Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$
\begin{aligned}
\int \frac{t-1}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\
\text{stel } \ u = t^2+4 \\
\text{dan } \ du = 2tdt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\
\Rightarrow \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
= \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
= \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}
$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} = \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy \\
\text{stel } \ u = e^y \\
\text{dan } \ du = e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\
\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)}du \\
= \int \frac{du}{u^2+4} \\
= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} \\
= \frac{1}{2}\arctan\frac{e^y}{2} + C
\end{aligned}
$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$

$$\text{dan } du = \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x$$

$$\Rightarrow x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx$$

$$\text{stel } u = x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$$

$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$

$$\Rightarrow (x+1)\tan(x) - \int \tan(x) dx$$

$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x} \sin(2x)$$

$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = 2\cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow= -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x) dx$$

$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = -2\sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\sin(2x) + 2\Big[- e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x) dx \Big]$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x) dx$$

Dus

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx \\
\Leftrightarrow 5\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \\
\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin(2x) &= \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}
\end{aligned}$$

1.2.4 voorbeeld 4

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}$$

Deel II

Wiskunde B

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n.
- **Graad**: De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. $y^{(n)^r}$

Voorbeeld: Orde en graad

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y \;\; - 2y'^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3 s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin\sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x+2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n-de orde worden drie oplossingen onderscheden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$	?	?
$\rightarrow a + be^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1. $$y = a\sin(x) + b\cos(x)$$
$$y' = a\cos(x) - b\sin(x)$$
$$y'' = -a\sin(x) - b\cos(x)$$

   Hieruit volgt:

$$y'' + y = 0$$
$$-a\sin(x) - b\cos(x) + \sin(x) + b\cos(x) = 0$$
$$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$y = 0$$
$$y = \sqrt{2}\sin(x)$$
$$y = \sin(x) + \cos(x)$$

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.
2. $$y' = Ce^x$$
$$\rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = 0$$
$$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.
$$
\begin{aligned}
& y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\
\rightarrow & y'^2 - yy' + e^x \\
\Leftrightarrow & (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow & e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow & 0 = 0
\end{aligned}
$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de n + *1* bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG
De algemene oplossing is
$$y = C_1 + C_2x$$

1. Er zijn *2* onafhankelijke constanten.
2. Er moet *2* keer afgeleid worden:
$$
\begin{cases}
y & = C_1 + C_2x \\
y' & = C_2 \\
y'' & = 0
\end{cases}
$$
3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde *2*.

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van:
$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$$

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.
2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y & = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' & = -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' & = C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' & = -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' & = 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' & = 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

   Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

   Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\to 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\to y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ 1 & t > \alpha \end{cases}$$

Voorbeeld: Voorbeeld Heaviside functie
Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$.
Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$

TODO: graph

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1 x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1 x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$y' = C_1$$
$$y'' = 0$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2. De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') = 0$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\Rightarrow y_p = (x_p)^2 = C^2$$
$$\Rightarrow p(C, C^2)$$

De richtingscoëfficient y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} & y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = y'\left(\frac{y'}{2}\right)\left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4y - y'^2 = 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow\ & y'^2 - 4y'x + 4y = 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

Hoofdstuk 5

Laplacetransformatie

5.1 De Heaviside functie

Gegeven

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t <= 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 3 \\ e^t t^2 & t > 3 \end{cases}$$

Druk $f(t)$ en $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside-functie.
<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t-0)(-0+t) + H(t-1)(-t+2-t) + H(t-2)(-2(2-t)+0) \\ &= H(t)t + H(t-1)(2-2t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

$$g(t) = H(t-0)(-0+1) + H(t-3)(-1+e^t t^2)$$

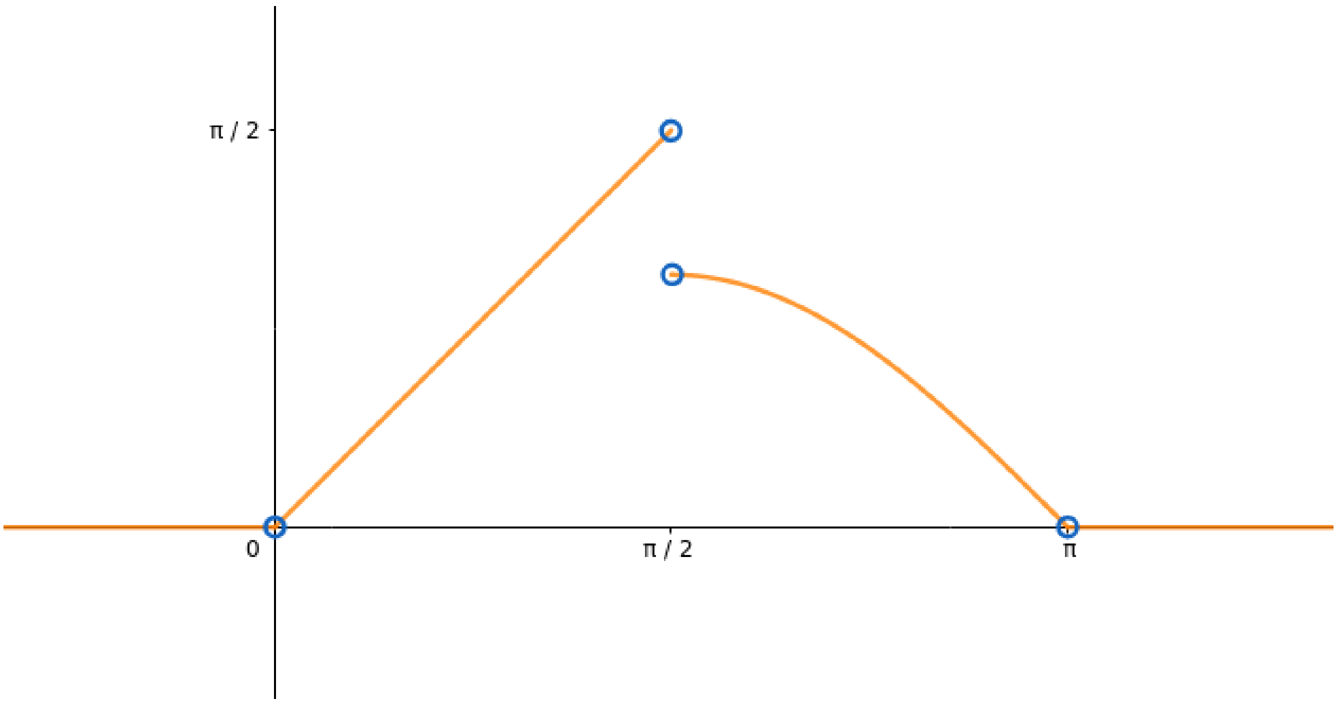
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

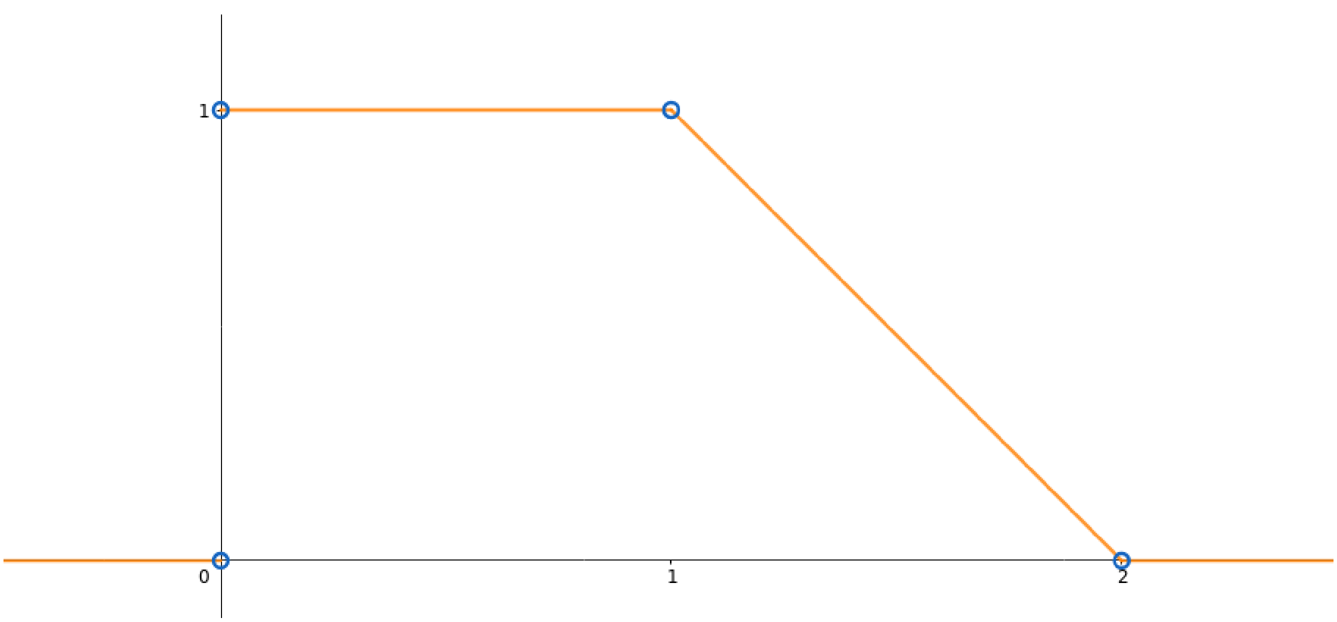
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0+t) + H(t-\frac{\pi}{2})(-t+\sin t) + H(t-\pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t-\pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t-\pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t-1)(-1 + (2-t)) + H(t-2)(-(2-t) + 0) \\ &= H(t) + H(t-1)(1-t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$
