第一章习题解答

5. 即$z^2 = z\overline{z}$, 这等价于$z(z-\overline{z})=0$, 这又等价于$z=\overline{z}$, 即$z \in R$.

6. 令$I = \max_{|z|\le r} |z^n + a|$.

(A). 当$a=0$时，显然有$I = r^n$, 等号成立当且仅当$|z|=r$, 即$z = re^{i\theta},\ \theta \in [0,\,2\pi)$.

(B). 当$a \neq 0$时, 则由

$$|z^n + a| \le |z^n| + |a| \le r^n + |a|, \tag{0.1}$$

知$I \le r^n + |a|$.

且当(0.1)的两个不等式同时取等号时等号成立。而(0.1)的第一个等号成立当且仅当z^n与a同向，即存在正数$\lambda > 0$, 使

$$z^n = \lambda a, \tag{0.2}$$

而(0.1)的第二个等号成立当且仅当

$$|z| = r, \tag{0.3}$$

将(0.3)代入(0.2)，得$r^n = \lambda |a|$, 即$\lambda = \frac{r^n}{|a|}$. 将此式代入(0.2)，得

$$z^n = r^n \frac{a}{|a|} = r^n \frac{|a| e^{i \arg a}}{|a|} = r^n e^{i \arg a},$$

由此可得

$$z = z_k = re^{i\frac{\arg a + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

这时，

$$z' = z^n + a = z_k^n + a = (r^n + |a|) e^{i \arg a}.$$

由上面的讨论可知，当$a=0$时，$\max_{|z|\le r} |z^n + a| = r^n$, 这时$z = re^{i\theta}, \quad \theta \in [0,\,2\pi)$.

而当$a \neq 0$时，$\max_{|z|\le r} |z^n + a| = r^n + |a|$, 这时$z = z_k = re^{i\frac{\arg a + 2k\pi}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

且当$z' = z^n + a = z_k^n + a = (r^n + |a|)e^{i\arg a}$时，有$|z'| = r^n + |a|$.

令$J = \min_{|z|\le r} |z^n + a|$.

(A') 当$|a| \le r^n$时，$\min_{|z|\le r} |z^n + a| = 0$, 等号当$z^n = -a$ 时成立.

(1) 若$a = 0$时，可取$z = 0$, 这时$z' = 0, J = 0$.

(2) 若$a \neq 0$时，可取

$$z = z_k = (-a)^{\frac{1}{n}} = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i(\arg a + (2k+1)\pi)}{n}},\ k = 0, 1, 2, \cdots, n-1,$$

这时$z' = 0,\ J = 0$.

(B') 当$|a| > r^n$时,

$$\min_{|z|\le r} |z^n + a| = |a| - r^n,$$

等号当$z^n = -r^n e^{i\arg a}$ 时成立，即

$$z = z_k = re^{\frac{i(\arg a + (2k+1)\pi)}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1.$$

这时有$z' = (-r^n + |a|)e^{i\arg a}$. 且$J = |z'| = |a| - r^n > 0$.

11. 证明：

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2})$$

$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}$$

$$= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

几何意义：平行四边形四边长度的平方和等于其对角线长度的平方和。

19. 此题可推广到$|z_k| = r > 0, k = 1, 2, 3$. 因$z_1 + z_2 + z_3 = 0$, 得$|z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = r$, 代入到11题，得$|z_1 - z_2|^2 = 2(r^2 + r^2) - r^2 = 3r^2$, 类似可得$|z_1 - z_3|^2 = |z_2 - z_3|^2 = 3r^2$. 即$|z_1 - z_2| = |z_1 - z_3| = |z_2 - z_3| = \sqrt{3}r$. 因而三角形是等边三角形。

另一种证法课上讲。

23. 因平面上任一直线均可写成$Ax+By+C=0$, 这里$A,B,C\in R$且不全为零。由$x=\frac{z+\overline{z}}{2}$, $\quad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$, 代入上式，得

$\frac{A-Bi}{2}z+\frac{A+Bi}{2}\overline{z}+C=0$, 令$a=\frac{A+Bi}{2}, c=C$即得$a\overline{z}+\overline{a}z+c=0$.

24. 因圆的方程可写为$x^2+y^2+Ax+By+C=0$, 由$x^2+y^2=|z|^2=z\overline{z}$和23题，可得$x^2+y^2+Ax+By+C=z\overline{z}+a\overline{z}+\overline{a}z+c=0$.

29. 因$f(z_0)\neq 0$, 令$|f(z_0)|=2\epsilon$, 则$\epsilon>0$. 因$f(z)$在z_0连续，知存在$\delta>0$, 使$|z-z_0|<\delta$时，有

$||f(z)|-|f(z_0)||\leq |f(z)-f(z_0)|<\epsilon=\frac{|f(z_0)|}{2}$, 这等价于当$|z-z_0|<\delta$时，有$0<\frac{|f(z_0)|}{2}<|f(z)|<\frac{3|f(z_0|}{2}$.

30. 因$A\in C$, 知$|A|<+\infty$, 又因$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$, 知存在$\delta>0$,当$0<|z-z_0|<\delta$时有$||f(z)|-|A||\leq |f(z)-A|<1$, 这意味着当$0<|z-z_0|<\delta$时有$|f(z)|<|A|+1$, 令$M=|A|+1$即可。

附录

命题： 设$f(z)=z^n+\sum_{k=1}^n c_k z^{n-k}$。证明：$f(z)$为分圆多项式的充要条件是$f(z)$的$n$个零点为圆内接正$n$边形的$n$个顶点。

证明：必要性。设$f(z)$是分圆多项式，则有$f(z)=z^n+c_n$。这时$f(z)=0$当且仅当$z^n=-c_n$, 即

$$z=z_k=|c_n|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\arg(-c_n)+2(k-1)\pi)}{n}},\quad k=1,2,\cdots,n.$$

由此可得

$$|z_k|=|c_n|^{\frac{1}{n}},\qquad \arg z_{k+1}-\arg z_k=\arg\frac{z_{k+1}}{z_k}=\frac{2\pi}{n},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

即点$z_1,z_2,\cdots,z_n$构成圆内接正n边形的n个顶点。必要性得证。

充分性。设$f(z)=\prod_{k=1}^n(z-z_k)$的$n$个零点$z_1,z_2,\cdots,z_n$构成圆内接正$n$边形的$n$个顶点，则$z_k=re^{i\theta_k}$, 这里$\theta_k=\frac{\phi_0+2(k-1)\pi}{n}$, $\quad k=1,2,\cdots,n$ 且ϕ_0是实常数。再令$g(z)=$

$z^n + (-1)^n \prod_{k=1}^n z_k$. 则有

$$\begin{aligned} g(z_k) &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i\sum_{k=1}^n \theta_k} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0 + \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^n (k-1))} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n e^{i(n\phi_0 + (n-1)\pi)} \\ &= z_k^n + (-1)^n r^n (-1)^{n-1} e^{i(n\phi_0)} \\ &= z_k^n - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\theta_k)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\phi_0 + 2(k-1)\pi)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= r^n e^{i(n\phi_0)} - r^n e^{i(n\phi_0)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

即$g(z_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n$. 由于$f(z)$和$g(z)$均是$n$次多项式，且$z^n$的系数均为1(首一多项式），因而有$f(z) \equiv g(z)$. 充分性得证。

命题得证。□