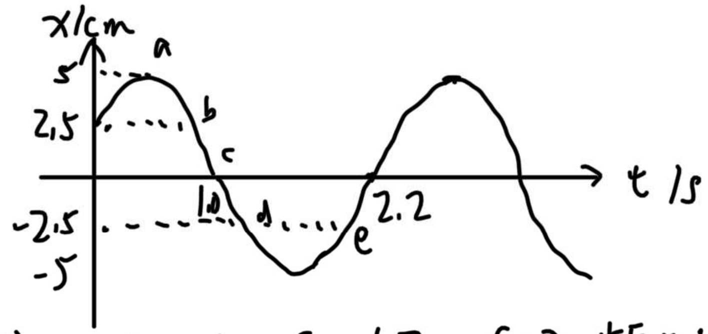
HW 7

6.3, 6.6, 6.8, 6.9, 6.11, 6.15, 6.24, 6.25, 6.27

6.3. 已知：

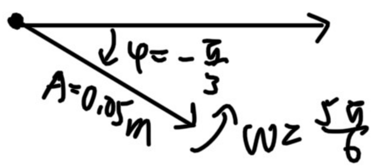


求：(1). a, b, c, d, e 的相. (2). 振动表达式 (3) 相量图。

解：相位：a: 0, b: $\frac{\pi}{3}$, c: $\frac{\pi}{2}$, d: $\frac{2\pi}{3}$, e: $\frac{4\pi}{3}$.

振动：$x = 0.05\cos\left(\frac{5\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$.

相量图：



6.6

已知：两谐振子作同频、同振幅的简谐运动。对第一个谐振子，有谐振表达式 $x = A\cos(\omega t+\varphi)$.
第一个从正方向（位移）回到平衡位置时，第二个在正方向位移端点

求：(1). 第二个谐振子的振动表达式，两者的相位差。
(2). 初时，$x_1(0) = -A/2$、向 x 负方向运动，求二者 x-t 曲线，相量图。

解：(1). 此时第一个谐振子的相应为$\frac{\pi}{2}$.
　　　　　　　　二　　　　　　　　　　　　0.

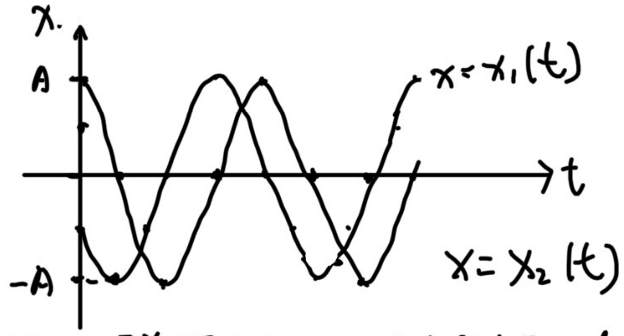
相位差为$\frac{\pi}{2}$，$x_2(t) = A\cos(\omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})$.

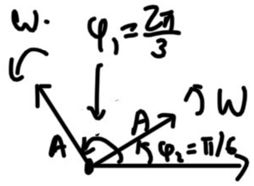
(2). $x_1(0) = -A/2 \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$ 或 $\varphi = \frac{4\pi}{3}$.

并且 $\dot{x}_1(0) = -\omega A\sin(\varphi) < 0$，于是舍去 $\varphi = \frac{4\pi}{3}$

$\varphi = \frac{2\pi}{3}$ 是唯一解。

$x_1(t) = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{3})$，$x_2(t) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$





6.8. 已知：一弹簧振子，劲度系数 $k = 25\ N/m$，以初动能 0.2J，初势能 0.6J 振动。

求 1). 振幅 2). 使势能、动能相等的位移
3). 位移为振幅之一半时的势能。

解：1). $E = 0.2 + 0.6 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 25 \cdot A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{1.6}{25}$

$\Rightarrow A = \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt{10}} = 0.253(m)$

2). 形式上 $E_k = E_p$ （t_1 时）

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$

$\Leftrightarrow m\omega^2A^2\sin^2(\omega t_1 + \varphi) = kA^2\cos^2(\omega t_1 + \varphi)$

$\Leftrightarrow \cos(2(\omega t_1 + \varphi)) = 0$.

此时的位移 $x(t_1) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$= A \cdot \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2(\omega t + \varphi))}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$= \pm\frac{2\sqrt{5}}{25}$

$= \pm 0.179(m)$

(3). $x = A\cos(\omega t + \varphi) = A/2$

$\Rightarrow \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}$.

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\cdot A^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{8}kA^2$

$= 0.2$ (J).

6.9. 已知：将一劲度系数为k的轻质弹簧上端固定悬挂。
下端挂质量为m的小球。平衡时，弹簧伸长为b.

求：以该平衡位置为原点的小球动力学方程，
证明小球作简谐运动，求其振动周期.
振幅为A，系统总能量，(其是否仍为$\frac{1}{2}kA^2$).

解：[受恒力的受迫振动].
小球同时受弹簧的回复力及其自身重力：
由平衡条件知 $b=g/\omega^2$

$$m\ddot{x}=-m\omega^2(x+b)+mg \Rightarrow \ddot{x}+\omega^2 x=g-\omega^2 b=0.$$

求解以上方程，得

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\omega^2=\frac{k}{m} \Rightarrow T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$ 为振动周期

$v=\dot{x}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$，于是动能仍是

$$E_K=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi),$$

势能，包括弹性势能和重力势能，应为

$$E_p=\frac{1}{2}k(x+b)^2-\frac{1}{2}kb^2-mgx$$

$$=\frac{1}{2}kx^2+kxb-mgx.$$

$$=\frac{1}{2}kx^2+(kb-mg)x=\frac{1}{2}kx^2.$$

$\Rightarrow E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2$，形式上相同。

6.11. 已知：将劲度系数k_1, k_2的两根轻弹簧串联在一起竖直悬挂，下面为一质量为m的物体，做成一在竖直方向振动的弹簧振子

求：运动周期。

解：串联弹簧可等效为一个弹簧，其劲度系数为各串联弹簧劲度系数之和。于是有

$$m\ddot{x} = -(k_1+k_2)x = -m\omega^2 x.$$

$$\Rightarrow m\omega^2 = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}} \text{ 好}$$

6.15. 已知：一物体放在水平木板上，静摩擦系数为0.50。

求：(1) 木板沿水平方向作简谐运动，使物体在板上静止的振幅最大值。[$f=2\,Hz$]

(2) 木板沿竖直方向作简谐运动，振幅5.0cm。若物体一直保持与板面接触，求振动最大频率。

解：(1) 欲使物体静止，简谐运动的回复力不应超过摩擦力：

$$m\omega^2 x \le \mu mg.$$

$$\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) \le \mu g.$$

$$\Rightarrow A \le \frac{\mu g}{\omega^2\cos(\omega t+\varphi)}$$ ，由t的任意性，应有

$$A \le \frac{\mu g}{\omega^2} = \frac{\mu g}{16\pi^2} = \frac{g}{32\pi^2} = 0.031\,m$$

(2). 物体不脱离 $\Leftrightarrow$ 木板对物体有支持力.

$$\Leftrightarrow m\ddot{x} = mg - m\omega^2 x - N = 0,$$

$$\Rightarrow g - \omega^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \omega^2 x \leq g \quad \forall x.$$

因此 $\omega^2 A \leq g \Rightarrow f \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{A}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{0.05}} = 2.22Hz$

6.24. 已知：一质点同时参与两个在同一直线上的简谐运动. 表达式：$x_1 = 0.04\cos(2t + \frac{\pi}{6})$

$$x_2 = 0.03\cos(2t - \frac{5\pi}{6}).$$

求：合运动表达式。

解：$x = x_1 + x_2 = 0.04\cos(2t + \frac{\pi}{6}) + 0.03\cos(2t - \frac{5\pi}{6})$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.01\cos 2t - \frac{1}{2} \cdot 0.07\sin 2t.$

$= A\cos(2t + \varphi)$, $A^2 = (\frac{0.01}{2})^2 \cdot (3 \cdot 7^2 + 1) = 148 \times (\frac{0.01}{2})^2$,

$A \approx 0.06$

$\varphi = \arctan\frac{0.07}{\sqrt{3} \times 0.01} = 0.08.$

$\Rightarrow x = 0.06\cos(2t + 0.08)$ 米.

6.25. 已知：三个同方向，同频率的简谐振动为

$$x_1 = 0.08\cos(314t + \frac{\pi}{6})$$
$$x_2 = 0.08\cos(314t + \frac{\pi}{2})$$
$$x_3 = 0.08\cos(314t + \frac{5\pi}{6}).$$

求：(1). 合振动的角频率、振幅、初相、振动表达式

(2). 由初始位置到 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}A$ 所需最短时间.

解：(1). $x=x_1+x_2+x_3$

$=0.08\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 314t-\frac{1}{2}\sin 314t-\sin 314t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 314t-\frac{1}{2}\sin 314t\right]$.

$=-0.16\sin 314t=0.16\cos\left(314t+\frac{\pi}{2}\right)$.

角频率仍是 $314\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$,

振幅：$0.16\ \mathrm{m}$

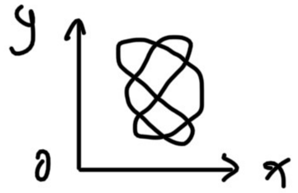
初相：$\frac{\pi}{2}$.

(2). 时间 t' 满足 $A\cos(\omega t'+\varphi)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$\Rightarrow \cos\left(314t'+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$t=\frac{1}{314}\left(\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{314}\cdot\frac{5\pi}{4}=0.0125\ \mathrm{s}$.

6.27. 已知：余弦式交变电压的利萨如曲线如下.



水平方向的振动频率为 $2.70\times10^4\ \mathrm{Hz}$

求：垂直方向的振动频率.

解：由利萨如曲线的性质,知 $\nu_y:\nu_x=2:3$.

立即就有垂直方向频率为 $1.8\times10^4\ \mathrm{Hz}$.