第四章
平面图与图的着色Ⅱ

计算机系网络所：张小平

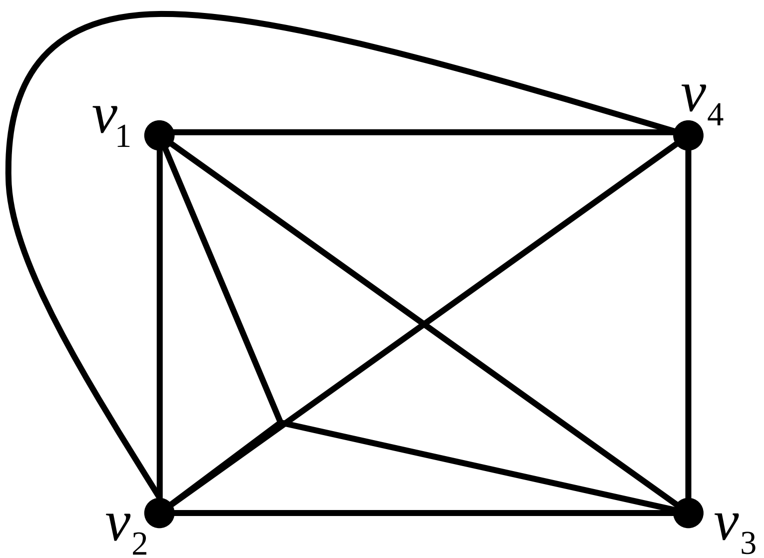
清華大學
Tsinghua University

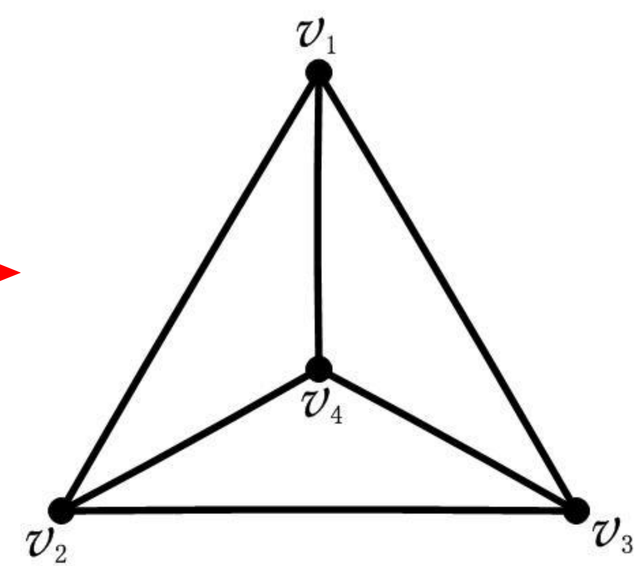
主要内容

- **4.1 平面图**
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式

平面图

- 定义4.1.1 若能把图G画在一个平面上，使任何两条边都不相交，就称G**可嵌入平面**，或称G是**可平面图**。可平面图在平面上的一个嵌入称为**平面图**。

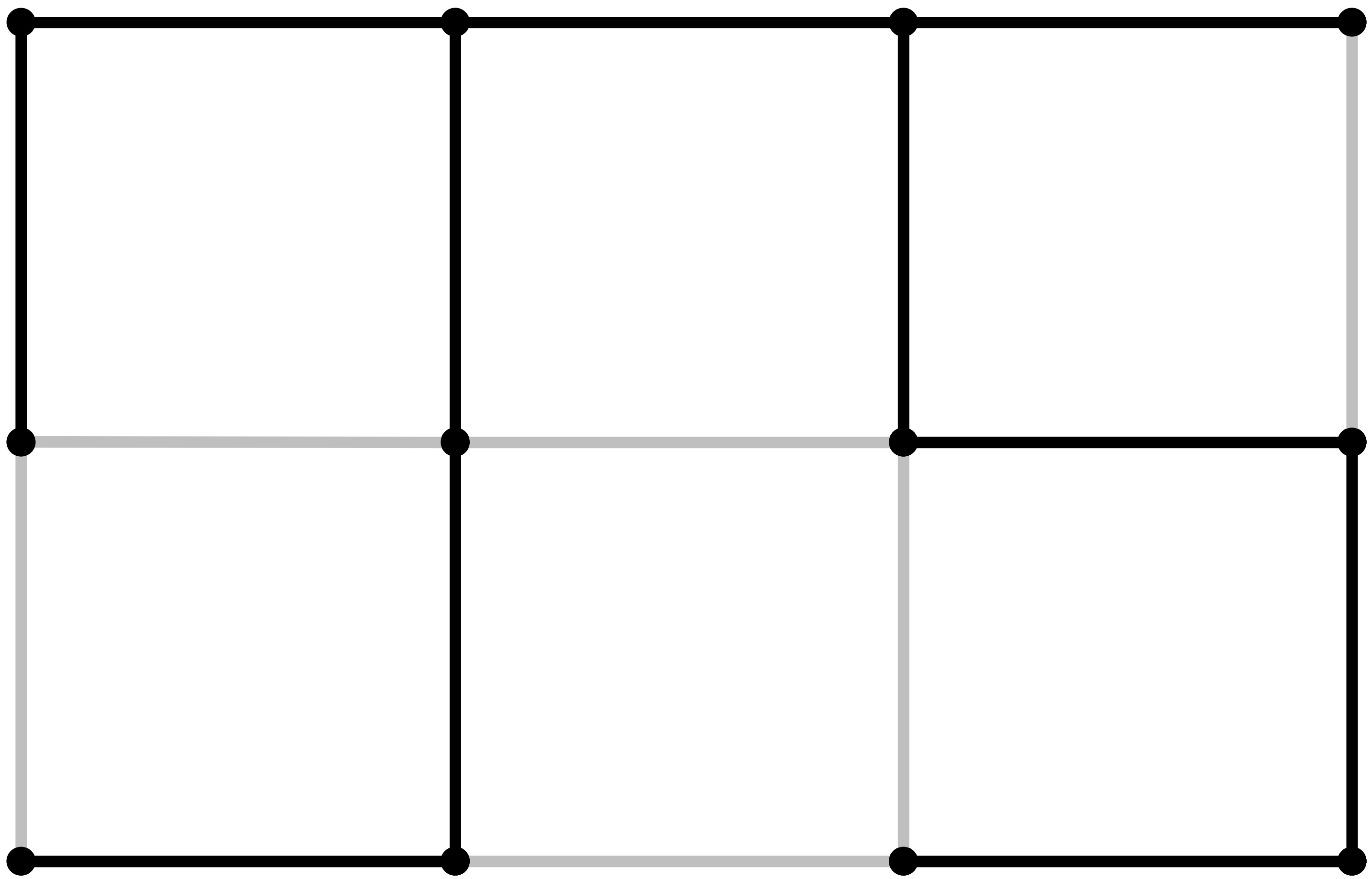




平面图

- 定义4.1.2 设G是一个平面图，由它的若干条边所构成的一个区域内如果不含任何结点及边，就称该区域为G的一个面或域。包围这个域的诸边称为该域的边界。
- 把平面图G外边的无限区域称为无限域，其他区域都叫做内部域。
- 如果两个域有共同边界，就说它们是相邻的，否则是不相邻的。

Tsinghua University



节点数：n　　　　余树边：$m-n+1$

边数：m

域数：d　　　　域数：$d=m-n+2$

平面图

- 定理4.1.1 设G是平面连通图，则G的域的数目是 $d = m - n + 2$ 欧拉公式

证明：

- G为连通图，其支撑树T包含n－1条边，无回路，因此此时对T来说只有一个无限域。
- 由于G为平面图，因此每加入一条余树边，一定可以与其他边不相交，因此可以把当前域分为两部分。
- 有m－n＋1条余树边！ 证毕！

平面图

- 推论4.1.1 若平面图有k个连通支，则

$$n-m+d=k+1$$

- 推论4.1.2 对一般平面图G，恒有

$$n-m+d\geq 2$$

平面图

- 定理4.1.2 设平面连通图G没有割边，且每个域的边界数至少是t，则

$$m \le \frac{t(n-2)}{t-2}$$

证明：

- 设G有d个域
- 由于G中没有割边，因此每条边都与两个不同的域相邻，因此 $t \cdot d \le 2m$，带入欧拉公式

$$\frac{2m}{t} \ge m-n+2$$

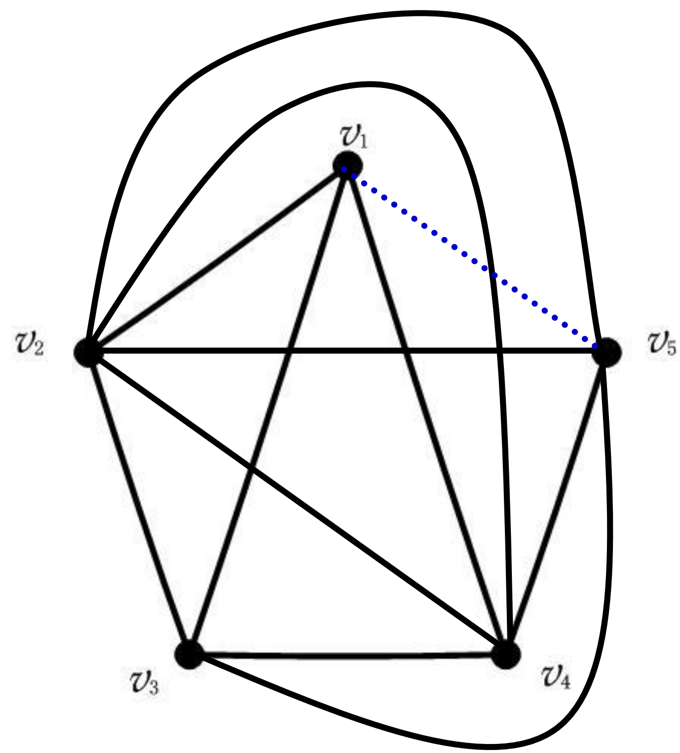
证毕！

主要内容

- 4.1 平面图
- **4.2 极大平面图**
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式

极大平面图

- 定义4.2.1 设G是n≥3的简单平面图，若在任意两个不相邻的结点v_i, v_j之间加入边(v_i, v_j)就会破坏图的平面性，就称G为**极大平面图**



Tsinghua University

极大平面图

- 极大平面图的性质：
  - 性质1：G是连通的
  - 性质2：G不存在割边
  - 性质3：G的每个域的边界数都是3
  - 性质4：$3d = 2m$

极大平面图

- 定理4.2.1 极大平面图G中，有

$$m = 3n - 6 \qquad d = 2n - 4$$

- 推论4.2.1 简单平面图G满足

$$m \leq 3n - 6 \qquad d \leq 2n - 4$$

Tsinghua University

极大平面图

- 定理4.2.2 简单平面图G中存在度小于6的结点

  证明（反证法）：

  – 假设每个结点的度都不小于6

  – 则由 $\sum d(v_i) = 2m$ 可知 $6n \le 2m$

  – 因G为简单平面图，故满足 $3d \le 2m$

  – 带入欧拉公式 $d = m - n + 2$

$$\longrightarrow \quad d - m + n = 2 \le \frac{2}{3}m - m + \frac{1}{3}m = 0$$

证毕！

极大平面图

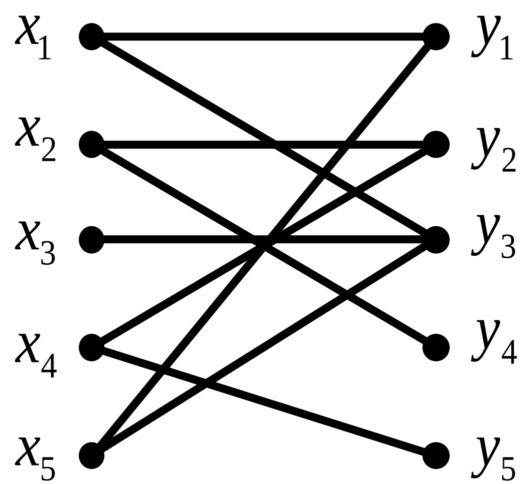
- 例：K_7 图不是平面图！

主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- **4.3 非平面图**
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式

非平面图

- 定义4.3.0 设G=(V,E)是简单图，如果可把V划分为两个子集X、Y，其中 $X\cup Y=V, X\cap Y=\phi$，使得对任意边$(u,v)\in E$，都有$u\in X$，$v\in Y$，则称G为**二分图**，也称**二部图**。一般情况下，二分图G记为G=(X,Y,E)



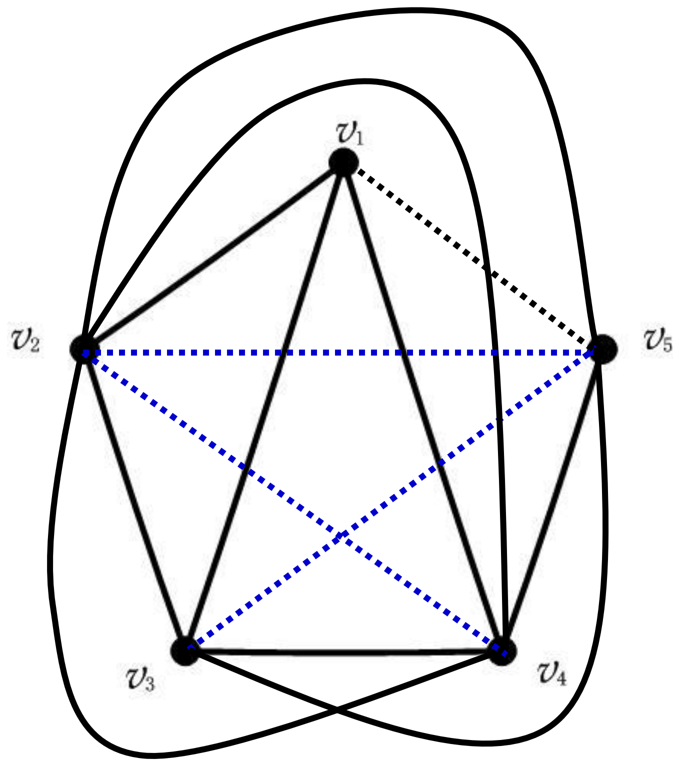
非平面图

- 定义4.3.0 如果图G不能嵌入平面，满足任意两边只在结点处相交，则称G为**非平面图**
  - 极大平面图中，任意添加一条边，就变成非平面图
  - 非极大平面图中，如果需要添加某条确定边e，但是G+e也不能嵌入平面，则G+e也是非平面图

问题：如何判别平面图和非平面图？

非平面图

- 最简单的非平面图是什么？
  - 从完全图考察起：
  - K_3？
  - K_4？
  - K_5？



$K_5 - e$是可平面的！

非平面图

- 定理4.3.1 K_5是非平面图！

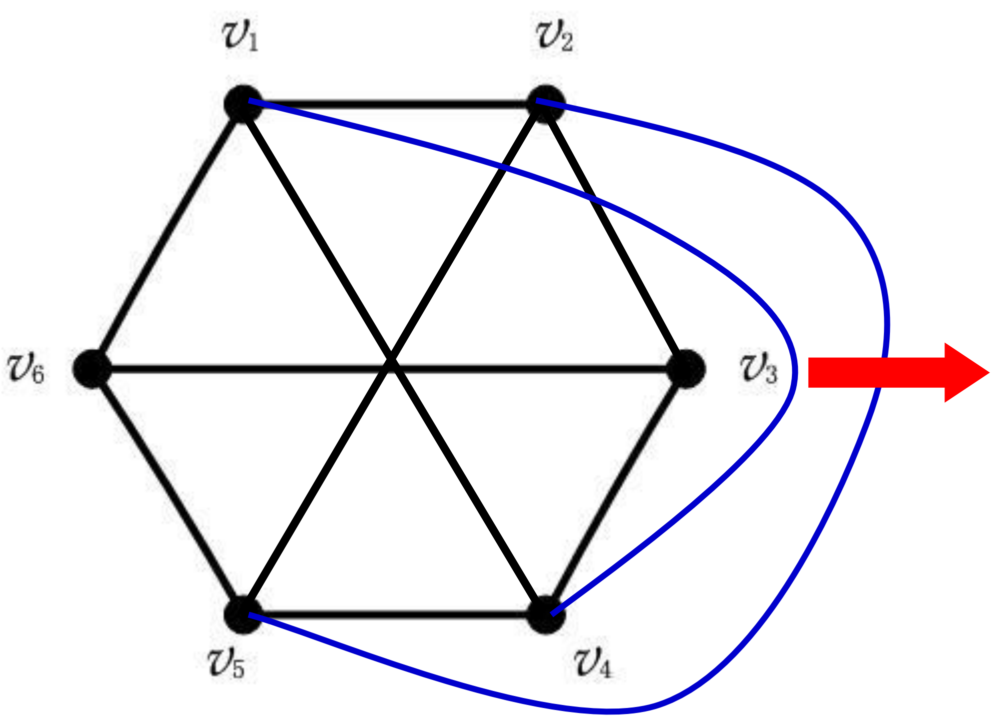
证明：

- 在K_5中，n = 5，m = 10
- 如它是平面图，应有m≤3n – 6 = 15 – 6 = 9
- 矛盾！

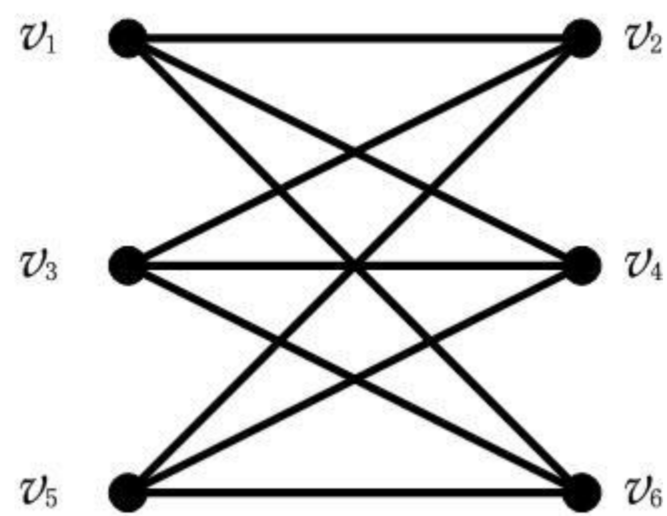
证毕！

非平面图

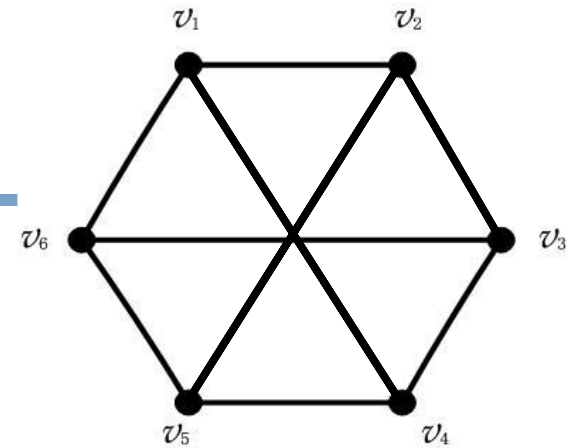
- 最简单的非平面图是什么？
  - K_5是结点最少的非平面图！
  - 当结点为6时，边数最少的非平面图将是怎样？



$K_{3,3}$



非平面图



- 定理4.3.2 $K_{3,3}$ 是非平面图

  证明（反证法）：

  - 假设 $K_{3,3}$ 是平面图，则其n＝6，m＝9

    由欧拉公式可知其d＝5

  - 观察，很容易发现其中没有三角形，即存在不等式4d≤2m，即20≤18，矛盾！

证毕！

三家三井问题？ 无解！

K_5和$K_{3,3}$分别记为$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图

非平面图

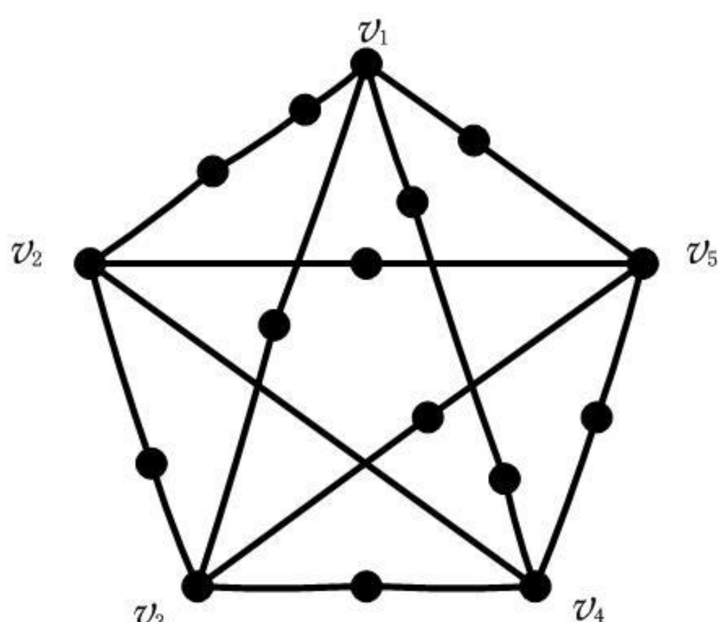
小结：

- 如果图结点数小于5，图一定是可平面的

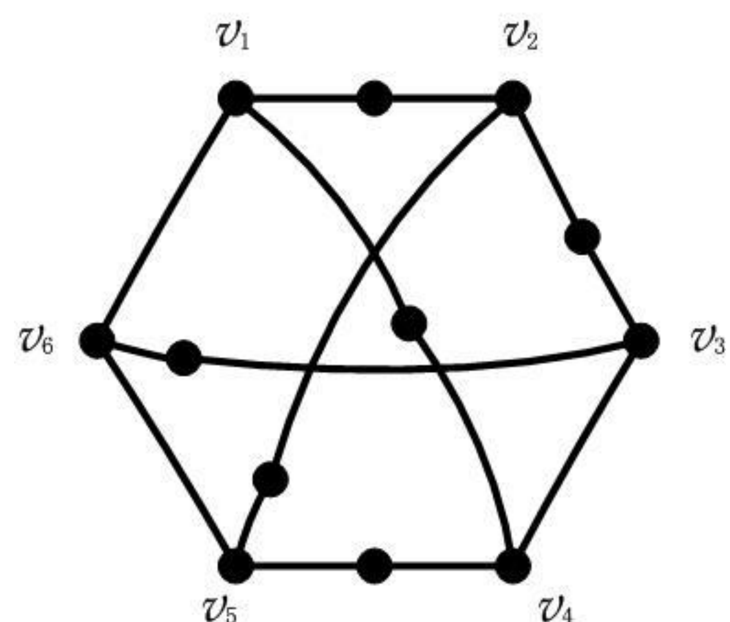
- 如果图边数少于 9 ，图一定是可平面的

非平面图

- 定义4.3.1 在$K^{(1)}$和$K^{(2)}$图上任意增加一些度为2的结点之后得到的图成为$K^{(1)}$型和$K^{(2)}$型图，统称为K型图。



$K^{(1)}$型图



$K^{(2)}$型图

非平面图

- 定理4.3.3 G是可平面图的充要条件是G不存在K型子图
  - 库拉图斯基(Kuratowski)
  - 定理具有极高的理论价值，但是实践中，判断一个图是否具有K型子图是非常困难的。
  - 应该探索一种实用的平面图判别算法。

主要内容

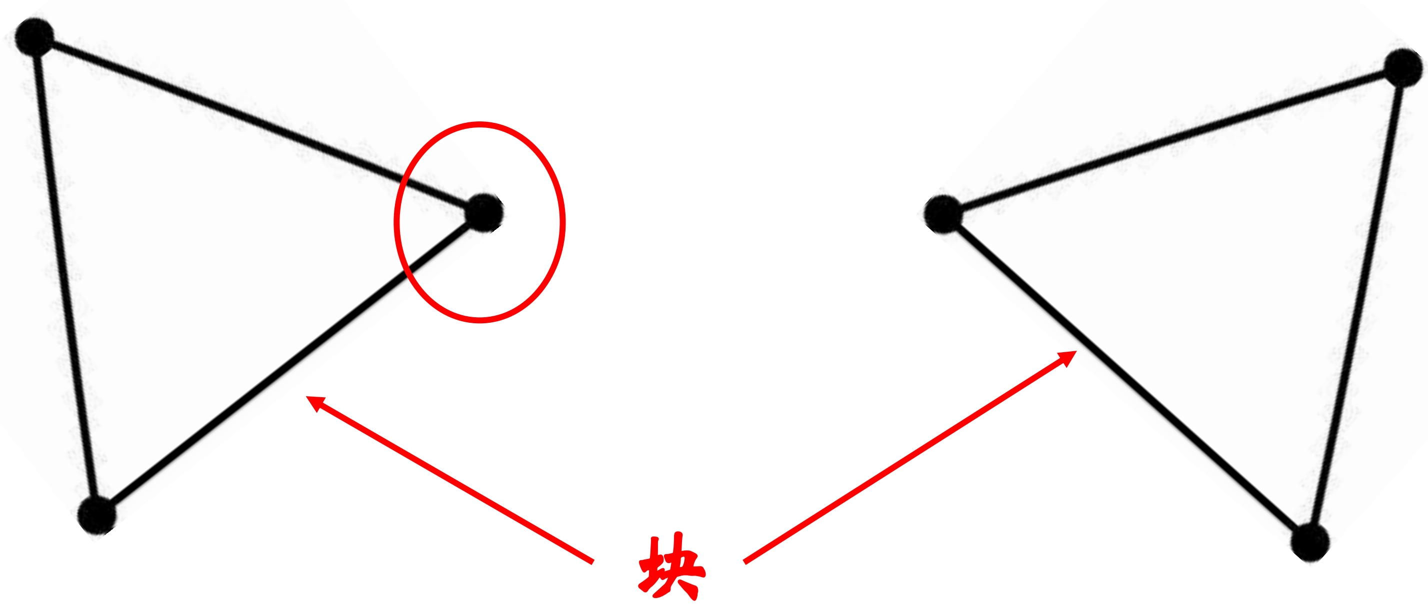
- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- **4.4 图的平面性检测**
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式

图的平面性检测

- 如何判断一个图的平面性?
  1. 如果图是非连通的
     - 分别检查每个连通支
     - 当所有的连通支都是可平面的，则G是可平面的
  2. 如果图中存在自环
     - 移去自环

图的平面性检测

- 如果图G中存在割点，此时可以把图G从割点处分离，构成若干个不含割点的连通子图（块），然后检测每一块的平面性。



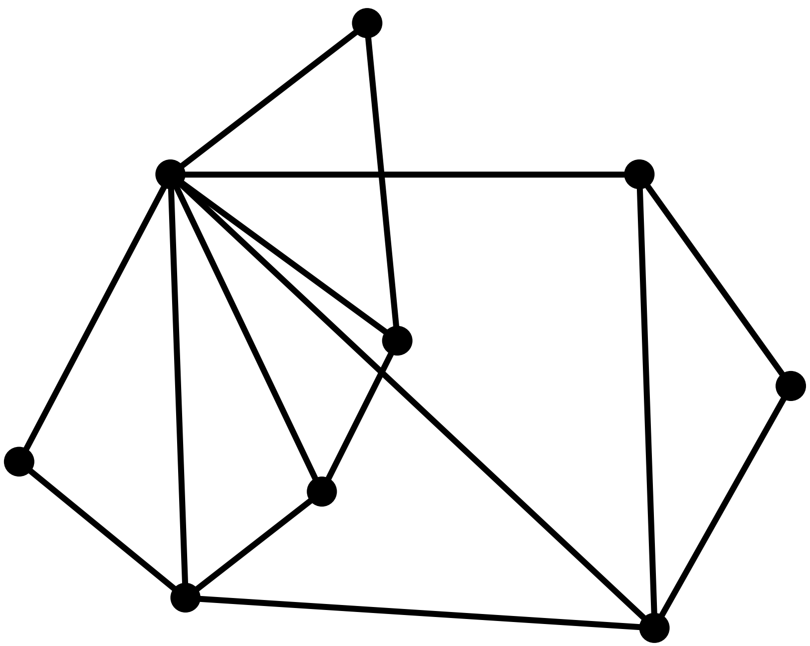
图的平面性检测

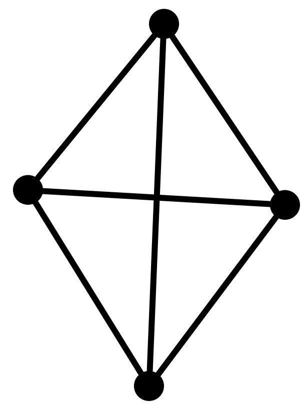
4. 移去度为2的结点及其所关联的边，而在它两个邻点之间加入边。显然原图是可平面的，当且仅当新图是可平面的。
5. 移去重边
6. 反复运用4和5，最后如果：
   a) $m < 9$或$n < 5$，则G为可平面的
   b) $m > 3n - 6$，则G是非平面的
   c) 不满足a和b，需要进一步测试

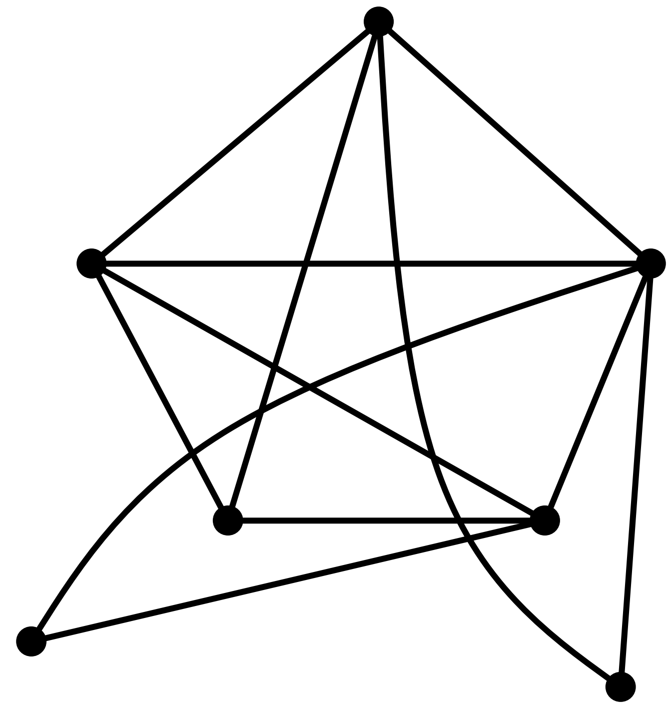
连通自环分割点
删度为2去重边

例：

连通自环分割点



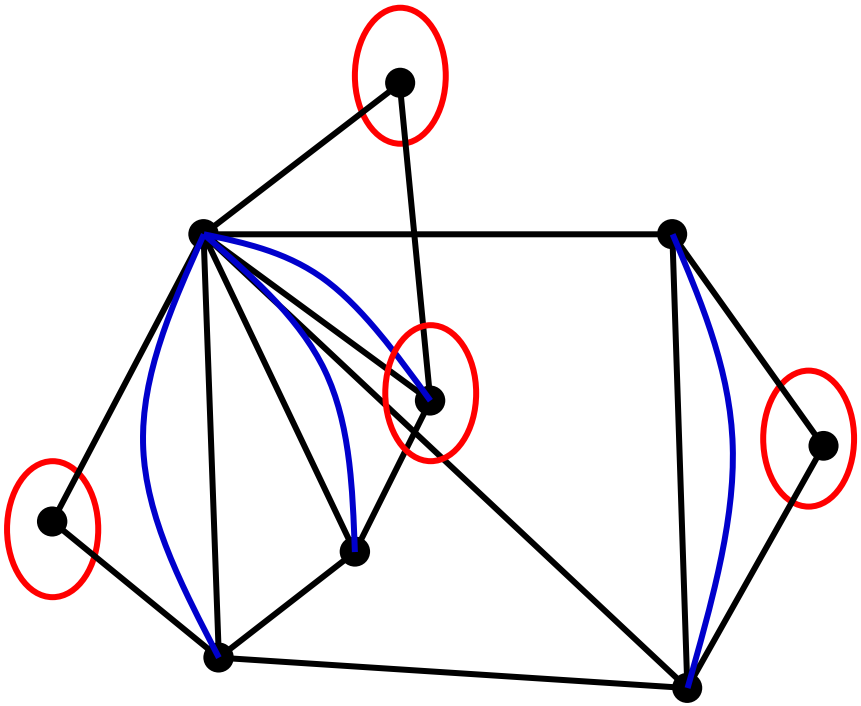


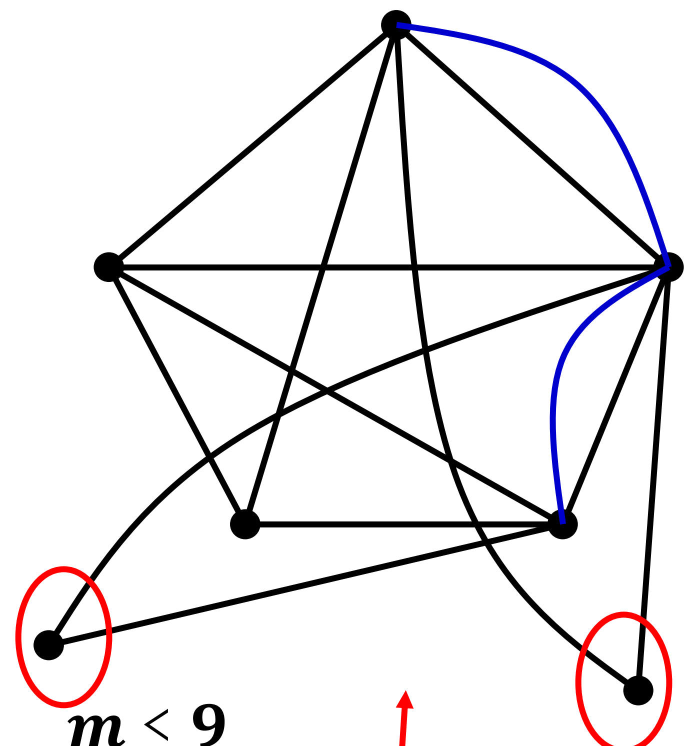


可平面！

例：

删度为2去重边





$m < 9$

可平面！

可平面！

图的平面性检测

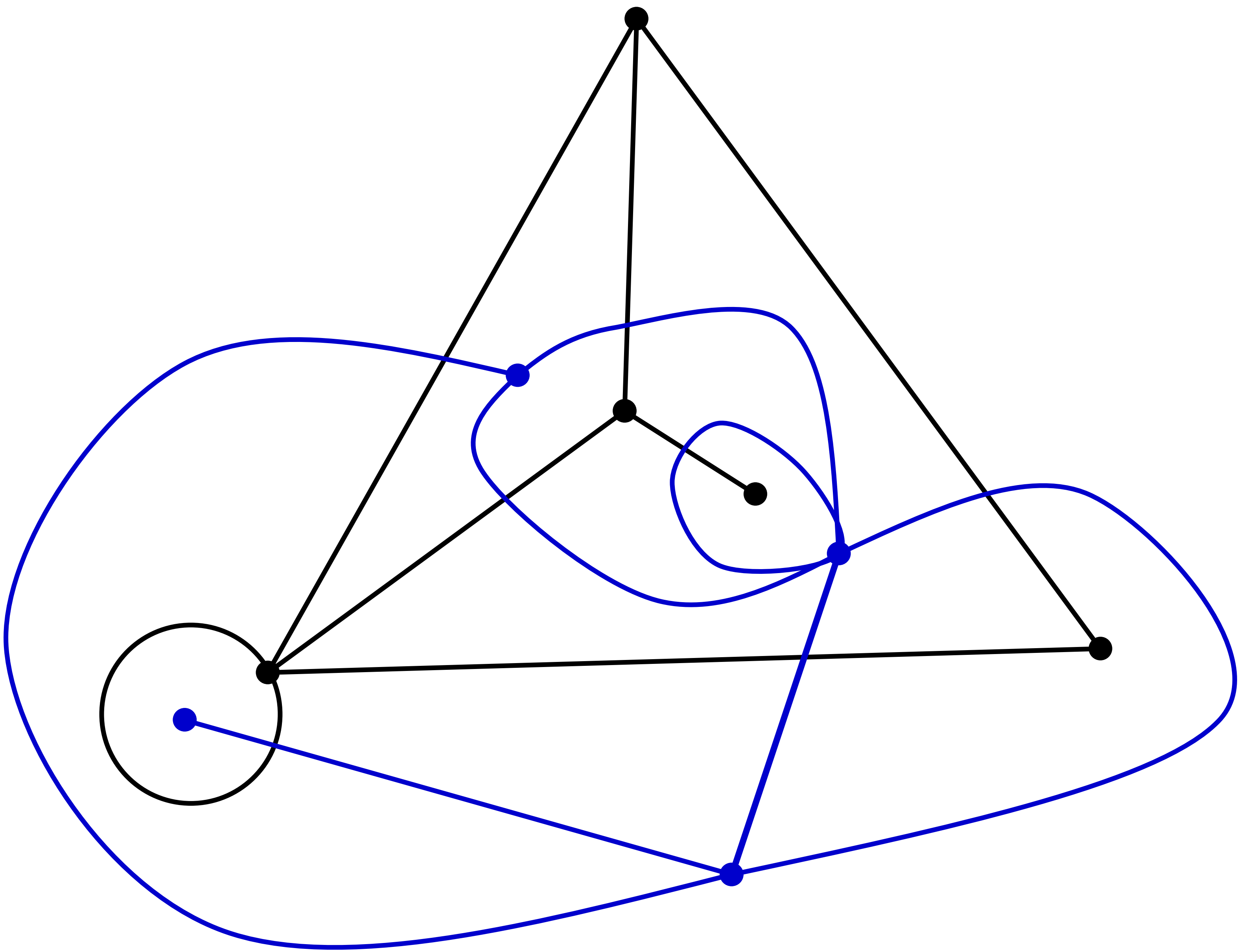
- 如果不满足条件a和b，G的平面性仍不能断定，需要进一步检测。
- 如何检测？

- DMP算法（自学）
  - Demoucron Malgrange Pertuiset

主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- **4.5 对偶图**
- 4.6 色数与色数多项式

例：



对偶图

- 定义4.5.1 满足下列条件的图G^*称为G的对偶图

  1.G中每个确定的域f_i内设置一个结点v_i^*

  2.对域f_i和f_j的共同边界e_k，有一条边

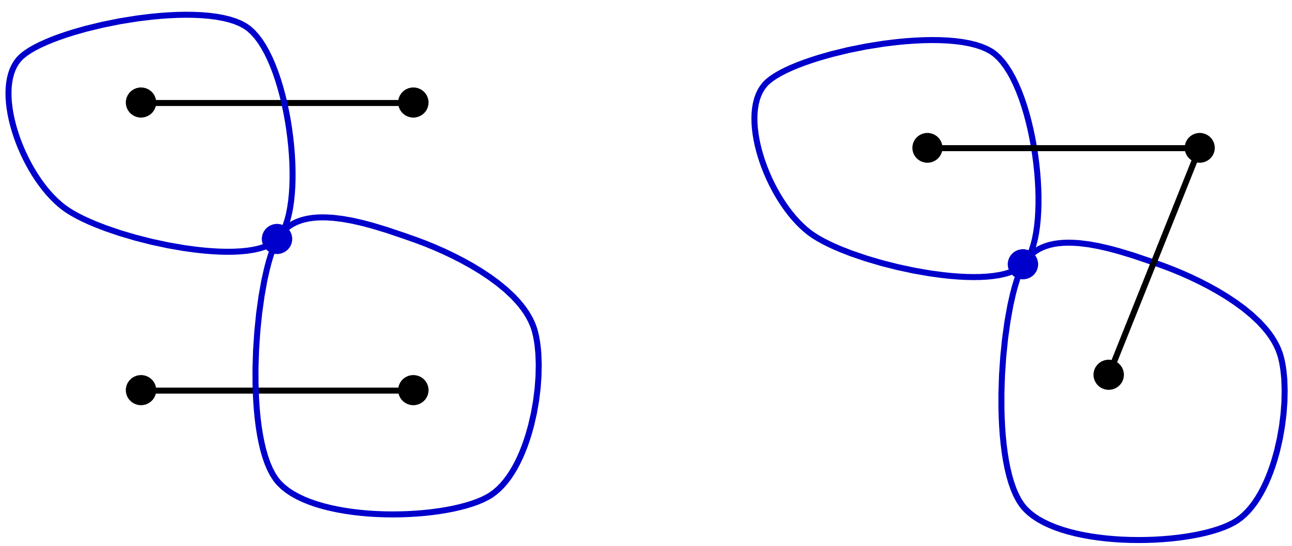
  $e_k^* = (v_i^*, v_j^*) \in E(G^*)$，并与$e_k$相交一次

  3.若e_k处于域f_i之内，则v_i^*有一自环e_k^*与e_k相交一次

显然，这个定义也是求对偶图的方法，称为D(drawing)过程

对偶图

- 性质4.5.1　如果G为平面图，G一定有对偶图G^*，而且G^*是唯一的。
- 性质4.5.2　G^*是连通图
- 性质4.5.3　若G为平面连通图，那么$(G^*)^* = G$



对偶图

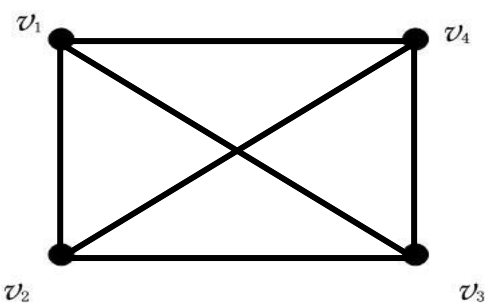
- 性质4.5.4 平面连通图G与其对偶图G^*的结点、边和域之间存在如下对应关系

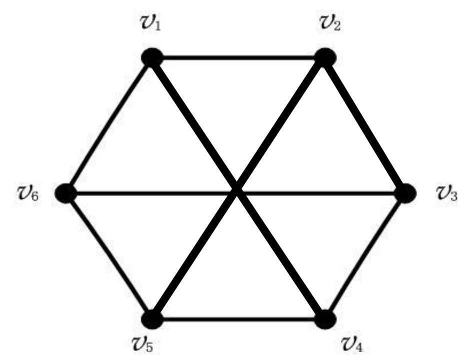
$$m=m^* \quad d=n^* \quad n=d^*$$

- 性质4.5.5 设C是平面图G的一个初级回路，S^*是G^*中与C的各边e_i对应的e_i^*的集合，那么S^*是G^*的一个 割集

对偶图

- 思考：
  - 什么样的图有对偶图？





- 定理4.5.1 G有对偶图的充要条件是

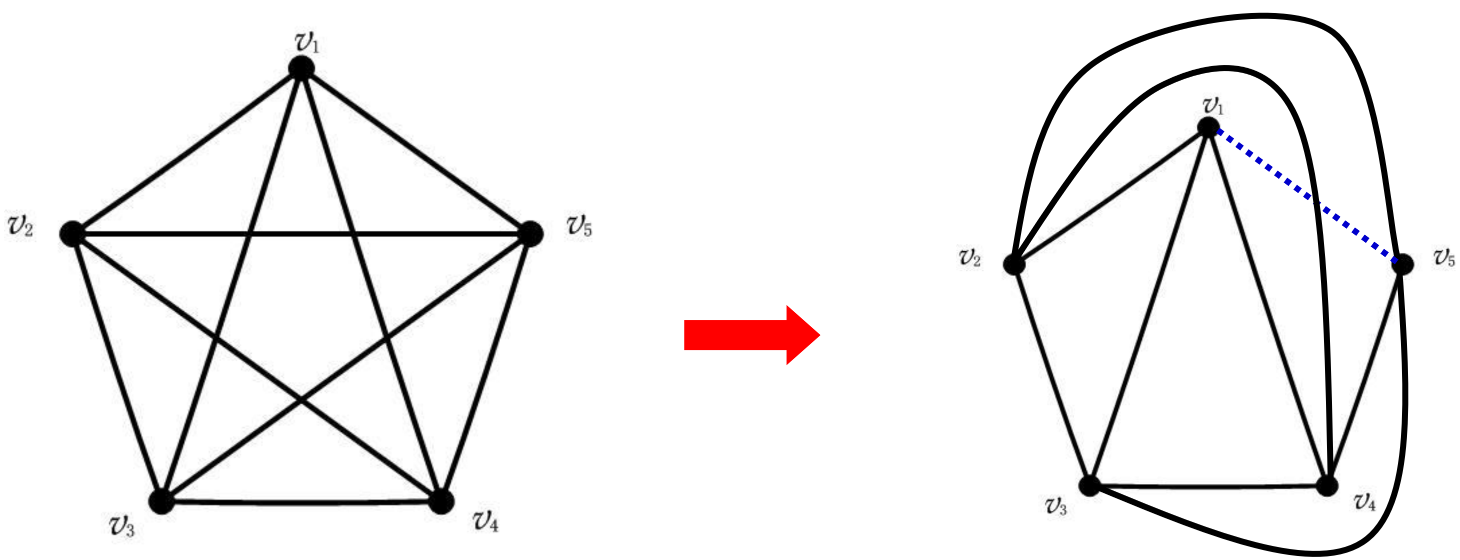
  G为平面图

对偶图

- 证明：
  - 充分性据性质4.5.1即得。证必要性(反证法)：
  - 假设G为非平面图。则根据库拉图斯基定理，G中一定包含$K^{(1)}$或$K^{(2)}$型子图
  - 根据对偶图的生成原则，度为2的结点不影响对偶图的存在性(只会在对偶图中增加重边)，因此，所有K型子图是否存在对偶图，都可以归结为$K^{(1)}$或$K^{(2)}$图是否存在对偶图问题。

对偶图

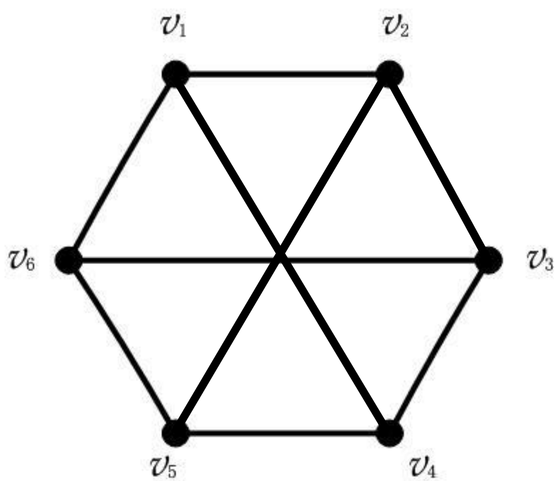
- 对于K(1)图：m = 10，n = 5，d ≥7；则其对偶图中，m*=10，n*≥7
- 由于K(1)图中不存在自环和重边，所以其对偶图中不存在度为1或2的结点，即 $d(v_i^*) \geq 3$
- 故 $2m^* = \sum d(v_i^*) \geq 3\times 7$ ，矛盾！

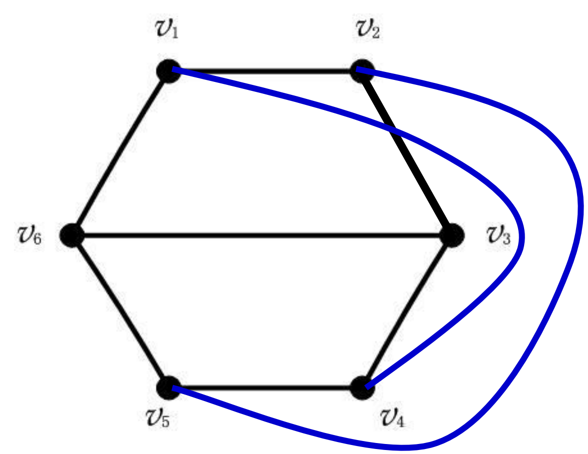


对偶图

- 对于$K^{(2)}$图：$m=9$，$n=6$，$d\geq5$；则其对偶图中，$m^*=9$，$n^*\geq5$
- 由于$K^{(2)}$图中每个域的边界数至少为4，所以其对偶图中结点度不小于4，即 $d(v_i^*)\geq4$
- 故 $2m^*=\sum d(v_i^*)\geq4\times5$ ，矛盾！

证毕！



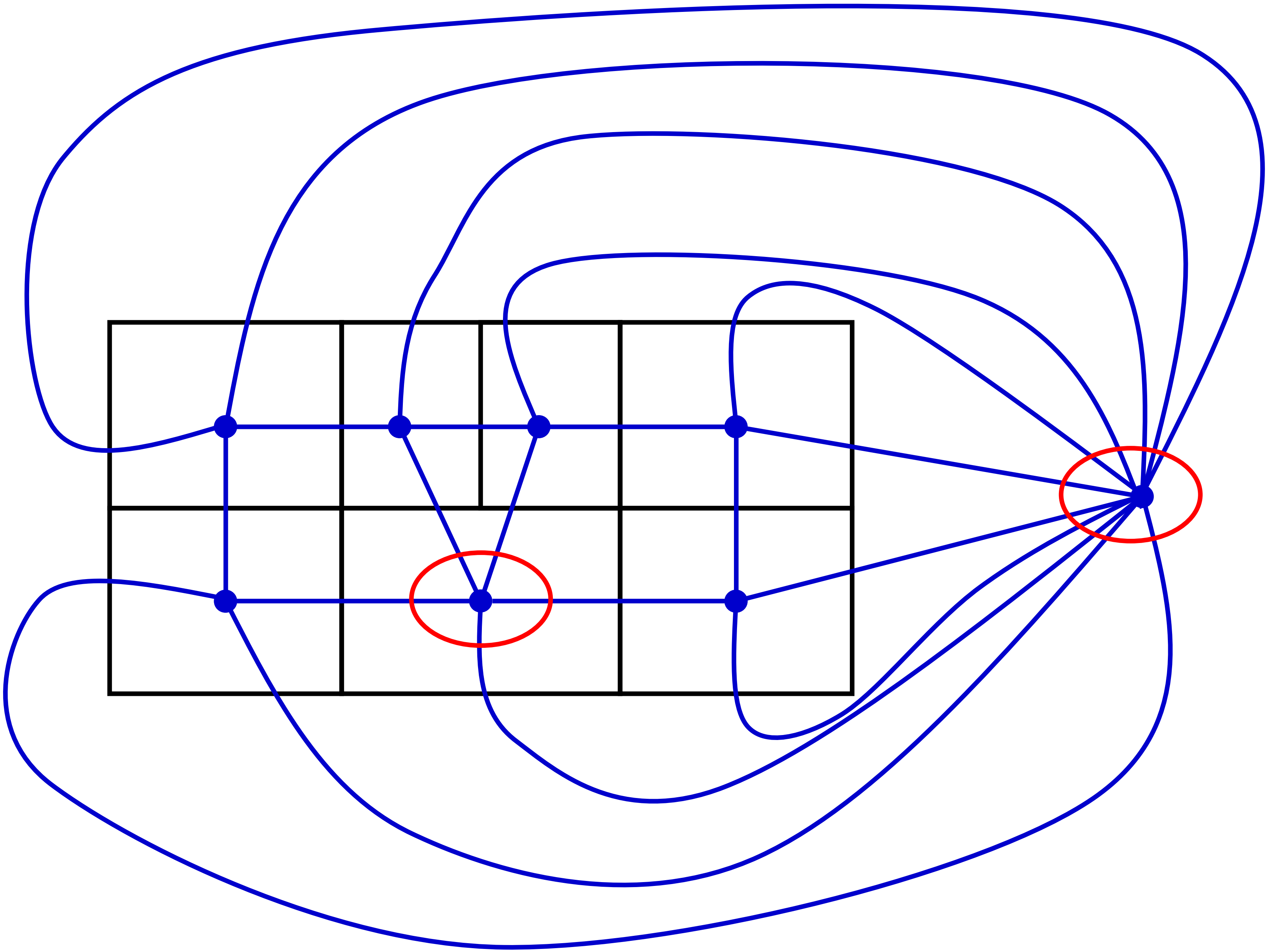


对偶图

- 思考：
  - 什么样的图有对偶图？

平面图！

例：下图为一所房子的俯视图，设每一面墙上都有一个门。
问能否从某个房间开始过每扇门一次最后返回？

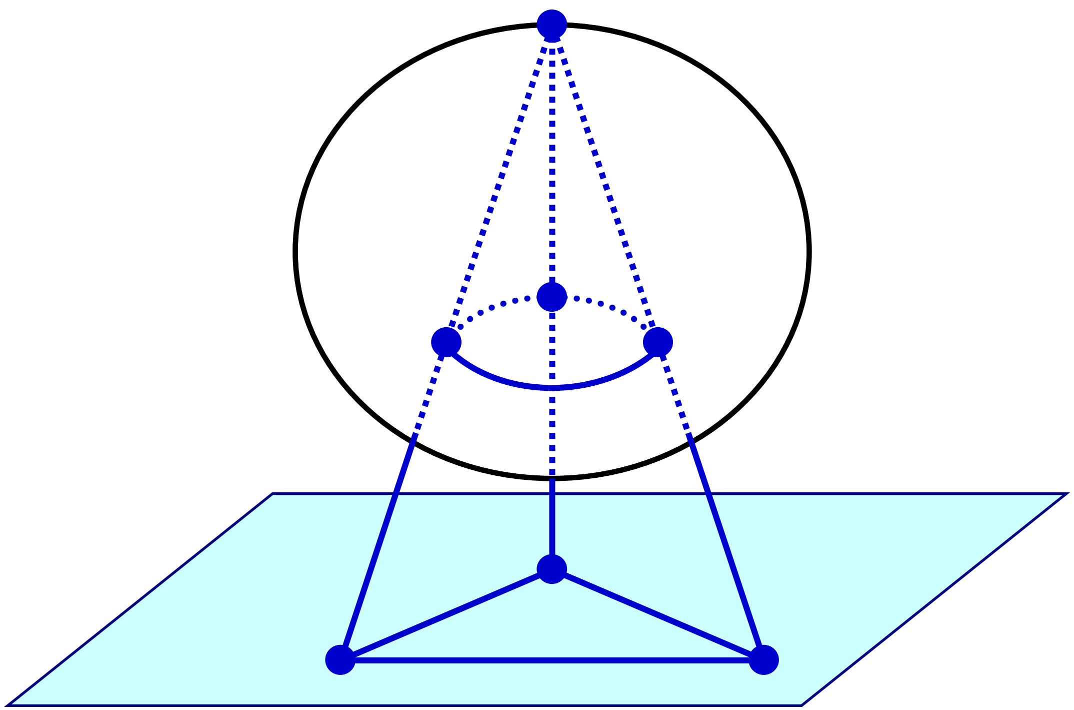


对偶图

- 例：任何一张地图是否只用四种颜色就能使具有共同边界的国家着上不同的颜色?（四色问题）
  - 地图无“飞地”
  - 两个国家只有共同点不算具有共同边界

对偶图

- 测地变换：可球面图 ⟷ 可平面图



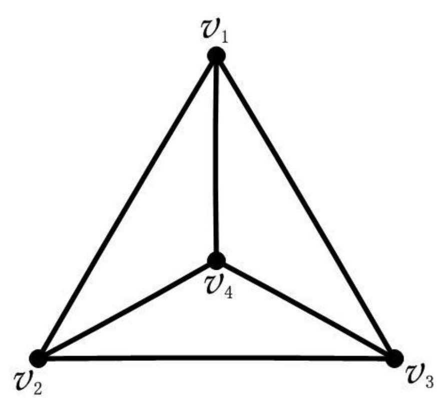
对偶图

- 测地变换说明地图是可平面图
- 对于可平面图着色问题，一般都是做图的对偶图，然后研究对偶图的点着色问题
- 四色问题转化为：对一个连通的平面图，是否可以用4种颜色对其结点进行着色，并保证相邻结点颜色不同？

Tsinghua University

对偶图

- 问题：
  - 对于一个连通的平面图，3种颜色是否可以完成结点着色，并使相邻结点颜色不同？



3种颜色不可以！

  - 那么5种颜色是否够用呢？

对偶图

- 定理4.5.2 每一个平面图G都是5－可着色的

  证明：

  – 作G的对偶图G^*，则命题转为证G^*的结点5－可着色

  – 对偶图有时会出现自环和重边，由于自环和重边并不影响点5－可着色问题，因此，可将自环和重边移去得到简单图G_0

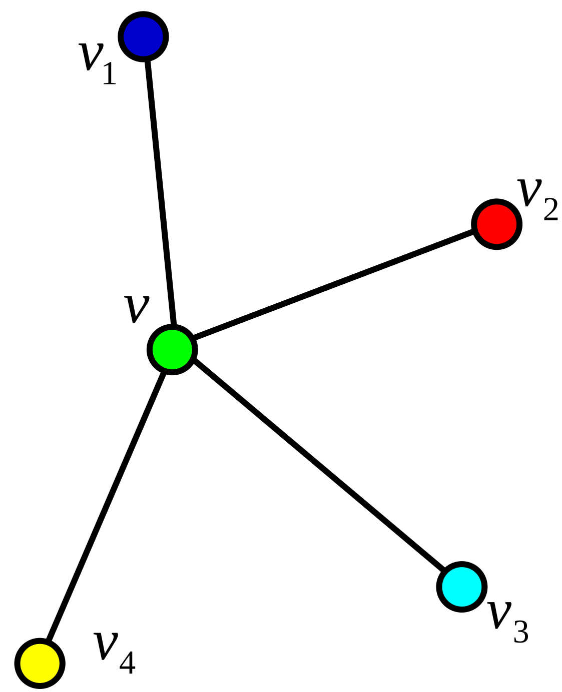
  – 则命题又转为证任意简单图是否可以结点5着色

对偶图

- 证明（续）：以下对G_0的结点进行归纳证明
- (1) 当结点数 $n \leq 5$ 时，显然可5着色，结论成立。
- (2)设结点数为$n-1$时G_0可结点5着色

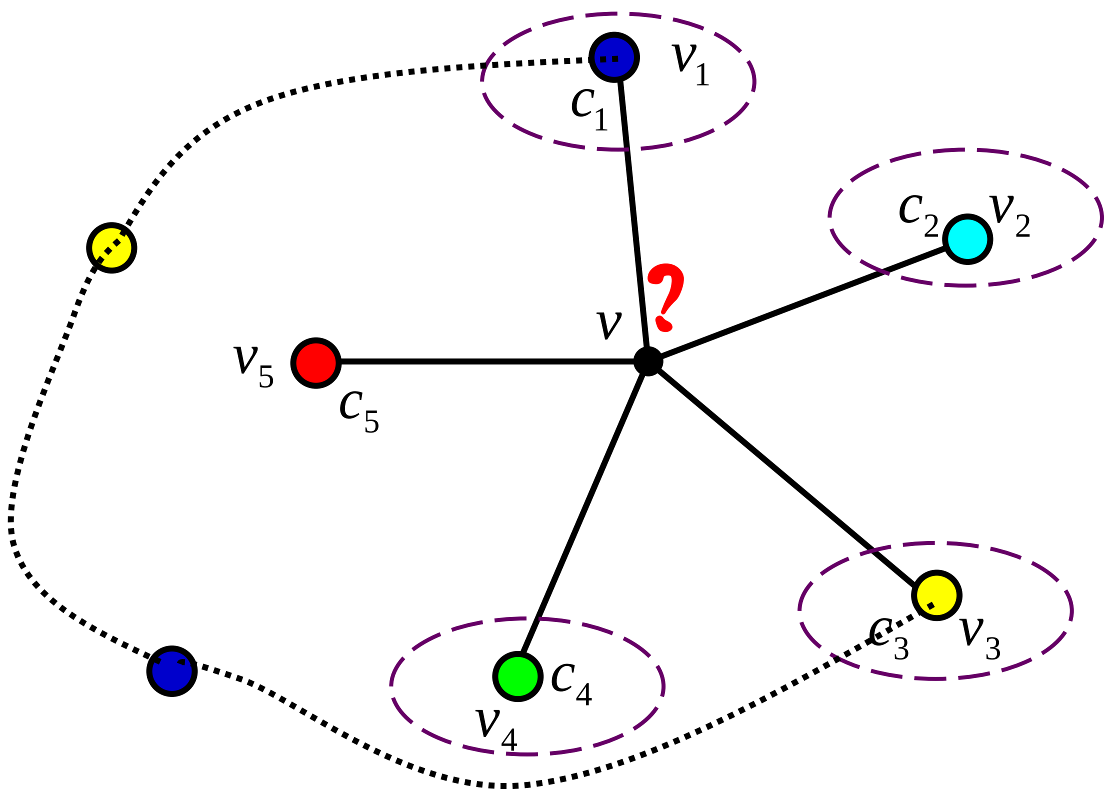
对偶图

- (3) 当结点数为n时，由于G_0为简单图，据定理4.2.2可知，G_0中一定存在结点v，$d(v) < 6$
- 如果v 的度小于5，此时移去v，得到G_0'，据归纳假设，G_0'可点5着色。再将v补回，恢复到G_0。则图可结点5着色。



对偶图

- 如果结点v的度正好为5，如图所示
- 假如相邻结点只用了4种颜色(或更少)，则OK；
- 假如相邻结点偏偏用了5种颜色



对偶图

针对c_1, c_3形成的子图：

- 如果v_1, v_3属不同的连通支，则将v_1所在连通支中c_1和c_3颜色互换
- 如果v_1, v_3属同一连通支，则v_1和v_3之间存在道路，与v一起形成回路，此时c_2和c_4形成的子图中，v_2与v_4一定分属两个连通支，则将v_2所在连通支中c_2和c_4颜色互换

– 因此对于结点数为n的情况，5种颜色仍然可以完成结点着色。

证毕！

对偶图

- 小结：
  - 对于平面图，3种颜色不可以完成结点着色
  - 对于平面图， 已证明， 5种颜色可以完成结点着色
  - 那么，对于平面图，4种颜色可不可以完成结点着色?
- 四色问题又称四色猜想， 是世界近代三大数学难题之一

主要内容

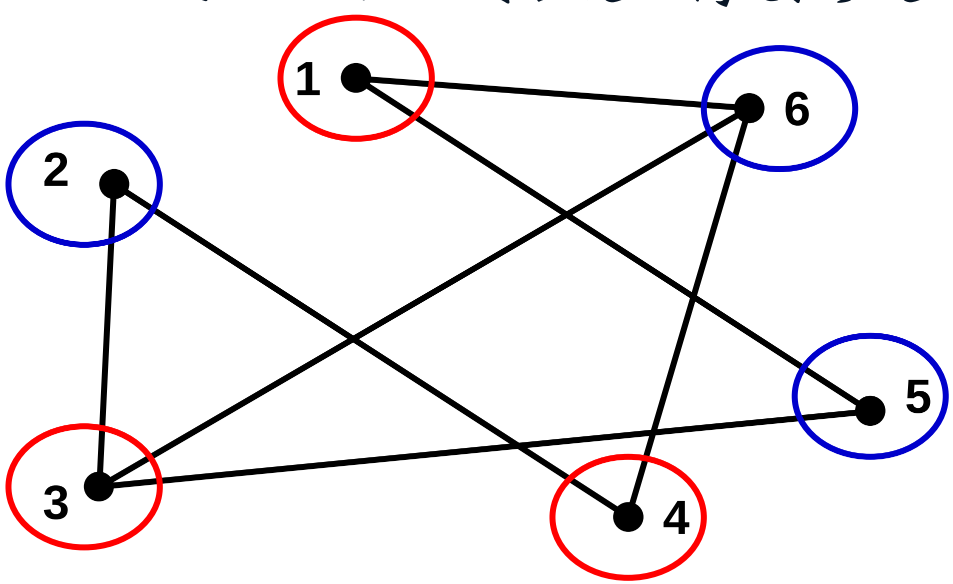
- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- **4.6 色数与色数多项式**

清華大學 Tsinghua University

色数与色数多项式

问题背景：

- 药品贮存问题：
  - 有n种化学药品需要存放，但是由于个别药品相互之间会发生化学反应，因此需要存放在不同的地点。问至少需要多少存放地点？



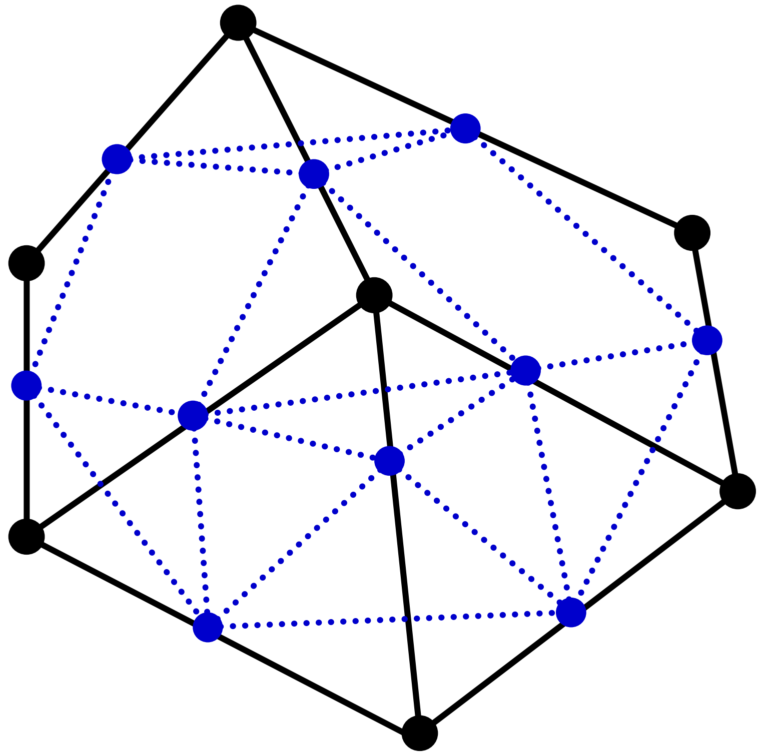
对图G的结点进行着色
满足相邻节点着以不同颜色
最少颜色数！

色数与色数多项式

- 定义4.6.1 给定图G，满足相邻结点着以不同颜色的最少颜色数目称为G的**色数**，记为$\gamma(G)$

- 定义4.6.2 给定图G，满足相邻边着以不同颜色的最少颜色数目称为G的**边色数**，记为$\beta(G)$

色数与色数多项式



平面图的边着色问题，可转化为点着色问题研究

色数与色数多项式

- 一些常见图的色数：
  - 空图： $\gamma(G)=1$
  - 完全图：$\gamma(G)=n$
  - $G=K_n-e$ ： $\gamma(G)=n-1$
  - 二分图： $\gamma(G)=2$
  - 偶结点数回路： $\gamma(G)=2$
  - 奇结点数回路： $\gamma(G)=3$
  - 树(n≥2)： $\gamma(G)=2$

色数与色数多项式

- 思考：
  - 子图的色数 ≤ 原图的色数
  - 图如果是连通图，则其色数必定≥2

色数与色数多项式

- 定理4.6.1 一个非空图G，$\gamma(G)=2$当且仅当它没有奇回路

证明：

- 不妨设图G为连通图
- 必要性：　$\gamma(G)=2 \longrightarrow$ 没有奇回路
- 假如存在奇回路，则 $\gamma(G)\geq 3$
- 充分性：没有奇回路 $\longrightarrow \gamma(G)=2$

色数与色数多项式

- 对于图G的支撑树T，有 $\gamma(T)=2$
- 考察每条余树边
- 在T中，加入任一余树边都可以形成一条初级回路，据已知条件，该回路为偶回路
- 因此，所有余树边加入后，树T的染色方案不需改变
- 故 $\gamma(G)=2$

证毕！

色数与色数多项式

- 定理4.6.1 一个非空图G，$\gamma(G) = 2$当且仅当它没有奇回路

色数与色数多项式

- 定理4.6.2 对于任意一个图G，设$d_0=\max d(v_i)$，则
$$\gamma(G)\le d_0+1$$

证明：（归纳法）

- 当图G结点数为1时，显然成立
- 设结点数$n=k-1$时成立
- 则当结点数为k时，从图G中随意移去一个结点v，得到图G'。则根据归纳假设，$\gamma(G')\le d'_0+1$

其中，$d'_0=\max\limits_{v_i\in G'} d(v_i)$

Tsinghua University

色数与色数多项式

- 显然，$d'_0 \le d_0$　　故 $\gamma(G') \le d'_0 + 1 \le d_0 + 1$
- 说明用$d_0 + 1$种颜色可以给G'结点着色
- 此时，我们把删掉的结点v补回
- 结点v的度不会超过d_0，而我们有$d_0 + 1$种颜色可用，因此结点v一定可以在这$d_0 + 1$种颜色中找到着色方案。
- 故$n = k$时，假设仍然成立。

证毕！

色数与色数多项式

- 定理4.6.2 对于任意一个图G，设$d_0 = \max d(v_i)$，则

$$\gamma(G) \leq d_0 + 1$$

色数与色数多项式

- 定理4.6.3 对任意图G，$\gamma(G) \le 1 + \max_{G' \subseteq G} \delta(G')$，其中$\delta(G')$表示G的导出子图$G'$中最小的结点度

证明：

- 若G为空图，则结论显然成立
- 若G非空，则设$\gamma(G) = k$，必然有$k \ge 2$。
- 令H为满足$\gamma(H) = k$的G的一个最小导出子图
- 则对于H的所有结点v，必然有$\gamma(H - v) = k - 1$
- 意味着H中每个结点v，都至少有$k - 1$个邻接点

?

Tsinghua University

色数与色数多项式

- 即 $d(v) \geq k-1$，可知$\delta(H) \geq k-1$
- 对于H的所有导出子图$\{H'\}$，必有$\delta(H) \leq \max\delta(H')$
- 而相比G的所有导出子图$\{G'\}$，必有

$$\max\delta(H') \leq \max\delta(G')$$

- 由上述各不等式，可推出

$$\gamma(G) = k \leq 1+\delta(H) \leq 1+\max\delta(H') \leq 1+\max\delta(G')$$

证毕！

色数与色数多项式

定理4.6.3 对任意图G，$\gamma(G) \leq 1 + \max_{G' \subseteq G} \delta(G')$，其中

$\delta(G')$表示G的导出子图G'中最小的结点度

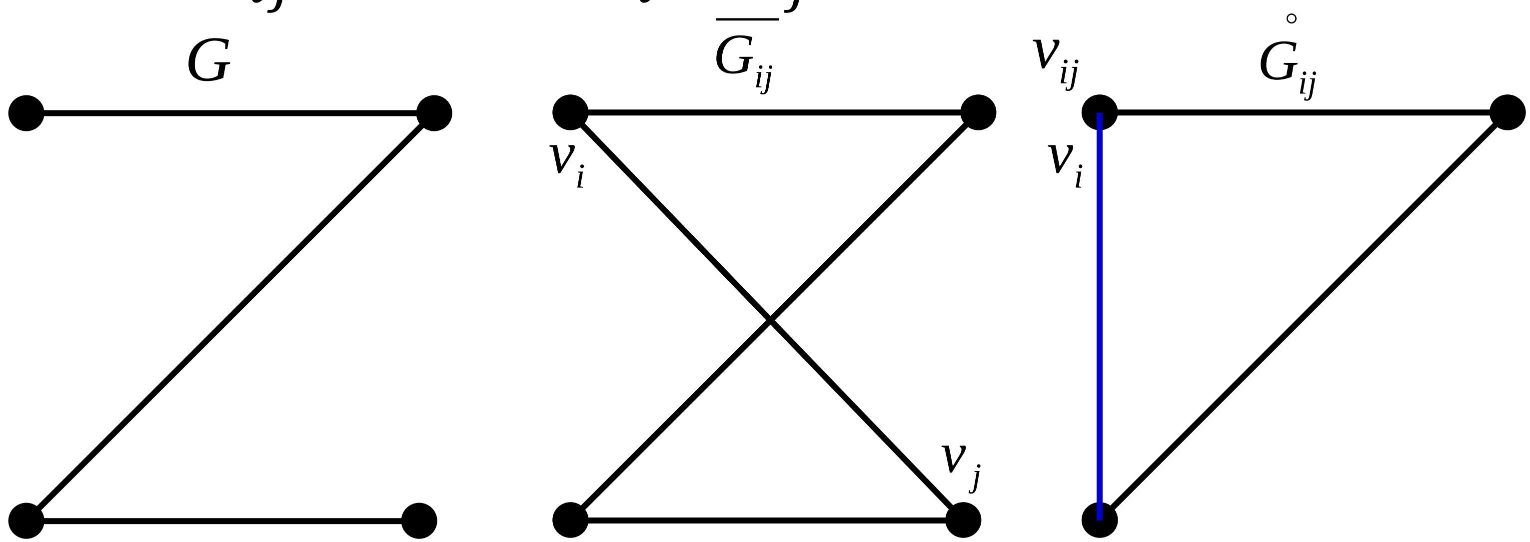
思考：

给定一个图G，如何求其色数?

给出图G的两个变换：$\overline{G_{ij}}$ $\mathring{G}_{ij}$

色数与色数多项式

- 定义4.6.3 设v_i，v_j是简单图G中不相邻的两个结点。令 $\overline{G_{ij}} = G + (v_i, v_j)$。$\mathring{G}_{ij}$为原图G中合并结点$v_i$，$v_j$成为新结点$v_{ij}$并由$v_{ij}$继承原先$v_i$，$v_j$连接关系的简单图。



色数与色数多项式

- 思考：
  - 联系 $\overline{G_{ij}}$，$\mathring{G}_{ij}$ 的定义，简单图G的最少着色数可如何计算？
  - $\overline{G_{ij}}$：原图G中，v_i, v_j 着以不同颜色

$$\gamma\left(\overline{G_{ij}}\right)=\gamma\left(G\left(v_i,v_j\text{着以不同颜色}\right)\right)$$

  - $\mathring{G}_{ij}$：原图G中，v_i, v_j 着以相同颜色

$$\gamma\left(\mathring{G}_{ij}\right)=\gamma\left(G\left(v_i,v_j\text{着以相同颜色}\right)\right)$$

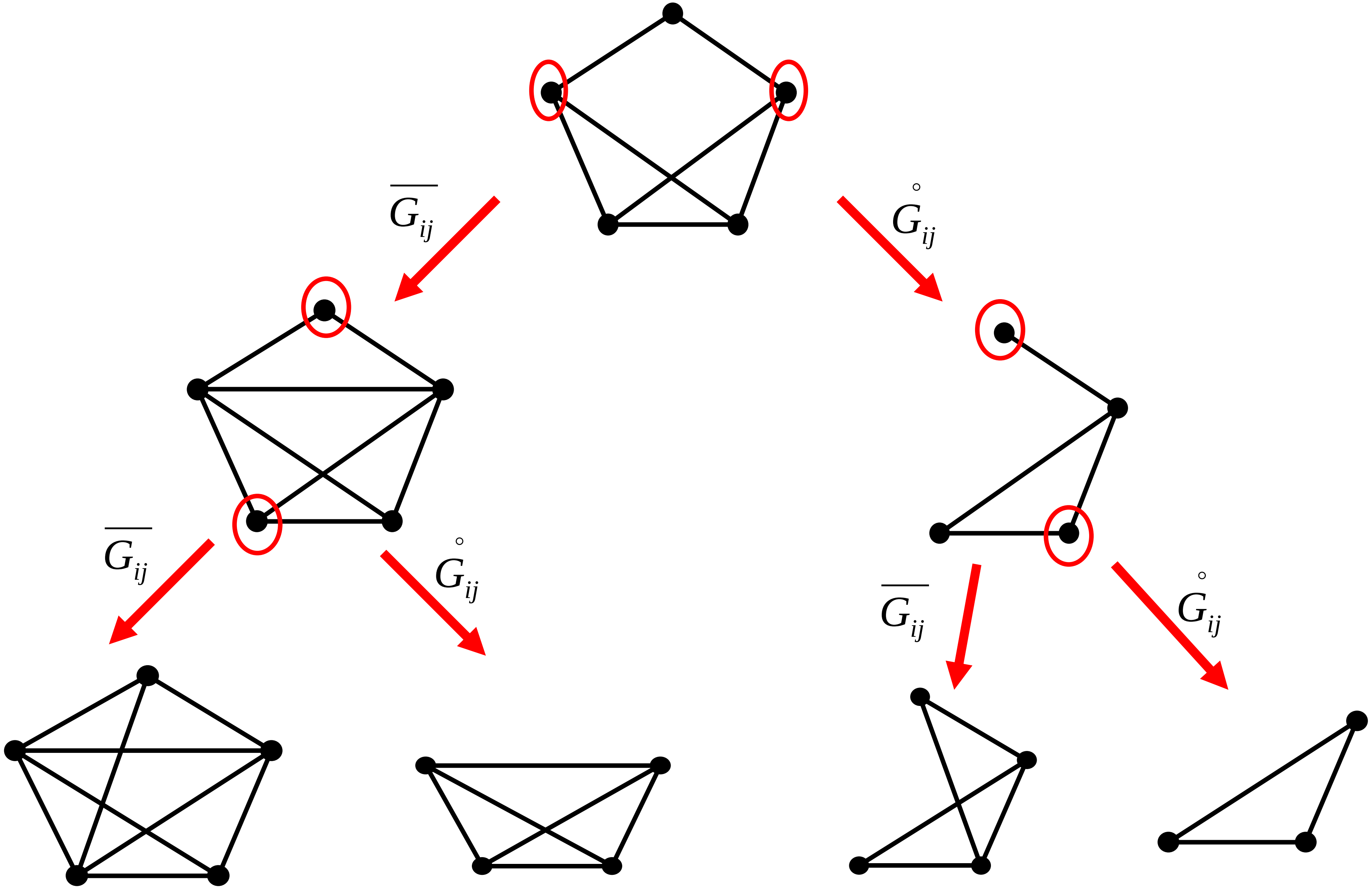
色数与色数多项式

- 定理4.6.4 设v_i, v_j是简单图G中不相邻的两个结点。则

$$\gamma(G)=\min\left\{\gamma\left(\overline{G_{ij}}\right)\ ,\ \gamma\left(\mathring{G}_{ij}\right)\right\}$$

证明：

略！



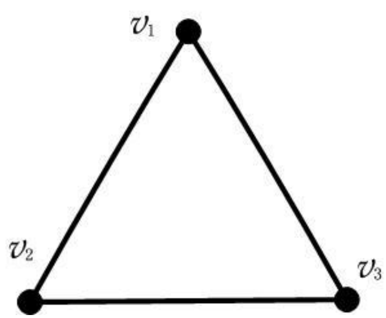
$$\gamma(G) = \min\left\{\gamma\left(\overline{G_{ij}}\right) \;,\; \gamma\left(\mathring{G}_{ij}\right)\right\} = 3$$

色数与色数多项式

- 色数问题，是给一个图结点着色，所需的最少颜色数
- 假如给定颜色数t，对某个图G结点进行着色，问有多少种方案？

我们用 $f(G,t)$ 表示这种着色方案数

– 例如：t种颜色$(t \geq 3)$对K_3进行着色，方案数为：



$$f(K_3,t) = t(t-1)(t-2)$$

色数与色数多项式

- 定义4.6.4 对于简单图G，给定t种颜色对G的结点进行着色，满足相邻结点着以不同颜色，着色方案数可用 $f(G,t)$ 表示，称为G的**色数多项式**。

  – 显然，当给出的颜色数不够多时，着色方案数将为0，即

$$t<\gamma(G) \longrightarrow f(G,t)=0$$

色数与色数多项式

- 对于图G的色数多项式 $f(G,t)$
  - 用t种颜色对G进行着色，可以分为如下情况：
    - 恰用1种颜色完成着色，着色方案数为m_1，选色方案数为 C_t^1
    - … … …
    - 恰用n种颜色完成着色，着色方案数为m_n，选色方案数为 C_t^n
  - 则有：

$$f(G,t)=\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot C_t^i$$

由此可看出，色数多项式是一个t的n次多项式

色数与色数多项式

- 常见的色数多项式及其性质：
  - $\gamma(G)=k \;\Rightarrow\; f(G,k)>0$
  - $f(G,t)=t^n \;\Leftrightarrow\;$ G为空图
  - 对于完全图K_n，$f(K_n,t)=t(t-1)\cdots(t-n+1)$

    $$f(K_n,t)=f(K_{n-1},t)(t-n+1)$$
  - 对于树T_n，$f(T_n,t)=t(t-1)^{n-1}$
  - 若G有p个连通支 $G_1,G_2,\cdots,G_p, p\geq 1$， 则

    $$f(G,t)=\prod_{i=1}^{p} f(G_i,t)$$

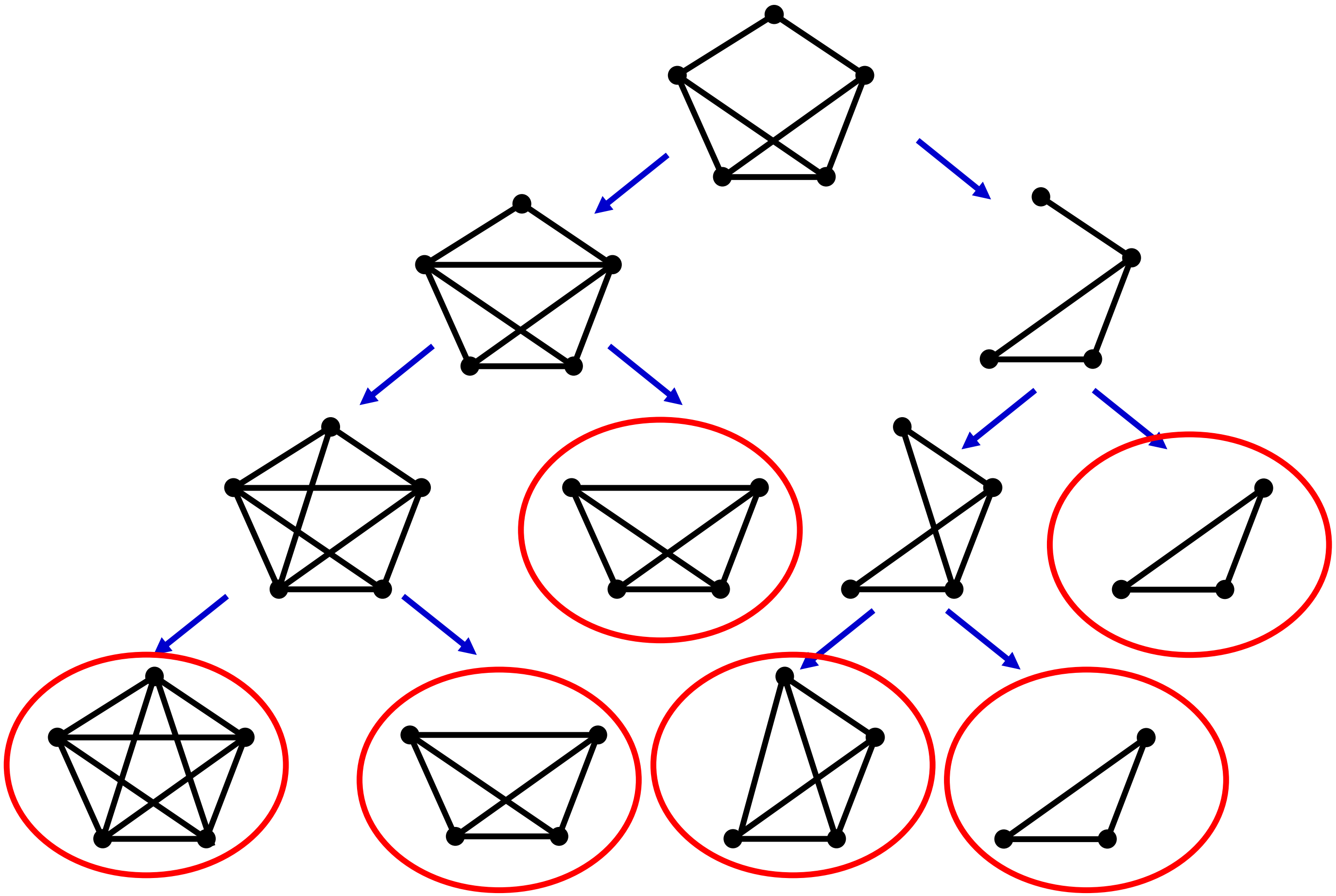
色数与色数多项式

- 思考：
  - 对于任意平面图，其色数多项式如何计算？

- 定理4.6.7 设i，j是G的不相邻结点，则

$$f(G,t)=f\left(\overline{G_{ij}},t\right)+f\left(\mathring{G}_{ij},t\right)$$

Tsinghua University



$$f(G,t) = f(K_5,t) + 3 \cdot f(K_4,t) + 2 \cdot f(K_3,t)$$

小结

- 色数问题：
  - 色数的定义、常见图的色数
  - 图的色数定理
  - 图的色数求解方法
- 色数多项式：
  - 常见图的色数多项式
  - 色数多项式的求法

主要内容

- 4.1 平面图
- 4.2 极大平面图
- 4.3 非平面图
- 4.4 图的平面性检测
- 4.5 对偶图
- 4.6 色数与色数多项式

作业

- 课后：1，3，7，8，13
- 选作：5，9，14，16