Samenvatting Statistiek

Bert De Saffel

2017-2018

Inhoudsopgave

I Herhaling Wiskunde A 3

1 Onbepaalde Integralen 4

1.1 Substitutiemethode . . . 4
1.1.1 Voorbeeld 1 . . . 4
1.1.2 Voorbeeld 2 . . . 4
1.2 Partieële integratie . . . 5
1.2.1 Voorbeeld 1 . . . 5
1.2.2 Voorbeeld 2 . . . 5
1.2.3 Voorbeeld 3 . . . 5
1.2.4 Voorbeeld 4 . . . 6

II Wiskunde B 7

2 Differentiaalvergelijking 8

2.1 Definities . . . 8
2.2 Soorten oplossingen . . . 9
2.3 Bepalen van een DVG . . . 11
2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten . . . 13
2.4.1 Particuliere oplossing . . . 13
2.4.2 Algemene oplossing . . . 14
2.5 DVG van de orde 1 en graad 1 . . . 16
2.5.1 Gescheiden veranderlijken . . . 16
2.6 Homogene DVG . . . 17
2.7 Exacte DVG . . . 18
2.8 Lineaire DVG van orde 1 . . . 22
2.8.1 Oplossingsmethode . . . 23
2.9 DVG van type Bernouilli . . . 24
2.9.1 Oplossingsmethode . . . 24
2.10 Orthogonale krommenbundel . . . 26
2.11 DVG van hogere orde . . . 28
2.11.1 DVG van orde 2 van type F(x, y', y") = 0 . . . 28
2.11.2 DVG van orde 2 van type F(y, y', y") = 0 . . . 29
2.12 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen . . . 29
2.12.1 Stelling 1 . . . 30
2.12.2 Stelling 2 . . . 30
2.12.3 Stelling 3 . . . 30

3 Laplacetransformatie 31
3.1 De Heaviside functie . . . 31
3.2 De Dirac delta-'functie' . . . 32
3.3 Causale functie . . . 32
3.4 Exponentiële orde . . . 34
3.5 De Laplacetransformatie . . . 35
3.5.1 Opmerkingen . . . 36
3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties . . . 36
3.5.3 Translatie naar rechts . . . 38
3.5.4 Dempingsfunctie . . . 40
3.5.5 Schaalwijziging . . . 41
3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t) . . . 41
3.5.7 Laplacegetransformeerde van f"(t) . . . 42
3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t . . . 42
3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal . . . 44
3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie . . . 45
3.5.11 De convolutiestelling . . . 45
3.5.12 Inverse Laplacetransformatie . . . 47

III Oefeningen 52

4 Differentiaalvergelijkingen 53
4.1 Lineaire DVG met constante coëfficiënten . . . 54

5 Laplacetransformatie 55
5.1 De Heaviside functie . . . 55
5.2 Functies van de exponentiÃ«le orde . . . 59
5.3 Laplacebeeld . . . 59
5.4 Invers Laplacebeeld . . . 64

Deel I

Herhaling Wiskunde A

Hoofdstuk 1

Onbepaalde Integralen

1.1 Substitutiemethode

1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-1}{t^2+4}dt &= \int \frac{t}{t^2+4}dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\
\text{stel } & u = t^2+4 \\
\text{dan } & du = 2tdt \to dt = \frac{du}{2t} \\
& \Rightarrow \int \frac{t}{2tu}du - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\ln u - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} \\
& = \frac{1}{2}\ln t^2+4 - \frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4}dy \\
\text{stel } & u = e^y \\
\text{dan } & du = e^y dy \to dy = \frac{du}{e^y} \\
& \Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)}du \\
& = \int \frac{du}{u^2+4} \\
& = \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} \\
& = \frac{1}{2}\arctan\frac{e^y}{2} + C
\end{aligned}$$

1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

1.2.1 Voorbeeld 1

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx$$

$$\text{stel } u = ln(x) \text{ en } v = \int dx$$

$$\text{dan } du = \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x$$

$$\Rightarrow x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln(x) - \int dx$$

$$= x \ln(x) - x + C$$

1.2.2 Voorbeeld 2

$$\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx$$

$$\text{stel } u = x + 1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$$

$$\text{dan } du = dx \text{ en } v = \tan(x)$$

$$\Rightarrow (x+1)\tan(x) - \int \tan(x) dx$$

$$= (x+1)\tan(x) + ln|cos(x)| + C$$

1.2.3 Voorbeeld 3

$$\int e^{-x} \sin(2x)$$

$$\text{stel } u = \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = 2\cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow = -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx$$

$$\text{stel } u = \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx$$

$$\text{dan } du = -2\sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2\Big[- e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \Big]$$

$$= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx$$

Dus

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x}\cos(2x) - 4\int e^{-x}\sin(2x)dx \\
\Leftrightarrow 5\int e^{-x}\sin(2x) &= -e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)] \\
\Leftrightarrow \int e^{-x}\sin(2x) &= \frac{-e^{-x}[\sin(2x) + 2\cos(2x)]}{5}
\end{aligned}$$

1.2.4 Voorbeeld 4

$$\begin{aligned}
\int \sin^4(\theta)d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \int \left(\frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4}\right) d\theta \\
&= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\
&= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\
&= \frac{12\theta - 8\sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C
\end{aligned}$$

Deel II

Wiskunde B

Hoofdstuk 2

Differentiaalvergelijking

2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking
Uitwerking

$$x + y + y' = 0$$

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde**: Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus n.
- **Graad**: De graad r bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde. ${y^{(n)}}^r$

Voorbeeld: Orde en graad
Uitwerking

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y \ \ -2y'^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = sin(x)$	3	2
$(x-1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin\sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \text{arcsin}^2(x+2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \text{arcsin}(xy'^2)$	1	/
$y^{'3} + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y^{'3}y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de n-de orde worden drie oplossingen onderscheden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat n onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:
Uitwerking

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1C_2 + C_1C_3e^x$	?	?
$\rightarrow a + be^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

Voorbeeld: Oef 1 AO en PO
Uitwerking
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ de AO is.
2. Geef enkele PO's.

Oplossing:

1.

$$
\begin{aligned}
y &= a\sin(x) + b\cos(x) \\
y' &= a\cos(x) - b\sin(x) \\
y'' &= -a\sin(x) - b\cos(x)
\end{aligned}
$$

Hieruit volgt:

$$
\begin{gathered}
y'' + y = 0 \\
-a\sin(x) - b\cos(x) + \sin(x) + b\cos(x) = 0 \\
\rightarrow \text{Het is een oplossing}
\end{gathered}
$$

De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$
\begin{aligned}
y &= 0 \\
y &= \sqrt{2}\sin(x) \\
y &= \sin(x) + \cos(x)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Oef 2 AO en PO
Uitwerking
Gegeven een differentiaalvergelijking: $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is $y = \frac{1}{C} + Ce^x$ de AO?
3. Wat voor soort oplossing is $y = 2\sqrt{e^x}$

Oplossing:

1. De orde is 1 en de graad is 2.

2.

$$
\begin{aligned}
y' &= Ce^x \\
\rightarrow C^2(e^x)^2 - (\frac{1}{C} + Ce^x)Ce^x + e^x &= 0 \\
\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\
\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x &= 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= 0
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \text{Het is een oplossing}$$

Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x}$$

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow y'^2 - yy' + e^x \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\
&\Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 = 0
\end{aligned}
$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien y niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met n onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO n maal af.
3. Elimineer de n constanten van de n + *1* bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde n is.

Voorbeeld: Oef 1 bepalen van een DVG
Uitwerking
De algemene oplossing is

$$y = C_1 + C_2x$$

1. Er zijn *2* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *2* keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.

4. De DVG is $y'' = 0$ en heeft orde *2*.

Voorbeeld: Oef 2 bepalen van een DVG
Uitwerking
Bepaal de DVG van:

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$$

1. Er zijn *3* onafhankelijke constanten.

2. Er moet *3* maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x} \\ y' &= -C_2e^{-x} + 3C_3e^{3x} \\ y'' &= C_2e^{-x} + 9C_3e^{3x} \\ y''' &= -C_2e^{-x} + 27C_3e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3rde afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3e^{3x} + 9C_3e^{3x} = 12C_3e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3e^{3x} + 27C_3e^{3x} = 36C_3e^{3x} \end{cases}$$

Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$3(y + y'') - y'' - y''' = 3(12C_3e^{3x}) - 36C_3e^{3x} = 0$$
$$\rightarrow y''' - 2y'' - 3y' = 0$$

4. De orde van deze DVG is *3*

Voorbeeld: Oef 3 bepalen van een DVG
Uitwerking
Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt y = -x.

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met $m(a, -a)$. Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x-a)^2 + (y+a)^2 = R^2$$

   Er zijn *2* onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet *2* maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y+a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x-a) + y'(y+a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y+a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm $\frac{dy}{dx}$ om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

   Substitueer deze a in $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 = 0$$

$$\rightarrow y''(x+y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 = 0$$

4. Orde van de DVG = *2* = Aantal onafhankelijke constanten.

2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned} & y''' - y'' \sin t + ty = t^2 \\ \Leftrightarrow & D^3 y - D^2 y \sin t + ty = t^2 \\ \Leftrightarrow & (D^3 - D^2 \sin t + t) y = t^2 \\ \Leftrightarrow & L(d) y = g(t) \\ \Leftrightarrow & \text{met} L(d) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \qquad , a_i \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden $(y(0), y'(0), ..., y^{(n-1)}(0))$ gekend zijn.

2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten $y(0), y'(0)...y^{(n-1)}(0)$ respectievelijk gelijkgesteld worden aan $C_1, C_2, ..., C_n$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y'' + y = g(t)$ indien $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
L(d)y &= g(t)\\
\Leftrightarrow (D^2+1)y &= g(t)\\
\Leftrightarrow (D^2+1)y &= e^{-t}H(t-1)\\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y''+y\}(s)\\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y\\
&= s^2Y - 1 + Y\\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s)\\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s)\\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)\\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1}\\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}
$$

dus

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y &= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}\\
\Leftrightarrow Y(s^2+1) &= 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}\\
\Leftrightarrow Y &= \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)}\\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t)\\
\Leftrightarrow y(t) &= \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1)\\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2+1}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2}\Big[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\text{antwoord:}\quad y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\Big(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\Big)H(t-1)
$$

Voorbeeld: Bepaal de PO van $y''+y=\delta\big(t-\frac{\pi}{2}\big)$ indien $y(\frac{\pi}{4})=0$, $y'(\frac{\pi}{4})=0$

Uitwerking

Stel: $y(0^+) = C_1$, $y'(0^+) = C_2$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sC_1 - C_2 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\right\}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \delta\big(t - \frac{\pi}{4}\big)e^{-st}\, dt \\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{dus} \\
&\Leftrightarrow s^2Y - sC_1 - C_2 + Y = e^{-\frac{\pi}{2}s} \\
&\Leftrightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2+1} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2+1}\right\}(t) \\
&\Leftrightarrow y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t + f\big(t - \frac{\pi}{2}\big)H\big(t - \frac{\pi}{2}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(t) \\
&= \sin t
\end{aligned}$$

$$\text{De algemene oplossing:}\quad y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t - \left(\cos(t)H\big(t - \frac{\pi}{2}\big)\right)$$

De PO voor $t = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ ($< \frac{\pi}{2}$ dus Heaviside is 0)

$$y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t \Rightarrow y(\frac{\pi}{4}) : 0 = C_2\frac{\sqrt{2}}{2} + C_1\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'(t) = C_2 \cos t - C_1 \sin t \Rightarrow y'(\frac{\pi}{4}) : 0 = C_2\frac{\sqrt{2}}{2} - C_1\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 + C_1 \\ 0 = C_2 - C_1 \end{cases} \quad \Rightarrow C_2 = C_1 = 0$$

Het antwoord:

$$y(t) = -(\cos t)H(t - \frac{\pi}{2})$$

2.5 DVG van de orde 1 en graad 1

2.5.1 Gescheiden veranderlijken

Indien een DVG van orde 1 en graad 1 te schrijven is als

$$f(x)\, dx = g(y)\, dy$$

Algemeen:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\ dx &= -N(x,y)\ dy \\
f(x)g(y)\ dx &= -h(x)i(y)\ dy \\
\frac{f(x)}{h(x)}\ dx &= -\frac{i(y)}{g(y)}\ dy \\
a(x)\ dx &= b(y)\ dy \\
\int a(x)\ dx &= \int b(y)\ dy \\
A(x) + C_1 &= B(y) + C_2 \\
A(x) &= B(y) + C
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal de AO van $yt + \sqrt{1-t^2}y' = 0$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
& yt\ dt + \sqrt{1-t^2}\ dy = 0 \\
\Leftrightarrow & \sqrt{1-t^2}\ dy = -yt\ dt \\
\Leftrightarrow & \frac{dy}{y} = -\frac{t\ dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
\Leftrightarrow & \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{t\ dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
\Leftrightarrow & \ln|y|\sqrt{1-x^2} + C \\
\Leftrightarrow & y = e^{\sqrt{1-x^2}+C} \\
\Leftrightarrow & y = e^{\sqrt{1-x^2}}e^{C} \\
\Leftrightarrow & y = De^{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

_TODO: LES DINSDAG 13/03

2.6 Homogene DVG

Een DVG is homogeen indien:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

Indien een DVG homogeen is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

Voorbeeld: Bepaal de PO van :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$

waarvoor x(1) = 1.

Uitwerking

Berekening algemene oplossing

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)} \\
\Rightarrow &t(\ln t - \ln x)\; dx - x\; dt = 0 \\
\Rightarrow &t \ln\left(\frac{t}{x}\right)\; dx - x\; dt = 0 \\
&\text{controle homogeen} \\
\Rightarrow &\lambda t \ln\left(\frac{\lambda t}{\lambda x}\right) - \lambda x \\
\Rightarrow &\lambda^1 (t \ln\left(\frac{t}{x}\right) - x) \qquad \text{homogeen want M(x,t) en N(x,t) hebben } \lambda \text{ tot de eerste macht} \\
&\text{substitutie } t = ux \\
\Rightarrow &u \ln u\; dx - u\; dx + x\; du = 0 \\
\Rightarrow &(u \ln u - u)\; dx = x\; du \\
\Rightarrow &\int \frac{du}{u(\ln n - 1)} = \int \frac{dx}{x} \\
\Rightarrow &\ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln|C| \\
\Rightarrow &\ln|\ln u - 1| = \ln|Cx| \\
\Rightarrow &\ln u - 1 = Cx \\
\Rightarrow &\ln u = Cx + 1 \\
\Rightarrow &u = e^{Cx+1} \\
\Rightarrow &t = xe^{Cx+1}
\end{aligned}
$$

Berekening particuliere oplossing:

$$
\begin{aligned}
&x(1) = 1 \\
\Rightarrow &1 = 1e^{C+1} \\
\Rightarrow &C + 1 = 0 \\
\Rightarrow &C = -1 \\
\Rightarrow &t = xe^{-x+1}
\end{aligned}
$$

2.7 Exacte DVG

Voorbeeld: Bepaal alle functie f(y) zodanig dat de DVG

$$2y\; dx + (x - 4y\sqrt{y})\; dy = 0$$

na vermenigvuldiging met f(y) exact wordt.Bepaal daarna haar AO.
Uitwerking

Is deze DVG exact?

$$\frac{\partial}{\partial y} 2y = 2$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x - 4y\sqrt{y}) = 1$$

Deze DVG is dus niet exact. We moeten een functie f(y) bepalen zodat deze DVG wel exact wordt.

$$2yf(y)\ dy + (x - 4y\sqrt{y})f(y)\ dy = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y} 2yf(y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - 4y^{3/2})f(y) \\
\Rightarrow & 2f(y) + 2y\frac{d}{dy}f(y) = f(y) \\
\Rightarrow & 2y\frac{d}{dy}f(y) = -f(y) \\
\Rightarrow & \frac{d}{f(y)}f(y) = -\frac{dy}{2y} \\
\Rightarrow & \int \frac{d}{f(y)}f(y) = -\int \frac{dy}{2y} \\
\Rightarrow & \ln|f(y)| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C| \\
\Rightarrow & \ln|f(y)| = -\frac{1}{2}\ln|Cy| \\
\Rightarrow & \ln|f(y)| = \ln|Cy|^{-1/2} \\
\Rightarrow & f(y) = \frac{1}{\sqrt{Cy}} \\
\Rightarrow & f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \qquad \text{met C = 1}
\end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$2\sqrt{y}\ dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y\right)\ dy = 0$$

wat een een exacte DVG oplevert. Nu bepalen we de AO.

$$2\sqrt{y}\ dx + \left(\frac{x}{\sqrt{y}} - 4y\right)\ dy = 0$$

komt overeen met

$$\frac{\partial}{\partial x}F\ dx + \frac{\partial}{\partial y}F\ dy = 0$$

We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}F = 2\sqrt{y}(*) \\ \frac{\partial}{\partial y}F = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y(**) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(*)\frac{\partial}{\partial x}F &= 2\sqrt{y}\\
\Rightarrow F &= \int 2\sqrt{y}\ dx\\
\Rightarrow F &= 2\sqrt{y}x + h(y);\\
(**)\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = 2x\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dy}h(y)\\
\Rightarrow \frac{d}{dy}h(y) &= -4y\\
\Rightarrow h(y) &= \int -4y\ dy\\
\Rightarrow h(y) &= -2y^2
\end{aligned}$$

De AO:

$$F(x,y) = 2\sqrt{y}x - 2y^2$$

Voorbeeld: In een vat bevindt zich $20m^3$ zout-oplossing waarin 1 kg zout opgelost is. Men voert een nieuwe pekeloplossing toe met constante concentratie van 0,5 kg zout/m^3 en aan een snelheid van $2m^3$/min. De oplossing wordt continu gemengd en loopt onderaan weg met een snelheid van $1m^3$/min. Hoeveel zout bevindt zich in de pekeloplossing na 1 uur?

Uitwerking

Definitie van de variabelen:

- x : # kg zout na t minuten
- Op $t = 0$ is $x(0) = 1$
- $C_i = \frac{1}{2}kg/m^3$ (Concentratie in)
- $v_i = 2m^3/min$ (Snelheid in)
- $C_{uit} = \frac{x(t)}{v(t)}$ (Concentratie uit)
- $v_{uit} = 1m^3/min$ (Snelheid uit)

We zoeken een uitdrukking voor dx.

- dx = verandering x gedurende dt minuten
- dx = hoeveelheid zout binnen gedurende dt minuten - hoeveelheid zout buiten gedurende dt minuten

Berekening AO:

$$\begin{aligned}
&dx = C_i v_i\ dt - C_{uit} v_{uit}\ dt \\
\Rightarrow &dx = \frac{1}{2} \cdot 2\ dt - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 1\ dt \qquad \text{met } V(t) = 20 + 2t - t = 20 + t \\
\Rightarrow &dx = dt - \frac{x}{20+t}\ dt \\
\Rightarrow &dx + \left(\frac{x}{20+t} - 1\right)\ dt = 0 \\
\Rightarrow &(20+t)\ dx + (x - 20 - t)\ dt = 0 \\
&\frac{\partial}{\partial t}(20+t) = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - 20 - t) \Rightarrow \text{exact} \\
&\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t(*) \\ \frac{\partial}{\partial t} F = x - 20 - t(**) \end{cases} \\
(*)&\frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t \\
\Rightarrow &F = \int (x - 20 - t)\ dt \\
&= xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x) \\
\Rightarrow &20 + t = \frac{\partial}{\partial x}(xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x)) \\
\Rightarrow &20 + t = t + \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\
\Rightarrow &\frac{d}{dx} h(x) = 20 \\
\Rightarrow &h(x) = \int 20\ dx = 20x \\
\Rightarrow &F = xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x \\
&\text{AO: } xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x = C
\end{aligned}$$

Bereken PO. Indien $x(0) = 1$ dan $C = 20$. 1 uur = 60 minuten $\Rightarrow$ x(60)

$$\begin{aligned}
&xt + 20x = 20t + \frac{t^2}{2} + 20 \\
\Rightarrow &x = \frac{20t + \frac{t^2}{2} + 20}{20 + t} \\
\Rightarrow &x(60) = 37.75\ kg
\end{aligned}$$

2.8 Lineaire DVG van orde 1

Algemene definitie:

Een DVG is lineair in y en y' indien $y' + P(x)y = Q(x)$

Voorbeeld:

$$dy + (y \sin x - \cos x)\ dx = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
& dy + (y \sin x - \cos x)\ dx = 0 \\
\Rightarrow & \frac{dy}{dx} + y \sin x - \cos x = 0 \\
\Rightarrow & y' + y \sin x = \cos x
\end{aligned}$$

Lineair in y en y'

Voorbeeld:

$$ds + (1 - 2t)s\ dt = t^2\ dt$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
& ds + (1 - 2t)s\ dt = t^2\ dt \\
\Rightarrow & \frac{ds}{dt} + (1 - 2t)s = t^2
\end{aligned}$$

Lineair in s en s'

2.8.1 Oplossingsmethode

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

substitutie y = uv (vrijheidsgraad toevoegen)

$$\Rightarrow u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$\Rightarrow u(P(x) + v') + u'v = Q(x) \qquad (*)$$

stel P(x) + v' = 0 (vrijheidsgraad wegnemen)

Bijgevolg: $\Rightarrow \dfrac{dv}{dx} = -P(x)v$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)\,dx$$

$$\Rightarrow v = e^{-\int P(x)\,dx}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v}$$

$$\Rightarrow du = e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx$$

Vervang substitie om AO te bekomen

Voorbeeld: Bepaal de AO van

$$(4r^2 s - 6)\,dr + r^3\,ds = 0$$

<u>Uitwerking</u>

$$
\begin{aligned}
&r^3\frac{ds}{dr}+4r^2s-6=0\\
\Rightarrow&\frac{ds}{dr}+\frac{4}{r}s=\frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow&s'+P(r)s=Q(r)\\
&\text{substitutie s = uv}\\
\Rightarrow&u'v+uv'+\frac{4}{r}uv=\frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow&u\left(v'+\frac{4}{r}v\right)+u'v=\frac{6}{r^3}\\
&\frac{dv}{dr}=-\frac{4}{r}v\\
&\int\frac{dv}{v}=-4\int\frac{dr}{r}\\
&\ln|v|=-4\ln|r|\\
&v=r^{-4}\\
\Rightarrow&\frac{du}{dr}\cdot\frac{1}{r^4}=\frac{6}{r^3}\\
\Rightarrow&\frac{du}{dr}\cdot\frac{1}{r}=6\\
\Rightarrow&\int du=\int 6r\ dr\\
\Rightarrow&u=3r^2+C\\
&s=uv=(3r^2+C)\frac{1}{r^4}\\
&s=\frac{3}{r^2}+\frac{C}{r^4}\qquad\forall C\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

2.9 DVG van type Bernouilli

Een DVG is van type Bernouilli indien

$$y'+P(x)y=Q(x)y^n\qquad\text{met } n\in\mathbb{R}$$

2.9.1 Oplossingsmethode

Bewijs:

$$\frac{y'}{y^n}+P(x)\frac{y}{y^n}=Q(x)$$

Substitutie:

$$z=\frac{y}{y^n}=y^{1-n}$$

Waaruit volgt:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dz}$$

$$\begin{aligned} z' &= (1-n)y^{1-n-1}y' \\ &= (1-n)y^{-n}y' \\ &= \frac{(1-n)y'}{y^n} \end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

Of beter geschreven:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

De DVG is lineair in z en z'

Voorbeeld: Bepaal de AO vanaf

$$xy\ dx = (x^2 - y^4)\ dy$$

<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned} &xy\ dx + (y^4 - x^2)\ dy = 0 \\ \Rightarrow &xy\frac{dx}{dy} + (y^4 - x^2) = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} + \frac{y^4 - x^2}{xy} = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + \frac{y^3}{x} = 0 \\ \Rightarrow &\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -y^3\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bernouilli in x en x'

$$\Rightarrow x\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^2 = -y^3$$

stel $z = x^2$ dus $z' = 2x\frac{dx}{dy}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{dz}{dy} - \frac{1}{y}z = -y^3 \\
\Rightarrow&\frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} = -2y^3 \\
&\text{substitutie } z = uv \\
\Rightarrow&u'v + uv' - \frac{2uv}{y} = -2y^3 \\
\Rightarrow&u(v' - \frac{2v}{y}) + u'v = -2y^3 \\
&\frac{dv}{dy} = \frac{2v}{y} \\
&\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dy}{y} \\
&\ln|v| = 2\ln|y| \\
&v = y^2 \\
\Rightarrow&\frac{du}{dy}y^2 = -2y^3 \\
\Rightarrow&\int \frac{du}{dy} = -\int 2y\ dy \\
\Rightarrow&u = -y^2 + C
\end{aligned}$$

$z = x^2$ en $z = uv = y^2(C - y^2)$ De AO wordt:

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

2.10 Orthogonale krommenbundel

Definitie: elke kromme uit de ene bundel snijdt elke kromme uit de andere bundel loodrecht.

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ f_\perp(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Raaklijn van f staat loodrecht op raaklijn van $f_\perp$. Wiskundig wordt dit vertaald door: $\omega_{RL_\perp} = -\frac{1}{\omega_{RL}} = -\frac{1}{y'}$ De DVG van de orthogonale krommenbundel is

$$F_\perp\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)$$

Voorbeeld: Bepaal de DVG van de orthogonale krommenbundel van alle raaklijnen aan $y = x^2$.
Uitwerking
Elk punt op parabool kan beschreven worden als $p(a, a^2)$.

1. De vergelijking van de originele krommenbundel
$$\begin{aligned} &y - a^2 = 2a(x-a) \\ \Rightarrow &y - a^2 = 2ax - 2a^2 \\ \Rightarrow &y = 2ax - a^2 \end{aligned}$$

2. DVG van de originele krommenbundel
$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y' = 2a \end{cases} \Rightarrow y = y'x - \frac{y'^2}{4}$$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel $y' wordt - \frac{1}{y'}$
$$y = \frac{1}{y'}x - \frac{1}{4}\frac{1}{y'^2}$$
Uiteindelijk:
$$4y'^2y = -4xy' - 1$$

Deze DVG heeft graad 2, wat niet in deze cursus besproken wordt. Het is dus onoplosbaar.

Voorbeeld: Bepaal de orthogonale krommenbundel van alle parabolen met top in de oorsprong en symmetrieas de X-as.

Uitwerking

1. De vergelijking van de originele krommenbundel
$$x = Cy^2$$

2. DVG van de originele krommenbundel. Er is 1 onafhankelijke constanten dus 1 keer afleiden
$$\begin{cases} x = Cy^2 \\ 1 = 2Cyy' \end{cases}$$
Hieruit volgt $C = \frac{x}{y^2}$ en dus $1 = \frac{2xy'}{x}$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel
y' vervangen door $-\frac{1}{y'}$ dus
$$1 = -\frac{2x}{yy'} \Leftrightarrow yy' = -2x$$

4. DVG oplossen
$$\begin{aligned} &y\frac{dy}{dx} = -2x \\ &\int y\ dy = -\int 2x\ dx \\ &\frac{y^2}{2} = -x^2 \\ &\frac{y^2}{2} + x^2 = C \end{aligned}$$
Dit zijn dus ellipsen

2.11 DVG van hogere orde

Voorbeeld: Los op

$$y''' = e^{-2x}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
y''' &= e^{-2x} \\
y'' &= \int e^{-2x}\ dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 \\
y' &= -\int \frac{1}{2}e^{-2x} + C_1\ dx\frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2 \\
y &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \\
&= -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3
\end{aligned}$$

2.11.1 DVG van orde 2 van type F(x, y', y") = 0

Bewijs oplossingsmethode:
Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(x, p, \frac{dp}{dx} = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en x.

Voorbeeld: Bepaal de AO van $xy'' = y' - x$
Uitwerking
$xy'' = y' - x$ komt overeen met $F(x, y', y'')$
Stel $y' = p' \to y'' = x\frac{dp}{dx} = p - x$ waaruit volgt dat $x\ dp = (p - x)\ dx$. Dit is homogeen ($\lambda^{(1)}$ dus we stellen $p = ux$

$$\begin{aligned}
x(u\ dx + x\ du) &= (ux - x)\ dx \\
u\ dx + x\ du &= (u - 1)\ dx \\
x\ du &= -dx; \\
du &= -\frac{dx}{x} \\
\int du &= -\int \frac{dx}{x} \\
u &= \ln|x| + C_1 \\
\frac{dy}{dx} &= -x\ln|x| + C_1x \\
\int dy &= -\int x\ln|x| + C_1x\ dx
\end{aligned}$$

Het Antwoord is:

$$y = \frac{-x^2}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + \frac{C_1}{2}x^2 = \frac{-x^2}{2}\ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + C_1x^2$$

2.11.2 DVG van orde 2 van type F(y, y', y") = 0

Bewijs oplossingsmethode:
Stel $y' = p$, dan wordt $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp/dy}{dx/dy} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. De differentiaalvergelijking wordt $F(y, p, p\frac{dp}{dx} = 0$. Dit is een dvg van orde 1 in p en y.

Voorbeeld: Bepaal de PO van $(1-y)^2y'' - y'^3 = 0$ met $y(0) = 2$ en $y'(0) = 1$
Uitwerking
Stel $y' = p \to y'' = p\frac{dp}{dy}$

$$\begin{aligned}
(1-y)^2 p\frac{dp}{dy} - p^3 &= 0 \\
(1-y)^2\frac{dp}{dy} - p^2 &= 0 \\
(1-y)^2\frac{dp}{dy} &= p^2 \\
\frac{dp}{p^2} &= \frac{dy}{(1-y)^2} \\
\int\frac{dp}{p^2} &= \int\frac{dy}{(1-y)^2} \\
-\frac{1}{p} &= -\frac{1}{1-y} + C_1 \\
C_1 &= 0 \quad \text{aangezien p(0) = 1 en y(0) = 2} \\
\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{y-1} \\
&\begin{cases} dx = \frac{dy}{y-1} \\ x = \ln|y-1| + C_2 \\ 0 = \ln|1| + C_2 \to C_2 = 0 \end{cases} \\
x &= \ln|y-1| \\
e^x &= y - 1 \\
y &= e^x + 1
\end{aligned}$$

2.12 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Voor geen enkele stelling is het bewijs te kennen

2.12.1 Stelling 1

Is $L(D)y = 0$ een lineaire homogene DVG van n^{de} orde en $y_i(x), i = 1, ..., n$ n onafhankelijke PO's van $L(D)y = 0$ dan is $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x)$ de AO van $L(D)y = 0$

2.12.2 Stelling 2

Indien $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_m \\ y_1' & y_2' & ... & y_m' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & ... & y_m^{n-1} \end{vmatrix} = 0$, dan zijn de PO's van $L(D)y = 0$ lineair onafhankelijk.

2.12.3 Stelling 3

Indien $L(D)y = 0$ een lineaire DVG van n^{de} orde, $y_1(x)$ een PO van $L(D)y = Q(x)$ en $y_2(x)$ de AO van $L(D)y = 0$ dan is $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ de AO van $L(D)y = Q(x)$

Hoofdstuk 3

Laplacetransformatie

3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

Voorbeeld: Teken over $x = [-3, 4]$ de functie $y = 2H(t+2) - tH(t) + (t+t^2)H(t-2)$

Uitwerking

Er zijn veranderingen bij $t = -2, t = 0$ en $t = 2$.

$$\begin{array}{l|l} 2\cdot(0) - t\cdot(0) + (t+t^2)\cdot(0) = 0 & t < -2 \\ 2\cdot(1) - t\cdot(0) + (t+t^2)\cdot(0) = 2 & -2 < t < 0 \\ 2\cdot(1) - t\cdot(1) + (t+t^2)\cdot(0) = 2 - t & 0 < t < 2 \\ 2\cdot(1) - t\cdot(1) + (t+t^2)\cdot(1) = 2 + t^2 & t > 2 \end{array}$$

TODO: graph

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t-2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t-3)(-1 + e^t + t^2) + H(t-5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t-2) + (t^2 + e^t - 1)H(t-3) - (t^2 - t + 25)H(t-5) \end{aligned}$$

3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a)\, dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van $\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t)$ voor $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$

$$\delta^a_{\epsilon_1,\epsilon_2}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1+\epsilon_2} & \forall \in]a-\epsilon_1, a+\epsilon_2[\end{cases}$$

Het nut van de dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\, dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door $-\infty$ aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.
De afgeleide van de Heaveiside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt}H(t-a) = \delta(t-a)$$

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\, dt$$

Uitwerking
In dit geval is $f(t) = (2\sin t - 1)$ en $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$ We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t)\delta(t-a)\, dt &= \int_0^{+\infty} (2\sin t - 1)\delta(t - \frac{3\pi}{2})\, dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie f waarvoor $f(t) = 0$ voor elke $t < 0$. Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \to f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke $t < 0$ dat $f(t) = 0$. De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

Voorbeeld: Teken de causale functie $f(t)$ gedefinieerd als: -2 indien t < 1 en 2 als t > 1. Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

Uitwerking

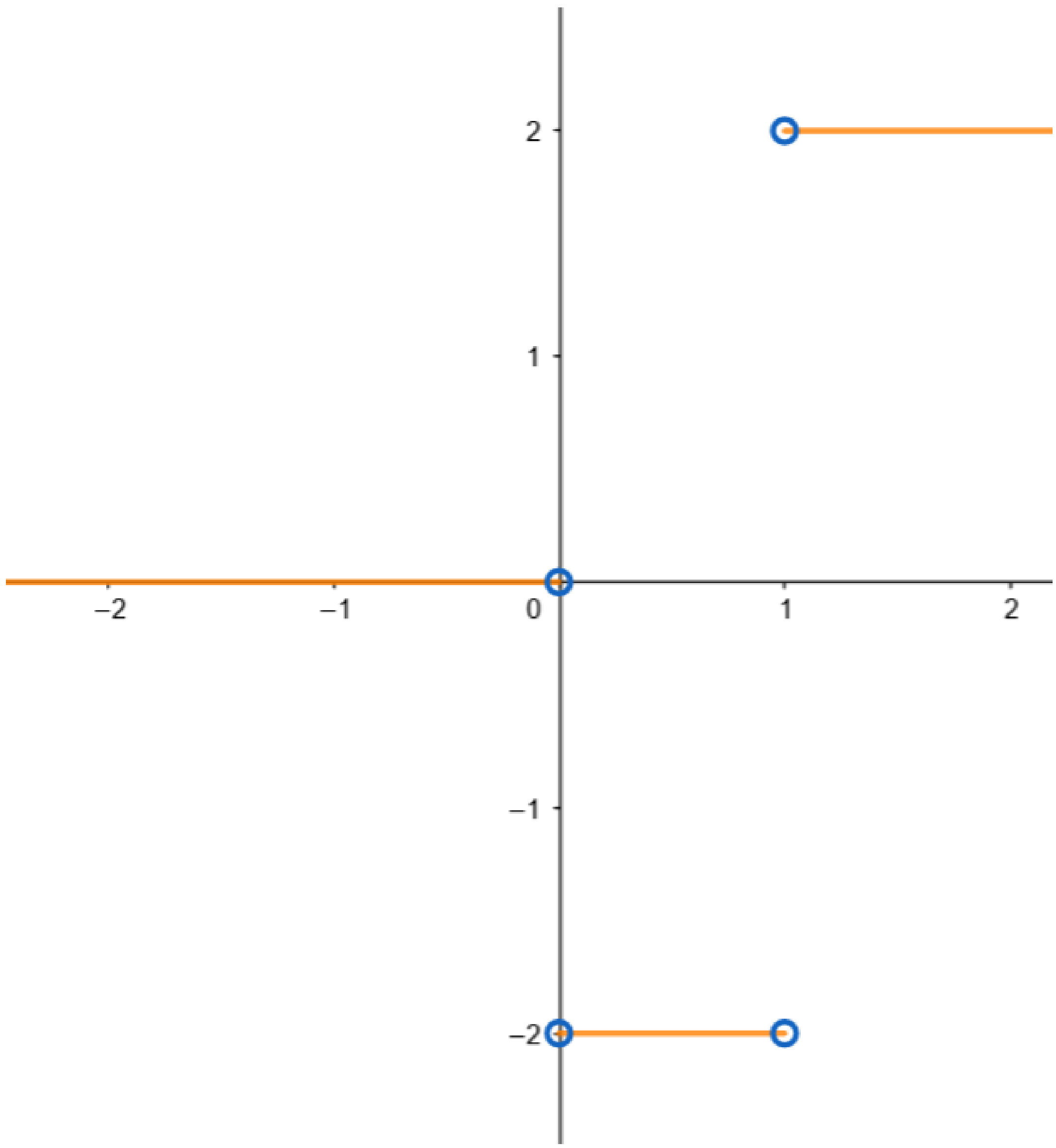
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t-1)(-2+2) \\ &= -2H(t) + 4H(t-1) \end{aligned}$$

Tekening:



3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien $\exists M, a \in R$ zodat $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$ en met a het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is $f(t)$ van exponentiële orde a. Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in R$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $\sin t$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
&|\sin t| \leq 1 \\
\Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 (\text{willekeurige waarde}) \\
\Leftrightarrow &|\sin t| < 1.1 e^{at}
\end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat a = 0 en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van $(1+2t)e^{-t}$

Uitwerking

Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{|(1+2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{(1+2t)e^{-t}}{e^{at}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{at}e^{t}} \\
&= \lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}}
\end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a+1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{+\infty}{0} \rightarrow$ onbepaald
- $a+1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$ L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hopital toe.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \frac{1+2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a+1)} \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0 \in R
\end{aligned}$$

Aangezien het een reëele uitkomst is kan a uit de uitdrukking $a+1>0$ afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel $f(t)$ causuaal dan is de laplacetransformatie van $f(t)$ een functie die een complex getal s afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

De letter s kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| \, dt$$

Het argument tussen de |...| is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via $\sqrt{x^2+y^2}$ indien het complexe getal gedefinieerd wordt als $s = x + yj$ (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

3.5.1 Opmerkingen

1.
$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}, \; s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned}
|f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
&= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j\sin(-yt)| \\
&= |f(t)|e^{-xt}\sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
&= |f(t)|e^{-xt}
\end{aligned}$$

2.
$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

-
$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} \, dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)} \, dt \\
&= \left.\frac{e^t a - s)}{a-s}\right|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{a-s}\left(\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} - 1\right)
\end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-st)}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}\cdot e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}|\cdot |e^{-yjt}| \\
&= \lim_{t\to+\infty} |e^{at-xt}|\cdot |\cos(-yt)+j\sin(-yt)| \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt}\cdot \sqrt{\cos^2(-yt)+\sin^2(-yt)} \\
&= \lim_{t\to+\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
\end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

- $$\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2+s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2+s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw $a = wj$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{wjt}\}(s) &= \frac{1}{s-wj} \\
&= \frac{1}{s-wj}\cdot\frac{s+wj}{s+wj} \\
&= \frac{s+wj}{s^2+w^2} \\
&= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j\sin(\omega t)\}(s) \\
&= \frac{s}{s^2+w^2} + \frac{w}{s^2+w^2}j
\end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2+s^2} \qquad \text{en} \qquad \mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2+s^2}$$

- $$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t-0)\}(s) \\
&= \int_0^{+\infty} \delta(t-0)e^{-st}\,dt \\
&= f(0) = e^{-s\cdot 0} = e^0 = 1
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\cos(2t-1)$
<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(2t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1)+\sin(2t)\sin(1)\}(s) \\
&= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s)+\sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\
&= \cos(1)\frac{s}{s^2+4}+\sin(1)\frac{2}{s^2+4} \\
&= \frac{s\cos(1)}{s^2+4}+\frac{2\sin(1)}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\sinh(4t)-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$
<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\sinh(4t)-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{2}-3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{2}\right\}(s)-3\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s+4}\right)-3\frac{s}{s^2+\frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s+4}\right)-\frac{27s}{9s^2+1}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $\delta(t-\frac{\pi}{2})\cos(4t)e^{2t}$
<u>Uitwerking</u>

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty}\cos(4t)e^{2t}\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)e^{-st}\,dt \\
&= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \cos\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)e^{2\cdot\frac{\pi}{2}}e^{-s\cdot\frac{\pi}{2}} \\
&= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\
&= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}
\end{aligned}$$

3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s)=e^{-as}F(s) \qquad a>0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{a} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt \\
\text{stel}\quad u &= t-a \\
\text{dan}\quad du &= dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)}\,du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}\,du \\
&= e^{-sa}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}\,du \\
&= e^{-sa}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as}F(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = (t^2-1)H(t-1) - \sin(3t)H(t-\pi)$
Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)^2 + 2(t-1)]H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-as}\mathcal{L}\{t^2+2t\}(s) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2!}{s^3} + 2\frac{1!}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2}\right) \\
&= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t-\pi))H(t-\pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s}\frac{3}{s^2+9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}
\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2-1)H(t-1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t-\pi)\}(s)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) - \left(-\frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\right)\\ &= e^{-s}\left(\frac{2(1+s)}{s^3}\right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2+9}\end{aligned}$$

3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s+a)$$

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van $f(t) = t(t^3-1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$
Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7-2t^4+t)e^{-t}\}(s)\\ &= \mathcal{L}\{t^7-2t^4+t\}(s+1)\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{2\cdot 4!}{(s+1)^5} + \frac{1!}{(s+1)^2}\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s-2)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{(s-2)^2+3}\\ &= \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3-1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)\\ &= \frac{7!}{(s+1)^8} - \frac{48}{(s+1)^5} + \frac{1}{s^2+2s+1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2-2s+7}\end{aligned}$$

3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st}\,dt \\
\text{stel } u &= at \\
\text{dan } du &= adt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}}\,\frac{du}{a} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u}\,du \\
&= \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(u)\}(\frac{s}{a}) \\
&= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$
Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin t\}(\frac{s}{\omega}) \\
&= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2}+1} \\
&= \frac{\omega}{\omega^2(\frac{s^2}{w^2}+1)} \\
&= \frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Voorbeeld: Gegeven $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+w^2}$. Bepaal $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$.
Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\
&= s\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\
&= s\frac{\omega}{s^2+w^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s\frac{\omega}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega \frac{s}{s^2+w^2} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2+w^2}
\end{aligned}
$$

3.5.7 Laplacegetransformeerde van f”(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - ... - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Voorbeeld: Gegeven $g(t) = te^{-t}$, bepaal $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\
&= s^2G(s) - sg(0^+) - g'(t) \\
\text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\
&= \frac{1}{(s+1)^2} \\
\text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-t) \\
\Rightarrow s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2\frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\
&= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van t

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
\frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= -\int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \mathcal{L}\{t^2 f(t)\}(s)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\{t\sin t - t^3e^{-t}\}(s)$
Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t\sin t - t^3e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t\sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s)\\
*)\mathcal{L}\{t\sin t\}(s) &= (-1)^1\frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds}\\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds}\\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right)\\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2}\\
**)\mathcal{L}\{t^3e^{-t}\}(s) &= (-1)^3\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3}\\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3}\\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2}\\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3}\\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4}\\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4}\\
&= \frac{6}{(s+1)^4}\\
* - ** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}
$$

3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s)\forall s \in \mathbb{C}, Re(s) > a$$

Bewijs:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^t f(u)\, du \\
g't) &= f(t) \\
g'(0) &= 0 \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t f(u)\, du\Bigg\}(s) - 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t f(u)\, du\Bigg\}(s)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal $\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t \cos\omega t\, dt\Bigg\}$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\Bigg\{\int_0^t \cos\omega t\, dt\Bigg\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin\omega t\}(s) \\
&= \frac{1}{s}\frac{s}{s^2+\omega^2} \\
&= \frac{1}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\, dt$$

TODO: slide 19

3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)\, du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

Voorbeeld: Gegeven $f(t) = e^{at}$ en $g(t) = e^{bt}$. Illustreer de juistheid van deze rekenregel.
Uitwerking

$$
\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u} \, du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} \, du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} \, du \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\{ \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{ (e^{at} - e^{bt}) \}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left(\frac{(s-b)-(s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bereken $H(t) * H(t) * H(t)$.
Uitwerking

$$
\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) \, du \\
\text{aangezien } 0 \leq u \leq t \\
\Rightarrow & H(u) = 1 \\
\Rightarrow & H(t-u) = 1 \\
&= \int_0^t du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u)\, du \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

3.5.12 Inverse Laplacetransformatie

Definitie:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \qquad \text{indien} \qquad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2+2s+1}{s(s-1)(s-2)}\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\}(t) \\
\Rightarrow s^2+2s+1 &= a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 : a &= \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 : b &= -4 \\
\text{als } s = 2 : c &= \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s^2-2}{2s^2+4s+10}\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{2s+7}{2s^2+4s+10}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s+7/2}{s^2+2s+5}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s+7/2}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{(s+1)+5/2}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{5}{2}\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} - \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\delta(t) - \cos(2t)e^{-t} - \frac{5}{2}\sin(2t)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2}\delta(t) - e^{-t}(\cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}$$

<u>Uitwerking</u>

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1} + \frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2)+(b+cs)(s+1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t} - \cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1-\cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD} \Rightarrow & e^{-(t-\pi)}(1-\cos(t-\pi)H(t-\pi) \\
= & e^{\pi-t}(1+\cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}
$$

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken $(H * H * H * H*)(t)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}$$

Voorbeeld: Bereken:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$$

Uitwerking

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u \cos[2(t-u)]\ du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u-[2(t-u)]) + \sin(2u+[2(t-u)])\ du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(4u-2t) + \sin 2t\ du \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_0^t \sin(4u-2t)\ du + \int_0^t \sin 2t\ du\right] \\
&= \frac{1}{16}\Big[-\cos(4u-2t)\Big]_0^t + \frac{1}{4}\Big[u\sin 2t\Big]_0^t \\
&= \frac{1}{16}\Big(-\cos 2t + \cos(-2t)\Big) + \frac{1}{4}t\sin 2t \\
&= \frac{1}{4}t\sin 2t
\end{aligned}
$$

Deel III

Oefeningen

Hoofdstuk 4

Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1. $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking $y = C_1x + C_2$ heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \\ y'' &= 0 \end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$. De straal wordt gedefinieerd als C_2. De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &: 2(x - C_1) + 2yy' = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} &: 2 + 2(y'y' + yy'') = 0 \end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door : $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel $p \in K$ en $x_p = C$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow y_p = (x_p)^2 = C^2 \\ &\Rightarrow p(C, C^2) \end{aligned}$$

De richtingscoÃ«fficient y'_p wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer C in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 &= y'\left(\frac{y'}{2}\right)\left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4y - y'^2 &= 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow y'^2 - 4y'x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

4.1 Lineaire DVG met constante coëfficiënten

Gegeven

$$y'' + y = 0$$

1. Bepaal de AO
2. Bepaal de PO zodat $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ en $y(\pi) = 1$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{y'' + y\}(s)$$

Hoofdstuk 5

Laplacetransformatie

5.1 De Heaviside functie

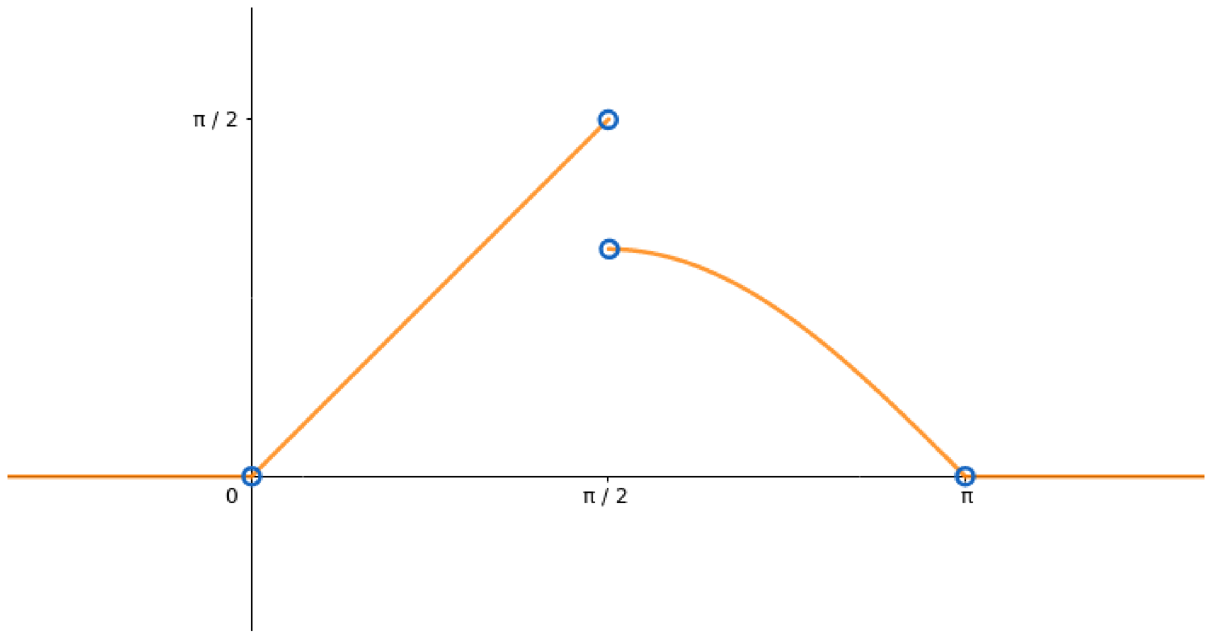
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

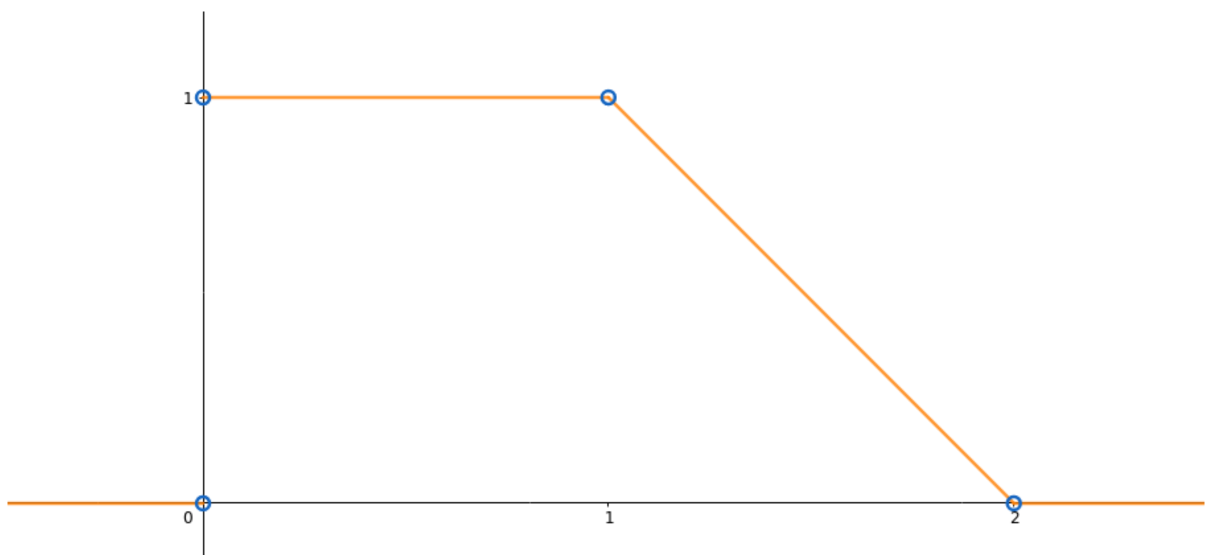
Druk $g(t)$ uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

<u>Oplossing</u>

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0+t) + H(t-\frac{\pi}{2})(-t+\sin t) + H(t-\pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) + H(t-\pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H(t-\frac{\pi}{2})(\sin t - t) - H(t-\pi)\sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie $h(t)$. Bepaal het voorschrift van $h(t)$ en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



<u>Oplossing</u>

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < 1 \\ 2 - t & 1 < t < 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

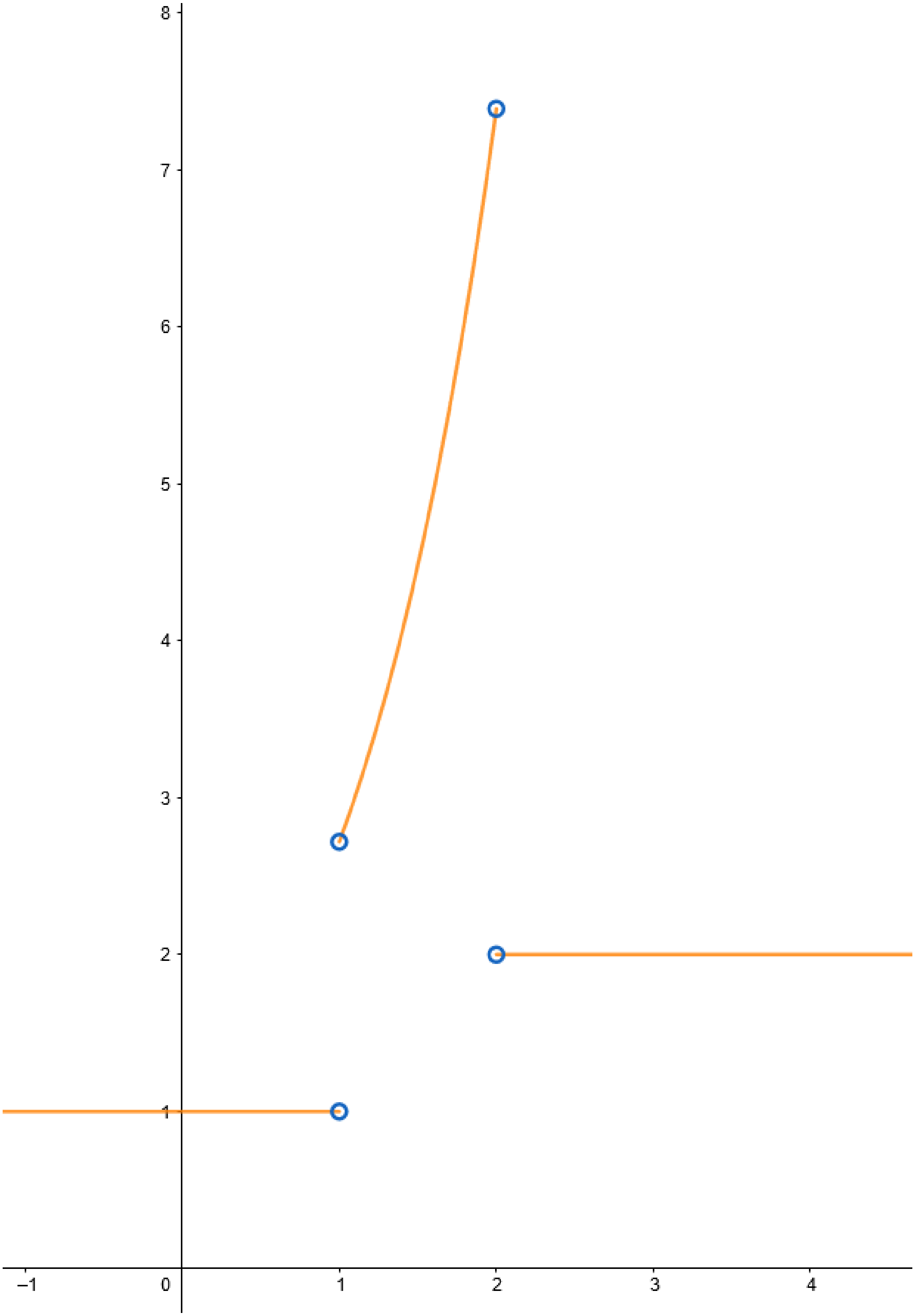
Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

$$\begin{aligned} h(t) &= H(t)(-0+1) + H(t-1)(-1+(2-t)) + H(t-2)(-(2-t)+0) \\ &= H(t) + H(t-1)(1-t) + H(t-2)(t-2) \end{aligned}$$

Teken de functie $f(t) = 1 + H(t-1)(e^t - 1) + H(t-2)(2 - e^t)$

Oplossing

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



8
7
6
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4

5.2 Functies van de exponentiÃ«le orde

Geef de exponentiÃ«le orde van $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t} e^{2t}} \\
&= \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \qquad \text{voor } \alpha + 2 > 0 \\
&= 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Dus

$$
\begin{aligned}
&\alpha + 2 > 0 \\
\Leftrightarrow &\alpha > -2
\end{aligned}
$$

De exponentiÃ«le orde is -2.

Geef de exponentiÃ«le orde van $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\lim_{t \to +\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \to +\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\
&= 6 \lim_{t \to +\infty} e^{t(3-\alpha)}
\end{aligned}
$$

Indien $3 - \alpha < 0$ dan wordt de limiet 0. De exponentiÃ«le orde is dus 3.

5.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t$

Oplossing

$$
\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5\cos 2t + 4\sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}
$$

$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1 + e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s)\\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$

$f(t) = \sin^2 t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\{\frac{1-\cos 2t}{2}\}(s)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right]\end{aligned}$$

$f(t) = t^2\delta(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st}\ dt\\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2}\\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$

$f(t) = (t-1)H(t-1)$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s)\\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

$f(t) = t^2H(t-1)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2+2(t-1)+1)H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{u^2+2u+1\} \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}+\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$f(t) = t^2H(t-1)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2+2(t-1)+1)H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s}\mathcal{L}\{u^2+2u+1\} \\
&= e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s}+\frac{1}{s}\right)
\end{aligned}
$$

$f(t) = \sin(t)H(t-2)$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t)H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2)H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2)+\cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2)\cos(2)+\cos(t-2)\sin(2)]H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s}[\cos(2)\mathcal{L}\{\sin(u)\}+\sin(2)\mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s}\left(\frac{\cos(2)}{s^2+1}+\frac{\sin(2)s}{s^2+1}\right)
\end{aligned}
$$

$f(t) = t^2e^{-2t}$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}
$$

$f(t) = e^t \cos 3t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1) \\ &= \frac{s-1}{(s-1)^2+9}\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-2t} \sin 2t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2) \\ &= \frac{2}{(s+2)^2+4}\end{aligned}$$

$f(t) = t \cos t$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\Big[\mathcal{L}\{\cos t\}(s)\Big]}{ds} \\ &= -\frac{d[\frac{s}{s^2+1}]}{ds} \\ &= -\frac{(s^2+1) - s(2s)}{(s^2+1)^2} \\ &= -\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2) \\ &= \mathcal{L}\left\{t\frac{1+\cos t}{2}\right\}(s+2) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t \cos t\}(s+2)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2-1}{((s+2)^2+1)^2}\right)\end{aligned}$$

$f(t) = e^{-3t}t^3 H(t-2)$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-3t}t^3 H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3 H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3 H(t-2)\}(s+3) \\
&= \mathcal{L}\{[(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2) + 8]H(t-2)\}(s+3) \\
&= e^{2s}\mathcal{L}\{u^3 + 6u^2 + 12u + 8\}(s+3) \\
&= e^{2s}\left[\frac{3!}{(s+3)^4} + 6\frac{2!}{(s+3)^3} + 12\frac{1!}{(s+3)^2} + 8\frac{1}{s}\right] \\
&= e^{2s}\left[\frac{6}{(s+3)^4} + \frac{12}{(s+3)^3} + \frac{12}{(s+3)^2} + \frac{8}{s}\right] \\
&= 2e^{2s}\left[\frac{3}{(s+3)^4} + \frac{6}{(s+3)^3} + \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{4}{s}\right]
\end{aligned}$$

$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Oplossing

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos 2t + H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\
&= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big) \\
\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s)
\end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1. $$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

2. $$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{2t}tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= \mathcal{L}\{\big(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\big)H\big(t - \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\big(u + \frac{\pi}{4}\big)\}(s-2) \\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + \frac{\pi}{4(s-2)}\right)
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos 2t\ H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\big)\big]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{\cos\big[2\big(t-\frac{\pi}{4}\big)+\frac{\pi}{2}\big]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= \mathcal{L}\{[\cos 2(t-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{2}-\sin 2(t-\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{2}]H\big(t-\frac{\pi}{4}\big)\}(s)\\
&= -\mathcal{L}\{\sin 2(t-\frac{\pi}{4})H(t-\frac{\pi}{4}\}(s)\\
&= e^{-\frac{\pi}{4}s}\mathcal{L}\{\sin 2u\}\\
&= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}
\end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2+4} + e^{-\frac{\pi}{4}s}\left(\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{\pi}{4(s-2)}\right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2+4}$$

5.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$$f(s) = \frac{1}{s^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t)\\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4}+\frac{5}{s^4}\right\}(t)\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t)+5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t)+\frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t)\\
&= \frac{t^2}{2}+\frac{5t^3}{6}
\end{aligned}
$$

$$
f(s) = \frac{1}{3s-1}
$$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t)\\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t}\\
&= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}
\end{aligned}
$$

$$
f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}
$$

Oplossing

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t)\\
&\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-2}+\frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3)+b(s-2)}{(s-2)(s-3)}\\
&\Rightarrow 2s+3 = a(s-3)+b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a=-7\\ b=9 \end{cases}\\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2}+\frac{9}{s-3}\right\}(t)\\
&= -7e^{2t}+9e^{3t}
\end{aligned}
$$

$$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t) \\
&= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t) \\
&\qquad \Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9)+(b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
&\qquad \Rightarrow s+3 = a(s^2+9)+(b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
&\qquad = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
&\qquad = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
&\qquad = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{1}{s+3}^{2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}^{2}\right\}(t) &= e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) \\
&= te^{-3t}
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^3}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2[(s+2)-2]+5}{(s+2)^3}\right\}(t)\\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}(t)\\
&= 2e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{e^{2t}}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t)\\
&= e^{2t}\big(2t + \frac{1}{2}t^2\big)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+5}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t)\\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t)\\
&= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(t) + \frac{e^{-t}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}(t)
\end{aligned}$$

$$e^{-t}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$f(s) = \frac{e^{-s}}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^4}\right\}(t) &= f(t-1)H(t-1)\\
\text{met} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t) = \frac{t^3}{6}\\
&\Rightarrow \frac{(t-1)^3}{6}H(t-1)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+2}\right\}(t) &= f(t-3)H(t-3) \\
&\text{met} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) = e^{-2t} \\
&\Rightarrow e^{-2(t-3)}H(t-3)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&\text{met} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^5}\right\}(t) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}(t) = \frac{e^{-3t}}{4!}t^4 \\
&\Rightarrow \frac{e^{-3(t-2)}(t-2)^4}{4!}H(t-2)
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}\right\}(t) &= \text{splitsen in partieÃ«l breuken} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-7}{s^2-2s+2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + t + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s-1)-2}{(s-1)^2+1}\right\}(t)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[1 + t + 5e^t\cos t - 2e^t \sin t\right]
\end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\}(t) \\
&= -\frac{1}{4}(-1)t\sin 2t \\
&= \frac{t}{4}\sin 2t
\end{aligned}$$

Bepaal het inverselaplacebeeld met convolutie van

$$f(s) = \frac{1}{s^2-1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{s-1}\right\}(t) \\
&= e^t * e^{-t} \\
&= \int_0^t e^u e^{-(t-u)}\,du \\
&= \int_0^t e^{2u-t}\,du \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2u-t}\right]_{u=0}^{u=t} \\
&= \frac{1}{2}\left[e^t - e^{-t}\right]
\end{aligned}$$
