

Hoofdstuk 11

Essential University Physics

Richard Wolfson
2nd Edition

Rotatie Vektoren en Impulsmoment

Rotational Vectors and **Angular** Momentum

© Johan D'heer

1

11.1 Rotatievektoren

- Rotatiebeweging en rotatiegrootheden analoog met translatie-beweging en –grootheden

Translatie	Rotatie
snelheid	hoeksnelheid
versnelling	hoekversnelling
kracht	krachtmoment
impuls	impulsmoment



Vektoren



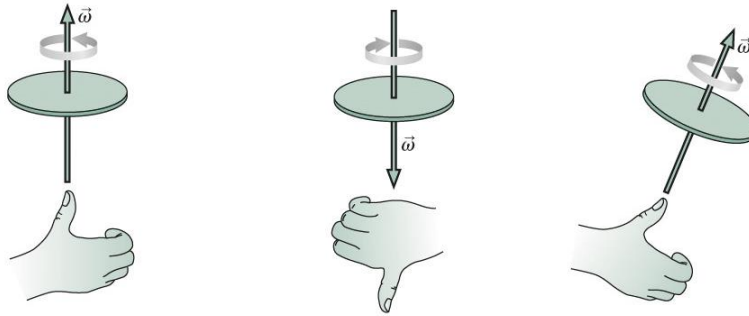
Vektoren?

© Johan D'heer

2

Richting van de Hoeksnelheid

- De richting van de hoeksnelheidsvector is de rotatieas, de zin wordt gegeven door de **rechterhandregel**.
 - Plooi de vingers van je rechterhand in de richting van de rotatie, en je duim wijst in de richting van de hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$.



© Johan D'heer

3

Richting van de Hoekversnelling

- De hoekversnelling heeft dezelfde richting als de richting van de verandering van de hoeksnelheid $\Delta\vec{\omega}$:

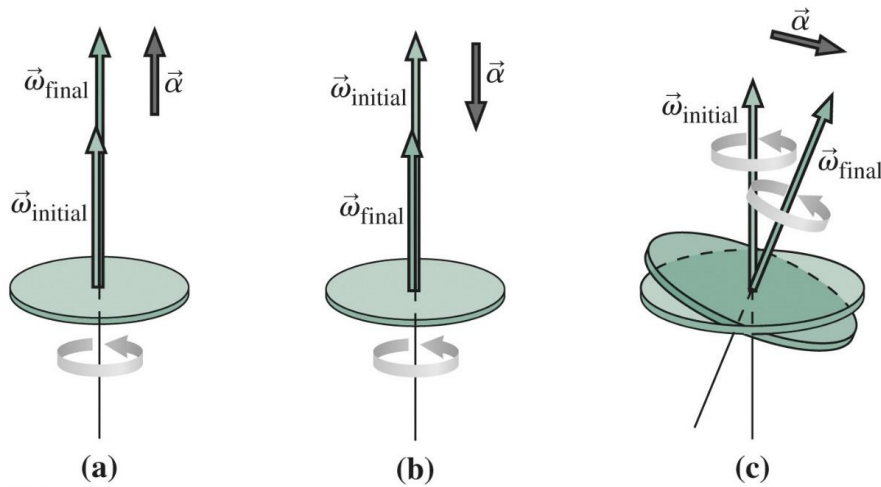
$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

- $\Delta\vec{\omega}$ dezelfde zin en richting als $\vec{\omega}$: hoeksnelheid neemt toe.
- $\Delta\vec{\omega}$ tegengestelde zin en dezelfde richting als $\vec{\omega}$: hoeksnelheid neemt af.
- $\Delta\vec{\omega}$ een andere richting als $\vec{\omega}$: hoeksnelheid verandert van richting en eventueel van grootte.

© Johan D'heer

4

Richting van de Hoekversnelling



© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

5

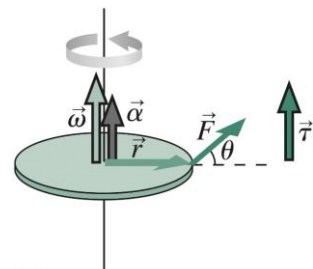
11.2 Richting van het Krachtmoment (Torque)

- Het krachtmoment staat loodrecht op:
 - de kracht en
 - de verplaatsing vanaf de rotatieas naar het punt waar de kracht werkt op het voorwerp.
- De grootte van het krachtmoment is $\tau = rF\sin\theta$
- De zin wordt gegeven door de rechterhandregel.



- Krachtmoment kan je voorstellen door een vektorieel produkt van \vec{r} en \vec{F} :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



Start with the vectors tail to tail.

Curl your fingers in a direction that rotates the first vector (\vec{r}) onto the second (\vec{F}).

$\vec{\tau}$ (out of page)

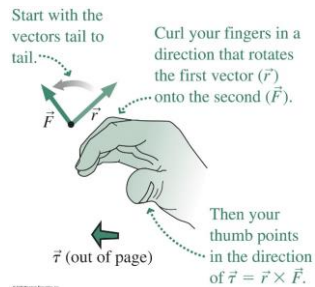
Then your thumb points in the direction of $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$.

© Johan D'heer

6

Het Vektoriële Produkt

- Het vektoriële produkt van twee vectoren \vec{A} en \vec{B} is een vektor \vec{C} met grootte $C = AB\sin\theta$ en een richting en zin gegeven door de rechterhand regel:



- Enkele eigenschappen van het vektoriële produkt:

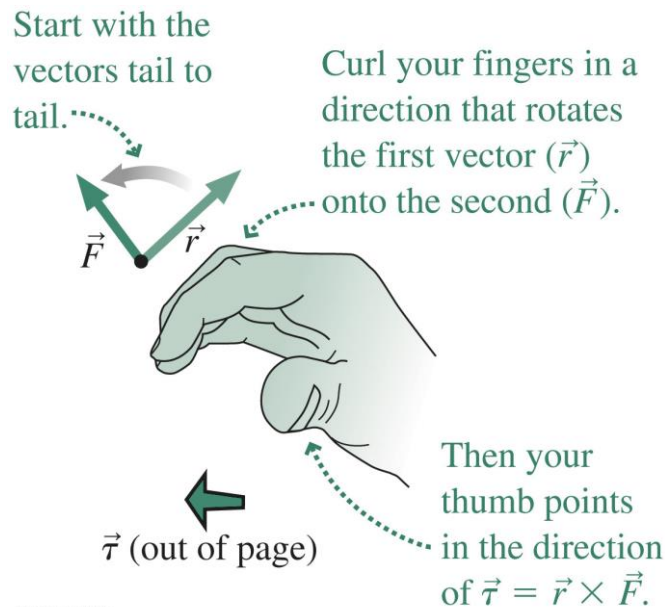
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

© Johan D'heer

7

Het Vektoriële Produkt



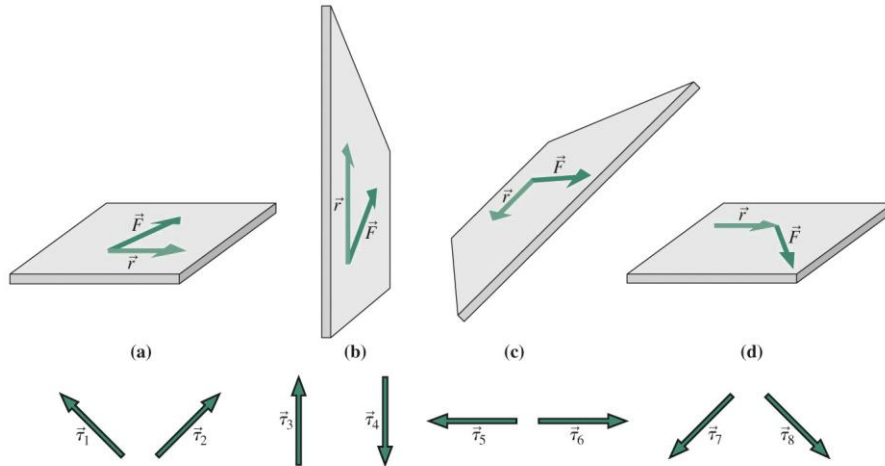
© Johan D'heer

© 2012 Pearson Education, Inc.

8

Het Vektorieel Produkt

- Zoek het passend krachtmoment bij (a), (b), (c) en (d)



© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

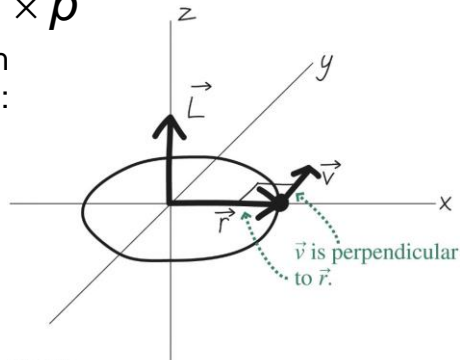
9

11.3 Impulsmoment (Angular Momentum)

- Voor een puntmassa wordt het impulsmoment \vec{L} gegeven door het vektorproduct van de plaatsvector van het deeltje (vanaf de rotatieas) en de impulsvector van het deeltje:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

- Bvb.: een puntmassa die een cirkelvormige baan beschrijft:
 \vec{L} loodrecht op het vlak van de cirkel en $L = mvr$



© 2012 Pearson Education, Inc.

© Johan D'heer

10

Impulsmoment (Angular Momentum)

- *Bijzonder geval:*
Een symmetrisch voorwerp dat roteert rond een as door het massamiddelpunt

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (\text{cfr : } \vec{p} = m\vec{v})$$



© Johan D'heer

11

2^{de} Wet van Newton en Impulsmoment

- In termen van impulsmoment wordt de tweede wet van Newton voor rotaties:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{cfr : } \vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt})$$

- Het impulsmoment van een systeem verandert enkel als er een netto krachtmoment $\neq 0$ werkt op het systeem.
- Is het netto krachtmoment nul, dan is het impulsmoment constant.
- Voor een symmetrisch lichaam dat roteert rond een vaste as:

$$\vec{\tau} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt}$$

© Johan D'heer

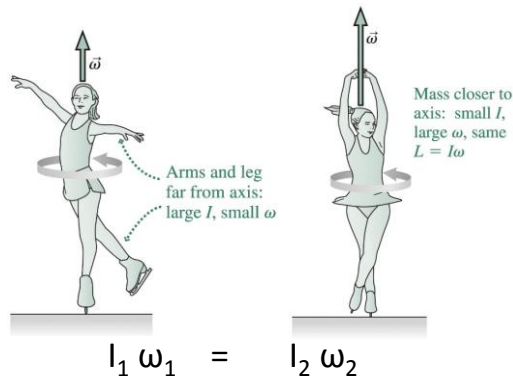
12

2^{de} Wet van Newton en Impulsmoment

- Veranderingen van het traagheidsmoment leiden tot veranderingen van hoeksnelheid als het netto-krachtsmoment nul is.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = c^{te} \quad \text{als} \quad \vec{\tau}_{net} = 0$$

Het impulsmoment voor de schaatster is constant, dus zal haar hoeksnelheid toenemen wanneer ze haar traagheidsmoment verkleint.



© Johan D'heer

13

Conceptvraag

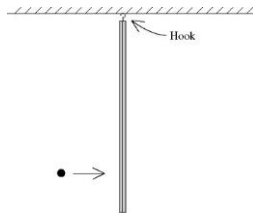
- In welke geval(len) verandert het impulsmoment van een systeem niet?
 - A) de totale kinetische energie is constant.
 - B) er werkt geen netto externe kracht op het systeem.
 - C) de impuls en de energie veranderen niet.
 - D) er werkt geen krachtsmoment op het systeem.

© Johan D'heer

14

Conceptvraag

- Een bal botst tegen een metalen staaf en blijft aan de staaf kleven (zie figuur).



Tijdens deze botsing

- A) verandert het impulsmoment van bal+staaf t.o.v. de ophanghaak niet omdat enkel de zwaartekracht op het systeem werkt.
- B) verandert het impulsmoment van bal+staaf t.o.v. de ophanghaak wel omdat de haak een externe kracht uitoefent op de staaf.
- C) verandert het impulsmoment van bal+staaf t.o.v. de ophanghaak niet omdat noch de haak, noch de zwaartekracht een krachtmoment t.o.v. de haak uitoefenen op het systeem.
- D) veranderen het impulsmoment en de kinetische energie van het systeem niet.
- E) veranderen de impuls en het impulsmoment van het systeem niet.

© Johan D'heer

15

11.4 Behoud van Impulsmoment

<http://www.youtube.com/watch?v=UZIW1a63KZs>

<http://www.youtube.com/watch?v=ty9QSiVC2g0>

	Nederlands	Engels
$\vec{J} = \vec{F} dt$	stoot	impulse
$\vec{p} = m\vec{v}$	impuls	(linear) momentum
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	impulsmoment	angular momentum
$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$	krachtmoment	torque

© Johan D'heer

17

11.4 Behoud van Impulsmoment

- *Initiële*: totale impulsmoment = impulsmoment van wiel.
- Wiel omdraaien → impulsmoment draait om.
- *Gevolg*: tafel begint in tegenovergestelde zin te draaien, zó dat impulsmoment tafel + impulsmoment wiel = oorspronkelijk impulsmoment wiel.

The student stands on a stationary turntable holding a wheel that spins counterclockwise; the wheel's angular momentum points upward.



She flips the spinning wheel, reversing its angular momentum. The total angular momentum is conserved, so turntable and student (ts) must rotate the other way.

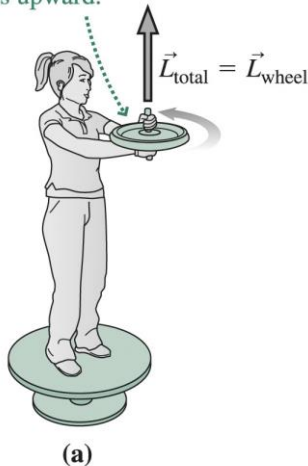


© Johan D'heer

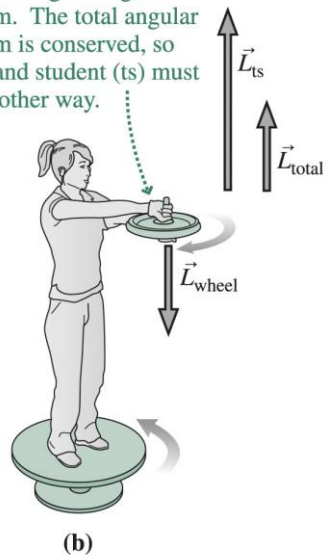
18

Behoud van Impulsmoment

The student stands on a stationary turntable holding a wheel that spins counterclockwise; the wheel's angular momentum points upward.



She flips the spinning wheel, reversing its angular momentum. The total angular momentum is conserved, so turntable and student (ts) must rotate the other way.



© Johan D'heer

19

Behoud van Impulsmoment

Before:

Running straight toward the axis, the boy carries no angular momentum.

Running tangentially, the girl carries additional angular momentum.

After:

© 2012 Pearson Education, Inc.

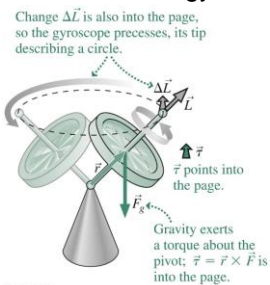
$$I\omega_{\text{initial}} + m_g v_g R = I\omega_{\text{final}} + m_b R^2 \omega_{\text{final}} + m_g R^2 \omega_{\text{final}}$$

© Johan D'heer 20

11.5 Precessie

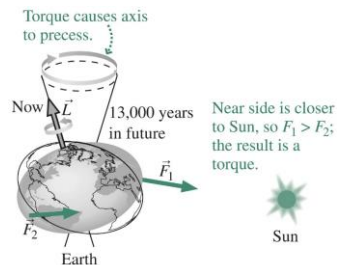
- Precessie is een drie-dimensionaal verschijnsel dat soms optreedt bij rotatiebeweging.
 - Precessie treedt op wanneer een krachtmoment, werkend op een roterend voorwerp, de richting maar niet de grootte van het impulsmoment verandert.
 - Als gevolg hiervan voert de rotatieas een cirkelvormige beweging uit (= precessie):

Precessie van een gyroscoop



© Johan D'heer

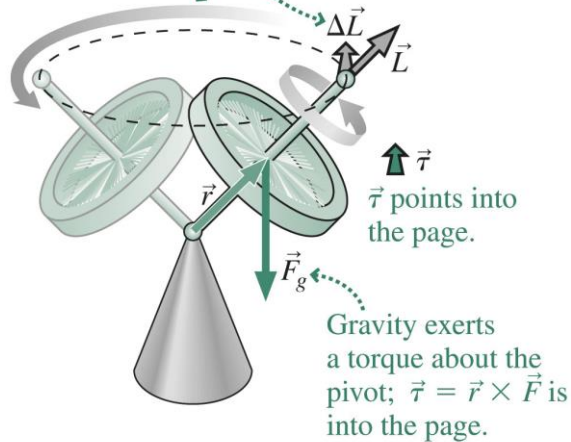
Precessie wijzigt traagjes de richting van de rotatieas van de aarde



22

Precessie

Change $\Delta \vec{L}$ is also into the page,
so the gyroscope precesses, its tip
describing a circle.



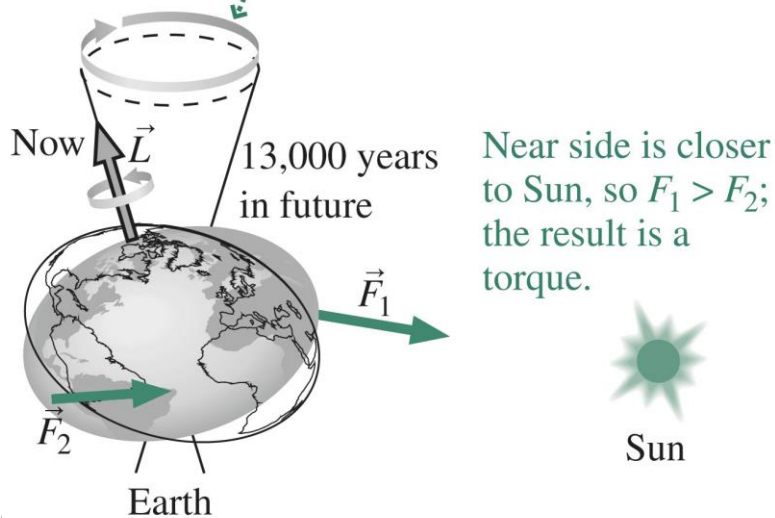
© Johan D'heer

© 2012 Pearson Education, Inc.

23

Precessie

Torque causes axis
to precess.



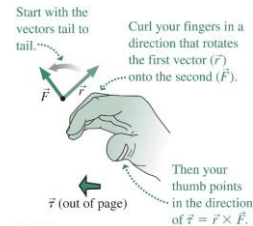
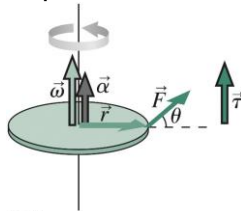
© Johan D'heer

© 2012 Pearson Education, Inc.

24

Samenvatting

- Rotatie grootheden zijn vectoren waarvan de richting geassocieerd wordt met de richting van de rotatie-as.
 - Concreet: de richting wordt gegeven door de rechterhand regel.
 - Het vektorproduct geeft een compacte voorstelling voor krachtmoment en impulsmoment.



- Impulsmoment is het rotatie analoog van impuls:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}; \text{ symmetrische voorwerpen, } \vec{L} = I\vec{\omega}.$$
- Is er geen extern krachtmoment, dan is het impulsmoment van een systeem constant.

© Johan D'heer

25

Samenvatting

Linear Quantity or Equation	Angular Quantity or Equation	Relation Between Linear and Angular Quantities
Position x	Angular position θ	
Speed $v = dx/dt$	Angular speed $\omega = d\theta/dt$	$v = \omega r$
Acceleration a	Angular acceleration α	$a_t = \alpha r$
Mass m	Rotational inertia I	$I = \int r^2 dm$
Force F	Torque τ	$\tau = rF \sin \theta$
Kinetic energy $K_{\text{trans}} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$	

Newton's second law (constant mass or rotational inertia):

$$F = ma$$

$$\tau = I\alpha$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = cte$$

$$\text{als } \vec{F}_{\text{net}} = 0$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = c^{te}$$

$$\text{als } \vec{\tau}_{\text{net}} = 0$$

© Johan D'heer

26