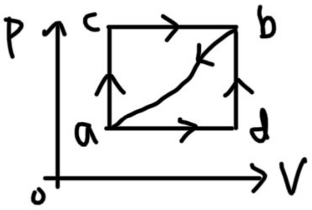
# HW 10

2, 5, 15, 16, 18, 19, 21.

2、一热力学系统由下图表示的状态 a，沿 acb 过程到达状态 b 时，吸收了 560J 的热量，对外做了 356J 的功。

(1) 如果它沿 adb 过程到达状态 b 时，对外做了 220J 的功，它吸收了多少热量？

(2)、当它由状态 b 沿曲线 ba 返回状态 a 时，外界对它做了 282J 的功，它将吸收多少热量？是真吸了热，还是放了热？




解：(*) 从这题开始，定义 $W = -A$，为系统对外做的净功，即 $\Delta U = \Delta Q - W$，(15 除外) 的摩尔数，

(1). $\Delta U = \Delta Q_{acb} - W_{acb} = \Delta Q_{adb} - W_{adb}$.

$560 - 356 = \Delta Q_{adb} - 220$.

$\Delta Q_{adb} = 424J$.

(2)、$\Delta U_{ba} = -\Delta U_{ab} = -204J$.

$= Q_{ba} - W_{ba}$

$= Q_{ba} - (-282)$.

$\Rightarrow Q_{ba} = -486J$，系统对外放热。

5、一定量氢气在保持压强为 $4.00 \times 10^5 Pa$ 不变下，温度由 0.0°C 升高到 50.0°C，吸收了 $6.0 \times 10^4 J$，

(1). 氢气的量是多少摩尔?
(2). 氢气内能变化多少?
(3) 氢气对外做了多少功?
(4) 如果 $H_2$ 体积不变,而温度发生同样变化,它该吸收多少热量?

解: (1). 把 $H_2$ 视为理想气体,其有5个自由度,

$\frac{5}{2}nR\Delta T = \Delta U = nC_p\Delta T - p\Delta V$.

$= Q - nR\Delta T$. $\Rightarrow \frac{7}{2}nR\Delta T = Q$,

$$n = \frac{2Q}{7R\Delta T} = \frac{2\times 6.00\times 10^4}{7\times 8.31\times 50.0} = 41.3\ \text{mol}.$$

(2). $U = \frac{5}{2}nR\Delta T. = \frac{5}{2}\times 41.3\times 8.31\times 50 = 42900\ J$

(3). $W = p\Delta V = nR\Delta T = 41.3\times 8.31\times 50 = 17200J$

(4). 此为等容过程. $\Delta U = \Delta Q = \frac{5}{2}nR\Delta T = 42900J$.

15. 理想气体的既非等温也非绝热而其过程方程可表示为 $pV^n = C$ 的过程叫多方过程, $n$ 叫多方指数。

(1). 说明 $n = 0, 1, \gamma, +\infty$ 时,各是什么过程?
(2). 证明:多方过程外界对理想气体做的功为 $\frac{p_2V_2 - p_1V_1}{n-1}$
(3) 证明:多方过程中,理想气体的摩尔热容为

$C_m = C_{V,m}\left(\frac{\gamma - n}{1-n}\right)$,并说明(1)中各过程的Cm值。(体).

解: (1). 等压过程,等温过程,绝热过程,等容过程。
(2).

$$-W=-\int_{V_1}^{V_2} p\,dV=-\int_{V_1}^{V_2}\frac{C}{V^n}dV=\frac{C}{n-1}\left(\frac{1}{V_2^{n-1}}-\frac{1}{V_1^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{p_2V_2^n}{V_2^{n-1}}-\frac{p_1V_1^n}{V_1^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{n-1}\ \boxtimes$$

(3). 即证

$$\frac{đQ}{dT}=C_{V,m}\left(\frac{\gamma-n}{1-n}\right).$$

$$\Delta U=\Delta Q-W.$$

$$\nu C_{V,m}\Delta T=\Delta Q+\frac{p_2V_2-p_1V_1}{n-1}=\frac{\nu R\Delta T}{n-1}.$$

另一方面, $C_{V,m}=\frac{i}{2}R \Rightarrow R=\frac{2}{i}C_{V,m}=(\gamma-1)C_{V,m}$

$$\nu\left(C_{V,m}-\frac{(\gamma-1)C_{V,m}}{n-1}\right)\Delta T=\Delta Q$$

$$\Rightarrow C_m=\frac{đQ}{dT}=\frac{1}{\nu}\frac{\Delta Q}{\Delta T}=C_{V,m}\left(1-\frac{\gamma-1}{n-1}\right)=C_{V,m}\frac{n-\gamma}{n-1}\ \boxtimes$$

$n=0$时, $C_m=\gamma C_{V,m}=C_{p,m}$

$n=1$时, $C_m$ (不存在). 吸多少热,温度也不升高

$n=\gamma$时, $C_m=0$. 不吸热,温度也能升高

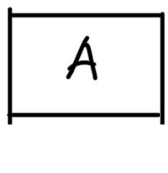
$n=+\infty$时, $C_m=C_{V,m}\dfrac{1-\frac{\gamma}{n}}{1-\frac{1}{n}}=C_{V,m}$.

16. 如图所示,总容积为40L的绝热容器,中间用一绝热板隔开,隔板重量忽略,可以无摩擦地自由升降。A,B两部分各装有1mol氦气,它们最初压强都是1atm,隔板停在中间。现在使微小电流通过B中电阻而缓缓加热,直到A部气体体积缩小到一半为止。求在这一过程中:

(1). B中气体的过程方程,以其体积和温度的关系表示。

(2). 两部分气体各自的最后温度。

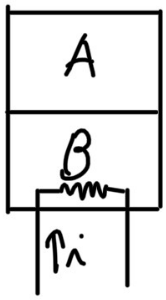
(3). B中气体吸收的热量。



(1). B中气体的过程方程，以其体积和温度的关系表示。

(2). 两部分气体各自的最后温度。

(3). B中气体吸收的热量。




解：(1). 对A而言，A在B被加热时，显然在绝热收缩：

$$p_A V_A^{\gamma} = C, \quad \gamma = 1 + \frac{2}{i} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}.$$

对B而言，

$V_B = 0.04 - V_A$，且隔板两侧气压相等，故 $p_A = p_B$.

$$\Rightarrow p_B (0.04 - V_B)^{7/5} = 1.013 \times 10^5 \times 0.02^{7/5} = 424.$$

(2). 对A而言，$P_{A_i} \cancel{V_{A_i}^{\gamma}} = P_{A_f} V_{A_f}^{\gamma} = P_{A_f} 2^{-\gamma} \cancel{V_{A_i}^{\gamma}}$

$$\Rightarrow P_{A_f} = 2^{\gamma} P_{A_i} = 2^{7/5} \times 1.013 \times 10^5 \ Pa = 2.67 \times 10^5 \ Pa.$$

$$T_{A_f} = \frac{P_{A_f} \cdot V_{A_f}}{R} = \frac{2.67 \times 10^5 \times 0.01}{8.31} = 322 \ K.$$

对B而言，

$$T_{B_f} = \frac{2.67 \times 10^5 \times 0.03}{8.31} = 965 \ K.$$

(3). $$\Delta Q_B = \Delta U_B + W_B$$

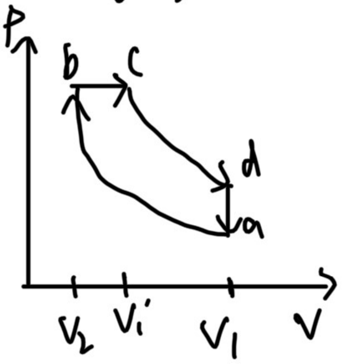
$$= \frac{5}{2} \times 8.31 \times \left(965 - \frac{1.013 \times 10^5 \times 0.02}{8.31}\right) + \int_{0.02}^{0.03} \frac{424 \, dV}{(0.04 - V)^{7/5}}$$

$$= 14980 + \frac{424}{2/5} \left[\frac{1}{(0.04 - V)^{2/5}}\right]_{0.02}^{0.03}$$

$$= 14980 + 1619 = 16600 \ J$$

18. 空气标准 Diesel 循环，由两个绝热过程 ab 和 cd，一个等压过程 bc 及一个等容过程 da 组成，试证此热机效率为

$$\eta = 1 - \frac{\left(\frac{V_1'}{V_2}\right)^{\gamma} - 1}{\gamma\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{V_1'}{V_2} - 1\right)}$$




证明：

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$Q_2 \rightarrow$ 对应 da

$Q_1 \rightarrow$ 对应 bc

$$= 1 - \frac{n C_{V,m}(T_d - T_a)}{n C_{p,m}(T_c - T_b)} = 1 - \frac{T_d - T_a}{\gamma(T_c - T_b)}$$

另有 $V_1^{\gamma-1} T_a = V_2^{\gamma-1} T_b$，$(V_1')^{\gamma-1} T_c = V_1^{\gamma-1} T_d$

$$V_2 / T_b = V_1' / T_c$$

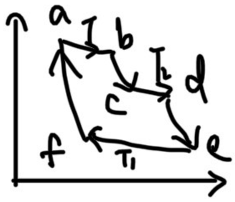
$$\Rightarrow \eta = 1 - \frac{T_a}{\gamma T_b} \cdot \frac{\frac{T_d}{T_a} - 1}{\frac{T_c}{T_b} - 1} = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \cdot \frac{\frac{T_c}{T_b}\left(\frac{V_1'}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1}{\frac{T_c}{T_b} - 1}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{V_1'}{V_2}\right)^{\gamma} - 1}{\gamma\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\left(\frac{V_1'}{V_2} - 1\right)} \quad \boxed{\text{证}}$$

19. 克劳修斯在1854年的论文中曾设计了一个如下图所示的循环过程，其中 ab, cd, ef 分别是系统与温度为 $T$, $T_2$ 和 $T_1$ 的热库接触而进行的等温过程，bc, de, fa 则是绝热过程。

他还设定系统在 cd 过程吸的热和 ef 过程放的热相等。

设系统是一定质量的理想气体，而 $T_1, T_2, T$ 是热力学温度。试计算此循环的效率。




解：易知当 $Q_1 = Q_{ab} + Q_{cd}$,

$Q_2 = Q_{ef}$ 时,

$$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}.$$

且

$$T_2 V_d^{\gamma-1} = T_1 V_e^{\gamma-1},\quad T_1 V_f^{\gamma-1} = T V_a^{\gamma-1},\quad T V_b^{\gamma-1} = T_2 V_c^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_d}{V_c}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T}\cdot\left(\frac{V_e}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_a V_e}{V_b V_f}\right)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_d}{V_c} = \frac{V_a V_e}{V_b V_f},\quad \frac{V_f}{V_e} = \frac{V_a V_c}{V_b V_d}$$

又

$$nRT_2 \ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_f}{V_e}\right)$$

$$= -nRT_1 \ln\frac{V_a}{V_b} - nRT_1 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right).$$

$$\Rightarrow nR(T_2 - T_1)\ln\left(\frac{V_d}{V_c}\right) = nRT_1 \ln\frac{V_b}{V_a} \Rightarrow \ln\frac{V_d}{V_c} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}\ln\frac{V_b}{V_a}$$

$$\eta = 1 + \frac{Q_{ef}}{Q_{ab} + Q_{cd}} = 1 - \frac{nRT_2 \ln\frac{V_d}{V_c}}{nRT \ln\frac{V_b}{V_a} + nRT_2 \ln\frac{V_d}{V_c}}$$

$$= 1 - \frac{\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{V_b}{V_a}}{T \ln\frac{V_b}{V_a} + \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{V_b}{V_a}} = 1 - \frac{T_1 T_2}{T(T_2 - T_1) + T_1 T_2}\quad \boxtimes.$$

21. 有可能利用表层海水和深层海水的温差制成热机。已知热带水域表层水温约 25℃，300m 深处，水温约 5℃。

(1). 在这两个温度之间工作的卡诺热机，效率多大？

(2). 如果一电站在此最大理论效率下工作时，获得的机械功率是 1MW，它将以何速率排出废热？

(3). 此电站获得的机械功和排出的废热，均来自25°C的水，冷却到5°C所放出的热量. 问此电站将以何速率取用25°C的表层水?

解: (1). $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{278}{298} = 6.71\%$.

(2). 该热机单位时间内吸热 $\frac{1MW}{0.0671} = 14.9MW$,

单位时间内排出热量 13.9 MW.

(3). $\frac{m}{t} = \frac{Q_H}{t c \Delta T} = \frac{14.9}{4.18 \times (25-5) \times 1000} = 178 kg/s$.