Hoofdstuk 9

Essential University Physics

Richard Wolfson

2nd Edition

Voorwerpen en Systemen bestaande uit Verschillende Deeltjes

Systems of Particles

 1

Een wagon geladen met stenen rijdt zonder wrijving op een vlak spoor. Iemand achteraan de wagon gooit horizontaal stenen uit de wagon. Gevolg :

a) De wagon vertraagt
b) De wagon versnelt
c) De snelheid blijft constant
d) De snelheid gaat op en neer per gegooide steen
e) …

En als de stenen een voor een uit een gat in de bodem van de wagon vallen, wat is dan het antwoord?

 2

9.1 Massamiddelpunt

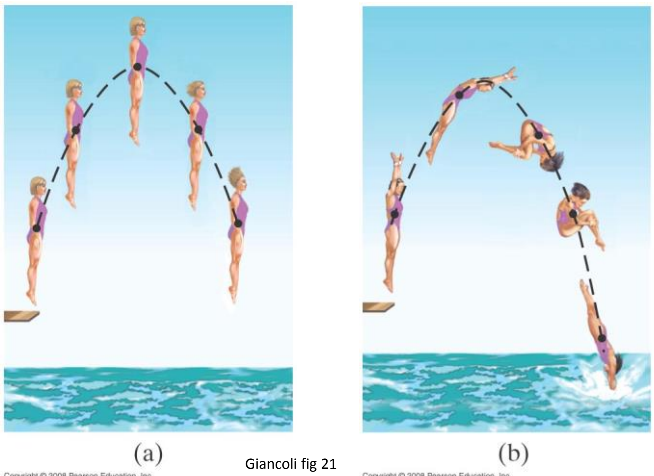
- Tot nu: voorwerpen werden behandeld als puntdeeltjes.
- Voorwerpen bestaan uit verschillende deeltjes en hebben eindige afmetingen.

↓

- Aangrijpingspunt van zwaartekracht op een voorwerp?
- Aangrijpingspunt van de nettokracht uit tweede wet van Newton op een voorwerp?

9.1 Massamiddelpunt

9.1 Massamiddelpunt



Giancoli fig 21

Het massamiddelpunt beweegt volgens een parabool, net zoals een puntmassa in het zwaarteveld van de aarde.

Massamiddelpunt (MM)

- Het **massamiddelpunt (center of mass)** van een voorwerp (of systeem bestaande uit verschillende deeltjes) is het punt dat beweegt alsof alle massa van het voorwerp daarin "geconcentreerd zou zijn" en alle krachten op het voorwerp daarop aangrijpen.(nettokracht, tweede wet van Newton)
- De plaats van het massamiddelpunt is een "gewogen" gemiddelde van de posities van de individuele deeltjes:
  - Voor een systeem van discrete deeltjes,

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

  - Voor een continue verdeling van massa,

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}$$

  - In beide gevallen is M de totale massa van het systeem

Massamiddelpunt (MM) (of cm)

$$\vec{F}_{totaal} = \sum_i \vec{F_i} = \sum_i m_i \vec{a_i} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \sum_i \frac{d^2 \mathrm{m}_i \vec{r_i}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i \vec{r_i}$$

$$\vec{F}_{totaal} = M \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum m_i \vec{r_i}}{M}\right) = M \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{r_{cm}} = M\,\overrightarrow{a_{cm}}$$

- Het **massamiddelpunt (center of mass)** van een voorwerp of systeem bestaande uit verschillende deeltjes beweegt alsof alle massa erin geconcentreerd ware en alsof alle krachten op dat punt ingrijpen :

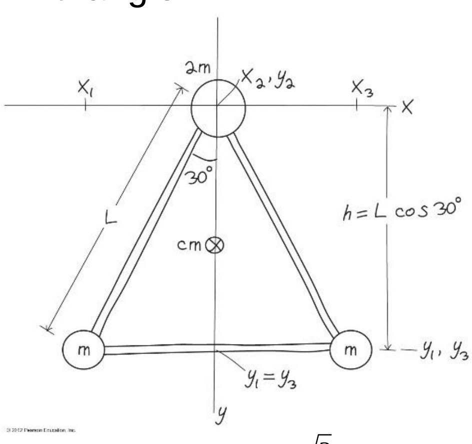
$$\vec{a}_{cm} = \frac{\vec{F}_{totaal}}{M} = \frac{\sum \vec{F}_i}{M}$$

De vectorcoördinaat van dat massamiddelpunt wordt gegeven door :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \quad \text{of} \quad \vec{r}_{cm} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}$$

Finding the Center of Mass (cm)

- Example: A system of three particles in an equilateral triangle.



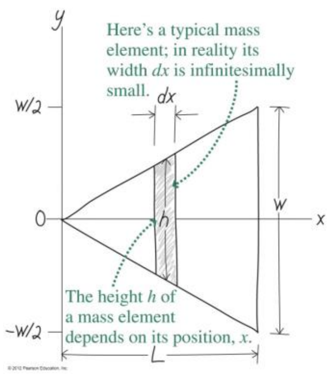
$$y_1 = L\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

$$x_2 = y_2 = 0$$

$$x_{cm} = \frac{mx_1 + mx_3}{4m} = \frac{m(x_1 - x_1)}{4m} = 0$$

$$y_{cm} = \frac{my_1 + my_3}{4m} = \frac{2my_1}{4m} = \frac{1}{2}y_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}L = 0{,}43L$$

- Voorbeeld : continue massaverdeling én via samenstelling van afzonderlijke delen
  - Verdeel de driehoek eerst in (oneindig smalle) verticale stroken en druk *dm* uit als functie van *x (massa~oppervlakte)*



$$\frac{dm}{M}=\frac{hdx}{\frac{1}{2}wL}=\frac{w(x/L)dx}{\frac{1}{2}wL}=\frac{2x\,dx}{L^2}$$

- Het massamiddelpunt van elke strook ligt op de x-as (y=0). Dus voor de totale driehoek is y_{cm}=0 en x_{cm} valt te berekenen via een integraal :

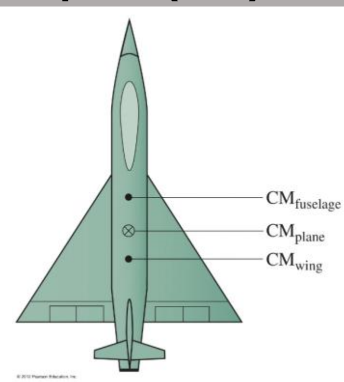
$$x_{\mathrm{cm}}=\frac{1}{M}\int x\;dm=\frac{1}{M}\int_0^L x\left(\frac{2Mx}{L^2}dx\right)=\frac{2}{L^2}\int_0^L x^2\;dx$$

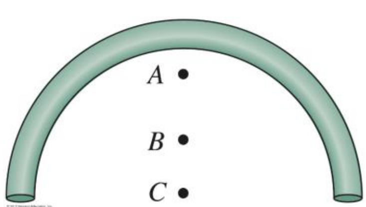
Zwaartepunt v/e driehoek?

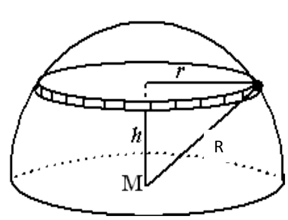
$$x_{\mathrm{cm}}=\frac{2}{L^2}\int_0^L x^2\;dx=\frac{2}{L^2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^L=\frac{2L^3}{3L^2}=\frac{2}{3}L$$

Meer over het Massamiddelpunt (MM)

- Het massamiddelpunt van een samengesteld voorwerp kan je berekenen uit de massamid-delpunten van de afzonderlijke delen.
- Het massamiddelpunt maakt niet altijd deel uit van het voorwerp!







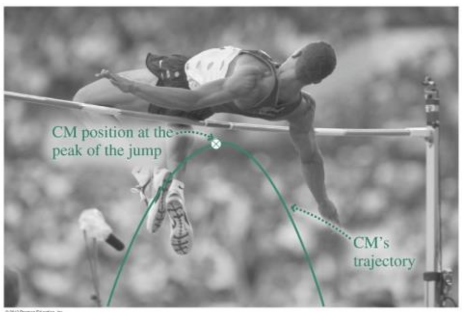
Holle halve bol :
h= …

Volle halve bol :
h = ….

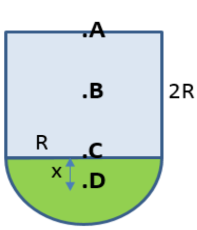
 10

Meer over het Massamiddelpunt (MM)

- De hoogspringer gaat over de lat, maar niet zijn/haar MM.



- Voorbeeld : Een werkstuk bestaat uit een homogene cilinder met lengte 2R en straal R, waaraan onderaan een homogene halve bol(met andere dichtheid) is bevestigd met straal R. De staaf en de halve bol hebben dezelfde massa M.
  Het massamiddelpunt van een halve homogene bol ligt op afstand x = (3R/8) van het middelpunt van die bol. Het geheel kan oscilleren (fysische slinger) rond een as loodrecht op de cilinder die gaat door punt A, midden op de bovenzijde van de cilinder.

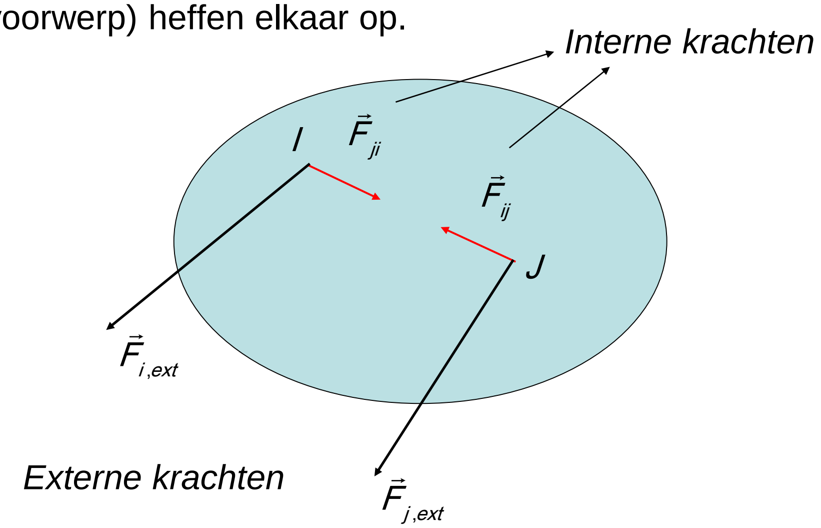


Bereken de ligging van het gemeenschappelijk massamiddelpunt (afstand L tot A)

Antw : L= (27/16)R

Beweging van het Massamiddelpunt

Interne krachten (krachten tussen deeltjes van het voorwerp) heffen elkaar op.

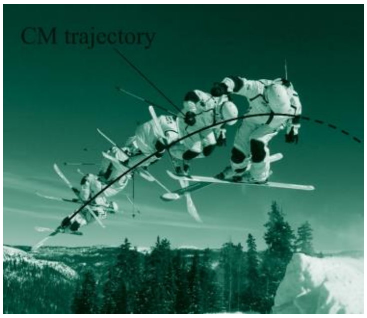


Beweging van het Massamiddelpunt

- Het massamiddelpunt voldoet aan de tweede wet van Newton:

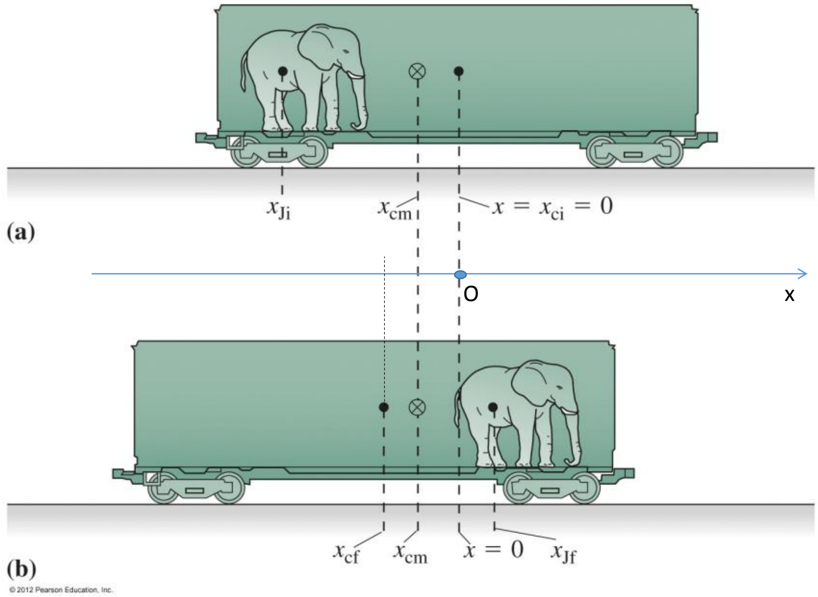
$$\vec{F}_{\text{net external}} = M\vec{a}_{\text{cm}}$$

- Vb.: de meeste delen van de skiër voeren een complexe beweging uit, maar het MM beschrijft een parabolische projectielbaan:

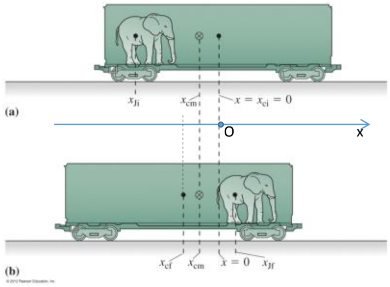


- Gevolg:
  Als de netto **externe** kracht nul is verandert de beweging van het massamiddelpunt niet.
  (versnelling = 0; snelheid = cte)

Beweging van het Massamiddelpunt



Beweging van het Massamiddelpunt



De olifant (**J**umbo) beweegt 19m naar rechts **in** de wagon (**c**argo). **Het massamiddelpunt blijft echter onveranderd.** Hoever is de wagon naar links verschoven? (alles wrijvingsloos; m_J=4,8 ton; m_c=15 ton)

Kies de oorsprong van het assenkruis in het massamiddelpunt van de wagon (initieel) :

Initieel : $x_{cm} = (m_j\, x_{ji} + 0) / M$ met $M = m_J + m_c$

Finaal : $x_{cm} = (m_J\, x_{Jf} + m_c\, x_{cf}) / M$ met $x_{Jf} = x_{Ji} + 19m + x_{cf}$

(let wel : met x_{cf} nog ongekend maar negatief)

Stel $x_{cm,\ finaal} = x_{cm,\ initieel}$ en werk verder uit :

x_{cf} = - (19m) m_J / M = … = - 4,6m

9.2 Impuls en het Massamiddelpunt

- De impuls van een puntmassa is (zie 4.2) : $\vec{p} = m\vec{v}$
- De totale impuls van een stelsel deeltjes is :

$$\vec{P} = \sum \vec{p_i} = \sum m_i \vec{v}_i$$

- $\vec{P} = \sum m_i \frac{d\,\vec{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r_i} = \frac{d}{dt}(M\vec{r}_{cm})$
- $\vec{P} = M \frac{d}{dt} \vec{r}_{cm} = M\vec{v}_{cm} = M\vec{v}_{MM}$

$$\boxed{\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\mathrm{MM}}}$$

met $\vec{v}_{MM}$ de snelheid van het massamiddelpunt.

En bijgevolg is $\frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{V}_{MM}}{dt} = M\vec{a}_{MM}$

 18

9.2 Impuls en het Massamiddelpunt

- Het massamiddelpunt MM voldoet aan de tweede wet van Newton, zodat $\vec{F}_{\text{net extern}} = M\vec{a}_{MM}$ of, meer algemeen,

$$\vec{F}_{\text{net extern}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

met $\vec{P}$ de totale impuls van het systeem:

$$\vec{P} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\mathrm{MM}}$$

met $\vec{v}_{MM}$ de snelheid van het massamiddelpunt, en

$$\vec{a}_{MM} = \frac{d\vec{v}_{MM}}{dt}$$

en $\vec{a}_{MM}$ de versnelling van het massamiddelpunt

 19

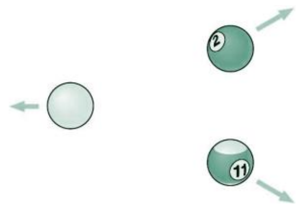
Behoud van Impuls

- Als de netto externe kracht nul is, dan $d\vec{P}/dt = 0$.
- Hieruit volgt dat de totale impuls van het systeem niet verandert:

$$\vec{P} = \text{constant}$$

Dit is het **behoud van impuls (linear momentum).**

- Voorbeeld: Een systeem van drie biljartballen:
  - Initiëel twee in rust; alle impuls in de linker bal:
  - Drie bewegende ballen, maar de totale impuls blijft gelijk:



Behoud van Impuls

Merk op: impuls is een vektor, dus behoud van impuls betekent:

$$\vec{P} = \text{constant}$$

$$\overrightarrow{P_v} = \overrightarrow{P_n}$$

met $\vec{P}_v$ de totale impuls vóór de botsing en $\overrightarrow{P_n}$ de totale impuls ná de botsing.

Hieruit:

$$P_{v,x} = P_{n,x}$$

$$P_{v,y} = P_{n,y}$$

$$P_{v,z} = P_{n,z}$$

9.3 Impuls en Kinetische Energie van MM

- De kinetische energie van het massamiddelpunt kan men schrijven als

$$K_{MM} = \tfrac{1}{2} M v_{MM}^2 = \frac{P_{MM}^2}{2M}$$

- De totale kinetische energie van het systeem is dan

$$K = K_{MM} + K_{\text{int}}$$

met K_{int} de zgn. interne kinetische energie van het systeeem, d.i. de kinetische energie geassocieerd met de *beweging van de deeltjes t.o.v. het massamiddelpunt*.

Conceptvraag

a 1.0-kg block and a 2.0-kg block are pressed together on a horizontal frictionless surface with a compressed very light spring between them. They are not attached to the spring. After they are released and have both moved free of the spring

- A) the lighter block will have more kinetic energy than the heavier block.
- B) the heavier block will have more kinetic energy than the lighter block.
- C) both blocks will both have the same amount of kinetic energy.
- D) both blocks will have equal speeds.
- E) the magnitude of the momentum of the heavier block will be greater than the magnitude of the momentum of the lighter block.

Conceptvraag

a 1.0-kg block and a 2.0-kg block are pressed together on a horizontal frictionless surface with a compressed very light spring between them. They are not attached to the spring. After they are released and have both moved free of the spring …➔ antwoord A

Omwille van impulsbehoud is $m_1v_1 = m_2v_2$

- $$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1{v_1}^2}{\frac{1}{2}m_2{v_2}^2} = \frac{(m_1v_1)v_1}{(m_2v_2)v_2} = \frac{v_1}{v_2}$$
- En bijgevolg is $K_1/K_2 = m_2/m_1$

Te vergelijken met : kogel uit een geweer (terugslag); elektron dat vrijkomt uit een kern : Als $m_2 >> m_1$ dan zit het allergrootste deel van de kinetische energie bij m_1.

9.4 Botsingen

- Een **botsing** is een korte, intense interactie tussen voorwerpen.
  - Vbn.: biljartballen op een biljarttafel, een tennisbal en racket, voetbal en voet, een auto-ongeluk.
  - De botsingstijd is klein vergeleken met de tijdspanne van de beweging van de botsende voorwerpen.
  - Interne krachten tijdens de botsing zijn zo groot dat we de externe krachten die werken op het systeem **tijdens het botsen** kunnen verwaarlozen.
  - Tijdens een **botsing** is er dus **behoud van impuls**.

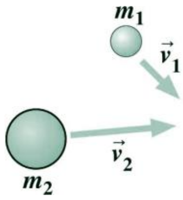
Elastische en Niet-elastische Botsingen

- In een **elastische botsing** zijn de interne krachten bij de botsing conservatief.
  - Gevolg: bij een elastische botsing is er behoud van impuls en behoud van kinetische energie.
- In een **niet-elastische botsing** zijn de krachten niet conservatief en mechanische energie gaat verloren.
  - In een **volkomen niet-elastische botsing** vormen de botsende voorwerpen na de botsing één geheel, m.a.w. ze bewegen verder samen met dezelfde snelheid.
  - Dit betekent echter niet dat alle kinetische energie verloren gaat.

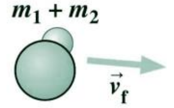
9.5 Volkomen Niet-elastische Botsingen

- Bij volkomen niet-elastische botsingen geldt enkel behoud van impuls.
  - Na de botsing is er slechts één voorwerp, dus ook slechts één snelheid:

Vóór de botsing



Na de botsing

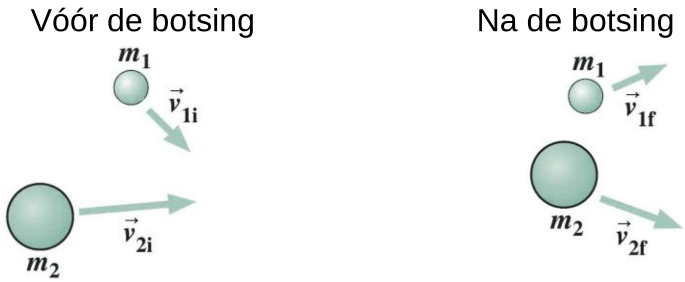


- Behoud van impuls geeft dan:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f$$

9.6 Elastische Botsingen

- Bij elastische botsingen is er behoud van impuls en van kinetische energie:



- Behoud van impuls en kinetische energie geeft dan:

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

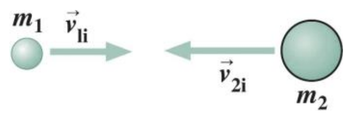
$$\tfrac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_{2f}^2$$

Conceptvraag

On a smooth horizontal floor, an object slides into a spring which is attached to another mass that is initially stationary. When the spring is most compressed, both objects are moving at the same speed. Ignoring friction, what is conserved during this interaction?

- A) momentum and mechanical energy
- B) momentum only
- C) kinetic energy only
- D) momentum and kinetic energy
- E) momentum and potential energy

Elastische Botsingen in Eén Dimensie



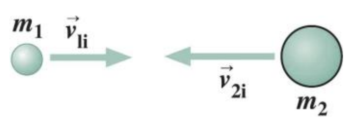
- Toepassen van behoud van impuls en van behoud van kinetische energie geeft:
  - $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$
  - $½\, m_1 v^2_{1i} + ½\, m_2 v^2_{2i} = ½\, m_1 v^2_{1f} + ½\, m_2 v^2_{2f}$
- Mits herschikken van de termen (m_1 links) wordt dit
  - $m_1 v_{1i} - m_1 v_{1f} = m_2 v_{2f} - m_2 v_{2i}$
  - $m_1 v^2_{1i} - m_1 v^2_{1f} = m_2 v^2_{2f} - m_2 v^2_{2i}$

Delen we deze twee vgl door elkaar en met $(a^2-b^2)=(a+b)*(a-b)$

$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$ of $\boxed{v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})}$

- Bij een *elastische botsing in één dimensie* blijft de |relatieve snelheid| (absolute waarde) behouden!

Elastische Botsingen in Eén Dimensie



Bij een *elastische botsing in één dimensie* is behoud van kinetische energie equivalent met behoud van |relatieve snelheid|

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

- Oefening : toon aan met behulp van voorgaande formules (impulsbehoud en behoud |relatieve snelheid|) dat :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Als m2>>m1 :

$$v_{1f} = -v_{1i} + 2v_{2i}$$

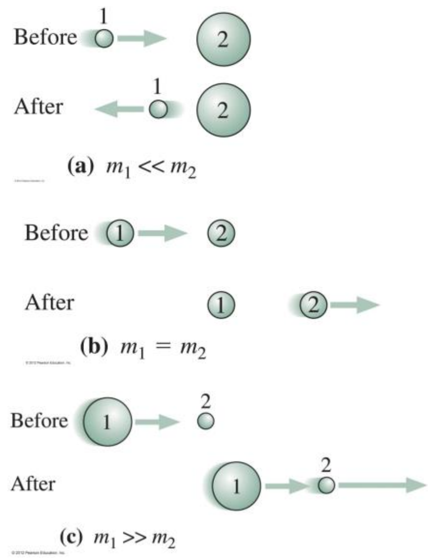
$$v_{2f} = v_{2i}$$

Bijzondere gevallen: 1-Dim Elastische botsingen met m_2 Initieel in rust

1) $m_1 << m_2$:
Invallend deeltje kaatst terug met behoud van zijn |snelheid|

2) $m_1 = m_2$:
Snelheid en kinetische energie worden overgedragen van m_1 op m_2

3) $m_1 >> m_2$:
Invallend deeltje gaat op een detail na "gewoon door" en m_2 *wordt met dubbele snelheid "weggeschoten"*



Botsingen in Twee Dimensies

- Bij een botsing geldt altijd behoud van impuls.
- Pas dit toe op de x-componenten en de y-componenten.
- In het geval van een elastische botsing geldt ook behoud van kinetische energie.
- Vb.: een biljartbal beweegt met 3,0 m/s volgens de X-as en botst tegen een identieke stilstaande bal. Na de botsing beweegt elke bal onder een hoek van 45° met de X-as, de eerste bal naar boven en de tweede bal naar onder. Wat is de snelheid van elke bal na de botsing?

Impulsbehoud y-as => $v_{1y} = - v_{2y}$ en dus (symmetrie, hoek 45°) ook $v_{1x} = v_{2x} = v_{1y}$

Impulsbehoud x-as (en $m_1 = m_2$) => $\mathbf{v_{1x} + v_{2x} = 3\ m/s}$ => $v_{1x} = v_{2x} = 1{,}5$ m/s

$V_1 = \sqrt{v^2_{1x} + v^2_{1y}} = \sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}5)^2}\,\frac{m}{s} = \sqrt{4{,}5}\,\frac{m}{s} = 2{,}12\,\frac{m}{s}$

Merk op dat de kinetische energie gelijk bleef : $K_f = 2\ [\ ½\ m_1 (2.12\ m/s)^2] = K_i$

33

VB : Botsingen in Twee Dimensies

- Toon aan dat wanneer twee gelijke massa's waarvan er één oorpronkelijk in rust is, niet-frontaal maar volkomen elastisch met elkaar botsen, de eindsnelheden stééds loodrecht op elkaar zullen staan.

Impuls begin = impuls einde : $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\,\vec{v}_2$

Kwadrateren: $v^2 = v_1{}^2 + v_2{}^2 + 2\,\vec{v}_1.\vec{v}_2$

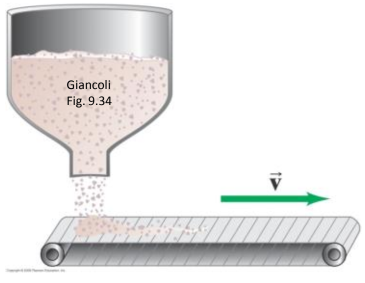
Anderzijds energiebehoud : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 + \frac{1}{2}mv_2{}^2$

$En\ dus\ moet\ \vec{v}_1.\vec{v}_2 = 0 \quad of \quad \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

Bij frontale botsing : alles volgens één lijn maar v_1=o
(zie ook b.g. 2 : $m_1 = m_2$)

34

VB : behoud van impuls : transportband



Onderstel wrijving van de band op de rollen en kogellagers verwaarloosbaar en onderstel verticale beweging verwaarloosbaar. Welk **vermogen** moet de motor leveren om de snelheid v constant te houden als de massa op de band continu toeneemt met (dM/dt)?

F = dP_{impuls} /dt met P_{impuls}= Mv waarbij nu M **niet** cte maar v wel cte

F = d(Mv)/dt = v (dM/dt)

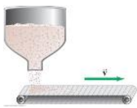
$\boldsymbol{P}_{power}$ = dW/dt = (F dx)/dt = F (dx/dt) = Fv = v² (dM/dt) = d/dt (v² dM)

De kinetische energie van dM is dK = ½ dM v²

Dus $\boldsymbol{P}_{power}$ = **2 x** d/dt (½ dM v²) !!! Naaste toename van dK wordt ook nog arbeid omgezet in warmte door wrijving tussen grind en band

35

VB : volkomen onelastische botsing: transportband



Onderstel wrijving van de band op de rollen en kogellagers verwaarloosbaar en onderstel verticale beweging verwaarloosbaar
Welke **arbeid** moet de motor leveren om de snelheid v constant te houden als een extra massa m (bv extra zak zand) op de band komt?

A : beginmassa $m_2 = j\ m$ met snelheid v_2 (j = aantal zakken zand op de transportband, massa band inbegrepen) en $m_1 = m$ met snelheid 0
B : massa $m_2 + m_1 = (j+1)\ m$ met snelheid v (na volkomen onelastische botsing)
C : massa $m_2 + m_1 = (j+1)\ m$ met snelheid v_2 (nadat motor extra arbeid leverde)

A : $K_A = ½\ (j\ m)\ v_2^2 = j\ K_{1zz}$ (K_{1zz} = kin. energie voor één zak zand met snelheid v_2)

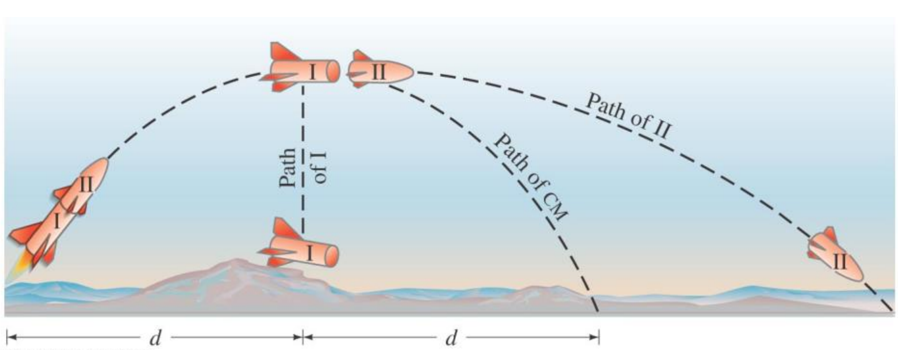
B : impulsbehoud : $v\ (j\ m + m) = (j\ m\ v_2 + 0)$ => $v = j\ /\ (j+1)\ v_2$ waaruit :
B : $K_B = ½\ ((j+1)\ m)\ v^2 = … = j/(j+1)\ K_A$: verlies aan energie bij onelastische botsing!

C : $K_c = ½\ ((j+1)\ m)\ v_2^2 = (j+1)\ K_{1zz} = K_A + K_{1zz}$: bijkomende kinetische energie (tov A) voor één extra zak zand met massa m
C – B : $K_c – K_B = \{(j+1) – j^2/(j+1)\}\ K_{1zz} = \{[(j+1)^2 – j^2]/(j+1)\}\ K_{1zz} = \{(2j+1)/(j+1)\}\ K_{1zz}$

Als j>>1 dan is de te leveren arbeid $K_c – K_B = 2\ K_{1zz}$!!!

36

Massamiddelpunt ➔parabool



37