

# Samenvatting Wiskunde B

Bert De Saffel

2017-2018

# Inhoudsopgave

<b>I</b>	<b>Herhaling Wiskunde A</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Onbepaalde Integralen</b>	<b>5</b>
1.1	Substitutiemethode . . . . .	5
1.1.1	Voorbeeld 1 . . . . .	5
1.1.2	Voorbeeld 2 . . . . .	5
1.2	Partieële integratie . . . . .	6
1.2.1	Voorbeeld 1 . . . . .	6
1.2.2	Voorbeeld 2 . . . . .	6
1.2.3	Voorbeeld 3 . . . . .	6
1.2.4	Voorbeeld 4 . . . . .	7
<b>II</b>	<b>Theorie</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Differentiaalvergelijking</b>	<b>9</b>
2.1	Definities . . . . .	9
2.2	Soorten oplossingen . . . . .	10
2.3	Bepalen van een DVG . . . . .	12
2.4	Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten . . . . .	14
2.4.1	Particuliere oplossing . . . . .	14
2.4.2	Algemene oplossing . . . . .	14
2.5	DVG van orde 1 en graad 1 . . . . .	16
2.5.1	Gescheiden veranderlijken . . . . .	16
2.6	Homogene DVG . . . . .	17
2.7	Exacte (= totale) DVG . . . . .	18
2.8	Lineaire DVG van orde 1 . . . . .	22
2.8.1	Oplossingsmethode . . . . .	23
2.9	DVG van type Bernoulli . . . . .	24
2.9.1	Oplossingsmethode . . . . .	24
2.10	Orthogonale krommenbundel . . . . .	26
2.11	DVG van hogere orde . . . . .	28
2.11.1	DVG van orde 2 van type $F(x, y', y'') = 0$ . . . . .	28
2.11.2	DVG van orde 2 van type $F(y, y', y'') = 0$ . . . . .	29
2.12	Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen . . . . .	29
2.12.1	Stelling 1 . . . . .	30
2.12.2	Stelling 2 . . . . .	30
2.12.3	Stelling 3 . . . . .	30

<b>3</b>	<b>Lapacetransformatie</b>	<b>31</b>
3.1	De Heaviside functie . . . . .	31
3.2	De Dirac delta-’functie’ . . . . .	32
3.3	Causale functie . . . . .	32
3.4	Exponentiële orde . . . . .	34
3.5	De Lapacetransformatie . . . . .	35
3.5.1	Opmerkingen . . . . .	36
3.5.2	Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties . . . . .	36
3.5.3	Translatie naar rechts . . . . .	38
3.5.4	Dempingsfunctie . . . . .	40
3.5.5	Schaalwijziging . . . . .	41
3.5.6	Laplacegetransformeerde van $f'(t)$ . . . . .	41
3.5.7	Laplacegetransformeerde van $f''(t)$ . . . . .	42
3.5.8	Laplacegetransformeerde van machten van $t$ . . . . .	42
3.5.9	Laplacegetransformeerde van een integraal . . . . .	44
3.5.10	Laplacegetransformeerde van een periodische functie . . . . .	45
3.5.11	De convolutiestelling . . . . .	45
3.5.12	Inverse Lapacetransformatie . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Reeksen</b>	<b>52</b>
4.1	Definities . . . . .	52
4.2	Hoofdeigenschappen . . . . .	53
4.3	Numerieke reeksen . . . . .	54
4.4	De meetkundige reeks . . . . .	55
4.4.1	Convergentieonderzoek . . . . .	55
4.5	Eigenschappen . . . . .	56
4.6	Reeksen met ’uitsluitend’ positieve termen . . . . .	57
4.6.1	Integraalcriterium van Cauchy . . . . .	57
4.6.2	De hyperharmonische reeks . . . . .	58
4.6.3	Vergelijkingscriteria . . . . .	58
4.6.4	Convergentiecriteria . . . . .	60
4.7	Willekeurige reeksen . . . . .	62
4.7.1	Convergentiecriteria van Leibniz . . . . .	62
4.7.2	Nieuwe begrippen . . . . .	63
4.8	Reeksen van functies . . . . .	65
4.8.1	Machtreeksen rond $x = a$ . . . . .	65
<b>III</b>	<b>Oefeningen</b>	<b>67</b>
<b>5</b>	<b>Differentiaalvergelijkingen</b>	<b>68</b>
5.1	Lineaire DVG met constante coëfficiënten . . . . .	69
5.2	Lineaire DVG in $y$ en $y'$ . . . . .	69

<b>6</b>	<b>Laplacetransformatie</b>	<b>70</b>
6.1	De Heaviside functie . . . . .	70
6.2	Functies van de exponentiële orde . . . . .	74
6.3	Laplacebeeld . . . . .	74
6.4	Invers Laplacebeeld . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Reeksen</b>	<b>85</b>

Deel I

Herhaling Wiskunde A

# Hoofdstuk 1

## Onbepaalde Integralen

### 1.1 Substitutiemethode

#### 1.1.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t^2+4} dt &= \int \frac{t}{t^2+4} dt - \int \frac{dt}{t^2+4} \\ \text{stel } u &= t^2+4 \\ \text{dan } du &= 2t dt \rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\ &\Rightarrow \int \frac{t}{2tu} du - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} \\ &= \frac{1}{2} \ln t^2+4 - \frac{1}{2} \arctan \frac{t}{2} + C\end{aligned}$$

#### 1.1.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{e^y+4e^{-y}} &= \int \frac{e^y}{(e^y)^2+4} dy \\ \text{stel } u &= e^y \\ \text{dan } du &= e^y dy \rightarrow dy = \frac{du}{e^y} \\ &\Rightarrow \int \frac{e^y}{e^y(u^2+4)} du \\ &= \int \frac{du}{u^2+4} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{u}{2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan \frac{e^y}{2} + C\end{aligned}$$

## 1.2 Partieële integratie

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

### 1.2.1 Voorbeeld 1

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \int 1 \cdot \ln(x) dx \\ \text{stel } u &= \ln(x) \text{ en } v = \int dx \\ \text{dan } du &= \frac{1}{x} dx \text{ en } v = x \\ &\Rightarrow x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

### 1.2.2 Voorbeeld 2

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{stel } u &= x+1 \text{ en } v = \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx \\ \text{dan } du &= dx \text{ en } v = \tan(x) \\ &\Rightarrow (x+1) \tan(x) - \int \tan(x) dx \\ &= (x+1) \tan(x) + \ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

### 1.2.3 Voorbeeld 3

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) \\ \text{stel } u &= \sin(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= 2 \cos(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) dx \\ \text{stel } u &= \cos(2x) \text{ en } v = \int e^{-x} dx \\ \text{dan } du &= -2 \sin(2x) dx \text{ en } v = -e^{-x} \\ &\Rightarrow -e^{-x} \sin(2x) + 2 \left[ -e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) dx \right] \\ &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \int e^{-x} \sin(2x) dx \\ \Leftrightarrow 5 \int e^{-x} \sin(2x) &= -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] \\ \Leftrightarrow \int e^{-x} \sin(2x) &= \frac{-e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)]}{5}\end{aligned}$$

#### 1.2.4 Voorbeeld 4

$$\begin{aligned}\int \sin^4(\theta) d\theta &= \int (\sin^2(\theta))^2 d\theta \\ &= \int \left( \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^2 d\theta \\ &= \int \left( \frac{1}{4} - \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{\cos^2(2\theta)}{4} \right) d\theta \\ &= \int \frac{1}{4} d\theta - \int \frac{\cos(2\theta)}{2} d\theta + \int \frac{\cos^2(2\theta)}{4} d\theta \\ &= \frac{\theta}{4} - \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\sin(4\theta) + 4\theta}{32} \\ &= \frac{12\theta - 8 \sin(2\theta) + \sin(4\theta)}{32} + C\end{aligned}$$



# Deel II

## Theorie

# Hoofdstuk 2

## Differentiaalvergelijking

### 2.1 Definities

De algemene definitie is:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

waarbij:

- **x** een veranderlijke is.
- **y** een functie van x is.
- er minstens één afgeleide van y is.

---

Voorbeeld: Differentiaalvergelijking

Uitwerking

$$x + y + y' = 0$$

---

Een differentiaalvergelijking heeft een **orde** en een **graad**

- **Orde:** Dit is de orde van de hoogste afgeleide dat voorkomt, dus  $n$ .
- **Graad:** De graad  $r$  bestaat niet altijd maar is wel altijd een strik positief geheel getal. De graad is de macht die behoort tot de afgeleide met de grootste orde.  $y^{(n)^r}$

---

Voorbeeld: Orde en graad

Uitwerking

Differentiaalvergelijking	Orde	Graad
$y - 2y^3 = yx$	2	1
$1 + (y'')^4 + 2y' + x(y''')^2 = \sin(x)$	3	2
$(x - 1)(y'') - xy' + y = 0$	2	1
$e^s \frac{d^3 s}{dt^3} + (\frac{ds^2}{dt^2})^3 = 0$	3	1
$xy' + e^{y'} + y'' = 1$	1	/
$\sin \sqrt{y'} = x + 2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin^2(x + 2)$	1	1
$\sin y' = xy'^2$	1	/
$\rightarrow y' = \arcsin(xy'^2)$	1	/
$y'^3 + \frac{x}{y''} + y'' = 1$	2	?
$\rightarrow y'^3 y'' + x + (y'')^2 = 1$	2	2

## 2.2 Soorten oplossingen

Tijdens het oplossen van een differentiaalvergelijking van de  $n$ -de orde worden drie oplossingen onderscheiden:

1. De **Algemene oplossing (AO)**: Verzameling van functies zodat de differentiaalvergelijking klopt. De algemene oplossing bevat  $n$  onafhankelijke constanten. Deze constanten zijn getallen en geen functies.
2. De **Particuliere oplossing (PO)**: Dit is één van de krommen van de AO en is afhankelijk van de beginvoorwaarden van het probleem.
3. De **Singuliere oplossing (SO)**: Een oplossing die niet voldoet aan de AO maar wel een oplossing is voor de DVG.

Voorbeeld: Onafhankelijke variabelen:

Uitwerking

AO	Onafh. C	Orde DVG
$y = C_1 + C_2 x$	2	2
$y = C_1 - C_1^2 x$	1	1
$y = C_1(C_2 + C_3 e^x)$	?	?
$\rightarrow C_1 C_2 + C_1 C_3 e^x$	?	?
$\rightarrow a + b e^x$	2	2
$y = C_1 + \ln(C_2 x)$	?	?
$\rightarrow y = C_1 + \ln(C_2) + \ln(x)$	?	?
$\rightarrow y = a + \ln(x)$	1	1

---

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking:  $y'' + y = 0$

1. Toon aan dat  $y = a \sin(x) + b \cos(x)$  de AO is.
2. Geef enkele PO's.

### Uitwerking

- 1.

$$\begin{aligned}y &= a \sin(x) + b \cos(x) \\y' &= a \cos(x) - b \sin(x) \\y'' &= -a \sin(x) - b \cos(x)\end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\-a \sin(x) - b \cos(x) + \sin(x) + b \cos(x) &= 0 \\&\rightarrow \text{Het is een oplossing}\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking heeft orde 2. De y-vergelijking bevat 2 onafhankelijke constanten en de y-vergelijking is een oplossing. Hierdoor is y de AO van de differentiaalvergelijking.

2. Enkele PO's:

$$\begin{aligned}y &= 0 \\y &= \sqrt{2} \sin(x) \\y &= \sin(x) + \cos(x)\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Gegeven een differentiaalvergelijking:  $y'^2 - yy' + e^x$

1. Geef de orde en graad.
2. Is  $y = \frac{1}{C} + Ce^x$  de AO?
3. Wat voor soort oplossing is  $y = 2\sqrt{e^x}$

### Uitwerking

1. De orde is 1 en de graad is 2.
- 2.

$$\begin{aligned}y' &= Ce^x \\&\rightarrow C^2(e^x)^2 - \left(\frac{1}{C} + Ce^x\right)Ce^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow C^2e^{2x} - e^x - C^2e^{2x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

$\rightarrow$  Het is een oplossing

Orde DVG = 1 = Onafhankelijke constanten van y

3.

$$\begin{aligned}y' &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{e^x}} \cdot e^x = \sqrt{e^x} \\&\rightarrow y'^2 - yy' + e^x \\&\Leftrightarrow (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} \cdot \sqrt{e^x} + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow e^x - 2e^x + e^x = 0 \\&\Leftrightarrow 0 = 0\end{aligned}$$

Dit is een singuliere oplossing aangezien  $y$  niet overeenkomt met de AO, maar wel voldoet aan de DVG.

---

## 2.3 Bepalen van een DVG

Indien een AO gegeven is met  $n$  onafhankelijke constanten:

1. Controleer of de constanten werkelijk onafhankelijk zijn.
2. Leid de AO  $n$  maal af.
3. Elimineer de  $n$  constanten van de  $n + 1$  bekomen vergelijkingen. De laatste vergelijking moet zeker gebruikt worden.
4. Controleer of de DVG van orde  $n$  is.

---

Voorbeeld: Gegeven de algemene oplossing  $y = C_1 + C_2x$ . Bepaal de DVG.

Uitwerking

1. Er zijn 2 onafhankelijke constanten.
2. Er moet 2 keer afgeleid worden:

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2x \\ y' &= C_2 \\ y'' &= 0 \end{cases}$$

3. De constanten zijn al geëlimineerd.
4. De DVG is  $y'' = 0$  en heeft orde 2.

---

Voorbeeld: Bepaal de DVG indien  $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^{3x}$  de algemene oplossing is.

Uitwerking

1. Er zijn 3 onafhankelijke constanten.

2. Er moet 3 maal afgeleid worden.

$$\begin{cases} y &= C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x} \\ y' &= -C_2 e^{-x} + 3C_3 e^{3x} \\ y'' &= C_2 e^{-x} + 9C_3 e^{3x} \\ y''' &= -C_2 e^{-x} + 27C_3 e^{3x} \end{cases}$$

3. Tel de 1ste afgeleide op met de 2de afgeleide en tel de 2de afgeleide op met de 3de afgeleide

$$\begin{cases} y + y'' &= 3C_3 e^{3x} + 9C_3 e^{3x} = 12C_3 e^{3x} \\ y'' + y''' &= 9C_3 e^{3x} + 27C_3 e^{3x} = 36C_3 e^{3x} \end{cases}$$

Vermenigvuldig de 1ste vergelijking met 3 en trek hiervan de 2de vergelijking af.

$$\begin{aligned} 3(y + y'') - y'' - y''' &= 3(12C_3 e^{3x}) - 36C_3 e^{3x} = 0 \\ \rightarrow y''' - 2y'' - 3y' &= 0 \end{aligned}$$

4. De orde van deze DVG is 3

Voorbeeld: Bepaal de DVG van alle cirkels met middelpunt  $y = -x$ .

Uitwerking

1. Eerst moet de AO gevonden worden. Het middelpunt van elke cirkel kan gegeven worden met  $m(a, -a)$ . Hieruit volgt de algemene vergelijking van een cirkel:

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten (a en R).

2. Er moet 2 maal (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{cases} (x - a)^2 + (y + a)^2 = R^2 \\ \frac{dy}{dx} : (x - a) + y'(y + a) = 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 1 + y''(y + a) + y'^2 = 0 \end{cases}$$

3. Vorm  $\frac{dy}{dx}$  om naar a:

$$a = \frac{-x - yy'}{y' - 1}$$

Substitueer deze a in  $\frac{d^2y}{dx^2}$ :

$$\begin{aligned} 1 + y''(y + (\frac{-x - yy'}{y' - 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow 1 + y''(y + (\frac{x + yy'}{-y' + 1})) + y'^2 &= 0 \\ \rightarrow y''(x + y) - y'^3 + y'^2 - y' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

4. Orde van de DVG = 2 = Aantal onafhankelijke constanten.

---

## 2.4 Oplossen van een lineaire DVG van orde n met constante reële coëfficiënten

$$\begin{aligned}y''' - y'' \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow D^3 y - D^2 y \sin t + ty &= t^2 \\ \Leftrightarrow (D^3 - D^2 \sin t + t)y &= t^2 \\ \Leftrightarrow L(d)y &= g(t) \\ \Leftrightarrow \text{met } L(d) = \sum_{i=0}^n a_i D^i &, a_i \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Een lineaire DVG is een DVG waarbij alle coëfficiënten van alle afgeleiden enkel voorkomen als eerste macht.

### 2.4.1 Particuliere oplossing

De particuliere oplossing kan slechts bepaald worden indien alle beginvoorwaarden  $(y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0))$  gekend zijn.

### 2.4.2 Algemene oplossing

Indien de beginvoorwaarden niet gekend zijn moeten  $y(0), y'(0) \dots y^{(n-1)}(0)$  respectievelijk gelijkgesteld worden aan  $C_1, C_2, \dots, C_n$

---

Voorbeeld: Bepaal de PO van  $y'' + y = g(t)$  indien  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  en

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
L(d)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= g(t) \\
\Leftrightarrow (D^2 + 1)y &= e^{-t}H(t-1) \\
\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\
&= s^2Y - sy(0^+) + y'(0^+) + Y \\
&= s^2Y - 1 + Y \\
\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\{e^{-t}H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{e^{-(t-1)-1}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}\mathcal{L}\{e^{-(t-1)}H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) \\
&= e^{-1}e^{-s}\frac{1}{s+1} \\
&= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1}
\end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow s^2Y - 1 + Y &= \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y(s^2 + 1) &= 1 + \frac{e^{-(s+1)}}{s+1} \\
\Leftrightarrow Y &= \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)} \\
\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-(s+1)}}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
\Leftrightarrow y(t) &= \sin t + e^{-1}f(t-1)H(t-1) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2 + 1)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} - \frac{s-2}{s^2 + 1}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-t} - (\cos t + \sin t)\right]
\end{aligned}$$

$$\text{antwoord: } y(t) = \sin t + \frac{1}{2}\left(e^{-t} - e^{-1}\cos(t-1) + e^{-1}\sin(t-1)\right)H(t-1)$$

---

Voorbeeld: Bepaal de PO van  $y'' + y = \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$  indien  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ ,  $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$   
Uitwerking



Stel:  $y(0^+) = C_1$ ,  $y'(0^+) = C_2$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{LL\}(s) &= \mathcal{L}\{y'' + y\}(s) \\ &= s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{RL\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s) \\ &= \int_0^{+\infty} \delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right) e^{-st} dt \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\end{aligned}$$

dus

$$\Leftrightarrow s^2 Y - sC_1 - C_2 + Y = e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{Y\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s} + sC_1 + C_2}{s^2 + 1}\right\}(t)$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t + f\left(t - \frac{\pi}{2}\right) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\}(t) \\ &= \sin t\end{aligned}$$

$$\text{De algemene oplossing: } y(t) = C_2 \sin t + C_1 \cos t - \left(\cos(t) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

De PO voor  $t = \frac{\pi}{4}$  ( $< \frac{\pi}{2}$  dus Heaviside is 0)

$$\begin{aligned}y(t) &= C_2 \sin t + C_1 \cos t \Rightarrow y\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'(t) &= C_2 \cos t - C_1 \sin t \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{4}\right) : 0 = C_2 \frac{\sqrt{2}}{2} - C_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \begin{cases} 0 = C_2 + C_1 \\ 0 = C_2 - C_1 \end{cases} &\Rightarrow C_2 = C_1 = 0\end{aligned}$$

Het antwoord:

$$y(t) = -(\cos t) H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

## 2.5 DVG van orde 1 en graad 1

### 2.5.1 Gescheiden veranderlijken

Indien een DVG van orde 1 en graad 1 te schrijven is als

$$f(x) dx = g(y) dy$$

Algemeen:

$$\begin{aligned}M(x, y) dx &= -N(x, y) dy \\f(x)g(y) dx &= -h(x)i(y) dy \\ \frac{f(x)}{h(x)} dx &= - \frac{i(y)}{g(y)} dy \\ a(x) dx &= b(y) dy \\ \int a(x) dx &= \int b(y) dy \\ A(x) + C_1 &= B(y) + C_2 \\ A(x) &= B(y) + C\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal de AO van  $yt + \sqrt{1-t^2}y' = 0$

Uitwerking

$$\begin{aligned}yt dt + \sqrt{1-t^2} dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-t^2} dy &= -yt dt \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= - \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ \Leftrightarrow \ln |y| \sqrt{1-x^2} &+ C \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}+C} \\ \Leftrightarrow y &= e^{\sqrt{1-x^2}} e^C \\ \Leftrightarrow y &= De^{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

---

## 2.6 Homogene DVG

Een DVG is homogeen indien:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Indien een DVG homogeen is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Stel  $y = ux$
- $dy = u dx + x du$
- DVG is oplosbaar met gescheiden veranderlijken.

---

Voorbeeld: Bepaal de PO van :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$

waarvoor  $x(1) = 1$ .

Uitwerking

Berekening algemene oplossing

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t(\ln t - \ln x)}$$
$$\Rightarrow t(\ln t - \ln x) dx - x dt = 0$$

$$\Rightarrow t \ln \left( \frac{t}{x} \right) dx - x dt = 0$$

controle homogeen

$$\Rightarrow \lambda t \ln \left( \frac{\lambda t}{\lambda x} \right) - \lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda^1 \left( t \ln \left( \frac{t}{x} \right) - x \right) \quad \text{homogeen want } M(x,t) \text{ en } N(x,t) \text{ hebben } \lambda \text{ tot de eerste macht}$$

substitutie  $t = ux$

$$\Rightarrow u \ln u dx - u dx + x du = 0$$

$$\Rightarrow (u \ln u - u) dx = x du$$

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |x| + \ln |C|$$

$$\Rightarrow \ln |\ln u - 1| = \ln |Cx|$$

$$\Rightarrow \ln u - 1 = Cx$$

$$\Rightarrow \ln u = Cx + 1$$

$$\Rightarrow u = e^{Cx+1}$$

$$\Rightarrow t = xe^{Cx+1}$$

Berekening particuliere oplossing:

$$x(1) = 1$$
$$\Rightarrow 1 = 1e^{C+1}$$
$$\Rightarrow C + 1 = 0$$
$$\Rightarrow C = -1$$
$$\Rightarrow t = xe^{-x+1}$$

---

## 2.7 Exacte (= totale) DVG

Een DVG is exact indien

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Indien een DVG exact is kan volgende oplossingsmethode toegepast worden:

- Zoek  $F(x,y)$  zodat  $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$  en  $\frac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$

---

Voorbeeld: Bepaal alle functie  $f(y)$  zodanig dat de DVG

$$2y \, dx + (x - 4y\sqrt{y}) \, dy = 0$$

na vermenigvuldiging met  $f(y)$  exact wordt. Bepaal daarna haar AO.

Uitwerking

Is deze DVG exact?

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} 2y &= 2 \\ \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y\sqrt{y}) &= 1\end{aligned}$$

Deze DVG is dus niet exact. We moeten een functie  $f(y)$  bepalen zodat deze DVG wel exact wordt.

$$2yf(y) \, dy + (x - 4y\sqrt{y})f(y) \, dy = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} 2yf(y) &= \frac{\partial}{\partial x} (x - 4y^{3/2})f(y) \\ \Rightarrow 2f(y) + 2y \frac{d}{dy} f(y) &= f(y) \\ \Rightarrow 2y \frac{d}{dy} f(y) &= -f(y) \\ \Rightarrow \frac{d}{f(y)} f(y) &= -\frac{dy}{2y} \\ \Rightarrow \int \frac{d}{f(y)} f(y) &= -\int \frac{dy}{2y} \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln |C| \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= -\frac{1}{2} \ln |Cy| \\ \Rightarrow \ln |f(y)| &= \ln |Cy|^{-1/2} \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{1}{\sqrt{Cy}} \\ \Rightarrow f(y) &= \frac{1}{\sqrt{y}} \quad \text{met } C = 1\end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$2\sqrt{y} \, dx + \left( \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) \, dy = 0$$

wat een exacte DVG oplevert. Nu bepalen we de AO.

$$2\sqrt{y} \, dx + \left( \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y \right) \, dy = 0$$

komt overeen met

$$\frac{\partial}{\partial x} F \, dx + \frac{\partial}{\partial y} F \, dy = 0$$

We krijgen volgend stelsel:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 2\sqrt{y} (*) \\ \frac{\partial}{\partial y} F = \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y (**) \end{cases} \\ (*) \frac{\partial}{\partial x} F &= 2\sqrt{y} \\ \Rightarrow F &= \int 2\sqrt{y} \, dx \\ \Rightarrow F &= 2\sqrt{y}x + h(y); \\ (**) \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{x}{\sqrt{y}} - 4y = 2x \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{d}{dy} h(y) \\ \Rightarrow \frac{d}{dy} h(y) &= -4y \\ \Rightarrow h(y) &= \int -4y \, dy \\ \Rightarrow h(y) &= -2y^2 \end{aligned}$$

De AO:

$$F(x, y) = 2\sqrt{y}x - 2y^2$$

---

Voorbeeld: In een vat bevindt zich  $20m^3$  zout-oplossing waarin 1 kg zout opgelost is. Men voert een nieuwe pekeloplossing toe met constante concentratie van  $0,5 \text{ kg zout}/m^3$  en aan een snelheid van  $2m^3/\text{min}$ . De oplossing wordt continu gemengd en loopt onderaan weg met een snelheid van  $1m^3/\text{min}$ . Hoeveel zout bevindt zich in de pekeloplossing na 1 uur?

Uitwerking

Definitie van de variabelen:

- $x$  : # kg zout na  $t$  minuten
- Op  $t = 0$  is  $x(0) = 1$
- $C_i = \frac{1}{2} \text{kg}/m^3$  (Concentratie in)
- $v_i = 2m^3/\text{min}$  (Snelheid in)
- $C_{uit} = \frac{x(t)}{v(t)}$  (Concentratie uit)
- $v_{uit} = 1m^3/\text{min}$  (Snelheid uit)

We zoeken een uitdrukking voor  $dx$ .

- $dx$  = verandering  $x$  gedurende  $dt$  minuten
- $dx$  = hoeveelheid zout binnen gedurende  $dt$  minuten - hoeveelheid zout buiten gedurende  $dt$  minuten

Berekening AO:

$$\begin{aligned}
 dx &= C_i v_i dt - C_{uit} v_{uit} dt \\
 \Rightarrow dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 dt - \frac{x(t)}{V(t)} \cdot 1 dt \quad \text{met } V(t) = 20 + 2t - t = 20 + t \\
 \Rightarrow dx &= dt - \frac{x}{20 + t} dt \\
 \Rightarrow dx + \left( \frac{x}{20 + t} - 1 \right) dt &= 0 \\
 \Rightarrow (20 + t) dx + (x - 20 - t) dt &= 0 \\
 \frac{\partial}{\partial t}(20 + t) = 1 &= \frac{\partial}{\partial x}(x - 20 - t) \Rightarrow \text{exact} \\
 \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t (*) \\ \frac{\partial}{\partial t} F = x - 20 - t (**) \end{cases} \\
 (*) \frac{\partial}{\partial x} F = 20 + t \\
 \Rightarrow F = \int (x - 20 - t) dt \\
 = xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x) \\
 \Rightarrow 20 + t = \frac{\partial}{\partial x} (xt - 20t - \frac{t^2}{2} + h(x)) \\
 \Rightarrow 20 + t = t + \frac{\partial}{\partial x} h(x) \\
 \Rightarrow \frac{d}{dx} h(x) = 20 \\
 \Rightarrow h(x) = \int 20 dx = 20x \\
 \Rightarrow F = xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x \\
 \text{AO: } xt - 20t - \frac{t^2}{2} + 20x = C
 \end{aligned}$$

Bereken PO. Indien  $x(0) = 1$  dan  $C = 20$ . 1 uur = 60 minuten  $\Rightarrow x(60)$

$$\begin{aligned}
 xt + 20x &= 20t + \frac{t^2}{2} + 20 \\
 \Rightarrow x &= \frac{20t + \frac{t^2}{2} + 20}{20 + t} \\
 \Rightarrow x(60) &= 37.75 \text{ kg}
 \end{aligned}$$


---

## 2.8 Lineaire DVG van orde 1

Algemene definitie:

Een DVG is lineair in  $y$  en  $y'$  indien  $y' + P(x)y = Q(x)$

---

Voorbeeld:

$$dy + (y \sin x - \cos x) dx = 0$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} dy + (y \sin x - \cos x) dx &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} + y \sin x - \cos x &= 0 \\ \Rightarrow y' + y \sin x &= \cos x \end{aligned}$$

Lineair in  $y$  en  $y'$

---

Voorbeeld:

$$ds + (1 - 2t)s dt = t^2 dt$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} ds + (1 - 2t)s dt &= t^2 dt \\ \Rightarrow \frac{ds}{dt} + (1 - 2t)s &= t^2 \end{aligned}$$

Lineair in  $s$  en  $s'$

---

### 2.8.1 Oplossingsmethode

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

substitutie  $y = uv$  (vrijheidsgraad toevoegen)

$$\Rightarrow u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$\Rightarrow u(P(x) + v') + u'v = Q(x) \quad (*)$$

stel  $P(x) + v' = 0$  (vrijheidsgraad wegnemen)

$$\text{Bijgevolg: } \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -P(x)v$$

$$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = - \int P(x) dx$$

$$\Rightarrow \ln |v| = - \int P(x) dx$$

$$\Rightarrow v = e^{- \int P(x) dx}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v}$$

$$\Rightarrow du = e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

$$\Rightarrow u = \int e^{\int P(x) dx} Q(x) dx$$

Vervang substitie om AO te bekomen

---

Voorbeeld: Bepaal de AO van

$$(4r^2s - 6) dr + r^3 ds = 0$$

Uitwerking



$$\begin{aligned}
& r^3 \frac{ds}{dr} + 4r^2 s - 6 = 0 \\
\Rightarrow & \frac{ds}{dr} + \frac{4}{r} s = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & s' + P(r)s = Q(r) \\
& \text{substitutie } s = uv \\
\Rightarrow & u'v + uv' + \frac{4}{r} uv = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & u \left( v' + \frac{4}{r} v \right) + u'v = \frac{6}{r^3} \\
& \frac{dv}{dr} = -\frac{4}{r} v \\
& \int \frac{dv}{v} = -4 \int \frac{dr}{r} \\
& \ln |v| = -4 \ln |r| \\
& v = r^{-4} \\
\Rightarrow & \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{6}{r^3} \\
\Rightarrow & \frac{du}{dr} \cdot \frac{1}{r} = 6 \\
\Rightarrow & \int du = \int 6r \, dr \\
\Rightarrow & u = 3r^2 + C \\
& s = uv = (3r^2 + C) \frac{1}{r^4} \\
& s = \frac{3}{r^2} + \frac{C}{r^4} \quad \forall C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$


---

## 2.9 DVG van type Bernouilli

Een DVG is van type Bernouilli indien

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad \text{met } n \in \mathbb{R}$$

### 2.9.1 Oplossingsmethode

Bewijs:

$$\frac{y'}{y^n} + P(x) \frac{y}{y^n} = Q(x)$$

Substitutie:

$$z = \frac{y}{y^n} = y^{1-n}$$

Waaruit volgt:

$$\begin{aligned} z' &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dz} \\ z' &= (1-n)y^{1-n-1}y' \\ &= (1-n)y^{-n}y' \\ &= \frac{(1-n)y'}{y^n} \end{aligned}$$

De DVG wordt:

$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$

Of beter geschreven:

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

De DVG is lineair in z en z'

---

Voorbeeld: Bepaal de AO vanaf

$$xy \, dx = (x^2 - y^4) \, dy$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} xy \, dx + (y^4 - x^2) \, dy &= 0 \\ \Rightarrow xy \frac{dx}{dy} + (y^4 - x^2) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{y^4 - x^2}{xy} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + \frac{y^3}{x} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x &= -y^3 \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Bernouilli in x en x'

$$\Rightarrow x \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x^2 = -y^3$$

stel  $z = x^2$  dus  $z' = 2x \frac{dx}{dy}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dz}{dy} - \frac{1}{y} z &= -y^3 \\ \Rightarrow \frac{dz}{dy} - \frac{2z}{y} &= -2y^3 \\ \text{substitutie } z &= uv \\ \Rightarrow u'v + uv' - \frac{2uv}{y} &= -2y^3 \\ \Rightarrow u(v' - \frac{2v}{y}) + u'v &= -2y^3 \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{2v}{y} \\ \int \frac{dv}{v} &= 2 \int \frac{dy}{y} \\ \ln |v| &= 2 \ln |y| \\ v &= y^2 \\ \Rightarrow \frac{du}{dy} y^2 &= -2y^3 \\ \Rightarrow \int \frac{du}{dy} &= - \int 2y \, dy \\ \Rightarrow u &= -y^2 + C \end{aligned}$$

$z = x^2$  en  $z = uv = y^2(C - y^2)$  De AO wordt:

$$x^2 + y^4 = Cy^2$$

---

## 2.10 Orthogonale krommenbundel

Definitie: elke kromme uit de ene bundel snijdt elke kromme uit de andere bundel loodrecht.

$$\begin{cases} f(x, y, C) = 0 \\ f_{\perp}(x, y, C) = 0 \end{cases}$$

Raaklijn van  $f$  staat loodrecht op raaklijn van  $f_{\perp}$ . Wiskundig wordt dit vertaald door:  $\omega_{RL\perp} = -\frac{1}{\omega_{RL}} = -\frac{1}{y'}$  De DVG van de orthogonale krommenbundel is

$$F_{\perp}\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right)$$

---

Voorbeeld: Bepaal de DVG van de orthogonale krommenbundel van alle raaklijnen aan  $y = x^2$ .

Uitwerking

Elk punt op parabool kan beschreven worden als  $p(a, a^2)$ .

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$\begin{aligned}y - a^2 &= 2a(x - a) \\ \Rightarrow y - a^2 &= 2ax - 2a^2 \\ \Rightarrow y &= 2ax - a^2\end{aligned}$$

2. DVG van de originele krommenbundel

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2 \\ y' = 2a \end{cases} \Rightarrow y = y'x - \frac{y'^2}{4}$$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel  $y'$  wordt  $-\frac{1}{y'}$

$$y = \frac{1}{y'}x - \frac{1}{4} \frac{1}{y'^2}$$

Uiteindelijk:

$$4y'^2y = -4xy' - 1$$

Deze DVG heeft graad 2, wat niet in deze cursus besproken wordt. Het is dus onoplosbaar.

Voorbeeld: Bepaal de orthogonale krommenbundel van alle parabolen met top in de oorsprong en symmetrieas de X-as.

Uitwerking

1. De vergelijking van de originele krommenbundel

$$x = Cy^2$$

2. DVG van de originele krommenbundel. Er is 1 onafhankelijke constanten dus 1 keer afleiden

$$\begin{cases} x = Cy^2 \\ 1 = 2Cyy' \end{cases}$$

Hieruit volgt  $C = \frac{x}{y^2}$  en dus  $1 = \frac{2xy'}{x}$

3. DVG van de orthogonale krommenbundel

$y'$  vervangen door  $-\frac{1}{y'}$  dus

$$1 = -\frac{2x}{yy'} \Leftrightarrow yy' = -2x$$

4. DVG oplossen

$$\begin{aligned}y \frac{dy}{dx} &= -2x \\ \int y \, dy &= - \int 2x \, dx \\ \frac{y^2}{2} &= -x^2 \\ \frac{y^2}{2} + x^2 &= C\end{aligned}$$

Dit zijn dus ellipsen

---

## 2.11 DVG van hogere orde

---

Voorbeeld: Los op

$$y''' = e^{-2x}$$

Uitwerking

$$y''' = e^{-2x}$$

$$y'' = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C_1$$

$$y' = -\int \frac{1}{2}e^{-2x} + C_1 dx = \frac{1}{4}e^{-2x} + C_1x + C_2$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3 \\ &= -\frac{1}{8}e^{-2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3 \end{aligned}$$

---

### 2.11.1 DVG van orde 2 van type $F(x, y', y'') = 0$

Bewijs oplossingsmethode:

Stel  $y' = p$ , dan wordt  $y'' = \frac{dp}{dx}$ . De differentiaalvergelijking wordt  $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ . Dit is een dvg van orde 1 in  $p$  en  $x$ .

---

Voorbeeld: Bepaal de AO van  $xy'' = y' - x$

Uitwerking

$xy'' = y' - x$  komt overeen met  $F(x, y', y'')$

Stel  $y' = p \rightarrow y'' = x \frac{dp}{dx} = p - x$  waaruit volgt dat  $x dp = (p - x) dx$ . Dit is homogeen ( $\lambda^{(1)}$ ) dus we stellen  $p = ux$

$$x(u dx + x du) = (ux - x) dx$$

$$u dx + x du = (u - 1) dx$$

$$x du = -dx;$$

$$du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u = \ln|x| + C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = -x \ln|x| + C_1x$$

$$\int dy = -\int x \ln|x| + C_1x dx$$

Het Antwoord is:

$$y = \frac{-x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + \frac{C_1}{2}x^2 = \frac{-x^2}{2} \ln|x| + \frac{x^4}{4} - C_2 + C_1x^2$$

---

### 2.11.2 DVG van orde 2 van type $F(y, y', y'') = 0$

Bewijs oplossingsmethode:

Stel  $y' = p$ , dan wordt  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp/dy}{dx/dy} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ . De differentiaalvergelijking wordt  $F(y, p, p \frac{dp}{dy}) = 0$ . Dit is een dvg van orde 1 in  $p$  en  $y$ .

---

Voorbeeld: Bepaal de PO van  $(1-y)^2 y'' - y'^3 = 0$  met  $y(0) = 2$  en  $y'(0) = 1$

Uitwerking

Stel  $y' = p \rightarrow y'' = p \frac{dp}{dy}$

$$(1-y)^2 p \frac{dp}{dy} - p^3 = 0$$

$$(1-y)^2 \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

$$(1-y)^2 \frac{dp}{dy} = p^2$$

$$\frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$\int \frac{dp}{p^2} = \int \frac{dy}{(1-y)^2}$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{1-y} + C_1$$

$$C_1 = 0 \quad \text{aangezien } p(0) = 1 \text{ en } y(0) = 2$$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y-1}$$

$$\begin{cases} dx = \frac{dy}{y-1} \\ x = \ln|y-1| + C_2 \\ 0 = \ln|1| + C_2 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \ln|y-1|$$

$$e^x = y-1$$

$$y = e^x + 1$$

---

## 2.12 Stellingen voor lineaire differentiaalvergelijkingen

Voor geen enkele stelling is het bewijs te kennen

### 2.12.1 Stelling 1

Is  $L(D)y = 0$  een lineaire homogene DVG van  $n^{de}$  orde en  $y_i(x), i = 1, \dots, n$  n onafhankelijke PO's van  $L(D)y = 0$  dan is  $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \dots + C_ny_n(x)$  de AO van  $L(D)y = 0$

### 2.12.2 Stelling 2

Indien  $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_m^{n-1} \end{vmatrix} = 0$ , dan zijn de PO's van  $L(D)y = 0$  lineair onafhankelijk.

### 2.12.3 Stelling 3

Indien  $L(D)y = 0$  een lineaire DVG van  $n^{de}$  orde,  $y_1(x)$  een PO van  $L(D)y = Q(x)$  en  $y_2(x)$  de AO van  $L(D)y = 0$  dan is  $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$  de AO van  $L(D)y = Q(x)$

# Hoofdstuk 3

## Laplacetransformatie

### 3.1 De Heaviside functie

De Heaviside functie heeft als voorschrift:

$$H(t - a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

---

Voorbeeld: Teken over  $x = [-3, 4]$  de functie  $y = 2H(t + 2) - tH(t) + (t + t^2)H(t - 2)$

Uitwerking

Er zijn veranderingen bij  $t = -2, t = 0$  en  $t = 2$ .

$2 \cdot (0) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 0$	$t < -2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (0) + (t + t^2) \cdot (0) = 2$	$-2 < t < 0$	<i><b>_TODO: graph</b></i>
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (0) = 2 - t$	$0 < t < 2$	
$2 \cdot (1) - t \cdot (1) + (t + t^2) \cdot (1) = 2 + t^2$	$t > 2$	

---

Voorbeeld: Schrijf met behulp van de Heaviside functie de stuksgewijze continue functie:

$$f(t) = \begin{cases} e^t & t < 2 \\ 1 - e^t & 2 < t < 3 \\ t^2 & 3 < t < 5 \\ t - 25 & t > 5 \end{cases}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} f(t) &= e^t + H(t - 2)(-e^t + 1 - e^t) + H(t - 3)(-1 + e^t + t^2) + H(t - 5)(-t^2 + t - 25) \\ &= e^t + (1 - 2e^t)H(t - 2) + (t^2 + e^t - 1)H(t - 3) - (t^2 - t + 25)H(t - 5) \end{aligned}$$

---



## 3.2 De Dirac delta-'functie'

De Dirac delta-functie heeft als voorschrift:

$$\begin{cases} \delta(t-a) = 0 & t \neq a \\ \int_{a-\epsilon_1}^{a+\epsilon_2} \delta(t-a) dt = 1 & \forall \epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \end{cases}$$

De meetkundige betekenis: We nemen de limiet van  $\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t)$  voor  $\epsilon_1, \epsilon_2 \rightarrow 0$

$$\delta_{\epsilon_1, \epsilon_2}^a(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < a - \epsilon_1 \text{ of } t > a + \epsilon_2 \\ \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} & \forall t \in ]a - \epsilon_1, a + \epsilon_2[ \end{cases}$$

Het nut van de Dirac functie is om bepaalde integralen op te lossen. Meer bepaald de integralen van de vorm:

$$\int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$$

De ondergrens 0 mag ook vervangen worden door  $-\infty$  aangezien elke functie causaal is binnen het domein van Laplace.

De afgeleide van de Heaviside functie is gelijk aan de delta functie:

$$\frac{d}{dt} H(t-a) = \delta(t-a)$$

---

Voorbeeld:

$$\int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt$$

Uitwerking

In dit geval is  $f(t) = (2 \sin t - 1)$  en  $\delta(t-a) = \delta(t - \frac{3\pi}{2})$ . We kunnen dus makkelijk deze integraal oplossen door gebruik te maken van de definitie:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt &= \int_0^{+\infty} (2 \sin t - 1) \delta(t - \frac{3\pi}{2}) dt \\ &= f(\frac{3\pi}{2}) - 1 \\ &= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 1 \\ &= -2 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

---

## 3.3 Causale functie

Een causale functie is een functie  $f$  waarvoor  $f(t) = 0$  voor elke  $t < 0$ . Om een willekeurige functie causaal te maken voeg je de Heaviside functie achteraan toe.

$$f(t) \rightarrow f(t)H(t)$$

Dit zorgt ervoor dat voor elke  $t < 0$  dat  $f(t) = 0$ . De afspraak is dat deze Heaviside functie nu achter elke functie komt zonder dat we deze nog schrijven. Elke functie is vanaf nu dus causaal.

---

Voorbeeld: Teken de causale functie  $f(t)$  gedefinieerd als: -2 indien  $t < 1$  en 2 als  $t > 1$ . Schrijf ze ook met behulp van de Heaviside functie

Uitwerking

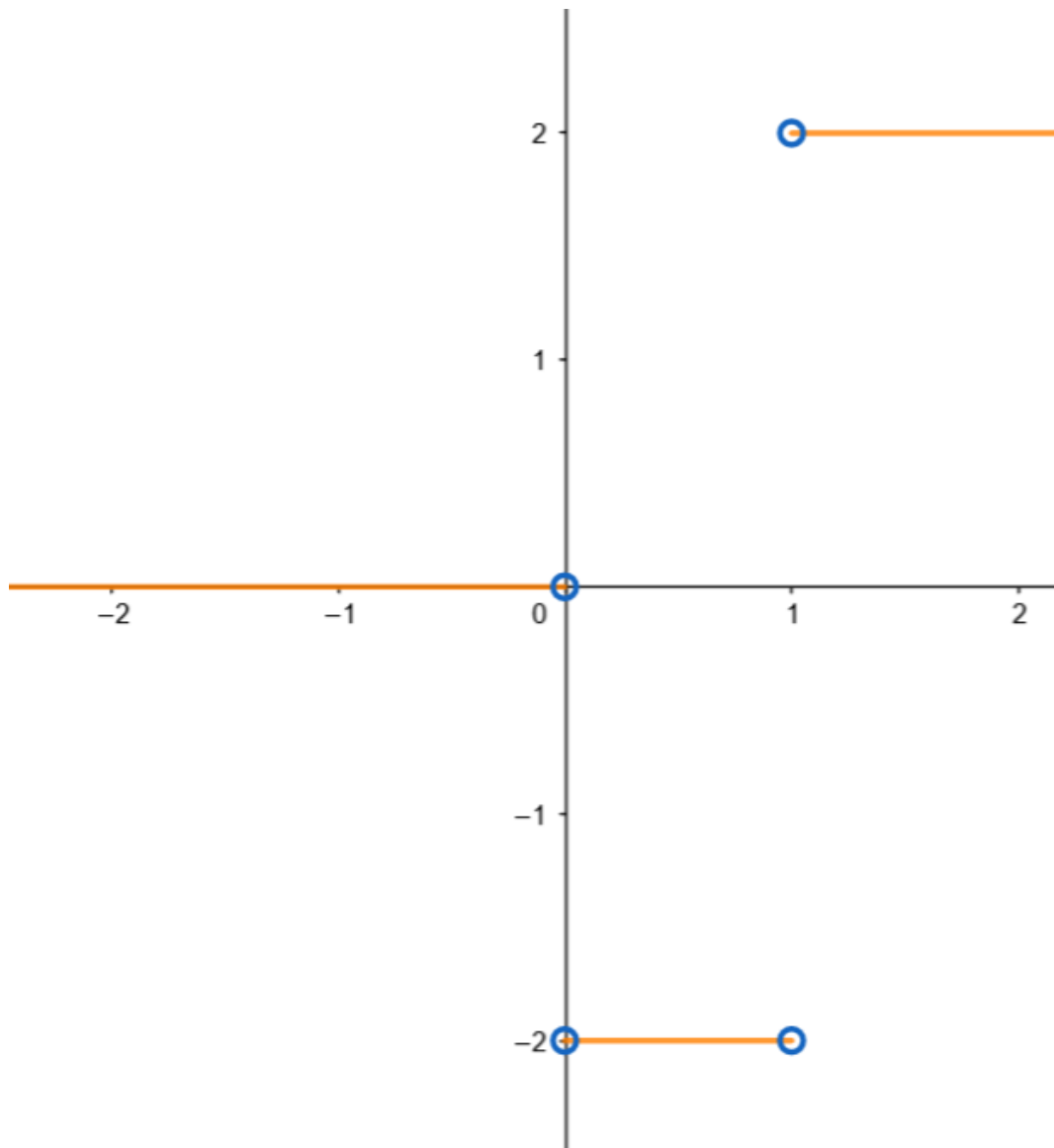
De functie kan omschreven worden als:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -2 & 0 < t < 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases}$$

Omgevormd met de Heaviside-functie:

$$\begin{aligned} f(t) &= H(t)(-0 + (-2)) + H(t - 1)(-2 + 2) \\ &= -2H(t) + 4H(t - 1) \end{aligned}$$

Tekening:



### 3.4 Exponentiële orde

Een functie is van exponentiële orde indien  $\exists M, a \in \mathbb{R}$  zodat  $|f(t)| < Me^{at}, \forall t > N$  en met  $a$  het minimum van de waarden waarvoor dit geldt. Indien waar is  $f(t)$  van exponentiële orde  $a$ . Soms is het gemakkelijker te bewijzen via:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} \in \mathbb{R}$$

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van  $\sin t$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
|\sin t| &\leq 1 \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1 \text{ (willekeurige waarde)} \\
\Leftrightarrow |\sin t| &< 1.1e^{at}
\end{aligned}$$

Hieruit kan afgeleid worden dat  $a = 0$  en de exponentiële orde is dus ook 0.

Voorbeeld: Bepaal de exponentiële orde van  $(1 + 2t)e^{-t}$

Uitwerking

Bij deze opgave maken we gebruik van de limietstelling.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|f(t)|}{e^{at}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|(1 + 2t)e^{-t}|}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + 2t)e^{-t}}{e^{at}} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{at}e^t} \\
&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}}
\end{aligned}$$

We moeten een onderscheid maak tussen 2 gevallen:

- $a + 1 < 0 \rightarrow e^{-\infty} = 0 \rightarrow \frac{+\infty}{0} \rightarrow$  onbepaald
- $a + 1 > 0 \rightarrow e^{+\infty} = \infty \rightarrow \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow$  L'Hopital

We maken enkel gebruik van het tweede geval en passen dus L'hospital toe.

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2t}{e^{t(a+1)}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^{t(a+1)}(a + 1)} \\
&= \frac{2}{+\infty} = 0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aangezien het een reële uitkomst is kan  $a$  uit de uitdrukking  $a + 1 > 0$  afgeleid worden.

$$\forall a, a > -1$$

De exponentiële orde is dus -1.

## 3.5 De Laplacetransformatie

Definitie: Stel  $f(t)$  causaal dan is de laplacetransformatie van  $f(t)$  een functie die een complex getal  $s$  afbeeldt op

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt, s \in \mathbb{C}$$

Een voorbeeld uit het formularium:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1 + s^2}$$

De letter  $s$  kan eender welk complex getal zijn:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(2) = \frac{1}{1+4}$$

Indien er een imaginaire eenheid is verandert de definitie minimaal:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(3+2j) = \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}| dt$$

Het argument tussen de  $|\dots|$  is NIET de absolute waarde, maar de MODULUS van het complexe getal, te berekenen via  $\sqrt{x^2+y^2}$  indien het complexe getal gedefinieerd wordt als  $s = x + yj$  (wat vanaf nu als definitie gebruikt wordt voor een complex getal).

### 3.5.1 Opmerkingen

1.

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)|e^{-xt}, \quad s = x + yj$$

want

$$\begin{aligned} |f(t)e^{-st}| &= |f(t)e^{-(x+yj)t}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-(xt+yjt)}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt} \cdot e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot |e^{-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\ &= |f(t)| \cdot e^{-xt} \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\ &= |f(t)|e^{-xt} \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\ &= |f(t)|e^{-xt} \end{aligned}$$

2.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

De Laplace van een som is gelijk aan de som van een Laplace.

### 3.5.2 Laplacegetransformeerde van enkele basisfuncties

•

$$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{at}e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(a-s)} dt \\ &= \left. \frac{e^{t(a-s)}}{a-s} \right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-s} \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} - 1 \right) \end{aligned}$$

Uitwerking van de limiet:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(a-s)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-st}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-(x+yj)t}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt} \cdot e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |e^{-yjt}| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{at-xt}| \cdot |\cos(-yt) + j \sin(-yt)| \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} \cdot \sqrt{\cos^2(-yt) + \sin^2(-yt)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at-xt} = e^{-\infty} = 0
 \end{aligned}$$

Deze uitkomst in de oorspronkelijke vergelijking steken:

$$\frac{1}{a-s}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

•

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2}$$

Bewijs: We vertrekken van de uitkomst van vorig bewijs. Beschouw  $a = wj$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{wj t}\}(s) &= \frac{1}{s - wj} \\
 &= \frac{1}{s - wj} \cdot \frac{s + wj}{s + wj} \\
 &= \frac{s + wj}{s^2 + w^2} \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) + \mathcal{L}\{j \sin(\omega t)\}(s) \\
 &= \frac{s}{s^2 + w^2} + \frac{w}{s^2 + w^2} j
 \end{aligned}$$

dus

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega^2 + s^2} \quad \text{en} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$$

•

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) = 1$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\delta(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\delta(t-0)\}(s) \\
 &= \int_0^{+\infty} \delta(t-0) e^{-st} dt \\
 &= f(0) = e^{-s \cdot 0} = e^0 = 1
 \end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\cos(2t - 1)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(2t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos(2t)\cos(1) + \sin(2t)\sin(1)\}(s) \\ &= \cos(1)\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \sin(1)\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) \\ &= \cos(1)\frac{s}{s^2 + 4} + \sin(1)\frac{2}{s^2 + 4} \\ &= \frac{s\cos(1)}{s^2 + 4} + \frac{2\sin(1)}{s^2 + 4}\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\sinh(4t) - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2} - 3\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{4t} - e^{-4t}}{2}\right\}(s) - 3\mathcal{L}\left\{\cos\left(\frac{t}{3}\right)\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - 3\frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - 4} - \frac{1}{s + 4}\right) - \frac{27s}{9s^2 + 1}\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\cos(4t)e^{2t}\right\}(s) &= \int_0^{+\infty} \cos(4t)e^{2t}\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{-st} dt \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)e^{2 \cdot \frac{\pi}{2}}e^{-s \cdot \frac{\pi}{2}} \\ &= \cos(2\pi)e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}} \\ &= e^{\pi}e^{-\frac{s\pi}{2}}\end{aligned}$$

---

### 3.5.3 Translatie naar rechts

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t - a)H(t - a)\}(s) = e^{-as}F(s) \quad a > 0$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_0^a f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= 0 + \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&= \int_a^{+\infty} f(t-a)H(t-a)e^{-st} dt \\
&\quad \text{stel } u = t - a \\
&\quad \text{dan } du = dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s(u+a)} du \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa} du \\
&= e^{-sa} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-su} du \\
&= e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \\
&= e^{-as} F(s)
\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $f(t) = (t^2 - 1)H(t - 1) - \sin(3t)H(t - \pi)$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s)$$

We werken beide laplacetransformaties afzonderlijk uit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t - 1)^2 + 2(t - 1)]H(t - 1)\}(s) \\
&= e^{-as} \mathcal{L}\{t^2 + 2t\}(s) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2!}{s^3} + 2 \frac{1!}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} \right) \\
&= e^{-s} \left( \frac{2(1 + s)}{s^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) &= \mathcal{L}\{-\sin(3(t - \pi))H(t - \pi)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \mathcal{L}\{\sin(3t)\}(s) \\
&= -e^{-\pi s} \frac{3}{s^2 + 9} \\
&= -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}
\end{aligned}$$



Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{(t^2 - 1)H(t - 1)\}(s) - \mathcal{L}\{\sin(3t)H(t - \pi)\}(s) \\ &= e^{-s} \left( \frac{2(1+s)}{s^3} \right) - \left( -\frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9} \right) \\ &= e^{-s} \left( \frac{2(1+s)}{s^3} \right) + \frac{3e^{-\pi s}}{s^2 + 9}\end{aligned}$$


---

### 3.5.4 Dempingsfunctie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\}(s) = F(s + a)$$


---

Voorbeeld: Bepaal het laplacebeeld van  $f(t) = t(t^3 - 1)^2e^{-t} + \sin(\sqrt{3}t)e^{2t}$

Uitwerking

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s)$$

Ook hier beschouwen we beide laplacetransformaties apart.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{(t^7 - 2t^4 + t)e^{-t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t^7 - 2t^4 + t\}(s + 1) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{2 \cdot 4!}{(s + 1)^5} + \frac{1!}{(s + 1)^2} \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)\}(s - 2) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{(s - 2)^2 + 3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$

Het resultaat wordt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t(t^3 - 1)^2e^{-t}\}(s) + \mathcal{L}\{\sin(\sqrt{3}t)e^{2t}\}(s) \\ &= \frac{7!}{(s + 1)^8} - \frac{48}{(s + 1)^5} + \frac{1}{s^2 + 2s + 1} + \frac{\sqrt{3}}{s^2 - 2s + 7}\end{aligned}$$


---

### 3.5.5 Schaalwijziging

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(at)\}(s) &= \int_0^{+\infty} f(at)e^{-st} dt \\ \text{stel } u &= at \\ \text{dan } du &= a dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-s\frac{u}{a}} \frac{du}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(u)e^{-\frac{s}{a}u} du \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}\{f(u)\}\left(\frac{s}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Gegeven  $\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$ . Bepaal  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(\omega t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\ &= \frac{1}{\omega} \mathcal{L}\{\sin t\}\left(\frac{s}{\omega}\right) \\ &= \frac{1}{\omega} \frac{1}{\frac{s^2}{\omega^2} + 1} \\ &= \frac{\omega}{\omega^2\left(\frac{s^2}{\omega^2} + 1\right)} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

---

### 3.5.6 Laplacegetransformeerde van f'(t)

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\}(s) = sF(s) - f(0^+), \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

---

Voorbeeld: Gegeven  $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ . Bepaal  $\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)$ .

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d[\sin \omega t]}{dt}\right\}(s) \\ &= s\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) - \sin \omega \cdot 0 \\ &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\omega \cos \omega t\}(s) &= s \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \Leftrightarrow \omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \omega \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) &= \frac{s}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$


---

### 3.5.7 Laplacegetransformeerde van $f''(t)$

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \dots - sf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$


---

Voorbeeld: Gegeven  $g(t) = te^{-t}$ , bepaal  $\mathcal{L}\{g''(t)\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{d^2g}{dt^2}\right\}(s) \\ &= s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) \\ \text{met } G(s) &= \mathcal{L}\{te^{-t}\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{t\}(s+1) \\ &= \frac{1}{(s+1)^2} \\ \text{en } g'(t) &= -te^{-t} + e^{-t} \\ &= e^{-t}(1-t) \\ \Rightarrow s^2G(s) - sg(0^+) - g'(0) &= s^2 \frac{1}{(s+1)^2} - s \cdot 0 - 1 \\ &= \frac{-2s-1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$


---

### 3.5.8 Laplacegetransformeerde van machten van $t$

Definitie:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \\ \frac{dF}{ds} &= \int_0^{+\infty} -tf(t)e^{-st} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} tf(t)e^{-st} dt \\ &= -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) \\ \frac{d^2F}{ds^2} &= - \int_0^{+\infty} (-t)tf(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^2f(t)e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}\{t^2f(t)\}(s) \end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal  $\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t \sin t - t^3 e^{-t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) - \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) \\
*) \mathcal{L}\{t \sin t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d\mathcal{L}\{\sin t\}(s)}{ds} \\
&= -\frac{d\left(\frac{1}{1+s^2}\right)}{ds} \\
&= -\left(\frac{-2s}{(1+s^2)^2}\right) \\
&= \frac{2s}{(1+s^2)^2} \\
**) \mathcal{L}\{t^3 e^{-t}\}(s) &= (-1)^3 \frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\mathcal{L}\{e^{-t}\}}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3\left(\frac{1}{s+1}\right)}{ds^3} \\
&= -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} \\
\frac{dF}{ds} &= -(s+1)^{-2} \\
\frac{d^2F}{ds^2} &= 2(s+1)^{-3} \\
\frac{d^3F}{ds^3} &= -6(s+1)^{-4} \\
\Rightarrow -\frac{d^3[(s+1)^{-1}]}{ds^3} &= -(-6(s+1)^{-4}) \\
&= \frac{6}{(s+1)^4} \\
* - ** &= \frac{2s}{(1+s^2)^2} - \frac{6}{(s+1)^4}
\end{aligned}$$


---

### 3.5.9 Laplacegetransformeerde van een integraal

Definitie:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) du\right\}(s) = \frac{1}{s}F(s) \forall s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > a$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}g(t) &= \int_0^t f(u) \, du \\g'(t) &= f(t) \\g'(0) &= 0 \\\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\}(s) &= sG(s) - g(0^+) \\\Rightarrow \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= s\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s) - 0 \\\Rightarrow \frac{1}{s}F(s) &= \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) \, du\right\}(s)\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal  $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\}$

Uitwerking

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos \omega t \, dt\right\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) \\&= \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + \omega^2} \\&= \frac{1}{s^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

---

### 3.5.10 Laplacegetransformeerde van een periodische functie

Definitie:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) \, dt$$

*\_TODO: slide 19*

### 3.5.11 De convolutiestelling

Definitie:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u) \, du$$

Hieruit volgt:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

Bewijs(niet te kennen)

---

Voorbeeld: Gegeven  $f(t) = e^{at}$  en  $g(t) = e^{bt}$ . Illustreer de juistheid van deze rekenregel.

Uitwerking

$$\begin{aligned}
f(t) * g(t) &= e^{at} e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{au} e^{b(t-u)} du \\
&= \int_0^t e^{au} e^{bt} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{au} e^{-bu} du \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{u(a-b)} du \\
&= e^{bt} \left[ \frac{e^{u(a-b)}}{a-b} \right]_0^t \\
&= \frac{e^{bt}}{a-b} [e^{t(a-b)} - 1] \\
&= \frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt}) \\
\Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})\right\}(s) &= \frac{1}{a-b} \mathcal{L}\{(e^{at} - e^{bt})\}(s) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b} \right) \\
&= \frac{1}{a-b} \left( \frac{(s-b) - (s-a)}{(s-a)(s-b)} \right) \\
&= \frac{1}{s-a} \frac{1}{s-b} \\
&= \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) \mathcal{L}\{e^{bt}\}(s)
\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bereken  $H(t) * H(t) * H(t)$ .

Uitwerking

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) &= (H * H)(t) \\
&= \int_0^t H(u) H(t-u) du \\
\text{aangezien } 0 \leq u \leq t & \\
\Rightarrow H(u) &= 1 \\
\Rightarrow H(t-u) &= 1 \\
&= \int_0^t du \\
&= [u]_0^t \\
&= t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(t) * H(t) * H(t) &= (H * H)(t) * H(t) \\
&= t * H(t) \\
&= \int_0^t uH(t-u) du \\
&= \left[ \frac{u^2}{2} \right]_0^t \\
&= \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$


---

### 3.5.12 Inverse Laplacetransformatie

Definitie:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) \quad \text{indien} \quad \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$


---

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 + 2s + 1}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1)}{s(s-1)(s-2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow s^2 + 2s + 1 &= a(s-1)(s-2) + bs(s-2) + cs(s-1) \\
\text{als } s = 0 : a &= \frac{1}{2} \\
\text{als } s = 1 : b &= -4 \\
\text{als } s = 2 : c &= \frac{9}{2} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/2}{s} + \frac{-4}{s-1} + \frac{9/2}{s-2}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2} + (-4e^t) + \frac{9}{2}e^{2t} \\
&= \frac{1}{2}(1 - 8e^t + 9e^{2t})
\end{aligned}$$


---

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}$$

Uitwerking



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 2}{2s^2 + 4s + 10}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{2s + 7}{2s^2 + 4s + 10}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{s^2 + 2s + 5}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 7/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{(s + 1) + 5/2}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 4}\right\} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - \cos(2t)e^{-t} - \frac{5}{2} \sin(2t)e^{-t} \\
&= \frac{1}{2} \delta(t) - e^{-t} \left( \cos 2t + \frac{5}{2} \sin 2t \right)
\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het invers laplacebeeld van

$$\frac{e^{-\pi s}}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} \cdot e^{-\pi s}\right\}(t) \\
&= f(t-\pi)H(t-\pi) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)} &= \frac{a}{s+1} + \frac{b+cs}{s^2+2s+2} \\
&= \frac{a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \\
\Rightarrow 1 &= a(s^2+2s+2) + (b+cs)(s+1) \\
\begin{cases} 2a+b=1 \\ 2a+b+c=0 \\ a+c=0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \\
\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s^2+2s+2)}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+2s+2}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right\}(t) \\
&= e^{-t} - \cos(t)e^{-t} \\
&= e^{-t}(1 - \cos t) = f(t) \\
\text{ANTWOORD } &\Rightarrow e^{-(t-\pi)}(1 - \cos(t-\pi))H(t-\pi) \\
&= e^{\pi-t}(1 + \cos t)H(t-\pi)
\end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Bepaal het inverse laplacebeeld van

$$\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
\text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)^6}\right\}(t) \\
&= g(t)e^{3t} \\
\text{met } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{5!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\}(t) \\
&= \frac{t^5}{5!} \\
f(t) &= g(t)e^{3t} \\
&= \frac{t^5 e^{3t}}{5!} \\
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{2s}}{(s-3)^6}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\
&= \frac{(t-2)^5 e^{3(t-2)}}{5!}H(t-2)
\end{aligned}$$


---

Voorbeeld: Bereken  $(H * H * H * H*)(t)$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
(H * H * H * H*)(t) &= \frac{1}{s^4} \\
&= \frac{1}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\
&= \frac{t^3}{6}
\end{aligned}$$


---

Voorbeeld: Bereken:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$$

Uitwerking

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{1}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)}\frac{2}{(s^2+4)}\right\}(t) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 2t * \cos 2t) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2u \cos[2(t-u)] du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(2u - [2(t-u)]) + \sin(2u + [2(t-u)]) du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^t \sin(4u - 2t) + \sin 2t du \\
&= \frac{1}{4}\left[\int_0^t \sin(4u - 2t) du + \int_0^t \sin 2t du\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\cos(4u - 2t)\right]_0^t + \frac{1}{4}\left[u \sin 2t\right]_0^t \\
&= \frac{1}{16}\left(-\cos 2t + \cos(-2t)\right) + \frac{1}{4}t \sin 2t \\
&= \frac{1}{4}t \sin 2t
\end{aligned}$$


---

# Hoofdstuk 4

## Reeksen

### 4.1 Definities

Rij  $[a_n] = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  met  $a_n$  de algemene term.

$$[a_n] = \begin{cases} \text{convergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ? \end{cases}$$

---

Voorbeeld:

$$\left[ \ln\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

Uitwerking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(0^+) = -\infty$$

Dus divergent naar  $-\infty$ .

---

Voorbeeld:

$$\left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

Uitwerking

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1^\infty$$

Dit is een onbepaaldheid. We maken gebruik van het getal  $e$ .

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{n}\right)\right)^{n(-1)} = e^{-1}$$

Dus convergent.

---

Voorbeeld:

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots, \dots$$

Uitwerking

Bepaal de algemene term:  $a_n = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot 0 = 0$$

Dus convergent.

---

Voorbeeld:

$$[(-2)^n]$$

Uitwerking

$$[(-2)^n] = -2, 4, -8, 16, -32, \dots$$

De laatste term is ofwel positief ofwel negatief. De limiet bestaat niet dus deze reeks is divergent.

---

## 4.2 Hoofdeigenschappen

Een stijgende rij naar boven begrensd is convergent. Een dalende rij naar onder begrensd is convergent.

In symbolen:

$$a_n \uparrow, \forall n \quad a_n \leq b \rightarrow \text{convergent}$$

$$a_n \downarrow, \forall n \quad b \leq a_n \rightarrow \text{convergent}$$

---

Voorbeeld:

$$\left[ \frac{2n-1}{n} \right]$$

Uitwerking

Als  $n$  stijgt zal  $\frac{1}{n}$  dalen.  $2 - \frac{1}{n}$  stijgt dus. Er kan besloten worden dat voor alle  $n$  dat  $2 - \frac{1}{2} \leq 2$ . Deze reeks convergeert

---

Voorbeeld:

$$\left[ \sin \frac{1}{n} \right]$$

Uitwerking

Als  $n$  stijgt zal  $\frac{1}{n}$  dalen.  $\sin \frac{1}{n}$  daalt dus. Er kan besloten worden dat voor alle  $n$  dat  $\sin \frac{1}{n} \geq 0$ . Deze reeks convergeert.

---

## 4.3 Numerieke reeksen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

waarbij

- $S_1 = a_1$
- $S_2 = a_1 + a_2$
- $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
- $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$$\sum a_n = \begin{cases} \text{convergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{R} \\ \text{divergent naar } \infty \text{ als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \\ \text{divergent als } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = ? \end{cases}$$

---

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

Uitwerking

Uitschrijven van een aantal partiële sommen:

- $n = 2: S_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $n = 3: S_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$
- $n = 4: S_3 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$
- $n = 5: S_4 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}}$

Hieruit volgt dat

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

Berekening van de limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 0 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

De reeks convergeert.

---

Voorbeeld: Bewijs dat de volgende reeks convergent of divergent is:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Uitwerking

Uitschrijven van een aantal partiële sommen:

- $n = 0$ :  $S_1 = 1$
- $n = 1$ :  $S_2 = 1 - 1 = 0$
- $n = 2$ :  $S_3 = 0 + 1 = 1$
- $n = 3$ :  $S_4 = 1 - 1 = 0$

Hieruit volgt dat

$$S_{2n} = 0 \quad \text{en} \quad S_{2n+1} = 1$$

De limiet bestaat niet dus de reeks divergeert.

---

## 4.4 De meetkundige reeks

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots$$

### 4.4.1 Convergentieonderzoek

We weten dat

$$S_n = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

We moeten de limiet van  $S_n$  berekenen. We onderscheiden twee gevallen:

- $q \neq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} (1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^n)$$

als  $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$  dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q} (1 - 0) = \frac{1}{1 - q} \in \mathbb{R}$   
Convergent

als  $|q| > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$  dus  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$   
Divergent naar  $+\infty$

als  $q \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = ?$   
Divergent

- $q = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$$

$$S_n = n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

Divergent naar  $+\infty$



Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ q \geq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \rightarrow \text{Divergent} \end{cases}$$

Voorbeeld: Convergeert de reeks  $-2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \dots$  en indien convergent, naar welke reekssom?

Uitwerking

Herschrijf de reeks:

$$-2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots\right)$$

Dit komt overeen met

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

Dit is een meetkundige reeks met  $q = -\frac{1}{3}$ . Het is duidelijk dat  $|q| < 1$  dus de reeks convergeert. De reekssom is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -2 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}$$

---

## 4.5 Eigenschappen

- De convergentie of divergentie verandert niet door het weglaten of bijvoegen van een eindig aantal termen.
- Als een reeks  $\sum a_n$  convergeert naar  $S$  dan convergeert de reeks  $\sum k a_n$  naar  $kS$
- Indien  $\sum a_n$  convergeert dan geldt dat:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$   
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$  divergent

---

Voorbeeld: Bewijs convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n$$

Uitwerking

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-5}{2n-7}\right)^n &= 1^\infty \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n-7}\right)^{n \frac{2n-7}{2} \cdot \frac{2}{2n-7}} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-7}} \\ &= e \neq 0 \end{aligned}$$

De reeks is divergent naar  $+\infty$

---

## 4.6 Reeksen met 'uitsluitend' positieve termen

Dit zijn reeksen waarbij:

- Een eindig aantal negatieve termen weggelaten mogen worden.
- Reeksen met uitsluitend negatieve termen kunnen vermenigvuldigd worden met -1.

### 4.6.1 Integraalcriterium van Cauchy

Indien

$$a_n \geq 0$$

en

$$f(x) = f(n)$$

waarbij  $f(x)$  dalend en continu is over  $[m, +\infty[$  dan geldt er

$$\begin{aligned} \int_m^\infty f(x) dx \in \mathbb{R} &\Rightarrow \sum a_n \quad \text{convergent} \\ \int_m^\infty f(x) dx = \infty &\Rightarrow \sum a_n \quad \text{divergent naar } \infty \end{aligned}$$

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n}$$

Uitwerking

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$$

We bepalen het gebied waar  $f(x)$  continue en dalend is. We berekenen de afgeleide:

$$f'(x) = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}$$

Uit tekenonderzoek kan afgeleid worden dat  $f(x)$  continu en dalend is vanaf  $e^2$ . Kies  $m \geq e^2$ . Pak een gemakkelijk getal, zoals  $m = 9$

$$\begin{aligned} \int_9^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx &= \left[ \frac{\ln^3 x}{3} \right]_9^{+\infty} \\ &= \frac{+\infty}{+\infty} - \frac{\ln^3 9}{3} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

De reeks divergeert naar  $+\infty$ .

---

### 4.6.2 De hyperharmonische reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

#### Convergentieonderzoek

- $p \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-p} = +\infty$  De reeks divergeert naar  $+\infty$
- $p > 0$  We gebruiken het Integraalcriterium van Cauchy want

$$\sum a_n = \sum \frac{1}{n^p} \quad a_n \geq 0$$

en

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

De functie  $f(x)$  is continu over  $]0, +\infty[$ , maar is pas dalend vanaf 1. Dus het interval wordt  $[1, +\infty[$ . De integraal wordt als volgt:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[ \frac{x^{1-p}}{1-p} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{1-p} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 > 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-p}(0-1) \in \mathbb{R} : \text{convergent} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 < 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{p-1}} = \infty \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-p}(\infty-1) = \infty : \text{divergent naar } +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{als } p-1 = 1 &\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \infty \\ &\text{divergent naar } +\infty \end{aligned}$$

Uit dit onderzoek volgt het volgende:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}$$

### 4.6.3 Vergelijkingscriteria

Indien  $\sum a_n$  gevraagd wordt, gebruik een gekende reeks  $\sum b_n$ . Tot nu toe kennen we twee reeksen:  $\sum q^n$  en  $\sum \frac{1}{n^p}$

1.
  - als  $a_n \leq b_n$  en  $\sum b_n$  convergent, dan  $\sum a_n$  convergent
  - als  $b_n \leq a_n$  en  $\sum b_n$  divergent, dan  $\sum a_n$  divergent

2. als  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \neq 0 \neq \infty$  dan beide reeksen zelfde gedrag.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n}$$

Uitwerking

De reeks kan geschreven worden als

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

Dit komt overeen met een meetkundige reeks met  $q = \frac{1}{4}$ . Deze reeks convergeert.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2}$$

Uitwerking

Als  $n$  naar oneindig gaat:  $\frac{\sqrt{n}}{9n^2} \approx \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$  Deze reeks kan dus geschreven worden als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

wat overeenkomt met de hyperharmonische reeks met  $p = 3/2$ . We weten dat dit convergeert. We passen de limiet toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n-1}}{(3n-2)^2} \cdot n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} \sqrt{n}}{9n^2} = \frac{1}{9} \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks convergeert.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van

$$\sum_{n=3}^{\infty} -\sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

Uitwerking

In dit geval is  $a_n < 0$ . We vermenigvuldigen de reeks met -1. De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sqrt{\tan \frac{1}{n}}$$

We weten dat als  $n$  naar oneindig gaat, dat  $\frac{1}{n}$  naar 0 gaat. Voor kleine waarden geldt:  $\tan \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$ . De reeks wordt:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

wat overeenkomt met een hyperharmonische reeks met  $p = 0.5$ . We weten dat dit divergeert naar  $+\infty$

We passen de limiet toe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\tan \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = 1 \neq 0 \neq \infty$$

Deze reeks divergeert naar  $+\infty$

---

#### 4.6.4 Convergentiecriteria

We gebruiken 2 convergentiecriteria:

##### D'Alembert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

##### Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Beide limieten kennen 3 uitkomsten:

$$\begin{cases} < 1, \text{convergentie} \\ = 1, \text{????} \\ > 1, \text{divergentie} \end{cases}$$


---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n^3}{3^n - n}$$

##### Uitwerking

We gebruik de convergentie criterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{(3^{n+1} - (n+1))} \cdot \frac{3^n - n}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - n}{3^{n+1} - (n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n(1 - \frac{n}{3^n})}{3^{n+1}(1 - \frac{n+1}{3^{n+1}})} \\ &= \frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{convergentie} \end{aligned}$$


---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Uitwerking

Dit is een reeks met uitsluitend negatieve termen, dus we vermenigvuldigen met -1. We beschouwen nu de reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$$

Dit lijkt het geschikte probleem om op te lossen met Cauchy.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{3n+1} = 1$$

Er kan dus geen besluit gevormd worden. We maken gebruik van de algemene limiet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n = 1^\infty$$

We maken gebruik van de definitie van het getal  $e$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{2}{3n+1}\right)\right)^{-\frac{3n+1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3n+1}\right)n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2n}{3n+1}} = e^{-2/3} \neq 0$$

Deze reeks is divergent naar  $+\infty$ . De originele reeks  $\sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^n$  is divergent naar  $-\infty$

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$$

Uitwerking

We maken gebruik van het convergentiecriterium van Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0 < 1$$

Deze reeks convergeert.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!n}{(n!)^2}\right)$$

Uitwerking

Aangezien we te maken hebben met faculteiten is een goede keuze het convergentiecriterium van D'Alembert.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!(n+1)}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)(n!)(n!)}{n!(n+1)(n!)(n+1)(2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2} \\ &= 4 > 1\end{aligned}$$

Deze reeks is divergent naar  $+\infty$

---

## 4.7 Willekeurige reeksen

Een reeks is willekeurig indien er een oneindig aantal negatieve en positieve termen zijn. Wij zien een speciale soort van willekeurige reeksen: de alternerende reeks. Deze heeft veelal de volgende vorm:

$$(-1)^n b_n \quad \text{met} \quad b_n > 0$$

### 4.7.1 Convergentiecriterium van Leibniz

Indien een reeks alternerend is en

$$\forall n : |a_n| \geq |a_{n+1}| \quad \text{en} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$$

dan convergeert de reeks

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=10}^{\infty} \frac{(-1)^n}{e^n - n}$$

Uitwerking

We onderzoeken de voorwaarden van Leibniz.

- De reeks is duidelijk alternerend door  $(-1)^n$
- $|a_n|$  moet dalend zijn. We stellen  $f(x) = \frac{(-1)^x}{e^x - x}$ . De afgeleide hiervan is  $f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^2}$ . Uit tekenonderzoek blijkt dat  $|a_n|$  dalend is voor alle  $n > 0$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$  moet 0 zijn.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^n - n} = \frac{1}{e^n(1 - n/e^n)} = 0$$

De reeks convergeert.

---

## 4.7.2 Nieuwe begrippen

Een reeks is **absoluut convergent** als  $\sum |a_n|$  convergeert. Een reeks is **semi-convergent** als  $\sum |a_n|$  divergeert en  $\sum a_n$  convergeert.

Pas de volgende methode toe om een willekeurige reeks te onderzoeken:

1. Ga na of de reeks absoluut convergent is
2. Indien de reeks niet absoluut convergent is, pas dan de voorwaarden van Leibnitz toe.
3. Maak ook gebruik van  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0 \Rightarrow \sum a_n$  divergent.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(2n-1)!}$$

Uitwerking

We gaan eerst na of de reeks absoluut convergent is. Dit betekent dus dat we enkel de absolute termen moeten beschouwen. De reeks wordt  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!}$ . We passen D'Alembert toe

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n(2n+1)} \\ &= 0 < 1 \end{aligned}$$

De reeks met absolute waarden convergeert. De originele reeks is dus absoluut convergent.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1}$$

Uitwerking

We gaan eerst weer na of deze reeks absoluut convergent is. We passen D'Alembert toe.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n+1)}{(n+1)^2 + 1} \cdot \frac{n^2 + 1}{\arctan(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi/2(n^2 + 1)}{(n^2 + 2n + 2)\pi/2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Er kan geen besluit genomen worden. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II. We zoeken eerst een reeks om mee te vergelijken.

$$\sum \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1} \approx \sum \frac{1}{n^2}$$

We nemen de limiet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan(n)}{n^2 + 1} \cdot n^2 = \frac{\pi}{2} \neq 0 \neq \infty$$



De reeks waarmee we vergeleken hebben is een harmonische reeks met  $p = 2$ . We weten dat deze reeks convergeert dus  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$  convergeert ook. Bijgevolg is  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$  absoluut convergent.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$$

Uitwerking

Bij het uitrekenen van D'Alembert zou je 1 uitkomen waardoor geen besluit kan genomen worden. We gebruiken volgende redenering.

Als  $n$  stijgt, dan stijgt  $4n-1$ , dan stijgt  $\sqrt{4n-1}$ , dan daalt  $\frac{1}{\sqrt{4n-1}}$  en dan daalt  $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$ . De reeks kan als volgt benaderd worden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Dit is een harmonische reeks met  $p = 1/2$ . Deze reeks is divergent. We maken gebruik van vergelijkingscriterium II en nemen de limiet.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}}{1/\sqrt{n}} &= \frac{\cos \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{2}(4n-1)^{-3/2}(4)}{-\frac{1}{2}n^{-3/2}} \\ &= \frac{-2}{\frac{-1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{(4n-1)^{3/2}} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{4n^{3/2}} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \neq \infty \end{aligned}$$

De reeks toont hetzelfde gedrag als de harmonische reeks en is dus divergent. Het besluit is dat deze reeks niet absoluut convergent is. We gaan nu na of de reeks semi-convergent is met de voorwaarden van Leibniz. We hebben al bewezen dat  $\sin \frac{1}{\sqrt{4n-1}}$  dalend is. We berekenen de limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n-1}} = 0$$

De reeks is semi-convergent.

---

Voorbeeld: Onderzoek de convergentie/divergentie van:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Uitwerking

Dit is heel eenvoudig na te gaan met  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (1 - 0) = -1^\infty$$

De reeks is divergent.

## 4.8 Reeksen van functies

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Bij deze soort reeksen zijn we geïnteresseerd in het convergentiegebied van  $x$ . Voor welke waarden van  $x$  is de overeenkomstige reeks convergent. Gebruik volgende methodiek:

1. Bereken

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| \quad \text{of} \quad L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|}$$

2. Indien  $L(x) < 1$  dan behoort  $x$  tot het CG

Indien  $L(x) > 1$  dan behoort  $x$  niet tot het CG

Indien  $L(x) = 1$  dan ???

### 4.8.1 Machtreeksen rond $x = a$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$$

**stelling:** Het CG van een machtreeks rond  $x=a$  is een symmetrisch interval rond  $x=a$   
**bewijs:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}(x - a)^{n+1}}{c_n(x - a)^n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| |x - a| < 1 \\ x \in CG &\Leftrightarrow |x - a| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|} = \rho \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\rho < x - a < \rho \rightarrow a - \rho < x < a + \rho$$

Het CG wordt

$$]a - \rho, a + \rho[$$

---

Voorbeeld: Bepaal het CG van:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2x+1}{x} \right)^n$$

Uitwerking

We passen de limiet van Cauchy toe.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left( \frac{2x+1}{x} \right)^n \right|}$$

x behoort enkel tot een CG als deze limiet kleiner dan 1 is. We onderzoeken deze functie eerst.

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x+1}{x}\right| < 1 &= \frac{(2x+1)^2}{x^2} < 1 \\ &= (2x+1)^2 < x^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1 - x^2 < 0 \\ &= 3x^2 + 4x + 1 < 0 \\ &= 3(x+1/3)(x+1) < 0\end{aligned}$$

Uit tekenonderzoek blijkt dat  $x \in CG \rightarrow x \in ]-1, -1/3[$ . Om na te gaan ofdat de grenzen inbegrepen zijn berekenen we de limiet voor  $x = -1$  en  $x = -1/3$ .

---

# Deel III

## Oefeningen

# Hoofdstuk 5

## Differentiaalvergelijkingen

Bepaal de DVG van

1.  $y = C_1x + C_2$
2. de cirkels met hun middelpunt op de x-as
3. de raaklijnen aan  $K : y = x^2$

Oplossing

1. De vergelijking  $y = C_1x + C_2$  heeft 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer afgeleid worden.

$$\begin{aligned}y' &= C_1 \\y'' &= 0\end{aligned}$$

De differentiaalvergelijking is  $y'' = 0$

2. Het middelpunt op de x-as kan gedefinieerd worden als  $m \in x - as \Rightarrow m(C_1, 0)$ . De straal wordt gedefinieerd als  $C_2$ . De vergelijking van een cirkel wordt dan:

$$\Gamma : (x - C_1)^2 + y^2 = C_2^2$$

Er zijn 2 onafhankelijke constanten. Er moet dus 2 keer (impliciet) afgeleid worden.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} : 2(x - C_1) + 2yy' &= 0 \\ \frac{d^2y}{dx^2} : 2 + 2(y'y' + yy'') &= 0\end{aligned}$$

De 2de afgeleide bevat geen constanten meer dus de differentiaalvergelijking wordt:

$$yy'' + (y')^2 + 1 = 0$$

3. De raaklijn wordt gegeven door :  $R : y - y'p = y'_p(x - x_p)$

Stel  $p \in K$  en  $x_p = C$ :

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_p &= (x_p)^2 = C^2 \\ \Rightarrow p &(C, C^2)\end{aligned}$$

De richtingscoëfficiënt  $y'_p$  wordt gegeven door

$$y' = 2x \Rightarrow y'_p = 2C$$

De formule van de raaklijn kan worden ingevuld:

$$R : (y - C^2) = 2C(x - C)$$

Deze vergelijking bevat slechts 1 constante en moet dus 1 maal afgeleid worden.

$$y' = 2C \Leftrightarrow C = \frac{y'}{2}$$

Substitueer  $C$  in de formule van de raaklijn:

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{y'}{2}\right)^2 &= y' \left(\frac{y'}{2}\right) \left(x - \frac{y'}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 4y - y'^2 &= 4xy' - 2y'^2 \\ \Leftrightarrow y'^2 - 4y'x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

is de differentiaalvergelijking.

---

## 5.1 Lineaire DVG met constante coëfficiënten

Gegeven

$$y'' + y = 0$$

1. Bepaal de AO
2. Bepaal de PO zodat  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  en  $y(\pi) = 1$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{y'' + y\}(s)$$

---

## 5.2 Lineaire DVG in $y$ en $y'$

Bepaal de PO door (1, 2) voor  $y' + \frac{y}{x} - (x^2 + 1) = 0$

Oplossing

Schrijf de DVG als  $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 1$ . Deze DVG is linear in  $y$  en  $y'$ . We passen de algemene oplossingsmethode toe.

Stel  $y = uv$ ,  $y' = u'v + uv'$ .

De DVG wordt:

$$\begin{aligned} u'v + uv' + \frac{uv}{x} &= x^2 + 1 \\ \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) &= x^2 + 1 \end{aligned}$$

---

# Hoofdstuk 6

## Laplacetransformatie

### 6.1 De Heaviside functie

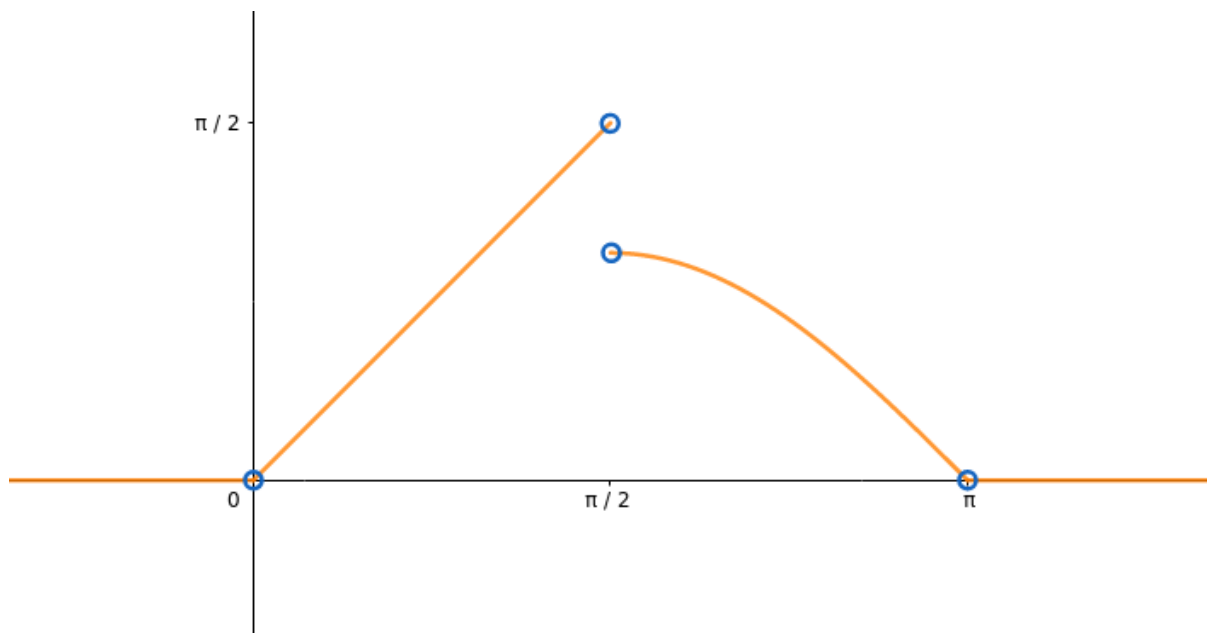
Gegeven

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 < t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

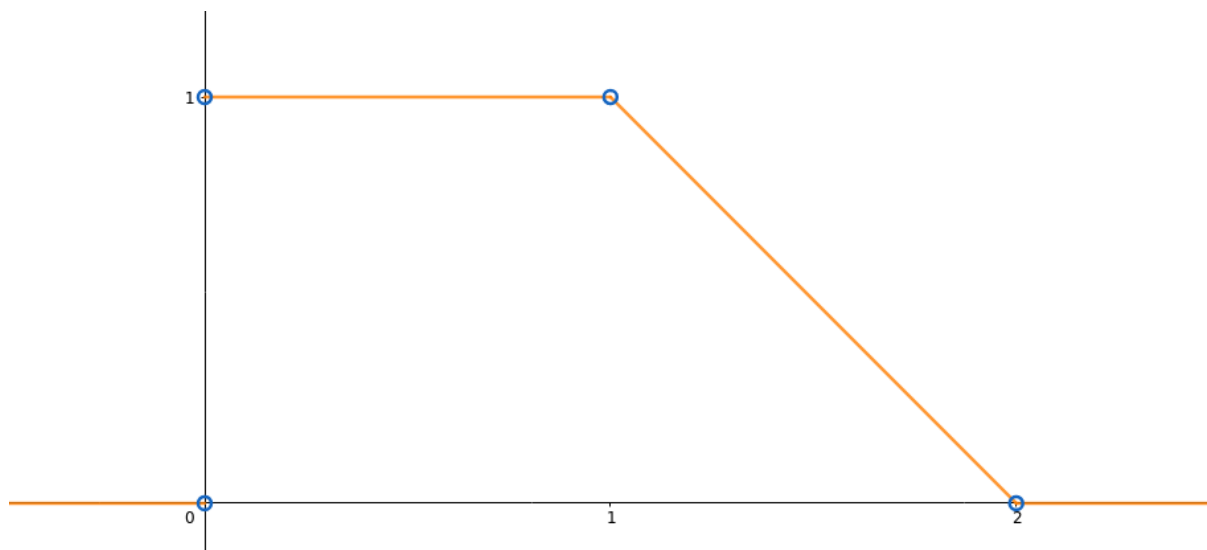
Druk  $g(t)$  uit a.d.h.v. de Heaviside functie en maak een tekening.

Oplossing

$$\begin{aligned} g(t) &= H(t)(-0 + t) + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(-t + \sin t) + H(t - \pi)(-\sin t + 0) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) + H(t - \pi)(-\sin t) \\ &= H(t)t + H\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(\sin t - t) - H(t - \pi) \sin t \end{aligned}$$



Gegeven de grafiek van de functie  $h(t)$ . Bepaal het voorschrift van  $h(t)$  en druk uit a.d.h.v. de Heaviside functie.



Oplossing

De functie kan geschreven worden als:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & 1 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$



Hieruit volgt gemakkelijk de Heaviside versie hiervan:

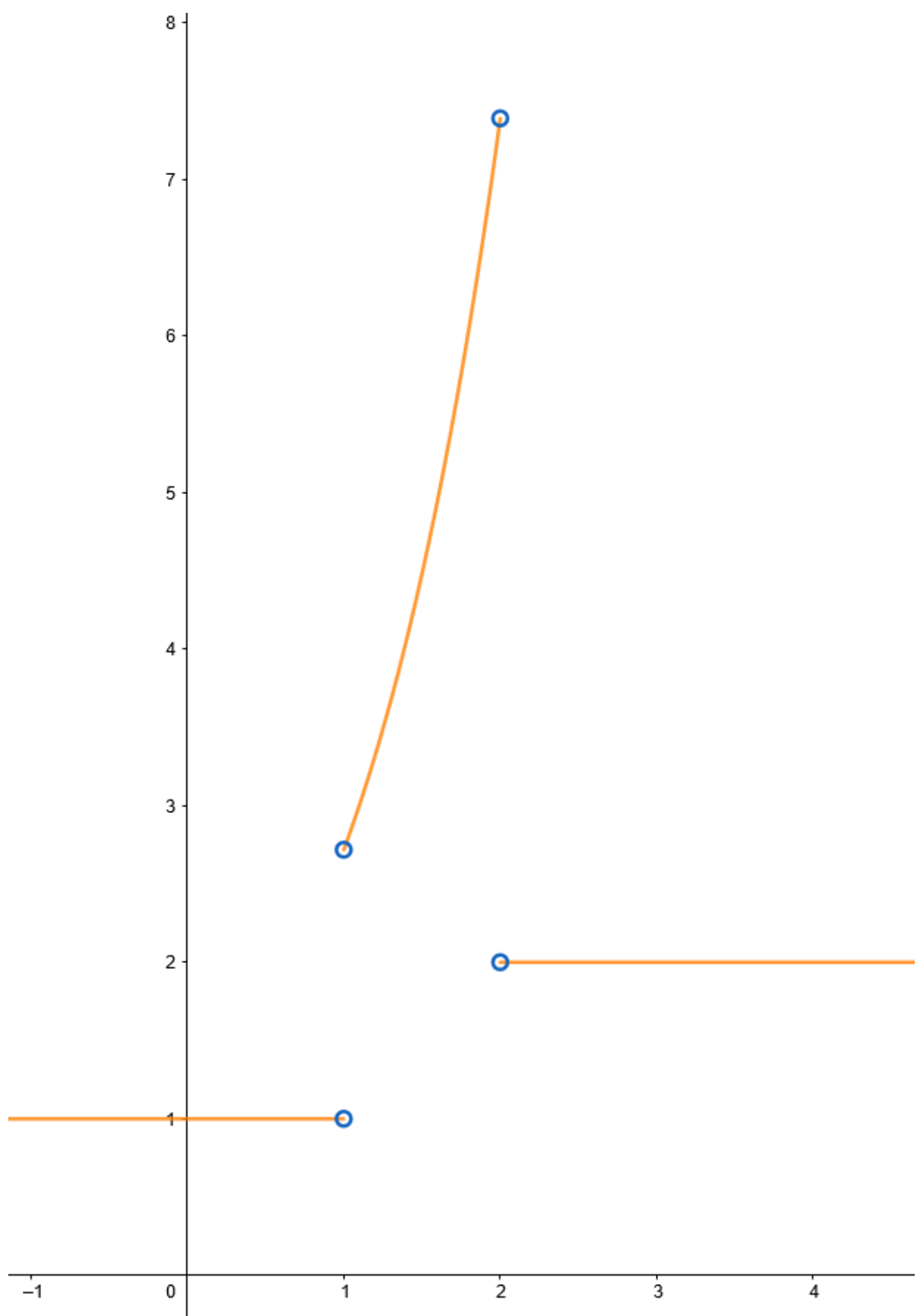
$$\begin{aligned}h(t) &= H(t)(-0 + 1) + H(t - 1)(-1 + (2 - t)) + H(t - 2)(-(2 - t) + 0) \\&= H(t) + H(t - 1)(1 - t) + H(t - 2)(t - 2)\end{aligned}$$

---

Teken de functie  $f(t) = 1 + H(t - 1)(e^t - 1) + H(t - 2)(2 - e^t)$

Oplossing

$$f(t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ e^t & 0 < t < 1 \\ 2 & 1 < t < 2 \end{cases}$$



## 6.2 Functies van de exponentiële orde

Geef de exponentiële orde van  $f(t) = te^{-2t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|te^{-2t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{te^{-2t}}{e^{\alpha t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{\alpha t} e^{2t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^{t(\alpha+2)}} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{t(\alpha+2)}(\alpha+2)} \quad \text{voor } \alpha+2 > 0 \\ &= 0 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned}\alpha + 2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &> -2\end{aligned}$$

De exponentiële orde is -2.

---

Geef de exponentiële orde van  $f(t) = 6e^{3t}$

Oplossing

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|6e^{3t}|}{e^{\alpha t}} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6e^{3t}}{e^{\alpha t}} \\ &= 6 \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t(3-\alpha)}\end{aligned}$$

Indien  $3 - \alpha < 0$  dan wordt de limiet 0. De exponentiële orde is dus 3.

---

## 6.3 Laplacebeeld

Bepaal het Laplacebeeld van volgende functies:

$$f(t) = 3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t$$

Oplossing

$$\mathcal{L}\{3e^{2t} + t^2 - 5 \cos 2t + 4 \sin 3t\}(s) = \frac{3}{s-2} + \frac{2}{s^3} - \frac{5s}{s^2+4} + \frac{12}{s^2+9}$$

$$f(t) = (1 + e^{-4t})^2$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1 + e^{-4t})^2\}(s) &= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-4t} + e^{-8t}\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\end{aligned}$$


---

$$f(t) = \sin^2 t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin^2 t\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{1 - \cos 2t}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1 - \cos 2t\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right]\end{aligned}$$


---

$$f(t) = t^2\delta(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^2\delta(t-2)\}(s) &= \int_0^{+\infty} t^2\delta(t-2)e^{-st} dt \\ &= [t^2e^{-st}]_{t=2} \\ &= 4e^{-2s}\end{aligned}$$


---

$$f(t) = (t-1)H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(t-1)H(t-1)\}(s) &= e^{-s}\mathcal{L}\{u\}(s) \\ &= \frac{e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$


---

$$f(t) = t^2H(t-1)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 H(t-1)\}(s) &= \mathcal{L}\{[(t-1)+1]^2 H(t-1)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\} H(t-1)\}(s) \\
&= e^{-s} \mathcal{L}\{u^2 + 2u + 1\} \\
&= e^{-s} \left( \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} + \frac{1}{s} \right)
\end{aligned}$$


---

$$f(t) = \sin(t) H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sin(t) H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin((t-2)+2) H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= \mathcal{L}\{[\sin(t-2) \cos(2) + \cos(t-2) \sin(2)] H(t-2)\}(s) \\
&= e^{-2s} [\cos(2) \mathcal{L}\{\sin(u)\} + \sin(2) \mathcal{L}\{\cos(u)\}(s)] \\
&= e^{-2s} \left( \frac{\cos(2)}{s^2 + 1} + \frac{\sin(2)s}{s^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$


---

$$f(t) = t^2 e^{-2t}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 e^{-2t}\}(s) &= \mathcal{L}\{t^2\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^3}
\end{aligned}$$


---

$$f(t) = e^t \cos 3t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^t \cos 3t\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 3t\}(s-1) \\
&= \frac{s-1}{(s-1)^2 + 9}
\end{aligned}$$


---

$$f(t) = e^{-2t} \sin 2t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{-2t} \sin 2t\}(s) &= \mathcal{L}\{\sin 2t\}(s+2) \\
&= \frac{2}{(s+2)^2 + 4}
\end{aligned}$$


---

$$f(t) = t \cos t$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t \cos t\}(s) &= (-1)^1 \frac{d \left[ \mathcal{L}\{\cos t\}(s) \right]}{ds} \\ &= - \frac{d \left[ \frac{s}{s^2+1} \right]}{ds} \\ &= - \frac{(s^2+1) - s(2s)}{(s^2+1)^2} \\ &= - \frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2} \\ &= \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\end{aligned}$$


---

$$f(t) = e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-2t} t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s) &= \mathcal{L}\{t \cos^2 \frac{t}{2}\}(s+2) \\ &= \mathcal{L}\left\{t \frac{1+\cos t}{2}\right\}(s+2) \\ &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}\{t\}(s+2) + \mathcal{L}\{t \cos t\}(s+2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(s+2)^2} + \frac{(s+2)^2-1}{((s+2)^2+1)^2} \right)\end{aligned}$$


---

$$f(t) = e^{-3t} t^3 H(t-2)$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{-3t} t^3 H(t-2)\}(s) &= \mathcal{L}\{t^3 H(t-2)\}(s+3) \\ &= \mathcal{L}\{[(t-2)+2]^3 H(t-2)\}(s+3) \\ &= \mathcal{L}\{[(t-2)^3 + 6(t-2)^2 + 12(t-2) + 8] H(t-2)\}(s+3) \\ &= e^{-2s} \mathcal{L}\{u^3 + 6u^2 + 12u + 8\}(s+3) \\ &= e^{-2s} \left[ \frac{3!}{(s+3)^4} + 6 \frac{2!}{(s+3)^3} + 12 \frac{1!}{(s+3)^2} + 8 \frac{1}{s} \right] \\ &= e^{-2s} \left[ \frac{6}{(s+3)^4} + \frac{12}{(s+3)^3} + \frac{12}{(s+3)^2} + \frac{8}{s} \right] \\ &= 2e^{-2s} \left[ \frac{3}{(s+3)^4} + \frac{6}{(s+3)^3} + \frac{6}{(s+3)^2} + \frac{4}{s} \right]\end{aligned}$$

---


$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 < t < \frac{\pi}{4} \\ e^{2t}t & t > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Oplossing

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos 2t + H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)(-\cos 2t + e^{2t}t) \\ &= \cos 2t + (e^{2t}t - \cos 2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) + \mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) - \mathcal{L}\{\cos(2t)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \end{aligned}$$

We lossen deze 3 Laplacetransformaties individueel op

1.

$$\mathcal{L}\{\cos 2t\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$$

2.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{2t}tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) &= \mathcal{L}\{tH\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s - 2) \\ &= \mathcal{L}\left\{\left(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s - 2) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}\left\{\left(u + \frac{\pi}{4}\right)\right\}(s - 2) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \left( \frac{1}{(s - 2)^2} + \frac{\pi}{4(s - 2)} \right) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos 2t H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) &= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{\cos [2(t - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{2}] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= \mathcal{L}\{[\cos 2(t - \frac{\pi}{4}) \cos \frac{\pi}{2} - \sin 2(t - \frac{\pi}{4}) \sin \frac{\pi}{2}] H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= -\mathcal{L}\{\sin 2(t - \frac{\pi}{4}) H\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\}(s) \\ &= e^{-\frac{\pi}{4}s} \mathcal{L}\{\sin 2u\} \\ &= \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

Uiteindelijk:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + e^{-\frac{\pi}{4}s} \left( \frac{1}{(s - 2)^2} + \frac{\pi}{4(s - 2)} \right) - \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2 + 4}$$


---

## 6.4 Invers Laplacebeeld

Bepaal het invers laplacebeeld van volgende functies:

$$f(s) = \frac{1}{s^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\ &= \frac{t^2}{2}\end{aligned}$$

---

$$f(s) = \frac{s+5}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{s^4}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4} + \frac{5}{s^4}\right\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t) + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^4}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) + \frac{5}{3!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3!}{s^4}\right\}(t) \\ &= \frac{t^2}{2} + \frac{5t^3}{6}\end{aligned}$$

---

$$f(s) = \frac{1}{3s-1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s-1}\right\}(t) &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\frac{1}{3}}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}t} \\ &= \frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}\end{aligned}$$

---



$$f(s) = \frac{2s+3}{s^2-5s+6}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{s^2-5s+6}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+3}{(s-2)(s-3)}\right\}(t) \\ &\Rightarrow \frac{2s+3}{(s-2)(s-3)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-3} = \frac{a(s-3)+b(s-2)}{(s-2)(s-3)} \\ &\Rightarrow 2s+3 = a(s-3)+b(s-2) \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 9 \end{cases} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-2} + \frac{9}{s-3}\right\}(t) \\ &= -7e^{2t} + 9e^{3t}\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{4s+3}{s^2+16}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+3}{s^2+16}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+16} + \frac{3}{s^2+16}\right\}(t) \\ &= 4\cos 4t + \frac{3}{4}\sin 4t\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{s+3}{s(s^2+9)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{s(s^2+9)}\right\}(t) \\
& \Rightarrow \frac{s+3}{s(s^2+9)} = \frac{a}{s} + \frac{b+cs}{s^2+9} = \frac{a(s^2+9) + (b+cs)s}{s(s^2+9)} \\
& \Rightarrow s+3 = a(s^2+9) + (b+cs)s \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = 1 \end{cases} \\
& = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3s}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{3}}{s^2+9}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} + \cos 3t \\
& = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \sin 3t + \cos 3t
\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{1}{s+3}^2$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}^2\right\}(t) &= e^{-3t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) \\
&= te^{-3t}
\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{2s+5}{(s+2)^3}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s+5}{(s+2)^3}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2[(s+2)-2]+5}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}(t) \\
&= 2e^{-2t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{e^{2t}}{2!} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2!}{s^3}\right\}(t) \\
&= e^{2t}\left(2t + \frac{1}{2}t^2\right)
\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{2s-3}{s^2+2s+5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-3}{s^2+2s+5}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}(t) \\ &= 2e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(t) + \frac{e^{-t}}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}(t) \\ &= e^{-t}\left(2\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{e^{-s}}{s^4}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^4}\right\}(t) &= f(t-1)H(t-1) \\ \text{met } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t) &= \frac{t^3}{6} \\ \Rightarrow \frac{(t-1)^3}{6}H(t-1)\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s+2}\right\}(t) &= f(t-3)H(t-3) \\ \text{met } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t) &= e^{-2t} \\ \Rightarrow e^{-2(t-3)}H(t-3)\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{(s+3)^5}\right\}(t) &= f(t-2)H(t-2) \\ \text{met } f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3)^5}\right\}(t) = e^{-3t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}(t) = \frac{e^{-3t}}{4!}t^4 \\ &\Rightarrow \frac{e^{-3(t-2)}(t-2)^4}{4!}H(t-2)\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3 - 4s^2 + 1}{s^2(s^2 - 2s + 2)}\right\}(t) &= \text{splitsen in partie\AA l breuken} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s-7}{s^2-2s+2}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{2}\left[1+t+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5(s-1)-2}{(s-1)^2+1}\right\}(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1+t+5e^t\cos t-2e^t\sin t\right]\end{aligned}$$


---

$$f(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) &= -\frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)\right\}(t) \\ &= -\frac{1}{4}(-1)t\sin 2t \\ &= \frac{t}{4}\sin 2t\end{aligned}$$


---

Bepaal het inverselaplacebeeld met convolutie van

$$f(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

Oplossing

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\}(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 1} \cdot \frac{1}{s - 1}\right\}(t) \\ &= e^t * e^{-t} \\ &= \int_0^t e^u e^{-(t-u)} du \\ &= \int_0^t e^{2u-t} du \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2u-t}\right]_{u=0}^{u=t} \\ &= \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}]\end{aligned}$$

---

# Hoofdstuk 7

## Reeksen

De volgende reeksen moeten gekend zijn:

- De meetkundige reeks:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n : \begin{cases} |q| < 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ q \geq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \\ q \leq -1 \rightarrow \text{Divergent} \end{cases}$$

- De hyperharmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} : \begin{cases} p > 1 \rightarrow \text{Convergent} \\ p \leq 1 \rightarrow \text{Divergent naar } +\infty \end{cases}$$

- De harmonische reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} : \text{divergent naar } +\infty$$

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$$

Oplossing

We weten dat  $-1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 n \leq 1$ . Hieruit volgt dat  $\frac{\cos^2 n}{4^n} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . Dit is een meetkundige reeks met  $q = 1/4$ . We weten dat een meetkundige reeks met  $|q| < 1$  convergeert. De reeks  $\sum \frac{\cos^2 n}{4^n}$  convergeert dus.

---

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{3n-1}{n^3+n}$$

Oplossing

Enkel de hoogste machten spelen een rol bij het bepalen van de convergentie.

$$\frac{3n-1}{n^3+n} \approx \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met  $p = 2$ . Een hyperharmonische reeks convergeert als  $p > 1$ . We moeten echter nog nagaan of de limiet niet nul of oneindig is.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n^3+n} \cdot n^2 = 3 \neq 0 \neq \infty$$

De reeks  $\sum \frac{3n-1}{n^3+n}$  convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$$

Oplossing

Ter herinnering:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 1/x}{1/x} = 1 \rightarrow \sin 1/x \approx 1/x$$

Hieruit volgt:

$$\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{1}{n} \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Dit is de algemene term van de hyperharmonische reeks met  $p = 2 > 1$ . De hyperharmonische reeks convergeert. We berekenen de limiet.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} = \frac{\sin \pi/n}{1/n} = \pi \neq 0 \neq \infty$$

De reeks  $\sum \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$  convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$$

Oplossing

We onderzoeken dit met behulp van Cauchy. Ter herinnering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} : \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{divergent naar } \infty \\ < 1 \rightarrow \text{convergent} \\ = 1 \rightarrow \text{geen besluit} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{3n-1} \right)^2 = 1/9 < 1$$

De limiet is kleiner dan 1 dus de reeks  $\sum \left( \frac{n}{3n-1} \right)^{2n}$  convergeert.

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n}{3^n}$$

Oplossing

We onderzoeken dit met behulp van de stelling van d'Alembert. Ter herinnering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} : \begin{cases} > 1 \rightarrow \text{divergent naar } \infty \\ < 1 \rightarrow \text{convergent} \\ = 1 \rightarrow \text{geen besluit} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n} \\ &= 1/3 < 1 \end{aligned}$$

De reeks  $\sum \frac{n}{3^n}$  convergeert.

---

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{n^n}{n!}$$

Oplossing

We lossen dit opnieuw op met d'Alembert.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e > 1 \end{aligned}$$

De reeks  $\sum \frac{n^n}{n!}$  convergeert.

---

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{\ln n}{n}$$

Oplossing

---



Onderzoek de convergentie van

$$\sum \sqrt{n} \tan \frac{\pi}{3n}$$

Oplossing

---

Onderzoek de convergentie van

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Oplossing

---