Samenvatting Wiskunde B

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

I Herhaling Wiskunde A 4

1 Onbepaalde Integralen 5
- 1.1 Substitutiemethode . . . 5
  - 1.1.1 Voorbeeld 1 . . . 5
  - 1.1.2 Voorbeeld 2 . . . 5
- 1.2 Partieële integratie . . . 6
  - 1.2.1 Voorbeeld 1 . . . 6
  - 1.2.2 Voorbeeld 2 . . . 6
  - 1.2.3 Voorbeeld 3 . . . 6
  - 1.2.4 Voorbeeld 4 . . . 7

II Theorie 8

2 Differentiaalvergelijkingen 9
- 2.1 Basisbegrippen differentiaalvergelijkingen . . . 9
- 2.2 Soorten oplossingen . . . 10
- 2.3 Bepalen van een DVG . . . 12
- 2.4 DVG van orde 1 en graad 1 . . . 14
  - 2.4.1 Gescheiden veranderlijken . . . 14
- 2.5 Homogene DVG . . . 14
- 2.6 Exacte (= totale) DVG . . . 16
- 2.7 Lineaire DVG van orde 1 . . . 19
  - 2.7.1 Oplossingsmethode . . . 20
- 2.8 DVG van type Bernouilli . . . 21
  - 2.8.1 Oplossingsmethode . . . 21
- 2.9 Orthogonale krommenbundel . . . 23
- 2.10 DVG van hogere orde . . . 25
  - 2.10.1 DVG van orde 2 van type F(x, y', y'') = 0 . . . 25
  - 2.10.2 DVG van orde 2 van type F(y, y', y'') = 0 . . . 26
- 2.11 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen . . . 26
  - 2.11.1 Stelling 1 . . . 27
  - 2.11.2 Stelling 2 . . . 27
  - 2.11.3 Stelling 3 . . . 27

3 Laplacetransformatie **28**
3.1 De Heaviside functie . . . 28
3.2 De Dirac delta-'functie' . . . 29
3.3 Causale functie . . . 29
3.4 Exponentiële orde . . . 31
3.5 De Laplacetransformatie . . . 32
3.5.1 Opmerkingen . . . 33
3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties . . . 33
3.5.3 Translatie naar rechts . . . 35
3.5.4 Dempingsfunctie . . . 37
3.5.5 Schaalwijziging . . . 38
3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t) . . . 38
3.5.7 Laplacegetransformeerde van f''(t) . . . 39
3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t . . . 39
3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal . . . 41
3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie . . . 42
3.5.11 De convolutiestelling . . . 42
3.5.12 Inverse Laplacetransformatie . . . 44
3.6 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten . . . 48
3.6.1 Particuliere oplossing . . . 48
3.6.2 Algemene oplossing . . . 49

4 Reeksen **52**
4.1 Definities . . . 52
4.2 Hoofdeigenschappen . . . 53
4.3 Numerieke reeksen . . . 54
4.4 De meetkundige reeks . . . 55
4.4.1 Convergentieonderzoek . . . 55
4.5 Eigenschappen . . . 56
4.6 Reeksen met 'uitsluitend' positieve termen . . . 57
4.6.1 Integraalcriterium van Cauchy . . . 57
4.6.2 De hyperharmonische reeks . . . 58
4.6.3 Vergelijkingscriteria . . . 58
4.6.4 Convergentiecriteria . . . 60
4.7 Willekeurige reeksen . . . 62
4.7.1 Convergentiecriterium van Leibniz . . . 62
4.7.2 Nieuwe begrippen . . . 63
4.8 Reeksen van functies . . . 65
4.8.1 Machtreeksen rond x = a . . . 65
4.9 Reeksen van Taylor . . . 68
4.9.1 McLaurin reeks . . . 68
4.9.2 Eigenschappen . . . 69

III Oefeningen 71

5 Differentiaalvergelijkingen 72

5.1 Bepalen van differentiaalvergelijkingen . . . 72
5.2 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en eerste graad . . . 73
5.2.1 Scheiden van de veranderlijken . . . 73
5.2.2 Homogene differentiaalvergelijkingen . . . 74
5.2.3 Totale differentiaalvergelijkingen . . . 75
5.2.4 Lineaire DVG in y en y' . . . 77
5.2.5 DVG van Bernouilli . . . 78
5.3 Orthogonale krommenbundel . . . 81
5.4 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde . . . 82

6 Laplacetransformatie 84

6.1 De Heaviside functie . . . 84
6.2 Functies van de exponentiële orde . . . 88
6.3 Laplacebeeld . . . 88
6.4 Invers Laplacebeeld . . . 93
6.5 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten . . . 98

7 Reeksen 100

7.1 Reeksen met uitsluitend positieve termen . . . 100

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-1}{t^2+4}dt &= \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\
\text{stel } \ u &= t^2+4 \\
\text{dan } \ du &= 2tdt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\
&\Rightarrow \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy \\
\text{stel } \ u &= e^y \\
\text{dan } \ du &= e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\
&\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)}du \\
&= \int \frac{du}{u^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{e^y}{2} + C
\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$$
$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$
$$\text{dan } du = \frac{1}{x}dx \text{ en } v = x$$
$$\Rightarrow x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$
$$= x\ln(x) - \int dx$$
$$= x\ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)}dx$$
$$\text{stel } u = x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx$$
$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$
$$\Rightarrow (x+1)\tan(x) - \int \tan(x)dx$$
$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x}\sin(2x)$$
$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$
$$\text{dan } du = 2\cos(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$
$$\Rightarrow= -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)dx$$
$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$
$$\text{dan } du = -2\sin(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$
$$\Rightarrow -e^{-x}\sin(2x) + 2\Big[- e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx\Big]$$
$$= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx$$

Dus

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx \\
\Leftrightarrow 5\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \\
\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin(2x) &= \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}
\end{aligned}
$$

1.2.4 Voorbeeld 4

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{4}d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4}d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}
$$

Deel II

Theorie

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijkingen

2.1 Basisbegrippen differentiaalvergelijkingen

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking
Uitwerking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n.
- **Graad**: De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. $y^{(n)^r}$

Voorbeeld: Orde en graad
Uitwerking

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y - 2y'^3 = yx$	1	3
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin\sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x+2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n-de orde worden drie oplossingen onderscheden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:
Uitwerking

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1C_2 + C_1C_3e^x$	?	?
$\rightarrow a + be^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Uitwerking

1. $$y = a\sin(x) + b\cos(x)$$
$$y' = a\cos(x) - b\sin(x)$$
$$y'' = -a\sin(x) - b\cos(x)$$

   Hieruit volgt:

$$y'' + y = 0$$
$$-a\sin(x) - b\cos(x) + a\sin(x) + b\cos(x) = 0$$
$$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$y = 0$$
$$y = \sqrt{2}\sin(x)$$
$$y = \sin(x) + \cos(x)$$

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Uitwerking

1. De orde is 1 en de graad is 2.
2. $$y' = Ce^x$$
$$\rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0$$
$$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$
\begin{aligned}
&y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\
\rightarrow & y'^2 - yy' + e^x \\
\Leftrightarrow & (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow & e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow & 0 = 0
\end{aligned}
$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leidt de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de $n + 1$ bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Gegeven de algemene oplossing $y = C_1 + C_2x$. Bepaal de DVG.
Uitwerking

1. Er zijn *2* onafhankelijke constanten.
2. Er moet *2* keer afgeleid worden:

$$
\begin{cases}
y &= C_1 + C_2x \\
y' &= C_2 \\
y'' &= 0
\end{cases}
$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde *2*.

Voorbeeld: Bepaal de DVG indien $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$ de algemene oplossing is.
Uitwerking

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} \\ y' &= -C_2e^{-x} + 3C_3e^{3x} \\ y'' &= C_2e^{-x} + 9C_3e^{3x} \\ y''' &= -C_2e^{-x} + 27C_3e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3e^{3x} + 9C_3e^{3x} = 12C_3e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3e^{3x} + 27C_3e^{3x} = 36C_3e^{3x} \end{cases}$$

   Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3e^{3x}) - 36C_3e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld: Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.
Uitwerking

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

   Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

   Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$
$$\rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$
$$\rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

2.4 DVG van orde 1 en graad 1

2.4.1 Gescheiden veranderlijken

Indien een DVG van orde 1 en graad 1 te schrijven is als

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy$$

Algemeen:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\ dx &= -N(x,y)\ dy \\
f(x)g(y)\ dx &= -h(x)i(y)\ dy \\
\frac{f(x)}{h(x)}\ dx &= -\frac{i(y)}{g(y)}\ dy \\
a(x)\ dx &= b(y)\ dy \\
\int a(x)\ dx &= \int b(y)\ dy \\
A(x) + C_1 &= B(y) + C_2 \\
A(x) &= B(y) + C
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de AO van $yt + \sqrt{1-t^2}y' = 0$
Uitwerking

$$\begin{aligned}
& yt\ dt + \sqrt{1-t^2}\ dy = 0 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1-t^2}\ dy = -yt\ dt \\
\Leftrightarrow & \frac{dy}{y} = -\frac{t\ dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
\Leftrightarrow & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{t\ dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
\Leftrightarrow & \ln|y|\sqrt{1-x^2} + C \\
\Leftrightarrow & y = e^{\sqrt{1-x^2}+C} \\
\Leftrightarrow & y = e^{\sqrt{1-x^2}}e^{C} \\
\Leftrightarrow & y = De^{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

2.5 Homogene DVG

Een DVG is homogeen indien:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

Indien een DVG homogeen is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Stel $y = ux$
- $dy = u\ dx + x\ du$
- DVG is oplosbaar met gescheiden veranderlijken.

Voorbeeld: Bepaal de PO van :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$

waarvoor x(1) = 1.

Uitwerking

Berekening algemene oplossing

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)} \\
\Rightarrow & t(\ln t - \ln x)\ dx - x\ dt = 0 \\
\Rightarrow & t \ln\left(\frac{t}{x}\right)\ dx - x\ dt = 0 \\
& \text{controle homogeen} \\
\Rightarrow & \lambda t \ln\left(\frac{\lambda t}{\lambda x}\right) - \lambda x \\
\Rightarrow & \lambda^1 (t \ln\left(\frac{t}{x}\right) - x) \qquad \text{homogeen want M(x,t) en N(x,t) hebben } \lambda \text{ tot de eerste macht} \\
& \text{substitutie } t = ux \\
\Rightarrow & u \ln u\ dx - u\ dx + x\ du = 0 \\
\Rightarrow & (u \ln u - u)\ dx = x\ du \\
\Rightarrow & \int \frac{du}{u(\ln n - 1)} = \int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow & \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C| \\
\Rightarrow & \ln|\ln u - 1| = \ln|Cx| \\
\Rightarrow & \ln u - 1 = Cx \\
\Rightarrow & \ln u = Cx + 1 \\
\Rightarrow & u = e^{Cx+1} \\
\Rightarrow & t = xe^{Cx+1}
\end{aligned}$$

Berekening particuliere oplossing:

$$\begin{aligned}
& x(1) = 1 \\
\Rightarrow & 1 = 1e^{C+1} \\
\Rightarrow & C + 1 = 0 \\
\Rightarrow & C = -1 \\
\Rightarrow & t = xe^{-x+1}
\end{aligned}$$

2.6 Exacte (= totale) DVG

Een DVG is exact indien
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$
Indien een DVG exact is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Zoek $F(x,y)$ zodat $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

Voorbeeld: Bepaal alle functie f(y) zodanig dat de DVG

$$2y\ dx + (x - 4y\sqrt{y})\ dy = 0$$

na vermenigvuldiging met f(y) exact wordt.Bepaal daarna haar AO.
Uitwerking
Is deze DVG exact?

$$\frac{\partial}{\partial y}2y = 2$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x - 4y\sqrt{y}) = 1$$

Deze DVG is dus niet exact. We moeten een functie f(y) bepalen zodat deze DVG wel exact wordt.

$$2yf(y)\ dy + (x - 4y\sqrt{y})f(y)\ dy = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}2yf(y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 4y^{3/2})f(y) \\
\Rightarrow &2f(y) + 2y\frac{d}{dy}f(y) = f(y) \\
\Rightarrow &2yf'(y) = -f(y) \\
\Rightarrow &\frac{f'(y)}{f(y)} = -\frac{dy}{2y} \\
\Rightarrow &\int \frac{f'(y)}{f(y)} = -\int \frac{dy}{2y} \\
\Rightarrow &\ln|f(y)| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C| \\
\Rightarrow &\ln|f(y)| = -\frac{1}{2}\ln|Cy| \\
\Rightarrow &\ln|f(y)| = \ln|Cy|^{-1/2} \\
\Rightarrow &f(y) = \frac{1}{\sqrt{Cy}} \\
\Rightarrow &f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \text{met C = 1}
\end{aligned}$$

De DVG wordt:
$$2\sqrt{y}\ dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y\right)\ dy = 0$$

wat een een exacte DVG oplevert. Nu bepalen we de AO.

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{y}\;dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y\right)\;dy = 0 \\
&\text{komt overeen met} \\
&\frac{\partial}{\partial x}F\;dx + \frac{\partial}{\partial y}F\;dy = 0
\end{aligned}
$$

We krijgen volgend stelsel:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial x}F = 2\sqrt{y}(*) \\
\frac{\partial}{\partial y}F = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y(**)
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
(*)&\frac{\partial}{\partial x}F = 2\sqrt{y} \\
\Rightarrow& F = \int 2\sqrt{y}\;dx \\
\Rightarrow& F = 2\sqrt{y}x + h(y); \\
(**)&\frac{\partial}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = 2x\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dy}h(y) \\
\Rightarrow& \frac{d}{dy}h(y) = -4y \\
\Rightarrow& h(y) = \int -4y\;dy \\
\Rightarrow& h(y) = -2y^2
\end{aligned}
$$

De AO:

$$F(x,y) = 2\sqrt{y}x - 2y^2$$

Voorbeeld: In een vat bevindt zich $20m^3$ zout-oplossing waarin 1 kg zout opgelost is. Men voert een nieuwe pekeloplossing toe met constante concentratie van 0,5 kg zout/m^3 en aan een snelheid van $2m^3$/min. De oplossing wordt continu gemengd en loopt onderaan weg met een snelheid van $1m^3$/min. Hoeveel zout bevindt zich in de pekeloplossing na 1 uur?

<u>Uitwerking</u>

Definitie van de variabelen:

- x : # kg zout na t minuten
- Op $t = 0$ is $x(0) = 1$
- $C_i = \frac{1}{2}kg/m^3$ (Concentratie in)
- $v_i = 2m^3/min$ (Snelheid in)
- $C_{uit} = \frac{x(t)}{v(t)}$ (Concentratie uit)
- $v_{uit} = 1m^3/min$ (Snelheid uit)

We zoeken een uitdrukking voor dx.

- $dx =$ verandering x gedurende dt minuten
- $dx =$ hoeveelheid zout binnen gedurende dt minuten - hoeveelheid zout buiten gedurende dt minuten

Berekening AO:

$$
\begin{aligned}
& dx = C_i v_i \; dt - C_{uit} v_{uit} \; dt \\
\Rightarrow & dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \; dt - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 1 \; dt \qquad \text{met } V(t) = 20 + 2t - t = 20 + t \\
\Rightarrow & dx = dt - \frac{x}{20+t} \; dt \\
\Rightarrow & dx + \left(\frac{x}{20+t} - 1 \right) dt = 0 \\
\Rightarrow & (20+t) \; dx + (x - 20 - t) \; dt = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial t}(20+t) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - 20 - t) \Rightarrow \text{exact} \\
& \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t (*) \\ \frac{\partial}{\partial t} F = x - 20 - t (**) \end{cases} \\
(*) & \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t \\
\Rightarrow & F = \int (x - 20 - t) \; dt \\
& = xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x) \\
\Rightarrow & 20 + t = \frac{\partial}{\partial x}(xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x)) \\
\Rightarrow & 20 + t = t + \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\
\Rightarrow & \frac{d}{dx} h(x) = 20 \\
\Rightarrow & h(x) = \int 20 \; dx = 20x \\
\Rightarrow & F = xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x \\
& \text{AO: } xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x = C
\end{aligned}
$$

Bereken PO. Indien $x(0) = 1$ dan $C = 20$. 1 uur = 60 minuten $\Rightarrow$ x(60)

$$
\begin{aligned}
& xt + 20x = 20t + \frac{t^2}{2} + 20 \\
\Rightarrow & x = \frac{20t + \frac{t^2}{2} + 20}{20 + t} \\
\Rightarrow & x(60) = 37.75 \; kg
\end{aligned}
$$

2.7 Lineaire DVG van orde 1

Algemene definitie:

Een DVG is lineair in y en y' indien $y' + P(x)y = Q(x)$

Voorbeeld:

$$dy + (y \sin x - \cos x)\ dx = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
&dy + (y \sin x - \cos x)\ dx = 0 \\
\Rightarrow &\frac{dy}{dx} + y \sin x - \cos x = 0 \\
\Rightarrow &y' + y \sin x = \cos x
\end{aligned}$$

Lineair in y en y'

Voorbeeld:

$$ds + (1 - 2t)s\ dt = t^2\ dt$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
&ds + (1 - 2t)s\ dt = t^2\ dt \\
\Rightarrow &\frac{ds}{dt} + (1 - 2t)s = t^2
\end{aligned}$$

Lineair in s en s'

2.7.1 Oplossingsmethode

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

substitutie y = uv (vrijheidsgraad toevoegen)

$$\Rightarrow u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$\Rightarrow u(P(x) + v') + u'v = Q(x) \qquad (*)$$

stel P(x) + v' = 0 (vrijheidsgraad wegnemen)

Bijgevolg: $\Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)\, dx$$

$$\Rightarrow v = e^{-\int P(x)\, dx}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v}$$

$$\Rightarrow du = e^{\int P(x)\, dx} Q(x)\, dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^{\int P(x)\, dx} Q(x)\, dx$$

Vervang substitie om AO te bekomen

Voorbeeld: Bepaal de AO van

$$(4r^2 s - 6)\, dr + r^3\, ds = 0$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
&r^3\frac{ds}{dr} + 4r^2 s - 6 = 0\\
\Rightarrow &\frac{ds}{dr} + \frac{4}{r}s = \frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow &s' + P(r)s = Q(r)\\
&\text{substitutie s = uv}\\
\Rightarrow &u'v + uv' + \frac{4}{r}uv = \frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow &u\left(v' + \frac{4}{r}v\right) + u'v = \frac{6}{r^3}\\
&\frac{dv}{dr} = -\frac{4}{r}v\\
&\int \frac{dv}{v} = -4\int \frac{dr}{r}\\
&\ln|v| = -4\ln|r|\\
&v = r^{-4}\\
\Rightarrow &\frac{du}{dr}\cdot\frac{1}{r^4} = \frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow &\frac{du}{dr}\cdot\frac{1}{r} = 6\\
\Rightarrow &\int du = \int 6r\ dr\\
\Rightarrow &u = 3r^2 + C\\
&s = uv = (3r^2 + C)\frac{1}{r^4}\\
&s = \frac{3}{r^2} + \frac{C}{r^4} \qquad \forall C \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2.8 DVG van type Bernouilli

Een DVG is van type Bernouilli indien

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad \text{met } n \in \mathbb{R}$$

2.8.1 Oplossingsmethode

Bewijs:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{y}{y^n} = Q(x)$$

Substitutie:

$$z = \frac{y}{y^n} = y^{1-n}$$

Waaruit volgt:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dz}$$

$$\begin{aligned} z' &= (1-n)y^{1-n-1}y' \\ &= (1-n)y^{-n}y' \\ &= \frac{(1-n)y'}{y^n} \end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

Of beter geschreven:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

De DVG is lineair in z en z'

Voorbeeld: Bepaal de AO vanaf

$$xy\ dx = (x^2 - y^4)\ dy$$

<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned} &xy\ dx + (y^4 - x^2)\ dy = 0 \\ \Rightarrow &xy\frac{dx}{dy} + (y^4 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} + \frac{y^4 - x^2}{xy} = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + \frac{y^3}{x} = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -y^3\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bernouilli in x en x'

$$\Rightarrow x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^2 = -y^3$$

stel $z = x^2$ dus $z' = 2x\frac{dx}{dy}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = -y^3 \\
\Rightarrow &\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = -2y^3 \\
&\text{substitutie } z = uv \\
\Rightarrow &u'v + uv' - \frac{2uv}{y} = -2y^3 \\
\Rightarrow &u(v' - \frac{2v}{y}) + u'v = -2y^3 \\
&\frac{dv}{dy} = \frac{2v}{y} \\
&\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dy}{y} \\
&\ln|v| = 2\ln|y| \\
&v = y^2 \\
\Rightarrow &\frac{du}{dy}y^2 = -2y^3 \\
\Rightarrow &\int \frac{du}{dy} = -\int 2y\;dy \\
\Rightarrow &u = -y^2 + C
\end{aligned}$$

$z = x^2$ en $z = uv = y^2(C - y^2)$ De AO wordt:

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

2.9 Orthogonale krommenbundel

Definitie: elke kromme uit de ene bundel snijdt elke kromme uit de andere bundel loodrecht.

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ f_\perp(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Raaklijn van f staat loodrecht op raaklijn van $f_\perp$. Wiskundig wordt dit vertaald door: $\omega_{RL_\perp} = -\frac{1}{\omega_{RL}} = -\frac{1}{y'}$ De DVG van de orthogonale krommenbundel is

$$F_\perp\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)$$

Voorbeeld: Bepaal de DVG van de orthogonale krommenbundel van alle raaklijnen aan $y = x^2$.
Uitwerking
Elk punt op parabool kan beschreven worden als $p(a, a^2)$.

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$\begin{aligned} & y - a^2 = 2a(x-a) \\ \Rightarrow & y - a^2 = 2ax - 2a^2 \\ \Rightarrow & y = 2ax - a^2 \end{aligned}$$

2. DVG van de originele krommenbundel

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y' = 2a \end{cases} \quad \Rightarrow y = y'x - \frac{y'^2}{4}$$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel $y' wordt - \frac{1}{y'}$

$$y = \frac{1}{y'}x - \frac{1}{4}\frac{1}{y'^2}$$

   Uiteindelijk:

$$4y'^2 y = -4xy' - 1$$

Deze DVG heeft graad 2, wat niet in deze cursus besproken wordt. Het is dus onoplosbaar.

Voorbeeld: Bepaal de orthogonale krommenbundel van alle parabolen met top in de oorsprong en symmetrieas de X-as.

Uitwerking

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$x = Cy^2$$

2. DVG van de originele krommenbundel. Er is 1 onafhankelijke constanten dus 1 keer afleiden

$$\begin{cases} x = Cy^2 \\ 1 = 2Cyy' \end{cases}$$

   Hieruit volgt $C = \frac{x}{y^2}$ en dus $1 = \frac{2xy'}{x}$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel

   y' vervangen door $-\frac{1}{y'}$ dus

$$1 = -\frac{2x}{yy'} \Leftrightarrow yy' = -2x$$

4. DVG oplossen

$$\begin{aligned} & y\frac{dy}{dx} = -2x \\ & \int y\ dy = -\int 2x\ dx \\ & \frac{y^2}{2} = -x^2 \\ & \frac{y^2}{2} + x^2 = C \end{aligned}$$

   Dit zijn dus ellipsen

2.10 DVG van hogere orde

Voorbeeld: Los op

$$y''' = e^{-2x}$$

<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned}
y''' &= e^{-2x} \\
y'' &= \int e^{-2x}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 \\
y' &= -\int \frac{1}{2}e^{-2x} + C_1\ dx\frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2 \\
y &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \\
&= -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3
\end{aligned}$$

2.10.1 DVG van orde 2 van type F(x, y', y") = 0

Bewijs oplossingsmethode:
Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(x, p, \frac{dp}{dx} = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en x.

Voorbeeld: Bepaal de AO van $xy'' = y' - x$
<u>Uitwerking</u>
$xy'' = y' - x$ komt overeen met $F(x, y', y'')$
Stel $y' = p' \rightarrow y'' = x\frac{dp}{dx} = p - x$ waaruit volgt dat $x\ dp = (p - x)\ dx$. Dit is homogeen ($\lambda^{(1)}$ dus we stellen $p = ux$

$$\begin{aligned}
x(u\ dx + x\ du) &= (ux - x)\ dx \\
u\ dx + x\ du &= (u - 1)\ dx \\
x\ du &= -dx; \\
du &= -\frac{dx}{x} \\
\int du &= -\int \frac{dx}{x} \\
u &= \ln|x| + C_1 \\
\frac{dy}{dx} &= -x\ln|x| + C_1x \\
\int dy &= -\int x\ln|x| + C_1x\ dx
\end{aligned}$$

Het Antwoord is:

$$y = \frac{-x^2}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + \frac{C_1}{2}x^2 = \frac{-x^2}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + C_1x^2$$

2.10.2 DVG van orde 2 van type F(y, y', y") = 0

Bewijs oplossingsmethode:
Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp/dy}{dx/dy} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(y, p, p\frac{dp}{dx} = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en y.

Voorbeeld: Bepaal de PO van $(1-y)^2y'' - y'^3 = 0$ met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$
Uitwerking
Stel $y' = p \to y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$\begin{aligned}
(1-y)^2 p\frac{dp}{dy} - p^3 &= 0\\
(1-y)^2\frac{dp}{dy} - p^2 &= 0\\
(1-y)^2\frac{dp}{dy} &= p^2\\
\frac{dp}{p^2} &= \frac{dy}{(1-y)^2}\\
\int\frac{dp}{p^2} &= \int\frac{dy}{(1-y)^2}\\
-\frac{1}{p} &= \frac{1}{1-y} + C_1\\
C_1 &= 0 \quad \text{aangezien p(0) = 1 en y(0) = 2}\\
\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{y-1}\\
\to dx &= \frac{dy}{y-1}\\
\to x &= \ln|y-1| + C_2\\
\to 0 &= \ln|1| + C_2 \to C_2 = 0\\
x &= \ln|y-1|\\
e^x &= y-1\\
y &= e^x + 1
\end{aligned}$$

2.11 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Voor geen enkele stelling is het bewijs te kennen

2.11.1 Stelling 1

Is $L(D)y = 0$ een lineaire homogene DVG van n^{de} orde en $y_i(x), i = 1, ..., n$ n onafhankelijke PO's van $L(D)y = 0$ dan is $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$ de AO van $L(D)y = 0$

2.11.2 Stelling 2

Indien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ y_1' & y_2' & ... & y_m' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & ... & y_m^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, dan zijn de PO's van $L(D)y = 0$ lineair onafhankelijk.

2.11.3 Stelling 3

Indien $L(D)y = 0$ een lineaire DVG van n^{de} orde, $y_1(x)$ een PO van $L(D)y = Q(x)$ en $y_2(x)$ de AO van $L(D)y = 0$ dan is $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ de AO van $L(D)y = Q(x)$

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$
Uitwerking
Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$$\begin{array}{l|l} 2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 0 & t < -2 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 & -2 < t < 0 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 - t & 0 < t < 2 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (1) = 2 + t^2 & t > 2 \end{array}$$

TODO: graph

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t-2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t-3)(-1 + e^t + t^2) + H(t-5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t-2) + (t^2 + e^t - 1)H(t-3) - (t^2 - t + 25)H(t-5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a)\, dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t)$ voor $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$

$$\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2} & \forall \in]a-\epsilon_1, a+\epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\, dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.
De afgeleide van de Heaveiside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt}H(t-a) = \delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\, dt$$

<ins>Uitwerking</ins>
In dit geval is $f(t) = (2\sin t - 1)$ en $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$ We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\, dt &= \int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\, dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t) = 0$ voor elke $t < 0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \to f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien t < 1 en 2 als t > 1. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

Uitwerking

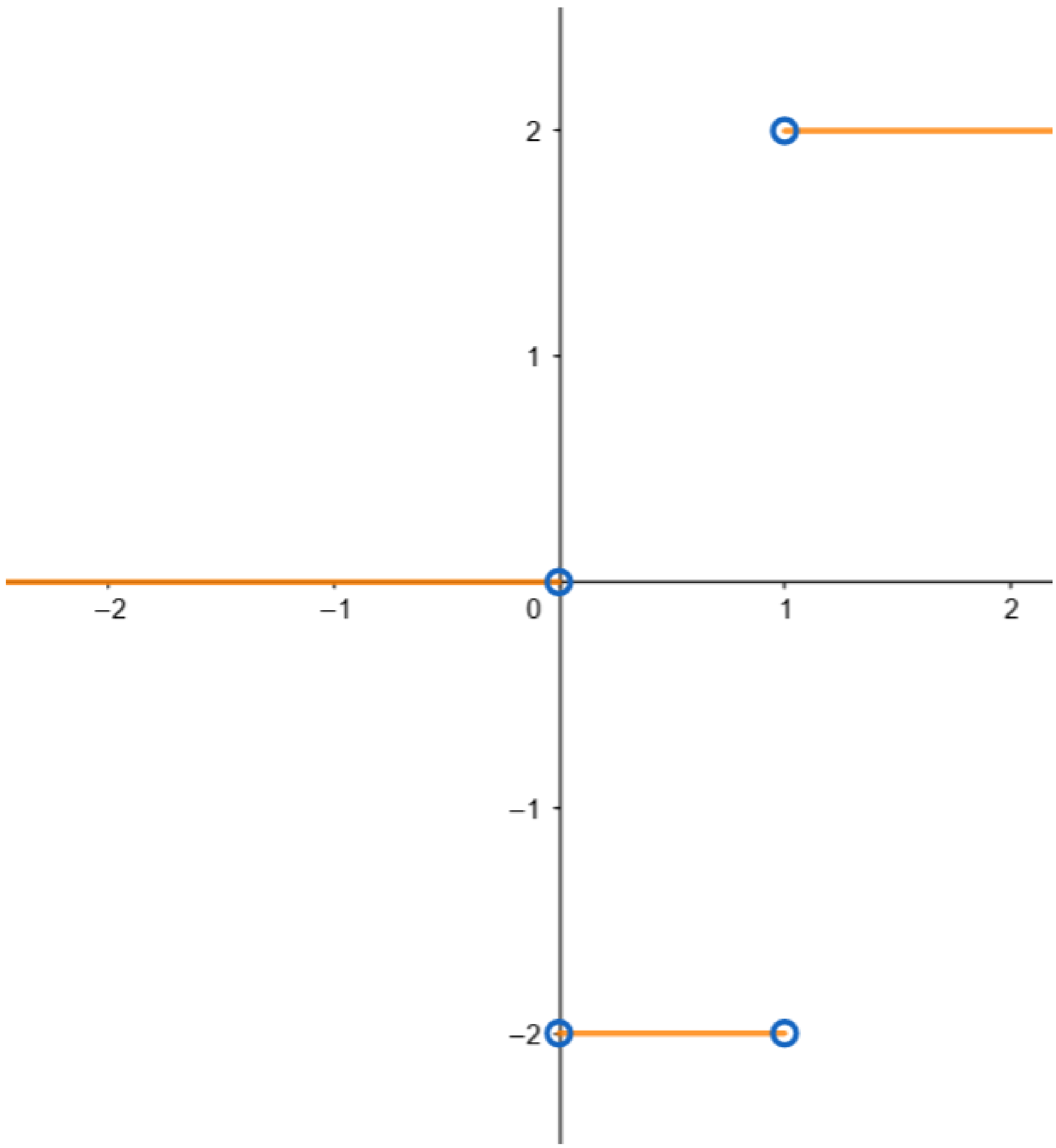
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t-1)(-2+2) \\ &= -2H(t) + 4H(t-1) \end{aligned}$$

Tekening:



3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in R$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a. Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in R$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$
<u>Uitwerking</u>

$$
\begin{aligned}
&|\sin t| \leq 1\\
\Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 (\text{willekeurige waarde})\\
\Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 e^{at}
\end{aligned}
$$

Hieruit kan afgeleid worden dat a = 0 en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1+2t)e^{-t}$
Uitwerking
Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{|(1+2t)e^{-t}|}{e^{at}}\\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{(1+2t)e^{-t}}{e^{at}}\\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{at}e^{t}}\\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}}
\end{aligned}
$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a+1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{+\infty}{0} \rightarrow$ onbepaald
- $a+1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hopital toe.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a+1)}\\
&= \frac{2}{+\infty} = 0 \in R
\end{aligned}
$$

Aangezien het een reëele uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a+1>0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causuaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt$$

Het argument tussen de |...| is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2+y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s = x + yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1. $$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt},\ s = x + yj$$

   want

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\ &= |f(t)|e^{-xt}\sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\ &= |f(t)|e^{-xt} \end{aligned}$$

2. $$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

   De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

- $$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

  Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)}\, dt \\ &= \left.\frac{e^{t(a-s)}}{a-s}\right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} - 1\right) \end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-st}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}\cdot e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}|\cdot|e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}|\cdot|\cos(-yt)+j\sin(-yt)| \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt}\cdot\sqrt{\cos^2(-yt)+\sin^2(-yt)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

- $$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2+s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2+s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{wjt}\}(s) &= \frac{1}{s-wj} \\
&= \frac{1}{s-wj}\cdot\frac{s+wj}{s+wj} \\
&= \frac{s+wj}{s^2+w^2} \\
&= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s)+\mathcal{L}\{j\sin(\omega t)\}(s) \\
&= \frac{s}{s^2+w^2}+\frac{w}{s^2+w^2}j
\end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2+s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$$

- $$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t-0)\}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \delta(t-0)e^{-st}\,dt \\
&= f(0) = e^{-s\cdot 0} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t-1)$
Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(2t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1)+\sin(2t)\sin(1)\}(s) \\
&= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s)+\sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\
&= \cos(1)\frac{s}{s^2+4}+\sin(1)\frac{2}{s^2+4} \\
&= \frac{s\cos(1)}{s^2+4}+\frac{2\sin(1)}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t)-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$
Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sinh(4t)-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{2}-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{2}\right\}(s)-3\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s+4}\right)-3\frac{s}{s^2+\frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s+4}\right)-\frac{27s}{9s^2+1}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta(t-\frac{\pi}{2})\cos(4t)e^{2t}$
Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty}\cos(4t)e^{2t}\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)e^{-st}\,dt \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}e^{-s\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\
&= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}
\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) \qquad a>0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{a} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
\text{stel} \quad u &= t-a \\
\text{dan} \quad du &= dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)}\,du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}\,du \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}\,du \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as}F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2-1)H(t-1) - \sin(3t)H(t-\pi)$

<u>Uitwerking</u>

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)^2+2(t-1)]H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-as}\mathcal{L}\{t^2+2t\}(s) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3} + 2\frac{1!}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t-\pi))H(t-\pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) - \left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\right)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s+a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3-1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$
Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7-2t^4+t)e^{-t}\}(s)\\ &= \mathcal{L}\{t^7-2t^4+t\}(s+1)\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{2\cdot 4!}{(s+1)^5} + \frac{1!}{(s+1)^2}\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s-2)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2+3}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}\end{aligned}$$

3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\,dt \\
\text{stel } u &= at \\
\text{dan } du &= adt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\,du \\
&= \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(u)\}(\frac{s}{a}) \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin t\}(\frac{s}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} \\
&= \frac{\omega}{\omega^2(\frac{s^2}{w^2}+1)} \\
&= \frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+w^2}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\
&= s\frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s\frac{\omega}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega \frac{s}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

3.5.7 Laplacegetransformeerde van f"(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - ... - s f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voorbeeld: Gegeven $g(t) = te^{-t}$, bepaal $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\
&= s^2 G(s) - sg(0^+) - g'(t) \\
\text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \\
\text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-t) \\
\Rightarrow s^2 G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2 \frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\
&= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
\frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= -\int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^2f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\{t\sin t - t^3e^{-t}\}(s)$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\sin t - t^3e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t\sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s) \\
*)\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) &= (-1)^1\frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds} \\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds} \\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right) \\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2} \\
**)\mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s) &= (-1)^3\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} \\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2} \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3} \\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4} \\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4} \\
&= \frac{6}{(s+1)^4} \\
* - ** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}
$$

3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s)\forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^t f(u)\,du \\
g't) &= f(t) \\
g'(0) &= 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t f(u)\,du\Bigg\}(s) - 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t f(u)\,du\Bigg\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t \cos\omega t\,dt\Bigg\}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t \cos\omega t\,dt\Bigg\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

_TODO: slide 19

3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

Voorbeeld: Gegeven $f(t) = e^{at}$ en $g(t) = e^{bt}$. Illustreer de juistheid van deze rekenregel.

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u} \, du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} \, du \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})\}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{(e^{at} - e^{bt})\}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{(s-b)-(s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bereken $H(t) * H(t) * H(t)$.
<u>Uitwerking</u>

$$
\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) \, du \\
\text{aangezien } 0 \leq u \leq t & \\
&\Rightarrow H(u) = 1 \\
&\Rightarrow H(t-u) = 1 \\
&= \int_0^t \, du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u)\, du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

3.5.12 Inverse Laplacetransformatie

Definitie:

$$
\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \qquad \text{indien} \qquad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$
\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}
$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\}(t) \\
\Rightarrow s^2+2s+1 &= a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 &: a = \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 &: b = -4 \\
\text{als } s = 2 &: c = \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$
\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}
$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{2s+7}{2s^2+4s+10}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+7/2}{s^2+2s+5}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+7/2}{(s+1)^2+4}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(s+1)+5/2}{(s+1)^2+4}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{5}{2}\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}\\
&= \frac{1}{2}\delta(t)-\cos(2t)e^{-t}-\frac{5}{2}\sin(2t)e^{-t}\\
&= \frac{1}{2}\delta(t)-e^{-t}(\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1}+\frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t}-\cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-\cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD} \Rightarrow & e^{-(t-\pi)}(1-\cos(t-\pi)H(t-\pi) \\
=& e^{\pi-t}(1+\cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$
\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}
$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5 e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5 e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bereken $(H * H * H * H*)(t)$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bereken:

$$
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)
$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u \cos[2(t-u)]\, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u-[2(t-u)]) + \sin(2u+[2(t-u)])\, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(4u-2t) + \sin 2t\, du \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_0^t \sin(4u-2t)\, du + \int_0^t \sin 2t\, du\right] \\
&= \frac{1}{16}\Big[-\cos(4u-2t)\Big]_0^t + \frac{1}{4}\Big[u\sin 2t\Big]_0^t \\
&= \frac{1}{16}\Big(-\cos 2t + \cos(-2t)\Big) + \frac{1}{4}t\sin 2t \\
&= \frac{1}{4}t\sin 2t
\end{aligned}
$$

3.6 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$
\begin{aligned}
&y''' - y''\sin t + ty = t^2 \\
\Leftrightarrow &D^3y - D^2y\sin t + ty = t^2 \\
\Leftrightarrow &(D^3 - D^2\sin t + t)y = t^2 \\
\Leftrightarrow &L(d)y = g(t) \\
\Leftrightarrow &\text{met} L(d) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \qquad , a_i \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

3.6.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden
$(y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0))$ gekend zijn.

3.6.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten $y(0), y'(0)...y^{(n-1)}(0)$ respectievelijk gelijkgesteld worden aan $C_1, C_2, ..., C_n$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = g(t)$ indien $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
& L(d)y = g(t) \\
& \Leftrightarrow (D^2+1)y = g(t) \\
& \Leftrightarrow (D^2+1)y = e^{-t}H(t-1) \\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y''+y\}(s) \\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y \\
&= s^2Y - 1 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}
$$

dus

$$
\begin{aligned}
& \Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y = \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
& \Leftrightarrow Y(s^2+1) = 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
& \Leftrightarrow Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)} \\
& \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t) \\
& \Leftrightarrow y(t) = \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2+1}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\text{antwoord:}\quad y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\Big(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\Big)H(t-1)
$$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = \delta\big(t - \frac{\pi}{2}\big)$ indien $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

Uitwerking

Stel: $y(0^+) = C_1$, $y'(0^+) = C_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sC_1 - C_2 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st}\, dt \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow s^2Y - sC_1 - C_2 + Y = e^{-\frac{\pi}{2}s} \\
&\Leftrightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2+1} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2+1}\right\}(t) \\
&\Leftrightarrow y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t + f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t) \\
&= \sin t
\end{aligned}$$

$$\text{De algemene oplossing:} \quad y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t - \left(\cos(t) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

De PO voor $t = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ ($< \frac{\pi}{2}$ dus Heaviside is 0)

$$y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t \Rightarrow y(\frac{\pi}{4}) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - C_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 + C_1 \\ 0 = C_2 - C_1 \end{cases} \quad \Rightarrow C_2 = C_1 = 0$$

Het antwoord:

$$y(t) = -(\cos t) H(t - \frac{\pi}{2})$$

Hoofdstuk 4

Reeksen

4.1 Definities

Rij $[a_n] = a_1, a_2, ..., a_n, ...$ met a_n de algemene term.

$$[a_n] = \begin{cases} \text{convergent als } \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim\limits_{n\to\infty} a_n =? \end{cases}$$

Voorbeeld:

$$\big[\ln(\frac{1}{n})\big]$$

<u>Uitwerking</u>

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\frac{1}{n}) = \ln(0^+) = -\infty$$

Dus divergent naar $-\infty$.

Voorbeeld:

$$\big[(1 - \frac{1}{n})^n\big]$$

<u>Uitwerking</u>

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = 1^\infty$$

Dit is een onbepaaldheid. We maken gebruik van het getal e.

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \big(-\frac{1}{n}\big)\right)^{n(-1)} = e^{-1}$$

Dus convergent.

Voorbeeld:

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, ..., ...$$

Uitwerking

Bepaal de algemene term: $a_n = 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} 2\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1} = 2 \cdot 0 = 0$$

Dus convergent.

Voorbeeld:

$$[(-2)^n]$$

Uitwerking

$$[(-2)^n] = -2, 4, -8, 16, -32, ...$$

De laatste term is ofwel positief ofwel negatief. De limiet bestaat niet dus deze reeks is divergent.

4.2 Hoofdeigenschappen

Een stijgende rij naar boven begrensd is convergent. Een dalende rij naar onder begrensd is convergent.
In symbolen:

$$\begin{aligned} a_n \uparrow, \forall n \quad a_n \leq b &\rightarrow \text{ convergent} \\ a_n \downarrow, \forall n \quad b \leq a_n &\rightarrow \text{ convergent} \end{aligned}$$

Voorbeeld:

$$\left[\frac{2n-1}{n}\right]$$

Uitwerking

Als n stijgt zal $\frac{1}{n}$ dalen. $2 - \frac{1}{n}$ stijgt dus. Er kan besloten worden dat voor alle n dat $2 - \frac{1}{2} \leq 2$.
Deze reeks convergeert

Voorbeeld:

$$\left[\sin \frac{1}{n}\right]$$

Uitwerking

Als n stijgt zal $\frac{1}{n}$ dalen. $\sin \frac{1}{n}$ daalt dus. Er kan besloten worden dat voor alle n dat $\sin \frac{1}{n} \geq 0$.
Deze reeks convergeert.

4.3 Numerieke reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

waarbij

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$

$$\sum a_n = \begin{cases} \text{convergent als } \lim\limits_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim\limits_{n\to\infty} S_n = ? \end{cases}$$

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Uitwerking
Uitschrijven van een aantal partieelsommen:

- n = 2: $S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
- n = 3: $S_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$
- n = 4: $S_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$
- n = 5: $S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

Hieruit volgt dat

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Berekening van de limiet:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De reeks convergeert.

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Uitwerking
Uitschrijven van een aantal partieelsommen:

- n = 0: $S_1 = 1$
- n = 1: $S_2 = 1 - 1 = 0$
- n = 2: $S_3 = 0 + 1 = 1$
- n = 3: $S_4 = 1 - 1 = 0$

Hieruit volgt dat

$$S_{2n} = 0 \qquad \text{en} \qquad S_{2n+1} = 1$$

De limiet bestaat niet dus de reeks divergeert.

4.4 De meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + ...$$

4.4.1 Convergentieonderzoek

We weten dat

$$S_n = 1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

We moeten de limiet van S_n berekenen. We onderscheiden twee gevallen:

- $q \neq 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}(1 - \lim_{n \to \infty} q^n)$$

  als $|q| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-q}(1 - 0) = \frac{1}{1-q} \in \mathbb{R}$
  Convergent

  als $|q| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^n = +\infty$ dus $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = +\infty$
  Divergent naar $+\infty$

  als $q \leq 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} q^n =?$
  Divergent

- $q = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

$$S_n = n \to \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} n = +\infty$$

  Divergent naar $+\infty$

Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ q \geq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \rightarrow \text{Divergent} \end{cases}}$$

Voorbeeld: Convergeert de reeks $-2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + ...$ en indien convergent, naar welke reekssom?

Uitwerking

Herschrijf de reeks:

$$-2(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - ... + \left(\frac{1}{3}\right)^n + ...$$

Dit komt overeen met

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Dit is een meetkundige reeks met $q = -\frac{1}{3}$. Het is duidelijk dat $|q| < 1$ dus de reeks convergeert. De reekssom is

$$\lim_{n\to\infty} -2\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

4.5 Eigenschappen

- De convergentie of divergentie verandert niet door het weglaten of bijvoegen van een eindig aantal termen.
- Als een reeks $\sum a_n$ convergeert naar S dan convergeert de reekst $\sum k\ a_n$ naar kS
- Indien $\sum a_n$ convergeert dan geldt dat: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

  $\rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergent

---

Voorbeeld: Bewijs convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n$$

Uitwerking

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n = 1^\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-7}\right)^{n\frac{2n-7}{2}\cdot\frac{2}{2n-7}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-7}}$$

$$= e \neq 0$$

De reeks is divergent naar $+\infty$

4.6 Reeksen met 'uitsluitend' positieve termen

Dit zijn reeksen waarbij:

- Een eindig aantal negatieve termen weggelaten mogen worden.
- Reeksen met uitsluitend negatieve termen kunnen vermenigvuldigd worden met -1.

4.6.1 Integraalcriterium van Cauchy

Indien

$$a_n \geq 0$$

en

$$f(x) = f(n)$$

waarbij $f(x)$ dalend en continu is over $[m, +\infty[$ dan geldt er

$$\int_m^\infty f(x)\, dx \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n \qquad \text{convergent}$$

$$\int_m^\infty f(x)\, dx = \infty \Rightarrow \sum a_n \qquad \text{divergent naar } \infty$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$$

Uitwerking

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

We bepalen het gebied waar $f(x)$ continue en dalend is. We berekenen de afgeleide:

$$f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

Uit tekenonderzoek kan afgeleid worden dat $f(x)$ continu en dalend is vanaf e^2. Kies $m \geq e^2$. Pak een gemakkelijk getal, zoals $m = 9$

$$\begin{aligned}\int_9^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \left[\frac{\ln^3 x}{3}\right]_9^{+\infty} \\ &= \frac{+\infty}{+\infty} - \frac{\ln^3 9}{3} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

De reeks divergeert naar $+\infty$.

4.6.2 De hyperharmonische reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$$

Convergentieonderzoek

- $p \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n^{-p} = +\infty$ De reeks divergeert naar $+\infty$
- $p > 0$ We gebruiken het Integraalcriterium van Cauchy want

  $$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^p} \qquad a_n \geq 0$$

  en

  $$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

  De functie $f(x)$ is continu over $]0, +\infty[$, maar is pas dalend vanaf 1. Dus het interval wordt $[1, +\infty[$. De integraal wordt als volgt:

  $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1\right)$$

  als $p - 1 > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$
  $\Rightarrow \frac{1}{1-p}(0-1) \in \mathbb{R}$: convergent
  als $p - 1 < 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \infty$
  $\Rightarrow \frac{1}{1-p}(\infty - 1) = \infty$: divergent naar $+\infty$
  als $p - 1 = 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty$
  divergent naar $+\infty$

Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}}$$

4.6.3 Vergelijkingscriteria

Indien $\sum a_n$ gevraagd wordt, gebruik een gekende reeks $\sum b_n$. Tot nu toe kennen we twee reeksen: $\sum q^n$ en $\sum \frac{1}{n^p}$

1. - als $a_n \leq b_n$ en $\sum b_n$ convergent, dan $\sum a_n$ convergent
   - als $b_n \leq a_n$ en $\sum b_n$ divergent, dan $\sum a_n$ divergent

2. als $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \neq \infty$ dan beide reeksen zelfde gedrag.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$$

Uitwerking
De reeks kan geschreven worden als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

Dit komt overeen met een meetkundige reeks met $q = \frac{1}{4}$. Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2}$$

Uitwerking
Als n naar oneindig gaat: $\frac{\sqrt{n}}{9n^2} \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ Deze reeks kan dus geschreven worden als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

wat overeenkomt met de hyperharmonische reeks met $p = 3/2$. We weten dat dit convergeert. We passen de limiet toe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\sqrt{n}}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=3}^{\infty} -\sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

Uitwerking
In dit geval is $a_n < 0$. We vermenigvuldigen de reeks met -1. De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

We weten dat als n naar oneindig gaat, dat $\frac{1}{n}$ naar 0 gaat. Voor kleine waarden geldt: $\tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

wat overeenkomt met een hyperharmonische reeks met $p = 0.5$. We weten dat dit divergeert naar $+\infty$
We passen de limiet toe:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{\tan\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\tan\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks divergeert naar $+\infty$

4.6.4 Convergentiecriteria

We gebruiken 2 convergentiecriteria:

D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Cauchy

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Beide limieten kennen 3 uitkomsten:

$$\begin{cases} < 1, \text{convergentie} \\ = 1, ???? \\ > 1, \text{divergentie} \end{cases}$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n^3}{3^n - n}$$

Uitwerking
We gebruik de convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - n}{3^{n+1} - (n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(1 - \frac{n}{3^n})}{3^{n+1}(1 - \frac{n+1}{3^{n+1}})} \\
&= \frac{1}{3} < 1 \to \text{convergentie}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Uitwerking

Dit is een reeks met uitsluitend negatieve termen, dus we vermenigvuldigen met -1. We beschouwen nu de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Dit lijkt het geschikte probleem om op te lossen met Cauchy.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{3n+1} = 1$$

Er kan dus geen besluit gevormd worden. We maken gebruik van de algemene limiet.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n = 1^\infty$$

We maken gebruik van de definitie van het getal e.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \big(-\frac{2}{3n+1}\big)\right)^{-\frac{3n+1}{2}\cdot(-\frac{2}{3n+1})n} = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{2n}{3n+1}} = e^{-2/3} \neq 0$$

Deze reeks is divergent naar $+\infty$. De originele reeks $\sum_{n=1}^{\infty} -(\frac{3n-1}{3n+1})^n$ is divergent naar $-\infty$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$$

Uitwerking

We maken gebruik van het convergentiecriterium van Cauchy

$$\lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0 < 1$$

Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!n}{(n!)^2}\right)$$

Uitwerking

Aangezien we te maken hebben met faculteiten is een goede keuze het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!(n+1)}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)(n!)}{n!(n+1)(n!)(n+1)(2n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{n^2} \\ &= 4 > 1\end{aligned}$$

Deze reeks is divergent naar $+\infty$

4.7 Willekeurige reeksen

Een reeks is willekeurig indien er een oneindig aantal negatieve en positieve termen zijn. Wij zien een speciale soort van willekeurige reeksen: de alternerende reeks. Deze heeft veelal de volgende vorm:

$$(-1)^n b_n \quad \text{met} \quad b_n > 0$$

4.7.1 Convergentiecriterium van Leibniz

Indien een reeks alternerend is en

$$\forall n : |a_n| \geq |a_{n+1}| \quad \text{en} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

dan convergeert de reeks

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - n}$$

Uitwerking

We onderzoeken de voorwaarden van Leibniz.

- De reeks is duidelijk alternerend door $(-1)^n$
- $|a_n|$ moet dalend zijn. We stellen $f(x) = \frac{(-1)^x}{e^x - x}$. De afgeleide hiervan is $f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^2}$. Uit tekenonderzoek blijkt dat $|a_n|$ dalend is voor alle $n > 0$.
- $\lim_{n\to\infty} |a_n|$ moet 0 zijn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n - n} = \frac{1}{e^n(1 - n/e^n)} = 0$$

De reeks convergeert.

4.7.2 Nieuwe begrippen

Een reeks is **absoluut convergent** als $\sum |a_n|$ convergeert. Een reeks is **semi-convergent** als $\sum |a_n|$ divergeert en $\sum a_n$ convergeert.
Pas de volgende methode toe om een willekeurige reeks te onderzoeken:

1. Ga na of de reeks absoluut convergent is
2. Indien de reeks niet absoluut convergent is, pas dan de voorwaarden van Leibnitz toe.
3. Maak ook gebruik van $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

Uitwerking
We gaan eerst na of de reeks absoluut convergent is. Dit betekent dus dat we enkel de absolute termen moeten beschouwen. De reeks wordt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)}$. We passen D'Alembert toe0

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= 0 < 1\end{aligned}$$

De reeks met absolute waarden convergeert. De originele reeks is dus absoluut convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$$

Uitwerking
We gaan eerst weer na of deze reeks absoluut convergent is. We passen D'Alembert toe.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{\arctan(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi/2(n^2+1)}{(n^2+2n+2)\pi/2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Er kan geen besluit genomen worden. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II. We zoeken eerst een reeks om mee te vergelijken.

$$\sum \frac{\arctan(n)}{n^2+1} \approx \frac{1}{n^2}$$

We nemen de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1} \cdot n^2 = \frac{\pi}{2} \neq 0 \neq \infty$$

De reeks waarmee we vergeleken hebben is een harmonische reeks met $p = 2$. We weten dat deze reeks convergeert dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$ convergeert ook. Bijgevolg is $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$ absoluut convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

Uitwerking

Bij het uitrekenen van D'Alembert zou je 1 uitkomen waardoor geen besluit kan genomen worden. We gebruiken volgende redenering.
Als n stijgt, dan stijgt $4n - 1$, dan stijgt $\sqrt{4n-1}$, dan daalt $\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ en dan daalt $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$. De reeks kan als volgt benaderd worden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dit is een harmonische reeks met $p = 1/2$. Deze reeks is divergent. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II en nemen de limiet.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}}{1/\sqrt{n}} &= \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{2}(4n-1)^{-3/2}(4)}{-\frac{1}{2}n^{-3/2}} \\
&= \frac{-2}{\frac{-1}{2}} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{(4n-1)^{3/2}} \\
&= 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{4n^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty
\end{aligned}$$

De reeks toont hetzelfde gedrag als de harmonische reeks en is dus divergent. Het besluit is dat deze reeks niet absoluut convergent is. We gaan nu na of de reeks semi-convergent is met de voorwaarden van Leibniz. We hebben al bewezen dat $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ dalend is. We berekenen de limiet:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} = 0$$

De reeks is semi-convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1 - \frac{1}{10^n})$$

Uitwerking

Dit is heel eenvoudig na te gaan met $\lim_{n\to\infty} a_n$

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n (1 - \frac{1}{10^n}) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n (1 - 0) = -1^{\infty}$$

De reeks is divergent.

4.8 Reeksen van functies

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

Bij deze soort reeksen zijn we geïnteresseerd in het convergentiegebied van x. Voor welke waarden van x is de overeenkomstige reeks convergent. Gebruik volgende methodiek:

1. Bereken
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \quad \text{of} \quad L(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$$

2. Indien $L(x) < 1$ dan behoort x tot het convergentiegebied

   Indien $L(x) > 1$ dan behoort x niet tot het convergentiegebied

   Indien $L(x) = 1$ dan ???

4.8.1 Machtreeksen rond x = a

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

stelling: Het convergentiegebied van een machtreeks rond x=a is een symmetrisch interval rond x=a
bewijs:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x-a| < 1 \\ x \in CG \Leftrightarrow |x-a| &< \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}|} = \rho \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\rho < x - a < \rho \to a - \rho < x < a + \rho$$

Het convergentiegebied wordt

$$]a-\rho, a+\rho[$$

Voorbeeld: Bepaal het convergentiegebied van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n$$

<u>Uitwerking</u>
We passen de limiet van Cauchy toe.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n \right|}$$

x behoort enkel tot een convergentiegebied als deze limiet kleiner dan 1 is. We onderzoeken deze functie eerst.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{x}\right| < 1 &= \frac{(2x+1)^2}{x^2} < 1\\ &= (2x+1)^2 < x^2\\ &= 4x^2+4x+1-x^2 < 0\\ &= 3x^2+4x+1 < 0\\ &= 3(x+1/3)(x+1) < 0\end{aligned}$$

Uit tekenonderzoek blijkt dat $x \in CG \rightarrow x \in]-1, -1/3[$. Om na te gaan ofdat de grenzen inbegrepen zijn berekenen we de limiet voor x = -1 en x = -1/3.

Voorbeeld: Bepaal het convergentiegebied van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n}{n^2+2}(x-3)^n$$

<u>Uitwerking</u>

Deze reeks is van de vorm $\sum c_n(x-3)^n$. Dit is een machtreeks rond $x = 3$. Het convergentiegebied ligt dus in $]3-\rho, 3+\rho[$. We berekenen de limiet met behulp van D'Alembert. We weten dat de limiet kleiner moet zijn dan 1 voor convergentie, dus we maken gebruik van deze ongelijkheid.

$$\begin{aligned}L(x) &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)(x-3)^{n+1}}{(n+1)^2+2}\cdot\frac{n^2+2}{2^n n(x-3)^n}\right| < 1\\ &\rightarrow 2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n^2+2)}{(n^2+2n+3)(n)}|x-3| < 1\\ &\rightarrow 2\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3}|x-3| < 1\\ &\rightarrow 2|x-3| < 1\\ &\rightarrow -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2}\\ &\rightarrow \frac{5}{2} < x < \frac{7}{2} \qquad \text{(Het convergentiegebied)}\end{aligned}$$

Om na te gaan of dat 5/2 en 7/2 behoren tot het convergentiegebied moet de limiet genomen worden met deze waarden.

$$\begin{cases} x = 5/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n}{n^2+2}(-\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}\\ x = 7/2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n n}{n^2+2}(\frac{1}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}\end{cases}$$

We zien dat de eerst reeks een alternerende reeks is en dat de tweede reeks dezelfde reeks is maar met absolute waarden. Als we de eerste reeks onderzoeken hebben we automatisch de tweede reeks. We onderzoeken $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$. We gaan na of deze reeks absoluut convergent is. We beschouwen nu de reeks van de absolute waarden $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$. We zoeken een benadering van de algemene term.

$$a_n = \frac{n}{n^2+2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Dit is een harmonische reeks met $p = 1$. Dit is divergent naar $+\infty$. Gebruik ¡¡vergelijkingscriteria II en berekenen de limiet.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+2} n = 1 \neq 0 \neq \infty$$

De reeks vertoond hetzelfde gedrag en is dus ook divergent naar $+\infty$. De reeks is niet absoluut convergent. We gaan nu na of de reeks semiconvergent is met behulp van Leibniz.

1. De reeks is alternerend
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{n}{n^2+2}\right| = 0$
3. $|a_n|$ moet dalend zijn. Stel $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$. De afgeleide $f'(x) = \frac{x^2+2-x2x}{(x^2+2)^2}$. Uit tekenonderzoek blijkt dat $\forall n \geq 2, f(n)$ dalend. De reeks is semiconvergent.

Dit heeft als resultaat dat 5/2 tot het convergentiegebied aangezien de reeks dan semiconvergent is. De waarde 7/2 behoort niet tot het convergentiegebied aangezien de reeks met absolute waarden divergent is. Het convergentiegebied wordt

$$\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right[$$

Voorbeeld: Bepaal het convergentiegebied van

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2 n}{n} \frac{x^n}{n!}$$

Uitwerking

Gebruik dezelfde methodiek als vorige oefening. Bereken de limiet met D'Alembert.

$$\begin{aligned}
L(x) &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\ln^2(n+1)x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!} \cdot \frac{(n)n!}{\ln^2(n)x^n} \right| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |x| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\infty}{\infty} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&=^H \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(n+1)\frac{1}{n+1}}{2\ln(n)\frac{1}{n}} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\infty}{\infty} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&=^H \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} 1 \cdot 1 \cdot 0 \cdot |x| < 1 \\
&= 0 < 1
\end{aligned}$$

Het convergentiegebied is R

4.9 Reeksen van Taylor

Speciale soort machtreeks rond x = a waarbij

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

en f ∞ afleidbaar in $x = a$.
De fout bij het afkappen na de n^{de} term is gelijk aan

$$\frac{f^{(n+1)}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}(y)$$

met $y =]a, x[$

4.9.1 McLaurin reeks

Dit is een Taylorreeks rond $x = 0$. Meer specifiek

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Voorbeeld: Bepaal m.b.v. de definitie de Taylorreeks van

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + 3$$

rond $x = -1$ en bepaal het convergentiegebied.
Uitwerking
$f(x)$ is zeker ∞ afleidbaar in $x = -1$. We willen een reeks in de vorm van $\sum c_n(x+1)^n$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-1)$	$\frac{(x+1)^n}{n!}$	n^{de} term
0	$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + 3$	$\frac{1}{4}(-1)^4 - (-1)^2 - 1 + 3 = 5/4$	1	5/4
1	$x^3 - 2x + 1$	$-1 + 2 + 1 = 2$	$\frac{x+1}{1}$	$2x + 1$
2	$3x^2 - 2$	$3 - 2 = 1$	$\frac{(x+1)^2}{2!}$	$\frac{(x+1)^2}{2}$
3	$6x$	-6	$\frac{(x+1)^3}{3!}$	$-(x+1)^3$
4	6	6	$\frac{(x+1)^4}{4!}$	$\frac{(x+1)^4}{4}$
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
...	...	...	...	...

Besluit:

$$\frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + 3 = \frac{5}{4} + 2x + 1 + \frac{(x+1)^2}{2} - (x+1)^3 + \frac{(x+1)^4}{4}$$

Het convergentiegebied is R.

Voorbeeld: Bepaal de McLaurin reeks van

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$

Uitwerking

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$\frac{x^n}{n!}$	n^{de} term
0	$(1-x)^{-1}$	1	1	1
1	$-(1-x)^2(-1)$	1	x	x
2	$(1)(2)(1-x)^{-3}$	2	$\frac{x^2}{2!}$	x^2
3	$(1)(2)(3)(1-x)^{-4}$	$(2)(3)$	$\frac{x^3}{3!}$	x^3
4	$(1)(2)(3)(4)(1-x)^{-5}$	$(2)(3)(4)$	$\frac{x^4}{4!}$	x^4
...	...	...	...	...
n	$(1)(2)(3)(...)(n)(1-x)^{-(n+1)}$	$(2)(3)(4)(...)(n)$	$\frac{x^n}{n!}$	x^n

Besluit:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

We berekenen nu het convergentiegebied met behulp van Cauchy.

$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x| < 1$$

Het interval wordt

$$-1 < x < 1$$

Om na te gaan of -1 en 1 tot het interval behoren berekenen we opnieuw de limiet maar met deze waarden.

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \\ x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \end{cases}$$

-1 en 1 behoren niet tot het convergentiegebied want $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ voor zowel $\lim\limits_{n\to\infty} 1$ als $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \to$ divergentie.

4.9.2 Eigenschappen

1. Sommeren en vermenigvuldigen van machtreeksen rond $x = a$ geeft een nieuwe machtreeks rond $x = a$ met als convergentiestraal de kleinste van de oorspronkelijke convergentiestralen
2. Bij afleiden of integreren van een machtreeks blijft de convergentiestraal behouden. De convergentie in de eindpunten dient wel opnieuw onderzocht te worden.

3. Om $f(g(x))$ te ontwikkelen in een machtreeks, ontwikkelen we $f(t)$ met $t = g(x)$ (substitutie). Zijn de eindpunten van het convergentie-interval $t = a$ en $t = b$, dan zijn de eindpunten voor de ontwikkeling van $f(g(x))$ gegeven door: $x = g^{-1}(a)$ en $x = g^{-1}(b)$.

Voorbeeld: Toepassing eigenschap 3

Uitwerking

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

---

4. Met behulp van Mc-Laurinreeksen kan men Taylorreeksen gemakkelijk berekenen en hun convergentiegebied afleiden.

Voorbeeld: Gegeven

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... + (-1)^n x^n + ...$$

voor $-1 < x < 1$ Gebruik enkel dit en eigenschappen voor:

1. Bepaal Mc-Laurin reeks van $f(x) = \ln(1-x)$. Wat is het convergentiegebied?
2. Bepaal Mc-Laurin reeks van $f(x) = \frac{x+8}{2x^2-3x-2}$. Wat is het convergentiegebied?
3. Bepaal Taylorreeks rond $x = 2$ van $f(x) = \frac{2}{x+3}$. Wat is het convergentiegebied?

Uitwerking

1. _TODO: LAATSE 3 PAGINAS_

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 5

Differentiaalvergelijkingen

5.1 Bepalen van differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1 x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1 x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$y' = C_1$$
$$y'' = 0$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2. De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') = 0$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$
   Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\Rightarrow y_p = (x_p)^2 = C^2$$
$$\Rightarrow p(C, C^2)$$

   De richtingscoëfficient y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

   De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

   Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

   Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} & y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = y'\left(\frac{y'}{2}\right)\left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4y - y'^2 = 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow\ & y'^2 - 4y'x + 4y = 0 \end{aligned}$$

   is de differentiaalvergelijking.

5.2 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en eerste graad

5.2.1 Scheiden van de veranderlijken

Bepaal de AO van

$$\frac{\sin x}{2 + y} y' = \cos x$$

Oplossing
Deze DVG kan eenvoudig gescheiden worden als.

$$\frac{1}{2 + y} dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Neem de integraal.

$$\int \frac{1}{2 + y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

De vergelijking wordt:

$$\ln|2+y| = \ln|\sin x| + C$$

De constante C kan geschreven worden als $\ln C$ zodat die samengevoegd kan worden met $\ln\sin x$

$$\ln|2+y| = \ln|C\sin x|$$

De AO wordt dus

$$y = C\sin x - 2$$

5.2.2 Homogene differentiaalvergelijkingen

Bepaal de AO van

$$y' = \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

Oplossing
Herschrijf eerst de DVG

$$2xydy = (x^2+y^2)\ dx$$

Controleer of deze DVG homogeen is. Vervang x met λx en y met λy. De DVG wordt

$$2\lambda x\lambda ydy = (\lambda^2x^2+\lambda^2y^2)\ dx \Rightarrow \lambda^2(2xy)dy = \lambda^2(x^2+y^2)dx$$

Deze DVG is homogeen van de tweede graad. Pas de algemene oplossingsmethode toe, $y = ux, dy = udx + xdu$ en steek dit in de DVG.

$$\begin{aligned}
&2x(ux)(u\ dx + x\ du) = (x^2+u^2x^2)\ dx\\
\Rightarrow &2u(u\ dx + x\ du) = 1+u^2\ dx\\
\Rightarrow &2u^2\ dx + 2ux\ du = 1+u^2\ dx\\
\Rightarrow &2ux\ du = 1-u^2\ dx\\
\Rightarrow &\frac{2u}{1-u^2}\ du = \frac{1}{x}\ dx\\
\Rightarrow &\int\frac{2u}{1-u^2}\ du = \int\frac{1}{x}\ dx\\
\Rightarrow &-\ln|1-u^2| = \ln|x| + C\\
\Rightarrow &\ln|x| + \ln|1-u^2| = C\\
\Rightarrow &\ln|x(1-u^2)| = C\\
\Rightarrow &x(1-u^2) = C\\
\Rightarrow &x(1-\frac{y^2}{x^2}) = C
\end{aligned}$$

De AO is $x(1-\frac{y^2}{x^2}) = C$

Bepaal de AO van

$$3y\cos\frac{x}{y}\ dx - (2y\sin(\frac{x}{y}) + 3x\cos(\frac{x}{y}))\ dy$$

Oplossing
Controleer of deze DVG homogeen is.

$$3\lambda y \cos\frac{x}{y}\,dx - (2\lambda y\sin(\frac{x}{y}) + 3\lambda x\cos(\frac{x}{y}))\,dy$$

Dit is homogeen van de eerste graad. Er kan gekozen worden tussen $x = uy$ of $y = ux$. We kiezen $x = uy$ aangezien we dan $u = \frac{x}{y}$ hebben en dit gemakkelijk kan gesubstitueerd worden. We substitueren $x = uy$ in de DVG.

$$\begin{aligned}
&3y\cos u(u\,dy + y\,du) - (2y\sin u + 3uy\cos u)\,dy = 0\\
\Rightarrow&3\cos u(u\,dy + y\,du) - (2\sin u + 3u\cos u)\,dy = 0\\
\Rightarrow&3u\cos u\,dy + 3y\cos u\,dy - 2\sin u - 3u\cos u\,dy = 0\\
\Rightarrow&3y\cos u\,du = 2\sin u\,dy\\
\Rightarrow&3\int\frac{\cos u}{\sin u}\,du = 2\int\frac{dy}{y}\\
\Rightarrow&3\ln|\sin u| = 2\ln|y| + C\\
\Rightarrow&\ln|\sin^3 u| = \ln|Cy^2|\\
\Rightarrow&\sin^3 u = Cy^2\\
\Rightarrow&\sin^3\frac{x}{y} = Cy^2
\end{aligned}$$

5.2.3 Totale differentiaalvergelijkingen

Bepaal de AO van

$$y(\cos(xy) + 1)\,dx + x(\cos(xy) + 1)\,dy = 0$$

Oplossing
We bekijken of deze DVG totaal is.

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[y(\cos(xy) + 1)\big] = \cos(xy) + 1 - yx\sin(xy)$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[x(\cos(xy) + 1)\big] = \cos(xy) + 1 - yx\sin(xy)$$

Deze DVG is exact. We zoeken nu $F(x, y)$ zodat $\frac{\partial F}{\partial x} = y(\cos(xy) + 1)$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = x(\cos(xy) + 1)$.

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int(y\cos(xy) + y)\,dx + k(y)\\
&\Rightarrow y\sin(xy) + yx + k(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial(y\sin(xy) + yx + k(y))}{\partial y} = x(\cos(xy) + 1)\\
\Rightarrow&x\cos(xy) + x + k'(y) = x\cos(xy) + x\\
\Rightarrow&k'(y) = 0 = C
\end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$F(x,y) = \sin(xy) + yx + C$$

. De AO is

$$\sin(xy) + xy = C$$

Bepaal de AO van

$$(3x^2y - y^2)\ dx = -(x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y})\ dy$$

<u>Oplossing</u>
We controleren eerst weer of dat deze DVG exact is.

$$\frac{\partial}{\partial y}\big[3x^2 - y^2\big] = 3x^2 - 2y$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x}\big[x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y}\big] = 3x^2 + 2y$$

Deze DVG is exact. We zoeken $F(x,y)$ zodat

$$\begin{cases} (1)\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y - y^2 \\ (2)\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1)F(x,y) &= \int (3x^2y - y^2)\ dx + k(y) \\ &= x^3y - y^2x + k(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)\frac{\partial}{\partial y}\Big(x^3y - y^2 + k(y)\Big) &= x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y} \\ \Rightarrow x^3 + 2xy + k'(y) &= x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y} \\ \Rightarrow k(y) &= \int \frac{\ln y}{y}\ dy = \frac{1}{2}\ln^2 y + C \end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$F(x,y) = x^3y - y^2x + \frac{1}{2}\ln^2 y + C$$

De AO is

$$x^3y - y^2x + \frac{1}{2}\ln^2 y = C$$

Bepaal alle functies $f(x)$ zodat volgende DVG met vemenigvuldiging met $f(x)$ totaal wordt.

$$2\sin x \sin y\ dx - \cos x \cos y\ dy = 0$$

Oplossing
Vermenigvuldig de DVG met $f(x)$.

$$f(x) \cdot 2\sin x \sin y \; dx - f(x) \cdot \cos x \cos y \; dy = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\big(f(x)2\sin x \sin y\big) = \frac{\partial}{\partial x}\big(-f(x)\cos x \cos y\big)\\
\Rightarrow& 2f(x)\sin x \cos y = f(x)\sin x \cos y - f'(x)\cos x \cos y\\
\Rightarrow& f(x)\sin x \cos y = -f'(x)\cos x \cos y\\
\Rightarrow& f(x)\sin x = -f'(x)\cos x\\
\Rightarrow& \tan x = -\frac{f'(x)}{f(x)}\\
\Rightarrow& \tan x = \frac{df(x)/dx}{f(x)}\\
\Rightarrow& -\tan x \; dx = \frac{df(x)}{f(x)}\\
\Rightarrow& -\int \tan x \; dx = \int \frac{df(x)}{f(x)}\\
\Rightarrow& \ln|\cos x| = \ln|f(x)| + C\\
\Rightarrow& \ln|C\cos x| = \ln|f(x)|\\
\Rightarrow& f(x) = C\cos x
\end{aligned}$$

5.2.4 Lineaire DVG in y en y'

Bepaal de PO door (1, 2) voor $y' + \frac{y}{x} - (x^2+1) = 0$
Oplossing
Schrijf de DVG als $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$. Deze DVG is linear in y en y'. We passen de algemene oplossingsmethode toe.
Stel $y = uv, y' = u'v + uv'$.
De DVG wordt:

$$
\begin{aligned}
&u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2 + 1 \\
\Rightarrow &u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = x^2 + 1 \\
&\text{kies } v' + \frac{v}{x} = 0 \\
&dv = -\frac{v}{x}\,dx \\
&\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \\
&\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \\
&\ln|v| = -\ln|x| \\
&v = \frac{1}{x} \\
\Rightarrow &u'\frac{1}{x} = x^2 + 1 \\
\Rightarrow &\frac{du}{x} = (x^2+1)\,dx \\
\Rightarrow &\int du = \int x(x^2+1)\,dx \\
\Rightarrow &u = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^2}{2} + C \\
\Rightarrow &y = uv = \frac{1}{x}\left(\frac{(x^2+1)^2}{4}\right) \\
\Rightarrow &y = \frac{(x^2+1)^2}{4x} + \frac{C}{x} \qquad \text{(AO)}
\end{aligned}
$$

Bepaling van C voor de PO door (1, 2).

$$2 = \frac{(1^2+1)^2}{4\cdot 1} + \frac{C}{1} \to C = 1$$

De PO wordt :

$$y = \frac{(x^2+1)^2}{4x} + \frac{1}{x}$$

5.2.5 DVG van Bernouilli

Bepaal de AO van

$$(x^2y - y^4\sin x)\,dx - x^3\,dy = 0$$

Oplossing

Momenteel kan deze DVG niet opgelost worden. We herschrijven deze in de Bernouilli vorm.

$$\begin{aligned}
&(x^2y - y^4\sin x)\ dx = x^3\ dy\\
\Rightarrow&(x^2y - y^4\sin x) = x^3y'\\
\Rightarrow&x^3y' - x^2y = -y^4\sin x\\
\Rightarrow&y' - \frac{1}{x}y = -y^4\frac{\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

Deze DVG is Bernouilli in y en y' met $y^n = y^4$. We delen de DVG door y^4

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{xy^3} = -\frac{\sin x}{x^3}$$

We stellen $z = \frac{1}{y^3}$ en $z' = \frac{-3y'}{y^4}$ waaruit volgt dat $\frac{y'}{y^4} = -\frac{z'}{3}$ Dit wordt in de DVG gesubstitueerd

$$\begin{aligned}
&-\frac{z'}{3} - \frac{z}{x} = -\frac{\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&\frac{z'}{3} + \frac{z}{x} = \frac{\sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

Deze DVG is lineair in z en z'. We stellen $z = uv$ en $z' = u'v + uv'$

$$\begin{aligned}
&-\frac{z'}{3} - \frac{z}{x} = -\frac{\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&\frac{u'v + uv'}{3} + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&u'v + uv' + \frac{3uv}{x} = \frac{3\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&u'v + u(v' + \frac{3v}{x}) = \frac{3\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&\text{We kiezen } v' + \frac{3v}{x} = 0\\
\\
\rightarrow&dv = -\frac{3v}{x}\ dx\\
\rightarrow&\int dv = -\int \frac{3}{x}v\ dx\\
\rightarrow&\ln|v| = -3\ln|x|\\
\rightarrow&v = x^{-3}\\
\Rightarrow&\frac{u'}{x^3} = \frac{3\sin x}{x^3}\\
\Rightarrow&u' = 3\sin x\\
\Rightarrow&\int du = 3\int \sin x\ dx\\
\Rightarrow&u = -3\cos x + C\\
\Rightarrow&\frac{1}{y^3} = z = uv = (-3\cos x + C)\frac{1}{x^3}\\
\Rightarrow&y^3 = \frac{x^3}{C - 3\cos x} \qquad \text{(AO)}
\end{aligned}$$

Bepaal de AO van

$$1 = y(x + x^3)y'$$

Oplossing
Herschrijf de DVG

$$\begin{aligned} &dx = y(x + x^3)\ dy \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} = y(x + x^3) \\ \Rightarrow &x' - yx = x^3 y \end{aligned}$$

Deze DVG is Bernouilli in x en x' met $x^n = x^3$. We delen de DVG door x^2.

$$\frac{x'}{x^3} - \frac{y}{x^2} = y$$

We stellen $z = \frac{1}{x^2}$ en $z' = -\frac{2x'}{x^3}$ waaruit volgt dat $\frac{x'}{x^3} = -\frac{z'}{2}$

$$\begin{aligned} &-\frac{z'}{2} - zy = y \\ &z' + 2zy = -2y \end{aligned}$$

Deze DVG is lineair in z en z'. We stellen $z = uv$ en $z' = u'v + uv'$..

$$\begin{aligned} &u'v + uv' + 2uvy = -2y \\ \Rightarrow &u'v + u(v' + 2vy) = -2y \\ \rightarrow &\text{kies } v' + 2vy = 0 \\ \rightarrow &dv = -2vy\ dy \\ \rightarrow &\int \frac{dv}{v} = -2 \int y\ dy \\ \rightarrow &\ln|v| \frac{-2y^2}{2} \\ \rightarrow &v = e^{-y^2} \\ \Rightarrow &u'e^{-y^2} = -2y \\ \Rightarrow &u' = -2ye^{y^2} \\ \Rightarrow &\int du = -\int 2ye^{y^2}\ dy \\ \Rightarrow &u = -e^{y^2} + C \\ \Rightarrow &\frac{1}{x^2} = z = uv = (-e^{y^2} + C)e^{-y^2} \end{aligned}$$

De AO wordt

$$\frac{1}{x^2} = -1 + Ce^{-y^2}$$

5.3 Orthogonale krommenbundel

Bepaal de orthogonale krommenbundel van

1. $x^2 + y^2 = C$
2. $y^2 = Cx$

<u>Oplossing</u>

1. $x^2 + y^2 = C$ stellen cirkels voor met middelpunt $(0,\ 0)$ en straal $= \sqrt{C}$ We leiden af: $2x + 2yy' = 0 \to x + yy' = 0$ en stellen $y' = -\frac{1}{y'}$.

$$\begin{aligned} x - \frac{y}{y'} &= 0 \\ \Rightarrow xy' - y &= 0 \\ \Rightarrow x\ dy &= y\ dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln|y| &= \ln|Cx| \\ \Rightarrow y &= Cx \end{aligned}$$

2. $y^2 = Cx$ stellen parabolen voor met als top $(0,\ 0)$ en de x-as als symmetrieas. We leiden af en bekomen $2yy' = C$. We steken deze C in de huidige vergelijking

$$\begin{aligned} & y^2 - 2yy'x \\ \Rightarrow & y^2 - 2yy'x \\ \Rightarrow & y(y - 2y'x) \\ \to y = 0 \qquad \text{of} \qquad & y = 2y'x \\ & *y = 0 \to y' = 0 \to -\frac{1}{y'} = \infty \to y - as \\ & *y = 2y'x \to y = -\frac{2x}{y'} \to yy' + 2x = 0 \\ \Rightarrow \int y\ dy = -2 \int & x\ dx \\ \Rightarrow \frac{y^2}{2} = & -x^2 \\ \Rightarrow \frac{y^2}{2} + x^2 = & 0 \end{aligned}$$

Dit zijn ellipsen.

5.4 Differentiaalvergelijkingen van hogere orde

Bepaal de AO van

$$y'' - y' = e^x$$

Oplossing
Stel $y' = p(= p(x))$ en $y'' = p'$.

$$p' - p = e^x$$

Dit is lineair in p en p'. Stel $p = uv$ en $p' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned}
&u'v + uv' - uv = e^x \\
\Rightarrow &u'v + u(v' - v) = e^x \\
\rightarrow &\text{kies } v' - v = 0 \\
\rightarrow &\frac{dv}{v} = dx \\
\rightarrow &\int \frac{dv}{v} = \int dx \\
\rightarrow &\ln|v| = x \\
\rightarrow &v = e^x \\
\Rightarrow &u'e^x = e^x \\
\Rightarrow &du = dx; \\
\Rightarrow &u = x + C_1 \\
\Rightarrow &y' = p = uv = (x + C_1)e^x \\
\Rightarrow &dy = (xe^x + C_1e^x)\, dx \\
\Rightarrow &\int dy = \int (xe^x + C_1e^x)\, dx \\
\Rightarrow &y = \int xe^x\, dx + C_1 \int e^x\, dx \\
\Rightarrow &y = xe^x - \int e^x\, dx + C_1e^x \\
\Rightarrow &y = xe^x - e^x + C_1e^x + C_2 \\
\Rightarrow &y = xe^x + C_1e^x + C_2
\end{aligned}$$

Bepaal de PO met $y(0^+) = 1$ en $y'(0^+) = 5$ van

$$2yy' = y''$$

Oplossing
Stel $y' = p(= p(y))$ en $y'' = pp'$

$$2yp = pp' \rightarrow 2yp - pp' = 0 \rightarrow p(2y - p')$$

Er zijn twee mogelijkheden, $p = 0$ of $2y - p' = 0$.Indien $p = 0$ dan is $y' = 0$ wat niet mogelijk is want $y'(0) = 5 \neq 0$. Dus $2y - p = 0$.

$$
\begin{aligned}
&2y - p' = 0 \\
\Rightarrow &dp = 2y\ dy \\
\Rightarrow &\int dp = 2 \int y\ dy \\
\Rightarrow &p = y^2 + C \\
\Rightarrow &y' = p = y^2 + C \\
\Rightarrow &\text{bereken C } \rightarrow 5 = 1 + C \Leftrightarrow C = 4 \\
\Rightarrow &dy = (y^2 + 4)\ dx \\
\Rightarrow &\int \frac{dy}{y^2 + 4} = \int dx \\
\Rightarrow &\frac{1}{2} \arctan(\frac{y}{2}) + C = x \\
\Rightarrow &\frac{1}{2} \arctan(\frac{1}{2}) + C = 0 \\
\Rightarrow &C = -\frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Hoofdstuk 6

Laplacetransformatie

6.1 De Heaviside functie

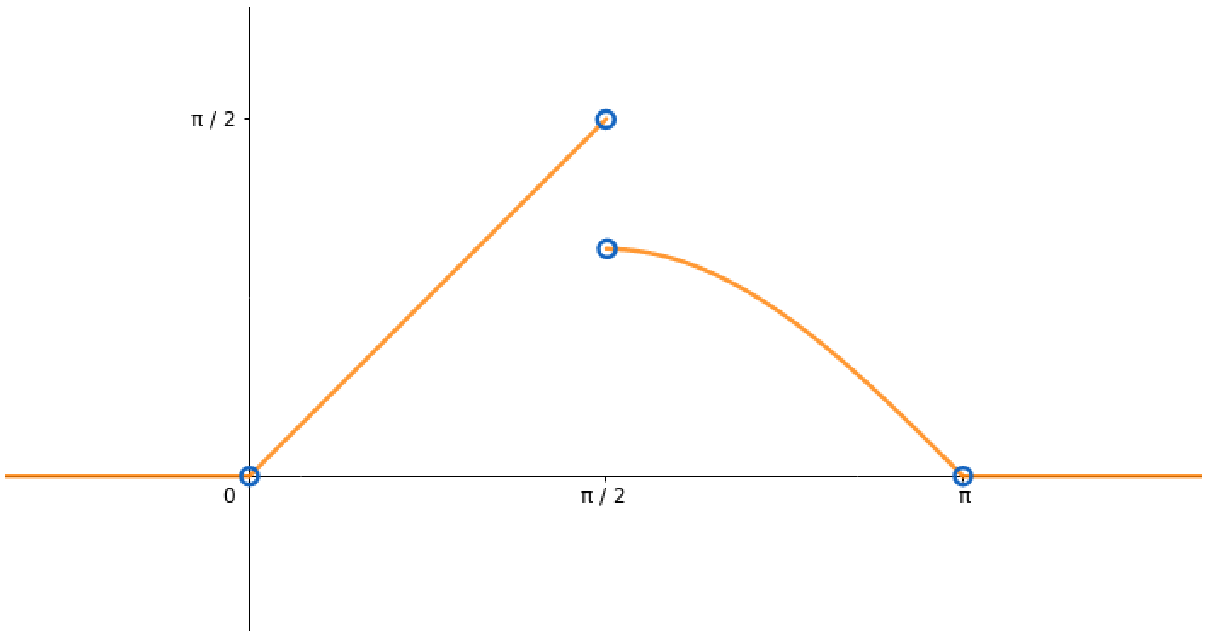
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

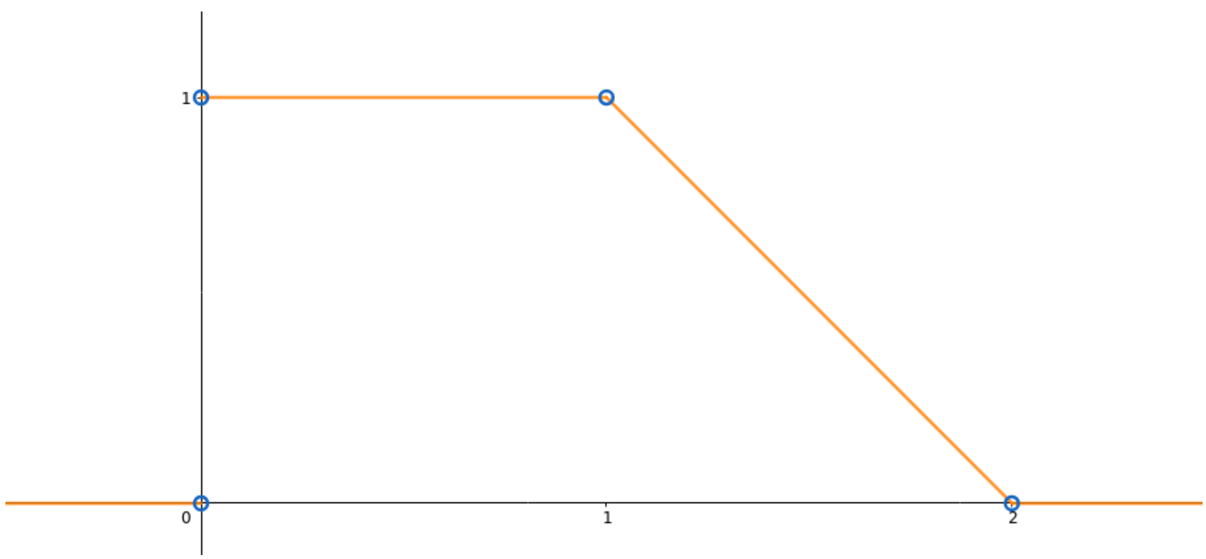
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0+t) + H(t-\frac{\pi}{2})(-t+\sin t) + H(t-\pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t-\pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t-\pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



<u>Oplossing</u>

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

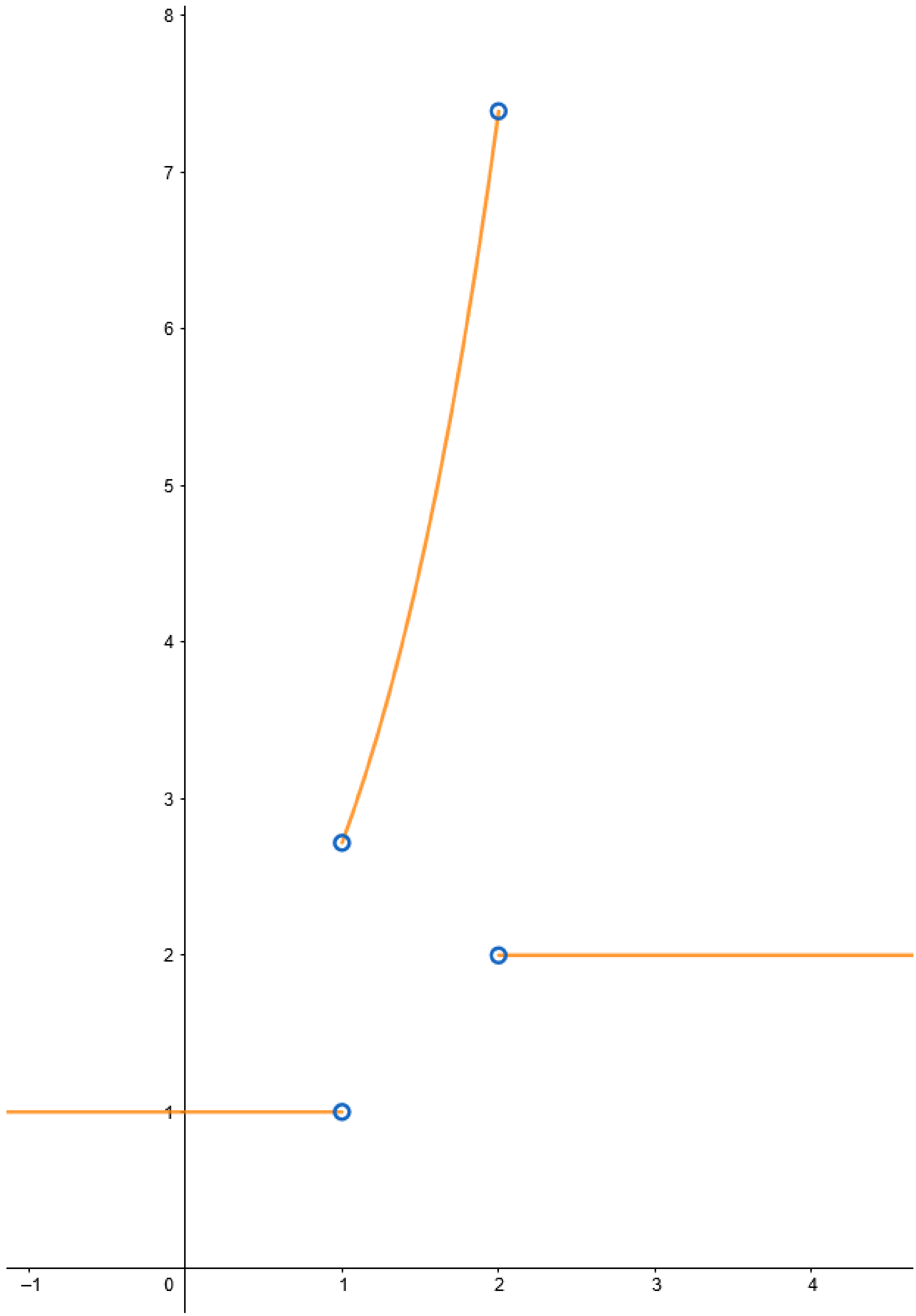
Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0+1) + H(t-1)(-1+(2-t)) + H(t-2)(-(2-t)+0) \\ &= H(t) + H(t-1)(1-t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

Teken de functie $f(t) = 1 + H(t-1)(e^t - 1) + H(t-2)(2 - e^t)$

<u>Oplossing</u>

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$


8
7
6
5
4
3
2
1
–1
0
1
2
3
4

6.2 Functies van de exponentiële orde

Geef de exponentiële orde van $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\alpha t}e^{2t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \qquad \text{voor } \alpha+2>0 \\
&= 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
&\alpha + 2 > 0 \\
\Leftrightarrow &\alpha > -2
\end{aligned}$$

De exponentiële orde is -2.

Geef de exponentiële orde van $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\
&= 6 \lim_{t\to+\infty} e^{t(3-\alpha)}
\end{aligned}$$

Indien $3 - \alpha < 0$ dan wordt de limiet 0. De exponentiële orde is dus 3.

6.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}$$

$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1+e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$

$f(t) = \sin^2 t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\{\frac{1-\cos 2t}{2}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]\end{aligned}$$

$f(t) = t^2\delta(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st}\ dt \\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2} \\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$

$f(t) = (t-1)H(t-1)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s) \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

$f(t) = t^2H(t-1)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1)H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$f(t) = \sin(t)H(t-2)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t)H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2)H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2) + \cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2) + \cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s}[\cos(2)\mathcal{L}\{\sin(u)\} + \sin(2)\mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s}\left(\frac{\cos(2)}{s^2+1} + \frac{\sin(2)s}{s^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

$f(t) = t^2 e^{-2t}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}
$$

$f(t) = e^t \cos 3t$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1) \\
&= \frac{s-1}{(s-1)^2+9}
\end{aligned}
$$

$f(t) = e^{-2t}\sin 2t$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^2+4}
\end{aligned}
$$

$f(t) = t\cos t$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\Big[\mathcal{L}\{\cos t\}(s)\Big]}{ds} \\
&= -\frac{d[\frac{s}{s^2+1}]}{ds} \\
&= -\frac{(s^2+1) - s(2s)}{(s^2+1)^2} \\
&= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \\
&= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}
\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-2t} t\cos^2 \frac{t}{2}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-2t} t\cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t\cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2) \\
&= \mathcal{L}\left\{t\frac{1+\cos t}{2}\right\}(s+2) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t\cos t\}(s+2)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2-1}{((s+2)^2+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-3t} t^3 H(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-3t} t^3 H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3 H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3 H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2) + 8]H(t-2)\}(s+3) \\
&= e^{-2s}\mathcal{L}\{u^3 + 6u^2 + 12u + 8\}(s+3) \\
&= e^{-2s}\left[\frac{3!}{(s+3)^4} + 6\frac{2!}{(s+3)^3} + 12\frac{1!}{(s+3)^2} + 8\frac{1}{s}\right] \\
&= e^{-2s}\left[\frac{6}{(s+3)^4} + \frac{12}{(s+3)^3} + \frac{12}{(s+3)^2} + \frac{8}{s}\right] \\
&= 2e^{-2s}\left[\frac{3}{(s+3)^4} + \frac{6}{(s+3)^3} + \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{4}{s}\right]
\end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos 2t + H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\
&= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big) \\
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s)
\end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1.
$$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

2.
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= \mathcal{L}\{\big(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\big)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\big(u + \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{\pi}{4(s-2)}\right)
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos 2t\ H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\big)\big]H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t - \frac{\pi}{4}\big) + \frac{\pi}{2}\big]H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\cos 2(t - \frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{2} - \sin 2(t - \frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{2}]H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) \\
&= -\mathcal{L}\{\sin 2(t - \frac{\pi}{4})H(t - \frac{\pi}{4}\}(s) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\sin 2u\} \\
&= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+4} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{\pi}{4(s-2)}\right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}$$

6.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$$f(s) = \frac{1}{s^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4} + \frac{5}{s^4}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) + \frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{5t^3}{6}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{1}{3s-1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}&\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t)\\
&\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3)+b(s-2)}{(s-2)(s-3)}\\
&\Rightarrow 2s+3 = a(s-3)+b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 9 \end{cases}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2} + \frac{9}{s-3}\right\}(t)\\
&= -7e^{2t} + 9e^{3t}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t)\\
&= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t) \\
&\qquad \Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9)+(b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
&\qquad \Rightarrow s+3 = a(s^2+9)+(b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
&\qquad = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
&\qquad = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
&\qquad = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}
$$

$$
f(s) = \frac{1}{s+3}^{2}
$$

<u>Oplossing</u>

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}^{2}\right\}(t) &= e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) \\
&= te^{-3t}
\end{aligned}
$$

$$
f(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^3}
$$

<u>Oplossing</u>

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^3}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2[(s+2)-2]+5}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{e^{2t}}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\
&= e^{2t}\big(2t + \frac{1}{2}t^2\big)
\end{aligned}
$$

$$f(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+5}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\
&= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(t) + \frac{e^{-t}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}(t)
\end{aligned}$$

$$e^{-t}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$f(s) = \frac{e^{-s}}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^4}\right\}(t) &= f(t-1)H(t-1) \\
\text{met} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t) = \frac{t^3}{6} \\
&\Rightarrow \frac{(t-1)^3}{6}H(t-1)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+2}\right\}(t) &= f(t-3)H(t-3) \\
\text{met} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) = e^{-2t} \\
&\Rightarrow e^{-2(t-3)}H(t-3)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&\text{met} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^5}\right\}(t) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}(t) = \frac{e^{-3t}}{4!}t^4 \\
&\Rightarrow \frac{e^{-3(t-2)}(t-2)^4}{4!}H(t-2)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}\right\}(t) &= \text{splitsen in partieÃ«l breuken} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-7}{s^2 - 2s + 2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s-1) - 2}{(s-1)^2 + 1}\right\}(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + t + 5e^t \cos t - 2e^t \sin t\right]
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\right\}(t) \\
&= -\frac{1}{4}(-1)t \sin 2t \\
&= \frac{t}{4}\sin 2t
\end{aligned}$$

Bepaal het inverselaplacebeeld met convolutie van

$$f(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s-1}\right\}(t) \\
&= e^t * e^{-t} \\
&= \int_0^t e^u e^{-(t-u)}\, du \\
&= \int_0^t e^{2u-t}\, du \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2u-t}\right]_{u=0}^{u=t} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^t - e^{-t}\right]
\end{aligned}$$

6.5 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

Gegeven:

$$y'' + y = 0$$

1. Bepaal de AO
2. Bepaal de PO indien $y(\pi/2) = 0$ en $y(\pi) = 1$.

<u>Oplossing</u>
Eerst berekenen we de AO

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y'' + y\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s) \\
&\Rightarrow s^2Y - sC_1 - C_2 + Y = 0 \\
&\Rightarrow Y = \frac{sC_1}{s^2+1} + \frac{C_2}{s^2+1} \\
&\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sC_1}{s^2+1}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C_2}{s^2+1}\right\}(t) \\
&\Rightarrow y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t \qquad \text{(AO)}
\end{aligned}$$

Nu berekenen we de PO. We weten dat $y(\pi/2) = 0$ en $y(\pi) = 1$. We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos \pi/2 + C_2 \sin \pi/2 \\ 1 = C_1 \cos \pi + C_2 \sin \pi \end{cases}$$

waaruit volgt dat $C_1 = -1$ en $C_2 = 0$. De PO wordt

$$y(t) = -\cos t$$

Bepaal de PO van

$$y'' + 9y = H(t) + \delta(t-1)$$

met $y(0^+) = 1$, $y'(0^+) = 3$ en $t > 0$.

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{y'' + 9y\}(s) = \mathcal{L}\{H(t) + \delta(t-1)\}(s)\\
&\Rightarrow s^2Y - sy(0^+) - y'(0^+) + 9Y = \frac{1}{s} + e^{-s}\\
&\Rightarrow s^2Y - s - 3 + 9Y = \frac{1}{s} + e^{-s}\\
&\Rightarrow Y(s^2+9) = \frac{1}{s} + e^{-s} + s + 3\\
&\Rightarrow Y = \frac{\frac{1}{s} + e^{-s} + s + 3}{s^2+9}\\
&\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s}}{s^2+9}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+9}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+9}\right\}(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{s}}{s^2+9}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{9}\cdot\frac{s}{s^2+9}\right\}(t) \quad \text{(splitsen in partieelbreuken)}\\
&= \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t\\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+9}\right\}(t) &= f(t-1)H(t-1) \quad \text{met} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}(t) = \frac{1}{3}\sin 3t\\
&= \frac{1}{3}\sin(3(t-1))H(t-1)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2+9}\right\}(t) = \cos 3t + \sin 3t$$

$$y(t) = \frac{1}{9} + \frac{8}{9}\cos 3t + \sin 3t + \frac{1}{3}\sin(3(t-1))H(t-1)$$

Hoofdstuk 7

Reeksen

De volgende reeksen moeten gekend zijn:

- De meetkundige reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} |q| < 1 \to \text{Convergent} \\ q \geq 1 \to \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \to \text{Divergent} \end{cases}$$

- De hyperharmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} p > 1 \to \text{Convergent} \\ p \leq 1 \to \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}$$

- De harmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{divergent naar } +\infty$$

7.1 Reeksen met uitsluitend positieve termen

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$$

Oplossing

We weten dat $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1$. Hieruit volgt dat $\frac{\cos^2 n}{4^n} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Dit is een meetkundige reeks met $q = 1/4$. We weten dat een meetkundige reeks met $|q| < 1$ convergeert. De reeks $\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$ convergeert dus.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{3n - 1}{n^3 + n}$$

Oplossing

Enkel de hoogste machten spelen een rol bij het bepalen van de convergentie.

$$\frac{3n-1}{n^3+n} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met $p = 2$. Een hyperharmonische reeks convergeert als $p > 1$. We moeten echter nog nagaan of de limiet niet nul of oneindig is.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n^3+n} \cdot n^2 = 3 \neq 0 \neq \infty$$

De reeks $\sum \frac{3n-1}{n^3+n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

Oplossing

Ter herinnering:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \lim_{x\to\infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1 \to \sin 1/x \approx 1/x$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met $p = 2 > 1$. De hyperharmonische reeks convergeert. We berekenen de limiet.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \pi/n}{1/n} = \pi \neq 0 \neq \infty$$

De reeks $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$$

Oplossing

We onderzoeken dit met behulp van Cauchy. Ter herinnering:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} : \begin{cases} > 1 \to \text{ divergent naar } \infty \\ < 1 \to \text{ convergent} \\ = 1 \to \text{ geen besluit} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^2 = 1/9 < 1$$

De limiet is kleiner dan 1 dus de reeks $\sum(\frac{n}{3n-1})^{2n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n}{3^n}$$

Oplossing

We onderzoeken diet met behulp van de stelling van d'Alembert. Ter herinnering:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + 1}{a_n} : \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{ divergent naar } \infty \\ < 1 \rightarrow \text{ convergent} \\ = 1 \rightarrow \text{ geen besluit} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \\ =&\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} \cdot \frac{1}{n} \\ =&\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n} \\ =&1/3 < 1 \end{aligned}$$

De reeks $\sum \frac{n}{3^n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

Oplossing

We lossen dit opnieuw op met d'Alembert.

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ =&\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\ =&\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ =&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ =&\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ =&e > 4 \end{aligned}$$

De reeks $\sum \frac{n^n}{n!}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\ln n}{n}$$

Oplossing

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \sqrt{n} \tan \frac{\pi}{3n}$$

Oplossing

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Oplossing
