（科目：离散数学(1)）　**清华大学数学作业纸**　4120238

编号：　班级：计11　姓名：岳章乔.　第 1 页

1. 公理系统.

(公理)

一. $\vdash ((P\vee P)\to P)$.

二. $\vdash (P\to(P\vee Q))$.

三. $\vdash (P\vee Q\to(Q\vee P))$.

四. $\vdash (P\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$.

(定义)

一. $P\to Q$ 即 $\neg P\vee Q$.

二. $P\wedge Q$ 即 $\neg(\neg P\vee\neg Q)$.

三. $P\leftrightarrow Q$ 即 $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$.

在证明(1)~(4)前,先证明以下六个定理.

(i). $\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$

(ii) $\vdash P\to P$.

(iii) $\vdash \neg P\vee P$

(iv) $\vdash P\vee\neg P$

(v) $\vdash P\to\neg\neg P$.

(vi). $\vdash \neg\neg P\to P$.

(i) 证明:

(1). $\vdash (P\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$. —公理四.

(2). $\vdash (P\to R)\to((\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R))$ —(1)代入 $\frac{P}{\neg P}$

(3). $\vdash (P\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ —(2)定义一.

(ii) 证明!

(1). $\vdash P\to P\vee Q$. —公理二.

(2). $\vdash P\to P\vee P$ —(1)代入 $\frac{P}{Q}$.

(3). $\vdash P\vee P\to P$ —公理一.

(4). $\vdash (Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ —定理(i).

(5). $\vdash (P\vee P\to P)\to((P\to P\vee P)\to(P\to P))$. —代入 $\frac{Q}{P\vee P}$, $\frac{R}{P}$

(6). $\vdash (P\to P\vee P)\to(P\to P)$. —(3)(5)分离

(7). $\vdash P\to P$ —(2)(6)分离

(iii) 证明.

(1) $\vdash P\to P$ —定理(ii)

(2) $\vdash \neg P\vee P$ —(1)定义一.

(iv) 证明.

(1) $\vdash (P\vee Q)\to(Q\vee P)$ —公理三.

(2). $\vdash (\neg P\vee P)\to(P\vee\neg P)$. —代入 $\frac{P}{\neg P}$, $\frac{Q}{P}$

(3). $\vdash \neg P\vee P$ —定理(iii)

(4). $\vdash P\vee\neg P$ —(2)(3)分离

(v). 证明!

(1) $\vdash P\vee\neg P$ —定理(iv)

(2). $\vdash \neg P\vee\neg\neg P$ —代入 $\frac{P}{\neg P}$

(3). $\vdash P\to\neg\neg P$ (2)定义一.

(vi) 证明.

~~(1). $\vdash (P\vee Q)\to(Q\vee P)$ —公理三.~~

~~(2). $\vdash (\neg P\vee\neg\neg P)\to(\neg\neg P\vee\neg P)$ —代入 $\frac{P}{\neg P}$, $\frac{Q}{\neg\neg P}$~~

~~(3). $\vdash (P\to\neg\neg P)\to(\neg\neg P\vee\neg P)$. —(2)定义一.~~

~~(4). $\vdash P\to\neg\neg P$ —定理(v)~~

~~(5). $\vdash \neg\neg P\vee\neg P$ —(3)(4)分离~~

~~(6). $\vdash \neg\neg\neg P\vee\neg\neg P$ —代入 $\frac{P}{\neg P}$~~

~~(7). $\vdash \neg\neg P\to\neg\neg P$~~

(1). $\vdash P\to\neg\neg P$ —定理(v).

(2). $\vdash \neg P\to\neg\neg\neg P$ —(1)代入 $\frac{P}{\neg P}$.

(3). $\vdash (Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$ —公理四.

(4). $\vdash (\neg P\to\neg\neg\neg P)\to((P\vee\neg P)\to(P\vee\neg\neg\neg P))$ —(3)代入 $\frac{Q}{\neg P}$, $\frac{R}{\neg\neg\neg P}$

(5). $\vdash P\vee\neg P\to P\vee\neg\neg\neg P$. (2)(4)分离

(6). $\vdash P\vee\neg P$ —定理(iv)

(7). $\vdash P\vee\neg\neg\neg P$ —(5)(6)分离

(8). $\vdash P\vee Q\to Q\vee P$ —公理三.

(9). $\vdash P\vee\neg\neg\neg P\to\neg\neg\neg P\vee P$ —(8)代入 $\frac{Q}{\neg\neg\neg P}$

(10). $\neg\neg\neg P\vee P$ (8)(9)分离, (11). $\neg\neg P\to P$ (10)定义一.

以下证 (1)~(4).

(1). 证明:

(1) $\vdash \neg\neg P \to P$ —定理(ii).

(2). $\vdash \neg\neg(\neg P \vee \neg Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ ①代入 $\frac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

(3). $\vdash \neg(P \wedge Q) \to (\neg P \vee \neg Q)$ —② 定义二.

(2) 证明.

① $\vdash P \to \neg\neg P$. —定理(ii)

② $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ —①代入 $\frac{P}{\neg P \vee \neg Q}$

③ $\vdash (\neg P \vee \neg Q) \to \neg(P \wedge Q)$ —③ 定义二.

(3) 证明.

① $\vdash (Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$. —定理(i)

② $\vdash ((P \vee Q) \to (Q \vee P))$
$\to (P \to (P \vee Q)) \to (P \to (Q \vee P))$
—①代入 $\frac{Q}{P \vee Q}$, $\frac{R}{Q \vee P}$

③ $\vdash (P \vee Q) \to (Q \vee P)$.

④ $(P \to (P \vee Q))$
$\to (P \to (Q \vee P))$. —公理三. ②,③分离

⑤. $P \to (P \vee Q)$. 公理二.

⑥. $P \to (Q \vee P)$. ④、⑤分离

(4). 证明.

① $\vdash P \to (Q \vee P)$. (3)的结论.

② $\vdash Q \to (\neg P \vee Q)$. ①代入 $\frac{P}{Q}$, $\frac{Q}{\neg P}$.

③ $\vdash Q \to (P \to Q)$. ② 定义一.

2 (1). 以下证明 $\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$ 正确.

证明:

① $\neg Q \wedge (P \to Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ —相继式

② $\neg Q, (P \to Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ —$(\wedge \Rightarrow)$

③ $P \to Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q$. —$(\neg \Rightarrow)$

④ $Q \overset{s}{\Rightarrow} \neg P, Q$. —$(\to \Rightarrow)$

且

$\Rightarrow P, \neg P, Q$.

⑤ $P, Q \overset{s}{\Rightarrow} Q$. 且 —$(\Rightarrow \neg)$

$P \Rightarrow P, Q$.

⑥ 则两相继式 皆没有联结词, 且 $\overset{s}{\Rightarrow}$ 两侧皆有共同的命题变项, 从而都是公理, 证毕.

3. (1). $\neg A \vdash A \to B$.

① $A, \neg A, \neg B \vdash \neg A$. —肯定前提律

② $A, \neg A, \neg B \vdash A$. —同上.

③ $\neg A, A \vdash B$. —①,② 反证律

④ $\neg A \vdash A \to B$. —蕴含词引入律

($⑦' \neg \Rightarrow$)