FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN
EN ARCHITECTUUR

Gevorderde algoritmen

Bert De Saffel

Master in de Industriële Wetenschappen: Informatica Academiejaar 2018–2019

Gecompileerd op 10 december 2019

UNIVERSITEIT
GENT

Inhoudsopgave

Deel I

Grafen II

Hoofdstuk 1

Toepassingen van diepte-eerst zoeken

- Notatie:
  - Het aantal knopen is n.
  - Het aantal verbindingen is m.
- In dit hoofdstuk worden **drie** toepassingen van diepte-eerst zoeken besproken:
  - Een componentengraaf opstellen.
  - Bruggen of scharnierpunten vinden.
  - Een methode die niet expliciet diepte-eerst zoeken gebruikt, maar toch er op lijkt om een eulercircuit te vinden in een graaf.

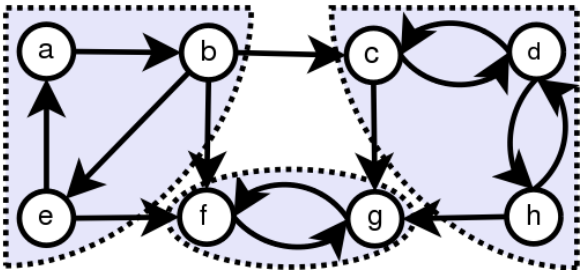
1.1 Enkelvoudige samenhang van grafen

1.1.1 Samenhangende componenten van een ongerichte graaf

- Een **samenhangende ongerichte graaf** is een graaf waarbij er een weg bestaat tussen elk paar knopen.
- Een **niet samenhangende ongerichte graaf** bestaat dan uit zo groot mogelijke samenhangende componenten.
- Diepte-eerst zoeken vindt alle knopen die met wortel van de diepte-eerst boom verbonden zijn.
  - Een ongerichte graaf is samenhangend wanneer die boom alle knopen bevat.
  - Als er meerdere bomen zijn, vormen deze de samenhangende componenten.
  - Diepte-eerst zoeken is $\Theta(n + m)$.

1.1.2 Sterk samenhangende componenten van een gerichte graaf

- Een **sterk samenhangende gerichte graaf** is een graaf waarbij er een weg tussen elk paar knopen in beide richtingen (niet perse dezelfde verbindingen) bestaat (cfr. figuur 1.1). Een graaf die niet sterk samenhangend is, bestaat uit zo groot mogelijke sterk samenhangende componenten.



Figuur 1.1: De componenten van een sterk samenhangende graaf. Merk op dat in 'in beide richtingen' enkel betrekken heeft tot de richtingen die er zijn. De knopen van het component $A - B - E$ bevat maar één richting maar is wel sterk samenhangend, omdat er een weg bestaat tussen elk paar knopen in beide richtingen, maar hier is er maar één richting en is ook geldig. De knopen van het component $C - D - H$ is wel een geval van beide richtingen.

- Een **zwak samenhangende gerichte graaf** is een graaf die niet sterk, maar toch samenhangend is indien de richtingen buiten beschouwing gelaten worden.
- Sommige algoritmen gaan ervan uit de een graaf sterk samenhangend is. Men moet dus eerst deze componenten bepalen, meestal via een **componentengraaf** die:
  - een knoop heeft voor elk sterk samenhangend component,
  - en een verbinding van knoop a naar knoop b indien er in de originele graaf een verbinding van één van de knopen van a naar één van de knopen van b is.
- De componentengraaf bevat geen lussen. Mocht dit wel zo zijn, zouden de knopen die de lus veroorzaken zich in hetzelfde sterk samenhangende component bevinden.
- De sterk samenhangende componenten **in een gerichte graaf** kunnen bekomen worden met behulp van diepte-eerst zoeken (Kosaraju's Algorithm):
  1. Stel de omgekeerde graaf op, door de richting van elke verbinding om te keren.
  2. Pas diepte-eerst zoeken toe op deze omgekeerde graaf, waarbij de knopen in postorder genummered worden.
  3. Pas diepte-eerst zoeken toe op de originele graaf, met als startknoop steeds de resterende knoop met het hoogste postordernummer. Het resultaat is een diepte-eerst bos, waarvan de bomen de knopen bevatten die elk sterk samenhangende componenten zijn.
- We willen aantonen dat de wortel van elke boom in beide richtingen verbonden is met elk van zijn knopen. Op die manier is elke andere knoop in beide richtingen verbonden door de wortel en klopt het algoritme.
  - Via de boomtakken is er een weg van de wortel w naar elk van de knopen u in de boom.
  - Er is dan ook een weg van u naar w in de omgekeerde graaf.
  - De wortel w is altijd een voorouder van u in een diepte-eerst boom van de omgekeerde graaf.
  - Hieruit volgt dat er een weg van w naar u bestaat in de omgekeerde graaf.
  - Er is dan ook een weg van u naar w in de originele graaf.
- Diepte-eerst zoeken is $\Theta(n + m)$ voor ijle en $\Theta(n^2)$ voor dichte grafen. Het omkeren van de graaf is ook $\Theta(n + m)$ voor ijle en $\Theta(n^2)$ voor dichte grafen.

1.2 Dubbele samenhang van ongerichte grafen

Twee definities:

- Een **brug** is een verbinding dat, indien deze wordt weggenomen, de graaf in twee deelgrafen opsplitst. Een graaf zonder bruggen noemt men **dubbel lijnsamenhangend**; als er tussen elk paar knopen minstens twee onafhankelijke wegen bestaan, dan is een graaf zeker dubbel lijnsamenhangend.
- Een **scharnierpunt** is een knoop dat, indien deze wordt weggenomen, de graaf in ten minste twee deelgrafen opsplitst. Een graaf zonder scharnierpunten noemt men **dubbel knoopsamenhangend** (of dubbel samenhangend). Een graaf met scharnierpunten kan onderverdeeld worden in dubbel knoopsamenhangende componenten. Als er tussen elk paar knopen twee onafhankelijke wegen bestaan, dan is de graaf dubbel knoopsamenhangend.

Scharnierpunten, dubbel knoopsamenhangende componenten, bruggen en dubbel lijnsamenhangende componenten kunnen opnieuw via diepte-eerst zoeken gevonden worden:

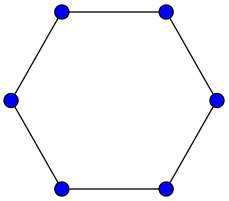
1. Stel de diepte-eerst boom op, waarbij de knopen in preorder genummerd worden.
2. Bepaal voor elke knoop u de laagst genummerde knoop die vanuit u kan bereikt worden via een weg bestaande uit nul of meer dalende boomtakken gevolgd door één terugverbinding.
3. Indien alle kinderen van een knoop op die manier een knoop kunnen bereiken die hoger in de boom ligt dan hemzelf, dan is de knoop zeker niet samenhangend. De wortel is een scharnierpunt indien hij meer dan één kind in heeft. _ToDo: hoe bruggen vinden?

Diepte-eerst zoeken is $\Theta(n + m)$ voor ijle en $\Theta(n^2)$ voor dichte grafen.

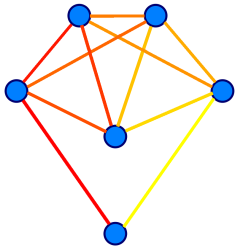
1.3 Eulercircuit

Een eulercircuit is een **gesloten pad** (begin- en eindknoop is dezelfde) in een graaf die **alle verbindingen** éénmaal bevat.

1.3.1 Ongerichte grafen



(a) Een Eulegraaf met 6 knopen en 6 verbindingen.



(b) Een Eulergraaf waarbij de volgorde van de verbindingen die het Eulercircuit opmaken gekleurd worden van rood naar geel.

- Een Eulergraaf is een graaf met een eulercircuit.
  - Heeft als vereiste dat er geen knopen zijn met oneven graad (eigenschap 2).

- Volgende eigenschappen zijn equivalent.
  1. Een samenhangende graaf G is een Eulergraaf.
     - Dit volgt uit de derde eigenschap.
     - Stel dat L één van de lussen van G is.
     - Als L een Eulercircuit is dan is G een Eulergraaf.
     - Zoniet bestaat er een andere lus L' die een gemeenschappelijke knoop k heeft met L.
     - Aangezien elke verbinding tot één lus behoort, kunnen deze twee lussen bij knoop k samengevoegd worden.
     - Uiteindelijk bekomen we een Eulercircuit.
  2. De graad van elke knoop van G is even.
     - Dit volgt uit de eerste eigenschap.
     - Als een knoop k voorkomt op een Eulercircuit, draagt dat twee bij tot zijn graad.
       - Er is een verbinding nodig om de knoop te bereiken, en ook een verbinding om de knoop te verlaten.
       - Elke verbinding komt precies éénmaal voor op een Eulercircuit.
  3. De verbindingen van G kunnen onderverdeeld worden in lussen, waarbij elke verbinding slechts behoort tot één enkel lus.
     - Dit volgt uit de tweede eigenschap.
     - Stel dat er n knopen zijn.
     - Er zijn minstens n verbindingen (want moet terug in startknoop eindigen).
       - Eenvoudigste Eulergraaf is een cyclusgraaf (cfr. Figuur 1.2a).
     - G bevat dan minstens één lus.
     - Als de lus verwijdert wordt, blijft er een niet noodzakelijke samenhangende graaf H over waarvan alle knoopgraden nog steeds even zijn.
     - Elk van de samenhangende componenten van H kan opnieuw in lussen onderverdeeld worden.

  - Het **algoritme van Hierholzer** geeft een Eulercircuit voor een Eulergraaf.
    - De eerste lus L begint bij een willekeurige knoop. Er worden willekeurig verbindingen gekozen tot dat de knoop opnieuw bereikt wordt.
    - De volgende lus L' begint bij één van de knopen van L waarvan nog niet alle verbindingen doorlopen zijn. Opnieuw worden willekeurig verbindingen gekozen tot de knoop opnieuw bereikt wordt.
    - Er worden lussen gegenereerd zolang niet alle verbindingen van een knoop opgebruikt zijn.

1.3.2 Gerichte grafen

- Een Eulercircuit in een gerichte graaf is slechts mogelijk als de graaf een sterk samenhangende Eulergraaf is.
- De constructie verloopt analoog aan de ongerichte Eulergraaf.

Hoofdstuk 2

Kortste afstanden II

- Traditioneel kortste afstanden tussen twee knopen: algoritme van Dijkstra.
- Probleem:
  - Dijkstra gebruikt het feit dat indien een pad naar A $\rightarrow$ C bestaat met kost $K_{A,C}$, er geen korter pad A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C kan zijn met kost $K_{A,B} + K_{A,C}$, daarom is het algoritme performant, maar er mogen dus geen negatieve verbindingen zijn. Indien $K_{A,B}$ negatief zou zijn dan klopt Dijkstra niet want dan

$$K_{A,B} + KA, C > K_{A,C}$$

- Volgende algoritmen hebben enkel betrekking tot **gerichte grafen**.

2.1 Kortste afstanden vanuit één knoop

2.1.1 Algoritme van Bellman-Ford

Dit algoritme werkt voor verbindingen met negatieve gewichten, iets wat het algoritme van Dijkstra niet kon. Het algoritme is dan natuurlijk ook trager.

- Werkt voor negatieve verbindingen.
- Geen globale kennis nodig van heel het netwerk, zoals bij Dijkstra, maar slechts enkel de buren van een bepaalde knoop. Daarom gebruiken routers Bellman-Ford (distance vector protocol).

! Zal niet stoppen indien er een negatieve lus in de graaf zit, aangezien het pad dan zal blijven dalen tot $-\infty$.

Het algoritme berust op een belangrijke eigenschap: Indien een graaf geen negatieve lussen heeft, zullen de kortste wegen evenmin lussen hebben en hoogstens $n-1$ verbindingen bevatten. Hieruit kan een recursief verband opgesteld worden tussen de kortste wegen met maximaal k verbindingen en de kortste wegen met maximaal $k-1$ verbindingen.

$$d_i(k) = \min(d_i(k-1), \min_{j \in V}(d_j(k-1) + g_{ji}))$$

met

- $d_i(k)$ het gewicht van de kortste weg met maximaal k verbindingen vanuit de startknoop naar knoop i,
- g_{ji} het gewicht van de verbinding (j, i),
- $j \in V$ is elke knoop j.

Er bestaan twee goede implementaties:

1.
   - Niet nodig om in elke iteratie alle verbindingen te onderzoeken. Als een iteratie de voorlopige kortste afstand tot een knoop niet aanpast, is het zinloos om bij de volgende iteratie de verbindingen vanuit die knoop te onderzoeken.
   - Plaats enkel de knopen waarvan de afstand door de huidige iteratie gewijzigd werd in een wachtrij.
   - Enkel de buren van deze knopen worden in de volgende iteratie getest.
   - Elke buur moet, indien hij getest wordt en nog niet in de wachtrij zit, ook in de wachtrij gezet worden.
2.
   - Gebruik een deque in plaats van een wachtrij.
   - Als de afstand van een knoop wordt aangepast, en als die knoop reeds vroeger in de deque zat, dant voegt men vooraan toe, anders achteraan.
   - Kan in bepaalde gevallen zeer inefficiënt uitvallen.

2.2 Kortste afstanden tussen alle knopenparen

- Voor dichte grafen → Floyd-Warshall (Algoritmen I).
- Voor ijle grafen → Johnson.

2.2.1 Het algoritme van Johnson

- Maakt gebruik van Bellman-Ford en Dijkstra.
- Omdat we Dijkstra gebruiken, moet elk gewicht positief worden.
  1. Breidt de graaf uit met een nieuwe knoop s, die verbindingen van gewicht nul krijgt met elke andere knoop.
  2. Voer Bellman-Ford uit op de nieuwe graaf om vanuit s de kortste afstand d_i te bepalen tot elke originele knoop i.
  3. Het nieuwe gewicht $\hat{g}_{ij}$ van een oorspronkelijke verbinding g_{ij} wordt gegeven door:
  $$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + d_i - d_j$$
- Het algoritme van Dijkstra kan nu worden toegepast op elke originele knoop, die alle kortste wegen zullen vinden. Om de kortste afstanden te bepalen moeten de originele gewichten opgeteld worden op deze wegen.
- Dit algoritme is $O(n(n+m)\lg n)$ want:
  - Graaf uitbreiden is $\Theta(n)$.
  - Bellman-Ford is $O(nm)$.
  - De gewichten aanpassen is $\Theta(m)$.
  - n maal Dijkstra is $O(n(n+m)\lg n)$. Dit is de belangrijkste term, al de andere termen mogen verwaarloosd worden.

2.3 Transitieve sluiting

Sluiting = algemene methode om één of meerdere verzamelingen op te bouwen. ('als een verzameling deze gegevens bevat, dan moet ze ook de volgende gegevens bevatten').

- **Fixed point**: Een sluiting wordt fixed point genoemd omdat op een bepaald moment verdere toepassing niets meer verandert, $f(x) = x$.
- **Least fixed point**: De kleinste x zoeken zodat $f(x) = x$ voldaan wordt.

Transitieve sluiting = 'Als (a, b) en (b, c) aanwezig zijn dan moet ook (a, c) aanwezig zijn.'

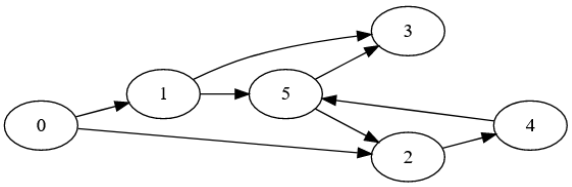
- Transitieve sluiting van een gerichte graaf is opnieuw een gerichte graaf, maar:
  - er wordt een nieuwe verbinding van i naar j toegevoegd indien er een weg bestaat van i naar j in de oorspronkelijke graaf.
- 3 algoritmen:
  1. **Diepte-of breedte-eerst zoeken**:
     - Spoor alle knopen op die vanuit een startknoop bereikbaar zijn en herhaal dit met elke knoop.
     - Voor ijle grafen $\rightarrow \Theta(n(n+m))$.
     - Voor dichte grafen $\rightarrow \Theta(n^3)$.
  2. **Met de componentengraaf**:
     - Interessant wanneer men verwacht dat de transitieve sluiting een dichte graaf zal zijn, want dan zijn veel knopen onderling bereikbaar, zodat er een beperkt aantal sterk samenhangende componenten zijn. Die kunnen in $\Theta(n+m)$ bepaald worden.
     - Maak dan de componentengraaf (kan in $O(n+m)$).
     - Als nu blijkt dat component j beschikbaar is vanuit component i, dan zijn alle knopen van j beruikbaar vanuit knopen van i.
  3. **Het algoritme van Warshall**:
     - Maak een reeks opeenvolgende $n \times n$ matrices $T^{(0)}, T^{(1)}, ..., T^{(n)}$ die logische waarden bevatten.
     - Element $t_{ij}^{(k)}$ duidt aan of er een weg tussen i en j met mogelijke intermediaire knopen $1, 2, ..., k$ bestaat.
     - Bepalen opeenvolgende matrices:

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{onwaar} & \text{als } i \neq j \text{ en } g_{ij} = \infty \\ \text{waar} & \text{als } i = j \text{ of } g_{ij} < \infty \end{cases}$$

       en

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \text{ OF } \left(t_{ik}^{(k-1)} \text{ EN } t_{kj}^{(k-1)}\right) \qquad \text{voor } 1 \leq k \leq n$$

     - $T^{(n)}$ is de gezochte burenmatrix.
     - Alle berekeningen kunnen in dezelfde tabel T gebeuren. Er moet geen plaats voorzien zijn voor andere tabellen.
     - **Voorbeeld**



Figuur 2.1: Een gerichte graaf met 6 knopen.

◇ De initieële tabel $T^{(0)}$ is gewoon een kopie van de burenlijst van de graaf.

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◇ De tabel $T^{(1)}$ geeft een uitbreiding van $T^{(0)}$, waarbij knoop 1 een intermediaire knoop mag zijn in een weg naar knopen knopen. Het is logisch dat enkel knopen die 1 als buur hebben een nieuwe weg kunnen vinden.

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

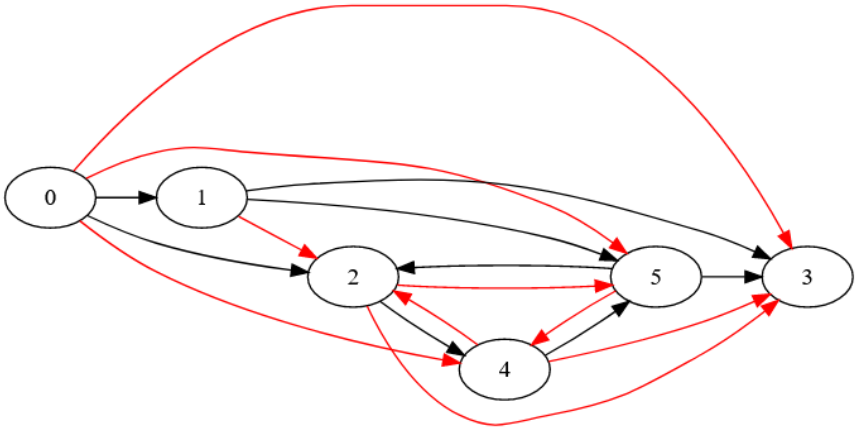
◇ De tabel $T^{(2)}$ geeft een uitbreiding van $T^{(1)}$, waarbij knoop 2 een intermediaire knoop mag zijn in een weg naar twee knopen. Het is logisch dat enkel knopen die 2 als buur hebben (in de nieuwe matrix $T^{(1)}$) een nieuwe weg kunnen vinden.

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◇ Via diezelfde redenering wordt uiteindelijk $T^{(5)}$ bekomen, die de burenmatrix voorstelt van de transitieve sluiting.

$$T^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

◇ Figuur 2.2 toont de transitieve sluiting.



Figuur 2.2: De transitieve sluiting van de graaf op figuur 2.1. De transitieve sluiting bevat dezelfde verbindingen als de graaf (zwarte verbindingen) en ook de nieuwe verbindingen die de transitieve eigenschap vastleggen (rode verbindingen).

Hoofdstuk 3

Stroomnetwerken

- Eigenschappen van een **stroomnetwerk**:
  - Is een gerichte graaf.
  - Heeft twee speciale knopen:
    1. Een **producent**.
    2. Een **verbruiker**.
  - Elke knoop van de graaf is bereikbaar vanuit de producent.
  - De verbruiker is vanuit elke knoop bereikbaar.
  - De graaf mag lussen bevatten.
  - Elke verbinding heeft een capaciteit.
  - Alles wat in een knoop toestroomt, moet ook weer wegstromen. De stroom is dus **conservatief**.

3.1 Maximalestroomprobleem

- Zoveel mogelijk materiaal van producent naar verbruiker laten stromen, zonder de capaciteiten van de verbindingen te overschrijden.
- Wordt opgelost via de methode van **Ford-Fulkerson**.
  - Een iteratieve methode. Het wordt een **methode** genoemd en geen algoritme omdat de implementatie van de vergrotende paden ontbreekt.
  - Bij elke iteratie neemt de nettostroom vanuit de producent toe, tot het maximum bereikt wordt.
- Elke verbinding (i, j) heeft:
  - een capaciteit $c(i, j)$;
    - Als er geen verbinding is tussen twee knopen, dan wordt er toch een verbinding gemaakt met capaciteit 0. Dit dient om wiskundige notaties te vereenvoudigen.
  - de stroom $s(i, j)$ die er door loopt, waarbij $0 \leq s(i, j) \leq c(i, j)$.
- De totale nettostroom f van alle knopen K uit producent p in de graaf is dan

$$f = \sum_{j \in K} (s(p, j) - s(j, p))$$

- $s(p, j)$ is de uitgaande stroom vanuit de producent p naar knoop j.
- $s(j, p)$ is de totale inkomende stroom van elke knoop j naar producent p.

- De verzameling van stromen voor alle mogelijke knopenparen in beide richtingen wordt een **stroomverdeling** genoemd.
- De verzameling mogelijke stroomtoenamen tussen elk paar knopen wordt het **restnetwerk** genoemd.
  - Het restnetwerk bevat dezelfde knopen, maar behoudt enkel de verbindingen die meer stroom kunnen doorlaten.
  - Een verbinding van knoop i naar knoop j wordt opgenomen als:
    - $s(i, j) < c(i, j)$, en/of
    - er loopt stroom over de verbinding (j, i) die kleiner kan gemaakt worden.
  - Een verbinding in het restnetwerk krijgt de capaciteit $c_r(i, j) = c(i, j) - s(i, j) + s(j, i)$.
  - De verindingen van het restnetwerk vormen niet noodzakelijk een deelverzameling van de originele verbindingen:
    - Stel dat er geen verbinding $(i, j)(c(i, j) = 0)$ is, maar wel een verbinding (j, i) waarover een positieve stroom loopt.
    - Het restnetwerk krijgt toch een verbinding (i, j) omdat de stroom over (j, i) eventueel nog kleiner kan gemaakt worden.

- In het restnetwerk wordt de **vergrotende weg** van producent naar verbruiker gezocht.
  - Dit is een enkelvoudige weg zonder lus van producent naar verbruiker.
  - Elke verbinding op die weg heeft een positieve restcapaciteit, en kan nog meer stroom doorlaten.
  - Er is dan extra stroom mogelijk gelijk aan de kleinste restcapaciteit op die weg.
  - De stroom in de overeenkomstige verbindingen in het eigenlijke stroomnetwerk wordt hiermee aangepast.

- Is de methode van Ford-Fulkerson correct?
  - Een **snede** (P, V) van een samenhangende graaf is een verzameling verbindingen die de knopenverzameling in twee niet-ledige stukken P en V verdeelt.
    -
    - Een verbinding (i, j) zit in (P, V) als $i \in P$ en $j \in V$ of $i \in V$ en $j \in P$.
    - Bij stroomnetwerken zijn nuttige sneden waarbij de producent p tot P behoort en de verbuiker v tot V.
    - De capaciteit $c(P, V)$ van de snede wordt gedefinieerd als de som van alle capaciteiten $c(i, j)$, met i in P en j in V.
    - De nettostroom $f(P, V)$ van de snede is de som van alle voorwaartse stromen $s(i, j)$, min de som van alle achterwaartse stromen $s(j, i)$, met i in P en j in V.
  - De conservatieve eigenschap van een stroomnetwerk heeft als gevolg dat de netwerkstroom f gelijk is aan de nettostroom $f(P, V)$ van elke mogelijke snede.
    - De stroom van het netwerk vanuit de producent p werd reeds gedefinieerd

$$f = \sum_{j \in K} (s(p, j) - s(j, p))$$

    - In alle andere knopen i van P is de stroom conservatief:

$$\sum_{j \in K} (s(i, j) - s(j, i)) = 0$$

- ◇ Gecombineerd, voor alle knopen in P, is dit dan

$$f = \sum_{i \in P} \sum_{j \in K} (s(i,j) - s(j,i))$$

- ◇ Voor alle knopen j uit P komt elke stroom $s(i,j)$ tweemaal voor in deze dubbele som, met tegengesteld teken.
- ◇ Er blijven enkel nog knopen j uit $V = K \backslash P$ over, en dat is de nettostroom van de snede (P, V)

$$f = \sum_{i \in P} \sum_{j \in V} (s(i,j) - s(j,i)) = f(P,V)$$

- ○ De **max-flow min-cut** stelling zegt dat f maximaal wordt als het overeenkomstige restnetwerk geen vergrotende weg meer heeft.
  - ◇ De volgende eigenschappen zijn equivalent:
    1. De netwerkstroom f is maximaal.
    2. Er is geen vergrotende weg meer te vinden in het restnetwerk.
    3. De netwerkstroom f is gelijk aan de capaciteit van *een snede* in de oorspronkelijke graaf.
  - ◇ ??

- **Hoe** moet nu de **vergrotende weg bepaald** worden?
  - ○ **Performantie afhankelijk van de capaciteiten**

    De performantie van volgende implementaties zijn afhankelijk van de graaf (n en m) en door de grootte van de capaciteiten.

    1. ◇ Stel dat alle capaciteiten geheel zijn, en C is de grootste capaciteit.
       - ◇ De maximale netwerkstroom is dan $O(nC)$.
       - ◇ Bij elke iteratie van Ford-Fulkerson zal de stroomtoename langs een vergrotende weg ook geheel zijn.
       - ◇ Het aantal iteraties is $O(nC)$.
       - ◇ Het restnetwerk bepalen is $O(m)$ en daarin een vergrotende weg vinden met diepte-eerst of breedte-eerst zoeken is ook $O(m)$.
       - ◇ De totale performantie is $\mathbf{O(mnC)}$.
    2. ◇ Neem steeds de vergrotende weg die de grootste stroomtoename mogelijk maakt.
       - ◇ Dit kan door een kleine wijziging aan het algoritme van Dijkstra (kortste afstanden vervangen door grootste capaciteiten).
       - ◇ Het aantal iteraties is $O(m \lg C)$ (zonder bewijs).
       - ◇ Elke iteratiestap is $O(m \lg n)$ (van Dijkstra).
       - ◇ De totale performantie is $\mathbf{O(m^2 \lg n \lg C)}$
    3. ◇ Stel een cutoff $c = 2^{\lfloor \lg C \rfloor}$ in.
       - ◇ Een vergrotende weg vinden die een stroomtoename van minstens c eenheden toelaat, of vaststellen dat die er niet is, kan in $O(m)$.
       - ◇ Als er geen vergrotende weg gevonden is, dan is de minimale snedecapaciteit van het restnetwerklager dan mc.
       - ◇ c wordt in elke fase gehalveerd, tot dat uiteindelijk $c = 1$. Hiervoor zijn er $O(m \lg C)$ iteraties nodig.
       - ◇ De totale performantie is $\mathbf{O(m^2 \lg C)}$
  - ○ **Performantie onafhankelijk van de capaciteiten**
    - ◇ Als de vergrotende weg het minimum aantal verbindingen heeft, dan stijgt de lengte van de vergrotende weg na hoogstens m iteraties.

- De maximale lengte is $n-1$, zodat er $O(nm)$ iteraties nodig zijn.
- In elke iteratie wordt nu breedte-eerst zoeken gebruikt en is $O(m)$.
- De totale performantie is $\mathbf{O(nm^2)}$

- Alle algoritmen die een maximale stroom zoeken via vergrotende wegen hebben als nadeel dat die stroomtoename langs de hele weg van p naar v moet gebeuren, wat in het slechtste geval $O(n)$ vereist.
- Een meer recentere techniek is de **preflow-push** methode, die de stroomtoename van een weg opsplitst in de stroomtoename langs zijn verbindingen.
  - De preflow duidt op het feit dat er meer stroom kan binnenkomen in een knoop dat er buiten gaat.
  - Knopen met een positief overschot heten 'actief'.
  - Zolang er actieve knopen zijn, voldoet de oplossing niet.
  - Er wordt willekeurig een actieve knoop geselecteerd, en trachten om zijn overschot weg te werken via zijn buren.
  - Als er geen actieve knopen zijn, voldoet de stroom aan de conservatieve eigenschap, en is bovendien maximaal (zonder bewijs).
  - Enkele performanties van deze methode, in vergelijking met Ford-Fulkerson:
    - De eenvoudigste implementatie haalt een performantie van $O(n^2m)$.
    - Het FIFO preflow-push algoritme selecteert de actieve knopen met een wachtrij, en is $O(n^3)$.
    - Het highest-label preflow-push algoritme neemt de actieve knoop die het verst van v ligt, en is $O(n^2\sqrt{m})$.
    - Het excess-scaling algoritme duwt stroom van een actieve knoop met voldoend groot overschot naar een knoop met een voldoend klein overschot, en is $O(nm + n^2 \lg C)$.

3.2 Verwante problemen

Het maximalestroomprobleem kan uitgbreid worden om verwante problemen op te lossen:

1. **Meerdere producenten en verbruikers**
   - Men wil de gezamenlijke nettostroom van alle producten maximaliseren.
   - Dit kan eenvoudig door een nieuw stroomnetwerk aan te maken met twee nieuwe knopen: een totaalproducent en totaalverbruiker.
   - Vanuit de totaalproducent zijn er verbindingen naar alle producenten met oneindige capaciteit.
   - Naar de totaalverbuiker komen er verbindingen toe van alle verbuikers, ook met oneindige capaciteit.
   - De totaalproducent produceert het geheel van alle producenten, en de totaalverbruiker verbruikt alles wat bij de verbuikers samenkomt
2. **Capaciteiten toekennen aan knopen**
   - Men wil capaciteiten toekennen aan knopen.
   - Dit kan ook omgevormd worden tot een normaal stroomnetwerk door elke knoop te dupliceren, en een verbinding te maken tussen elke knoop en zijn duplicant.
   - De capaciteit van de verbinding is dan de knoopcapaciteit.

- Elke inkomende verbinding van de originele knoop blijft bij de knoop.
- Elke uitgaande verbinding komt terecht bij de duplicant.

3. **Een ongericht stroomnetwerk**
   - Een normaal stroomnetwerk verwacht een gerichte graaf.
   - Elke ongerichte verbinding kan vervangen worden door een paar gerichte verbindinge, één in elke richting, en beide verbindinge krijgen de originele capaciteit.
4. **Ondergrenzen toekennen aan verbindingen**
   - Eerst gaat men na of dat een netwerkstroom mogelijk is.
   - Indien ja, wordt die getransformeerd tot een maximale stroom.
   - Dit heeft als praktisch nut dat er voorkomen wordt dat de 'flow' stilstaat.
5. **Meerdere soorten materiaal door de verbindingen**
   - Voor elk soort materiaal is er één producent en ook één verbruiker.
   - In elke knoop is de stroom van elk materiaal apart conservatief.
   - De gezamenlijke stroom van alle materialen door een verbinding mag haar capaciteit niet overschrijden.
6. **Een kost per stroomeenheid**
   - Het **minimalekostprobleem** zoekt niet alleen de maximale stroom, maar bovendien die met de minimale kost.
   - Het maximalestroomprobleem is een specifiek geval van het minimalekostprobleem.

3.2.1 Meervoudige samenhang in grafen

- Definities:
  - Een graaf is **k-voudig knoopsamenhangend** als er tussen elk paar knopen van een graaf k onafhankelijke wegen bestaan **zonder gemeenschappelijke knopen**.
  - Een graaf is **k-voudig lijnsamenhangend** als er tussen elk paar knopen van een graaf k onafhankelijk wegen bestaan **zonder gemeenschappelijke verbindingen**.
- Voor $k < 4$ kunnen knoopsamenhang en lijnsamenhang efficiënt via diepte-eerst zoeken onderzocht worden.
- Voor grotere k moeten stroomnetwerken gebruikt worden.
- Als een maximale netwerkstroom gevonden is, dan is ook de minimale snede gevonden (max-flow min-cut stelling).
- De fundamentele eigenschap van samenhang in een graaf wordt gegeven door de **stelling van Menger**.
  - Vier versies: zowel voor gerichte als ongerichte grafen en zowel voor meervoudige knoopsamenhang als meervoudige lijnsamenhang.
  - Voorbeeld voor een meervoudig lijnsamenhangende gerichte graaf:

    Het minimum aantal verbindingen dat moet verwijderd worden om een knoop v van een gerichte graaf onbereikbaar te maken vanuit een andere knoop p is gelijk aan het maximaal aantal lijnonafhankelijke wegen van p naar v. Hierbij is v geen buur van p.
    - Deze stelling volgt uit de eigenschappen van een stroomnetwerk met eenheidscapaciteiten.
  -

Hoofdstuk 4

Koppelen

- Een **koppeling** in een **ongerichte graaf** is een deelverzameling van de verbindingen waarin elke knoop hoogstens éénmaal voorkomt

4.1 Koppelen in tweeledige grafen

- Een **tweeledige graaf** heeft volgende eigenschappen:
  - Een ongerichte graaf.
  - De knopen kunnen in twee deelverzameling L en R verdeeld worden.
  - Alle verbindingen bevatten als eindknopen steeds één uit L en één uit R.
- Kan bijvoorbeeld gebruikt worden om uit te voeren taken toe te wijzen aan uitvoerders. De verbindingen duiden aan welke taken een uitvoerder aankan.

4.1.1 Ongewogen koppeling

- Een **maximale ongewogen koppeling** is een koppeling met het grootst aantal verbindingen waarbij de verbindingen geen gewichten hebben.
- Er is een nauw verband met een maximale ongewogen koppelinge en de maximale stroom in stroomnetwerken.
- De graaf wordt eerst omgevormd naar een stroomnetwerk:
  - Maak van de ongerichte graaf eerst een gerichte graaf, door de originele verbindingen te vervangen door verbindingen van L naar R.
  - Voeg een producent p in, die naar alle knopen van L verbonden wordt.
  - Voeg een verbruiker v in, waarnaar alle knopen uit R naar verbonden worden.
  - Stel alle capaciteiten in op 1.
  - De maximale stroom zoeken in dit stroomnetwerk komt overeen met het grootste aantal verbindingen vinden, en dus de maximale ongewogen koppeling.
- Een koppeling met k verbindingen komt overeen met een gehele stroomverdeling met als netwerkstroom k.
- Het getal k is niet groter dan het aantal knopen in de kleinste van de twee verzamelingen L en R, en is $O(n)$.

4.2 Stabiele koppeling

- Gegeven één of twee verzamelingen van elementen.
- Elk element van die verzamelingen heeft een gerangschikte voorkeurslijst van andere elementen.
- De elementen moeten gekoppeld worden, rekening houdend met hun voorkeuren en zodanig dat de koppeling stabiel is.
- Een **koppeling is onstabiel** wanneer ze twee niet met elkaar gekoppelde elementen bevat, die liever met elkaar zouden gekoppeld zijn dan in de huidige toestand te blijven.
- Drie problemen:
  1. **Stable marriage**
     - Twee verzamelingen met dezelfde grootte.
     - De elementen worden *mannen* en *vrouwen* genoemd.
     - Elke man heeft een voorkeurslijst die alle vrouwen bevat.
     - Elke vrouw heeft een voorkeurslijst die alle mannen bevat.
     - Elke man **moet** gekoppeld worden aan een vrouw, zodanig dat de koppeling stabiel is.
  2. **Hospitals/Residents**
  3. **Stable roommates**

4.2.1 Stable marriage

Het Gale-Shapley-algoritme

- Er is tenminste één stabiele koppeling bij een stable marriage probleem.
- Er is een **actieve groep**, die aanzoeken stuurt naar de **passieve groep**.
- Het **Gale-Shapley-algoritme** garandeert dat de actieve groep de beste elementen zal krijgen die het kan hebben in een stabiele koppeling.
  - In de man-georiënteerde versie zijn de mannen de actieve groep, die aanzoeken sturen naar vrouwen, die dan de passieve groep zijn.
  - In de vrouw-georiënteerde versie zijn de vrouwen de actieve groep, die aanzoeken sturen naar mannen, die dan de passieve groep zijn.
- Op elk moment in het algoritme is een persoon ofwel verloofd, ofwel vrij.
- De personen in de actieve groep kunnen afwisselend verloofd of vrij is, maar de personen in de passieve groep blijven verloofd eens ze een aanzoek gekregen hebben (maar kan wel van partner veranderen).
- Een aanzoek gebeurt door een persoon in de actieve groep die nog vrij is.
  - Een aanzoek doen aan een persoon in de passieve groep die ook vrij is, moet verloven.
  - Een aanzoek doen aan een persoon in de passieve groep die al verloofd is, vergelijkt eerst met de huidige partner, en verwerpt de laagst geklasseerde. Als de persoon die verwerpt wordt de partner was, wordt die terug vrij.
- Een persoon uit de actieve groep zal aanzoeken versturen in volgorde van de voorkeurslijst.

Eigenschappen van de oplossing

- We veronderstellen dat mannen nu de actieve groep zijn, en vrouwen de passieve groep.
- Het algoritme stopt altijd en de oplossing is steeds stabiel.
  - Geen enkele man wordt afgewezen door alle vrouwen want hij kan niet afgewezen worden door de laatste vrouw op zijn lijst.
  - In elke iteratie is er een aanzoek, en geen enkele man doet dat twee maal aan dezelfde vrouw. Er zijn maximaal n^2 aanzoeken.
  - De oplossing is stabiel:
    - Stel een man m_1 en een vrouw v_1.
    - m_1 verkiest v_1 boven zijn huidige vrouw v_2.
    - v_1 moet m_1 in het verleden dus hebben afgewezen (omdat m_1 zeker eerst aan v_1 een aanzoek zou sturen in plaats van v_2) omdat v_1 een andere man m_2 verkoos.
    - Er is geen ongekoppeld paar dat de stabiliteit van die koppeling in gevaar kan brengen, want v_1 zal enkel nog mannen aanvaarden die nog hoger gerangschikt staan dan m_2 (en dus ook m_1).
- **Elke mogelijke aanzoekvolgorde geeft dezelfde oplossing.**

Implementatie

- Er zijn voorkeurslijsten voor de passieve groep, die de volgorde aanduiden van elk element van de actieve groep. Deze lijsten moeten opgesteld worden en dat is $\Theta(n^2)$.
- Er is ook een lijst van deelnemers in de actieve groep om snel te achterhalen wie nog aanzoeken kan doen.
- Het algoritme stopt als het laatst overgebleven element uit de passieve groep een aanzoek heeft gekregen.
- Elk van de $n-1$ elementen in de passieve groep kunnen n aanzoeken krijgen, zodat in het slechtste geval het algoritme $\Theta(n^2)$ is.

Uitbreidingen

- **Verzamelingen van ongelijke grootte**
  - Het aantal mannen n_m is verschillend van het aantal vrouwen n_v.
  - Een koppeling wordt als onstabiel beschouwd als er een man m en vrouw v bestaan zodat:
    1. m en v geen partners zijn.
    2. m ofwel ongekoppeld blijft, ofwel v verkiest boven zijn partner.
    3. v ofwel ongekoppeld blijft, ofwel m verkiest boven haar partner.
  - Er wordt verondersteld dat iemand liever gekoppeld wordt dan alleen te moeten blijven.
- **Onaanvaardbare partners**
  - De voorkeurslijsten moeten niet meer alle andere personen bevatten van de andere groep.
  - Stabiele koppeling kan nu gedeeltelijk zijn, zodat niet noodzakelijk iedereen een partner krijgt.
  - Een koppeling wordt als onstabiel beschouwd als er een man m en vrouw v bestaan zodat:
    1. m en v geen partners zijn, maar wel aanvaardbaar zijn voor elkaar.

2. m ofwel ongekoppeld blijft, ofwel v verkiest boven zijn partner.
3. v ofwel ongekoppeld blijft, ofwel m verkiest boven haar partner.

- **Gelijke voorkeuren**
  - De voorkeurslijsten mogen meerdere personen bevatten met dezelfde rangschikking.
  - Er zijn dan drie gevallen om stabiliteit te definiëren:
    1. **Superstabiliteit.** Een koppeling is onstabiel als er een man en een vrouw bestaan die geen partners zijn, en elkaar minstens evenzeer verkiezen als hun partners.
    2. **Sterke stabiliteit.** Een koppeling is onstabiel als er een man een vrouw bestaan die geen partners zijn, waarvan de ene de andere strik verkiest boven de partner, en de andere de eerste minstens even graag heeft als de partner.
    3. **Zwakke stabiliteit.** Een koppeling is onstabiel als er een man en een vrouw bestaan die geen partners zijn, en die elkaar strikt verkiezen boven hun partners.

Deel II

Strings

Hoofdstuk 5

Gegevensstructuren voor strings

5.1 Inleiding

- Efficiënte gegevensstructuren kunnen een zoeksleutel lokaliseren door elementen één voor één te testen.
- Dit heet **radix search**.
- Meerdere soorten boomstructuren die radix search toepassen.
  - **Digitale zoekbomen**: deze bomen hebben als nadeel dat de structuur van de boom afhankelijk is van de toevoegvolgorde.
  - **Tries**: de structuur van een trie is niet afhankelijk van de toevoegvolgorde.
  - **Ternaire zoekbomen**: een alternatieve voorstelling van een meerwegstrie, die minder geheugen gebruikt en toch efficiënt blijft.

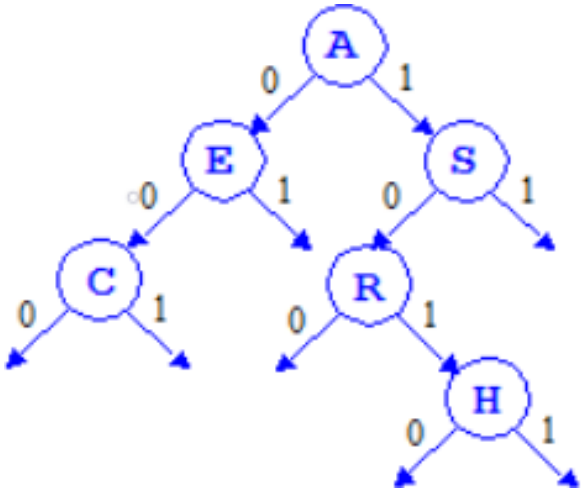
! Veronderstel dat geen enkele sleutel een prefix is van een ander. Dit wordt de **prefixvoorwaarde** genoemd.

De sleutels `test` en `testen` zullen dus nooit samen voorkomen in de boom aangezien `test` een prefix is van `testen`. Dit is noodzakelijk: stel dat een langere sleutel reeds in de boom zit. Als de kortere sleutel gezocht wordt, of toegevoegd moet worden, zullen er uiteindelijk geen sleutelelementen overblijven om ze te onderscheiden.

Dit kan opgelost worden door een speciaal karakter toe te voegen die in geen enkele sleutel zal voorkomen. Zo kunnen de sleutels `test$` en `testen$` wel samen voorkomen.

5.2 Digitale zoekbomen

- Sleutels worden opgeslagen in de knopen.
- Zoeken en toevoegen verloopt analoog als een normale binaire zoekboom.
- Slechts één verschil:
  - De juiste deelboom wordt niet bepaald door de zoeksleutel te vergelijken met de sleutel in de knoop.
  - Wel door enkel het volgende element (van links naar rechts) te vergelijken.



Figuur 5.1: Een digitale zoekboom voor zes sleutels: $A = 00001, S = 10011, E = 00101, R = 10010, C = 00011, H = 10100$, die ook in deze volgorde toegevoegd worden.

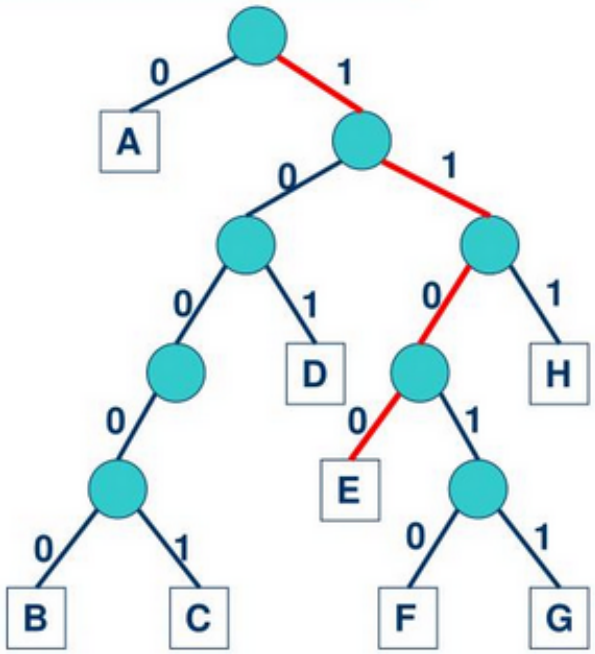
  - Bij de wortel wordt het eerste sleutelelement gebruikt, een niveau dieper het tweede sleutelelement, enz.
- In de cursus zijn de sleutelelementen beperkt tot bits → **binaire digitale zoekbomen**.
- Bij een knoop op diepte i wordt bit $(i + 1)$ van de zoeksleutel gebruikt om af te dalen in de juiste deelboom.
- ! De zoekboom overlopen in inorder levert de zoeksleutels niet noodzakelijk in volgorde op.
  - Sleutels in de linkerdeelboom van een knoop op diepte i zijn zeker kleiner dan deze in de rechterdeelboom.
  - Maar, de sleutel van de knoop op diepte i kan toch in beide deelbomen terechtkomen als hij later werd toegevoegd.
- De hoogte van een digitale zoekboom wordt bepaald door het aantal bits van de langste sleutel.
- Performantie is vergelijkbaar met rood-zwarte bomen:
  - Voor een groot aantal sleutels met relatief kleine bitlengte is het zeker beter dan een binaire zoekboom en vergelijkbaar met die van een rood-zwarte boom.
  - Het aantal vergelijkingen is nooit meer dan het aantal bits van de zoeksleutel.
  - ✓ Implementatie van een digitale zoekboom is eenvoudiger dan die van een rood-zwarte boom.
  - ! De beperkende voorwaarde is echter dat er efficiënte toegang nodig is tot de bits van de sleutels.

5.3 Tries

- Een digitale zoekstructuur die wel de volgorde van de opgeslagen sleutels behoudt.
- Ze moeten echter voldoen aan de **prefixvoorwaarde**: een sleutel mag geen prefix zijn van een andere sleutel.
  - Dit kan opgelost worden door elke sleutel te laten volgen door een afsluitteken. Dit werkt echter niet bij binaire tries.

5.3.1 Binaire tries

string	node
01011	A
10000	B
10001	C
10101	D
11001	E
11010	F
11011	G
11101	H



Figuur 5.2: Een voorbeeld van een binaire trie met opgeslagen sleutels A, B, C, D, E, F, G en H. Elk van deze sleutels heeft een (willekeurig gekozen) bitrepresentatie die de individuele elementen van de sleutels voorstelt. De zoekweg van de sleutel E wordt aangegeven door rode verbindingen.

- Zoekweg wordt bepaald door de opeenvolgende bits van de zoeksleutel.
- Sleutels worden enkel opgeslaan in de bladeren, met als gevolg dat de structuur is onafhankelijk van de toevoegvolgorde van de sleutels.
  - De boom *inorder* overlopen geeft de sleutels gerangschikt terug.
  - De zoeksleutel moet niet meer vergeleken worden met elke knoop op de zoekweg.
- Twee mogelijkheden bij **zoeken** en **toevoegen**:
  1. Indien een lege deelboom bereikt wordt, bevat de boom de zoeksleutel niet. De zoeksleutel kan dan in een nieuw blad op die plaats toegevoegd worden.
  2. Anders komen we in een blad. De sleutel in dit blad **kan** eventueel gelijk zijn aangezien ze zeker dezelfde beginbits hebben.
     - Als we bijvoorbeeld `10011` zoeken maar de boom bevat enkel de sleutel `10010`, zullen we in het blad met de sleutel `10010` uitkomen aangezien de eerste 4 elementen hetzelfde zijn. De sleutels zijn echter niet gelijk.
     - Indien de sleutels niet hetzelfde zijn, kunnen twee mogelijkheden voorkomen bij **toevoegen**:
       (a) **Het volgende bit verschilt.** Het blad wordt vervangen door een knoop met twee kinderen die de twee sleutels bevat.
       (b) **Een reeks van opeenvolgende bits is gelijk.** Het blad wordt vervangen door een reeks van inwendige knopen, zoveel als er gemeenschappelijke bits zijn. Bij het eerste verschillende bit krijgen we terug het eerste geval.

! Wanneer opgeslagen sleutels veel gelijke bits hebben, zijn er veel knopen met één kind.

- Het aantal knopen is dan ook hoger dan het aantal sleutels.
- Een trie met n gelijkmatige verdeelde sleutels heeft gemiddeld $n/\ln 2 \approx 1.44n$ inwendige knopen.

5.3.2 Meerwegstries

- Heeft als doel de hoogte van een trie met lange sleutels te beperken.
- Meerdere sleutelbits in één enkele knoop vergelijken.
- Een sleutelelement kan m verschillende waarden aannemen, zodat elke knoop (potentiaal) m kinderen heeft $\rightarrow$ m-wegsboom.
- **Zoeken** en **toevoegen** verloopt analoog als bij een binaire trie:
  - In elke knoop moet nu enkel een $m-$wegsbeslissing genomen worden, op basis van het volgende sleutelelement.
  - Dit kan in $O(1)$ door per knoop een tabel naar wijzers van de kinderen bij te houden, geïndexeerd door het sleutelelement.
- Ook hier is de structuur onafhankelijk van de toevoegvolgorde van de sleutels, en de boom in inorder overlopen zorgt ook voor een gerangschikte lijst.
- De performantie is ook analoog met die van binaire tries.
  - Zoeken of toevoegen van een willekeurige sleutel vereist gemiddeld $O(\log_m n)$ testen op het aantal sleutelelementen.
  - De boomhoogte wordt ook beperkt door de lengte van de langste opgeslagen sleutel.
  - Er zijn gemiddeld $n/\ln m$ inwendige knopen.
  - Het aantal wijzers per knoop is wel $mn \ln m$.

! Het grootste nadeel is dat meerwegstries veel geheugen gebruiken. Mogelijke verbeteringen zijn:

- In plaats van een tabel met m wijzers te voorzien, waarvan de meeste toch nullwijzers zijn, kan een gelinkte lijst bijgehouden worden. Elk element van de gelinkte lijst bevat een sleutelelement en een wijzer naar een kind. De lijst is ook gerangschikt volgens de sleutelelementen, zodat niet altijd de hele lijst moet onderzocht worden om het juiste element te vinden.

  Op de hogere niveaus is een tabel met m wijzers toch beter, omdat daar meer kinderen kunnen zijn.
- Een trie kan ook enkel voor de eerste niveaus gebruikt worden, en daarna een andere gegevensstructuur gebruiken. Vaak stopt men als een deelboom niet meer dan s sleutels bevat. Deze sleutels worden dan opgeslaan in een korte lijst, die dan sequentieel doorzocht kan worden. Het aantal inwendige knopen daalt met een factor s, tot ongeveer $n/(s \ln m)$.

5.4 Variabelelengtecodering

- Normaal worden gegevens opgeslaan in gegevensvelden met een vaste grootte.
  - Een karakter in ASCII-codering wordt bevat altijd 7 bits.

- Een integer datastructuur voorziet altijd 32 bits.

- Soms is het nuttig om variabele lengte te voorzien:
  1. **Verhoogde flexibiliteit**: Wanneer blijkt dat er meer bits nodig zijn, is het eenvoudig om meer bits te voorzien.
  2. **Compressie**: Veelgebruikte letters kunnen een kortere bitlengte krijgen om de grootte van de totale gegevens te reduceren.

- In beide gevallen hebben we een **alfabet**, waarbij we niet elke letter door evenveel bits laten voorstellen.

! Een belangrijk nadeel is dat eerst de hele codering ongedaan moet gemaakt worden vooraleer er in gezocht kan worden. Variabelelengtecodering is dan ook enkel nuttig als dit niet uitmaakt.

- Bij het **decoderen** is er een **prefixcode**.
  - Dit is een codering waarbij een **codewoord**, nooit het prefix van een ander codewoord kan zijn.
  - Een codering is een mapping die elke letter van het alfabet afbeeldt op een codewoord. Bijvoorbeeld, de letters A, C, G en T van een DNA-string kunnen volgende codewoorden krijgen:

$$A \to 0$$
$$C \to 10$$
$$G \to 110$$
$$T \to 111$$

  - Op die manier weten we dat het einde van een codewoord is bereikt zonder het begin van het volgende codewoord te moeten analyseren.
    - Stel dat volgende codering binnenkomt:

```
01101011111110
```

    - Het decoderen komt dan neer op het inlezen van opeenvolgende bits totdat een blad in de trie bereikt is:

0	1 1 0	1 0	1 1 1	1 1 1	1 0
A	G	C	T	T	C

  - Een typische prefixcode voor natuurlijke getallen schrijft het getal op in een 128-delig stelsel en elk cijfer wordt apart opgeslaan in een aparte byte. Bij het laatste cijfer wordt er 128 opgeteld, zodat de laatste byte een 1-bit heeft op de meest significante plaats.
  - In geschreven taal wordt er gewacht tot een spatie of leesteken tegengekomen wordt om het onderscheidt tussen verschillende woorden te maken.

- Een trie is geschikt om een invoerstroom te decoderen die gecodeerd is met een prefixcode.
  - Alle codewoorden worden eerst opgeslaan in de trie.
  - Aan het begin van een codewoord starten we bij de wortel.
  - Per ingelezen bit of byte (afhankelijk van het probleem, bij strings zeker een byte) gaan we een niveau omlaag in de trie.
  - Bij een blad is het codewoord compleet.

5.4.1 Universele codes

- Deze codes zijn onafhankelijk van de gekozen brontekst.
- De codes worden hier geïllustreerd als de codering voor de verschillende positieve gehele getallen.

	Elias' gammacode	Elias' deltacode	Fibonaccicode
1	1	1	11
2	010	0100	011
3	011	0101	0011
4	00100	01100	1011
5	00101	01101	00011
6	00110	01110	10011
7	00111	01111	01011
8	0001000	00100000	000011
9	0001001	00100001	100011
...			
23	000010111	001010111	01000011
...			
45	00000101101	0011001101	001010011
...			

De Elias' gammacode

- Gegeven een getal n:
  - Stel het getal voor met zo weinig mogelijk bittekens (k) en laat dit voorafgaan door $k-1$ nulbits.
  - Een getal n wordt voorgesteld door $2\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ bittekens.
- Voorbeeld $n = 14$
  - Het getal voorstellen met k bittekens: $1110 \rightarrow k = 4$.
  - Deze voorstelling vooraf laten gaan door $k - 1 = 3$ nulbits: 0001110.

De Elias' deltacode

- Gegeven een getal n:
  - Gebruik de laatste $k - 1$ bittekens van het getal en laat dit voorafgaan door de Elias' gammacode voor k.
  - Een getal n wordt voorgesteld door $\lfloor \log_2 n \rfloor + 2\lfloor \log_2(\log_2 n + 1) \rfloor + 1$ bittekens.
- Voorbeeld $n = 14$
  - Het getal voorstellen met k bittekens: $1110 \rightarrow k = 4$.
  - De gammacode van $k = 4$ is 00100.
  - Stel de gammacode samen met de laatste $k - 1$ bittekens van n: 00100110.

De Fibonaccicode

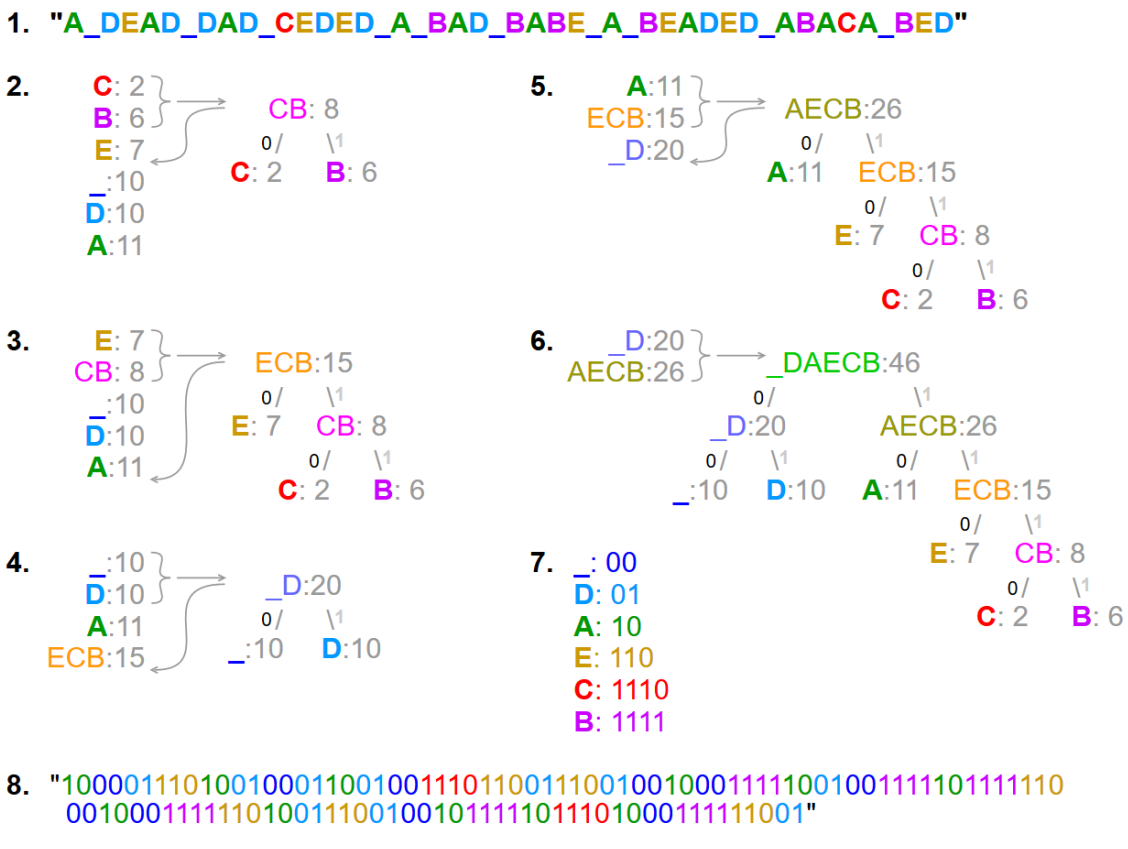
- De Fibonaccireeks
$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, ...$$
- Dit heeft als eigenschap dat een getal i geschreven kan worden als de som van verschillende Fibonaccigetallen zodanig dat er nooit twee getallen in de reeks worden gebruikt die onmiddellijke buren zijn van elkaar.
- Gegeven een getal n:
  - Overloop de Fibonaccireeks van klein naar groot en gebruik een éénbit voor elk getal dat in de berekende som voorkomt, en een nulbit voor alle andere getallen. Voeg daarna op het einde nog een éénbit toe.
  - Een getal n wordt voorgesteld door $k + 1$ bittekens.
- Voorbeeld $n = 72$
  - De som van fibonaccigetallen is $72 = 1 + 3 + 13 + 55$.
  - De reeks van Fibonacci overlopen en een éénbit gebruiken voor elk getal dat in de berekende som voorkomt levert volgende bitstring op: 101001001.
  - Dit moet nog gevolgd worden door een 1, zodat dit een prefixcode wordt: 1010010011.

5.5 Huffmancodering

- Sommige letters in een tekst kunnen meer voorkomen dan een andere.
- Minder bittekens gebruiken voor die letters speelt ten voordele van de grootte van de hele tekst.

5.5.1 Opstellen van de decoderingsboom

- Er wordt een prefixcode toegepast waarbij elke letter een apart codewoord krijgt die voor de hele tekst geldt.
- We zullen bitcodes gebruiken, en dus ook een binaire trie.
- Om de optimale code op te stellen moet nagegaan worden hoe vaak elk codewoord gebruikt zal worden.
- Er is een alfabet $\Sigma = \{s_i | i = 0, \cdots, d - 1\}$.
- We bekomen de frequenties f_i door elke letter s_i te tellen in de tekst.
- We zoeken een trie met n bladeren die de optimale code oplevert.
  - Neem een willekeurige binaire trie met d bladeren, elk met een letter uit Σ.
  - Ken aan elke knoop een gewicht toe:
    - Een blad krijgt als gewicht de frequentie f_i van de overeenkomstige letter.
    - Een inwendige knoop krijgt als gewicht de som van de gewichten van zijn kinderen.
  - Stel dat het bestand gecodeerd wordt met de bijhorende code en dat deze trie gebruikt wordt om te decoderen.
  - Het totaal aantal bits in het gecodeerde bestand is de som van de gewichten van alle knopen samen, met uitzondering van de wortel.



Figuur 5.3: Een visualisatie van huffmancodering. De te coderen tekst wordt weergegeven bij stap 1. In stap 2 wordt eerst elke letter gesorteerd in een lijst bijgehouden (eigenlijk een bos van bomen) volgens zijn niet-stijgende frequenties f_i. Stap 2 tot 6 neemt dan altijd de twee minst frequente bomen en combineert ze om een nieuwe boom te bekomen. Die boom wordt terug in het bos gestoken. Stap 7 toont de werkelijke codering. Stap 8 toont de gecodeerde versie van de tekst in stap 1.

  - De wortel heeft gewicht n (de som van alle frequenties), dus we zoeken een trie waarvoor n minimaal wordt.

- Stel een knoop k met gewicht w_k op diepte d_k. en een knoop l met gewicht w_l op diepte w_l, zodanig dat k niet onder l hangt en l niet onder k.
- Er kan een nieuwe trie gemaakt worden k, inclusief de bijbehorende deelboom, van plaats te verwisselen met l.
  - Er waren d_k knopen boven k in de trie, die verliezen gewicht w_k maar krijgen gewicht w_l.
  - Er waren d_l knopen boven l in de trie, die verliezen gewicht w_l maar krijgen gewicht w_k.
- De totale gewichtsverandering van de totale trie is

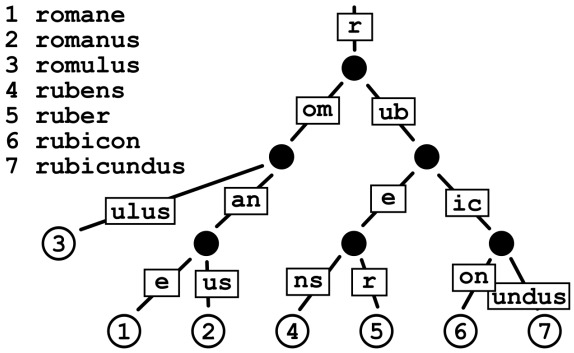
$$(d_k - d_l)(w_l - w_k)$$

- Als l een groter gewicht en kleinere diepte dan k heeft, is er een betere trie bekomen.
- De optimale trie heeft volgende eigenschappen:
  - Geen enkele knoop heeft een groter gewicht dan een knoop op een kleinere diepte.

- Geen enkele knoop heeft een groter gewicht dan een knoop links (of rechts) van hem op dezelfde diepte, want dan kunnen de twee knopen omgewisseld worden.

- Constructie van de coderingsboom:
  - Op elk moment is er een bos van deelbomen die aan elkaar gehangen moeten worden.
    - Dit bos wordt geïmplementeerd met een prioriteitswachtrij met als prioriteit het gewicht van de deelbomen.
  - In het begin bestaat het bos uit enkel bladeren.
  - De twee bomen met het lichtste gewicht worden uit het bos gehaald en worden verenigd onder een nieuwe knoop en wordt terug in het bos gestoken.
  - De diepte h van de boom is onbekend, maar wel weten we dat:
    - alle knopen op niveau h zijn zeker bladeren,
    - dat h een even getal is.
  - We kunnen bladeren twee aan twee samen nemen, telkens de lichtste (kleinst gewicht) die overblijven.
  - De resulterende bomen hebben altijd een groter gewicht, dus komen later in het gerangschikte bos.
  - Dit blijft herhaald worden tot dat er maar één boom overblijft (stap 2 tot 6 in figuur 5.3).

5.6 Patriciatries



Figuur 5.4: Een patriciatrie. Elk blad bevat een verwijzing naar een woord in een lijst en knopen met maar één kind worden samengevoegd.

! Veel trieknopen hebben maar één kind zodat er veel ongebruikt geheugen is.

! Er zijn ook twee soorten knoopen: inwendige knoop zonder sleutel maar met wijzers naar kinderen, en bladeren met sleutel maar zonder wijzers naar kinderen.

- Een **Patriciatrie** (Practical Algorithm to Retrive Information Coded In Alphanumeric) verwijdert deze problemen door enkel **knopen met meer dan één kind te behouden**.

- Bij een gewone meerwegstrie kunnen knopen voorkomen met maar één kind.

- Zo een knoop kan weggelaten worden en zijn kind kan in de plaats gezet worden.

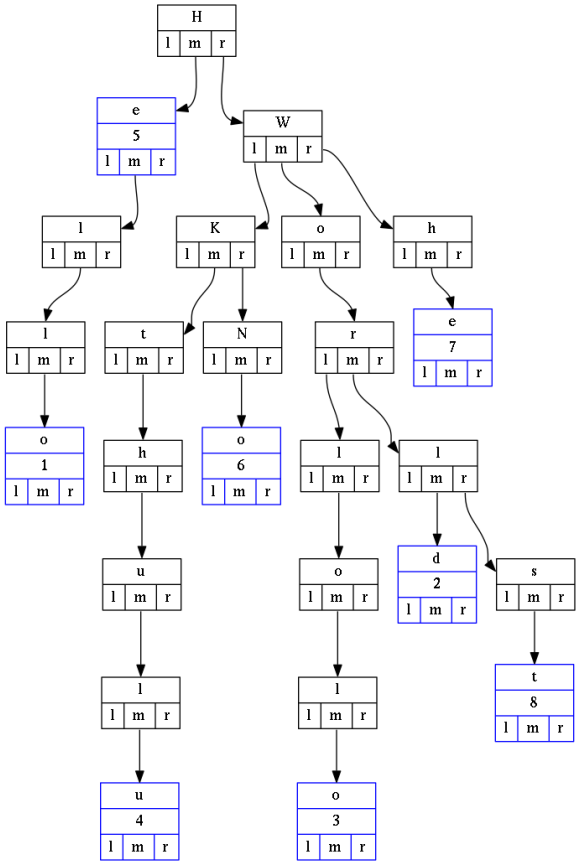
- Twee gevolgen:

1. Als we in een kind komen, moeten we weten hoeveel voorouders er ontbreken. Dit lossen we op door een **testindex** in de knoop bijhouden, de index van het te testen karakter.
2. De karakters die niet getest worden kunnen tot conflict leiden bij een zoekstring waarbij die karakters niet overeenkomen.

- Een knoop is **expliciet** als hij nog voorkomt in de boom.
- Een knoop is **impliciet** als hij enkel wordt aangeduid door een indexsprong aangegeven in de nakomeling.
- We gaan ervan uit dat de trie **niet ledig** is.
- **Zoeken.**
  - Test altijd op het karakter aangegeven door de testindex.
  - Als dit leidt naar een nulpointer zit de string niet in de boom.
  - Als we in een blad komen, weten we niet zeker of dat dit de gezochte string is: karakters die niet getest zijn kunnen verschillen.
  - Dus in een blad wordt de zoekstring compleet vergeleken met de string die in het blad zit.
- **Toevoegen.**
  - Het kan zijn dat we een blad moeten toevoegen aan een implicite knoop.
  - We houden een **verschilindex** bij die de eerste plaats aanduidt waar de nieuwe string verschilt van de meest gelijkende string in de trie (deze met de langst gemeenschappelijke prefix).
  - De zoekoperatie eindigt altijd in een explicite knoop. Er zijn dan drie mogelijkheden als de nieuwe string nog niet in de trie zit:
    1. **De expliciete knoop is geen blad**
       (a) **testindex = verschilindex**
       De knoop heeft geen kind voor het karakter in de string aangeduid door de verschilindex. Er kan een blad toegevoegd worden voor de nieuwe string.
       (b) **testindex > verschilindex**
       Er moet een expliciete knoop toegevoegd worden met als testindex de verschilindex. De knoop krijgt twee kinderen: de oude explicite knoop en het nieuwe blad.
    2. **De expliciete knoop is een blad**
       Beschouw een blad als een expliciete knoop met een oneindig grote testindex, dan heb je het vorige geval.

5.6.1 Binaire patriciatrie

- Elke expliciete inwendige knoop heeft twee kinderen.
- _ToDo: idk man wtf is this shit



Figuur 5.5: Een ternaire zoekboom voor de volgende woorden: `Hello`, `World`, `Kthulu`, `Wololo`, `No`, `We`, `He`, `Worst`. In deze versie hebben de woorden geen afsluitelement. De blauwe knopen stellen het laatste karakter van elk woord voor, dus daar is een sleutel gevonden en daar zit de bijhorende data (getallen in dit geval).

5.7 Ternaire zoekbomen

- Een alternatieve voorstelling van een meerwegstrie.
- ! De snelste implementatie van een meerwegstrie gebruikt een tabel van m kindwijzers in elke knoop, wat onnodig veel geheugen vereist.
- Men gebruikt dan een ternaire zoekboom waarvan elke knoop een **sleutelelement** bevat.
- **Zoeken** vergelijkt telkens het sleutelelement met het element in de huidige knoop. Er zijn dan drie mogelijkheden:
  - Is het zoeksleutelelement kleiner, dan zoeken we verder in de linkse deelboom, met **hetzelfde zoeksleutelelement**.
  - Is het zoeksleutelelement groter, dan zoeken we verder in de rechtse deelboom, met **hetzelfde zoeksleutelelement**.
  - Is het zoeksleutelelement gelijk, dan zoeken we verder in de middelste deelboom, met het **volgende zoeksleutelelement**.
- Om te voorkomen dat een sleutel geen prefix is van elke andere sleutel, wordt er terug een afsluitkarakter gekozen.

- Een zoeksleutel wordt gevonden wanneer we met zijn afsluitelement bij een knoop met datzelfde element uitkomen.
- Een ternaire zoekboom behoudt de volgorde van de opgeslagen sleutels.
- De **voordelen** van een ternaire zoekboom:
  - Het past zich goed aan bij onregelmatig verdeelde zoeksleutels.
    - De Unicode standaard bevat meer dan 1000 karakters, waarvan enkelen heel vaak gebruikt worden. In dit geval zouden meerwegstries ook te veel geheugen nodig hebben voor de tabellen met wijzers.
  - Zoeken naar afwezige sleutels is efficiënt. Er wordt maar vergelijken met slechts enkele sleutelelementen. Een normale binaire boom vereist $\Omega(\lg n)$ sleutelvergelijkingen.
  - Complexe zoekoperaties zijn mogelijk zoals sleutels opsporen die in niet meer dan één element verschillen van de zoeksleutel of zoeken naar sleutels waarvan bepaalde elementen niet gespecifieerd zijn.
- Mogelijke **verbeteringen**:
  - Het aantal knopen kan beperkt worden door een combinatie te maken van een trie en een patriciatrie: enkel sleutels opslaan in bladeren en knopen met maar één kind samenvoegen.
  - De wortel kan vervangen worden door een meerwegstrieknoop, wat resulteert in een tabel van ternaire zoekbomen.

    Als het aantal mogelijke sleutelelementen m niet te groot is, volstaat een tabel van m^2 ternaire zoekbomen, zodat er een zoekboom overeenkomt met elk eerste paar sleutelelementen.

Hoofdstuk 6

Zoeken in strings

- De gebruikte symbolen:

Symbool	Betekenis
Σ	Het gebruikte alfabet
$\Sigma*$	De verzameling strings van eindige lengte van letters uit Σ
d	Aantal karakters in Σ
P	Patroon (de tekst die gezocht wordt)
p	Lengte van P
T	De hele tekst waarin gezocht wordt
t	lengte van T

- We willen een bepaalde string (het patroon P) in een langere string (de tekst T) lokaliseren.
- We nemen aan dat we alle plaatsen zoeken waar dat patroon voorkoomt.
- We veronderstellen ook dat P en T in het inwendig geheugen opgeslaan zitten.
- In de voorbeelden worden volgende concrete informatie gebruikt:
  - $\Sigma = \{A, C, G, T\}$
  - $d = 4$
  - $P =$ `GCAGAGCAG`
  - $p = 9$
  - $T =$ `GCATCGCAGAGCAGAGTACAGCACG`
  - $t = 25$

6.1 Formele talen

- Een **formele taal** over een alfabet is een verzameling eindige strings over dat alfabet.
- Een formele taal wordt vrij vaag gedefinieerd (maar zien we niet in de cursus).
- Een formele taal kan op twee manieren gedefinieerd worden: via **generatieve grammatica's** of via **reguliere expressies**.

6.1.1 Generatieve grammatica's

- Een **generatieve grammatica** is een methode om een taal te beschrijven.
- Er is een startsymbool dat getransformeerd kan worden tot een zin van de taal met behulp van substitutieregels.
- Buiten de karakters Σ van het alfabet, is er ook nog een verzameling **niet-terminale symbolen**.
- Een niet-terminaal symbool wordt aangeduid als

$$\langle \cdots \rangle$$

  waarin $\cdots$ vervangen wordt door de naam van het niet-terminale symbool.
- De verzameling alle strings uit Σ vermengd met de niet-terminale symbolen is Ξ, en de daarbijhorende verzameling strings $\Xi*$.
- Een belangrijk geval zijn de **contextvrije grammatica's**.
  - Er is op elk moment een string uit $\Xi*$.
  - Als er geen niet-terminale symbolen meer zijn krijgt men een zin in de taal, anders kan men één niet-terminaal vervangen door een string uit $\Xi*$.
  - De taal is contextvrij omdat de substitutie onafhankelijk is wat voor en achter de betreffende niet-terminaal staat.
  - Een voorbeeld van een contextvrije grammatica:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &::= \langle \mathbf{AB} \rangle \mid \langle \mathbf{CD} \rangle \\ \langle \mathbf{AB} \rangle &::= a\langle \mathbf{AB} \rangle b \mid \epsilon \\ \langle \mathbf{CD} \rangle &::= c\langle \mathbf{CD} \rangle c \mid \epsilon \end{aligned}$$

    - Hierbij is $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ en ϵ de lege string.
    - Deze grammatica definieert als formele taal de verzameling van alle strings ofwel bestaande uit een rij 'a's gevolgd door een even lange rij 'b's ofwel bestaande uit een rij 'c's gevolgd door een even lange rij 'd's.
    - De afleiding van "cccddd":

$$\langle \mathbf{S} \rangle \to \langle \mathbf{CD} \rangle \to c\langle \mathbf{CD} \rangle d \to cc\langle \mathbf{CD} \rangle dd \to ccc\langle \mathbf{CD} \rangle ddd \to cccddd$$

6.1.2 Reguliere uitdrukkingen

- Een **reguliere uitdrukking** is ook een methode om een taal te beschrijven.
- Een reguliere uitdrukking, of *regexp*, is een string over het alfabet $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{d-1}\}$ aangevuld met de symbolen $\varnothing, \epsilon, *, (,)$ en $\perp$, gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Regexp} \rangle &::= \langle \mathbf{basis} \rangle \mid \langle \mathbf{samengesteld} \rangle \\ \langle \mathbf{basis} \rangle &::= \sigma_0 | \cdots | \sigma_{d-1} | \varnothing | \epsilon \\ \langle \mathbf{samengesteld} \rangle &::= \langle \mathbf{plus} \rangle | \langle \mathbf{of} \rangle | \langle \mathbf{ster} \rangle \\ \langle \mathbf{plus} \rangle &::= (\langle \mathbf{Regexp} \rangle \langle \mathbf{Regexp} \rangle) \\ \langle \mathbf{of} \rangle &::= (\langle \mathbf{Regexp} \rangle \perp \langle \mathbf{Regexp} \rangle) \\ \langle \mathbf{ster} \rangle &::= (\langle \mathbf{Regexp} \rangle)* \end{aligned}$$

- Elke regexp R definieert een formele taal, Taal(R).
- Een taal die door een regexp gedefinieerd kan worden heet een reguliere taal.
- De definitie van een regexp en reguliere taal is recursief:
  1. $\varnothing$ is een regexp, met als taal de lege verzameling.
  2. De lege string ϵ is een regexp met als taal Taal(ϵ) = $\{\epsilon\}$.
  3. Voor elke $a \in \Sigma$ is "a" een regexp, met als taal Taal("a") = {"a"}.
- Regexps kunnen gecombineerd worden via drie operaties:

Operatie	Regexp	Operatie op taal/talen
Concatenatie	(RS)	Taal(R) · Taal(S)
Of	(R|S)	Taal(R) ∪ Taal(S)
Kleenesluiting	(R)*	Taal(R)*

- Vaak worden verkorte notaties gebruikt:
  - **Minstens eenmaal herhalen**
    $$rr* \rightarrow r+$$
  - **Optionele uitdrukking**
    $$r|\epsilon \rightarrow r?$$
  - **Unies van symbolen**
    $$a|b|c \rightarrow [abc]$$
    $$a|b|\ldots|z \rightarrow [a-z]$$
- Regexps kunnen gelinkt worden met graafproblemen.
- **Stelling 1** Zij G een gerichte multigraaf met verzameling takken Σ. Als a en b twee knopen van G zijn dan is de verzameling $P_G(a,b)$ van paden beginnend in a en eindigend in b een reguliere taal over Σ.
- **Bewijs:**

  Via inductie op het aantal verbindingen m van G.
  - Als $m = 0$ dan
    $$P_G(a,b) = \begin{cases} \varnothing, & \text{als } a \neq b \\ \{\epsilon\}, & \text{als } a = b \end{cases}$$
  - Breidt nu de graaf G uit naar G' door één verbinding toe te voegen.
    - Een verbinding v_{xy} van knoop x naar knoop y, waarbij eventueel $x = y$.
    - Alle paden van a naar b zijn één van de twee volgende vormen:
      1. De paden die v_{xy} niet bevatten. Deze vormen de reguliere taal $P_G(a,b)$.
      2. De paden die v_{xy} wel bevatten. Deze verzameling wordt gegeven door
         $$P_G(a,x) \cdot \{v_{xy}\} \cdot (P_G(y,x) \cdot \{v_{xy}\}) * \cdot P_G(y,b)$$

         Deze is bekomen uit reguliere talen en is dus regulier.
-

6.2 Variabele tekst

6.2.1 Een eenvoudige methode

- We zitten op een bepaalde positie j in T.
- Vanaf j wordt $T[j+i]$ met $P[i]$ vergeleken voor $0 < i \leq p$.
  1. Het eerste geval komt voor wanneer $T[j+i] \neq P[i]$, voor $i \leq p$, en het patroon dus niet gevonden is op positie j in T.
  2. Het tweede geval komt dan voor wanneer het patroon wel gevonden is op positie j in T.
- Voor willekeurige strings zal $T[j]$ vaak verschillen van $P[0]$.
  - Op veel posities j zal de karaktervergelijking na één positie dan stoppen.
- De **gemiddelde uitvoeringstijd** is $O(t)$.
- Het **slechtste geval** is $O(tp)$.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
		G	C	A	G	A	G	C	A	G															
			G	C	A	G	A	G	C	A	G														
				G	C	A	G	A	G	C	A	G													
					G	C	A	G	A	G	C	A	G												
						G	C	A	G	A	G	C	A	G											
							G	C	A	G	A	G	C	A	G										
								G	C	A	G	A	G	C	A	G									
									G	C	A	G	A	G	C	A	G								
										G	C	A	G	A	G	C	A	G							
											G	C	A	G	A	G	C	A	G						
												G	C	A	G	A	G	C	A	G					
													G	C	A	G	A	G	C	A	G				
														G	C	A	G	A	G	C	A	G			
															G	C	A	G	A	G	C	A	G		
																G	C	A	G	A	G	C	A	G	
																	G	C	A	G	A	G	C	A	G

6.2.2 Knuth-Morris-Pratt

De prefixfunctie

- Gegeven een string P en index i met $i \leq p$.
- De deelstring van P eindigend voor i wordt de prefix van P
- Een string Q kan voor i op P gelegd woorden als $i \geq q$ en als Q overeenkomt met de even lange deelstring van P endigend voor i.
  - De index i wijst naar de plaats *voorbij* de deelstring, niet naar de laatste letter van de deelstring.
- De prefixfunctie $q(i)$ van een string P bepaalt voor elke stringpositie i, $1 \leq i \leq p$, de lengte van de langste prefix van P met lengte kleiner dan i dat we voor i kunnen leggen.
- Volgende eigenschappen gelden:
  - $q(0) = -$ (niet gedefinieerd)
  - $q(1) = 0$

- $q(i) < i$
- $q(i+1) \leq q(i) + 1$

- De waarde van $q(i+1)$ kan bepaald worden als de waarden van de vorige posities gekend zijn.

$$q(i+1) = \begin{cases} q(i)+1 & \text{als } P[q(i)] = P[i] \\ q(q(i))+1 & \text{als } P[q(q(i))] = P[i] \\ q(q(q(i)))+1 & \text{als } P[q(q(q(i)))] = P[i] \\ \cdots & \\ 0 & \text{als } q(q(q(....))) = 0 \end{cases}$$

  - De waarden van de prefixfunctie voor $P =$ `GCAGAGCAG` zijn als volgt:

	G	C	A	G	A	G	C	A	G	-
i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q(i)	-	0	0	0	1	0	1	2	3	4

- De prefixwaarden worden voor stijgende i berekend.
- Wat is de **efficiëntie**?
  - Er moeten p prefixwaarden berekend worden.
  - De recursierelatie wordt ook maar $p-1$ herhaald voor de voltallige bepaling van de prefixfunctie.
  - De methode is $\Theta(p)$.

Een eenvoudige lineaire methode

- Stel een string samen bestaande uit P gevolgd door T, gescheiden door een speciaal karakter dat in niet in beide strings voorkomt.
  - Dit komt neer op het berekenen van de prefixfunctie van T, maar de karakters nog steeds vergelijken met P.
- Bepaal de prefixfunctie van deze nieuwe string, in $\Theta(n+p)$.
- Als $q(j) = p$ voor $0 < j \leq t$, dan werd P gevonden beginnend bij index $j - p$ in T.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
q(j)	-	1	2	3	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	0	0	0	0	1	2	3	0

Het Knuth-Morris-Prattalgoritme

- Ook een lineaire methode, maar is efficiënter.
- Stel dat P op een bepaalde beginpositie vergeleken wordt met T, en dat er geen overeenkomst meer is tussen $P[i]$ en $T[j]$.
  - Als $i = 0$, dan wordt P één positie naar rechts geschoven en begint het vergelijken met T weer bij $P[0]$.
  - Als $i > 0$, dan is er een prefix van P met lengte i gevonden, dat we voor j op T kunnen leggen.

- ◇ Verschuif P met een stap s kleiner dan i.
- ◇ Er is nu een overlapping tussen het begin van P en het prefix van P dat we in T gevonden hebben.
- ◇ De overlapping heeft lengte $i - s$.
- ◇ De overlappende delen moeten wel overeenkomen.
- ◇ De kleinste waarde van s waarbij dit mogelijk is, is $s = i - q(i)$.
- ◇ Verschuif P met s en vergelijk verder vanaf $T[j]$ en $P[q(i)]$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	G	C	A	G	A	G	C	A	G	-
q(i)	-1	0	0	0	1	0	1	2	3	4
s	1	1	2	3	3	5	5	5	5	5

Tabel 6.1: Het patroon $P =$ `GCAGAGCAG`, de bijhorende prefixfunctie $q(i)$ en de s-waarden.

	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
$i - q(i)$	sprong																									
3 - 0	3	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
0 - (-1)	1				G	C	A	G	A	G	C	A	G													
0 - (-1)	1					G	C	A	G	A	G	C	A	G												
9 - 4	5						G	C	A	G	A	G	C	A	G											
6 - 1	5											G	C	A	G	A	G	C	A	G						
1 - 0	1																G	C	A	G	A	G	C	A	G	
1 - 0	1																	G	C	A	G	A	G	C	A	G

Tabel 6.2: Een eerste versie van het Knuth-Morris-Prattalgoritme, waarbij $s = i - q(i)$.

- In tabel 6.2 kan opgemerkt worden dat bij de verschuiving, waarbij de fout op $T[16] = T$ veroorzaakt door het verkeerde karakter C, er opnieuw een C vergeleken wordt (Dit geldt niet voor $T[3]$ en het verkeerde karakter G omdat de verschuiving naar de eerste letter van het patroon is).
- Er is een **bijkomende voorwaarde**: de verschuiving s is enkel zinvol als $P[i - s] \neq P[i]$.
- Op basis van $q(i)$ wordt een nieuwe functie $q'(i)$ gedefinieerd, die een zinvolle verschuiving $s = i - q'(i)$ geeft, zodanig dat $P[i - s] \neq P[i]$.

$$q'(i) = \begin{cases} 0 & \text{als } q(i) = 0 \\ q(i) & \text{als } q[i] \neq 0 \text{ en } P[q(i) + 1] \neq P[i + 1] \\ q'(q(i)) & \text{als } q[i] \neq 0 \text{ en } P[q(i) + 1] = P[i + 1] \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	G	C	A	G	A	G	C	A	G	-
q'(i)	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	4
s	1	1	2	3	3	5	6	7	8	5

Tabel 6.3: Het patroon $P =$ `GCAGAGCAG`, de nieuwe prefixfunctie $q'(i)$ en de nieuwe s-waarden.

6.2.3 Boyer-Moore

- Dit algoritme is een **variant** van het Knuth-Morris-Prattalgoritme.

! Het patroon wordt van achter naar voor overlopen bij het vergelijken met de tekst.

	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
$i-q'(i)$	sprong																									
3 - 0	3	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
0 - (-1)	1				G	C	A	G	A	G	C	A	G													
0 - (-1)	1					G	C	A	G	A	G	C	A	G												
9 - 4	5						G	C	A	G	A	G	C	A	G											
6 - 0	6											G	C	A	G	A	G	C	A	G						
1 - 0	1																	G	C	A	G	A	G	C	A	G

Tabel 6.4: De tweede versie van het Knuth-Morris-Prattalgoritme, waarbij $s = i - q'(i)$.

- Er worden **twee heuristieken** gebruikt die grotere verschuivingen mogelijk maakt. Het maximum van de twee heuristieken wordt dan gebruikt als verschuiving:
  1. **De heuristiek van het verkeerde karakter**.
  2. **De heuristiek van het juiste suffix**.

De heuristiek van het verkeerde karakter

- Het tekstkarakter waar een fout voorkomt wordt f genoemd (het verkeerde karakter in de tekst T).
- Als T ook dit karakter bevat, op een andere positie, kan P naar rechts verschoven worden.
- Om de verschuiving te bepalen wordt **de meest rechtse positie** i, links van $p-1$ in P van elk karakter in het alfabet bijgehouden.
  - Dit wordt geïmplementeerd als een tabel, MRP genaamd, geïndexeerd op de karakters van het alfabet (tabel 6.5).

f	A	C	G	T
$MRP[f]$	7	6	5	-1

Tabel 6.5: De MRP-tabel voor $P =$ `GCAGAGCAG`. De waarden voor A en C zijn vanzelfsprekend. De waarde van G is niet 8, omdat dat sowieso het eerste karakter is dat vergeleken wordt, en telt niet mee. Een karakter dat niet in het patroon voorkomt krijgt de waarde -1.

  - Het volstaat nu om de waarde $k = MRP[f]$ op te zoeken, waarbij f het foute karakter in T is, op positie i in P, en P te verschuiven over $i-k$ posities.
    ! In het geval dat $i - k < 0$, dan bedraagt de verschuiving 1 positie.

		j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
		T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
f	$i-k$	sprong																									
C	$4-6$	1	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
A	$8-7$	1		G	C	A	G	A	G	C	A	G															
G	$6-5$	1			G	C	A	G	A	G	C	A	G														
C	$8-6$	2				G	C	A	G	A	G	C	A	G													
/	/	1						G	C	A	G	A	G	C	A	G											
A	$8-7$	1							G	C	A	G	A	G	C	A	G										
G	$6-5$	2								G	C	A	G	A	G	C	A	G									
A	$8-7$	1										G	C	A	G	A	G	C	A	G							
C	$8-6$	2											G	C	A	G	A	G	C	A	G						
A	$5-6$	1													G	C	A	G	A	G	C	A	G				
C	$8-6$	2														G	C	A	G	A	G	C	A	G			
C	$8-6$	2																G	C	A	G	A	G	C	A	G	

Tabel 6.6: Het Boyer-Moore algoritme, enkel gebruik makend van de oorspronkelijke heuristiek van het verkeerde karakter.

- Er zijn **drie varianten** van deze heuristiek:

1. **Uitgebreide heuristiek van het verkeerde karakter**.
   - De MRP-tabel wordt uitgebreidt, zodat $MRP[f]$ de positie j teruggeeft, **links** van foutpositie i in het patroon.
   - Hiervoor is een tweedimensionale tabel nodig en is in het algemeen een vrij slechte uitbreiding.
2. **Variant van Horspool**.
   - Dezelfde MRP-tabel als in de oorspronkelijke versie wordt gebruikt.
   - Bij en fout op tekstpositie m (positie waarbij $P[0]$ overeenkomt met T) en patroonpositie i, wordt P zodanig opgeschoven zodanig dat $T[m+p-1] = P[p-1]$.
   - Zoek de positie van de meest rechtste positie van het karakter van $T[m+p-1]$: $k = MRP[T[m+p-1]]$.
   - De verschuiving van P bedraagt bij een fout dan altijd $p-1-k$.
     - ✓ Verschuiving is onafhankelijk van patroonpositie i.
   - Als deze variant gebruikt wordt, wordt de tweede heuristiek niet gebruikt, wat in het slechtste geval dus $O(pt)$ oplevert.

				j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
				T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
m	$T[m+p-1]$	$p-1-k$	sprong																										
0	G	$9-1-5$	3		G	C	A	G	A	G	C	A	G																
3	C	$9-1-6$	2					G	C	A	G	A	G	C	A	G													
5	/	/	1							G	C	A	G	A	G	C	A	G											
6	A	$9-1-7$	1								G	C	A	G	A	G	C	A	G										
7	G	$9-1-5$	3									G	C	A	G	A	G	C	A	G									
10	C	$9-1-6$	2												G	C	A	G	A	G	C	A	G						
12	G	$9-1-5$	3														G	C	A	G	A	G	C	A	G				
15	C	$9-1-6$	2																	G	C	A	G	A	G	C	A	G	

Tabel 6.7: Het Boyer-Moore algoritme: Horspool variant.

3. **Variant van Sunday**.
   - ???

De heuristiek van het juiste suffix

- Hier wordt enkel de versie van de **originele Boyer-Moore** methode besproken, dus niet de varianten van Horspool of Sunday.
- In vele gevallen kan f aan de rechterkant van foutpositie i voorkomen, zodat $i - j < 0$, en er dus maar een verschuiving van 1 positie mogelijk is.
- Op positie i in P vinden we een verkeerd karakter f in T.
- Er is dus een **suffix** s van P in T, met lengte $p - i - 1$.
- We willen weten of s nog ergens in P voorkomt.
  - Als er meerdere plaatsen zijn waar s in P voorkomt, wordt de meeste rechtse genomen.
  - Suffixen kunnen overlappen.
- We willen dus de meeste rechtste positie j in P, waarbij $j \leq i$ waar een deelstring $s' = s$ begint.
- Analoog aan de prefixfunctie, is er nu een suffixfunctie $s(j)$:
  - Voor elke index j in P wordt de lengte van het grootste suffix van P bijgehouden, dat op index j begint.
  - De suffixwaarden is het omgekeerde van de prefixtabel voor het omgekeerde patroon P.

- De grootste waarde voor j waarvoor $s(j) = p - i - 1$ is de waarde voor k.
- Een verschuiving $v[i]$ voor foutpositie i in P is dan $i + 1 - k$. Als k niet gedefinieerd is dan is $v[i] = p - s[0]$ (geval 3 bij de speciale gevallen).

- Er zijn **drie speciale gevallen** die zich kunnen voordoen:

1. **Het patroon P werd gevonden**.
   - Er is geen foutief patroonpositie ($i = -1$) en het juiste suffix is nu P zelf.
   - Toch mogen er geen p posities opgeschoven worden, want een nieuwe P in T kan de vorige gedeeltelijk overlappen.
   - De overlapping is het langst mogelijke suffix van P, korter dan p.
   - De verschuiving is dus $v[-1] = p - s[0]$ (virtueel tabelelement, kan geïmplementeerd worden als constante).
2. **Er is geen juist suffix**.
   - Als $i = p - 1$, dan is er geen juist suffix.
   - De verschuiving $v[p-1]$ is altijd 1.
3. **Het juiste suffix komt niet meer in P voor**.
   - Er is geen index j gevonden waarvoor $s(j) = p - i - 1$.
   - De verschuiving is $v[i] = p - s[0]$.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
P	-	G	C	A	G	A	G	C	A	G
$s(i)$	/	4	3	2	1	2	1	0	0	0
$p-i-1$	/	8	7	6	5	4	3	2	1	0
k	/	-	-	-	-	0	1	4	5	8
$i+1-k$	/	-	-	-	-	5	5	3	3	1
$v[i]$	5	5	5	5	5	5	5	3	3	1

Tabel 6.8: De waarden voor k worden als volgt berekent: zoek de grootste i zodanig dat $s(i) = p-i-1$. De gekleurde cijfers in de tabel toont voor elke k de relatie met index i en $s(i) = p-i-1$.

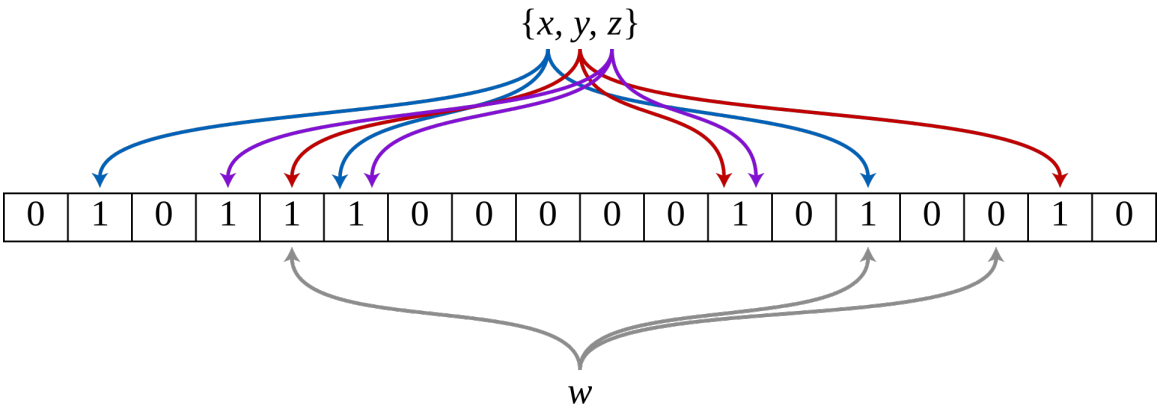
	j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
i	$v[i]$																									
4	5	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
-1	5						G	C	A	G	A	G	C	A	G											
8	1											G	C	A	G	A	G	C	A	G						
8	1												G	C	A	G	A	G	C	A	G					
5	5													G	C	A	G	A	G	C	A	G				

Tabel 6.9: Het Boyer-Moore algoritme, enkel gebruik makend van de heuristiek van het juiste suffix.

6.2.4 Onzekere algoritmen

- Algoritmen die een zekere waarschijnlijkheid hebben om een geheel foutief resultaat te geven.
- Zulke algoritmen worden ook **Monte Carloalgoritmen** genoemd.
- Er zijn redenen waarom zulke algoritmen toch nuttig kunnen zijn;

1. Zulke algoritmen zijn vaak sneller.
   - Een voorbeeld is een **Bloomfilter** (figuur 6.1).
   - We willen een verzameling van objecten in gehashte vorm bijhouden.



Figuur 6.1: Een bloomfilter, die de verzameling $\{x, y, z\}$ beschrijft. De logische OF met al deze elementen is al reeds uitgevoerd. De controle of w ook in deze verzameling zit zegt dat deze er niet in zit, want een bit van de hashwaarde van w in de bloomfilter is 0.

   - Een Bloomfilter houdt de logische bitsgewijze OF bij van de hashwaarden van alle elementen.
   - Om te weten of een object in de verzameling zit wordt deze eerst gehasht. Daarna wordt de logische EN operatie gebruikt op de bloomfilter met deze waarde.
   - Als het resultaat verschilt van de hashwaarde dan zit het object er zeker niet in.
   - Anders weten we het niet, en moet de verzameling doorzocht worden.
2. Men tracht de kans dat er een fout voorkomt zo klein mogelijk te maken.

6.2.5 Het Karp-Rabinalgoritme

- Herleidt het vergelijken van strings tot het vergelijken van getallen.
- Aan elke mogelijke string die even lang is als P wordt een getal toegekend.
- Er zijn d^p verschillende strings met lengte p, zodat de getallen groot kunnen worden.
  - Daarom worden de getallen beperkt tot deze die in één processorwoord (met lengte w bits) voorgesteld kunnen worden, via een modulobewerking.
- Meerdere strings zullen met hetzelfde getal moeten overeenkomen ($\equiv$ hashing).
- Gelijke strings betekent nog altijd gelijke getallen, maar een gelijk getal betekent niet meer dezelfde string.
  - Bij een gelijk getal moet het patroon nog steeds vergeleken worden met de tekst op die positie.
- Hoe worden de getallen gedefinieerd?
  - Ze moeten in $O(1)$ berekend kunnen worden voor elk van de $O(t)$ deelstrings in de tekst.
  - Een hashwaarde voor een string met lengte p in $O(1)$ berekenen is niet realistisch.
  - Daarom wordt de hashwaarde voor de deelstring op positie $j + 1$ berekend op basis van de deelstring op basis j.
  - De eerste hashwaarde berekenen ($j = 0$) mag dan langer duren.
- De voorstelling van P:

- We beschouwen een string als een getal in een $d-$tallig talstelsel omdat elk stringelement d waarden kan aannemen zodat elk stringelement wordt voorgesteld door een cijfer tussen 0 en $d-1$.

$$H(P) = \sum_{i=0}^{p-1} P[i]d^{p-i-1} = P[0]d^{p-1} + P[1]d^{p-2} + \cdots + P[p-2]d + P[p-1]$$

- Om de beperkte waarde te bekomen, wordt de rest bij deling door een getal r (in de voorbeelden is $r = 29$) genomen. Dit wordt de **fingerprint** genoemd.

$$H_r(P) = H(P) \bmod r$$

- Dit is geen efficiënte operatie omdat de individuele getallen van de som in $H(p)$ groot kunnen worden, maar gelukkig

$$(a + b) \bmod r = (a \bmod r + b \bmod r) \bmod r$$

  Dit geldt ook voor verschil en het product.

  - Op deze manier wordt $H_r(P)$ als volgt gedefinieerd:

$$H_r(P) = \sum_{i=0}^{p-1} P[i]d^{p-i-1} \bmod r$$

  ! In de voorbeelden wordt deze eigenschap niet gebruikt om het overzichtelijk te houden.

- Omdat elk tussenresultaat nu binnen een processorwoord past, is $H_r(P)$ berekenen slechts $\Theta(p)$.
- Voor het alfabet $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ gelden volgende waarden voor de stringelementen:

A	1
C	2
G	3
T	4

$$\begin{aligned} H(P) &= \sum_{i=0}^{8} P[i] \cdot 4^{8-i} \\ &= G \cdot 4^8 + C \cdot 4^7 + A \cdot 4^6 + G \cdot 4^5 + A \cdot 4^4 + G \cdot 4^3 + C \cdot 4^2 + A \cdot 4^1 + G \cdot 4^0 \\ &= 3 \cdot 4^8 + 2 \cdot 4^7 + 1 \cdot 4^6 + 3 \cdot 4^5 + 1 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 \\ &= 237031 \\ H_r(P) &= 237031 \bmod 29 \\ &= 14 \end{aligned}$$

- De voorstelling van T:

  - De waarde T_0 bij beginpositie $j = 0$ wordt op dezelfde manier berekend als P.

$$H(T_0) = \sum_{i=0}^{p-1} T[i]d^{p-i-1} = T[0]d^{p-1} + T[1]d^{p-2} + \cdots + T[p-2]d + T[p-1]$$

  - Er is nu een eenvoudig verband tussen het getal voor de deelstring T_{j+1} bij beginpositie $j+1$ en dat voor T_j bij beginpositie j:

$$H(T_{j+1}) = (H(T_j) - T[j]d^{p-1})d + T[j+p]$$

- Analoog aan $H_r(P)$ worden de waarden $H(T)$ ook modulo r genomen, zodat

$$H_r(T_{j+1}) = H(T_{j+1}) \bmod r$$

(De waarde $T[j]d^{p-1}$ aftrekken en die van $T[j+p]$ optellen en er ook voor zorgen dat de macht die bij $T[j+1], T[j+2], ...T[j+p-1]$ hoort met 1 verhoogt wordt door te vermenigvuldigen met d)

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
$H(T_j)$	238311	166813	142967	309726	190329	237031	161693	122487	227808	124801	237062	161817	122983	229790	132729	268774	26523	/	/	/	/	/	/	/	/
$H_r(T_j)$	18	5	26	6	2	14	18	20	16	14	16	26	23	23	25	2	17	/	/	/	/	/	/	/	/
$H(T_0)$	$3 \cdot 4^8 + 2 \cdot 4^7 + 1 \cdot 4^6 + 4 \cdot 4^5 + 2 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 238311$																								
$H(T_1)$	$(H(T_0) - T[0] \cdot 4^8) \cdot 4 + T[9] = (238311 - 3 \cdot 4^8) \cdot 4 + 1 = 166813$																								
$H(T_2)$	$(H(T_1) - T[1] \cdot 4^8) \cdot 4 + T[10] = (166813 - 2 \cdot 4^8) \cdot 4 + 3 = 142967$																								
$H(T_3)$	$(H(T_2) - T[2] \cdot 4^8) \cdot 4 + T[11] = (142967 - 1 \cdot 4^8) \cdot 4 + 2 = 309726$																								
$H(T_4)$	$(H(T_3) - T[3] \cdot 4^8) \cdot 4 + T[12] = (309726 - 4 \cdot 4^8) \cdot 4 + 1 = 190329$																								
$H(T_5)$	$(H(T_4) - T[4] \cdot 4^8) \cdot 4 + T[13] = (190329 - 2 \cdot 4^8) \cdot 4 + 3 = 237031$																								
$H(T_j)$											...														
P	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
$T[5 \cdots 13]$	G	C	A	G	A	G	C	A	G																
$T[9 \cdots 17]$	A	G	C	A	G	A	G	T	A																

Tabel 6.10: Het Karp-Rabinalgoritme.

- Het berekenen van $H_r(P)$, $H(T_0)$ en $d^{p-1} \bmod r$ vereist $\Theta(p)$ operaties.
- Het berekenen van alle andere fingerprints $H_r(T_j)(0 < j \leq t - p)$ vergt $\Theta(t)$ operaties.
- Dit is $\Theta(t + p)$.
- Maar, de strings moeten nog vergeleken worden als de fingerprints hetzelfde zijn.
- In het slechtste geval zijn de fingerprints op elke positie gelijk, zodat de totale performantie **O(tp)** is.
- Er zijn nu nog twee mogelijkheden om r te bepalen:

1. **Vaste** r
   - Kies r als een zo groot mogelijk priemgetal zodat $rd \leq 2^w$.
   - Priemgetallen zorgt ervoor dat gelijkaardige deelstrings dezelfde fingerprinters zouden opleveren.
   - Een groot priemgetal zorgt voor een groot aantal mogelijke fingerprints.
   - Er is nu wel een nieuw verband tussen $H_r(T_{j+1})$ en $H_r(T_j)$:

$$H_r(T_{j+1}) = \Big(\big((H_r(T_j) + r(d-1) - T[j](d^{p-1} \bmod r)) \bmod r \big) d + T[j+1] \Big) \bmod r$$

   (De term $r(d-1)$ wordt toegevoegd om een negatief tussenresultaat te vermijden.)

2. **Random** r
   - Soms is een vaste r nadelig: er kan bijvoorbeeld een slechte waarde gekozen worden.
   - De veiligste implementatie gebruikt een willekeurige priem r uit een bepaald bereik.
   - Een groter bereik reduceert de kans op fouten.
   - Het aantal priemgetallen kleiner of gelijk aan k is $\frac{k}{\ln k}$.
   - Door k groot te kiezen zal slechts een klein deel van die priemgetallen een fout veroorzaken.
   - De kans dat r één van die priemen is wordt klein.
   - Voor $k = t^2$ is de kans op één enkele foute $O(1/t)$.
   - Om fouten helemaal te vermijden zijn er twee mogelijkheden:
     - Overgaan naar een andere methode als de fout gesignaleerd wordt.
     - Herbeginnen met een nieuwe random priem r.

6.2.6 Zoeken met automaten

- Een **automaat** is een informatieverwerkend eenheid.

Deterministische automaten

- Een deterministische automaat (DA) bestaat uit:
  - Een eindige verzameling invoersymbolen Σ.
  - Een eindige verzameling staten S.
  - Een begintoestand $s_0 \in S$.
  - Een eindige verzameling eindstaten $F \subset S$.
  - Een overgangsfunctie $p(t, a)$ die de nieuwe toestand geeft wanneer de DA in toestand t invoersymbool a ontvangt.
- Een DA kan voorgesteld worden een gelabelde multigraaf G.
  - De knopen zijn de toestanden.
  - De verbindingen zijn de overgangen.
- Als de DA zich in een eindstaat bevindt na het invoeren van een string, dan wordt deze string herkent door de DA.
- Een taal die door een DA herkent wordt is regulier.
  - Dit is de verzameling van labels $P_G(\{s_0\}, F)$

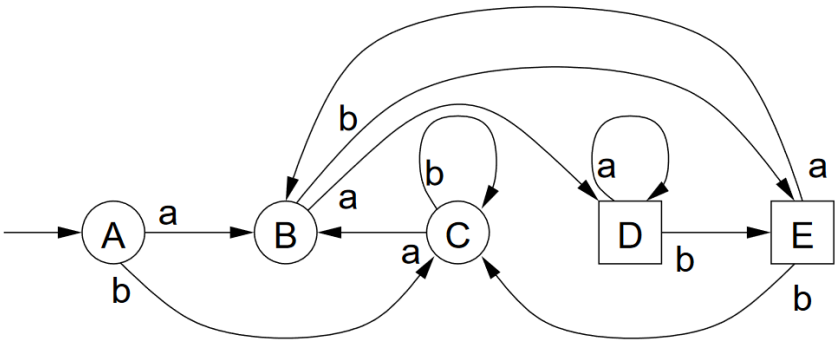
Niet-deterministische automaten

- Een niet-deterministische automaat (NA) bestaat uit:
  - Een eindige verzameling invoersymbolen Σ.
  - Een eindig aantal statenbits. De verzameling van statenbits die de waarde 1 hebben is de staat van de NA.
  - Een beginbit b_0 en een verzameling eindbits.
  - De overgangsfunctie $s(i, a)$ is de verzameling statenbits die een signaal krijgen van statenbit i als de inkomende letter a is. Een statenbit dat een signaal binnenkrijgt krijgt de waarde 1.
  - Nul of meerdere ϵ-overgangen. Een ϵ-overgang van statenbit i naar statenbit j zorgt ervoor dat wanneer i een signaal binnenkrijgt, dit signaal direct doorstuurt naar j.
- Een NA herkent een string als op het einde van die string er één of meer eindbits aan staan.

De deelverzamelingconstructie

- Een NA is een alternatieve voorstelling van een DA.
- Elke NA kan omgezet worden in een DA.
  - Een DA is eenvoudiger om te implementeren: de nieuwe toestand wordt opgezocht in een tweedimensionale tabel.
- Elke staat van de NA komt overeen met een verzameling statenbits die aanstaan.

- Als er k statenbits zijn, dan zijn er 2^k mogelijke deelverzamelingen.
  - ✓ Slechts een klein aantal van deze deelverzamelingen worden effectief bereikt.
- Er is een impliciet gegeven multigraaf met 2^k knopen.
- Om een DA te construeren zijn er twee hulpoperaties nodig:
  1. **ϵ-sluiting(T)**: De deelverzameling van statenbits bereikbaar via ϵ-overgangen vanuit een verzameling statenbits T.
  2. $p(T, a)$: De deelverzameling van statenbits rechtstreeks bereikbaar vanuit een toestand t uit T voor het invoersymbool a.
- Om een DA te construeren moet er een verzameling van toestanden S met begin- en eindtoestanden en een overgangstabel M opgesteld worden.
  - De begintoestand is ϵ-sluiting(b_0).
  - Elke andere staat wordt bekomen door ϵ-sluiting($p(T, a)$) voor elke andere staat T en invoersymbool a.
  - Een eindtoestand van de DA bevat minstens één eindtoestand van de NA. Vervolgens wordt voor elke toestand T de overgang voor elk invoersymbool a bepaald.
- Figuur 6.2 toont de DA geconstrueerd uit de NA van figuur 6.5.

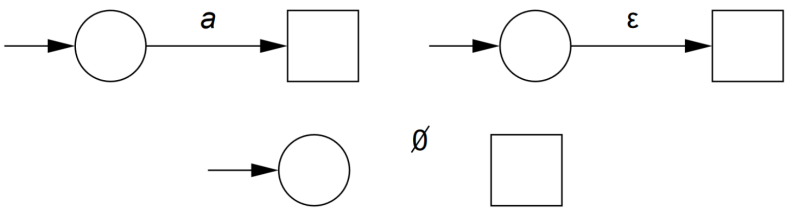


		a	b
$\rightarrow$	$A = \{1, 2, 3, 4, 8\}$	B	C
	$B = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\}$	D	E
	$C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}$	B	C
$\leftarrow$	$D = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14\}$	D	E
$\leftarrow$	$E = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14\}$	B	C

Figuur 6.2: Deterministische automaat geconstrueerd uit de NA van figuur 6.5.

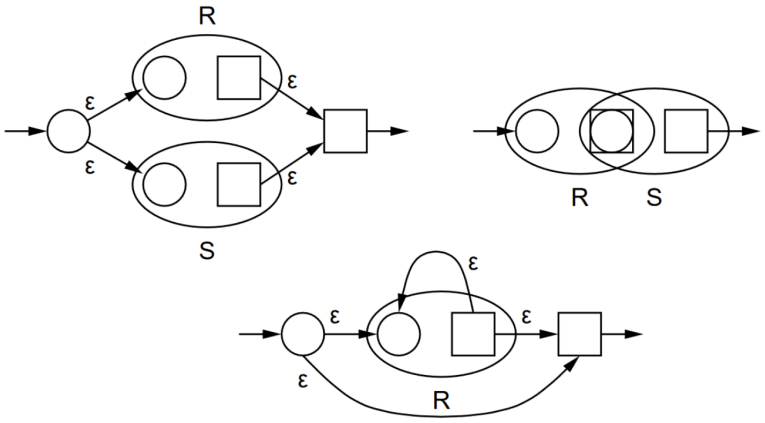
Automaten voor regexps

- Een reguliere taal kan herkend worden door een DA of NA.
- Een NA kan opgebouwd worden vanuit een regexp door de **constructie van Thompson**.



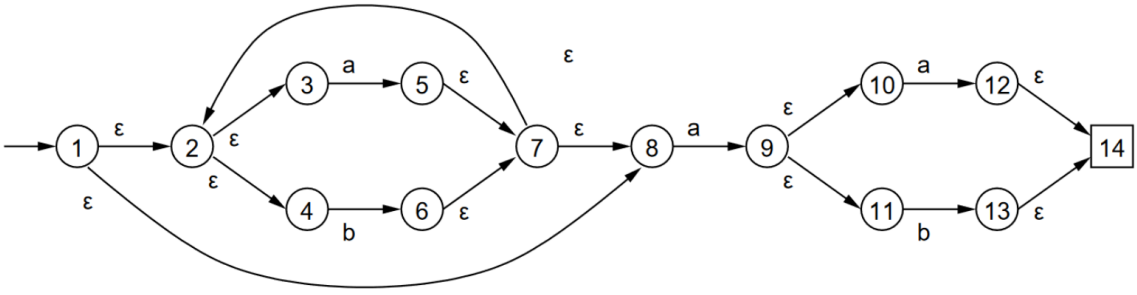
Figuur 6.3: Constructie van Thompson: basiselementen.

- Er worden NA's gedefinieerd voor basiselementen van een regexp: elk element uit Σ en ϵ (figuur 6.3).
- Deze NA's kunnen samengesteld worden voor elk van de drie basisoperatoren: unie, concatenatie en Kleenesluiting (figuur 6.4).



Figuur 6.4: Constructie van Thompson: unie, concatenatie en Kleenesluiting.

- Een NA die op deze manier geconstrueerd is, zal alle strings genereerd door de regexp herkennen en geen andere.
- Figuur 6.5 toont de NA bekomen met deze constructie voor de regexp $(a|b) * a(a|b)$.



Figuur 6.5: Constructie van Thompson: NA voor $(a|b) * a(a|b)$.

- Een NA uit de constructie van Thompson heeft drie eigenschappen:

- Er is slechts één beginbit en één eindbit.
- Het aantal bits is niet groter dan tweemaal het aantal elementen in de regexp.
- Vanuit elke bit vertrekken er hoogstens twee overgangen: ofwel één overgang voor een symbool uit Σ, ofwel hoogstens twee ϵ-overgangen.

- **Stelling 2** Een taal kan herkend worden door een eindige deterministische automaat als en slechts als ze regulier is.
- **Bewijs:**
  - Een taal die herkend wordt door een automaat is zeker regulier.
    - Een taal bestaande uit labels van de paden vertrekkend uit een beginstaat en eindigd in een eindstaat is steeds regulier.
  - Als een taal regulier is, kan ze beschreven worden door een regexp en voor deze regexp kan eerst een NA opgebouwd worden, en vervolgens tot een DA omgevormd worden via de deelverzamelingconstructie.
- **Gevolg:**
  - Niet alle contextvrije talen zijn regulier.
    - Stel de strings beginnend met een aantal 'a's gevolgd door evenveel 'b's
    - Als er een 'b' tegengekomen wordt, moet er ergens bijgehouden worden hoeveel 'a's er al zijn geweest.
    - Dit aantal is niet begrensd en kan niet vooraf in een eindig geheugen geplaatst worden.

Minimalisatie van een automaat

6.2.7 De Shift-AND-methode

- Bitgeoriënteerde methode, die zeer efficiënt werkt voor **kleine patronen**.
- Hou voor elke positie j in T bij welke prefixen van P overeenkomen met de tekst, eindigend op j.
- Er is een tabel S met d woorden (tabel 6.11). Een bit i van woord $S[s]$ is waar als karakter s op plaats i in P voorkomt.

	G	C	A	G	A	G	C	A	G
S['A']	0	0	**1**	0	**1**	0	0	**1**	0
S['C']	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0
S['G']	**1**	0	0	**1**	0	**1**	0	0	**1**
S['T']	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 6.11: De tabel S bevat een bitpatroon voor elk karakter s in het alfabet. Karakters die niet in het patroon voorkomen krijgen een bitpatroon bestaande uit p nulbits.

- Een tabel R_j van p logische waarden geeft voor het i-de element het prefix van lengte i, die hoort bij tekstpositie j.
  - De startabel R_0 wordt opgebouwd als $R_0[0] = 1$ en $R_0[1 \cdots p-1] = 0$.
  - Opeenvolgende tabellen R_{j+1} kunnen via efficiënte bitoperaties bekomen worden:

$$R_{j+1} = \text{Schuif}(R_j) \text{ EN } S[T[j+1]]$$

R_j		R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	R_{17}	R_{18}	R_{19}	R_{20}	R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}
	T	G	C	A	T	C	G	C	A	G	A	G	C	A	G	A	G	T	A	C	A	G	C	A	C	G
$R[0]$	G	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
$R[1]$	C	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
$R[2]$	A	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$R[3]$	G	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R[4]$	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R[5]$	G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R[6]$	C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R[7]$	A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$R[8]$	G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabel 6.12: De opeenvolgende tabellen R_j. Er moet slechts één tabel in het geheugen bijgehouden worden, en dat is die op het huidige karakterpositie j.

- De schuif-operatie verschuift een bitpatroon naar rechts, en voegt links een éénbit toe.

- Het patroon wordt gevonden in de tekst op positie $j - p$ als $R_j[p-1] = 1$.
- Er zijn ook **benaderingen mogelijk**. Deze benaderingen maken gebruik van dezelfde tabel $R_j = R_j^0$, en een nieuwe tabel R_j^1, waarvan de definitie afhankelijk is van het soort benadering.
  - **Karakters inlassen**
    - De tabel R_j^1 duidt alle prefixen aan eindigend op positie j met hoogstens één inlassing.

$$R_{j+1}^1 = R_j^0 \text{ OF } (\text{Schuif}(R_j) \text{ EN } S[T[j+1]])$$

  - **Karakters verwijderen**
    - De tabel R_j^1 duidt alle prefixen aan eindigend op positie j met hoogstens één verwijdering.

$$R_{j+1}^1 = \text{Schuif}(R_{j+1}^0) \text{ OF } (\text{Schuif}(R_j) \text{ EN } S[T[j+1]])$$

  - **Karakters vervangen**
    - De tabel R_j^1 duidt alle prefixen aan eindigend op positie j waarbij $i-1$ van de eerste i karakters van P overeenkomen met $i-1$ karakters van de i karakters die in de tekst eindigen bij positie j.

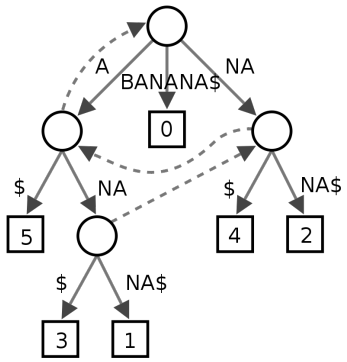
$$R_{j+1}^1 = \text{Schuif}(R_j^0) \text{ OF } (\text{Schuif}(R_j) \text{ EN } S[T[j+1]])$$

Hoofdstuk 7

Indexeren van vaste tekst

- Sommige zoekoperaties gebeuren op een vaste tekst T waarin frequent gezocht wordt naar een veranderlijk patroon P.
- Voorbereidend werk op de tekst om efficiënter te doorzoeken.
- Alle zoekmethoden in hoofdstuk 6 verrichten voorbereidend werk op het patroon.
  - In het slechtste geval is dit $O(t + p)$.
  - Dit kan gereduceerd worden tot $O(p)$ door eerst $O(t)$ voorbereidend werk te doen op T via **suffixen**.
  - Als een patroon in de tekst voorkomt, moet het een prefix zijn van één van de suffixen.
  - Een suffix dat begint op lokatie i wordt aangeduidt met suff_i.

7.1 Suffixbomen



Figuur 7.1: Een suffixboom voor de string `BANANA$`. Elk van de suffixen `BANANA$`, `ANANA$`, `NANA$`, `ANA$`, `NA$` en `A$` kan gevonden worden in deze boom. Het suffix `NANA$` wordt gevonden door twee keer de rechterdeelboom te nemen vanuit de wortel. De index 2 wijst erop dat de suffix begint bij $T[2]$. De gestreepte verbindingen zijn staartpointers.

- Een **gewijzigde patriciatrie**:
  1. In de bladeren wordt enkel de index i van suff_i opgeslagen, en niet het suffix zelf.

2. In elke knoop wordt er een begin- en eindindex opgenomen, in plaats van een testindex.
3. Elke inwendige knoop kan een staartpointer opnemen die de opbouw van de suffixboom eenvoudiger maakt.
   - De staart van een string s is **staart(s)** en wordt bekomen door het eerste karakter van de string te verwijderen.
   - De staart van een suffix is zelf ook een suffix.

- In de trie is er een expliciete inwendige knoop horend bij de niet-lege string α, als de trie twee strings $\alpha\beta$ en $\alpha\gamma$ bevat zodat de eerste letter van β verschilt van de eerste letter van γ.
- **Twee eenvoudige toepassingen** van een suffixboom:
  1. **Zoeken van een patroon P in een tekst T.**
     - Constureer de suffixboom voor T.
     - Zoek de knoop die overeenkomt met P.
       - Als deze niet bestaat zit P niet in T.
       - Als deze wel bestaat, zitten de gezochte beginposities in T bij alle bladeren die opvolger zijn van de gevonden knoop.
  2. **De langste gemeenschappelijke deelstring.**
     - Er is een verzameling van k verschillende strings $S = \{s_1, s_2, \cdots, s_k\}$ met totale lengte t.
     - De langste gemeenschappelijke deelstring van van al die strings wordt gezocht.
     - Er wordt een **veralgemeende suffixboom** opgesteld:
       - Elk blad bevat de beginpositie van het suffix, en ook tot welke strings ze behoort.
       - Elk blad moet ook de begin- en eindindex opslagen, per eventuele string.
     - Elke inwendige knoop komt overeen met een prefix van een suffix, en deze deelstring komt voor in elk string die vermeld wordt bij een blad dat opvolger is van die knoop.
     - De boom wordt overlopen om de lengte van al de prefixen en het aantal verschillende strings te bepalen waarin ze voorkomen, en dus ook het langste prefix dat in alle strings voorkomt.

7.2 Suffixtabellen

- We veronderstellen dat het vroeger gebruikte patroon P (`GCAGAGCAG`) nu de tekst is, om voorbeelden in te korten.
- Een tabel met de gerangschikte suffixen van een string.
- De elementen van de tabel zijn indices, die de startpositie van het suffix aanduiden van de string.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$T[i]$	G	C	A	G	A	G	C	A	G
$SA[i]$	7	2	4	6	1	8	3	5	0
$T[SA[i]]$	A	A	A	C	C	G	G	G	G

Tabel 7.1: De suffixtabel SA voor `GCAGAGCAG`.

- Deze tabel wordt bekomen door de suffixboom in inorder te overlopen.
  - Andere, meer efficiënte, methoden bestaan, maar worden niet in de cursus besproken.

- Om een suffixtabel te gebruiken is er een hulpstructuur nodig, de **LGP**-tabel (Langste Gemeenschappelijke Prefix), die dan wordt omgezet in de **LCP**-tabel die gerangschikt is in de volgorde gegeven door de suffixtabel.
- Tabel 7.2 toont de constructie van de LCP-tabel.
  - Overloop i, $0 \leq i \leq t$.
  - Zoek j zodanig dat $SA[j] = i$.
  - De opvolger van $suff_i$ is dan $suff_{SA[j+1]}$.
  - Vergelijk $suff_i$ met $suff_{SA[j+1]}$ vanaf beginpositie $P[i+l]$.
    - Initieel is $l = 0$.
    - Verhoog l totdat $T[i+l] \neq T[SA[j+1]+l]$.
    - Als $l > 0$, dan moet voor $i+1$ slechts vergeleken worden vanaf $T[i+l-1]$.

			i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
			$T[i]$	G	C	A	G	A	G	C	A	G
			$SA[i]$	7	2	4	6	1	8	3	5	0
			$T[SA[i]]$	A	A	A	C	C	G	G	G	G
i	**opvolger**	**LGP[i]**	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	-	0	/									
1	8	0	$suff_1$	C	A	G	A	G	C	A	G	
			$suff_8$	G								
2	4	2	$suff_2$	A	G	A	G	C	A	G		
			$suff_4$	A	G	C	A	G				
3	5	1	$suff_3$	G	A	G	C	A	G			
			$suff_5$	G	C	A	G					
4	6	0	$suff_4$	A	G	C	A	G				
			$suff_6$	C	A	G						
5	0	4	$suff_5$	G	C	A	G					
			$suff_0$	G	C	A	G	A	G	C	A	G
6	1	3	$suff_6$	C	A	G						
			$suff_1$	C	A	G	A	G	C	A	G	
7	2	2	$suff_7$	A	G							
			$suff_2$	A	G	A	G	C	A	G		
8	3	1	$suff_8$	G								
			$suff_3$	G	A	G	C	A	G			
			$LGP[i]$	0	0	2	1	0	4	3	2	1
			$LCP[i]$	4	0	0	1	2	0	3	1	2

Tabel 7.2: De constructie van de LCP-tabel voor `GCAGAGCAG`. Karakters die rood of groen zijn worden effectief vergeleken. Oranje karakters moeten niet meer vergeleken worden.

- Een patroon P opzoeken in de suffixtabel gebeurt met **binair zoeken**.

7.3 Tekstzoekmachines

7.3.1 Inleiding

- Tekstzoekmachines zijn in eerste instantie gelijkaardig aan databanksystemen.
  - Documenten worden bewaard in een repository.

  - Er worden indexen bijgehouden om snel documenten te doorlopen.
  - Er kunnen queries uitgevoerd worden relevante documenten te zoeken.
- Maar ze verschillen ook van databanksystemen.
  - Een query voor een tekstzoekmachine bestaat enkel uit woorden of zinnen.
  - In een databanksysteem zal de query resultaten geven die voldoen aan een logische uitspraak, maar bij een tekstzoekmachine is dit vager.
  - Een tekstzoekmachine geeft niet alle resultaten terug, maar enkel de meest relevante. Het begrip relevantie is ook niet exact, aangezien dit afhangt van de gebruiker.
- Het gebruik van **indices** om tekst te indexeren is onmisbaar.

7.3.2 Zoeken van tekst en informatie verzamelen

Queries

- In een traditionele databank hebben gegevens een unieke sleutel, wat niet het geval is bij tekstdocumenten op het internet.
- Soms hebben tekstdocumenten *metadata* zoals de auteur, het onderwerp en het aantal pagina's, maar deze zijn slechts occasioneel nuttig.
- De meest voorkomende manier om in tekst te zoeken is het zoeken naar **inhoud** aan de hand van een **query**.
- Aangezien dat een tekstzoekmachine probeert relevante documenten weer te geven, moet gemeten kunnen worden hoe goed deze documenten zijn.
- Een tekstzoekmachine heeft een bepaalde **effectiveness** voor een getal r waarbij de meeste van de eerste r resultaten relevant zijn.
  - De *effectiveness* wordt vaak bepaald door de **precision** en **recall**.
  - De *precision* is de verhouding van documenten dat relevant zijn.
  - De *recall* is de verhouding van relevante documenten die gekozen zijn.
  - Voorbeeld:
    - Een tekstdatabank bevat 20 documenten.
    - Een gebruiker zoekt in deze databank met een query en er worden 8 resultaten teruggegeven.
    - De gebruiker vindt dat 5 van deze resultaten relevant zijn voor hem, en dat er nog 2 andere documenten in de tekstdatabank zitten die niet door de tekstzoekmachine gegeven worden.
    - De textitprecision is 5/8.
    - De *recall* is 5/7.
  - Veel van de technieken zorgen ervoor dat *effectiveness* vrij hoog blijft.

Voorbeelddatabanken

- De **Keeper databank**.

  1 The old night keeper keeps the keep in the town.
  2 In the big old house in the bog old gown.
  3 The house in the town had the big old keep.
  4 Where the old night keeper never did sleep.
  5 The night keeper keeps the keep in the night.
  6 And keeps in the dark and sleeps in the night.

  - Bevat 6 documenten elk met 1 lijn.
  - Verschillende eenvoudige technieken om in deze databank te zoeken.
    - De query `big old house` waarbij de query als één enkele string beschouwd wordt zal enkel document 2 geven.
    - De query `big old house` waarbij elk woord in een verzameling van woorden komt (**bag-of-word**, {`big`, `old`, `house`}) zal documenten 2 en 3 teruggeven. De volgorde van de woorden in deze verzameling spelen geen rol en elk woord wordt afzonderlijk bekeken of ze voorkomt in het document of niet.
  - Meerdere technieken om de **woordenschat** van een tekstdatabank te reduceren:
    - **Zonder aanpassingen**
      `And and big dark did gown had house In in keep keeper keeps light never night old sleep sleeps The the town Where`
    - **Hoofdletter-invariantie**
      `and big dark did gown had house in keep keeper keeps light never night old sleep sleeps the town where`
    - **Verwijderen meerdere varianten van hetzelfde woord**
      `and big dark did gown had house in keep light never night old sleep the town where`
    - **Verwijderen van vaak voorkomende woorden**
      `big dark did gown house keep light night old sleep town`

- Twee hypothetische databanken om efficiëntie te bespreken:

	NewsWire	Web
Grootte in gigabytes	1	100
Aantal Documenten	400 000	12 000 000
Aantal woorden	180 000 000	11 000 000 000
Aantal unieke woorden	400 000	16 000 000
Aantal unieke woorden per document, opgesomd	70 000 000	3 500 000 000

- Elke tekstzoekmachine moet aan een aantal voorwaarden voldoen:
  - De queries moeten goed geanalyseerd worden.
  - De queries moeten snel geanalyseerd worden.
  - Minimaal gebruik van resources zoals geheugen en bandbreedte.
  - Schaalbaar naar grote volumes van data.
  - Resistent tegen het wijzigen van documenten.

Gelijkaardigheidsfuncties

- Elke tekstzoekmachine maakt gebruik van een rankingsysteem om documenten te ordenen.
- Om documenten te ordenen wordt er gebruik gemaakt van een gelijkaardigheidsfunctie.
- Hoe hoger de waarde van deze functie, hoe hoger de kans dat de gebruiker dit document als relevant zal beschouwen.
- De r meest relevante documenten worden dan gegeven aan de gebruiker.
- In **bag-of-words** queries wordt de gelijkaardigheidsfunctie samengesteld door een aantal statistische variabelen:
  - $f_{d,t}$ is de frequentie van het woord t in document d.
  - $f_{q,t}$ is de frequentie van het woord t in de query q.
  - f_t is het aantal documenten dat één of meer keer het woord t bevat.
  - F_t is het aantal keer dat t voorkomt in de hele tekstdatabank.
  - N is het aantal documenten in de tekstdatabank.
  - n het aantal geïndexeerde woorden in de tekstdatabank.
- Deze waarden kunnen gecombineerd worden om drie vaststellingen te maken:
  1. Een woord dat in veel documenten voorkomt krijgt een kleiner gewicht.
  2. Een woord dat veel in één document voorkomt krijgt een groter gewicht.
  3. Een document dat veel woorden bevat krijgt een kleiner gewicht.
- Er is een **query vector** $\vec{w}_q$ en een **document vector** $\vec{w}_d$, waarbij elk component in deze vector gedefinieerd wordt als

$$w_{q,t} = \ln\left(\frac{N}{f_t}\right) \qquad w_{d,t} = f_{d,t}$$

- De maat van gelijkheid $S_{q,d}$, de maat in hoeverre het document d relevant is voor query q, kan bekomen worden door de cosinus van de hoek tussen deze twee vectoren te nemen.

$$S_{q,d} = \frac{\vec{w}_d \cdot \vec{w}_q}{||\vec{w}_d|| \cdot ||\vec{w}_q||} = \frac{\sum_t w_{d,t} \cdot w_{q,t}}{\sqrt{\sum_t w_{d,t}^2} \cdot \sqrt{\sum_t w_{q,t}^2}}$$

- De grootheid $w_{q,t}$ encodeert de **inverse document frequentie** van een woord t.
- De grootheid $w_{d,t}$ encodeert de **woord frequentie** van een woord t.
- Het nadeel aan deze methode is dat elk document in beschouwing genomen moet worden, maar dat slechts r documenten gevonden moeten worden.
- Voor de meeste documenten is de gelijkaardigheidswaarden insignificant.
- Deze **brute-force** methode kan uitgebreidt worden tot betere methoden, via **indices**.

7.3.3 Indexeren en query-evaluatie

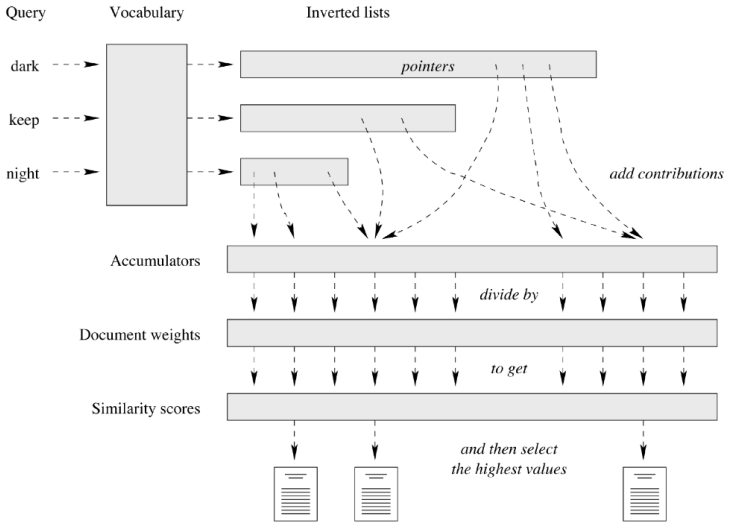
- Een **index** in deze context is een datastructuur dat een woord afbeeldt op documenten dat dit woord bevat.
- Het verwerken van een query kan dan enkel uitgevoerd worden op documenten die minstens één van de query woorden bevat.
- Er zijn vele soorten indices, maar de meest gebruikte is een **inverted file index**: een collectie van lijsten, één per woord, dat documenten bevat dat dit woord bevat.
- Een **normale inverted file index** bestaat uit twee componenten.
  1. Voor elk woord t houdt de **zoekstructuur** het volgende bij:
     - een getal f_t van het aantal documenten dat t bevat, en
     - een pointer naar de start van de correspondeerde geïnverteerde lijst.
  2. Een **verzameling van geïnverteerde lijsten**, waarbij elk lijst het volgende bijhoudt voor een woord t:
     - de sleutels van documenten d die t bevatten, en
     - de verzameling van frequencies $f_{d,t}$ van woorden t in document d.
     - $\rightarrow \langle d, f_{d,t} \rangle$ paren.
- Samen met W_d en deze twee componenten zijn geordende queries mogelijk.
- Een *inverted file* voor de *keeper database* is te zien op tabel 7.3.

woord t	f_t	Geïnverteerde lijst voor t
`and`	1	$\langle 6,2 \rangle$
`big`	2	$\langle 2,2 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$
`dark`	1	$\langle 6,1 \rangle$
`did`	1	$\langle 4,1 \rangle$
`gown`	1	$\langle 2,1 \rangle$
`had`	1	$\langle 3,1 \rangle$
`house`	2	$\langle 2,1 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$
`in`	5	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 2,2 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$ $\langle 5,1 \rangle$ $\langle 6,2 \rangle$
`keep`	3	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$ $\langle 5,1 \rangle$
`keeper`	3	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 4,1 \rangle$ $\langle 5,1 \rangle$
`keeps`	3	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 5,1 \rangle$ $\langle 6,1 \rangle$
`light`	1	$\langle 6,1 \rangle$
`never`	1	$\langle 4,1 \rangle$
`night`	3	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 4,1 \rangle$ $\langle 5,1 \rangle$
`old`	4	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 2,2 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$ $\langle 4,1 \rangle$
`sleep`	1	$\langle 4,1 \rangle$
`sleeps`	1	$\langle 6,1 \rangle$
`the`	6	$\langle 1,3 \rangle$ $\langle 2,2 \rangle$ $\langle 3,3 \rangle$ $\langle 4,1 \rangle$ $\langle 5,3 \rangle$ $\langle 6,2 \rangle$
`town`	2	$\langle 1,1 \rangle$ $\langle 3,1 \rangle$
`where`	1	$\langle 4,1 \rangle$

d	1	2	3	4	5	6
W_d	4	4.2	4	2.8	4.1	4

Tabel 7.3: Een op document niveau geïnverteerd bestand voor de *Keeper* databank. Elk woord t bestaat uit f_t en een lijst van paren, waarbij elk paar bestaat uit een sleutel d van een document en de frequentie $f_{d,t}$ van het woord t in d. Ook zijn de waarden van W_d te zien, berekend volgens $W_d = \sqrt{\sum_t w_{d,t}^2} = \sqrt{\sum_t f_{d,t}^2}$.

- Er kan nu een **query evaluatie** algoritme opgesteld worden (gevisualiseerd op figuur 7.2).



Figuur 7.2: Het gebruik van een geïnverteerd bestand en een verzameling van accumulators om gelijkaardigheidswaarden te berekenen.

1. Er wordt een accumulator A_d bijgehouden voor elk document d. Initieel is elke $A_d = 0$.
2. Voor elk woord t in de query worden volgende operaties uitgevoerd:
   (a) Bereken $w_{q,t} = \ln\left(\frac{N}{f_t}\right)$ en vraag de geïnverteerde lijst op van t.
   (b) Voor elk paar $\langle d, f_{d,t}\rangle$ in de geïnverteerde lijst worden volgende operaties uitgevoerd:
      i. Bereken $w_{d,t}$.
      ii. Stel $A_d = A_d + w_{q,t}w_{d,t}$.
3. Voor elke $A_d > 0$, stel $S_d = A_d/W_d$.
4. Identificeer de r grootste S_d waarden en geef de correspondeerde documenten terug.

- Het is ook nog mogelijk om **de posities van de woorden in het document te indexeren**.
  - Het paar $\langle d, f_{d,t}\rangle$ kan uitgebreidt worden om de posities p bij te houden waar dat t voorkomt in d.

$$\langle d, f_{d,t}, p_1, \cdots, p_{f_{d,t}}\rangle$$

7.3.4 Queries met zinnen

- Een query kan een expliciete zin bevatten, aangeduid met aanhalingstekens, zoals `"philip glass"` of `"the great flydini"`.
- Soms is het ook impliciet zoals `Albert Einstein` of `San Francisco hotel`.
- _ToDo: idk

7.3.5 Constructie van een index

- Het volume van de data is veel te groot om alles in het geheugen te doen.
- Er zijn drie methoden:

1. **In-memory Inversion**
   - Alle documenten wordt tweemaal overlopen.
     (a) Een eerste keer telt de frequentie f_t van alle verschillende woorden van alle documenten.
     (b) Een tweede maal plaatst de pointers in de juiste positie.
2. **Sort-Based Inversion**
3. **Merge-Based Inversion**