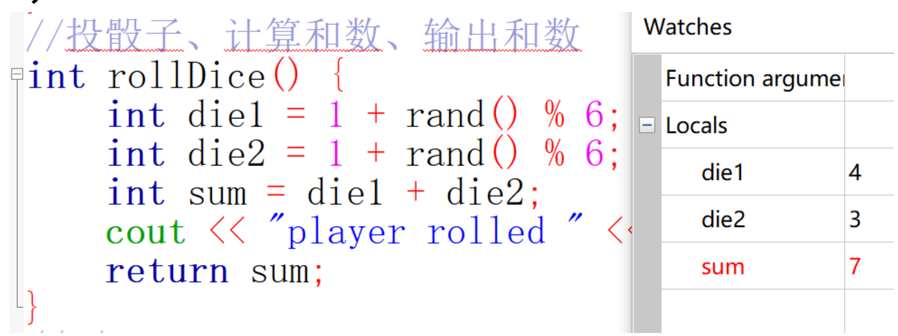
回顾

解释

- 给定非空个体域D，一个解释I由下面部分构成
  - 给论及的每个个体常项符号指定一个D中的元素
  - 给论及的每个函数变项符号指定一个D上的函数
  - 给论及的每个谓词变项符号指定一个D上的谓词
  - $(\forall x)F(g(x, a), x)$
  - 给定解释I，
    - 个体域D_N为自然数集合；
    - $a=0$
    - 函数$g(x,y)=x*y$
    - 谓词$F(x,y)$为$x=y$
    - $(\forall x)(x*0=x)$ 为假命题

赋值

- 给定解释I,对公式中每个自由变项指定个体域中的一个元素称作在解释I下的一个赋值。
  - 给定解释I， $F(f(x, y), f(y, z))$
    - 个体域D_N为自然数集合；
    - a=0
    - 函数$f(x, y) = x + y$
    - 谓词$F(x, y)$为$x=y$
    - 取解释I下的赋值



    - σ(x)=1，σ(y)=2， σ(z)=2，则$F(f(x, y), f(y, z))$是假命题
    - σ(x)=1，σ(y)=2， σ(z)=1，则$F(f(x, y), f(y, z))$是真命题

- 如何表达整个谓词逻辑里使用同一个z的情况呢？

例： $\forall x F(x, y, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(x, y, z)$

(代替规则) 自由的y用t代换

$\Leftrightarrow \forall x\, F(x, t, z) \rightarrow \exists y G(w, y, z)$

(代替规则) 自由的x用w代换

```
int x = 1;
int y = 2;
int z = 3;

for (int x = 0; x < 10; x++ ){
    F(x,y,z); //谓词逻辑F
}
for (int y = 0; y < 10; y++ ){
    G(x,y,z); //谓词逻辑G
}
```

Discrete Mathematics

离散数学(1)

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

马昱春

清華大學
Tsinghua University

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5-3-7 ∀前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A 的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

5-3-8 ∀前束范式存在定理

一阶谓词逻辑的任一公式 A都可化成相应的∀前束范式（仅保留全称量词的前束范式，或称SKOLEM标准型），并且 A 是不可满足的当且仅当其∀前束范式是不可满足的。

应注意，该定理是说**对于不可满足的公式**，它与其Skolem标准形是等值的，而一般的公式与其Skolem标准形并不是等值的。自然仅当A是不可满足的方使用Skolem标准形。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。

该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数f (y, z) (未在P中出现过)代入。

例3: 求公式 $(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

最后按同样的方法消去存在量词$(\exists w)$，因$(\exists w)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$和$(\forall v)$，需将谓词P中出现的所有变元w均以y、z、v的某个三元函数$g(y, z, v)$ (未在P中出现过也不同于$f(y, z)$)代入。

这样便得到消去全部存在量词的Skolem标准形

$$(\forall y)(\forall z)(\forall v)P(a, y, z, f(y,z), v, \mathbf{g(y,z,v)})$$

$$\forall x\Big(R(g(x)) \vee \exists y R(x,y)\Big) \iff \exists f \forall x\Big(R(g(x)) \vee R(x,f(x))\Big)$$

where

$f(x)$ is a function that maps x to y.

消存在量词是将相应变元以函数代入，可这样来理解，

如$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的Skolem标准形是$(\forall x)P(x, f(x))$。因为$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$的意思是对任一x，都有一个y使P(x, y)成立，那么这个y通常是依赖于x的，可视作x的某个函数f(x)。

从而有Skolem标准形$(\forall x)P(x, f(x))$, 然而所能找到的y不必然是x的函数f, 于是$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$与$(\forall x)P(x, f(x))$不等值。

$$\forall x\Big(R(g(x)) \vee \exists y R(x,y)\Big) \iff \exists f \forall x\Big(R(g(x)) \vee R(x, f(x))\Big)$$

where

$f(x)$ is a function that maps x to y.

在{1, 2}域上

$$(\forall x)(\exists y)P(x, y)$$

$$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \wedge (P(2, 1) \vee P(2, 2))$$

$$(\forall x)P(x, f(x)) = P(1, f(1)) \wedge P(2, f(2))$$

两者明显不等值，但在不可满足的意义下两者是一致的。

这种标准形，对使用归结法的定理证明来说是重要的。

5.4　基本推理公式

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 在一阶谓词逻辑中，从前提$A_1, A_2, \ldots, A_n$出发推出结论B的推理形式结构，依然采用如下的蕴涵式形式：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \to B$

- 若上式为永真式，则称推理正确，否则称推理不正确。于是，在一阶谓词逻辑中判断推理是否正确便归结为判断上式是否为永真式，并称满足永真式的蕴涵式为推理公式，用如下形式的符号表示：$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$

5-4-1 一阶谓词逻辑的推理形式和推理公式

- 命题逻辑中有关推理形式、重言蕴涵以及基本的推理公式，均可引入到谓词逻辑中

- 重点讨论

  在命题逻辑中无法处理或谓词逻辑中所特有的问题

例1

- 所有的整数都是有理数,
- 所有的有理数都是实数,
- 所以, 所有的整数都是实数.

引入谓词形式化

考虑 是否是正确的推理?

P(x): x 是整数

Q(x): x 是有理数

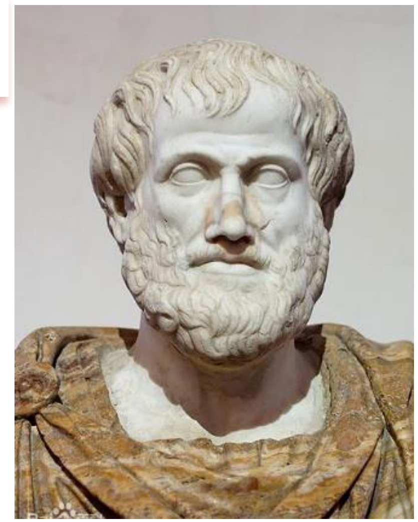
R(x): x 是实数

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)(Q(x) \rightarrow R(x))$$

$$\rightarrow (\forall x)(P(x) \rightarrow R(x))$$

命题逻辑的局限性 &
引入谓词逻辑的必要性

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ (三段论)



亚里士多德

举例2：三段论

P: 凡是人都是要死的.
Q: 苏格拉底是人.
R: 所以苏格拉底是要死的.

- A(x): x 是人
- B(x): x 必死
- $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(\text{苏格拉底}) \rightarrow B(\text{苏格拉底})$

例4

- 若某一个体a具有性质E, 则所有的个体x都具有性质E
- $E(a) \to (\forall x)E(x)$
- 显然这一推理形式是不正确的

5-4-2 基本推理公式

(1) $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$

(2) $(\exists x)\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \wedge (\exists \mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})$

(3) $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

(4) $(\forall \mathrm{x})\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow (\exists x)Q(x)$

(5) $(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)$

(6) $(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \Rightarrow (\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists x)Q(x)$

5-4-2 基本推理公式

$(7)(\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big) \wedge (\forall x)\big(Q(x) \to R(x)\big) \Rightarrow$
$(\forall x)(P(x) \to R(\mathrm{x}))$

$(8)(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \wedge \ P(a) \Rightarrow Q(a)$

$(9)(\forall \mathrm{x})(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\exists x)(\forall y)P(x,y)$

$(10)(\exists x)(\forall y)P(x,y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)P(x,y)$

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$

设论域是某班学生,

$P(x)$: x是高才生, $Q(x)$: x是运动员

为使$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = T$, 论域内学生分布只有两种可能:

1. 班上所有学生都是高才生, 又都是运动员;
2. 班上有的学生不是高才生, 但凡高才生必是 运动员

以上两种情况下都有$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x) = T$

$P(x)$: x是高才生， $Q(x)$: x是运动员

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

但上述推理式的逆(反向)在有些情形并不成立

如: 班上有的学生不是高才生 (1)

而且班上又有的高才生不是运动员 (2)

由(1)和蕴涵式性质, 有

$$(\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)\mathrm{Q}(x) = \mathrm{T}$$

但由(2)有的高才生不是运动员

故 $P(x) \rightarrow Q(x) = \mathrm{F}$

所以 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) = \mathrm{F}$

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \Rightarrow (\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)$$

解释性说明

设在任一解释下, 有$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) = \mathrm{T}$,

从而对属于论域的任一x,

$$P(x) \to Q(x) = \mathrm{T}$$

上式必能保证 $(\forall x)P(x) = \mathrm{T}$时有$(\forall x)Q(x) = \mathrm{T}$

从而有 $(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x) = \mathrm{T}$

基本推理公式（命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

5.5 推理演算

内容回顾：2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

5-5-1 推理规则推理演算方法

- 在命题逻辑中，由引入几条推理规则，配合基本推理公式所进行的推理演算方法，可以容易地推广到谓词逻辑中。
- 由于在谓词逻辑中**不能使用真值表法**，又不存在判别$A \rightarrow B$是普遍有效的一般方法，从而使用推理规则的推理方法已成为谓词逻辑的基本推理演算方法。
- 所使用的推理规则除命题逻辑的推理演算中用到的六条基本推理规则外（参见2.9节），还包括四条有关量词的消去和引入规则。

2.9 推理演算（温习）

<u>主要的推理规则</u>

（1）前提引入规则：推理过程中可随时引入前提

（2）结论引入规则：中间结论可作为后续推理的前提

（3）代入规则：仅限于重言式中的命题变项

（4）置换规则：利用等值公式对部分公式进行置换

（5）分离规则：由A及A→B成立，可将B分离出来

（6）条件证明规则：$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ 等价

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(c)$ if $c \in U$	UI / 全称举例
$P(c)$ for an arbitrary $c \in U \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG / 全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in U$	EI / 存在举例
$P(c)$ for some $c \in U \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG / 存在推广

5-5-2 全称量词消去规则 Universal Instantiation 简记为UI规则或UI

- $\dfrac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(y)}$ 或 $\dfrac{(\forall x)P(x)}{\therefore P(c)}$
- 两式成立的条件是:
  (1) 第一式中，取代x的y应为任意的不在$P(x)$中约束出现的个体变项。(y代表任意一个个体)
  (2) 第二式中，c为任意个体常项。
  (3) 用y或c去取代$P(x)$中自由出现的x时，必须在x自由出现的一切地方进行取代。

当$P(x)$中不再含有量词和其它变元时没有问题。

如果允许$P(x)$中含有量词和其它变元时，须限制 y 不在$P(x)$中约束出现。

错哪里了？

如$(\forall x)P(x) = (\forall x)(\exists z)(x<z)$ 在实数域上成立

则全称量词消去：$P(y) = (\exists z)(y<z)$

其含义为$(\exists z)(\forall y)(y<z)$，与原式不等价

若将y取为z，便有$(\exists z)(z<z)$，矛盾式。

实际上原式中z受到x的约束，应该是x的函数

5-5-3 全称量词引入规则 Universal Generalization 简记为UG规则或UG

- $$\frac{P(y)}{\therefore (\forall x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
  （1） 无论$P(y)$中自由出现的个体变项y取何值，$P(y)$应该均为真。
  （2）取代自由出现的y的x也不能在$P(y)$中约束出现。

5-5-4 存在量词消去规则 Existential Instantiation 简记为EI规则或EI

- $$\frac{(\exists x)P(x)}{\therefore P(c)}$$

- 该式成立的条件是:
  (1) c是使P为真的特定的个体常项。
  (2) c不在$P(x)$中出现。
  (3) **$P(x)$中没有其它自由出现的个体变项**。

如 $(\exists x)P(x) = (\exists x)(x>y)$, y是自由变项，这时推不出 $c>y$。

5-5-5 存在量词引入规则 Existential Generalization 简记为EG规则或EG

- $$\frac{P(c)}{\therefore (\exists x)P(x)}$$

- 该式成立的条件是：
  （1）c是特定的个体常项。
  （2）取代c的x不在$P(c)$中出现过。

5-5-6 使用推理规则的推理演算过程

- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

举例2：三段论

凡是人都是要死的.
苏格拉底是人.
所以苏格拉底是要死的.

- $P(x)$: x 是人
- $Q(x)$: x 必死
- $(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \land P(苏格拉底) \to Q(苏格拉底)$

❶ $(\forall x)(P(x) \to Q(x))$	前提
❷ $P(苏格拉底) \to Q(苏格拉底)$	全称量词消去UI
❸ $P(苏格拉底)$	前提
❹ $Q(苏格拉底)$	(2),(3)分离

推理演算举例

P81　例5：

1. 有的病人喜欢所有的医生，
2. 没有病人喜欢庸医，
3. 所以没有医生是庸医。

(1) 形式化

$P(x)$ 表示x是病人，　$Q(x)$ 表示x是庸医，

$D(x)$ 表示x是医生，　$L(x,y)$ 表示x喜欢y。

1. $(\exists x)\Big(P(x) \wedge (\forall y)\big(D(y) \rightarrow L(x,y)\big)\Big)$
2. $(\forall x)\Big(P(x) \rightarrow (\forall y)\big(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)\big)\Big)$ or

– $\neg(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(Q(y) \rightarrow L(x,y)))$

3. $\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$ or

– $(\forall x)(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$

1. $(\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y))\big)$

2. $(\forall x)\big(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y))\big)$ or

– $\neg(\exists x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to L(x,y)))$

3. $\neg(\exists x)(D(x) \wedge Q(x))$ or

– $(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$

(2) 证明

①	$(\exists x)\big(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y))\big)$	前提
②	$P(c) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(c,y))$	存在量词消去
③	$(\forall x)\big(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y))\big)$	前提
④	$P(c) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(c,y))$	全称量词消去
⑤	$P(c)$	②
⑥	$(\forall y)(D(y) \to L(c,y))$	②
⑦	$D(y) \to L(c,y)$	全称量词消去
⑧	$(\forall y)(Q(y) \to \neg L(c,y))$	④⑤分离
⑨	$Q(y) \to \neg L(c,y)$	全称量词消去
⑩	$L(c,y) \to \neg Q(y)$	⑨置换
⑪	$D(y) \to \neg Q(y)$	⑦⑩三段论
⑫	$(\forall y)(D(y) \to \neg Q(y))$	全称量词引入
⑬	$(\forall x)(D(x) \to \neg Q(x))$	⑫置换

证明举例补充

前提:任何人如果他喜欢步行则他就不喜欢乘汽车；

每个人喜欢乘汽车或者喜欢骑自行车；

有的人不喜欢骑自行车。

结论：因此有的人不喜欢步行。

设定：论域为所有人

W(x): x喜欢步行，B(x):x喜欢乘汽车

K(x)：x喜欢骑自行车；

形式化如下：

– $(\forall x)\,(W(x)\rightarrow \neg B(x))$；$(\forall x)\,(B(x)\vee K(x))$；$(\exists x)\,\neg K(x)$；

结论：$(\exists x)\,\neg\, W(x)$

- $(\forall x)(W(x)\rightarrow \neg B(x))$； $(\forall x)(B(x)\vee K(x))$； $(\exists x)\neg K(x)$；

结论：$(\exists x)\neg W(x)$

1. $(\exists x)\neg K(x)$	(premise)
2. $\neg K(c)$	(EI)
3. $(\forall x)(B(x)\vee K(x))$	(p)
4. $B(c)\vee K(c)$	(UI)
5. $B(c)$	
6. $(\forall x)(W(x)\rightarrow\neg B(x))$	(p)
7. $W(c)\rightarrow\neg B(c)$	(UI)
8. $B(c)\rightarrow\neg W(c)$	(置换)
9. $\neg W(c)$	5、8分离
10. $(\exists x)\neg W(x)$	(EG)

$(\forall x)(\exists y)(x>y)$， $(\forall z)(z>b)$

- $(\forall x)(\exists y)(x>y)$ (p)
- $(\exists y)(z>y)$ (UI)
- $z>b$ (EI)
- $(\forall z)(z>b)$ (p)
- $b>b$ (UI)
- $(\forall x)(x>x)$ (UG)

步步错

• $(\forall x)(\exists y)(x>y)$	(p)	√
• $(\exists y)(z>y)$	(UI)	y依赖于x
• $z>b$	(EI)	
• $(\forall z)(z>b)$	(p)	b依赖于z
• $b>b$	(UI)	
• $(\forall x)(x>x)$	(UG)	b不是任意个体

5.6 谓词逻辑的归结推理法

5-6-1 谓词逻辑的归结推理法

- 出发点：使用推理规则的证明技巧性较强，不便于机器实现。
- 命题逻辑中的归结推理法可以推广到谓词逻辑中。证明过程与命题逻辑相似。
- 所不同的是需对谓词逻辑中的量词和变元进行特殊的处理。

5-6-2 归结推理法步骤

1. 欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$ 是定理，等价于证 $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \wedge \neg B$. 是矛盾式。

2. 将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型，消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式$G*$

由于全称量词的前束范式$G*$保持原式G不可满足的特性，故G与$G*$在不可满足的意义下是一致的。

3. 略去$G*$中的全称量词，$G*$中的合取词$\wedge$以“，”表示，便得到$G*$的子句集S。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对S作归结。直至归结出空子句□。

5-3-3 化前束范式的基本步骤

1. 消去联结词→，↔。
2. 右移否定词¬（利用否定型等值式与摩根律）
3. 量词左移（使用量词分配等值式）。
4. 变元易名（使用变元易名分配等值式）。

5-3-7 ∀前束范式

一阶谓词逻辑的任一公式 A 的∀前束范式（或称SKOLEM标准型）是仅保留全称量词的前束范式。

例3: 求公式$(\exists x)(\forall y)(\forall z)(\exists u)(\forall v)(\exists w)P(x,y,z,u,v,w)$的Skolem标准形。

将一公式化成Skolem标准形, 首先也要求出前束形。该例已是前束形，便可直接求Skolem标准形

首先将最左边的$(\exists x)$消去，而将谓词P中出现的所有变元x均以论域中的某个常项a(未在P中出现过)代入。

进而消去从左边数第二个存在量词$(\exists u)$, 因$(\exists u)$的左边有全称量词$(\forall y)(\forall z)$, 而将谓词P中出现的所有变元u均以y, z的某个二元函数f (y, z) (未在P中出现过)代入。

5-6-2 归结推理法步骤

1. 欲证$A_1 \wedge A_2 \wedge L \wedge A_n \rightarrow B$ 是定理，等价于证 $G = A_1 \wedge A_2 \wedge L \wedge A_n \wedge \neg B$. 是矛盾式。

2. 将G化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型，消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式$G*$

由于全称量词的前束范式$G*$保持原式G不可满足的特性，故G与$G*$在不可满足的意义下是一致的。

3. 略去$G*$中的全称量词，$G*$中的合取词$\wedge$以“，”表示，便得到$G*$的子句集S。实用中可分别求出诸A_i与$\neg B$的子句集。

4. 对S作归结。直至归结出空子句□。

归结推理法说明

- 设C_1, C_2是两个**无共同变元**的子句，如下式

$$C_1 = P(x) \vee Q(x)$$
$$C_2 = \neg P(a) \vee R(y)$$
$$R(C_1, C_2) = Q(a) \vee R(y)$$

- $P(x)$与$\neg P(a)$在置换$\{x/a\}$下将变元 x 换成 a，构成互补对可进行归结。得到归结式$R(C_1,C_2)$。

归结推理法举例

例2：前面的例子用归结法证明如下。

$$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \rightarrow L(x,y)))$$

$$A_2 = (\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)(Q(y) \rightarrow \neg L(x,y)))$$

$$B = (\forall x)\big(D(x) \rightarrow \neg Q(x)\big)$$

求证 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

归结推理法举例

1. 等价于证明 $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg B = \emptyset$ 是矛盾式
2. 求出相应的Skolem标准型， G^*分别是

$$G^*_{A_1} = (\forall y)(P(a) \wedge (\neg D(y) \vee L(a,y)))$$

$$G^*_{A_2} = (\forall x)(\forall y)(\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee L(x,y))$$

$$G^*_{\neg B} = D(b) \wedge Q(b)$$

3. G的子句集 $S = S_{A_1} \cup S_{A_2} \cup S_{\neg B}$

$$S_{A_1} = \{P(a), \neg D(y) \vee L(a,y)\}$$

$$S_{A_2} = \{\neg P(x) \vee \neg Q(y) \vee L(x,y)\}$$

$$S_{\neg B} = \{D(b), Q(b)\}$$

$A_1 = (\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(D(y) \to L(x,y)))$

$A_2 = (\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(y) \to \neg L(x,y)))$

$B \;= (\forall x)\big(D(x) \to \neg Q(x)\big)$

求证 $A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$

归结推理法举例

4. 建立归结过程

$S_{A_1}=\{P(a),\neg D(y)\vee L(a,y)\}$

$S_{A_2}=\{\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg L(x,y)\}$

$S_{\neg B}=\{D(b),Q(b)\}$

(1) $P(a)$

(2) $\neg D(y)\vee L(a,y)$

(3) $\neg P(x)\vee\neg Q(y)\vee\neg L(x,y)$

(4) $D(b)$

(5) $Q(b)$

(6) $L(a,b)$ (2)(4) 归结

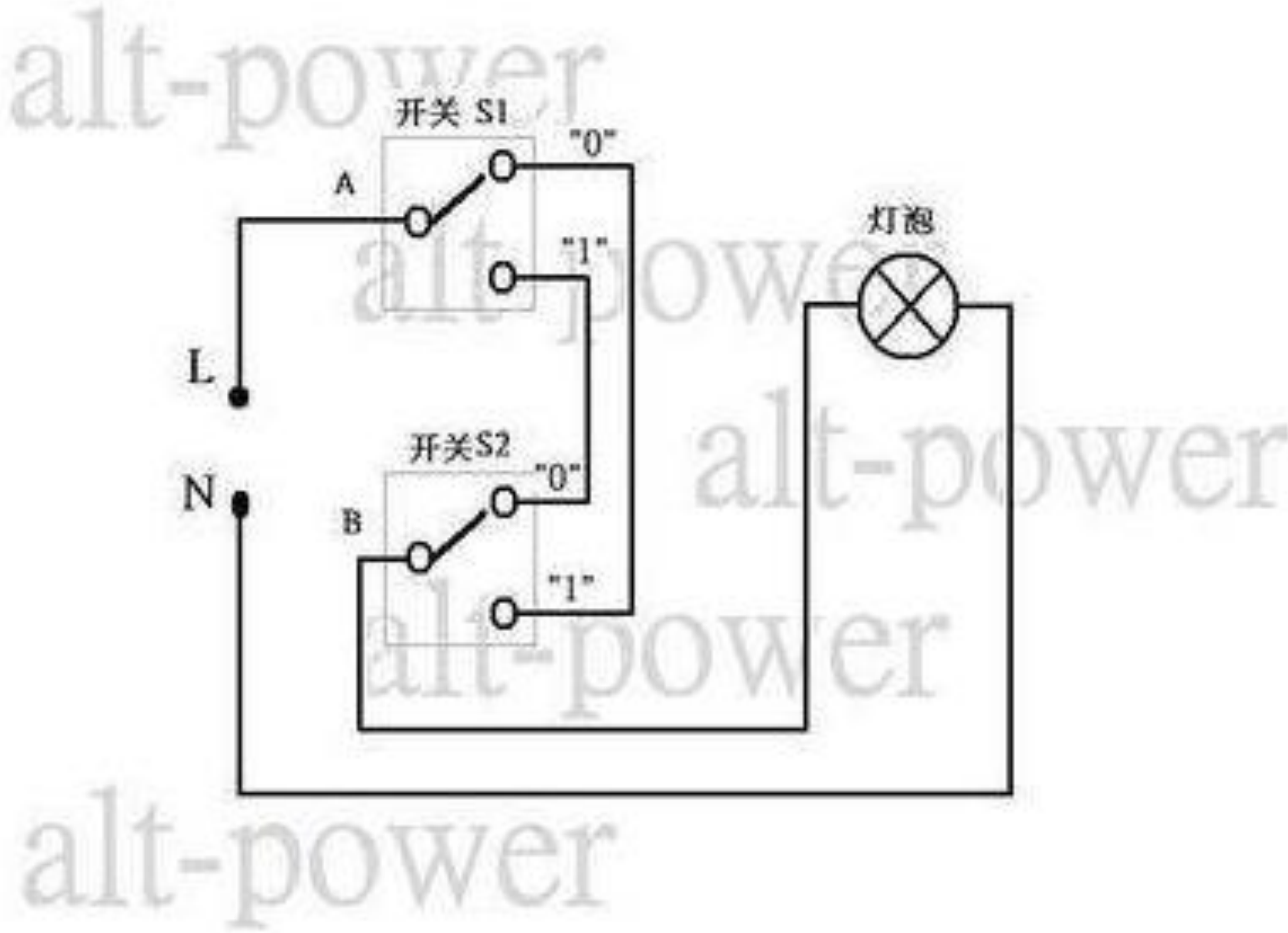
(7) $\neg Q(y)\wedge\neg L(a,y)$ (1)(3) 归结

(8) $\neg L(a,b)$ (5)(7) 归结

(9) $\square$ (6)(8) 归结

数理逻辑应用举例

- 一个会议室有两个出入口，试设计一个控制房间照明的电路，使得分别装在两个出入口的开关 K_1 和 K_2都能独立控制照明灯 L，即改变任一开关的状态，均可改变 L 的明暗。试写出：
  1. 由K_1 和 K_2 表示的 L 的逻辑表达式；
  2. 将 L 的逻辑表达式化为最简形式；
  3. 画出 L 的电路图。


开关 S1
"0"
A
"1"
灯泡
L
开关S2
N
"0"
B
"1"

第五章小结

本章讨论了谓词逻辑的等值和推理演算。主要内容可概括为：

- 否定型等值式的不同形式与证明方法；
- 量词分配等值式的不同形式与证明方法;
- 前束范式的定义与Skolem标准形的构成，求全称量词的前束范式的推演方法；
- 基本的推理公式，四条推理规则；
- 使用归结法证明推理公式的步骤和方法。

第五章 谓词逻辑的等值和推理演算

5.1 否定型等值式

5.2 量词分配等值式

5.3 范式*(全称量词的前束范式)

5.4 基本推理公式

5.5 推理演算*

5.6 谓词逻辑的归结推理法*

5.1 等值式

- 第一组 命题逻辑中重言式的代换实例
- 第二组
  - 1. 消去量词等值式
  - 2. 量词否定等值式
  - 3. 量词辖域收缩与扩张等值式
  - 4. 量词分配等值式

消去量词等值式

$$(\forall x)P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k)$$

$$(\exists x)P(x) = P(1) \vee P(2) \vee \cdots \vee P(k)$$

量词否定等值式

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x)$$

$$\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$$

$$(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)\neg P(x)$$

$$(\exists x)P(x) = \neg(\forall x)\neg P(x)$$

量词辖域收缩与扩张等值式

$$(\forall x)(P(x) \vee q) = (\forall x)P(x) \vee q$$

$$(\exists x)(P(x) \vee q) = (\exists x)P(x) \vee q$$

$$(\forall x)(P(x) \wedge q) = (\forall x)P(x) \wedge q$$

$$(\exists x)(P(x) \wedge q) = (\exists x)P(x) \wedge q$$

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow q) = (\exists x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\exists x)(P(x) \rightarrow q) = (\forall x)P(x) \rightarrow q$$

$$(\forall x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

$$\underline{(\exists x)(p \rightarrow Q(x)) = p \rightarrow (\exists x)Q(x)}$$

量词分配等值式

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) = (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) = (\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)(\forall y)(P(x) \vee Q(y)) = (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x) \wedge Q(y)) = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x)$$

那些不等于的……

$$(\forall x)(\forall y)(P(x)\vee Q(y)) \neq (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$
$$(\exists x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y)) \neq (\exists x)(P(x)\wedge Q(x))$$

- 对$\vee$ 不满足分配率，　　对$\wedge$不满足分配率

$$(\forall x)(P(x)\wedge Q(x)) = (\forall x)P(x)\wedge(\forall x)Q(x)$$
$$(\exists x)(P(x)\vee Q(x)) = (\exists x)P(x)\vee(\exists x)Q(x)$$

$$(\forall x)P(x)\vee(\forall x)Q(x) \Rightarrow (\forall x)(P(x)\vee Q(x))$$
$$(\exists x)(P(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)P(x)\wedge(\exists x)Q(x)$$

5.3.1 前束范式

- 设A为一阶谓词逻辑公式，如果满足

(1) 所有量词都位于该公式的最左边；

(2) 所有量词前都不含否定词；

(3) 量词的辖域都延伸到整个公式的末端，

则称A为前束范式。

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$$

- 其中$Q_i(1<=i <= n)$为　 或　 ，M为不含量词的公式，称作公式 A的基式或母式。

- 例1：求下式的前束范式

  $\neg((\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\rightarrow(\exists x)(\neg(\forall y)Q(y, b)\rightarrow R(x)))$

- 可按下述步骤实现：

  (1) 消去联结词$\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

  得$\neg(\neg(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\vee(\exists x)(\neg\neg(\forall y)Q(y,b)\vee R(x)))$

  (2) $\neg$内移（反复使用摩根律）

  得 $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge\neg(\exists x)(((\forall y)Q(y, b)\vee R(x))$

  $= (\forall x)(\exists y)P(a, x, y)\wedge(\forall x)(((\exists y)\neg Q(y,b)\wedge\neg R(x))$

(3) 量词左移（使用分配等值式）得

$$(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \land (\forall x)((\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$$

$$= (\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists y)\neg Q(y, b) \land \neg R(x))$$

(4) 变元易名（使用变元易名分配等值式）

$$(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \land (\exists z)\neg Q(z, b) \land \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)(P(a, x, y) \land \neg Q(z, b) \land \neg R(x))$$

$$= (\forall x)(\exists y)(\exists z)S(a, b, x, y, z)$$

使用以上步骤，可求得任一公式的前束范式。由于每一步变换都保持等值性，所以，所得到的前束形与原公式是等值的。这里的

$$S(a, b, x, y, z)$$

便是原公式的母式。

由于前束形中量词的次序排列，如$(\exists y)(\exists z)$也可以写成$(\exists z)(\exists y)$以及对母式没有明确的限制，自然其前束范式并不唯一，如例1的前束范式也可以是

$$(\forall x)(\exists z)(\exists y)(S(a, b, x, y, z)\wedge P)$$

其中P可以是任一不含量词的普遍有效的公式。

5.3.4 SKOLEM 标准型

- 一阶谓词逻辑的任一公式 A，若其

  (1) 前束范式中所有的存在量词都在全称 量词的左边，且至少有一个存在量词；

  (2) 或仅保留全称量词而消去存在量词，

  便得到公式 A的 SKOLEM 标准型。

- 公式 A与其 SKOLEM 标准型只能保持某种意义下的等值关系。

基本推理公式（续 命题逻辑温习）

Rule of Inference	Name/名称
$P \Rightarrow P \vee Q$	Addition/析取附加式
$P \wedge Q \Rightarrow P$	Simplification/合取化简式
P、$Q \Rightarrow P \wedge Q$	Conjunction/并发式，表示
P、$P \rightarrow Q \Rightarrow Q$	Modus ponens/分离式
$\neg Q$、$P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$	Modus tollens/拒取式
$\neg P$、$P \vee Q \Rightarrow Q$	Disjunctive syllogism/ 析取三段式
$P \rightarrow Q$、$Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$	Hypothetical syllogism/假言三段式

谓词逻辑推理规则

Rule of Inference	Name
$(\forall x)P(x) \Rightarrow P(y)$ if $y \in D$	UI/全称举例
$P(y)$ for an arbitrary $y \in D \Rightarrow (\forall x)P(x)$	UG/全称推广
$(\exists x)P(x) \Rightarrow P(c)$ for some $c \in D$	EI/存在举例
$P(c)$ for some $c \in D \Rightarrow (\exists x)P(x)$	EG/存在推广

推理

- 全称量词消去规则
- 全称量词引入规则
- 存在量词消去规则
- 存在量词引入规则
- 首先将以自然语句表示的推理问题引入谓词加以形式化；
- 若不能直接使用基本的推理公式则消去量词；
- 在无量词的条件下使用规则和公式推理；
- 最后再引入量词以求得结论。

5-6-2 归结推理法步骤

1. **欲证** $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \rightarrow B$**是定理，等价于证** $G = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots A_n \wedge \neg B$ **矛盾式。**

2. **将*G*化为前束范式。进而化为SKOLEM标准型 消去存在量词，得到仅含全称量词的前束范式*G**，**
   - **由于全称量词的前束范式*G**保持原式*G*不可满足的特性，故*G*与*G**在不可满足的意义下是一致的。**

3. 略去*G**中的全称量词，*G**中的合取词∧以“，”表示，便得到*G**的子句集*S*。实用中可分别求出诸A_i与¬*B*的子句集。

4. 对*S*作归结。直至归结出空子句□。

谢 谢