第五章 匹配与网络流Ⅱ

计算机系网络所：张小平

清華大學
Tsinghua University

主要内容

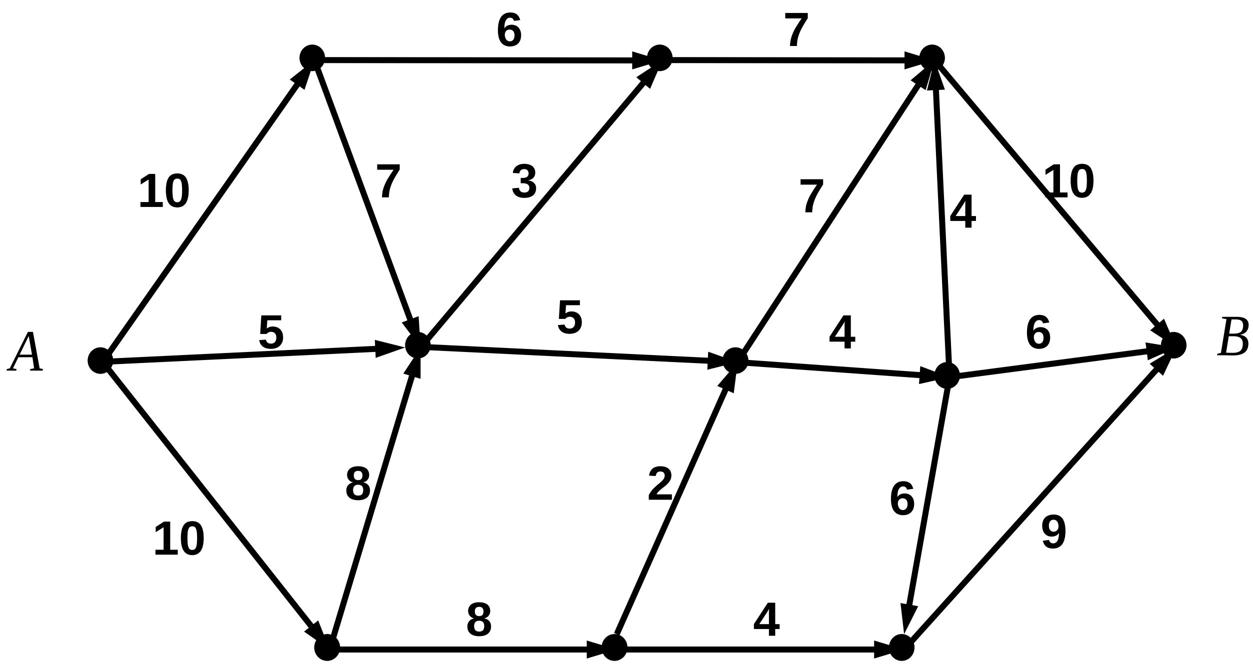
- 5.1 二分图的最大匹配
- 5.2 完全匹配
- 5.3 最佳匹配及其算法
- 5.4 最大基数匹配
- **5.5 网络流图**
- 5.6 Ford-Fulkerson最大流标号算法
- 5.7 最大流的Edmonds-Karp算法
- 5.8 最小费用流

网络流图

- 网络流问题：
  - 网络流理论主要用于解决一个传输网络中的运载容量与运载流量之间的关系。
  - 目的在于追求一个最大和最佳的运输方案

网络流图

例：城市间公路网建设

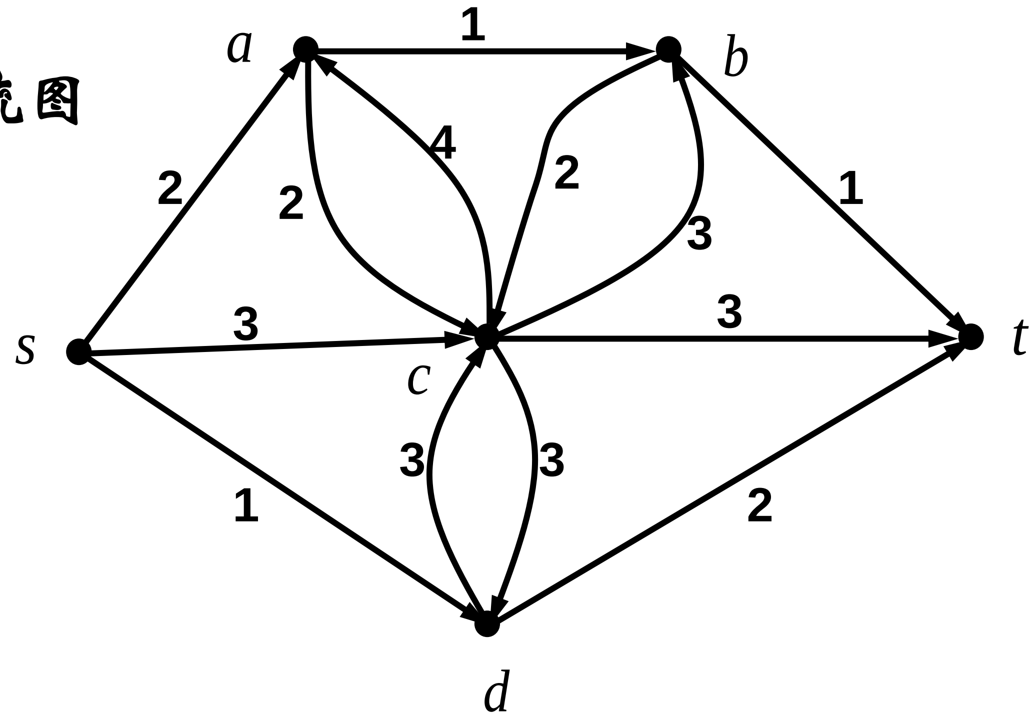


网络流图

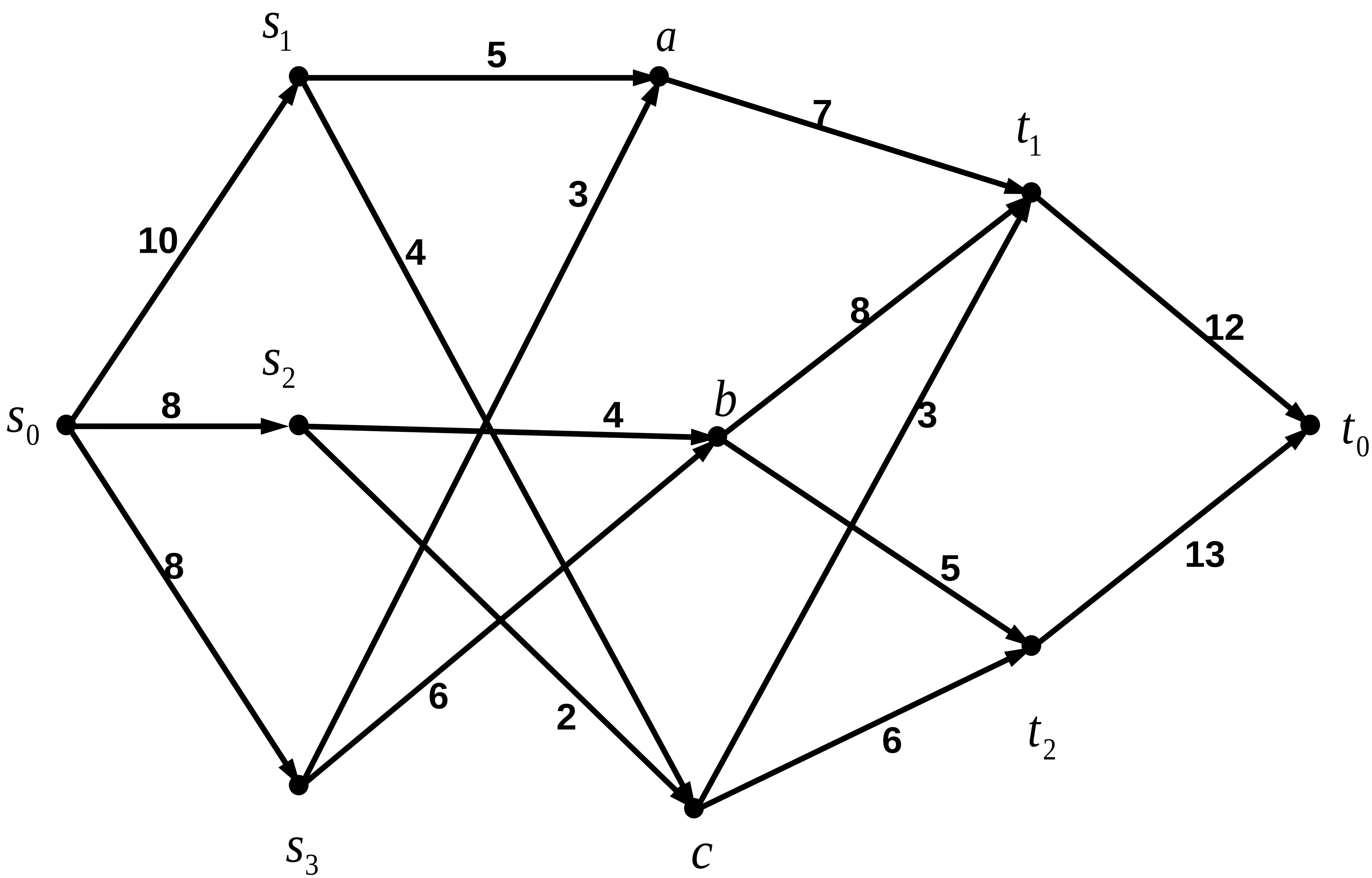
- 定义5.5.1 一个运输网络N（或称**网络流图**）是一个没有自环的有向连通图。它满足：
  - 只有一个正度为零的结点t，称为**汇**
  - 只有一个负度为零的结点s，称为**源**
  - 每条边(i, j)都有一个非负实数权c_{ij}，称为该边的**容量**。如果结点i到结点j没有边，则$c_{ij}=0$

例：

如右图，就是一个网络流图



此类网络可以看作是某种产品
从产地 s 通过不同的道路到达销地 t，
边的容量可以表示该边可以通过的量，
也可以表示通过该边运输所需要的代价等



s_1
a
5
7
t_1
3
10
4
8
12
s_2
s_0
8
4
b
3
t_0
8
5
13
6
2
6
t_2
s_3
c

网络流图

- 在网络流图N中，如果每条边e_{ij}都给定一个非负实数f_{ij}（称其为边流量），满足

1. $f_{ij} \le c_{ij}, \qquad e_{ij} \in N$ ⟷ 每条边的流量不超过边容量
2. $\sum_j f_{ij} = \sum_k f_{ki}, \qquad i \ne s,t$ ⟷ 注入i结点的流量总和等于结点i发出的流量总和
3. $\sum_j f_{sj} = \sum_k f_{kt} = w$ ⟷ 源结点发出的流量总和等于汇结点接收的流量总和

那么就把这一组f_{ij}叫做该网络的**允许流**，w称为它的**流量**。

允许流分布f

网络流图

- 在网络流图N的一个允许流分布f里，满足$f_{ij} = c_{ij}$的边称为**饱和边**，否则就是**非饱和边**

- 如果一个允许流分布使得网络的流量w_0为极大，即

$$w_0 = \max \sum_j f_{sj}$$

就说w_0是网络的**最大流**

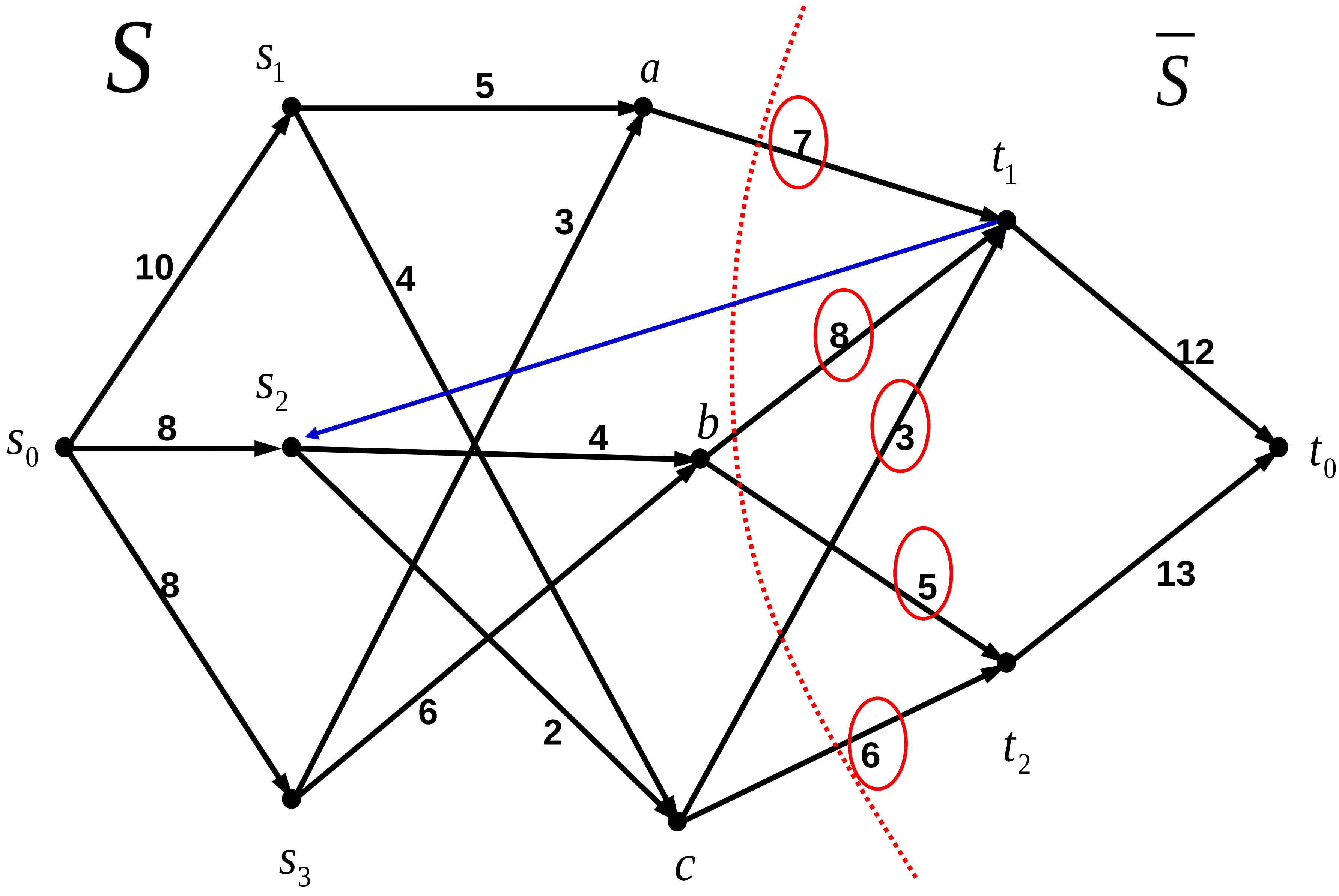
网络流图

- 定义5.5.2 设S是网络流图$N=(V,E)$中的一个结点集，满足
  1. $s \in S$
  2. $t \in \overline{S}$, $\overline{S} = V - S$

则全部有向边(i,j), $i \in S$, $j \in \overline{S}$的集合称为N的一个**割切**，记为$(S,\overline{S})$，$(S,\overline{S})$中各边的容量之和称为该**割切的容量**，记为$C(S,\overline{S})$，即

$$C(S,\overline{S}) = \sum_{(i,j)\in(S,\overline{S})} c_{ij}$$

Tsinghua University



割切和割集的关系？　　网络最大流和割切的关系？

网络流图

- 定理5.5.1 网络的最大流量小于等于最小的割切容量，即

$$\max(w) \le \min C(S,\bar{S})$$

证明：

– 设f是给定网络的任一允许流分布，则满足

$$\sum_j f_{sj} = w \qquad (1)$$

$$\sum_j \left(f_{ij} - f_{ji}\right) = 0 \qquad i \ne s,t \qquad j \in V \qquad (2)$$

网络流图

– 任给一个割切$(S,\overline{S})$，满足$s\in S,t\in\overline{S}$，由(1)(2)式可知，流量从源s发出后，将不会凭空衰减或消失，保持守恒，即对于一个包含源 s 的任一集合，其整体对外注出的流量将等同于w，即

$$\sum_{\substack{i\in S\\ j\in\overline{S}}}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)=w$$

清華大学 Tsinghua University

网络流图

$$\sum_{\substack{i\in S\\ j\in\overline{S}}}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)=w$$

故 $$w=\sum_{\substack{i\in S\\ j\in\overline{S}}}\left(f_{ij}-f_{ji}\right)\le\sum_{\substack{i\in S\\ j\in\overline{S}}}\left(f_{ij}\right)\le\sum_{\substack{i\in S\\ j\in\overline{S}}}c_{ij}=C\left(S,\overline{S}\right)$$

由于允许流分布与割切的任意性，定理得证！

Tsinghua University

网络流图

- 定理5.5.1 网络的最大流量小于等于最小的割切容量，即

$$\max(w) \le \min C(S, \overline{S})$$

Tsinghua University

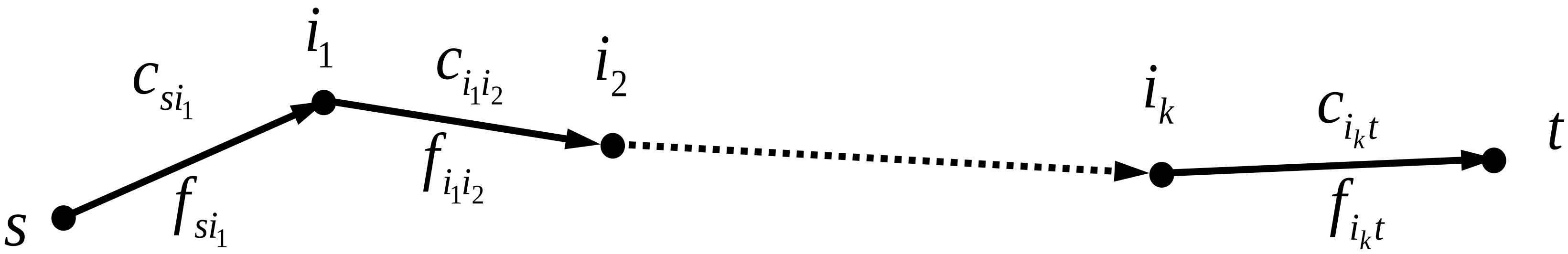
网络流图

思考：

– 如果网络的允许流并不是最大流，就一定存在从 s 到 t 的增流路径。

– 如何找到增流路径？

– 首先我们需要认识什么样的路径是增流路径！

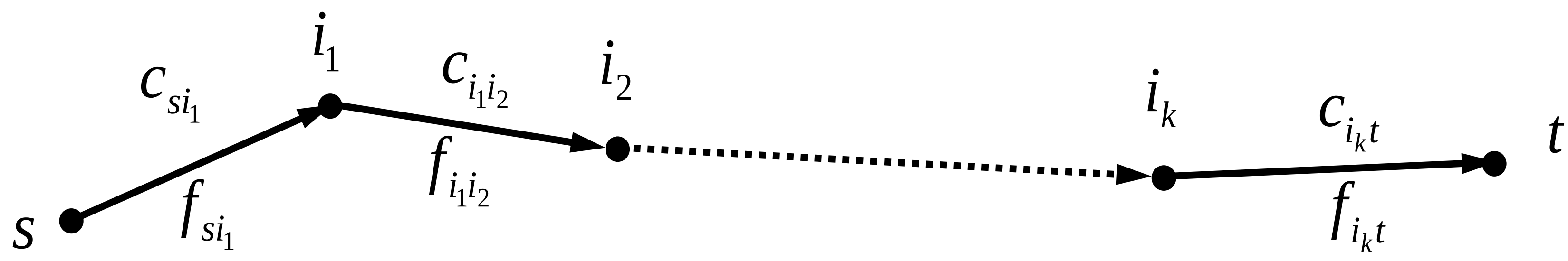


路径 P_{st} ，每条边的方向都是从 i_j 到 i_{j+1} ，称为向前边

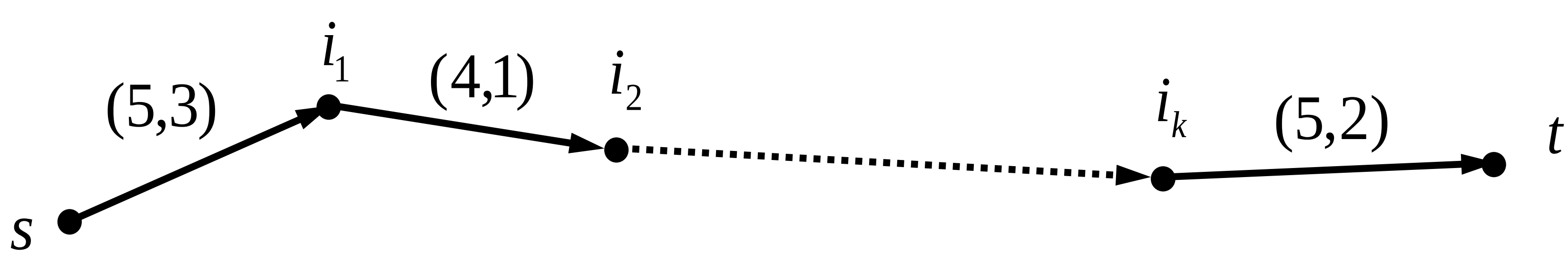
假如每条边上都有 $f_{ij} < c_{ij}$ ，则令 $\delta = \min\limits_{e_{ij} \in P_{st}} \left(c_{ij} - f_{ij} \right)$ ，

此时令每条边的流量都增加 δ，

结果仍然是网络的允许流分布，但是流量增加了 δ



为标识清晰，后面用二元组(a,b)表示每条边当前的流量状态，a表示该边的容量，b表示当前的流量，即：$a = c_{ij}$ ，$b = f_{ij}$

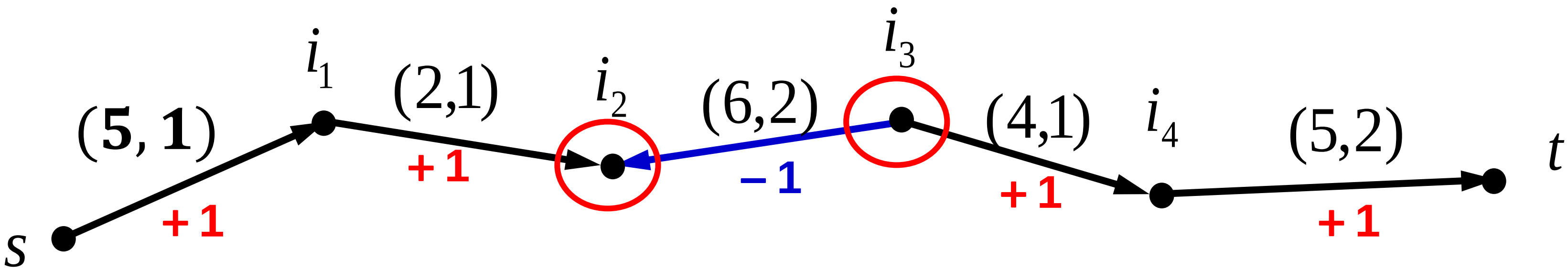


网络流图

思考：

- 从 s 到 t 的所有由向前边组成的路径有可能成为增流路径

- 如果从 s 到 t 的路径夹杂着向后边，是否有可能成为增流路径？



假如每条向前边上都有 $f_{ij} < c_{ij}$，则令 $\delta_1 = \min\limits_{e_{ij} \in P_{st}} \left(c_{ij} - f_{ij}\right)$，

假如每条向后边上都有 $f_{ij} > 0$，则令 $\delta_2 = \min f_{ij}$，

令 $\delta = \min\left(\delta_1, \delta_2\right)$，则路径中的流量可增加 δ，

结果仍然是网络的允许流分布，但是流量增加了 δ

思考：网络流图中还有其他什么类型的增流路径？

网络流图中只有这两种类型的增流路径！

网络流图

直观表述：

- 如果从 s 出发，沿途的向前边都不饱和，直到 t 都是如此，那么该路径一定可增流。
- 如果从 s 出发，沿途向前边不饱和，向后边流量大于零，直到 t 都是如此，那么该路径一定可以增流

清華大學
Tsinghua University

网络流图

- 思考：
  - 网络流图中，通过不断的增流，可以达到最大流量。
  - 那么，最大流量究竟是多少？

Tsinghua University

网络流图

- 定理5.5.1 网络的最大流量小于等于最小的割切容量，即

$$\max(w) \le \min C(S, \overline{S})$$

网络流图

- 定理5.5.2 网络流图N中，其最大流量等于其最小割切的容量，即

$$\max(w) = \min C(S, \overline{S})$$

证明：

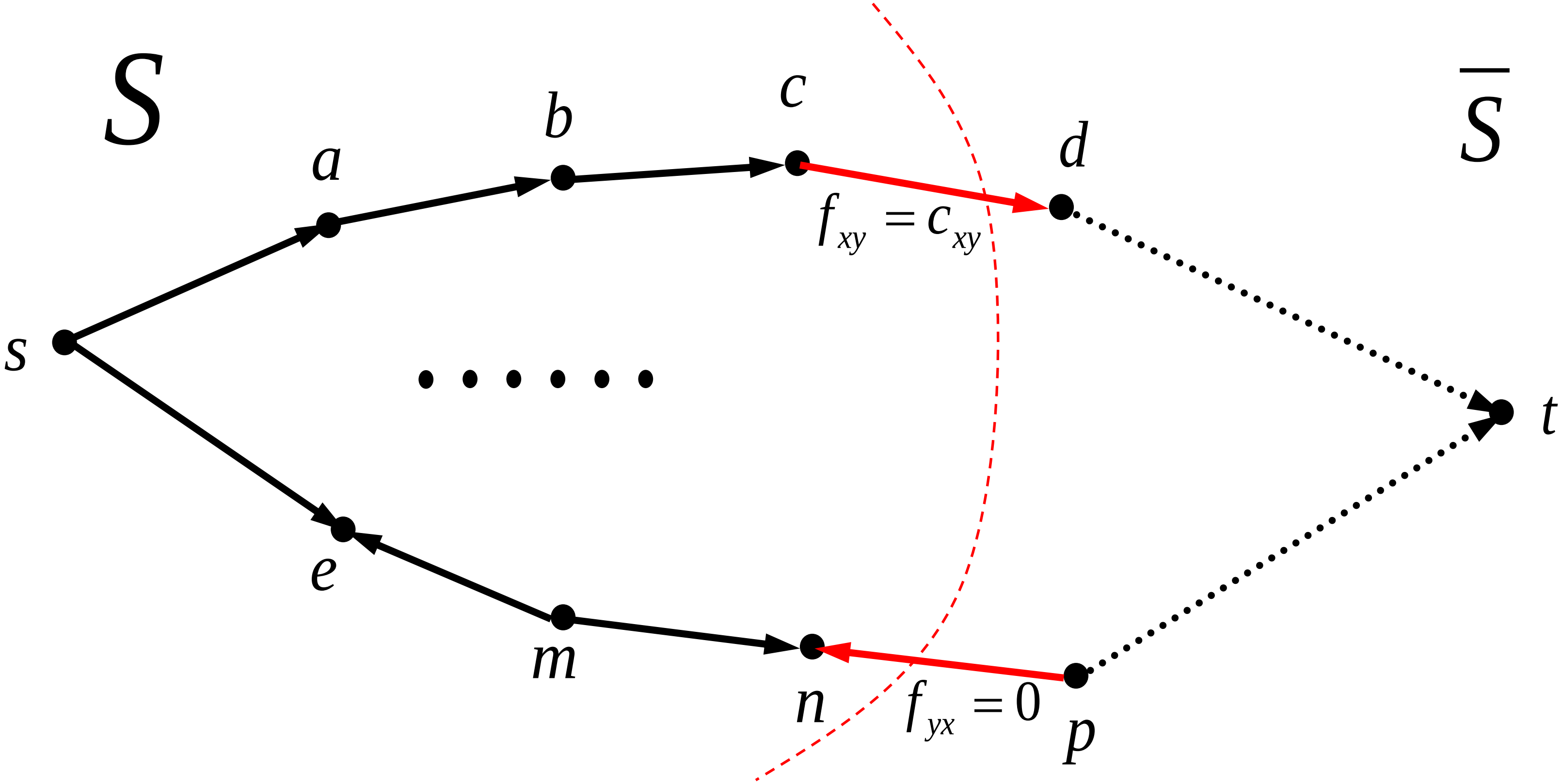
– 设网络中已经存在一个最大的允许流 f

– 定义一个割切 $(S, \overline{S})$ 如下：

1. $s \in S$
2. 若 $x \in S$，(x, y) 是向前边且 $f_{xy} < c_{xy}$，则 $y \in S$

   若 $x \in S$，(y, x) 是向后边且 $f_{yx} > 0$，则 $y \in S$

Tsinghua University



$$w = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \overline{S}}} \left(f_{xy} - f_{yx} \right) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \overline{S}}} c_{xy} = C\left(S, \overline{S}\right)$$

$$\max(w) \leq \min C(S, \overline{S}) \qquad \max(w) = \min C(S, \overline{S})$$

- 在此方法下，一定会有 $t \notin S$ ，否则从s到t将存在一条增流路径，与f是最大允许流分布矛盾
- 故 $\overline{S} \neq \Phi$。
- 据该割切的定义方法，对于任意跨于S和 $\overline{S}$ 的

边 (x,y)： 若 (x,y)是向前边，必定有 $f_{xy} = c_{xy}$

若 (x,y)是向后边，必定有 $f_{yx} = 0$

- 此时流量为最大流量w，且满足

$$w = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \overline{S}}} \left(f_{xy} - f_{yx} \right) = \sum_{\substack{x \in S \\ y \in \overline{S}}} c_{xy} = C\left(S, \overline{S}\right)$$

- 又根据定理5.5.1 $\max(w) \le \min C(S, \overline{S})$
- 故 $\max(w) = \min C(S, \overline{S})$ 证毕！

网络流图

- 定理5.5.2 网络流图N中，其最大流量等于其最小割切的容量，即

$$\max(w) = \min C(S, \overline{S})$$

网络流图

思考：

- 如何确定一个网络流图的最大流？
- 不断寻找增流路径！
- 定理5.5.2的证明过程，实质上给出了一个寻找增流路径的方法

主要内容

- 5.1 二分图的最大匹配
- 5.2 完全匹配
- 5.3 最佳匹配及其算法
- 5.4 最大基数匹配
- 5.5 网络流图
- **5.6 Ford-Fulkerson最大流标号算法**
- 5.7 最大流的Edmonds-Karp算法
- 5.8 最小费用流

Tsinghua University

Ford-Fulkerson最大流标号算法

- Ford和Fulkerson最先给出了计算运输网络最大流量的标号算法，该算法就是以定理5.5.2证明中给出的方法为基础，包含了两个过程：
  - 标号过程
  - 增流过程
  - 算法不断循环进行这两个过程，直到不存在增流路径为止。

Ford-Fulkerson最大流标号算法

- 标号过程：
  - 对图中每个结点都进行二元组标号$(v^{\pm},\delta)$，其中，v表示标号从哪个结点来，δ表示可增流的量，“±”上标表示正向流还是反向流
  - 源结点s给定标号为$(-,\infty)$
  - 若$e=(u,v)$，且$f(e)<c(e)$，则标号方向为正，v得到标号(u^{+},δ_v)，其中$\delta_v=\min(\delta_u,c(e)-f(e))$
  - 若$e=(v,u)$，且$f(e)>0$，则标号方向为负，v得到标号(u^{-},δ_v)，其中$\delta_v=\min(\delta_u,f(e))$

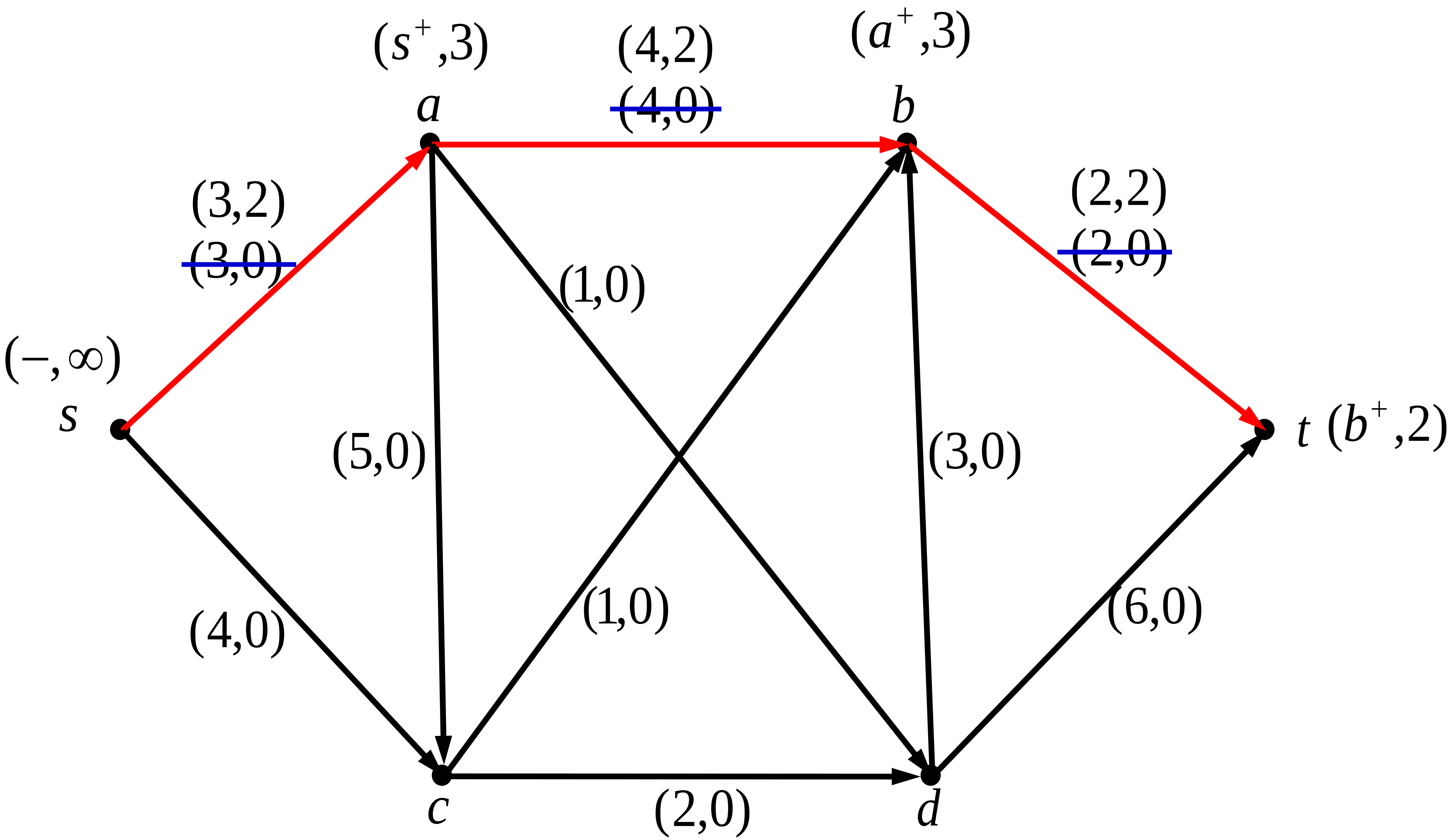
一次标号过程以标到t为终结条件

清華大學 Tsinghua University

Ford-Fulkerson最大流标号算法

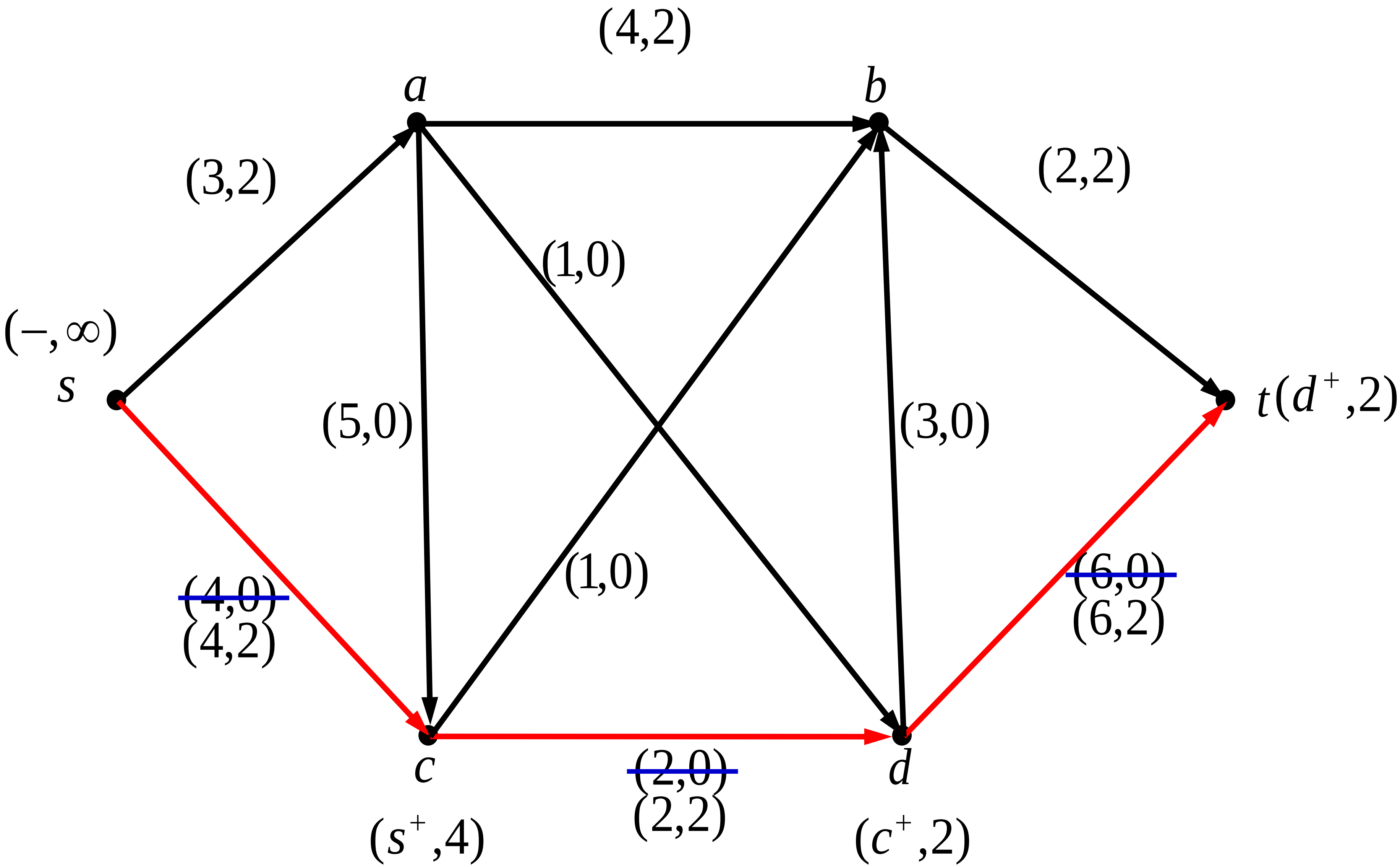
- 增流过程：
  - 对每条边都用二元组(c_{ij}, f_{ij})标记，分别表示该边的容量和实际流量
  - 在标号过程中，如果 t 得到了标号，则意味着图中存在增流路径，并可增流δ_t。
  - 将增流路径上的边标记进行修改，得到新的允许流分布 f'，完成增流

例：



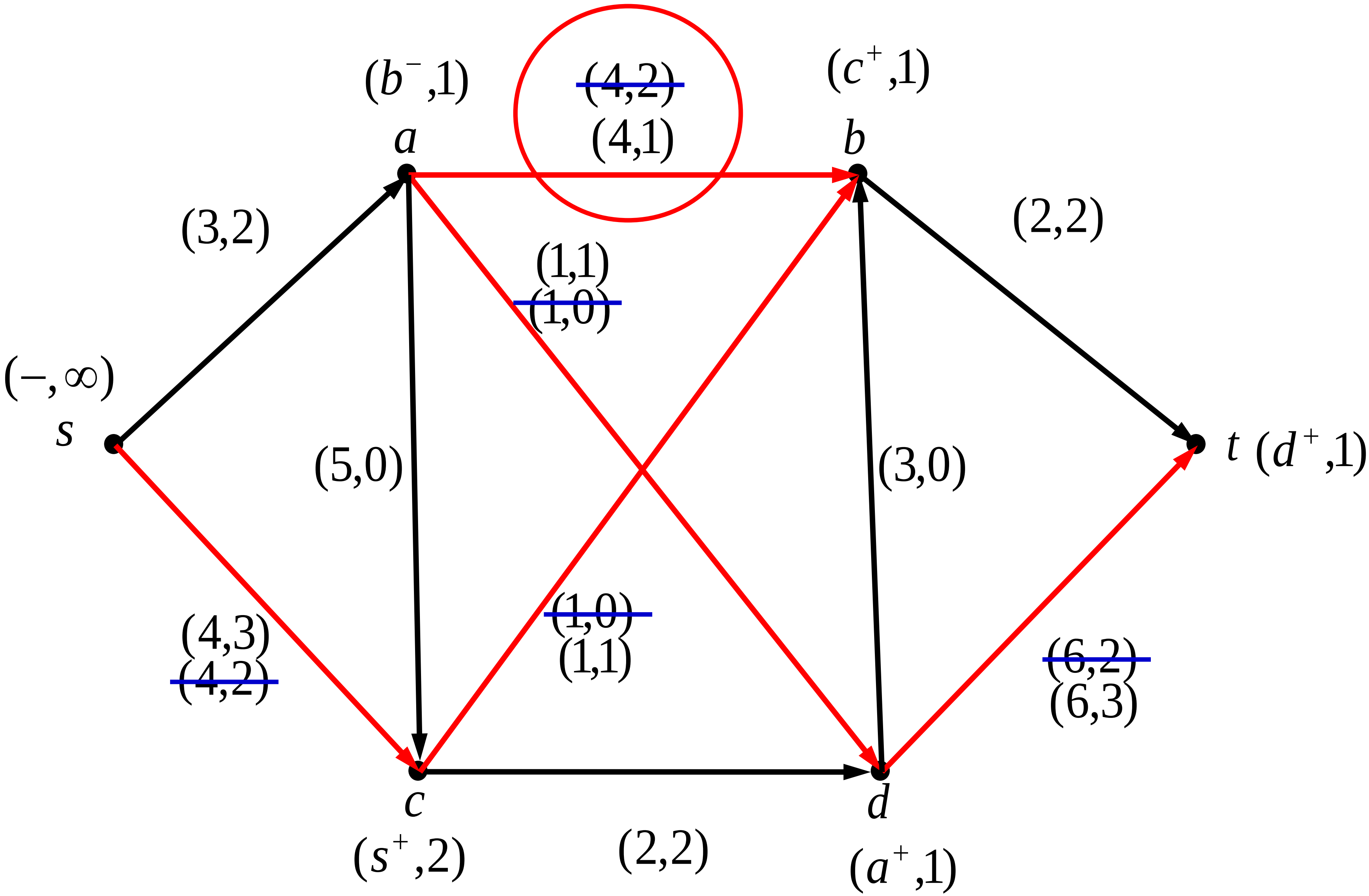
第一轮标号及增流过程结束，此时W＝2

例：



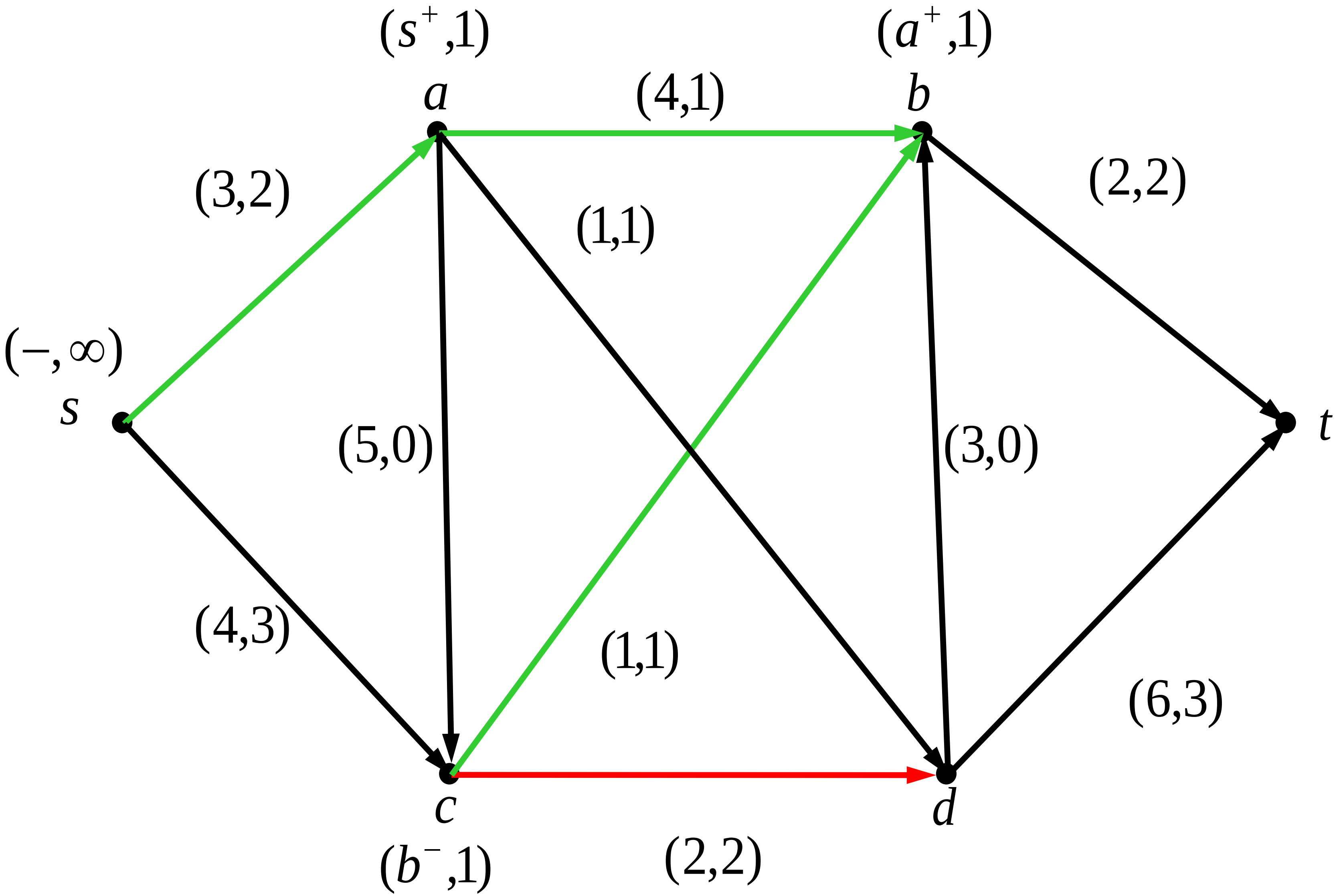
第二轮标号及增流过程结束，此时W＝4

例：

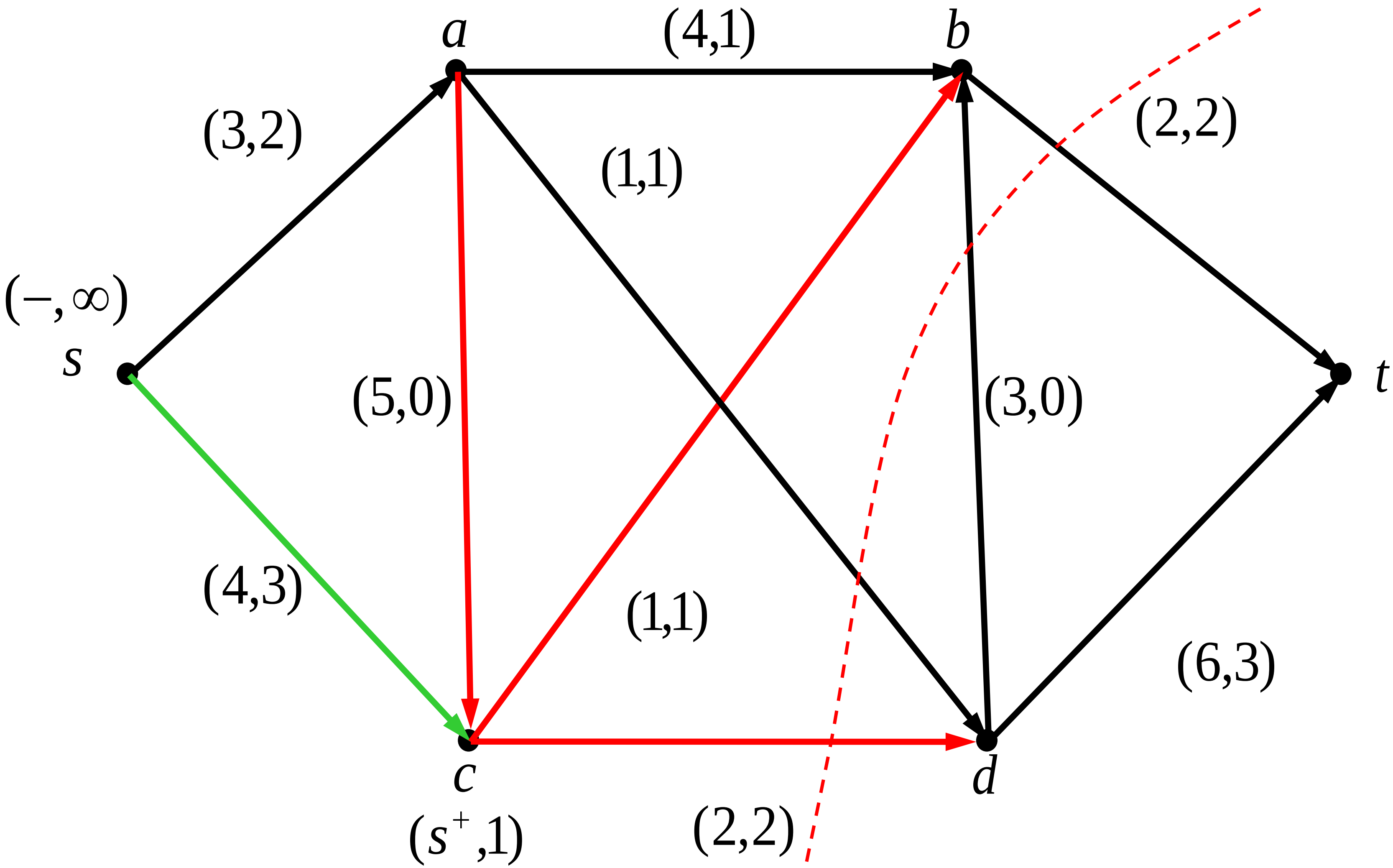


第三轮标号及增流过程结束，此时W＝5

例：



例：



$$S=\{s,a,b,c\},\quad \overline{S}=\{d,t\}\qquad (S,\overline{S})=\{(b,t),(a,d),(c,d)\},\quad C(S,\overline{S})=5$$

算法结束，此时max(w) = 5

Ford-Fulkerson最大流标号算法描述：

1. 任选一允许流分布f（一般为零流量）

标号过程：

2. 给 s 标号为 $(-,\infty)$
3. 若存在一个未标结点v，可通过正、反向标号得到标号，标之并转4，否则转7（算法结束）
4. 若$v=t$，转5，否则转3

增流过程：

5. 设v的标号是(d_v,δ_v)，
   1. 若 $d_v=u^+$ ，则令 $f(u,v)=f(u,v)+\delta_t$
   2. 若 $d_v=u^-$ ，则令 $f(v,u)=f(v,u)-\delta_t$
6. 若$u=s$，删去全部标号并转2，否则令$v=u$，转5
7. 结束

Ford-Fulkerson最大流标号算法

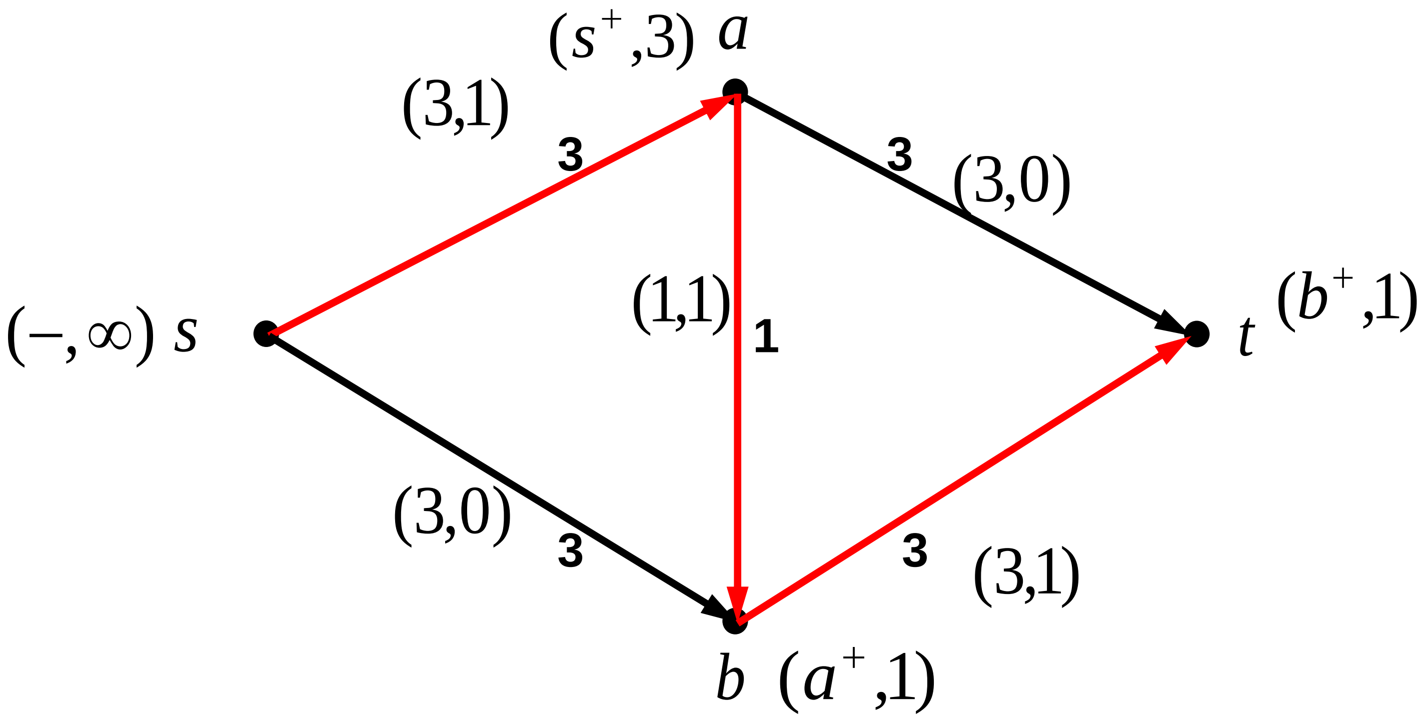
- 思考：
  - Ford-Fulkerson算法的复杂度如何？
    - 寻找增流路径

      $s \rightarrow t$ 标号过程（随机标号）

      最多经过n-1次标号标到 t 结点
    - 修改流量分布

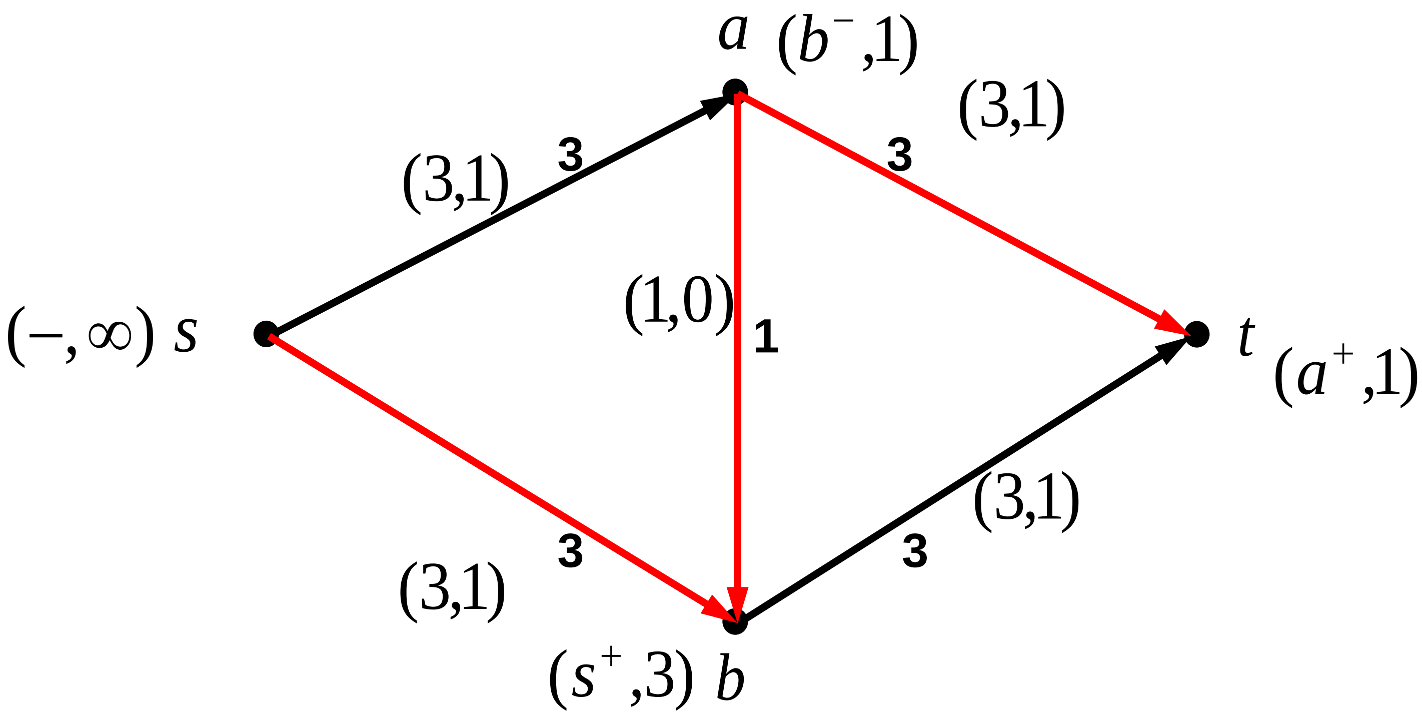
      最多m次流量值修改
    - 循环往复，直至无法找到增流路径。
    - 循环次数？

例：



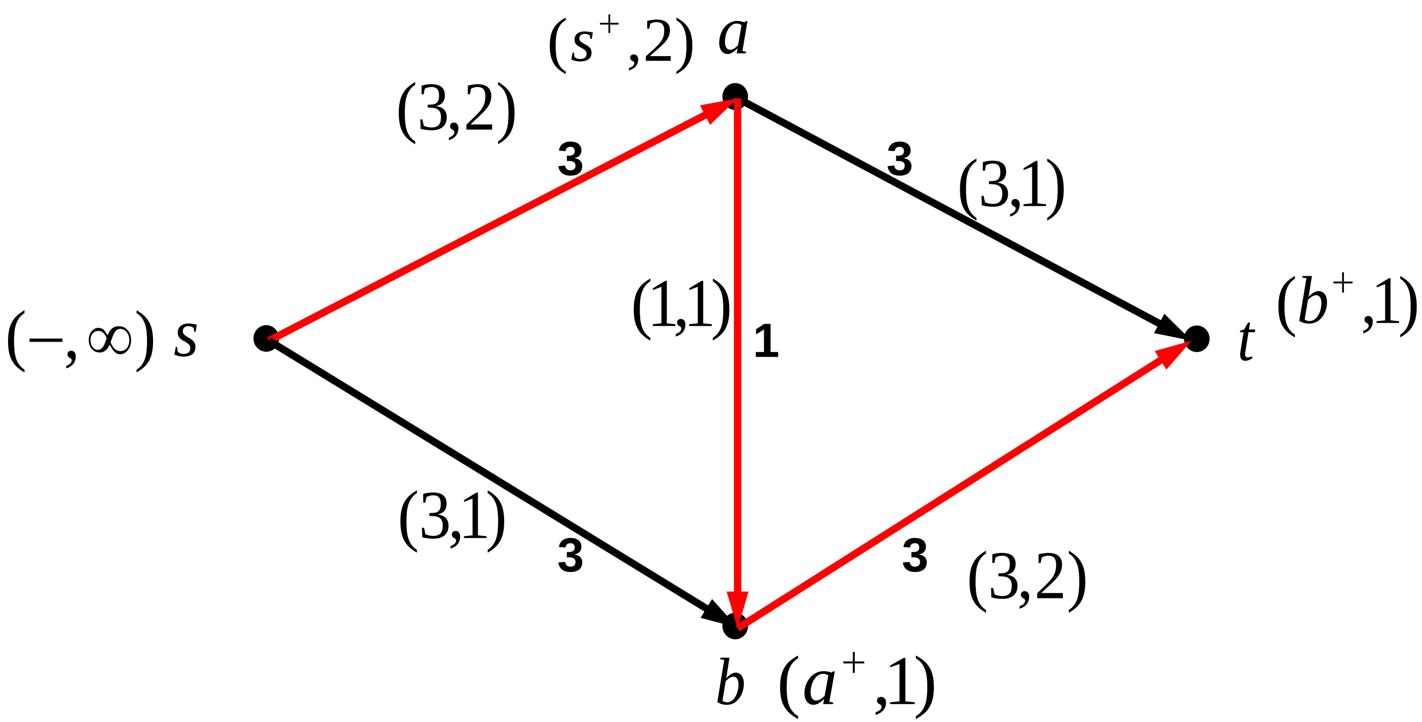
第1次增流！

例：



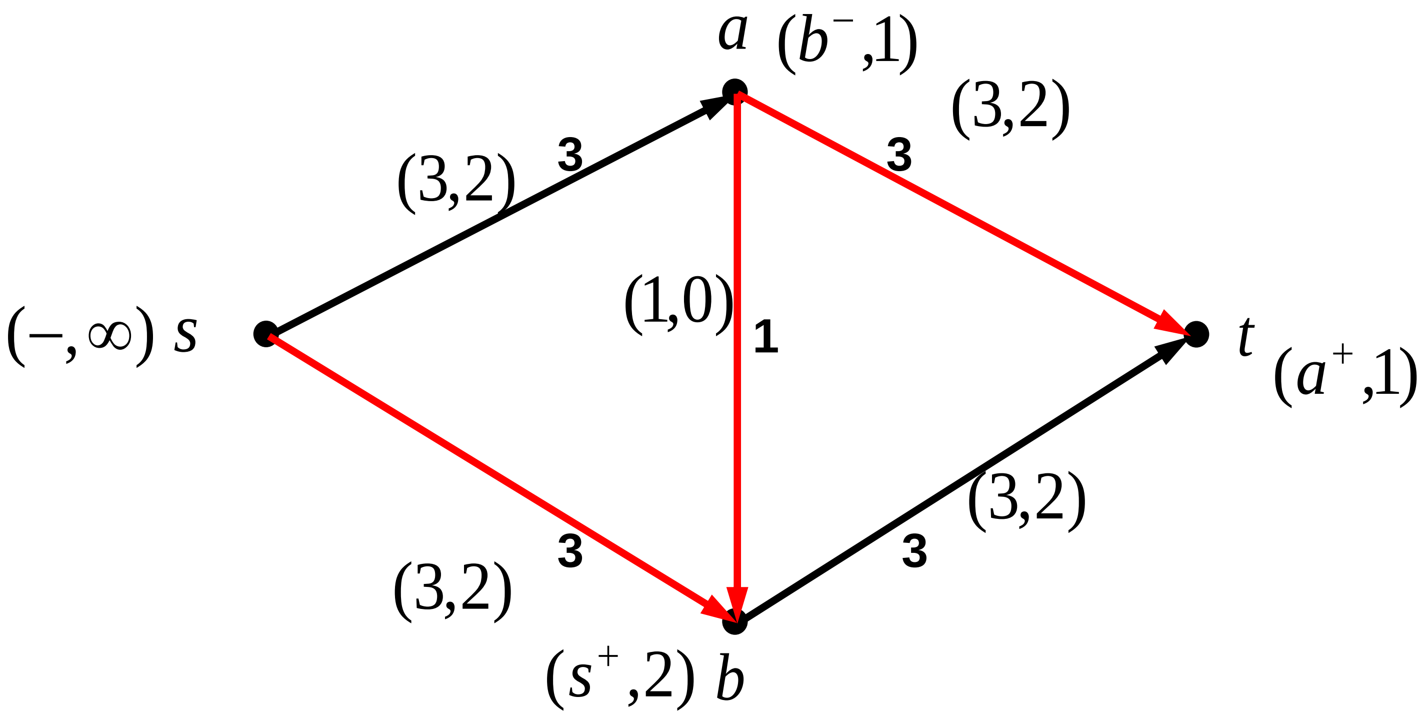
第2次增流！

例：



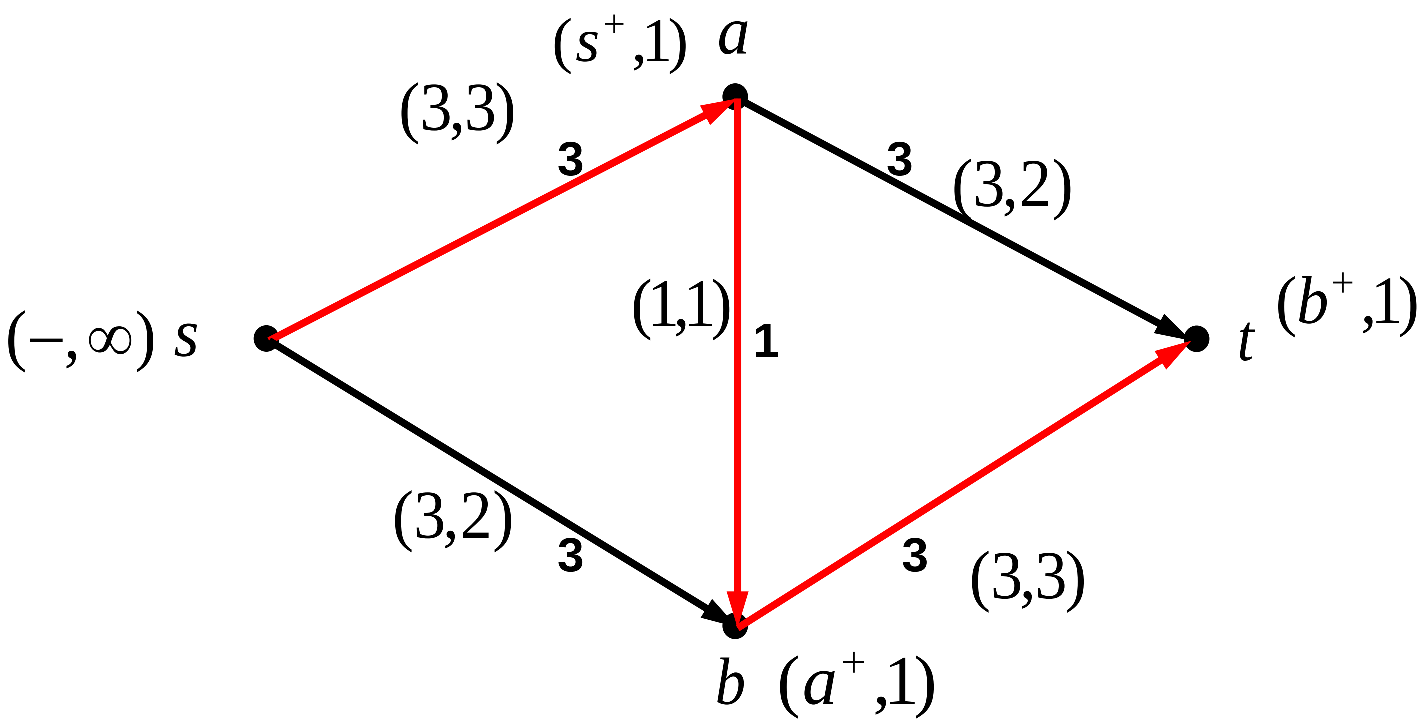
第3次增流！

例：



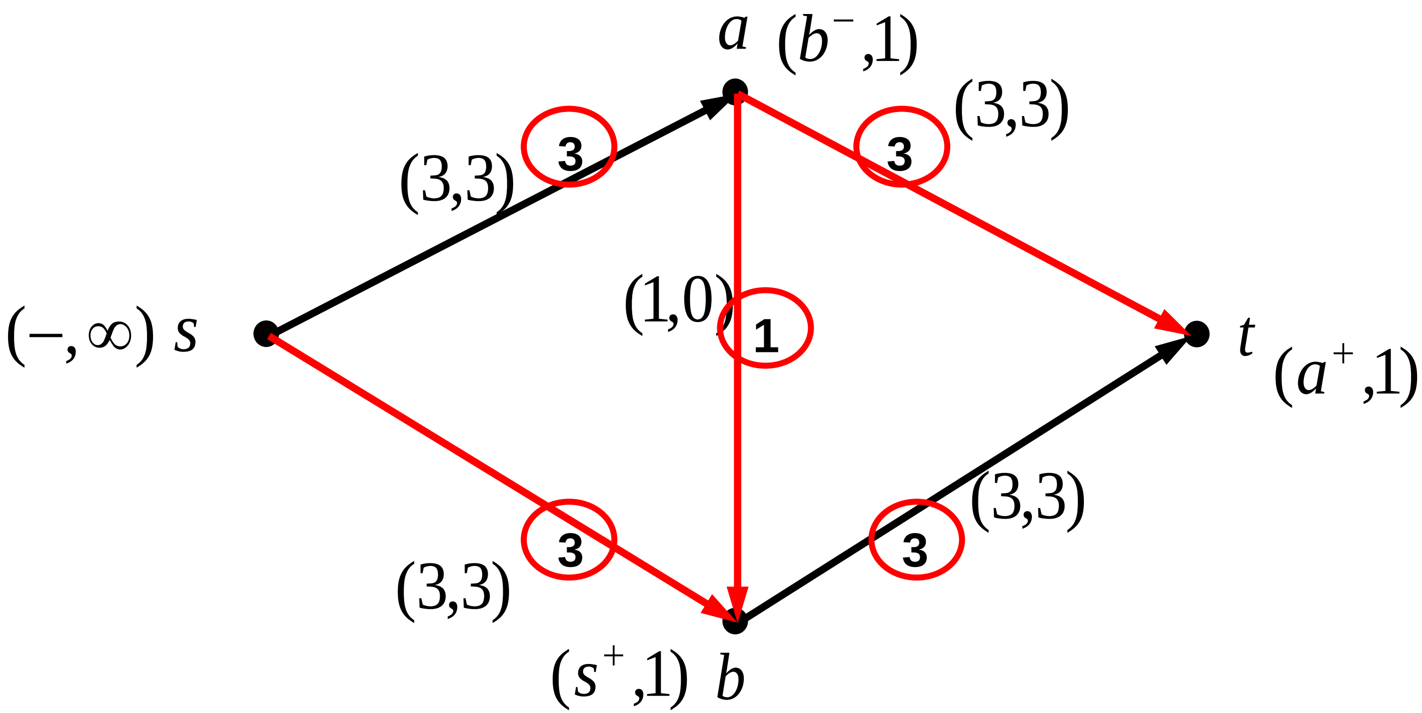
第4次增流！

例：



第5次增流！

例：



第6次增流！完成！

Ford-Fulkerson最大流标号算法

- Ford-Fulkerson算法复杂度
  - 和网络规模关系不确定
  - 和边容量参数有一定关系
  - 在特定情况下，边容量参数为无理数时，算法需要进行无数次增流过程

Tsinghua University

主要内容

- 5.1 二分图的最大匹配
- 5.2 完全匹配
- 5.3 最佳匹配及其算法
- 5.4 最大基数匹配
- 5.5 网络流图
- 5.6 Ford-Fulkerson最大流标号算法
- **5.7 最大流的Edmonds-Karp算法**
- 5.8 最小费用流

Tsinghua University

最大流的Edmonds-Karp算法

- Edmonds-Karp算法思想：
  - 增流与标号思想基本等同于F-F算法
  - 每次沿最短路增流
  - 最短路径：广探法（宽度优先搜索）

Tsinghua University

Ford-Fulkerson最大流标号算法描述：

1. 任选一允许流分布f（一般为零流量）

标号过程：

2. 给 s 标号为 $(-,\infty)$
3. 若存在一个未标结点v，可通过正、反向标号得到标号，标之并转4，否则转7（算法结束）
4. 若$v=t$，转5，否则转3

增流过程：

5. 设v的标号是(d_v,δ_v) ，
    1. 若 $d_v=u^+$ ，则令 $f(u,v)=f(u,v)+\delta_t$
    2. 若 $d_v=u^-$ ，则令 $f(v,u)=f(v,u)-\delta_t$
6. 若$u=s$，删去全部标号并转2，否则令$v=u$，转5
7. 结束

Edmonds-Karp最大流标号算法描述：

1. 任选一允许流分布f（一般为零流量）

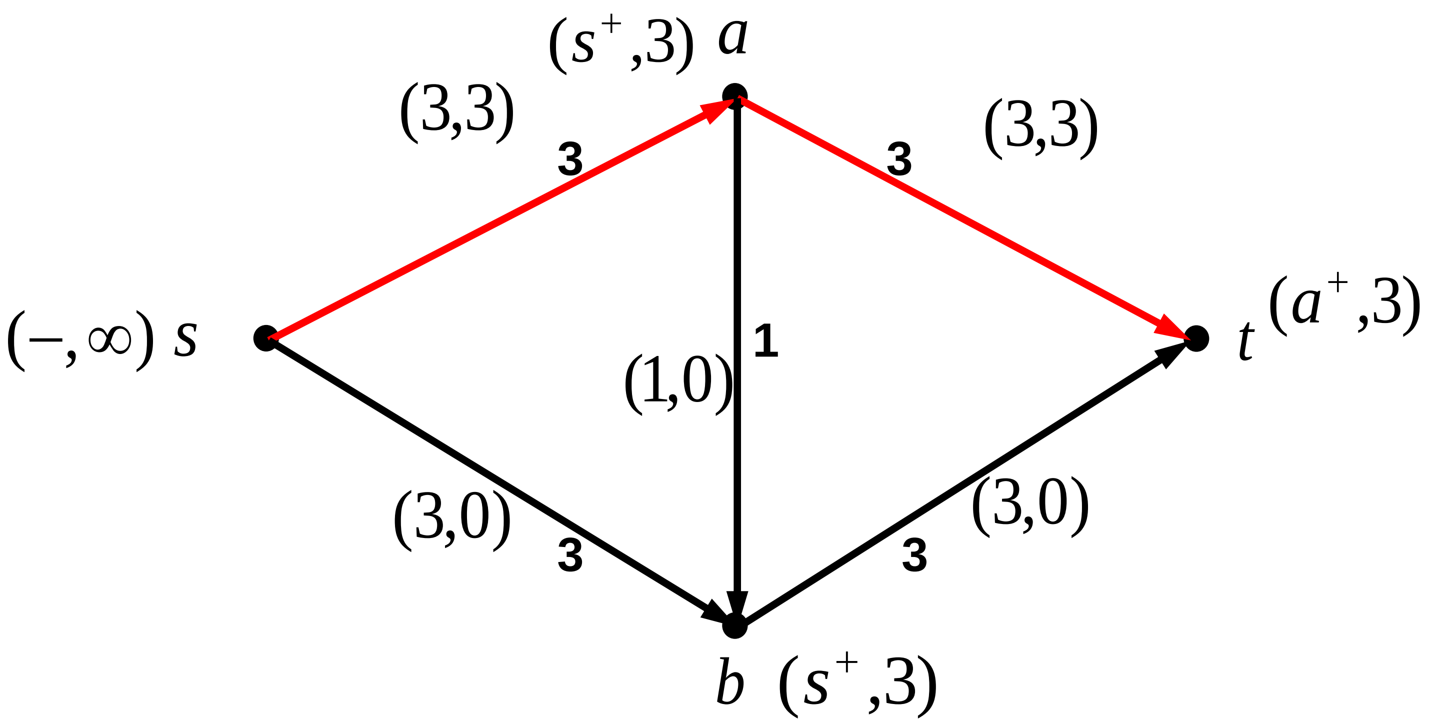
标号过程：

2. 给 s 标号为 $(-,\infty)$
3. 按照先标号先检查的原则，选择最早标号但尚未检查的结点u，检查其所有未标号的邻结点v，标之并转4，如果所有结点都已经检查，则转7（算法结束）
4. 若t得到了标号，则令$v=t$，转5，否则转3

增流过程：

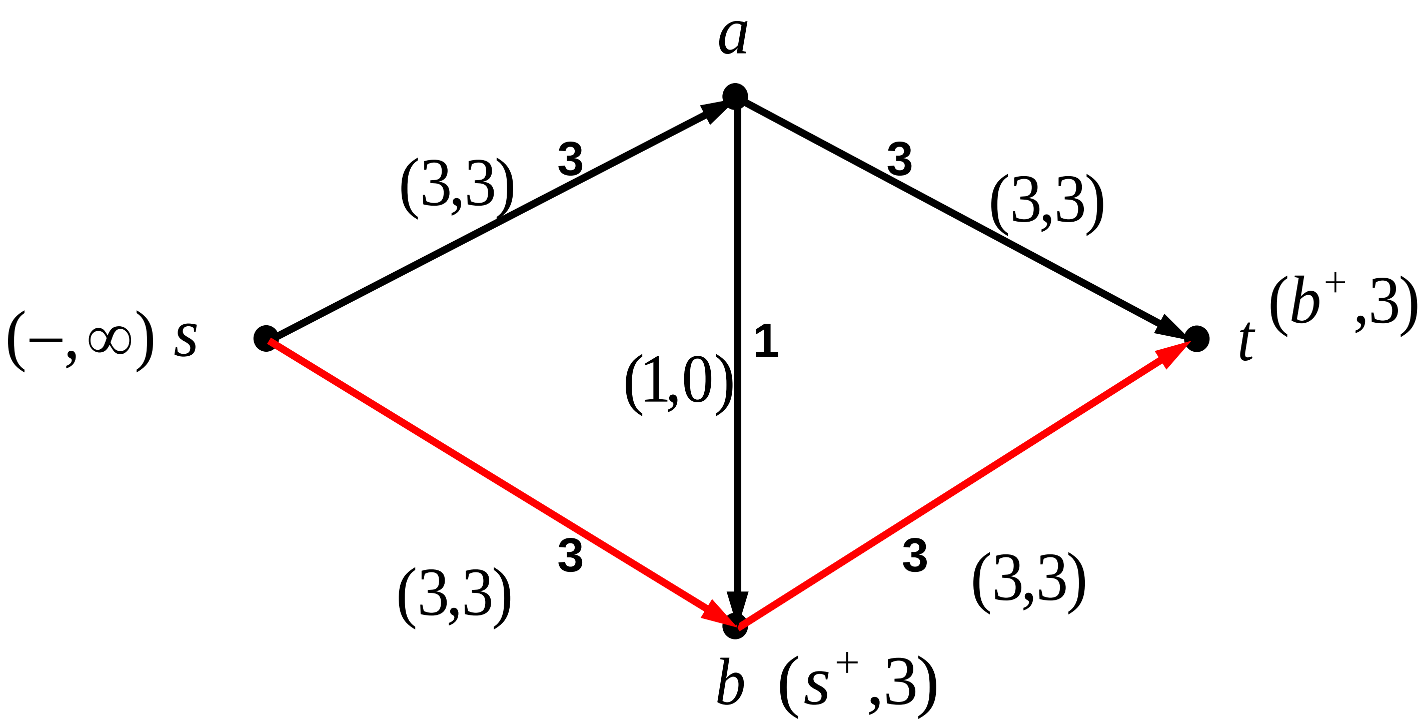
5. 设v的标号是(d_v,δ_v)，
    1. 若 $d_v=u^+$ ，则令 $f(u,v)=f(u,v)+\delta_t$
    2. 若 $d_v=u^-$ ，则令 $f(v,u)=f(v,u)-\delta_t$
6. 若$u=s$，删去全部标号并转2，否则令$v=u$，转5
7. 结束

例：



第1次增流！

例：



第2次增流！ 结束！

最大流的Edmonds-Karp算法

- 思考：
  - Edmonds-Karp算法的复杂度如何？
    - 寻找增流路径

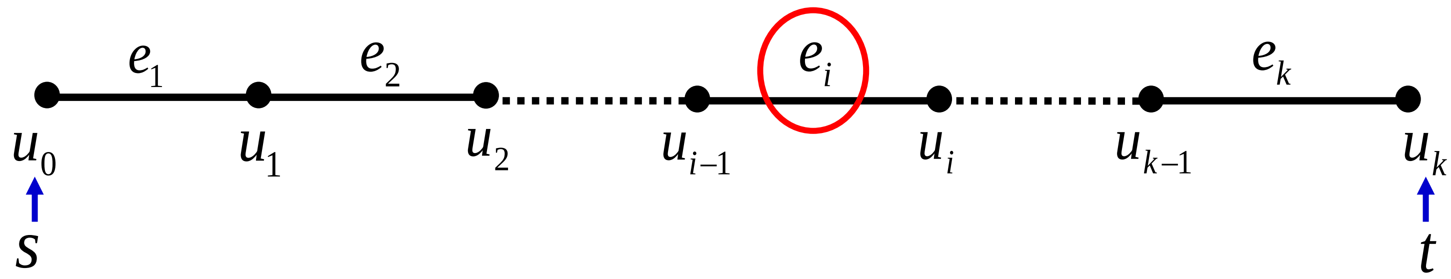
      $s \rightarrow t$ 标号过程（广探法）

      最多经过n-1次标号标到 t 结点
    - 修改流量分布

      最多m次流量值修改
    - 循环往复，直至无法找到增流路径。
    - 循环次数？ → 增流路径条数

最大流的Edmonds-Karp算法

- 定理5.7.1 如果在Edmonds-Karp标号算法中，每条增流路径都是当前最短的增流路，则网络中的增流路不超过$m(n+2)/2$条



设 f 是网络N中的允许流分布

路径 P_{st} 是一条增流路径，其流量增幅为 δ，此时必定有

边 e_i 满足 $\begin{cases} \delta = c(e_i) - f(e_i) & e_i \text{ 为向前边} \\ \text{或 } \delta = f(e_i) & e_i \text{ 为向后边} \end{cases}$

此时，称边 e_i 为该路径的瓶颈。

最大流的Edmonds-Karp算法

- 设标号法从网络 N 的初始流分布 f_0 开始，依据Edmonds-Karp算法依次构造网络 N 的允许流 f_1，f_2，…

- 令$\lambda^i(u,v)$表示在允许流 f_i 分布下，从结点u到结点v的最短非饱和路径长度

最大流的Edmonds-Karp算法

- 引理5.7.1 对每个结点v及每个$k = 0,1,2,\ldots$

$$\lambda^k(s,v) \le \lambda^{k+1}(s,v) \qquad (1)$$

$$\lambda^k(v,t) \le \lambda^{k+1}(v,t) \qquad (2)$$

最大流的Edmonds-Karp算法

- 引理5.7.2 若$k < p$，且向前(后)边e是从f_k变为f_{k+1}的瓶颈，同时也是从f_p变为f_{p+1}的瓶颈，则一定存在l，满足$k < l < p$，并且边e为从f_l到f_{l+1}时增流路中的边，且在增流路中一定是向后(前)边

最大流的Edmonds-Karp算法

- 引理5.7.3 在采用先标号先检查原则求网络的最大流时，如果边e是从 f_k 到 f_{k+1}时增流路中的一条向前(后)边，后来又是从 f_l 到 f_{l+1}时增流路的一条向后(前)边$(k < l)$，则有

$$\lambda^l(s,t) \geq \lambda^k(s,t) + 2$$

最大流的Edmonds-Karp算法

- 定理5.7.1 如果在Edmonds-Karp标号算法中，每条增流路径都是当前最短的增流路，则网络中的增流路不超过$m(n+2)/2$条

  证明：

  – 设边e的方向都是从u到v，一个允许流分布的序列为$f_{k_1}, f_{k_2}, \ldots$，其中$k_1 < k_2 < \cdots$，而且边e在f_{k_i}中是向前边瓶颈。

最大流的Edmonds-Karp算法

- 由引理5.7.2可以断定，存在另一个序列 $l_1, l_2, \ldots$，满足$k_1 < l_1 < k_2 < l_2 \cdots$，且$e$在$f_{l_i}$中为向后边

- 由引理5.7.3 $$\lambda^{ki}(s,t)+2 \le \lambda^{li}(s,t)$$

同时 $$\lambda^{li}(s,t)+2 \le \lambda^{k(i+1)}(s,t)$$

最大流的Edmonds-Karp算法

- 因此 $\lambda^{k1}(s,t)+4(j-1)\leq\lambda^{kj}(s,t)$
- 由于 $\lambda^{kj}(s,t)\leq n-1$ ， $\lambda^{k1}(s,t)\geq 1$
- 所以 $$j\leq\frac{n+2}{4}$$
- 即e作为向前边最多能够充当瓶颈$(n+2)/4$次，

  类似 可作为向后边最多能够充当瓶颈$(n+2)/4$次
- 由于网络中有m条边，故得证！

Tsinghua University

最大流的Edmonds-Karp算法

- 定理5.7.1 如果在Edmonds-Karp标号算法中，每条增流路径都是当前最短的增流路，则网络中的增流路不超过$m(n+2)/2$条

主要内容－总结

- 5.1 二分图的最大匹配
- 5.2 完全匹配
- 5.3 最佳匹配及其算法
- 5.4 最大基数匹配
- 5.5 网络流图
- 5.6 Ford-Fulkerson最大流标号算法
- 5.7 最大流的Edmonds-Karp算法
- 5.8 最小费用流

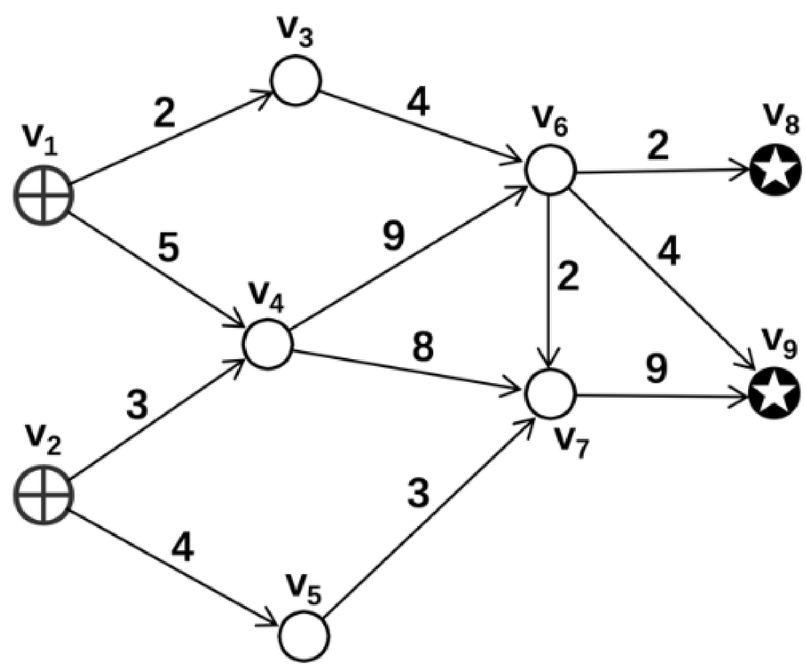
作业

- 课后 10 、12

- 下次课：习题课

练习题

某地区的道路分布如图所示，其中节点$v_1 \cdots v_9$表示各个区域，边表示单向道路。现在A市的v_1和v_2地区爆发了一种传染性极强的疫情。为了阻止疫情传播到A市以外的节点v_8和v_9，造成更大影响，可以考虑实行交通管制。如下图，如果对道路进行交通管制（代价为对应边的权值），来阻断病毒沿这条道路传播。请设计一种阻断疫情传播的最小代价方案。请给出管制的道路集合以及总代价。



习题课

- 第四章
  - 5、7、8、14、16题

- 其他自选