

Hoofdstuk 33

Essential University Physics

Richard Wolfson
2nd Edition

Relativiteitstheorie

Relativity

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie



Een goede GPS ontvanger moet niet enkel corrigeren voor de snelheid waarmee de GPS-satelliet beweegt (4 km/s) (volgens de “**speciale relativiteitstheorie**”) maar ook nog eens voor effecten die te maken hebben met de “**algemene relativiteitstheorie**”.

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

Voor een assenkruis S' dat met **constante** snelheid v beweegt langs de x -as t.o.v. een assenkruis S geldt in de klassieke mechanica de Galilei transformatie :

$$y' = y ; z' = z ; x' = x - vt ; t' = t$$

In de relativistische mechanica (bij snelheden van de grootte orde van de lichtsnelheid $c = 300\,000\text{ km/s}$) geldt echter de Lorentz transformatie :

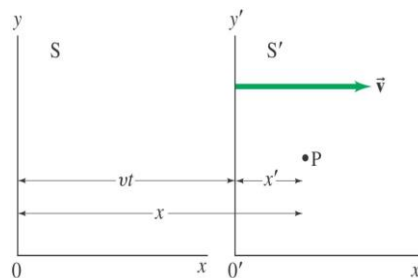


Table 33.1 The Lorentz Transformations

S to S'	S' to S	
$y' = y$	$y = y'$	
$z' = z$	$z = z'$	
$x' = \gamma(x - vt)$	$x = \gamma(x' + vt')$	where $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$
$t' = \gamma(t - vx/c^2)$	$t = \gamma(t' + vx'/c^2)$	

© 2012 Pearson Education, Inc.

3

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

De lichtsnelheid (in vacuüm) is in elk assenkruis en voor elke richting steeds dezelfde : **$c = 300\,000\text{ km/s}$** ! (of juister : $299\,792\text{ km/s}$)

Gevolgen :

- Er bestaat een **maximum snelheid**, nl. de lichtsnelheid c , waarmee “deeltjes en energiedragende partikels” t.o.v. elkaar kunnen bewegen.
- Tijd hangt af van het assenkruis (o.a. “**tijdsdilatatie**”)
- Lengte hangt af van het assenkruis (o.a. “**lengtecontractie**”)
- **Gelijktijdig** in S is niet noodzakelijk gelijktijdig in S'
- De **optellingswet der snelheden** moet worden aangepast
- Er bestaat **geen “absoluut assenkruis”** : deeltjes bewegen “relatief t.o.v. elkaar”
- De **massa wordt snelheidsafhankelijk**
- **Massa en energie zijn equivalent** en kunnen in elkaar worden omgezet : **$E=mc^2$**

4

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

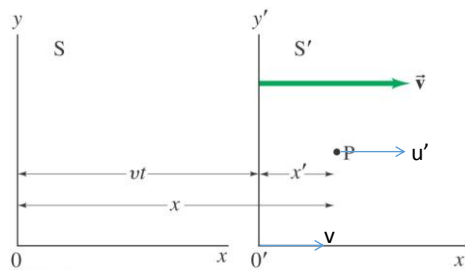
Samenstellen van snelheden :

Wanneer een voorwerp beweegt met snelheid u' t.o.v. assenkruis S' en assenkruis S' beweegt met snelheid v t.o.v. assenkruis S dan geldt in de klassieke mechanica :
 $u = u' + v$: optellingswet der snelheden (alles volgens de x-as)

In de relativistische mechanica wordt dit echter

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}$$

En ook de eventuele snelheden langs y en z veranderen (gezien de tijd verandert)

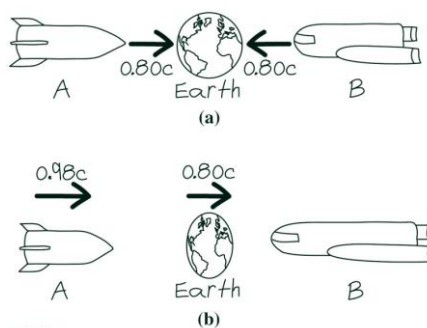


6

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

Twee satellieten (of kometen of ...) naderen de aarde in tegengestelde zin met snelheid t.o.v. de aarde van elk $0.8c$

Wat is de snelheid van A t.o.v. B?
 In elk geval **niet de som** ($1.6c$) van beiden!



(a) : snelheden tov aarde
 (b) : snelheden tov B

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} = \frac{0.8c + 0.8c}{1 + (0.8c)(0.8c)/c^2} = \frac{1.6c}{1.64} = 0.98c$$

Merk op : de samengestelde snelheid blijft kleiner dan c !

7

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

Aangezien **de massa niet constant is** kan de tweede wet van Newton enkel nog geschreven worden als :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ en niet als } \vec{F} = m\vec{a}$$

De impuls p is immers

$$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m_0\vec{u}$$

En de massa m wordt gegeven door (m = "bewegende massa"; m_0 = rustmassa)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m_0$$

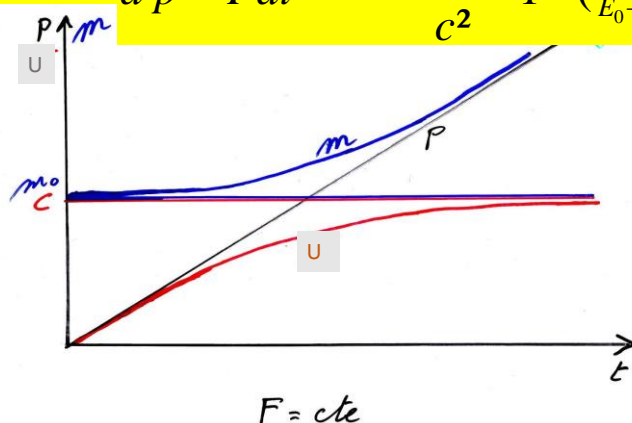
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

8

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \quad E = mc^2 = m_0c^2 + K$$

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \quad \frac{u^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{E_0}{E_0+K}\right)^2$$



9

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

De formule van Einstein geeft het verband tussen energie en massa:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m_0 c^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

De kinetische energie K is :

$$K = mc^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2$$

of ook

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + K$$

Waarbij $m_0 c^2$ de "rustenergie" is (energie die gepaard gaat met de **rustmassa**)

Oefeningen :

- Toon als oefening aan dat voor kleine snelheden ($u \ll c$) $\rightarrow K = \frac{1}{2} m_0 u^2$
reeksontwikkeling van $(1+x)^p \approx 1+px+\dots$ voor $|x| \ll 1$
- Bereken de rustenergie van een elektron in Joule en in MeV (antw : 0,512 MeV)

10

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

Verband tussen energie en impuls :

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4 - m^2 u^2 c^2 = m^2 c^2 (c^2 - u^2) = c^4 m_0^2$$

Gezien

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{cm_0}{\sqrt{c^2 - u^2}} \rightarrow m^2 (c^2 - u^2) = c^2 m_0^2$$

En dus is

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = (m_0 c^2)^2 \quad \text{of} \quad E^2 = (m_0 c^2)^2 + (pc)^2$$

Opmerking :

Voor een foton is $m_0 = 0$ en dus : $E = pc$ of $p = E/c = hf/c = h/\lambda$

Een foton (rustmassa nul) heeft wel degelijk impuls : $\mathbf{p} = \mathbf{h}/\lambda$
(cfr Compton effect)

11

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

Verband tussen snelheid en (kinetische) energie :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \Rightarrow \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - u^2/c^2$$

$$\frac{u^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2 = 1 - \left(\frac{m_0 c^2}{m c^2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2$$

$$\frac{u^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + K}\right)^2$$

Voorbeeld :

Bij spontaan verval van Thorium 234 krijgt een elektron een kinetische energie van 0,191 MeV. Wat is de snelheid van dit elektron? Vergelijk met de klassieke mechanica.

Klassiek : $K = \frac{1}{2} m u^2 \rightarrow u = 2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

$E_0 = 0.512 \text{ MeV}$ en $K = 0.191 \text{ MeV} \rightarrow E = 0.703 \text{ MeV} \rightarrow u = 2.1 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

12

Hoofdstuk 33 : Relativiteitstheorie

$$r_{AZ} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m};$$

Intensiteit zonlicht net buiten de dampkring : $1,4 \text{ kWatt/m}^2$

Gevraagd : massaverlies van de zon per dag

Antwoord

$$S = 4\pi r^2 = 27,9 \cdot 10^{22} \text{ m}^2$$

$$T = 86 \cdot 400 \text{ s}$$

$$P = I \times S = 39,0 \cdot 10^{25} \text{ J/s}$$

$$E = I \times T \times S = P \times T = 3,37 \cdot 10^{31} \text{ J per dag}$$

$$M = E/c^2 = 3,75 \cdot 10^{14} \text{ kg per dag}$$

(massa zon = $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$; massa aarde $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$)

Massaverlies per sec : $m = 4,3 \cdot 10^9 \text{ kg}$

Massaverlies per minuut : $m = 2,6 \cdot 10^{11} \text{ kg}$

(massa van 7 miljard mensen : $70 \text{ kg} \times 7 \cdot 10^9 = 5 \cdot 10^{11} \text{ kg}$)

13