Wiskunde A

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Theorie

Hoofdstuk 1

Complexe Getallen

Inleiding

- $\mathbb{N}$ = Natuurlijke getallen: {0, 1, 2, 3, ...}
- $\mathbb{Z}$ = Gehele getallen: {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- $\mathbb{Q}$ = Rationale getallen: $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, ... \}$
- $\mathbb{R}$ = Reële getallen: $\{ \sqrt{2} , \pi \}$
- $\mathbb{C}$ = Complexe getallen: $j^2 = -1$, j = imaginaire eenheid

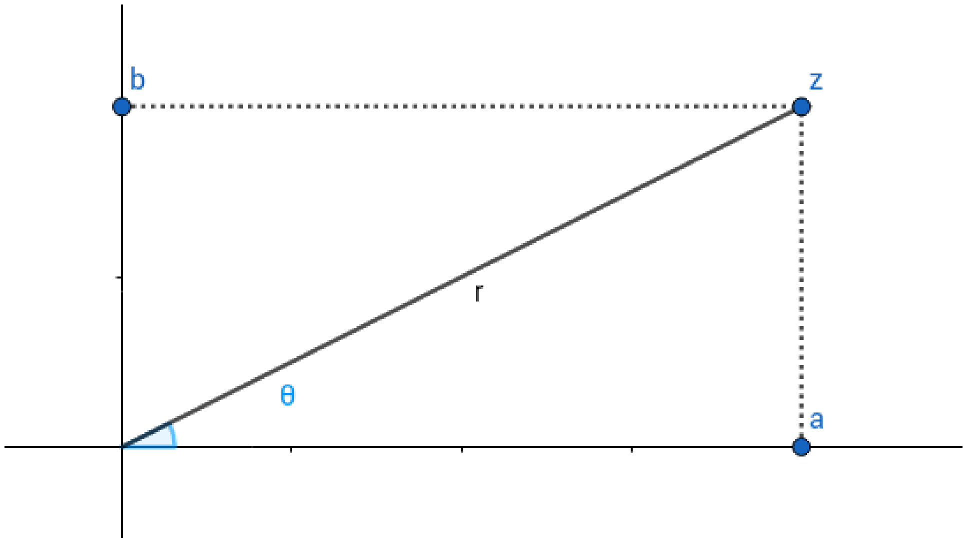
Definitie $z = a + bj$ met $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ en $j = \sqrt{-1}$ met

- $Re(z) = a$
- $Im(z) = b$

3 Vormen

- Cartesische vorm: $z = a + bj$
- Goniometrische vorm: $z = r[cos(\theta) + jsin(\theta)]$
- Exponentiële vorm: $re^{j\theta}$

Vlak van Gauss



a en b

- $a = rcos(\theta)$
- $b = rsin(\theta)$

r en θ

- $r \geq 0$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $\theta \in]-\pi, \pi[$
- $tg(\theta) = \frac{b}{a}(+\pi)$

Complex toegevoegde

- Cartesische vorm: $\overline{z} = a - bj$
- Exponentiële vorm: $\overline{z} = re^{-j\theta}$

Bewerkingen

- $z_1 + z_2$

- $z_1.z_2 = (r_1.r_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$
- $z^n = r^n e^{jn\theta}$
- $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{1}{n}}(\theta + 2k\pi)$

Hoofdstuk 2

Limieten

Limiet naderen

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} en \lim_{x\to+\infty}$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} en \lim_{x\to a^+}$ met $a \in \mathbb{R}$

Bijzondere limieten

- $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$

Onbepaaldheden

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $+\infty - \infty$
- $0.\infty$
- 0^0
- ∞^0

- 1^∞

Wegwerken onbepaaldheden

- Gemeenschappelijke factor van teller en noemer vinden
- Toegevoegde waarde van teller, noemer of beiden
- $f(x) * g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$
- $f(x)^{g(x)} = e^{ln(f(x)^{g(x)})}$

  Geldig voor:

  0^0

  ∞^0

- $\lim_{x \to \ldots} (1 + g(x))^{\frac{1}{g(x)}}$

  Geldig voor:

  1^∞

Deel II

Oefeningen

Hoofdstuk 3

Complexe Getallen

- 1)z_1
  - **Cartesische vorm** : $z_1 = -1 + \sqrt{3}j$
  - 1. Bereken: $r = \sqrt{-1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
    2. Bereken: $\theta = bgtg(\frac{\sqrt{3}}{-1}) = bgtg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi$
       $+\pi$ aangezien $(-1, \sqrt{3} =$ kwadrant II$) = \frac{2\pi}{3}$
  - **Goniometrische vorm** : $z_1 = 2[cos(\frac{2\pi}{3}) + jsin(\frac{2\pi}{3})]$
  - **Exponentiële vorm** : $z_1 = 2e^{j\frac{2\pi}{3}}$
- 4)$z_1 = -1 + j \quad z_2 = e^{-\frac{\pi}{4}j}$
  - $z = z_1.\overline{z_2}$
    1. z_1 Vorm om naar exponentiële vorm: $z_1 = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$
    2. $z_1.\overline{z_2}$: $\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}} \ . \ e^{j\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2}.1)e^{j(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{j\pi}$
  - $z = \frac{z_1}{j}.z_2^3$
    1. Bereken $\frac{z_1}{j} = \frac{-1+j}{j}.\frac{-j}{-j} = \frac{-j(-1+j)}{j(-j)} = \frac{-j(-1+j)}{-j^2} = \frac{j+1}{1} = 1 + j$
    2. Vorm om naar exponentiële vorm: $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$
    3. Bereken $z_2^3 = (e^{-\frac{\pi}{4}j})^3 = e^{-\frac{3\pi}{4}j}$
    4. Vermenigvuldig: $\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \ . \ e^{-\frac{3\pi}{4}j} = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{2}j}$
- 2)$z = (\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}j)^5$

1. Vorm $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}j$ om naar exponentiële vorm $= \frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{3}j}$
2. Bereken: $(\frac{2}{3}e^{-\frac{\pi}{3}j})^5 = \frac{2^5}{3^5}e^{-\frac{5\pi}{3}j} = \frac{2^5}{3^5}e^{\frac{\pi}{3}j}$
3. Bereken: $a = \frac{2^5}{3^5}cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{2^5}{3^5}.\frac{1}{2} = \frac{2^4}{3^5} = \frac{16}{243}$
4. Bereken: $b = \frac{2^5}{3^5}sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{2^5}{3^5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{243}$
5. $z = \frac{16}{243} + \frac{16\sqrt{3}}{243}j$