离散数学期末复习大纲

数理逻辑部分以判定推理为主：包括对给定合式公式属性的判定及熟练使用 8 条规则进行有效推理。这一部分占25分。

关系函数部分：以关系的基本概念、关系性质的形式化描述，等价关系和划分，偏序关系和哈斯图。函数掌握特种函数，满射、单射、双射函数相关的证明，这一部分占25分。

代数系统部分：掌握代数系统的基本概念，包括子代数，代数系统的同态、同构，积代数和商代数的求法等，特殊代数系统掌握群相关的内容，如何求子群、陪集的计算等。这部分占25分。

- 图论部分掌握图的基本概念，图的矩阵表示及矩阵携带的信息，重点掌握特殊图的概念以及相关应用。这部分占２5分。
- 平时成绩占3０分。
- 针对各部分所做的练习。
- １、求下列公式的主范式，并判定公式的属性。
- 例1.1$(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q)$

- 解：上式$=(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q)\wedge(r\vee\neg r)=(p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$
- $=\sum m_7, m_3, m_1, m_0$其中$\sum$表示析取。
- 该公式含三个变元，与其等价的主析取范式四项，所以它是可满足的。
- 例1.2 $(p\to(q\wedge r))\wedge(\neg p\to(\neg q\wedge\neg r))$
- 解：上式＝ $(\neg p\vee(q\wedge r))\wedge(p\vee(\neg q\wedge\neg r))$
- $=(\neg p\vee q)\wedge(\neg p\vee r)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(p\vee\neg r)$
- $=(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee q\vee\neg r)\wedge$
- $(\neg p\vee q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\wedge$
- $(p\vee\neg q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)\wedge$
- $(p\vee q\vee\neg r)\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$
- $=\prod M_4, M_5, M_6, M_2, M_3, M_1$其中$\prod$表示合取。
- 该公式是可满足的。
-

- 例1.3刚进入大学的小张与寝室里的其他三人聊天，这三个人根据小张的口音分别作出下述判断：
- 甲说：小张不是苏州人，是上海人。
- 乙说：小张不是上海人，是苏州人。
- 丙说：小张既不是上海人，也不是杭州人。
- 小张听后，笑曰：你们三人有一人全说对了，有一人全说错了，还有一人对错各半。

- 试用命题逻辑推断小张究竟是哪里人。
- 解：首先符号化：
- 设：Ｐ：小张是苏州人
- Ｑ：小张是上海人
- Ｒ：小张是杭州人
- 根据题意有：
- 甲：$\neg P \wedge Q$,
- 乙：$\neg Q \wedge P$,
- 丙：$\neg Q \wedge \neg R$
- 分析小张只可能是其中一个城市的人或者不是这三个城市的人。

- 根据甲乙丙三人的说话内容可以判断：丙至少说对了一半，因此甲或乙必有一人全错了。若甲全错了，则有$\neg Q \wedge P$即乙全对了。若乙全错了，则甲全对。所以丙必是一对一错。
- 将小张的话符号化为：
- $((\neg P \wedge Q) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))) \vee$
- $((\neg Q \wedge P) \wedge ((Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \wedge R))) \Leftrightarrow T$
- 化简得： $(\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$
- 小张不可能既是苏州人又是杭洲人，所以只能是上海人。

- 例1.4甲乙丙丁 4 人中仅有两个人代表单位参加了市里的桥牌比赛，关于谁参加比赛，下列 4 种说法都是正确的：
- 1 甲和乙两人中有一人参加；
- 2 若丙参加，则丁必参加；
- 3 乙和丁两人中至多参加一人；
- 4 若丁不参加，则甲也不参加。
- 试判断哪两个人参加了比赛。
- 解：符号化命题如下：
- 设A：甲参加了比赛；

- B：乙参加了比赛
- C：丙参加了比赛
- D：丁参加了比赛
- 依题意将1,2,3,4分别符号化为：
- $((\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) \wedge$
- $(C \rightarrow D) \wedge \neg(B \wedge D) \wedge (\neg D \rightarrow \neg A) \Leftrightarrow T$
-

- 将上式化为主析取范式应有$2^4=16$个极小项
- 即m_{0000}，m_{0001}，m_{0010}，m_{0011}，
- m_{0100}，m_{0101},m_{0110}，m_{0111}，
- m_{1000}，m_{1001}，m_{1010}，m_{1011}，
- m_{1100},m_{1101}，m_{1110}，m_{1111}
- 根据题意去掉不合法的
- 得到的结论是甲和丁参加了比赛。

- 例1.5当p，q，r，s四个人考试成绩出来后，有人问四个人中谁的成绩最好，p说“不是我”，q说“是s”，r说是“q”，s说“不是我”。四个人的回答只有一个人符合实际，问哪一位的成绩最好。若有两人成绩并列最好，是谁？
- 解：令p: p的成绩最好；q：q的成绩最好；r：r的成绩最好；s：s的成绩最好。
- 若只有p回答正确：$\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg\neg s$
- 若只有q回答正确：$\neg\neg p \wedge s \wedge \neg q \wedge \neg\neg s$
- 若只有r回答正确：$\neg\neg p \wedge \neg s \wedge q \wedge \neg\neg s$
- 若只有s回答正确：$\neg\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s$

- 由于
- $(\neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge s \wedge \neg q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge \neg s \wedge q \wedge \neg \neg s) \vee (\neg \neg p \wedge \neg s \wedge \neg q \wedge \neg s)$
- $= (p \wedge \neg q \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg s)$
- $=(p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s)$
- 若只有一个人成绩最好，必是$p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s$为真，即p成绩最好；若有两个人成绩并列最好，可能是p,s或者p,r

练习：利用主范式判断下式的类型

- $(p\rightarrow q) \vee (q\rightarrow r) \rightarrow((p \vee q) \rightarrow r)$

- 结果
- $= \prod M_4,M_6,M_2$
- 该公式是可满足的

- ２、对下面的问题首先符号化，然后使用８条规则进行有效推理证明。
- 2.1每一个自然数不是奇数就是偶数，自然数是偶数当且仅当它能被2整除，并不是所有的自然数都能被2整除。因此，有的自然数是奇数。
- 解法1：首先定义如下谓词：
- N(x):x是自然数
- Q(x):x是奇数
- E(x):x是偶数
- I(x):x能被2整除
- 于是问题可用符号表述为：
- $(\forall x)(N(x)\to(Q(x)\nabla E(x)))$,
- $(\forall x)((N(x)\wedge E(x))\rightleftharpoons I(x))$,
- $\neg(\forall x)(N(x)\to I(x))$ ，$\Rightarrow(\exists x)(N(x)\wedge Q(x))$

- 推理证明过程如下：
- 1 $\neg(\forall x)(N(x)\rightarrow I(x))$ P规则
- 2 $(\exists x)(N(x)\wedge\neg I(x))$ T规则和1
- 3 $N(a)\wedge\neg I(a)$ ES规则和2
- 4 $N(a)$ T规则和3
- 5 $\neg I(a)$ T规则和3
- 6 $(\forall x)(N(x)\rightarrow(Q(x)\nabla E(x)))$ P规则
- 7 $N(a)\rightarrow(Q(a)\nabla E(a))$ US规则和 6

- 8 $Q(a) \nabla E(a)$ T规则 3 和 7
- 9 $(\forall x)((N(x) \wedge E(x)) \rightleftharpoons I(x))$ P规则
- 10 $(N(a) \wedge E(a)) \rightleftharpoons I(a)$ US规则和 9

  11 $\neg(N(a) \wedge E(a))$ T规则5和10
- 12 $\neg N(a) \vee \neg E(a)$ T规则和11
- 13 $\neg E(a)$ T规则4和12
- 14 $Q(a)$ T规则8和13
- 15 $N(a) \wedge Q(a)$ T规则4和14
- 16 $(\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$ EG规则和15
- 问题得证。

- 解法2：采用反证法。证明过程如下
- 1 $\neg(\forall x)(N(x) \rightarrow I(x))$ P规则
- 2 $(\exists x)(N(x) \wedge \neg I(x))$ T规则和1
- 3 $N(a) \wedge \neg I(a)$ ES规则和2
- 4 $N(a)$ T规则和3
- 5 $\neg I(a)$ T规则和3
- 6 $\neg(\exists x)(N(x) \wedge Q(x))$ P规则(假设前提)
- 7 $(\forall x)(\neg N(x) \vee \neg Q(x))$ T规则和6
- 8 $\neg N(a) \vee \neg Q(a)$ US规则和 7
- 9 $\neg Q(a)$ T规则 4 和8

- 10 $(\forall x)(N(x)\rightarrow(Q(x)\nabla E(x)))$ P规则
- 11 $N(a)\rightarrow(Q(a)\nabla E(a))$ T规则和10
- 12 $Q(a)\nabla E(a)$ T规则4和11
- 13 $E(a)$ T规则9和12
- 14 $(\forall x)((N(x)\wedge E(x))\rightleftharpoons I(x))$ P规则
- 15 $(N(a)\wedge E(a))\rightleftharpoons I(a)$ US规则和14
  16 $N(a)\wedge E(a)$ T规则4和13
- 17 $I(a)$ T规则15和16
- 18 $I(a)\wedge\neg I(a)$ T规则5和17
- 19 $(\exists x)(N(x)\wedge Q(x))$ F规则6和18
- 问题得证.
-

- 例2.2天鹅都会飞，而癞蛤蟆不会飞；
- 所以癞蛤蟆不是天鹅。
- 解：令TE(x):x是天鹅
- I(x):x是癞蛤蟆
- F(x):x会飞
- 于是问题可符号化为：
- $(\forall x)(TE(x)\rightarrow F(x)), (\forall x)(I(x)\rightarrow\neg F(x))$
- $\Rightarrow (\forall x)(I(x)\rightarrow\neg TE(x))$.
- 证明过程如下：

- 1 $\neg(\forall x)(I(x) \to \neg TE(x))$ P规则(假设前提)
- 2 $(\exists x)(I(x) \wedge TE(x))$ T规则和 1
- 3 $I(a) \wedge TE(a)$ ES规则2
- 4 $I(a)$ T规则3
- 5 $TE(a)$ T规则3
- 6 $(\forall x)(TE(x) \to F(x))$ P规则
- 7 $TE(a) \to F(a)$ US规则和6
- 8 $F(a)$ T规则5和7
- 9 $(\forall x)(I(x) \to \neg F(x))$ P规则

- 10 $l(a) \to \neg F(a)$ US规则和9
- 11 $F(a) \to \neg l(a)$ T规则和10
- 12 $\neg l(a)$ T规则8和11
- 13 $l(a) \wedge \neg l(a)$ T规则4和12
- 14 $(\forall x)(l(x) \to \neg TE(x))$ F规则 1 和13
- 问题得证。
-

- 例2.3 所有牛都有角，有些动物是牛，所以有些动物有角
- 解：设N(x):x是牛
- J(x):x有角
- A(x):x是动物
- 于是问题可描述成：
- $(\forall x)(N(x) \rightarrow J(x)),(\exists x)(A(x) \wedge N(x)) \Rightarrow$
- $(\exists x)(A(x) \wedge J(x))$

- 证明：
- 1、$(\exists x)(A(x)\wedge N(x))$　　P规则
- 2、$A(a)\wedge N(a)$　　ES规则和 1
- 3、$A(a)$　　T规则和 2
- 4、$N(a)$　　T规则和 2
- 5、$(\forall x)(N(x)\rightarrow J(x))$　　P规则
- 6、$N(a)\rightarrow J(a)$　　US规则和 5
- 7、$J(a)$　　T规则 4 和 6
- 8、$A(a)\wedge J(a)$　　T规则3和7
- 9、$(\exists x)(A(x)\wedge J(x))$　　EG规则和 8

- 求解这一类问题时注意：把实际问题符号化时，全称量词对应逻辑联结词“→”，存在量词对应逻辑联结词“∧”；推论时保证ES规则的首先使用。使用UG规则时，由ES规则引入的客体不能进行推广，即不能加全称量词。
- 请对39页上的第3题再做一次练习。

- ３、关系是笛卡尔积的子集，因此关系是集合，是以序偶为元素的集合。关系可以用关系图和关系矩阵来表示。关系是集合，所以集合上的运算可以平移到关系上来，但关系还有自己独特的运算：求逆运算，复合运算(也叫关系的合成运算)，关系的闭包运算等。
- 设Ｒ为X到Y的二元关系,S为Y到Z的二元关系：$RoS=\{<x,z>|(\exists z)\wedge<x,y>\in R\wedge\langle y, z\rangle\in S\}$
- $r(R)=R\cup I_x$

- $s(R)=R\cup R^{\sim}$
- $t(R)=\cup_{i=1}^{n}R^{i}$
- 关系的性质：
- 1） R是自反的＝$(\forall x)(x\in X\rightarrow\langle x,x\rangle\in R)$
- 2） R是反自反的＝$(\forall x)(x\in X\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$
- 3） R是不自反的
- $(\exists x)(\exists y)(x,y\in X\wedge\langle x,x\rangle\in R\wedge\langle y,y\rangle\notin R)$
- 4） R是对称的＝$(\forall x)(\forall y)(x,y\in X\wedge \langle x,y\rangle\in R\rightarrow \langle y,x\rangle\in R)$
- 5） R是反对称的 $=(\forall x)(\forall y)(x,y\in X\wedge\langle x,y\rangle\in R \wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$
-

- 6） R是不对称的 $=(\exists x_1)(\exists y_1)(\exists x_2)(\exists y_2)(x_1, y_1, x_2, y_2 \in X \wedge \langle x_1, y_1\rangle \in R \wedge \langle y_1, x_1\rangle \in R \wedge \langle x_2, y_2\rangle \in R \wedge \langle y_2, x_2\rangle \notin R)$
- 7） R是可传递的$=(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x, y, z \in X \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \rightarrow \langle x, z\rangle \in R)$
- 8） R是不可传递的 $=(\exists x)(\exists y)(\exists z)(x, y, z \in R \wedge \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \wedge \langle x, z\rangle \notin R)$
-

空关系和空集上的关系

空关系：对于任何集合**A**, 称空集为**A**上的空关系.

性质：若**A**非空，空关系是反自反的，对称的，反对称的，可传递的；

若**A**是空集，该空关系是自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的

空集上的关系：自反的，反自反的，对称的，反对称的，可传递的。在空集上可定义任意元关系。

- 3-1 设A={1, 2, 3}, R是ρ(A)上的二元关系，且R={<a, b>|a, b∈ρ(A), a∩b≠Φ}, 则R不满足下列哪些性质？为什麼？
- 1) 自反性　2) 反自反性　3) 对称性
- 4) 反对称性　5) 传递性
- 解：1) 因为Φ∈ρ(A)，但Φ∩Φ＝Φ
- 所以<Φ, Φ>∉R，即R不满足自反性。
- 2) 因为{1}∈ρ(A) 但{1}∩{1}={1}≠Φ
- 即<{1}, {1}>∈R，因此R不是反自反的.
- 3) 对任意x, y∈ρ(A), 若x∩y≠Φ, 即
- <x, y>∈R, 则y∩x≠Φ即<y, x>∈R即R满足对称性。

- 4) 取x={1, 2}, y={1, 3} 显然$x\cap y=\{1\}=y\cap x$
- 即存在x, y并且$\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, x\rangle\in R$但$x\neq y$
- 即 R 不是反对称的。
- 5) 存在x={1}, y={1, 2}, z={2}
- 并且$x, y, z\in\rho(A)\wedge\langle x, y\rangle\in R\wedge\langle y, z\rangle\in R$
- 但$\langle x, z\rangle\notin R$即R不满足可传递性。
- 3-2设S为集合A上的二元关系，证明S是自反的，传递的，则SoS=S。其逆为真吗？
- 证明：关系是序偶为元素的集合，所以我们可以把证集合相等的方法用到证关系的相等上来。即证$S\circ S\subseteq S\wedge S\subseteq S\circ S$即证明了SoS=S。

- 对任意x,y,z∈A和<x, z>∈SoS, 由复合关系的定义知应有<x, y>∈S和<y, z>∈S, 而S是可传递的，于是<x, z>∈S, 由x, z的任意性知SoS⊆S, 又 S 是自反的和传递的，所以对任何<x, x>∈S和<x, y>∈S应有<x, y>∈SoS
- 即S ⊆ SoS, 于是有SoS=S。
- 其逆不一定为真，例如设A={1, 2, 3}
- S={<1, 2>, <2, 2>, <1, 1>}
- 我们做 S 的关系矩阵如下：

- $$M_s = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$
- 于是$M_{S \circ S} = M_s \wedge M_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_s$
- 显然S不是自反的，主对角线不全是1。
-

- 例3-3 设R是复数集合C上的关系，定义如下：
- R={<x,y>| x,y ∈C 且x-y=a+bi，其中，a,b均为非负整数}
- 试确定R的性质，并说明原因。
- 解: (1)对于任意x∈C，因为x-x=0+0i，所以<x,x> ∈R，因此R是自反的；
- (2)由(1)知,<1,1> ∈R，因此R不具有反自反性；
- (3) 取x=3+2i, y=2+i，此时x-y=1+i，<x,y> ∈R，但是y-x=-1+(-1)i，<y,x>不属于R，因此R不是对称的；

- (4)任取$x,y \in C$，若$<x,y> \in R$且$<y,x> \in R$，$x-y= a+bi$, $y-x=-a+(-b)i$，则$a,b,-a,-b$都必须是非负整数，于是$a=b=0$，因而，$x=y$。R是反对称的。
- (5)对于任意的$x,y,z \in C$，若$<x,y> \in R$且$<y,z> \in R$，则$x-y=a+bi$(a和b都是非负整数), $y-z=c+di$(c,d都是非负整数)，于是$x-z=(x-y)+(y-z)=(a+c)+(b+d)i$，由于$a+c,b+d$都是非负整数，因此$<x,z> \in R$.由$x,y,z$取值的任意性可知，R是可传递的。
- 故R具有自反性、反对称性、可传递性。

- 3-4确定三角形之间的相似关系具有哪些性质。
- 解：自反性、对称性、可传递性。

- 3-5设R和S是集合$A=\{a, b, c, d\}$上的关系，其中$R=\{<a, a>,<a, c>,<b, c>,<c, d>\}$,
  $S=\{<a, b>,<b, c>,<b, d>,<d, d>\}$.
- 计算$R\circ S$, $R\cup S$, R^{-1}, $S^{-1}\circ R^{-1}$
- 解法 1： $R\circ S=\{<a,b>,<c,d>\}$
- $R\cup S=\{<a, a>,<a, c>,<b, c>,<c, d>,<a,b>,<b,d>,<d,d>\}$
- $R^{-1}=\{<a,a>,<c,a>,<c,b>,<d,c>\}$
- $S^{-1}\circ R^{-1}=\{<b,a>,<d,c>\}$

- 解法2通过矩阵求

$$
M_R=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
M_s=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}
$$

- $R \circ S = M_R \wedge M_s =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $R \cup S = M_R \vee M_s$

- $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $R^{-1}=(M_R)^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
-
-
-
-
-
-
- $S^{-1}=(M_S)^T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
-
-

- $S^{-1} \circ R^{-1} = M_{S-1} \wedge M_{R-1}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **3-6** 设**R**和**S**分别是集合**A**和集合**B**上的等价关系，令
- $T=\{<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>> \mid <x_1,x_2>\in R , <y_1,y_2>\in S\}$
- 试证明：**T**是**A**×**B**上的等价关系。
- 证明： (1)任取$<x,y>\in A\times B$，由于R和S是等价关系，因此，$<x,x>\in R$, $<y,y>\in S$，于是$<<x,y>,<x,y>>\in T$，于是T是自反的；
- (2) 任取$<x_1,y_1>,<x_2,y_2>\in A\times B$，若$<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>>\in T$，则$<x_1,x_2>\in R$，$<y_1,y_2>\in S$，由于R和S都是等价关系，因此$<x_2,x_1>\in R$，$<y_2,y_1>\in S$，于是可得$<<x_2,y_2>,<x_1,y_1>>\in T$。由$<x_1,y_1>,<x_2,y_2>$的任意性可知，T是对称的；

- (3) 任取$<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_3>\in A\times B$，若$<<x_1,y_1>,<x_2,y_2>>\in T$且$<<x_2,y_2>,<x_3,y_3>>\in T$，则$<x_1,x_2>\in R$，$<y_1,y_2>\in S$，$<x_2,x_3>\in R$，$<y_2,y_3>\in S$。由于R和S是可传递的，因此$<x_1,x_3>\in R$，$<y_1,y_3>\in S$。于是可得$<<x_1,y_1>,<x_3,y_3>>\in T$。由$<x_1,y_1>,<x_2,y_2>,<x_3,y_3>$的任意性可知，T是可传递得。
- 综上所述，T是$A\times B$上的等价关系。

- **3-7** 设**A={a,b,c,d}**，**R={<a,c>,<c,a>,<b,d>,<d,b>}∪$\mathbf{I_A}$**，
- (1)验证R是A上的等价关系；
- (2)求出商集A/R。
- 解： (1) 由于I_A∈R，因此任取x∈A，<x,x>∈R，R是自反的；由于$R=R^T$，因此R是对称的；由于<a,c>∈R, <c,a>∈R,<a,a>∈R, <c,c>∈R; <b,d>∈R, <d,b>∈R, <b,b>∈R,<d,d>∈R，因此R是可传递的。因此R是A上的等价关系。
- (2)由于$[a]_R=\{a,c\}=[c]_R$, $[b]_R=\{b,d\}=[d]_R$, 因此$A/R=\{[a]_R,[b]_R\}=\{\{a,c\},\{b,d\}\}$。

- **3-8** 设**R**是偏序关系，指出下列运算后的关系是否是偏序关系。
- **$R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}, $R-S$, $R \oplus S$, $R \circ S$**
- 解：
- (1)取A={a,b}, R={<a,a>,<b,b>,<a,b>}, S={<a,a>,<b,b>,<b,a>}，则R和S都是A上的偏序关系，而$R \cup S$={<a,a>,<b,b>,<a,b>, <b,a>}不是反对称的， $R \cup S$不是A上的偏序关系。
- (2)任取$x \in A$, 由R和S是偏序关系，知$<x,x> \in R$,$<x,x> \in S$,因此$<x,x> \in R \cap S$, $R \cap S$是自反的；任取$x,y \in A$, 若$<x,y> \in R \cap S$, 且$<y,x> \in R \cap S$，则$<x,y> \in R$, $<x,y> \in S$,$<y,x> \in R$, $<y,x> \in S$，因为R和S都是反对称的，因此x=y，于是$R \cap S$是反对称的；

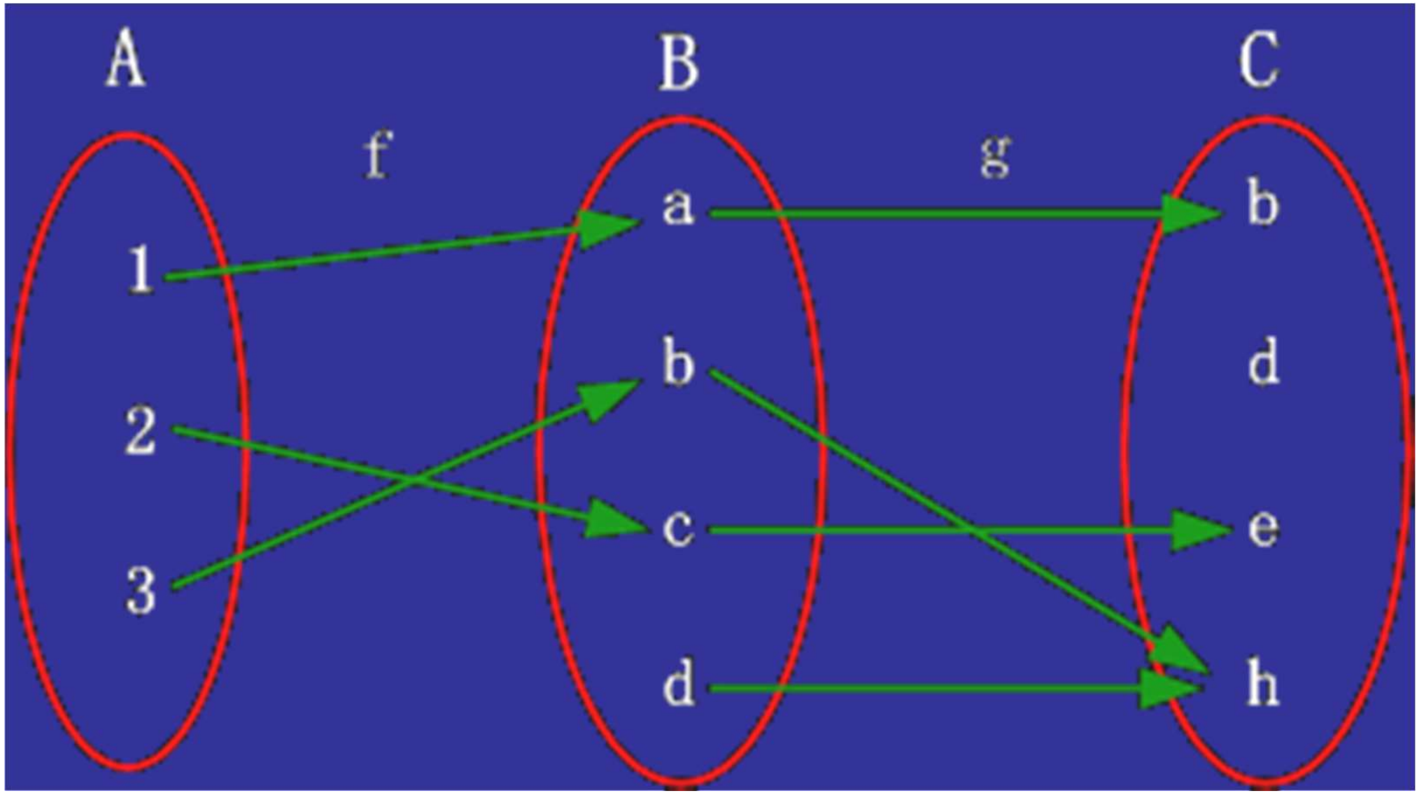
- (2)（续）任取$x,y,z \in A$, 若$<x,y> \in R\cap S$, 且$<y,z> \in R\cap S$，则$<x,y> \in R$, $<x,y> \in S$,$<y,z> \in R$, $<y,z> \in S$，因为R和S都是可传递的，因此$<x,z> \in R$,$<x,z> \in S$，于是$<x,z> \in R\cap S$, $R\cap S$是可传递的。综上所述， $R\cap S$是A上的偏序关系。
- (3)例子同(1)，$R-S=\{<a,b>\}$，不具有自反性，因此R-S不是A上的偏序关系。
- (4)例子同(1)，$R\oplus S=\{<a,b>,<b,a>\}$，不具有自反性和反对称性，因此$R\oplus S$不是A上的偏序关系。
- (5)取$A=\{a,b,c\}$, $R=\{<a,b>,<a,c>\}\cup I_A$,$S=\{ <b,a>, <b,c>\} \cup I_A$,则R和S都是A上的偏序关系，而$R\circ S=\{<a,b>,<a,c>,<b,a>,<b,c>\}$，不具有反对称性，因此$R\circ S$不是A上的偏序关系。

- 3-9设有函数**f: I→I(I**表示整数集**)**，定义为**f(x)=|x|-2x**，试问 **f** 是否为内射**(**即单射**)**，满射或双射？
- 解：根据f的定义
- 当x=0时，f(0)=0-0=0
- 当x>0时，f(x)=x-2x=-x (<0)
- 当x<0时，f(x)=-x-2x=-3x (>0)
- 因此，有如下对应关系：
- x: …… -3 -2 -1 0 1 2 ……
- f(x): …… 9 6 3 0 -1 -2 ……
- 可知f是内射单射，不是满射，不是双射。

- **3-10** 设有函数**g: A→B, h: A→B**，函数**f: B→C**，已知**f∘g=f∘h**，且**f**是内射单射，试证明**g = h**。
- 证明：任取x∈A，令$g(x)=b_1$, $h(x)=b_2$，则$f\circ g=f(b_1)$, $f\circ h=f(b_2)$。
- 由$f\circ g=f\circ h$可知，$f(b_1)=f(b_2)$。
- 因为f是内射单射，因此$b_1=b_2$，即$g(x)=h(x)$。由x取值的任意性可知，$g = h$

- **3-11** 设有函数**f: A→B**和**g: B→C**，使得**g∘f**是一个单射，且**f**是满射。证明**g**是一个单射。举出一个例子说明，若**f**不是满射，则**g**不一定是单射。
- 证明：任取$b_1,b_2\in B$，并设$b_1\neq b_2$，因为f是满射，因此一定存在$a_1,a_2\in A$，使得$f(a_1)=b_1$, $f(a_2)=b_2$。由于$b_1\neq b_2$，由函数的定义知$a_1\neq a_2$。
- 又因为g是由B到C的函数，所以一定有$c_1,c_2\in C$，使得$g(b_1)=c_1$, $g(b_2)=c_2$。
- 于是，$g\circ f(a_1)=g(b_1)=c_1$, $g\circ f(a_2)=g(b_2)=c_2$。因为$g\circ f$是单射，且$a_1\neq a_2$，因此$c_1\neq c_2$，也就是$g(b_1)\neq g(b_2)$。由b_1,b_2取值的任意性知，g是单射。

- 举例如下：当f不是满射时，g不一定是单射。



- 3-12设A＝{a,b,c,d,e}，回答下列问题，并说明理由：
- 1)A上共有多少种二元关系？
- 2)上述二元关系中有多少个是等价关系？
- 解1)A上的二元关系是AxA的子集，而AxA的基数＝25，所以A上有2^{25}种不同的二元关系。
- 解2)等价关系和划分相对应，对于A的划分有下面几种情形：
- (1)分成5块的一种，每块只含一个元素
- (2)分成4块，其中一块含有2个元素，另3块均含有1个元素有：$C_5^2=10$种

- (3)分成3块，其中2块含有2个元素,另一块含有1个元素有(1/2)C_5^1 C_4^2=15种
- 分成3块，其中1块含有3个元素，另2块含有1个元素，共有C_5^3=10种
- (4)分成2块，其中1块含有3个元素，另一块含有2个元素，共有C_5^3=10种
- 分成2块，其中1块含有4个元素，另一块含有１个元素，共有C_5^1=5种
- (5)分成1块，共有１种。综上,A上的等价关系共有：1+10+15+10+10+5+1=52种

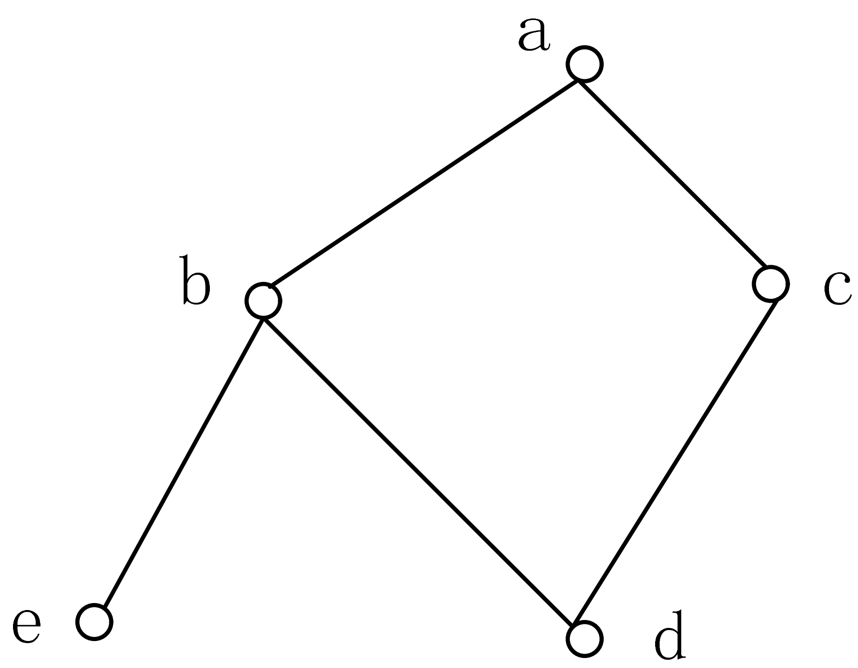
- 3-13设A为含有n个元素的集合，则A上有多少个不同的等价关系？其中秩为2的划分有多少种？
- 解：A上有多少种划分就有多少种等价关系，令A上秩为i的划分的个数为f(i),则A上就共有：$\sum_{i=1}^{n} f(i)$其中
- $f(k)=(1/k!)\left(\sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=n} C_n^{t1} C_{n-t1}^{t2} C_{n-t1-t2}^{t3} \cdots C_{n-t1-t2\cdots tk-1}^{tk}\right.$
- A上秩为2的划分共有$(1/2)\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i=2^{n-1}-1$

- 3-14设f:A→B的映射，指出满射和单射的条件及相应的个数：
- 解：满射的条件是|A|≥|B|
- 单射的条件是|B|≥|A|
- 设A中有m个元素，B中有n个元素，则
- m=n时，存在A→B的双射函数n!个
- m<n时，存在A→B的单射函数$C_n^m m!$
- m>n时，存在A→B的满射函数个数为

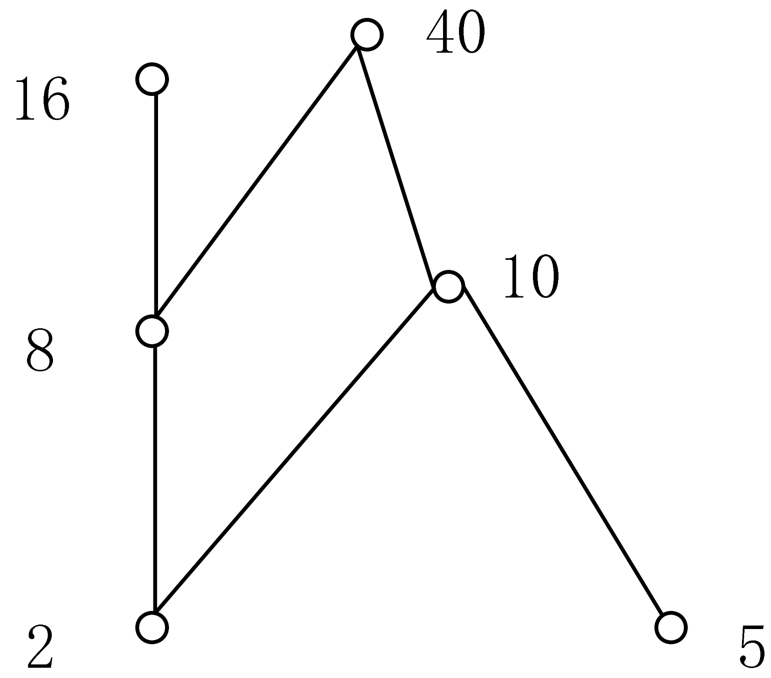
$$n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - \cdots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)\cdot 1^m$$

- 简单的求满射函数个数解题过程
- 说明：m表示定义域A中元素的个数，n表示陪域B中元素的个数。
- 思路：在所有映射中刨除没有映满的情形。
- 所有映射的总数为：n^m个
- 未映满总数为：未映满可分为n-1种情况，即映满1个，映满2个等直到映满n-1个。所以未映满总数为n-1种情况的和。

- **3-15** 偏序集**<A,≤>**的哈斯图如下图，
- **(1)** 求集合**A**的最大元素、最小元素、极大元素和极小元素
- **(2)** 求子集**{b,c,d}**的上界、下界、上确界和下确界。
- 解： (1) 集合A的最大元素是a, 最小元素不存在，极大元素是a，极小元素为d和e；
- (2)子集{b,c,d}的上界是a，下界是d，上确界是a，下确界是d。



- **3-16** 画出集合**A={2,5,8,10,16,40}**上整除关系的**hash**图，并找出**A**的最大成员、最小成员、极大成员、极小成员。



解：没有最大成员，也没有最小成员。极大成员是16，40，极小成员是2，5

- 概念回顾
- 设U＝＜S,F＞，其中
- S是非空元素的集合，F是运算的集合，对任何f_i∈F和任意x_i, x_j ∈S,有x_i f_i x_j ∈S，则称U＝＜S,F＞为代数系统。
- 对代数系统U′＝＜S′,F＞,若S′⊆S,F在S′封闭，则称U′＝＜S′,F＞为
- U＝＜S,F＞的子代数系统。
- 设U＝＜S,F＞和V= < S′,F′ >是两个同型的代数系统，若存在

- $f:S \rightarrow S'$, $g:F \rightarrow F'$，使对任何x_i, $x_j \in S$ 和
- $f_i \in F$，都有$f(x_i\ f_i\ x_j) = f(x_i)\ g(f_i)\ f(x_j)$
- 则称两代数系统是同态的，若f是满射，则称为满同态，若f是双射则称两代数系统是同构的。
- 对同型代数系统U＝＜S,*＞和V=<S′,o>，其积代数为：
- UXV=<SXS′, Δ> ，对任意$<x_1,y_1>$,
- $<x_2,y_2> \in SXS'$, $<x_1,y_1>\Delta<x_2,y_2>=$
- $<<x_1 * x_2>, <y_1\ o\ y_2>>$。

- U＝＜S,*＞及S上的同余关系E， 其商代数为：V= ＝＜S/E, Δ＞,对任意x,y ∈S,
- $[x]_E$,$[y]_E$ ∈ S/E,
- $[x]_E \Delta [y]_E = [x*y]_E$
- 群是每一个元素均有逆元的含幺半群。
- 设<S,*>,为群，S′ ⊆ S，并且<S',*>为群，则称<S ′,*>为<S,*>的子群。

- 给定群$<G，\odot>$及非空子集$H\subseteq G$，则
- $<H，\odot>$是$<G，\odot>$的子群$\Leftrightarrow$
- $(\forall a)(\forall b)(a，b\in H\rightarrow$
- $a\odot b\in H)\wedge(\forall a)(a\in H\rightarrow a^{-1}\in H)$
- 即$<H，\odot>$为$<G，\odot>$的子群的充要条件是H对于$\odot$封闭及H中每个元素存在逆元。
- 因为：$(a \odot a^{-1})=\mathrm{e}\in H$
- 又$\odot$继承了$<G，\odot>$的可结合性
- 于是$<H，\odot>$满足群的定义，而$H\subseteq G$
- 所以$<H，\odot>$是$<G，\odot>$的子群.

- $<H,\odot>$是$<G,\odot>$的子群$\Leftrightarrow$
- $(\forall a)(\forall b)(a，b\in H\rightarrow a\odot b^{-1}\in H)$
- 对a,a $\in H$,则$a\odot a^{-1}$=e$\in H$
- 对e,b $\in H$,则e $\odot$ $b^{-1}= b^{-1}\in H$
- 对任何a,b $\in H$则$b^{-1}\in H$，于是有
- $(a\odot(b^{-1})^{-1})= a\odot b =\in H$
- 于是问题得证。

- 群的性质：
- １、设$<G, \odot>$是群$\wedge |G| > 1$则$<G, \odot>$无零元。
- ２、群中惟一等幂元是幺元。
- ３、$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(a, b, c \in G \wedge ((a \odot b = a \odot c \vee b \odot a = c \odot a) \Rightarrow b = c))$
- 即群满足可约律。
- ４、$a^n = (a^{-1})^m \quad n<0, n=-m, m>0$
- 在群中对某个元素负的方幂定义为该元素的逆的方幂。

- 5、 群中方程解是惟一的。

- 6、
- ① $\forall a \in G$，$(a^{-1})^{-1} = a$
- ② $\forall a$， $\forall b \in G$，$(a \odot b)^{-1} = b^{-1} \odot a^{-1}$
- ③ $\forall a \in G$，m，$n \in \mathbf{Z}$，有$a^m \odot a^n = a^{m+n}$
- ④ $\forall a \in G$，m，$n \in \mathbf{Z}$，有$(a^m)^n = a^{mn}$
- ⑤ 若$<G, \odot>$为Abel群（可交换群），则 $(a \odot b)^n = a^n \odot b^n$

- 7、给定群$<G$，$\odot>$，且a，幺元$e \in G$，则a的阶或周期为
- 使**a^n=e**的最小正整数
- 并称n为a的阶.
- 记作$|\ a\ | = n$。
- 任何群$<G$，$\odot>$幺元e的阶都是1。
- 若a^n = e且没有n的因子d (1＜d＜n)使a^d = e，则n为a的阶。
- a与a^{-1}具有相同的阶。
- ■

这部分的练习题

- 4-1通常数的减法运算能否和下列集合构成一个代数系统.
- （1）非负整数集Z (N)
- （2）整数集I （Y）
- （3）有理数集Q （Y）
- 4-2设代数系统V=<I,+,•>，其中I表示整数集，＋和•分别表示通常的加法和乘法运算，下面的各个子集，它是否能构成V的子代数？
- （1） $H_1=\{2n+1 \mid n\in I\}$ (N)
- （2） $H_2=\{2n \mid n\in I\}$ (Y)
- 4-3设代数系统V=<{1,2,3},∘>，其中二元运算∘定义为x∘y=x与y中较大的数，则V有（）个子代数。
- A．3 B．6 C．7 D．8

4-4设 $U=\langle\{0,1,2,3\},*,\Delta\rangle$ 为代数系统，其中运算 $*,\Delta$ 的定义为：

$x*y=\min\{x,y\}$

$x\Delta y=(x+y)(\bmod 3)$

试给出U的运算表，并求出它的所有子代数.

解：

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	1	1
2	0	1	2	2
3	0	1	2	3

Δ	0	1	2	3
0	0	1	2	0
1	1	2	0	1
2	2	0	1	2
3	0	1	2	0

- 从表中可以看出该代数系统有四个子代数即 U_1=<{0},*, Δ >， U_2=<{0,3},*, Δ >， U_3=<{0,1,2},*, Δ >，和它本身。
- 4-5设U=<I,+,*>，其中I为整数集合，+和*分别是普通意义下的加和乘，对于I的以下子集，能构成U的子代数吗？说明理由
- $U_1=<\{-1,0,1\}, +,*>$
- $U_2=<S_1, +,*>, S_1=\{x|x\in I\wedge x\leq 0\}$
- $U_3=<S_2, +,*>, S_2=\{2x|x\in I\}$
- 解： U_1不能，因为1+1=2,不封闭
- U_2也不能，因为两个负数相乘为正数，不封闭。
- U_3可以。

- 4-6给定集合E={a,b,c}, ρ(E)为E的幂集，
- < ρ(E), ∪ >为代数系统，在ρ(E)上定义二元关系R如下：
- XRY当且仅当{b}∩X= {b}∩Y
- 其中X,Y∈ρ(E), ∩,∪为集合上的交和并运算.
- 1) 证明R是ρ(E)上的等价关系
- 2)证明R是ρ(E)上关于∪ 的同余关系
- 3)求商代数

- 解：1)对任意X $\in \rho$ (E), 显然有{b} $\cap$ X= {b}$\cap$X,即XRX,R是自反的；
- 设XRY即{b}$\cap$X = {b}$\cap$Y,
- 则{b}$\cap$Y = {b}$\cap$X 即有YRX,即R是对称的；
- 设XRY和YRZ即有{b}$\cap$X= {b}$\cap$Y和
- {b}$\cap$Y= {b}$\cap$Z于是可推出{b}$\cap$X= {b}$\cap$Z
- XRZ, 即R是可传递的。于是R是等价关系。
- 2)再证R满足代换性质
- 对任何$X_1,Y_1,X_2,Y_2 \in \rho$ (E)和X_1RY_1及X_2RY_2
- 即{b}$\cap X_1$= {b}$\cap Y_1 \wedge$ {b}$\cap X_2$= {b}$\cap Y_2$
-

- 我们来证$X_1 \cup X_2$和$Y_1 \cup Y_2$ 也有R的关系
- 即证$\{b\}\cap(X_1 \cup X_2)= \{b\}\cap(Y_1 \cup Y_2)$
- 而上式$(\{b\}\cap X_1) \cup (\{b\}\cap X_2)$
- $=(\{b\}\cap Y_1)\cup(\{b\}\cap Y_2)$
- 由已知条件知上式成立，即R为同余关系.
- 3）$\rho(E)/R=\{ \{\{b\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}, \{\Phi,\{a\},$
- $\{a,c\},\{c\}\}\}$
- 商代数为$\langle \rho(E)/R, \Delta \rangle$, 对任意
- $[X]_R, [Y]_R \in \rho(E)/R$,
- $[X]_R \Delta [Y]_R=[X\cup Y]_R$

- **4-7**设f_1和f_2都是从代数系统$<S_1,*>$到$<S_2,\circ>$的同态映射，这里*和∘都是二元运算，并且∘满足交换律和结合律。定义函数h: $S_1 \to S_2$，使得对于任意
- $x \in S_1$, $h(x)=f_1(x) \circ f_2(x)$
- 试证明h也是从$<S_1,*>$到$<S_2,\circ>$的同态映射。
- 证明：由于f_1和f_2都是从代数系统$<S_1,*>$到$<S_2,\circ>$的同态映射，因此$<S_1,*>$和$<S_2,\circ>$满足同态的基本条件，即是同类型的。只用证明函数h满足运算的像等于像的运算。

- 对于任意$x,y \in S_1$,因为f_1和f_2都是从代数系统$<S_1,*>$到$<S_2,\circ>$的同态，因此
- $f_1(x*y)=f_1(x)\circ f_1(y)$
- $f_2(x*y)=f_2(x)\circ f_2(y)$
- 则$h(x*y)=f_1(x*y)\circ f_2(x*y)=(f_1(x)\circ f_1(y))\circ(f_2(x)\circ f_2(y))$
- 由于$\circ$满足交换律和结合律，故
- $h(x*y)=(f_1(x)\circ f_1(y))\circ(f_2(x)\circ f_2(y))$
- $=(f_1(x)\circ f_2(x))\circ(f_1(y)\circ f_2(y))\quad =h(x)\circ h(y)$
- 由x,y取值的任意性可知，h也是从$<S_1,*>$到$<S_2,\circ>$的同态映射。

- 4-8设函数h: $S_1 \to S_2$是从代数系统U=<V_1,$*_1$,$\sim_1$>到V=<V_2,$*_2$,$\sim_2$>的同态映射，其中运算$*_i$和$\sim_i$ (i=1,2)分别是二元运算和一元运算。试证明h(S_1)对于运算$*_2$和$\sim_2$构成V的子代数。
- 分析：证明之前先要搞清楚符号h(S_1)的含义。h(S_1)是S_2的一个子集，由S_1中所有元素的像组成换句话说它是S_1 的像点集。即$h(S_1)=\{y|y \in S_2$，存在$x \in S_1$使$h(x)=y\}$。

- 证明：因为h是从S_1到S_2的函数，所以$h(S_1) \subseteq S_2$。由S_1非空可知，$h(S_1)$也非空。
- 对任意的$y_1, y_2 \in h(S_1)$，必有$x_1, x_2 \in S_1$，使得$h(x_1)=y_1, h(x_2)=y_2$，于是
- $y_1 *_2 y_2 = h(x_1) *_2 h(x_2) = h(x_1 *_1 x_2) = h(x) \in h(S_1)$
- 对任意的$y \in h(S_1)$，必有$x \in S_1$，使得$h(x)=y$，于是$\sim_2(y) = \sim_2(h(x)) = h(\sim_1(x)) = h(x') \in h(S_1)$。
- 由y_1, y_2和y的任意性可知，运算$*_2$和$\sim_2$在子集$h(S_1)$上是封闭的，故$<h(S_1), *_2, \sim_2>$是V_2的子代数。

- 4-9给定代数系统$U_m=<N_m,+_m>$,其中N_m 是模m同余关系划分自然数集合造成的商集，$+_m$是模m加法，试证$U_2 X U_3$和U_6同构
- 解：首先求U_2和U_3及$U_2 X U_3$
- $U_2 = < N_2,+_2 >= < \{[0],[1]\},+_2 >$
- $U_3 = < N_3,+_3 >= < \{[0],[1],[2]\},+_3 >$

$U_2 X U_3 =<\{ <[0],[0]>, <[0],[1]>, <[0],[2]>, <[1],[0]> ,<[1],[1]>, <[1],[2]> \},\Delta>$

$U_6=<\{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}, +_6 >$

Δ	<[0],[0]>	<[0],[1]>	<[0],[2]>	<[1],[0]>	<[1],[1]>	<[1],[2]>
<[0],[0]>	<[0],[0]>	<[0],[1]>	<[0],[2]>	<[1],[0]>	<[1],[1]>	<[1],[2]>
<[0],[1]>	<[0],[1]>	<[0],[2]>	<[0],[0]>	<[1],[1]>	<[1],[2]>	<[1],[0]>
<[0],[2]>	<[0],[2]>	<[0],[0]>	<[0],[1]>	<[1],[2]>	<[1],[0]>	<[1],[1]>
<[1],[0]>	<[1],[0]>	<[1],[1]>	<[1],[2]>	<[0],[0]>	<[0],[1]>	<[0],[2]>
<[1],[1]>	<[1],[1]>	<[1],[2]>	<[1],[0]>	<[0],[1]>	<[0],[2]>	<[0],[0]>
<[1],[2]>	<[1],[2]>	<[1],[0]>	<[1],[1]>	<[0],[2]>	<[0],[0]>	<[0],[1]>

令$f: N_2 \times N_3 \rightarrow \{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$,

并且：$f(\langle[0],[0]\rangle)=[0]$,$f(\langle[0],[1]\rangle)=[4]$

$f(\langle[0],[2]\rangle)=[2]$,$f(\langle[1],[0]\rangle)=[3]$

$f(\langle[1],[1]\rangle)=[1]$,$f(\langle[1],[2]\rangle)=[5]$

显然f是个双射，而且满足运算的象等于象的运算，两代数系统同构。

- 4-10给定代数系统U=<S,*>,其中集合S和二元运算＊分别定义如下：
- 1)S={1,3,4,5,9},*是模11乘法
- 2)S=I,*是普通意义下的减法
- 3)S={a,b,c,d},*的运算表如(a)所示
- 4)S={a,b,c,d},*的运算表如(b)所示
- 对每种情况确定U是否为群，若是群指出其幺元和每个元素的逆元.
- 解：对1)首先做出运算表，如(c)所示

X_{11}	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

(c)

*	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	d	c	b	a
c	a	b	c	d
d	c	a	d	b

(a)

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

(b)

- 对1)由运算表(c)可以看出X_{11}是可结合的，含幺元1，3和4，5和9互为逆元，所以它是群.
- 对于2)整数集合上的减法不是可结合的，所以它也不是群.
- 对于3)和运算表(a)，可以看出，＊是可结合的，c是幺元，a,d互为逆元，b是b的逆元，它也是群.
- 对于4)a是幺元，b是b的逆元，c是c的逆元，
- d是d的逆元，它也是群.
-
-

- 4-12求出$<N_5,+_5>$和$<N_{12},+_{12}>$的所有子群.
- 解：根据拉格朗日定理知，素数阶群仅有平凡子群，即$<\{[0]\},+_5>$和$<N_5,+_5>$
- 而12的因子有1,2,3,4,6,12,所以它若有也仅有因子阶真子群：分别为：
- $<\{[0],[6]\},+_{12}>$
- $<\{[0],[4],[8]\},+_{12}>$，　$<\{[0],[6],[3],[9]\},+_{12}>$，
- $<\{[0],[4],[6],[8],[2],[10]\},+_{12}>$此外，还有
- $<\{[0]\},+_{12}>$,它本身也都是子群.

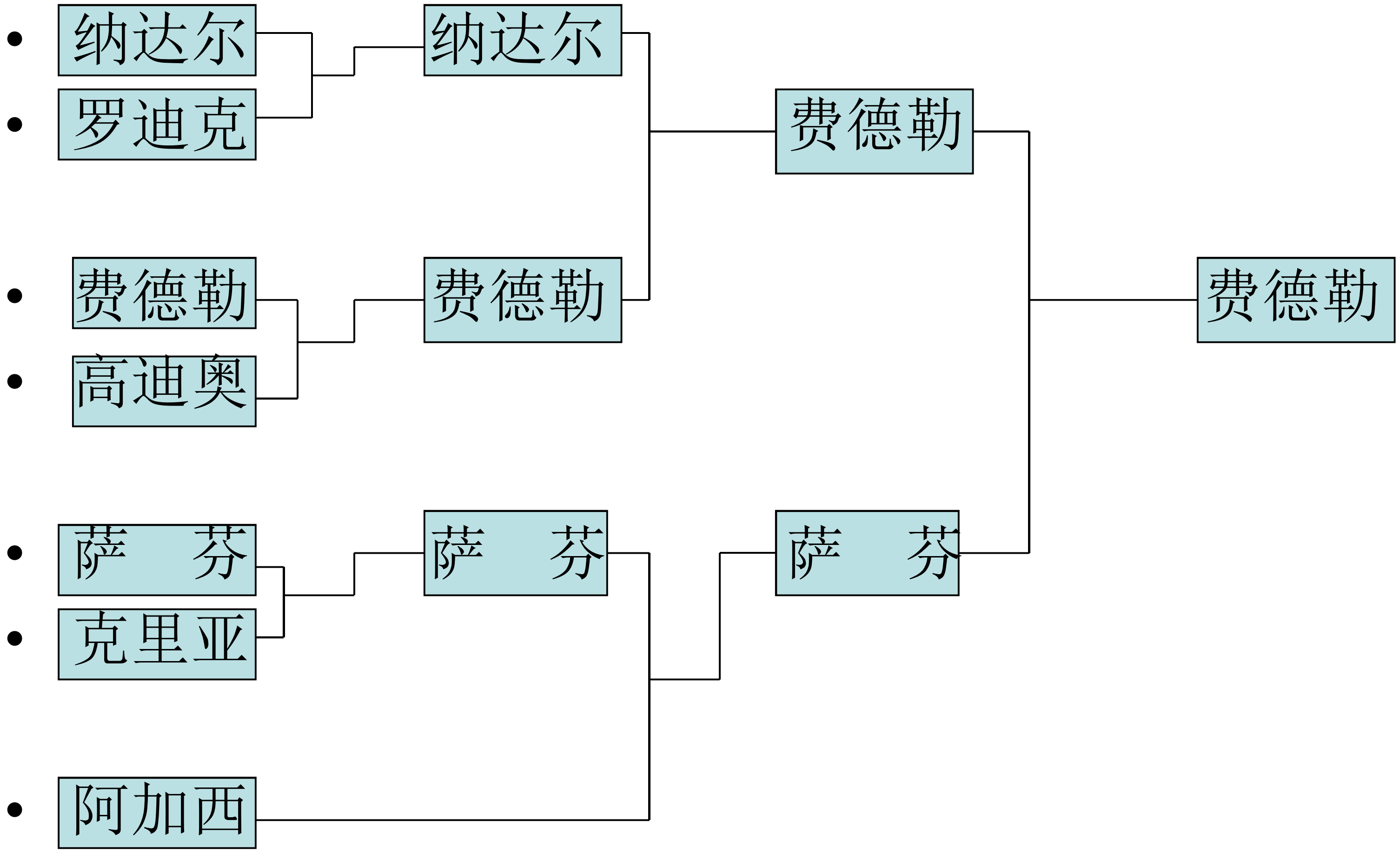
- 4-13设<G,*>为群，$x,y\in G$,且$yxy^{-1}=x^2$,其中
- $x\neq e$,y是2阶元，e是幺元，求x的阶.
- 解：因为<G,*>为群，及$yxy^{-1}=x^2$，所以有
- $X^4=(yxy^{-1})*(yxy^{-1})=yx^2y^{-1}=y(yxy^{-1})y^{-1}$
- $=y^2xy^{-2}$
- 因为y是2阶元，群中元素和它的逆有相同的阶，所以
- $X^4=(yxy^{-1})*(yxy^{-1})=yx^2y^{-1}=y(yxy^{-1})y^{-1}$
- $=y^2xy^{-2}=x$,
- $X^3=e$,又因为没有大于1小于3的3的因子，因此x的阶为3.

- 4　图论部分

- 概念回顾：
- 图G=<V,E,ψ>,其中V是结点的集合，E为边的集合，　ψ**是边到点对**的**映射**.
- 有向图，无向图，零图(仅有结点没有边的图)，平凡图(仅含一个孤立结点没有边的图)，完全图(每个结点都邻接另外n-1个结点的图)，k度正则图(每个结点的度等于正整数k的无向图)，加权图，子图，生成子图,

- 点邻接，边邻接，面邻接，结点的度，结的出度，结点的入度，图的最大度最小度，图的度，图的度数之和和边数的关系(握手定理)，图的邻接矩阵，可达性矩阵，强连通，单向连通，弱连通…。
- 根树, 有向树，有序树，位置树，树中结点的层次(级)，树高，m元树，完全m树，正则树(叶结点的级相同的m元树)，满m元树(每一级上结点的出度相同的m元树)，叶加权最优二元树，最小生成树(按权算)，前缀码，先序遍历，中序遍历，后序遍历，树中边树与结点的关系式，…。

- 4-1
- 网球锦标赛共有7名选手进入总决赛，比赛采取单淘汰制，问需要多少场比赛才可以决出冠军？
- 解：第一轮，6名选手着对撕杀，1人轮空，他与3场比赛产生的胜者参加半决赛；在半决赛中，4名选手着对撕杀，2场比赛产生2名胜者参加决赛；最后1场决赛产生冠军。因此共需要6场比赛。如下图所示。



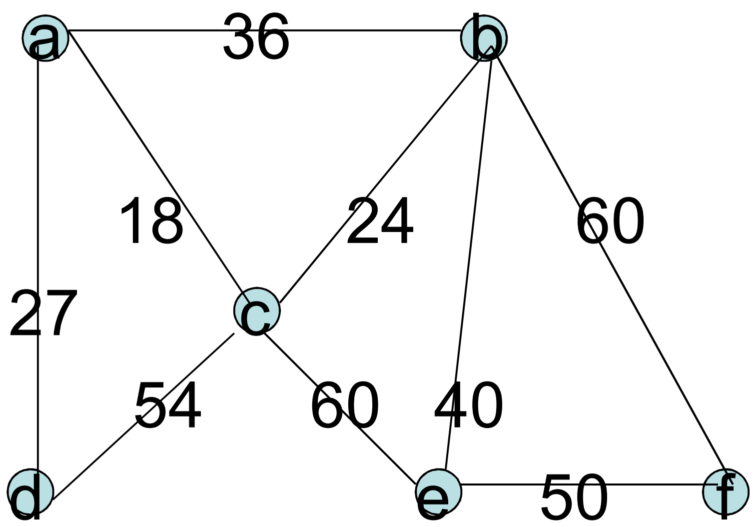
练习4－1的图

- 可以用完全二元树对该问题建模。视一棵完全二元树为一场单淘汰赛的赛程表，每片叶子代表参赛选手，分支结点代表一场2选1的比赛。现树中有t片叶子，i个分支结点，考虑t和i之间的关系。因为每场比赛都淘汰1名选手，而比赛结束时，除1名冠军外，其他选手都被淘汰，所以比赛的场数比参赛的选手数少1,有i=t-1。现是7名选手参赛所以要进行6场比赛。
- 将其推广到完全m元树，即由t名选手参加的每场m选1的淘汰赛，每场要淘汰m-1名，比赛结束时剩1名选手，应该进行多少场比赛？
- (m-1)i=t-1场比赛。

- 4-2设T为无向树，T中结点的最大度数$\Delta(G)\geq k$,则T中至少有k片树叶.
- 证明：设T中有n个结点，则树中有n-1条边于是根据握手定理
- $\sum d(v_i)=2|E|=2(n-1)=2n-2$,设树中有x个度为１的结点，那麼T中另外n-x个结点的度数都大于等于2，其中至少有一个度为$\Delta(G)$的结点。所以有
- $\sum d(v_i)= 2n-2 \geq x+2(n-x-1)+ \Delta(G)$
- $=2n-2+ \Delta(G)-x$
- 于是$x \geq \Delta(G) \geq k$问题得证.

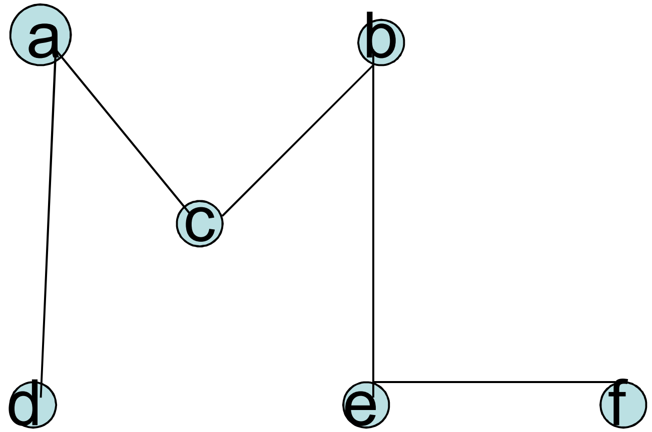
- 4-3设T是非平凡无向树，T中结点数大于等于2。T中度数最大的结点有2个，它们的度数为k(k≥2)。证明：T中至少有2k-2片树叶
- 证明：设T中有n_t片叶子，t个度数在[2,k-1]之间的结点，2个度数为k的结点。
- 于是有：$\sum d(v_i)=2|E|=2(n-1)$
- $=2(n_t+t+2-1)$
- $=2n_t+2t+2 \qquad (1)$
- 而叶子结点的度数之和为n_t, 2 个度数为k的结点度数为2k,t个度数结点的度数之和大于等于2t,于是有：

- $\sum d(v_i) \geq n_t+2t+2k$ (2)
- 两式连立得$2n_t+2t+2 \geq n_t+2t+2k$
- $n_t \geq 2k-2$
- 即T中至少有2k-2片叶子.
- 4-4六个不同的岛屿间建设了7座大桥，下图给出了桥和岛屿的关系，结点代表岛屿，边代表桥，边上的数字代表建桥花费的代价，不幸的是一次海潮冲毁了所有的大桥，政府要重修部分大桥，要求各岛相连，花费代价最小，请给出方案.
-



4-4的图

- 解：该问题可以化为求解最小生成树的问题．最小生成树如下：



- 代价为：18+24+27+40+50=1５9亿元

- 4-5设有一台计算机，它的指令系统包含一条加法指令，该指令一次最多计算3个浮点数的和，如果计算20个浮点数的和，最少要运行该指令多少次？
- 解：把20个浮点数看成3元树的20片叶子，分支结点看成是执行一次3个浮点数的运算．于是问题转为求分支结点的个数．
- 本题即求非叶结点的个数．
- 20/3 =6…2即三叶父为6个,2叶父结点为1个6/3=2三叶父结点的父结点2个，加原来的2叶父结点为 3 /3＝ 1 为根结点，是有
- 非叶结点数＝6+2+1+1=10最少要运行该指令10次

- 4-6设二元树有3个度为3的结点，1个度为2的结点，求叶结点的个数？
- 解：设叶结点为n_t,于是有
- $\sum d(v_i)=2m=2(n-1)=2(n_t+3+1-1)=2n_t+6$
- 而$\sum d(v_i)= n_t * 1+3*3+1*2$于是有
- $n_t * 1+3*3+1*2 = 2n_t+6$整理得
- $n_t = 5$
- 此二元树有5片叶子.

- 4-7一棵无向树T顶点度数最大为k(k≥2)。其中有2个度为2的顶点，3个度为3的顶点，…，k个度为k的顶点。求该无向树的叶子数。
- 解： $\sum d(v_i)=2(n-1)=2(2+3+\cdots+k+n_t-1)$
- $=2(1+3+\cdots+k+n_t)$ 其中n_t为叶子.
- $\sum d(v_i)=2*2+3*3+\cdots+k*k+n_t$于是
- $2*2+3*3+\cdots+k*k+n_t= 2(1+3+\cdots+k+n_t)$
- $=2+2*3+2*4+\cdots+2k+2n_t$
- 整理解得$n_t= 2*2+3*3+\cdots+k*k-(2+2*3+2*4+\cdots+2k)$

- $n_t=(2*2-2)+(3*3-2*3)+(4*4-2*4)+\cdots+(k*k-2*k)=2+3*1+4*2+\cdots+k*(k-2)$

·

- $= 2+\sum_{i=3}^{k} i*(i-2)$。

- 4-8 证明以下结论。
- 任何二叉树有奇数个节点。
- 证明：在二叉树中，任何节点的出度不是0，就是2；假设出度为2的节点有x个，则该二叉树的出度之和为2x；设二叉树共有n个节点，这些节点中除了根节点的入度为0，其余节点的入度都为1，因此，所有节点的入度之和为n-1。由图的性质，可知二叉树的出度之和与入度之和相等。
- 即n-1=2x， n=2x+1，因此，无论x如何取值，二叉树的节点总数n都是奇数，得证。

- **4-9n**阶二叉树的叶子节点数目为**(n+1)/2**。
- 其中**n**为结点数.
- 证明：在二叉树中，出度为0的节点是叶子节点，出度为2的节点是分支节点，设分支节点个数为x，由上题证明过程可知，n=2x+1, x=(n-1)/2。因此，叶子节点的个数为n-x=(n+1)/2。

- 4-10证明n阶二叉树的高度h满足
- $\log_2(n+1)-1 \le h \le (n-1)/2$
- 证明：先证$\log_2(n+1)-1 \le h$
- 即证$\log_2(n+1) \le h+1$
- 即证$n+1 \le 2^{(h+1)}$
- i)对h施行归纳法，当h=1时,二叉树有3个结点，$3+1 \le 2^{(1+1)}$命题为真.
- ii)假设h=k时命题为真，即
- $n_k+1 \le 2^{(k+1)}$，其中n_k为h为k时的结点数.

- iii)往证h=k+1时命题为真，即证
- $n_{k+1}+1 \le 2^{((k+1)+1)}$为真，其中$n_{k+1}$为h为k+1时的结点数.
- 由归纳假设知：
- $n_k+1 \le 2^{(k+1)}$
- 对上式两边同乘以2得
- $2*(n_k+1) \le 2* 2^{(k+1)}$
- $2n_k+2 \le 2^{(k+1+1)}$ (1)
- 因为二叉树高度每增加１，n_{k+1}比n_k最多增加n_k＋１个结点(即２倍的叶数)，至少增加２个结点.

- 于是应有： $n_k+(n_k+1)\geq n_{k+1}$
- 对上式两边加1得
- $2n_k+2\geq n_{k+1}+1$ (2)
- 由(1)和(2)得
- $n_{k+1}+1\leq 2n_k+2\leq 2^{(k+1+1)}$
- 综上对一切自然数n有
- $\log_2(n+1)-1\leq h.$
- 再证 $h\leq(n-1)/2$
- 仍然对h施用归纳法
- i)h=1时， $1\leq(3-1)/2=1$ 命题为真
-
-

- ii)假设h=k时命题为真，即
- **$k \le (n_k-1)/2$**其中**n_k**为树高为**k**时的结点数. **(1)**
- **Iii)**往证**h=k+1**时命题为真，即证
- K+1**$\le (n_{k+1}-1)/2$**其中**n_{k+1}**为树高为**k+1**时的结点数.
- 因为二叉树高度增加一层，**n_{k+1}**比**n_k**至少增加 2 个结点，于是有
- **$n_k+2 \le n_{k+1}$**
- 对上式两边同除以 2 得**$(n_k+2)/2 \le n_{k+1}/2$**

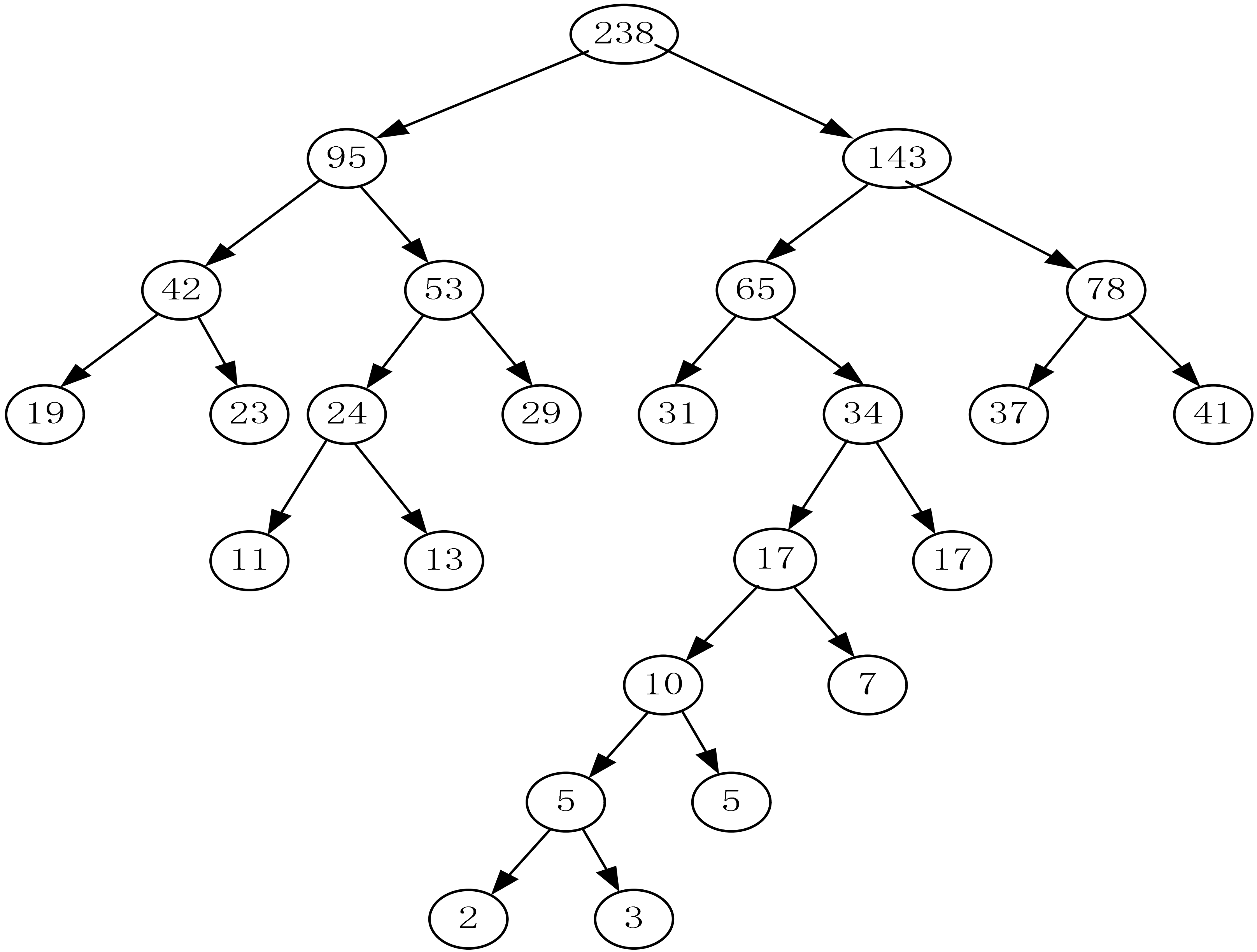
- 对上式两边同时减去1/2应有
- **$(n_k+1)/2 \le (n_{k+1}-1)/2$**再由**(1)**式知
- **$k+1 \le (n_k+1)/2 \le (n_{k+1}-1)/2$**
- 综上对任何自然数**n**命题为真.

- 解法 2
- n阶二叉树的叶子节点有(n+1)/2个，分支节点有(n-1)/2个。利用(n-1)/2个节点构造一棵一元或二元树，设树高为m，则h=m+1。
- 考察(n-1)/2个节点构造的一棵一元或二元树，树高最大的情况是一元树，高度为(n-1)/2-1，因此，h最大值是(n-1)/2-1+1=(n-1)/2。
- 树高最小的情况是构造了一棵满二叉树，满二叉树的高度m和节点个数(n-1)/2满足关系$2^{m+1}-1=(n-1)/2$，解得$m=\log_2(n+1)-2$，因此h最小值是$\log_2(n+1)-1$。因此，$\log_2(n+1)-1\le h\le (n-1)/2$

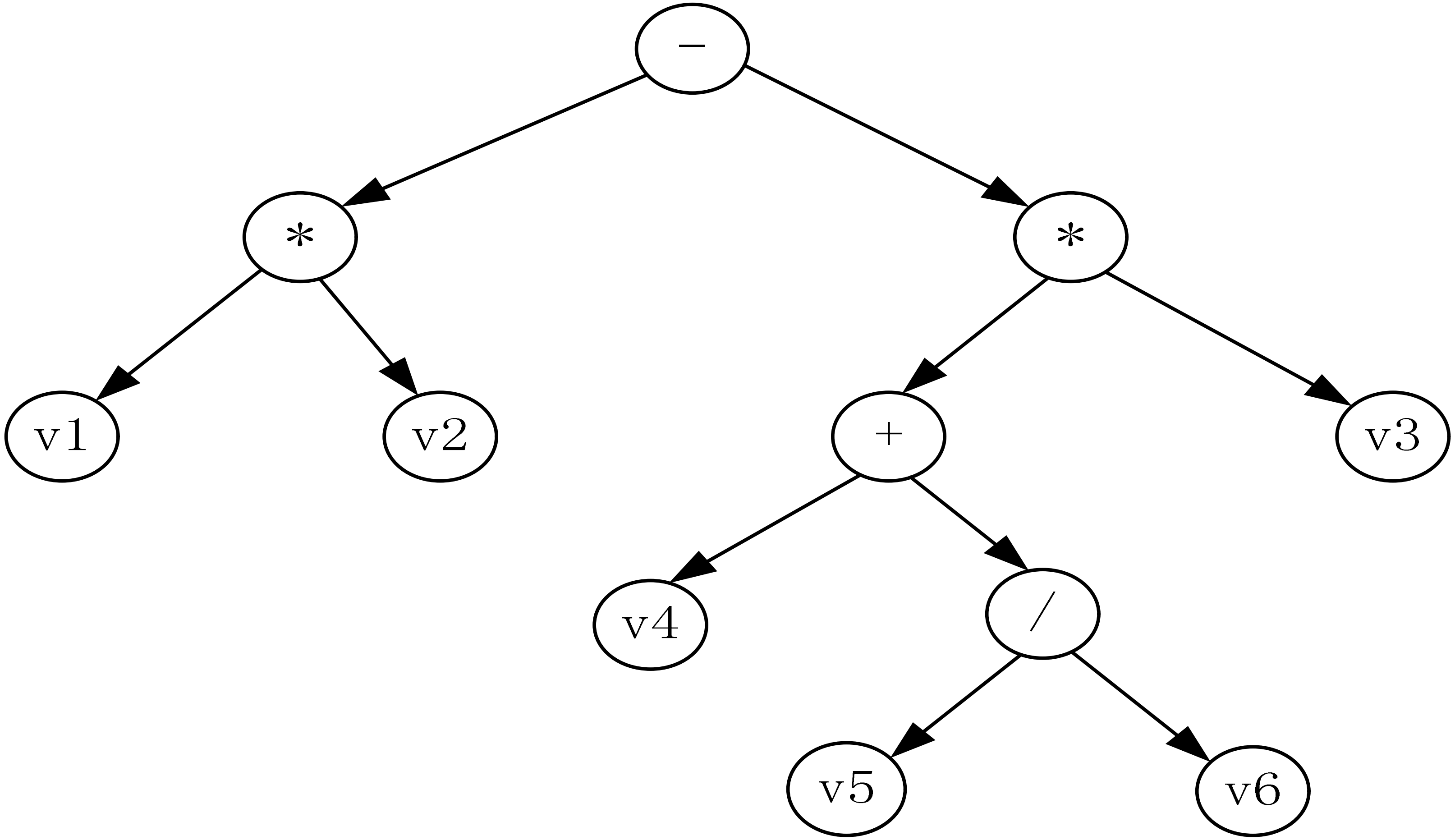
- 4-11下面给出的三个符号串集合中，哪些是前缀码？
- （1）A1={0,10,110,1111}
- （2）A2={1,01,001,0000}
- （3）A3={1,11,101,001,0011}
- 解：A1和A2的各个符号串互相不为前缀，因此A1和A2是前缀码，在A3中1是11的前缀，也是101的前缀，001是0011的前缀，因此A3不是前缀码。

- 4-12计算有13片叶子，权重分别为2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41的最优二叉树。
- 解：对于2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41，先组合两个最小的权2+3=5，得5,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；在所得到的序列中再组合5+5=10，得10,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41；再组合10+7=17，得17,11,13,17,19,23,29,31,37,41；继续下去。。。。，过程如下：

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
	5	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
		10	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
			17	11	13	17	19	23	29	31	37	41
			17		24	17	19	23	29	31	37	41
					24	34	19	23	29	31	37	41
					24	34		42	29	31	37	41
						34		42	53	31	37	41
								42	53	65	37	41
								42	53	65		78
									95	65		78
									95			143
												238


238
95
143
42
53
65
78
19
23
24
29
31
34
37
41
11
13
17
17
10
7
5
5
2
3

- 4-13用有向有序树表示表达式
- v1*v2-(v4+v5/v6)*v3



- 写出上面表达式树的前缀式，后缀式
- 对4-12求其叶加权最优三元树.
- 4-14如何从无向图Ｇ的邻接矩阵确定Ｇ是不是树？
- 解：无向树是没有回路的连通无向图
- １、若邻接矩阵的第i行，第i列(i=1,2,…n)全零，则不是树（不连通）。
- ２、主对角线上有１不是树（有到自身的回路）。
- ３、若第i行第j列的值为１并且第j行第k列的值为１，则检查第i行第k列的值是否为１，是１也不是树（i=1,2,…n,j=1,2,…n,k=1,2,…n)
-