大学物理B（1） HW2

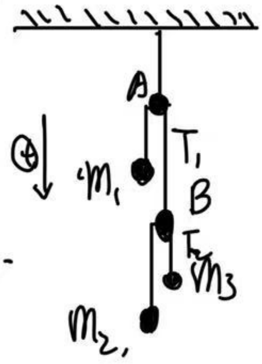
2.5, 2.7, 2.18, 2.19, 2.25。

2.5. 已知：

$m_1=200g$, $\oplus\downarrow$

$m_2=100g$

$m_3=50g$.



求：

(1). 物体加速度.

(2). T_1, T_2.

解：

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2 \\ m_3\ddot{x}_3 = m_3 g - T_2 \end{cases}$$

其中 $\ddot{x}_2$, $\ddot{x}_3$ 又满足.

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = \ddot{x}' - \ddot{x}_1, \\ \ddot{x}_3 = -\ddot{x}' - \ddot{x}_1, \end{cases}$$

$\ddot{x}'$ 为 m_2 相对 B 的加速度。

从滑轮 B 可看出

$T_1 = 2T_2$.

即有

$$\begin{cases} m_1(\ddot{x}_2+\ddot{x}_3) = 4T_2 - 2m_1 g \\ \ddot{x}_2 = g - \frac{T_2}{m_2} \\ \ddot{x}_3 = g - \frac{T_2}{m_3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2g + 2g = \frac{4T_2}{m_1} + \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_3}$$

$$\Rightarrow T_2 = 0.08\times g = 0.784\,N$$

$$T_1 = 2\times T_2 = 1.57\,N,$$

$$\ddot{x}_2 = 9.8 - \frac{0.784}{0.1} = 1.96\,ms^{-2},$$

$$\ddot{x}_3 = 9.8 - \frac{0.784}{0.05} = -5.88\,ms^{-2}$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{1}{2}(\ddot{x}_2+\ddot{x}_3) = 1.96\,ms^{-2}.$$

即

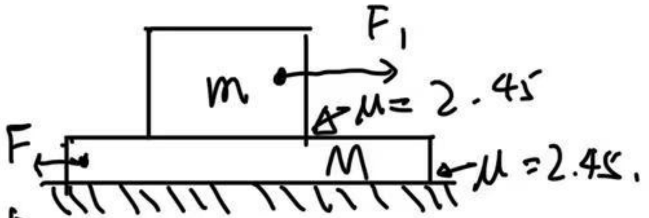
(1). $\begin{cases} \ddot{x}_1 = 1.96\,ms^{-2} \\ \ddot{x}_2 = 1.96\,ms^{-2} \\ \ddot{x}_3 = -5.88\,ms^{-2} \end{cases}$

(2). $T_1 = 1.57N$

$T_2 = 0.784N$

2.7.

已知



解: $+$ $x \leftarrow$

对 M 而言,

$$F_M - \mu(m+M)g - \mu mg = Ma_M.$$

对 m 而言,

$$\mu mg = ma_m,$$

于是

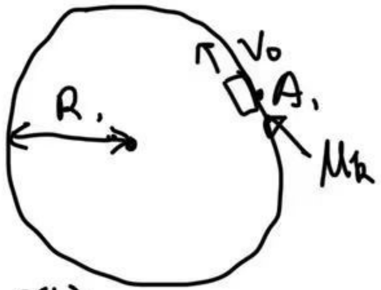
$$F_M = Ma_M + \mu(2m+M)g$$

$$\geq \mu Mg + \mu(2m+M)g$$

$$= 2\mu(m+M)g = 19.4N.$$

2.18.

已知:



求: $v(t)$, $S(t)$.

解:

摩擦力 $f = \frac{\mu_k m v^2}{R}$,

即 $\begin{cases} v(0) = v_0, \\ \dot{v}(t) = -\frac{\mu_k v(t)^2}{R}. \end{cases}$

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{\mu_k}{R} dt.$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{v(t)} = -\frac{\mu_k}{R} t + C,$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{v_0},$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{v_0 R}{v_0 \mu_k t + R}.$$

$$S(t) = \int_0^t v(t')\,dt'$$

$$= \frac{R}{\mu_k} \int_0^t \frac{v_0 \mu_k \, dt'}{v_0 \mu_k t' + R}$$

$$= \frac{R}{\mu_k} \ln \left| v_0 \mu_k t + R \right| \Big|_0^t$$

$$= \frac{R}{\mu_k} \ln \left| \frac{v_0 \mu_k t}{R} + 1 \right|$$ #.

2.19

已知：一离心机，

转速 5×10^4 rpm，

试管口离轴 2.00 cm，

…底…… 10.0 cm

(1). 管口、管底的向心加速度。

(2). 试管装满 12.0g 液体，求管底压力。

(3). 管底 $m_p\times10^5$ 的大分子，受的惯性离心力。

(1). 由已知条件，

$\omega = \frac{5\times10^4}{60}\times2\pi = 5236\ \text{rad}\ s^{-1}$.

管口：$\frac{a}{g} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{5236^2\cdot0.02}{9.8} = 55950.$

管底：$\frac{a}{g} = \frac{5236^2\times0.1}{9.8} = 279800.$

(2). 假设质量均匀分布，

则有 $\mu = \frac{12\times10^{-3}}{0.08} = 0.15\ kg\,m^{-1}$，

$dm = \mu dr.$

$dF = \omega^2 r dm$

$= \omega^2 r\cdot\mu dr$，

$F = \frac{\mu\omega^2}{g}\int_{0.02}^{0.1} r dr.$

$= \frac{0.15\times5236^2}{2}(0.1^2-0.02^2)$

$= 19700N$，

故管底压力为 19700N，相当于 2.01 吨物体受的重力。

(3). $F = m\omega^2 r$

$= 1.67\times10^{-27}\times10^5\times5236^2\times0.1$

$= 4.6\times10^{-16}\ N.$

2.25

已知：

求：ω不同时，珠子在环上的位置。

解：

设珠子质量为m，则向心力

$F=m\omega^2 R\sin\theta$

对F'进行分析，

$$\begin{cases} F'\cos\theta = mg, \\ F'\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta \end{cases}$$

$\Rightarrow mg\sin\theta = m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$

$\Leftrightarrow m\sin\theta(g-\omega^2 R\cos\theta)=0.$

$\Rightarrow \theta=0,\pi,\pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$,

都是珠子在环上的静止位置。

设珠子在环上的切向的力为F''。

$F''=mg\sin\theta-m\omega^2 R\sin\theta\cos\theta$.

θ是稳定点，当且仅当F''取最小值，即$\begin{cases} F''=0 & ① \\ \frac{dF''}{d\theta}>0 & ② \end{cases}$

$\frac{dF''}{d\theta}=mg\cos\theta-m\omega^2 R(2\cos^2\theta-1)$.

由于$\theta=0,\pi,\pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$都满足①，故只须判断②。

$\left.\frac{dF''}{d\theta}\right|_{\theta=0}=mg-m\omega^2 R$.

$\theta=0$时稳定

$\Leftrightarrow g-\omega^2 R>0 \Leftrightarrow \omega<\sqrt{\frac{g}{R}}$，反之$\omega\geq\sqrt{\frac{g}{R}}$就代表$\theta=0$时不稳定。

$\left.\frac{dF''}{d\theta}\right|_{\theta=\pi}=-mg-m\omega^2 R<0$，不稳定。

$\left.\frac{dF''}{d\theta}\right|_{\theta=\pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)}$

$=\frac{mg^2}{\omega^2 R}-m\omega^2 R\left(\frac{2g^2}{\omega^4 R^2}-1\right)$.

$=\frac{mg^2}{\omega^2 R}-\frac{2mg^2}{\omega^2 R}+m\omega^2 R=m\omega^2 R\left(1-\frac{g^2}{\omega^4 R^2}\right)$

$\theta=\pm\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$稳定$\Leftrightarrow 1-\frac{g^2}{\omega^4 R^2}>0$,

$\Leftrightarrow \omega>\sqrt{\frac{g}{R}}$，反之则不稳定。