离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎 博士、教授、博士生导师

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

回顾

- 相容关系
- 偏序关系
- 拟序关系
  - 全序关系

五、偏序集合与哈斯图

像表达相容关系时用简化关系图一样，通常使用较为简便的偏序集合图——哈斯(**Hass**)图来表达偏序关系。

定义：设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集，如果对任何$x,y\in P$，$\boldsymbol{x\leq y}$和$\boldsymbol{x\neq y}$，而且不存在任何其它元素$z\in P$能使$\boldsymbol{x\leq z}$和$\boldsymbol{z\leq y}$，即$(x\leq y\wedge x\neq y\wedge(x\leq z\leq y\Rightarrow x=z\vee z=y))$成立，则称元素$\boldsymbol{y}$盖覆$\boldsymbol{x}$。

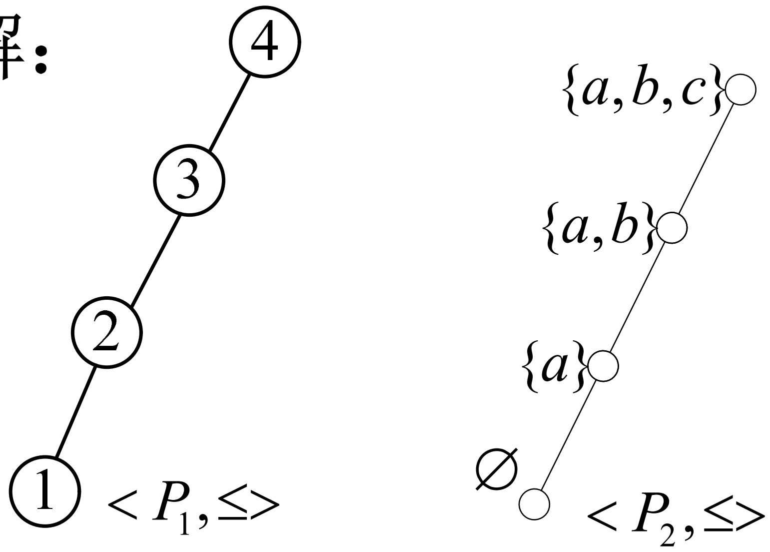
偏序集合与哈斯图

在哈斯图中，用小圈表示每个元素。如果有$x, y \in P$，且$x \le y$和$x \ne y$，则把表示x的小圈画在表示y的小圈之下。如果y盖覆x，则在x和y之间画上一条直线。如果$x \le y$和$x \ne y$，但是y不盖覆x，则不能把x和y直接用直线连结起来，而是要经过P的一个或多个元素把它们连结起来。这样，所有的边的方向都是自下朝上，故可略去边上的全部箭头表示。

偏序集合与哈斯图

例如： 设P_1={1,2,3,4}，≤是“小于或等于”关系，则$\langle P_1,\le\rangle$是个全序集合。设$P_2=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$，≤是$P_2$中的包含关系 ⊆，则$\langle P_2,\le\rangle$是全序集合．试画出$\langle P_1,\le\rangle$和$\langle P_2,\le\rangle$的哈斯图.

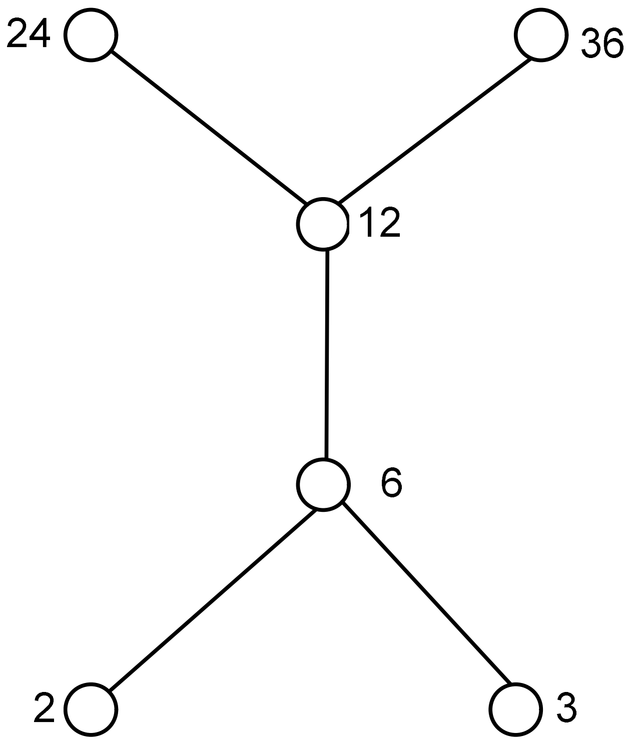
解：



注意：虽然两个全序关系的定义不同，但它们可能具有同样结构的哈斯图

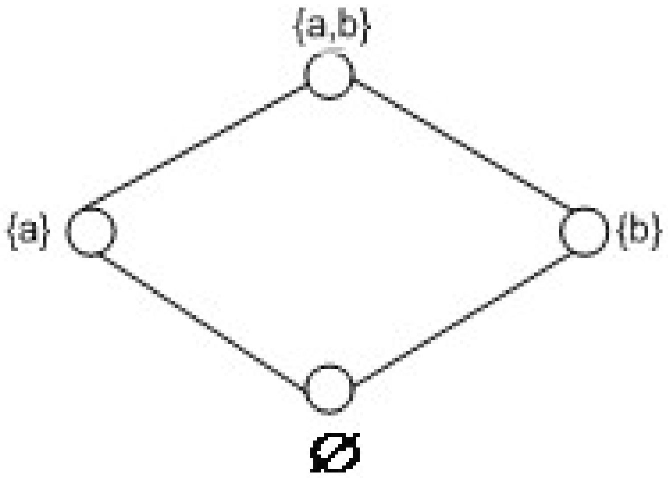
偏序集合与哈斯图

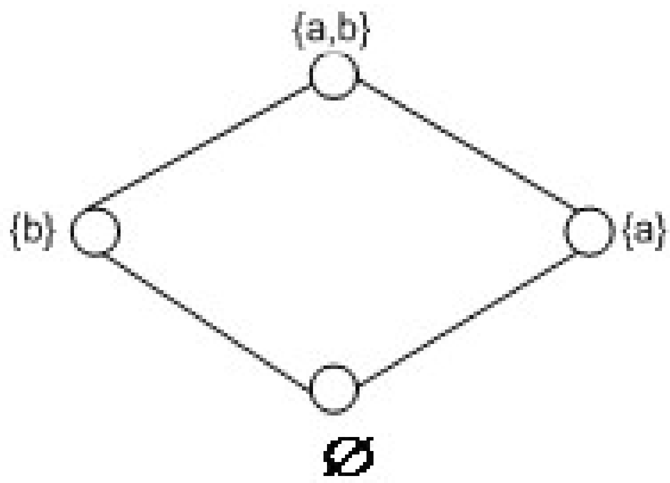
例： 设集合$X=\{2,3,6,12,24,36\}$，$\leq$是X中的偏序关系并定义成：如果x整除y，则$x\leq y$。试画$\langle X,\leq\rangle$的哈斯图。



偏序集合与哈斯图

例：设集合$X=\{a,b\}$，$\rho(X)$ 是它的幂集。$\rho(X)$的元素间的偏序关系≤是包含关系 ⊆。试画出 $\langle\rho(X),\le\rangle$的哈斯图。





注意：对于给定偏序集合来说，其哈斯图不是唯一的。由$\langle P,\le\rangle$ 的哈斯图，可以求得其对偶 $\langle P,\ge\rangle$的哈斯图. 只需把它的哈斯图反转180°即可，使得原来是顶部的结点变成底部上各结点。

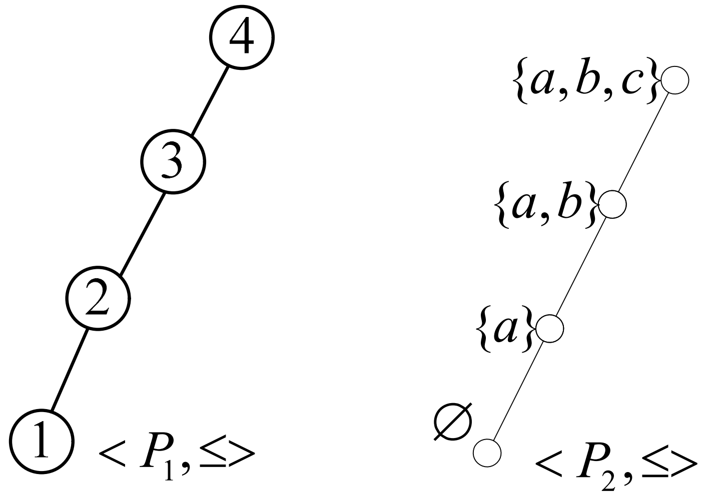
偏序集合与哈斯图

定义：　设$\langle P,\leq\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$。

(a)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q\leq q'$，则元素$q\in Q$称为Q的<u>最小成员</u>，通常记作0。

(b)如果对于每一个元素$q'\in Q$有$q'\leq q$，则元素$q\in Q$称为Q的<u>最大成员</u>，通常记作1。

如果能画出哈斯图，就可以看出是否存在最大成员和最小成员。



偏序集合与哈斯图

定理：设X是一个偏序集合，且有$Q \subseteq P$。如果x和y都是Q的最小(最大)成员,则$x=y$。

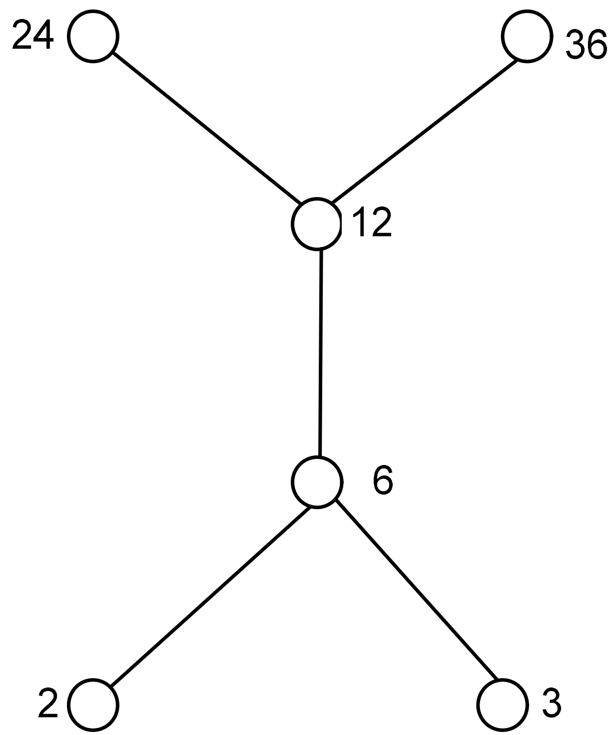
证： 假定x和y都是Q的最小成员。于是可有$x \leq y$和$y \leq x$。根据偏序关系的反对称性，可以得出$x=y$。当x和y都是Q的最大成员时，定理的证明类似于上述的证明。

偏序集合与哈斯图

定义：　设$\langle P,\le\rangle$是一个偏序集合，并有$Q\subseteq P$。

(a)如果$q\in Q$，且不存在元素$q'\in Q$能使$q'\ne q$和$q'\le q$，则称q是Q的<u>极小成员</u>。

(b)如果$q\in Q$，且不存在元素$q'\in Q$能使$q'\ne q$和$q\le q'$，则称q是Q的<u>极大成员</u>。



极大成员和极小成员都不是唯一的。不同的极大成员(或不同的极小成员)是不可比的。

偏序集合与哈斯图

定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。

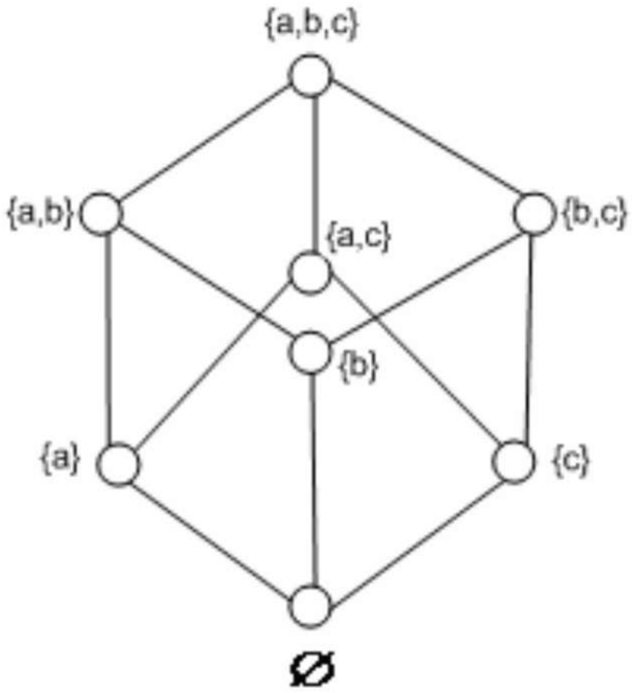
(*a*)如果对于每一个元素 **q** 有$q' \leq q$，则元素$q \in P$称为***Q***的上界。

(*b*)如果对于每一个元素 **q** 有$q \leq q'$，则元素$q \in P$称为***Q***的下界。

偏序集合与哈斯图

例：设集合$X=\{a,b,c\}$，$\rho(X)$是它的幂集。$\rho(X)$中的偏序关系≤是包含关系 ⊆。试画出$\langle\rho(X),\le\rangle$的哈斯图，并指出$\rho(X)$的子集的上界和下界。

解：先画出哈斯图



首先选取$\rho(X)$的子集$A=\{\{b,c\},\{b\},\{c\}\}$。于是$X$和$\{b,c\}$是$A$的上界，$\Phi$是它的下界。对于 $\rho(X)$ 的子集$B=\{\{a,c\},\{c\}\}$，上界是X和$\{a,c\}$；而下界是$\{c\}$和Φ。

子集的上界和下界不是唯一的。

偏序集合与哈斯图

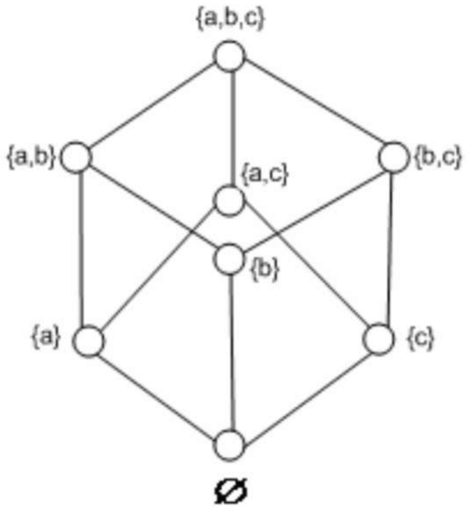
定义： 设$\langle P, \leq \rangle$是一个偏序集合，并有$Q \subseteq P$。

(1) 如果 **q** 是*Q*的一个上界，且对于*Q*的每一个上界q'都有$q \leq q'$，则称*q*是*Q*的最小上界，通常记作**LUB**。

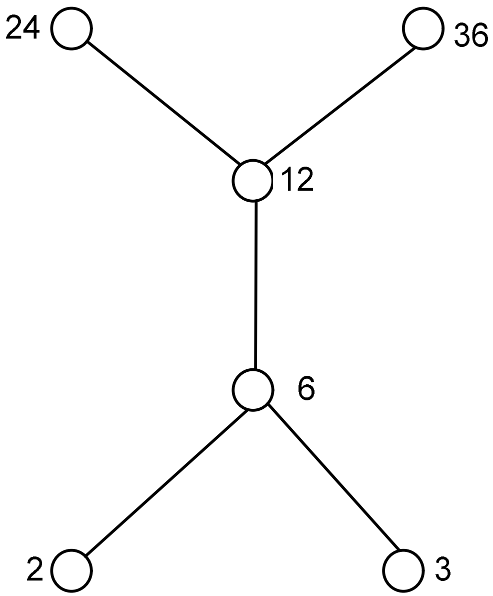
(2) 如果 **q** 是*Q*的一个下界，且对于*Q*的每一个下界q'都有$q' \leq q$，则称*q*是*Q*的最大下界，通常记作**GLB**。

如果存在最小上界的话，它是唯一的；如果存在最大下界的话，它也是唯一的。

偏序集合与哈斯图



它的每一个子集都有一个最小上界和一个最大下界。



子集A={2,3,6}有上确界**LUBA=6**，但这里没有下确界**GLBA**。 与此类似，对于子集B={2,3}来说，最小上界还是6，但是仍没有下界。对于子集C={12,6}来说，最小上界是12，最大下界是6。

偏序集合与哈斯图

对于偏序集合$\langle P,\leq\rangle$来说，它的对偶$\langle P,\geq\rangle$也是一个偏序集合。相对于偏序关系≤的***P***中的最小成员，就是相对于偏序关系≥的***P***中的最大成员；反之亦然。与此类似，可以交换极小成员和极大成员。对于任何子集$Q\subseteq P$来说，$\langle P,\leq\rangle$中的**GLBA**和$\langle P,\geq\rangle$中的**LUBA**是一样的。

良序关系

定义：给定集合***X***，***R***是***X***中的二元关系。如果***R***是个全序关系，且***X***的每一个非空子集都有一个最小成员，则称***R***是个良序关系。与此对应，序偶***<X,R>***称为良序集合。

每一个良序集合必定是全序集合,因为对于任何子集来说，其本身必定有一个元素是它的最小成员。但是每一个全序集合不一定都是良序的，有限全序集合必定是良序的。

作业

- **106: 44-50** （奇数）