Date

大物B(1).

第一章作业

1.7, 1.9, 1.10, 1.18, 1.26.

*除特别说明，正方向为逆时针方向。

1.7.

已知:

运动函数 $\vec{r}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2t\\4t^2-8\end{bmatrix}$.

(1). 求轨道方程，画轨道曲线

(2). 求 $t_1=1s$，$t_2=2s$ 时.

质点位置，瞬时速度，瞬时加速度。

解:

(1). $y=4t^2-8=(2t)^2-8=x^2-8$

故该轨道为一在 ~~xoy~~ xy 平面上的抛物线，

轨道方程: $y=x^2-8$.

轨道曲线:

(如图1.1)

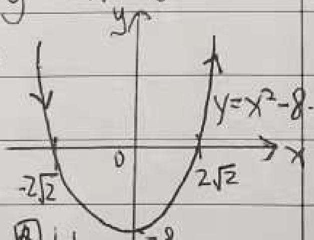


图1.1.

~~(2). 位置:~~

~~$t_1=1s$ 时 $\vec{r}(1)=\begin{bmatrix}2\\4-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}$，即 $(2,-4)$~~

~~$t_2=2s$ 时 $\vec{r}(2)=\begin{bmatrix}4\\16-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix}$，即 $(4,8)$~~

~~速度:~~

~~$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\begin{bmatrix}2\\8t\end{bmatrix}$~~

(2). $\vec{r}(t)=2t\hat{i}+(4t^2-8)\hat{j}$.

$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=2\hat{i}+8t\hat{j}$

$\vec{a}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=8\hat{j}$.

$t_1=1s$ 时,

$\vec{r}_1=2\hat{i}-4\hat{j}$, $\vec{v}_1=2\hat{i}+8\hat{j}$, $\vec{a}_1=8\hat{j}$.

$t_2=2s$ 时.

$\vec{r}_2=4\hat{i}+8\hat{j}$, $\vec{v}_2=2\hat{i}+16\hat{j}$, $\vec{a}_1=8\hat{j}$.

~~加速度:~~

~~$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$.~~

~~$t_1=1s$ 时~~

~~$\vec{a}(1)=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$~~

~~$t_1=2s$ 时,~~

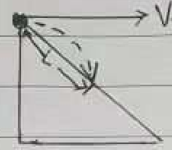
~~$\vec{a}(2)=\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$，故 $a_1=a_2=8\ m/s^2$~~

~~方向为正 y 方向。~~

1.9

1.9

已知:



(图1.2)

求: (1) L的理论值.

(2). L实为165m, 测量值有何与理论值不符?

解:

设参考系为 $O \to x$, $\downarrow y$

则把运动员视为图1.2上的黑色质点.

(1). 该质点的位置矢量为

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix}110\cdot\frac{5}{18}t\\ \frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}, \text{其中 } g=9.8\,ms^{-2}.$$

由于斜台与水平之倾角为45°, 故质点落在斜台的时间 t_1 必满足 $x(t_0)=y(t_0)$, 其中 $x(t)$, $y(t)$ 分别为 $\vec{r}(t)$ 的 x, y 分量, 且 $t_1\neq0$,

就有 $110\cdot\frac{5}{18}t_1=\frac{1}{2}gt_1^2$

$\Rightarrow \frac{550}{9\times9.8}=t_1$,

$t_1=6.23\ldots\approx6.23\,s$.

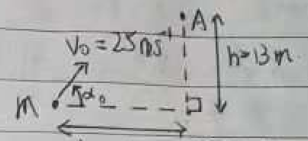
此时 $L=\sqrt{2}\,x(t_0)=269.28\ldots$

$\approx\boxed{269\,m}$ #

(2). (1)的计算假设质点的空气阻力系数为零, 而事实上并非如此, 故实际距离必小于理论距离.

1.10

已知.



(图1.3)

问: m是否能在A的上方通过.

求: m在水平距离为50米处, 高度的最大值.

解: 设参考系为 $y\uparrow$, $O\to x$

m的位置矢量为

$$\vec{r}(t)=\begin{bmatrix}V\cos\alpha_0\, t\\ V\sin\alpha_0\, t-\frac{1}{2}gt^2\end{bmatrix}, \quad g=9.8\,ms^{-2}$$

轨迹方程为

$$y=x\tan\alpha_0-\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{V\cos\alpha_0}\right)^2$$

$$=-\frac{gx^2}{2v^2}(1+\tan^2\alpha_0)+x\tan\alpha_0.$$

$$=-\frac{gx^2}{2v^2}\tan^2\alpha_0+x\tan\alpha_0-\frac{gx^2}{2v^2}.$$

$x=50\,m$ 时, y的最大值为

(把y视为关于 $\tan\alpha_0$ 的二次多项式)

$$-\frac{x^2-4\left(-\frac{gx^2}{2v^2}\right)\left(-\frac{gx^2}{2v^2}\right)}{4\left(-\frac{gx^2}{2v^2}\right)}$$

$=12.2877\ldots\approx12.3\,m<13\,m.$

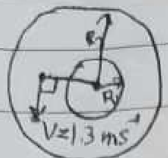
于是他能击中的目标, 最大高度为12.3m

于 $\alpha_0=\arctan\left(-\frac{x}{2\left(-\frac{gx^2}{2v^2}\right)}\right)=51.9°$ 时可以实现,

但其不能击中13m的目标.

1.18、

已知：



(图1.4)

$R_1 = 2.2\text{cm}$
$R_2 = 5.6\text{cm}$
n(音轨密度) $= 650\ \text{mm}^{-1}$

问：1)光盘放音时间。

2). 激光束在 $r=5.0\text{cm}$ 时，光盘旋转的角速度，角加速度。

解：

1) 光盘共有 $\frac{5.6-2.2}{100}\cdot 650\times10^{3} = 22100$ 条音轨。

以下假设激光束移轨时间为零。

每条音轨宽 $\frac{5.6-2.2}{22100} = 1.54\ \mu\text{m}$.

于是第 k 条音轨的播放时间为 $\frac{2\pi(0.022+1.54\times10^{-6}k)}{1.3}$ s.

总播放时间为

$$\sum_{k=1}^{22100}\frac{2\pi(0.022+1.54\times10^{-6}k)}{1.3}$$

$$\approx 2350 + 7.443\times10^{-6}\times\frac{22100(22101)}{2}$$

$$\approx 2350 + 1818 = 4168\ \text{s}$$

$$\approx 69.5\ \text{min}.$$

2). 虽然光盘 以……

由于线速度……

27. 虽然光盘上以离散方式储存保存资料，而旋转的角速度变化应是离散的，但可忽略由于变化时间，周期皆短，可以确认递增为光盘旋转的角速度是关于时间连续的。

$\boxed{\begin{aligned}&\text{考虑两条相邻音轨播放时长的差值：}\\ &t_2-t_1=\frac{2\pi}{v}(r_1+\dots+r_2)\\ &\quad=\frac{2\pi}{v}\cdot\frac{(r_1+r_2)\cdot N(r_2-r_1)}{2}\\ &\quad=\frac{2\pi N}{v}\cdot\left(r_1+\frac{r_2-r_1}{2}\right)(r_2-r_1)\\ &t_2\to t_1\text{时，}r_2\to r_1\text{，故可忽略高阶无穷小项。}\\ &\Delta t=\frac{2\pi N}{v}r_1\Delta r+\frac{\pi N}{v}(\Delta r)^2\\ &\quad\approx\frac{2\pi N}{v}r_1\Delta r_1\end{aligned}}$

$r=5.0cm$ 时.

$w=\frac{v}{r}=\frac{1.3}{0.05}$ 26 s^{-1}

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dr}{dt}w+r\frac{dw}{dt}$

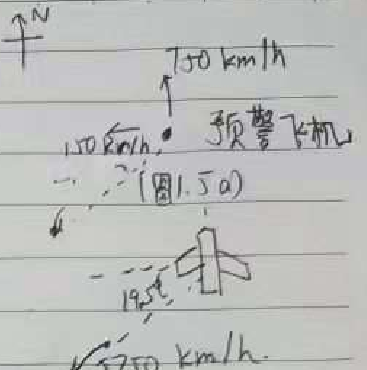
由于线速度不变，$a=0$.

角加速度 $\beta=\frac{dw}{dt}=-\frac{w}{r}\frac{dr}{dt}\approx-\frac{w}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t}$

$\beta|_{r=0.05m}=\frac{-26}{0.05}\times\frac{1.3}{2\pi\cdot 630\times10^{-3}\times 0.05}$

$=-3.31\times10^{-3}\ rad\ s^{-2}$ #.

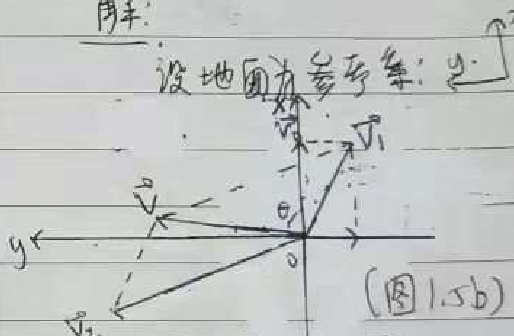
1.26. 已知：



求：导弹相对地面的飞行速率、方向。

解：

设地面为参考系：



(图1.5b)

$\vec v_0$是飞机相对空气的速度，$\vec v_1$是飞机相对地面的速度，$\vec v_2$是导弹相对飞机的速度，$\vec v$是导弹相对地面速度。

则 $\vec v=\vec v_1+\vec v_2$

$=(750\vec i-150\vec j)+5750(\cos109.5°\vec i+\sin109.5°\vec j)$

$=-1169\vec i+5270\vec j$

故导弹相对地面速度为

$=\sqrt{(-1169)^2+(5270)^2}=5398.3$

≈ 5400 km/h.

飞行方向为 $180°+\arctan\left(\frac{5270}{-1169}\right)=102.51°$，

即向西偏南12.5°.