第二章 道路与回路

计算机系网络所：张小平

清華大學
Tsinghua University

主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- 2.3 欧拉道路与回路
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题

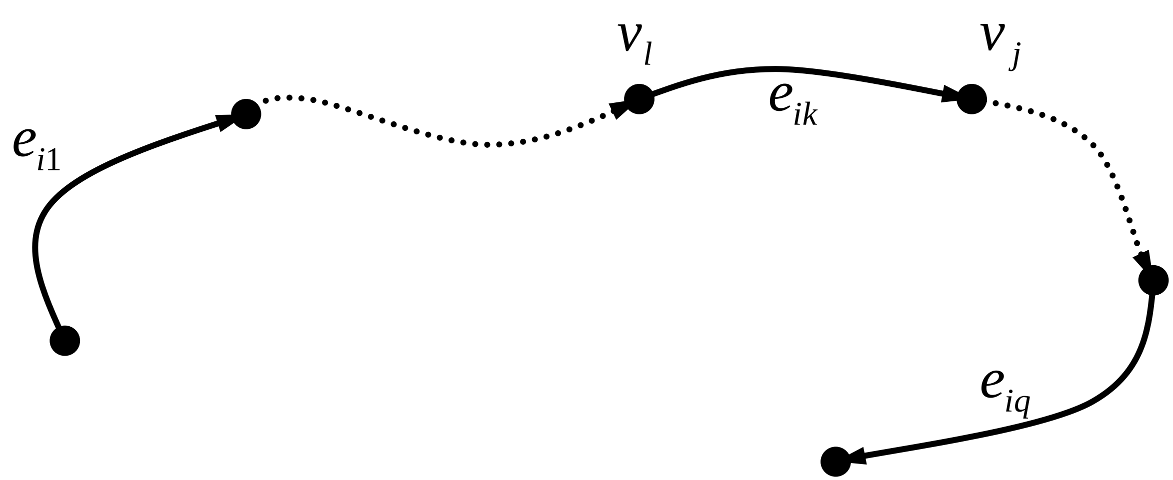
道路与回路

- 定义2.1.1 有向图$G=(V,E)$中，若边序列$P=(e_{i1},e_{i2},\ldots,e_{iq})$，其中$e_{ik}=(v_l,v_j)$满足：

  v_l 是 $e_{i(k-1)}$ 的终点

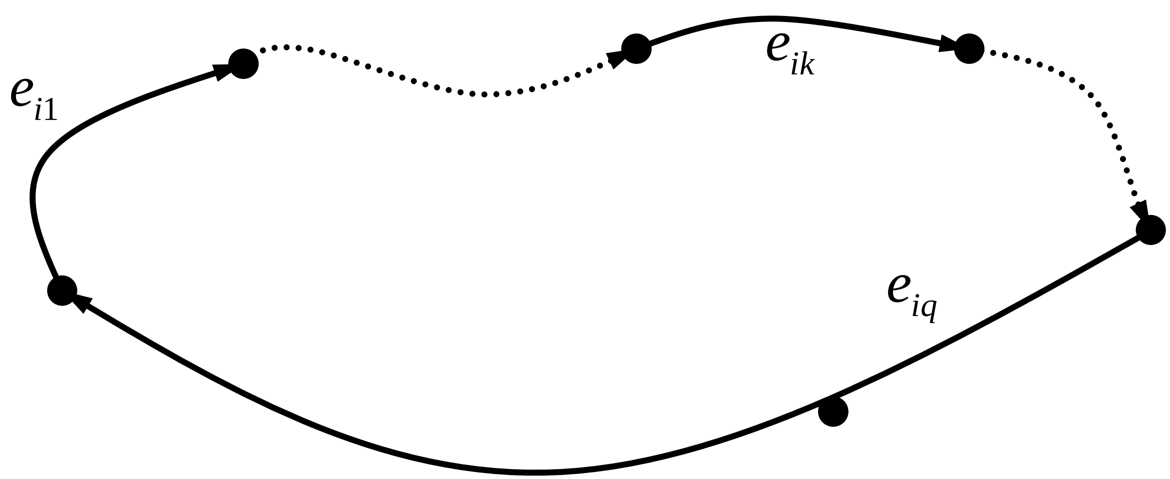
  v_j 是 $e_{i(k+1)}$ 的始点

  则称P是G的一条**有向道路**；



道路与回路

- 如果e_{iq}的终点也是e_{i1}的始点，则称P是G的一条**有向回路**。

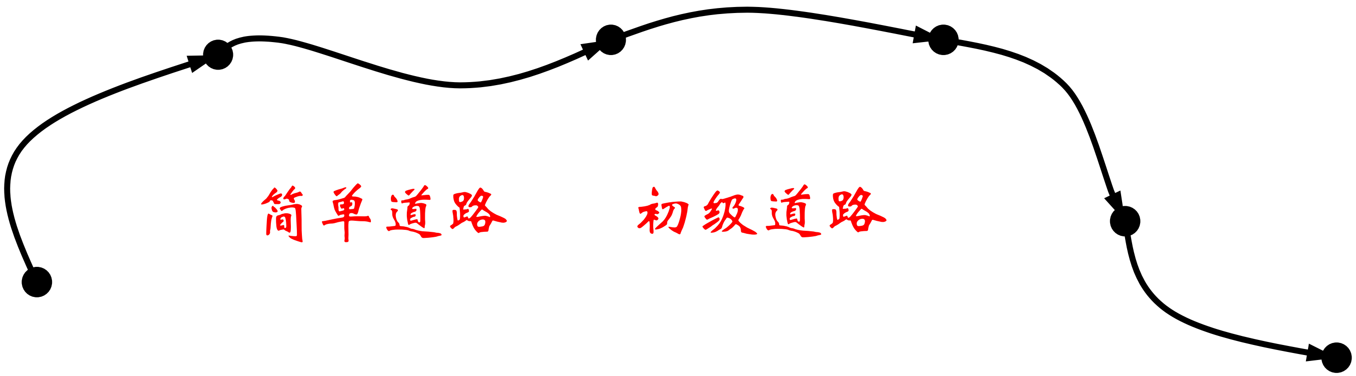


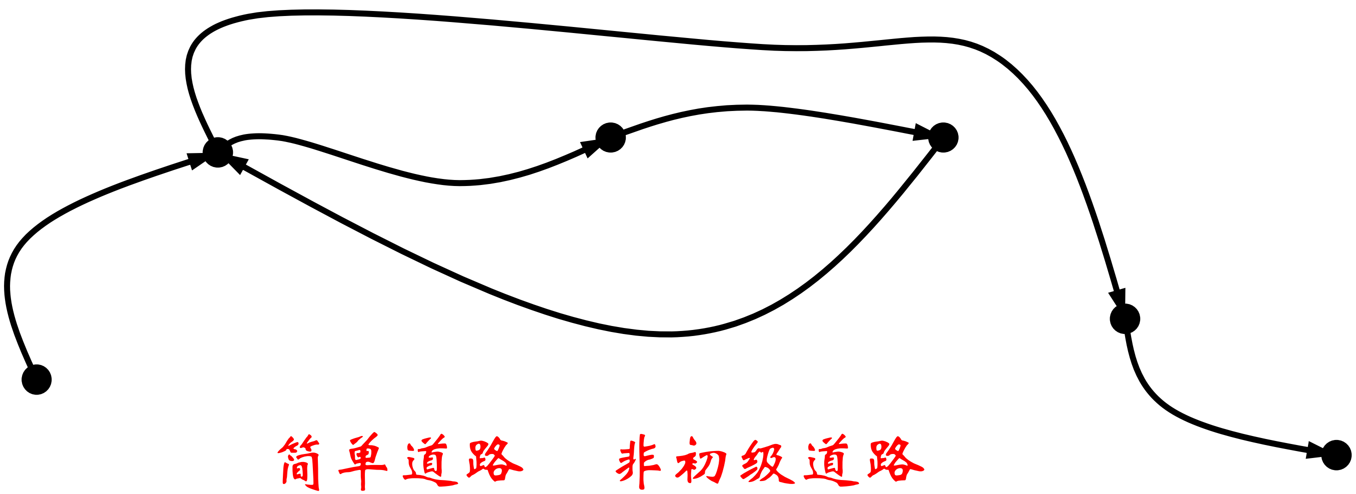
道路与回路

- 简单有向道路（回路）：P中的边没有重复出现
- 初级有向道路（回路）：P中的结点没有重复出现，简称路和回路

- 显然，初级有向道路一定是简单有向道路
- 思考：非初级有向道路的简单有向道路具有什么特征？

道路与回路





道路与回路

- 定义2.1.2 无向图$G=(V,E)$中，若点边交替序列$P=(v_{i1},e_{i1},v_{i2},e_{i2},\dots,e_{i(q-1)},v_{iq})$满足：

  v_{ik}，$v_{i(k+1)}$是e_{ik}的两个端点

  则称P是G中的一条链或道路；

  若 $v_{iq}=v_{i1}$，则称P是G中的一个圈或回路。
- 简单道路（回路）：P中没有重复边
- 初级道路（回路）：P中没有重复结点

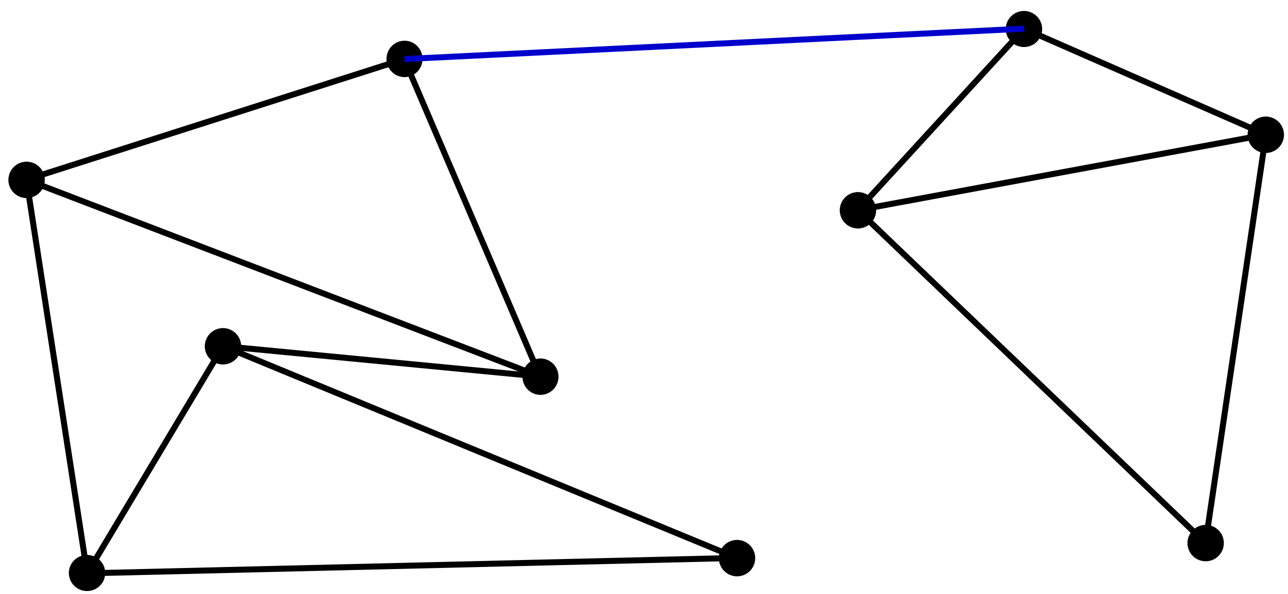
道路与回路

- 定义2.1.3 设G为无向图，若G的任意两结点间都存在道路，就称G为**连通图**，否则称为**非连通图**。
- 对于有向图G，如果在不考虑其各边的方向的情况下是连通图，则称**有向图G是连通图**。
- 若连通子图H不是G的任何连通子图的真子图，则称H是G的极大连通子图，或称**连通支**。

Tsinghua University

道路与回路

连通子图H不是G的任何连通子图的真子图



道路与回路

- 显然，G的每个连通支都是它的导出子图。

- 思考：
  - 若G为连通图，其连通支个数为几个？
  - 具有两个连通支的图，其邻接矩阵和关联矩阵是什么特点？

道路与回路

例：设G为简单图，证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，G为连通图

证明（反证法）：假定G为非连通图

- G至少含2个连通支 $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2)$

- 令 $|V(G_1)| = n_1, |V(G_2)| = n_2$，显然有 $n_1 + n_2 = n$

- 同理, $|E(G_1)| = m_1, |E(G_2)| = m_2$，显然有 $m_1 + m_2 = m$

道路与回路

– 由于G为简单图，因此

$$\left.\begin{aligned} m_1 &\le \frac{1}{2}n_1(n_1-1) \\ m_2 &\le \frac{1}{2}n_2(n_2-1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m \le \frac{1}{2}n_1(n_1-1)+\frac{1}{2}n_2(n_2-1)$$

– 由于 $n_1 \le n-1$，$n_2 \le n-1$

故：

$$m \le \frac{1}{2}(n-1)(n_1-1+n_2-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

与前提矛盾！

证毕！

Tsinghua University

道路与回路

例：设G为简单图，证明当 $m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，G为连通图

道路与回路－小结

- 有向图：
  - 有向道路，有向回路
  - 简单有向道路（回路），初级有向道路（回路）
- 无向图：
  - 道路（链），回路（圈）
  - 简单道路（回路），初级道路（回路）
- 连通图：
  - 连通支（极大连通子图）

主要内容

- 2.1 道路与回路
- **2.2 道路与回路的判定**
- 2.3 欧拉道路与回路
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题

道路与回路的判定

- 如何判定图G中任意两个结点间存在道路或回路？
  - 观察！
  - 计算！
- 计算机中只能通过代数计算来判定图G的连通性以及结点间道路、回路
  - 邻接矩阵法
  - 搜索法（BFS,DFS）

道路与回路的判定

- 邻接矩阵法：设 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 为G的邻接矩阵

由邻接矩阵定义可知：

$$a_{ij}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \left(v_i,v_j\right)\in E(G)$$

即图G中存在 v_i 到 v_j 的边。

道路与回路的判定

- 我们再观察 $A^2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right)_{n\times n}$，据矩阵乘法可知：

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}$$

$a_{ij}^{(2)} \neq 0$ 当且仅当存在k，使 $a_{ik} = a_{kj} = 1$

这意味着 v_i 可以经过2条边 (v_i, v_k) 和 (v_k, v_j) 到达 v_j

Tsinghua University

道路与回路的判定

- 同理，对于 $A^l = \left(a_{ij}{}^{(l)}\right)_{n\times n}, (l \le n)$

如果 $a_{ij}{}^{(l)} \ne 0$

意味着 v_i 可以经过 l 条边 $(v_i, v_p), \ldots, (v_q, v_j)$ 到达 v_j

道路与回路的判定

$a_{ij} \neq 0$ v_i 可以通过1条边到达 v_j

$a_{ij}^{(2)} \neq 0$ v_i 可以通过2条边到达 v_j

$\vdots$

$a_{ij}^{(l)} \neq 0$ v_i 可以通过 l 条边到达 v_j

$\vdots$

如何判定两个结点之间存在道路?

如何计算两个结点之间存在几条道路?

Tsinghua University

道路与回路的判定

- 令 $P = A + A^2 + \cdots + A^n$
  - 如果 $p_{ij} = t$，说明从v_i可以经过t条道路到达v_j；
  - 反之，说明在n步之内v_i无法到达v_j，即v_i与v_j间不存在道路
- 以上方法可以判定任意两个结点间存在多少条道路。
- 计算复杂度为 $O(n^4)$ 。

Tsinghua University

道路与回路的判定

- 思考：
  - 计算所得到的两结点间“所有道路”是“道路”、“简单道路”还是“初级道路”？
  - 图中如果出现重边，如何计算？
  - 如果要你罗列出所有道路，如何通过运算的方式得到？

道路与回路的判定

- 实际应用中，往往只需要判定任意两结点间是否存在道路

道路与回路的判定

- 可采用逻辑运算方法：

$$A^l = \left(a_{ij}{}^{(l)}\right)_{n\times n}, \qquad a_{ij}^{(l)} = \bigvee_{k=1}^{n}\left(a_{ik}^{(l-1)} \wedge a_{kj}\right), \quad l = 2,3,\ldots,n$$

相应地，

$$P = A \vee A^2 \vee \cdots \vee A^n$$

- 这就是图G的道路矩阵。

道路与回路的判定

- Warshall算法：
  - Begin
  - P←A
  - for i=1 to n
  - for j=1 to n
  - for k=1 to n
  - $p_{jk} \leftarrow p_{jk} \vee \left(p_{ji} \wedge p_{ik} \right)$
  - end

道路与回路的判定

- 定理2.2.1 Warshall算法的结果是图G的道路矩阵。

证明：（归纳法）

当$i = 1$时 $p_{jk}^{(1)} = p_{jk} \vee \left(p_{j1} \wedge p_{1k} \right) \quad (k = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n)$

1　　1　　1

$v_j \rightarrow v_k$　　$v_j \rightarrow v_1 \rightarrow v_k$

$p_{jk}^{(1)} = 1 \Leftrightarrow$ 结点集$\{v_j, v_1, v_k\}$之间有 v_j 到v_k 的道路

道路与回路的判定

当 $i=2$ 时 $p_{jk}^{(2)} = p_{jk}^{(1)} \vee \left(p_{j2}^{(1)} \wedge p_{2k}^{(1)}\right) \quad (k=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$

1　1　1

$\{v_j, v_1, v_k\}$　$\{v_j, v_1, v_2\}$　$\{v_2, v_1, v_k\}$

$p_{jk}^{(2)}=1 \Leftrightarrow$ 结点集 $\{v_j, v_1, v_2, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路

设当 $i=n-1$ 时，$p_{jk}^{(n-1)}=1 \Leftrightarrow$

结点集 $\{v_j, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路

道路与回路的判定

当 $i=$ n 时 $p_{jk}^{(n)}=p_{jk}^{(n-1)}\vee\left(p_{jn}^{(n-1)}\wedge p_{nk}^{(n-1)}\right)\ (k=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,n)$

1 **1** **1**

$\{v_j,v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_k\}$

$\{v_j,v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n\}\{v_n,v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_k\}$

$p_{jk}^{(n)}=1 \iff$

结点集 $\{v_j,v_1,v_2,\ldots,v_{n-1},v_n,v_k\}$ 之间有 v_j 到 v_k 的道路

证毕！

道路与回路的判定

- 定理2.2.1 Warshall算法的结果是图G的道路矩阵。

Warshall算法：

- Begin
- P←A
-    for i=1 to n
-       for j=1 to n
-          for k=1 to n
-             $p_{jk} \leftarrow p_{jk} \vee \left(p_{ji} \wedge p_{ik}\right)$
- end

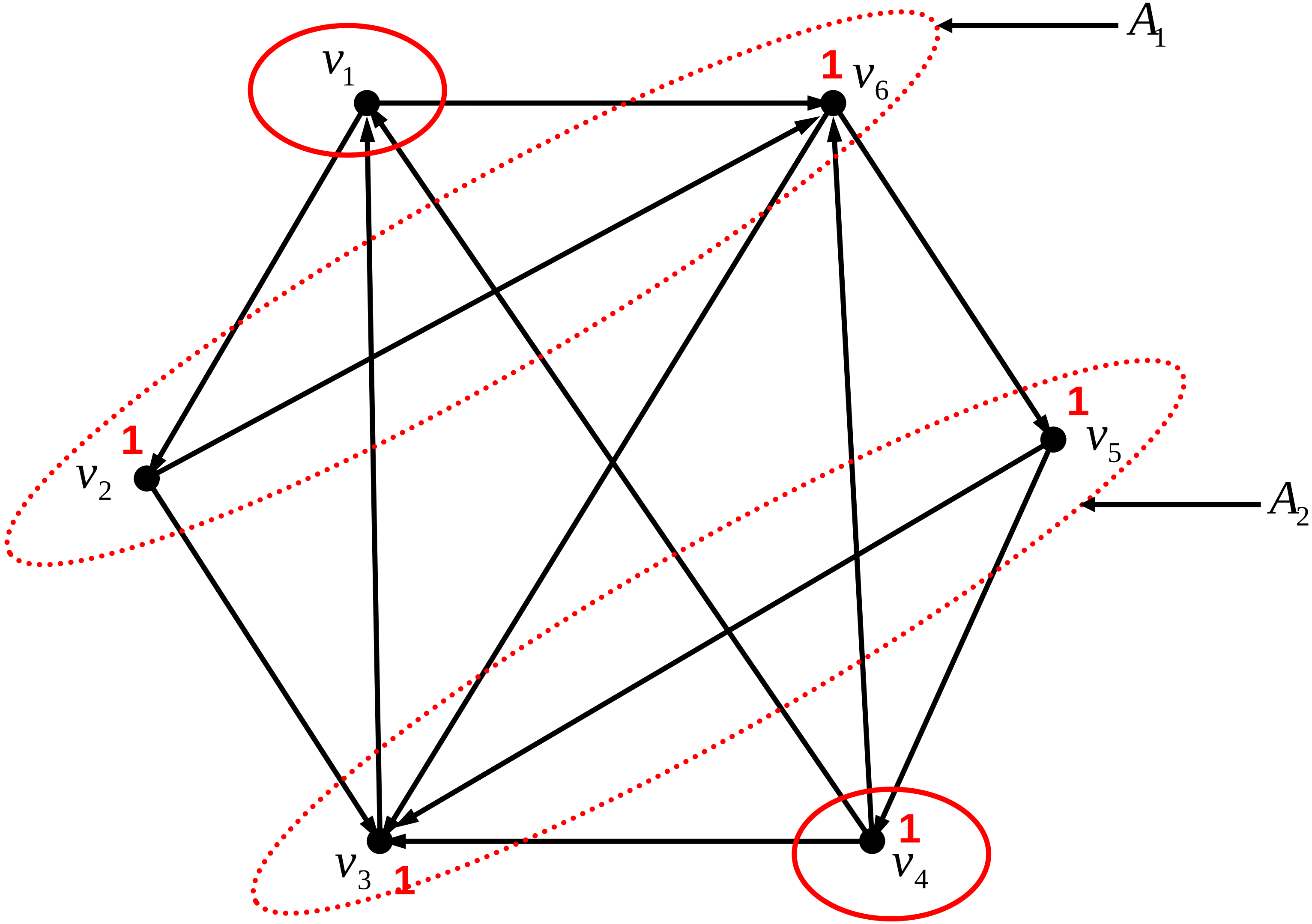
道路与回路的判定

- 搜索法：
  - 采用搜索的方法判断G中某一结点到其他结点是否存在道路经常更加方便
  - 常用的方法有两种：
    - 广探法(**Breadth First Search**，BFS)
    - 深探法(**Depth First Search**，DFS)

道路与回路的判定

- 广探法(BFS)：
  - BFS法是从G的任一结点v_0开始，找它的直接后继集$\Gamma^+(v_0)$，记为A_1，然后对A_1中的每一个结点分别找它们的直接后继集，这些后继集的并集记为A_2。依此类推，直至找到目的结点。
  - 在搜索过程中，难免会碰到重复搜索到的结点，为避免结点的重复搜索可对结点进行标号。（开始为0，第一次搜索到后变为1，之后标号为1的结点将不进入直接后继集）

$v_1 \xrightarrow{?} v_4$

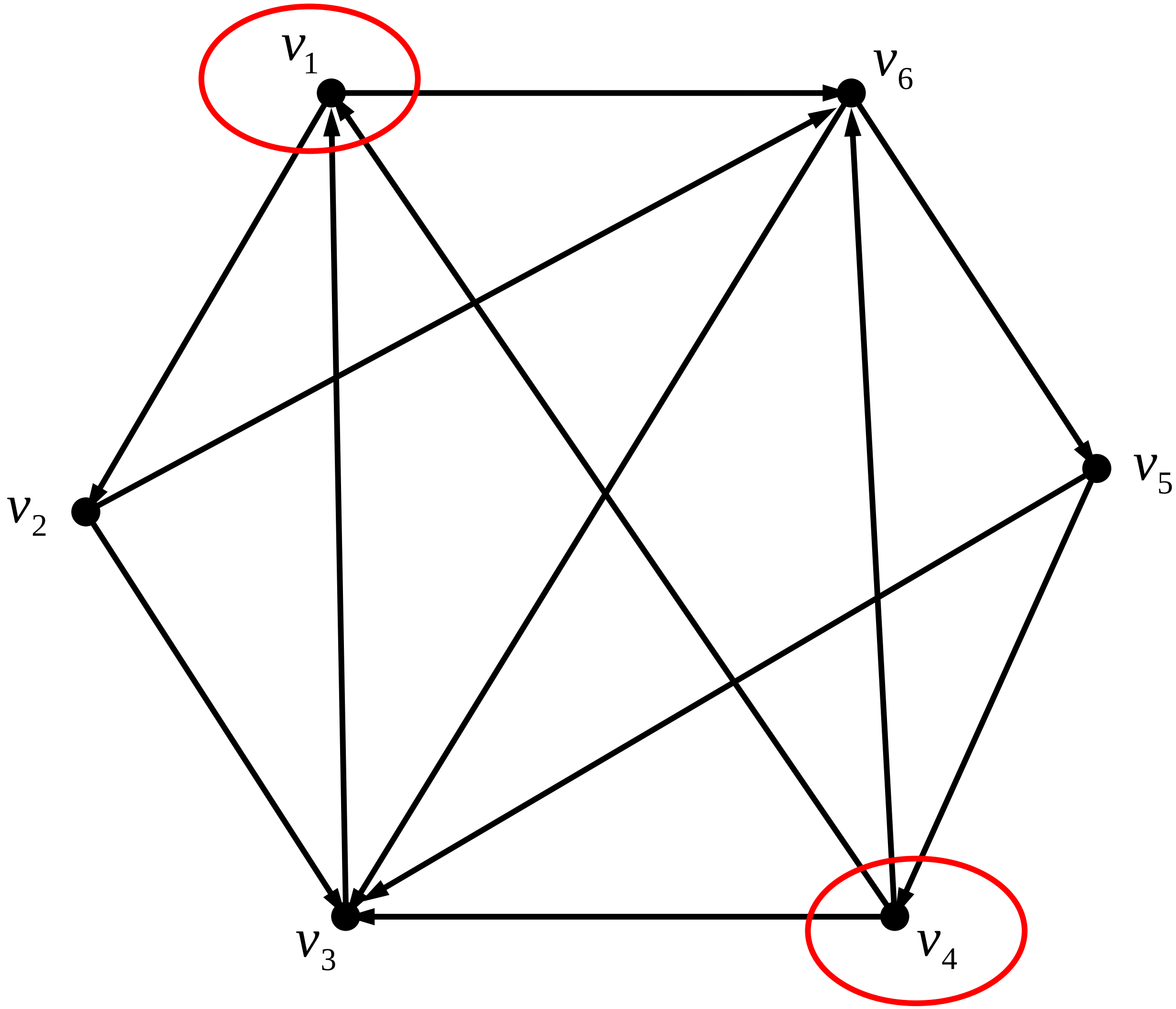


采用正向表数据结构实现，比较方便 思考：计算复杂度？

道路与回路的判定

- 深探法(DFS)：
  - DFS与BFS截然不同。
  - 它从v_0开始，只查找v_0的某个直接后继v_1，记下v_1的前趋v_0，然后再找v_1的某个未搜索过的直接后继v_2，依此类推
  - 当从某个结点v_j无法再向下搜索时，退回到它的前趋结点v_{j-1}，然后再找v_{j-1}的另一个未查过的直接后继。

$$v_1 \xrightarrow{?} v_4$$



思考：计算复杂度？

道路与回路的判定－小结

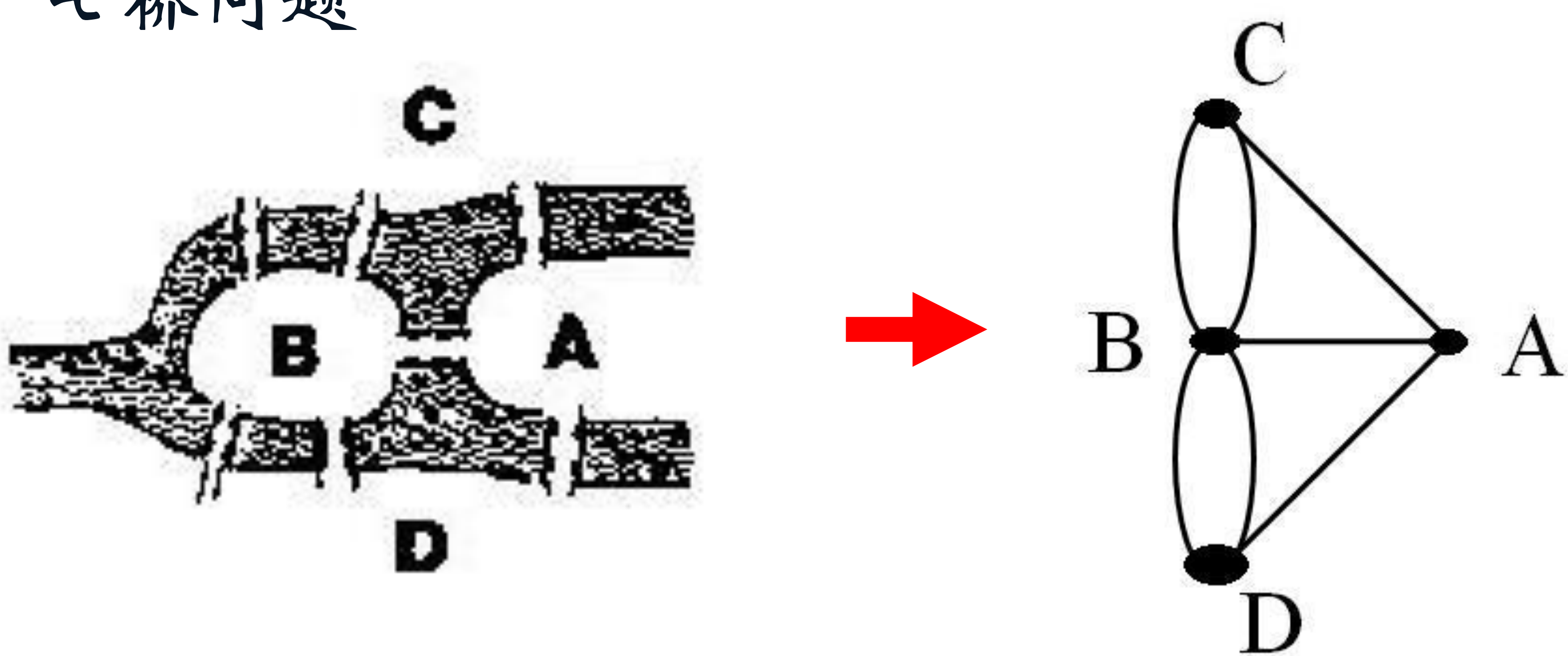
- 邻接矩阵法
  - 道路矩阵的计算方法
  - Warshall算法
- 搜索法
  - 广探法(BFS)
  - 深探法(DFS)

主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- **2.3 欧拉道路与回路**
- 2.4 哈密顿道路与回路
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题

欧拉道路与回路

- 定义2.3.1 无向连通图$G=(V,E)$中的一条经过所有边的简单回路（道路）称为G的欧拉回路（道路）
- 七桥问题



欧拉道路与回路

- 定理2.3.1 无向连通图G存在欧拉回路的充要条件是 G中各结点的度都是偶数。

证明：

必要性：存在欧拉回路 $\Longrightarrow$ 各结点度为偶数

- 若G中有欧拉回路C，则C过每一条边一次且仅一次
- 对于任意一个结点v来说，如果C经过e_i进入v，则一定通过另外一条边e_j离开
- 因此任意一个结点的度均为偶数

欧拉道路与回路

充分性：各结点度为偶数 ⟹ 存在欧拉回路

- 由于G为有穷图，因此从任意一结点v_0出发一定可以得到一条简单回路C

  ∵ 各结点的度均为偶数

  ∴ 从v_0出发的简单道路可以不停留在v_0以外的其他任何结点始终向前延展

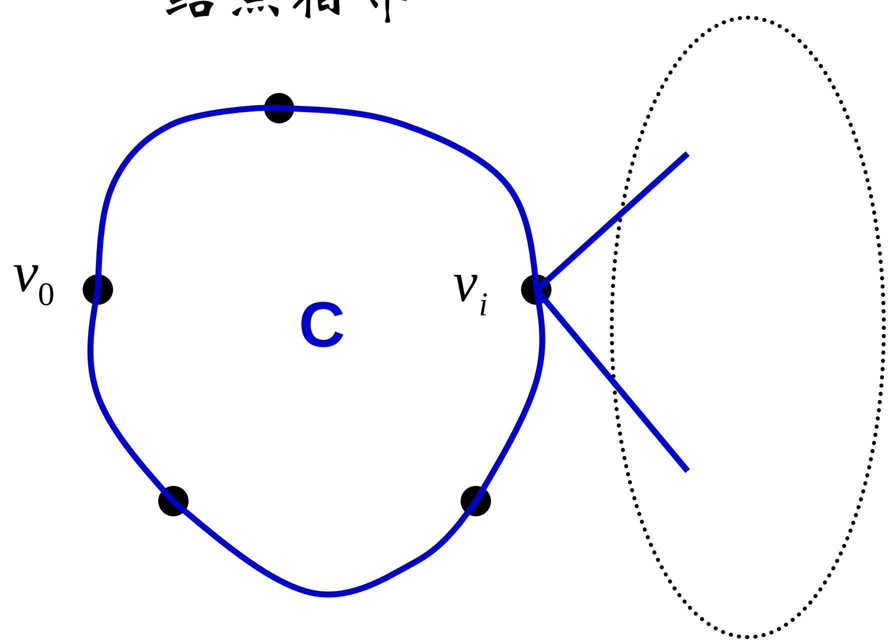
  ∵ G为有穷图

  ∴ 该道路最终可以回到结点v_0形成简单回路C

- 如果E(G)=E(C)，则C就是欧拉回路。

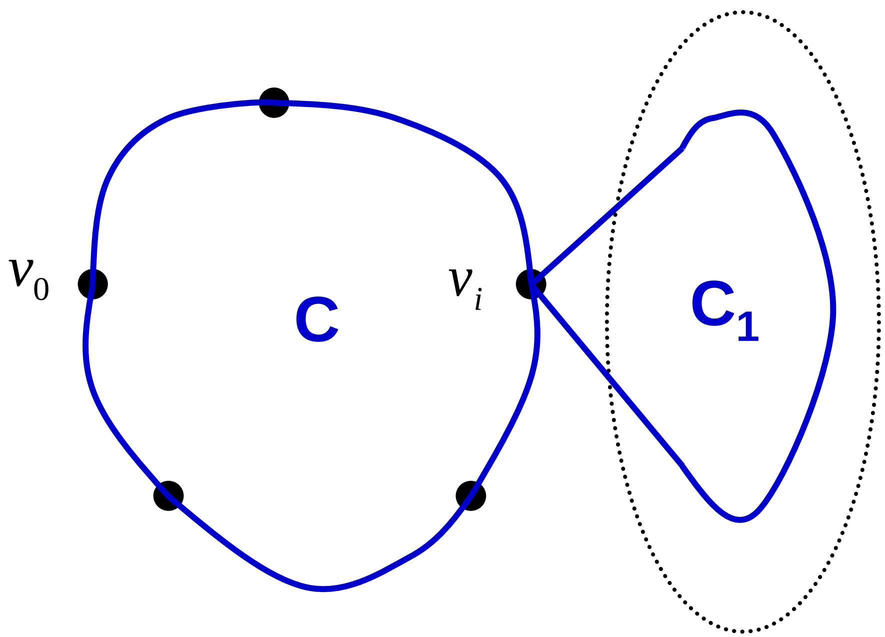
欧拉道路与回路

- 如果E(G)≠E(C)，则构造G_1=G-C
  - G_1中各点的度仍然都是偶数
  - G_1不一定是连通图
  - 此时，G_1中必定存在度非零的结点v_i∈C，它与其他结点相邻



欧拉道路与回路

- 同样的方法，图G_1中，从v_i出发，在v_i所在连通支内构造简单回路C_1
- 显然，$C \cup C_1$仍然是G的一条简单回路，但包含的边数比C多。



欧拉道路与回路

- 继续以上构造方法，我们可以最终得到一条包含所有边的简单回路

$$C' = C \cup C_1 \cup \cdots \cup C_k$$

C'就是欧拉回路。充分性证毕！

证明的过程就是一个构造欧拉回路的过程

Tsinghua University

欧拉道路与回路

- 推论2.3.1 若无向连通图G中只有2个度为奇数的结点，则G存在欧拉道路

证明：

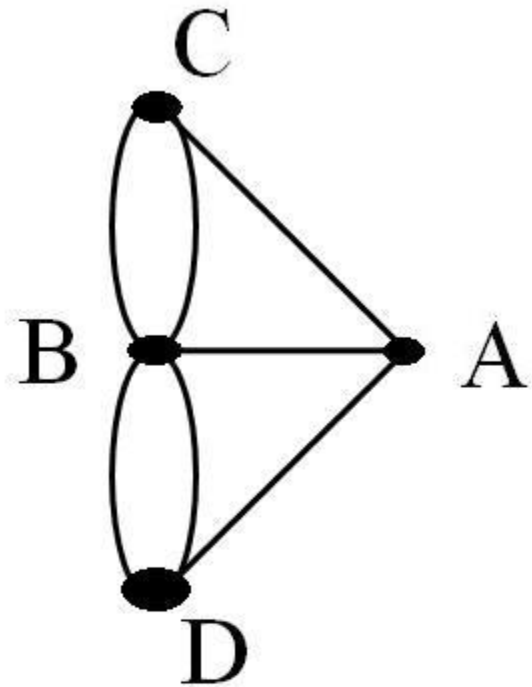
- （不妨）设v_i 和v_j是两个结点度为奇数的结点。
- 构造$G' = G + (v_i, v_j)$，则G'变为所有结点度均为偶数的图
- 因此G'中存在欧拉回路C
- 令$C' = C - (v_i, v_j)$，则C'正是经过了图G中所有边的一条欧拉道路。

证毕！

清華大學 Tsinghua University

欧拉道路与回路

- 七桥问题：



无解！

欧拉道路与回路

- 例：设连通图G=(V,E)有 k 个度为奇数的结点，证明E(G)可以划分成$k/2$条简单道路。

证明：

- 由性质1.1.2知，k一定为偶数。
- 在这k个结点间添加$k/2$条边，使每个结点都与其中一条边关联，得到G'。
- G'中存在欧拉回路C，这$k/2$条边都在C上且不相邻接
- 删掉这些边，就得到$k/2$条简单道路，它们包含了G的所有边。

证毕！

欧拉道路与回路

- 推论2.3.2 若有向连通图G中各结点的正、负度相等，则G存在有向欧拉回路

（课后练习）

主要内容

- 2.1 道路与回路
- 2.2 道路与回路的判定
- 2.3 欧拉道路与回路
- **2.4 哈密顿道路与回路**
- 2.5 旅行商问题
- 2.6 最短路径
- 2.7 关键路径
- 2.8 中国邮路问题

哈密顿道路与回路

- 十九世纪，英国数学家哈密顿(Willian Hamilton)给出了一个关于凸12面体的数学游戏：把12面体的20个顶点比做世界上20个城市，30条棱表示这些城市之间的交通线路。
- 问题：是否可以从任意一个城市出发，经过每个城市一次且只经过一次，最终返回出发地?
- 问题的实质是：一个连通图中，是否存在包含所有结点的初级回路(点一笔画问题)

哈密顿道路与回路

- 定义2.4.1 无向图G的一条过全部结点的初级回路(道路)称为G的**哈密顿回路(道路)**，简记为H回路(道路)
  - 欧拉回路的概念是简单回路
  - 哈密顿回路的概念是初级回路
  - 思考：什么样的图欧拉回路和哈密顿回路相同
  - H回路研究的是初级回路，因此对于一般图G，删掉重边和自环，不会影响H回路的存在性，因此，一般针对简单图研究H回路存在性问题

哈密顿道路与回路

- 定理2.4.1 如果简单图G中任意两结点v_i, v_j之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$ ，则G中存在哈密顿道路

证明：

(1). 证明G为连通图（反证法）

若G非连通，则至少存在两个连通支H_1, H_2，其结点数目分别为n_1, n_2，从中各任取一个结点v_i, v_j，则 $d(v_i)\leq n_1-1$，$d(v_j)\leq n_2-1$，

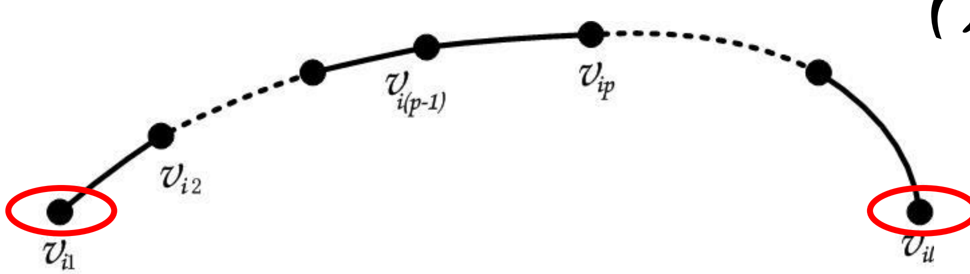
故 $d(v_i)+d(v_j)<n-1$

哈密顿道路与回路

(2)证明G存在H道路（构造法）：

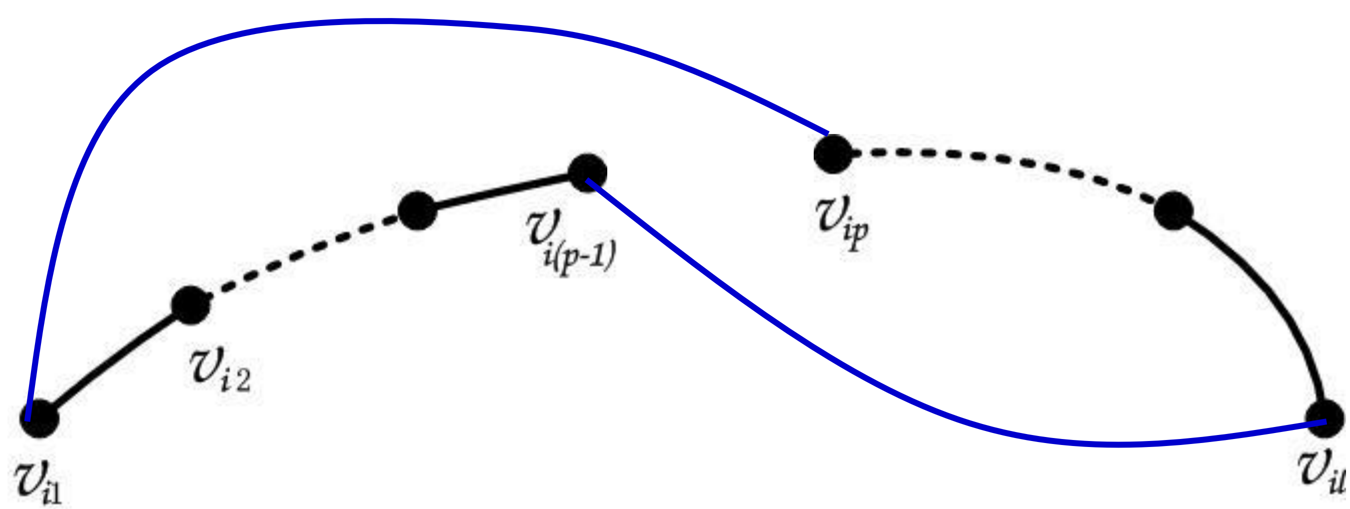
- 设$P=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{il})$是G中一条极长的初级道路
  - v_{i1},v_{il}的邻点都在P上
  - 否则可以继续延伸构造更长的初级道路
- 若$l=n$，P就是一条H道路
- 若$l<n$，则可证明G中一定存在经过结点$v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{il}$的初级回路C

（反证法）



哈密顿道路与回路

- 假设 $l < n$，且不存在经过结点 $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{il}$ 的初级回路。
  - P为极长道路，因此 v_{i1}, v_{il} 的邻点都在P上
  - 若边 $\left(v_{i1}, v_{ip}\right) \in E(G)$，一定没有 $\left(v_{il}, v_{i(p-1)}\right) \in E(G)$



哈密顿道路与回路

- 我们设$d(v_{i1}) = k$，则$d(v_{il}) \leq l - 1 - k$

- 因此，$d(v_{i1}) + d(v_{il}) \leq l - 1 < n - 1$

- 因此，前提假设不成立

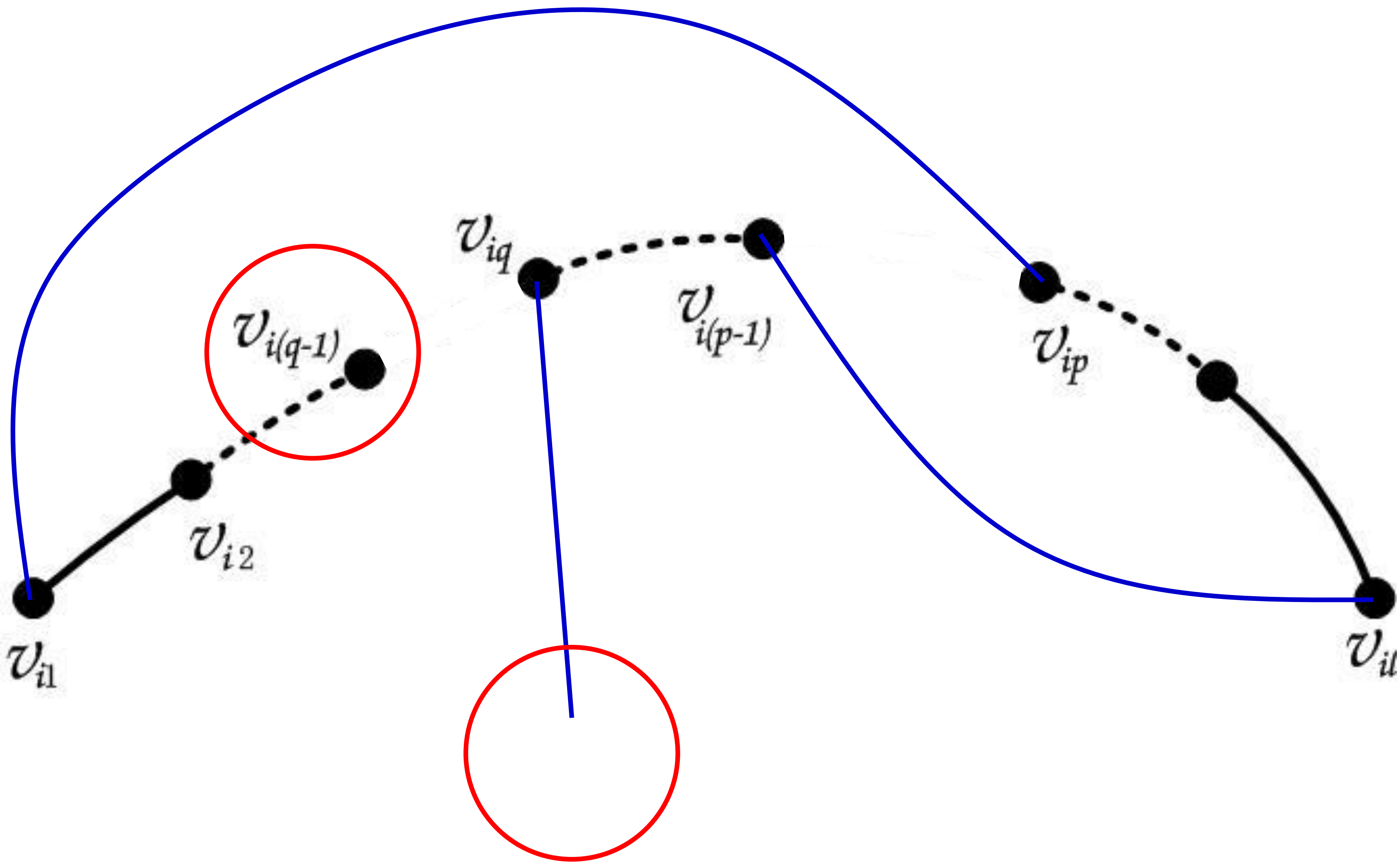
- 因此，G中一定存在经过结点$v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{il}$的初级回路

哈密顿道路与回路

(2)证明G存在H道路：

- 设$P=(v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{il})$是G中一条极长的初级道路，即$v_{i1},v_{il}$的邻点都在P上（否则可以继续延伸构造更长的初级道路）
- 若$l=n$，P就是一条H道路
- 若$l<n$，则可证明G中一定存在经过结点$v_{i1},v_{i2},\cdots,v_{il}$的初级回路C

思考：这条回路是什么样的？



v_{iq}
$v_{i(q-1)}$
$v_{i(p-1)}$
v_{ip}
v_{i2}
v_{i1}
v_{il}

哈密顿道路与回路

- 由于G连通，因此存在C之外的结点v_t与C中的某点v_{iq}相邻。
- 删掉$\left(v_{i(q-1)}, v_{iq}\right)$，则得到
- $P' = \left(v_{it}, v_{iq}, \cdots, v_{i(p-1)}, v_{il}, \cdots, v_{i(q-1)}\right)$ 是G中一条比P更长的初级道路
- 以P'的两个端点继续扩充，可以得到比P更长的极长初级道路。
- 重复上述过程，因为G为有穷图，因此最终一定可以得到一条包含G中全部结点的初级道路，即H道路。

证毕！

Tsinghua University

哈密顿道路与回路

- 证明回顾： $d(v_i)+d(v_j)\ge n-1 \Longrightarrow$ 存在H道路
  - 在前提条件下，图G一定是连通图
  - 构造一条极长道路P
  - 一定存在经过道路P的回路C
  - C之外还有相邻结点，加入，构造更长道路P'
  - 如此不断构造，最终可得到H道路

哈密顿道路与回路

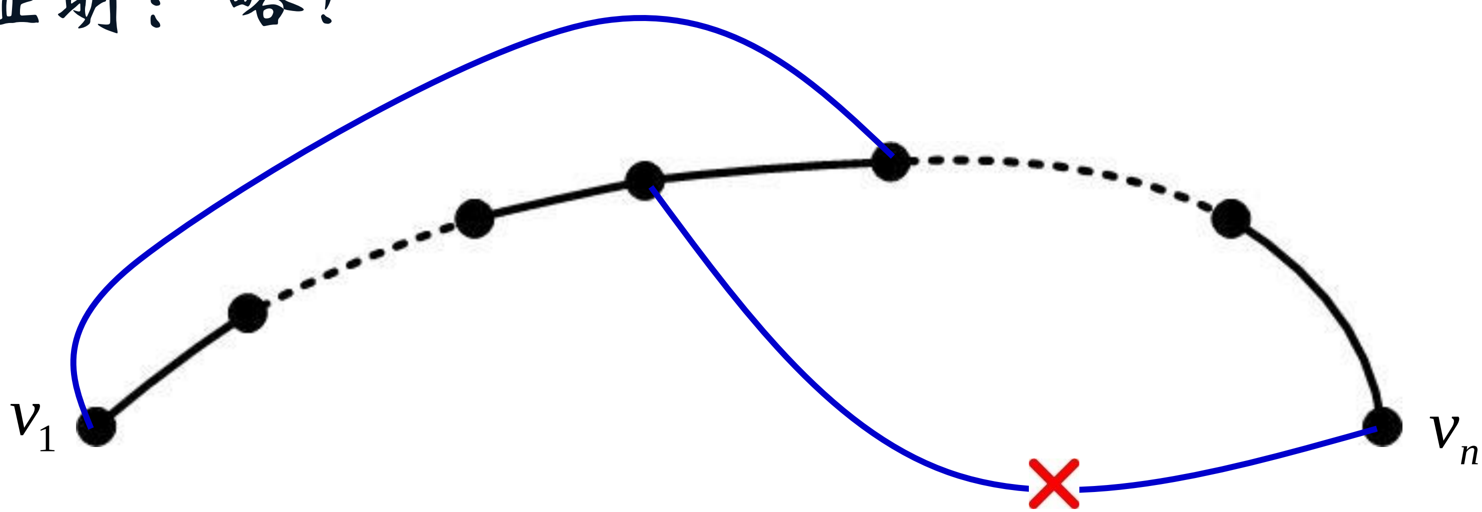
- 定理2.4.1 如果简单图G中任意两结点v_i, v_j之间恒有 $d(v_i)+d(v_j)\geq n-1$ ，则G中存在哈密顿道路

哈密顿道路与回路

- 引理2.4.0 若简单图G中存在H道路，但不存在H回路，不妨设其H道路的两端点为v_1和v_n，则

$$d(v_1)+d(v_n)\le n-1$$

证明：略！



哈密顿道路与回路

- 推论2.4.1 若简单图G的任意两结点v_i,v_j之间恒有$d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则G中存在哈密顿回路

证明：

- 由定理2.4.1，G有H道路。
- 不妨设其两端点为v_1和v_n
- 若G不存在H回路，据引理2.4.0，必然有

$$d(v_1)+d(v_n)\leq n-1<n$$

- 产生矛盾！

证毕！

清華大学 Tsinghua University

哈密顿道路与回路

- 推论2.4.2 若简单图G每个结点的度都大于等于n/2，则G有H回路

证明：

据推论2.4.1，结论显然。

Tsinghua University

哈密顿道路与回路

- 引理2.4.1 设G为简单图，v_i, v_j不相邻，且满足$d(v_i)+d(v_j)\geq n$。则G存在H回路的充要条件是$G+(v_i,v_j)$有H回路。

证明：

必要性：

G存在H回路 ⇨ $G+(v_i,v_j)$有H回路

显然。

哈密顿道路与回路

充分性：

G + (v_i,v_j)有H回路 $\Longrightarrow$ G存在H回路

– 假定G不存在H回路，则 $G+(v_i,v_j)$的H回路一定经过边(v_i,v_j)

– 删去(v_i,v_j)，即G中存在一条以v_i,v_j为端点的H道路，根据引理2.4.0，有

$$d(v_i)+d(v_j)\le n-1$$

产生矛盾。

证毕！

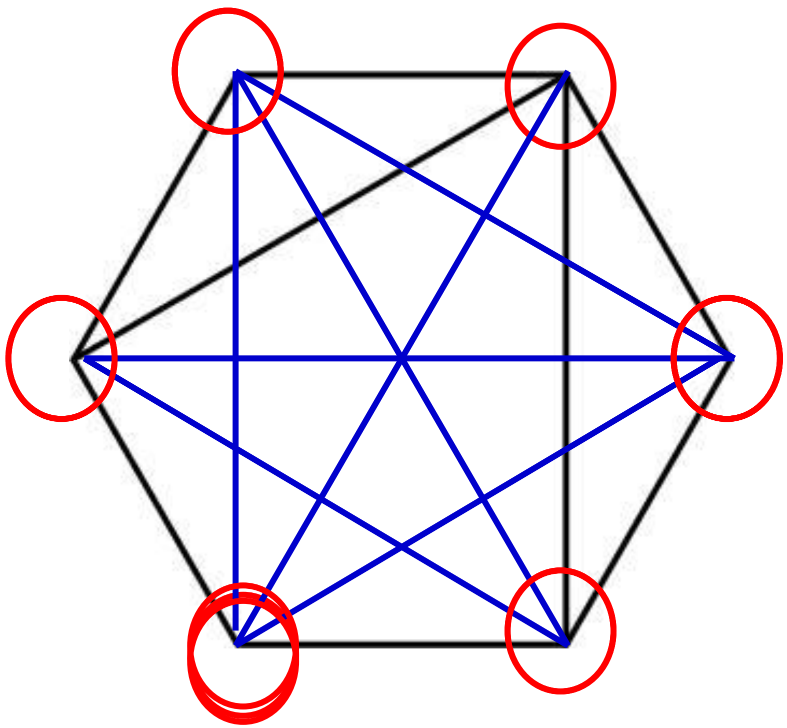
Tsinghua University

哈密顿道路与回路

- 引理2.4.1 设G为简单图，v_i, v_j不相邻，且满足$d(v_i)+d(v_j)\geq n$。则G存在H回路的充要条件是$G+(v_i,v_j)$有H回路。

- 定义2.4.2 若v_i和v_j是简单图G的不相邻结点，且满足$d(v_i)+d(v_j)\geq n$，则令$G'=G+(v_i,v_j)$，对G'重复上述过程，直至不再有这样的结点对为止。最终得到的图称为G的闭合图，记做C(G)。

哈密顿道路与回路



哈密顿道路与回路

- 引理2.4.3 简单图G的闭合图C(G)是唯一的

证明：

- 设$C_1(G)$和$C_2(G)$是G的两个闭合图
- 边集合 $L_1=\{e_1,e_{2,}\cdots e_r\}$ 和 $L_2=\{a_1,a_{2,}\cdots a_s\}$ 分别是$C_1(G)$和$C_2(G)$中新加入的边集合。
- 显然，如果$L_1=L_2$，则必然会有$C_1(G)=C_2(G)$。
- 不失一般性，设 $e_{i+1}=(u,v)\in L_1$ 是构造$C_1(G)$时第一条不属于L_2的边，亦即 $e_{i+1}\notin C_2(G)$

Tsinghua University

哈密顿道路与回路

- 令 $H = G \cup \{e_1, e_{2,} \cdots e_i\}$。此时H是$C_1(G)$同时也是$C_2(G)$的子图。
- 由于构造$C_1(G)$ 的过程中需要加入e_{i+1}，显然说明H中满足$d(u) + d(v) \geq n$，但依据假设，$(u, v) \notin C_2(G)$。这与$C_2(G)$是G的闭合图矛盾

证毕！

- **引理2.4.3 简单图G的闭合图C(G)是唯一的**

哈密顿道路与回路

- 定理2.4.2 简单图G存在哈密顿回路的充要条件是其闭合图存在哈密顿回路

证明：设$C(G)=G\cup L_1$，$L_1=\{e_1,e_2,\cdots e_t\}$

由引理2.4.1，G有H回路的充要条件是$G+e_1$有H回路；$G+e_1$有H回路的充要条件是

$G+e_1+e_2$有H回路；……

闭合图唯一，故得证！

哈密顿道路与回路

- 推论2.4.3 设G(n≥3)为简单图，若C(G)为完全图，则G有H回路。

哈密顿道路与回路

- 小结：
  - G存在H道路的充分条件定理
  - 定理的证明方法
  - 闭合图在判定H回路存在时的作用

作业

- 课后 1，5，6，10，12
- 选做：

  11

- 练习题：有向图如图所示：求其中 v_1 到 v_4 的长度为1，2，3，4的通路各是多少条？