Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-1}{t^2+4}dt &= \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\
\text{stel } & u = t^2+4 \\
\text{dan } & du = 2tdt \to dt = \frac{du}{2t} \\
& \Rightarrow \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy \\
\text{stel } & u = e^y \\
\text{dan } & du = e^y dy \to dy = \frac{du}{e^y} \\
& \Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)}du \\
& = \int \frac{du}{u^2+4} \\
& = \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} \\
& = \frac{1}{2}\arctan\frac{e^y}{2} + C
\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u\;dv = uv - \int v\;du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$$

$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$

$$\text{dan } du = \frac{1}{x}dx \text{ en } v = x$$

$$\Rightarrow x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)}dx$$

$$\text{stel } u = x + 1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx$$

$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$

$$\Rightarrow (x+1)\tan(x) - \int \tan(x)dx$$

$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x}\sin(2x)$$

$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$

$$\text{dan } du = 2\cos(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow = -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)dx$$

$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$

$$\text{dan } du = -2\sin(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\sin(2x) + 2\Big[-e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx\Big]$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx$$

Dus

$$\begin{aligned}
&\int e^{-x}\sin(2x) = -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx \\
\Leftrightarrow\ & 5\int e^{-x}\sin(2x) = -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \\
\Leftrightarrow\ & \int e^{-x}\sin(2x) = \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}
\end{aligned}$$

1.2.4 voorbeeld 4

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right)d\theta \\
&= \int \frac{1}{4}d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4}d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta)+4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}$$

Deel II

Wiskunde B

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n.
- **Graad**: De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. ${y^{(n)}}^r$

Voorbeeld: Orde en graad

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y \ \ - 2y'^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin \sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\to y' = \arcsin^2(x+2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\to y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
${y'}^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\to {y'}^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n-de orde worden drie oplossingen onderscheden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.

2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.

3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$	?	?
$\to C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$	?	?
$\to a + be^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$	?	?
$\to y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\to y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1. $$\begin{aligned} y &= a\sin(x) + b\cos(x) \\ y' &= a\cos(x) - b\sin(x) \\ y'' &= -a\sin(x) - b\cos(x) \end{aligned}$$

   Hieruit volgt:

   $$\begin{gathered} y'' + y = 0 \\ -a\sin(x) - b\cos(x) + \sin(x) + b\cos(x) = 0 \\ \rightarrow \text{Het is een oplossing} \end{gathered}$$

   De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

   $$\begin{aligned} y &= 0 \\ y &= \sqrt{2}\sin(x) \\ y &= \sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.
2. $$\begin{aligned} y' &= Ce^x \\ \rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \\ \rightarrow \text{Het is een oplossing} & \end{aligned}$$

   Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$\begin{aligned}
&y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\
\rightarrow &y'^2 - yy' + e^x \\
\Leftrightarrow &(\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow &e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
\Leftrightarrow &0 = 0
\end{aligned}$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de n + *1* bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG
De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2 x$$

1. Er zijn *2* onafhankelijke constanten.
2. Er moet *2* keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde *2*.

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y & = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} \\ y' & = -C_2e^{-x} + 3C_3e^{3x} \\ y'' & = C_2e^{-x} + 9C_3e^{3x} \\ y''' & = -C_2e^{-x} + 27C_3e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' & = 3C_3e^{3x} + 9C_3e^{3x} = 12C_3e^{3x} \\ y'' + y''' & = 9C_3e^{3x} + 27C_3e^{3x} = 36C_3e^{3x} \end{cases}$$

   Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3e^{3x}) - 36C_3e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

   Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned} & y''' - y'' \sin t + ty = t^2 \\ \Leftrightarrow & D^3 y - D^2 y \sin t + ty = t^2 \\ \Leftrightarrow & (D^3 - D^2 \sin t + t)y = t^2 \\ \Leftrightarrow & L(d)y = g(t) \\ \Leftrightarrow & \text{met} L(d) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \qquad , a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden $(y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0))$ gekend zijn.

2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten $y(0), y'(0)...y^{(n-1)}(0)$ respectievelijk gelijkgesteld worden aan $C_1, C_2, ..., C_n$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = g(t)$ indien $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
&L(d)y = g(t)\\
&\Leftrightarrow (D^2+1)y = g(t)\\
&\Leftrightarrow (D^2+1)y = e^{-t}H(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y''+y\}(s)\\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y\\
&= s^2Y - 1 + Y\\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s)\\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s)\\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)\\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}\\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}
$$

dus

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y = \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}\\
&\Leftrightarrow Y(s^2+1) = 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}\\
&\Leftrightarrow Y = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)}\\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t)\\
&\Leftrightarrow y(t) = \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2+1}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\Big]
\end{aligned}
$$

antwoord: $y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\Big(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\Big)H(t-1)$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = \delta\big(t - \frac{\pi}{2}\big)$ indien $y(\frac{\pi}{4}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{4}) = 0$

$y(0^+) = C_1,\ y'(0^+) = C_2$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big)\right\}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \delta\big(t - \frac{\pi}{4}\big) e^{-st}\, dt \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}
\end{aligned}
$$

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$
Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$

TODO: graph

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t-2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t-3)(-1 + e^t + t^2) + H(t-5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t-2) + (t^2 + e^t - 1)H(t-3) - (t^2 - t + 25)H(t-5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a)=0 & t\neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2}\delta(t-a)\,dt=1 & \forall\epsilon_1,\epsilon_2>0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t)$ voor $\epsilon_1,\epsilon_2\to 0$

$$\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t)=\begin{cases} 0 & \forall t<a-\epsilon_1 \text{ of } t>a+\epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2} & \forall\in]a-\epsilon_1,a+\epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt=f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.
De afgeleide van de Heaveiside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt}H(t-a)=\delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty}(2\sin t-1)\delta(t-\frac{3\pi}{2})\,dt$$

In dit geval is $f(t)=(2\sin t-1)$ en $\delta(t-a)=\delta(t-\frac{3\pi}{2})$ We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\,dt &= \int_0^{+\infty}(2\sin t-1)\delta(t-\frac{3\pi}{2})\,dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2})-1 \\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-1 \\ &= -2-1 \\ &= -3\end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t)=0$ voor elke $t<0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t)\to f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien t < 1 en 2 als t > 1. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t-1)(-2+2) \\ &= -2H(t) + 4H(t-1) \end{aligned}$$

Tekening: *TODO: graph*

3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in R$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a. Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in R$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$

$$\begin{aligned} &|\sin t| \leq 1 \\ \Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 (\text{willekeurige waarde}) \\ \Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1e^{at} \end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat a = 0 en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1+2t)e^{-t}$
Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{|(1+2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{(1+2t)e^{-t}}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1+2t}{e^{at}e^{t}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} \end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a+1<0 \rightarrow e^{-\infty}=0 \rightarrow \frac{\pm\infty}{0} \rightarrow$ onbepaald
- $a+1>0 \rightarrow e^{+\infty}=\infty \rightarrow \frac{\pm\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hopital toe.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t\to+\infty}\frac{2}{e^{t(a+1)}(a+1)}\\ &= \frac{2}{+\infty}=0\in R\end{aligned}$$

Aangezien het een reëele uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a+1>0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a>-1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causuaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)=F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, s\in\mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s)=\frac{1}{1+s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2)=\frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j)=\int_0^{+\infty}|f(t)e^{-st}|\,dt$$

Het argument tussen de |...| is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2+y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s=x+yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1. $$|f(t)e^{-st}|=|f(t)|e^{-xt},\ s=x+yj$$

want

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\
&= |f(t)|e^{-xt}\sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= |f(t)|e^{-xt}
\end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

•

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)}\,dt \\
&= \left.\frac{e^ta-s)}{a-s}\right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} - 1\right)
\end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-st)}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

- $$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

  Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{L}\{e^{wjt}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\
  &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\
  &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\
  &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\}(s) \\
  &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j \sin(\omega t)\}(s) \\
  &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j
  \end{aligned}$$

  dus

  $$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

- $$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

  Bewijs:

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t - 0)\}(s) \\
  &= \int_0^{+\infty} \delta(t - 0) e^{-st} \, dt \\
  &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1
  \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t - 1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1) + \sin(2t)\sin(1)\}(s) \\
&= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\
&= \cos(1)\frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1)\frac{2}{s^2 + 4} \\
&= \frac{s\cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2\sin(1)}{s^2 + 4}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ \sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} \right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{ \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - 3\frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - \frac{27s}{9s^2 + 1}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta(t - \frac{\pi}{2})\cos(4t)e^{2t}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{-st}\,dt \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}e^{-s\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\
&= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}
\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) \qquad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{a} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
\text{stel} \quad u &= t - a \\
\text{dan} \quad du &= dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)}\,du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}\,du \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}\,du \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as}F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2-1)H(t-1) - \sin(3t)H(t-\pi)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)^2+2(t-1)]H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-as}\mathcal{L}\{t^2+2t\}(s) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3}+2\frac{1!}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t-\pi))H(t-\pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) - \left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}
\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s+a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3-1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7-2t^4+t)e^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t^7-2t^4+t\}(s+1) \\
&= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{2\cdot 4!}{(s+1)^5} + \frac{1!}{(s+1)^2} \\
&= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s-2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2+3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}
$$

Het resultaat wordt:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\
&= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}
$$

3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})
$$

Bewijs:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\ dt \\
\text{stel } u &= at \\
\text{dan } du &= adt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\ \frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\ du \\
&= \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(u)\}(\frac{s}{a}) \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin t\}(\frac{s}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} \\
&= \frac{\omega}{\omega^2(\frac{s^2}{w^2}+1)} \\
&= \frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+w^2}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\
&= s\frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s\frac{\omega}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \omega\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega\frac{s}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

3.5.7 Laplacegetransformeerde van f"(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - ... - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voorbeeld: Gegeven $g(t) = te^{-t}$, bepaal $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\
&= s^2G(s) - sg(0^+) - g'(t) \\
\text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \\
\text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-t) \\
\Rightarrow s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2\frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\
&= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
\frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= -\int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\sin t - t^3e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t\sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s)\\
*)\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) &= (-1)^1\frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds}\\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds}\\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right)\\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2}\\
**)\mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s) &= (-1)^3\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3}\\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2}\\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3}\\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4}\\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4}\\
&= \frac{6}{(s+1)^4}\\
*-** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}$$

3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s)\forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^t f(u)\,du \\
g't) &= f(t) \\
g'(0) &= 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) - 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos\omega t\,dt\right\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos\omega t\,dt\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

TODO: slide 19

3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

Voorbeeld: Gegeven $f(t) = e^{at}$ en $g(t) = e^{bt}$. Illustreer de juistheid van deze rekenregel.

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u} \, du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} \, du \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})\}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{(e^{at} - e^{bt})\}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{(s-b)-(s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bereken $H(t) * H(t) * H(t)$.

$$
\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) \, du \\
\text{aangezien } 0 &\leq u \leq t \\
&\Rightarrow H(u) = 1 \\
&\Rightarrow H(t-u) = 1 \\
&= \int_0^t du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u)\,du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

3.5.12 Inversie Laplacetransformatie

Definitie:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \qquad \text{indien} \qquad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a(s-1)(s-2)+bs(s-2)+cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\}(t) \\
\Rightarrow s^2+2s+1 &= a(s-1)(s-2)+bs(s-2)+cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 : a &= \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 : b &= -4 \\
\text{als } s = 2 : c &= \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{2s+7}{2s^2+4s+10}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+7/2}{s^2+2s+5}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+7/2}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{(s+1)+5/2}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}-\frac{s+1}{(s+1)^2+4}-\frac{5}{2}\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}-\frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\delta(t)-\cos(2t)e^{-t}-\frac{5}{2}\sin(2t)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\delta(t)-e^{-t}(\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1}+\frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1) \\
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}+\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t}-\cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-\cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD} \Rightarrow & e^{-(t-\pi)}(1-\cos(t-\pi)H(t-\pi) \\
= & e^{\pi-t}(1+\cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5 e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5 e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $(H * H * H * H*)(t)$

$$\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken op 2 verschillende wijzen:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$$

Methode 1:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t)
\end{aligned}$$

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \\ y'' &= 0 \end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2. De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &: 2(x - C_1) + 2yy' = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &: 2 + 2(y'y' + yy'') = 0 \end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y_p = (x_p)^2 = C^2 \\ &\Rightarrow p(C, C^2) \end{aligned}$$

De richtingscoëfficient y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} & y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = y'\left(\frac{y'}{2}\right)\left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4y - y'^2 = 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow\ & y'^2 - 4y'x + 4y = 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

Hoofdstuk 5

Laplacetransformatie

5.1 De Heaviside functie

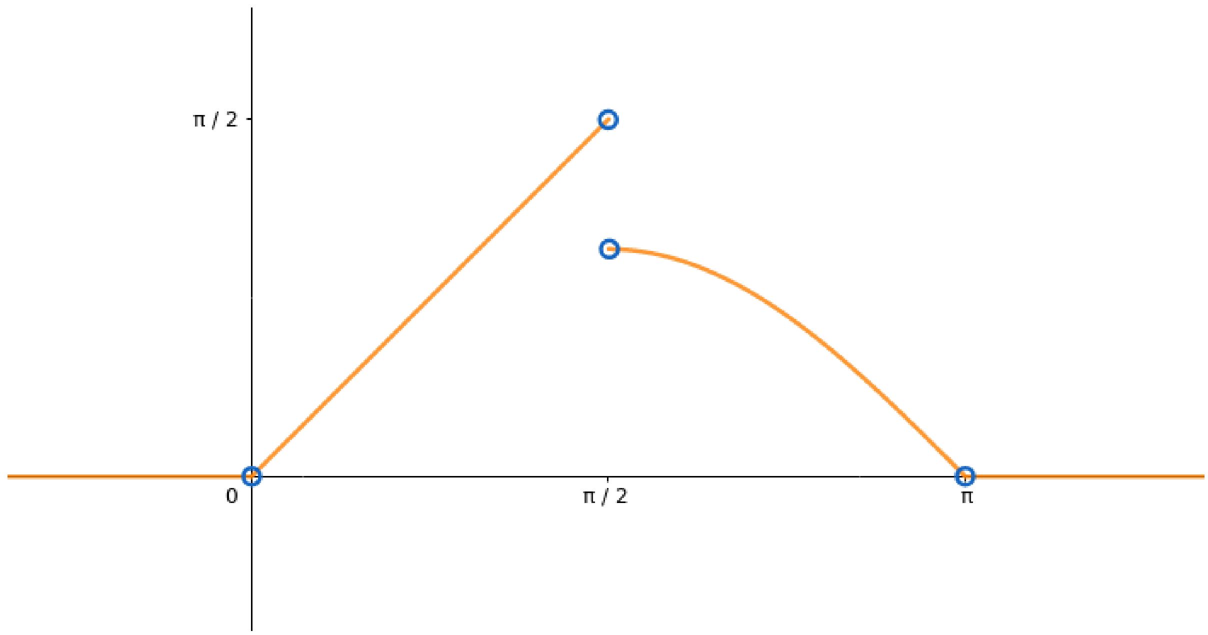
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

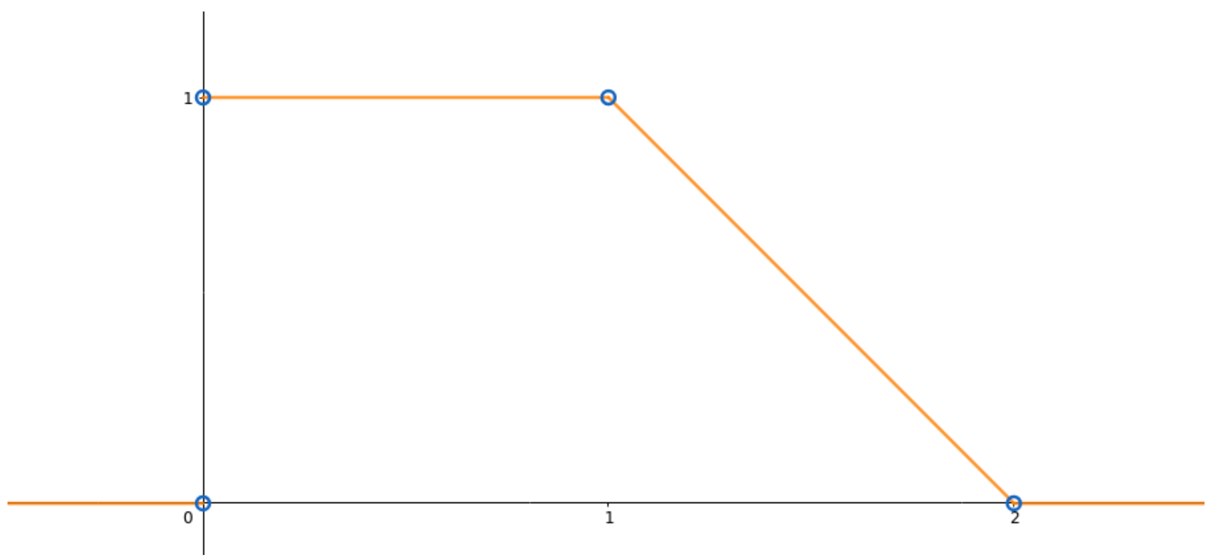
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0+t) + H(t-\frac{\pi}{2})(-t+\sin t) + H(t-\pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t-\pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t-\pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

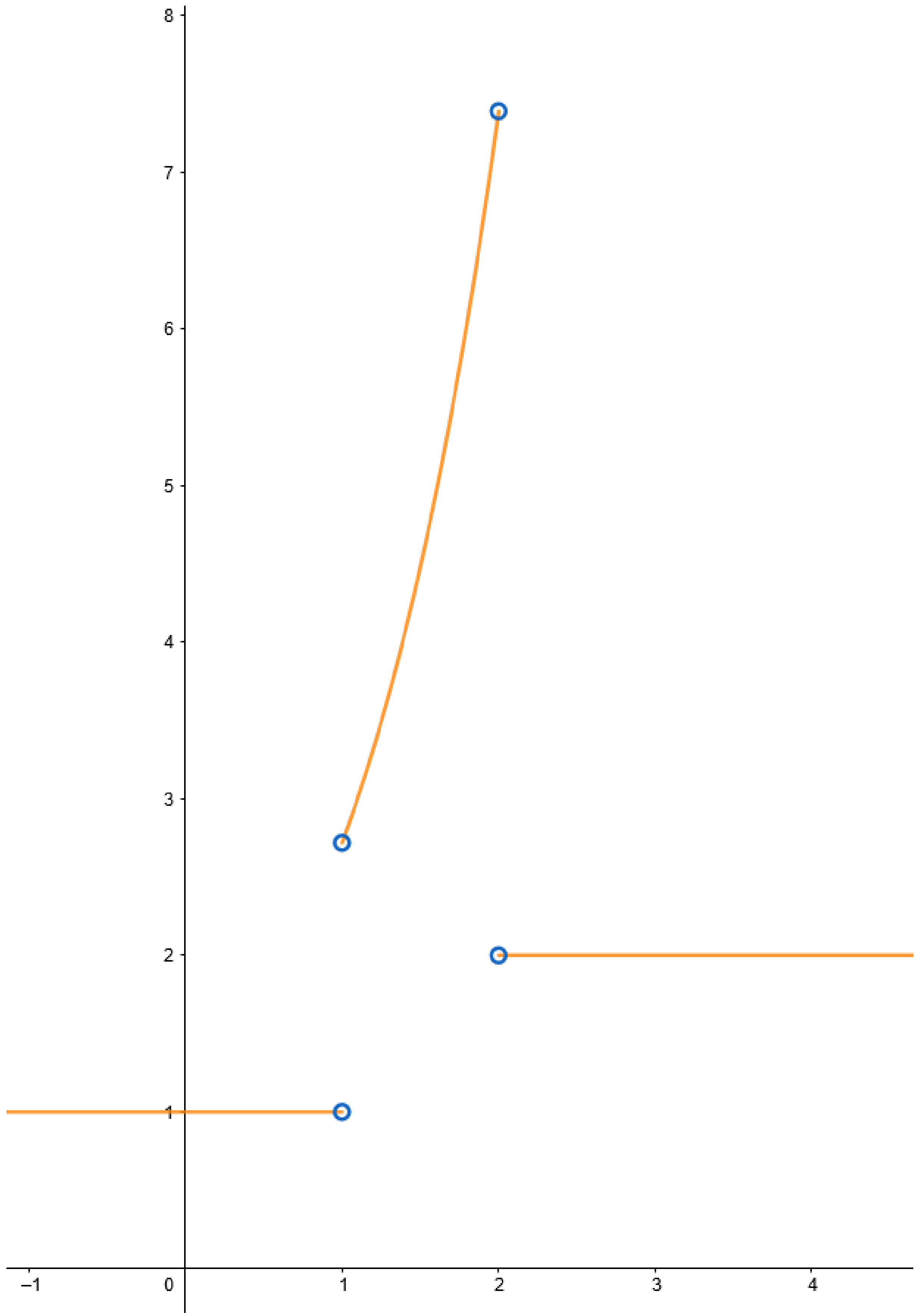
Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0+1) + H(t-1)(-1+(2-t)) + H(t-2)(-(2-t)+0) \\ &= H(t) + H(t-1)(1-t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

Teken de functie $f(t) = 1 + H(t-1)(e^t - 1) + H(t-2)(2 - e^t)$

<u>Oplossing</u>

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$


8
7
6
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4

5.2 Functies van de exponentiële orde

Geef de exponentiële orde van $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{\alpha t}e^{2t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \qquad \text{voor } \alpha+2>0 \\
&= 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}
&\alpha + 2 > 0 \\
\Leftrightarrow &\alpha > -2
\end{aligned}$$

De exponentiële orde is -2.

Geef de exponentiële orde van $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\
&= 6 \lim_{t\to+\infty} e^{t(3-\alpha)}
\end{aligned}$$

Indien $3 - \alpha < 0$ dan wordt de limiet 0. De exponentiële orde is dus 3.

5.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}$$

$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1+e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$

$f(t) = \sin^2 t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\{\frac{1-\cos 2t}{2}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]\end{aligned}$$

$f(t) = t^2\delta(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st}\ dt \\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2} \\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$

$f(t) = (t-1)H(t-1)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s) \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

$f(t) = t^2H(t-1)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1)H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

$f(t) = t^2 H(t-1)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1)H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s}\right)
\end{aligned}$$

$f(t) = \sin(t)H(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t)H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2)H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2) + \cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2) + \cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s}[\cos(2)\mathcal{L}\{\sin(u)\} + \sin(2)\mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s}\left(\frac{\cos(2)}{s^2+1} + \frac{\sin(2)s}{s^2+1}\right)
\end{aligned}$$

$f(t) = t^2 e^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}$$

$f(t) = e^t \cos 3t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1)\\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+9}\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-2t} \sin 2t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2)\\ &= \frac{2}{(s+2)^2+4}\end{aligned}$$

$f(t) = t \cos t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\Big[\mathcal{L}\{\cos t\}(s)\Big]}{ds}\\ &= -\frac{d[\frac{s}{s^2+1}]}{ds}\\ &= -\frac{(s^2+1)-s(2s)}{(s^2+1)^2}\\ &= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2)\\ &= \mathcal{L}\left\{t\frac{1+\cos t}{2}\right\}(s+2)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t \cos t\}(s+2)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2-1}{((s+2)^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-3t}t^3H(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-3t}t^3H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)^3+6(t-2)^2+12(t-2)+8]H(t-2)\}(s+3) \\
&= e^{2s}\mathcal{L}\{u^3+6u^2+12u+8\}(s+3) \\
&= e^{2s}\left[\frac{3!}{(s+3)^4}+6\frac{2!}{(s+3)^3}+12\frac{1!}{(s+3)^2}+8\frac{1}{s}\right] \\
&= e^{2s}\left[\frac{6}{(s+3)^4}+\frac{12}{(s+3)^3}+\frac{12}{(s+3)^2}+\frac{8}{s}\right] \\
&= 2e^{2s}\left[\frac{3}{(s+3)^4}+\frac{6}{(s+3)^3}+\frac{6}{(s+3)^2}+\frac{4}{s}\right]
\end{aligned}$$

$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos 2t + H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\
&= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\big(t-\frac{\pi}{4}\big) \\
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)
\end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1. $$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

2. $$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= \mathcal{L}\{\big(t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\big)H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\big(u+\frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{\pi}{4(s-2)}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos 2t\; H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\big)\big]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t-\frac{\pi}{4}\big)+\frac{\pi}{2}\big]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{[\cos 2(t-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2(t-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{2}]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= -\mathcal{L}\{\sin 2(t-\frac{\pi}{4})H(t-\frac{\pi}{4}\}(s)\\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\sin 2u\}\\
&= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}
\end{aligned}
$$

Uiteindelijk:

$$
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+4} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{\pi}{4(s-2)}\right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}
$$

5.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$f(s) = \frac{1}{s^3}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t)\\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}
$$

$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4}+\frac{5}{s^4}\right\}(t)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) + \frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t)\\
&= \frac{t^2}{2}+\frac{5t^3}{6}
\end{aligned}
$$

$f(s) = \frac{1}{3s-1}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}
\end{aligned}$$

$f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t) \\
&\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3)+b(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\
&\Rightarrow 2s+3 = a(s-3)+b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 9 \end{cases} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2} + \frac{9}{s-3}\right\}(t) \\
&= -7e^{2t} + 9e^{3t}
\end{aligned}$$

$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t) \\
&= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t
\end{aligned}$$

$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$

Oplossing

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9)+(b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
&\Rightarrow s+3 = a(s^2+9)+(b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}$$
