

Samenvatting Wiskunde B

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

I	Herhaling Wiskunde A	4
1	Onbepaalde Integralen	5
1.1	Substitutiemethode	5
1.1.1	Voorbeeld 1	5
1.1.2	Voorbeeld 2	5
1.2	Partieële integratie	6
1.2.1	Voorbeeld 1	6
1.2.2	Voorbeeld 2	6
1.2.3	Voorbeeld 3	6
1.2.4	Voorbeeld 4	7
II	Theorie	8
2	Differentiaalvergelijking	9
2.1	Definities	9
2.2	Soorten oplossingen	10
2.3	Bepalen van een DVG	12
2.4	Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten	14
2.4.1	Particuliere oplossing	14
2.4.2	Algemene oplossing	14
2.5	DVG van orde 1 en graad 1	16
2.5.1	Gescheiden veranderlijken	16
2.6	Homogene DVG	17
2.7	Exacte (= totale) DVG	18
2.8	Lineaire DVG van orde 1	22
2.8.1	Oplossingsmethode	23
2.9	DVG van type Bernouilli	24
2.9.1	Oplossingsmethode	24
2.10	Orthogonale krommenbundel	26
2.11	DVG van hogere orde	28
2.11.1	DVG van orde 2 van type $F(x, y', y'') = 0$	28
2.11.2	DVG van orde 2 van type $F(y, y', y'') = 0$	29
2.12	Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen	29
2.12.1	Stelling 1	30
2.12.2	Stelling 2	30
2.12.3	Stelling 3	30

3	Laplace transformatie	31
3.1	De Heaviside functie	31
3.2	De Dirac delta-’functie’	32
3.3	Causale functie	32
3.4	Exponentiële orde	34
3.5	De Laplace transformatie	35
3.5.1	Opmerkingen	36
3.5.2	Laplace getransformeerde van enkele basisfuncties	36
3.5.3	Translatie naar rechts	38
3.5.4	Dempingsfunctie	40
3.5.5	Schaalwijziging	41
3.5.6	Laplace getransformeerde van $f'(t)$	41
3.5.7	Laplace getransformeerde van $f''(t)$	42
3.5.8	Laplace getransformeerde van machten van t	42
3.5.9	Laplace getransformeerde van een integraal	44
3.5.10	Laplace getransformeerde van een periodische functie	45
3.5.11	De convolutiestelling	45
3.5.12	Inverse Laplace transformatie	47
4	Reeksen	52
4.1	Definities	52
4.2	Hoofdeigenschappen	53
4.3	Numerieke reeksen	54
4.4	De meetkundige reeks	55
4.4.1	Convergentieonderzoek	55
4.5	Eigenschappen	56
4.6	Reeksen met ’uitsluitend’ positieve termen	57
4.6.1	Integraalcriterium van Cauchy	57
4.6.2	De hyperharmonische reeks	58
4.6.3	Vergelijkingscriteria	58
4.6.4	Convergentiecriteria	60
4.7	Willekeurige reeksen	62
4.7.1	Convergentiecriteria van Leibniz	62
4.7.2	Nieuwe begrippen	63
4.8	Reeksen van functies	65
4.8.1	Machtreeksen rond $x = a$	65
III	Oefeningen	67
5	Differentiaalvergelijkingen	68
5.1	Bepalen van differentiaalvergelijkingen	68
5.2	Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en eerste graad	69
5.2.1	Scheiden van de veranderlijken	69
5.2.2	Homogene differentiaalvergelijkingen	70
5.2.3	Totale differentiaalvergelijkingen	71
5.2.4	Lineaire DVG in y en y'	73

5.2.5	Lineaire DVG met constante coëfficiënten	73
6	Laplacetransformatie	74
6.1	De Heaviside functie	74
6.2	Functies van de exponentiële orde	78
6.3	Laplacebeeld	78
6.4	Invers Laplacebeeld	83
7	Reeksen	89
7.1	Reeksen met uitsluitend positieve termen	89

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t^2+4} dt &= \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\ \text{stel } u &= t^2+4 \\ \text{dan } du &= 2t dt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\ &\Rightarrow \int \frac{t}{2tu} du - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln t^2+4 - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4} dy \\ \text{stel } u &= e^y \\ \text{dan } du &= e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\ &\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)} du \\ &= \int \frac{du}{u^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{e^y}{2} + C\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ \text{stel } u &= \ln(x) \text{ en } v = \int dx \\ \text{dan } du &= \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x \\ &\Rightarrow x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{stel } u &= x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{dan } du &= dx \text{ en } v = \tan(x) \\ &\Rightarrow (x+1) \tan(x) - \int \tan(x) dx \\ &= (x+1) \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) \\ \text{stel } u &= \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= 2 \cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx \\ \text{stel } u &= \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= -2 \sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \left[-e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \right] \\ &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx \\ \Leftrightarrow 5 \int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] \\ \Leftrightarrow \int e^{-x} \sin(2x) &= \frac{-e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)]}{5}\end{aligned}$$

1.2.4 Voorbeeld 4

$$\begin{aligned}\int \sin^4(\theta) d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\ &= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\ &= \frac{12\theta - 8 \sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C\end{aligned}$$

Deel II

Theorie

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

Uitwerking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde:** Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n .
- **Graad:** De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. $y^{(n)^r}$

Voorbeeld: Orde en graad

Uitwerking

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y - 2y'^3 = yx$	1	3
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = \sin(x)$	3	2
$(x - 1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3 s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin \sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x + 2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n -de orde worden drie oplossingen onderscheiden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

Uitwerking

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$?	?
$\rightarrow a + b e^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a \sin(x) + b \cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Uitwerking

- 1.

$$\begin{aligned}y &= a \sin(x) + b \cos(x) \\y' &= a \cos(x) - b \sin(x) \\y'' &= -a \sin(x) - b \cos(x)\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\-a \sin(x) - b \cos(x) + a \sin(x) + b \cos(x) &= 0 \\&\rightarrow \text{Het is een oplossing}\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$\begin{aligned}y &= 0 \\y &= \sqrt{2} \sin(x) \\y &= \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Uitwerking

1. De orde is 1 en de graad is 2.
- 2.

$$\begin{aligned}y' &= Ce^x \\&\rightarrow C^2(e^x)^2 - \left(\frac{1}{C} + Ce^x\right)Ce^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

\rightarrow Het is een oplossing

Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$\begin{aligned}y' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\&\rightarrow y'^2 - yy' + e^x \\&\Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leidt de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de $n + 1$ bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Gegeven de algemene oplossing $y = C_1 + C_2x$. Bepaal de DVG.

Uitwerking

1. Er zijn 2 onafhankelijke constanten.
2. Er moet 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde 2.

Voorbeeld: Bepaal de DVG indien $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$ de algemene oplossing is.

Uitwerking

1. Er zijn 3 onafhankelijke constanten.

2. Er moet 3 maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' &= -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' &= C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' &= -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3de afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$\begin{aligned} 3(y + y'') - y'' - y''' &= 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0 \\ \rightarrow y''' - 2y'' - 3y' &= 0 \end{aligned}$$

4. De orde van deze DVG is 3

Voorbeeld: Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt $y = -x$.

Uitwerking

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet 2 maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\begin{aligned} 1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

4. Orde van de DVG = 2 = Aantal onafhankelijke constanten.

2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned}y''' - y'' \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow D^3 y - D^2 y \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow (D^3 - D^2 \sin t + t)y &= t^2 \\ \Leftrightarrow L(d)y &= g(t) \\ \Leftrightarrow \text{met } L(d) = \sum_{i=0}^n a_i D^i &, a_i \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden $(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$ gekend zijn.

2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten $y(0), y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$ respectievelijk gelijkgesteld worden aan C_1, C_2, \dots, C_n

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = g(t)$ indien $y(0) = 0, y'(0) = 1$ en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
L(d)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= e^{-t}H(t-1) \\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y \\
&= s^2Y - 1 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y &= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y(s^2 + 1) &= 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2 + 1}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\right]
\end{aligned}$$

$$\text{antwoord: } y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\right)H(t-1)$$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ indien $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
Uitwerking

Stel: $y(0^+) = C_1$, $y'(0^+) = C_2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\ &= s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st} dt \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\end{aligned}$$

dus

$$\Leftrightarrow s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}\right\}(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t + f\left(t - \frac{\pi}{2}\right)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}(t) \\ &= \sin t\end{aligned}$$

$$\text{De algemene oplossing: } y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t - \left(\cos(t)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

De PO voor $t = \frac{\pi}{4}$ ($< \frac{\pi}{2}$ dus Heaviside is 0)

$$\begin{aligned}y(t) &= C_2 \sin t + C_1 \cos t \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'(t) &= C_2 \cos t - C_1 \sin t \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \begin{cases} 0 = C_2 + C_1 \\ 0 = C_2 - C_1 \end{cases} &\Rightarrow C_2 = C_1 = 0\end{aligned}$$

Het antwoord:

$$y(t) = -(\cos t)H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.5 DVG van orde 1 en graad 1

2.5.1 Gescheiden veranderlijken

Indien een DVG van orde 1 en graad 1 te schrijven is als

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Algemeen:

$$\begin{aligned}M(x, y) dx &= -N(x, y) dy \\f(x)g(y) dx &= -h(x)i(y) dy \\ \frac{f(x)}{h(x)} dx &= - \frac{i(y)}{g(y)} dy \\ a(x) dx &= b(y) dy \\ \int a(x) dx &= \int b(y) dy \\ A(x) + C_1 &= B(y) + C_2 \\ A(x) &= B(y) + C\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de AO van $yt + \sqrt{1-t^2}y' = 0$

Uitwerking

$$\begin{aligned}yt dt + \sqrt{1-t^2} dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} dy &= -yt dt \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= - \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \ln |y| \sqrt{1-x^2} &+ C \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}+C} \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}} e^C \\ \Leftrightarrow y &= De^{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

2.6 Homogene DVG

Een DVG is homogeen indien:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Indien een DVG homogeen is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Stel $y = ux$
- $dy = u dx + x du$
- DVG is oplosbaar met gescheiden veranderlijken.

Voorbeeld: Bepaal de PO van :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$

waarvoor $x(1) = 1$.

Uitwerking

Berekening algemene oplossing

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$
$$\Rightarrow t(\ln t - \ln x) dx - x dt = 0$$

$$\Rightarrow t \ln \left(\frac{t}{x} \right) dx - x dt = 0$$

controle homogeen

$$\Rightarrow \lambda t \ln \left(\frac{\lambda t}{\lambda x} \right) - \lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda^1 \left(t \ln \left(\frac{t}{x} \right) - x \right) \quad \text{homogeen want } M(x,t) \text{ en } N(x,t) \text{ hebben } \lambda \text{ tot de eerste macht}$$

substitutie $t = ux$

$$\Rightarrow u \ln u dx - u dx + x du = 0$$

$$\Rightarrow (u \ln u - u) dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |Cx|$$

$$\Rightarrow \ln u - 1 = Cx$$

$$\Rightarrow \ln u = Cx + 1$$

$$\Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow t = xe^{Cx+1}$$

Berekening particuliere oplossing:

$$x(1) = 1$$
$$\Rightarrow 1 = 1e^{C+1}$$
$$\Rightarrow C + 1 = 0$$
$$\Rightarrow C = -1$$
$$\Rightarrow t = xe^{-x+1}$$

2.7 Exacte (= totale) DVG

Een DVG is exact indien

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

Indien een DVG exact is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Zoek $F(x, y)$ zodat $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$

Voorbeeld: Bepaal alle functie $f(y)$ zodanig dat de DVG

$$2y \, dx + (x - 4y\sqrt{y}) \, dy = 0$$

na vermenigvuldiging met $f(y)$ exact wordt. Bepaal daarna haar AO.

Uitwerking

Is deze DVG exact?

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} 2y &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y\sqrt{y}) &= 1\end{aligned}$$

Deze DVG is dus niet exact. We moeten een functie $f(y)$ bepalen zodat deze DVG wel exact wordt.

$$2yf(y) \, dy + (x - 4y\sqrt{y})f(y) \, dy = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} 2yf(y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y^{3/2})f(y) \\ \Rightarrow 2f(y) + 2y \frac{d}{dy} f(y) &= f(y) \\ \Rightarrow 2y \frac{d}{dy} f(y) &= -f(y) \\ \Rightarrow \frac{d}{f(y)} f(y) &= -\frac{dy}{2y} \\ \Rightarrow \int \frac{d}{f(y)} f(y) &= -\int \frac{dy}{2y} \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln |C| \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= -\frac{1}{2} \ln |Cy| \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= \ln |Cy|^{-1/2} \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{1}{\sqrt{Cy}} \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{met } C = 1\end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$2\sqrt{y} \, dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) \, dy = 0$$

wat een exacte DVG oplevert. Nu bepalen we de AO.

$$2\sqrt{y} \, dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) \, dy = 0$$

komt overeen met

$$\frac{\partial}{\partial x} F \, dx + \frac{\partial}{\partial y} F \, dy = 0$$

We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 2\sqrt{y} (*) \\ \frac{\partial}{\partial y} F = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y (**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) \frac{\partial}{\partial x} F &= 2\sqrt{y} \\ \Rightarrow F &= \int 2\sqrt{y} \, dx \\ \Rightarrow F &= 2\sqrt{y}x + h(y); \\ (**) \frac{\partial}{\partial y} F &= \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = 2x \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dy} h(y) \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} h(y) &= -4y \\ \Rightarrow h(y) &= \int -4y \, dy \\ \Rightarrow h(y) &= -2y^2 \end{aligned}$$

De AO:

$$F(x, y) = 2\sqrt{y}x - 2y^2$$

Voorbeeld: In een vat bevindt zich $20m^3$ zout-oplossing waarin 1 kg zout opgelost is. Men voert een nieuwe pekeloplossing toe met constante concentratie van $0,5 \text{ kg zout}/m^3$ en aan een snelheid van $2m^3/\text{min}$. De oplossing wordt continu gemengd en loopt onderaan weg met een snelheid van $1m^3/\text{min}$. Hoeveel zout bevindt zich in de pekeloplossing na 1 uur?

Uitwerking

Definitie van de variabelen:

- x : # kg zout na t minuten
- Op $t = 0$ is $x(0) = 1$
- $C_i = \frac{1}{2} \text{kg}/m^3$ (Concentratie in)
- $v_i = 2m^3/\text{min}$ (Snelheid in)
- $C_{uit} = \frac{x(t)}{v(t)}$ (Concentratie uit)
- $v_{uit} = 1m^3/\text{min}$ (Snelheid uit)

We zoeken een uitdrukking voor dx .

- dx = verandering x gedurende dt minuten
- dx = hoeveelheid zout binnen gedurende dt minuten - hoeveelheid zout buiten gedurende dt minuten

Berekening AO:

$$\begin{aligned}
 dx &= C_i v_i dt - C_{uit} v_{uit} dt \\
 \Rightarrow dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 dt - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 1 dt \quad \text{met } V(t) = 20 + 2t - t = 20 + t \\
 \Rightarrow dx &= dt - \frac{x}{20 + t} dt \\
 \Rightarrow dx + \left(\frac{x}{20 + t} - 1 \right) dt &= 0 \\
 \Rightarrow (20 + t) dx + (x - 20 - t) dt &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(20 + t) = 1 &= \frac{\partial}{\partial x}(x - 20 - t) \Rightarrow \text{exact} \\
 \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t (*) \\ \frac{\partial}{\partial t} F = x - 20 - t (**) \end{cases} \\
 (*) \frac{\partial}{\partial x} F &= 20 + t \\
 \Rightarrow F &= \int (x - 20 - t) dt \\
 &= xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x) \\
 \Rightarrow 20 + t &= \frac{\partial}{\partial x} (xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x)) \\
 \Rightarrow 20 + t &= t + \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx} h(x) &= 20 \\
 \Rightarrow h(x) &= \int 20 dx = 20x \\
 \Rightarrow F &= xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x \\
 \text{AO: } xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x &= C
 \end{aligned}$$

Bereken PO. Indien $x(0) = 1$ dan $C = 20$. 1 uur = 60 minuten $\Rightarrow x(60)$

$$\begin{aligned}
 xt + 20x &= 20t + \frac{t^2}{2} + 20 \\
 \Rightarrow x &= \frac{20t + \frac{t^2}{2} + 20}{20 + t} \\
 \Rightarrow x(60) &= 37.75 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

2.8 Lineaire DVG van orde 1

Algemene definitie:

Een DVG is lineair in y en y' indien $y' + P(x)y = Q(x)$

Voorbeeld:

$$dy + (y \sin x - \cos x) dx = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} dy + (y \sin x - \cos x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y \sin x - \cos x &= 0 \\ \Rightarrow y' + y \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

Lineair in y en y'

Voorbeeld:

$$ds + (1 - 2t)s dt = t^2 dt$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} ds + (1 - 2t)s dt &= t^2 dt \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} + (1 - 2t)s &= t^2 \end{aligned}$$

Lineair in s en s'

2.8.1 Oplossingsmethode

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

substitutie $y = uv$ (vrijheidsgraad toevoegen)

$$\Rightarrow u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$\Rightarrow u(P(x) + v') + u'v = Q(x) \quad (*)$$

stel $P(x) + v' = 0$ (vrijheidsgraad wegnemen)

$$\text{Bijgevolg: } \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = - \int P(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln |v| = - \int P(x) dx$$

$$\Rightarrow v = e^{- \int P(x) dx}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v}$$

$$\Rightarrow du = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

Vervang substitie om AO te bekomen

Voorbeeld: Bepaal de AO van

$$(4r^2s - 6) dr + r^3 ds = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
& r^3 \frac{ds}{dr} + 4r^2 s - 6 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{ds}{dr} + \frac{4}{r} s = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & s' + P(r)s = Q(r) \\
& \text{substitutie } s = uv \\
\Rightarrow & u'v + uv' + \frac{4}{r} uv = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & u \left(v' + \frac{4}{r} v \right) + u'v = \frac{6}{r^3} \\
& \frac{dv}{dr} = -\frac{4}{r} v \\
& \int \frac{dv}{v} = -4 \int \frac{dr}{r} \\
& \ln |v| = -4 \ln |r| \\
& v = r^{-4} \\
\Rightarrow & \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{r} = 6 \\
\Rightarrow & \int du = \int 6r \, dr \\
\Rightarrow & u = 3r^2 + C \\
& s = uv = (3r^2 + C) \frac{1}{r^4} \\
& s = \frac{3}{r^2} + \frac{C}{r^4} \quad \forall C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2.9 DVG van type Bernouilli

Een DVG is van type Bernouilli indien

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{met } n \in \mathbb{R}$$

2.9.1 Oplossingsmethode

Bewijs:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \frac{y}{y^n} = Q(x)$$

Substitutie:

$$z = \frac{y}{y^n} = y^{1-n}$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dz} \\ z' &= (1-n)y^{1-n-1}y' \\ &= (1-n)y^{-n}y' \\ &= \frac{(1-n)y'}{y^n} \end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

Of beter geschreven:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

De DVG is lineair in z en z'

Voorbeeld: Bepaal de AO vanaf

$$xy \, dx = (x^2 - y^4) \, dy$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} xy \, dx + (y^4 - x^2) \, dy &= 0 \\ \Rightarrow xy \frac{dx}{dy} + (y^4 - x^2) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{y^4 - x^2}{xy} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + \frac{y^3}{x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x &= -y^3 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bernouilli in x en x'

$$\Rightarrow x \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^2 = -y^3$$

stel $z = x^2$ dus $z' = 2x \frac{dx}{dy}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{dz}{dy} - \frac{1}{y} z &= -y^3 \\ \Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} &= -2y^3 \\ \text{substitutie } z &= uv \\ \Rightarrow u'v + uv' - \frac{2uv}{y} &= -2y^3 \\ \Rightarrow u(v' - \frac{2v}{y}) + u'v &= -2y^3 \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{2v}{y} \\ \int \frac{dv}{v} &= 2 \int \frac{dy}{y} \\ \ln |v| &= 2 \ln |y| \\ v &= y^2 \\ \Rightarrow \frac{du}{dy} y^2 &= -2y^3 \\ \Rightarrow \int \frac{du}{dy} &= - \int 2y \, dy \\ \Rightarrow u &= -y^2 + C\end{aligned}$$

$z = x^2$ en $z = uv = y^2(C - y^2)$ De AO wordt:

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

2.10 Orthogonale krommenbundel

Definitie: elke kromme uit de ene bundel snijdt elke kromme uit de andere bundel loodrecht.

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ f_{\perp}(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Raaklijn van f staat loodrecht op raaklijn van f_{\perp} . Wiskundig wordt dit vertaald door: $\omega_{RL\perp} = -\frac{1}{\omega_{RL}} = -\frac{1}{y'}$ De DVG van de orthogonale krommenbundel is

$$F_{\perp}\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)$$

Voorbeeld: Bepaal de DVG van de orthogonale krommenbundel van alle raaklijnen aan $y = x^2$.

Uitwerking

Elk punt op parabool kan beschreven worden als $p(a, a^2)$.

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$\begin{aligned}y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \Rightarrow y - a^2 &= 2ax - 2a^2 \\ \Rightarrow y &= 2ax - a^2\end{aligned}$$

2. DVG van de originele krommenbundel

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y' = 2a \end{cases} \Rightarrow y = y'x - \frac{y'^2}{4}$$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel y' wordt $-\frac{1}{y'}$

$$y = \frac{1}{y'}x - \frac{1}{4} \frac{1}{y'^2}$$

Uiteindelijk:

$$4y'^2y = -4xy' - 1$$

Deze DVG heeft graad 2, wat niet in deze cursus besproken wordt. Het is dus onoplosbaar.

Voorbeeld: Bepaal de orthogonale krommenbundel van alle parabolen met top in de oorsprong en symmetrieas de X-as.

Uitwerking

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$x = Cy^2$$

2. DVG van de originele krommenbundel. Er is 1 onafhankelijke constanten dus 1 keer afleiden

$$\begin{cases} x = Cy^2 \\ 1 = 2Cyy' \end{cases}$$

Hieruit volgt $C = \frac{x}{y^2}$ en dus $1 = \frac{2xy'}{x}$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel

y' vervangen door $-\frac{1}{y'}$ dus

$$1 = -\frac{2x}{yy'} \Leftrightarrow yy' = -2x$$

4. DVG oplossen

$$\begin{aligned}y \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \int y \, dy &= - \int 2x \, dx \\ \frac{y^2}{2} &= -x^2 \\ \frac{y^2}{2} + x^2 &= C\end{aligned}$$

Dit zijn dus ellipsen

2.11 DVG van hogere orde

Voorbeeld: Los op

$$y''' = e^{-2x}$$

Uitwerking

$$y''' = e^{-2x}$$

$$y'' = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1$$

$$y' = -\int \frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 dx = \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3 \end{aligned}$$

2.11.1 DVG van orde 2 van type $F(x, y', y'') = 0$

Bewijs oplossingsmethode:

Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en x .

Voorbeeld: Bepaal de AO van $xy'' = y' - x$

Uitwerking

$xy'' = y' - x$ komt overeen met $F(x, y', y'')$

Stel $y' = p \rightarrow y'' = x \frac{dp}{dx} = p - x$ waaruit volgt dat $x dp = (p - x) dx$. Dit is homogeen ($\lambda^{(1)}$) dus we stellen $p = ux$

$$x(u dx + x du) = (ux - x) dx$$

$$u dx + x du = (u - 1) dx$$

$$x du = -dx;$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \ln|x| + C_1x$$

$$\int dy = -\int x \ln|x| + C_1x dx$$

Het Antwoord is:

$$y = \frac{-x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + \frac{C_1}{2}x^2 = \frac{-x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + C_1x^2$$

2.11.2 DVG van orde 2 van type $F(y, y', y'') = 0$

Bewijs oplossingsmethode:

Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp/dy}{dx/dy} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en y .

Voorbeeld: Bepaal de PO van $(1-y)^2 y'' - y'^3 = 0$ met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$

Uitwerking

Stel $y' = p \rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$

$$(1-y)^2 p \frac{dp}{dy} - p^3 = 0$$

$$(1-y)^2 \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

$$(1-y)^2 \frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{1-y} + C_1$$

$$C_1 = 0 \quad \text{aangezien } p(0) = 1 \text{ en } y(0) = 2$$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y-1}$$

$$\begin{cases} dx = \frac{dy}{y-1} \\ x = \ln|y-1| + C_2 \\ 0 = \ln|1| + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \ln|y-1|$$

$$e^x = y-1$$

$$y = e^x + 1$$

2.12 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Voor geen enkele stelling is het bewijs te kennen

2.12.1 Stelling 1

Is $L(D)y = 0$ een lineaire homogene DVG van n^{de} orde en $y_i(x), i = 1, \dots, n$ n onafhankelijke PO's van $L(D)y = 0$ dan is $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$ de AO van $L(D)y = 0$

2.12.2 Stelling 2

Indien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_m^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, dan zijn de PO's van $L(D)y = 0$ lineair onafhankelijk.

2.12.3 Stelling 3

Indien $L(D)y = 0$ een lineaire DVG van n^{de} orde, $y_1(x)$ een PO van $L(D)y = Q(x)$ en $y_2(x)$ de AO van $L(D)y = 0$ dan is $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ de AO van $L(D)y = Q(x)$

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t + 2) - tH(t) + (t + t^2)H(t - 2)$

Uitwerking

Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$	<i>_TODO: graph</i>
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$	

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t - 2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t - 3)(-1 + e^t + t^2) + H(t - 5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t - 2) + (t^2 + e^t - 1)H(t - 3) - (t^2 - t + 25)H(t - 5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a) dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t)$ voor $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

$$\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & \forall t \in]a - \epsilon_1, a + \epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de Dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.

De afgeleide van de Heaviside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt} H(t-a) = \delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt$$

Uitwerking

In dit geval is $f(t) = (2 \sin t - 1)$ en $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$. We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt &= \int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t) = 0$ voor elke $t < 0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \rightarrow f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien $t < 1$ en 2 als $t > 1$. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

Uitwerking

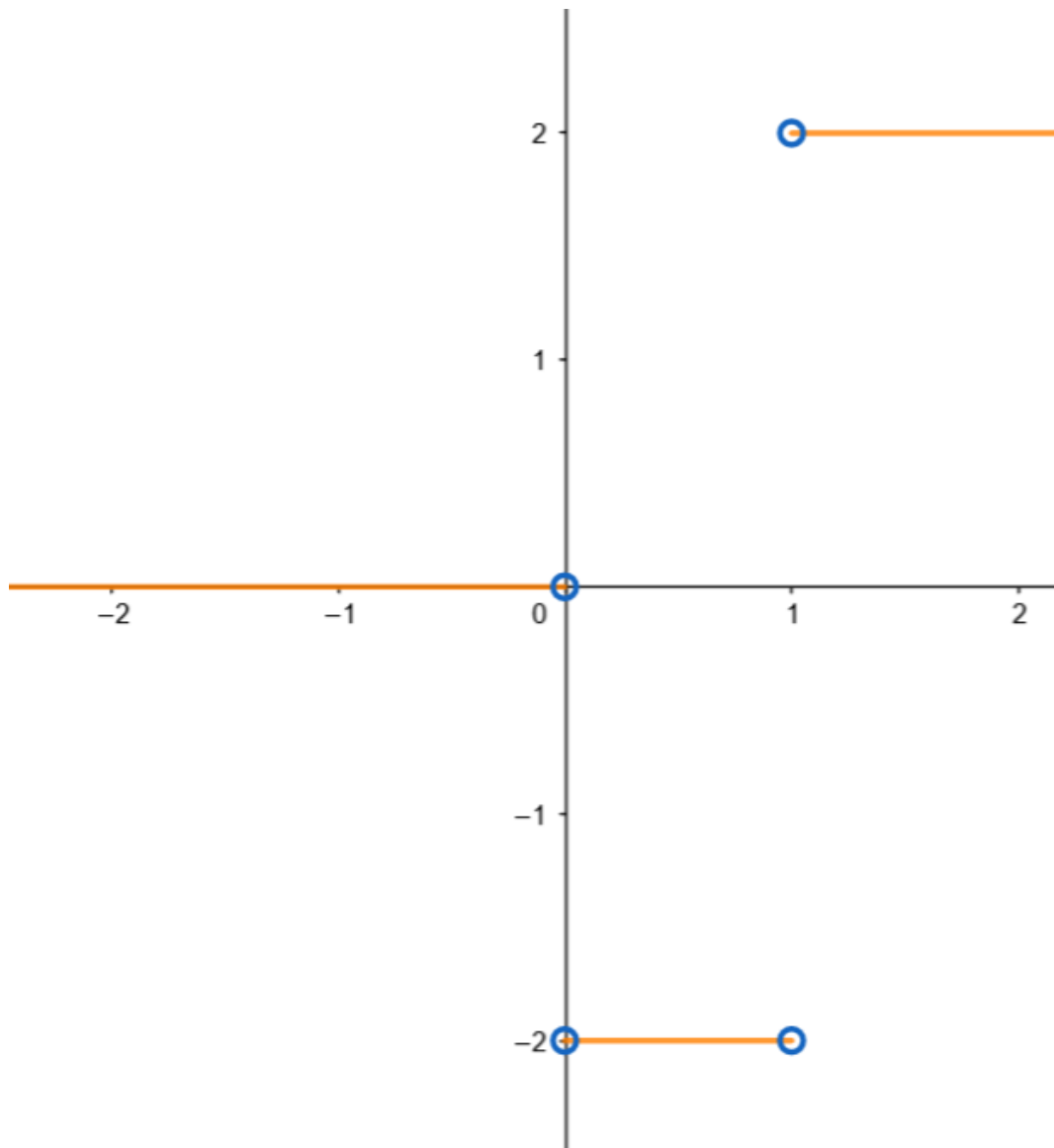
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t - 1)(-2 + 2) \\ &= -2H(t) + 4H(t - 1) \end{aligned}$$

Tekening:



3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in \mathbb{R}$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a . Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
|\sin t| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1 \text{ (willekeurige waarde)} \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1e^{at}
\end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat $a = 0$ en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1 + 2t)e^{-t}$

Uitwerking

Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|(1 + 2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2t)e^{-t}}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{at}e^t} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}}
\end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a + 1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{+\infty}{0} \rightarrow \text{onbepaald}$
- $a + 1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \text{L'Hopital}$

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hospital toe.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a + 1)} \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aangezien het een reële uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a + 1 > 0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

Het argument tussen de $|\dots|$ is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2+y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s = x + yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1.

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}, \quad s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\ &= |f(t)|e^{-xt} \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\ &= |f(t)|e^{-xt} \end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

•

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)} dt \\ &= \left. \frac{e^{t(a-s)}}{a-s} \right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-st}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

•

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{wj t}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\
 &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\
 &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j
 \end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

•

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t-0)\}(s) \\
 &= \int_0^{+\infty} \delta(t-0) e^{-st} dt \\
 &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t - 1)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1) + \sin(2t)\sin(1)\}(s) \\ &= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\ &= \cos(1)\frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1)\frac{2}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s\cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2\sin(1)}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2}\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - 3\frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - \frac{27s}{9s^2 + 1}\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{-st} dt \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}}e^{-s \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\ &= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)H(t - a)\}(s) = e^{-as}F(s) \quad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_0^a f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&\quad \text{stel } u = t - a \\
&\quad \text{dan } du = dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa} du \\
&= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as} F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2 - 1)H(t - 1) - \sin(3t)H(t - \pi)$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t - 1)^2 + 2(t - 1)]H(t - 1)\}(s) \\
&= e^{-as} \mathcal{L}\{t^2 + 2t\}(s) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2!}{s^3} + 2 \frac{1!}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2(1 + s)}{s^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t - \pi))H(t - \pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \frac{3}{s^2 + 9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) \\ &= e^{-s} \left(\frac{2(1+s)}{s^3} \right) - \left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9} \right) \\ &= e^{-s} \left(\frac{2(1+s)}{s^3} \right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s + a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3 - 1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7 - 2t^4 + t)e^{-t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t^7 - 2t^4 + t\}(s + 1) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{2 \cdot 4!}{(s + 1)^5} + \frac{1!}{(s + 1)^2} \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s - 2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{(s - 2)^2 + 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$

3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at) e^{-st} dt \\ \text{stel } u &= at \\ \text{dan } du &= a dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u) e^{-s \frac{u}{a}} \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-\frac{s}{a} u} du \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(u)\}\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin t\}\left(\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} \\ &= \frac{\omega}{\omega^2 \left(\frac{s^2}{\omega^2} + 1\right)} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\ &= s \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\ &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \Leftrightarrow \omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

3.5.7 Laplacegetransformeerde van $f''(t)$

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voorbeeld: Gegeven $g(t) = te^{-t}$, bepaal $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\ &= s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) \\ \text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ \text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\ &= e^{-t}(1-t) \\ \Rightarrow s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2 \frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\ &= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ \frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\ \frac{d^2F}{ds^2} &= - \int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2f(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) \\
*) \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds} \\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds} \\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right) \\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2} \\
**) \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) &= (-1)^3 \frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} \\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2} \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3} \\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4} \\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4}) \\
&= \frac{6}{(s+1)^4} \\
* - ** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}$$

3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s) \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}g(t) &= \int_0^t f(u) \, du \\g'(t) &= f(t) \\g'(0) &= 0 \\\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s) - 0 \\\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s)\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\&= \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\&= \frac{1}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \, dt$$

_TODO: slide 19

3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) \, du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

Voorbeeld: Gegeven $f(t) = e^{at}$ en $g(t) = e^{bt}$. Illustreer de juistheid van deze rekenregel.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} du \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})\right\}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{(e^{at} - e^{bt})\}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{(s-b) - (s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $H(t) * H(t) * H(t)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) du \\
\text{aangezien } 0 \leq u \leq t & \\
\Rightarrow H(u) &= 1 \\
\Rightarrow H(t-u) &= 1 \\
&= \int_0^t du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u) du \\
&= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

3.5.12 Inverse Laplacetransformatie

Definitie:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \quad \text{indien} \quad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow s^2 + 2s + 1 &= a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 : a &= \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 : b &= -4 \\
\text{als } s = 2 : c &= \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{2s + 7}{2s^2 + 4s + 10}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{s^2 + 2s + 5}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{(s + 1) + 5/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - \cos(2t)e^{-t} - \frac{5}{2} \sin(2t)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t \right)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} \cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1} + \frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1) \\
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t} - \cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1 - \cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD } &\Rightarrow e^{-(t-\pi)}(1 - \cos(t-\pi))H(t-\pi) \\
&= e^{\pi-t}(1 + \cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5 e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5 e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $(H * H * H * H*)(t)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u \cos[2(t-u)] du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u - [2(t-u)]) + \sin(2u + [2(t-u)]) du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(4u - 2t) + \sin 2t du \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_0^t \sin(4u - 2t) du + \int_0^t \sin 2t du\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\cos(4u - 2t)\right]_0^t + \frac{1}{4}\left[u \sin 2t\right]_0^t \\
&= \frac{1}{16}\left(-\cos 2t + \cos(-2t)\right) + \frac{1}{4}t \sin 2t \\
&= \frac{1}{4}t \sin 2t
\end{aligned}$$

Hoofdstuk 4

Reeksen

4.1 Definities

Rij $[a_n] = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ met a_n de algemene term.

$$[a_n] = \begin{cases} \text{convergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ? \end{cases}$$

Voorbeeld:

$$\left[\ln\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

Uitwerking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

Dus divergent naar $-\infty$.

Voorbeeld:

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

Uitwerking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$$

Dit is een onbepaaldheid. We maken gebruik van het getal e .

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{n(-1)} = e^{-1}$$

Dus convergent.

Voorbeeld:

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots, \dots$$

Uitwerking

Bepaal de algemene term: $a_n = 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 2 \cdot 0 = 0$$

Dus convergent.

Voorbeeld:

$$[(-2)^n]$$

Uitwerking

$$[(-2)^n] = -2, 4, -8, 16, -32, \dots$$

De laatste term is ofwel positief ofwel negatief. De limiet bestaat niet dus deze reeks is divergent.

4.2 Hoofdeigenschappen

Een stijgende rij naar boven begrensd is convergent. Een dalende rij naar onder begrensd is convergent.

In symbolen:

$$a_n \uparrow, \forall n \quad a_n \leq b \rightarrow \text{convergent}$$

$$a_n \downarrow, \forall n \quad b \leq a_n \rightarrow \text{convergent}$$

Voorbeeld:

$$\left[\frac{2n-1}{n} \right]$$

Uitwerking

Als n stijgt zal $\frac{1}{n}$ dalen. $2 - \frac{1}{n}$ stijgt dus. Er kan besloten worden dat voor alle n dat $2 - \frac{1}{2} \leq 2$. Deze reeks convergeert

Voorbeeld:

$$\left[\sin \frac{1}{n} \right]$$

Uitwerking

Als n stijgt zal $\frac{1}{n}$ dalen. $\sin \frac{1}{n}$ daalt dus. Er kan besloten worden dat voor alle n dat $\sin \frac{1}{n} \geq 0$. Deze reeks convergeert.

4.3 Numerieke reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

waarbij

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$\sum a_n = \begin{cases} \text{convergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ? \end{cases}$$

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Uitwerking

Uitschrijven van een aantal partieelsommen:

- $n = 2: S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $n = 3: S_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$
- $n = 4: S_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$
- $n = 5: S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

Hieruit volgt dat

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Berekening van de limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De reeks convergeert.

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Uitwerking

Uitschrijven van een aantal partieelsommen:

- $n = 0$: $S_1 = 1$
- $n = 1$: $S_2 = 1 - 1 = 0$
- $n = 2$: $S_3 = 0 + 1 = 1$
- $n = 3$: $S_4 = 1 - 1 = 0$

Hieruit volgt dat

$$S_{2n} = 0 \quad \text{en} \quad S_{2n+1} = 1$$

De limiet bestaat niet dus de reeks divergeert.

4.4 De meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

4.4.1 Convergentieonderzoek

We weten dat

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

We moeten de limiet van S_n berekenen. We onderscheiden twee gevallen:

- $q \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n)$$

als $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ dus $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} (1 - 0) = \frac{1}{1 - q} \in \mathbb{R}$
Convergent

als $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ dus $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$
Divergent naar $+\infty$

als $q \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?$
Divergent

- $q = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

$$S_n = n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Divergent naar $+\infty$

Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ q \geq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \rightarrow \text{Divergent} \end{cases}$$

Voorbeeld: Convergeert de reeks $-2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \dots$ en indien convergent, naar welke reekssom?

Uitwerking

Herschrijf de reeks:

$$-2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots\right)$$

Dit komt overeen met

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Dit is een meetkundige reeks met $q = -\frac{1}{3}$. Het is duidelijk dat $|q| < 1$ dus de reeks convergeert. De reekssom is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

4.5 Eigenschappen

- De convergentie of divergentie verandert niet door het weglaten of bijvoegen van een eindig aantal termen.
- Als een reeks $\sum a_n$ convergeert naar S dan convergeert de reeks $\sum k a_n$ naar kS
- Indien $\sum a_n$ convergeert dan geldt dat: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergent

Voorbeeld: Bewijs convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n &= 1^\infty \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n-7}\right)^{n \frac{2n-7}{2} \cdot \frac{2}{2n-7}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-7}} \\ &= e \neq 0 \end{aligned}$$

De reeks is divergent naar $+\infty$

4.6 Reeksen met 'uitsluitend' positieve termen

Dit zijn reeksen waarbij:

- Een eindig aantal negatieve termen weggelaten mogen worden.
- Reeksen met uitsluitend negatieve termen kunnen vermenigvuldigd worden met -1.

4.6.1 Integraalcriterium van Cauchy

Indien

$$a_n \geq 0$$

en

$$f(x) = f(n)$$

waarbij $f(x)$ dalend en continu is over $[m, +\infty[$ dan geldt er

$$\begin{aligned} \int_m^\infty f(x) dx \in \mathbb{R} &\Rightarrow \sum a_n \quad \text{convergent} \\ \int_m^\infty f(x) dx = \infty &\Rightarrow \sum a_n \quad \text{divergent naar } \infty \end{aligned}$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$$

Uitwerking

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

We bepalen het gebied waar $f(x)$ continue en dalend is. We berekenen de afgeleide:

$$f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

Uit tekenonderzoek kan afgeleid worden dat $f(x)$ continu en dalend is vanaf e^2 . Kies $m \geq e^2$. Pak een gemakkelijk getal, zoals $m = 9$

$$\begin{aligned} \int_9^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \left[\frac{\ln^3 x}{3} \right]_9^{+\infty} \\ &= \frac{+\infty}{+\infty} - \frac{\ln^3 9}{3} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

De reeks divergeert naar $+\infty$.

4.6.2 De hyperharmonische reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

Convergentieonderzoek

- $p \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = +\infty$ De reeks divergeert naar $+\infty$
- $p > 0$ We gebruiken het Integraalcriterium van Cauchy want

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^p} \quad a_n \geq 0$$

en

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

De functie $f(x)$ is continu over $]0, +\infty[$, maar is pas dalend vanaf 1. Dus het interval wordt $[1, +\infty[$. De integraal wordt als volgt:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 > 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-p}(0-1) \in \mathbb{R} : \text{convergent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 < 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \infty \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-p}(\infty-1) = \infty : \text{divergent naar } +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 = 1 &\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty \\ &\text{divergent naar } +\infty \end{aligned}$$

Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}$$

4.6.3 Vergelijkingscriteria

Indien $\sum a_n$ gevraagd wordt, gebruik een gekende reeks $\sum b_n$. Tot nu toe kennen we twee reeksen: $\sum q^n$ en $\sum \frac{1}{n^p}$

1.
 - als $a_n \leq b_n$ en $\sum b_n$ convergent, dan $\sum a_n$ convergent
 - als $b_n \leq a_n$ en $\sum b_n$ divergent, dan $\sum a_n$ divergent

2. als $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \neq \infty$ dan beide reeksen zelfde gedrag.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

Uitwerking

De reeks kan geschreven worden als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

Dit komt overeen met een meetkundige reeks met $q = \frac{1}{4}$. Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2}$$

Uitwerking

Als n naar oneindig gaat: $\frac{\sqrt{n}}{9n^2} \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$ Deze reeks kan dus geschreven worden als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

wat overeenkomt met de hyperharmonische reeks met $p = 3/2$. We weten dat dit convergeert. We passen de limiet toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} \sqrt{n}}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=3}^{\infty} -\sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

Uitwerking

In dit geval is $a_n < 0$. We vermenigvuldigen de reeks met -1. De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

We weten dat als n naar oneindig gaat, dat $\frac{1}{n}$ naar 0 gaat. Voor kleine waarden geldt: $\tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$. De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

wat overeenkomt met een hyperharmonische reeks met $p = 0.5$. We weten dat dit divergeert naar $+\infty$

We passen de limiet toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tan \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks divergeert naar $+\infty$

4.6.4 Convergentiecriteria

We gebruiken 2 convergentiecriteria:

D'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Beide limieten kennen 3 uitkomsten:

$$\begin{cases} < 1, \text{convergentie} \\ = 1, \text{????} \\ > 1, \text{divergentie} \end{cases}$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n^3}{3^n - n}$$

Uitwerking

We gebruik de convergentie criterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - n}{3^{n+1} - (n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(1 - \frac{n}{3^n})}{3^{n+1}(1 - \frac{n+1}{3^{n+1}})} \\ &= \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{convergentie} \end{aligned}$$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Uitwerking

Dit is een reeks met uitsluitend negatieve termen, dus we vermenigvuldigen met -1. We beschouwen nu de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Dit lijkt het geschikte probleem om op te lossen met Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n+1} = 1$$

Er kan dus geen besluit gevormd worden. We maken gebruik van de algemene limiet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n = 1^\infty$$

We maken gebruik van de definitie van het getal e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{2}{3n+1}\right)\right)^{-\frac{3n+1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3n+1}\right)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2n}{3n+1}} = e^{-2/3} \neq 0$$

Deze reeks is divergent naar $+\infty$. De originele reeks $\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$ is divergent naar $-\infty$

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$$

Uitwerking

We maken gebruik van het convergentiecriterium van Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0 < 1$$

Deze reeks convergeert.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!n}{(n!)^2}\right)$$

Uitwerking

Aangezien we te maken hebben met faculteiten is een goede keuze het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n+1)}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)(n!)}{n!(n+1)(n!)(n+1)(2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2} \\ &= 4 > 1\end{aligned}$$

Deze reeks is divergent naar $+\infty$

4.7 Willekeurige reeksen

Een reeks is willekeurig indien er een oneindig aantal negatieve en positieve termen zijn. Wij zien een speciale soort van willekeurige reeksen: de alternerende reeks. Deze heeft veelal de volgende vorm:

$$(-1)^n b_n \quad \text{met} \quad b_n > 0$$

4.7.1 Convergentiecriterium van Leibniz

Indien een reeks alternerend is en

$$\forall n : |a_n| \geq |a_{n+1}| \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

dan convergeert de reeks

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - n}$$

Uitwerking

We onderzoeken de voorwaarden van Leibniz.

- De reeks is duidelijk alternerend door $(-1)^n$
- $|a_n|$ moet dalend zijn. We stellen $f(x) = \frac{(-1)^x}{e^x - x}$. De afgeleide hiervan is $f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^2}$. Uit tekenonderzoek blijkt dat $|a_n|$ dalend is voor alle $n > 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$ moet 0 zijn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n - n} = \frac{1}{e^n(1 - n/e^n)} = 0$$

De reeks convergeert.

4.7.2 Nieuwe begrippen

Een reeks is **absoluut convergent** als $\sum |a_n|$ convergeert. Een reeks is **semi-convergent** als $\sum |a_n|$ divergeert en $\sum a_n$ convergeert.

Pas de volgende methode toe om een willekeurige reeks te onderzoeken:

1. Ga na of de reeks absoluut convergent is
2. Indien de reeks niet absoluut convergent is, pas dan de voorwaarden van Leibnitz toe.
3. Maak ook gebruik van $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

Uitwerking

We gaan eerst na of de reeks absoluut convergent is. Dit betekent dus dat we enkel de absolute termen moeten beschouwen. De reeks wordt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$. We passen D'Alembert toe

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

De reeks met absolute waarden convergeert. De originele reeks is dus absoluut convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}$$

Uitwerking

We gaan eerst weer na of deze reeks absoluut convergent is. We passen D'Alembert toe.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)^2 + 1} \cdot \frac{n^2 + 1}{\arctan(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2(n^2 + 1)}{(n^2 + 2n + 2)\pi/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Er kan geen besluit genomen worden. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II. We zoeken eerst een reeks om mee te vergelijken.

$$\sum \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1} \approx \sum \frac{1}{n^2}$$

We nemen de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1} \cdot n^2 = \frac{\pi}{2} \neq 0 \neq \infty$$

De reeks waarmee we vergeleken hebben is een harmonische reeks met $p = 2$. We weten dat deze reeks convergeert dus $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$ convergeert ook. Bijgevolg is $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$ absoluut convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

Uitwerking

Bij het uitrekenen van D'Alembert zou je 1 uitkomen waardoor geen besluit kan genomen worden. We gebruiken volgende redenering.

Als n stijgt, dan stijgt $4n-1$, dan stijgt $\sqrt{4n-1}$, dan daalt $\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ en dan daalt $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$. De reeks kan als volgt benaderd worden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dit is een harmonische reeks met $p = 1/2$. Deze reeks is divergent. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II en nemen de limiet.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}}{1/\sqrt{n}} &= \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{2}(4n-1)^{-3/2}(4)}{-\frac{1}{2}n^{-3/2}} \\ &= \frac{-2}{\frac{-1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{(4n-1)^{3/2}} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{4n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty \end{aligned}$$

De reeks toont hetzelfde gedrag als de harmonische reeks en is dus divergent. Het besluit is dat deze reeks niet absoluut convergent is. We gaan nu na of de reeks semi-convergent is met de voorwaarden van Leibniz. We hebben al bewezen dat $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ dalend is. We berekenen de limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} = 0$$

De reeks is semi-convergent.

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Uitwerking

Dit is heel eenvoudig na te gaan met $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (1 - 0) = -1^\infty$$

De reeks is divergent.

4.8 Reeksen van functies

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Bij deze soort reeksen zijn we geïnteresseerd in het convergentiegebied van x . Voor welke waarden van x is de overeenkomstige reeks convergent. Gebruik volgende methodiek:

1. Bereken

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \quad \text{of} \quad L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$$

2. Indien $L(x) < 1$ dan behoort x tot het CG

Indien $L(x) > 1$ dan behoort x niet tot het CG

Indien $L(x) = 1$ dan ???

4.8.1 Machtreeksen rond $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

stelling: Het CG van een machtreeks rond $x=a$ is een symmetrisch interval rond $x=a$
bewijs:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x - a)^{n+1}}{c_n(x - a)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x - a| < 1 \\ x \in CG &\Leftrightarrow |x - a| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \rho \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\rho < x - a < \rho \rightarrow a - \rho < x < a + \rho$$

Het CG wordt

$$]a - \rho, a + \rho[$$

Voorbeeld: Bepaal het CG van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n$$

Uitwerking

We passen de limiet van Cauchy toe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{2x+1}{x} \right)^n \right|}$$

x behoort enkel tot een CG als deze limiet kleiner dan 1 is. We onderzoeken deze functie eerst.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{x}\right| < 1 &= \frac{(2x+1)^2}{x^2} < 1 \\ &= (2x+1)^2 < x^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 < 0 \\ &= 3x^2 + 4x + 1 < 0 \\ &= 3(x+1/3)(x+1) < 0\end{aligned}$$

Uit tekenonderzoek blijkt dat $x \in CG \rightarrow x \in]-1, -1/3[$. Om na te gaan ofdat de grenzen inbegrepen zijn berekenen we de limiet voor $x = -1$ en $x = -1/3$.

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 5

Differentiaalvergelijkingen

5.1 Bepalen van differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned}y' &= C_1 \\y'' &= 0\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x-as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2 . De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') &= 0\end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_p &= (x_p)^2 = C^2 \\ \Rightarrow p(C, C^2)\end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned}y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 &= y' \left(\frac{y'}{2}\right) \left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4y - y'^2 &= 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow y'^2 - 4y'x + 4y &= 0\end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

5.2 Differentiaalvergelijkingen van de eerste orde en eerste graad

5.2.1 Scheiden van de veranderlijken

Bepaal de AO van

$$\frac{\sin x}{2 + y} y' = \cos x$$

Oplossing

Deze DVG kan eenvoudig gescheiden worden als.

$$\frac{1}{2 + y} dy = \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

Neem de integraal.

$$\int \frac{1}{2 + y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

De vergelijking wordt:

$$\ln |2 + y| = \ln |\sin x| + C$$

De constante C kan geschreven worden als $\ln C$ zodat die samengevoegd kan worden met $\ln \sin x$

$$\ln |2 + y| = \ln |C \sin x|$$

De AO wordt dus

$$y = C \sin x - 2$$

5.2.2 Homogene differentiaalvergelijkingen

Bepaal de AO van

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

Oplossing

Herschrijf eerst de DVG

$$2xydy = (x^2 + y^2) dx$$

Controleer of deze DVG homogeen is. Vervang x met λx en y met λy . De DVG wordt

$$2\lambda x \lambda y dy = (\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2) dx \Rightarrow \lambda^2 (2xy) dy = \lambda^2 (x^2 + y^2) dx$$

Deze DVG is homogeen van de tweede graad. Pas de algemene oplossingsmethode toe, $y = ux$, $dy = udx + xdu$ en steek dit in de DVG.

$$\begin{aligned} 2x(ux)(u dx + x du) &= (x^2 + u^2 x^2) dx \\ \Rightarrow 2u(u dx + x du) &= 1 + u^2 dx \\ \Rightarrow 2u^2 dx + 2ux du &= 1 + u^2 dx \\ \Rightarrow 2ux du &= 1 - u^2 dx \\ \Rightarrow \frac{2u}{1 - u^2} du &= \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow \int \frac{2u}{1 - u^2} du &= \int \frac{1}{x} dx \\ \Rightarrow -\ln |1 - u^2| &= \ln |x| + C \\ \Rightarrow \ln |x| + \ln |1 - u^2| &= C \\ \Rightarrow \ln |x(1 - u^2)| &= C \\ \Rightarrow x(1 - u^2) &= C \\ \Rightarrow x(1 - \frac{y^2}{x^2}) &= C \end{aligned}$$

De AO is $x(1 - \frac{y^2}{x^2}) = C$

Bepaal de AO van

$$3y \cos \frac{x}{y} dx - (2y \sin(\frac{x}{y}) + 3x \cos(\frac{x}{y})) dy$$

Oplossing

Controleer of deze DVG homogeen is.

$$3\lambda y \cos \frac{x}{y} dx - (2\lambda y \sin(\frac{x}{y}) + 3\lambda x \cos(\frac{x}{y})) dy$$

Dit is homogeen van de eerste graad. Er kan gekozen worden tussen $x = uy$ of $y = ux$. We kiezen $x = uy$ aangezien we dan $u = \frac{x}{y}$ hebben en dit gemakkelijk kan gesubstitueerd worden. We substitueren $x = uy$ in de DVG.

$$\begin{aligned} & 3y \cos u(u dy + y du) - (2y \sin u + 3uy \cos u) dy = 0 \\ \Rightarrow & 3 \cos u(u dy + y du) - (2 \sin u + 3u \cos u) dy = 0 \\ \Rightarrow & 3u \cos u dy + 3y \cos u dy - 2 \sin u - 3u \cos u dy = 0 \\ \Rightarrow & 3y \cos u du = 2 \sin u dy \\ \Rightarrow & 3 \int \frac{\cos u}{\sin u} du = 2 \int \frac{dy}{y} \\ \Rightarrow & 3 \ln |\sin u| = 2 \ln |y| + C \\ \Rightarrow & \ln |\sin^3 u| = \ln |Cy^2| \\ \Rightarrow & \sin^3 u = Cy^2 \\ \Rightarrow & \sin^3 \frac{x}{y} = Cy^2 \end{aligned}$$

5.2.3 Totale differentiaalvergelijkingen

Bepaal de AO van

$$y(\cos(xy) + 1) dx + x(\cos(xy) + 1) dy = 0$$

Oplossing

We bekijken of deze DVG totaal is.

$$\frac{\partial}{\partial y} [y(\cos(xy) + 1)] = \cos(xy) + 1 - yx \sin(xy)$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x} [x(\cos(xy) + 1)] = \cos(xy) + 1 - yx \sin(xy)$$

Deze DVG is exact. We zoeken nu $F(x, y)$ zodat $\frac{\partial F}{\partial x} = y(\cos(xy) + 1)$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = x(\cos(xy) + 1)$.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int (y \cos(xy) + y) dx + k(y) \\ \Rightarrow & y \sin(xy) + yx + k(y) \\ \frac{\partial (y \sin(xy) + yx + k(y))}{\partial y} &= x(\cos(xy) + 1) \\ \Rightarrow & x \cos(xy) + x + k'(y) = x \cos(xy) + x \\ \Rightarrow & k'(y) = 0 = C \end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$F(x, y) = \sin(xy) + yx + C$$

. De AO is

$$\sin(xy) + xy = C$$

Bepaal de AO van

$$(3x^2y - y^2) dx = -(x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y}) dy$$

Oplossing

We controleren eerst weer of dat deze DVG exact is.

$$\frac{\partial}{\partial y} [3x^2 - y^2] = 3x^2 - 2y$$

en

$$\frac{\partial}{\partial x} [x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y}] = 3x^2 + 2y$$

Deze DVG is exact. We zoeken $F(x, y)$ zodat

$$\begin{cases} (1) \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2y - y^2 \\ (2) \frac{\partial F}{\partial y} = x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) F(x, y) &= \int (3x^2y - y^2) dx + k(y) \\ &= x^3y - y^2x + k(y) \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\partial}{\partial y} \left(x^3y - y^2x + k(y) \right) = x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y}$$

$$\Rightarrow x^3 + 2xy + k'(y) = x^3 - 2xy + \frac{\ln y}{y}$$

$$\Rightarrow k(y) = \int \frac{\ln y}{y} dy = \frac{1}{2} \ln^2 y + C$$

Uiteindelijk:

$$F(x, y) = x^3y - y^2x + \frac{1}{2} \ln^2 y + C$$

De AO is

$$x^3y - y^2x + \frac{1}{2} \ln^2 y = C$$

Bepaal alle functies $f(x)$ zodat volgende DVG met vemenigvuldiging met $f(x)$ totaal wordt.

$$2 \sin x \sin y dx - \cos x \cos y dy = 0$$

Oplossing

Vermenigvuldig de DVG met $f(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) \cdot 2 \sin x \sin y \, dx - f(x) \cdot \cos x \cos y \, dy &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}(f(x) 2 \sin x \sin y) &= \frac{\partial}{\partial x}(-f(x) \cos x \cos y) \\ \Rightarrow 2f(x) \sin x \cos y &= f(x) \sin x \cos y - f'(x) \cos x \cos y \\ \Rightarrow f(x) \sin x \cos y &= -f'(x) \cos x \cos y \\ \Rightarrow f(x) \sin x &= -f'(x) \cos x \\ \Rightarrow \tan x &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ \Rightarrow \tan x &= \frac{df(x)/dx}{f(x)} \\ \Rightarrow -\tan x \, dx &= \frac{df(x)}{f(x)} \\ \Rightarrow -\int \tan x \, dx &= \int \frac{df(x)}{f(x)} \\ \Rightarrow \ln |\cos x| &= \ln |f(x)| + C \\ \Rightarrow \ln |C \cos x| &= \ln |f(x)| \\ \Rightarrow f(x) &= C \cos x\end{aligned}$$

5.2.4 Lineaire DVG in y en y'

Bepaal de PO door $(1, 2)$ voor $y' + \frac{y}{x} - (x^2 + 1) = 0$

Oplossing

Schrijf de DVG als $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$. Deze DVG is lineair in y en y' . We passen de algemene oplossingsmethode toe.

Stel $y = uv$, $y' = u'v + uv'$.

De DVG wordt:

$$\begin{aligned}u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) &= x^2 + 1\end{aligned}$$

5.2.5 Lineaire DVG met constante coëfficiënten

Gegeven

$$y'' + y = 0$$

1. Bepaal de AO
2. Bepaal de PO zodat $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ en $y(\pi) = 1$

$$\mathcal{L}\{y'' + y\}(s)$$

Hoofdstuk 6

Laplacetransformatie

6.1 De Heaviside functie

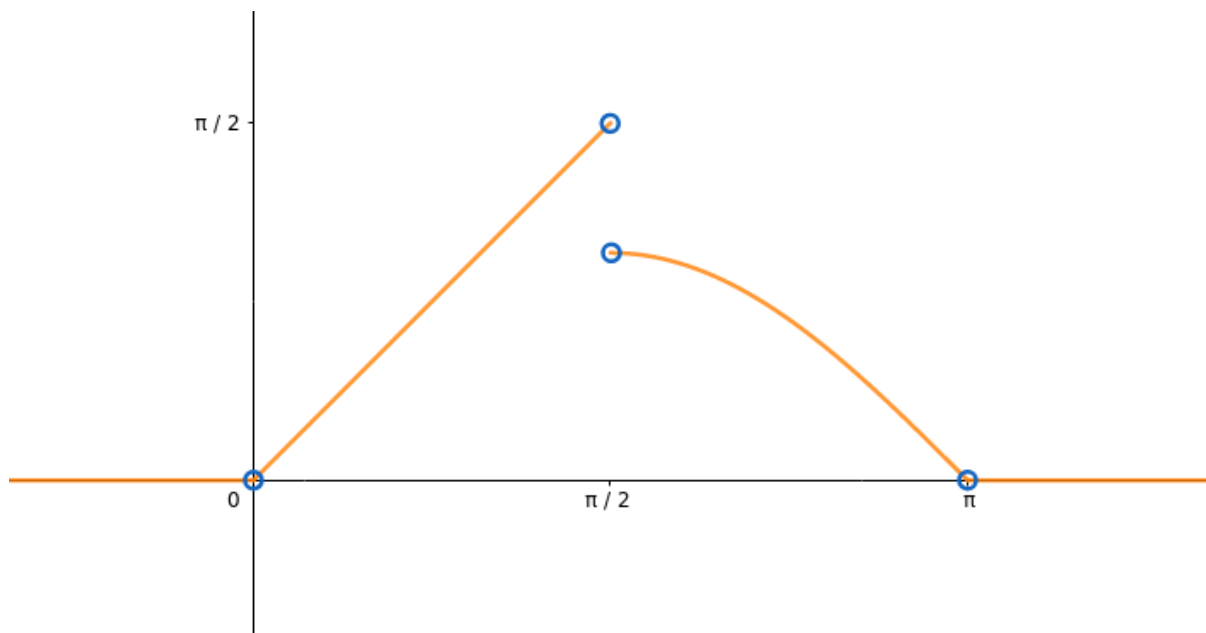
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

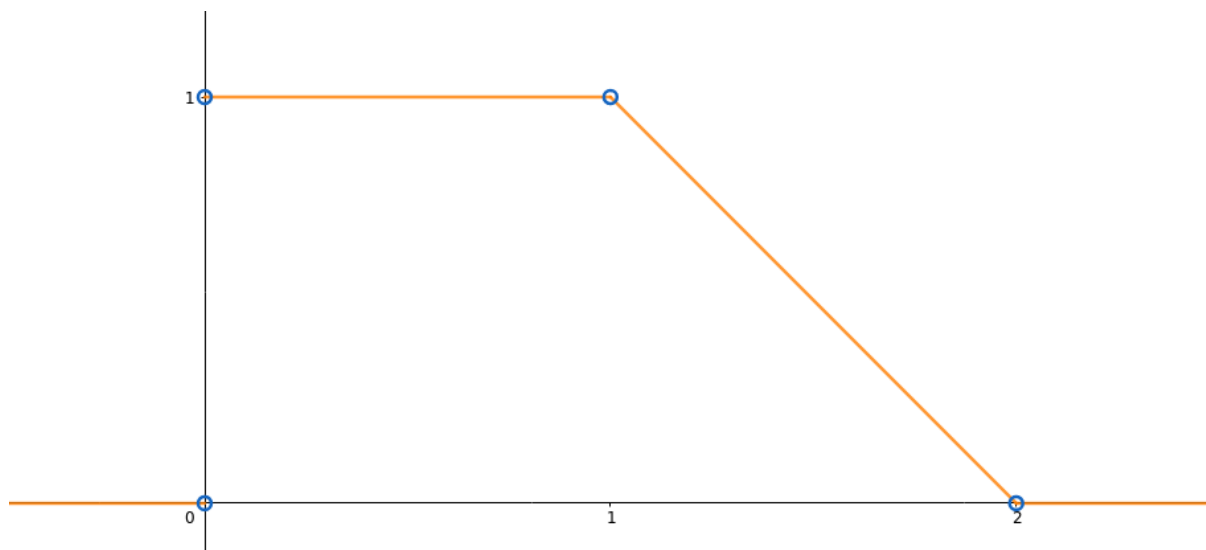
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0 + t) + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(-t + \sin t) + H(t - \pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) + H(t - \pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) - H(t - \pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

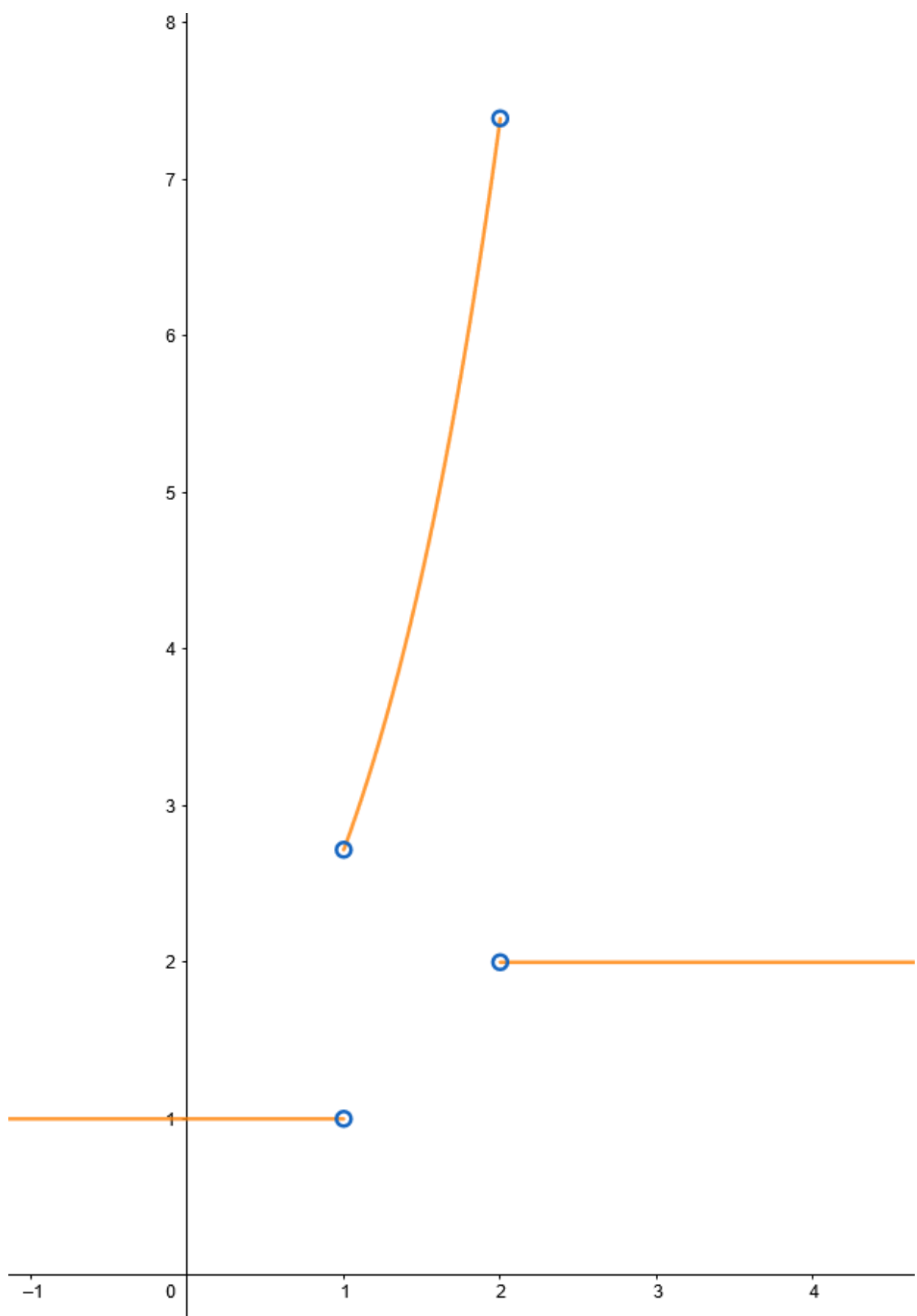
Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned}h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t - 1)(-1 + (2 - t)) + H(t - 2)(-(2 - t) + 0) \\&= H(t) + H(t - 1)(1 - t) + H(t - 2)(t - 2)\end{aligned}$$

Teken de functie $f(t) = 1 + H(t - 1)(e^t - 1) + H(t - 2)(2 - e^t)$

Oplossing

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



6.2 Functies van de exponentiële orde

Geef de exponentiële orde van $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t} e^{2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \quad \text{voor } \alpha+2 > 0 \\ &= 0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\alpha + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &> -2\end{aligned}$$

De exponentiële orde is -2.

Geef de exponentiële orde van $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\ &= 6 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(3-\alpha)}\end{aligned}$$

Indien $3 - \alpha < 0$ dan wordt de limiet 0. De exponentiële orde is dus 3.

6.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t$$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}$$

$$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1 + e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$

$$f(t) = \sin^2 t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right]\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2\delta(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st} dt \\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2} \\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$

$$f(t) = (t-1)H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s) \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\} H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s} \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} \right)
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sin(t) H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t) H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2) H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s} [\cos(2) \mathcal{L}\{\sin(u)\} + \sin(2) \mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s} \left(\frac{\cos(2)}{s^2 + 1} + \frac{\sin(2)s}{s^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2 e^{-2t}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}$$

$$f(t) = e^t \cos 3t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1) \\
&= \frac{s-1}{(s-1)^2 + 9}
\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-2t} \sin 2t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^2 + 4}
\end{aligned}$$

$$f(t) = t \cos t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d \left[\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \right]}{ds} \\ &= - \frac{d \left[\frac{s}{s^2+1} \right]}{ds} \\ &= - \frac{(s^2+1) - s(2s)}{(s^2+1)^2} \\ &= - \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2) \\ &= \mathcal{L}\left\{t \frac{1+\cos t}{2}\right\}(s+2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t \cos t\}(s+2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2-1}{((s+2)^2+1)^2} \right)\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-3t} t^3 H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-3t} t^3 H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3 H(t-2)\}(s+3) \\ &= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3 H(t-2)\}(s+3) \\ &= \mathcal{L}\{[(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2) + 8] H(t-2)\}(s+3) \\ &= e^{-2s} \mathcal{L}\{u^3 + 6u^2 + 12u + 8\}(s+3) \\ &= e^{-2s} \left[\frac{3!}{(s+3)^4} + 6 \frac{2!}{(s+3)^3} + 12 \frac{1!}{(s+3)^2} + 8 \frac{1}{s} \right] \\ &= e^{-2s} \left[\frac{6}{(s+3)^4} + \frac{12}{(s+3)^3} + \frac{12}{(s+3)^2} + \frac{8}{s} \right] \\ &= 2e^{-2s} \left[\frac{3}{(s+3)^4} + \frac{6}{(s+3)^3} + \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{4}{s} \right]\end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos 2t + H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\ &= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1.

$$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s - 2) \\ &= \mathcal{L}\left\{\left(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s - 2) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}\left\{\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s - 2) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \left(\frac{1}{(s - 2)^2} + \frac{\pi}{4(s - 2)} \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos 2t H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{[\cos 2(t - \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2(t - \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{2}] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= -\mathcal{L}\{\sin 2(t - \frac{\pi}{4}) H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}\{\sin 2u\} \\ &= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \left(\frac{1}{(s - 2)^2} + \frac{\pi}{4(s - 2)} \right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}$$

6.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$$f(s) = \frac{1}{s^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\ &= \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4} + \frac{5}{s^4}\right\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) + \frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{5t^3}{6}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{1}{3s-1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t) \\ &\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3)+b(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\ &\Rightarrow 2s+3 = a(s-3)+b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 9 \end{cases} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2} + \frac{9}{s-3}\right\}(t) \\ &= -7e^{2t} + 9e^{3t}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t) \\ &= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t) \\
& \Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9) + (b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
& \Rightarrow s+3 = a(s^2+9) + (b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
& = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{1}{s+3}^2$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}^2\right\}(t) &= e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) \\
&= te^{-3t}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^3}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2[(s+2)-2]+5}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{e^{2t}}{2!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\
&= e^{2t}\left(2t + \frac{1}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s - 3}{s^2 + 2s + 5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+5}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\ &= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(t) + \frac{e^{-t}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}(t) \\ &= e^{-t}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-s}}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^4}\right\}(t) &= f(t-1)H(t-1) \\ \text{met } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t) &= \frac{t^3}{6} \\ \Rightarrow \frac{(t-1)^3}{6}H(t-1)\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+2}\right\}(t) &= f(t-3)H(t-3) \\ \text{met } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) &= e^{-2t} \\ \Rightarrow e^{-2(t-3)}H(t-3)\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\ \text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^5}\right\}(t) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}(t) = \frac{e^{-3t}}{4!}t^4 \\ &\Rightarrow \frac{e^{-3(t-2)}(t-2)^4}{4!}H(t-2)\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}\right\}(t) &= \text{splitsen in partie\AA l breuken} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-7}{s^2-2s+2}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2}\left[1+t+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s-1)-2}{(s-1)^2+1}\right\}(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1+t+5e^t\cos t-2e^t\sin t\right]\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\}(t) \\ &= -\frac{1}{4}(-1)t\sin 2t \\ &= \frac{t}{4}\sin 2t\end{aligned}$$

Bepaal het inverselaplacebeeld met convolutie van

$$f(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{s - 1}\right\}(t) \\ &= e^t * e^{-t} \\ &= \int_0^t e^u e^{-(t-u)} du \\ &= \int_0^t e^{2u-t} du \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2u-t}\right]_{u=0}^{u=t} \\ &= \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}]\end{aligned}$$

Hoofdstuk 7

Reeksen

De volgende reeksen moeten gekend zijn:

- De meetkundige reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ q \geq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \rightarrow \text{Divergent} \end{cases}$$

- De hyperharmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}$$

- De harmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{divergent naar } +\infty$$

7.1 Reeksen met uitsluitend positieve termen

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$$

Oplossing

We weten dat $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1$. Hieruit volgt dat $\frac{\cos^2 n}{4^n} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$. Dit is een meetkundige reeks met $q = 1/4$. We weten dat een meetkundige reeks met $|q| < 1$ convergeert. De reeks $\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$ convergeert dus.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{3n-1}{n^3+n}$$

Oplossing

Enkel de hoogste machten spelen een rol bij het bepalen van de convergentie.

$$\frac{3n-1}{n^3+n} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met $p = 2$. Een hyperharmonische reeks convergeert als $p > 1$. We moeten echter nog nagaan of de limiet niet nul of oneindig is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n^3+n} \cdot n^2 = 3 \neq 0 \neq \infty$$

De reeks $\sum \frac{3n-1}{n^3+n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

Oplossing

Ter herinnering:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1 \rightarrow \sin 1/x \approx 1/x$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met $p = 2 > 1$. De hyperharmonische reeks convergeert. We berekenen de limiet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \pi/n}{1/n} = \pi \neq 0 \neq \infty$$

De reeks $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$$

Oplossing

We onderzoeken dit met behulp van Cauchy. Ter herinnering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} : \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{divergent naar } \infty \\ < 1 \rightarrow \text{convergent} \\ = 1 \rightarrow \text{geen besluit} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^2 = 1/9 < 1$$

De limiet is kleiner dan 1 dus de reeks $\sum \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n}{3^n}$$

Oplossing

We onderzoeken dit met behulp van de stelling van d'Alembert. Ter herinnering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} : \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{divergent naar } \infty \\ < 1 \rightarrow \text{convergent} \\ = 1 \rightarrow \text{geen besluit} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} \\ &= 1/3 < 1 \end{aligned}$$

De reeks $\sum \frac{n}{3^n}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

Oplossing

We lossen dit opnieuw op met d'Alembert.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e > 4 \end{aligned}$$

De reeks $\sum \frac{n^n}{n!}$ convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\ln n}{n}$$

Oplossing

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \sqrt{n} \tan \frac{\pi}{3n}$$

Oplossing

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Oplossing
