FACULTEIT INGENIEURSWETENSCHAPPEN EN ARCHITECTUUR

Hoofdstuk 10

Essential University Physics

Richard Wolfson

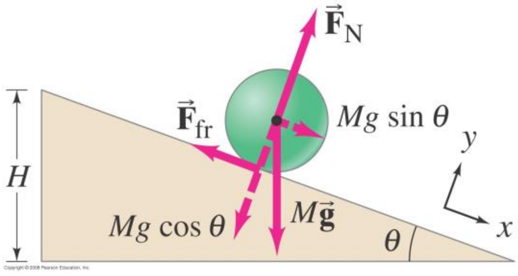
2nd Edition

Rotatiebeweging

Rotational Motion

UNIVERSITEIT GENT

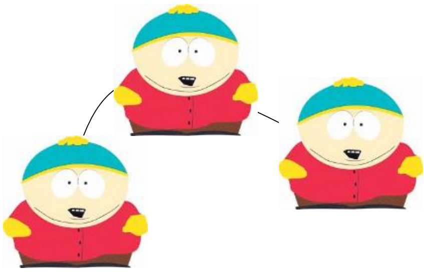
Translatie- en Rotatie-beweging



Een massieve bal en een massieve cilinder rollen over een helling omlaag. Beide starten vanuit rust, op hetzelfde tijdstip, op dezelfde hoogte. Welke is er het eerst beneden?

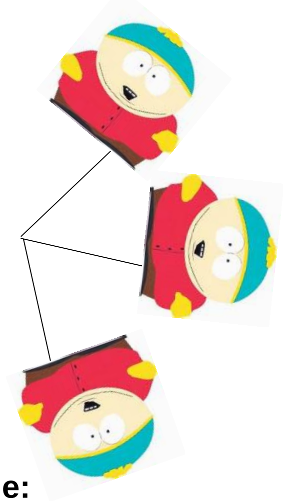
a) Beide tegelijk
b) De bal is eerst beneden
c) De cilinder is eerst beneden
d) Stomme vraag, we kennen niet eens de massa noch de straal! Moeten die niet dezelfde zijn?

Translatie- en Rotatie-beweging



Translatie:
stand t.o.v. assenkruis niet veranderd

Opm.:
puntmassa enkel translatie



Rotatie:
stand t.o.v. assenkruis wel veranderd

Translatie- en Rotatie-beweging

Voorwerpen:
Meestal combinatie van translatie en rotatie.
Translatie van het massamiddelpt.
+ rotatie rond dit massamiddelpt.

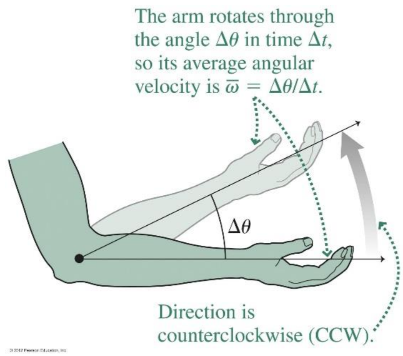
In deze cursus:
Enkel rotaties van **starre lichamen** rond een as met vaste richting, vb.: cd.
Star lichaam: onderlinge posities van deeltjes van het lichaam veranderen niet.

10.1 Hoeksnelheid (Angular Velocity)

- Hoeksnelheid ω is het tempo waarmee de hoekpositie verandert.

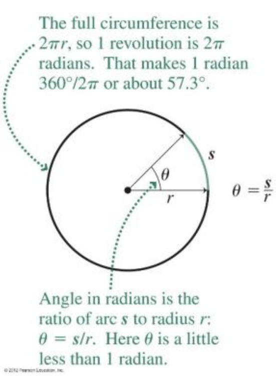
Gemiddelde hoeksnelheid : $\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Ogenblikkelijke hoeksnelheid: $\omega = \frac{d\theta}{dt}$



10.1 Hoeksnelheid (Angular Velocity)

- Hoeksnelheid en lineaire snelheid (= translatiesnelheid)
  - De lineaire snelheid van een punt van een roterend lichaam is evenredig met de afstand tot de rotatieas:

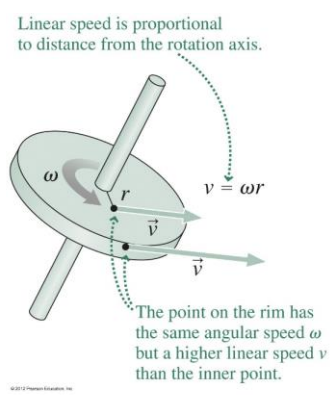


$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

$$v = \omega r$$

Hoek θ in radiaal

Hoeksnelheid ω in radiaal/seconde



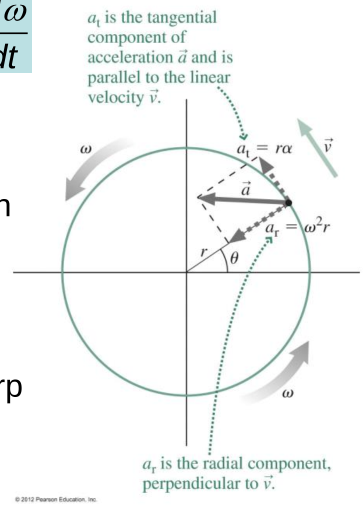
Hoekversnelling (Angular acceleration)

- Hoekversnelling α is het tempo waarmee de hoeksnelheid verandert.

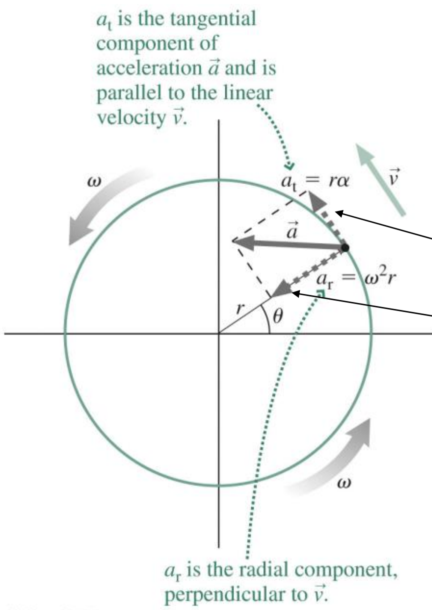
Gemidd.: $\bar{\alpha} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ Ogenbl.: $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt}$

- Hoekversnelling en tangentiële versnelling
  - De tangentiële versnelling van een punt op een roterend lichaam is evenredig met de afstand tot de rotatieas: $a_t = r\,\alpha$
  - Een punt op een roterend voorwerp heeft ook een radiale versnelling:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



Hoekversnelling (Angular acceleration)



$\vec{a_t}$

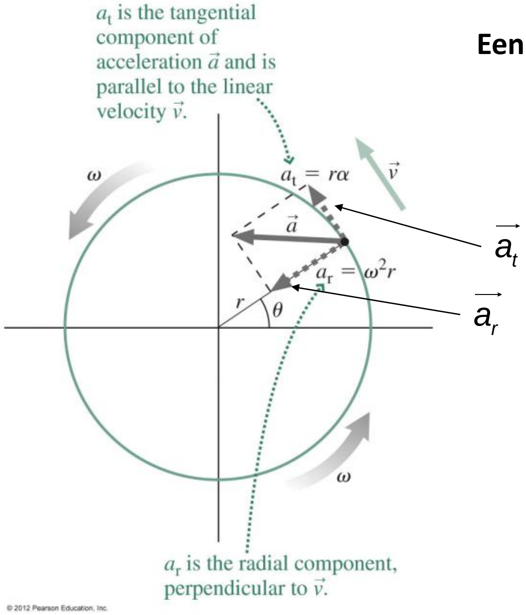
$\vec{a_r}$

•De tangentiële versnelling $\vec{a_t}$ zorgt voor een verandering van de grootte van $\vec{v}$

De radiale versnelling $\vec{a_r}$ zorgt voor een verandering van de richting van $\vec{v}$

De totale lineaire versnelling is $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$

Hoekversnelling (Angular acceleration)



Eenparig cirkelvormige beweging :

- hoeksnelheid $\boldsymbol{\omega}$=cte
- snelheid $\vec{V}$ niet cte
- v (grootte van $\vec{V}$)wel cte
- $\vec{a}$ niet cte
- a (grootte van $\vec{a}$) wel cte
- $\vec{a_t} = 0$
- $\vec{a_r} \neq 0$
- $a_r = \boldsymbol{\omega}^2 r = v^2/r$
- hoekversnelling $\alpha = 0$

Conceptvraag

- Wanneer een star voorwerp roteert rond een vaste as hebben alle punten van dit voorwerp dezelfde

A) tangentiele snelheid.

B) hoekversnelling.

C) tangentiële versnelling.

D) lineaire verplaatsing.

E) centripetale versnelling.

Conceptvraag

- Een horizontale schijf roteert rond een vertikale as door het midden van de schijf. Punt *P* ligt halfweg tussen het midden en de rand van de schijf, en punt *Q* ligt op de rand. Als de schijf met **constante hoeksnelheid** roteert, welke bewering(en) is juist? (Meerdere oplossingen mogelijk!)

  A) *P* en *Q* hebben dezelfde tangentiële versnelling.

  B) *Q* beweegt tweemaal zo snel als *P*.

  C) De tangentiële versnelling van *Q* is tweemaal zo groot als deze van *P*.

  D) De tangentiële versnelling van *P* is tweemaal zo groot als deze van *Q*.

  E) De hoeksnelheid van *Q* is tweemaal zo groot als de hoeksnelheid van *P*.

 11

Constante Hoekversnelling

- Problemen met constante hoekversnelling zijn analoog aan gelijkaardige problemen met constante versnelling in één dimensie. Dezelfde vergelijkingen gelden, mits volgende substituties $x \to \theta, \quad v \to \omega, \quad a \to \alpha$

Table 10.1 Angular and Linear Position, Velocity, and Acceleration

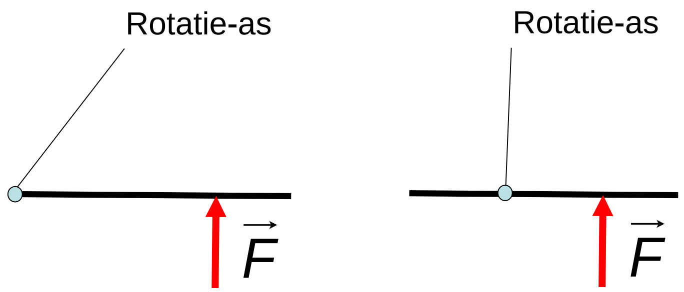
Linear Quantity	**Angular Quantity**	
Position x	Angular position θ	
Velocity $v = \frac{dx}{dt}$	Angular velocity $\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$V = \omega r$
Acceleration $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$	Angular acceleration $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	

Equations for Constant Linear Acceleration		**Equations for Constant Angular Acceleration**	
$\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$	(2.8)	$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$	(10.6)
$v = v_0 + at$	(2.7)	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10.7)
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	(2.10)	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.8)
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	(2.11)	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10.9)

 12

10.2 Krachtmoment (Torque)

- Krachtmoment τ is bij rotaties het equivalent van kracht bij translaties.
- Krachtmoment zorgt voor *verandering* van rotatie-toestand.
- Krachtmoment wordt bepaald t.o.v. een gekozen rotatieas.

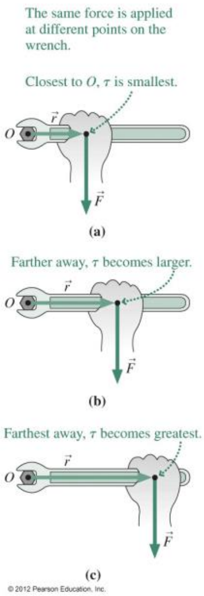


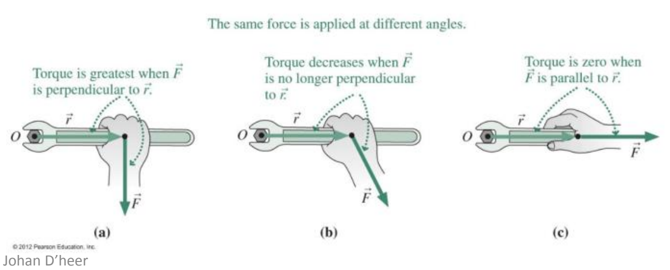
Zelfde kracht zorgt voor verschillende rotaties!

10.2 Krachtmoment (Torque)

- Krachtmoment hangt af van:
  - de afstand van de rotatieas tot het aangrijpingspunt van de kracht.
  - de grootte van de kracht $\vec{F}$.
  - de oriëntatie van de kracht t.o.v. de verplaatsing $\vec{r}$ van de rotatieas tot het aangrijpingspunt van de kracht:

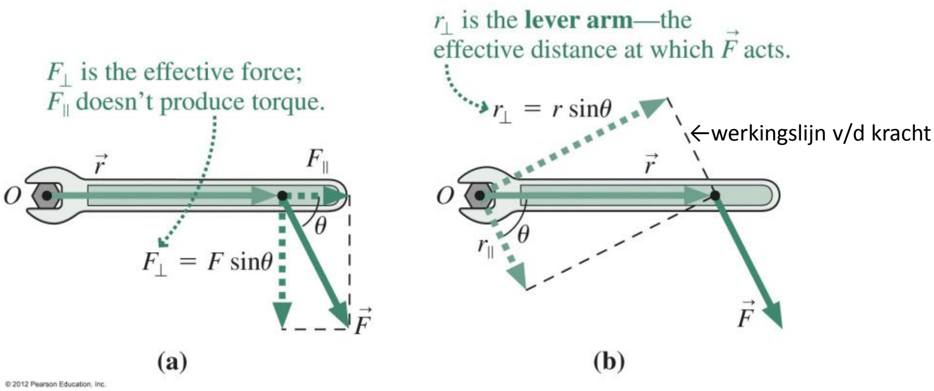
$$\tau = rF\sin\theta$$





Krachtmoment (Torque)

lever arm = momentarm of "arm"

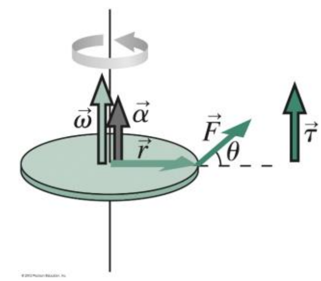


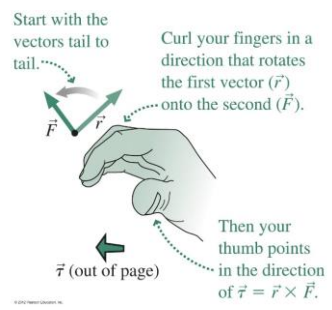
$$\tau = rF\sin\theta$$

$$\tau = r\,(F \sin\theta) \qquad \tau = (r\ \sin\theta)\,F$$

11.2 Richting van het Krachtmoment (Torque)

- Het krachtmoment staat loodrecht op:
  - de kracht en
  - de verplaatsing vanaf de rotatieas naar het punt waar de kracht werkt op het voorwerp.
- De grootte van het krachtmoment is $\tau = rF\sin\theta$
- De zin wordt gegeven door de rechterhandregel.



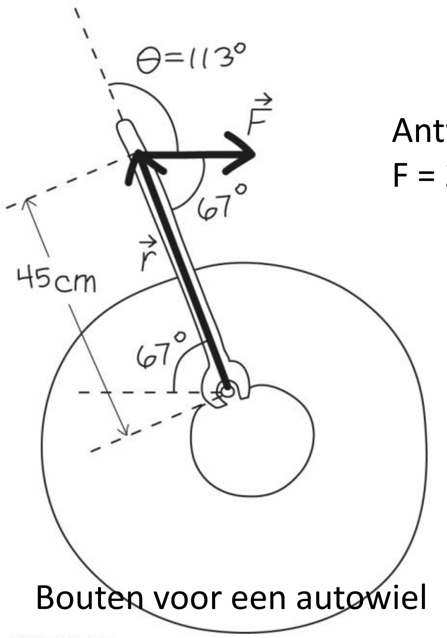


- Krachtmoment kan je voorstellen door een vektoriëel produkt van $\vec{r}$ en $\vec{F}$:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Krachtmoment (Torque)

Vereiste :
τ = 95 N m
Gevraagd :
F = ?



Antwoord :
F = 230 N

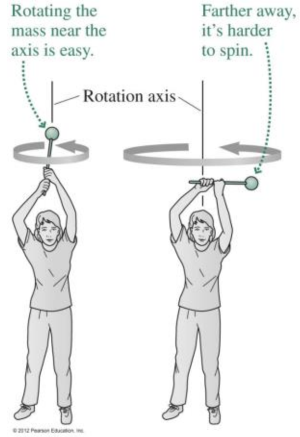
Bouten voor een autowiel

10.3 Tweede Wet van Newton Wet voor Rotaties

- **Traagheidsmoment (rotational inertia)** ***I*** is het equivalent van massa voor rotaties.
  - Traagheidsmoment hangt af van:
    - *massa*
    - *afstand tot de rotatieas*
- Hoekversnelling, krachtmoment, en traagheidsmoment vormen de onderdelen van de

tweede wet van Newton voor rotaties:

$$\tau = I\alpha$$

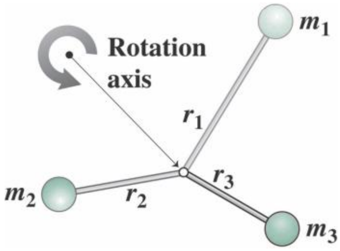


- *Voorbeeld : één puntmassa :*
- *Tangentiële componente van* $\vec{F} = m\vec{a}$ geeft :
- $\boldsymbol{F_t = m a_t = m\, r \alpha \Rightarrow \tau = r\, F_t = m\, r^2\, \alpha = I\alpha}$

Wat is Traagheidsmoment?

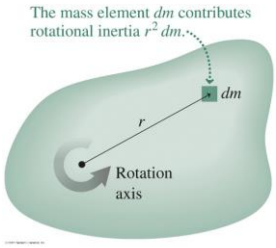
- Voor een puntmassa *m* is het traagheidsmoment het produkt van de massa met het kwadraat van de afstand *R* tot de rotatieas: $I = mR^2$.
- Voor een systeem van discrete massa's is het traagheidsmoment de som van de traagheidsmomenten van de individuele massa's:

$$I = \sum m_i r_i^2$$



- Voor een continue massa-verdeling wordt the traagheids-moment gegeven door:

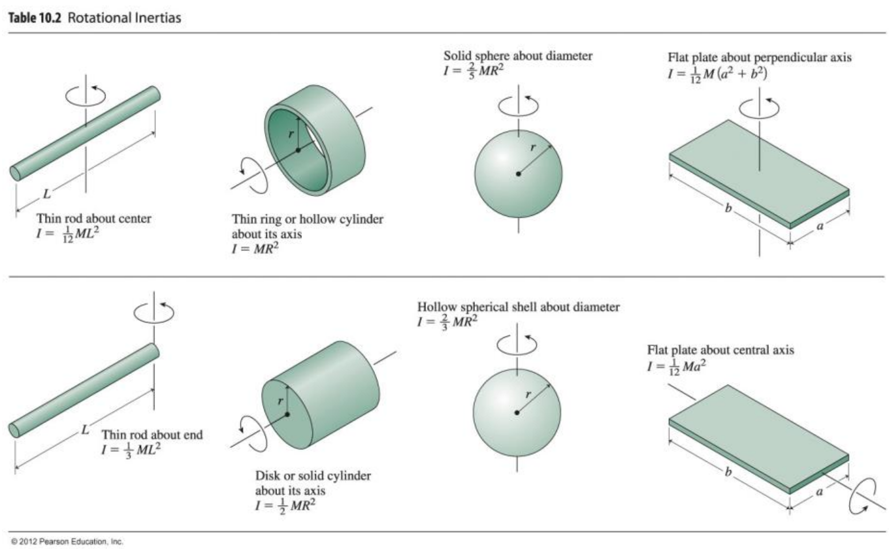
$$I = \int r^2\, dm$$



Conceptvraag

- Een massieve bol en een holle sfeer hebben dezelfde straal en dezelfde massa. Beide roteren rond een as die door hun middelpunt gaat. Welke bewering over hun traagheids-moment is juist?
  a) Het traagheidsmoment van de bol is groter dan dit van de sfeer.
  b) Het traagheidsmoment van de sfeer is groter dan dit van de bol.
  c) Het traagheidsmoment van de bol is gelijk aan dit van de sfeer.
  d) We kunnen hun traagheidsmoment niet vergelijken vermits we hun hoekversnelling niet kennen.

Traagheidsmoment van Eenvoudige Voorwerpen



Stelling van Steiner (Parallel-Axis Theorem)

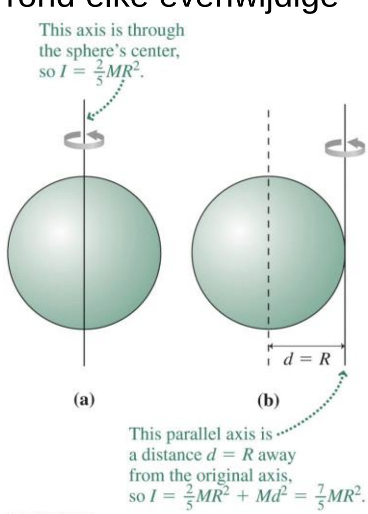
- Kennen we het traagheidsmoment I_{cm} rond een as door het **massamiddelpunt**, dan is met de **stelling van Steiner** het traagheidsmoment *I* rond elke evenwijdige as te berekenen.

- Stelling van Steiner:

$$I = I_{cm} + Md^2$$

met *d* de afstand van de as door het massamiddelpunt tot de parallelle as en met *M* de totale massa van het voorwerp.

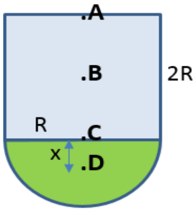
(geen bewijs kennen)



- Voorbeeld : Een werkstuk bestaat uit een homogene cilinder met lengte 2R en straal R, waaraan onderaan een homogene halve bol(met andere dichtheid) is bevestigd met straal R. De staaf en de halve bol hebben dezelfde massa M.
  Het massamiddelpunt van een halve homogene bol ligt op afstand x = (3R/8) van het middelpunt van die bol. Het geheel kan oscilleren (fysische slinger) rond een as loodrecht op de cilinder die gaat door punt A, midden op de bovenzijde van de cilinder.

Gegeven : Traagheidsmoment van een cilinder (straal *R*, lengte *l*, massa *M*) rond een as door zijn centrum (B op fig.), **loodrecht op de aslijn** is :

$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$$



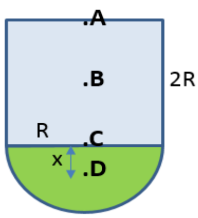
Bewijs dat het traagheidsmoment van dit werkstuk voor de rotatieas door A gegeven wordt door :

$$I_A = MR^2\left(\frac{19}{12} + \frac{59}{10}\right) = 7.483MR^2$$

- Voorbeeld : Een werkstuk bestaat uit een homogene cilinder met lengte 2R en straal R, waaraan onderaan een homogene halve bol(met andere dichtheid) is bevestigd met straal R. De staaf en de halve bol hebben dezelfde massa M.
  Het massamiddelpunt van een halve homogene bol ligt op afstand x = (3R/8) van het middelpunt van die bol. Het geheel kan oscilleren (fysische slinger) rond een as loodrecht op de cilinder die gaat door punt A, midden op de bovenzijde van de cilinder.

Gegeven : Traagheidsmoment van een cilinder (straal *R*, lengte *l*, massa *M*) rond een as door zijn centrum (B op fig.), **loodrecht op de aslijn** is :

$$I = \frac{MR^2}{4} + \frac{Ml^2}{12}$$



$$I_A = MR^2\left(\frac{19}{12} + \frac{59}{10}\right) = 7.483MR^2$$

$$1\ cilinder(Steiner): \mathrm{I}_{A,cil} = I_{B,cil} + \ldots$$

$$2\ ganse\ bol(R, 2M): I_C = \frac{2}{5}(2M)R^2$$

$$3\ \text{halve bol(R, M)}: I_{C,\text{h}bol} = \ldots$$

$$4\ (Steiner) I_{D,\text{h bol}} = I_{C,\text{h}bol} \ldots$$

$$5\ (Steiner) I_{\text{A,h bol}} = I_{\text{D,h}bol} \ldots$$

$$6\ \text{Totaal rond A} = \text{som van cilinder en (halve) bol}$$

Vraagstuk 33 hfdst. 10

- At the MIT Magnet Laboratory, energy is stored in huge solid flywheels of mass M=7.7 × 10^4 kg and radius R=2.4 m. The flywheels ride on shafts 41 cm in diameter. If a frictional force of f=34 kN acts tangentially on the shaft, how long will it take the flywheel to come to a stop from its usual 360-rpm rotation rate?

$\tau = ...(\text{algemeen}: \tau = \vec{r} \times \vec{F})$

$I = ...(\text{opmerking: verwaarloos het asgat : homgene schijf, straal R})$

$\alpha = ...(\text{tweede wet van Newton voor rotaties (afremmen, } \alpha \text{ neg})$

$\omega = ... \qquad \omega_0 = ... \qquad (rad/s)$

$t = ... \qquad (cfr\ tabel 10.1,\ \text{constante hoekversnelling})$

25

Vraagstuk 33 hfdst. 10

- At the MIT Magnet Laboratory, energy is stored in huge solid flywheels of mass 7.7 × 10^4 kg and radius 2.4 m. The flywheels ride on shafts 41cm in diameter. If a frictional force of 34 kN acts tangentially on the shaft, how long will it take the flywheel to come to a stop from its usual 360-rpm rotation rate?

$\tau = ... = \mathrm{rf} = 0.205\,\mathrm{m}\, 34\,\mathrm{kN} = 6.97\,\mathrm{kNm}$

$I = ... = \tfrac{1}{2} MR^2 = 22.2\, 10^4\, kgm^2$

$\text{opm: stricto senso } \tfrac{1}{2} M(R^2 + \mathrm{r}^2) \quad \text{verschil } 0.7\%$

$\alpha = ... = -\tau / I = -0.0316 / s^2$

$\omega = ... = 0 \qquad \omega_0 = ... = 360 \text{ toeren/ min} = 360 * 2\pi / 60 = 12\pi (rad/s)$

$t = ... = \Delta\omega / \alpha = \omega_0 / \alpha = 1194 s = 20 \min \quad (cfr\ tabel 10.1)$

28

Combinatie van Rotatie en Translatie Dynamica

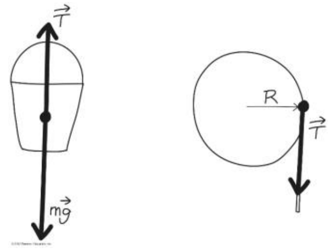
- Toepassingen met translatie én rotatie beweging:
  - Krachten die zorgen voor translatie → 2de wet Newton voor translaties.
  - Krachten die zorgen voor rotatie → 2de wet Newton voor rotaties.

A bucket of mass *m* drops into a well, its rope unrolling from a cylinder of mass *M* and radius *R.*

What's its acceleration?

Free-body diagrams for bucket and cylinder

Rope tension $\vec{T}$ provides the connection



Newton's law, bucket:

$F_{net} = ma \Rightarrow mg - T = ma$

Rotational analogy of Newton's law, cylinder:

$\tau = I\alpha$ ➔ $RT = I\,(a/R)$

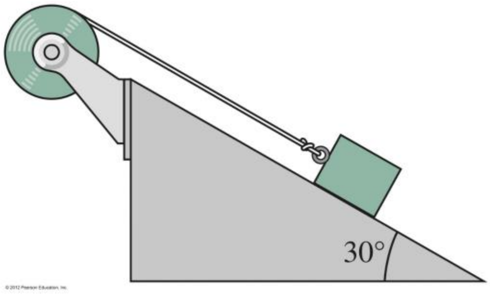
➔ $T = (MR^2/2)(a/R^2) = Ma/2$

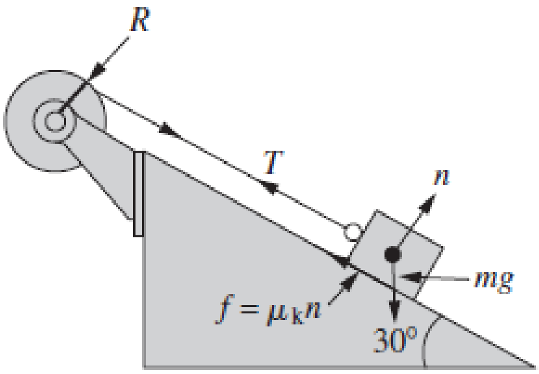
With $I = \frac{1}{2}MR^2$

Solve the two equations to get $a = \dfrac{mg}{m + \frac{1}{2}M}$

Vraagstuk 57 hfdst. 10

- A 2.4-kg block rests on a slope and is attached by a string of negligible mass to a solid drum of mass 0.85 kg and radius 5.0 cm. When released, the block accelerates down the slope at 1.6 m/s^2. Find the coefficient of friction between block and slope.





$$blok, //aan\ opp. \Rightarrow mg\sin(\vartheta) - f - T = ma$$
$$blok, \perp op\ opp. \Rightarrow n - mg\cos(\theta) = 0$$
$$blok \Rightarrow \mu_k = f / n$$
$$wiel \Rightarrow TR = I\alpha = I(a/R)\ en\ I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow T = \frac{Ma}{2}$$
$$\cdots \mu_k = \frac{mg\sin\theta - ma - Ma/2}{mg\cos\theta} = \ldots = 0.36$$

10.4 Rotatie Energie en Arbeid

- Een roterend voorwerp heeft kinetische energie geassocieerd met de rotatiebeweging.
  Het kan ook translatie kin. energie hebben.

$$\boxed{K_{rot} = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad K_{trans} = \tfrac{1}{2}Mv^2.}$$

- Arbeid geleverd door krachtmoment dat voor rotatie zorgt: $\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta}$
-
- Arbeid – energie stelling voor rotatie :

$$\Delta K_{rot} = \frac{1}{2} I\,\omega_2{}^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 = W_{net,\tau}$$

- Deze formules kunnen vrij eenvoudig worden bewezen, maar op basis van de analogie tussen translatie en rotatiebewegingen kan men ze ook begrijpen:

Samenvatting

Linear Quantity or Equation	Angular Quantity or Equation	Relation Between Linear and Angular Quantities
Position x	Angular position θ	
Speed $v = dx/dt$	Angular speed $\omega = d\theta/dt$	$v = \omega r$
Acceleration a	Angular acceleration α	$a_t = \alpha r$
Mass m	Rotational inertia I	$I = \int r^2\, dm$
Force F	Torque τ	$\tau = rF\sin\theta$
Kinetic energy $K_{trans} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$	
Newton's second law (constant mass or rotational inertia):		
$F = ma$	$\tau = I\alpha$	

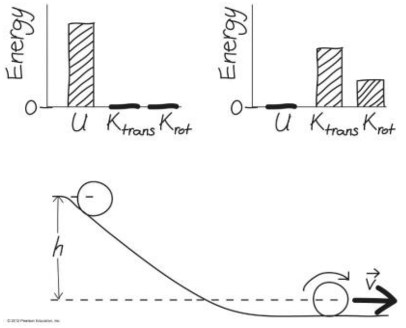
$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\, dx \qquad W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\, d\theta$$

$$\Delta K_{tr} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = W_{net,F} \qquad \Delta K_{rot} = \frac{1}{2} I\, \omega_2{}^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2 = W_{net,\tau}$$

Rotatie Energie en Arbeid

- Bij behoud van energie met roterende voorwerpen moet je met beide vormen van kinetische energie rekening houden.
  - Voor rollende voorwerpen is er een verband tussen de twee. Dit verband hangt af van het traagheidsmoment.

Example: A solid ball rolls (no slipping) down a hill. How fast is it moving at the bottom?



Behoud van energie :

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

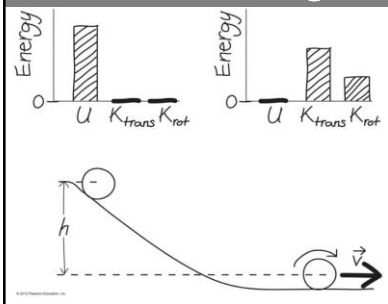
$$= \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{7}{10}Mv^2$$

Oplossing: $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

Vergelijk met wrijvingsloos glijden of ook valbeweging :

$$v = \sqrt{2gh}$$

Rotatie Energie en Arbeid

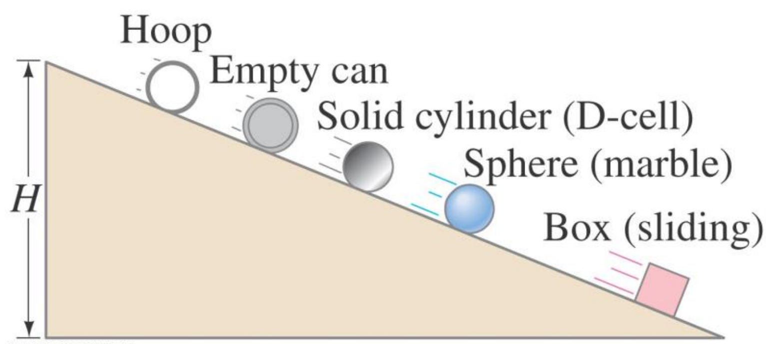


Glijden (zonder rotatie)=> $v = \sqrt{2gh}$

Volle bal : I = 2/5 MR² => $v = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

Holle bal : I = 2/3 MR² => $v = \sqrt{\frac{6}{5}gh}$

Holle cilinder : I = MR² => $v = \sqrt{gh}$



Conceptvraag

- In beide situaties zijn de massa’s van de cilinder met het touw gelijk en zijn de massa’s die aan het touw hangen gelijk. Als beide massa’s gelijktijdig worden losgelaten en het touw slipt niet, welke komt dan eerst op de grond?

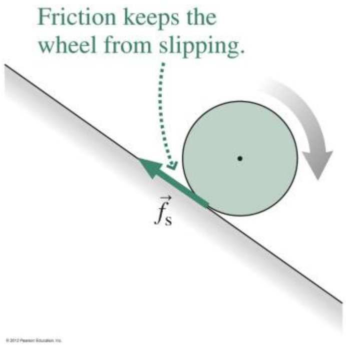
A) De massa links komt eerst op de grond.

B) De massa rechts komt eerst op de grond.

C) Beide massa’s komen gelijktijdig op de grond.

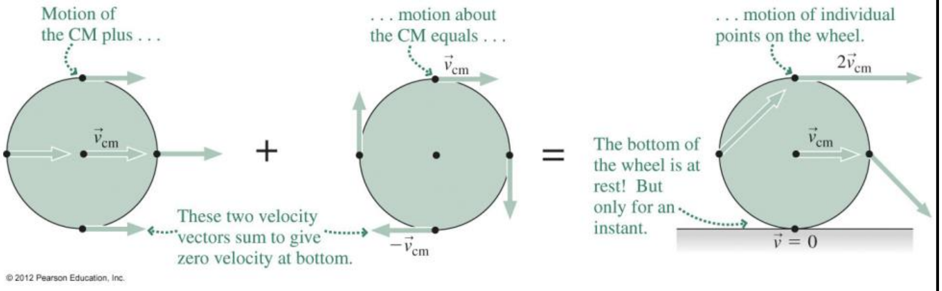
10.5 Rollende Beweging

- Rollende beweging is een combinatie van translatie (lineaire) beweging en rotatie beweging.
  – Het massamiddelpunt voert een translatie uit.
  – Het voorwerp zelf roteert rond het massamiddelpunt.
- Opdat een voorwerp zou kunnen rollen moet er wrijving zijn!



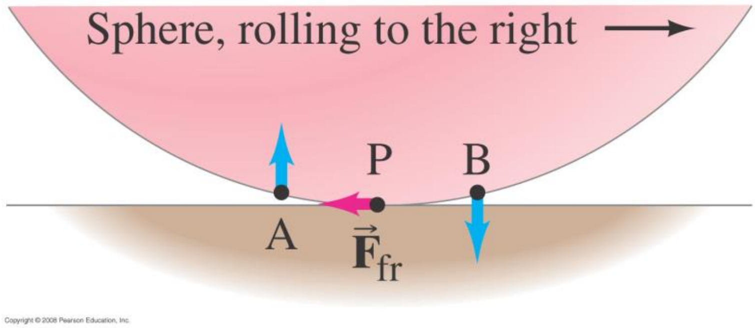
Rollende Beweging

- Bij **zuiver rollen** beweegt het voorwerp zonder slippen en het punt in contact met de grond is op dat moment in rust.
  - In dit geval is er een verband tussen ω en v: $v = \omega R$, met R de straal van het voorwerp.

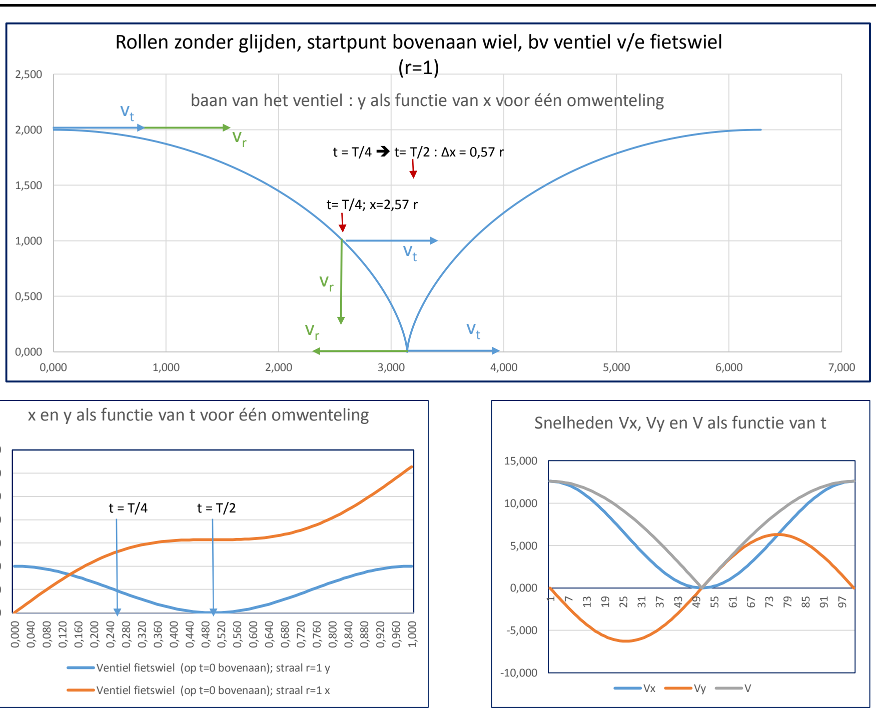


  - De arbeid geleverd door de wrijvingskracht is nul, vermits het contactpunt niet beweegt t.o.v. de grond, helling, enz.

Remmen : waar gaat de energie naartoe?

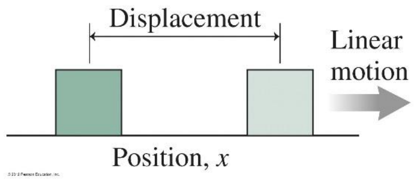


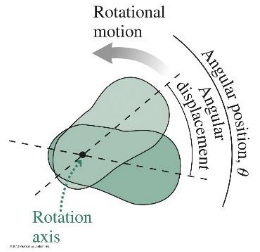
In P is snelheid nul, in A en B quasi loodrecht op wrijvingskracht ➔ wrijvingskracht levert géén arbeid bij rollen zonder glijden, De kinetische energie gaat echter "verloren" in warmte in het remsysteem zelf, bv de schijfremmen ➔ verhitte remmen bij lange afdaling ➔ remmen op motor



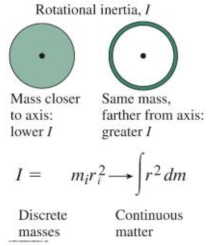
Samenvatting

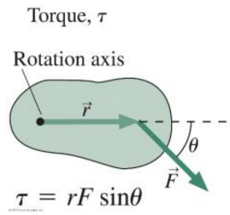
- Eéndimensionale rotatie beweging is volkomen analoog met ééndim. translatie beweging.
  - Transl. en rot. beweging:





  - Analogieën tussen rotatie en translatie grootheden:





Translatie : m en F

Rotatie : I en τ

Samenvatting

Linear Quantity or Equation	Angular Quantity or Equation	Relation Between Linear and Angular Quantities
Position x	Angular position θ	
Speed $v = dx/dt$	Angular speed $\omega = d\theta/dt$	$v = \omega r$
Acceleration a	Angular acceleration α	$a_t = \alpha r$
Mass m	Rotational inertia I	$I = \int r^2\,dm$
Force F	Torque τ	$\tau = rF\sin\theta$
Kinetic energy $K_{trans} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy $K_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$	
Newton's second law (constant mass or rotational inertia):		
$F = ma$	$\tau = I\alpha$	

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx \qquad W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau\,d\theta$$

$$\Delta K_{tr} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = W_{\text{net,F}} \qquad \Delta \boldsymbol{K_{rot}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{\omega_2}^2 - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\omega_1^2} = \boldsymbol{W_{net,\tau}}$$

11 : Rotatievektoren : Samenvatting

Linear Quantity or Equation	Angular Quantity or Equation	Relation Between Linear and Angular Quantities
Position x	Angular position θ	
Speed $v = dx/dt$	Angular speed $\omega = d\theta/dt$	$v = \omega r$
Acceleration a	Angular acceleration α	$a_t = \alpha r$
Mass m	Rotational inertia I	$I = \int r^2\, dm$
Force F	Torque τ	$\tau = rF\sin\theta$
Kinetic energy $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$	
Newton's second law (constant mass or rotational inertia):		
$F = ma$	$\tau = I\alpha$	

$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \vec{L} = I\vec{\omega} \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{p} = m\,\vec{v} = cte \qquad \vec{L} = I\vec{\omega} = c^{te}$$

$$als\ \vec{F}_{net} = 0 \qquad als\ \ \vec{\tau}_{net} = 0$$

44