Differentiaalvergelijkingen

Differentiaalvergelijking opstellen van een familie krommen

Leidt de functie n maal af met n = aantal onafhankelijke constanten. Dit geeft een stelsel met n vergelijkingen. Zoek vergelijkingen uit het stelsel zodat wanneer je bewerkingen uitvoert, je een differentiaalvergelijking uitkomt dat gelijk is aan 0.

Differentiaalvergelijking van eerste orde en eerste graad

Scheiden van de veranderlijken

Vorm

$$f(x)\ dx = g(y)\ dy$$

Oplosmethode

$$\int f(x)\ dx = \int g(y)\ dy$$

Homogene differentiaalvergelijking

Vorm

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Oplosmethode

Stel $y = ux$ en $dy = udx + xdy$ en steek in de differentiaalvergelijking die nu oplosbaar is met scheiden van de veranderlijken.

Totale differentiaalvergelijking

Indien $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ en

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Oplosmethode

Zoek $F(x,y)$ zodat

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y) \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = N(x,y)$$

De AO wordt

$$F(x,y) = C$$

Lineaire differentiaalvergelijking

Vorm

$$y' + yP(x) = Q(x)$$

Oplosmethode

Stel $y = uv$ en $y' = u'v + uv'$ en steek in DVG

$$\begin{aligned}
&u'v + uv' + uvP(x) = Q(x) \\
\to &u'v + u(v' + vP(x)) = Q(x) \\
\to &\text{kies } v' + vP(x) = 0 \ \text{ en los op naar } \mathbf{v} \text{ met gescheiden veranderlijken} \\
\to &u'v = Q(x) \\
\to &u' = \frac{Q(x)}{v} \\
\to &\text{los op naar } \mathbf{u} \\
\to &\text{De AO wordt y = uv}
\end{aligned}$$

Differentiaalvergelijking van Bernouilli

Vorm

$$y' + yP(x) = y^n Q(x)$$

Oplosmethode

Deel de differentiaalvergelijking door y^n

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x)$$

Stel $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ en $z' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \to \frac{z'}{1-n} = \frac{y'}{y^n}$ Steek in dvg

$$\frac{z'}{1-n} + zP(x) = Q(x)$$

Deze differentiaalvergelijking is lineair in z' en z.

Orthogonale krommenbundel

Leidt de differentiaalvergelijking af en vervang y' door $-\frac{1}{y'}$. Los de differentiaalvergelijking op.

Differentiaalvergelijking van hogere orde

3 Soorten

1. $y^{(n)} = f(x)$

   Voer n integraties uit

2. Differentiaalvergelijking bevat y niet expliciet

   Stel $p = y'$ en $y' = p'$ en steek in differentiaalvergelijking

3. Differentiaalvergelijking bevat x niet expliciet

   stel $p = y'$ en $y' = pp'$ en steek in differentiaalvergelijking

Reeksen

Meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$$

$$\begin{cases} \text{convergeert naar } \frac{1}{1-q} \text{ als } |q| < 1 \\ \text{divergeert naar } +\infty \text{ als } q \geq 1 \\ \text{divergeert als } q \leq -1 \end{cases}$$

Hyperharmonische reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ...$$

$$\begin{cases} \text{convergeert als } p > 1 \\ \text{divergeert naar } +\infty \text{ als } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

Convergentieonderzoek

Integraalcriterium van Cauchy

Bij een reeks met positieve termen met $f(x) = a_x$(de algemene term met $n = x$) waarbij $f(x)$ dalend en continue over $[m, +\infty[$ dan geldt

$$\int_0^m f(x)\, dx \in \mathcal{R} \to \text{reeks convergent}$$

$$\int_0^m f(x)\, dx = \infty \to \text{reeks divergent}$$

Vergelijkingscriterium I

Gebruik een gekende reeks $\sum b_n$ om een onbekende reeks $\sum a_n$ te onderzoeken. Indien

$$a_n \leq b_n \qquad \text{en} \qquad \sum b_n \text{ convergent} \to \sum a_n \text{ convergent}$$

$$b_n \leq a_n \qquad \text{en} \qquad \sum b_n \text{ divergent} \to \sum a_n \text{ divergent}$$

Vergelijkingscriterium II

Gebruik een gekende reeks $\sum b_n$ om een onbekende reeks $\sum a_n$ te onderzoeken. Indien

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \neq \infty$$

dan vertoont $\sum a_n$ hetzelfde gedrag als $\sum b_n$.

Convergentiecriterium van d'Alembert

Bereken de limiet

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Als L $<$ 1, dan is de reeks convergent
Als L $>$ 1, dan is de reeks divergent
Als L $=$ 1, dan is er geen besluit

Convergentiecriterium van Cauchy

Bereken de limiet

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Als L $<$ 1, dan is de reeks convergent
Als L $>$ 1, dan is de reeks divergent
Als L $=$ 1, dan is er geen besluit

Convergentieonderzoek willekeurige reeks

1. Controleer of de reeks absoluut convergent is. Beschouw enkel de reeks van de absolute termen en ga na of deze reeks convergeert

2. Indien de reeks niet absoluut convergent is, ga dan na of de reeks semiconvergent is. Een reeks is semiconvergent als hij niet absoluut convergeert maar wel convergeert indien ook de alternerende term beschouwd wordt.

3. Indien de reeks niet semiconvergent is, divergeert de reeks.