

Meetresultaten & foutentheorie

I. Meetresultaten noteren en begrijpen

1. Inleiding: Meetresultaten en toeval

Wanneer eenzelfde meting verschillende keren herhaald wordt, zou – in een *ideale* wereld – de uitkomst steeds dezelfde moeten zijn. Met andere woorden: we eisen van een meting dat ze *reproduceerbaar* moet zijn. In de praktijk, nochtans, vind je verschillen. Soms kan je deze verschillen verklaren bv. als het gaat om foutief aflezen, verkeerde (nulpunt)instelling van het meetinstrument,... Maar zelfs indien je zulke fouten kan uitsluiten, vind je meestal nog steeds variatie. Deze wijt men aan het *toeval*. De oorzaak van zogenaamde *toevalsfouten* is meestal vaag: men weet het niet. Je kunt het opvatten als het gecombineerde effect van de zeer vele niet gecontroleerde omstandigheden die een invloed hebben op het experiment. Naarmate een meting of meettoestel gevoeliger is, wordt men meer geconfronteerd met de onvermijdbaarheid van *toevalsfouten*. Dit wil tegelijkertijd ook zeggen dat elke meting slechts met een *beperkte nauwkeurigheid* gebeurt.

Elke meting is dus een schatting van de *exacte* of *werkelijke* waarde van een grootheid waarbij een zekere marge van onnauwkeurigheid in acht moet genomen worden. Deze onzekerheidsmarge duiden we aan met de *(absolute) fout* of de *(absolute) nauwkeurigheid* op de meting.

Omdat de nauwkeurigheid van een meting altijd beperkt is, is het belangrijk een kritische houding aan te nemen ten opzichte van meetresultaten. Vooraleer je een (en in het bijzonder je eigen) meting vertrouwt, moet je eigenlijk een idee hebben van de nauwkeurigheid van het resultaat. In deze tekst behandelen we verschillende aspecten van de foutentheorie: Hoe wordt de absolute fout bepaald in een experiment? Hoe kan je uit een set gegevens zelf de fout bepalen? Wat gebeurt er met de meetfout als je met meetresultaten verder rekent? ...

2. Meetresultaten noteren

In zijn meest volledige vorm bestaat het resultaat van een fysische meting steeds uit drie delen, nl. een getalwaarde W , een absolute fout AF , en een eenheid. Dit wordt *enkel als volgt correct* weergegeven:

$$W \pm AF \text{ eenheid}.$$

De *getalwaarde en de fout worden steeds in dezelfde eenheid geschreven*. De *eenheid* wordt weergegeven met het juiste SI symbool¹, bv. g voor gram, s voor seconde, A voor Ampère, m voor meter, ..., eventueel voorafgegaan door een gepaste macht van 10, bv. 10^3 g, 10^{-6} s, 10^{-3} A, 10^{-2} m,.... De macht van 10 hoort dus bij de eenheid! Je kunt hiervoor ook gebruik maken van gepaste SI letters (k = 10^3 (kilo), M = 10^6 (mega), G = 10^9 (giga), ... , c = 10^{-2} (centi), m = 10^{-3} (milli), μ = 10^{-6} (micro),...). Bovenstaande voorbeelden worden dan kg, μ s, mA, cm, ... Dimensieloze grootheden hebben geen eenheid. Meetresultaten van grootheden met een fysische dimensie zonder eenheid zijn waardeloos!

Voorbeelden:

goed	fout
$2.10 \pm 0.15 \text{ km}$	$2.10 \text{ km} \pm 0.15$
$(2.10 \pm 0.15) \times 10^3 \text{ m}$	$2.10 \text{ km} \pm 0.15 \text{ km}$
$2.10 \pm 0.15 \times 10^3 \text{ m}$	$2.10 \text{ km} \pm 150 \text{ m}$
$21.0 \pm 1.5 \text{ hm}$	$(2.10 \times 10^3 \pm 150) \text{ m}$

¹ Een symbool is geen afkorting. Dus niet gr. of gr maar g, niet sec maar s, etc. I. h. b. gebruik je voor tijdsmetingen ook niet 2' 15, 03" als je 135,03 s bedoelt. Het is niet volgens de SI regels, het geeft aanleiding tot vergissingen en het is niet gebruiksvriendelijk voor zakrekenmachines.

De absolute fout geeft de onzekerheid op het waardegetal weer. Het fouteninterval $[W - AF \text{ eenheid}, W + AF \text{ eenheid}]$ bakent de onzekerheidsmarge op het resultaat af. De grenzen van dit gebied noemen we de foutgrenzen. De betekenis van het fouteninterval is statistisch. D. w. z. dat er een grote waarschijnlijkheid is dat bij hermeting van de gerapporteerde grootte het resultaat opnieuw in het fouteninterval valt. Voor een goede meting wil dit zeggen dat ook de werkelijke waarde van de te meten grootte met grote waarschijnlijkheid in het fouteninterval ligt. Het kennen van de foutgrenzen is van belang om vast te stellen of het resultaat van twee experimenten significant verschilt. Verder in deze tekst zullen we de betekenis van het fouteninterval nader bespreken.

3. Beduidende cijfers

In de fysica - en in de wetenschappen in het algemeen - spreekt men in verband met het noteren van getallen (i.e. meetresultaten) af, dat enkel die cijfers uit een getal genoteerd worden die geverifieerd werden tijdens de experimenten.

Men spreekt in dat verband ook van beduidende cijfers (BC). Als je een getal van links naar rechts leest is het eerste van "0" verschillende cijfer het eerste (en meest) beduidende cijfer. Alle volgende cijfers (en dus ook "0") zijn ook beduidend. Machten van 10 horen bij de eenheid en tellen niet als beduidende cijfers.

De absolute fout noteert men meestal met 1 BC². Alternatief kun je bovenstaande afspraak dan verwoorden door te stellen dat je geen beduidende cijfers in het waardegetal schrijft die een kleinere orde hebben dan die van het laatste BC van de absolute fout.

Voorbeelden:

Meting/meettoestel	AF	waardegetal	# BC	commentaar	notatie
De hoogte van een deuropening met een vouwmeter tot op 1 mm nauwkeurig.	1 mm	2,008 m	4	Goed – de "1" en de "8" hebben dezelfde orde nl. 1 mm	$2.008 \pm 0.001 \text{ m}$ $2008 \pm 1 \text{ mm}$
De hoogte van een deuropening met een vouwmeter tot op 1 mm nauwkeurig.	1 cm	2,01 m	3	Goed - 2,010 m zou verkeerd zijn want dit betekent tot op 1mm nauwkeurig.	$2.01 \pm 0.01 \text{ m}$ $201 \pm 1 \text{ cm}$
De afstand Antwerpen – Gent met de wagen (teller tot op 0.1 km nauwkeurig).	0.5 km	55.0 km = $55.0 \times 10^3 \text{ m}$	3	Goed	$55.0 \pm 0.5 \text{ km}$ $(55.0 \pm 0.5) 10^3 \text{ m}$ $(55000 \pm 500 \text{ m})$ is verkeerd)
De afstand Antwerpen – Gent met de wagen (teller tot op 0.1 km nauwkeurig).	0.1 km	55 km	2	Fout - Te weinig beduidende cijfers (slechts tot op 1 km nauwkeurig)	Ofwel $55.0 \pm 0.1 \text{ km}$ Ofwel $55 \pm 1 \text{ km}$
Tijd die een knikker valt voor een hoogte $h = 58 \text{ cm}$.	2.5 ms	0.3427 s	4	Goed – de "5" en de "7" hebben dezelfde orde nl 0.1 ms	$342.7 \pm 2.5 \text{ ms}$ $0.3427 \pm 0.0025 \text{ s}$

Uit bovenstaande voorbeelden blijkt ook dat de manier van noteren van het waardegetal iets zegt over de nauwkeurigheid van de grootte, zelfs indien de absolute fout niet gegeven is. Indien een notatie op verantwoorde manier werd uitgevoerd, mag je er namelijk van uit gaan dat de nauwkeurigheid ongeveer van dezelfde grootte orde is als de eenheid van het laatste beduidende cijfer. Dit regeltje passen we in het labo steeds toe voor gegeven waarden.

² Indien dat cijfer echter "1" of "2" is, mag men ook 2 BC gebruiken.

Voorbeelden:

Gegeven waarde	AF
$g = 981 \text{ cm/s}^2$	1 cm/s^2
$g = 981,2 \text{ cm/s}^2$	$0,1 \text{ cm/s}^2$
$g = 981,20 \text{ cm/s}^2$	$0,01 \text{ cm/s}^2$
$\alpha = 18 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$	$1 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

De AF op een exact getal is 0. Ook π en e kunnen als exacte getallen gezien worden. Gebruik hiervoor de exacte waarde of zoveel mogelijk beduidende cijfers (alle cijfers uit je rekentoestel).

4. De nauwkeurigheid anders: relatieve fout

Voorbeeld:

Welk van de volgende metingen is het meest nauwkeurig?

Meting	Grootheid	Resultaat	Absolute fout	Relatieve fout
1	De massa van een pak suiker	1,000 kg	0,005 kg	$0,005 = 0,5\% = 1/200$
2	De massa van een persoon	80,0 kg	0,1 kg	$1,25 \times 10^{-3} = 0,125\% = 1/800$
3	De lengte van een persoon	1,8 m	0,2 m	$0,111 = 11,1\% = 1/9$

- Bij het vergelijken van meting 1 en 2 kunnen we onmiddellijk opmerken dat de AF van meting 1 veel kleiner is dan die van meting 2. Meting 1 is dus nauwkeuriger in absolute waarden.
- Op deze manier kun je meting 3 niet betrekken in de vergelijking. Je kunt immers geen massa met afstand vergelijken! Toch is duidelijk dat meting drie nogal onnauwkeurig is. Dit blijkt uit de verhouding van de absolute fout ten opzichte van gemeten waarde: deze staat berekend in de laatste kolom en wordt de *relatieve fout* (RF) genoemd. De RF van meting 3 drukt uit dat er gemeten werd tot op 1/9 van de meetwaarde nauwkeurig, terwijl meting 1 tot op 1/200 van de waarde werd bepaald. Relatief gezien is meting 1 dus meer dan 20x zo nauwkeurig dan meting 3.
- Relatief gezien blijkt ook dat meting 2 nauwkeuriger is dan meting 1 (namelijk 4x). Dus hoewel meting 1 een betere prestatie is in absolute waarden (i. e. nauwkeurig tot op 5 g), is ze relatief ten opzichte van het resultaat minder nauwkeurig.

De "kwaliteit" van een resultaat wordt gegeven door de relatieve fout (RF). Het is de verhouding van de AF tot de getalwaarde van de meting.

$$RF = \frac{AF}{|W|}$$

In tegenstelling tot de AF heeft de RF geen eenheid. Dit laat o. a. toe om metingen van verschillende (dimensionele) grootheden te vergelijken.

Uit de definitie van de RF verwacht je voor een nauwkeurige meting in het algemeen een getal $\ll 1$. Dit is echter niet noodzakelijk, met name indien W in de buurt van 0 ligt. Indien $RF \geq 1$ is die meestal niet zinvol. In absolute waarden (d.i. wat betreft de AF) kan de meting echter wel betekenisvol zijn.

De relatieve fout kan op verschillende manieren worden uitgedrukt:

1. Numeriek: de verhouding AF/W . Indien $RF \ll 1$ – wat meestal het geval is – heeft dit getal de vorm 0,0XXX (X = cijfer verschillend van "0").
2. Procentueel: hiervoor moet je de numerieke waarde vermenigvuldigen met honderd en het getal laten volgen door een %-teken.
3. Stambrek: de fout wordt uitgedrukt als een breuk van het type $1/n$ met n een natuurlijk getal. Indien n meer dan 2 BC heeft worden de cijfers vanaf het 3^{de} BC meestal afgerond naar 0. (1/12345 wordt dan 1/12000, 1/345 wordt 1/350 enz...).

In de bovenstaande tabel werden de 3 notaties gebruikt. Methode 2 en 3 zijn de meest gangbare.

II. Foutentheorie

1. Indeling van meetfouten

Beschouwen we de meetfout als het verschil tussen een gemeten waarde en de werkelijke waarde van een grootheid. Men kan meetfouten indelen naar de oorzaak. Een mogelijke indeling zou er dan als volgt kunnen uitzien:

1. Het meetinstrument: bijvoorbeeld gebrekkige constructie en verkeerde of vervallen ijking van het meetinstrument.
2. Persoon die meet: voor sommige metingen speelt bv. de scherpte van zintuiglijke waarneming of de reactiesnelheid een rol. Om nauwkeurige metingen uit te voeren moet je ook opgeleid/vertrouwd zijn met de apparatuur en over de juiste ingesteldheid beschikken.
3. Uitwendige omstandigheden: sommige factoren beïnvloeden metingen op een “verborgen” manier. Dikwijls gaat het daarbij om temperatuur, luchtdruk, vochtigheid, tocht, trillingen, elektromagnetische velden, etc. Moet je bijvoorbeeld rekening houden met temperatuursuitzetting als je een plastic lat van 30 cm gebruikt, of een stalen lintmeter van 8 m?
4. De methode: bij het opzetten van een experiment moet je steeds compromissen sluiten, zowel wat de uitvoering van het experiment betreft (het materiaal), als bij de theoretische beschrijving van het fysische proces. Zo zullen we in de beschrijving van de proeven dikwijls wrijving verwaarlozen, touwtjes massaloos veronderstellen, materialen homogeen veronderstellen, etc. Dit is noodzakelijk om tot een theoretisch inzicht te komen, geschikt om de fysica te begrijpen zonder daarbij ballast te ondervinden van nodeloos ingewikkelde bijkomstigheden. Ook wat betreft het uitvoeren van de proef zullen aannames gedaan worden die de uitvoeringen niet nodeloos omslachtig of ingewikkeld maken. Zo zullen we bv. de invloed van volt- en/of ampèremeter in een kring verwaarlozen, of de warmtecapaciteit en/of begintemperatuur van thermometers, etc.

Al deze benaderingen hebben mogelijk een invloed op het resultaat. Óf, en in welke mate, ze geoorloofd zijn, hangt af van de experimentele omstandigheden en de gewenste nauwkeurigheid. Er mag hier opgemerkt worden dat elke methode om toegang te krijgen tot de natuur rondom ons uitgaat van bepaalde aannames.

De situatie waarbij de oorzaak van een afwijking tussen een meetresultaat en zijn verwachte waarde gekend is, is meestal zeldzaam. Zelfs het feit dat je weet dát er een afwijking is, is dikwijls moeilijk te achterhalen: immers als je weet wat je moet uitkomen, waarom meet je het dan nog? Bovenstaande lijst is dan ook enkel een illustratie van het feit dat de oorsprong van fouten zeer variabel is. Indien je weet dat er een afwijking is, en indien je daarvan de oorzaak (gedeeltelijk) kent, zal je die gewoonlijk in de mate van het mogelijke uitsluiten.

In de praktijk gaat men voor het opsporen en vermijden van fouten in eerste instantie niet zoeken naar de oorzaak maar wel naar het statistische gedrag van fouten. Hieruit moet blijken in welke mate een experiment herhaald en een meetresultaat gereproduceerd kan worden. Een goede kijk op de nauwkeurigheid van een experiment kan men slechts bekomen door herhaling. In het bijzonder onderscheiden we volgens “gedrag” toevallige meetfouten en systematische meetfouten. Systematische fouten zijn fouten of afwijkingen die bij herhaling van het experiment steeds opnieuw en op dezelfde manier het meetresultaat beïnvloeden. Toevallige meetfouten zorgen voor willekeurige fluctuaties in het meetresultaat.



Toevallige (links) en systematische (rechts) afwijkingen bij mikken op de roos

In wat volgt zullen we de theorie van Gauss over meetfouten uitwerken. Deze leert hoe je met toevallige meetfouten overweg kan. Vooraleer het Gauss model te ontwikkelen voeren we enkele begrippen uit de statistiek in, met hun geijkte terminologie.

2. Enkele statistische begrippen...

2.1 populatie, steekproef, kansfunctie en histogram

De verzameling van alle mogelijke uitkomsten van eenzelfde experiment noemen we de **populatie**. De populatie is dus denkbeeldig want het is een oneindig grote verzameling. Als we een meting enkele malen herhalen beschouwen we een eindige deelverzameling uit de populatie. In statistiekjargon spreekt men dan van een **steekproef**. Om geen systematische fouten te maken moet de steekproef willekeurig (**at random**) en **onafhankelijk**³ samengesteld zijn. We gaan er in deze tekst van uit dat aan deze voorwaarden voldaan is.

Van vele grootheden kunnen de waardegetallen in principe “oneindig dicht tegen elkaar liggen”, en moet de waarde ervan worden voorgesteld met reële getallen. Wiskundig zegt men dat de variabele **continu** is. Tegengesteld hieraan zijn de **discrete** variabelen: “er zit altijd een afstandje tussen twee opeenvolgende getallen”⁴. De verzameling van natuurlijke getallen bv. is discreet. Voor metingen geldt dat elk meettoestel uiteindelijk slechts een eindige resolutie heeft (bv. een temperatuur wordt gemeten tot op 0.1 °C) en dat de waarneming in feite dus discreet is. Niettemin zullen we hier veronderstellen dat het resultaat van een meting steeds continu is. Voor de meeste metingen immers, kan het waardegetal - in principe - elke reële waarde aannemen. Verder veronderstellen we dat de resolutie⁵ van het meettoestel klein is in vergelijking met de nauwkeurigheid zodat het gedrag van de meetresultaten eerder continu lijkt.

Veronderstel dat je een experiment n keer uitvoert. Als steekproef bekom je een verzameling van n reële waarden. Het **waardenbereik** (de **range**) is het verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal. Men kan nu het waardenbereik onderverdelen in verschillende intervallen. Zulke intervallen noemt men **klassen**, de grootte van het interval de **klassenbreedte**. Het is dikwijls aangewezen de klassenbreedte voor elk interval gelijk te nemen. Het aantal klassen hangt af van de klassenbreedte en het waardenbereik. Als vuistregel kiest men de klassenbreedte zodanig dat er ongeveer \sqrt{n} klassen zijn.

Men kan nu de n elementen uit de steekproef gaan sorteren volgens hun klasse. Het aantal waarnemingen in een klasse noemt men de **absolute frequentie** n_i (van de i^{de} klasse). Men spreekt ook over de **relatieve frequentie** f_i . Dit is de absolute frequentie gedeeld door het aantal waarnemingen in de steekproef. De som van de relatieve frequenties van alle klassen is gelijk aan 1.

Voorbeeld:

Men chronometreert de periode van een slinger met een handgestopte chronometer. Het experiment wordt 48 maal herhaald. De resultaten staan in onderstaande tabel.

Tijd voor 1 slingerperiode (s)

0,99	0,98	1,13	0,98	1,01	1,00	0,77	0,96
0,91	1,08	1,09	0,91	1,18	1,00	1,20	0,72
0,93	1,30	0,85	0,90	0,90	1,04	1,14	0,80
0,87	1,11	1,01	0,93	1,00	1,07	0,84	0,81
0,77	1,14	0,89	1,08	1,16	1,03	1,02	0,93
1,01	1,12	1,10	0,97	1,16	0,90	1,24	1,01

- Het waardenbereik is (in vet) $1.30 \text{ s} - 0.72 \text{ s} = 0.58 \text{ s}$.

³ Het resultaat van de ene meting mag dat van een andere niet beïnvloeden.

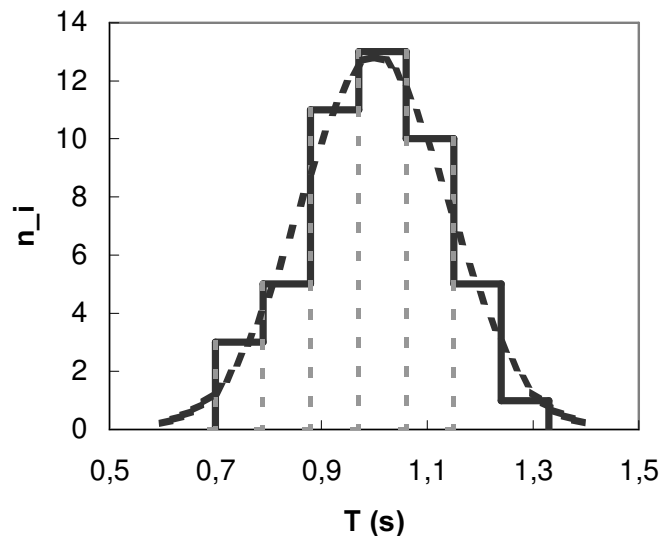
⁴ Zie cursus wiskunde voor een degelijke definitie van de begrippen continu en discreet

⁵ Met resolutie van het meettoestel bedoelen we hier de kleinste schaalverdeling.

- Aantal klassen: $\sqrt{48} = 6.928$. We kiezen voor 7 klassen. (min of meer arbitrair)
- Klassenbreedte: $0.63 \text{ s} / 7 \text{ klassen} = 0.09 \text{ s}$ (We hebben 0.58 s naar 0.63 s afgerond om mooie ronde getallen te bekomen. De afronding is naar boven gekozen om te vermijden dat de uiterste waarden juist op de grens van de klassen vallen of erbuiten.)
- De klassen, hun absolute frequentie (n_i) en relatieve frequentie (f_i).

Klasse i	n_i	f_i
$0.70 \leq x < 0.79$	3	$3/48 = 0.063$
$0.79 \leq x < 0.88$	5	$5/48 = 0.104$
$0.88 \leq x < 0.97$	11	0.229
$0.97 \leq x < 1.06$	13	0.271
$1.06 \leq x < 1.15$	10	0.208
$1.15 \leq x < 1.24$	5	0.104
$1.24 \leq x < 1.33$	1	0.021

- Grafische voorstelling



De getoonde grafische voorstelling (volle zwarte lijn) noemt men het **histogram**. Het histogram geeft per klasse de (absolute of relatieve) frequentie van het voorkomen weer.

Het typische verloop van een histogram van meetwaarden ziet er altijd min of meer uit zoals hierboven getoond: de waarden liggen centraal gegroepeerd en hoe verder je van het centrum verwijderd bent, hoe lager de frequentie van voorkomen is. In wat volgt zullen we alle verdelingen die min of meer volgens dit patroon lopen **klokvormig** noemen.

Afhankelijk van de steekproef, de steekproefgrootte en de klassenindeling zal het histogram er steeds anders uitzien. Nochtans — als het Gaussmodel van toepassing is — zal je bij een voldoende grote steekproef en (bijgevolg) voldoende smalle klassenbreedte, steeds ongeveer hetzelfde histogram terugvinden, onafhankelijk van de steekproef en de klassenindeling. Dus naarmate je de steekproef groter kiest en je de klassen smaller maakt, zul je merken dat de vorm van het histogram naar eenzelfde limietvorm streeft. Ware het niet dat het een wiskundig slecht gedefinieerd begrip zou zijn, zouden we die limietvorm kunnen omschrijven als het “histogram van de populatie”.

Zoals reeds gesteld, is voor een meting de populatie oneindig groot, en kan de variabele ook oneindig veel reële waarden aannemen. De limietvorm die we in bovenstaande paragraaf introduceerden kunnen we om die redenen niet meer aanduiden als “histogram”. In plaats daarvan spreekt men over de **kansfunctie** of **dichtheidsfunctie** $f(x)$ van de variabele x . Een kansfunctie is continu en de

functiewaarde in elk willekeurig punt x_p is evenredig met de kans dat x_p voorkomt in een willekeurige steekproef. De kansfunctie⁶ die hoort bij de het histogram van bovenstaand meting is weergegeven in zwarte stippellijn. Evenals het histogram vertoont de kansfunctie het typische klokvormige verloop. De kansfunctie en het histogram vertonen een zeer grote overkomst wat wil zeggen dat de steekproef representatief is voor de populatie.

2.2 parameters van een kansfunctie, parameters van een steekproef

In het Gauss model voor metingen zullen we er van uit gaan dat voor elke individuele meting in een herhaalde reeks van metingen dezelfde kansfunctie van toepassing is. Meestal ziet die kansfunctie er klokvormig uit. Afhankelijk van de omstandigheden kunnen verschillende kansfuncties van toepassing zijn, waarvoor soms zelfs een wiskundig functievoorschrift $f(x)$ gekend is. Het exacte functievoorschrift van de kansfunctie doet in de foutentheorie meestal niet direct ter zake. Dikwijls wil men slechts de positie en de breedte van de (klokvormige) kansverdeling kennen. Hiervoor voert men twee exact gedefinieerde begrippen in.

Het **gemiddelde** μ is de te verwachten waarde voor de kansverdeling. Voor symmetrische klokvormige kansfuncties ligt μ bij de top van de curve. Voor een willekeurige kansdichtheid $f(x)$, is μ gedefinieerd door volgende betrekking

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \quad (1)$$

De breedte van de kansverdeling wordt aangegeven door de **dispersie** of **standaarddeviatie** σ . Deze is gedefinieerd als

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx} \quad (2)$$

De grootheden μ en σ bepalen voor een groot deel de kansfunctie van de te onderzoeken grootheid, maar zijn niet exact experimenteel toegankelijk (want de populatie is oneindig en $f(x)$ meestal niet gekend). We voeren daarom steekproeven uit om μ en σ te schatten. Op basis van de eigenschappen van de steekproef trachten we μ en σ te kennen. We zullen voor elke steekproef eveneens het gemiddelde en de standaarddeviatie definiëren en deze dan gebruiken als schatting voor μ en σ . Ze zijn echter niet noodzakelijk gelijk en daarom voeren we ze in als nieuwe symbolen.

Zij $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ een steekproef met n elementen van de variabele x , dan is het **steekproefgemiddelde** \bar{x} gedefinieerd als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (3)$$

De **standaardafwijking** van de steekproef s is gedefinieerd als⁷

⁶ Strikt genomen moet een kansfunctie $f(x)$ genormaliseerd zijn. Dit wil zeggen dat $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. In deze tekst zullen we ook $cf(x)$ (met c een reële constante), omschrijven als kansfunctie, niettegenstaande dat $cf(x)$ niet genormaliseerd is.

⁷ In feite is de standaardafwijking s gedefinieerd als $s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. In plaats van s gebruiken wij s' ,

omdat s' een betere schatter is van σ voor kleine ($n < 25$) steekproeven. Het verband tussen s en s' is

$$s' = s \sqrt{\frac{n}{n-1}}. \text{ Hieruit blijkt dat enkel voor kleine waarden van } n \text{ er een beduidend verschil is tussen } s \text{ en } s'.$$

Vele rekentoestellen berekenen trouwens s' als “de standaarddeviatie” [bereken als test eens “de standaarddeviatie” voor $\{1, -1\}$. Er geldt $s = 1$ en $s' = 1.41$].

$$s \cong s' = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} . \quad (4)$$

De definities voor \bar{x} en s lijken erg verschillend van μ en σ , maar toch zijn ze equivalent. De voornaamste oorzaak voor de verschillende formulering is het feit dat in tegenstelling tot de kansverdeling, de steekproef een aftelbaar aantal elementen bevat. Men kan daarom de integralen (\int) vervangen door discrete sommen (Σ).

3. Het Gaussmodel

Volgens het Gaussmodel voor meetfouten wordt voor elke nieuwe individuele meting het resultaat bepaald door de exacte waarde van de te meten grootheid en door een toevalsfout. Dit schrijven we als

$\text{individuele meting} = \text{exacte waarde} + \text{toevalsfout}$

De exacte waarde van de te meten grootheid is een constante en experimenteel niet toegankelijke waarde. De waarde van de toevalsfout varieert van meting tot meting. Wat bij één individuele meting de toevalsfout was, kan je nooit achterhalen.

In het Gauss model veronderstelt men verder dat voor elke herhaalde meting dezelfde kansfunctie van toepassing is op de waarde van de toevalsfout. Bovendien neemt men aan dat — indien systematische fouten verwaarloosbaar zijn — de gemiddelde waarde van de toevalsfout gelijk is aan 0. Dit wil zeggen dat $\mu = 0$ voor de kansfunctie van de toevalsfout. De toevalsfout kan dus zowel positief als negatief kan zijn.

Het Gaussmodel verklaart dus de spreiding die optreedt tussen individuele metingen als zijnde afkomstig van een toevalsfout. Vermits $\mu = 0$ voor de toevalsfout en de exacte waarde een constante is, moet voor de individuele metingen dus gelden dat $\mu = (\text{exacte waarde})$. Met andere woorden het gemiddelde van de individuele metingen over de hele populatie geeft de exacte waarde van de meting.

Omdat er bovendien geen spreiding is op de exacte waarde (constante) zal de standaarddeviatie σ op de individuele metingen gelijk zijn aan de standaarddeviatie σ op de toevalsfout. In het Gauss model nemen we deze standaarddeviatie als maat voor de nauwkeurigheid van een individuele meting. Dus de absolute fout op een individuele meting is de standaarddeviatie van de individuele metingen over de hele populatie.

Om dus de nauwkeurigheid van een meting te kunnen specificeren moeten we dus die μ en σ bepalen die horen bij de kansfunctie van de populatie van individuele metingen. Vermits het voorschrift van die kansfunctie $f(x)$ niet (a-priori) gekend is en de populatie oneindig kunnen μ en σ niet exact berekenen en zullen we ons op steekproeven moeten baseren.

We nemen hierbij aan dat volgende benadering voor μ en σ steeds beter wordt naarmate de steekproef groter gekozen wordt.

$$\mu \cong \bar{x} = \text{meetwaarde en}$$

$$\sigma \cong s' = \text{AF op een individuele meting.}$$

Voorbeeld:

Als we de data uit het voorgaande experiment gebruiken om het steekproefgemiddelde en de standaardafwijking te berekenen bekomen we:

Gemiddelde periode = 0.99875 s

$s' = 0.13$ s

Wanneer we in het voorgaande voorbeeld verder willen rekenen met de periode zullen we daarvoor de gemiddelde waarde van deze periode gebruiken nl. 0.99875 s. Dit is ook de top van het histogram zoals je kunt zien in de grafische voorstelling. De fout op elk van de **afzonderlijke** metingen is 0.13 s.

4. Fout op het gemiddelde.

Veronderstel dat een grootheid x n maal gemeten wordt en dat we deze procedure p maal herhalen. De resultaten zouden dan als volgt kunnen worden samengevat:

$$\begin{array}{ccc} \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}\} & \bar{x}_1 & s_1' \\ \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n}\} & \bar{x}_2 & s_2' \\ \dots & \dots & \dots \\ \{x_{p1}, x_{p2}, x_{p3}, \dots, x_{pn}\} & \bar{x}_p & s_p' \end{array}$$

We gaan er van uit dat het Gauss model van toepassing is. Alle metingen zijn dus evenwaardig en het toeval functioneert voor elke meting volgens dezelfde kansfunctie. Volgens bovenstaande theorie geldt dat de werkelijke waarde best benaderd wordt door de gemiddelde waarde van n metingen. Hiervoor hebben we p waarden gevonden nl. $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p$. De standaarddeviatie s_i' is de absolute fout op een willekeurige ($j = 1 \dots n$) individuele meting x_{ij} in de i -de rij.

Indien we een perfecte benadering van μ en σ zouden kunnen bekomen zou moeten gelden dat $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = \dots = \bar{x}_p = \mu$. en $s_1' = s_2' = \dots = s_p' = \sigma$. In de praktijk echter zal je vaststellen dat de waarden van $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ en s_1', s_2', \dots, s_p' steekproefsgewijs fluctueren rond een centrale waarde.

Er zal dus een spreiding zitten op de waarden $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p$. Met deze spreiding is opnieuw een kansfunctie geassocieerd met parameters $\bar{\mu}$ en $\bar{\sigma}$. Men kan aantonen dat (voor n voldoende groot) die kansfunctie klokvormig verloopt volgens de zeer bekende **normale kansverdeling**⁸. Belangrijk hierbij is de vaststelling dat de spreiding $\bar{\sigma}$ op $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \dots \bar{x}_p$ verkleint ten opzichte van de spreiding σ op de x_{ij} waarden. Hierbij geldt dat

$$\bar{\sigma} \cong \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Analoog benaderen we daarom de spreiding \bar{s}' op \bar{x}_i als

$$\bar{s}' \cong \bar{s}_i' = \frac{s_i'}{\sqrt{n}} \quad i = 1 \dots p.$$

\bar{s}' noemt men de standaardfout.

⁸ Centrale limietstelling: cursus statistiek (2° bachelor)

De spreiding op een gemiddelde waarde is dus een factor \sqrt{n} keer kleiner dan de spreiding op de individuele waarden. Vermits de spreiding op de waarden als maat genomen wordt voor de meetfout nemen we:

$$AF \text{ op het gemiddelde van } n \text{ herhaalde metingen} = \bar{s}' = \frac{s'}{\sqrt{n}} = \frac{AF \text{ individuele meting}}{\sqrt{n}}$$

Voorbeeld:

Dit betekent als we in het voorgaande voorbeeld de fout willen kennen op de **gemiddelde** periode dat we de standaarddeviatie s' moeten delen door $\sqrt{48}$

Dus voor verdere berekeningen zullen we als periode gebruiken:

$$\bar{T} = 0.999 s \text{ met } AF = \bar{s}' = 0.019 s$$

5. Nauwkeurigheid van de meting versus nauwkeurigheid van het meettoestel

De bovenstaande beschrijving gaat er van uit dat het resultaat van een meting om het even welk reëel getal kan uitkomen (rekening houdend met de kansfunctie). Maar we stelden reeds eerder dat elk meettoestel uiteindelijk slechts een eindige resolutie heeft. Voorbeelden zijn: een thermometer tot op 0.1 °C, een chronometer tot op 0.01 s, een lat tot op 1 cm....De resolutie is (meestal) gekozen door de fabrikant van het toestel. Om een schaalverdeling of resolutie te bepalen, baseert de fabrikant zich op de nauwkeurigheid en het toepassingsgebied van het toestel. Zo zal een weegschaal voor het wegen van bv. zakken aardappelen niet verdeeld worden tot op 10 mg, omdat de gewenste robuustheid die zo'n weegschaal moet hebben technisch niet compatibel is met een hoge nauwkeurigheid. Bovendien is een nauwkeurigheid van 10 mg niet relevant bij het wegen van aardappelen. Eveneens vind je zelden (nooit?) handgestopte chrono's die registreren tot op 0.001 s.

Meettoestellen worden dus ontworpen om een bepaalde nauwkeurigheid te behalen, die uiteindelijk steeds beperkt is. We zullen de nauwkeurigheid van het toestel dan ook als limietnauwkeurigheid beschouwen: de nauwkeurigheid van een meting is nooit beter dan de nauwkeurigheid van het meettoestel. Met "de nauwkeurigheid van een meting" bedoelen we hier de fout zoals die kan bepaald worden uit het statistische gedrag van de meetwaarden. In het bijzonder denken we hierbij aan de fout op het gemiddelde. Voor grote steekproeven kan de AF op het gemiddelde kleiner worden dan de nauwkeurigheid van het meettoestel. In zulke gevallen wordt de nauwkeurigheid van de meting bepaald door het meettoestel.

In principe moet je dus voor elk toestel weten wat de nauwkeurigheid ervan is. Voor eenvoudige toestellen (zonder handleiding: meetlat, chrono,...) neem je hiervoor de resolutie van de aflezing (= het kleinste schaaldeel). Indien het zinvol is om te interpoleren binnen het kleinste schaaldeel mag je de nauwkeurigheid zelfs schatten als de helft van die resolutie. Een voorbeeld van zulke situatie is bv. een lat verdeeld tot op "slechts" 1 cm. Bij digitale toestellen of toestellen met een nonius heeft interpoleren binnen het kleinste schaaldeel uiteraard geen zin. Voor geavanceerde toestellen (met handleiding: multimeters, ...) raadpleeg je de specificaties van de fabrikant. Indien je tot die gegevens geen toegang hebt, ga je er van uit dat de resolutie van de aflezing een maat is voor de nauwkeurigheid van het toestel zelf: de resolutie wordt meestal namelijk zo gekozen (men kiest gewoonlijk de resolutie gelijk aan of iets kleiner dan de nauwkeurigheid van het toestel).

Voorbeelden:

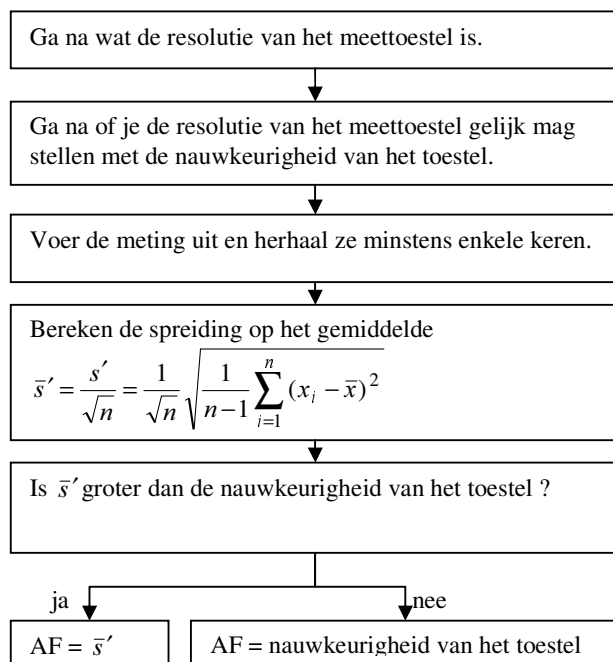
1. Kijken we naar de data uit het voorgaande voorbeeld: de periode werd gemeten met een chronometer. Uit de metingen blijkt dat we tot op 0.01 s nauwkeurig gemeten kan worden. Vergelijken we deze waarde met de fout op het gemiddelde. Deze is berekend als 0.019 s. Daaruit blijkt dat de fout op het gemiddelde het grootst is, dus voor verdere berekeningen wordt 0.019 s gebruikt als AF.

2. Bij een digitale multimeter wordt door de fabrikant gegeven dat voor een bereik tot 2000 mV er een resolutie is van 1 mV, de precisie is $\pm 0.5\%$ van de afgelezen waarde $\pm 2D$. Dit wil zeggen: stel we meten de spanning als 1248 mV. De nauwkeurigheid wordt dan als volgt berekend:

nauwkeurigheid = $0.5\% \cdot 1248 \text{ mV}$ (afgelezen waarde) + $2 \cdot 1 \text{ mV}$ (D = resolutie) = 8 mV.
 Vermits de berekende nauwkeurigheid groter is dan de resolutie krijgen we als resultaat van de meting: spanning = $1248 \pm 8 \text{ mV}$

6. Bepalen van de absolute fout: een samenvatting

Om de waarde en de AF te bepalen van een meting kan je volgend overzicht gebruiken.



Voorbeelden:

1. Bij de proef met de ballistische slinger wordt de uitwijkhoeck A gemeten. De resolutie van het meettoestel is **0.5°** en mag gelijk gesteld worden aan de nauwkeurigheid.

We meten de hoek A 4 maal en bekomen volgende resultaten:

67°; 67.5°; 67°; 67°

Dit geeft als gemiddelde en spreiding:

$$\bar{A} = 67.125^\circ$$

$$\bar{s}' = \frac{0.25^\circ}{\sqrt{4}} = 0.125^\circ$$

Vermits de spreiding (0.125°) kleiner is dan de nauwkeurigheid (0.5°) nemen we als AF = 0.5°, dus:

$$\mathbf{A = 67.1 \pm 0.5^\circ}$$

2. Bij de buis van Rüchardt wordt de tijd voor 5 periodes gemeten met een chronometer met resolutie 0.01 s (= nauwkeurigheid).

We meten 5T 4 maal en bekomen volgende resultaten:

4.36 s; 4.48 s; 4.15 s; 4.17 s.

Dit geeft als gemiddelde en spreiding:

$$\bar{5T} = 4.29s$$

$$\bar{s}' = \frac{0.16s}{\sqrt{4}} = 0.08s$$

In dit geval is de spreiding (0.08 s) groter dan de nauwkeurigheid (0.01 s), dus: **5T = 4.29 ± 0.08 s**

Belangrijk is het kiezen van de grootte van je steekproef. Hierbij moet je je laten leiden door de resultaten die je bekomt. Indien er veel variatie zit op de resultaten in vergelijking met de

nauwkeurigheid van het toestel, dan neem je best veel metingen. Is er weinig variatie dan volstaan enkele metingen. Je zal immers merken dat de nauwkeurigheid van het meettoestel dan bepalend is. In feite moet je meten tot je minstens een idee hebt waar de meetwaarden "ophopen" (denk aan het histogram). Ook je ervaring zal je hierin helpen.

Voor het berekenen van \bar{s}' kan je handig gebruik maken van je rekentoestel. Raadpleeg de handleiding van je toestel!

III. Foutenvoortplanting

Vele grootheden zijn niet rechtstreeks toegankelijk voor meting maar worden bepaald door bewerkingen uit te voeren met één of meer gemeten grootheden. We denken bv. aan een oppervlakte dat je bekomt door afmetingen met elkaar te vermenigvuldigen, of kinetische energie die bepaald wordt uit de snelheid en de massa, ...

Omdat de input van die berekeningen beperkt nauwkeurig is, zal ook de uitkomst een zekere onnauwkeurigheid vertonen. We zullen hier bestuderen hoe we nauwkeurigheid van het resultaat van berekeningen moeten inschatten uitgaande van de fout op de gemeten waarden.

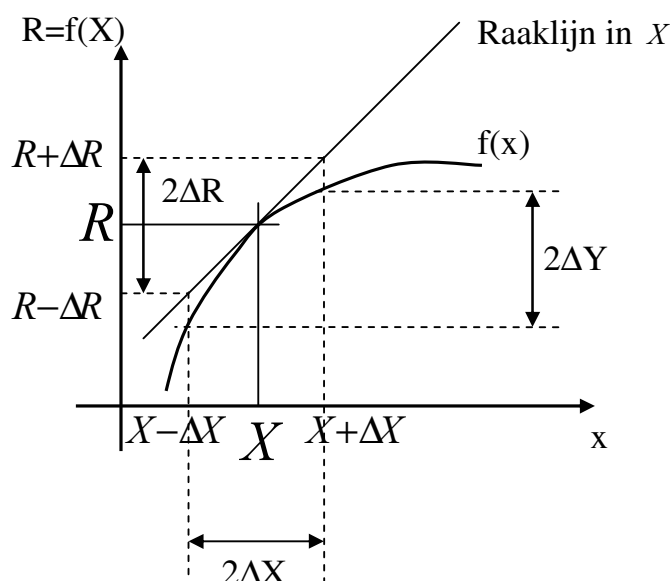
1. Een grootheid R afhankelijk van één onafhankelijke grootheid X

Stel dat we een grootheid X bepaald hebben, eventueel als het gemiddelde van meerdere metingen, met zijn absolute fout $AF(X)$. Om de notatie kort te houden noteren we $AF(X)$ als ΔX (dus $AF(X) \equiv \Delta X$). We beschouwen nu de grootheid $R=f(X)$. De waarde van R wordt enkel bepaald door X . Voorbeelden van zulke situaties zijn bv. de oppervlakte van een vierkant bepaald als het kwadraat van de lengte van een zijde, de cosinus van een hoek, ...

Vermits er op de waarde van X een fout ΔX bepaald is, vragen we ons af hoe nauwkeurig $R = f(X)$ is. Met ander woorden hoe berekenen we ΔR ?

Beschouwen we onderstaande grafische voorstelling van $f(X)$. X ligt centraal in het fouteninterval $[X - \Delta X, X + \Delta X]$ met breedte $2\Delta X$. Dit is het interval waarin de spreiding op X het meest gecentreerd is. De beelden $f(X)$ van de X waarden uit het fouteninterval beslaan het hele interval dat aan geduid werd met $2\Delta Y$. Indien we ΔX klein mogen veronderstellen is er een evident verband tussen de afgeleide $f'(X)$ van $f(X)$ en de verhouding van het verticale en het horizontale interval. Er geldt namelijk dat

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X} = f'(X). \quad (5)$$



Er blijkt dus dat naarmate ΔX kleiner wordt, ΔY steeds beter ΔR benadert. We stellen daarom dat⁹

$$\Delta R^2 = f'(X)^2 \Delta X^2 \quad (6)$$

Waarbij de kwadraten werden toegevoegd opdat alle grootheden positief zouden zijn. De AF is namelijk een maat voor de grootte van een interval en 'groottes' zijn positief.

Voorbeeld

De diameter van een bol wordt bepaald als 12.0023 ± 0.0012 mm.

Bereken het volume $V = \frac{\pi D^3}{6}$.

- $V = \frac{\pi(12.0023\text{mm})^3}{6} = 905.29903\dots\text{mm}^3$
- De variabele is D, de functie is $V = V(D)$.
- De afgeleide die moet worden berekend is:

$$\frac{dV}{dD} = \frac{3\pi D^2}{6} = \frac{3\pi(12.0023\text{mm})^2}{6} = 226.281\dots\text{mm}^2$$
- De AF op V is (kwadraten vallen hier weg want alle waarden zijn positief)

$$\Delta V = \frac{dV}{dD} \Delta D = (226.281\dots\text{mm}^2)(0.0012\text{mm}) = 0.2715\dots\text{mm}^3 = 0.3\text{mm}^3$$
- Hierbij ronden we de AF af tot 1 BC.
- Resultaat $V = 905.3 \pm 0.3\text{mm}^3$
- Het waardegetal wordt afgerond zodanig dat de ordes van de laatste BC van het waardegetal en de AF gelijk zijn.

Speciaal geval: Het bepalen van de fout op een afgelezen waarde uit een tabel

Je kan een tabel opvatten als een functie, zij het dan in de vorm van een verzameling (x,y) koppels. Het bepalen van de fout op een afgelezen waarde uit een tabel gebeurt op analoge manier. We lezen de onbekende grootheid af bij de foutgrenzen van de gemeten grootheid (eventueel moet er geïnterpoleerd worden tussen 2 tabelwaarden). De absolute waarde van het halve verschil tussen deze twee waarden is dan de absolute fout.

Voorbeeld:

T (°C)	α
15	20°10'
16	20°12'
17	20°14'
18	20°16'

Als T gemeten wordt nl. $T = 17^\circ\text{C}$ met $AF(T) = 1^\circ\text{C}$,

dan zal $\alpha(17^\circ\text{C}) = 20^\circ14'$ met $AF = \frac{\alpha(17^\circ\text{C} + 1^\circ\text{C}) - \alpha(17^\circ\text{C} - 1^\circ\text{C})}{2} = \frac{20^\circ16' - 20^\circ12'}{2} = 2'$

2. Een grootheid R afhankelijk van meerdere onafhankelijke grootheden X, Y, Z...

Meestal zijn er bij experimenten meerdere variabelen die een rol spelen en dikwijls zullen we dan ook bewerkingen tussen meerdere variabelen moeten uitvoeren.

⁹ Zie ook cursus wiskunde I: Praktische toepassingen van afgeleiden.

We beschouwen de functie met meerdere variabelen $R = f(X, Y, Z, \dots)$. Analoog aan bovenstaande paragraaf noteren we $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \dots$ als AF op X, Y, Z, \dots en wensen we een uitdrukking voor de absolute fout ΔR op R te bekomen. Analoog met de situatie voor één variabele (zie formule 6) kan men aantonen dat ΔR in dit geval gegeven wordt door:

$$\Delta R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)^2 \Delta Y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\right)^2 \Delta Z^2 + \dots \quad (7)$$

De bewerking $\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)$ in deze vergelijking is de zogenaamde partieel afgeleide van f naar X . Deze bewerking is typisch voor functies met meerdere variabelen. In wezen is de partieel afgeleide hetzelfde als een gewone afgeleide (dezelfde rekenregels) alleen moet je alle andere variabelen even als constante beschouwen bij het afleiden (zie voorbeeld).

Het is belangrijk dat de variabelen onafhankelijk zijn. Indien er verbanden zijn tussen de variabelen wordt dezelfde fout meermaals in rekening gebracht. (bv. indien $Y = cX$ met c een constante, dan is $\Delta Y = c\Delta X$)

Voorbeeld

Berekening van de massadichtheid ρ van een lichaam. Het volume V en de massa m zijn gegeven.

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 9.8145 \pm 0.005 \text{ g} \\ V = 1100.03 \pm 0.08 \text{ mm}^3 \\ \rho = \frac{m}{V} \end{array} \right.$$

- $\rho = \frac{m}{V} = \frac{9.8145 \text{ g}}{1100.03 \text{ mm}^3} = 8.922029 \dots \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- De variabelen zijn m en V , de te beschouwen functie is $\rho = \rho(m, V) = \frac{m}{V}$.
- De partieel afgeleiden die moeten worden berekend, zijn (beschouw respectievelijk m en V als constanten):

$$\frac{\partial \rho}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{-m}{V^2} = -8.110715 \text{ g cm}^{-6}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{V} \right) = \frac{1}{V} = 0.909066 \text{ cm}^{-3}$$

- De AF op ρ is:

$$\begin{aligned} \Delta \rho^2 &= \left(\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{m}{V} \right) \right)^2 \Delta V^2 + \left(\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{m}{V} \right) \right)^2 \Delta m^2 \\ &= (-8.110715 \text{ g cm}^{-6})^2 (0.00008 \text{ cm}^3)^2 + (0.909066 \text{ cm}^{-3})^2 (0.005 \text{ g})^2 \\ &= 2.108104 \times 10^{-5} \text{ g}^2 \text{ cm}^{-6} \\ &\Rightarrow \Delta \rho = 4.591 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3} = 5 \times 10^{-3} \text{ g cm}^{-3} \end{aligned}$$

- Hierbij ronden we de AF af tot op 1 BC.
- Resultaat $\rho = 8.922 \pm 0.005 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
- Het waardegetal wordt afgerond zodanig dat de rangordes van de laatste BC's van het waardegetal "2" en de AF "5" gelijk zijn.

3. Rekenregels

In de praktijk ervaart men de formele methode zoals hierboven uitgewerkt meestal als omslachtig en baseert men zich vaak op rekenregels voor het bepalen van de AF. Het blijkt nl. dat je uit de ingewikkelde formule (7) eenvoudig enkele handige rekenregels kan afleiden.

In onderstaande formules zijn X , Y , Z gemeten grootheden met respectievelijke fout ΔX , ΔY , ΔZ . a , b , c , ... zijn constante waarden zonder fout. We denken hierbij aan factoren zoals π in ' πr^2 ' of $\frac{1}{2}$ in ' $\frac{1}{2}at^2$ ' ... of aan de constante term 1 in formules zoals ' $1+\alpha$ ' (lineaire uitzetting).

1. Som en verschil

Ga zelf na dat de algemene formule (7) in de volgende gevallen resulteert in:

Zowel voor $R = X + Y$ en $R = X - Y$ vind je:

$$\Delta R = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2} \quad (8)$$

Voor $R = \pm X \pm Y \pm Z \pm a$ vind je:

$$\Delta R = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (9)$$

Merk op dat een constante term dus niet bijdraagt tot de fout.

2. Produkt, quotiënt, macht

Zowel voor $R = XY$ en $R = \frac{X}{Y}$ geldt dat

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2} \quad (10)$$
$$\text{of } RF(R) = \sqrt{(RF(X))^2 + (RF(Y))^2}$$

Ter illustratie bewijzen we dit voor de deling:

Er geldt

$$\frac{\partial R}{\partial X} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{X}{Y} \right) = \frac{1}{Y}$$
$$\frac{\partial R}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{X}{Y} \right) = -\frac{X}{Y^2}$$

Invullen in de algemene formule levert

$$\Delta R^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial X} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial Y} \right)^2 \Delta Y^2 = \left(\frac{1}{Y} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{-X}{Y^2} \right)^2 \Delta Y^2$$

Delen we vervolgens linker- en rechterlid door $R^2 = \frac{X^2}{Y^2}$, dan bekomen we.

$$\frac{\Delta R^2}{R^2} = \left(\frac{Y^2}{X^2} \right) \left(\frac{1}{Y} \right)^2 \Delta X^2 + \left(\frac{Y^2}{X^2} \right) \left(\frac{-X}{Y^2} \right)^2 \Delta Y^2$$

Vereenvoudigen leidt tot $\frac{\Delta R^2}{R^2} = \left(\frac{1}{X^2} \right) \Delta X^2 + \left(\frac{1}{Y^2} \right) \Delta Y^2$, wat we moesten bewijzen.

Verder kan nog bewezen worden dat voor $R = aX$ geldt dat (ga na):

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \frac{\Delta X}{|X|}. \quad (11)$$

of $RF(R) = RF(X)$

Voor $R = X^a$ geldt

$$\frac{\Delta R}{|R|} = |a| \frac{\Delta X}{|X|} \quad (12)$$

of $RF(R) = |a| RF(X)$

3. Functies

Enkele veel voorkomende functies gedragen zich als volgt:

$$\begin{aligned} R = \ln X &\Rightarrow \Delta R = \frac{\Delta X}{|X|} \\ R = \cos X &\Rightarrow \Delta R = |\sin(X)| \Delta X \\ R = \sin X &\Rightarrow \Delta R = |\cos(X)| \Delta X \\ R = \exp X &\Rightarrow \frac{\Delta R}{|R|} = \Delta X \end{aligned}$$

OPGELET Goniometrische functies werken hier in radialen! Waarden van ΔX in $^\circ$ moeten dus geconverteerd worden naar radialen (vermenigvuldigen met $\pi/180^\circ$).

4. Ingewikkelde uitdrukkingen

De rekenregels die hierboven beschreven werden laten toe om voor zeer ingewikkelde uitdrukkingen stap voor stap het gedrag van de fout te analyseren, zonder gebruik te maken van de algemene formule (7) met de afgeleiden. Bij wijze van voorbeeld geven we hier een berekening van de foutberekening voor een ingewikkelde functie. Om overzichtelijk te werken noteren we alles in een tabel.

Gegeven

$$X = 1000 \pm 130 \text{ m}^5$$

$$Y = 1.1 \pm 0.6 \text{ m}$$

$$Z = 12 \pm 1$$

$$\alpha = 15 \pm 3^\circ$$

Gevraagd

Bereken $\frac{3\sqrt[5]{X} \cos \alpha}{Y} + Z - 30$ met fout

Oplossing

Grootheid	Waarde	Absolute fout	Relatieve fout	commentaar
X	1000 m ⁵	130 m ⁵	13 %	gegeven
Y	1.1 m	0.6 m	55 %	gegeven
Z	12	1	8.3 %	gegeven
α	15°	3°	20%	gegeven
α	0.262	$0.262 \times 0.2 = 0.052$	20%	Hoek omzetten in radialen, product met constante $\pi/180^\circ$
$\sqrt[5]{X}$	3.98 m	$3.98 \text{ m} \times 0.026 = 0.10 \text{ m}$	$13\% \times 1/5 = 2.6\%$	Macht (1/5)
$3\sqrt[5]{X}$	11.94 m	$11.94 \text{ m} \times 0.026 = 0.30 \text{ m}$	2.6 %	Product met constante 3
$\cos \alpha$	0.966	$\sin(0.262) \times 0.052 = 0.013$	$0.013/0.966 = 2.4\%$	Functie cos
$3\sqrt[5]{X} \cos \alpha$	11.53 m	$11.53 \text{ m} \times 0.035 = 0.40 \text{ m}$	$((2.6\%)^2 + (2.4\%)^2)^{1/2} = 3.5\%$	product
$\frac{3\sqrt[5]{X} \cos \alpha}{Y}$	10.5	$10.5 \times 0.55 = 5.8$	$((3.5\%)^2 + (55\%)^2)^{1/2} = 55\%$	Deling
$\frac{3\sqrt[5]{X} \cos \alpha}{Y} + Z$	22.5	$(5.8^2 + 1^2)^{1/2} = 5.9$	$5.9/22.5 = 26\%$	Som
$\frac{3\sqrt[5]{X} \cos \alpha}{Y} + Z - 30$	-7.5	5.9	$5.9/7.5 = 79\%$	Som met constante

Resultaat: -7.5 ± 5.9 of -7 ± 6 (dimensieloos)

Opmerkingen:

- 1) De uiteindelijke waarde van de AF bij dit soort berekeningen wordt mede bepaald door afrondingen in de opeenvolgende tussenstappen. We spreken daarom af dat we in dit soort berekeningen steeds 2BC voor AF en RF in rekening brengen. In het eindresultaat kan je de AF terug afronden naar 1BC. Niettemin kan de AF op het eindresultaat toch een eenheid (of enkele) in het laatste BC verschillen indien je vergelijkt met de berekening met afgeleiden.
- 2) **Let er op** dat je in de stap voor stap berekening werkt met onafhankelijke variabelen. Wanneer een variabele X meerdere keren voorkomt in de uitdrukking waarvoor je foutenanalyse wenst te doen, is dit niet het geval! Je brengt dan immers dezelfde fout op X meerdere keren in rekening, waardoor de fout op het eindresultaat verhoogt. Je lost dit op door de uitdrukking te herschrijven zodat elke variabele slechts één keer voorkomt, of door formule (7) toe te passen.