

Het wiel van Maxwell

Koen Keunen, Toon Van Alboom, Annick Van Deynse¹

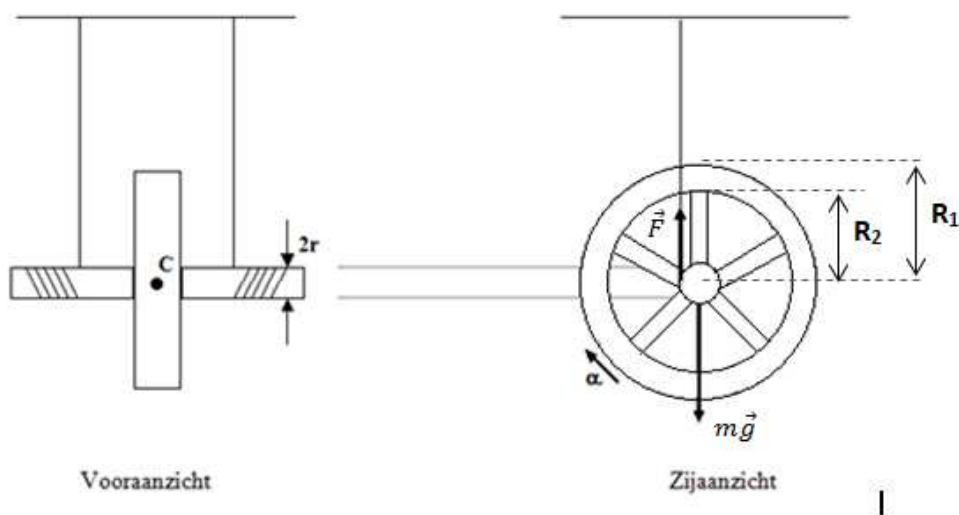
Datum: 27/01/2017, Groep: woe 8u

Inleiding

In dit labo wordt de beweging van het wiel van Maxwell bestudeerd. Op basis hiervan wordt het traagheidsmoment van het wiel berekend. Belangrijk hierbij is dat wrijvingskrachten verwaarloosd worden. Theoretisch wordt ook een overschatting en een onderschatting berekend van het traagheidsmoment van het wielvormig voorwerp met spaken door het te benaderen door eenvoudige geometrische vormen. Op deze manier wordt nagegaan of het experimentele resultaat realistisch is.

Meetopstelling

De werking van het wiel van Maxwell is vergelijkbaar met een jojo. Het is een wielvormig voorwerp met spaken en met een horizontale rotatie-as zoals te zien in Figuur 1. Langs weerszijden van het wiel zijn draadjes gewikkeld rond deze as. Wanneer het wiel losgelaten wordt zal het een gecombineerde translatie- en rotatiebeweging uitvoeren onder invloed van de zwaartekracht en het krachtmoment uitgeoefend door de twee draadjes. Nadat de touwtjes volledig zijn afgerold, beweegt het wiel weer naar boven waarbij de touwtjes opnieuw oprollen.



Figuur 1: Grafische voorstelling van het wiel van Maxwell

¹ Alfabetisch geordend

Bepaling van de versnelling van het wiel

Om de versnelling te bepalen waarmee het wiel valt, wordt het wiel vanop zes verschillende hoogtes Δh losgelaten en wordt telkens driemaal de tijd t gemeten die het wiel nodig heeft om deze afstanden te overbruggen. De resultaten zijn weergegeven in Tabel 1.

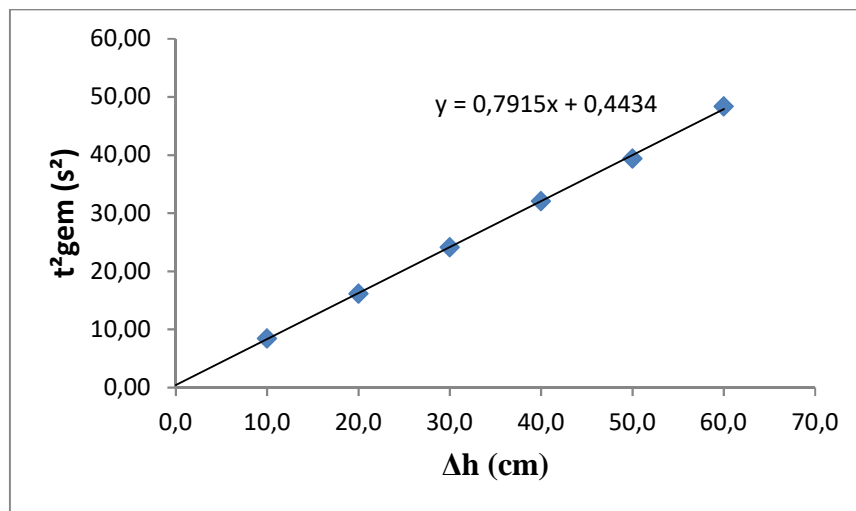
Tabel 1: Tijdsmetingen in functie van de valhoogte

Δh (± 0.1 cm)	t_1 (± 0.01 s)	t_2 (± 0.01 s)	t_3 (± 0.01 s)	t_{gem} (s)	t_{gem}^2 (s^2) ²
10.0	2.92	2.95	2.88	2.917 ± 0.020	8.51 ± 0.12
20.0	4.03	4.00	4.05	4.027 ± 0.015	16.21
30.0	4.96	4.90	4.90	4.920 ± 0.020	24.21
40.0	5.67	5.71	5.62	5.667 ± 0.026	32.11
50.0	6.33	6.23	6.28	6.280 ± 0.029	39.44
60.0	6.92	6.98	6.97	6.957 ± 0.019	48.40

Het wiel voert tijdens het afrollen een eenparig veranderlijke beweging uit waarvoor volgende bewegingsvergelijking geldt:

$$\Delta h = \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

Hieruit volgt dat er een rechtlijnig verband bestaat tussen Δh en t^2 . In Tabel 1 is de gemiddelde tijd t_{gem} voor elke hoogte berekend en vervolgens daarvan het kwadraat t_{gem}^2 genomen. In Figuur 2 is t_{gem}^2 uitgezet in functie van Δh . De foutberekening op t_{gem}^2 is terug te vinden in Bijlage 1.



Figuur 2: t_{gem}^2 in functie van de hoogte Δh

² Bij analoge berekeningen moet de meetfout maar één keer uitgerekend worden voor het eerste getal in de tabel. Voor de volgende getallen moet de fout niet steeds uitgerekend worden. Zorg dat deze getallen wel correct genoteerd zijn. Er wordt vanuit gegaan dat de fout gelijkaardig zal zijn aan deze van het eerste getal. De notatie is daarom gebaseerd op deze meetfout.

Zoals verwacht op basis van formule (1), wordt in Figuur 2 een rechtlijnig verband verkregen. De bekomen richtingscoëfficiënt r_{ico} en de afsnijding b van de lineaire regressielijn zijn

$$r_{ico} = 0.7915 \pm 0.0091 \text{ s}^2/\text{cm}$$

$$b = 0.44 \pm 0.35 \text{ s}^2$$

Door formule (1) in de vorm $y = r_{ico} x + b$ te schrijven komt er:

$$t^2 = \frac{2}{a} \Delta h \quad (2)$$

Formule (2) illustreert dat de versnelling als volgt uit de richtingscoëfficiënt kan bepaald worden:

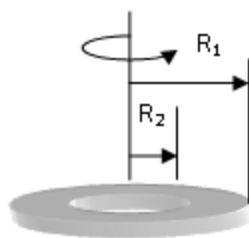
$$a = \frac{2}{r_{ico}} = \frac{2}{0.7915 \text{ s}^2/\text{cm}} = 2.527 \pm 0.029 \text{ cm/s}^2$$

De foutberekening is terug te vinden in Bijlage 2. Zoals te zien in formule (2) wordt theoretisch een rechte door de oorsprong verwacht. Dit betekent dat de afsnijding b gelijk zou moeten zijn aan nul. De bekomen b is echter verschillend van nul, want nul behoort niet tot het fouteninterval van b . Wel is te zien dat de meetfout van dezelfde grootteorde is als de berekende waarde van b . Het feit dat b niet nul is, kan te maken hebben met de moeilijkheid om het wiel van Maxwell los te laten zonder een initiële snelheid mee te geven en/of met een systematische meetfout bij het in- of afdrukken van de chronometer.

Bepaling van het traagheidsmoment van het wiel

Het traagheidsmoment van het wiel wordt op drie manieren afgeschat. Experimenteel kan het traagheidsmoment berekend worden uit de versnelling van het wiel. Theoretisch is het traagheidsmoment moeilijk te berekenen door de complexe vorm met spaken.

Om een benadering te krijgen van het theoretische traagheidsmoment wordt een onderschatting en een overschatting berekend door het wiel te beschouwen als een eenvoudige geometrische vorm. Voor de onderschatting wordt het wiel opgevat als een homogene schijf met straal R_1 . De wielmassa bevindt zich bij deze benadering gemiddeld te dicht bij de centrale rotatie-as waardoor een onderschatting bekomen wordt. Voor de overschatting wordt verondersteld dat alle massa zich in de buitenring bevindt zonder spaken zoals in Figuur 3.



Figuur 3: Het wiel beschouwd als een eenvoudige ring zonder spaken

Om de binnen- en buitenstraal R_2 en R_1 van de ring te kunnen bepalen worden de diameters d_1 en d_2 van de wielring gemeten met een schuifmaat. De resultaten hiervan staan samen met de wielmassa m en de diameter d_{as} en de straal r van de wielas gegeven in Tabel 2.

Tabel 2: Afmetingen en massa van het wiel van Maxwell

m (g)	532.3 ± 0.1		
d_1 (cm)	13.110 ± 0.005	R_1 (cm)	6.5550 ± 0.0025
d_2 (cm)	9.875 ± 0.005	R_2 (cm)	4.9375 ± 0.0025
d_{as} (cm)	0.495 ± 0.005	r (cm)	0.2475 ± 0.0025

Experimentele bepaling van het traagheidsmoment

Het wiel daalt onder invloed van de zwaartekracht. Door de rotatiebeweging ten gevolge van het afrollen van de touwtjes die rond de as zijn gewikkeld, verloopt de valbeweging trager dan de vrije valbeweging. Hoe groter het traagheidsmoment I , des te trager daalt het wiel. Wanneer wrijvingskrachten verwaarloosd worden, kan uit de tweede wet van Newton volgend verband gevonden worden tussen de versnelling en het traagheidsmoment:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}}, \quad (3)$$

Deze formule kan herschreven worden naar

$$I = m r^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right)$$

Hiermee kan het traagheidsmoment experimenteel bepaald worden:

$$I_{exp} = 532.3 \text{ g} \cdot (0.2475 \text{ cm})^2 \cdot \left(\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{2.527 \text{ cm/s}^2} - 1 \right) = 1.263 \pm 0.029 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

De foutberekening is terug te vinden in Bijlage 3.

Theoretische bepaling van het traagheidsmoment

De onder- en overschatting van het traagheidsmoment worden berekend om na te gaan of de experimenteel bekomen waarde realistisch is.³

³ In veel labonota's zal vermeld zijn dat de meetfout in bepaalde delen niet moet berekend worden. Dit moet dan niet expliciet vermeld worden. Wel wordt verwacht dat de uitkomsten met een logisch aantal beduidende cijfers genoteerd worden. In dit voorbeeldverslag worden de berekende traagheidsmomenten met hetzelfde aantal decimalen genoteerd als het experimentele traagheidsmoment om een goede vergelijking mogelijk te maken.

- Voor de onderschatting I_{onder} van het traagheidsmoment wordt het wiel met spaken opgevat als een homogene schijf met straal R_1 . Het traagheidsmoment hiervan wordt gegeven door:

$$I_{\text{onder}} = \frac{1}{2} m R_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 532.3 \text{ g} \cdot (6.5550 \text{ cm})^2 = 1.144 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$$

- Voor de overschatting I_{over} van het traagheidsmoment wordt het wiel beschouwd als een ring waarbij alle massa (inclusief de spaken en de wielasmassa) zich in die ring bevindt. Het traagheidsmoment voor deze vorm is als volgt te berekenen:

$$\begin{aligned} I_{\text{over}} &= \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2) = \frac{1}{2} \cdot 532.3 \text{ g} \cdot [(6.5550 \text{ cm})^2 + (4.9375 \text{ cm})^2] \\ &= 1.792 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2 \end{aligned}$$

De berekende onderschatting en overschatting van het traagheidsmoment leveren respectievelijk $I_{\text{onder}} = 1.144 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ en $I_{\text{over}} = 1.792 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$. Het experimentele resultaat $I_{\text{exp}} = 1.263 \pm 0.029 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ valt tussen deze waarden waardoor verondersteld kan worden dat dit resultaat realistisch is. De theoretische benaderingen vallen echter niet in het fouteninterval van het experimentele traagheidsmoment, waardoor deze benaderingen niet kunnen gebruikt worden om de berekeningen te vereenvoudigen. Het valt op dat de onderschatting een betere benadering geeft dan de overschatting. Dit komt doordat een deel van de massa zich in de spaken en ook in de centrale wielas bevindt. De bijdrage tot het traagheidsmoment ten gevolge van de massa van de wielas is bovendien zeer klein omdat deze massa zich zeer dicht bij de rotatie-as bevindt. Bij de overschatting wordt alle massa verdeeld over de wielring. Door de kwadratische termen in de berekening van het traagheidsmoment zullen de bijdragen van de wielasmassa en van de spakenmassa nu tot een flinke overschatting leiden omdat de afstand tot de centrale as hiervoor nu heel wat groter is.

Conclusie

Het wiel van Maxwell waarmee gewerkt werd, heeft een traagheidsmoment van $I_{\text{exp}} = 1.263 \pm 0.029 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ en voert tijdens de valbeweging een eenparig veranderlijke beweging uit met een versnelling $a = 2.527 \pm 0.029 \text{ cm/s}^2$. Het experimentele traagheidsmoment heeft een realistische waarde aangezien het zich tussen de theoretisch berekende onder- ($I_{\text{onder}} = 1.144 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$) en overschatting ($I_{\text{over}} = 1.792 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$) bevindt. Doordat een deel van de massa van het wiel zich in de spaken en in de centrale wielas bevindt, is de onderschatting waarbij het wiel als een homogene schijf wordt gezien een betere benadering dan de overschatting waarbij ervan uit wordt gegaan dat alle massa zich in de wielring bevindt.

Bijlages

Bijlage 1: meetfoutberekening op t_{gem}^2

$$t_{1,\text{gem}} = 2.917 \pm 0.020 \text{ s}$$

$$AF(t_{1,\text{gem}}) = \frac{STDEV}{\sqrt{n}} = \frac{0.0351}{\sqrt{3}} = 0.020 \text{ s}$$

<i>grootheid</i>	<i>waarde</i>	<i>AF</i>	<i>RF</i>
$t_{1,\text{gem}}$ (s)	2.917	0.020	0.69%
$t_{1,\text{gem}}^2$ (s ²)	8.51	0.12	$2 * 0.69\% = 1.4\%$

Bijlage 2: meetfoutberekening op a

<i>grootheid</i>	<i>waarde</i>	<i>AF</i>	<i>RF</i>
rico (s ² /cm)	0.7915	0.0091	1.1%
$a = \frac{2}{\text{rico}}$ (cm/s ²)	2.527	0.029	1.1%

Bijlage 3: meetfoutberekening op het experimentele traagheidsmoment

<i>grootheid</i>	<i>waarde</i>	<i>AF</i>	<i>RF</i>
m (g)	532.3	0.1	0.019%
r (cm)	0.2475	0.0025	1.0%
g (m/s ²)	9.81	0.01	0.10%
a (cm/s ²)	2.527	0.029	1.1%
$\frac{g}{a}$	388.2	4.5	$\sqrt{0.10^2 + 1.1^2} \% = 1.2\%$
$\frac{g}{a} - 1$	387.2	4.5	1.2%
r^2 (cm ²)	0.0612	0.0012	$2 * 1.0\% = 2.0\%$
$I = m r^2 \left(\frac{g}{a} - 1\right)$ (kg m ²)	1.263	0.029	$\sqrt{0.019^2 + 2.0^2 + 1.2^2} \% = 2.3\%$