,8}	(12)	$N(a) \wedge Q(a)$	T, (4), (11)
{1,5,8}	(13)	$(\exists x)\ (N(x) \wedge Q(x))$	EG, (12)

例 2.13 符号化下列命题并推证其结论。

每个报考研究生的大学毕业生要么参加研究生入学考试，要么推荐为免考生；每个报考研究生的大学毕业生当且仅当学习成绩优秀才被推荐为免试生；有些报考研究生的大学毕业生学习成绩优秀，但并非所有报考研究生的大学毕业生学习成绩都优秀。因此，有些报考研究生的大学毕业生要参加研究生入学考试。

解：根据问题的需要首先定义如下谓词。

$YJS(x)$：x 是要报考研究生的大学毕业生。

$MKS(x)$：x 是免考生。

$CJYX(x)$：x 是成绩优秀的。

$CJKS(x)$：x 是参加考试的。

于是问题可符号化为：

$(\forall x)(YJS(x)\rightarrow(CJKS(x)\nabla\ MKS(x))$

$(\forall x)(\ (YJS(x)\ \rightarrow(MKS(x) \leftrightarrow\ CJYX(x)))$

$\neg\ (\forall x)\ (\ YJS(x)\ \rightarrow CJYX(x))$

$(\exists x)(\ YJS(x) \wedge \neg CJYX(x))$

$\Rightarrow(\exists x)(\ YJS(x) \wedge CJKS(x))$

推理过程如下：

{1}	(1)	$\neg\ (\forall x)\ (\ YJS(x)\ \rightarrow CJYX(x))$	P
{1}	(2)	$(\exists x)\ \neg(\ \neg YJS(x)\vee\ CJYX(x))$	T, (1)
{1}	(2)	$YJS(a) \wedge \neg CJYX(a)$	ES, (2)
{1}	(3)	$YJS(a)$	T, (2)
{1}	(4)	$\neg CJYX(a)$	T, (2)
{5}	(5)	$(\forall x)(YJS(x)\rightarrow(CJKS(x)\nabla\ MKS(x)))$	P
{5}	(6)	$YJS(a)\ \rightarrow(CJKS(a)\nabla\ MKS(a))$	US, (5)
{1,5}	(7)	$CJKS(a)\nabla\ MKS(a)$	T, (3), (6)
{8}	(8)	$(\forall x)(\ (YJS(x)\ \rightarrow(MKS(x) \leftrightarrow\ CJYX(x))))$	P
{8}	(9)	$YJS(a)\ \rightarrow(MKS(a) \leftrightarrow\ CJYX(a))$	US, (8)
{1,8}	(10)	$MKS(a) \leftrightarrow\ CJYX(a)$	T, (3), (9)
{1,,8}	(11)	$\neg MKS(a)$	T, (4), (10)
{1,5,8}	(12)	$CJKS(a)$	T, (7), (11)
{1,5,8}	(13)	$YJS(a) \wedge\ CJKS(a)$	T,(3), (12)
{1,5,8}	(14)	$(\exists x)(YJS(x) \wedge\ CJKS(x))$	EG,(3), (13)

通过上面的例题可以发现，使用谓词逻辑求解实际问题的步骤如下。

（1）根据问题的需要定义一组谓词；

（2）将实际问题符号化；

（3）使用上一小节所述规则有效推理；

符号化的原则是全称量词对应逻辑联结词“→”，存在量词对应逻辑联结词“∧”。推理时首先引入带存在量词的前提，以保证“ES”规则的有效性。

2.5　谓词逻辑中公式范式

在谓词逻辑的公式中，不仅有联结词还有量词出现，这使得公式可以很复杂，量词之间的关系直觉上很难看清，特别是在量词分割时。为了揭示在原来公式中并不显著的逻辑结构方面的关系，给出一种标准形式，缩小公式形式的类型范围，研究谓词逻辑中范式是很重要的。

命题逻辑中的两种范式都可以直接推广到谓词逻辑中来，只要把原子命题公式换成原子谓词公式即可。此外，根据量词在公式中出现的情况不同，又可分为前束范式和斯柯林范式。本小节将对这两种范式进行介绍，重点研究前束范式。

2.5.1　前束范式

定义 2.7　一个合式公式 A 称为前束范式，如果它有如下形式：

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\ldots(Q_kx_k)B$$

其中，$Q_i(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B 为不含有量词的公式。称 $Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_k$ 为公式的首标。特别地，若 A 中不含量词，则 A 也看做是前束范式。

可见，前束范式的一般特点是对任一谓词公式 F，如果其中所有量词均非否定的出现在公式的最前面，且它们的辖域为整个公式，则称公式 F 为前束范式。

例如：$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x,y)\vee Q(x,y)\wedge R(x,y,z))$ 是前束范式。

任一公式都可以化成与之等价的前束范式。步骤如下：

（1）消去公式中的联结词$\leftrightarrow$和$\rightarrow$；

利用 $A\leftrightarrow B \Leftrightarrow (A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$及 $A\rightarrow B\Leftrightarrow\neg A\vee B$；

（2）将公式内的否定符号深入到谓词变元前并化简到谓词变元前只有一个否定号；

（3）利用改名、代入规则使所有的约束变元均不同名，且使自由变元与约束变元亦不同名；

（4）扩充量词的辖域至整个公式。

例 2.14　将公式$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow(\forall x)R(x)$化为前束范式。

解：原式$\Leftrightarrow((\forall x)P(x)\vee(\exists y)Q(y))\rightarrow(\forall z)R(z)$　　约束变元改名

$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$　量词前移

注意

由于量词前移的顺序不同，可能得到不同的但等价的前束范式。例如上例中还可能的前束范式有：$(\exists y)(\forall x)(\forall z)((P(x)\vee Q(y))\rightarrow R(z))$。可见，前束范式一般是不唯一的。

例 2.15　试将公式 $((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y))\rightarrow(\forall x)F(x)$ 化为前束范式。

解：$((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y))\rightarrow(\forall x)F(x)$

$\Leftrightarrow\neg((\forall x)P(x)\vee(\exists y)R(y)\vee(\forall x)F(x))$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg R(y)\vee(\forall x)F(x)$

$\Leftrightarrow(\exists x)\neg P(x)\wedge(\forall y)\neg R(y)\vee(\forall z)F(z)$

$\Leftrightarrow(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\neg P(x)\wedge\neg R(y)\vee F(z))$

2.5.2 斯柯林范式

定义 2.8 如果前束范式中所有的存在量词均在全称量词之前，则称这种形式为斯柯林范式。

例如：$(\exists x)(\exists z)(\forall y)(P(x, y) \vee Q(y,z) \vee R(y))$是斯柯林范式。

任何一个公式都可以化为与之等价的斯柯林范式，其方法如下。

（1）先将给定公式化为前束范式。

（2）将前束范式中的所有自由变元用全称量词约束（UG）。

（3）若经上述改造后的公式 A 中，第一个量词不是存在量词，则可以将 A 等价变换成如下形式：$(\exists u)(A \wedge (G(u) \vee \neg G(u)))$，其中 u 是 A 中没有的变元。

（4）如果前束范式是由 n 个存在量词开始，然后是 m 个全称量词，后面还跟有存在量词，则可以利用下述等价式将这些全称量词逐一移到存在量词之后。

$$(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\forall y)P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\exists y)((P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \wedge \neg H(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)) \vee (\forall z)H(x_1, x_2, \ldots, x_n, z))$$

其中，$P(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ 是一个前束范式，它仅含有 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 y 等 $n+1$ 个自由变元。H 是不出现于 P 内的 $n+1$ 元谓词。把等价式的右边整理成前束范式，它的前束将以 $(\exists x_1)\ldots(\exists x_n)(\exists y)$ 开头，后面跟上 P 中的全称量词和存在量词，最后是 $(\forall z)$。如此作用 m 次，可将存在量词前的 m 个全称量词全部移到存在量词之后。

斯柯林范式比前束范式更优越，它将任意公式分为三部分，即存在量词序列、全程量词序列、不含量词的谓词公式。这大大方便了对谓词公式的研究。

例 2.16　求公式$(\forall x)((\neg P(x) \vee (\forall y)Q(y,z)) \rightarrow \neg(\forall z)R(y,z))$的斯柯林范式。

解：原式$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x) \wedge (\exists y)\neg Q(y,z)) \vee (\exists z)\neg R(y,z))$

$\Leftrightarrow(\forall x)((P(x) \wedge (\exists u)\neg Q(u,z)) \vee (\exists v)\neg R(y,v))$　　改名

$\Leftrightarrow(\exists u)(\exists v)(\forall x)((P(x) \wedge \neg Q(u,z) \vee \neg R(y,v))$　　量词前移

例 2.17　将公式 $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)) \wedge R(z)$ 化成斯柯林范式。

解：$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)Q(y)) \wedge R(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \wedge R(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge R(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge (\forall z)R(z)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge R(z))$

$\Leftrightarrow (\exists u)((\forall x)(\exists y)(\forall z)((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge R(z)) \wedge (G(u) \vee \neg G(u)))$

$\Leftrightarrow (\exists u)(\exists x)((\exists y)(\forall z)(((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge R(z)) \wedge (G(u) \vee \neg G(u)))) \wedge \neg H$
$(u, x)) \vee (\forall s)H(u, s))$

$\Leftrightarrow (\exists u)(\exists x)(\exists y)(\forall z)(\forall s)(((((\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge R(z)) \wedge (G(u) \vee \neg G(u))) \wedge$
$\neg H(u, x) \vee H(u, s)))$

2.6 谓词逻辑的应用

谓词逻辑有着多种多样实际的应用，如利用谓词匹配方法可以提高信息检索的质量，也可以用于在关系型数据库中表示数据表项等。在本节中，我们主要通过叙述谓词逻辑在人工智能知识表示方面的作用来说明其重要的应用性。

人工智能（Artificial Intelligence）是一种使用计算机模拟人类智能的技术。在人工智能的实现过程中，知识有着至关重要的作用，如何运用知识进行推理并解决问题是研究人工智能的重要课题。而要想获取并应用知识，首先需要能够对知识进行正确有效的表示。因此，知识表示是实现人工智能的首要问题和基本技术。

谓词逻辑是应用于人工智能中最重要的一种知识表示方法。常被用来表述描述性语句，并可以有效地存储到计算机中进行处理。在人工智能的知识表示中，谓词逻辑不但可以用来形式化地描述自然语言和数学知识等，还可以对智能行为过程进行描述。下面通过一个具体例子来阐述谓词逻辑在知识表示方面的重要作用。

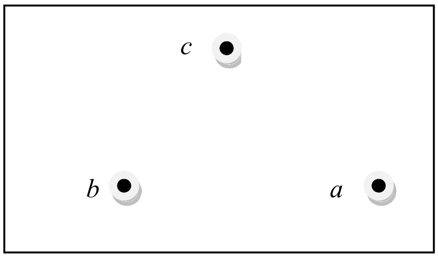

图 2.2 猴子吃香蕉问题

猴子吃香蕉问题：（如图 2.2 所示）设房内 a 处有一只猴子，一串香蕉挂在 c 处天花板上，猴子够不着，b 处有一个箱子，猴子从 a 处出发把箱子从 b 处搬到 c 处，爬上箱子，摘下香蕉，回到 a 处。请用谓词表示法来描述该问题以及猴子的行动过程。

（1）定义描述环境状态的谓词

AT(x , w): x 在 w 处，个体域 $x\in\{\text{monkey}\}$，$w\in\{a, b, c\}$;

HOLD(x , t): x 手中拿着 t，个体域 $t\in\{\text{box, banana}\}$;

EMPTY(x): x 手中是空的;

ON(t , y): t 在 y 处，个体域 $y\in\{b, c, \text{centre}\}$;

CLEAR(y): y 上是空的;

BOX(u): u 是箱子，个体域 $u\in\{\text{box}\}$;

BANANA(v): v 是香蕉，个体域 $v\in\{\text{banana}\}$;

（2）使用谓词、联接词和量词来表示环境状态

问题的初始状态可表示为：

S_0: AT(monkey, a) ∧ EMPTY(monkey) ∧ ON(box, b) ∧ ON(banana, center) ∧ CLEAR(c) ∧ BOX(box) ∧ BANANA(banana)

要达到的目标状态为：

S_g: AT(monkey, a) ∧ HOLD(monkey, banana) ∧ ON(box, c) ∧CLEAR(center) ∧ CLEAR(b) ∧ BOX(box) ∧ BANANA(banana)

（3）从初始状态到目标状态的转化，猴子需要完成一系列操作，定义操作类谓词表示它的动作

WALK(m, n): 猴子从 m 走到 n 处，个体域 $m,n\in\{a,b,c\}$;

CARRY(s, r): 猴子在 r 处拿到 s，个体域 $r\in\{b$, centre$\}$,$s\in\{$box, banana$\}$;

CLIMB(u, c): 猴子在 c 处爬上 u;

这三个操作也分别用条件和动作表示。条件是为完成相应操作而必须具备的前提，当具备时激活操作动作，通过从动作前删除或增加谓词公式来描述动作后的状态。以第一个动作为例：

WALK(m, n): 猴子从 m 走到 n 处，个体域 $m,n\in\{a,b,c\}$

条件：AT(monkey, m);

动作：删除：AT(monkey, m); 增加：AT(monkey, n);

（4）按照行动计划，一步步执行操作，进行状态替换，直至目标状态。本部分替换过程省略，读者可以自行代换。

通过上面的例子，我们可以归纳出用谓词逻辑表示具体知识的步骤：（1）将给定命题中的量词、个体词和谓词分析出来，并将谓词用特定的符号表示；（2）运用逻辑连接符来表示原命题中所含子命题之间的复合关系；（3）构造出该命题所对应的形式化的表达公式。

对于描述智能行为过程的知识，则需要分别定义描述环境状态的谓词和表示动作的操作谓词。通过使用谓词、联接词和量词来表示各个环节的环境的状态。并按照活动的计划，使用操作类谓词，一步步转化状态，直到完成从初始状态到目标状态的转化。

运用谓词逻辑的方法，就可以将自然语言、数学知识乃至行为知识进行形式化进而输入到计算机中，建立计算机系统的知识库，方便进行问题求解和机器定理证明。人工智能和知识表示也是谓词逻辑方法重要的应用领域。

习　　题

1．将下列命题符号化。

（1）小王聪明而且好学。

（2）没有最大素数。

（3）并非所有大学生都能成为科学家。

（4）每个自然数不是奇数就是偶数。

2．对下列公式找出约束变元和自由变元，并指明量词的辖域。

（1）$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\wedge(\exists x)R(x\text{，}y)$

（2）$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y))\rightarrow(\exists z)(R(x)\wedge S(z))$

（3）$(\forall x)(\exists y)(P(x\text{，}y)\wedge Q(y\text{，}z))$

3．证明下列各式是逻辑有效的：

（1）$(\exists x)(\forall y)P(x\text{，}y)\rightarrow(\forall y)(\exists x)P(x\text{，}y)$

（2）$(\forall x)P(x)\rightarrow((\forall x)Q(x)\rightarrow(\forall y)P(y))$

4．证明下列各公式。

（1）$(\forall x)(\neg A(x)\rightarrow B(x)),(\forall x)\neg B(x)\Rightarrow(\exists x)A(x)$

（2）$(\exists x)A(x)\rightarrow(\forall x)B(x)\Rightarrow(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

（3）$(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x)),(\forall x)(C(x)\rightarrow\neg B(x))\Rightarrow(\forall x)(C(x)\rightarrow\neg A(x))$

（4）$(\forall x)(A(x)\vee B(x)),(\forall x)(B(x)\rightarrow\neg C(x)),(\forall x)C(x)\Rightarrow(\forall x)A(x)$

5．用 CP 规则证明下列各式。

（1）$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

（2）$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$

6．将下列命题符号化并推证其结论。

（1）任何人如果他喜欢步行，他就不喜欢乘汽车，每一个人或者喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车，有的人不爱骑自行车，因而有的人不爱步行。

（2）每个科学工作者都是刻苦钻研的，每个刻苦钻研而且聪明的科学工作者在他的事业中都将获得成功。华为是科学工作者并且他是聪明的，所以，华为在他的事业中将获得成功。

（3）每位资深名士或是中科院院士或是国务院参事，所有的资深名士都是政协委员。张伟是资深名士，但他不是中科院院士。因此，有的政协委员是国务院参事。

（4）一个人怕困难，那麽他就不会获得成功。每个人或者获得成功或者失败过。有些人未曾失败过，所以，有些人不怕困难。

7．下列推导步骤中哪个是错误的？

（a）	(1)	$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$	P
	(2)	$P(x)\rightarrow Q(x)$	US，（1）
（b）	(1)	$(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$	P
	(2)	$P(a)\vee Q(b)$	US，（1）
（c）	(1)	$P(x)\rightarrow Q(x)$	P
	(2)	$(\exists x)P(x)\rightarrow Q(x)$	EG，（1）
（d）	(1)	$P(a)\rightarrow Q(b)$	P
	(2)	$(\exists x)(P(x)\rightarrow Q(b))$	EG，（1）

8．试找出下列推导过程中的错误，并问结论是否有效？如果有效，写出正确的推导过程。

{1}	（1）	$(\forall x)P(x)\rightarrow Q(x)$	P
{1}	（2）	$P(x)\rightarrow Q(x)$	US，（1）

{3}	(3)	$(\exists x)P(x)$	P
{3}	(4)	$P(x)$	ES，(3)
{1，3}	(5)	$Q(x)$	T，(2)，(4)和I_{10}
{1，3}	(6)	$(\exists x)Q(x)$	EG，(5)

9．用构成推导过程的方法证明下列蕴涵式。

（1）$(\exists x)P(x)\to(\forall x)((P(x)\vee Q(x))\to R(x))$，
$(\exists x)P(x),(\exists x)Q(x)\Rightarrow(\exists x)(\exists y)(R(x)\wedge R(y))$

（2）$(\exists x)P(x)\to(\forall x)Q(x)\Rightarrow(\forall x)(P(x)\to Q(x))$

10．将下列公式化为前束范式。

（1）$(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(y))$

（2）$(\forall x)(\exists y)((\exists z)(P(x,y)\wedge P(y,z))\to(\exists u)Q(x,y,u))$

（3）$\neg(\forall x)(\exists y)A(x,y)\to(\exists x)(\forall y)(B(x,y)\wedge(\forall y)(A(y,x)\to B(x,y)))$

11．求等价于下面公式的前束主析取范式与前束主合取范式。

（1）$(\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)\to(\exists x)(P(x)\vee Q(x))$

（2）$(\forall x)(P(x)\to(\forall y)((\forall z)Q(x,z)\to\neg R(x,y)))$

（3）$(\forall x)P(x)\to(\exists x)((\forall z)Q(x,z)\vee(\forall z)R(x,y,z))$

（4）$(\forall x)(P(x)\to Q(x,y)\to((\exists y)P(y)\wedge(\exists z)Q(y,z))$

12．将下列公式化为斯柯林范式。

（1）$(\forall x)(P(x)\to(\exists y)Q(x,y))$

（2）$(\forall x)(\forall y)((\exists z)(P(x,z)\wedge P(y,z))\to(\exists u)Q(x,y,u))$