Hoofdstuk 7

Essential University Physics
Richard Wolfson
2nd Edition

Behoud van Energie

Conservation of Energy

FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

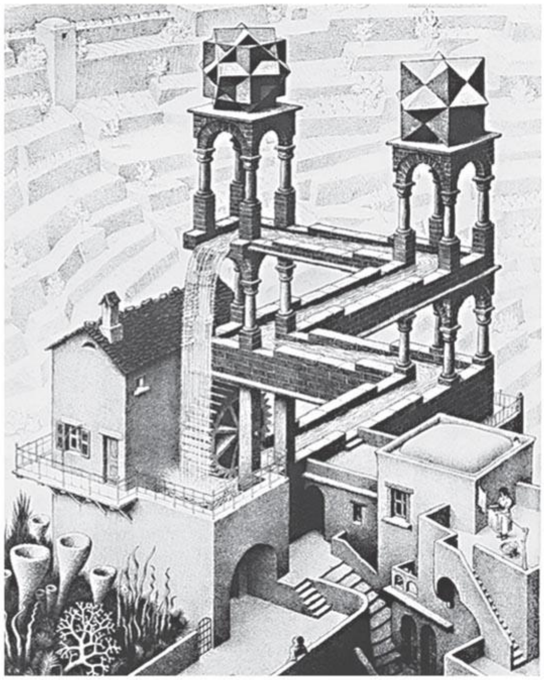
Hoofdstuk 7

Essential University Physics
Richard Wolfson
2nd Edition

Behoud van Energie

Conservation of Energy

UNIVERSITEIT GENT



Wat is er nu precies verkeerd met deze tekening van Escher?

7.1 Conservatieve en Niet-Conservatieve Krachten

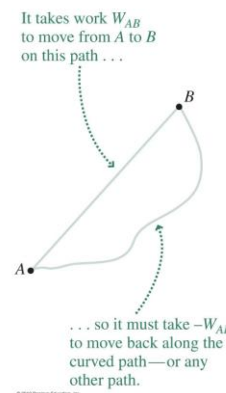
- Arbeid geleverd tegen de zwaartekracht in kan je terugkrijgen onder vorm van kinetische energie.
- Arbeid geleverd tegen de wrijvingskracht in krijg je nooit terug.

(a)

(b)

Conservatieve en Niet-Conservatieve Krachten

- Een **conservatieve kracht** slaat de arbeid op die tegen de kracht in wordt geleverd, en kan deze “teruggeven” als kinetische energie.
- Voor een conservatieve kracht is de arbeid geleverd tussen A en B onafhankelijk van de gevolgde weg tussen A en B.
- Hieruit volgt dat de arbeid van een conservatieve kracht langs een gesloten pad nul is:



$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Conservatieve en Niet-Conservatieve Krachten

- Een **niet-conservatieve kracht** slaat geen arbeid op die tegen de kracht in wordt gedaan, de arbeid van dergelijke kracht kan afhangen van de gevolgde weg, en de arbeid voor een gesloten pad is niet nul.

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

Conservatieve krachten:
- Zwaartekracht.
- Veerkracht ideale veer.
- Coulombkracht.

Niet-conservatieve krachten:
- Wrijvingskrachten.
- Trekkracht in touw.
- Luchtweerstand.

7.2 Potentiële Energie

- De "opgeslagen arbeid" geassocieerd met een conservatieve kracht noemt men **potentiële energie**.
  - Potentiële energie is opgeslagen energie die kan vrijkomen als kinetische energie.
- De verandering in potentiële energie tussen A en B wordt gedefinieerd als ***min*** de arbeid die de conservatieve kracht levert voor een willekeurig pad tussen A en B:

$$\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Merk op: enkel bij conservatieve krachten kan je spreken over potentiële energie. (arbeid onafhankelijk van de gevolgde weg)

7.2 Potentiële Energie

$$\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

In een lineair systeem (kracht en verplaatsing evenwijdig, eventueel tegengesteld van zin) :

$$\Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$$

En als F(x) = constant dan

$$\Delta U = -F\,(x_2 - x_1)$$

Potentiële Energie

- De potentiële energie verandering is onafhankelijk van de gevolgde weg vermits we werken met conservatieve krachten.
- Enkel ***veranderingen*** in potentiële energie zijn van tel en zijn ondubbelzinnig te berekenen.
- De plaats of toestand met potentiële energie = 0 kan men dus zelf kiezen (referentiepunt).
- De potentiële energie op een bepaalde plaats of in een bepaalde toestand wordt dan (met U_A=U_{ref}=0):

$$U_B = U_A - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{ref}^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Conceptvraag

Kan een voorwerp negatieve potentiële energie hebben?

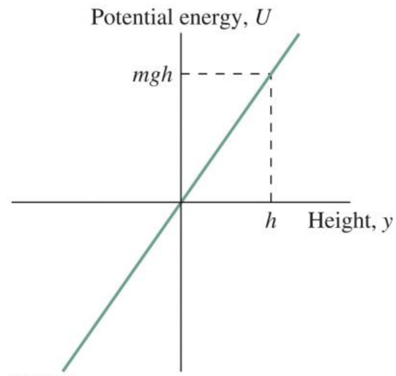
- A) Ja, zolang de kinetische energie positief is.
- B) Ja, zolang de totale energie positief is.
- C) Ja, vermits de keuze van het nulpunt van de potentiële energie willekeurig is.
- D) Nee, want de kinetische energie van een voorwerp moet gelijk zijn aan de potentiële energie van het voorwerp.
- E) Nee, want dit zou geen fysische betekenis hebben.

Twee Voorbeelden van Potentiële Energie

- **Gravitationele potentiële energie** slaat de arbeid op die tegen de zwaartekracht in wordt geleverd:

$\Delta U = -F\,(x_2 - x_1)$ => $\boxed{\Delta U = mg\,\Delta y}$

- Gravitationele potentiële energie neemt lineair toe met de hoogte *y.*
- Dit volgt uit het *constant* zijn van de zwaartekracht nabij het aardoppervlak.



Twee Voorbeelden van Potentiële Energie

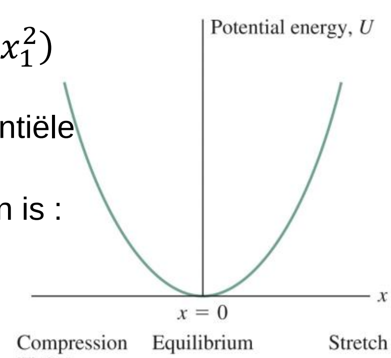
- **Elastische potentiële energie** slaat de arbeid op die wordt geleverd bij het uitrekken of samendrukken van veren (of veer-achtige systemen):

$$uit\ \Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad met\ F(x) = -kx : \quad volgt$$

$$\Delta U = k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = \frac{1}{2}k\,(x_2^2 - x_1^2)$$

Laat men het nulpunt van de potentiële energie samenvallen met de evenwichtspositie van de veer dan is :

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2$$

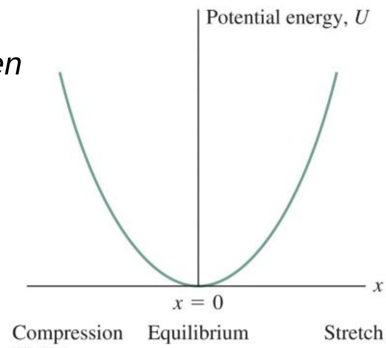


Twee Voorbeelden van Potentiële Energie

- **Elastische potentiële energie** slaat de arbeid op die wordt geleverd bij het uitrekken of samendrukken van veren (of veer-achtige systemen):

$$\boxed{U = \tfrac{1}{2}kx^2}$$

  - Elastische potentiële energiey neemt *kwadratisch* toe met de lengteverandering *x.*
  - Dit volgt uit het *lineair toenemen* van de veerkracht.
  - Het nulpunt van de potentiële energie valt samen met de evenwichtspositie van de veer.



7.3 Behoud van Mechanische Energie (1)

- Volgens de arbeid-energie stelling is de verandering van de kinetische energie van een voorwerp gelijk aan de netto-arbeid die geleverd wordt op het voorwerp:

$$\Delta K = W_{net}$$

- Als er enkel conservatieve krachten werken is de netto-arbeid gelijk aan min de verandering van de potentiële energie: $W_{\text{net}} = -\Delta U$
- Dan wordt de verandering in potentële energie gecompenseerd door een tegengestelde verandering in kinetische energie:

$$\Delta K + \Delta U = 0$$

ofwel

$$K + U = \text{constant} = K_0 + U_0$$

- Beide vergelijkingen zijn formuleringen van de wet van **behoud van mechanische energie** (= som kinetische en potentiële energie).

Behoud van Mechanische Energie (2)

- Werken er ook niet-conservatieve krachten, dan kan men de netto-arbeid schrijven als de som van de arbeid W_{con} door de conservatieve krachten en de arbeid $W_{n\text{-}con}$ door de niet-conservatieve krachten:

$$W_{net} = W_{con} + W_{n-con}$$

- Uit het voorgaande ($W_{con} = -\Delta U$) volgt dan:

$$\Delta K = W_{net} = -\Delta U + W_{n-con}$$

of

$$\Delta K + \Delta U = W_{n-con}$$

- Hieruit volgt dan de **meest algemene vorm van de arbeid-energie stelling:**

$$\boxed{K_2 + U_2 = K_1 + U_1 + W_{n-con}}$$

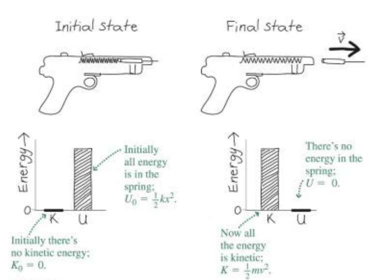
met $W_{n\text{-}con}$ de arbeid geleverd door de niet-conservatieve krachten bij overgang van toestand 1 naar toestand 2.

- (merk op : $W_{n\text{-}con}$ kan negatief zijn, bv bij wrijvingskrachten)

15

Voorbeelden

- Een veer-pistool
  - Snelheid van het pijltje?

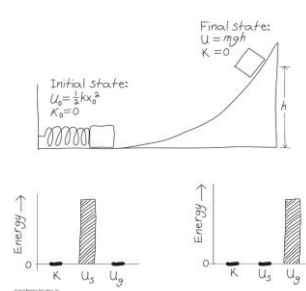


- $K + U = K_0 + U_0$ wordt

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

- Dus $v = \sqrt{k/m}\,x$
  met x de compressie van de veer.

- Een veer en zwaartekracht
  - Hoe hoog gaat het blokje?



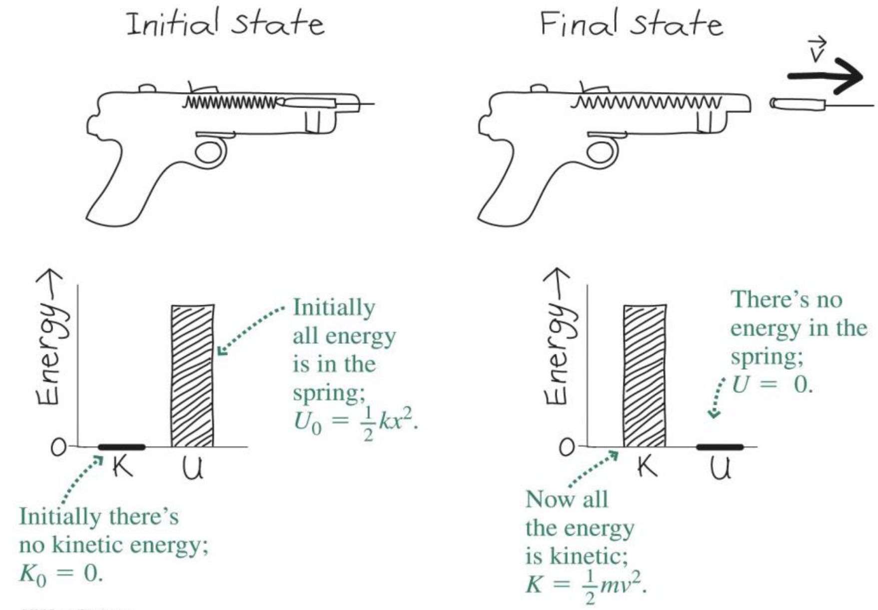
- $K + U = K_0 + U_0$ wordt

$$0 + mgh = 0 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

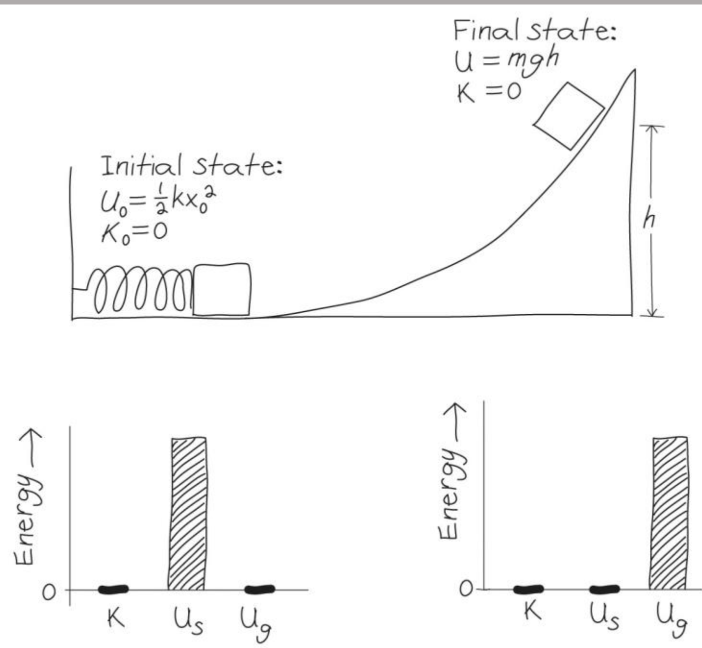
- Dus $h = \dfrac{kx^2}{2mg}$

 16

Voorbeelden

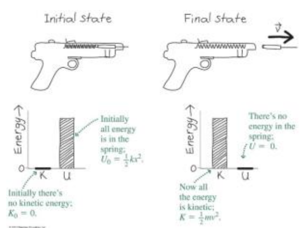


Voorbeelden

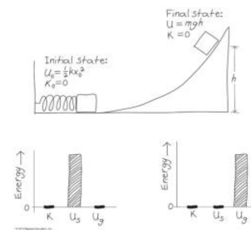


Voorbeelden

- Een veer pistool
  - Snelheid van het pijltje?



- Een veer en zwaartekracht
  - Hoe hoog gaat het blokje?



Indien je dergelijke problemen zou moeten oplossen met de wetten van Newton en de kinematica moet je weten hoe de kracht verandert als functie van de afstand, wat de vorm van de beschreven baan is, moet je integralen uitrekenen …
Aangezien we hier enkel naar de "eindtoestand" vragen is de energiebehoudswet een véél handiger oplossing.

Conceptvraag

Twee stenen, een met massa *m* en de ander met massa 2*m*, worden, vanaf de grond, op hetzelfde ogenblik vertikaal naar boven gegooid met dezelfde snelheid en ondervinden geen luchtweerstand. Welke bewering is juist?

- A) De zwaarste steen gaat tweemaal hoger dan de lichtste omdat hij tweemaal meer kinetische energie had.
- B) Beide stenen bereiken dezelfde hoogte omdat ze dezelfde kinetische energie hadden.
- C) Op hun hoogste punt hebben beide stenen dezelfde potentiële energie omdat ze dezelfde hoogte bereiken.
- D) De zwaarste steen heeft op zijn hoogste punt tweemaal meer potentiële energie dan de lichtste steen omdat hij tweemaal zwaarder is.

Conceptvraag

Een meisje gooit op verschillende manieren identieke stenen vanaf een brug. De snelheid waarmee de steen haar hand verlaat is telkens gelijk en de luchtweerstand is verwaarloosbaar.

Manier A: Steen recht naar omhoog werpen.

Manier B: Steen recht naar beneden werpen.

Manier C: Steen onder een hoek van 45° boven de horizontale werpen.

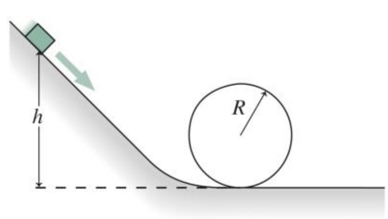
Manier D: Steen horizontaal werpen.

In welk geval zal de “speed” waarmee de steen het wateroppervlak onder de brug raakt het grootst zijn?

- A) Geval A
- B) Geval B
- C) Geval C
- D) Geval D
- E) De “speed” zal in alle gevallen gelijk zijn.

Vb.: roetsjbaan wagentje

Vanaf welke hoogte h moet het wagentje vertrekken om de volledige loop zonder problemen te kunnen doorlopen? (wrijvingsloos)



De nodige centripetale kracht bovenaan de cirkel moet minstens **mg** zijn

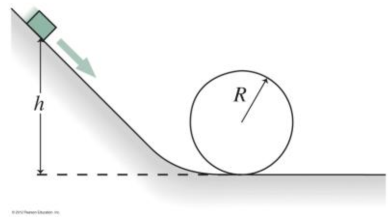
$\frac{mv^2}{R} = mg + F_n \geq mg \Rightarrow mv^2 \geq mgR$ (F_n = reactiekracht van opp.)

In het bovenste punt van de cirkel is (energiebehoud) : $\frac{1}{2}mv^2 = mgh - mg(2R)$

$$mv^2 = 2mgh - 4mgR \geq mgR \Rightarrow 2mgh \geq 5mgR \quad en\ \boldsymbol{h} \geq \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{R}$$

Vb.: roetsjbaan wagentje

Als h = 5/2 R (zie hierboven) wat is dan de normale reactiekracht (F_n)van het baanoppervlak op het wagentje in het onderste punt van de cirkelbaan?



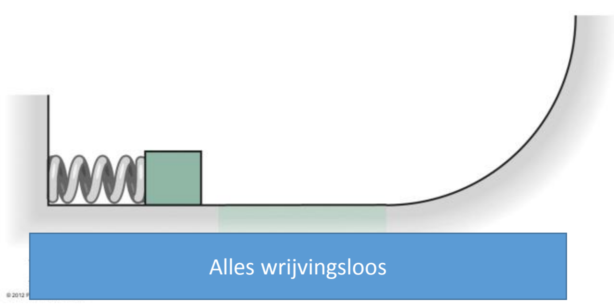
Onderaan de cirkel is $\frac{1}{2}mv^2 = mgh = \frac{5}{2}mgR \Rightarrow v^2 = 5gR$

De nodige centripetale kracht is : $mv^2/R = F_n - mg$ en dus $F_n = mg + mv^2/R$

Waaruit F_n = mg + 5mg = 6 mg : zwaartekracht x 6 : komt overeen met “**6 g**”

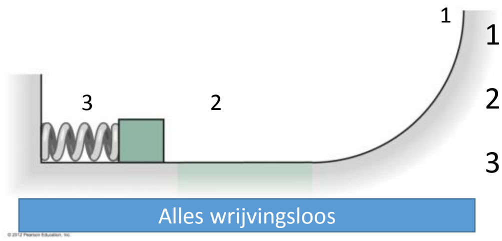
Opm : centripetale kracht = 5mg ➔ centripetale versnelling van “**5g**”

Vb.: roetsjbaan wagentje



Een wagentje met totale massa m = 200 kg vertrekt vanuit rust op hoogte h = 5m.
Waar bereikt het wagentje zijn maximale snelheid en hoeveel bedraagt die?
Neem g = 10 m/s²
Het wagentje wordt tot stilstand gebracht door een bumper (= een veer) met krachtsconstante k = 5000N/m
Hoever wordt die veer maximaal ingedrukt?
Waar ondervindt de wagen tijdens het afremmen de maximale versnelling (absolute waarde) en hoeveel bedraagt die dan?

Vb.: roetsjbaan wagentje



1. K=0; U_g=mgh; U_{veer} = 0
2. K= ½ mv² ; U_g=0; U_{veer} = 0
3. K = 0 ; U_g = 0 ; U_{veer} = ½ kx²

Maximale snelheid (in 2) : ½ mv² =mgh => v= $\sqrt{2gh} = \sqrt{2\ 10\ 5}\ (\frac{m}{s}) = 10\ m/s$

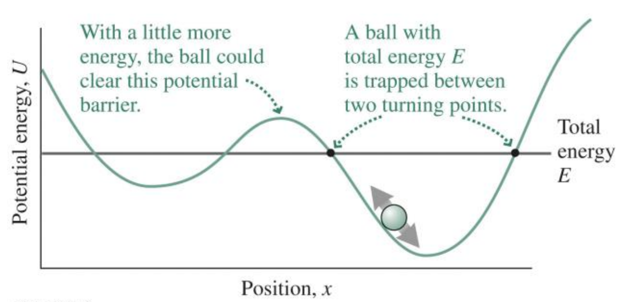
Indrukken veer : ½ kx² = mgh => x = $\sqrt{\frac{2mgh}{k}} = \sqrt{\frac{2\ 200\ 10\ 5}{5000}}$ [m]= 2m

Maximale versnelling : als de veer maximaal is ingedrukt (in punt 3) :

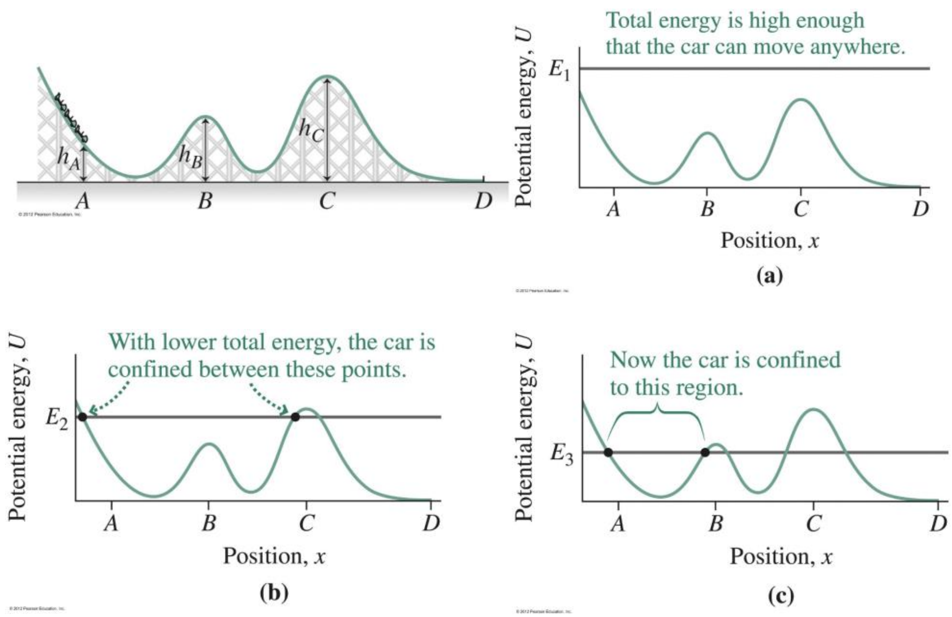
a = F/m = kx /m = 5000 2/200 [m/s²]= 50 m/s² = "**5g**"

7.4 Potentiële-Energie Grafieken

- Potentiële-energie grafieken geven de potentiële energie van een systeem als functie van de positie of andere grootheden die de toestand van het systeem beschrijven.
- Een voorwerp met een gegeven totale energie kan "opgesloten" geraken in een "potentiële energieput", begrensd door punten waar de totale energie gelijk is aan de potentiële energie.
- Deze punten zijn **keerpunten** waar het voorwerp niet voorbij kan.

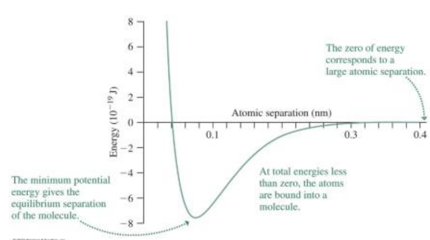


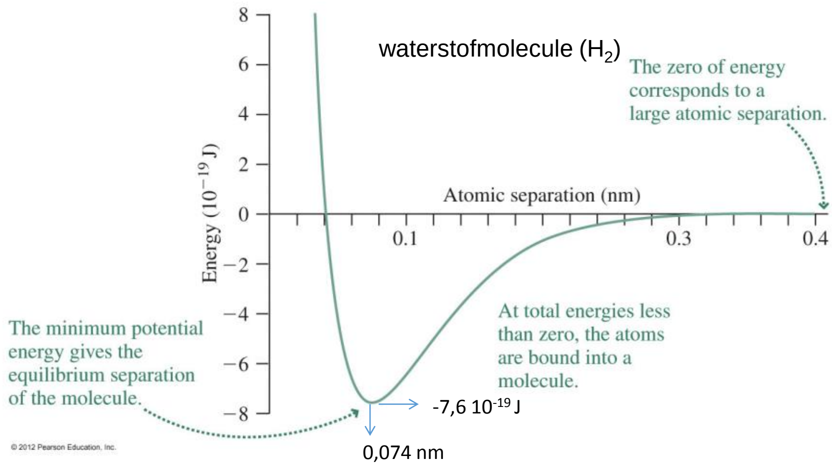
Vb.: roetsjbaan wagentje met drie ≠ E_{tot}



Vb.: Potentiële-Energie Grafiek voor H_2

- Potentiële-energie grafieken helpen bij het bepalen van de structuur van systemen (moleculen, modellen van sterrenstelsels, enz.).
- De potentiële-energie grafiek voor een waterstofmolecule (H_2) als functie van de afstand tussen de atomen.
  - Het minimum in de grafiek toont evenwichtsafstand tussen de H atomen. (0,074 nm)
  - Kiest men het nulpunt van de potentële energie bij oneindig grote afstand, dan stellen de negatieve energieën de gebonden toestanden voor van de waterstof molecule.
  - Positieve energieën komen dan overeen met gescheiden waterstofatomen.



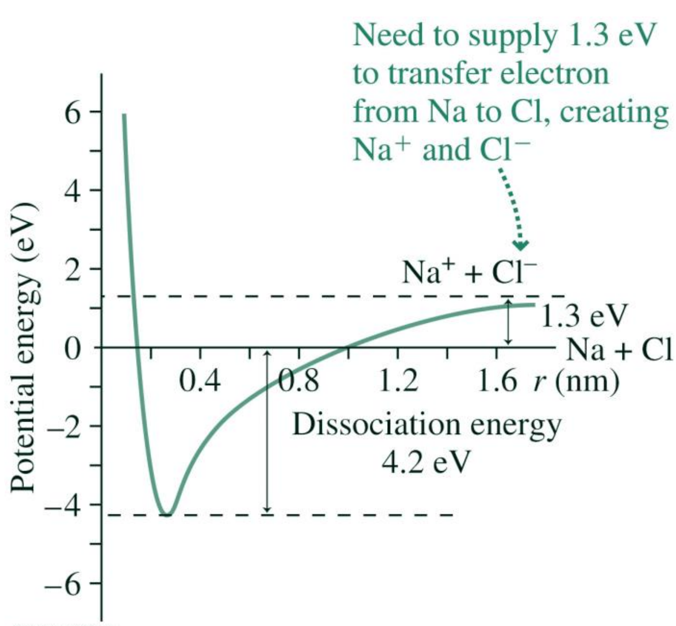


Hoeveel Joule is er nodig om één mol H_2 moleculen te ontbinden in H atomen?

7,6 10^{-19} J x 6,02 10^{23} = 460 kJ per mol

(N_A = 6,02 10^{23} mol^{-1} = getal van Avogadro)

 29



Kracht en Potentiële Energie

- Kracht is het grootst waar de potentiële energie het snelst toeneemt.
- Wiskundig: de component van de kracht in een gegeven richting is min de afgeleide van de potentiële energie naar de plaats in die richting:

$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

Dit is het inverse van :

$$\Delta U_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$