No.

Date 2021. 11. 19.

离散数学(1).
week 10.

(10) 1-6, 7(2,3), 10.

1.(1)

解: $A \cap B = \{0, 2\}$.

$R = \{\langle x, y\rangle : x, y \in A \cap B\}$

$= \{\langle 0,0\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 2,0\rangle, \langle 2,2\rangle\}$.

(2)

解: $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,2,3\}$

$R = \{\langle x, y\rangle : x \in A \land y \in B \land x = y^2\}$

$= \{\langle 1,1\rangle, \langle 4,2\rangle\}$.

2.

解: $A = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

$B = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 4,2\rangle\}$

$A \cup B = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$.

$A \cap B = \{\langle 3,3\rangle\}$.

$dom(A) = \{1,2,3\}$

$dom(B) = \{1,2,4\}$

$ran(A) = \{2,3,4\}$

$ran(B) = \{2,3,4\}$

$dom(A \cup B) = \{1,2,3,4\}$

$ran(A \cap B) = \{3\}$

3.(1)

证明:

$(\forall x)(x \in dom(R) \cup dom(S))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in dom(R) \lor x \in dom(S))$

$\Leftrightarrow (\forall x)((\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \lor (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \lor \langle x,y\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cup S)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in dom(R \cup S))$

故 $dom(R) \cup dom(S) = dom(R \cup S)$ $\boxtimes$

(2)

证明:

$(\forall x)(x \in dom(R \cap S))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \cap S)$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\langle x,y\rangle \in R \land \langle x,y\rangle \in S)$

$\Rightarrow (\forall x)((\exists y)(\langle x,y\rangle \in R) \land (\exists y)(\langle x,y\rangle \in S))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(x \in dom(R) \land x \in dom(S))$

故 $dom(R \cap S) \subseteq dom(R) \cap dom(S)$.

4.

解: $A=\{1,2,3\}$.

$A\times A=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle\}$

在A上的二元关系R是A×A的子集,共有

~~$|P(A)|=2^9$~~

~~所~~ $C_9^0+C_9^1+\dots+C_9^9=512$个.

故在A上有512种不同的二元关系.

若$|A|=n$. 则在A上的二元关系是A×A的子集.

$|A\times A|=|A|^2=n^2$.

A×A的子集共有$|P(A\times A)|$个.

$|P(A\times A)|=2^{n^2}$个.

5.

解: $A\times B=\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$.

A到B的二元关系可以是

$\varnothing$ 或 $\{\langle a,d\rangle\}$ 或 $\{\langle b,d\rangle\}$ 或 $\{\langle c,d\rangle\}$ 或 $\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle\}$ 或 $\{\langle a,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$ 或 $\{\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$ 或 $\{\langle a,d\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}$.

6. 对多元关系的元素.

解: 三元关系有

$\langle x_1,x_2,x_3\rangle := \langle\langle x_1,x_2\rangle,x_3\rangle$

四元关系有

$\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle := \langle\langle x_1,x_2,x_3\rangle,x_4\rangle$

⋮

n元关系有

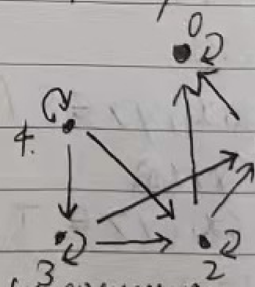
$\langle x_1,x_2,\dots,x_n\rangle := \langle\langle x_1,x_2,\dots,x_{n-1}\rangle,x_n\rangle$.

7. 设 $A=\{0,1,2,3,4\}$.

(2).

解:

$R_2=\{\langle x,y\rangle : 0\le|x-y|<3\}$.

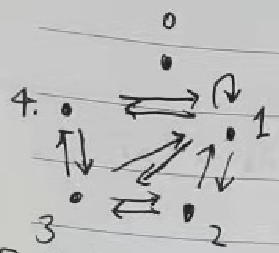


关系图

$$\begin{array}{c|c} & (0)\ (1)\ (2)\ (3)\ (4) \\ \begin{matrix}(0)\\(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix} & \begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

关系矩阵

(3). $R_3=\{\langle x,y\rangle : x和y互质\}$.



R₃ 的关系图

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1\\ 0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

R_3 的关系矩阵

10.

证明:

R, S, T 在A上. x 为一有序对.

$(\forall x)(x\in((R\circ S)\cup(R\circ T)))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in(R\circ S)\vee x\in R\circ T))$

设 $x=\langle x_1,x_2\rangle$.

$\Leftrightarrow(\forall x)(\langle x_1,x_2\rangle\in(R\circ S)$

$\vee\langle x_1,x_2\rangle\in R\circ T)$.

$\Leftrightarrow(\forall x)\cancel{(\exists x)}$

$((\exists y)(\langle x_1,y\rangle\in S\wedge\langle y,x_2\rangle\in R)$

$\vee(\exists y)(\cancel{\langle y,x_2\rangle}$

$\langle x_1,y\rangle\in T\wedge\langle y,x_2\rangle\in R))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)$

$((\langle x_1,y\rangle\in S\wedge\langle y,x_2\rangle\in R)$

$\vee(\langle x_1,y\rangle\in T\wedge\langle y,x_2\rangle\in R))$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)$

$((\langle x_1,y\rangle\in S\vee\langle x_1,y\rangle\in T)\wedge\langle y,x_2\rangle\in R)$

$\Leftrightarrow(\forall x)(\exists y)$

$(\langle x_1,y\rangle\in S\cup T\wedge\langle y,x_2\rangle\in R)$.

$\Leftrightarrow(\forall x)(x\in R\circ(S\cup T))$ ⊠.