FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN
EN ARCHITECTUUR

Hoofdstuk 13

Essential University Physics

Richard Wolfson

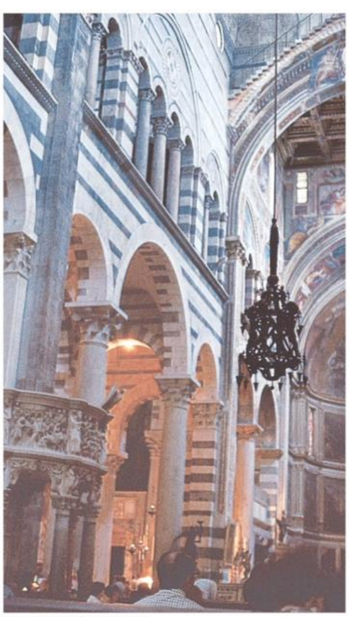
2nd Edition

Trillingen

Oscillatory Motion

UNIVERSITEIT GENT

13.1 Trillingen



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc.

Toen Galileo deze luster in de kathedraal van Pisa bestudeerde zag hij dat :

a) De slingerperiode recht evenredig was met de amplitude
b) De slingerperiode omgekeerd evenredig was met de amplitude
c) De slingerperiode onafhankelijk was van de amplitude
d) De slinger in resonantie trilde met de gezangen van het engelenkoor

Welke bewering is juist?

© Giancoli

2

13.1 Trillingen

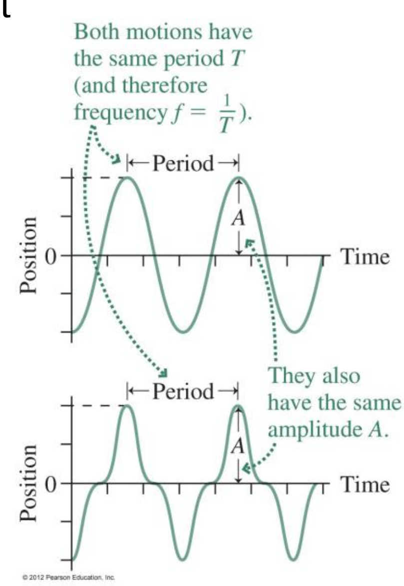
- Een systeem voert een trilling uit (of oscilleert) als het een periodieke beweging rond een toestand van stabiel evenwicht uitvoert.
- Er is dus een kracht(moment) die het terug naar de evenwichtstoestand probeert te brengen

- Vb.:
  - Watermoleculen in microgolfoven.
  - Bruggen en torengebouwen.
  - Slingerend van een uurwerk, een schommel ...
  - Schokdempers.
  - Trillend kristal in uurwerk.
  - Luidspreker.
  - …

© Johan D'heer

13.1 Trillingen

- Trillingen worden gekenmerkt door:
  - De *frequentie f* of *periode T*=1/*f.*
  - De *amplitude A* (= de maximale uitwijking uit de evenwichtstoestand.
- Vb.: Twee positie vs. tijd grafieken voor twee verschillende trillingen met dezelfde periode en dezelfde amplitude.
  - Verschillende grafiek wegens verschillende kracht.
- *x(t) = x(t + nT) met n=0,1,2…*



13.2 Enkelvoudige Harmonische Beweging

- Een **enkelvoudige harmonische beweging** (EHB) ontstaat wanneer de kracht of het krachtmoment dat het systeem terug in evenwicht wil brengen <u>recht evenredig is met de verplaatsing uit de evenwichtstoestand</u>.

$$\boxed{ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$$

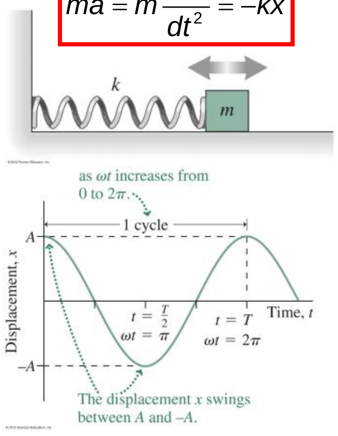
  - Bij de EHB is de uitwijking een sinusoidale functie van de tijd:

    $$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

  - Vb.: een massa m aan een massaloze veer met veerconstante k.
    - De **hoekfrequentie (pulsatie)** $\omega = 2\pi f$ voor dit systeem is

      $$\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$$

  - Elke amplitude A is mogelijk.
    - Bij de EHB is de frequentie onafhankelijk van de amplitude.



13.2 Grootheden bij de EHB

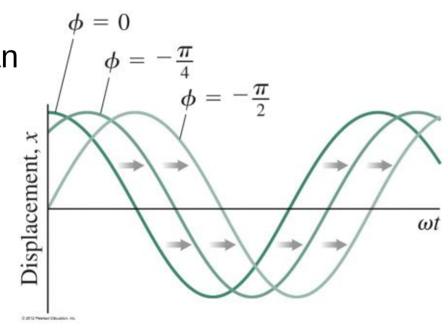
- Verband tussen pulsatie ω en periode T : $x(t) = x(t + nT)$
  ➔ $\cos(\omega t+\varphi) = \cos[\omega(t+nT) +\varphi]$ ➔ $n\omega T=n2\pi$ ➔ $T = 2\pi/\omega$
- Hoekfrequentie (pulsatie), frequentie, periode:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Fase:
  - Beschrijft de oorsprong van de uitwijking-versus tijd curve van de trilling (bepalend voor $x(t=0)$) :

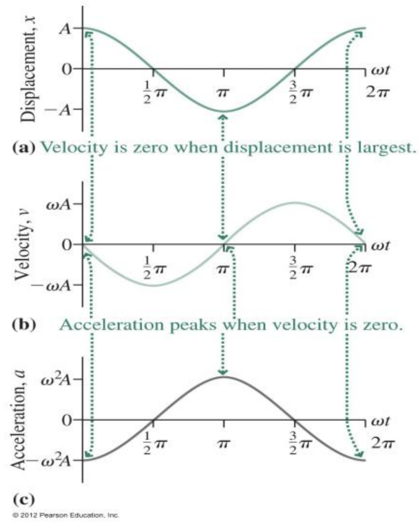
    $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

    $x(t=0) = A\cos(\phi)$



13.2 Snelheid en Versnelling bij EHB

- Uitwijking
- (1) $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$
- Snelheid:
  (2) $v(t) = \dfrac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$
- Versnelling:
- (3) $a(t) = \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$



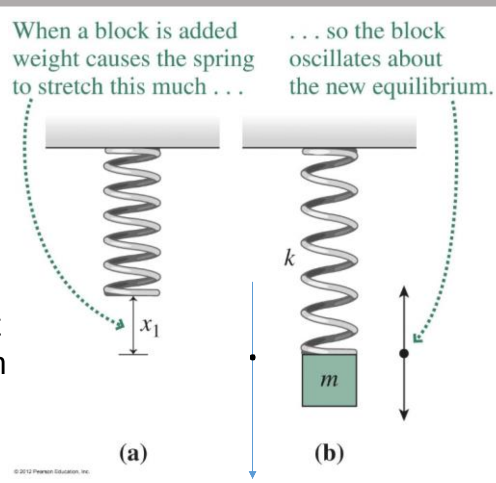
Opmerking :Door (1) en (3) te vervangen in de bewegingsvgl

$\boxed{m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx}$ vind je dat : $\boxed{m\omega^2 = k \text{ of } \omega^2 = k/m}$

© Johan D'heer

13.3 Enkele Enkelv. Harm. Oscillators

- Massa m aan een vertikale massaloze veer
- Evenwichtslengte van de veer is: lengte veer + x_1. met $k\, x_1 = mg$
- Kies de oorsprong O in dit nieuwe evenwichtspunt en de nettokracht is terug te schrijven als
- **F=** $-k(x + x_1) + mg =$ **$-kx$**
  zodat al het voorgaande terug geldig is.



Zo bv is de hoekfrequentie opnieuw : $\omega = \sqrt{k/m}$

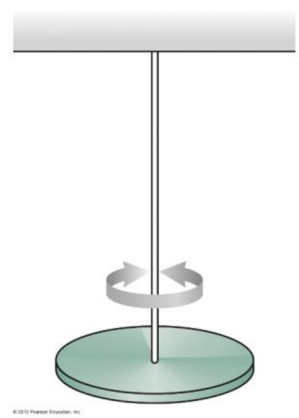
13.3 Enkele Enkelv. Harm. Oscillators

- De torsieslinger
  - Een draad met **torsieconstante** κ zorgt voor een terugroepend krachtmoment

$$\tau = -\kappa\vartheta$$

- Naar analogie met $\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx}$

  is hier $\boxed{I\alpha = \tau \quad \Rightarrow \quad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\kappa\theta}$



- Bijgevolg hangt de (hoek)frequentie hier af van de torsieconstante κ en van het traagheidsmoment I:

$$\omega = \sqrt{\kappa/I} \quad en \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \qquad (\text{vgl} \quad \omega = \sqrt{k/m} \quad)$$

© Johan D'heer

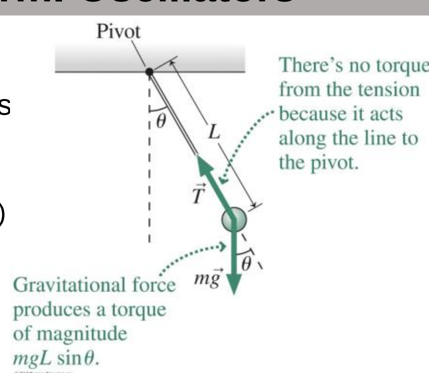
13.3 Enkele Enkelv. Harm. Oscillators

- De enkelvoudige slinger
  - Puntmassa aan een massaloos touw met lengte L:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta \approx -(mgL)\theta \quad (\theta << 1)$$

$$I = mL^2 \quad \text{(voor puntmassa)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{g/L} => T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



  - Frequentie enkel afhankelijk van de lengte van de slinger en van de valversnelling en onafhankelijk van de massa en onafhankelijk van de maximale uitwijking θ_{max} .
  - Formule voor frequentie enkel geldig voor kleine uitwijkingen ($\theta \approx \sin\theta$ als $\theta_{max} << 1$)

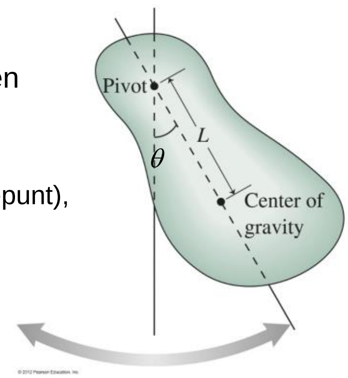
© Johan D'heer

13.3 Enkele Enkelv. Harm. Oscillators

- De fysische slinger
  - Elk fysisch voorwerp dat kan slingeren rond een vast punt.
  - Krachten die werken op voorwerp:
    1. Zwaartekracht (aangrijpend in zwaartepunt), zorgt voor slingerbeweging.
    2. Kracht uitgeoefend door ophangpunt, zorgt niet voor slingerbeweging.
  - 2de wet Newton voor rotaties:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\theta \approx -mgL\theta$$

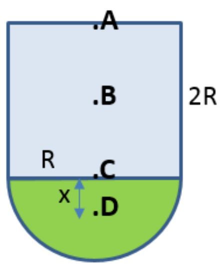
(L = afstand ophangpunt - MM)



  - EHB met $\omega = \sqrt{mgL/I}$ (geldig voor kleine uitwijkingen)
  - *Opm.*: enkelvoudige slinger = bijzonder geval fysische slinger

© Johan D'heer

- Voorbeeld : Een werkstuk bestaat uit een homogene cilinder met lengte 2R en straal R, waaraan onderaan een homogene halve bol(met andere dichtheid) is bevestigd met straal R. De staaf en de halve bol hebben dezelfde massa M.
  Het massamiddelpunt van een halve homogene bol ligt op afstand x = (3R/8) van het middelpunt van die bol. Het geheel kan oscilleren (fysische slinger) rond een as loodrecht op de cilinder die gaat door punt A, midden op de bovenzijde van de cilinder.



Gegeven: Traagheidsmoment van een cilinder met straal R, lengte l en massa M is

$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$$

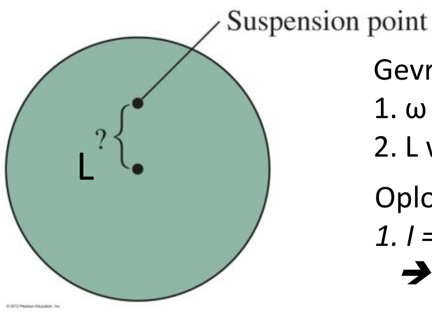
Bewijs dat het traagheidsmoment van dit werkstuk voor de rotatieas door A gegeven wordt door :

$$I_A = MR^2\left(\frac{19}{12} + \frac{59}{10}\right) = 7.483MR^2$$

Bereken de slingerperiode (kleine uitwijkingen) voor R = 10 cm.

Antw. : T = 9,35 $\sqrt{R/g}$ = 0,94s

13.3 Enkele Enkelv. Harm. Oscillators



Gevraagd :
1. ω voor L=R/2 en voor L=R
2. L waarvoor T= 2π/ω minimaal wordt.

Oplossing:

1. $I = I_c + mL^2$ met $I_c = ½mR^2$ en $\omega = \sqrt{mgL/I}$

➔ L=R/2 : $I = 3mR^2/4$

$$\omega = \sqrt{mg(R/2)/(3mR^2/4)} = \sqrt{\frac{2g}{3R}}$$

Vgl met enkelvoudige slinger met L = 3/2 R

➔ L= R : $I = 3mR^2/2$

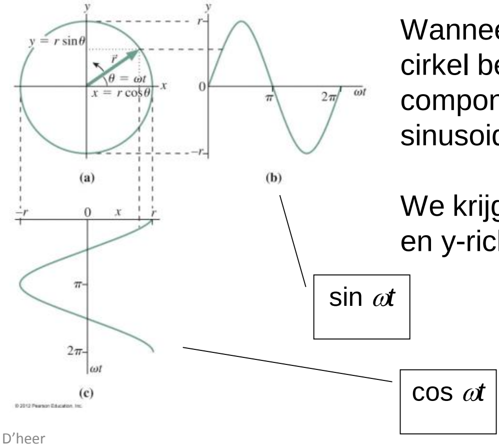
$$\omega = \sqrt{mgR/(3mR^2/2)} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} = \sqrt{\frac{g}{\frac{3}{2}R}}$$

2. $$I = I_c + mL^2 = \frac{mR^2}{2} + mL^2 \quad en \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g} + \frac{R^2}{2gL}}$$

Afgeleide van T naar L gelijkstellen aan 0 en uitwerken => $L_{min} = R/\sqrt{2} = 0.707R$

13.4 EHB en Cirkelvormige Beweging

- Een EHB kan men beschouwen als een component van een <u>éénparig cirkelvormige beweging</u>.
  - Hoekfrequentie ω bij de EHB is hetzelfde als hoeksnelheid ω bij de cirkelbeweging.



Wanneer de plaatsvector $\vec{r}$ een cirkel beschrijft, zijn de *x*– en *y*–componenten van deze vector sinusoidale functies van de tijd.

We krijgen twee trillingen, in de x- en y-richting die $\pi/2$ uit fase zijn.

© Johan D'heer

13.4 EHB en Cirkelvormige Beweging

- De trilling $x = \cos(\omega t + \phi)$ is dus de projectie op de x-as van een roterende plaatsvector $\vec{r}$.
- De trilling $y = \sin(\omega t + \phi)$ is dus de projectie op de y-as van een roterende plaatsvector $\vec{r}$.

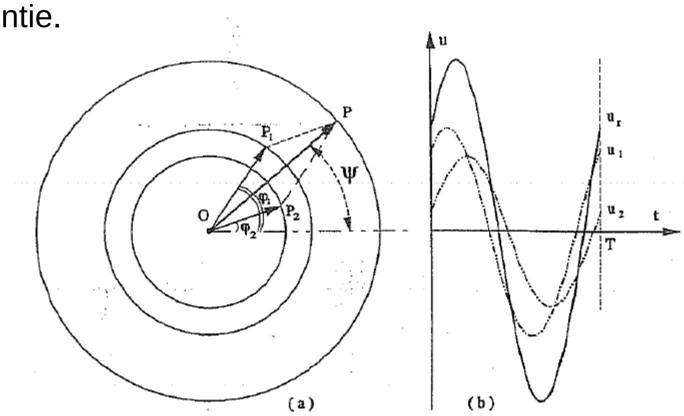
- Oefening:
  Toon aan dat de projecties van de snelheidsvector $\vec{v}$ en de versnellingsvector $\vec{a}$ op de x- of de y-as de snelheid en de versnelling van de EHB geven.
- (Oplossing : teken de vectoren v = ωr en a = ω²r bij de cirkelbeweging en projecteer op x en y as)

- En omgekeerd : de samenstelling van $x = \cos(\omega t + \phi)$ en $y = \sin(\omega t + \phi)$ resulteert in een cirkelbeweging.
  (zie ook samenstellen loodrechte trillingen)

© Johan D'heer

Samenstellen van trillingen in zelfde richting

- **Zelfde frequenties f_1 en f_2.**
- Iedere trilling wordt voorgesteld door vector (= fasor) die roteert met constante hoeksnelheid ω .
- Optellen van vectoren geeft vector $\vec{A}$ die roteert met zelfde constante hoeksnelheid ω: nieuwe trilling met zelfde frequentie.



© Johan D'heer

Samenstellen van trillingen in zelfde richting

- Bereken de samenstelling van volgende trillingen:

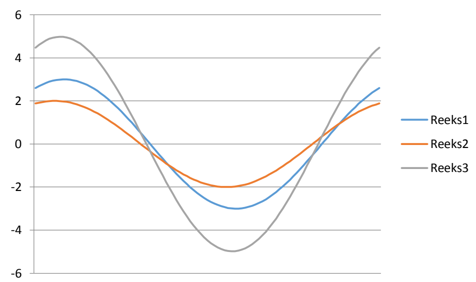
$$x_1 = 3\cos(360° \cdot 10t - 30°)$$

$$x_2 = 2\cos(360° \cdot 10t - 20°)$$

Optellen van fasoren : A_x = 3 cos (30°) + 2 cos (20°) = 4,477
A_y = -3 sin (30°) - 2 sin(20°) = -2,184

$A^2 = A_x^2 + A_y^2 = 24,82$
$\Rightarrow$ A = 4,982

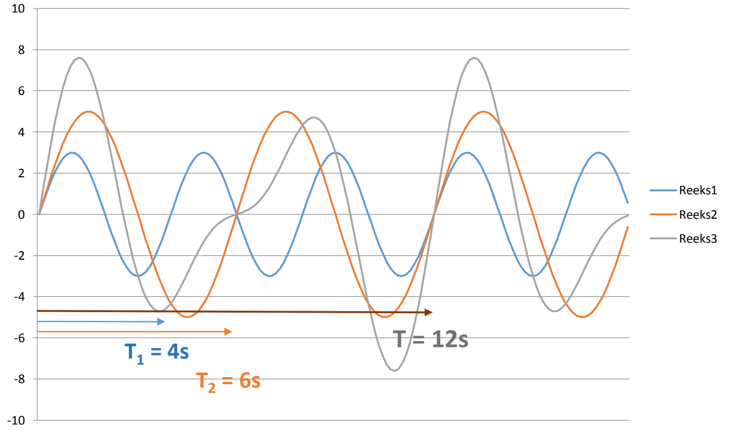
tg $\theta = A_y / A_x$ = -0,4878
=> θ = -26,00°



© Johan D'heer

Samenstellen van trillingen in zelfde richting

- **Verschillende frequenties f_1 en f_2.**
- Iedere trilling wordt voorgesteld door vector (= fasor) die roteert met constante ω_1, resp. ω_2.
  Optellen van vectoren geeft vektor $\vec{A}$ die continu verandert van lengte en van hoeksnelheid : geen EHB, maar wel een periodieke beweging.
  T = kleinste gemeen veelvoud (T_1,T_2)

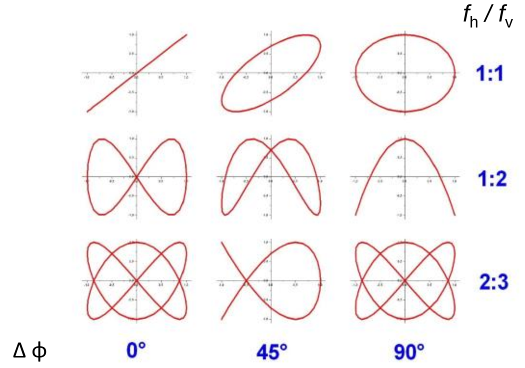


©

Samenstellen van ⊥ trillingen

- Twee loodrecht op elkaar staande trillingen geven in *veel* gevallen, nl. als frequenties zich verhouden als gehele getallen $f_1/f_2 = n_1/n_2$, aanleiding tot een gesloten figuur: **figuur van Lissajous**.

$$\frac{\omega_h}{\omega_v} = \frac{\text{snijpunten verticale lijn}}{\text{snijpunten horizontale lijn}}$$

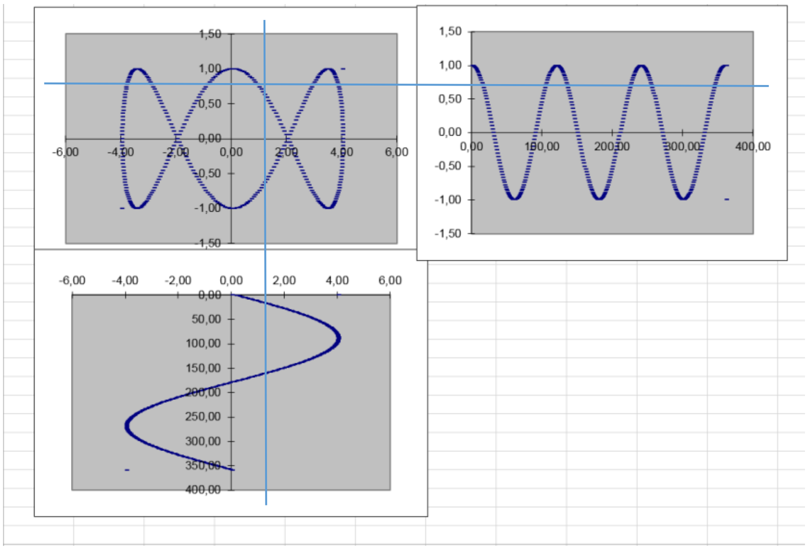


- Al deze figuren bevinden zich in de rechthoek met zijden 2×amplitude horizontale en 2×amplitude verticale trilling en worden periodiek doorlopen.

© Johan D'heer

Samenstellen van ⊥ trillingen

$$\frac{\omega_h}{\omega_v} = \frac{\text{snijpunten verticale lijn}}{\text{snijpunten horizontale lijn}}$$



Samenstellen van ⊥ trillingen

- Toon aan dat de samenstelling van de volgende loodrecht op elkaar staande trillingen leiden tot volgende lissajousfiguren:

- $x = A\cos\omega t \quad y = B\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ellips (A≠B) of cirkel (A=B)
- $x = A\cos\omega t \quad y = B\cos(\omega t + \pi)$ rechte
- $x = A\cos\omega t \quad y = B\cos\omega t$ rechte
- $x = A\sin\omega t \quad y = B\sin 2\omega t$ "vlinder" (dé lissajousfiguur)

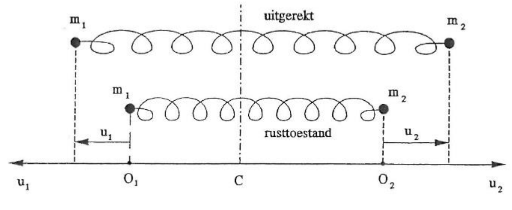
Oplossing :
(1) Bereken *(x/A)² + (y/B)² = …*
(2,3) Bereken *x/y = …*

(4) Bewijs dat $y = \pm(2B/A^2)\, x\sqrt{(A^2 - x^2)}$ (maak daarbij gebruik van *sin(2p) = 2sin(p) cos(p)* en *sin²p + cos²p = 1)* en doe aan functieonderzoek *(y=0?; dy/dx=0?)*

De bovenstaande vergelijkingen noemt men "parametervergelijkingen" van ellips, cirkel, rechte … met parameter t

Trilling van twee massa's

- Twee massa's m_1 en m_2 verbonden door een veer. Dit is bvb. een modelvoorstelling van een H_2, CO molecule.



- De kracht die de veer uitoefent op zowel m_1 als m_2 is: $F = -ku$ met $u = u_1 + u_2$

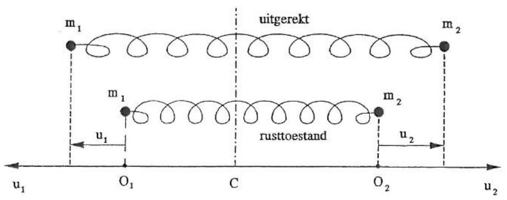
  Daar het massamiddelpunt C niet beweegt géén uitwendige krachten) is tevens : $m_1 u_1 = m_2 u_2$ zodat $u = u_1 (1 + m_1 / m_2) = u_1 ((m_1 + m_2)/ m_2)$ waaruit volgt

$$m_1 \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -ku = -ku_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -ku_1 \Rightarrow \mu \frac{d^2 u_1}{dt^2} = -ku_1$$

$$met\ \mu\ de\ "gereduceerde\ massa" \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ of\ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Trilling van twee massa's

- Twee massa's m_1 en m_2 verbonden door een veer.
  Dit is bvb. een modelvoorstelling van een H2, CO molecule.



- De bewegingsvergelijking voor m_1 ,resp m_2 wordt dus

$$\mu \frac{d^2 u_{1,2}}{dt^2} = -k u_{1,2} \quad met \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

- Elke massa zal bijgevolg een EHB uitvoeren met:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad of \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

μ = gereduceerde massa

13.5 Energie bij de EHB

- Bij afwezigheid van niet-conservatieve krachten is de energie van een enkelvoudige harmonische oscillator constant.

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t)$$

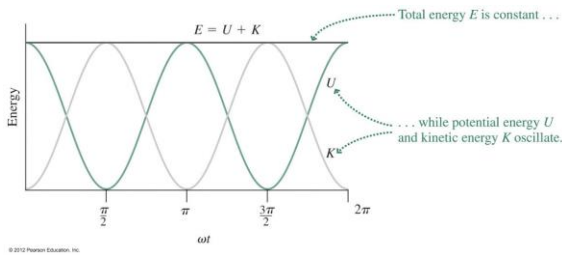
$$\Leftarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \quad en \quad \sin^2 + \cos^2 = 1$$

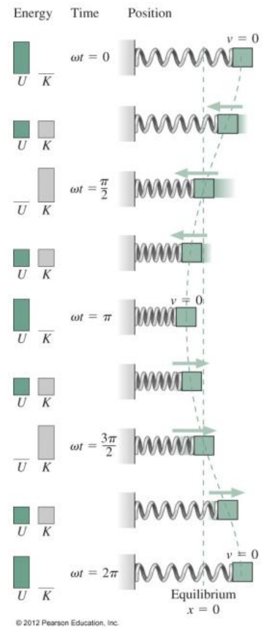
$$\boxed{E_{mech.} = K + U = \frac{1}{2} k A^2}$$

© Johan D'heer

13.5 Energie bij de EHB

Er is voortdurend omzetting van kinetische in potentiële energie en omgekeerd.





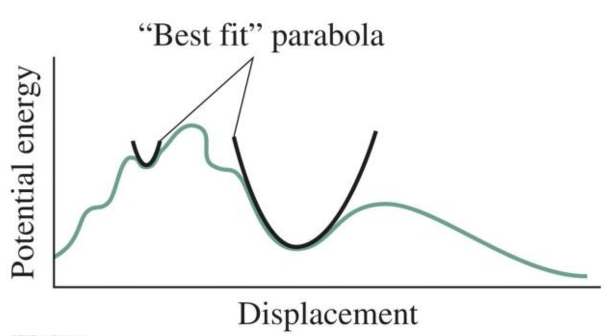
© Johan D'heer

13.5 Een EHB komt veel voor!

- De meeste systemen hebben in de buurt van een stabiel evenwicht een potentiële energie curve die ongeveer parabolisch is:

$$U \approx ax^2 \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx} = -2ax$$

  - terugroepende kracht evenredig met uitwijking, dus EHB.
  - Typische potentiële energie curve van een systeem:



© Johan D'heer

13.6 Gedempte Harmonische Beweging

- In aanwezigheid van niet-conservatieve krachten (vb. wrijving) zal de EHB geleidelijk uitsterven.
- Onderstel dat de dempingskracht evenredig is met de snelheid van de trillende massa: $F_d = - b\, v$ (b = dempingscte)

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \quad (1)$$

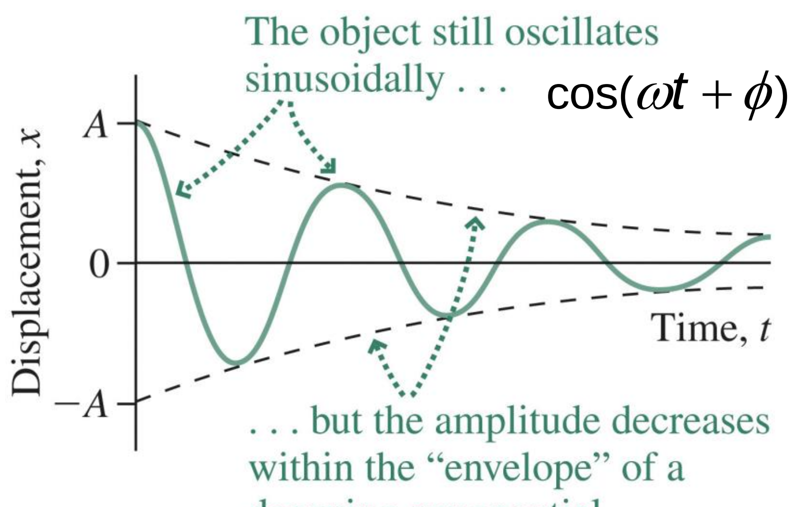
  - Zolang de terugroepende kracht domineert over de dempings-kracht krijgen we een oscillerende beweging met een amplitude die exponentiëel afneemt:

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega t + \phi) \qquad (2)$$

  - Zwakke demping (*b klein)* geeft uitstervende oscillaties met hoekfrequentie $\omega \approx$ ongedempte hoekfrequentie $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
  - Bij sterkere demping is $\omega < \omega_0$.

29

13.6 Gedempte Harmonische Beweging



$$\cos(\omega t + \phi)$$

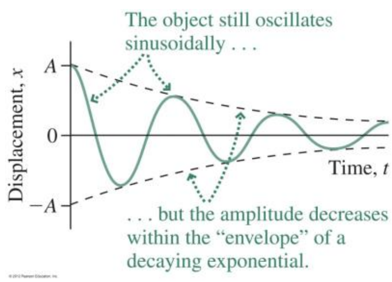
© 2012 Pearson Education, Inc.

$$A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$$

© Johan D'heer

30

13.6 Gedempte Harmonische Beweging



$$A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$$

b/2m is een maat voor de snelheid waarmee de amplitude afneemt.

T_L = 2m/b noemt men de "gemiddelde levensduur" van de trillingen : de amplitude neemt af met een factor e gedurende die tijd

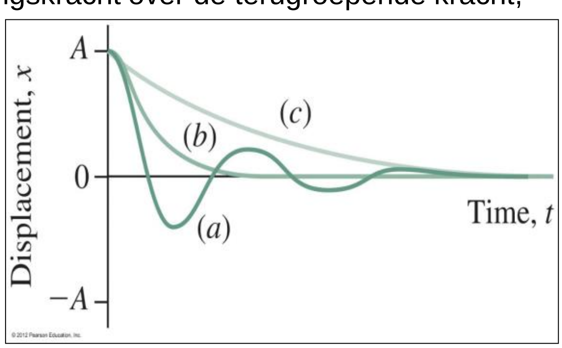
$$\cos(\omega t + \phi) \quad \text{met} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2}$$

Bijgevolg enkel oscillaties als b/2m < ω_0 of b < 2mω_0 of b^2<4km

Een en ander kan desgewenst worden aangetoond door de voorgestelde oplossing (2) in te vullen in de bewegingsvergelijking (1)

13.6 Gedempte Harmonische Beweging

– Zolang de terugroepende kracht domineert over de dempings-kracht spreken we over een ondergedempte trilling (zie (a)). **(b < 2mω_0)**
– Wordt het effect van de dempingskracht even groot als dit van de terugroepende kracht, dan hebben we kritische demping. Het systeem gaat vrij snel naar de evenwichtstoestand, zonder oscillaties (zie (b)). **(b = 2mω_0)**
– Domineert de dempingskracht over de terugroepende kracht, dan spreekt men van overdemping. Het systeem gaat heel langzaam naar de evenwichtstoestand zonder oscillaties (zie (c)). **(b > 2mω_0)**



© Johan D'heer

13.6 Gedempte Harmonische Beweging

- Energie van een zwak gedempt trillend systeem bedraagt

$$E(t) = E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \quad \text{met} \quad E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 \quad \Leftarrow E(t) \sim A(t)^2$$

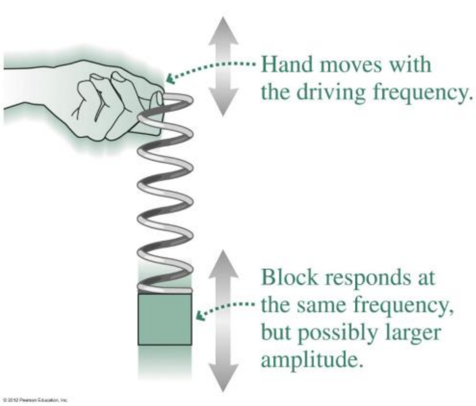
- Energie neemt dus exponentieel af.
- De energieverandering per tijdseenheid is de arbeid die de dempingskracht per tijdseenheid levert, ofwel het vermogen van de dempingskracht $\vec{F_d}$: (cfr $P = \vec{F}.\vec{v}$)

$$P_R = \frac{dE(t)}{dt} = -|F_d v| = -bv^2 \quad \text{(gezien } F_d = -bv\text{)}$$

- Deze energieverandering is negatief (energieverlies) daar de wrijvingskracht steeds de tegengestelde zin heeft van de snelheid.

13.7 Gedwongen Trillingen

- Waneer een externe periodieke kracht werkt op een trillend systeem, ondergaat het systeem een **gedwongen trilling**.
- Vb.: periodiek aangedreven veer
- Na enige tijd zal de massa op en neer gaan met dezelfde frequentie als de externe periodieke kracht, in dit geval de frequentie waarmee de hand op en neer gaat.
- Andere vbn.: vioolsnaar, orgelpijp.



13.7 Gedwongen Trillingen

- Onderstel aandrijvende kracht $F_0 \cos \omega_d t$, met ω_d de aandrijvende hoekfrequentie, dan is volgens 2de wet van Newton:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} \quad \rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega_d t \qquad (1)$$

- De oplossing is

$$x(t) = A\cos(\omega_d t - \delta) \qquad (2)$$

met

$$A = A(\omega_d) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_d^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega_d^2 / m^2}} \qquad (3)$$

Opm.: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ noemt men de **natuurlijke frequentie** van het systeem of ook de eigenfrequentie.

© Johan D'heer

13.7 Gedwongen Trillingen

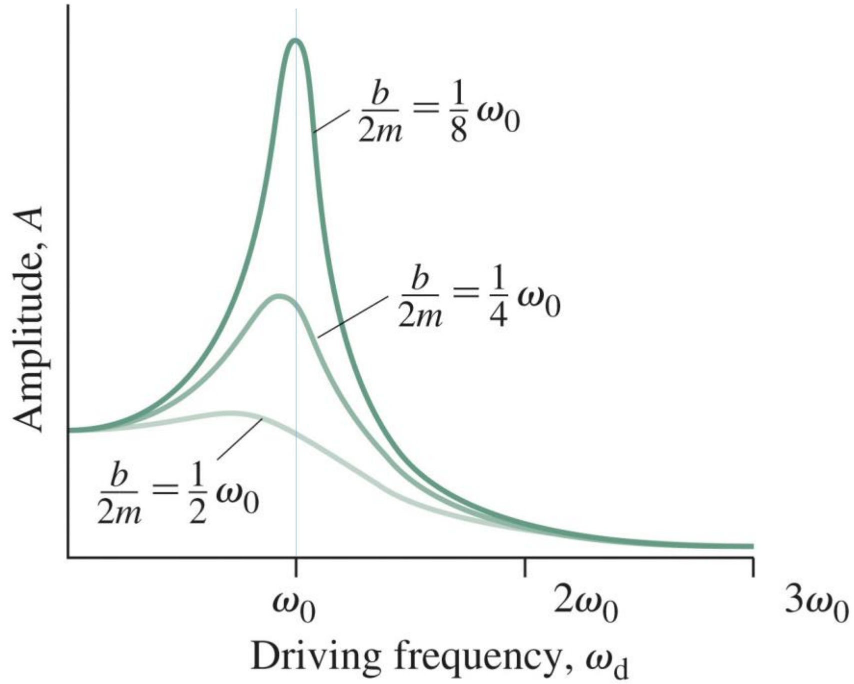
- De hoek δ geeft de fazeverschuiving aan van de trilling t.o.v. de aandrijvende kracht. (de trilling "loopt achter")

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{b\omega_d}{m(\omega_0^2 - \omega_d^2)} \qquad (4)$$

- Merk op dat zowel A als δ afhankelijk zijn van ω_d en de dempingsfactor *b*.
  Dit heeft tot gevolg dat, bij een bepaalde waarde van b, voor een zekere frequentie ω_d, de amplitude van de trilling maximaal zal zijn (resonantie).

- Als de demping (b) klein is zie je in vgl (3) dat de tweede term in de noemer verwaarloosbaar wordt en resonantie (noemer ≈ 0) zal optreden bij $\omega_d \approx \omega_0$
  (resonantiefrequentie ≈ eigenfrequentie)

© Johan D'heer

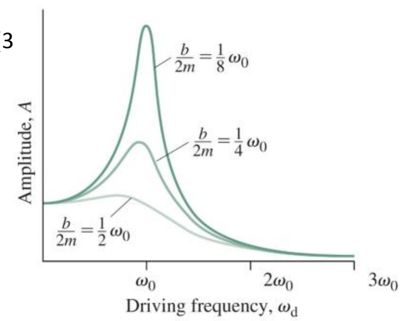


© Joha © 2012 Pearson Education, Inc.

13.7 Gedwongen Trillingen

$$A(\omega_d) = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_d^2 - \omega_0^2)^2 + b^2\omega_d^2 / m^2}} \quad (3$$

$$\text{tg}\,\delta = \frac{b\omega_d}{m(\omega_0^2 - \omega_d^2)} \quad (4)$$



- Opm. : Vergelijkingen (3) en (4) kunnen desgewenst worden aangetoond door de voorgestelde oplossing (2) in te vullen in de bewegingsvergelijking (1)

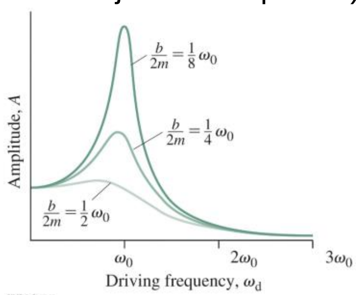
$$\omega_d \to 0, \quad tg\delta \to +0, \quad \delta \to 0 \qquad A \to \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\omega_d \to \infty, \quad tg\delta \to -0, \quad \delta \to \pi \qquad A \to 0$$

$$\omega_d \to \omega_0, \quad tg\delta \to \infty, \quad \delta \to \frac{\pi}{2} \qquad A \to \frac{F_0}{b\omega_0}$$

13.7 Resonantie

- Wanneer een systeem wordt aangedreven door een externe kracht met frequentie ≈ natuurlijke frequentie van het systeem, trilt het systeem met grote amplitude.
  - Dit fenomeen noemt men **resonantie.**
  - De amplitude van het systeem neemt toe als de demping verkleint.
  - De breedte van de resonantiecurve (amplitude versus aandrijvende frequentie) verkleint met kleinere demping.



Resonantiecurven voor verschillende dempingssterkten.

Opmerking : Bij resonantie is

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{2m^2}} \quad en \quad A_r \approx \frac{F_0}{b\omega_0}$$

© Johan D'heer

© 2012 Pearson Education, Inc.

De kwaliteitsfactor Q

– We bekijken dit voor zeer **geringe demping** : **b <<2mω_0**

– Dan is **bij resonantie $\omega_d \approx \omega_0$**

– Uit vgl (3) volgt dan de amplitude bij resonantie : $A_r = F_0/(b\ \omega_0)$

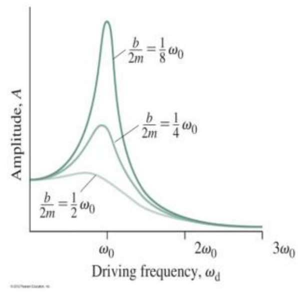
– **De kwaliteitsfactor Q is een maat voor de verhouding van de totale energie van de oscillator t.o.v. de gemiddelde door demping gedissipeerde energie** en wordt gedefinieerd als : $Q = \omega_0 \dfrac{E_{tot}}{\overline{P}}$

Gezien energie en vermogen evenredig zijn met A² definiëren we de breedte van de resonantiepiek op halve hoogte als

$\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)$ *alwaar* $A^2(\omega_1) = A^2(\omega_2) = ½\, A^2_r$

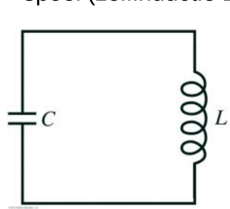
Men kan aantonen dat :

$$Q = \omega_0 \frac{E_{tot}}{\overline{P}} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

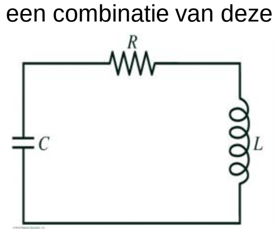


Resonantie bij Elektrische Trillingsketens

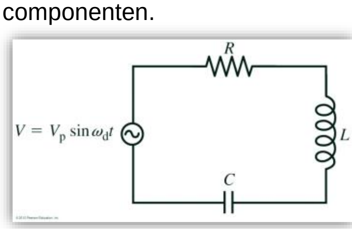
- Beschouw een elektrische keten met weerstand R, condenstator (capaciteit C), spoel (zelfinductie L) of een combinatie van deze componenten.



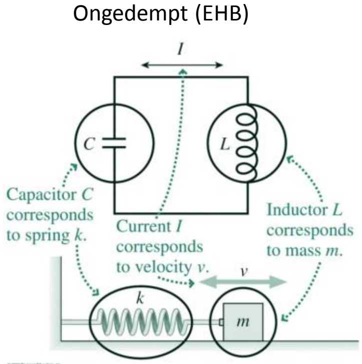
Ongedempt (EHB)



Gedempt



Gedwongen



Resonantie bij Elektrische Trillingsketens

- Stel $\boldsymbol{I = I_0 \cos(\omega t)}$ zodat uit $I = dq/dt$ volgt

  $q = (I_0/\omega) \sin(\omega t) = (I_0/\omega) \cos(\omega t - 90°)$

  en ook $dI/dt = -I_0\, \omega \sin(\omega t) = (I_0\, \omega) \cos(\omega t + 90°)$

- Bij een:
  - Weerstand: spanning en stroom in fase.
    $\boldsymbol{U_R = RI} = R\, I_0 \cos(\omega t)$ en ook $\boldsymbol{U_R = R(dq/dt)}$
  - Condensator: spanning loopt $\pi/2$ achter op stroom
    $\boldsymbol{U_c = q/C} = (I_0/\omega C) \cos(\omega t - 90°)$
  - Ideale spoel: spanning loopt $\pi/2$ voor op stroom
    $\boldsymbol{U_L = L\,(dI/dt)} = (I_0\, \omega L) \cos(\omega t + 90°)$

    en ook $\boldsymbol{U_L = L\,(d^2q/dt^2)}$

© Johan D'heer

Resonantie bij Elektrische Trillingsketens

- Weerstand: $\boldsymbol{U_R = RI = R(dq/dt)} = R\, I_0 \cos(\omega t)$ (U_R in fase met I)
- Condensator: $\boldsymbol{U_c = q/C} = (I_0/\omega C) \cos(\omega t - 90°)$ (U_C loopt 90°achter tov I)
- Ideale spoel: $\boldsymbol{U_L = L\,(dI/dt) = L\,(d^2q/dt^2)} = (I_0\, \omega L) \cos(\omega t + 90°)$
  (U_L loopt 90° voor tov I)
- Bij een gesloten kring is de som van de spanningen gelijk aan nul :

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

- Vergelijk dit met bewegingsvergelijking (1) uit § 13.6

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

- en je ziet dat in alle afgeleide formules volgende substituties mogelijk zijn :

x	*v*	*m*	*b*	*k*	*: mechanisch*
q	*I*	*L*	*R*	*1/C*	*: elektrisch*

Resonantie bij Elektrische Trillingsketens

x	*v*	*m*	*b*	*k*	*: mechanisch*
q	*I*	*L*	*R*	*1/C*	*: elektrisch*

- *Voorbeelden :*

$\omega_0 = \sqrt{k/m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

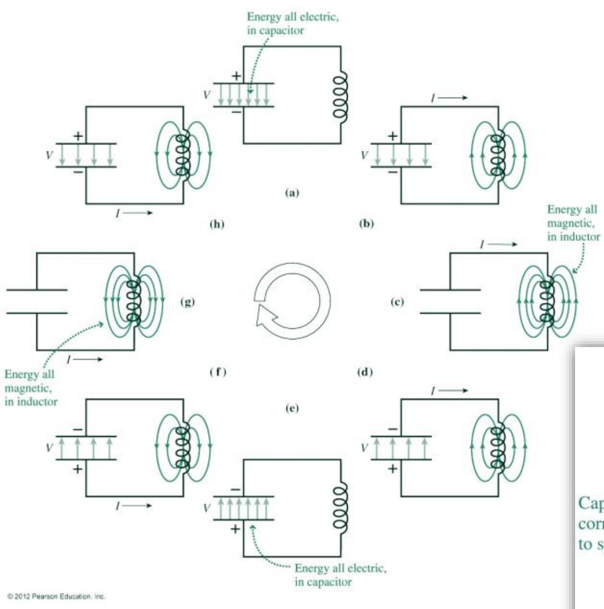
$T_L = 2m/b \Rightarrow T_L = 2L/R$

$|P_R| = bv^2 \Rightarrow |P_R| = R\,I^2$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\sqrt{k\,m}}{b} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_{gedempte} = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2} \Rightarrow \omega_{gedempte} = \sqrt{1/LC - (R/2L)^2}$$

48

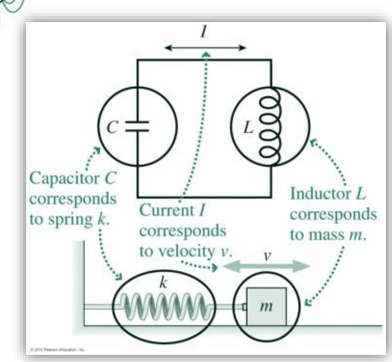


Ongedempt :

$E = ½\,kA^2 = ½\,mv^2 + ½\,kx^2$

$\Rightarrow$

$$E = \frac{q_0^2}{2C} = ½\,LI^2 + ½\,\frac{q^2}{C}$$



Elektrische Eenheden

Spanning [U] : Volt : V
Lading [q] : Coulomb : C
Capaciteit [C] : Farad : F
Stroomsterkte [I] : Ampère : A = C/s
Weerstand [R] : Ohm : Ω
Zelfinductie [L] : Henry : H

Het verband hiertussen kan je afleiden uit :

$$[U]=\left[\frac{q}{C}\right]\underset{(1)}{=}[RI]\underset{(2)}{=}\left[L\frac{dI}{dt}\right]$$

Spanning over een condensator C
Spanning over een weerstand R
Spanning over een inductiespoel L

Uit (1) volgt : $\frac{C}{F}=\Omega A=\Omega C/s \quad => \quad F=\frac{s}{\Omega}$

Uit (2) volgt : $\Omega A=H\frac{A}{s} \quad => \quad H=\Omega s$

Verband met de eenheden uit de mechanica :
Arbeid = lading x spanning ➔ Joule = Coulomb x Volt

$$[W]=[Q][U] => J=CV=kg.m^2/s^2$$

50

Vraagstukken

In een U-vormige "barometerbuis" met een diameter van 1,4cm giet men 2kg kwik. Wat is de lengte L van die kwikkolom?
Met welke periode zal die vloeistofkolom over en weer oscilleren?
Bewijs eerst algemeen dat de terugroepende kracht kan geschreven worden als
F = -(2Sρg)x met *ρ* de dichtheid van de vloeistof, en dat bijgevolg

$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}}$ met *L*= de totale lengte van de vloeistofkolom

Oplossing : Bekijk welk deel van de vloeistofkolom voor de terugroepende kracht zorgt en maak gebruik van :

$$\text{Terugroepende kracht F} = -\text{mg} = \ldots$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=\ldots$$

$$S=\pi r^2 \quad \text{en} \quad M=\rho(SL)$$

$$\rho_{Hg}=13.6g/cm^3$$

Antw : T= 1,39 s

© Johan D'heer

56

Vraagstukken

De ophanging van een wagen heeft een eigenfrequentie f_0= 0,45Hz.
De (versleten) schokdempers geven geen kritische demping meer.
Je rijdt op een betonweg met om de 40m een “ribbel” die de wagen aan het trillen brengt.

a. Bij welke snelheid zal de wagen heftig beginnen trillen?

Als je daarna op een perfect vlak wegdek komt is de trillingsamplitude na 12s teruggevallen tot 1/8.

b. Na hoeveel seconde is de amplitude nog slechts 1/32

c. Als de totale belasting van de veren 1000kg is, wat is dan de dempingsconstante b?

d. Voor welke waarde van b treedt kritische demping op?

a. Resonantie : bij één stoot per periode
b. Exponentiële daling (½ ¼ …)
c. Bekijk $e^{\frac{-b}{2m}t} = 1/8 => \frac{b}{2m} t = \ln(8)$
d. b=2m ω_0

Antw :

a. Resonantie : v= 65 km/hr
b. Exponentiële daling : t= 20s
c. b = 347 kg/s
d. b = 5650 kg/s

Vraagstukken

Op t=0 wordt een spoel van L = 40 mH in serie geschakeld met een weerstand van R = 3,0 Ω (resp. 30 Ω)en een opgeladen condensator met C = 4,8 µF.

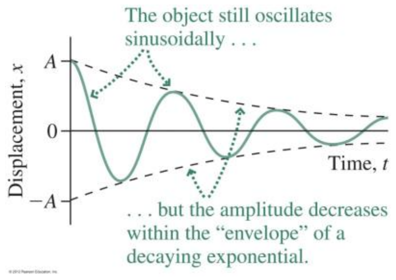
a. Toon aan dat dergelijke schakeling zal oscilleren
b. Bepaal de frequentie en de periode en vgl met de eigenfrequentie
c. Na hoeveel tijd zal de amplitude van de lading gehalveerd zijn, en vgl met de periode
d. Bereken de Q-factor van deze schakeling
e. Vanaf welke waarde van R zal dergelijke schakeling niet meer oscilleren?

Antwoorden :

a. $R^2<4L/C$?
b. T = 2,75 ms (resp 2,79 ms) {T_0 = 2,75 ms; ω_0 = 2,23 10^3 s^{-1}}
c. t = 18 ms (resp 1,8 ms) {T_L = 2L/R = 27ms (resp 2,7 ms) (dalen met factor e=2.72)
d. Q = 30,4 (resp 3,04)
e. R>= 180 Ω { $R^2 > 4L/C$ }

© Ginacoli 30.8

13.6 Gedempte Harmonische Beweging



$$A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$$

$\Rightarrow$

$$q_m(t) = q_{m,0} e^{-Rt/2L}$$

$$\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (b/2m)^2} \quad en \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - (R/2L)^2}$$

Bijgevolg enkel oscillaties als b/2m < ω_0 of b < 2mω_0 of b^2<4km $\Rightarrow$ R^2 <4L/C

x	*v*	*m*	*b*	*k:*	q_m	*: mechanisch*
q	*I*	*L*	*R*	*1/C*	*A*	*: elektrisch*

© Johan D'heer

Resonantie bij Elektrische Trillingsketens

•

x	*v*	*m*	*b*	*k*	*: mechanisch*
q	*I*	*L*	*R*	*1/C*	*: elektrisch*

- *Voorbeelden :*

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

T_L=2m/b $\Rightarrow$ T_L = 2L / R

$|P_R|=bv^2$ $\Rightarrow$ $|P_R|= R\, I^2$

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{m\omega_0}{b} = \frac{\sqrt{k\,m}}{b} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

© Johan D'heer