# FORMULARIUM

## Goniometrie

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta \qquad 2\,\sin\alpha\,\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \qquad 2\,\sin\alpha\,\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\,\tan\beta} \qquad 2\,\cos\alpha\,\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$$

## Vlakke meetkunde

Translatieformules: $\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$ Rotatieformules: $\begin{cases} x = x'\,\cos\varphi - y'\,\sin\varphi \\ y = x'\,\sin\varphi + y'\,\cos\varphi \end{cases}$

## Hyperbolische functies

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \qquad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \qquad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad \operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+x}{1-x}$$

## Onbepaalde integralen

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C \qquad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx = \operatorname{th} x + C \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx = -\operatorname{coth} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = \operatorname{Bgsin}\frac{x}{a} + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\,\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a}\operatorname{Bgtan}\frac{x}{a} + C$$

Is $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ dan is $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\dfrac{x}{(1+x^2)^n} + \dfrac{2n-1}{2n}\, I_n$

## Poolcoördinaten

Buigpunten: $\dfrac{1}{r} + \left(\dfrac{1}{r}\right)'' \begin{cases} > 0 \ : \ \text{holle zijde naar de pool} \\ < 0 \ : \ \text{holle zijde weg van de pool} \end{cases}$

Volume V bij wentelen van gebied ingesloten door $\vartheta = \vartheta_1$, $\vartheta = \vartheta_2$ en $r = f(\vartheta)$ rond de poolas :

$$V = \frac{2}{3}\,\pi \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^3 |\sin\vartheta|\, d\vartheta$$

## Laplace-transformaties

Alle functies worden causaal verondersteld.

## Speciale functie: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\, f(t)\, dt = f(a)$

## Tabel van laplacebeelden

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta(t)\right\}(s) &= 1 \\
\mathcal{L}\left\{1\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{H(t)\right\}(s) = \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}\left\{t^n\right\}(s) &= \frac{n\,!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N} \\
\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}(s) &= \frac{1}{s+a} \\
\mathcal{L}\left\{\sin \omega t\right\}(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
\mathcal{L}\left\{\cos \omega t\right\}(s) &= \frac{s}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

## Rekenregels voor de laplacetransformatie

We veronderstellen dat $f$ en $g$ laplacetransformeerbaar zijn met respectievelijke laplacebeelden $F(s)$ en $G(s)$.

(1) Dempingseigenschap:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)e^{-at}\right\}(s) = F(s+a)$$

(2) Translatie naar rechts in het $t$-domein $(a > 0)$ :

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\}(s) = e^{-as}\, F(s)$$

(3) Schaalwijziging:

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}\, F(\frac{s}{a})$$

(4) Laplacebeeld van de afgeleide $f'(t)$ :

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s) = s\, F(s) - f(0+)\,,$$

Hierbij wordt verondersteld dat $f$ continu is in $]0, T]$ en van exponentiële orde is, terwijl $f'$ stuksgewijs continu is in $[0, T]$

(5) Laplacebeeld van hogere orde afgeleiden $f^{(n)}(t)$ :

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \cdots - s f^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)\,,$$

Hierbij wordt verondersteld dat $f(t)$,$f'(t)$,. . .,$f^{(n-1)}(t)$ continu zijn in $]0, T]$ en van exponentiële orde zijn, terwijl $f^{(n)}$ stuksgewijs continu is in $[0, T]$

(6) Vermenigvuldiging van $f(t)$ met $t^n$ - Afgeleide van de beeldfunctie $F(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{t^n\, f(t)\right\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\, F(s)$$

(7) Delen door $t$ van $f(t)$ - Integraalregel voor de beeldfunctie $F(s)$:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$$

(8) Laplacebeeld van een integraal in het $t$-domein:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

(9) Laplacebeeld van een convolutie:

$$\mathcal{L}\left\{(f * g)(t)\right\}(s) = F(s)\,G(s) \quad \text{met} \quad (f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

(10) Laplacegetransformeerde van een periodische functie $f(t)$ met periode $T$:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt$$

## Mc-Laurinreeksen van enkele elementaire functies met hun convergentieinterval

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \qquad ]-\infty, +\infty[$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad ]-\infty, +\infty[$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad ]-\infty, +\infty[$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad ]-1,\, 1]$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \qquad ]-1,\, 1[$$

$$(1+x)^m = 1 + m\,x + \frac{m(m-1)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{m^{(n)}}{n!} x^n + \ldots \qquad m > 0 :\ [-1,\, 1]$$

$$-1 < m < 0 :\ ]-1, 1]$$

$$m^{(n)} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \quad m \in \mathbf{Q} \qquad m \leq -1 :\ ]-1,\, 1[$$

## Fourierreeks en coëfficiënten

$$\sum(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx \quad \text{en} \quad b_k = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) \sin \frac{k\pi x}{L}\, dx$$

.