解释一下什么叫“任何解释？”

个体域D 个体常项a 谓词符号P 函数符号*f*

在论域确定之后，一个谓词公式的解释，
包括对谓词变项、命题变项、
函数和自由个体的具体设定

个体域D 个体常项a 谓词符号P 函数符号*f*

```
int fibo(int n) {
    if ((n == 1) || (n == 2)) {
        return 1;
    }

    int prev = 1;
    int curr = 1;

    for (int i = 3; i <= n; i++) {
        int sum = prev + curr;
        prev = curr;
        curr = sum;
    }

    return curr;
}
```

```
//根据半径计算圆的周长和面积
#include <iostream.h>
const float PI=3.1416;          //声明常量(只读变量)PI为3.1416
float fCir_L(float);            //声明自定义函数fCir_L()的原型
float fCir_S(float);            //声明自定义函数fCir_S()的原型

//以下是main()函数
main()
{
    float r,l,s;                //声明3个变量

    cout<<"r=";                 //显示字符串
    cin>>r;                     //键盘输入
    l=fCir_L(r);                //计算圆的周长，赋值给变量l
    s=fCir_S(r);                //计算圆的面积，赋值给变量s
    cout<<"l="<<l;              //显示计算结果
    cout<<"\ns="<<s;
}
```

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设*A*为一个谓词公式，若至少存在一个解释使*A*为真，则称*A*为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$
  在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)\mathrm{P}(x) \vee (\forall x)\neg \mathrm{P}(x)$
  在D1上普遍有效，但在D2上则不是。

D1 = {0}; D2= {0,1}
令P(0) =1, P(1)=0

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-5 谓词逻辑的判定问题

- 谓词逻辑的判定问题，指的是谓词逻辑任一公式的普遍有效性的判定问题。
- 若说谓词逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一谓词公式都能判定是否为普遍有效。

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- 一阶谓词逻辑是不可判定的。

  对任一谓词公式而言，没有一个能行的方法判明它是否是普遍有效的。

  – 判定问题的困难在于个体域是个无穷集以及对谓词设定的任意性

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

1936年Turing和Church分别独立地证明：

一阶谓词逻辑的普遍有效性是不可判定的

如果公式本身是普遍有效(或不可满足)的，则存在有限的判定算法，否则不存在有限的判定算法。

数学家怎么想的……？

- 1900年，著名的大数学家希尔伯特在世纪之交的数学家大会上给国际数学界提出了著名的23个数学问题。其中第十问题是这样的：

  存在不存在一种有限的、机械的步骤能够判断“丢番图方程”是否存在解？

  - 丢番图方程（Diophantine Equation）：有一个或者几个变量的整系数方程，它们的求解仅仅在整数范围内进行。

$$a_1x_1^{b_1}+a_2x_2^{b_2}+\ldots\ldots+a_nx_n^{b_n}=c$$

一篇论文

《论可计算数及其在判定性问题上的应用》

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. TURING.

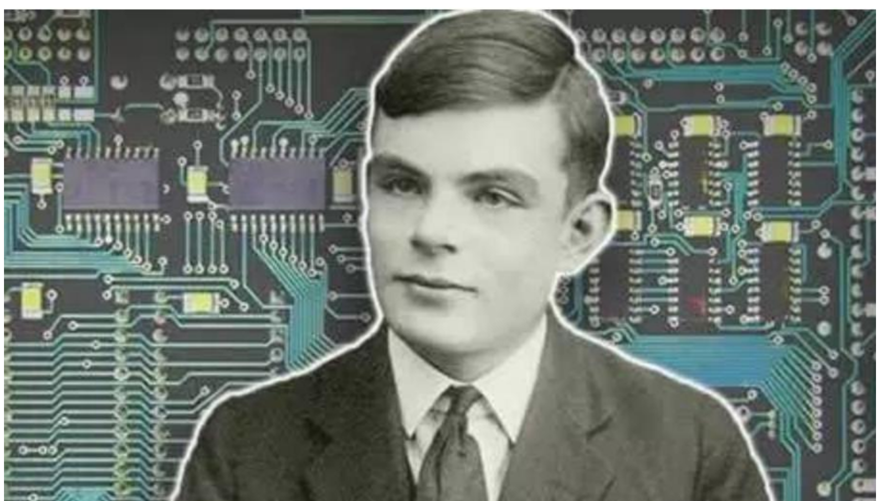
[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

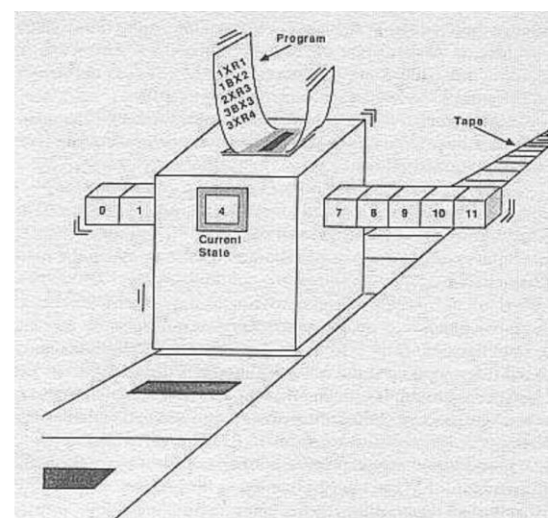
The "computable" numbers may be described briefly as the real numbers whose expressions as a decimal are calculable by finite means. Although the subject of this paper is ostensibly the computable *numbers*, it is almost equally easy to define and investigate computable functions of an integral variable or a real or computable variable, computable predicates, and so forth. The fundamental problems involved are, however, the same in each case, and I have chosen the computable numbers for explicit treatment as involving the least cumbrous technique. I hope shortly to give an account of the relations of the computable numbers, functions, and so forth to one another. This will include a development of the theory of functions of a real variable expressed in terms of computable numbers. According to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine.

图灵机

- 《论可计算数及其在判定性问题上的应用》

- 世界上是否所有的数学问题都有明确的答案？
- 如果有明确的答案，是否可以通过有限步骤的计算得到答案？
- 对于那些有可能在有限步骤计算出来的学习问题，是否有一种假想的机械，让它不断运行，最后机器停下来的时候，那个数学答案就计算出来了？





停机问题到一阶逻辑

- 停机问题
  - 是否存在一个算法，对于任意给定的图灵机都能判定任意的初始格局是否会导致停机？
  - 图灵证明，这样的算法是不存在的，即停机问题是不可判定的
  - 1937年，图灵用他的方法解决了著名的希尔伯特判定问题：狭谓词演算(亦称一阶逻辑)公式的可满足性的判定问题。
    - 用一阶逻辑中的公式对图灵机进行编码，再由图灵机停机问题的不可判定性推出一阶逻辑的不可判定性。
    - 在此处创用的“编码法”成为后来人们证明一阶逻辑的公式类的不可判定性的主要方法之一。

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- 没有一般的方法使得在有限步内判别一阶逻辑的公式是否普遍有效或不可满足。
- 如果公式本身是普遍有效（或不可满足），那么就能在有限步内完成判定。
- 对于其它类型的公式则不一定能在有限步内得出结论，判定过程有可能永不停止。

Discrete Mathematics

离散数学(1)

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

马昱春

清華大學
Tsinghua University

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算

5.6 谓词逻辑的归结推理法

- 普遍有效公式是最重要的逻辑规律。
- 等值式和推理式都是普遍有效的谓词公式。
- 相比命题逻辑，量词谓词的引入，使得谓词演算的应用更为广泛。
- 本章从语义的角度进行非形式的描述。

温习普遍有效公式(4-6-1)

任何解释，不应该包括个体域，已确定个体域个数。默认为总论域。

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例 $(\forall x)(P(x)\vee\neg P(x))$

$(\forall x)P(x)\rightarrow P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x)\rightarrow(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$

$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)\neg P(x)$

在D1上普遍有效，但在D2上则不一定。

D1 = {0}; D2= {0,1}

令P(0) =1, P(1)=0

5. 1 否定型等值式

5-1-1 等值

设A, B是一阶谓词逻辑中任意两个公式，若 $A \quad B$是普遍有效的公式，则称 A与 B等值，记作

$$A = B \quad 或 \quad A \qquad B$$

一、从命题公式移植来的等值式

- 命题公式中常常用到的等价式及永真蕴含式也可以看作是谓词演算中的等价式及永真蕴含式

例如

$A(x) \Rightarrow A(x) \vee B(x)$

$(A(x) \rightarrow B(x)) = (\neg A(x) \vee B(x))$

$\neg(\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)) = \neg \exists x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$

内容回顾:命题公式

- 等值公式
- 基本推理公式

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$
$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$
$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"→" 不满足结合律

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$
$$P \wedge Q = Q \wedge P$$
$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$
$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

"→" 不满足交换律

4. 分配律

$$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$
$$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
$$P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$$
$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

"↔" 不满足分配律

内容回顾

5. 等幂律（恒等律）

$$P \vee P = P$$
$$P \wedge P = P$$
$$P \rightarrow P = T$$
$$P \leftrightarrow P = T$$

6. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$
$$P \wedge (P \vee Q) = P$$

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

$$\neg(P \rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$
$$= (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$

8. 同一律：

$P \vee F = P$　　$P \wedge T = P$

$T \rightarrow P = P$　　$T \leftrightarrow P = P$

还有

$P \rightarrow F = \neg P$　　$F \leftrightarrow P = \neg P$

9. 零律：

$$P \vee T = T$$
$$P \wedge F = F$$

还有

$$P \rightarrow T = T$$
$$F \rightarrow P = T$$

10. 补余律：

$$P \vee \neg P = T$$
$$P \wedge \neg P = F$$

还有

$$P \rightarrow \neg P = \neg P$$
$$\neg P \rightarrow P = P$$
$$P \leftrightarrow \neg P = F$$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \to Q = \neg P \lor Q$
- 前提合取合并 $P\to(Q\to R) = (P\land Q)\to R$
- **等价等值式：** $P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \land (Q \to P)$
- **假言易位：** $P \to Q = \neg Q \to \neg P$
- **等价否定等值式：** $P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- **归谬论：** $(P \to Q) \land (P \to \neg Q) = \neg P$

常用的等值公式

- $P \leftrightarrow Q = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P \leftrightarrow Q = (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ 前提交换
- $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) = (P \vee Q) \rightarrow R$ 前提析取合并

基本推理公式

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$，但 $P \vee Q \not\Rightarrow P$
2. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow P$　　1式的直接推论 $P\wedge \neg Q \Rightarrow P$
3. $\neg(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$　　1式的直接推论 $P\wedge \neg Q \Rightarrow \neg Q$
4. $P \Rightarrow P\vee Q$
5. $\neg P \Rightarrow P\rightarrow Q$　　2式的逆否，4式的推论。
6. $Q \Rightarrow P\rightarrow Q$　　3式的逆否，4式的推论。
7. $\neg P\wedge(P\vee Q) \Rightarrow Q$　　非P，而P∨Q又成立，只有Q成立
8. $P\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow Q$　　*假言推理，分离规则，7式的变形
9. $\neg Q\wedge(P\rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$　7式的变形

基本推理公式

10. $(P\rightarrow Q)\wedge(Q\rightarrow R) \Rightarrow P\rightarrow R$	*三段论
11. $(P\leftrightarrow Q)\wedge(Q\leftrightarrow R) \Rightarrow P\leftrightarrow R$	类似10式
12. $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)\wedge(P\vee Q) \Rightarrow R$	10式的推论
13. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$	10式的推论
14. $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg Q\vee\neg S) \Rightarrow \neg P\vee\neg R$	9式的推论
15. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R))$	P=F时左=右， P=T时右=T
16. $(Q\rightarrow R) \Rightarrow ((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$	P=T时左=右， P=F时右=T

二、消去量词等值式

将论域限定为有限集，$\{1,2, \ldots,k\}$，则有：

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

5.1 否定型等值式

5-1-2 否定型等值式

$$(\forall x)P(x) = P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \lor P(2) \lor \ldots \lor P(k)$$

$$\neg(\forall \boldsymbol{x})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = (\exists \boldsymbol{x})\neg \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

证明：设论域为$\{a_1,a_2,....,a_n\}$，则

$\neg\forall xP(x)=\neg(P(a_1)\wedge P(a_2)\wedge\ldots\wedge P(a_n))$

$=\neg P(a_1)\vee\neg P(a_2)\vee\ldots\vee\neg P(a_n)$

$=\exists x\neg P(x)$

解释法

1. $\neg\forall xP(x)=\exists x\neg P(x)$
2. $\underline{\neg\exists xP(x)=\forall x\neg P(x)}$

- 证明：从语义上证明2。

  对任意赋值$I(D)$，设$\neg\exists xP(x)$为真，则$\exists xP(x)$为假，即对任意的$x\in$D，$P(x)$为假，所以，对任意的$x\in D$，$\neg P(x)$为真，即$\forall x\neg P(x)$为真，因此$\neg\exists xP(x)\Rightarrow\forall x\neg P(x)$。

  对任意赋值$I(D)$，设$\forall x\neg P(x)$为真，则对任意的$x\in D$，$\neg P(x)$为真，即对任意的$x\in D$，$P(x)$为假，所以$\exists xP(x)$为假，$\neg\exists xP(x)$为真，因此 $\forall x\neg P(x)\Rightarrow \neg\exists xP(x)$。

  综上，得证。

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$
$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$
$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

- {1，2}域分析
- 否定词越过量词的移动，使用摩根定律

例1. 并非所有的动物都是猫

设　　A(x)：x是动物

　　　B(x)：x是猫

原语句可表示成$\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))$

依否定型公式得

$$
\begin{aligned}
&\neg(\forall x)(A(x)\rightarrow B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(A(x)\rightarrow B(x))\\
&\quad=(\exists x)\neg(\neg A(x)\vee B(x))\\
&\quad=(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))
\end{aligned}
$$

而$(\exists x)(A(x)\wedge\neg B(x))$的含义是有一个动物不是猫，显然这句话与原语句等同

- 例: “天下乌鸦一般黑” 的表示

  设F(x): x是乌鸦, $G(x, y)$: x与y 一般黑

  原语句可表示成

  $$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$$

  与之等值的公式是

  $$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$$

  即不存在x, y是乌鸦但不一般黑。

  这两句话含义是相同的。

  思考：是否需要判断x，y不同？

- 经谓词演算有

$$\neg(\exists x)(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$$

$$=(\forall x)\neg(\exists y)(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y)))$$

$$=(\forall x)(\forall y)\neg(F(x)\wedge F(y)\wedge\neg G(x,y))$$

$$=(\forall x)(\forall y)(\neg(F(x)\wedge F(y))\vee G(x,y))$$

$$=(\forall x)(\forall y)(F(x)\wedge F(y)\rightarrow G(x,y))$$

三、量词分配等值式

5.2 量词分配等值式

5-2-1 量词对析取词、合取词的分配律

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

其中q是命题变项，与个体变元 x 无关

5.2 量词分配等值式

5-2-2 量词对蕴含词的分配律

$$(\forall \boldsymbol{x})(P(x) \to q) = (\exists \boldsymbol{x})P(x) \to q$$

$$(\exists x)(P(x) \to q) = (\forall x)P(x) \to q$$

$$(\forall x)(p \to Q(x)) = p \to (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)\big(p \to Q(x)\big) = p \to (\exists x)Q(x)$$

其中p, q是命题变项，与个体变元 x 无关

给出上面等式的证明。

先证明其中的第一个等式。

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$
$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$
$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$
$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \to q)$$

$$= (\forall x)(\neg P(x) \vee q)$$

$$= (\forall x)\neg P(x) \vee q$$ 依5.2.1的等值式

$$= \neg(\exists x)P(x) \vee q$$ 依5.1.2的等值式

$$= (\exists x)P(x) \to q$$

再证明其中的第三个等式

$$(\forall x)(p \to Q(x))$$

$$= (\forall x)(\neg p \lor Q(x))$$

$$= \neg p \lor (\forall x)Q(x)$$ 依5.2.1的等值式

$$= p \to (\forall x)Q(x)$$

同样可证其余两个等值式。

5.2 量词分配等值式

5-2-3 全称量词对∧，存在量词对∨的分配律

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

用$\{1,2\}$域方法验证：

∀ 对∨ 不满足分配律， ∃对∧不满足分配律

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

- 从{1,2}域上看

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$= (P(1) \wedge Q(1)) \ \wedge \ (P(2) \wedge Q(2))$$

$$= (P(1) \wedge P(2)) \ \wedge \ (Q(1) \wedge Q(2))$$

$$= (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$

$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x) Q(x)$$

$$
\begin{aligned}
&(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \\
&= (P(1) \vee Q(1)) \vee (P(2) \vee Q(2)) \\
&= (P(1) \vee P(2)) \vee (Q(1) \vee Q(2)) \\
&= (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x) Q(x)
\end{aligned}
$$

$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$$
$$=(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

$(\exists x)P(x)=(\exists y)P(y)$ 变量易名规则

$$(\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)=(\exists x)P(x)\wedge(\exists y)Q(y)$$
$$=(\exists x)(P(x)\wedge(\exists y)Q(y))$$
$$=(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$$

但需注意：

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \neq (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \neq (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

而只满足

$$(\forall x)\ P(x) \vee (\forall x) Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x) P(x) \wedge (\exists x) Q(x)$$

$$(\forall x)P(x)\lor(\forall x)Q(x)\Rightarrow$$
$$(\forall x)(P(x)\lor Q(x))$$

$(\forall x)(P(x)\lor Q(x))$ (从{1,2}域上看)

$= (P(1)\lor Q(1)) \land (P(2)\lor Q(2))$

$= (P(1)\land P(2)) \lor (Q(1)\land Q(2)) \lor (P(1)\land Q(2))$
$\lor (Q(1)\land P(2))$

$=(\forall x)P(x)\lor(\forall x)Q(x)\lor$
$(P(1)\land Q(2)) \lor (Q(1)\land P(2))$

$(\exists x)(P(x)\land Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\land(\exists x)Q(x)$

- 证明：

假设在论域D和解释I下前件$\exists x(P(x)\land Q(x))$为真，则论域中至少有一个个体x0，使得 $P(x0)\land Q(x0)$为真

于是$P(x0)$和$Q(x0)$都为真，所以$(\exists x)P(x)$以及$(\exists x)Q(x)$为真, 进而得$(\exists x)P(x)\land(\exists x)Q(x)$为真。

于是有

$$(\exists x)(P(x)\land Q(x))\Rightarrow(\exists x)P(x)\land(\exists x)Q(x)$$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))\Rightarrow(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$

- 用解释法证明：

  设在一解释I、D下，有$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x))$为T，

  则对D中的任何一个客体x，有$P(x)\rightarrow Q(x)$为T

  这必能保证$(\forall x)P(x)$为T时，$(\forall x)Q(x)$为T

  从而$(\forall x)P(x)\rightarrow(\forall x)Q(x)$为T。

等值演算规则

- 置换规则
- 换名规则
- 代替规则

置换规则

- 设$\Phi(A)$是含公式A的公式，若$A \Leftrightarrow B$，则$\Phi(A) \Leftrightarrow \Phi(B)$.
- 一阶逻辑中的置换规则与命题逻辑中的置换规则形式上完全相同，只是在这里A，B是一阶逻辑公式.

换名规则（约束变元的换名）

- 目的是使每个变元性质唯一
- 设A为一公式，将A中某量词辖域中某约束变项的所有出现及相应的约束变元，改成该量词辖域中未曾出现过的某个体变项符号，公式中其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$

例：$\forall x A(x) \vee B(x)$

由于公式中的x即是自由的又是约束的，可利用此规则进行换名为：

$\forall t\, A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B(x)$ 后可利用量词的扩充得到：

$$\forall t\, A(t) \vee B(x) \Leftrightarrow \forall t(A(t) \vee B(x))$$

代替规则 （自由变元的代替）

设A为一公式，将A中某个自由出现的个体变项的所有出现用A中未曾出现过的个体变项符号代替，A中其余部分不变，设所得公式为A'，则$A' \Leftrightarrow A$.

例： $\forall xF(x, y, z) \to \exists yG(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \to \exists yG(x, y, z)$

(代替规则) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x F(x, t, z) \to \exists yG(w, y, z)$

(代替规则) 自由的x用w代换

例5.5

例5.5 证明下列等值式。

（1） $\neg\exists x(M(x)\wedge F(x)) \Leftrightarrow \forall x(M(x)\rightarrow \neg F(x))$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$

（3） $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,\ y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge \neg H(x, y))$

（4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow \neg L(x, y))$

（1） $\neg \exists x(M(x) \wedge F(x)) \Leftrightarrow$

$$\forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

$$\neg \exists x(M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg (M(x) \wedge F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(\neg M(x) \vee \neg F(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(M(x) \rightarrow \neg F(x))$$

（2） $\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x)) \Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge \neg G(x))$

$$
\begin{aligned}
&\neg\forall x(F(x)\rightarrow G(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x\neg(F(x)\rightarrow G(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x\, \neg(\neg F(x)\vee G(x))\\
&\Leftrightarrow \exists x(F(x)\wedge\neg G(x))
\end{aligned}
$$

3） $\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$

$$\neg\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\neg(\forall y(F(x)\wedge G(y)\to H(x,y)))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y\neg(\neg(F(x)\wedge G(y))\vee H(x,\mathrm{y}))$$

$$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge\neg H(x,y))$$

（4） $\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$
$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x, y))$

$$\neg\exists x\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\neg(\exists y(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y)))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y\neg(F(x)\wedge G(y)\wedge L(x, y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(F(x)\wedge \mathrm{G}(y))\vee\neg \mathrm{L}(x, y))$$
$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow\neg L(x, y))$$

5.3 范式 (Normal Form)

前束范式
Skolem标准型

Tsinghua University

5-3-1 前束范式

设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

5-3-1 前束范式

- 前束范式的一般形式为

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\dots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

其中$Q_i(1<=i<=n)$为$\forall$或$\exists$，M为不含量词的公式，称作公式A的基式或母式。

5-3-2 前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式都存在与之等值的前束范式，但其前束范式并不唯一。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词蕴含和双蕴含，。
2. 右移否定词¬（利用否定型等值式与摩根律）。
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

例1：求下式的前束范式

$\neg(\ (\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x))\ )$

可按下述步骤实现：

(1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$；得

$\neg(\ \neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y, b)\vee R(x))\ )$

(2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

$=(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b)\wedge\neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \wedge (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists y)\neg Q(y, b) \wedge \neg R(x))$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \wedge (\exists z)\neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \wedge \neg Q(z, b) \wedge \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$$

使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的$S(a, b, x, y, z)$是原公式的母式。

$(\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$是否唯一？

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z) \wedge P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

前束范式存在定理

定理5.1 一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

证明：通过如下算法，可将公式化成等价的前束范式。

1. 利用量词转化公式，把否定符号深入到指导变元的后面。

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

2. 如果必要的话，将约束变量改名。

3. 利用量词辖域收缩、扩张等值式把量词移到全式的最前面，这样便得到与公式等价的前束范式。

说明

求前束范式的过程，就是制造量词辖域可以扩大的条件，进行量词辖域扩大。

任何公式的前束范式都是存在的，但一般说来，并不唯一。

利用一阶逻辑等值式以及三条变换规则（置换规则、换名规则、代替规则）就可以求出与公式等值的前束范式，或所谓公式的前束范式。

$$(1)\quad \forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$$

解 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\neg\exists yG(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall y\neg G(y)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\forall y\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x)\wedge\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

或者 $\forall xF(x)\wedge\neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x)\wedge\forall x\neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x)\wedge\neg G(x))$ (量词对∧分配律)

由此可知，(1)中公式的前束范式是不唯一的.

(2) $\forall xF(x) \vee \neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$ (否定型等值式)

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall y\neg G(y)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \forall y\neg G(y))$ (量词对∧分配律)

$\Leftrightarrow \forall x\forall y(F(x) \vee \neg G(y))$ (量词对∧分配律)

问：(2)的下述求法是否正确？

$\forall xF(x) \vee \neg\exists xG(x)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x) \vee \forall x\neg G(x)$

$\Leftrightarrow \forall x(F(x) \vee \neg G(x))$

例5.8 求公式的前束范式

(1)$\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall tF(t,y)\to\exists wG(x,w)$ (换名规则)

$\Leftrightarrow \exists t\exists w(F(t,y)\to G(x,w))$ (分配律)

或者

$\forall xF(x,y)\to\exists yG(x,y)$

$\Leftrightarrow \forall xF(x,t)\to\exists yG(w,y)$ (代替规则)

$\Leftrightarrow \exists x\exists y(F(x,t)\to G(w,y))$ (分配律)

说明

解本题时一定注意，哪些个体变项是约束出现，哪些是自由出现，特别要注意那些既是约束出现又是自由出现的个体变项。不能混淆。

5-3-4 SKOLEM 标准型（SNF）

Skolem normal form

Thoralf Skolem worked on Diophantine equations (丢番图方程), mathematical logic, group theory, lattice theory and set theory.

Born: 23 May 1887 in Sandsvaer, Norway
Died: 23 March 1963 in Oslo, Norway

5-3-4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 *A*，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称量词的左边，且至少有一个存在量词；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，便得到公式 *A*的 SKOLEM 标准型。

- 公式 *A*与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

定义？

收藏 | 0

Skolem标准型 编辑

本词条由"科普中国"百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

Skolem标准型是Skolem于1920年提出的一个使一阶公式标准化的方法，其定义如下：Skolem标准型是如下任意一种形式的一阶命题：(1)$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m \exists y_1 \exists y_2 \ldots \exists y_n U x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_n$(ⅡΣ型)；(2)$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_m U x_1 x_2 \ldots x_m$(Ⅱ型)；(3)$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_m U x_1 x_2 \ldots x_m$(Σ型)。其中，U是不包含量词且连接符仅仅为$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$的公式。

中文名	Skolem标准型	别　称	斯柯林标准型，斯柯林标准范式等
外文名	Skolem standard model	相关概念	谓词公式，存在量词，全称量词等
所属学科	数学	提出者	斯柯林(Skolem)

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Main page
Contents
Featured content
Current events
Random article
Donate to Wikipedia
Wikipedia store

Interaction

Help

Skolem normal form

From Wikipedia, the free encyclopedia

In mathematical logic, a formula of first-order logic is in **Skolem normal form** if it is in prenex normal form with only universal first-order quantifiers.

Every first-order formula may be converted into Skolem normal form while not changing its satisfiability via a process called **Skolemization** (sometimes spelled **Skolemnization**). The resulting formula is not necessarily equivalent to the original one, but is equisatisfiable with it: it is satisfiable if and only if the original one is satisfiable.[1]

Reduction to Skolem normal form is a method for removing existential quantifiers from formal logic statements, often performed as the first step in an automated theorem prover.

5-3-7 ∀前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 $\forall$前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A都可化成相应的$\forall$前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A 是不可满足的当且仅当其$\forall$前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说对于不可满足的公式，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。

该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数$f(y, z)$ (未在P中出现过)代入。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数$g(y, z, v)$ (未在P中出现过也不同于$f(y, z)$)代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$$

消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一$x$，都有一个$y$使$P(x, y)$成立，那么这个$y$通常是依赖于$x$的，可视作$x$的某个函数$f(x)$。

从而有Skolem标准形$(\forall x)\mathrm{P}(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是$x$的函数$f$, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

在$\{1, 2\}$域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

5-3-5 ∃前束范式*

- 一阶谓词逻辑的任一公式的前束范式（或称SKOLEM标准型）的形式为

$$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_i)(\forall x_{i+1})\ldots(\forall x_n)M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

即所有的存在量词都在全称量词的左边,且应保证至少有一个存在量词($i \geq 1$)，同时$M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$中不含量词也无自由个体变项。

5-3-6 ∃前束范式存在定理

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A 都可以化为相应的∃前束范式，并且 A 是普遍有效的当且仅当其∃前束范式是普遍有效的。

谢 谢