2, 3, 8,
1, 4

2. 证明.

设G存在孤立结点，

即 $\exists v \in G,\ s.t.\ d(v)=0$.

那么，剩下 $n-1$ 个结点，

最多各顶只与 $n-2$ 个结点存有边，

故 $m \le \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，

与题设矛盾，命题得证。☒

3. 证明.

$$\sum_{v\in V}[d^+(v)]^2=\sum_{v\in V}[d^-(v)]^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v\in V}\left(d^+(v)+d^-(v)\right)\left(d^+(v)-d^-(v)\right)=0$$

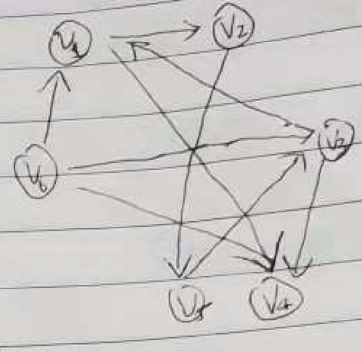
$$\Leftrightarrow \sum_{v\in V} d(v)\left(d^+(v)-d^-(v)\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\sum_{v\in V}\left(d^+(v)-d^-(v)\right)=0.$$

$$\Leftrightarrow \sum_{v\in V} d^+(v)=\sum_{v\in V} d^-(v).$$

最后的等式由性质1.1.3知成立，故命题得证。☒

8.



解：

邻接矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&0\end{bmatrix}$$

关联矩阵：

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&-1&0&0&-1&0&0\\-1&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&-1&0&0&0&-1\\0&0&-1&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

边列表：

A：(1, 1, 2, 3, 3, 5, 6, 6, 6)

B：(2, 4, 5, 1, 4, 3, 1, 3, 4)

正向表：

A：(1, 3, 4, 6, 6, 7, 10)

B：(2, 4, 5, 1, 4, 3, 1, 3, 4)

I. 证明:

1) 9座工厂间，每座与另外三座有联系（协作）;

建图（无向图G）.

"工厂"为结点、"业务联系"为边。

则 $\sum_{v\in V(G)} d(v) = 9\times3 = 27$ 为奇数，

与"结点度数的和为偶"矛盾。☒

2. 若有四座工厂，与偶数个厂有联系。

以1)的方式建图。

题设蕴含"每座"另外的五座厂与奇数个厂有联系。

设 $U\subseteq V(G)$，且 $U=\{v: 2\mid d(v)\}$.

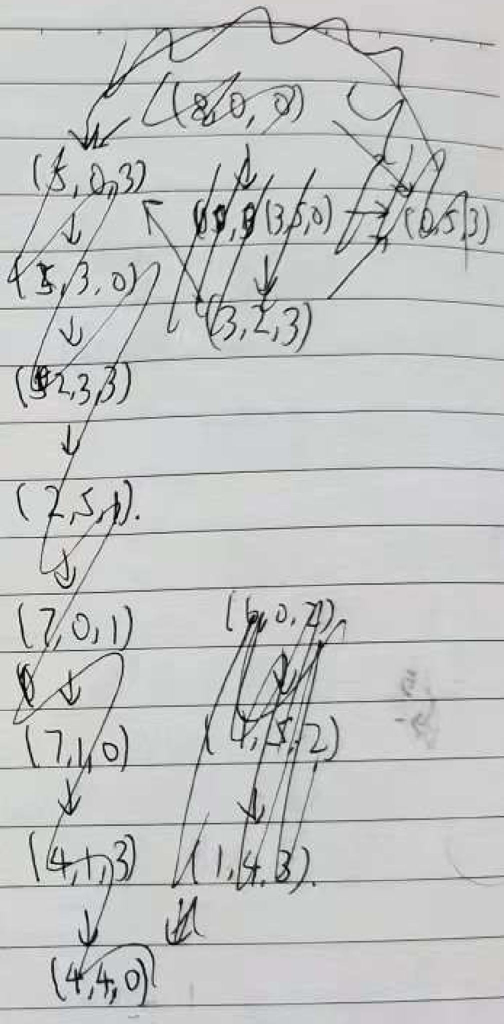
则

$$\sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in U} d(v) + \sum_{v\in V-U} d(v).$$

显然 $\sum_{v\in U} d(v)$ 为偶，但

$\sum_{v\in V-U} d(v)$ 是奇数个奇数的和，仍是奇数，故 $\sum_{v\in V} d(v)$ 为奇，同样与

"结点度的和为偶"矛盾。☒



4. 解:

设 (A,B,C) 为8升,5升和3升量杯中水的体积。

于是有

(8,0,0)→(5,3,0)→(2,3,3)→(2,5,1)→(7,0,1)→(7,1,0)→(4,1,3)→(4,4,0)