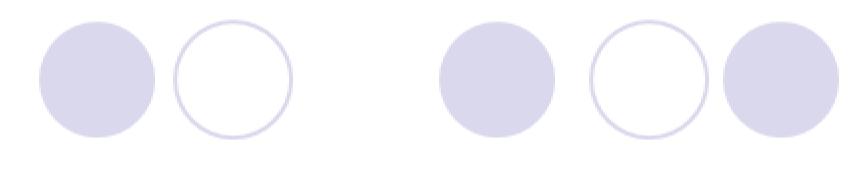


离散数学

大连理工大学软件学院



离散数学

第一章 命题逻辑

回顾——命题与命题逻辑联结词

- 命题: 一个具有真假意义的陈述句被称为一个命题。
 - >所谓命题,是指具有非真必假的<mark>陈述句</mark>。
 - ➤ 而疑问句、祈使句和感叹句等因都不能判断其真假, 故都不是命题。
- 命题的真值及表示
 - \triangleright 命题用大写的英文字母,如P,Q,R ... 表示。
 - P: 今天是星期二。
 - ▶命题仅有两种可能的真值—真和假,且二者只能居其一。
 - ▶如果一个命题的真值是真,则用1或(Ture)来表示;
 - ▶如果一个命题的真值是假,则用0或(False)来表示。

逻辑联结词及其真值

- 原子命题
- 复合命题
 - 联接词
 - 逻辑否定 Negation
 - 逻辑合取 Conjunction
 - 析取 Disconjunction
 - 单条件 Conditional
 - 双条件 Double conditional
 - 异或 Exclusive or Xor
- 真值表 ¬∧∨→ ↔ ▽

P	Q	¬P	P∧Q	P∨Q	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \nabla Q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

1.2命题变元和合式公式

- 命题变元
 - 用**P**表示一个抽象的命题,而不是一个具体的命题时,称它为以表示任意命题命题变元
 - 不能确定真值
- 合式公式
 - 由命题变元、逻辑联接词及圆括号构成合式公式
- 合式公式递归定义
 - (1) 真值T和F是合式公式。
 - (2) 单个命题变元是合式公式。
 - (3) 如果A是合式公式,那么 $\neg A$ 是合式公式。
 - (4) 如果A和B均是合式公式,那么 $A \land B$ 、 $A \lor B$ 、 $A \to B$ 和 $A \leftrightarrow B$ 都是合式公式。
 - (5) 当且仅当有限次的应用(1)、(2)、(3)、(4)条规则由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。
 - 上面的定义成为递归定义法,(1)称为递归定义基础,(2)、(3)和(4)称为递归定义的归纳,(5)称为递归定义的界限。

1.2 命题变元和合式公式

• 判断下列字符串哪些是合式公式,哪些不是?

$$P, \neg P, P \land Q$$

$$(P \to Q) \to (\land Q)$$

$$(P \rightarrow Q)$$





1.2 命题变元和合式公式

几个概念:

命题 命题变元 命题公式——合式公式 命题公式 vs 命题

命题公式:没有真假意义

命题:有真假意义

真值表

- 设P是一个命题公式,P₁, P₂, ..., P_n是出现在P中的所有命题变元,对于这些命题变元真值指派的每一种可能的组合,都能唯一的确定P的真值。将这些真值列成一个表,称为命题公式P的真值表。
- 给出命题公式 $\neg((P \lor Q) \land P)$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$	$(P \lor Q) \land P)$	$\neg ((P \lor Q) \land P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

应用

- 系统规范性说明
 - 在说明硬件系统和软件系统时,将自然语言语句翻译成逻辑表达式是很重要的一部分。
 - 系统和软件工程师从自然语言中提取需求, 生成精确、无二义的规范说明,这些说明可 以作为系统开发的基础。

应用

- 确定下列系统规范性说明是否一致
 - "诊断消息存放在缓冲区中或是被重传"
 - "诊断消息没有存储在缓冲区中"
 - "如果诊断消息存储在缓冲区中,那么它被重传"

解:

- P: 诊断消息存储在缓冲区中
- Q: 诊断消息被重传
- 三个命题分别是 $P \lor Q$, ¬ P, $P \rightarrow Q$

P	Q	$P \lor Q$	$\neg P$	$P{\rightarrow}Q$
0	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1

逻辑难题

- 侦探调查了罪案的四位证人,从证人的话侦探得出的结论是:
 - ① 如果男管家说的是真话,那么厨师说的也是真话;
 - ② 厨师和园丁说的不可能都是真话;
 - ③ 园丁和杂役不可能都在说谎;
 - ④ 如果杂役说真话,那么厨师在说谎。
 - 能判定四个人分别在说谎还是说真话吗?
- 解: 首先假设
 - M: 男管家说真话
 - C: 厨师说真话
 - G: 园丁说真话
 - Z: 杂役说真话

- 翻译:
- $\widehat{1}$ $M \rightarrow C$
- \bigcirc $\neg (C \land G)$
- \bigcirc $G \lor Z$
- 4 $Z \rightarrow \neg C$

• 符号化并构造真值表:

M	C	\boldsymbol{G}	Z	$M{\rightarrow}C$	$\neg(C \land G)$	$G \lor Z$	$Z \rightarrow \neg C$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
•••							
1	1	1	1	1	0	1	0

• 定义:设A、B是两个命题公式, P_1 , P_2 ,…, P_n 是出现在A和B中的所有命题变元。如果对于 P_1 , P_2 ,…, P_n 的 2^n 个真值指派的每一组,公式A和B的真值相同,则称A和B等价。记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

- 判断公式等价方法:
 - ① 真值表法
 - ② 等价公式变换

真值表判定公式等价性

- 利用真值表证明公式等价性
 - 证明 $P \leftrightarrow Q$ 与 $P \land Q \lor \neg P \land \neg Q$ 是相互等价的。

\overline{P}	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

基本的等价公式

$$egin{aligned} E_1 & P \lor Q \Leftrightarrow Q \lor P \ E_2 & P \land Q \Leftrightarrow Q \land P \ E_3 & P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P \end{aligned}$$
 $egin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_1 & P \lor Q \Leftrightarrow Q \land P \ \end{pmatrix}$
 $\dot{\mathcal{E}}_2 & P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P \end{aligned}$
 $\dot{\mathcal{E}}_3 & P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$
 $\dot{\mathcal{E}}_4 & (P \lor Q) \lor R \Leftrightarrow P \lor (Q \lor R)$
 $\dot{\mathcal{E}}_5 & (P \land Q) \land R \Leftrightarrow P \land (Q \land R) \ \end{pmatrix}$
 $\dot{\mathcal{E}}_6 & (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \end{aligned}$
 $\dot{\mathcal{E}}_6 & (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

$$E_{7}$$
 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ E_{8} $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ 分配律 E_{9} $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

基本的等价公式

基本的等价公式

$$E_{21}$$
 $P \wedge F \Leftrightarrow F$ 零律 E_{22} $P \vee T \Leftrightarrow T$

$$E_{24}$$
 $P \leftrightarrow T \Leftrightarrow P$

$$E_{25}$$
 $P \leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg P$

$$E_{26} \quad P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$$

$$E_{27}$$
 $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

$$E_{28}$$
 $P \land Q \rightarrow R \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ 输出律

$$E_{29}$$
 $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$ 吸收律 E_{30} $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

- 下面我们给出子公式,及关于公式等价的一个定理
- 定义: 设A是一个公式, A'是A的一部分, 且A'也是一个命题公式,则称A'是A的子公式。
- 例如 $Q \lor R$ 是 $P \land (Q \lor R)$ 的子公式
- 替换规则:设A'是公式A的子公式,B'是一命题公式 且 $A' \Leftrightarrow B'$,将A中的A'用B'来取代,则所得到的是一个新公式,记为B,且 $A \Leftrightarrow B$ 。
- \emptyset **1** $(P \land (Q \lor R)) \lor (P \land \neg Q \land \neg R) \Leftrightarrow P$

13 THE WAY

证明:

$$P \land \neg Q \lor Q$$

$$\Leftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$$

$$\Leftrightarrow$$
 $(Q \lor P) \land (Q \lor \neg Q)$

$$\Leftrightarrow$$
 $(Q \lor P) \land T$

$$\Leftrightarrow P \vee Q$$

$$E_{\scriptscriptstyle 1}$$

$$E_8$$
 分配率

$$E_{19}$$
和替换规则

$$E_{20}$$

Sale Bears

证明:

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (\neg P \lor Q) \to (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow \neg (\neg P \lor Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow (P \land \neg Q) \lor (Q \lor R)$$

$$\Leftrightarrow ((P \land \neg Q) \lor Q) \lor R$$

$$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee R$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$$

$$E_{27}$$
和替换规则

$$E_{27}$$

$$E_{12}$$
和替换规则

$$E_4$$

例1.4-4-1(a)和替换规则

- 将语句"情况并非如此,如果他不来,那么我也不去"化简。
 - P: 他来。
 - Q: 我去。
 - 符号化为: $\neg(\neg P \rightarrow \neg Q)$
 - 化简:

$$\neg(\neg P \rightarrow \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg\neg P \lor \neg Q)$$

$$\Leftrightarrow \neg (P \lor \neg Q)$$

$$\iff \neg P \land Q$$

- 化简后最终意思: 我去了,他没来。

• 如果电话号码数据库是打开的,那么监督程序被置于关闭状态,只要系统不在初态。

P: 电话号码数据库是打开的

Q: 监督程序被置于关闭状态

R: 系统不在初态

符号化

$$R \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

1.4重言式和永真蕴含式

- 一个命题公式若含有n个变元,则应有2n种组合, 所以证明两个命题公式的等价,当命题变元多 时使用真值表法是不现实的,只能采用上面的 等价变换的方法。
- 有两种特殊的命题公式值得一提,即不依赖变元的真值指派总是取值为T的公式(称为永真式),不依赖变元的真值指派总是取值为F的公式(称为永假式),其余则情况则为可满足的式子。

1.4重言式和永真蕴含式

• 重言式

- 给定一个命题公式,若无论对其中的命题变元作何种真值指派,其对应的真值永为T,则称该命题公式为重言式或永真式。

• 永假式

- 给定一个命题公式,若无论对其中的命题变元作何种真值指派,其对应的真值永为F,则称该命题公式为永假式或矛盾式。

• 可满足式

- 至少存在一组真值指派使命题公式取值为**T**的命题公式,称为可满足的。

对命题公式*P*✓*F*, *P*✓*F*, *P*✓*Q*做出真值
 表

<i>P</i>	$PV\!\!-\!\!F$	$P \wedge -F$
0	1	0
1	1	0
P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

重言式和永假式

- $P \lor \neg P \Leftrightarrow T$, $P \land \neg P \Leftrightarrow F$
- 永真式与永假式取决于公式本身的结构,不依赖变元的真值指派。
- 例如 $(P \land Q \lor R) \lor \neg (P \land Q \lor R)$ 就是一个永真式
- (P ∧Q ∨R) ∧ ¬(P ∧Q ∨R)就是一个永假式
- 永真式的性质: 若公式A是永真式,并且 P_1 , P_2 ,…, P_n 是出现于A中的变元,若用公式B代 换A中的原子变元 P_i (i=1,2,…,n),所得到的公式设 为A′,则A′也是永真式。(注意代换过程从左 向右要进行到底)。对非永真式,这条性质不一定成立。

带入规则

- 带入规则
 - 在一个重言式中,某个命题变元出现的每一处均 代以同一个公式后,所得到的新的公式仍是重言 式,这条规则称之为带入规则。
- 注意带入规则与替换规则的区别
 - 替换规则:
 - **设** $A \Leftrightarrow B$, 若在公式 C中出现 A 的地方替换以 B (不一定每一处都进行)而得到新公式 D,则 $C \Leftrightarrow D$

带入规则

- 应用代入规则和替换规则及已有的重言式可以证明新的重言式
- $P \land \neg P \leftrightarrow F$ 是重言式,那么用 $R \land Q$ 代P得到的式子仍然是重言式。

$$(R \land Q) \land \neg (R \land Q) \longleftrightarrow F$$

- E_{11} : $\neg (P \land Q) \Leftrightarrow \neg P \lor \neg Q$,用 $A \land B \pitchfork P$, $\neg A \land \neg B \pitchfork Q$
 - $\neg((A \land B) \land (\neg A \land \neg B)) \Leftrightarrow \neg(A \land B) \lor \neg(\neg A \land \neg B)$

- (1)重言式的否定是一个矛盾式,一个矛盾式的否定是重言式,所以只研究其中之一就可以了。
- (2)重言式的析取,合取,单条件,双条件都是重言式。于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。
- (3)由重言式可以产生许多有用的恒等式。

永真蕴含式

• 定义: 当且仅当 $A \rightarrow B$ 是一个永真式时, 称 A永真蕴含B,记作 $A \Rightarrow B$

- ・要证明A永真蕴含B,只需要证明A → B是一个永真式
 - ① 假定前件A是真,若能推出后件B必为真,则 $A \rightarrow B$ 永真,于是 $A \Rightarrow B$.
 - ② 假定后件B是假,若能推出前件A必为假,则 $A \rightarrow B$ 永真,于是 $A \Rightarrow B$.

永真蕴含式

试证明 $(P \to Q) \land (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

证明1: 假定 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 的真值为T,那么 $(P \to Q)$ 为T并且 $(Q \to R)$ 为T,分两种情况讨论:

- (1)若 P为 T,则 Q必 然 为 T,因 而 R为 T,于 是 有 $(P \rightarrow R)$ 为 T;
- (2)若 P为 F, 则 此 时 无 论 R为 T或 F, 都 有 $(P \rightarrow R)$ 为 T。

综上所述,假定前提 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 的真值为T,推出结论 $P \to R$ 的真值为T,蕴含式成立。

- 证明2: 假定 $P \to R$ 的真值为F,那么由定义可知P为T,并且R为F, 分两种情况讨论:
 - (1)若 Q为 T,则 $(Q \to R)$ 为 F,于 是 有 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 为 F;
 - (2)若 Q为 F,则 $(P \to Q)$ 为 F,于是有 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 为 F。综上所述,假定结论 $P \to R$ 的真值为 F,推出前提 $(P \to Q) \land (Q \to R)$ 的真值为 F,蕴含式成立。

蕴含式

- 定义: 假设 $H_1, ..., H_m, Q$ 是命题公式。如果 $(H_1 \land ... \land H_m) \Rightarrow Q$,则称 $H_1, ..., H_m$ 共同蕴 涵Q,并记作 $H_1, ..., H_m \Rightarrow Q$
- 定理: 如果 $H_1 \land ... \land H_m \land P \Rightarrow Q$,则 $H_1, ..., H_m \Rightarrow P \rightarrow Q$
 - 定理是显然的: $H_1 \wedge ... \wedge H_m \wedge P$ 为真,保证了P为真, $H_1 \wedge ... \wedge H_m \wedge P \Rightarrow Q$,保证了Q为真,于是有 $P \rightarrow Q$ 为真,得证。

常用永真蕴含式

$$\begin{bmatrix}
I_1 & P \land Q \Rightarrow P \\
I_2 & P \land Q \Rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_3 & P \Rightarrow P \lor Q \\
I_4 & Q \Rightarrow P \lor Q
\end{bmatrix}$$
附加式
$$\begin{bmatrix}
I_5 & \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_6 & Q \Rightarrow P \rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_7 & \neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_9 & \neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_9 & \neg P, P \lor Q \Rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{10} & P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{11} & \neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{11} & \neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{12} & P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{12} & P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{13} & P \lor Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{14} & P \rightarrow Q \Rightarrow R \lor P \rightarrow R \lor Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{15} & P \rightarrow Q \Rightarrow R \land P \rightarrow R \land Q
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
I_{16} & P, Q \Rightarrow P \land Q
\end{bmatrix}$$

等价式和蕴含式的关系

- 设P和Q是命题公式, $P \leftrightarrow Q$ 的充分必要条件是 $P \rightarrow Q$ 并且 $Q \rightarrow P$
- 设 $A \setminus B \setminus C$ 是公式且有 $A \Rightarrow B , B \Rightarrow C , 则<math>A \Rightarrow C$

• 设A, B, C是公式,若有 $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow B \land C$

全功能联结词集合

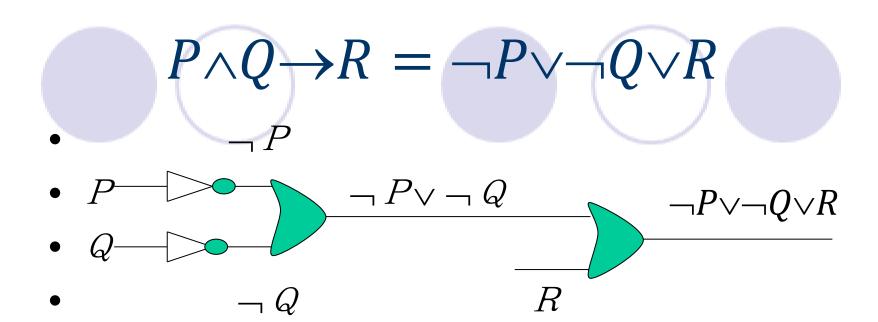
- 前面我们已经学习了6个逻辑联结词: ¬,∧,∨,→,↔,▽
- 是不是这些逻辑联结词都是必不可少的呢?
- 在前面介绍的等价公式中我们已经发现,有些逻辑联结词是可以被其它逻辑联结词代替的:
- 例如: $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \lor Q$ $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ $P \lor Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \land \neg Q)$ $P \land Q \Leftrightarrow \neg (\neg P \lor \neg Q)$
- 从上面的讨论我们可以看出逻辑联结词集合{¬,∧,∨}是全功能的,但不是最小的。
- 逻辑联结词全功能最小完备集是指用该集合中的逻辑联结词能表示所有的命题公式,并且删除一个至少有一个公式不能被表示。例如: {¬, ^}和{¬, '} 均是最小功能完备集

- 逻辑部件非门的图示:
- \bullet P
- 逻辑部件与门的图示:
- $P \longrightarrow P \land Q$
- 逻辑部件或门的图示:
- $\begin{array}{c|c} \bullet & P \lor Q \\ \hline \bullet & O \end{array}$

- 应用: 汽车报站系统
- 令
 - -P: 汽车运行的方向(上行为 0 下行则为 1)
 - Q: 当前站点(用数字表示)
 - R: 下一站点(用数字表示)
- 于是其逻辑表达式为:

$$P \land Q \rightarrow R = \neg (P \land Q) \lor R$$
$$= \neg P \lor \neg Q \lor R$$

• 请同学完成该逻辑表达式的图示.



作业

- P27
- 10、11(1)(4)(5)、12、14(1)(3)、 15(2)(4)(6)
- 补充: 证明下列公式等价



"p每当q"和 "p仅当q"背后隐含的含义是不同的。每当, 背后隐含的是"就",补充完整就是"每当q为真,p就为 真"。转化为抽象符号,是q->p。 而仅当(只有当),背后隐含的是"才会,才有可能,才 可以...",补充完整就是"仅当q为真,p才有可能为真", 反过来,如果q为假,那么p一定为假,即非q->非p,也就 是p->q。在正常语境下,一般不会理解为"仅当q为真,p 就一定为真"。这种说法在现实交流中其实很别扭。 比如,"小明说了,只要小红去,他就去"和"小明说 了,只有在小红去的前提下,他才会去。"从一般语义来 理解,第一句,小红去,小明一定去;第二句,小红去, 小明并不一定会去。这两句非常自然。在现实生活中不会 有人说"小明说了,只有在小红去的前提下,他就一定 去。"这句话在语义上其实是有问题的。语文中只有和就 不能搭配。 因此,p仅当q,应该理解为p->q。