Samenvatting Wiskunde B

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\int \frac{t-1}{t^2+4}dt = \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4}$$

$$\text{stel} \;\; u = t^2+4$$

$$\text{dan} \;\; du = 2tdt \rightarrow dt = \frac{du}{2t}$$

$$= \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} = \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy$$

$$\text{stel} \;\; u = e^y$$

$$\text{dan } \ du = e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y}$$

$$= \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)} du$$

$$= \int \frac{du}{u^2+4}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{e^y}{2} + C$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$

$$\text{dan } du = \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x$$

$$= x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln(x) - \int dx$$

$$= x \ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)}$$

$$\text{stel } u = x + 1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$$

$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$

$$= (x+1)\tan(x) - \int \tan(x) dx$$

$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x} \sin(2x)$$

$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = 2\cos(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) + 2\int e^{-x}\cos(2x)dx$$

$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = -2\sin(2x)dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) + 2\Big[-e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx\Big]$$

$$= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx$$

Dus

$$\int e^{-x}\sin(2x) = -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx$$

$$5\int e^{-x}\sin(2x) = -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]$$

$$\int e^{-x}\sin(2x) = \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}$$

1.2.4 Voorbeeld 4

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta) d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}$$

Deel II

Differentiaalvergelijkingen

Hoofdstuk 2

Basisbegrippen

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld differentiaalvergelijking
$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n .
- **Graad**: De graad bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. $y^{(n)^r}$

Voorbeeld orde en graad

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y \; - 2y'^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin\sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x+2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n -de orde worden drie oplossingen onderscheidt:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.

2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.

3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld onafhankelijke variabelen:

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$	?	?
$\rightarrow a + be^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld 1 AO en PO:
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1.
$$y = a\sin(x) + b\cos(x)$$
$$y' = a\cos(x) - b\sin(x)$$
$$y'' = -a\sin(x) - b\cos(x)$$
$$\rightarrow y'' + y = 0$$
$$-a\sin(x) - b\cos(x) + \sin(x) + b\cos(x) = 0$$
$$0 = 0 \rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

   De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:
$$y = 0$$
$$y = \sqrt{2}\sin(x)$$
$$y = \sin(x) + \cos(x)$$

Voorbeeld 2 AO en PO:
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is *1* en de graad is *2* .
2. $$\begin{gathered} y' = Ce^x \\ \to C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x = 0 \\ \to C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\ \to 0 = 0 \to \text{Het is een oplossing} \end{gathered}$$
   Orde DVG = *1* = Onafhankelijke constanten van y
3. $$\begin{gathered} y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\ \to (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\ \to e^x - 2e^x + e^x = 0 \\ \to 0 = 0 \end{gathered}$$
   Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.

3. Elimineer de n constanten van de $n+1$ bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.

4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld 1: bepalen van een DVG
De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2 x$$

1. Er zijn 2 onafhankelijke constanten.

2. Er moet 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y & = C_1 + C_2 x \\ y' & = C_2 \\ y'' & = 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.

4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde 2 .

Voorbeeld 2: bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y & = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' & = -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' & = C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' & = -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' & = 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' & = 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

   Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld 3 : bepalen van een DVG
Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 = R^2$$

Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x-a) + y'(y+a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y+a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow y''(x+y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

Deel III

Laplacetransformatie

Hoofdstuk 3

Algemene begrippen

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-\alpha) = \begin{cases} 0 & t < \alpha \\ 1 & t > \alpha \end{cases}$$

Voorbeeld Heaviside functie

Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$.

Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t+t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t+t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$

_TODO: graph