Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\int \frac{t-1}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4}$$

$$\begin{aligned}
&\text{stel} \;\; u = t^2+4 \\
&\text{dan} \;\; du = 2tdt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\
&\Rightarrow \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
&= \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} = \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy$$

$$\begin{aligned}
&\text{stel} \;\; u = e^y \\
&\text{dan} \;\; du = e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\
&\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)}du \\
&= \int \frac{du}{u^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{e^y}{2} + C
\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$$

$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$

$$\text{dan } du = \frac{1}{x}dx \text{ en } v = x$$

$$\Rightarrow x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$$

$$= x\ln(x) - \int dx$$

$$= x\ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)}dx$$

$$\text{stel } u = x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)}dx$$

$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$

$$\Rightarrow (x+1)\tan(x) - \int \tan(x)dx$$

$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x}\sin(2x)$$

$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$

$$\text{dan } du = 2\cos(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow = -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)dx$$

$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x}dx$$

$$\text{dan } du = -2\sin(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow -e^{-x}\sin(2x) + 2\Big[-e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx\Big]$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx$$

Dus

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx \\
\Leftrightarrow 5\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \\
\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin(2x) &= \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}
\end{aligned}
$$

1.2.4 voorbeeld 4

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{4}d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4}d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}
$$

Deel II

Wiskunde B

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n.
- **Graad**: De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. ${y^{(n)}}^r$

Voorbeeld: Orde en graad

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y \ \ -2y'^3 = yx$	2	1
$1+(y'')^4+2y'+x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'')-xy'+y=0$	2	1
$e^s\frac{d^3s}{dt^3}+(\frac{ds^2}{dt^2})^3=0$	3	1
$xy'+e^{y'}+y''=1$	1	/
$\sin\sqrt{y'}=x+2$	1	/
$\rightarrow y'=\text{arcsin}^2(x+2)$	1	1
$\sin y'=xy'^2$	1	/
$\rightarrow y'=\text{arcsin}(xy'^2)$	1	/
$y^{'3}+\frac{x}{y''}+y''=1$	2	?
$\rightarrow y^{'3}y''+x+(y'')^2=1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n-de orde worden drie oplossingen onderscheden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y=C_1+C_2x$	2	2
$y=C_1-C_1^2x$	1	1
$y=C_1(C_2+C_3e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1C_2+C_1C_3e^x$	?	?
$\rightarrow a+be^x$	2	2
$y=C_1+\ln(C_2x)$	?	?
$\rightarrow y=C_1+\ln(C_2)+\ln(x)$	?	?
$\rightarrow y=a+\ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1. $$\begin{aligned} y &= a\sin(x) + b\cos(x) \\ y' &= a\cos(x) - b\sin(x) \\ y'' &= -a\sin(x) - b\cos(x) \end{aligned}$$

   Hieruit volgt:

   $$\begin{gathered} y'' + y = 0 \\ -a\sin(x) - b\cos(x) + \sin(x) + b\cos(x) = 0 \\ \rightarrow \text{Het is een oplossing} \end{gathered}$$

   De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

   $$\begin{aligned} &y = 0 \\ &y = \sqrt{2}\sin(x) \\ &y = \sin(x) + \cos(x) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.
2. $$\begin{aligned} y' &= Ce^x \\ \rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0 \end{aligned}$$

   $$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$
\begin{aligned}
&y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\
&\rightarrow y'^2 - yy' + e^x \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\
&\Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = 0
\end{aligned}
$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de n + *1* bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG
De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2 x$$

1. Er zijn *2* onafhankelijke constanten.
2. Er moet *2* keer afgeleid worden:

$$
\begin{cases}
y &= C_1 + C_2 x \\
y' &= C_2 \\
y'' &= 0
\end{cases}
$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde *2*.

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' &= -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' &= C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' &= -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

   Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

   Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\to 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\to y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$
Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$$\begin{array}{l|l} 2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 0 & t < -2 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 & -2 < t < 0 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 - t & 0 < t < 2 \\ 2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (1) = 2 + t^2 & t > 2 \end{array}$$

TODO: graph

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t-2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t-3)(-1 + e^t + t^2) + H(t-5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t-2) + (t^2 + e^t - 1)H(t-3) - (t^2 - t + 25)H(t-5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a)\ dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t)$ voor $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$

$$\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2} & \forall \in]a-\epsilon_1, a+\epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\ dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.
De afgeleide van de Heaveiside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt}H(t-a) = \delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\ dt$$

In dit geval is $f(t) = (2\sin t - 1)$ en $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$ We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\ dt &= \int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\ dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t) = 0$ voor elke $t < 0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \to f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien t < 1 en 2 als t > 1. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t-1)(-2+2) \\ &= -2H(t) + 4H(t-1) \end{aligned}$$

Tekening: *TODO: graph*

3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in R$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a. Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in R$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$

$$\begin{aligned} &|\sin t| \leq 1 \\ \Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 (\text{willekeurige waarde}) \\ \Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1e^{at} \end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat a = 0 en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1+2t)e^{-t}$
Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{|(1+2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{(1+2t)e^{-t}}{e^{at}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1+2t}{e^{at}e^{t}} \\ &= \lim_{t \to +\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} \end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a + 1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{\pm\infty}{0} \rightarrow$ onbepaald
- $a + 1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{\pm\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hopital toe.

$$\begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a+1)} \\ &= \frac{2}{+\infty} = 0 \in R \end{aligned}$$

Aangezien het een reëele uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a + 1 > 0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causuaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\, dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1 + 4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3 + 2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|\, dt$$

Het argument tussen de |...| is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2 + y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s = x + yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1. $$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt},\ s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\
&= |f(t)|e^{-xt}\sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= |f(t)|e^{-xt}
\end{aligned}$$

2. $$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

- $$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)}\, dt \\
&= \frac{e^t a - s)}{a-s}\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} - 1\right)
\end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-st)}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

- $$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

  Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{L}\{e^{wjt}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\
  &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\
  &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\
  &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\}(s) \\
  &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j\sin(\omega t)\}(s) \\
  &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j
  \end{aligned}$$

  dus

  $$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

- $$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

  Bewijs:

  $$\begin{aligned}
  \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t - 0)\}(s) \\
  &= \int_0^{+\infty} \delta(t - 0) e^{-st}\, dt \\
  &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1
  \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t - 1)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1) + \sin(2t)\sin(1)\}(s) \\
&= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\
&= \cos(1)\frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1)\frac{2}{s^2 + 4} \\
&= \frac{s\cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2\sin(1)}{s^2 + 4}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{ \sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{ \frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2}\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{ \cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - 3\frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - \frac{27s}{9s^2 + 1}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta(t - \frac{\pi}{2})\cos(4t)e^{2t}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{-st}\, dt \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}e^{-s\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\
&= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}
\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Een translatiebeweging naar rechts wordt gedefinieerd als

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) \qquad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\, dt \\
&= \int_0^{a} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\, dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\, dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\, dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\, dt \\
\text{stel} \quad u &= t - a \\
\text{dan} \quad du &= dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)}\, du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}\, du \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}\, du \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as}F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2-1)H(t-1) - \sin(3t)H(t-\pi)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)^2+2(t-1)]H(t-1)\}(s)\\ &= e^{-as}\mathcal{L}\{t^2+2t\}(s)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3}+2\frac{1!}{s^2}\right)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}\right)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t-\pi))H(t-\pi)\}(s)\\ &= -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s)\\ &= -e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9}\\ &= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s)-\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)-\left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\right)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)+\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

De dempingsfunctie heeft als voorschrift

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s+a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3-1)^2e^{-t}+\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s)+\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7-2t^4+t)e^{-t}\}(s)\\ &= \mathcal{L}\{t^7-2t^4+t\}(s+1)\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8}-\frac{2\cdot 4!}{(s+1)^5}+\frac{1!}{(s+1)^2}\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8}-\frac{48}{(s+1)^5}+\frac{1}{s^2+2s+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s-2) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2+3} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\
&= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}
\end{aligned}$$

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$y' = C_1$$
$$y'' = 0$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2. De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') = 0$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\Rightarrow y_p = (x_p)^2 = C^2$$
$$\Rightarrow p(C, C^2)$$

De richtingscoëfficient y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} & y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 = y'\left(\frac{y'}{2}\right)\left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow\ & 4y - y'^2 = 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow\ & y'^2 - 4y'x + 4y = 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

Hoofdstuk 5

Laplacetransformatie

5.1 De Heaviside functie

Gegeven

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t <= 0 \\ t & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 3 \\ e^t t^2 & t > 3 \end{cases}$$

Druk $f(t)$ en $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside-functie.

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t-0)(-0+t) + H(t-1)(-t+2-t) + H(t-2)(-2(2-t)+0) \\ &= H(t)t + H(t-1)(2-2t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

$$g(t) = H(t-0)(-0+1) + H(t-3)(-1+e^t t^2)$$

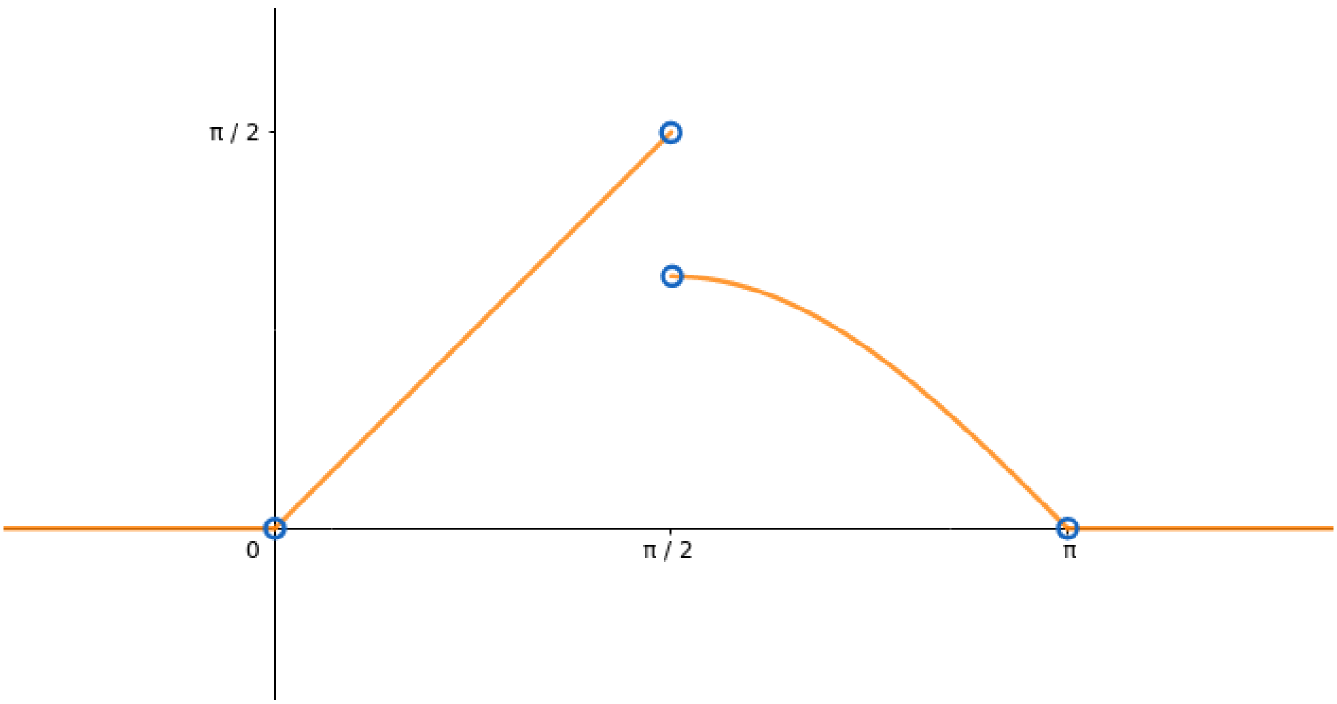
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

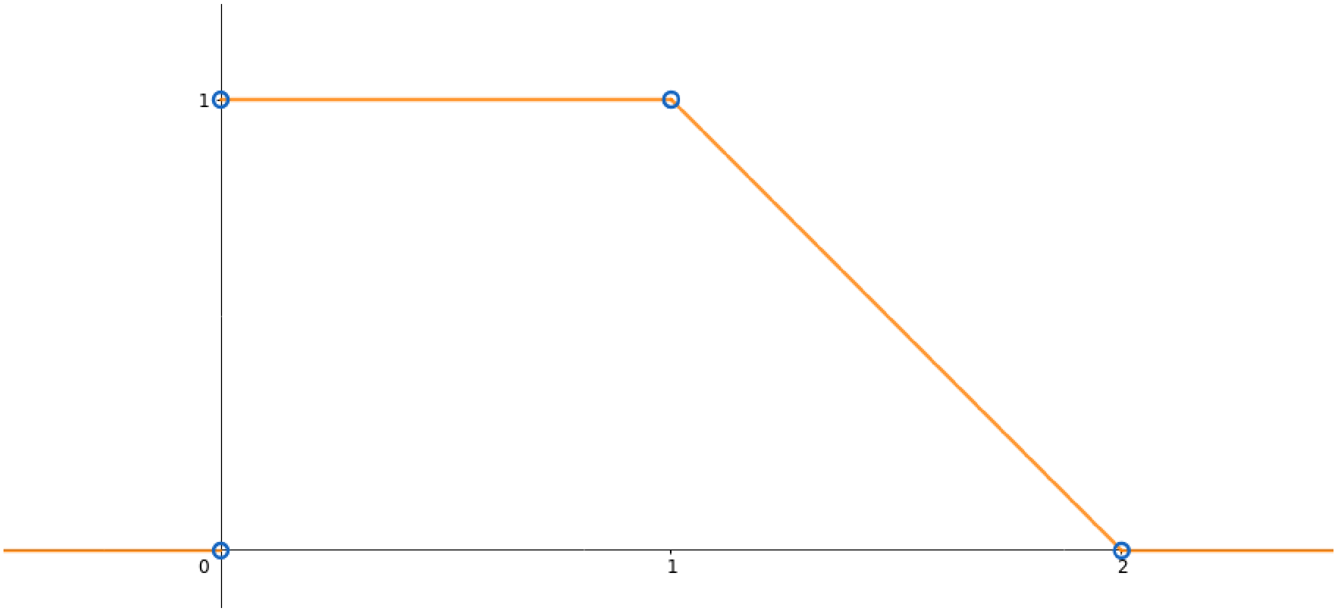
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0+t) + H(t-\frac{\pi}{2})(-t+\sin t) + H(t-\pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t-\pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t-\pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t-1)(-1 + (2-t)) + H(t-2)(-(2-t) + 0) \\ &= H(t) + H(t-1)(1-t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$