Wiskunde A

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Theorie

Hoofdstuk 1

Complexe Getallen

Inleiding

- $\mathbb{N}$ = Natuurlijke getallen: {0, 1, 2, 3, ...}
- $\mathbb{Z}$ = Gehele getallen: {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
- $\mathbb{Q}$ = Rationale getallen: $\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, \ldots\}$
- $\mathbb{R}$ = Reële getallen: $\{\sqrt{2}, \pi\}$
- $\mathbb{C}$ = Complexe getallen: $j^2 = -1$, j = imaginaire eenheid

Definitie $z = a + bj$ met $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ en $j = \sqrt{-1}$ met

- $Re(z) = a$
- $Im(z) = b$

3 Vormen

- Cartesische vorm: $z = a + bj$
- Goniometrische vorm: $z = r[cos(\theta) + jsin(\theta)]$
- Exponentiële vorm: $re^{j\theta}$

a en b

- $a = rcos(\theta)$

- $b = rsin(\theta)$

r en θ

- $r \geq 0$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $\theta \in]-\pi, \pi[$
- $tg(\theta) = \frac{b}{a}(+\pi)$

Complex toegevoegde

- Cartesische vorm: $\overline{z} = a - bj$
- Exponentiële vorm: $\overline{z} = re^{-j\theta}$

Bewerkingen

- $z_1 + z_2$
- $z_1.z_2 = (r_1.r_2)e^{j(\theta_1+\theta_2)}$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$
- $z^n = r^n e^{jn\theta}$
- $\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{1}{n}}(\theta + 2k\pi)$

Hoofdstuk 2

Limieten

Limiet naderen

- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} en \lim_{x\to +\infty}$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} en \lim_{x\to a^+}$ met $a \in \mathbb{R}$

Bijzondere limieten

- $\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + ... + b_1 x + b_0} = \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to\infty} (1+\frac{1}{y})^y = e$

Onbepaaldheden

- $\frac{0}{0}$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $+\infty - \infty$
- $0.\infty$
- 0^0
- ∞^0

- 1^∞

Wegwerken onbepaaldheden

- Gemeenschappelijke factor van teller en noemer vinden
- Toegevoegde waarde van teller, noemer of beiden
- $f(x) * g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)}$
- $f(x)^{g(x)} = e^{ln(f(x)^{g(x)})}$

  Geldig voor:

  0^0

  ∞^0

- $\lim_{x\to\ldots}(1+g(x))^{\frac{1}{g(x)}}$

  Geldig voor:

  1^∞

Hoofdstuk 3

Afgeleiden

Berekenen van afgeleiden

- $(f.g)' = f'.g + f.g'$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$
- $(f^n)' = nf^{n-1}.f'$
- $(lnf)' = \frac{f'}{f}$
- $(e^f)' = e^f.f'$
- $(bgtg\ x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(bgsin\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(bgcos\ x)' = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}}$

Regel van L'Hopital

- Als $\lim_{x\to\ldots} \frac{f}{g} = \frac{0}{0}\ OF\ \frac{\infty}{\infty}$
- Dan $\lim_{x\to\ldots} \frac{f}{g} = \lim_{x\to\ldots} \frac{f'}{g'}$

Raaklijn en normaal

- Raaklijn : $y - y_p = y'_p(x - x_p)$
- Normaal : $y - y_p = \dfrac{1}{y'_p}(x - x_p)$

Foutentheorie

- $AF(y) \approx |f'(x)| \pm AF(x)$
- $f(x + AF(x)) \approx f(x) + |f'(x)| \pm AF(x)$

Extremum

- f heeft een extremum in x = a als
  1. $f'(a) = 0$
  2. f' verandert van teken in x = a

  $\Rightarrow$ via tekentabel

Hoofdstuk 4

Parameterkrommen

Notatie

$K : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$

Afleiden

- $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$
- $y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dy'/dt}{dx/dt}$

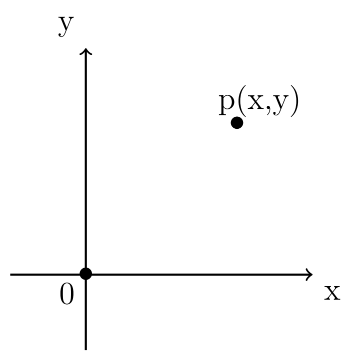
Raaklijn en normaal

- Raaklijn : $y - y_p = y'_p(x - x_p)$
- Normaal : $y - y_p = \dfrac{1}{y'_p}(x - x_p)$

Hoofdstuk 5

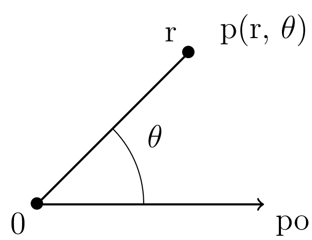
Poolcoördinaten

Voorstelling



- **Cartesische coördinaten:**

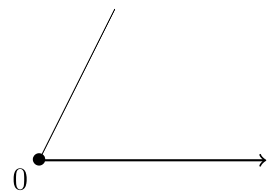
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



- **Poolcoördinaten:**

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = bgtg\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Rechte



- $r\cos(\theta - \theta_0) = d_0 \quad (d_0 > 0)$

Halfrechte

Verloop functieonderzoek

1. (a) domein en beeld
   (b) Periode
   (c) Symmetrie
      - Symmetrie t.o.v. poolas als $r(-\theta) = r(\theta)$
      - Symmetrie t.o.v. pool als $r(\pi + \theta) = r(\theta)$
      - Symmetrie t.o.v. $\theta \pm \dfrac{\pi}{2}$ als $r(\pi - \theta) = r(\theta)$
   (d) Snijpunten met poolas
   (e) Gedrag in pool
   (f) Raaklijnen pool
2. Afleiden
   - $r' > 0 \Rightarrow r$ stijgt enkel als θ stijgt
   - $r' < 0 \Rightarrow r$ daalt enkel als θ stijgt
   - $r' = 0 \Rightarrow$ raaklijn $\perp$ voerstraal. r moet $\neq 0$
   - $r' = \infty \Rightarrow$ raaklijn $=$ voerstraal. r moet $\neq 0$
3. Tabel en schets

Hoofdstuk 6

Dubbelintegralen

Bereken $\iint_G x^2\,dx\,dy$ met G het gebied in het eerste kwadrant tussen $xy = 16$; $y = x$; $y = 0$; $x = 8$.