16 April 2022 at 20:33

DM HW7

1. 证明: *第四章 (1,3,7,8,13), (5,9,14,16)

设有一个简单平面图 G, $\delta(G)\geq 3$, $d<12$ 且每个域的边界数 $t\geq 5$,

则有
$$\begin{cases} m-n+2\leq \frac{2m}{t} & ① \quad \text{(定理4.1.2)} \\ n-m+d=2 & ② \quad \text{(欧拉公式)} \\ d<12 & ③ \\ t\geq 5 & ④ \\ 2m=\sum d(v)\geq 3n & ⑤ \end{cases}$$

① $\wedge$ ④ $\Rightarrow$ $m-n+2\leq \frac{2m}{t}\leq \frac{2m}{5} \Rightarrow \frac{3}{5}m+2\leq n$. ⑥

② $\wedge$ ③ $\Rightarrow$ $d=2-n+m<12 \Rightarrow m-n<10$. ⑦

⑤ $\wedge$ ⑥ $\Rightarrow$ $n\geq \frac{3}{5}m+2\geq \frac{9}{10}n+2 \Rightarrow n\geq 20$ ⑧

⑤ $\wedge$ ⑦ $\Rightarrow$ $10>m-n\geq \frac{3}{2}n-n=\frac{1}{2}n \Rightarrow n<20$ ⑨

⑧与⑨矛盾, 原命题得证。☒

3. 证明:

设 G 是简单平面图, 且 $n\geq 11$, 同时, G, $\bar{G}$ 两者都是平面图, 则
$$\begin{cases} n\geq 11 & ① \\ m\leq 3n-6 & ② \quad \text{(推论4.2.1)} \\ \binom{n}{2}-m\leq 3n-6 & ③ \end{cases}$$

② $\wedge$ ③ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}n(n-1)\leq 6n-12 \Rightarrow n^2-13n+24\leq 0$.

$\Rightarrow n\leq \frac{13+\sqrt{169-96}}{2}=\frac{13+\sqrt{73}}{2}$,

同时 $\sqrt{73}<9$, 故 $n\leq \frac{13+\sqrt{73}}{2}<\frac{13+9}{2}=11$,

与①矛盾, 原命题得证。☒

7. 证明：

设平面图 G 有五个域，且对任意两个不同的域有公共边界，

那么 G^* 也是平面图，$n^*=5$，且 $\forall u^*, v^* \in G^*$，$(u^*, v^*) \in E(G^*)$，于是 K_5 是 G^* 的子图，代表 G^* 非平面，矛盾。☒

8. 证明：

设简单平面图 G，$n \geq 4$，且最多只有三个结点 v，$d(v) \leq 5$.

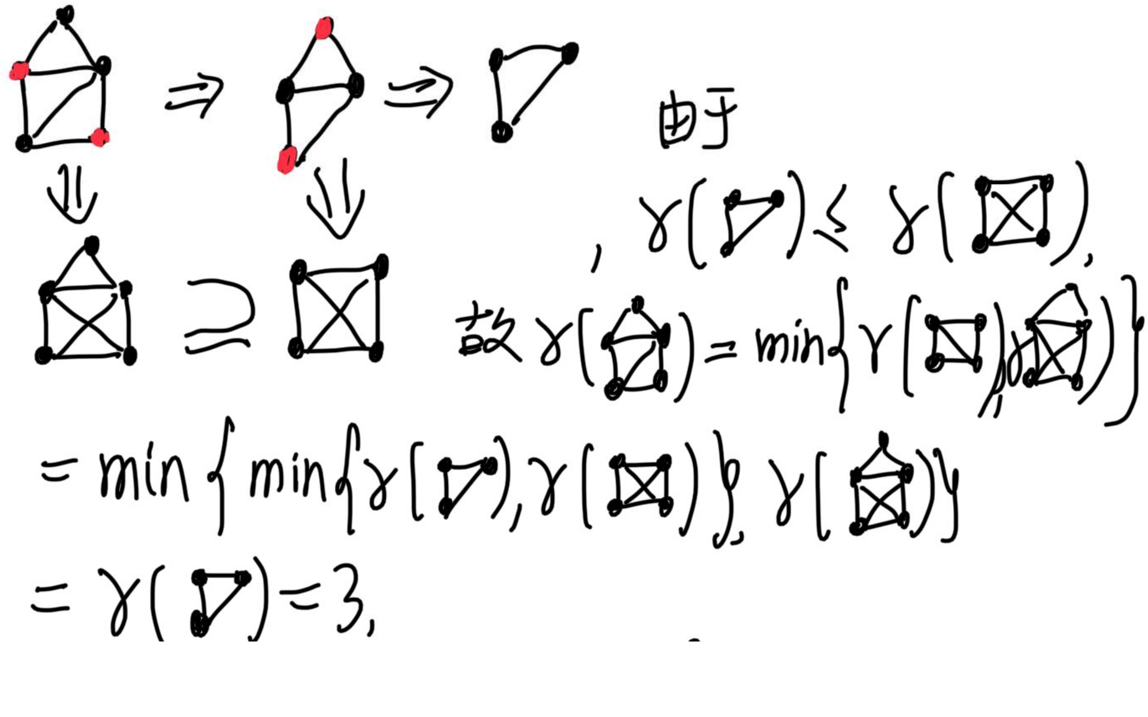
通过对 G 加边，生成 G 的极大平面图 G'.

此时，G' 的每个面都是"三角形"，否则 G' 就不是极大平面图，于是 $\delta(G') \geq 3$.

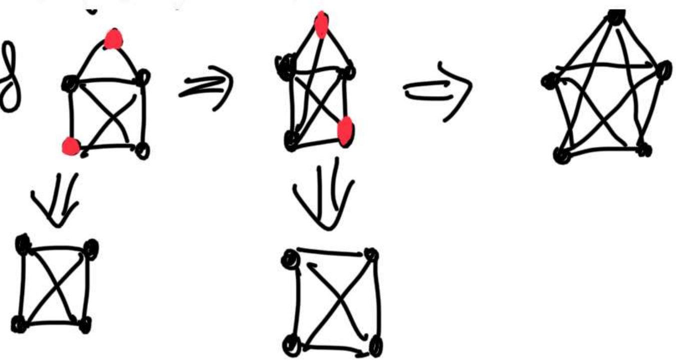
设 G' 有 r 个结点 $(r \leq 3)$ 的度 ≤ 5，则

$$6n-12 = 2m \geq 6(n-r)+3r = 6n-3r \Rightarrow -12 \geq -3r \Rightarrow r \geq 4$$，矛盾。☒

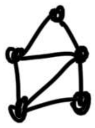
13. 解：(缩点时删除重边).



同时



于是

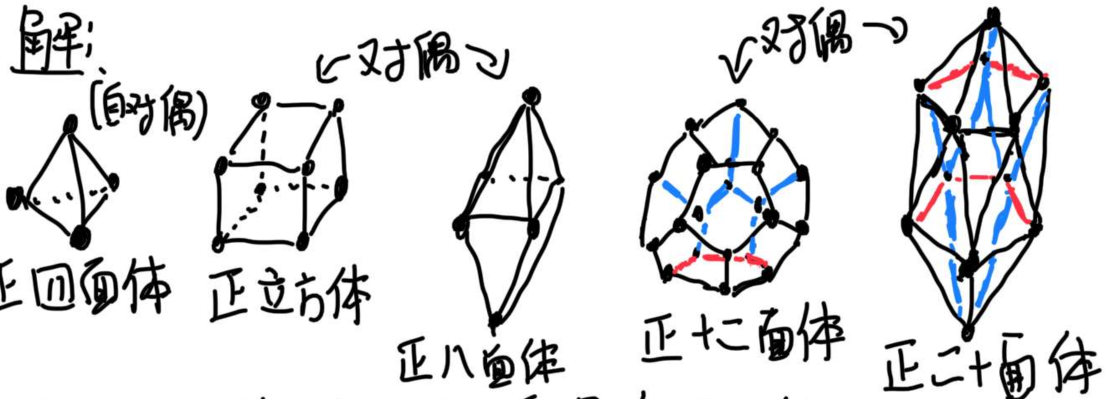
$$f\left(\right.$$  $$\left., x\right) = f(K_3, x) + 3f(K_4, x) + f(K_5, x)$$

$$= A_x^3 + A_x^4 + A_x^5$$

$$= x(x-1)(x-2)\left[1+(x-3)[3+x-4]\right]$$

$$= x(x-1)(x-2)^3$$

5. 解：



以上五者，为所有的正凸多面体。

以下证明，不存在其他的正凸多面体。

证明：

设正多面体的每一面有 t 条边，s 个顶点，那么就有

$$\begin{cases} n-m+d=2 & ① \\ td=2m=sn & ② \\ t,s\geq 3. & ③ \end{cases}$$

$$① \wedge ② \Rightarrow \left(\frac{2}{t}+\frac{2}{s}-1\right)m=2 \Rightarrow \frac{1}{t}+\frac{1}{s}-\frac{1}{2}=\frac{1}{m}$$

$\Rightarrow \frac{1}{t}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{m}>\frac{1}{2}$.

同时 $\frac{1}{2}<\frac{1}{s}+\frac{1}{t}\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{t} \Rightarrow t<6$，同理 $s<6$.

由于 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故 $(s,t)\neq(4,5)$，$(s,t)\neq(5,4)$，$(s,t)\neq(4,4)$

于是 $(s,t)=(3,3) \longrightarrow m=6$

$(s,t)=(3,4),(4,3) \longrightarrow m=12$

$(s,t)=(3,5),(5,3) \longrightarrow m=30$，分别对应上述五个正多面体。

(s,t) 的解只有以上五组，证毕。☒

9. 证明：

设存在无割边平面图 G，除了一个域，其他域的边界数都是 d 的整数倍，且 G 的域可以二着色。

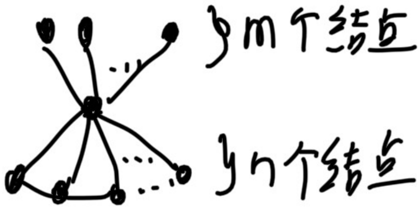
那么 G^*（G 没有割边）就不存在自环，而且除了结点 v_1，$\forall v\in G^*, v\neq v_1$，都有 $d \mid d(v)$，同时 $\chi(G^*)=2$。

把 G^* 同色的结点归两侧，则 G^* 是二分图，$G^*=(X,Y;E)$

由于 G^* 没有自环，故每条边对 X，Y 结点度的总和的贡献各自为 1，因此 $\sum_{v\in X} d(v)=\sum_{v\in Y} d(v)$.

不失一般性，设 $v_1\in Y$，于是 $d \mid \sum_{v\in X} d(v)$，但 $d \nmid \sum_{v\in Y} d(v)$，矛盾，命题得证。

14. 解.

设形如 

的图的色数多项式为 $U_{n,m}$，则

$U_{0,m} = f(T_{n+1}, t)$, $U_{n,0} = f(W_{n+1}, t) + f(W_n, t)$.

把 m个结点中的一个，分别与 n个结点中的一个点连线或合并，则 $U_{n,m} = U_{n+1,m-1} + U_{n,m-1}$

$$\Rightarrow U_{n,m} = U_{n-1,m+1} - U_{n-1,m}$$

$$= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k U_{n-t,m+t-k}. \quad (*)$$

(*) 的证明如下：

$t=0$ 时显然。

现假设 t 时成立，$t+1$ 时。

$$\sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k \left[U_{n-1-t,m+t+1-k} - U_{n-1-t,m+t-k} \right].$$

$$= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} (-1)^k U_{n-(t+1),m+(t+1)-k} - \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k} U_{n-(t+1),m+t-k}$$

$$= \binom{n}{0} U_{n-(t+1),m+(t+1)} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left[\binom{t}{k-1} + \binom{t}{k} \right] U_{n-(t+1),m+(t+1)-k} - \binom{t}{t} (-1)^t U_{n-(t+1),m}.$$

$$= \sum_{k=0}^{t+1} \binom{t+1}{k} (-1)^k U_{n-(t+1),m+(t+1)-k}. \quad \square$$

令 $t=n$,

$$U_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k U_{0,m+n-k}.$$

令 $m=0$,

$$U_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k U_{0,n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f(T_{n-k+1}, t)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k t (t-1)^{n-k} = t\left[(t-1)+(-1)\right]^n$$

$= t(t-2)^n.$

记 $a_n = f(W_n, t)$，则

$$a_{n+1} + a_n = t(t-2)^n = (t-2)(a_n + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = (t-3)a_n + (t-2)a_{n-1}.$$

解特征方程

$$r = \frac{(t-3) \pm \sqrt{(t-3)^2 + 4(t-2)}}{2} = \frac{t-3 \pm \sqrt{t^2-2t+1}}{2}$$

$$r_1 = t-2, \quad r_2 = -1.$$

$$\Rightarrow a_n = A(-1)^n + B(t-2)^n,$$

又 $a_3 = f(W_3, t) = f(K_3, t) = t(t-1)(t-2)$,

$a_4 = f(W_4, t) = f(K_4, t) = t(t-1)(t-2)(t-3)$，于是

$$(+)\begin{cases} a_3 = -A + B(t-2)^3 = t(t-1)(t-2) \\ a_4 = A + B(t-2)^4 = t(t-1)(t-2)(t-3) \end{cases}$$

$$B(t-2)^3(t-1) = t(t-1)(t-2)^2 \Rightarrow B = \frac{t}{t-2}.$$

$$A = B(t-2)^3 - t(t-1)(t-2) = t(t-2)^2 - t(t-1)(t-2) = t(t-2)(t-2-t+1) = -t(t-2).$$

所以 $a_n = f(W_n, t) = t\left((t-2)^{n-1} - (-1)^n(t-2)\right)$.

$n = 2k$ 时，

$$f(W_{2k}, t) = t\left((t-2)^{2k-1} - (t-2)\right) = t(t-2)\left[(t-2)^{2k-2} - 1\right],$$

于是 0,1,2,3 都是零点，$\chi(W_{2k}) = 4$.

$n = 2k+1$ 时，

$$f(W_{2k+1}, t) = t\left((t-2)^{2k} + t-2\right) = t(t-2)\left[(t-2)^{2k-1} + 1\right].$$

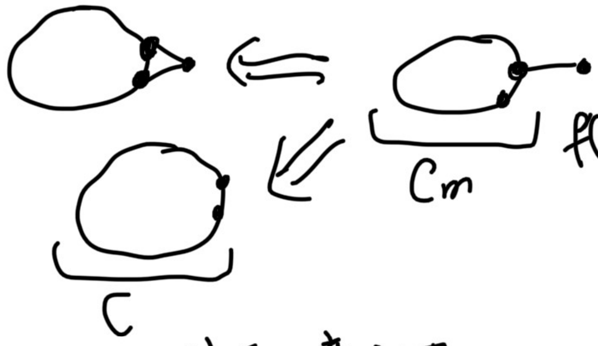
0,1,2 都是零点，$\chi(W_{2k+1}) = 3$.

因此，$\chi(W_n) = \begin{cases} 3, & 2 \nmid n \\ 4, & 2 \mid n \end{cases}$ #

$$f(W_n, t) = t\left[(t-2)^{n-1} - (-1)^n(t-2)\right] \#$$

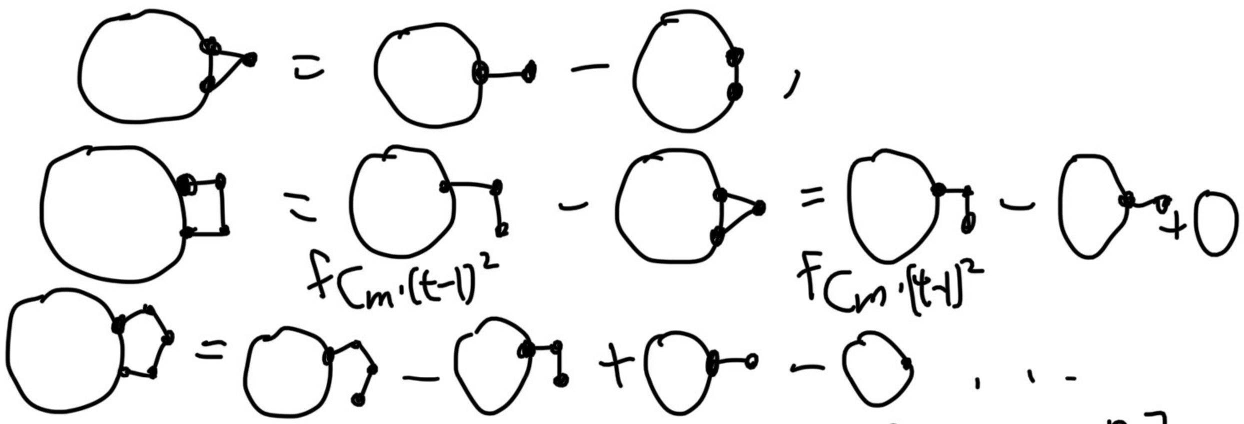
16, 解：

先处理$n=3$。 $n=3$时，G是三角形



$f(t)=f_{C_m}(t)\cdot(t-1)$

在色数多项式的意义下，



于是 $f(G,t)=f(C_m,t)\cdot\left[(t-1)^{n-2}-(t-1)^{n-3}+\dots+(-1)^{n-2}\right]$.

$$=f(C_m,t)\cdot\frac{(t-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}}{t}$$

$$=\frac{1}{t}\left[(t-1)^m+(-1)^m(t-1)\right]\left[(t-1)^{n-1}+(-1)^n\right]$$

$$=\frac{1}{t}\left[(t-1)^{m+n-1}+(-1)^n(t-1)^m+(-1)^m(t-1)^n+(-1)^{m+n}(t-1)\right]$$ #

$$\gamma(G)=\begin{cases}2, & 2|m \wedge 2|n\\ 3, & otherwise\end{cases}$$