姓名：__________

学号：__________

学院（系）：_______

_____ 级_____ 班

教师：__________

大 连 理 工 大 学

课程名称：高数 微积分 2，工科数学分析 2 试卷：A 考试形式：闭卷

授课院(系)：数学科学学院 考试日期：2018 年 5 月 10 日 试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七				总分
标准分	30	20	10	10	10	10	10				100
得 分											

得分	

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $dz=\underline{dx-\sqrt{2}dy}$；设 $z=xyf(\frac{y}{x})$，f 可导，则 $xz_x+yz_y=\underline{2xyf(\frac{y}{x})\text{或}2z}$.

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+a}{n}$ 收敛，则 a 的取值范围是 $\underline{0}$； 函数极限 $\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{y}{\sin(x^2y)}=\underline{\frac{1}{4}}$.

3. 设 $f(x)=x^2$，$0\le x\le 1$，而 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,\cdots$，则 $S(-\frac{1}{2})=\underline{-\frac{1}{4}}$；设 $x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx$，$-\pi\le x\le\pi$，则 $a_2=\underline{1}$

4. （高数）曲面 $3x^2+y^2+z^2=12$ 在点 $M(-1,0,3)$ 处的切平面为 $\underline{x-z+4=0}$；在该切平面与平面 $z=0$ 的夹角是 $\underline{\frac{\pi}{4}}$.

4（微积分）曲面 $3x^2+y^2+z^2=12$ 在点 $M(-1,0,3)$ 处的切平面为 $\underline{x-z+4=0}$；在该点处的法线是 $\underline{\frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-3}{-1}}$.

4. (工数)已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$， $y_2 = xe^x + e^{-x}$， $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，则此微分方程为 $\underline{y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x}$

此微分方程的通解为 $\underline{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + xe^x}$.

5．函数 $u = 2xy - z^2$ 在点 $(2,-1,-1)$ 处沿 x 轴负向的方向导数为 $\underline{2}$;

在该点处方向导数的最小值为 $\underline{2\sqrt{6}}$

得分	

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1、下列条件成立时能够推出 $z = f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $dz = 0$ 的是_____D_____.

A．在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数 $f_x' = 0$， $f_y' = 0$

B． $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = \dfrac{\Delta x \Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

C． $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = \dfrac{\sin(\Delta x^2 + \Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$

D． $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta z = (\Delta x^2 + \Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

2、设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为可微函数，且 $g_y'(x,y) \neq 0$，已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y) = 0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是___D____.

A．若 $f_x'(x_0,y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) = 0$　B．若 $f_x'(x_0,y_0) = 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$

C．若 $f_x'(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) = 0$　D．若 $f_x'(x_0,y_0) \neq 0$，则 $f_y'(x_0,y_0) \neq 0$

3、设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，则在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域内，该方程___C_____.

A．只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x,y)$

B．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$

C．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$

D．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$

4、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{6}$ 与 $x=\sqrt{10}$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-2)^n$ 的___B________.

A．收敛点，收敛点　　　　　B．收敛点，发散点

C．发散点，收敛点　　　　　D．发散点，发散点

5、下列数项级数中收敛的个数为___D________.

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n} \quad (3)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos\frac{2}{n}) \quad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3[\sqrt{2}+(-1)^n]^n}{3^n}$$

A．1　　　B．2　　　C．3　　　D．4

三、（高数）（10 分）求与已知直线 $L_1: \frac{x+3}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z}{1}$ 和 $L_2: \frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{1}$ 都相交，且与 $L_3: \begin{cases} x-3y+3z=0 \\ y-2z+5=0 \end{cases}$ 平行的直线方程。

解：L_3 的方向向量为 $(1,-3,3)\times(0,1,-2)=(3,2,1)$．所求直线 L 与 L_3 平行，故 L 的方向向量为 $\vec{s}=(3,2,1)$．（3 分）

下面在 L 上找一个定点 P 即可:

将 L_1 和 L_2 化为参数方程：$L_1: \begin{cases} x=2t-3 \\ y=t+5 \\ z=t \end{cases}$，$L_2: \begin{cases} x=t+3 \\ y=4t-1 \\ z=t \end{cases}$，设 L 与 L_1 和 L_2 的交点分别对应参数 t_1 和 t_2，

即交点分别为 $P(2t_1-3, t_1+5, t_1)$，$Q(t_2+3, 4t_2-1, t_2)$，

（6 分）

由于 $\overrightarrow{PQ}$ $\vec{s}$，故 $\frac{(2t_1-3)-(t_2+3)}{3}=\frac{(t_1+5)-(4t_2-1)}{2}=\frac{t_1-t_2}{1}$，解得 $t_1=0$，从而 $P(-3,5,0)$．（8 分）

故所求直线方程为:

$$\frac{x+3}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{1}$$ （10 分）

得分	

三、（微积分）（10 分）将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数。

$$f(x)=\frac{1}{4}(\ln(1+x)-\ln(1-x))+\frac{1}{2}arc\tan x-x,$$

$$f^{'}(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})+\frac{1}{2(1+x^2)}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{1}^{\infty}x^{4n},$$

$$f(x)=\int_0^x f^{'}(x)dx+f(0)=\int_0^x(\sum_{1}^{\infty}x^{4n})dx=\sum_{1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1},x\in(-1,1).$$

得分	

三、（工数）（10 分）已知 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$ 是微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的解,求 a,b,c 及该方程通解。

$y''+ay'+by=ce^x,ce^x=P_m(x)e^{\lambda x}\Rightarrow y^*=Q_m(x)x^ke^x=xe^x$. 故 齐 次 微 分 方 程 的 特 解 为

$e^{2x}+e^x\Rightarrow(r-2)(r-1)=0\Rightarrow r^2-3r+2=0\Rightarrow y''-3y'+2y=0$ ， 将 $y=xe^x$ 代 入

$y''-3y'+2y=ce^x\Rightarrow c=-1,y=c_1e^{2x}+c_2e^x+xe^x$

得分	

四、（10 分）设变换 $\begin{cases}u=x-2y\\v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a，其中 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，说明需要该条件的原因。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right]+\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$ ，同理

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$ ，将其代入得：

$$(10a+5)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0\Rightarrow 10a+5\neq 0,6+a-a^2=0\Rightarrow a=3$$

得分	

五、（10 分）将 $f(x)=2+|x|\ (-1\le x\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和。

$$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x dx=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,n=1,2,\cdots.$$

$$2+|x|=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.\text{所以}\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

当 x=0 时，又$\sum_0^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_1^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_0^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_0^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

故$\sum_0^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$

得分	

六、（10 分）讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, \quad x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续、偏导数是否存在，是否可微。

：$0\le\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{(xy)^2}{(2xy)^{\frac{3}{2}}}=2^{-\frac{3}{2}}(xy)^{\frac{1}{2}}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=f(0,0)$，连续.

$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0, f_y(0,0)=0$，偏导数都存在

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-0\cdot\Delta x-0\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta x\cdot\Delta y)^2}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right]}\overset{\Delta x=\Delta y}{=}\frac{1}{4}\neq 0$，不可微.

得分	

七、（10 分）设 $z=f(x,y)$，是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 所确定的二元函数，

求 $z=f\left(x,y\right)$ 的极值和极值点。

方程两边同时对 x,y 求偏导：

$$\begin{cases}2x-6y-2yz_x-2zz_x=0,\\ -6x+20y-2z-2yz_y-2zz_y=0.\end{cases}\begin{cases}z_x=0,\\ z_y=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3y,\\ z=y.\end{cases}$$

可求得 $P_1(9,3)$， $z_1=3,\ P_2(-9,-3)\ z_2=-3,$

再利用充分条件，对 $P_1(9,3)$， $A=\dfrac{1}{6}>0,B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0,$ 所以 $P_1(9,3)$ 为极小值点，3 为极小值。

对 $P_2(-9,-3)$， $A=-\dfrac{1}{6}<0,B^2-AC=-\dfrac{1}{36}<0,$ 所以 $P_2(-9,-3)$ 为极大值点，-3 为极大值。

姓名：__________

学号：__________

学院（系）：_______

_____ 级_____ 班

教师：__________

大 连 理 工 大 学

课程名称：高数 微积分，工数(二)　　试卷：A　考试形式：闭卷

授课院(系)：数学科学学院　　考试日期：2017 年 5 月 4 日　试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七				总分
标准分	30	20	10	10	10	10	10				100
得　分											

得分	

一、填空题 (每题 **6** 分，共 **30** 分)

1. 曲面 $z = x\sin y + y\sin x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 处的切平面方程为

$\underline{x+y-z=0}$，法线方程为$\underline{x-\frac{\pi}{2}=y-\frac{\pi}{2}=-z+\pi}$

2. 函数 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的梯度 $\boldsymbol{grad}\ u\big|_P=\underline{\left(\frac{1}{14},\frac{2}{14},\frac{3}{14}\right)}$，设

$\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，则方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}\big|_P=\underline{\frac{1}{42}}$

3. 设 $z=f(x-y,xy)$，其中 f 有二阶连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\underline{f_1'+y\,f_2'}$，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\underline{-f_{11}''+(x-y)f_{12}''+xy\,f_{22}''+f_2'}$。

4. 函数 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数为 $\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}}$，

收敛域为 $\underline{x\in(-\infty,+\infty)}$

（**高等数学，工科数学分析基础**）

5．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$ 的和函数为 $S(x)$，则 $S(9\pi)=\underline{\frac{\pi}{2}}$，$b_3=\underline{\frac{1}{3}}$。

（微积分）

5. 分别写出下列级数的和：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=\underline{-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}=\underline{e+1}$。

得分	

二、单项选择题（每题 4 分，共 20 分）

1．设 k 为正的常数，则极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin ky}{x^4+y^2}$ （ C ）

(A) 等于 0； (B) 等于 $\frac{1}{2}$； (C) 不存在； (D) 存在与否与 k 值有关。

2．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{a_{2n}}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ （ B）

(A) 条件收敛； (B) 绝对收敛；

(C) 发散； (D) 敛散性不能确定。

3．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{2}$ 与 $x=2\sqrt{2}$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的 （ C ）

(A) 收敛点，收敛点； (B) 收敛点，发散点；

(C) 发散点，收敛点； (D) 发散点，发散点。

4．设 $f(x,y)=(x^2-1)(y^2-1)$，则下列说法正确的是（ B ）

(A) $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极小值； (B) $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极大值；

(C) $f(1,1)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极小值； (D) $f(1,1)$ 是 $f(x,y)$ 的一个极大值。

5．设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=2$，$f'_y(0,0)=1$，则 （ D）

(A) $df(0,0)=2dx+dy$；

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(2,1,1)$；

(C) 曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\ y=0\end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(2,0,1)$；

(D) 曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在点$\left(0,0,f(0,0)\right)$的切向量为$(1,0,2)$。

（高数）

得分	

三、（**10 分**）设平面$\prod$垂直于平面$z=0$，并通过点$P(1,-1,1)$到直线L：$\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$的

垂线，求平面$\prod$的方程。

解法一：直线 $\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$的方向向量

$$\boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,1)。$$ （2 分）

过点$P(1,-1,1)$，且以$\boldsymbol{s}$为法向量的平面方程为

$$0\times(x-1)+1\times(y+1)+1\times(z-1)=0，$$

即$y+z=0$。（4 分）

联立$\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$，解得垂足$Q(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。（6 分）

因所求平面$\prod$垂直于平面$z=0$，故可设$\prod$的方程为：$Ax+By+D=0$。

（8 分）

又$\prod$过P，Q两点，有：$\begin{cases} A-B+D=0 \\ -\frac{1}{2}B+D=0 \end{cases}$，解得：$B=2D$，$A=D$。

因此所求平面$\prod$方程为：$Dx+2Dy+D=0$，即$x+2y+1=0$。（10 分）

解法二　直线 L 的对称式方程为：$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$，其方向向量$\boldsymbol{s}=(0,1,1)$。

（2 分）

设点$P(1,-1,1)$在直线 L 上的垂足为$Q(0,t,1+t)$，则$\overrightarrow{PQ}=(-1,t+1,t)$。

因$\overrightarrow{PQ}\perp\boldsymbol{s}$，于是

$\overrightarrow{PQ} \quad \boldsymbol{s} = (-1)\times 0 + (t+1)\times 1 + t\times 1 = 2t+1 = 0$，从而 $t = -\dfrac{1}{2}$。　（6 分）

因此垂线 PQ 的方程为

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{\frac{1}{2}} = \frac{z-1}{-\frac{1}{2}}，即 \begin{cases} x+2y+1=0 \\ y+z=0 \end{cases}。$$　（8 分）

易知平面 $\prod$：$x+2y+1=0$ 经过垂线 PQ 且垂直于平面 $z=0$，即为所求。

（10 分）

（微积分）

得分	

三、（10 分）设函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在 $[-1,1)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases} 1, & -1\le x<0 \\ 0, & 0\le x<1 \end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数。

解：$l=1$，傅里叶系数

$a_0 = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 1dx = 1$，　（2 分）

$a_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx = \int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx = 0$，$n=1,2,\cdots$，　（4 分）

$b_n = \dfrac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}dx = \int_{-1}^{0}\sin n\pi x\,dx = -\dfrac{1-\cos n\pi}{n\pi} = -\dfrac{1-(-1)^n}{n\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi}, & n=1,3,\cdots \\ 0, & n=2,4,\cdots \end{cases}$.

（6 分）

因此，函数 $f(x)$ 傅里叶级数的展开式为

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots\right),$$

$x\in(-\infty,+\infty),\ x\ne 0,\pm 1,\cdots$。　（8 分）

当 $x=0,\pm1,\cdots$ 时，$f(x)$ 的傅里叶级数收敛于 $\dfrac{1}{2}$。　（10 分）

（工科数学分析基础）

得分	

三、（10 分）求微分方程 $y''+y'=1+e^{-2x}$ 的通解。

解法一： 特征方程 $\lambda^2+\lambda=0$，特征根 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=-1$。（2 分）

于是原方程所对应的齐次微分方程的通解为：$c_1+c_2e^{-x}$。（4 分）

设方程 $y''+y'=1$ 的特解为 $y_1^*=ax$，代入方程可解得：$a=1$，从而 $y_1^*=x$。

设方程 $y''+y'=e^{-2x}$ 的特解为 $y_2^*=be^{-2x}$，代入方程可解得：$b=\frac{1}{2}$，从而 $y_2^*=\frac{1}{2}e^{-2x}$。于是原方程的一个特解为

$$y^*=y_1^*+y_2^*=x+\frac{1}{2}e^{-2x}\text{。}$$（8 分）

故所求方程的通解为

$$y=c_1+c_2e^{-x}+x+\frac{1}{2}e^{-2x}\text{。}$$（10 分）

解法二：$\left(e^xy'\right)'=e^x\left(y''+y'\right)=e^x\left(1+e^{-2x}\right)=e^x+e^{-x}$，（5 分）

所以 $$e^xy'=\int\left(e^x+e^{-x}\right)dx=e^x-e^{-x}-c_1,$$

即 $$y'=1-e^{-2x}-c_1e^{-x}\text{。}$$（8 分)

从而 $$y=\int\left(1-e^{-2x}-c_1e^{-x}\right)dx=x+\frac{1}{2}e^{-2x}+c_1e^{-x}+c_2\text{。}$$（10 分）

得分	

四、（10 分）设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，偏导数存在，但不可微。

证明：对任意的 $x\neq 0,\ y\neq 0$，有：$\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$。又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}y=0$，于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{x^2+y^2}\times y=0=f(0,0),$$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续。（3 分）

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(\Delta x,0\right)-f\left(0,0\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0\ ,$$

从而偏导数 $f'_x(0,0)$， $f'_y(0,0)$ 均存在。 （6 分）

因

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\times\Delta x-f'_y(0,0)\times\Delta y}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2\Delta x}{\left[(\Delta x)^2+(\Delta x)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\neq 0\ ,$$

所以，函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。 （10 分）

得分	

五、（10 分）求曲面 $z=x^2+2y^2$ 上距离平面 $2x+8y-z=20$ 最近的点，并求最近距离。

解法一：设曲面 $z=x^2+2y^2$ 上所求的点为 $P(x,y,z)$，点 P 到平面 $2x+8y-z=20$ 的距离为

$$d=\frac{|2x+8y-z-20|}{\sqrt{69}}\text{。}$$ （2 分）

设 $L(x,y,z,\lambda)=(2x+8y-z-20)^2+\lambda\left(x^2+2y^2-z\right)$。 （4 分）

$$\begin{cases}L_x=4(2x+8y-z-20)+2\lambda x=0\\ L_y=16(2x+8y-z-20)+4\lambda y=0\\ L_z=-2(2x+8y-z-20)-\lambda=0\\ L_\lambda=x^2+2y^2-z=0\end{cases}\text{。}$$ （6 分）

由前三个方程解得： $x=1$， $y=2$。代入第四个方程，得： $z=9$。 （8 分）

故所求 P 点的坐标为 $(1,2,9)$，此时 P 点到所给平面的距离为 $\frac{11}{\sqrt{69}}$。 （10 分）

得分	

六、（10 分）已知 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，利用变换 $\begin{cases}u=x-2y\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 变换成以 u， v 为自变量的方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a， b。

解 ： $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\times\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}。$$

（3 分）

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(-2)\times\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}\right)+a\times\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\times\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}。$$ （6 分）

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(1+4b)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(2-4ab)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(1+a^2b)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}。$$

由题意知

$$\begin{cases}1+4b=0\\1+a^2b=0\\2-4ab\neq 0\end{cases},$$

由前两个方程解得：$\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$，或 $\begin{cases}a=2\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$。

（8 分）

经检验知$\begin{cases}a=-2\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$不满足第三个方程，舍去。而$\begin{cases}a=2\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$满足第三个方程，即为所求。

（10 分）

得分	

七、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+2)}$ 的收敛域及和函数。

解 ： $R^2=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+3)}}=1$， $R=1$。 （2 分）

因级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm1)^{2n}}{n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$收敛，故收敛域为$[-1,1]$。 （4 分）

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+2)}$。

当 $0<|x|<1$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)x^{2n}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\frac{1}{x^{4}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2(n+2)}}{n+2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-\frac{1}{x^{4}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}-x^{2}-\frac{x^{4}}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^{4}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}+\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{4}$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^{4}}\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(-x^{2}\right)^{n}}{n}+\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^{4}}\right)\ln(1-x^{2})+\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{4}.$$

（8 分）

又 $S(0)=0$，

$$S(\pm1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{3}{4},$$

所以，

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x^{4}}\right)\ln(1-x^{2})+\frac{1}{2x^{2}}+\frac{1}{4}, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{4}, & x=\pm1\end{cases}.$$

（10 分）

姓名：__________

学号：__________

学院（系）：_______

_____ 级_____ 班

教师：__________

大 连 理 工 大 学

课程名称： 高数 微积分，工数（二） 试卷：A 考试形式： 闭卷

授课院（系）：数学科学学院 考试日期： 2016 年 5 月 6 日 试卷共 6 页

	一	二	三	四	五	六	七				总分
标准分	30	20	10	10	10	10	10				100
得 分											

得分	

一、填空题 (每题 6 分,共 30 分)

1. 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + y, y + z) = 1$ 所确定，其中 F 具有连续二阶偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \underline{-\dfrac{F_1'}{F_2'}}$ ，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \underline{-\dfrac{F_1'}{F_2'} - 1}$

2. 曲 面 $z - (xy)^z + 2xy = 3$ 在 点 $(1, 2, 0)$ 处 切 平 面 方 程 为 $\underline{4x + 2y + (1 - \ln 2)z = 8}$，

法线方程为 $\underline{\dfrac{x - 1}{4} = \dfrac{y - 2}{2} = \dfrac{z}{1 - \ln 2}}$。

3. 函数 $f(x, y) = 4(x - y) - x^2 - y^2$ 的极大值 $\underline{8}$ ；设函数

$f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{1 + \ln(1 + xy)}$，则 $df(0, 0) = \underline{2dx + 3dy}$ 。

4. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n + 1}}{n^{\alpha}}$ 收敛，则 α 应满足 $\alpha > \dfrac{3}{2}$ ；级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} = \underline{e^2 - 1}$

5. 函数 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$ 在点 $x = -1$ 处的幂级数为

$\underline{\dfrac{1}{3} \sum\limits_{n=0}^{\infty} [(-1)^n 2 - \dfrac{1}{2^{n+1}}](x + 1)^n}$，收敛域为 $-2 < x < 0$

得分	

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1．设可微函数 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的梯度向量为 g，$l=(0,2,2)$ 为一常向量，且 $g \bullet l = 1$，则 $f(x,y,z)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处沿 l 方向的方向导数等于（ B ）

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　　（C）$-2\sqrt{2}$　　（D）$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

2．设 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)+2x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处（D ）

（A）不连续　　（B）连续但两个偏导数不存在

（C）两个偏导数存在但不可微　　（D）可微

3．设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则（ C ）

（A）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛　　（B）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

（C）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛　　（D）当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

4. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则该幂级数（D）

（A）收敛半径为 2　　（B）收敛区间为 $(0,2]$

（C） 收敛域为 $(0,2]$　　（D）收敛区间为 $(0,2)$

5．设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ x-1, & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$　$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \ (-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，则 $s(-\dfrac{5}{2})$ 等于（ A ）

（A）$-\dfrac{1}{2}$　　（B）$\dfrac{1}{2}$　　（C）$-\dfrac{3}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{2}$

（高数）

得分	

三、（10 分）在右手直角坐标系 Oxyz 之下，给定下面两条直线

$$L_1:\ \frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}, \qquad L_2:\ \frac{x}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}。$$

1、（2 分）证明直线 L_1 与 L_2 是异面直线；

2、（2 分）求过直线 L_1 且与 L_2 平行的平面 F 的方程；

3、（4 分）求过直线 L_1、L_2 且与 F 垂直的平面 F_1 、F_2 的方程；

4、（2 分）求平面 F_1 、F_2 的交线 L 的标准方程。

解：1、记 $P_1(-1,0,1)$，$P_2(0,-1,2)$，$\vec{a}_1=(1,1,2)$，$\vec{a}_2=(1,3,4)$。则

$$\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 4\end{vmatrix}=2>0$$ 。故直线 L_1 与 L_2 是异面直线。 <—2 分；

2、过直线 L_1 的平面束方程为 F_t：

$$x-y+1+t(2y-z+1)=x+(2t-1)y-tz+(t+1)=0 。$$

其法向量为 $\vec{n}_t=(1,2t-1,-t)$。F_t 与 L_2 平行当且仅当 $\vec{n}_t\ \vec{a}_2=0$。解得 $t=1$。于是有

F：$x+y-z+2=0$。其法向量为 $\vec{n}=(1,1,-1)$。 <—2 分；

3、过直线 L_2 的平面束方程为

$$G_s:\ 3x-y-1+s(4x-z+2)=(4s+3)x-y-sz+(2s-1)=0 。$$

其法向量为 $\vec{m}_s=(4s+3,-1,-s)$。

于是 G_s 垂直 F 当且仅当 $\vec{m}_s\ \vec{n}=0$。解得 $s=-\dfrac{2}{5}$。故 F_2：$7x-5y+2z-9=0$。<—2 分；

同理 F_t 垂直 F 当且仅当 $\vec{n}_t\ \vec{n}=0$。解得 $t=0$。故 F_1：$x-y+1=0$。 <—2 分；

4、F_1 与 F_2 的交线 L 的方程可化简为 L：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-7}{-1}$。 <—2 分；

（微积分）

得分	

三、（10 分）已知 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$ ，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$， $\dfrac{\partial v}{\partial x}$

解：解 ：等式两端对 x 求导，则得

$$(e^u+\sin v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\cos v\frac{\partial v}{\partial x}=1$$ （3 分）

$$(e^{u}-\cos v)\frac{\partial u}{\partial x}+u\sin v\frac{\partial v}{\partial x}=0$$ （6 分）

从而 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{e^{u}(\sin v-\cos v)+1}$$ （8 分）

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\sin v-e^{u}}{u[e^{u}(\sin v-\cos v)+1]}$$ （10 分）

（工科数学分析基础）

得分	

三、（**10 分**）设$f(x)$为连续函数，且满足$f(x)=\sin x-\int_0^x t\,f(x-t)\mathrm{d}t$，求函数$f(x)$。

解： 令$u=x-t$，则$\int_0^x t\,f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-u)\,f(u)\mathrm{d}u$ 故

$$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-u)\,f(u)\mathrm{d}u$$

-------- （2 分）

两端关于x求导

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

两端再关于x求导

$$f''(x)=-\sin x-f(x)$$

即

$$f''(x)+f(x)=-\sin x$$

-------- （5 分）

该微分方程的通解为

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

-------- （8 分）

又由$f(0)=0,f'(0)=1$，代入上式得

$$c_1=0,c_2=\frac{1}{2}$$

故

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$$

-------- （10 分）

得分	

四、（10 分） 在右手直角坐标系 Oxyz 之下，给定曲线

$$C:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^2+y^2=2y. \end{cases}$$

求其在点 $P(1,1,\sqrt{2})$ 处的切线方程和法平面方程

解：曲线的方程可化简为 C：$\begin{cases} z^2-2(2-y)=0, & (1) \\ x^2-y(2-y)=0. & (2) \end{cases}$

可见 x 和 z 都可视为 y 的函数。 <——2 分；

(1) 对 y 求导数得：$zz'+1=0$。(2)对 y 求导数得：$xx'+y-1=0$。 <——2 分；

故在 $P(1,1,\sqrt{2})$ 点处，$x'=0$，$y'=1$，$z'=-\frac{1}{\sqrt{2}}$。

即 C 在 $P(1,1,\sqrt{2})$ 处的切向量为 $\vec{a}=(0,\sqrt{2},-1)$。 <——2 分；

于是其切线方程为 L_P：$\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z-\sqrt{2}}{-1}$。 <——2 分；

法平面方程为 F_P：$\sqrt{2}(y-1)-(z-\sqrt{2})=\sqrt{2}y-z=0$。 <——2 分；

得分	

五、（10 分） 求椭球面 $x^2+2y^2+4z^2=1$ 与平面 $x+y+z=\sqrt{7}$ 之间的最短距离。

解 ： 设 $M(x,y,z)$ 为椭球面上任一点，则 M 到已知平面的距离

$$d=\frac{|x+y+z-\sqrt{7}|}{\sqrt{3}}$$

-------- （3 分）

令

$$F(x,y,z,\lambda)=\left(x+y+z-\sqrt{7}\right)^2+\lambda(x^2+2y^2+4z^2-1)$$

-------- （5 分）

解方程组

$$\begin{cases} F_x=2\left(x+y+z-\sqrt{7}\right)+2\lambda x=0 \\ F_y=2\left(x+y+z-\sqrt{7}\right)+4\lambda y=0 \\ F_z=2\left(x+y+z-\sqrt{7}\right)+8\lambda z=0 \\ F_\lambda=x^2+2y^2+4z^2-1=0 \end{cases}$$

可得两个点

$$M_1\left(\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) \text{ 和 } M_2\left(-\frac{2}{\sqrt{7}},-\frac{1}{\sqrt{7}},-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)$$

-------- （8 分）

于是距离

$$d_1=\frac{\sqrt{21}}{6} \text{ 和 } d_2=\frac{\sqrt{21}}{2}$$

故最短距离为$d_1=\frac{\sqrt{21}}{6}$。 ------- （10 分）

得分	

六、**（10 分）**求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$的收敛域与和函数，并求数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)\cdot 3^n}\text{的和}$$

解： 由于幂级数缺项，令一般项为$u_n(x)$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)^2-(n+1)+1}{2n^2-n+1}\right|\left|\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}\right||x|^2=|x|^2$$

由比值判别法，当$|x|<1$时，幂级数收敛；当$|x|>1$时，幂级数发散；

-------- （3 分）

当$|x|=1$时，由级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$发散，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}$绝对收敛，故原级数发散。

因此，该幂级数的收敛域为$(-1,1)$。 -------- （5 分）

令幂级数的和函数为$S(x)$，即

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+S_1(x),\qquad x\in(-1,1)$$

$$=\frac{x^2}{1+x^2}+S_1(x)$$

其中

$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},\qquad x\in(-1,1)$$

两端关于x求导，得

$$S_1'(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1},\qquad x\in(-1,1)$$

两端再关于x求导，得

$$S_1''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2},\qquad x\in(-1,1)$$

由$S_1(0)=0,S_1'(0)=0$，故

$$S_1'(x)=\int_0^x\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x=2\arctan x$$

再次积分，得

$$S_1(x)=2\int_0^x\arctan x\,\mathrm{d}x=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

故幂级数的和函数为

$$S(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2),\qquad x\in(-1,1)$$

-------- （9 分）

令$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$，则

$$S_1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)\cdot 3^n}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\ln\frac{4}{3}$$

-------- （10 分）

得分	

七、（10 分）给定函数 $f(x)=1-|x-1|,\quad 0\le x\le 2$ 。将其展开成正弦级数。并求级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$ 的值。

解：

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

$$=\int_0^1 x\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx+\int_1^2(2-x)\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)dx$$ <——————————2 分；

$$=-\frac{2}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$ <——————————2 分；

$$-\frac{2}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$ <——————————2 分；

于是，$b_{2k}=0$，$b_{2k-1}=(-1)^{k-1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}$ 。

从而 $f(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}x$ 。<————————2 分；

取 x=1，得：$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ 。 <——————————2 分；

大　连　理　工　大　学

：　　　高数　微积分，工数（二）　试卷：A　考试形式：闭卷

考试日期： 2015 年 5 月 7 日 试卷共 6 页

A 卷

一、填空题 (共 30 分，每填对一个空得 3 分)

1、设 $z=(1+x^2)^y$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{\ 2\ }$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=$ $\underline{\ 2\ln 2\ }$.

2、设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x+y-z=ze^z$ 确定，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\dfrac{1}{1+(1+z)e^z}}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ $\underline{\dfrac{-(2+z)e^z}{(1+(1+z)e^z)^3}}$.

3、设函数 $z=z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=(x-1)\mathrm{d}x+(y+1)\mathrm{d}y$，$z(0,0)=1$．则

$z(x,y)=$ $\underline{\dfrac{(x-1)^2}{2}+\dfrac{(y+1)^2}{2}}$，$z(x,y)$ 的极值等于 $\underline{\ 0\ }$.

4、设曲线 L 的参数方程为 $x=t,y=t^2,z=t^3$，则 L 在 $t=1$ 对应点处的切线方程

为 $\underline{\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{3}}$，法平面方程为 $\underline{(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0}$.

5、函数 $\cos^2 x$ 关于 x 的幂级数为 $\underline{1+\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}}$；收敛域为 $\underline{(-\infty,+\infty)}$.

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分) （注意：各模块的第 5 题不同）

1、以下四个函数中，在点 $O(0,0)$ 处连续的是 $\underline{\quad C\quad}$.

A． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

B． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；

C． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$；　　D． $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

2、设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处条件收敛，则该级数在 $x=2$ 处____**B**____.

A．条件收敛；　　B．绝对收敛；

C．发散；　　D．由已知条件不能确定敛散性.

3、以下四个数项级数中，发散的是____**D**____.

A． $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{1.001}}$；　　B． $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\frac{1}{n})$；

C． $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n})$；　　D． $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

4、幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot(5^n+(-3)^n)}$ 的收敛域为____**B**____.

A． $(-5,5)$；　　B． $[-5,5)$；

C． $(-3,3)$；　　D． $[-3,3]$.

5、（高数、微积分）以下命题中正确的是____**B**____.

A．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.　　B．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$ 收敛.

C．若 $u_n>0$，且 $u_n=\mathrm{o}(\frac{1}{n})\ \ (n\to\infty)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

D．若 $u_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}u_n\sqrt{n}=1$，则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

5、（工数）微分方程 $y''-3y'+2y=e^{-x}+x$ 的特解形式为____**A**____.

A． $y^*=ae^{-x}+bx+c$；　　B． $y^*=ae^{-x}+bx^2$；

C． $y^*=axe^{-x}+bx+c$；　　D． $y^*=axe^{-x}+bx$.

三、（10 分）　（各模块不同）

（高数）设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0\\x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 Π 上，且 Π 与曲面 $S:z=x^2+y^2$

相切于点 $P(1,-2,5)$，求常数 a 和 b.

解 方法一 S 在 P 处的法向量 $n=\{2x,2y,-1\}|_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\}$，

所以 $\Pi:2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $\Pi:2x-4y-z-5=0$. ------4 分

L 的参数方程：$x=-y-b, y=y, z=x+ay-3=(a-1)y-b-3$，

代入 Π 的方程，得 $2(-y-b)-4y-(a-1)y+b+3-5=0$，即 $(a+5)y+b+2=0$，

所以 $a=-5$，$b=-2$. -----10 分

方法二 （利用过 L 的平面束方程）Π 的方程：$x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0$（$\lambda$ 待定）

即 $(1+\lambda)x+(a+\lambda)y-z-3+\lambda b=0$ ------4 分

S 在 P 处的法向量 $n=\{2x,2y,-1\}|_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\}$，由题意 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{a+\lambda}{-4}=\dfrac{-1}{-1}$，

解得 $\lambda=1,a=-5$；又因 P 在 Π 上，所以 $2\times1-4\times(-2)-5-3+b=0$，$b=-2$. ------10 分

（工数）设 $f(u)$ 二阶连续可微，$z=f(e^x\sin y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$，求 $f(u)$.

解 $z=f(u)$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot e^x\sin y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot e^x\cos y$； --------2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot e^{2x}\sin^2 y+f'(u)\cdot e^x\sin y；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot e^{2x}\cos^2 y-f'(u)\cdot e^x\sin y；$$ ---------6 分

$f''(u)=f(u)$； $f(u)=c_1e^{-u}+c_2e^u$. ---------10 分

（微积分）设 $g(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=g(xy,\dfrac{y}{x})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yg_1'-\dfrac{y}{x^2}g_2'$， ---------4 分

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=g_1'+y[xg_{11}''+\dfrac{1}{x}g_{12}'']-\dfrac{1}{x^2}g_2'-\dfrac{y}{x^2}[xg_{21}''+\dfrac{1}{x}g_{22}'']$ ---------10 分

$$=g_1'-\frac{1}{x^2}g_2'+xyg_{11}''-\frac{y}{x^3}g_{22}''.$$

四、（10 分）求函数 $u=x+2y-2z$ **在** $V:x^2+y^2+z^2\le 5$ **上的最大值和最小值．**

解 u 在 V 的内部没有驻点，因此，最大值和最小值都在 V 的边界上取得． **----------2 分**

设 $L(x,y,z,\lambda)=x+2y-2z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5)$， **----------4 分**

令 $\begin{cases} L_x'=1+2\lambda x=0 \\ L_x'=2+2\lambda y=0 \\ L_x'=-2+2\lambda z=0 \\ L_\lambda'=x^2+y^2+z^2-5=0 \end{cases}$， 由前三个方程得 $2x=y=-z$， **----------8 分**

代入最后一个方程，得可疑点 $P_1(\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{3},\frac{-2\sqrt5}{3})$ 和 $P_2(\frac{-\sqrt5}{3},\frac{-2\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{3})$，

$z(\frac{\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{3},\frac{-2\sqrt5}{3})=3\sqrt5$ 为最大值， $z(\frac{-\sqrt5}{3},\frac{-2\sqrt5}{3},\frac{2\sqrt5}{3})=-3\sqrt5$ 为最小值． **---------10 分**

五、（10 分）求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}$ **的收敛域、和函数** $S(x)$**．**

解 收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{n+1})=2$，收敛区间 $(-2,2)$； **---------3 分**

$x=\pm2$ 时，对应的数列 $\left\{\frac{n}{2}\right\}$ 和 $\left\{(-1)^{n-1}\frac{n}{2}\right\}$ 都不以零为极限，所以 $x=\pm2$ 都是发散点；

所以收敛域为 $(-2,2)$． **---------5 分**

又由 $\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(t^n)'=(\sum_{n=1}^{\infty}t^n)'=(\frac{t}{1-t})'=\frac{1}{(1-t)^2}\quad(t\in(-1,1))$，

得 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{n-1}=\frac12\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac12\cdot\frac{1}{(1-\frac{x}{2})^2}=\frac{2}{(2-x)^2}$， $x\in(-2,2)$． **---------10 分**

六、（10 分）设定义在 $[0,\pi]$ **上的函数** $f(x)=x$**．** **（1）将** $f(x)$ **展成余弦级数；**

（2）求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ **之和；** **（3）求** $f(x)$ **的正弦级数的和函数** $S(x)$**．**

解 **（1）** $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\pi$，

$n\geq 1$时，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi}((-1)^n-1)=\begin{cases}0, & n偶\\ \frac{-4}{n^2\pi}, & n奇\end{cases}$，

经过偶延拓、周期延拓之后所得的函数在$[-\pi,\pi]$上连续、有有限个单调区间，因此由

Dirichlet 定理知余弦级数在$[0,\pi]$上处处收敛于$f(x)$，即

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x\quad(x\in[0,\pi])$$ **---------6 分**

（**2**）在上式两端令$x=0$，得$0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. **---------8 分**

（**3**）对经过奇延拓和周期延拓的函数验证 **Dirichlet** 定理的条件，知正弦级数的和函数

$$S(x)=\begin{cases}x, & 0\leq x<\pi\\ 0, & x=\pi\end{cases}$$ **---------10 分**

七、（**10 分**）设$f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论$f(x,y)$在点$(0,0)$的连续性、可偏导性与可微性.

解 （**1**）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，$f(x,y)$在点$(0,0)$连续. **---------2 分**

（**2**）$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{0}{x}=0$，

$f'_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\arctan\frac{1}{|y|}=\frac{\pi}{2}$， **---------4 分**

$f(x,y)$在点$(0,0)$可偏导.

（**3**）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\pi}{2})=0$，$f(x,y)$在点$(0,0)$可微. ——————————10 分

学号：__________

课程名称： 高数 微积分，工数（二）试卷：A 考试形式： 闭卷

学院（系）：_______ 授课院(系)：数学科学学院 考试日期： 2014年4月24日 试卷共 6 页

_____ 级_____ 班

教师：__________

	一	二	三	四	五	六	七				总分
标准分	30	20	10	10	10	10	10				100
得 分											

得分	

一、填空题 (每题6分,共30分)

1. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 (1,1,1) 处的切平面方程 $(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$，

法线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$。

2. 设函数 $u=x^2+y^2+z^2$，则在点 $P(1,2,2)$ 处，函数的梯度 $gradu\big|_P=$ $(2,4,4)$ __，

函数减少最快的方向 $\vec{l}=(-2,-4,-4)$。

3. 设 $z=f(x,xy)$，其中 f 有连续二阶偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\cdot x+f_2'+f_{22}''\cdot xy$。

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$f(x)=\begin{cases}2, & -\pi\le x<0\\ x^2, & 0\le x<\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的 Fourier（傅里叶）级数在 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=100\pi$

处分别收敛于 $\frac{\pi^2}{4}$ 和1

5. 将函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 在点 $x=0$ 处展开成 x 的幂级数为

$$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n*2^n}$$，收敛域为 $-2<x\le 2$。

得分	

二、单项选择题 (每题 4 分,共 20 分)

1．在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（ B ）

（A）只有 1 条　（B）只有 2 条　（C）至少有 3 条　（D）不存在

2．函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $F(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x})=0$ 确定，其中 F 有连续偏导数，且 $F_2'\ne 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$（B　）

（A）x　（B）z　（C）$-x$　（D）$-z$

3．以下命题中正确的是（ C　）

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{\ 2}$ 收敛；

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；(D) 若 $u_n\le v_n, (n=1,2,...)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

4．设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 收敛域是（C　）

（A）$(-1,1]$　（B）$[-1,1)$（C）$[0,2)$　（D）$(0,2]$

5．设 $f(x,\ y)$ 与 $\varphi(x,\ y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y'(x,\ y)\ne 0$，已知 $(x_0,\ y_0)$ 是 $f(x,\ y)$ 在约束条件 $\varphi(x,\ y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（ D　）

（A）若 $f_x'(x_0,\ y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,\ y_0)=0$（B）若 $f_x'(x_0,\ y_0)=0$，则 $f_y'(x_0,\ y_0)\ne 0$

（C）若 $f_x'(x_0,\ y_0)\ne 0$，则 $f_y'(x_0,\ y_0)=0$（D）若 $f_x'(x_0,\ y_0)\ne 0$，则 $f_y'(x_0,\ y_0)\ne 0$

得分	

三、**（10 分）**求函数 $z=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值。

解：$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x(2+y^2)=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^2y+\ln y+1=0 \end{cases}$，解得驻点$(0,e^{-1})$ （4 分）

$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2(1+y^2), B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4xy, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^2+\dfrac{1}{y}$

由于$AC-B^2>0$，又$A>0$，故$z=f(0,e^{-1})=-e^{-1}$为极小值。 （10 分）

（高数）

得分	

四、（10 分）已知平面$\pi: x-4y+2z+9=0$，直线 L：$\begin{cases} 2x-2y+z+9=0 \\ x-2y+2z+11=0 \end{cases}$，在平面$\pi$内，求通过直线 L 与平面$\pi$的交点，且与直线 L 垂直的直线方程。

解：直线 L 与平面π的交点为方程组 $\begin{cases} x-4y+2z+9=0 \\ 2x-2y+z+9=0 \\ x-2y+2z+11=0 \end{cases}$ 的解$\begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \\ z=-5 \end{cases}$。（3分）

所求直线的方向向量$\vec{s}\perp\vec{n}=(1,-4,2)$，且$\vec{s}\perp\vec{n}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=(-2,-3,-2)$

因此，$\vec{s}=\vec{n}\times\vec{n}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix}=(14,-2,-11)$。 (9 分)

故直线方程为$\dfrac{x+3}{14}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+5}{-11}$。 （10 分）

（微积分）

得分	

四、（10 分）判定级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})$的敛散性，是绝对收敛、条件收敛、还是发散？

解：因为$u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}})\sim\dfrac{1}{n}$，所以原级数不绝对收敛。 （4 分）

设$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})$，则 $y'=-\dfrac{1}{2x^{3/2}}\left(\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}})+\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)<0$，故$u_n$单调减，又显然

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，故原级数条件收敛.。（10 分）

（工科数学分析基础）

得分	

四、（10 分）求微分方程 $y'' - 4y' + 3y = xe^x$ 的通解。

解：特征方程 $r^2 - 4r + 3 = 0$，特征根 $r_1 = 1$， $r_2 = 3$，

齐次方程通解 $Y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$ （4 分）

特解形式 $y^*(x) = x^k \cdot Q_m(x) \cdot e^{\lambda x} = x(ax+b)e^x$ （6 分）

将 $y^*(x)$ 代入原方程并整理得：$-4ax + 2a - 2b = x$，所以有 $-4a = 1, 2a - 2b = 0$，解得 $a = b = -\frac{1}{4}$，

∴通解 $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + (-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x)e^x$。 （10 分）

得分	

五、（10 分）设函数 $f(x,y)$ 在点 $p_0(1,1)$ 处可微，方向 $\vec{l}_1 = (1,0)$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_1}\right|_{p_0} = 2\sqrt{2}$，方向 $\vec{l}_2 = (0,-1)$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}_2}\right|_{p_0} = \sqrt{2}$，方向 $\vec{l} = (1,1)$，求函数 $f(x,y)$ 在 p_0 点沿方向 $\vec{l}$ 的方向导数。

解：$\vec{l} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = (\cos\alpha, \cos\beta)$ （2 分）

$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 2\sqrt{2}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = -\sqrt{2}$ （6 分）

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}\right|_{p_0}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\Big|_{(1,1)}=2\sqrt{2}*\frac{1}{\sqrt{2}}+(-\sqrt{2})*\frac{1}{\sqrt{2}}=1$$ （10 分）

得分	

六、（10 分）设函数 $f(x,\ y)=(x+y)\varphi(x,y)$, 其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，

1、求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$；2、讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的可微性，若可微，求 $df(0,0)$。

解：（1）$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\varphi(x,0)-0}{x}=\varphi(0,0)$

同理：$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\varphi(0,0)$ （4 分）

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-(f_x(0,0)x+f_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x+y)(\varphi(x,y)-\varphi(0,0))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且 $df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$ 。

得分	

七、（10 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数。

解： $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}}{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}}\right|=1$ ， 在 $x=\pm1$ 时， 级数发散， 故收敛域 $(-1,1)$ 。

（4 分）

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=S_1(x)+\frac{2}{x}S_2(x)$$

$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$， $\int_0^x S_1(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$， $\therefore S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$

$S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$S'_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$， $\therefore S_2(x)=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$

$$\therefore S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} & ,x\neq 0\text{且}|x|<1\text{时}\\ 3 & ,x=0\text{时}\end{cases}$$ （10 分）

《高数 微积分 2，工科数学分析基础 2，》参考答案、评分标准

考试日期：2013 年 4 月 25 日

A 卷

一、填空题（共 30 分，每填对一空得 3 分）

1、函数$u=xy^2z^3$在点$P(1,1,1)$处沿方向 $(1,2,3)$ 有最大方向导数，最大方向导数等于 $\sqrt{14}$.

2、设$z=\arctan\frac{x-y}{x+y}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

3、函数$z=z(x,y)$由方程$x^2+y^3+z-e^z=0$确定；则 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{e^z-1}$， $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{3y^2}{e^z-1}$.

4、（微积分）设$(axy+y^2+3)\mathrm{d}x+(x^2+bxy-12)\mathrm{d}y$为二元函数$f(x,y)$的全微分，其中$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，则$a=\underline{\ 2\ }$；$b=\underline{\ 2\ }$.

4、（高数 工科数学分析基础）

微分方程$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$的通解为$\underline{\ y=ce^{x^2}\ }$；$x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=x\ \ (x>0)$的通解为$\underline{\ y=x\ln x+cx\ }$.

5、设函数$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中D由直线$y=0$，$x=1$

和$y=x$所围，则$\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\underline{\ \dfrac{1}{4}\ }$，$f(x,y)=\underline{\ xy+\dfrac{1}{4}\ }$.

二、单项选择题（共20分，每题4分）

1、设函数$z=f(x,y)$的全微分$\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，则点$O(0,0)$ ___**(D)**___.

(A) 不是$f(x,y)$的连续点； **(B)** 不是$f(x,y)$的极值点；

(C) 是$f(x,y)$的极大值点； **(D)** 是$f(x,y)$的极小值点.

2、设函数$f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则___**(B)**___.

(A) $f_x'(0,0)$存在，$f_y'(0,0)$不存在； **(B)** $f_x'(0,0)$不存在，$f_y'(0,0)$存在；

(C) $f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都存在； **(D)** $f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都不存在.

3、设积分域D：$x^2+y^2\le 1$，$I_1=\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_2=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

$I_3=\iint\limits_D \sin(x^4+y^4)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则___**(B)**___.

(A) $I_1>I_2>I_3$； **(B)** $I_1>I_3>I_2$；

(C) $I_2>I_1>I_3$； **(D)** $I_2>I_3>I_1$.

4、设函数$f(u)$连续，$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2y\right\}$，则$\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等于___**(D)**___.

(A) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$； **(B)** $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\,\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r$； **(D)** $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cdot f(r^2\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r$.

5、函数$f(x,y)$在点$O(0,0)$处可微的一个充分条件是___**(D)**___.

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)$；

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$；

(C) $\lim\limits_{x\to 0} f'_x(x,0)=f'_x(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to 0} f'_y(0,y)=f'_y(0,0)$；

(D) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

（微积分）

三、(10 分) 计算二重积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \dfrac{y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x$.

解 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{y}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}y$ **-----6 分**

$=\dfrac{1}{2}\int_0^1 (\ln(1+2x^2)-\ln(1+x^2))\mathrm{d}x$ **-----8 分**

$=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\arctan\sqrt{2}-\dfrac{\pi}{4}$ **-----10 分**

（高数 工科数学分析基础）

三、(10 分) 求微分方程 $y''-y=(3x+4)e^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^2-1=0$， 特征根 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$； **------2 分**

对应的齐次方程的通解 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x$ **------5 分**

设原方程的特解 $y^*=(ax+b)e^{2x}$ 并代入原方程，解得 $y^*=xe^{2x}$ **------9 分**

原方程的通解 $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+xe^{2x}$ **-----10 分**

四、(10 分) 求曲线 L：$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $P(1,-2,1)$ 处的切线和法平面方程.

解 对 x 求导，得 $\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=0\\1+y'+z'=0\end{cases}$

在点 $P(1,-2,1)$ 处，$\begin{cases}-2y'+z'=-1\\y'+z'=-1\end{cases}$，得 $y'=0$， $z'=-1$ **------6 分**

切线方程： $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$ **-----8 分**

法平面方程： $x-z=0$ **-----10 分**

五、（10 分）计算二重积分 $I=\iint\limits_D (3x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D： $x^2+y^2\le 1$．

解 $I=\iint\limits_D (9x^2+y^2+6xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (9x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （奇偶性+对称性） **-------2 分**

$=5\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （轮换对称性） **-------4 分**

$=5\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{5}{2}\pi$ **------10 分**

六、（10 分）在曲面 S： $2x^2+y^2+z^2=1$ 上求距离平面 $2x+y-z=6$ 的最近点、最远点．

解 点 (x,y,z) 到平面的距离 $\frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{6}}$，

设 $L(x,y,z,\lambda)=(2x+y-z-6)^2+\lambda(2x^2+y^2+z^2-1)$ **------4 分**

令 $\begin{cases} L_x'=4(2x+y-z-6)+4x\lambda=0 \\ L_y'=2(2x+y-z-6)+2y\lambda=0 \\ L_z'=-2(2x+y-z-6)+2z\lambda=0 \\ L_\lambda'=2x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$ **------6 分**

解得 最近点 $P_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$，最远点 $P_2(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **-----10 分**

七、（10 分）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f(xy,\frac{x^2-y^2}{2})$，

求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$．

解 $\frac{\partial g}{\partial x}=yf_1'+xf_2'$， $\frac{\partial g}{\partial y}=xf_1'-yf_2'$， **-----4 分**

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y(yf_{11}''+xf_{12}'')+f_2'+x(yf_{21}''+xf_{22}'')=f_2'+y^2f_{11}''+x^2f_{22}''+2xyf_{12}''$， **-----6 分**

$\frac{\partial g}{\partial y}=x(xf_{11}''-yf_{12}'')-f_2'-y(xf_{21}''-yf_{22}'')=-f_2'+x^2f_{11}''+y^2f_{22}''-2xyf_{12}''$， **-----8 分**

$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)(f_{11}''+f_{22}'')=x^2+y^2$ **------10 分**