FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN
EN ARCHITECTUUR

Gevorderde algoritmen

Bert De Saffel

Master in de Industriële Wetenschappen: Informatica Academiejaar 2018–2019

Gecompileerd op 29 juni 2019

UNIVERSITEIT
GENT

Inhoudsopgave

Deel I

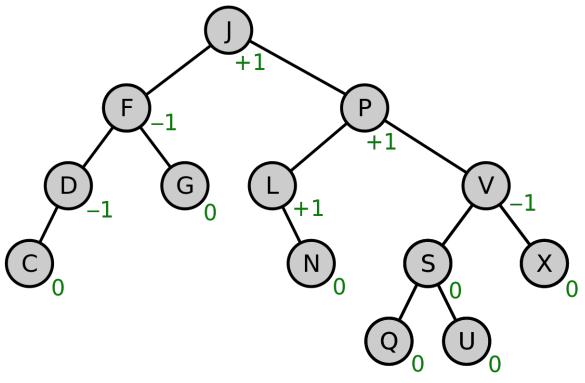
Gegevensstructuren II

Hoofdstuk 1

Efficiënte zoekbomen

1.1 Inleiding

- Uitvoeringstijd van operaties op een binaire zoekboom met hoogte h is $O(h)$.
- De hoogte h is afhankelijk van de toevoegvolgorde:
  - In het slechtste geval bekomt men een gelinkte lijst, zodat $h = O(n)$.
  - Als elke toevoegvolgorde even waarschijnlijk is, dan is de verwachtingswaarde voor de hoogte $h = O(\lg n)$ met n het aantal gegevens.
    - ! Geen realistische veronderstelling.
- Drie manieren om de efficiëntie van zoekbomen te verbeteren:
  1. **Elke operatie steeds efficiënt maken.**
     (a) AVL-bomen.
     - Hoogteverschil Δh van de twee deelbomen van elke knoop is kleiner of gelijk aan 1.
     - Δh wordt opgeslagen in de knoop zelf.



Figuur 1.1: Een AVL-boom. De groene cijfers stellen de hoogteverschillen voor van de twee deelbomen voor elke knoop.

     (b) 2-3-bomen.
     - Elke knoop heeft 2 of 3 kinderen.

- Elk blad heeft dezelfde diepte.
- Bij toevoegen of verwijderen wordt het ideale evenwicht behouden door het aantal kinderen van de knopen te manipuleren.

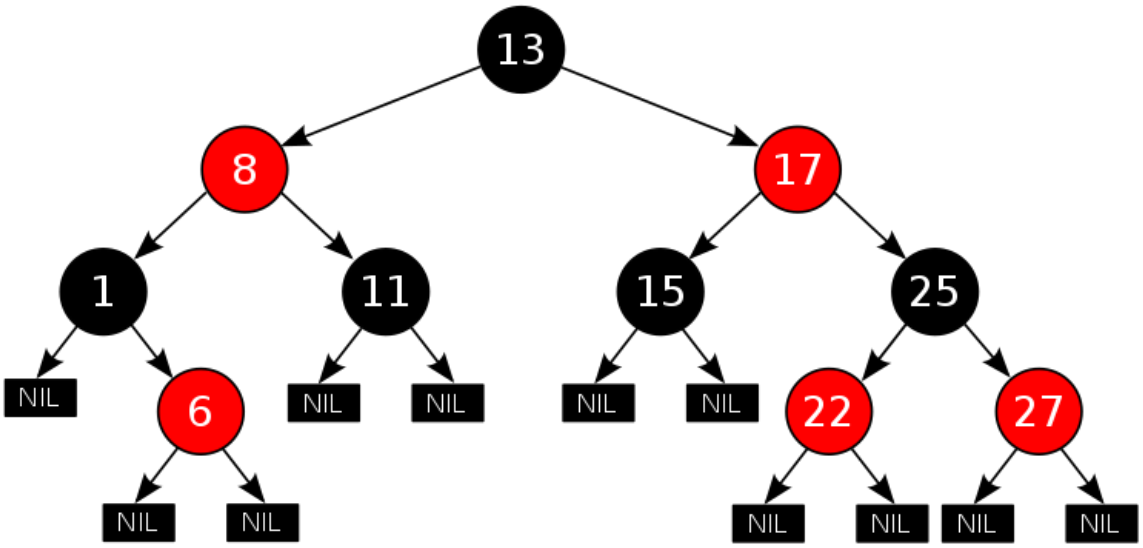
(c) 2-3-4-bomen.
- Eenvoudiger dan 2-3-bomen om te implementeren.

(d) Rood-zwarte bomen (sectie 1.2.1).

2. **Elke reeks operaties steeds efficiënt maken.**
   (a) Splaybomen (sectie 1.3).
   - De vorm van de boom wordt meermaals aangepast.
   - Elke reeks opeenvolgende operaties is gegarandeerd efficiënt.
   - Een individuele operatie kan wel traag uitvallen.
   - *Geamortiseerd* is de performantie per operatie goed.
3. **De gemiddelde efficiëntie onafhankelijk maken van de operatievolgorde.**
   (a) Gerandomiseerde zoekbomen (sectie 1.4).
   - Gebruik van een random generator.
   - De boom is random, onafhankelijk van de toevoeg- en verwijdervolgorde.
   - Verwachtingswaarde van de hoogte h wordt dan $O(\lg n)$.

1.2 Rood-zwarte bomen

1.2.1 Definitie en eigenschappen



Figuur 1.2: Een rood-zwarte boom. De `NIL` knopen stellen virtuele knopen voor.

- **Definitie:**
  - Een binaire zoekboom.
  - Elke knoop is rood of zwart gekleurd.
  - Elke virtuele knoop is zwart. Een virtuele knoop is een knoop die geen waarde heeft, maar wel een kleur. Deze vervangen de nullwijzers.

- Een rode knoop heeft steeds twee zwarte kinderen
- Elke mogelijke weg vanuit een knoop naar een virtuele knoop bevat evenveel zwarte knopen. Dit aantal wordt de *zwarte hoogte* genoemd
- De wortel is zwart.

- **Eigenschappen:**
  - Een deelboom met wortel w en zwarte hoogte z heeft tenminste $2^z - 1$ inwendige knopen.
  - De hoogte van een rood-zwarte boom met n knopen is steeds $O(\lg n)$.
    - Er zijn nooit twee opeenvolgende rode knopen op elke weg vanuit een knoop naar een virtuele knoop $\rightarrow z \geq h/2$.
    - Substitutie in de eerste eigenschap geeft:

$$\begin{aligned} n &\geq 2^z - 1 \geq 2^{h/2} - 1 \\ \rightarrow h &\leq 2\lg(n+1) \end{aligned}$$

1.2.2 Zoeken

- De kleur speelt geen rol, zodat de rood-zwarte boom een gewone binaire zoekboom wordt.
- De hoogte is wel gegerandeerd $O(\lg n)$.
- Zoeken naar een willekeurige sleutel is dus $O(\lg n)$.

1.2.3 Toevoegen en verwijderen

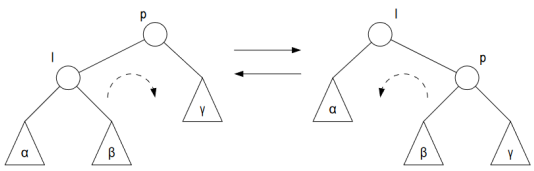
- Element toevoegen of verwijderen, zonder rekening te houden met de kleur, is ook $O(\lg n)$.

! Geen garantie dat deze gewijzigde boom nog rood-zwart zal zijn.

- Twee manieren om toe te voegen:
  1. **Bottom-up:**
     - Voeg knoop toe zonder rekening te houden met de kleur.
     - Herstel de rood-zwarte boom, te beginnen bij de nieuwe knoop, en desnoods tot bij de wortel.
  2. **Top-down:**
     - Pas de boom aan langs de dalende zoekweg.

✓ Efficiënter dan bottom-down aangezien er geen ouderwijzers of een stapel nodig is.

1.2.4 Rotaties



Figuur 1.3: Rotaties

- Wijzigen de vorm van de boom, maar behouden de inorder volgorde van de sleutels.
- Moet enkel pointers aanpassen, en is dus $O(1)$.
- **Rechtste rotatie** van een ouder p en zijn linkerkind l:
  - Het rechterkind van l wordt het linkerkind van p.
  - De ouder van p wordt de ouder van l.
  - p wordt het rechterkind van l.
- **Linkse rotatie** van een ouder p en zijn rechterkind r:
  - Het linkerkind van r wordt het rechterkind van p.
  - De ouder van r wordt de ouder van p.
  - p wordt het linkerkind van l.

1.2.5 Bottom-up rood-zwarte bomen

ToDo: vanaf hier

1.2.6 Top-down rood-zwarte bomen

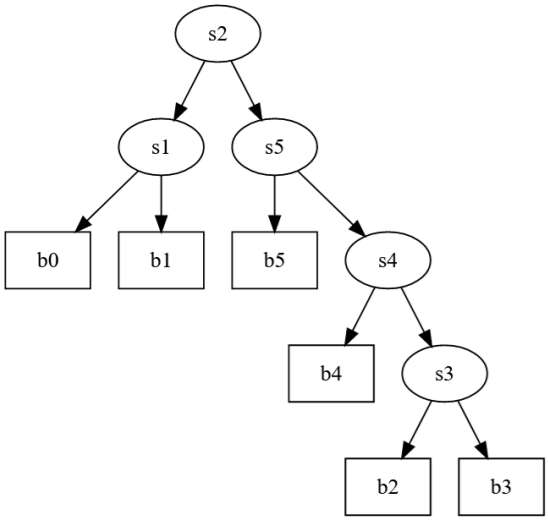
1.3 Splaybomen

1.4 Gerandomiseerde zoekbomen

Hoofdstuk 2

Toepassingen van dynamisch programmeren

2.1 Optimale binaire zoekbomen



Figuur 2.1: Een optimale binaire zoekboom met bijhorende kansentabel.

i	0	1	2	3	4	5
p_i		0.15	0.10	0.05	0.10	0.20
q_i	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10

- Veronderstel dat de gegevens die in een binaire zoekboom moeten opgeslaan worden op voorhand gekend zijn.
- Veronderstel ook dat de waarschijnlijkheid gekend is waarmee de gegevens gezocht zullen worden.
- Tracht de boom zo te schikken zodat de verwachtingswaarde van de zoektijd minimaal wordt.

- De zoektijd wordt bepaald door de lengte van de zoekweg.
- De gerangschikte sleutels van de n gegevens zijn $s_1, \ldots, s_n$.
- De $n+1$ bladeren zijn $b_0, \ldots, b_n$.
  - Elk blad staat voor een afwezig gegeven die in een deelboom op die plaats had moeten zitten.
  - Het blad b_0 staat voor alle sleutels kleiner dan s_1.
  - Het blad b_n staat voor alle sleutels groter dan s_n.
  - Het blad b_i staat voor alle sleutels gorter dan s_i en kleiner dan s_{i+1}, met $1 \leq i < n$
- De waarschijnlijkheid om de i-de sleutel s_i te zoeken is p_i.
- De waarschijnlijkheid om alle afwezige sleutels, voorgesteld door een blad b_i, te zoeken is q_i.
- De som van alle waarschijnlijkheden moet 1 zijn:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$$

- Als de zoektijd gelijk is aan het aantal knopen op de zoekweg (de diepte plus één), dan is de verwachtingswaarde van de zoektijd

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(\text{diepte}(s_i) + 1) + \sum_{i=0}^{n} q_i(\text{diepte}(b_i) + 1)$$

- Deze verwachtingswaarde moet geminimaliseert worden.
  - Boom met minimale hoogte is niet voldoende.
  - Alle mogelijke zoekbomen onderzoeken is ook geen optie, hun aantal is

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} &\sim \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \\ &\sim \frac{1}{n+1} \cdot \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \\ &\sim \Omega\left(\frac{4^n}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

  - ✓ Dynamisch programmeren biedt een uitkomst.
- Een optimalisatieprobleem komt in aanmerkingen voor een efficiënte oplossing via dynamisch programmeren als het:
  1. het een **optimale deelstructuur** heeft;
  2. de **deelproblemen onafhankelijk maar overlappend** zijn.
- Is dit hier van toepassing?
  - Is er een optimale deelstructuur?
    - Als een zoekboom optimaal is, moeten zijn deelbomen ook optimaal zijn.
    - Een optimale oplossing bestaat uit optimale oplossingen voor deelproblemen.
  - Zijn de deelproblemen onafhankelijk?
    - Ja want deelbomen hebben geen gemeenschappelijke knopen.

    - Zijn de deelproblemen overlappend?
        - Elke deelboom bevat een reeks opeenvolgende sleutels $s_i, \ldots s_j$ met bijhorende bladeren $b_{i-1}, \ldots, b_j$.
        - Deze deelboom heeft een wortel s_w waarbij $(i \leq w \leq j)$.
        - De linkse deelboom bevat de sleutels $s_i, \ldots, s_{w-1}$ en bladeren $b_{i-1}, \ldots, b_{w-1}$.
        - De rechtse deelboom bevat de sleutels $_{w+1}, \ldots, s_j$ en bladeren $b_w, \ldots, b_j$.
        - Voor een optimale deelboom met wortel s_w moeten deze beide deelbomen ook optimaal zijn.
        - Deze wordt gevonden door:
            1. achtereenvolgens elk van zijn sleutels $s_i, \ldots, s_j$ als wortel te kiezen;
            2. de zoektijd voor de boom te berekenen door gebruikte maken van de zoektijden van de optimale deelbomen;
            3. de wortel te kiezen die de kleinste zoektijd oplevert.

- We willen dus de kleinste verwachte zoektijd $z(i, j)$.
- Dit moet gebeuren voor alle i en j waarbij:
    - $1 \leq i \leq n + 1$
    - $0 \leq j \leq n$
    - $j \geq i - 1$
- De optimale boom heeft dus de kleinste verwachte zoektijd $z(1, n)$.
- Hoe $z_w(i, j)$ bepalen voor een deelboom met wortel s_w?
    - Gebruik de kans om in de wortel te komen.
    - Gebruik de optimale zoektijden van zijn deelbomen, $z(i, w - 1)$ en $z(w + 1, j)$.
    - Gebruik ook de diepte van elke knoop, maar elke knoop staat nu op een niveau lager.
        - De bijdrage tot de zoektijd neemt toe met de som van de zoekwaarschijnlijkheden.

$$g(i, j) = \sum_{k=i}^{j} p_k + \sum_{k=i-1}^{j} q_k$$

    - Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} z_w(i, j) &= p_w + (z(i, w - 1) + g(i, w - 1)) + (z(w + 1, j) + g(w + 1, j)) \\ &= z(i, w - 1) + z(w + 1, j) + g(i, j) \end{aligned}$$

- Dit moet minimaal zijn → achtereenvolgens elke sleutel van de deelboom tot wortel maken.
    - De index w doorloopt alle waarden tussen i en j.

$$\begin{aligned} z(i, j) &= \min_{i \leq w \leq j} \{z_w(i, j)\} \\ &= \min_{i \leq w \leq j} \{z(i, w - 1) + z(w + 1, j) + g(i, j)\} \end{aligned}$$

- Hoe wordt de optimale boom bijgehouden?
    - Hou enkel de index w bij van de wortel van elke optimale deelboom.
    - Voor de deelboom met sleutels $s_i, \ldots, s_j$ is de index $w = r(i, j)$.
- Implementatie:

- Een recursieve implementatie zou veel deeloplossingen opnieuw berekenen.
- Daarom **bottom-up** implementeren. Maakt gebruik van drie tabellen:
  1. Tweedimensionale tabel $z[1..n+1, 0..n]$ voor de waarden $z(i, j)$.
  2. Tweedimensionale tabel $g[1..n+1, 0..n]$ voor de waarden $g(i, j)$.
  3. Tweedimensionale tabel $r[1..n, 1..n]$ voor de indices $r(i, j)$.
- Algoritme:
  1. Initialiseer de waarden $z(i, i-1)$ en $g(i, i-1)$ op $q[i-1]$.
  2. Bepaal achtereenvolgens elementen op elke evenwijdige diagonaal, in de richting van de tabelhoek linksboven.
     - Voor $z(i, j)$ zijn de waarden $z(i, i-1), z(i, i), \ldots, z(i, j-1)$ van de linkse deelboom nodig en de waarden $z(i+1, j), \ldots, z(j, j), z(j+1, j)$ van de rechtse deelbom nodig.
     - Deze waarden staan op diagonalen onder deze van $z(i, j)$.

- Efficiëntie:
  - **Bovengrens:** drie verneste lussen $\rightarrow O(n^3)$.
  - **Ondergrens:**
    - Meeste werk bevindt zich in de binneste lus.
    - Een deelboom met sleutels $s_i, \ldots s_j$ heeft $j - i + 1$ mogelijke wortels.
    - Elke test is $O(1)$.
    - Dit werk is evenredig met

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} (j - i + 1) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ \Rightarrow \quad & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \Rightarrow \quad & \Omega(n^3) \end{aligned}$$

  - **Algemeen:** $\Theta(n^3)$.
  - Kan met een bijkomende eigenschap (zien we niet in de cursus) gereduceerd worden tot $\Theta(n^2)$.

2.2 Langste gemeenschappelijke deelsequentie

- Een deelsequentie van een string wordt bekomen door nul of meer stringelementen weg te laten.
- Elke deelstring is een deelsequentie, maar niet omgekeerd.
- Een langste gemeenschappelijke deelsequentie (LGD) van twee strings kan nagaan hoe goed deze twee strings op elkaar lijken.
- Geven twee strings:
  - $X = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$
  - $Y = \langle y_0, y_1, \ldots, y_{m-1} \rangle$
- Hoe LGD bepalen?

- Is er een optimale deelstructuur?
  - Een optimale oplossing maakt gebruik van optimale oplossingen voor deelproblemen.
  - De deelproblemen zijn paren prefixen van de twee strings.
  - Het prefix van X met lengte i is X_i.
  - Het prefix van Y met lengte j is Y_j.
  - De ledige prefix is X_0 en Y_0.
- Zijn de deelproblemen onafhankelijk?
  - Stel $Z = \langle z_0, z_1, \ldots, z_{k-1} \rangle$ de LGD van X en Y. Er zijn drie mogelijkheden:
    1. Als $n = 0$ of $m = 0$ dan is $k = 0$.
    2. Als $x_{n-1} = y_{m-1}$ dan is $z_{k-1} = x_{n-1} = y_{m-1}$ en is Z een LGD van X_{n-1} en Y_{m-1}.
    3. Als $x_{n-1} \neq y_{m-1}$ dan is Z een LGD van X_{n-1} en Y of een LGD van X en Y_{m-1}.
- Zijn de deelproblemen overlappend?
  - Om de LGD van X en Y te vinden is het nodig om de LGD van X en Y_{m-1} als van X_{n-1} en Y te vinden.

- LGD kan bepaald worden door recursieve vergelijking:

$$c[i,j] = \begin{cases} 0 & \text{als } i = 0 \text{ of } j = 0 \\ c[i-1, j-1] + 1 & \text{als } i > 0 \text{ en } j > 0 \text{ en } x_i = y_j \\ \max(c[i, j-1], c[i-1, j]) & \text{als } i > 0 \text{ en } j > 0 \text{ en } x_i \neq y_j \end{cases}$$

- De lengte van de LGD komt overeen met $c[n, m]$.
- De waarden $c[i, j]$ kunnen eenvoudig per rij van links naar rechts bepaald worden door de recursierelatie.
- Efficiëntie:
  - We beginnen de tabel in te vullen vanaf $c[1, 1]$ (als $i = 0$ of $j = 0$ zijn de waarden 0).
  - De tabel c wordt rij per rij, kolom per kolom ingevuld.
  - De vereiste plaats en totale performantie is beiden $\Theta(nm)$.

Deel II

Grafen II

Hoofdstuk 3

Stroomnetwerken

- Eigenschappen van een **stroomnetwerk**:
  - Is een gerichte graaf.
  - Heeft twee speciale knopen:
    1. Een **producent**.
    2. Een **verbruiker**.
  - Elke knoop van de graaf is bereikbaar vanuit de producent.
  - De verbruiker is vanuit elke knoop bereikbaar.
  - De graaf mag lussen bevatten.
  - Elke verbinding heeft een capaciteit.
  - Alles wat in een knoop toestroomt, moet ook weer wegstromen. De stroom is dus **conservatief**.

3.1 Maximalestroomprobleem

- Zoveel mogelijk materiaal van producent naar verbruiker laten stromen, zonder de capaciteiten van de verbindingen te overschrijden.
- Wordt opgelost via de methode van **Ford-Fulkerson**.
  - Iteratief algoritme.
  - Bij elke iteratie neemt de nettostroom vanuit de producent toe, tot het maximum bereikt wordt.
- Elke verbinding (i, j) heeft:
  - een capaciteit $c(i, j)$;
    - Als er geen verbinding is tussen twee knopen, dan wordt er toch een verbinding gemaakt met capaciteit 0. Dit dient om wiskundige notaties te vereenvoudigen.
  - de stroom $s(i, j)$ die er door loopt, waarbij $0 \leq s(i, j) \leq c(i, j)$.
- De totale nettostroom f van alle knopen K in de graaf is dan

$$f = \sum_{j \in K} (s(p, j) - s(j, p))$$

- $s(p, j)$ is de uitgaande stroom vanuit de producent p naar knoop j.
- $s(j, p)$ is de totale inkomende stroom van elke knoop j naar producent p (komt bijna nooit voor maar just in case).

- De verzameling van stromen voor alle mogelijke knopenparen in beide richtingen wordt een **stroomverdeling** genoemd.
- De verzameling mogelijke stroomtoename tussen elk paar knopen wordt het **restnetwerk** genoemd.
  - Het restnetwerk bevat dezelfde knopen, maar niet noodzakelijk dezelfde verbindingen en capaciteiten.
  - In het restnetwerk wordt de **vergrotende weg** gezocht.
  - Als er geen vergrotende weg is dan zal de networkstroom maximaal zijn.
  - Voor elk mogelijke stroomverdeling bestaat er een overeenkomstig restnetwerk.

Deel III

Strings

Hoofdstuk 4

Gegevensstructuren voor strings

4.1 Inleiding

- Efficiënte gegevensstructuren kunnen een zoeksleutel lokaliseren door elementen één voor één te testen.
- Dit heet **radix search**.
- Meerdere soorten boomstructuren die radix search toepassen.

! Veronderstel dat geen enkele sleutel een prefix is van een ander.

De sleutels `test` en `testen` zullen dus nooit samen voorkomen in de boom aangezien `test` een prefix is van `testen`.

4.2 Digitale zoekbomen

- Sleutels worden opgeslagen in de knopen.
- Zoeken en toevoegen verloopt analoog.
- Slechts één verschil:
  - De juiste deelboom wordt niet bepaald door de zoeksleutel te vergelijken met de sleutel in de knoop.
  - Wel door enkel het volgende element (van links naar rechts) te vergelijken.
  - Bij de wortel wordt het eerste sleutelelement gebruikt, een niveau dieper het tweede sleutelelement, enz.
- Hier zijn de sleutelelementen beperkt tot bits → **binaire digitale zoekbomen**.
- Bij een knoop op diepte i wordt bit $(i + 1)$ van de zoeksleutel gebruikt om af te dalen in de juiste deelboom.

! De zoeksleutels zijn niet noodzakelijk in volgorde van toevoegen.

  - Sleutels in de linkerdeelboom van een knoop op diepte i zijn kleiner dan deze in de rechterdeelboom, maar ToDo: wat?

- De hoogte van een digitale zoekboom wordt bepaald door het aantal bits van de langste sleutel.

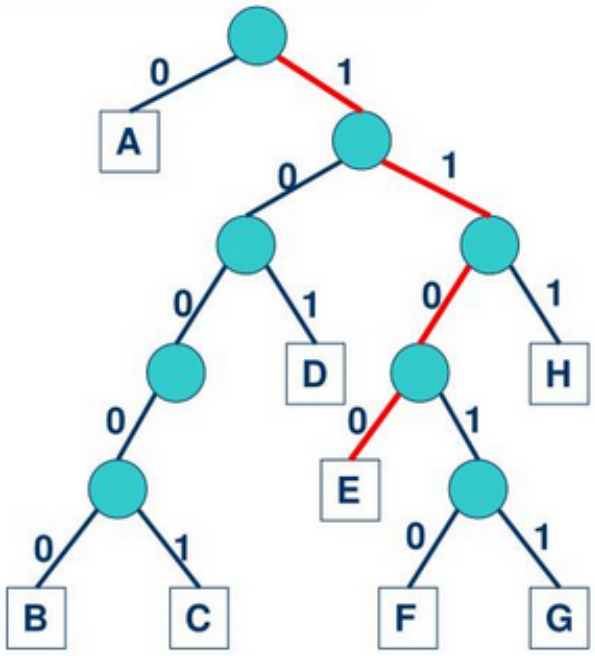
- Performantie is vergelijkbaar met rood-zwarte bomen:
  - Voor een groot aantal sleutels met relatief kleine bitlengte is het zeker beter dan een binaire zoekboom en vergelijkbaar met die van een rood-zwarte boom.
  - Het aantal vergelijkingen is trouwens nooit meer dan het aantal bits van de zoeksleutel.
  - ✓ Implementatie van een digitale zoekboom is eenvoudiger dan die van een rood-zwarte boom.
  - ! De beperkende voorwaarde is echter dat er efficiënte toegang nodig is tot de bits van de sleutels.

4.3 Tries

- Een digitale zoekstructuur die wel de volgorde van de opgeslagen sleutels behoudt.

4.3.1 Binaire tries

string	node
01011	A
10000	B
10001	C
10101	D
11001	E
11010	F
11011	G
11101	H



Figuur 4.1: Een voorbeeld van een binaire trie met opgeslagen sleutels A, B, C, D, E, F, G en H. Elk van deze sleutels heeft een (willekeurige) bitrepresentatie die de individuele elementen van de sleutels voorstelt. De zoekweg van de sleutel E wordt aangegeven door rode verbindingen.

- Zoekweg wordt bepaald door de opeenvolgende bits van de zoeksleutel.
- Sleutels worden enkel opgeslaan in de bladeren.
  - De boom *inorder* overlopen geeft de sleutels gerangschikt terug.
  - De zoeksleutel moet niet meer vergeleken worden met elke knoop op de zoekweg.

- Twee mogelijkheden bij **zoeken** en **toevoegen**:
  1. Indien een lege deelboom bereikt wordt, bevat de boom de zoeksleutel niet. De zoeksleutel kan dan in een nieuw blad op die plaats toegevoegd worden.
  2. Anders komen we in een blad. De sleutel in dit blad **kan** eventueel gelijk zijn aangezien ze zeker dezelfde beginbits hebben.
     - Als we bijvoorbeeld `testen` zoeken maar de boom bevat enkel de sleutel `test`, zullen we in het blad met de sleutel `test` uitkomen aangezien de eerste 4 elementen hetzelfde zijn. De sleutels zijn echter niet gelijk.
     - Indien de sleutels niet hetzelfde zijn, zijn er terug twee mogelijkheden:
       (a) **Het volgende bit verschilt.** Het blad wordt vervangen door een knoop met twee kinderen die de twee sleutels bevat.
       (b) **Een reeks van opeenvolgende bits is gelijk.** Het blad wordt vervangen door een reeks van inwendige knopen, zoveel als er gemeenschappelijke bits zijn. Bij het eerste verschillende krijgen we terug het eerste geval.

! Wanneer opgeslagen sleutels veel gelijke bits hebben, zijn er veel knopen met één kind.

  - Het aantal knopen is dan ook hoger dan het aantal sleutels.
  - Een trie met n gelijkmatige verdeelde sleutels heeft gemiddeld $n/\ln 2 \approx 1.44n$ inwendige knopen.

- De structuur is onafhankelijk van de toevoegvolgorde van de sleutels.
- De sleutels in de zoekweg worden enkel getest op de bit die op dat niveau van toepassing is.

4.3.2 Meerwegstries

- Heeft als doel de hoogte van een trie met lange sleutels te beperken.
- Meerdere sleutelbits in één enkele knoop vergelijken.
- Een sleutelelement kan m verschillende waarden aannemen, zodat elke knoop (potentiaal) m kinderen heeft $\rightarrow$ m-wegsboom.

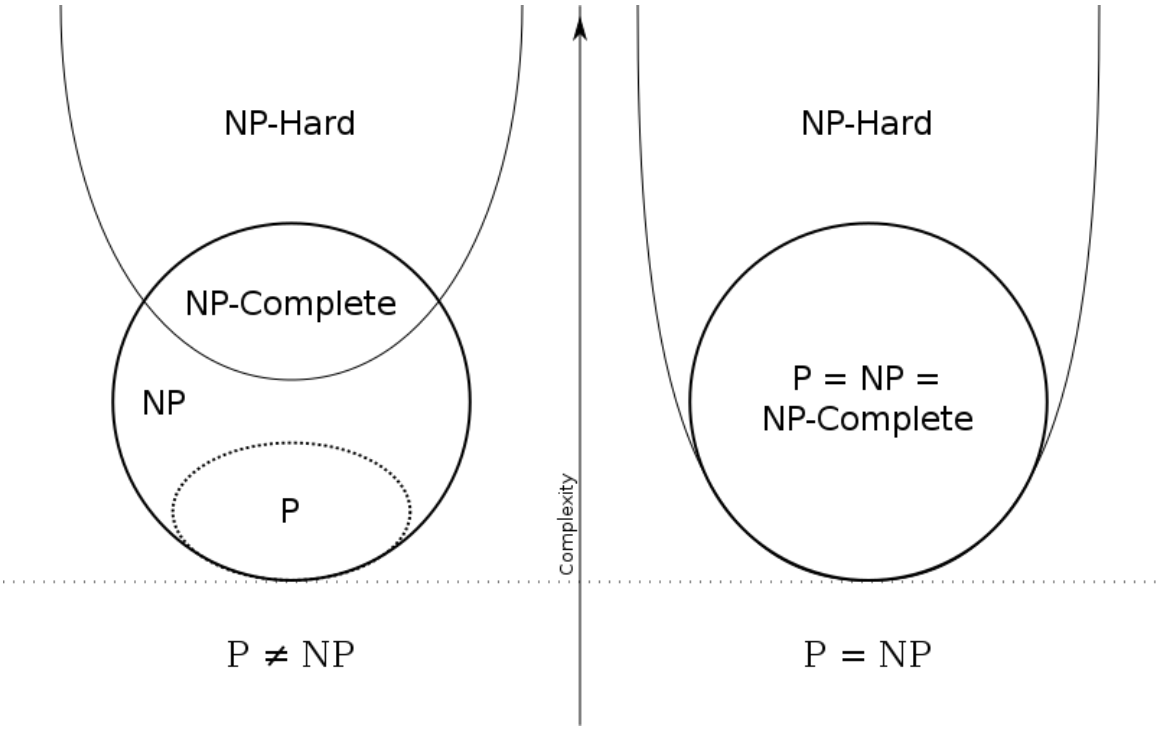
Deel IV

Hardnekkige problemen

Hoofdstuk 5

NP

5.1 Complexiteit: P en NP



Figuur 5.1: De linkse deelfiguur toont de verschillende complexiteitsklassen indien $P \neq NP$. De rechtse deelfiguur toont hetzelfde indien $P = NP$.

- Alle besproken algoritmen hadden een efficiënte oplossing.
- Hun uitvoeringstijd wordt begrensd door een **veelterm** zoals $O(n^2)$ of $O(n^2m)$.
- Sommige problemen hebben hebben geen efficiënte oplossing.
- Problemen worden onderverdeeld in **complexiteitsklassen**.
    - Beperking tot **beslissingsproblemen**, waarbij de uitvoer *ja* of *nee* is.

- Niet echt een beperking omdat elk probleem als een beslissingsproblemen kan geformuleerd worden.

5.1.1 Complexiteitsklassen

- De klasse **P** (**P**olynomiaal) bevat alle problemen waarvan de uitvoeringstijd begrensd wordt door een veelterm.
  - Op een realistisch computermodel.
    - Heeft een polynomiale bovengrens voor het werk dat in één tijdseenheid kan verricht worden.
  - Met een redelijke voorstelling van de invoergegevens (geen overbodige informatie, compact, ...).
  - Al de problemen in **P** worden als efficiënt oplosbaar beschouwd.
  - ! Waarom een veelterm? $O(n^{100})$ kan nauwelijks efficiënt genoemd worden.
    1. Meestal is de graad van de veelterm beperkt tot twee of drie.
    2. Veeltermen vormen de kleinste klasse functies die kunnen gecombineerd worden, en opnieuw een veelterm opleveren.
       - Men noemt dit een **gesloten klasse**.
       - Efficiënte algoritmen voor eenvoudigere problemen kunnen dus gecombineerd worden tot een efficiënt algoritme voor een complex probleem.
    3. De efficiëntiemaat blijft onafhankelijk van het computermodel.
- De klasse **NP** (**N**iet-deterministisch **P**olynomiaal) bevat alle problemen die door een niet-deterministische computer in polynomiale tijd kunnen opgelost worden en waarvan de oplossing kan gecontroleerd worden in polynomiale tijd.
  - Een niet-deterministische computer bevat hypothetisch een oneindig aantal processoren, waarvan er op tijdstap t, er k kunnen aangesproken van worden. De processoren werken niet samen, maar kunnen wel hun deel van het probleem oplossen.
  - Elk probleem uit **P** behoort tot **NP**.
  - Niet geweten of er probleem in **NP** zit die niet tot **P** behoort $\rightarrow$ **P** vs **NP** probleem (Figuur 5.1).
  - Wel geweten dat er problemen zijn die niet in **NP** zitten, en dus ook niet in **P**.
- De klasse **NP-hard** bevat alle problemen die minstens even zwaar zijn als elk **NP**-probleem.
  - Een probleem X dat gereduceerd kan worden naar een probleem Y betekent dat Y minstens even zwaar is als X.
- De klasse **NP-compleet** bevat alle problemen die **NP-hard** zijn, maar toch nog in **NP** zitten.
  - Als er één **NP-compleet** probleem bestaat die efficiënt oplosbaar zou zijn (en dus in **P** behoort), dan zouden alle problemen uit **NP** ook efficiënt oplosbaar zijn, zodat **P** = **NP**.
  - NP-complete problemen kunnen op verschillende manieren aangepakt worden:
    - Backtracking en snoeien.
    - Speciale gevallen oplossen met efficiënte algoritmen.
    - Het kan zijn dat de gemiddelde uitvoeringstijd toch goed is.
    - Gebruik een benaderend algoritme.
    - Maak gebruik van heuristieken.

5.2 NP-complete problemen

- Overzicht van belangrijke NP-complete (optimalisatie)problemen.
- Om na te gaan of een probleem NP-compleet is, moet het herleid kunnen worden naar een basisvorm.

5.2.1 Het basisprobleem: SAT (en 3SAT)

- Gegeven:
  - Een verzameling logische variabelen $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_{|\mathcal{X}|}\}$.
  - Een verzameling logische uitspraken $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_{|\mathcal{F}|}\}$.
  - Elke uitspraak bestaat uit automaire uitspraken (atomen) samengevoegd met OF-operaties:

$$f_1 = x_2 \vee \overline{x_5} \vee x_7 \vee x_8$$

- Gevraagd:
  - Hoe moeten de waarden toegekend worden aan de variabelen uit $\mathcal{X}$ zodat elke uitspraak in $\mathcal{F}$ waar is?
- Elk NP-compleet probleem is reduceerbaar tot SAT.
- Een uitspraak met meer dan drie atomen kan herleidt worden naar een reeks uitspraken met elk drie atomen:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2 \vee \overline{x_5} \vee x_n \\ f_1' &= \overline{x_n} \vee x_7 \vee x_8 \end{aligned}$$

5.2.2 Vertex Cover

- Gegegeven:
  - Een ongerichte graaf.
- Gevraagd:
  - Hoe kan de kleinste groep knopen bepaald worden die minsten één eindknoop van elke verbinding bevat.