大 连 理 工 大 学

姓 名:__________

学 号:__________

院 系:__________

_____ 级 _____ 班

教 师:__________

线　订　装

课 程 名 称: 微积分 2　试卷: A　考试形式: 闭卷

授课院(系): 数学科学学院　考试日期: 2019 年 5 月 14 日　试卷共 6 页

题 号	一	二	三	四	五	六	七				总 分
标准分	30	20	10	10	10	10	10				100
得 分											

得分	

一、 填空题 (每题 6 分, 共 30 分)

1. 设 $z = x^3 f(xy, \dfrac{y}{x})$, 且 f 具有二阶连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$ ____________________,
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ ______________________.

2. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to 1}} \left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^3 y}{x^2+y^2}} =$ __________, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n(n+1)}$ 的和为 __________.

3. 曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 处的切线方程为 ______________,
法平面方程为 __________________.

4. 函数 $u = \ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处的梯度 $\mathbf{grad}\, u|_A =$ ______________,
沿 A 点指向 $B(3,-2,2)$ 点方向的方向导数为 ______________.

5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x), & \dfrac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$, 而 $S(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x$, 其中
$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \ (n=0,1,2\cdots)$, 则 $S(-\dfrac{5}{2}) =$ ________, $S(9) =$ ________.

得分	

二、 单项选择题 (每题 4 分, 共 20 分)

1. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ (k 为常数) 的敛散性为( )

(A) 发散 (B) 敛散性与 k 有关

(C) 绝对收敛 (D) 条件收敛

2. 设 $z=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, 则该函数在 $(0,0)$ 点 ( )

(A) 不连续 (B) 连续但偏导数不存在

(C) 连续且偏导数存在但不可微 (D) 可微

3. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 ( )

(A) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

(C) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

(D) $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$

4. 设有命题

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}a_n$ 收敛.

(2) 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1\ (n=1,2\cdots)$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 同敛散.

(4) 若 $a_n\le b_n\le c_n\ (n=1,2\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

则上述命题中正确的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(3^n+(-2)^n)}$ 的收敛域为 ( )

(A) $[-3,3)$ (B) $(-3,3]$ (C) $(-2,2)$ (D) $[-2,2]$

得分	

三、 (10分) 设 $z=f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^k}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 其中 $k\geq 0$, k 为何值时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微, k 为何值时, $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微?

得分	

四、 (10分) 求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$, x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值和最小值.

得分	

五、 (10分) 设函数 $z = z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 变换 $\begin{cases} u = x + ay \\ v = x + by \end{cases}$ 可把方程 $3\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a, b.

得分	

六、 (10分) 将函数 $f(x)=x^2,\ x\in[-1,1]$ 展开为以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 的和.

得分	

七、 (10分) 将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.