

Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

I	Herhaling Wiskunde A	2
1	Onbepaalde Integralen	3
1.1	Substitutiemethode	3
1.1.1	Voorbeeld 1	3
1.1.2	Voorbeeld 2	3
1.2	Partieële integratie	4
1.2.1	Voorbeeld 1	4
1.2.2	Voorbeeld 2	4
1.2.3	Voorbeeld 3	4
1.2.4	voorbeeld 4	5
II	Wiskunde B	6
2	Differentiaalvergelijking	7
2.1	Definities	7
2.2	Soorten oplossingen	8
2.3	Bepalen van een DVG	10
3	Laplacetransformatie	13
3.1	De Heaviside functie	13
3.2	De Dirac delta-'functie'	14
3.3	Causale functie	14
3.4	Exponentiële orde	15
3.5	De Laplacetransformatie	16
3.5.1	Opmerkingen	16
3.5.2	Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties	17
3.5.3	Translatie naar rechts	19
3.5.4	Dempingsfunctie	20
3.5.5	Schaalwijziging	21
3.5.6	Laplacegetransformeerde van $f'(t)$	22
3.5.7	Laplacegetransformeerde van $f''(t)$	22
3.5.8	Laplacegetransformeerde van $\ln f(t)$	23
3.5.9	Laplacegetransformeerde van $\int_0^t f(u) du$	24

III	Oefeningen	25
4	Differentiaalvergelijkingen	26
5	Laplacetransformatie	28
5.1	De Heaviside functie	28
5.2	Functies van de exponentiële orde	32
5.3	Laplacebeeld	32

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t^2+4} dt &= \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\ \text{stel } u &= t^2+4 \\ \text{dan } du &= 2t dt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\ &\Rightarrow \int \frac{t}{2tu} du - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln t^2+4 - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4} dy \\ \text{stel } u &= e^y \\ \text{dan } du &= e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\ &\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)} du \\ &= \int \frac{du}{u^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{e^y}{2} + C\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ \text{stel } u &= \ln(x) \text{ en } v = \int dx \\ \text{dan } du &= \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x \\ &\Rightarrow x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{stel } u &= x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{dan } du &= dx \text{ en } v = \tan(x) \\ &\Rightarrow (x+1) \tan(x) - \int \tan(x) dx \\ &= (x+1) \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) \\ \text{stel } u &= \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= 2 \cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx \\ \text{stel } u &= \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= -2 \sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \left[-e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \right] \\ &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx \\ \Leftrightarrow 5 \int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] \\ \Leftrightarrow \int e^{-x} \sin(2x) &= \frac{-e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)]}{5}\end{aligned}$$

1.2.4 voorbeeld 4

$$\begin{aligned}\int \sin^4(\theta) d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\ &= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\ &= \frac{12\theta - 8 \sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C\end{aligned}$$

Deel II

Wiskunde B

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

Uitwerking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde:** Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n .
- **Graad:** De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. $y^{(n)^r}$

Voorbeeld: Orde en graad

Uitwerking

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y - 2y^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = \sin(x)$	3	2
$(x - 1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3 s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin \sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x + 2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n -de orde worden drie oplossingen onderscheiden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

Uitwerking

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$?	?
$\rightarrow a + b e^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO

Uitwerking

Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a \sin(x) + b \cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

- 1.

$$\begin{aligned}y &= a \sin(x) + b \cos(x) \\y' &= a \cos(x) - b \sin(x) \\y'' &= -a \sin(x) - b \cos(x)\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\-a \sin(x) - b \cos(x) + \sin(x) + b \cos(x) &= 0 \\&\rightarrow \text{Het is een oplossing}\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$\begin{aligned}y &= 0 \\y &= \sqrt{2} \sin(x) \\y &= \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO

Uitwerking

Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.

2.

$$\begin{aligned}y' &= Ce^x \\ \rightarrow C^2(e^x)^2 - \left(\frac{1}{C} + Ce^x\right)Ce^x + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \\ \rightarrow \text{Het is een oplossing}\end{aligned}$$

Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$\begin{aligned}y' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\ \rightarrow y'^2 - yy' + e^x & \\ \Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= 0\end{aligned}$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de $n + 1$ bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG

Uitwerking

De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2x$$

1. Er zijn 2 onafhankelijke constanten.

2. Er moet 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.

4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde 2.

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG

Uitwerking

Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

1. Er zijn 3 onafhankelijke constanten.

2. Er moet 3 maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' &= -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' &= C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' &= -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3de afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$\begin{aligned} 3(y + y'') - y'' - y''' &= 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0 \\ \rightarrow y''' - 2y'' - 3y' &= 0 \end{aligned}$$

4. De orde van deze DVG is 3

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG

Uitwerking

Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt $y = -x$.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet 2 maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$\begin{aligned} 1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

4. Orde van de DVG = 2 = Aantal onafhankelijke constanten.

2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned} y''' - y'' \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow D^3y - D^2y \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow (D^3 - D^2 \sin t + t)y &= t^2 \\ \Leftrightarrow L(d)y &= g(t) \\ \Leftrightarrow \text{met } L(d) = \sum_{i=0}^n a_i D^i, a_i &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden $(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$ gekend zijn.

2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten $y(0), y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$ respectievelijk gelijkgesteld worden aan C_1, C_2, \dots, C_n

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = g(t)$ indien $y(0) = 0, y'(0) = 1$ en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
L(d)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= e^{-t}H(t-1) \\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y \\
&= s^2Y - 1 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y &= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y(s^2 + 1) &= 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2 + 1}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\right]
\end{aligned}$$

$$\text{antwoord: } y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\right)H(t-1)$$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ indien $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$
Uitwerking

Stel: $y(0^+) = C_1$, $y'(0^+) = C_2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\ &= s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st} dt \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\end{aligned}$$

dus

$$\Leftrightarrow s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}\right\}(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t + f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}(t) \\ &= \sin t\end{aligned}$$

$$\text{De algemene oplossing: } y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t - \left(\cos(t) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

De PO voor $t = \frac{\pi}{4}$ ($< \frac{\pi}{2}$ dus Heaviside is 0)

$$\begin{aligned}y(t) &= C_2 \sin t + C_1 \cos t \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'(t) &= C_2 \cos t - C_1 \sin t \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \begin{cases} 0 = C_2 + C_1 \\ 0 = C_2 - C_1 \end{cases} &\Rightarrow C_2 = C_1 = 0\end{aligned}$$

Het antwoord:

$$y(t) = -(\cos t) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

2.5 DVG van de orde 1 en graad 1

2.5.1 Gescheiden veranderlijken

Indien een DVG van orde 1 en graad 1 te schrijven is als

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Algemeen:

$$\begin{aligned}M(x, y) dx &= -N(x, y) dy \\f(x)g(y) dx &= -h(x)i(y) dy \\ \frac{f(x)}{h(x)} dx &= - \frac{i(y)}{g(y)} dy \\ a(x) dx &= b(y) dy \\ \int a(x) dx &= \int b(y) dy \\ A(x) + C_1 &= B(y) + C_2 \\ A(x) &= B(y) + C\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de AO van $yt + \sqrt{1-t^2}y' = 0$

Uitwerking

$$\begin{aligned}yt dt + \sqrt{1-t^2} dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} dy &= -yt dt \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= - \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \ln |y| \sqrt{1-x^2} + C \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}+C} \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}} e^C \\ \Leftrightarrow y &= De^{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

TODO: LES DINSDAG 13/03

2.6 Exacte DVG

Voorbeeld: Bepaal alle functie $f(y)$ zodanig dat de DVG

$$2y dx + (x - 4y\sqrt{y}) dy = 0$$

na vermenigvuldiging met $f(y)$ exact wordt. Bepaal daarna haar AO.

Uitwerking

Is deze DVG exact?

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} 2y &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y\sqrt{y}) &= 1\end{aligned}$$

Deze DVG is dus niet exact. We moeten een functie $f(y)$ bepalen zodat deze DVG wel exact wordt.

$$2yf(y) dy + (x - 4y\sqrt{y})f(y) dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} 2yf(y) = \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y^{3/2})f(y)$$

$$\Rightarrow 2f(y) + 2y \frac{d}{dy} f(y) = f(y)$$

$$\Rightarrow 2y \frac{d}{dy} f(y) = -f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{f(y)} f(y) = -\frac{dy}{2y}$$

$$\Rightarrow \int \frac{d}{f(y)} f(y) = - \int \frac{dy}{2y}$$

$$\Rightarrow \ln |f(y)| = -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln |C|$$

$$\Rightarrow \ln |f(y)| = -\frac{1}{2} \ln |Cy|$$

$$\Rightarrow \ln |f(y)| = \ln |Cy|^{-1/2}$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{Cy}}$$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{met } C = 1$$

De DVG wordt:

$$2\sqrt{y} dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) dy = 0$$

wat een exacte DVG oplevert. Nu bepalen we de AO.

$$2\sqrt{y} dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) dy = 0$$

komt overeen met

$$\frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy = 0$$

We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 2\sqrt{y} (*) \\ \frac{\partial}{\partial y} F = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y (**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(*) \frac{\partial}{\partial x} F &= 2\sqrt{y} \\
\Rightarrow F &= \int 2\sqrt{y} \, dx \\
\Rightarrow F &= 2\sqrt{y}x + h(y); \\
(**) \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = 2x \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dy} h(y) \\
\Rightarrow \frac{d}{dy} h(y) &= -4y \\
\Rightarrow h(y) &= \int -4y \, dy \\
\Rightarrow h(y) &= -2y^2
\end{aligned}$$

De AO:

$$F(x, y) = 2\sqrt{y}x - 2y^2$$

Voorbeeld: In een vat bevindt zich $20m^3$ zout-oplossing waarin 1 kg zout opgelost is. Men voert een nieuwe pekeloplossing toe met constante concentratie van $0,5 \text{ kg zout}/m^3$ en aan een snelheid van $2m^3/\text{min}$. De oplossing wordt continu gemengd en loopt onderaan weg met een snelheid van $1m^3/\text{min}$. Hoeveel zout bevindt zich in de pekeloplossing na 1 uur?

Uitwerking

Definitie van de variabelen:

- x : # kg zout na t minuten
- Op $t = 0$ is $x(0) = 1$
- $C_i = \frac{1}{2} \text{kg}/m^3$ (Concentratie in)
- $v_i = 2m^3/\text{min}$ (Snelheid in)
- $C_{uit} = \frac{x(t)}{v(t)}$ (Concentratie uit)
- $v_{uit} = 1m^3/\text{min}$ (Snelheid uit)

We zoeken een uitdrukking voor dx .

- dx = verandering x gedurende dt minuten
- dx = hoeveelheid zout binnen gedurende dt minuten - hoeveelheid zout buiten gedurende dt minuten

$$\begin{aligned}
dx &= C_i v_i dt - C_{uit} v_{uit} dt \\
\Rightarrow dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 dt - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 1 dt \quad \text{met } V(t) = 20 + 2t - t = 20 + t \\
\Rightarrow dx &= dt - \frac{x}{20 + t} dt \\
\Rightarrow dx + \left(\frac{x}{20 + t} - 1 \right) dt &= 0 \\
\Rightarrow (20 + t) dx + (x - 20 - t) dt &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}(20 + t) = 1 &= \frac{\partial}{\partial x}(x - 20 - t) \Rightarrow \text{exact}
\end{aligned}$$

2.7 Homogene DVG

Een DVG is homogeen indien:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Indien een DVG homogeen is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

Voorbeeld: Bepaal de PO van :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$

waarvoor $x(1) = 1$.

Uitwerking

Berekening algemene oplossing

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x}{t(\ln t - \ln x)} \\ \Rightarrow t(\ln t - \ln x) dx - x dt &= 0 \\ \Rightarrow t \ln \left(\frac{t}{x} \right) dx - x dt &= 0 \\ \text{controle homogeen} \\ \Rightarrow \lambda t \ln \left(\frac{\lambda t}{\lambda x} \right) - \lambda x \\ \Rightarrow \lambda^1 \left(t \ln \left(\frac{t}{x} \right) - x \right) &\quad \text{homogeen want } M(x,t) \text{ en } N(x,t) \text{ hebben } \lambda \text{ tot de eerste macht} \\ \text{substitutie } t = ux \\ \Rightarrow u \ln u dx - u dx + x du &= 0 \\ \Rightarrow (u \ln u - u) dx = x du \\ \Rightarrow \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C| \\ \Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |Cx| \\ \Rightarrow \ln u - 1 = Cx \\ \Rightarrow \ln u = Cx + 1 \\ \Rightarrow u = e^{Cx+1} \\ \Rightarrow t = xe^{Cx+1}\end{aligned}$$

Berekening particuliere oplossing:

$$\begin{aligned}x(1) &= 1 \\ \Rightarrow 1 &= 1e^{C+1} \\ \Rightarrow C + 1 &= 0 \\ \Rightarrow C &= -1 \\ \Rightarrow t &= xe^{-x+1}\end{aligned}$$

2.8 Lineaire DVG van orde 1

Algemene definitie:

Een DVG is lineair in y en y' indien $y' + P(x)y = Q(x)$

Voorbeeld:

$$dy + (y \sin x - \cos x) dx = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} dy + (y \sin x - \cos x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y \sin x - \cos x &= 0 \\ \Rightarrow y' + y \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

Lineair in y en y'

Voorbeeld:

$$ds + (1 - 2t)s dt = t^2 dt$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} ds + (1 - 2t)s dt &= t^2 dt \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} + (1 - 2t)s &= t^2 \end{aligned}$$

Lineair in s en s'

2.8.1 Oplossingsmethode

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= Q(x) \\ \text{substitutie } y &= uv \quad (\text{vrijheidsgraad toevoegen}) \\ \Rightarrow u'v + uv' + P(x)uv &= Q(x) \\ \Rightarrow u(P(x) + v') + u'v &= Q(x) \\ \text{stel } P(x) + v' &= 0 \quad (\text{vrijheidsgraad wegnemen}) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de AO van

$$(4r^2s - 6) dr + r^3 ds = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} r^3 \frac{ds}{dr} + 4r^2s - 6 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{ds}{dr} + \frac{4}{r}s &= \frac{6}{r^3} \\ \Rightarrow s' + P(r)s &= Q(r) \\ \text{substitutie } s &= uv \\ \Rightarrow u'v + uv' + \frac{4}{r}uv &= \frac{6}{r^3} \\ \Rightarrow u \left(v' + \frac{4}{r}v \right) + u'v &= \frac{6}{r^3} \end{aligned}$$

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t + 2) - tH(t) + (t + t^2)H(t - 2)$

Uitwerking

Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$	<i>_TODO: graph</i>
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$	

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t - 2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t - 3)(-1 + e^t + t^2) + H(t - 5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t - 2) + (t^2 + e^t - 1)H(t - 3) - (t^2 - t + 25)H(t - 5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a) dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t)$ voor $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

$$\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & \forall t \in]a - \epsilon_1, a + \epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de Dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.

De afgeleide van de Heaviside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt} H(t-a) = \delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt$$

Uitwerking

In dit geval is $f(t) = (2 \sin t - 1)$ en $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$. We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt &= \int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t) = 0$ voor elke $t < 0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \rightarrow f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien $t < 1$ en 2 als $t > 1$. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

Uitwerking

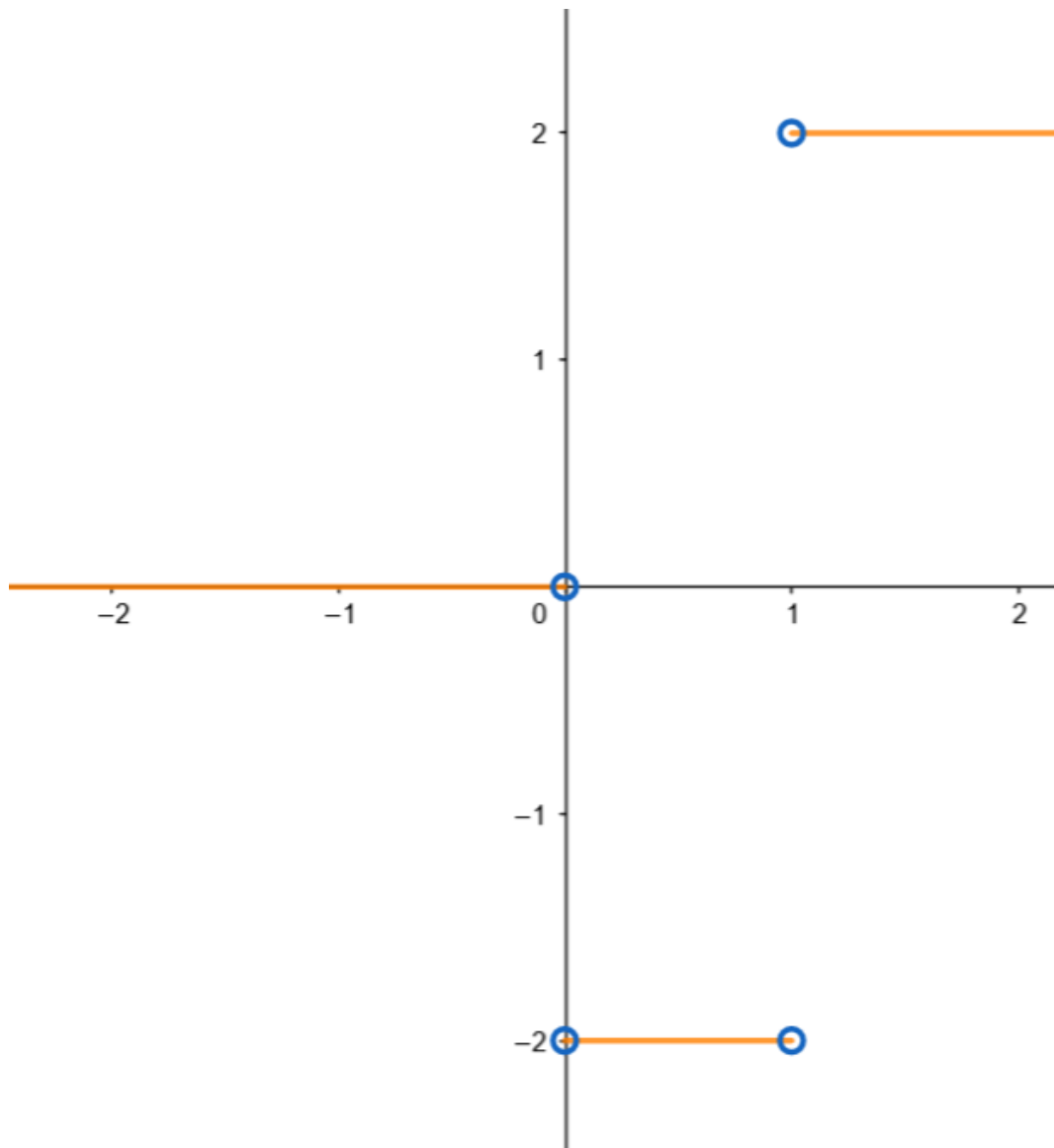
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t - 1)(-2 + 2) \\ &= -2H(t) + 4H(t - 1) \end{aligned}$$

Tekening:



3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in \mathbb{R}$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a . Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
|\sin t| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1 \text{ (willekeurige waarde)} \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1e^{at}
\end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat $a = 0$ en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1 + 2t)e^{-t}$

Uitwerking

Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|(1 + 2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2t)e^{-t}}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{at}e^t} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}}
\end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a + 1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{+\infty}{0} \rightarrow$ onbepaald
- $a + 1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hospital toe.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a + 1)} \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aangezien het een reële uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a + 1 > 0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causuaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

Het argument tussen de $|\dots|$ is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2+y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s = x + yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1.

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}, \quad s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\ &= |f(t)|e^{-xt} \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\ &= |f(t)|e^{-xt} \end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

•

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)} dt \\ &= \left. \frac{e^{t(a-s)}}{a-s} \right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-s} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-st}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

•

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{wj t}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\
 &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\
 &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j
 \end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

•

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t-0)\}(s) \\
 &= \int_0^{+\infty} \delta(t-0) e^{-st} dt \\
 &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t - 1)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1) + \sin(2t)\sin(1)\}(s) \\ &= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\ &= \cos(1)\frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1)\frac{2}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s\cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2\sin(1)}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2}\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - 3\frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - \frac{27s}{9s^2 + 1}\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{-st} dt \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}}e^{-s \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\ &= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)H(t - a)\}(s) = e^{-as}F(s) \quad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_0^a f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&\quad \text{stel } u = t - a \\
&\quad \text{dan } du = dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa} du \\
&= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as} F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2 - 1)H(t - 1) - \sin(3t)H(t - \pi)$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t - 1)^2 + 2(t - 1)]H(t - 1)\}(s) \\
&= e^{-as} \mathcal{L}\{t^2 + 2t\}(s) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2!}{s^3} + 2 \frac{1!}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left(\frac{2(1 + s)}{s^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t - \pi))H(t - \pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \frac{3}{s^2 + 9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) \\ &= e^{-s} \left(\frac{2(1+s)}{s^3} \right) - \left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9} \right) \\ &= e^{-s} \left(\frac{2(1+s)}{s^3} \right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s + a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3 - 1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7 - 2t^4 + t)e^{-t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t^7 - 2t^4 + t\}(s + 1) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{2 \cdot 4!}{(s + 1)^5} + \frac{1!}{(s + 1)^2} \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s - 2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{(s - 2)^2 + 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$

3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt \\ \text{stel } u &= at \\ \text{dan } du &= a dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}} \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u} du \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(u)\}\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin t\}\left(\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} \\ &= \frac{\omega}{\omega^2\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 1\right)} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\ &= s\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\ &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
\Leftrightarrow \omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

3.5.7 Laplacegetransformeerde van $f''(t)$

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voorbeeld: Gegeven $g(t) = te^{-t}$, bepaal $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\
&= s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) \\
\text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \\
\text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-t) \\
\Rightarrow s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2 \frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\
&= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ \frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\ \frac{d^2F}{ds^2} &= - \int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2f(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s) \end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) \\
*) \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds} \\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds} \\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right) \\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2} \\
**) \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) &= (-1)^3 \frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} \\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2} \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3} \\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4} \\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4}) \\
&= \frac{6}{(s+1)^4} \\
* - ** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}$$

3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s) \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}g(t) &= \int_0^t f(u) \, du \\g'(t) &= f(t) \\g'(0) &= 0 \\\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s) - 0 \\\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s)\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\&= \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\&= \frac{1}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \, dt$$

_TODO: slide 19

3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) \, du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

Voorbeeld: Gegeven $f(t) = e^{at}$ en $g(t) = e^{bt}$. Illustreer de juistheid van deze rekenregel.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} du \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})\right\}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{(e^{at} - e^{bt})\}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{(s-b) - (s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $H(t) * H(t) * H(t)$.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) du \\
\text{aangezien } 0 \leq u \leq t & \\
\Rightarrow H(u) &= 1 \\
\Rightarrow H(t-u) &= 1 \\
&= \int_0^t du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u) du \\
&= \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

3.5.12 Inverse Laplacetransformatie

Definitie:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \quad \text{indien} \quad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow s^2 + 2s + 1 &= a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 : a &= \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 : b &= -4 \\
\text{als } s = 2 : c &= \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{2s + 7}{2s^2 + 4s + 10}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{s^2 + 2s + 5}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{(s + 1) + 5/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - \cos(2t)e^{-t} - \frac{5}{2} \sin(2t)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - e^{-t} \left(\cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t \right)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} \cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1} + \frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1) \\
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t} - \cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1 - \cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD } &\Rightarrow e^{-(t-\pi)}(1 - \cos(t-\pi))H(t-\pi) \\
&= e^{\pi-t}(1 + \cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5 e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5 e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $(H * H * H * H*)(t)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken op 2 verschillende wijzen:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$$

Uitwerking

Methode 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t) \\&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u \cos[2(t-u)] du \\&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u - [2(t-u)]) + \sin(2u + [2(t-u)]) du \\&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(4u - 2t) + \sin 2t du \\&= \frac{1}{4}\left[\int_0^t \sin(4u - 2t) du + \int_0^t \sin 2t du\right] \\&= \frac{1}{16}\left[-\cos(4u - 2t)\right]_0^t + \frac{1}{4}\left[u \sin 2t\right]_0^t \\&= \frac{1}{16}\left(-\cos 2t + \cos(-2t)\right) + \frac{1}{4}t \sin 2t \\&= \frac{1}{4}t \sin 2t\end{aligned}$$

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned}y' &= C_1 \\y'' &= 0\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2 . De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') &= 0\end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_p &= (x_p)^2 = C^2 \\ \Rightarrow p &(C, C^2)\end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 &= y' \left(\frac{y'}{2}\right) \left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4y - y'^2 &= 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow y'^2 - 4y'x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

Hoofdstuk 5

Laplacetransformatie

5.1 De Heaviside functie

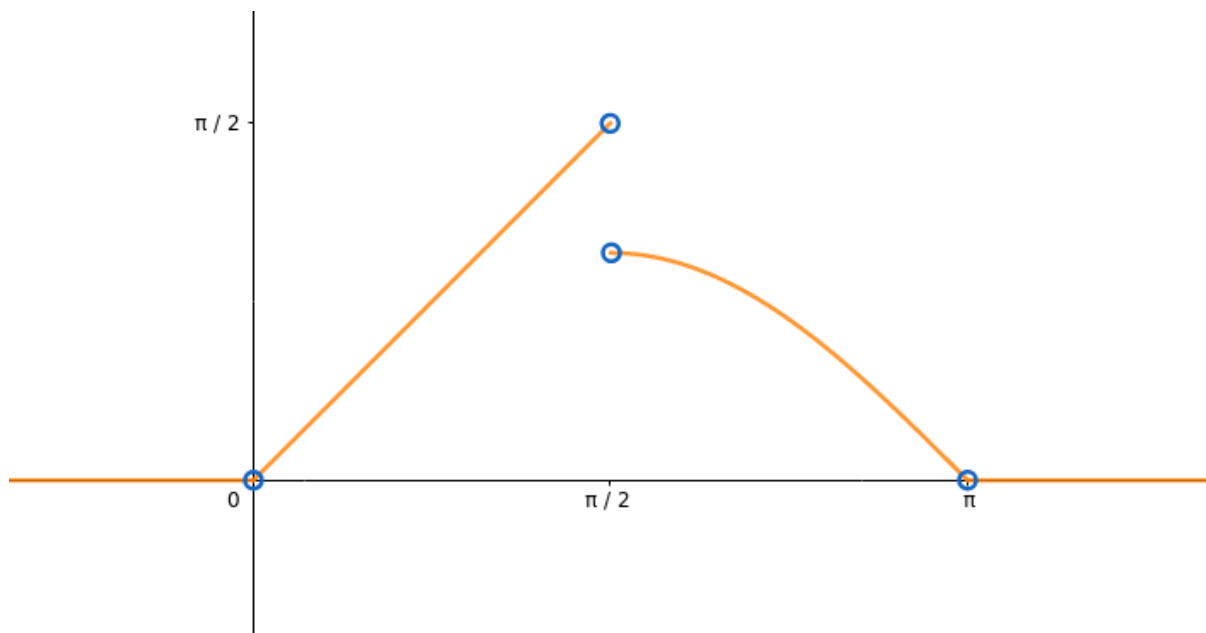
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

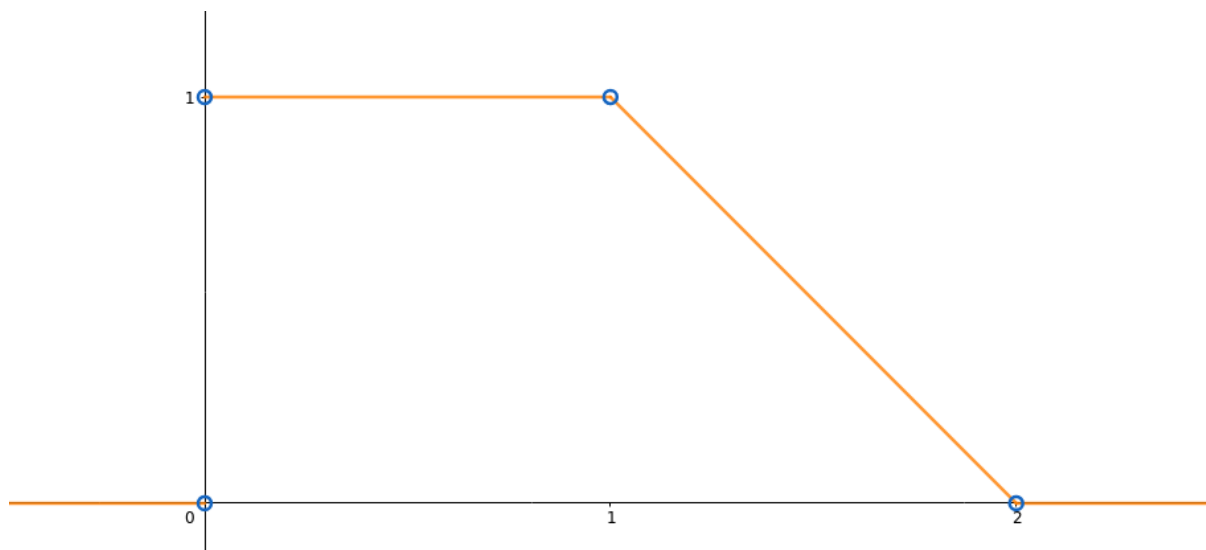
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0 + t) + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(-t + \sin t) + H(t - \pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) + H(t - \pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) - H(t - \pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

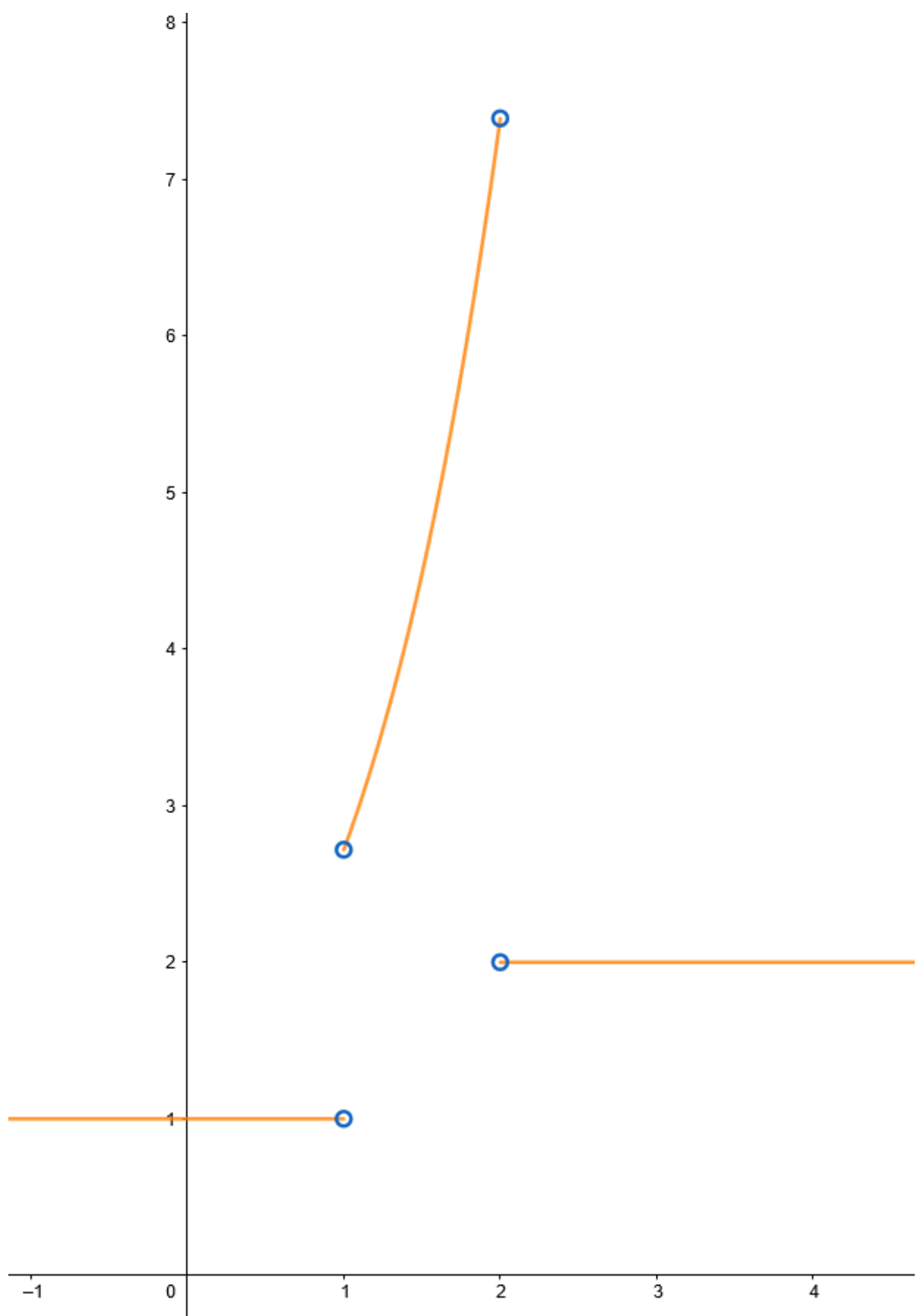
Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned}h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t - 1)(-1 + (2 - t)) + H(t - 2)(-(2 - t) + 0) \\&= H(t) + H(t - 1)(1 - t) + H(t - 2)(t - 2)\end{aligned}$$

Teken de functie $f(t) = 1 + H(t - 1)(e^t - 1) + H(t - 2)(2 - e^t)$

Oplossing

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



5.2 Functies van de exponentiële orde

Geef de exponentiële orde van $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t} e^{2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \quad \text{voor } \alpha+2 > 0 \\ &= 0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\alpha + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &> -2\end{aligned}$$

De exponentiële orde is -2.

Geef de exponentiële orde van $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\ &= 6 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(3-\alpha)}\end{aligned}$$

Indien $3 - \alpha < 0$ dan wordt de limiet 0. De exponentiële orde is dus 3.

5.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t$$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}$$

$$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1 + e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$

$$f(t) = \sin^2 t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right]\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2\delta(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st} dt \\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2} \\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$

$$f(t) = (t-1)H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s) \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\} H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s} \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} \right)
\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2 H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\} H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s} \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} \right)
\end{aligned}$$

$$f(t) = \sin(t) H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t) H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2) H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s} [\cos(2) \mathcal{L}\{\sin(u)\} + \sin(2) \mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s} \left(\frac{\cos(2)}{s^2 + 1} + \frac{\sin(2)s}{s^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$

$$f(t) = t^2 e^{-2t}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}$$

$$f(t) = e^t \cos 3t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1) \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2 + 9}\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-2t} \sin 2t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2) \\ &= \frac{2}{(s+2)^2 + 4}\end{aligned}$$

$$f(t) = t \cos t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d \left[\mathcal{L}\{\cos t\}(s) \right]}{ds} \\ &= - \frac{d \left[\frac{s}{s^2+1} \right]}{ds} \\ &= - \frac{(s^2+1) - s(2s)}{(s^2+1)^2} \\ &= - \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2) \\ &= \mathcal{L}\left\{t \frac{1 + \cos t}{2}\right\}(s+2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t \cos t\}(s+2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2 - 1}{((s+2)^2 + 1)^2} \right)\end{aligned}$$

$$f(t) = e^{-3t}t^3H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-3t}t^3H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)^3+6(t-2)^2+12(t-2)+8]H(t-2)\}(s+3) \\
&= e^{2s}\mathcal{L}\{u^3+6u^2+12u+8\}(s+3) \\
&= e^{2s}\left[\frac{3!}{(s+3)^4}+6\frac{2!}{(s+3)^3}+12\frac{1!}{(s+3)^2}+8\frac{1}{s}\right] \\
&= e^{2s}\left[\frac{6}{(s+3)^4}+\frac{12}{(s+3)^3}+\frac{12}{(s+3)^2}+\frac{8}{s}\right] \\
&= 2e^{2s}\left[\frac{3}{(s+3)^4}+\frac{6}{(s+3)^3}+\frac{6}{(s+3)^2}+\frac{4}{s}\right]
\end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos 2t + H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\
&= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s)
\end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1.

$$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s-2) \\
&= \mathcal{L}\left\{\left(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\left\{\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{\pi}{4(s-2)}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos 2t H(t - \frac{\pi}{4})\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})] H(t - \frac{\pi}{4})\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}] H(t - \frac{\pi}{4})\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\cos 2(t - \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2(t - \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{2}] H(t - \frac{\pi}{4})\}(s) \\
&= -\mathcal{L}\{\sin 2(t - \frac{\pi}{4}) H(t - \frac{\pi}{4})\}(s) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}\{\sin 2u\} \\
&= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}
\end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{\pi}{4(s-2)} \right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}$$

5.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$$f(s) = \frac{1}{s^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4} + \frac{5}{s^4}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) + \frac{5}{3!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{5t^3}{6}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{1}{3s-1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t) \\ \Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} &= \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3) + b(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\ \Rightarrow 2s+3 &= a(s-3) + b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 9 \end{cases} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2} + \frac{9}{s-3}\right\}(t) \\ &= -7e^{2t} + 9e^{3t}\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t) \\ &= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t) \\
& \Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9) + (b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
& \Rightarrow s+3 = a(s^2+9) + (b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
& = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}$$
