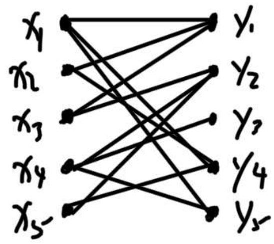
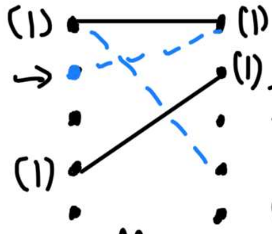
DM HW 8

1, 2, 3, 8, (5, 7)



1. 解:

$M = \{(x_1, y_1), (x_4, y_2)\}$.



M0.

$U = \{x_2\}$, $\Gamma(U) \neq V$.

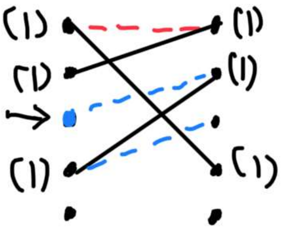
$\Gamma(U) = \{y_1, y_4\}$.

$U = \{x_2, x_1\}$, $V = \{y_1\}$.

$\Gamma(U) = \{y_1, y_4, y_5\} \neq V = \{y_1\}$.

$P = (x_2\, y_1\, x_1\, y_4)$, 是关于 M_0 的增广路,

$M_1 = M_0 \oplus P = \{(x_2, y_1), (x_1, y_4), (x_4, y_2)\}$.



M1

$U = \{x_3\}$, $\Gamma(U) = \{y_1, y_2\} \neq V = \emptyset$.

$U = \{x_3, x_2\}$, $V = \{y_1\}$.

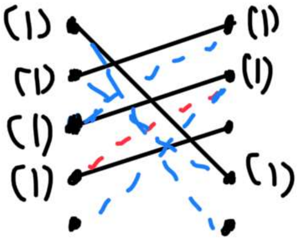
$\Gamma(U) = \{y_1, y_2, y_4\}$, $\neq V$.

$U = \{x_3, x_2, x_4\}$, $V = \{y_1, y_2\}$.

$\Gamma(U) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} \neq V$.

$P = (x_3\, y_2\, x_4\, y_3)$ 是 M_1 的增广路,

$M_2 = M_1 \oplus P$.



M_2

$U=\{x_5\}$, $I(U)=\{y_2,y_4\}\neq V$.

$U=\{x_5,x_3\}$, $V=\{y_2\}$

$I(U)=\{y_1,y_2,y_4\}\neq V$.

$U=\{x_5,x_3,x_2\}$, $V=\{y_1,y_2\}$.

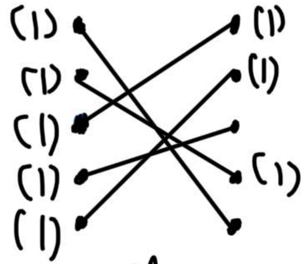
$I(U)=\{y_1,y_2,y_4\}\neq V$

$U=\{x_5,x_3,x_2,x_1\}$, $V=\{y_1,y_2,y_4\}$.

$I(U)=\{y_1,y_2,y_4,y_5\}\neq V$.

$P=(x_5\,y_2\,x_3\,y_1\,x_2\,y_4\,x_1\,y_5)$, $M_3=M_2\oplus P$

是完美匹配，结束，匹配如下！

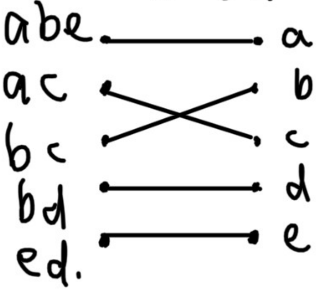


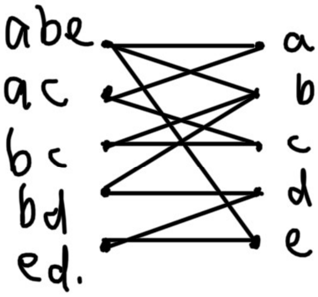
M_2

2. 解：由于字符串组没有出现所有字符出现次数一致的两组，能用其中一个字母代表且不产生歧义

$\Leftrightarrow$ 存在字符串对字符的完全匹配；

匹配方案：





因此可以。

3. 证明：（*完全匹配可以不唯一）。

设 M_1, M_2 是该树的两个完美匹配，

都有 $|M_1|=|M_2|=n$，

$M_1 \oplus M_2$ 中，必不存在 $d(v)=1$ 的结点，

（否则其中之一就不是完美匹配），

此时，$M_1 \oplus M_2$ 中，$d(v)=0$ 或 2，即

$M_1 \oplus M_2$ 中的结点，要么是孤立的，要么与某部分的结点成圈。

更进一步，由树的性质，后者必不存在，

于是 $\forall v: v \in M_1 \oplus M_2$，都有 $d(v)=0$，因此 $M_1=M_2$。

$\boxtimes$

8. 解:

$$C=\begin{bmatrix} 5&4&5&3&5&8\\ 7&3&6&6&6&10\\ 5&6&8&4&2&9\\ 11&7&6&8&3&2\\ 8&9&5&4&6&7\\ 7&4&3&2&4&5 \end{bmatrix}\qquad B=\begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} \downarrow&\downarrow&&&&\downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3&4&3&5&3&0\\ 3&7&4&4&4&0\\ 4&3&1&5&7&0\\ 0&4&5&3&8&9\\ 1&0&4&5&3&2\\ 0&3&4&5&3&2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 8\\10\\9\\11\\9\\7 \end{array} \end{array}$$

$$B=\begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} \downarrow&\downarrow&&&&\downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3&4&2&4&2&0\\ 3&7&3&3&3&0\\ 4&3&0&4&6&0\\ 0&4&4&2&7&9\\ 1&0&3&4&2&2\\ 0&3&3&4&2&2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 7\\9\\8\\10\\8\\6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 1&1&&&&1 \end{array} & \end{array}\qquad B=\begin{array}{c c} \begin{array}{cccccc} \downarrow&\downarrow&\downarrow&&&\downarrow \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 3&4&2&2&0&0\\ 3&7&3&1&1&0\\ 4&3&0&2&4&0\\ 0&4&4&0&5&9\\ 1&0&3&2&0&2\\ 0&3&3&2&0&2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 5\\7\\6\\8\\6\\4. \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 3&3&2&&&3 \end{array} & \end{array}$$

$\delta=1$　　　　$\delta=2$

※. 下一个矩阵被完全覆盖.

最大利润 $=3+3+2+3+4+6+8+6+7+5=47$.

5. 证明:

设 M 是 $G=(X,Y;E)$ 的最大匹配, $|M|=r$.

定义:二分图的一个覆盖,是一个结点集合 C, 使得 C 包含二分图上全部的边的

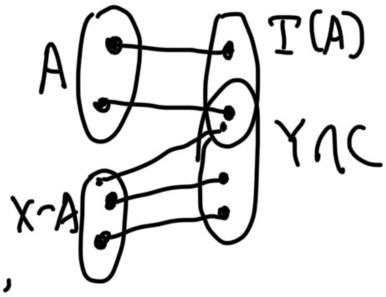
—·C，使得C包含二分图上全部的边的至少一个相邻结点。

2) C是最小覆盖 $\Leftrightarrow$ $\forall C'$; C'是覆盖 $\rightarrow$ $|C'| \geq |C|$.

1). $r \leq |X| - \delta(G)$.

设 $e=(x,y)\in E$，其中 $x\in X$, $y\in Y$,

$\forall A\subseteq X$. $\forall e$.



① . $x\in A \Rightarrow y\in I(A)$

② $x\notin A \Rightarrow x\in X-A$.

因此 $\forall M$; M是G的匹配，

$$|M| \leq |I(A)| + |X| - |A| = |X| - \delta(A)$$

由M，A的任意性可知 $r \leq |X| - \delta(G)$

2). $r \geq |X| - \delta(G)$.

只须证 (1) 的等号成立即可。

设 $A = X - C$，则由C的定义，必定有

$$I(A) \subseteq Y\cap C.$$

于是 $\delta(A) = |A| - |I(A)| \geq |X-C| - |Y\cap C|$

$= |X| - |X\cap C| - |Y\cap C|$

$= |X| - |C| = |X| - s = |X| - r$

由(1)知"$\geq$"应是"$=$". $\boxtimes$.

7、解：可以。

先证明以下引理：

引理：$\forall G$：G是二分图，都有$\beta(G)=\Delta(G)$，即对任意二分图，其边色数与其最大度相等。

证明：

对 $m=|E(G)|$ 归纳。

$m=1$ 时显然。

假设

$m=l-1$ 时，引理成立。

$m=l$ 时，设 $e=(u,v)\in E(G)$。

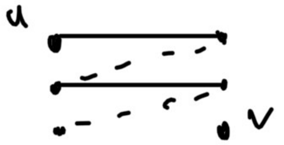
由归纳假设，$\beta(G-e)=\Delta$。

对 $G-e$ 而言，$d(u)\leq\Delta(G)-1$，$d(v)\leq\Delta(G)-1$，因此必定存在颜色 i：i 不是 u 的任何关联边涂上的颜色，也必定存在 j：j … v — — — — — — — — — — —。

若 $i=j$，对 e 涂上颜色 i，→ 结束。①

$i\neq j$ 时，则可以找一条道路 P，其中 u 是 P 的起点，P 是一条对颜色 i，j 而言的极长交互道路（这是因为 u 必定存在 j 着色边，否则对 e 着 j 色，结束）

在构造 P 的过程中，必定是先选与 u 关联的 j 色边，然后选 i 色边。



由于 u，v 分属二分图的两个部分，故若 $v\in P$，则 v 存在 j 色边，就能回到①。因此，$v\notin P$。

对 P 上所有的边，对调边的颜色，即对着以 i 色的边涂上 j 色的同时，对着以 j 色的边涂以 i 色。

接着对 e 涂上 j 色，即有“$l-1$”$\Rightarrow$“l”

引理证毕。

回到原题，A由0,1组成，每行有k个1，每列最多k个1。
把A看作是一个二分图的简化邻接矩阵。

设该二分图 $G=(X,Y;E)$。
对G的边着色。由引理可知 $p(G)=\Delta(G)=k$、
"收集"G中同色的边，例如 $M_i=\{e;\ e$被着以颜色$i\}$，
由于 X 是 k-正则，M_i 必然是G的一个完全匹配。$(1\le i\le k)$.
且满足
$$\begin{cases} M_i\cap M_j=\emptyset,\quad i\neq j & \text{(I)} \\ \bigcup_{i=1}^{k} M_i = E. & \text{(II)} \end{cases}$$

M_i 能对应简化邻接矩阵 D_i，使得 D_i 的每一行都有一个1，每列最多一个1。由 M_i 的性质，

D_i 的任意元素与其在 D_j $(i\neq j)$ 的对应位置的元素不能同时为1。(I)

再由 M_i 的性质，$A=\sum_{i=1}^{k} D_i$。(II) $\boxtimes$.