FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA COMPUTAÇÃO

Vanessa Davanço

E-book 2

FAM ONLINE

Neste E-Book:

INTRODUÇÃO

Neste módulo, exploraremos as funções e seus tipos: função injetora, bijetora, sobrejetora, composta e inversa. Você pode estar pensando “Mas para que estudar funções em computação?”. Basta uma única resposta de exemplo que servirá para qualquer outra linguagem de programação. Em Python, uma função é definida para ser uma sequência de comandos nomeada para executar alguma tarefa especificada, cuja finalidade é ajudar na organização da programação, fatiando-a em pedaços conforme imaginado e definido para um dado problema. A sintaxe de função em Python é **def NOME(PARÂMETROS):**, igual à função matemática que é definida como $f(x)$.

FUNÇÕES

As funções estão relacionadas a cada momento do nosso dia a dia, porém muitas vezes não percebemos que estamos fazendo uma função. Função é uma relação criada entre uma variável dependente e outra independente. Por exemplo, o cálculo de um salário comissionado, ou seja, salário que depende de atingir metas. Temos muitas aplicações de funções em computação, entre as quais destacamos:

- Algoritmo.
- Criptografia.
- Geração de chave de acesso.
- Compiladores.

Definições

Definição 1: Dizemos que uma relação f de A em B é uma função de A em B se, e somente se, para todo $a \in A$ existe apenas um $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Essa função pode ser observada por meio de um esboço (Figura 1).

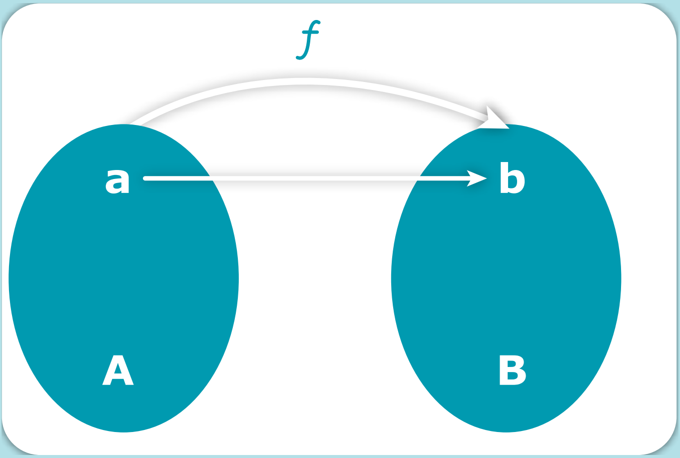


Figura 1: *Representação de uma função.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Exemplo 1: a relação $f = \{(x, x+1): x \in Z\}$ (lê-se: a função definida para cada x, adiciona-se o x mais o elemento 1 em y, sendo que x pertence ao conjunto dos inteiros). Assim, foi gerado o seguinte conjunto:

A= conjunto dos inteiros, ou seja, { ...,-2,-2,0,1,2,3,....}

B= {..., -2+1, -1+1, 0+1, 1+1, 2+1,....}= {...-1,0,1,2,3,4,....}

Graficamente, eis a correspondência (Figura 2):

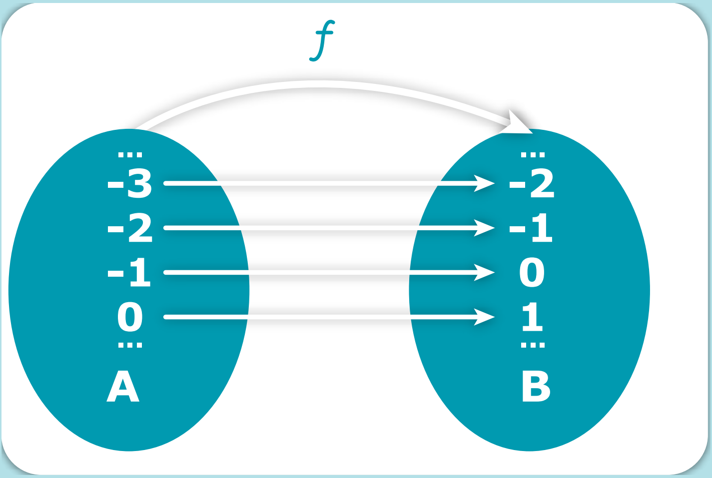


Figura 2: *Representação da função* $f = \{(x, x+1): x \in Z\}$. ***Fonte:*** *Elaborada pela autora (2019).*

Também poderíamos resolver apenas substituindo os valores:

$$f(\text{-}3) = (\text{-}3) + 1 = -2$$

$$f(\text{-}2) = (\text{-}2) + 1 = -1$$

$$f(\text{-}1) = (\text{-}1) + 1 = 0$$

$$f(0) = (0) + 1 = 1$$

Em qualquer uma dessas formas, é possível verificar o conjunto, porém, a forma gráfica torna-se um pouco mais demorada para se verificar.

Na Figura 3, temos uma função ainda que, no conjunto B, restem alguns elementos sem relação com o conjunto A; no conjunto A, temos dois elementos que relacionam um único elemento ao conjunto B.

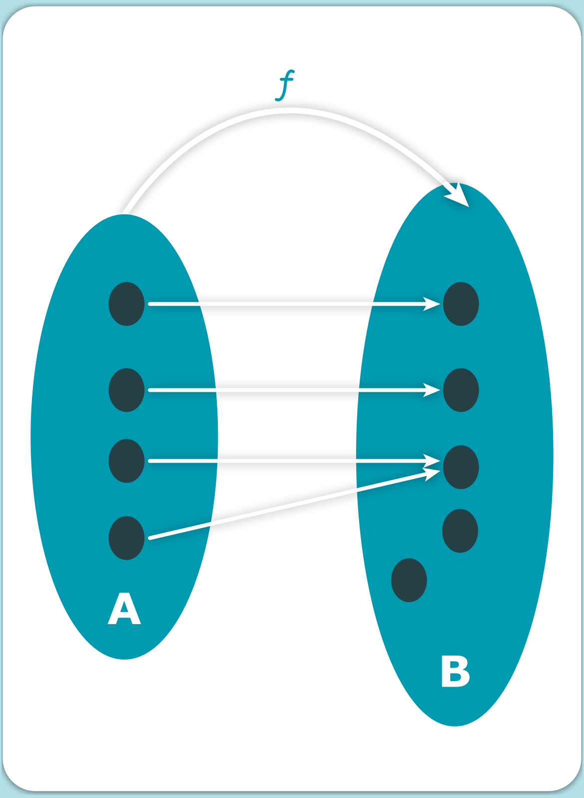


Figura 3: *Representação de uma função.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Na Figura 4, observamos que não existe uma função, pois temos, no conjunto A, dois elementos que não têm relações no conjunto B e um único elemento com duas relações no conjunto B. Quando isso acontece não temos uma função.

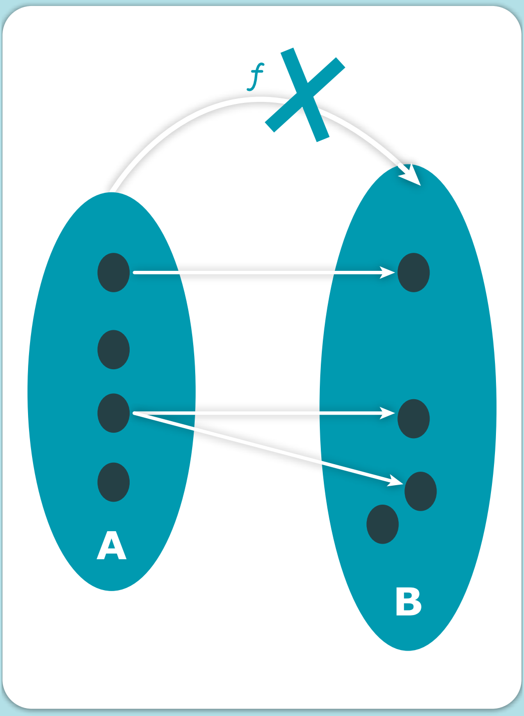


Figura 4: *Representação de um esquema que não é função.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Portanto, todos os elementos do conjunto A têm uma única relação com o conjunto B, pois não pode sobrar elementos do conjunto A sem relação com o conjunto B. Já o conjunto B poderá ter mais de uma relação e elementos sem relação que continuará a ser uma função.

Definição 2: Se *f* é uma função de *A* em *B*, dizemos que o domínio de uma função, $Dom(f)$, será o conjunto A, tal qual o contradomínio de uma função será o conjunto B.

Definição 3: Se *f* é uma função de *A* em *B* e $f(a) = b$, dizemos que *b* é a imagem de *a*. A imagem da função *f* é o conjunto de todas as imagens do elemento de A. **Exemplo 2:** Seja a função definida como relação $f = \{(x, 2x): x \in A\}$, em que o conjuntos A={-1, 0, 1, 2, 3} e o conjunto B={ -2,-1,0,1,2,3,4,5,6} (Figura 5):

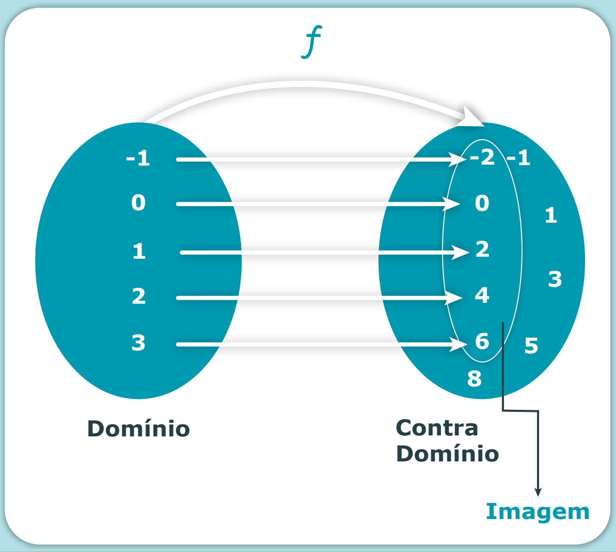


Figura 5: *Representação da função do exemplo.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Pode-se observar pela Figura 5, que o conjunto *A* será o domínio da função, o conjunto *B*, o contradomínio da função, e os elementos que estão destacados em vermelho será a imagem da função, ou seja, os elementos do contradomínio que têm relação com o conjunto *A*.

Podcast 1

Tipos de funções

Função piso

Definição 4: A função piso associa a cada número real *x* o maior inteiro, menor ou igual a *x*, e é representado da seguinte forma: $\lfloor x \rfloor$.

Exemplo 3: $\left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{5} \right\rfloor = 0$

Função teto

Definição 5: A função teto associa a cada número real *x* o menor inteiro, maior ou igual a *x*, e é representado da seguinte forma: $\lceil x \rceil$.

Exemplo 4: $\left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{7}{5} \right\rceil = 2$

Propriedades da função piso e função teto

As funções piso e teto são funções que têm seu domínio em R; porém, sua imagem será o conjunto Z. Temos algumas propriedades relacionadas a essas duas funções:

a) $\lfloor x \rfloor = n$, se e somente se $n \leq x < n + 1$

b) $\lfloor x \rfloor = n$, se e somente se $x\text{-}1 < n \leq x$

c) $\lceil x \rceil = n$, se e somente se $n\text{-}1 < x \leq n$

d) $\lceil x \rceil = n$, se e somente se $x \leq n < x + 1$

e) $x\text{-}1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

f) $\lfloor \text{-}x \rfloor = \text{-}\lceil x \rceil$

g) $\lceil \text{-}x \rceil = \text{-}\lfloor x \rfloor$

Exemplo 5: Ao armazenar ou transmitir dados para um disco rígido, por meio de uma rede, esses dados são representados por bytes. Sabendo que cada byte é composto por 8 bits, então qual será a necessidade de bytes para codificar 100 bits de dados?

Resolução: Precisamos determinar o menor número inteiro que é maior ou igual ao quociente, ou seja, função teto:

$$\left\lceil \frac{100}{8} \right\rceil = \lceil 12{,}5 \rceil = 13$$

Portanto, são necessários 13 bytes.

Função injetora

Definição 6: Uma função *f* de *A em B* é dita injetora se, e somente se, para todos os valores de $(x, y) \in A$ tal que $f(x) = f(y) \rightarrow x = y$. Geometricamente, temos:

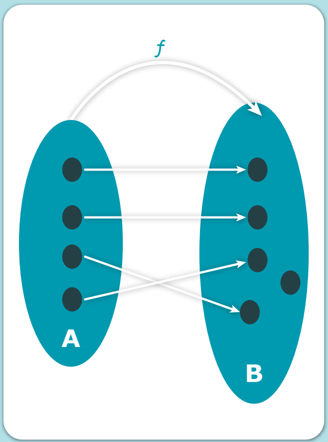


Figura 6: *Representação de uma Função Injetora.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Através dessa figura, podemos observar que, para cada valor do conjunto A, temos apenas um representante do conjunto B. E ainda mais, o conjunto B pode ter elementos que não têm relação com o conjunto A.

Algebricamente, temos: f é injetora se e somente se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$.

Exemplo 6: Determine se a função *f* de *A* em *B* é uma função injetora, na qual $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{5{,}10{,}15{,}20{,}25\}$, e as relações são $f(a) = 5$, $f(b) = 10$, $f(c) = 15$, $f(d) = 20$

Resolução: Podemos observar que a função *f* de *A* em *B* é uma função injetora, pois para cada elemento de A existe um representante em B, e um elemento de B que não tem relação com o conjunto A. Isso pode se observar também geometricamente:

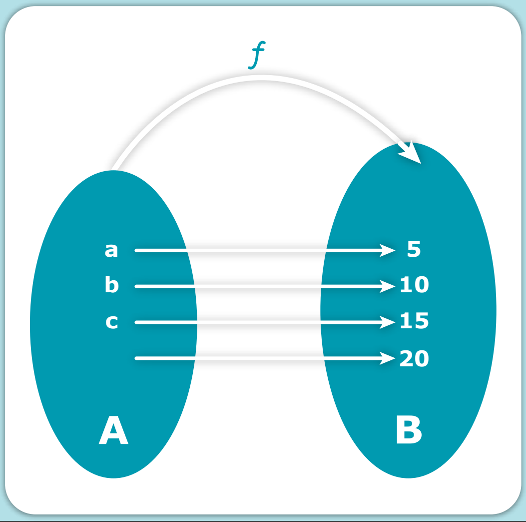


Figura 7: *Representação da função* ***f*** *de* ***A*** *em* ***B***. ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Exemplo 7: Determine se a função *f* de *Z* em *Z* é uma função injetora, em que $f = x^2$.

Resolução: Como o conjunto de Domínio e Contradomínio é o conjunto dos números inteiros, precisamos pensar em algum contraexemplo. O número 2 e -2, ao substituir na função, temos:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(\text{-}2) = (-2)^2 = 4$$

Para que a função seja injetora, precisamos que cada elemento do domínio tenha apenas um representante no contradomínio, portanto, a função $f = x^2$ não é uma função injetora.

Função sobrejetora

Definição 7: Uma função *f* de *A* em *B* é dita sobrejetora se, e somente se, para todo $b \in B$,existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Geometricamente, temos:

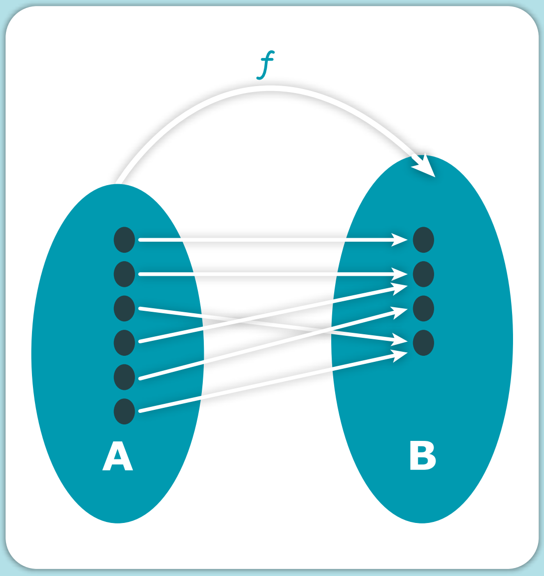


Figura 8: *Representação de uma função sobrejetora.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Através dessa figura, podemos observar que, para cada valor do conjunto A, temos um representante do conjunto B. E ainda mais, o conjunto B pode receber mais de uma representação do conjunto A no mesmo elemento.

Exemplo 8: Determine se a função *f* de *A* em *B* é uma função sobrejetora, em que $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{5,10,15\}$, e as relações são $f(a) = 5$, $f(b) = 10$, $f(c) = 15$, $f(d) = 10$.

Resolução: Podemos observar que todos os elementos do conjunto B têm uma correspondência no conjunto A. Geometricamente, podemos observar que a função *f* é uma função sobrejetora (Figura 9).

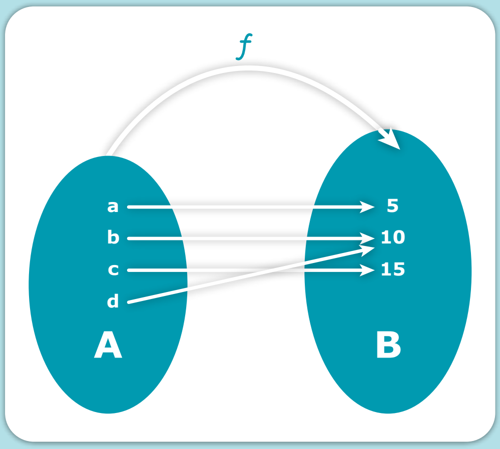


Figura 9: *Representação de uma função sobrejetora.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Podemos observar também que, se o conjunto B={5, 10, 15, 20} com as mesmas relações a função, não seria sobrejetora.

Exemplo 9: Determine se a função *f* de *Z* em *Z* é uma função sobrejetora, na qual $f = x^2$.

Resolução: Como o conjunto de Domínio e Contradomínio é o conjunto dos números inteiros, podemos notar que não poderá ser uma função sobrejetora, pois não temos nenhum representante do conjunto Z que relacione, por exemplo, o número -2, e assim teremos vários outros que não terão relação:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(\text{-}2) = (-2)^2 = 4$$

Portanto, a função $f = x^2$ não é uma função sobrejetora.

Função bijetora

Definição 8: Uma função *f* de *A* em *B* é dita bijetora se, e somente se, *f* for injetora e sobrejetora em *B*. Geometricamente, temos:

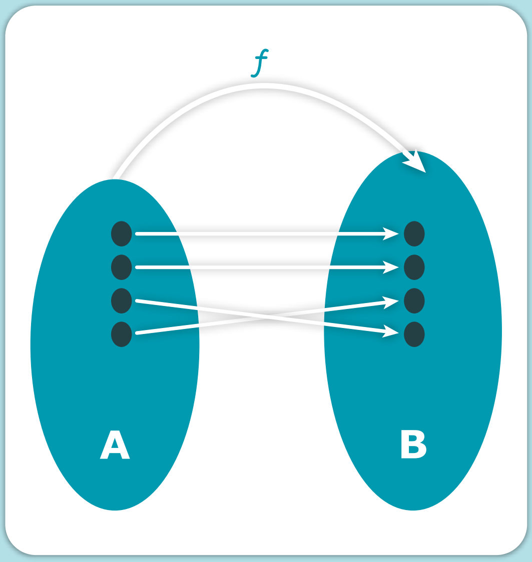


Figura 10: *Representação de uma função bijetora.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Através dessa figura, podemos observar que, para cada valor do conjunto A, temos apenas um representante do conjunto B. E ainda mais, no conjunto B não podemos ter nenhum elemento sem relação com o conjunto A.

Exemplo 10: Determine se a função *f* de *A* em *B* é uma função bijetora, na qual $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{\,5{,}10{,}15{,}20\}$, e as relações são $f(a) = 5$, $f(b) = 10$, $f(c) = 15$, $f(d) = 20$.

Resolução: Podemos observar que todos os elementos do conjunto A têm apenas uma relação no conjunto B e, além disso, não temos nenhum elemento sem relação com o conjunto A. Sendo assim, a função é tanto injetora como sobrejetora e, logo, bijetora. Geometricamente, podemos observar que *f* é bijetora (Figura 11):

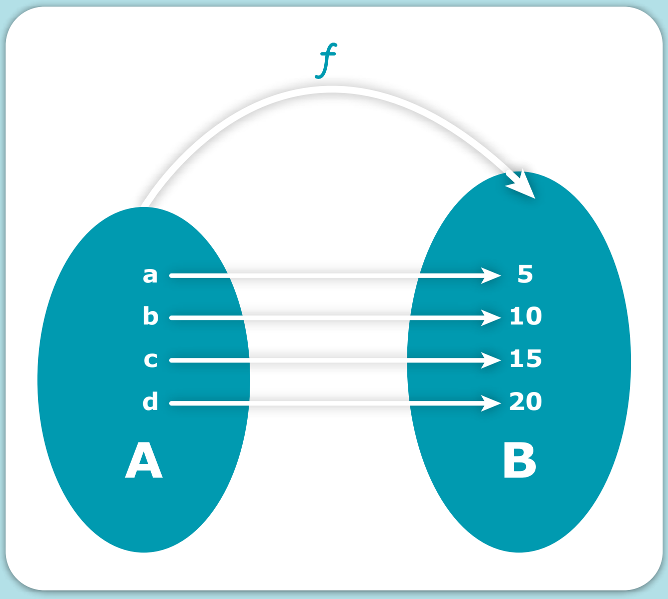
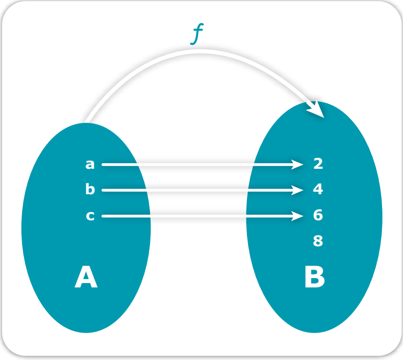


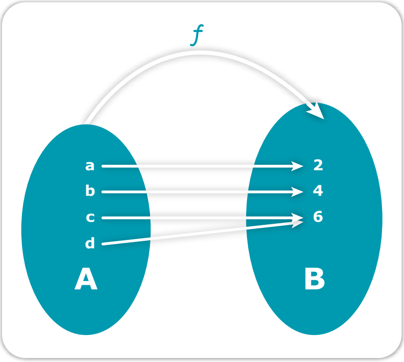
Figura 11: *Representação de uma função bijetora.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

SAIBA MAIS

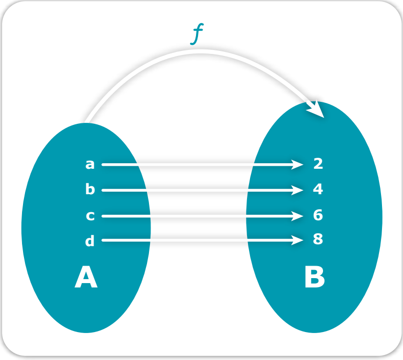
Nas ilustrações a seguir, observamos alguns tipos diferentes de correspondência entre as funções, no formato geométrico.



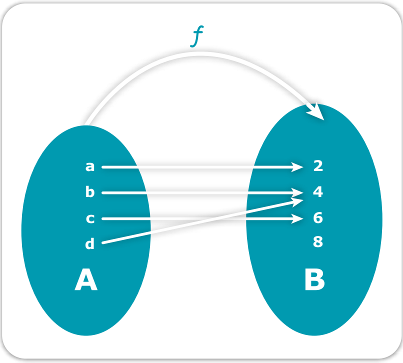
Injetora, mas não Sobrejetora



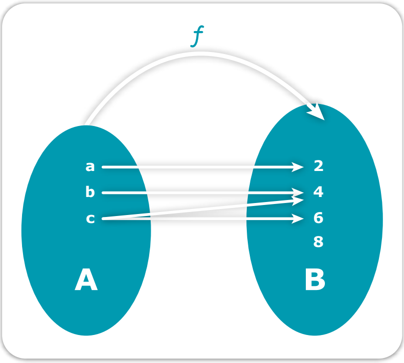
Sobrejetora, mas não injetora



Injetora e Sobrejetora



Nem injetora nem sobrejetora



Não é função

Composição

Definição 9: Considere *g* uma função de *A* em *B* e *f* uma função de *B* em *C*. A função composta de *f* e *g*, indicada por $f(g(x))$ ou fog é definida por:

$$fog(x) = f(g(x))$$

Explicitando a definição, a função composta fog primeiramente determina que será o $g(x)$ para depois determinar a função f para o valor encontrado em $g(x)$.

Geometricamente, podemos observar a função composta na Figura 12.

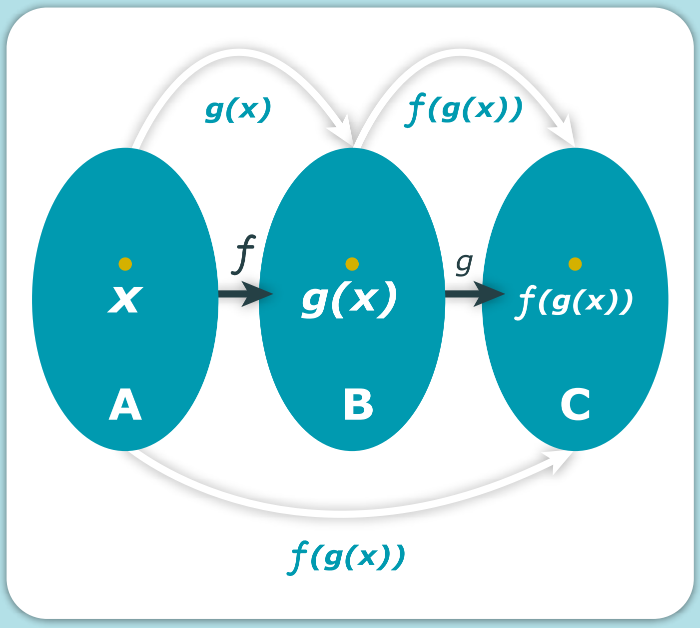


Figura 12: *Composição das funções **f** e **g**.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Exemplo 11: Seja $f(x) = 2x\text{-}1$ e $g(x) = x + 2$. Calcular a função composta $f(g(x))$, quando x=2.

Resolução: Vamos calcular a função g(x) no ponto x=2, ou seja,

$$g(2) = 2 + 2 = 4$$

Portanto, encontramos o valor de $g(2) = 4$. Aplicamos então esse valor na função $f(x)$. Assim,

$$f(4) = 2(4)\text{-}1 = 8 - 1 = 7$$

A função composta aplicada no ponto 2 será: $f(g(x)) = 7$.

As funções compostas têm suas variações, podendo ser calculadas não apenas a $f(g(x))$. Podemos agrupar as funções em outras posições ou até mesmo com elas mesmas; portanto, podemos calcular: $f(g(x)), g(f(x)), f(f(x))$ e $g(g(x))$.

Exemplo 12: Seja $f(x) = -3x + 3$ e $g(x) = x + 1$. Calcule as funções compostas $f(g(x)), g(f(x)), f(f(x))$ e $g(g(x))$.

Resolução: Como se observa, nesse exemplo não temos o ponto a se determinar a função. Quando isso acontece, a resposta não será mais um número, mas uma função. Vamos resolver cada uma das composta separadamente:

$$f(g(x)) = f(x + 1) = -3(x + 1) + 3 = -3x\text{-}3 + 3 = \mathbf{-3x}$$

$$g(f(x)) = g(\text{-}3x + 3) = (\text{-}3x + 3) + 1 = -3x + 3 + 1 = \mathbf{-3x + 4}$$

$$f(f(x)) = f(\text{-}3x + 3) = -3(\text{-}3x + 3) + 3 = 9x\text{-}9 + 3 = \mathbf{9x\text{-}6}$$

$$g(g(x)) = g(x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 1 + 1 = \mathbf{x + 2}$$

Quando calculamos as compostas por meio das equações, encontramos uma nova equação que representa a função composta; para qualquer valor que quisermos encontrar, basta substituir na função calculada.

Exemplo 13: Na Figura 13, f é função de A em B e g é função de B em C. Encontre qual seria a função $g(x)$ e depois as compostas $g\big(f(x)\big), f\big(f(x)\big) e\ g(g(x))$.

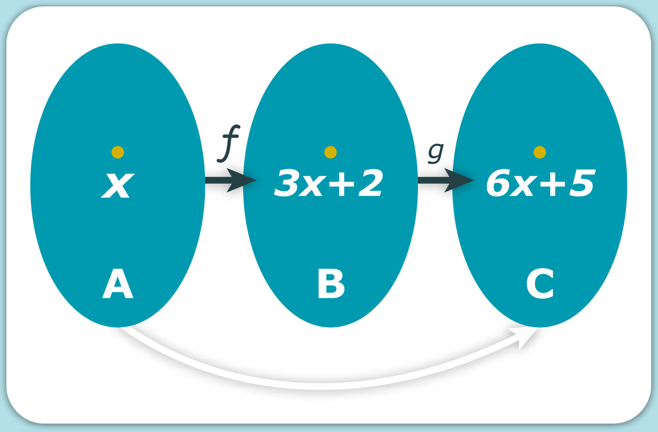


Figura 13: *Função **f** de **A** em B.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Resolução: Para encontrar a função $g(x)$, precisamos observar que, no conjunto C, nós já temos a resposta de $f(g(x))$ e, no conjunto B, sabemos quanto vale a $f(x)$:

$$f\big(g(x)\big) = 6x + 5 \text{ e } f(x) = 3x + 2$$

Como $f\big(g(x)\big) = 3(\ g(x)\ ) + 2 = 6x + 5$

Portanto, precisamos saber que é a função de $g(x)$ que atribui o valor 6x+5.

$$3g(x) + 2 = 6x + 5$$

$$3g(x) = 6x + 5 - 2$$

$$3g(x) = 6x + 3$$

$$g(x) = \frac{6x + 3}{3}$$

$$g(x) = 2x + 1$$

Agora que já sabemos que $f\big(g(x)\big) = 6x + 5$, $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 2x + 1$, precisamos ainda calcular as suas compostas:

$$g\big(f(x)\big) = g(3x + 2) = 2(3x + 2) + 1 = 6x + 4 + 1 = \mathbf{6x + 5}$$

$$f\big(f(x)\big) = f(3x + 2) = 3(3x + 2) + 2 = 9x + 6 + 2 = \mathbf{9x + 8}$$

$$g\big(g(x)\big) = g(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 2 + 1 = \mathbf{4x + 3}$$

Inversa

Consideraremos uma função bijetora de *A* em *B*. Se considerarmos que toda função bijetora é sobrejetora e também injetora, podemos dizer então que a função *f* sobrejetora tem os elementos de *B* como imagem de algum elemento de *A*. A função *f* injetora tem que todos os elementos de *B* são a imagem de apenas um elemento de *A*. Sendo assim, pode-se definir uma função inversa de *B* para *A*, pois garantimos que o conjunto *B* será uma função, podendo ser chamado de função inversível.

Definição 10: Seja *f* uma função bijetora de um conjunto de *A* em *B*. A função inversa de *f* é uma função de *B* em *A*, na qual o elemento $b \in B$ leva a apenas um elemento $a \in A$, sendo que $f(a) = b$. A notação para função inversa é dada por f^{-1}. Assim, podemos definir a função inversa como $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$.

Geometricamente, podemos verificar a função inversa (Figura 14):

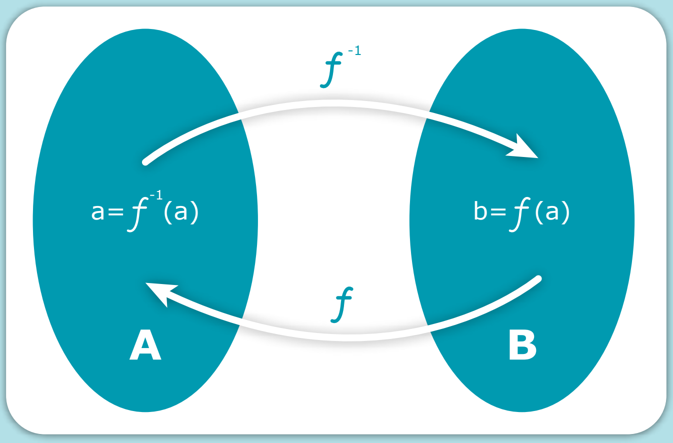


Figura 14: *A função inversa* f^{-1} *de f.* ***Fonte:*** *Elaborada pela autora (2019).*

Observe que, se a função *f* não for bijetora, não podemos definir uma inversa para *f*, pois alguns elementos de *B* podem não ter correspondência em *A* e, com isso, a inversa não seria função.

Exemplo 14: Determine se a função f de A em B é uma função inversa, na qual $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{5,10,15,20\}$, e as relações são $f(a) = 5$, $f(b) = 10$, $f(c) = 15$, $f(d) = 20$.

Resolução: Conforme observamos, a função é bijetora e, como tal, é uma função inversível, ou seja, $f^{-1}(5) = a$, $f^{-1}(10) = b$, $f^{-1}(15) = c$ e $f^{-1}(20) = d$ (Figura 15):

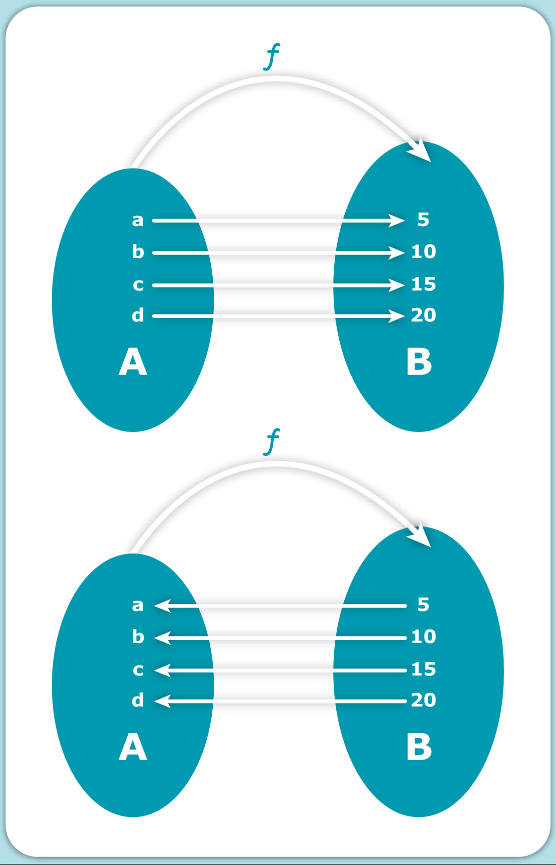


Figura 15: *Representação de uma função inversível.* ***Fonte:*** *Elaboração Própria.*

Exemplo 15: Considere uma função $f: Z \rightarrow Z$, tal que $f(x) = x$-3. Verifique se a função é inversível; caso seja, encontrar a função.

Resolução: A função f é inversa, pois a função f -1 terá uma imagem em Z. Para encontrar a função inversa, precisamos supor que y será a imagem de x, ou seja, onde devemos isolar o x da função $y = x$-3:

$$y = x\text{-}3$$

$$x = y + 3$$

$$f^{-1}(y) = y + 3$$

Exemplo 16: Determine se a função *f* de *R* em *R* é uma função inversível, na qual $f = x^2$.

Resolução: Conforme já exposto nos Exemplos 7 e 9, a função $f = x^2$ não é injetora nem sobrejetora; ainda, para que uma função seja inversível, ela precisa ser bijetora. Portanto, a função $f = x^2$ não é inversível.

SAIBA MAIS

Criptografia

Ao transmitir uma mensagem criptografada, o transmissor deseja que essa mensagem chegue ao destinatário com segurança. Por isso, o transmissor escreve a mensagem de forma culta e somente depois aplica o método de codificação, para poder transmitir a mensagem cifrada. Essa mensagem codificada será transmitida ao receptor que, ao recebê-la, terá também o seu decodificador com a chave inversa, ou seja, uma função inversa da codificação aplicada ao cifrar a mensagem na forma culta. Aplicando-se a chave, a mensagem voltará a ficar na forma culta, e o receptor poderá ler claramente o texto. Assim, a decodificação de códigos é uma função inversa.

Podcast 2

Crescimento de funções

Definição 11: Uma função *f* cujos domínio e contradomínio são subconjunto do conjunto dos números reais é chamada de crescente se $f(x) \leq f(y)$, e estritamente crescente se $f(x) < f(y)$, sempre que $x < y$ e *x* e *y* estão no domínio de *f*.

Definição 12: Uma função *f* cujos domínio e contradomínio são subconjunto do conjunto dos números reais é chamada de decrescente se $f(x) \geq f(y)$, e estritamente decrescente se $f(x) > f(y)$, sempre que $x < y$ e *x* e *y* estão no domínio de *f*.

Por essas definições, podemos perceber que uma função estritamente crescente ou estritamente decrescente precisa ser uma função injetora. Contudo, se essa função for apenas crescente ou decrescente, ela não precisa ser injetora.

Exemplo 16: Seja a função $f: R \to R$ definida por $f(x) = 2x + 5$, verifique se a função é crescente ou decrescente.

Resolução: Vamos definir dois valores quaisquer que estão dentro do domínio da função, portanto, vamos pegar os valores -3 e -1, como -3<-1. Precisamos saber agora o quanto vale esse valor aplicado na função:

$$f(\text{-}3) = 2(\text{-}3) + 5 = -1$$

$$f(\text{-}1) = 2(\text{-}1) + 5 = 3$$

Assim, definimos que $f(-3) < f(-1)$.Logo, a função é crescente.

Exemplo 17: Seja a função $f: R \to R$ definida por $f(x) = -2x + 3$, verifique se a função é crescente ou decrescente.

Resolução: Vamos definir dois valores quaisquer que estão dentro do domínio da função, portanto, vamos pegar os valores -2 e -1, como -2<-1. Precisamos saber agora o quanto vale esse valor aplicado na função:

$$f(\text{-}2) = -2(\text{-}2) + 3 = 7$$

$$f(\text{-}1) = -2(\text{-}1) + 3 = 5$$

Assim, definimos que $f(\text{-}2) > f(-1)$ .Logo, a função é decrescente.

Gráficos de funções

Para a construção de um gráfico, precisamos associar um conjunto de pares de $A \times B$ para cada função de A em B. Esse conjunto de pares origina o gráfico da função.

Definição 13: Considerando f como uma função de A em B. Sendo que o gráfico da função de f é o conjunto de pares ordenados $\{(a, b)/a \in A \text{ e } f(a) = b\}$.

Exemplo 18: Seja a função $f: R \rightarrow R$, construa o gráfico da função $f(x) = 2x + 5$.

Resolução: O gráfico da função está definido no domínio dos reais, sendo real também o seu contradomínio, analisemos o gráfico dessa função (Figura 16).

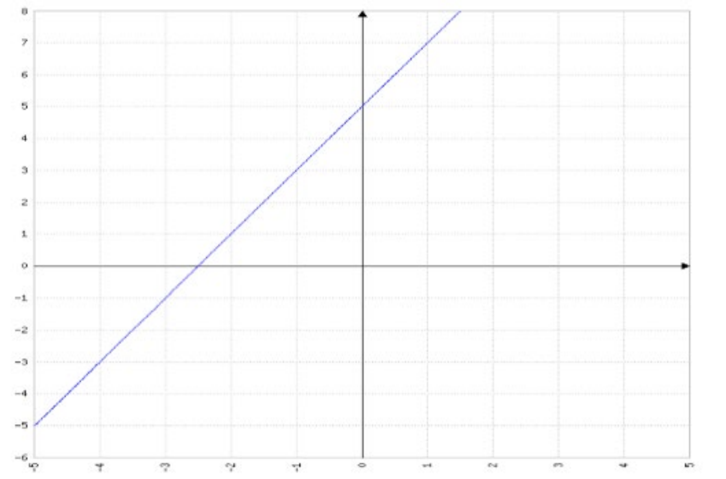


Figura 16: *Gráfico da função* $f(x) = 2x + 5$. ***Fonte:*** mathe-fa

Por esse gráfico, observamos que a função corta o eixo x quando x=-2,5 e corta o eixo y quando y= 5.

Exemplo 19: Seja a função $f: R \rightarrow R$, construa o gráfico da função $f(x) = -2x + 3$.

Resolução:

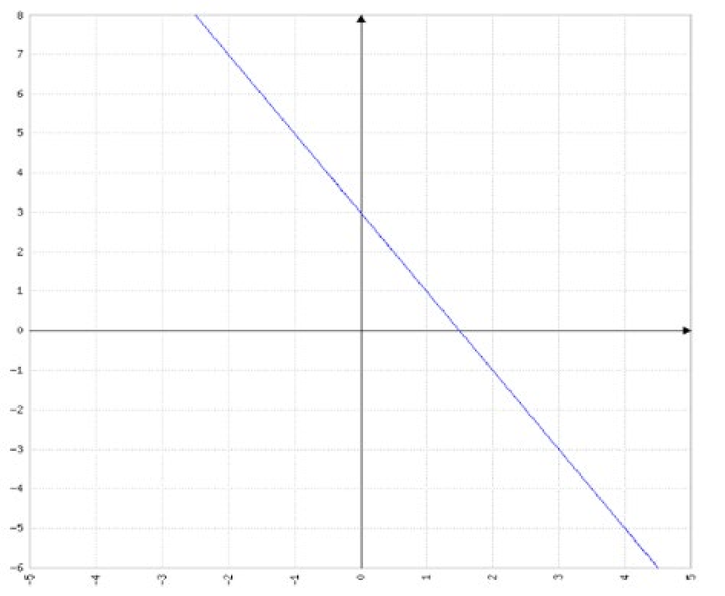


Figura 17: *Gráfico da função* $f(x) = -2x + 3$. ***Fonte:*** mathe-fa

Por esse gráfico, podemos observar que a função corta o eixo x quando x=-1,5 e corta o eixo y quando y= 3.

Exemplo 20: Seja a função $f: R \rightarrow R$, construa o gráfico da função $f(x) = x^2$.

Resolução:

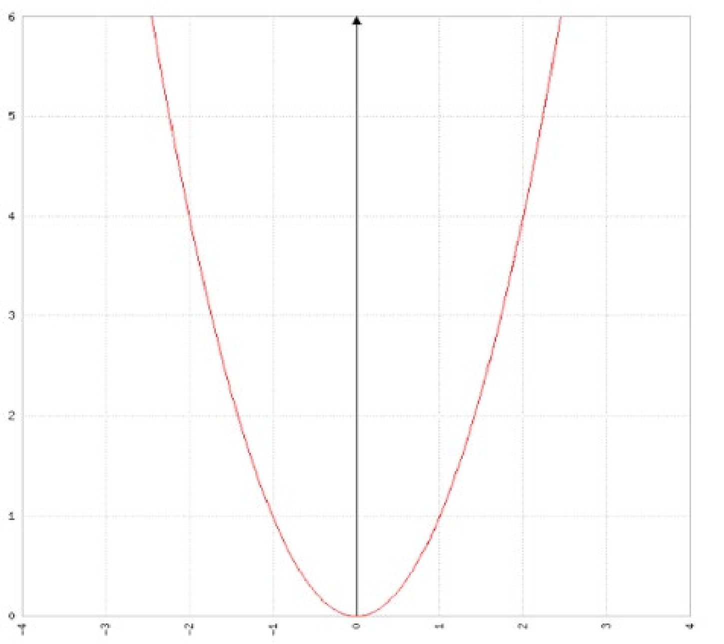


Figura 18: *Gráfico da função* $f(x) = x^2$. **Fonte:** mathe-fa

Ao analisar esse gráfico, fica mais simples verificar o motivo de essa função não ser injetora ou sobrejetora. Note que se você traçar uma linha qualquer, paralela ao eixo x, essa linha tocará em mais de um ponto que percorre essa parábola. Isso não poderia acontecer para que uma função seja injetora e sobrejetora.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste módulo, apresentamos o grandioso mundo das funções. Demonstramos o que significa ser uma função injetora, sobrejetora, bijetora, composta ou inversa. Além disso, também falamos sobre o crescimento e o decrescimento de uma função.

Funções estão em nosso cotidiano muito mais do que imaginamos, sobretudo a função composta. Na computação, ela é de extrema importância, pois ao programarmos definimos algumas variáveis no formato de uma função e posteriormente chamamos na programação apenas essa variável.

SÍNTESE

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DA COMPUTAÇÃO

Neste módulo, abordamos o conceito de **Funções**, seus tipos e características: função injetora, bijetora, sobrejetora, composta e inversa.

- **Funções e suas definições.**
- **Domínio e Imagem de uma função.**
- **Função Piso.**
- **Função Teto.**
- **Função Injetora.**
- **Função Sobrejetora.**
- **Função Bijetora.**
- **Função Composta.**
- **Função Inversa.**
- **Crescimento e Decrescimento de Funções.**
- **Gráficos das Funções.**

Referências Bibliográficas & Consultadas

DAGHLIAN, J. **Lógica e álgebra de boole**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2011 [Minha Biblioteca].

GERSTING, J. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação: um tratamento moderno de matemática discreta**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004 [Minha Biblioteca].

PAIL, D. B.; TRAMUNT, A. I. **Fundamentos Linguísticos e Computação**. Porto Alegre: EdiPUCRS, 2015 [Biblioteca Virtual].

PANONCELI, D. M. **Análise Matemática.** São Paulo. Editora InterSaberes, 2017 [Biblioteca Virtual].

ROSEN, Kenneth H. **Matemática Discreta e suas Aplicações**.6. ed. Porto Alegre: AMGH. 2010.

SIMÕES-PEREIRA, J.M.S. **Grafos e redes: teoria e algoritmos básicos**. Rio de Janeiro: Editora Rio de Janeiro, 2013 [Biblioteca Virtual].

STEIN, C.; DRYSDALE, R. L.; BOGART, K. **Matemática Discreta para ciência da computação**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013 [Biblioteca virtual].

TOCCI, R. J.; WIDMER, N. S.; MOSS, G. L**. Sistemas digitais: princípios e aplicações**. 11. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011 [Biblioteca Virtual].

WEBER, R. F. **Fundamentos de arquitetura de computadores**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012 [Minha Biblioteca].

FAM
ONLINE