

# Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

# Inhoudsopgave

<b>I</b>	<b>Herhaling Wiskunde A</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Onbepaalde Integralen</b>	<b>4</b>
1.1	Substitutiemethode . . . . .	4
1.1.1	Voorbeeld 1 . . . . .	4
1.1.2	Voorbeeld 2 . . . . .	4
1.2	Partiële integratie . . . . .	5
1.2.1	Voorbeeld 1 . . . . .	5
1.2.2	Voorbeeld 2 . . . . .	5
1.2.3	Voorbeeld 3 . . . . .	5
1.2.4	voorbeeld 4 . . . . .	6
<b>II</b>	<b>Wiskunde B</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Differentiaalvergelijking</b>	<b>8</b>
2.1	Definities . . . . .	8
2.2	Soorten oplossingen . . . . .	9
2.3	Bepalen van een DVG . . . . .	11
2.4	Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten . . . . .	13
2.4.1	Particuliere oplossing . . . . .	13
2.4.2	Algemene oplossing . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Laplacetransformatie</b>	<b>16</b>
3.1	De Heaviside functie . . . . .	16
3.2	De Dirac delta-’functie’ . . . . .	17
3.3	Causale functie . . . . .	17
3.4	Exponentiële orde . . . . .	18
3.5	De Laplacetransformatie . . . . .	19
3.5.1	Opmerkingen . . . . .	19
3.5.2	Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties . . . . .	20
3.5.3	Translatie naar rechts . . . . .	22
3.5.4	Dempingsfunctie . . . . .	23
<b>III</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>25</b>
<b>4</b>	<b>Differentiaalvergelijkingen</b>	<b>26</b>

<b>5</b>	<b>Laplacetransformatie</b>	<b>28</b>
5.1	De Heaviside functie . . . . .	28

Deel I

Herhaling Wiskunde A

# Hoofdstuk 1

## Onbepaalde Integralen

### 1.1 Substitutiemethode

#### 1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t^2+4} dt &= \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\ \text{stel } u &= t^2+4 \\ \text{dan } du &= 2t dt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\ &\Rightarrow \int \frac{t}{2tu} du - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln t^2+4 - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C\end{aligned}$$

#### 1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4} dy \\ \text{stel } u &= e^y \\ \text{dan } du &= e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\ &\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)} du \\ &= \int \frac{du}{u^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{e^y}{2} + C\end{aligned}$$

## 1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

### 1.2.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ \text{stel } u &= \ln(x) \text{ en } v = \int dx \\ \text{dan } du &= \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x \\ &\Rightarrow x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

### 1.2.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{stel } u &= x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{dan } du &= dx \text{ en } v = \tan(x) \\ &\Rightarrow (x+1) \tan(x) - \int \tan(x) dx \\ &= (x+1) \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

### 1.2.3 Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) \\ \text{stel } u &= \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= 2 \cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx \\ \text{stel } u &= \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= -2 \sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \left[ -e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \right] \\ &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx \\ \Leftrightarrow 5 \int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] \\ \Leftrightarrow \int e^{-x} \sin(2x) &= \frac{-e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)]}{5}\end{aligned}$$

#### 1.2.4 voorbeeld 4

$$\begin{aligned}\int \sin^4(\theta) d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\ &= \int \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \int \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\ &= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\ &= \frac{12\theta - 8 \sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C\end{aligned}$$

**Deel II**  
**Wiskunde B**



# Hoofdstuk 2

## Differentiaalvergelijking

### 2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

---

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

$$x + y + y' = 0$$

---

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde:** Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus  $n$ .
- **Graad:** De graad  $r$  bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde.  $y^{(n)r}$

---

Voorbeeld: Orde en graad

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y - 2y^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = \sin(x)$	3	2
$(x - 1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3 s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin \sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x + 2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

## 2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de  $n$ -de orde worden drie oplossingen onderscheiden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat  $n$  onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$	?	?
$\rightarrow a + b e^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

---

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO

Gegeven een differentiaalvergelijking:  $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat  $y = a \sin(x) + b \cos(x)$  de AO is.

2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1.

$$\begin{aligned}y &= a \sin(x) + b \cos(x) \\y' &= a \cos(x) - b \sin(x) \\y'' &= -a \sin(x) - b \cos(x)\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\-a \sin(x) - b \cos(x) + a \sin(x) + b \cos(x) &= 0 \\&\rightarrow \text{Het is een oplossing}\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$\begin{aligned}y &= 0 \\y &= \sqrt{2} \sin(x) \\y &= \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO

Gegeven een differentiaalvergelijking:  $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.

2. Is  $y = \frac{1}{C} + Ce^x$  de AO?

3. Wat voor soort oplossing is  $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.

2.

$$\begin{aligned}y' &= Ce^x \\&\rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

$\rightarrow$  Het is een oplossing

Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$\begin{aligned}y' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\&\rightarrow y'^2 - yy' + e^x \\&\Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien  $y$  niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

---

## 2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met  $n$  onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO  $n$  maal af.
3. Elimineer de  $n$  constanten van de  $n + 1$  bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde  $n$  is.

---

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG

De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2x$$

1. Er zijn 2 onafhankelijke constanten.
2. Er moet 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is  $y'' = 0$  en heeft orde 2.

---

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG

Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$$

1. Er zijn 3 onafhankelijke constanten.
2. Er moet 3 maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' &= -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' &= C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' &= -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3de afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$\begin{aligned} 3(y + y'') - y'' - y''' &= 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0 \\ \rightarrow y''' - 2y'' - 3y' &= 0 \end{aligned}$$

4. De orde van deze DVG is 3

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG

Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt  $y = -x$ .

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met  $m(a, -a)$ . Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet 2 maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm  $\frac{dy}{dx}$  om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze  $a$  in  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = 2 = Aantal onafhankelijke constanten.

## 2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned} y''' - y'' \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow D^3y - D^2y \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow (D^3 - D^2 \sin t + t)y &= t^2 \\ \Leftrightarrow L(d)y &= g(t) \\ \Leftrightarrow \text{met } L(d) = \sum_{i=0}^n a_i D^i &, a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

### 2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden  $(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$  gekend zijn.

### 2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten  $y(0), y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$  respectievelijk gelijkgesteld worden aan  $C_1, C_2, \dots, C_n$

Voorbeeld: Bepaal de PO van  $y'' + y = g(t)$  indien  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
L(d)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= e^{-t}H(t-1) \\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y \\
&= s^2Y - 1 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y &= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y(s^2 + 1) &= 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2 + 1}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\right]
\end{aligned}$$

$$\text{antwoord: } y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\right)H(t-1)$$

---

Voorbeeld: Bepaal de PO van  $y'' + y = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$  indien  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

$$y(0^+) = C_1, \ y'(0^+) = C_2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\ &= s^2Y - sC_1 - C_2 + Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st} \, dt\end{aligned}$$


---



# Hoofdstuk 3

## Laplacetransformatie

### 3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

---

Voorbeeld: Teken over  $x = [-3, 4]$  de functie  $y = 2H(t + 2) - tH(t) + (t + t^2)H(t - 2)$

Er zijn veranderingen bij  $t = -2, t = 0$  en  $t = 2$ .

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$	<i>-TODO: graph</i>
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$	

---

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t - 2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t - 3)(-1 + e^t + t^2) + H(t - 5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t - 2) + (t^2 + e^t - 1)H(t - 3) - (t^2 - t + 25)H(t - 5) \end{aligned}$$

---

## 3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a) dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van  $\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t)$  voor  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

$$\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & \forall t \in ]a - \epsilon_1, a + \epsilon_2[ \end{cases}$$

Het nut van de dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door  $-\infty$  aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.

De afgeleide van de Heaviside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt} H(t-a) = \delta(t-a)$$

---

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt$$

In dit geval is  $f(t) = (2 \sin t - 1)$  en  $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$ . We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt &= \int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

---

## 3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie  $f$  waarvoor  $f(t) = 0$  voor elke  $t < 0$ . Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \rightarrow f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke  $t < 0$  dat  $f(t) = 0$ . De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie  $f(t)$  gedefinieerd als: -2 indien  $t < 1$  en 2 als  $t > 1$ . Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t-1)(-2 + 2) \\ &= -2H(t) + 4H(t-1) \end{aligned}$$

Tekening: *TODO: graph*

---

## 3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien  $\exists M, a \in \mathbb{R}$  zodat  $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$  en met  $a$  het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is  $f(t)$  van exponentiële orde  $a$ . Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in \mathbb{R}$$

---

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van  $\sin t$

$$\begin{aligned} |\sin t| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1 (\text{willekeurige waarde}) \\ \Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1e^{at} \end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat  $a = 0$  en de exponentiële orde is dus ook 0.

---

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van  $(1 + 2t)e^{-t}$

Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|(1 + 2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2t)e^{-t}}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{at}e^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}} \end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a + 1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{\pm\infty}{0} \rightarrow$  onbepaald
- $a + 1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \rightarrow$  L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hospital toe.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a+1)} \\ &= \frac{2}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Aangezien het een reële uitkomst is kan  $a$  uit de uitdrukking  $a + 1 > 0$  afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

## 3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel  $f(t)$  causaal dan is de laplacetransformatie van  $f(t)$  een functie die een complex getal  $s$  afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

De letter  $s$  kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

Het argument tussen de  $|\dots|$  is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via  $\sqrt{x^2+y^2}$  indien het complexe getal gedefinieerd wordt als  $s = x + yj$  (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

### 3.5.1 Opmerkingen

1.

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}, s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-(x+yj)t}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\
&= |f(t)|e^{-xt} \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= |f(t)|e^{-xt}
\end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

### 3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

•

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)} dt \\
&= \left. \frac{e^{t(a-s)}}{a-s} \right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-s} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} - 1 \right)
\end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-st}| \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

•

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw  $a = wj$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{wj t}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\ &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\ &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\ &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j \sin(\omega t)\}(s) \\ &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j \end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

•

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t - 0)\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \delta(t - 0) e^{-st} dt \\ &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1 \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\cos(2t - 1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t) \cos(1) + \sin(2t) \sin(1)\}(s) \\ &= \cos(1) \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1) \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\ &= \cos(1) \frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1) \frac{2}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s \cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2 \sin(1)}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\sinh(4t) - 3 \cos\left(\frac{t}{3}\right)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{ \sinh(4t) - 3 \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3 \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} \right\}(s) - 3 \mathcal{L}\left\{ \cos\left(\frac{t}{3}\right) \right\}(s) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4} \right) - 3 \frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4} \right) - \frac{27s}{9s^2 + 1} \end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\delta(t - \frac{\pi}{2}) \cos(4t)e^{2t}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) e^{-st} dt \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}} e^{-s \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \cos(2\pi) e^{\pi} e^{-\frac{s\pi}{2}} \\ &= e^{\pi} e^{-\frac{s\pi}{2}}\end{aligned}$$

---

### 3.5.3 Translatie naar rechts

Een translatiebeweging naar rechts wordt gedefinieerd als

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) \quad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_0^a f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\ &= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\ \text{stel } u &= t-a \\ \text{dan } du &= dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa} du \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\ &= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\ &= e^{-as}F(s)\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $f(t) = (t^2 - 1)H(t-1) - \sin(3t)H(t-\pi)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t - 1)^2 + 2(t - 1)]H(t - 1)\}(s) \\
&= e^{-as} \mathcal{L}\{t^2 + 2t\}(s) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2!}{s^3} + 2 \frac{1!}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2(1 + s)}{s^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t - \pi))H(t - \pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \frac{3}{s^2 + 9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2(1 + s)}{s^3} \right) - \left( -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9} \right) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2(1 + s)}{s^3} \right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}
\end{aligned}$$

### 3.5.4 Dempingsfunctie

De dempingsfunctie heeft als voorschrift

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s + a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $f(t) = t(t^3 - 1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7 - 2t^4 + t)e^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t^7 - 2t^4 + t\}(s + 1) \\
&= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{2 \cdot 4!}{(s + 1)^5} + \frac{1!}{(s + 1)^2} \\
&= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s-2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2+3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\
&= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}$$


---

# Deel III

## Oefeningen

# Hoofdstuk 4

## Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1.  $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan  $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking  $y = C_1x + C_2$  heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned}y' &= C_1 \\y'' &= 0\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is  $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als  $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$ . De straal wordt gedefinieerd als  $C_2$ . De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') &= 0\end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door :  $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel  $p \in K$  en  $x_p = C$ :

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_p &= (x_p)^2 = C^2 \\ \Rightarrow p &(C, C^2)\end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt  $y'_p$  wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer  $C$  in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 &= y' \left(\frac{y'}{2}\right) \left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4y - y'^2 &= 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow y'^2 - 4y'x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

---

# Hoofdstuk 5

## Laplacetransformatie

### 5.1 De Heaviside functie

Gegeven

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 3 \\ e^{tt^2} & t > 3 \end{cases}$$

Druk  $f(t)$  en  $g(t)$  uit a.d.h.v. de Heaviside-functie.

Oplossing

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t-0)(-0+t) + H(t-1)(-t+2-t) + H(t-2)(-2(2-t)+0) \\ &= H(t)t + H(t-1)(2-2t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

$$g(t) = H(t-0)(-0+1) + H(t-3)(-1+e^{tt^2})$$

---

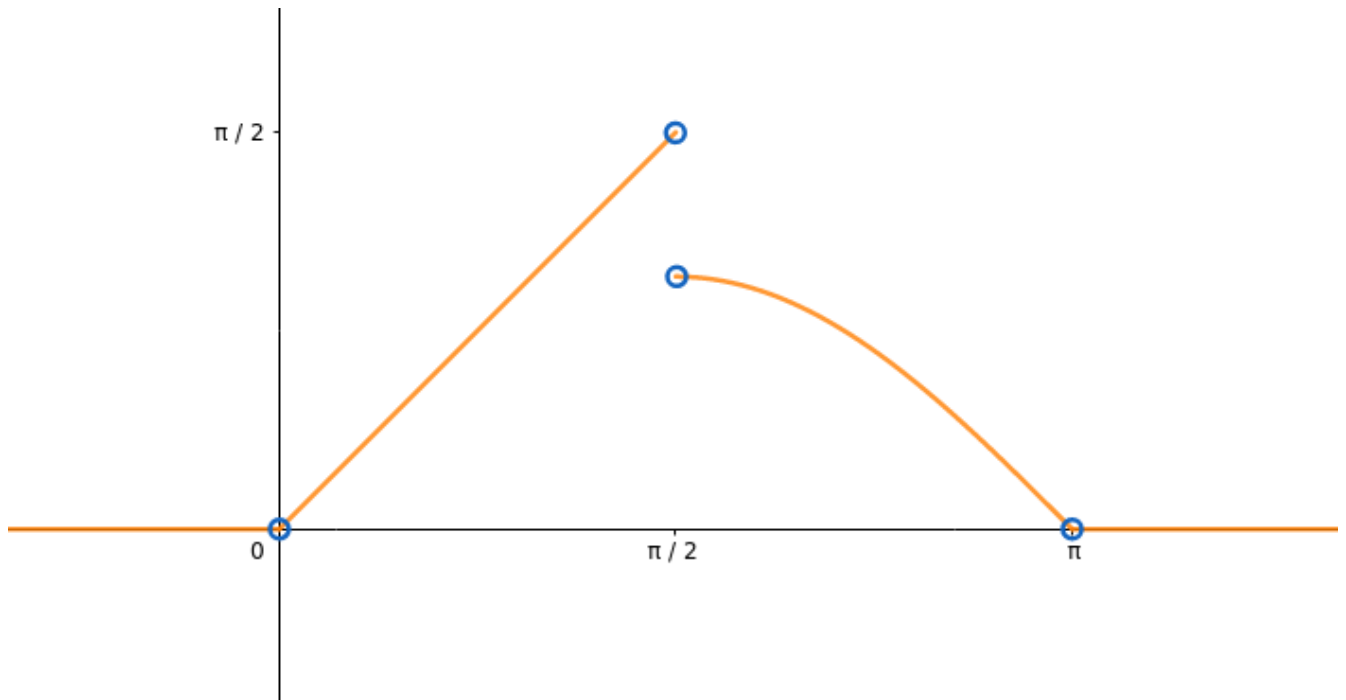
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

Druk  $g(t)$  uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

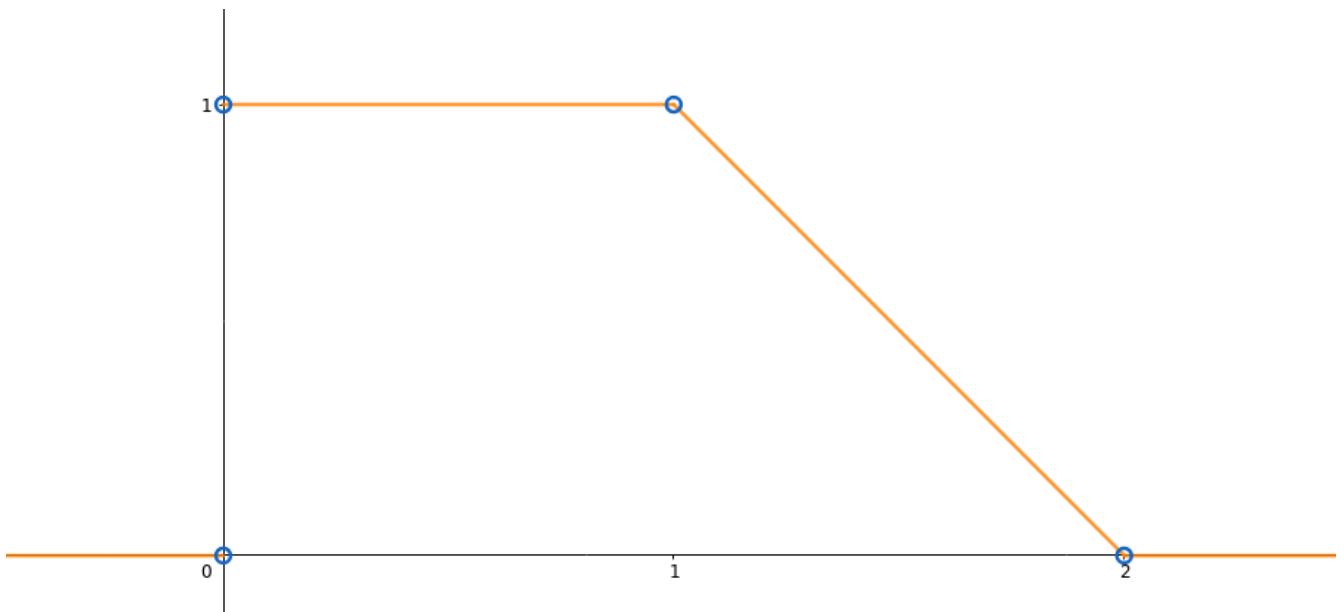
Oplossing

$$\begin{aligned}
 g(t) &= H(t)(-0 + t) + H(t - \frac{\pi}{2})(-t + \sin t) + H(t - \pi)(-\sin t + 0) \\
 &= H(t)t + H(t - \frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t - \pi)(-\sin t) \\
 &= H(t)t + H(t - \frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t - \pi) \sin t
 \end{aligned}$$




---

Gegeven de grafiek van de functie  $h(t)$ . Bepaal het voorschrift van  $h(t)$  en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



### Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t - 1)(-1 + (2 - t)) + H(t - 2)(-(2 - t) + 0) \\ &= H(t) + H(t - 1)(1 - t) + H(t - 2)(t - 2) \end{aligned}$$


---