复变函数引论学习资料

0. 基本概念

0.1. 格林公式

∂D 为一分段简单光滑闭合曲线，D 是 ∂D 围成的一个区域，且$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内连续可导，则

$$\oint_{\partial D} Pdx+Qdy=\iint_D (Q_x-P_y)dxdy$$

0.2. 换元公式

设 $\mathbf{r}=\gamma(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}$ ，$t\in[0,1]$ 为一分段光滑曲线，则

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\cdot dt$$

0.3. 复数的定义

复数域：

$$\mathbb{C}=\{(x+iy):x,y\in\mathbb{R},i=\sqrt{-1}\}$$

复数运算：

$$\begin{gathered}
z:=x+iy\\
\Re(z):=x,\operatorname{Im}(z):=y,\\
z_1\pm z_2:=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)\\
\bar{z}:=x-iy,|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\\
z_1z_2:=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)\\
\Rightarrow |z|^2=z\bar{z}\\
\frac{z_1}{z_2}:=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}
\end{gathered}$$

复平面：

Argrand diagram $\leftrightarrow$ Cartesian Coordinates.

x 轴 $\leftrightarrow$ 实轴 ， y 轴 $\leftrightarrow$ 虚轴

极式表示、模、复角：

$$\begin{gathered}
z=re^{i\theta},r:=|z|,\theta=arg(z):=\operatorname{atan}2(y,x)\in[0,2\pi)\\
e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\\
\Rightarrow\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^n,n\in\mathbb{Z}.
\end{gathered}$$

1. 复数、复变函数

1.1. 直线

复平面上的直线，都可以写成

$$\bar{\alpha} z+\alpha \bar{z}+\beta=0$$

的形式。

在平面坐标系，直线方程都可以表示为以下形式：

$$A x+B y+C=0$$

期中 $A, B, C \in \mathbb{R}$ 且不全为零。

设

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2 i}$$

那么就有

$$\frac{A-i B}{2} z+\frac{A+i B}{2} \bar{z}+C=0$$

令

$$\alpha=\frac{A+i B}{2}, \beta=C$$

即可。

1.2. 圆

复平面上的圆，都可以写成

$$z \bar{z}+\bar{\alpha} z+\alpha \bar{z}+\beta=0$$

的形式。

$$x^{2}+y^{2}=|z|^{2}=z \bar{z}$$

其余同 1.1.

1.3.

$$\begin{aligned}
\left|z_{1}+z_{2}\right|^{2}+\left|z_{1}-z_{2}\right|^{2} &=\left(z_{1}+z_{2}\right) \overline{\left(z_{1}+z_{2}\right)}+\left(z_{1}-z_{2}\right) \overline{\left(z_{1}-z_{2}\right)} \\
&=\left(z_{1}+z_{2}\right)\left(\bar{z_{1}}+\bar{z_{2}}\right)+\left(z_{1}-z_{2}\right)\left(\bar{z_{1}}-\bar{z_{2}}\right) \\
&=2\left(z_{1} \bar{z_{1}}+z_{2} \bar{z_{2}}\right)=2\left(\left|z_{1}\right|^{2}+\left|z_{2}\right|^{2}\right)
\end{aligned}$$

几何意义：对于一个平行四边形，其边长的平方和等于对角线长度的平方和。

1.4. ***求极值

对于给定的 $r \in \mathbb{R}^{+}, \alpha \in \mathbb{C}$, 分别求

$$\max _{|z| \leq r}\left|z^{n}+\alpha\right|, \min _{|z| \leq r}\left|z^{n}+\alpha\right| .$$

解：

1.4.1. 最大值：

设

$$I=\max _{|z| \leq r}\left|z^{n}+\alpha\right|=\left|z^{\prime}\right|$$

1.4.1.1. $\alpha=0$ 时，显然有

$$\left|z^{n}+\alpha\right|=\left|z^{n}\right| \leq r^{n}$$

于是

$$I=r^{n}, z=r e^{i \theta}, \theta \in[0,2 \pi), z^{\prime}=r^{n} e^{i n \theta}$$

1.4.1.2. $\alpha \neq 0$ 时，

$$|z^n+\alpha| \leq |z^n|+|\alpha| \leq r^n+|\alpha|$$

这时 z' 一定满足两个不等式都取等号。

对于左侧的小于等于号，等号成立当且仅当 $\exists\lambda \in \mathbb{R}^+$， s.t. $z^n=\lambda\alpha$ 。

对于右侧的小于等于号，等号成立当且仅当 $|z|=r$ 。

这代表，$\lambda=|z^n|/|\alpha|=r^n/|\alpha|$。

于是又有 $z^n=r^n/|\alpha|\cdot\alpha=r^n e^{i\arg\alpha}$ 。

$$\Rightarrow z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+2k\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1$$
$$z'=(r^n+|\alpha|)e^{i\arg\alpha}, I=r^n+|\alpha|$$

综上，

$$\max_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=\begin{cases} r^n, & \alpha=0(z=re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi)) \\ r^n+|\alpha|, & \alpha\neq 0(z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+2k\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1)\end{cases}$$

1.4.2. 最小值

设

$$J=\min_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=|z'|$$

1.4.2.1. $\alpha=0$ 时，显然有

$$|z^n+\alpha|=|z^n|\geq 0$$

于是

$$J=0, z'=0$$

1.4.2.2. $0<|\alpha|\leq r^n$ 时，

令 $z^n=-\alpha$，$z=(-\alpha)^{1/n}$，

$$z=z_k=|\alpha|^{1/n}e^{\frac{i(\arg\alpha+(2k+1)\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1$$

显然有 $z'=J=0.$

1.4.2.3. $|\alpha|>r^n$ 时，

$$|z^n+\alpha|\geq|\alpha|-|z^n|\geq|\alpha|-r^n$$

两个等号在 $z^n=-r^n e^{i\arg\alpha}$ 时成立。

$$\Rightarrow z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+(2k+1)\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1$$
$$z'=(|\alpha|-r^n)e^{i\arg\alpha}, J=|\alpha|-r^n$$

综上，

$$\min_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=\begin{cases} 0, & \alpha=0(z=0) \\ 0, & 0<|\alpha|<r^n(z=z_k=|\alpha|^{1/n}e^{\frac{i(\arg\alpha+(2k+1)\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1) \\ |\alpha|-r^n, & |\alpha|>r^n(z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+(2k+1)\pi)}{n}}, k=0,1,\cdots,n-1)\end{cases}$$

1.5. 证明为一正三角形：

给定 $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$, 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$，$z_1+z_2+z_3=0$， 证明 $\Delta z_1z_2z_3$ 是正三角形。

证明如下：

1.5.1. 证明一：

由于 $z_1=-(z_2+z_3)$， 且 $r=|z_1|=|z_2|=|z_3|$，

因此

$$r=|z_1|=|-(z_2+z_3)|=|z_2|+|z_3|,$$
$$|z_2-z_3|^2=2(|z_2|^2+|z_3|^2)-|z_2+z_3|^2=4r^2-r^2=3r^2\Rightarrow|z_2-z_3|=\sqrt{3}r,$$

同理， $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = \sqrt{3}r$。 ■

1.5.2. 证明二：

设 $g(z) = \prod_{k=1}^{3}(z - z_k) = z^3 + az^2 + bz + c$ ，

因为 $|z_k| = r, k = 1, 2, 3$，$b = z_1 z_2 z_3(1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3) = (-c)(\frac{\bar{z_1}+\bar{z_2}+\bar{z_3}}{r^2}) = \frac{\bar{a}c}{r^2}$，

且 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$，所以

$g(z) = z^3 + c$。求其零点，则

$$z^3 = -c = ce^{i\pi} = |c|e^{i(\pi+\theta_0)} = |c|e^{i((2k-1)\pi+\theta_0)}, \theta_0 = \arg c,$$
$$z = z_k = |c|^{1/3}e^{i((2k-1)\pi+\theta_0)/3}, k = 1, 2, 3$$
$$\Rightarrow |z_k| = |c|^{1/3}, z_{k+1}/z_k = e^{2\pi i/3}, \arg(z_2) - \arg(z_1) = 2\pi/3$$

扩展：

对于证明为正四边形，除了 $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, 还要求 $z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = 0$。

如果只有第一个条件，就只能证明其为矩形（$g(z) = z^4 + bz^2 + d$）。

设 $g(z) = \prod_{k=1}^{4}(z - z_k) = z^4 + az^3 + bz_2 + cz + d,$

由韦达定理， $b = d\bar{b}/r^4, c = d\bar{a}/r^2.$

质心与外接圆圆心重合，当且仅当 $a = 0$。

这时对于 g， $z_3 = -z_1, z_4 = -z_2$。

第二个条件 $\Leftrightarrow b = 0$。这时 $g(z) = z^4 + d$， 因此 $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + iz_2)(z_1 - iz_2) = 0$， $\arg z_2 - \arg z_1 = \pm\pi/2$ 。

对于$2n$ 边形，需要 n 个条件使得其为正 $2n$ 边形；对于$2n-1$ 边形，需要 $n-1$ 个条件使得其为正 $2n-1$ 边形。

分圆多项式：

$$f(z) = (z - z_0)^n + d$$

■

1.6.

若 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 z_0 连续，且 $f(z_0) \neq 0$，就一定存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall z : |z - z_0| < \delta$， 都有 $f(z) \neq 0$ 。

证明如下：

由于 $f(z_0) \neq 0$，可以取 $\epsilon = |f(z_0)|/2 > 0$。

而且

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$
$$\Rightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, s.t.$$
$$\forall z : |z - z_0| < \delta \to |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$
$$\Rightarrow |f(z_0)|/2 > |f(z) - f(z_0)| > ||f(z)| - |f(z_0)|| \Rightarrow 0 < |f(z_0)|/2 < |f(z)| < 3|f(z_0)|/2$$

■

2. 复变函数的导数

2.1. 证明柯西-黎曼方程。

对于复变函数 $f: D \to \mathbb{C}, z_0 \in D, f$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 可导，

当且仅当 其实部 $u(x,y)$, 虚部 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 可微，且 $u_x = v_y, u_y = -v_x$。

证明如下：

设 $f = u + iv, u, v \in C^1$，$f' = A + iB$。

由全微分的的定义，

$$\begin{gathered} df = f'(z)dz \\ df = u_x dx + iv_x dx + u_y dy + iv_y dy = (u_x dx + u_y dy) + i(v_x dx + v_y dy) \\ f'(z)dz = (A + iB)(dx + idy) = (Adx - Bdy) + i(Ady + Bdx) \\ \Rightarrow \begin{cases} A = u_x = v_y \\ B = v_x = -u_y \end{cases} \end{gathered}$$

■

推论：若 $u, v \in C^n$，则

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + i \frac{\partial^n v}{\partial x^n}$$

因此，对于某个解析的复变函数，实部为常数 ⇔ 虚部为常数。

另外， $f(z) = \ln|f(z)| + i \arg f(z)$, 因此对于模为常数的解析函数，其复角也是常数。

2.2. 多项式的和形式和积形式

设 $z_k = re^{i(\theta + 2(k-1)\pi/n}, f(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k), g(z) = z^n + (-1)^n \prod_{k=1}^n z_k$

这里 g 是首一多项式，且 $f(z_k) = g(z_k) = 0, k = 1, 2, \cdots, n$ 。

设 $h(z) = f(z) - g(z)$, 那么 $\deg(h) \le n - 1$ ，且 $h(z_k) = 0, k = 1, 2, \cdots, n$

（n次多项式有超过 n 个零点，那个多项式是恒等式）

$\Rightarrow h(z) \equiv 0 \Leftrightarrow f(z) \equiv g(z), \forall z : z \in \mathbb{C}$ 。

2.3. 共轭调和函数

先定义拉普拉斯算子 (Laplacian):

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

调和函数f： $\Delta f = 0$。

由柯西-黎曼方程，

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \\ \Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \end{gathered}$$

解析函数的实部，一定满足拉普拉斯方程，是调和函数。

同理 $\Delta v = 0$， 于是解析函数的实部和虚部组成一对调和函数，为共轭调和函数。

2.4.

如果 $f(z)$ 在 D 内解析，且不是常数，则$f(D)$ 是一个二维区域。

证明：

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-v_xu_y=u_x^2+v_x^2=|f'(z)|^2>0$$
$$\iint_{D'}dudv=\iint_D Jdxdy=\iint_D|f'(z)|^2dxdy>0$$

■

***2.5.

对于任意的$A,B\in\mathbb{R}$，

$$\cos(z)=\cos(x+iy)=A+iB$$

有无穷多解。

证明：

$$\cos(x+iy)=\cos(x)\cos(iy)-\sin(x)\sin(iy)=\cos(x)\frac{e^y+e^{-y}}{2}-i\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$
$$A=\Re(cos(z))=\cos(x)\frac{e^y+e^{-y}}{2},B=\mathrm{Im}(\cos(z))=-\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}$$

这等价于证明 上述方程组有解。

2.5.1. $B=0$ 时，

$$\sin(x)\frac{e^y-e^{-y}}{2}=0\Leftrightarrow\sin(x)=0\vee\frac{e^y-e^{-y}}{2}=0$$

2.5.1.1. $|A|\le 1$:

取 $y=0\Rightarrow\cos x=A,x=x_k=\pm\arccos A+2k\pi,k\in\mathbb{Z}.$

2.5.1.2. $|A|>1$:

取 $\sin x=0,\cos x=\mathrm{sgn}(A).$

$$\Rightarrow|A|=\frac{e^y+e^{-y}}{2}>1$$

令

$$\cosh(y):=\frac{e^y+e^{-y}}{2},y>0$$
$$\cosh'(y)=\frac{e^y-e^{-y}}{2}>0,\cosh(0)=1,\lim_{y\to+\infty}\cosh(y)\to+\infty$$
$$\Rightarrow\exists!y_A>0,\cosh(y_A)=|A|>1$$

且cosh 是偶函数，因此有 $x=\pm\arccos\mathrm{sgn}(A)+2k\pi,y=\pm y_A,k\in\mathbb{Z},y_A>0.$

2.5.2. $B\neq 0$ 时，

$$\frac{4A^2}{(e^y+e^{-y})^2}+\frac{4B^2}{(e^y-e^{-y})^2}=1$$

记左式 为 $g(y)$， 由于 g 时偶函数，只讨论 $y>0$。 显然有

$$\lim_{y\to0^+}g(y)\to+\infty,\lim_{y\to+\infty}g(y)=0$$

而且 g 在 $(0,+\infty)$ 连续，有连续函数的介值定理， $\exists y'>0$, s.t. $g(\pm y')=1.$

而且 $\cos(x)=2A/(e^{y'}+e^{-y'}),\sin(x)=2B/(e^{y'}-e^{-y'})$， $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ ，

因此$(\cos(x),\sin(x))=(2A/(e^{y'}+e^{-y'}),2B/(e^{y'}-e^{-y'}))$ 一定对应单位圆上的某一个点，即一定存在 x' 满足上述要求。

如果 $A>0,\ x'=\arctan\frac{B(e^{y'}+e^{-y'})}{A(e^{y'}-e^{-y'})}$ ，

如果 $A<0,x'=\pi+\arctan\frac{B(e^{y'}+e^{-y'})}{A(e^{y'}-e^{-y'})}$ ，

如果 $A=0$, $\sin(x)=2B/(e^{y'}-e^{-y'})=\pm1,\cos(x)=0,$ (正负取决于 y 的取值) ，$x'=\frac{(4k\pm1)\pi}{2}$ (正负号与前方相同)。

而 $x=x'+2k\pi$ 都是解，对于 $y=-y'$ 也可以求出相应的x' ，也对应无穷多个 x 。

■

3. 复积分

3.1. 柯西-古萨基本定理。

对于一个在单连通区域 D 内解析的函数 $f: D \to \mathbb{C}$，对 D 的分段光滑的闭曲线边界 ∂D ,都有

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0$$

3.1.1. 分段光滑

$C: z(t) = x(t) + iy(t)$ 是一条光滑曲线，当且仅当

$x, y \in C^1(a, b)$ 且 $z'(t) \neq 0, \forall t: t \in (a, b).$

C 是一条分段光滑曲线，当且仅当其是由有限段光滑曲线拼接而成的。

3.1.2. 证明：

设 $f = u + iv$，

则由 0.1.，

$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} f(z)dz &= \oint_{\partial D} (u+iv)(dx+idy) = \oint_{\partial D} (udx - vdy) + i\oint_{\partial D} (udy + vdx) \\ &= \iint_D (-v_x - u_y)dxdy + i\iint_D (u_x - v_y)dxdy\end{aligned}$$

由2.1.，$v_x = -u_y, u_x = v_y,$ 于是 $\oint_{\partial D} f(z)dz = 0.$ ■

3.2.

$$I_n = \oint_{|z-z_0|=r>0} \frac{dz}{(z-z_0)^n}, n \in \mathbb{Z}$$

设 $z = z_0 + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi], dz = ire^{i\theta}d\theta,$

$$I_n = \oint_{|z-z_0|=r>0} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{i\theta}d\theta}{r^n e^{in\theta}} = \frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

3.3.

$$I_n = \oint_{|z|=1} \frac{1-\cos 4z^5}{z^n}dz = \oint_{|z|=1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k(4z^5)^{2k}}{z^n(2k)!}dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k 4^{2k}}{(2k)!}\oint_{|z|=1} z^{10k-n}dz$$

当 $10k - n = -1 \Leftrightarrow n = 10k + 1$，

$$k = (n-1)/10, I_n = 2\pi i \cdot \frac{(-1)^{(n-1)/10}4^{(n-1)/5}}{((n-1)/5)!}$$

否则 $I_n = 0$。综上，

$$I_n = \begin{cases} \frac{2\pi i(-1)^{(n-1)/10}4^{(n-1)/5}}{((n-1)/5)!}, & n > 1 \wedge n \equiv 1 \pmod{10} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.4.

$$I_{n,m} = \oint_{|z|=1} \frac{\sin z^m}{z^n}dz = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\oint_{|z|=1} z^{(2k+1)m-n}dz = \begin{cases} \frac{2\pi i(-1)^{(n-m-1)/(2m)}}{((n-1)/m)!}, & n \equiv m+1 \pmod{2m} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.5. 复合闭路定理

设 $C, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 是简单闭曲线。$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 完全包含在 C 内，$C_1, \cdots C_n$ 互不相交，互不包含。

若 f 在 C 内，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 外的区域内解析，在 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 上连续，则

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

3.5.1. 证明：

$n=1$时，将 C 与 C_1 以一段直线 l 连接。那么，$\Gamma_C = C\cup l^+\cup C_1^-\cup l^-$ 为一分段光滑闭曲线，且 f 在 Γ_C 围成的区域内解析，因此

$$0=\oint_{\Gamma_C} f(z)dz=(\oint_C+\int_{l^+}+\int_{l^-}+\oint_{C_1^-})f(z)dz \Rightarrow \oint_C f(z)dz=\oint_{C_1} f(z)dz$$

而原命题为 $n=1$ 的推广。 ■

3.5.2. 推论：闭路变形原理

简单闭曲线C' 经简单闭曲线C连续变化而成。只要C'内不解析的点，与C 内不解析的点完全一致，

$$\oint_{C'} f(z)dz=\oint_C f(z)dz$$

3.5.3. 例

g 在 $|z|\le 4$ 处处可导，$f(z)=\frac{2}{z-1}+\frac{1}{z-2}+\frac{4}{z-3}+g(z)$，则

$$\oint_{|z|=4} f(z)dz=\oint_{|z|=4}\frac{2}{z-1}dz+\oint_{|z|=4}\frac{1}{z-2}dz+\oint_{|z|=4}\frac{4}{z-3}dz+\oint_{|z|=4} g(z)dz=2(2\pi i)+2\pi i+4(2\pi i)+0=14\pi i$$

3.6. *柯西高阶导数公式

设 z_0 在简单光滑闭曲线 C 内， f 在 D 内解析，

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

3.6.1. 证明：

（*杨大伯用泰勒级数证明，但复变解析函数的泰勒级数本身是用上述公式推导的，因此有循环论证之嫌，以下给出笔者的证明）

$n=0$ 时，

设 $g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z\neq z_0)$ 和 $g(z_0)=f'(z_0)$, 那么由闭路变形原理和 g 在 $D-\{z_0\}$ 内解析，在 D 内连续，就有

$$\oint_C g(z)dz=\oint_{|z-z_0|=r<\delta(\epsilon)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\le\oint_{|z-z_0|=r<\delta(\epsilon)}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz|<\frac{\epsilon}{r}\oint_{|z-z_0|=r<\delta(\epsilon)}|dz|=2\pi\epsilon$$

$\forall\epsilon\in\mathbb{R}^+$ 成立，令 $\epsilon\to 0$,则 $\oint_C g(z)dz\to 0$

$$\Rightarrow \oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}dz=\oint_C\frac{f(z_0)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$$

□

$n=k$ 时假设结论成立，则对于 $n=k+1$，

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(z_0)=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f^{(k)}(z_0+\Delta z)-f^{(k)}(z_0)}{\Delta z}&=\lim_{\Delta z\to0}\frac{k!}{2\pi i\Delta z}\oint_C\left(\frac{1}{(z-z_0-\Delta z)^{k+1}}-\frac{1}{(z-z_0)^{k+1}}\right)f(z)dz\\&=\lim_{\Delta z\to0}\frac{k!}{2\pi i\Delta z}\oint_C\frac{(z-z_0)^{k+1}-(z-z_0-\Delta z)^{k+1}}{[(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)]^{k+1}}f(z)dz\\&=\lim_{\Delta z\to0}\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{(z-z_0)^k+(z-z_0)^{k-1}(z-z_0-\Delta z)+\cdots+(z-z_0-\Delta z)^k}{[(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)]^{k+1}}f(z)dz\\&=\frac{k!}{2\pi i}\oint_C\frac{(k+1)(z-z_0)^k}{(z-z_0)^{2k+2}}f(z)dz=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+2}}dz\end{aligned}$$

■

3.6.2. 均值公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r>0}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

3.7. 极值原理

3.7.1. 最大模原理

设D 是一个有界区域， ∂D 是它的边界，若 f 在 D 内可导， ∂D 上连续，则有

$$\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\max_{z\in\partial D}|f(z)|$$

证明：

设 $z_0\in D$, s.t.

$$f(z_0)=\max_{z\in\bar{D}}|f(z)|$$

取 $r>0$,s.t. $\delta(z_0,r)\subset D$,

由均值公式， $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$ 。 两边取模，

$$|f(z_0)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0+re^{i\theta})|d\theta\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z_0)|d\theta=|f(z_0)|$$

因此上式的每一个小于等于都应该相等，这就代表 $|f(z)|$ 在 z_0 的邻域内恒为 $|f(z_0)|$，于是 f 在 z_0 的邻域内为常数。

如果 f 不是常函数，就必然有矛盾。加上f 在 ∂D 内连续，f 的最大值必然在边界上。 ■

3.7.2. 最小模原理

设 $g(z)=1/f(z)$ ，且 f 的像不包含原点，那么 $g'(z)=-f'(z)/[f(z)]^2$ ，g在 D 内解析，在∂D 上连续。

由最大模原理，

$$\max_{z\in\bar{D}}|g(z)|=\max_{z\in\partial D}|g(z)|\Leftrightarrow\frac{1}{\min_{z\in\bar{D}}|f(z)|}=\frac{1}{\min_{z\in\partial D}|f(z)|}$$
$$\Leftrightarrow\min_{z\in\bar{D}}|f(z)|=\min_{z\in\partial D}|f(z)|$$

3.7.3. 最大值原理

若 u 是 D 内的调和函数，D 是有界区域，则有

$$\max_{(x,y)\in\bar{D}}u(x,y)=\max_{(x,y)\in\partial D}u(x,y)$$

证明：

令 $g(z)=\exp(f(z))=\exp(u+iv), g'(z)=f'(z)\cdot\exp(f(z)), e^u=|e^{u+iv}|=|g(z)|$

$$\exp\left(\max_{(x,y)\in\bar{D}}u\right)=\max_{(x,y)\in\bar{D}}e^u=\max_{z\in\bar{D}}|g(z)|=\max_{z\in\partial D}|g(z)|=\max_{z\in\partial D}e^u=\exp\left(\max_{(x,y)\in\partial D}u\right)$$

■

3.7.4. 最小值原理

$h(z)=\exp(-f(z)),\ |h(z)|=e^{-u}$

$$\exp\left(-\min_{(x,y)\in\bar{D}}u\right)=\max_{(x,y)\in\bar{D}}e^{-u}=\max_{z\in\bar{D}}|h(z)|=\max_{z\in\partial D}|h(z)|=\max_{z\in\partial D}e^{-u}=\exp\left(-\min_{(x,y)\in\partial D}u\right)$$

■

3.8. ***柯西积分不等式

设f 在 $|z-z_0|<r$ 内解析，$|z-z_0|=r$ 连续， $M(r)=\max_{|z-z_0|\le r}|f(z)|$, 则

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$$

3.8.1. 证明：

对柯西高阶导数公式两侧取模，

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}\right| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{|f(z)||dz|}{|z-z_0|^{n+1}}$$
$$\le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{M(r)|dz|}{r^{n+1}} = \frac{n!M(r)}{r^n}$$

■

3.8.2.

f 处处可导，且 $\exists M>0, n\in\mathbb{Z}^+$， s.t. $\forall z: z\in\mathbb{C}$ ，都有

$$|f(z)| \le M\sum_{k=0}^{n}|z|^k$$

证明 f 是一个次数不大于 n 的多项式。

证明如下：

令 $M(r) = M\sum_{k=0}^{n} r^k$，立即有

$$|f(z)| \le M(r) = M\sum_{k=0}^{n} r^k$$

那么，由 3.8.1.,

$$|f^{(n+j)}(0)| \le \frac{(n+j)!M(r)}{r^{n+j}} = M(n+j)!\sum_{k=0}^{n} r^{k-n-j}, j=1,2,3,\cdots$$

令 $r\to+\infty$， 则 $|f^{(n+j)}(0)|\to 0 \Rightarrow f^{(n+j)}(0)=0$

因此，对 f 在 $z=0$ 处泰勒展开，

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \equiv \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k,$$

是一个次数不大于 n 的多项式。 ■

3.9. Liouville 定理

有界整函数是常数。

证明：

设 f 是一个有界整函数， M 满足 $\forall z: z\in\mathbb{C}, |f(z)|\le M$， 则对 3.8.1. 的 $r\to+\infty$,

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!M}{r^n} \to 0 (n\in\mathbb{Z}^+) \Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k \equiv f(0)$$

■

3.9.1. Little Picard's theorem

$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}-\{w_1,w_2\}$ 是整函数，则 f 是常数。 $(g(z)=f(z)-w_1)(f(z)-w_2))$

3.9.2. 代数学基本定理

设

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k, n\ge 1, c_k\in\mathbb{C}, c_n\ne 0$$

则

$$P_n(z) = c_n\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)$$

或 $P_n(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个零点。

证明：

$$\lim_{z\to\infty}|P_n(z)| = \lim_{z\to\infty}|z^n|\lim_{z\to\infty}|c_n + c_{n-1}/z + \cdots + c_0/z^n| = \lim_{z\to\infty}|z^n||c_n| \to +\infty$$

引理：

如果 f 处处连续，且 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$ ，则 f 有界。

证明：

由定义知，$\forall \epsilon>0, \exists M>0$ s.t. $\forall z: |z|>M, |f(z)|<\epsilon$ 。

另一方面， f 处处连续， 因此由最大模原理，知 f 在 $|z|\leq M$ 内一定存在最大模 M_1, 使得 $|f(z)|\leq M_1$, 所以 $|f(z)|\leq \max\{\epsilon, M_1\}.$

设 $f(z)=1/P_n(z), f'(z)=-P_n(z)/[P_n(z)]^2$ ，如果 P_n 没有零点，则由 1.6.及引理知f 是有界的整函数，由 3.9. 知 f 一定为常数⇒ P_n 为常数，与$P_n(z)$ 是多项式矛盾，因此一定存在 $z_1\in\mathbb{C}$ 使得 $P_n(z_1)=0$ ，所以 $P_n(z)=(z-z_1)P_{n-1}(z)$ 。

■

4. 级数

$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}2^{k-1}\frac{B_k}{(2k)!}\pi^{2k}$$

$$\zeta(3) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+iy\right) = 0,$$

y has infinite solutions --> Riemann conjecture.

($\zeta(4)$ is relevant to Wien's displacement law)

4.1. 幂级数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$$

称为复级数。

$f_k(z) = a_k$ ，常数项级数。

$f_k(z) = c_k(z-z_0)^k$，幂级数(power series)。

$f_k(z) = c_k r^k e^{ik\theta}$ ，傅里叶级数。

$f_k(z) = \frac{1}{n^z}$ ，

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ is prime}}\frac{1}{1-p^{-s}}$$

4.2. ***收敛半径，Abel 定理。

4.2.1. Abel 定理。

对于一个幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$，

当$f(z_1)$ 收敛，则 $\forall z : |z| < |z_1|$ ，都有 $f(z)$ 绝对收敛，即 $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n z^n| < +\infty$ 。

当 $f(z_2)$ 发散($f(z_2)$ 不存在或 $|f(z_2)| = +\infty$)， 则 $\forall z : |z| > |z_2|$ ， $f(z)$ 发散。

4.2.2. 收敛半径：

如果 $\exists R \in \mathbb{R}^+$, 使得 $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < R$ 时绝对收敛，$|z| > R$ 时发散，则R 是 $f(z)$ 的收敛半径。

4.2.3. 例子

4.3.2.1. 收敛圆上处处发散：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1, R = 1$$

证明： 幂级数收敛的必要条件，是它的每一项在 $n \to +\infty$ 时，都应该趋向于零。但是，当 $|z| = 1$， $|z^n| = 1 \nrightarrow 0$，而且当 $|z| < 1$ 时

$$f(z) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to+\infty}\frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

因此 $R = 1$。

4.3.2.2. 收敛圆上处处(绝对)收敛：

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^2}, |z| < 1, R = 1$$

这是因为

$$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty$$

4.3.2.3. 收敛圆上条件收敛：

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n},|z|<1,R=1$$

除了 $z=1$ 外，其他地方都收敛：

$$f(re^{i\theta})=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^ne^{in\theta}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n}+i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n}$$

另外，

$$f(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n}=\int_0^z\sum_{n=0}^{+\infty}(z')^ndz'=\int_0^z\frac{dz'}{1-z'}=-\ln(1-z)$$

因此，

$$f(re^{i\theta})=-\ln\left(1-re^{i\theta}\right)$$

$r\to1^-,\theta\in[0,2\pi)$ 时，$1-re^{i\theta}\to1-e^{i\theta},$

$$1-e^{i\theta}=1-\cos\theta-i\sin\theta=2\sin^2(\theta/2)-2i\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)=2\sin(\theta/2)(\sin(\theta/2)+i\cos(\theta/2))$$

因此 $\Re(1-re^{i\theta})\geq0$，

$$f(z)=-\ln(1-z)=-\ln|2\sin(\theta/2)|+i(\pi-\theta)/2$$

所以

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\cos n\theta}{n}=-\ln\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right|,\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n\sin n\theta}{n}=\frac{\pi-\theta}{2},\theta\in[0,2\pi)$$

立即得到， $\theta=0$ 时， $\sin(\theta/2)=0$，级数发散，$\theta\neq0$ 时级数收敛。

4.3. 条件收敛

$f(z_0)$ 条件收敛，则收敛半径 $R=|z_0|$。

证明：

由 Abel 定理，$\forall z:z\in\mathbb{C}\wedge|z|<|z_0|,f(z)$ 绝对收敛，于是 $R\geq|z_0|$。

另一方面，如果 $R>|z_0|$， 那么 z_0 在收敛圆内，再由 Abel 定理， $f(z_0)$ 绝对收敛，与题设矛盾，因此 $R=|z_0|$。

■

4.4. 其他计算收敛半径的公式：

下面都假设极限存在。

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{1}{R},\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R},$$

如果存在m , s.t. m 是f 的奇点的最小模，则 $R=m$。

4.5. ***

$c_n=a_n+ib_n$，$a_n,b_n\in\mathbb{R}$, $n\geq0$。

设 $R>0$ (或$R=+\infty$) 是 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ 的收敛半径，

设 $R_1>0$ (或$R_1=+\infty$) 是 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ 的收敛半径，

设 $R_2>0$ (或$R_2=+\infty$) 是 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$ 的收敛半径。 则 $R=\min\{R_1,R_2\}$。

证明：

不失一般性，设 $R_1\leq R_2$（否则可以求$-if(z)$ 的收敛半径）。

引理：

若$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n$ 的收敛半径为 r，$\sum_{n=0}^{+\infty}c'_nz^n$ 的收敛半径为 r'，且 $\forall n:n\in\mathbb{N}$ 都有 $|c'_n|\leq|c_n|$，则$r'\geq r$。

证明：

$\forall z:z\in\mathbb{C},|z|<r$,

$$|c_n'| \leq |c_n| \Rightarrow |c_n' z^n| \leq |c_n z^n| \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n' z^n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| < +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n' z^n$ 绝对收敛，因此 $r' \geq r$。☐

回到原题，由定义显然有

$|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq |a_n|$ ，因此 $R_1 \geq R$。

另一方面，如果 $R < R_1 (\leq R_2)$, 可以设 $x_0 = (R + R_1)/2$，

由于

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

令 $z = x_0$，恒等式的左端发散，但右端两个级数都收敛，矛盾，因此只能有 $R = R_1$。

■

4.6. 分片函数

$|z| > 1$时， $\frac{1}{|z|^2} < 1$ ， $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{z^2(1+z^{-2})} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}$

因此，

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{2n}, & |z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}, & |z| > 1 \\ \frac{1}{1+z^2}, & |z| = 1, z \neq \pm i \end{cases}$$

投影在实轴即有

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, & |x| < 1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2(n+1)}}, & |x| > 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \end{cases}$$

4.7. 洛朗级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

叫 z 的L-级数。

$c_{-n} = 0, n \geq 1$ 时，$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 是 T-级数。

对于f 的某奇点 z_k，

$$\oint_{|z-z_k|=\epsilon} f(z) dz = \oint \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(k)} z^n dz = 2\pi i c_{-1}^{(k)}$$

因此，如果 m 是 C 围成的区域内 f 的奇点的个数，

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} c_{-1}^{(k)}$$

以下给出求洛朗级数的例子。

4.7.1.

求 $f(z) = \frac{1}{z-a}$ 在 $z_0 = b$ 的 L-级数， $b \neq a$。

解：

$$f(z) = \frac{1}{z-a} = \frac{1}{(z-b)-(a-b)} = \frac{1}{(b-a)\left(1 - \frac{z-b}{a-b}\right)} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-b}{a-b}\right)^n, c_n = -\frac{1}{(a-b)^n},$$

$$\left|\frac{z-b}{a-b}\right| < 1 \Rightarrow |z-b| < |a-b| = R$$

4.7.2. 收敛内径、外径

$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^n}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^n}{z^n},|b|<|z|<|a|$

4.7.3. 洛朗级数的系数

设 $C:|z-z_0|=\epsilon>0$。对 f 于 z_0 处，展开其洛朗级数。

$$\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}=\oint_C\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{c_m dz}{(z-z_0)^{n+1-m}}=2\pi i c_n\Rightarrow c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}},n\in\mathbb{Z}$$

与泰勒级数的区别：泰勒级数要求 f n 阶可导，而洛朗级数不要求。如果 f n 阶可导， $c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ，就退化为泰勒级数。

4.7.4.

$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$ 在 $0<|z|<1,1<|z|<2$ 展开其洛朗级数。

$0<|z|<1$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n,c_n=\begin{cases}1-\frac{1}{2^{n+1}}, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

$1<|z|<2$:

$$f(z)=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n,$$
$$c_n=\begin{cases}-\frac{1}{2^{n+1}}, & n\geq 0\\ -1, & n<0\end{cases}$$

***4.7.5.

求

$$J=\oint_{|z|=r>1}\frac{z^3e^{1/z}}{1+z}dz$$

解：

令 $z=1/t,dz=-dt/t^2$ · $z=re^{i\theta}\Rightarrow t=r^{-1}e^{-i\theta},\theta\in[0,2\pi]$

$$J=-\oint_{|t|=1/r<1}-\frac{e^t dt}{t^4(1+t)}$$

而

$$\frac{e^t}{1+t}=\left(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+\cdots\right)(1-t+t^2-t^3+\cdots)$$

t^3 的系数为 $-1+1-1/2+1/6=-1/3$。

$$J=\oint_{|t|=1/r}\frac{e^t dt}{t^4(1+t)}=\oint_{|t|=1/r}-\frac{dt}{3t}=-\frac{2\pi i}{3}$$

4.7.6.

$$J_n=\oint_{|z|=r>1}\frac{dz}{1+z^n},n\in\mathbb{Z}^+$$

*建议留待学习第五章时计算。

5. 留数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n,\oint_{C:|z|=r}f(z)dz=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\oint_C z^ndz=2\pi ic_{-1}$$

5.1. 定义

5.1.1. 孤立奇点、非孤立奇点

奇点：不解析的点

孤立奇点：去心邻域内解析的奇点

非孤立奇点："不是孤立的"奇点，分为聚点（奇点的极限序列），自然边界（非孤立点集）。

下面只讨论孤立奇点，因为非孤立奇点不是解析函数的讨论对象。

对于一个孤立奇点，按洛朗展开的性质又分为三种：

极点：洛朗级数存在有限个负幂项。

按照上述对洛朗级数的定义，如果 $\exists N\in\mathbb{N},\forall n:n\in\mathbb{N},n>N$ 都有 $c_{-n}=0$，那么称那个孤立奇点为 N **级极点**。

可去奇点：洛朗级数不存在负幂项，**"零级极点"**。

本性奇点：洛朗级数的负幂项有无穷多个，**"∞ 级极点"**。

对于无穷远点 ($z=\infty$)，将极点的 c_{-n} 换成 c_n 即可。

5.1.2. 例子：

例1：

$f(z)=|z|^2=z\bar{z},\Rightarrow f'(0)=0$，但其他点都不可导，因此复平面上所有的点都是 f 的奇点，是自然边界。

例2：

$f(z)=\frac{1}{\sin(z^{-1})}$，$z_k=\frac{1}{k\pi}$。如果 $z_0=0$，则 $z_k\to z_0,k\to+\infty$，所以 $z_0=0$ 是 f 的非孤立奇点，是一个聚点。

例3：

$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nz^{2(n-1)}}{(2n-1)!}\to 1,z\to 0$，因此 $z_0=0$ 是 f 的可去奇点。

可去奇点的判别法：1. 按定义 2. $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 存在且有限。

例4：

$f(z)=\frac{\sin z}{z^2}$， $z_0=0$ 是 f 的一阶极点。

例5：

$f(z)=\exp(1/z)$，$z_0=0$ 是 f 的本性奇点。

5.2. 解析函数零点的孤立性定理

对于解析函数 f，如果 $f(z)\not\equiv 0$，且存在$z_0\in\mathbb{C}$， $f(z_0)=0$，则存在$n\in\mathbb{Z}^+$, 使 $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$， 这里 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq 0$。

5.2.1. 证明：

$f(z_0)=0\Rightarrow$

$$f(z)=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=(z-z_0)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^k:=(z-z_0)^n\varphi(z)$$

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{(z-z_0)^n},\varphi'(z)=\frac{f'(z)(z-z_0)^n-nf(z)(z-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{2n}}$$

因此 z_0 是 $\varphi(z)$ 的一个孤立奇点。

而且按定义，

$$\lim_{z\to z_0}\varphi(z)=\lim_{z\to z_0}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(n+k)}(z_0)}{(n+k)!}(z-z_0)^k=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

存在且有限，因此 z_0 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点，所以 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析。

5.2.2. 洛必达法则

Recall: 单值实变函数的洛必达法则，用柯西中值定理证明。

证明：

设$f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$，$g(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$ ，$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{(z-z_0)^n\varphi(z)}{(z-z_0)^m\psi(z)}=(z-z_0)^{n-m}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$。

$$\frac{f'(z)}{g'(z)}=\frac{n(z-z_0)^{n-1}\varphi(z)+(z-z_0)^n\varphi'(z)}{m(z-z_0)^{m-1}\psi(z)+(z-z_0)^m\psi'(z)}=\frac{n(z-z_0)^{n-m}\varphi(z)+(z-z_0)^{n-m+1}\varphi'(z)}{m\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}$$

如果 $\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}$ 存在，$(n=m)$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f'(z)}{g'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{n(z-z_0)^{n-m}\varphi(z)+(z-z_0)^{n-m+1}\varphi'(z)}{m\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{n\varphi(z)+(z-z_0)\varphi'(z)}{m\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)},$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{n-m}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}$$

$n>m$ 时显然为零，$n<m$ 时，极限为无穷。

■

5.3. 解析函数的唯一性定理

f,g 在 D 内处处可导，而且存在 $z_0\in D, z_k\in D, \lim_{k\to+\infty}z_k=z_0$ 且 $f(z_k)=g(z_k)$，$\forall k: k\in\mathbb{N}^+$， 则 $\forall z: z\in D,$ $f(z)\equiv g(z)$。

证明：

令 $h(z)=f(z)-g(z)\Rightarrow h(z_k)=(f-g)(z_k)=0\Rightarrow \lim_{k\to+\infty}h(z_k)=h(z_0)=0\Rightarrow z_0$ 是 $h(z)$ 的一个孤立奇点。

由 5.2.1. 和 1.6. 知道 $h(z)$ 在 z_0 的去心邻域内都不等于零，但由于 $\lim_{k\to+\infty}z_k=z_0$ ，这就代表 $h(z)$ 在 z_0 的去心邻域内有零点，因此 $h(z)\equiv 0\Rightarrow f(z)\equiv g(z)$.

■

5.3.1. 三角恒等式。

已知 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$, 证明 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$。

证明：设 $f(z)=e^{iz}, g(z)=\cos z+i\sin z$。 显然 f,g 在复平面上都可导，而且在实轴上都相等，由解析函数的唯一性定理即证。

推论：所有的三角恒等式，都可以推广至复平面，所有不等式作废。

5.3.2. 解析函数没有零因子。

零因子：

$f(z)\not\equiv 0, g(z)\not\equiv 0$， 但 $f(z)g(z)\equiv 0$，则称 f,g 互为零因子。

证明解析函数没有零因子：即若 f,g 在 D 内处处可导， 且 $f(z)g(z)\equiv 0$，$\forall z\in D$， 则 $f(z)\equiv 0$ 或 $g(z)\equiv 0$。

证明如下：

设f,g 在 D 内解析， $f(z)\not\equiv 0, g(z)\not\equiv 0$ 。

这就一定存在 $z_0\in D$, s.t. $f(z_0)\neq 0$。

f 在 z_0 解析，由 1.6. 知 f 在 z_0 的邻域内非零，但 $f(z)g(z)$ 在 z_0 的邻域内恒为零 $\Rightarrow g(z)$ 在z_0 的邻域内恒为零。由解析函数的唯一性，$g(z)\equiv 0, z\in D$，这与假设矛盾，证毕！

■

5.4. 留数定理

设 C 包围在复平面上除了有限个点外解析的函数 f 的所有不解析的点。那么，

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^n c_{-1}^{(k)}=2\pi i\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

5.4.1. *留数的计算

$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ ， P,Q 在 z_0 解析且 $P(z_0)\neq 0, Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$ ，则$c_{-1}=\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 。

证明：（杨大伯：略）

笔者的证明如下：

显然 z_0 不是 P 的零点，是 Q 的一阶零点。

设 $Q(z)=(z-z_0)\psi(z)$，$\psi(z)$ 在z_0解析且 $\psi(z_0)\neq 0$ 。 因此

$$C:|z-z_0|=\delta>0,$$

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C\frac{P(z)dz}{(z-z_0)\psi(z)}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(P(z)/\psi(z))^{(n)}|_{z_0}}{n!}\oint_C(z-z_0)^{n-1}dz=2\pi i\frac{P(z_0)}{\psi(z_0)}$$

另外， $Q'(z)=\psi(z)+(z-z_0)\psi'(z), Q'(z_0)=\psi(z_0)$，因此 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$ 。

（5.4.2.，5.4.3. 是笔者认为比较重要，自己加上的内容）

5.4.2. m阶极点的留数

$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}$ ，z_0 是f 的m 阶极点，那么 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{\psi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ 。

证明：

$$(z-z_0)^m f(z)=\psi(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

$$C:|z-z_0|=\delta>0$$

$$2\pi i\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\oint_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\psi^{(n)}(z_0)}{n!}\oint_C(z-z_0)^{n-m}dz$$

$n-m=-1\Rightarrow n=m-1$ 是唯一一个非零项，因此

$$2\pi i\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=2\pi i\frac{\psi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}\Rightarrow\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{\psi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

推论：

z_0 是 f 的一阶极点，那么 $\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\psi(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

5.4.3. 无穷远点的留数

设 C 包含了 f 在复平面上所有奇点。

回想黎曼球面，把 C 投影在黎曼球面上，那么 C 是一个绕 无穷远点，且 C 内没有其他奇点的反向闭曲线，因此可以定义

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

立即就有

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}\left[f(z),z_k\right]=0$$

设 $C:|z|=R$ 。显然 $|z_k|<R$ 。

设 $z=1/t$，那么 $|t|=1/R, |t_k|=1/|z_k|>1/R$， 于是 $|t|=1/R$ 内都没有 $f(1/t)$ 的极点，$t=0$ 除外。

$$\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=-\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1/R}f\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-dt}{t^2}=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right),0\right]$$

***5.5. (4.7.6.)

$$J_n=\oint_{|z|=r>1}\frac{dz}{1+z^n}, n\in\mathbb{Z}^+$$

解一：

$$J_n=-2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{1}{1+z^n},\infty\right]=2\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{t^{n-2}}{1+t^n},0\right]$$

$n=1$ 时，

$$J_1=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{t(1+t)},0\right]=2\pi i\text{Res}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t},0\right]=2\pi i$$

$n\geq 2$ 时零不是 J_n 的奇点，因此有

$$J_n=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}$$

解二：

$1+z^n=0\Rightarrow z_k^n=-1$

$$J_n=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}\left[\frac{1}{1+z^n},z_k\right]=\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k^{n-1}}=-\frac{2\pi i}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\begin{cases}2\pi i, & n=1\\ 0, & n\geq 2\end{cases}$$

***5.6.

$$I_{a,b}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta},a>|b|\geq 0.$$

解：

设 $z=e^{i\theta}$，$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$。

When $b=0$，

$$I_{a,0}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}\left(=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)$$

When $b\neq 0$，

$$C:|z|=1,$$
$$I_{a,b}=\oint_C\frac{dz}{iz(a+b(z+z^{-1})/2)}=\frac{2}{i}\oint_C\frac{dz}{bz^2+2az+b}$$
$$bz^2+2az+b=0\Rightarrow z=\frac{-2a\pm\sqrt{4a^2-4b^2}}{2b}=-\frac{a}{b}\pm\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\in\mathbb{R},$$
$$I_{a,b}=4\pi\text{Res}\left[\frac{1}{bz^2+2az+b},\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]=\frac{4\pi}{2bz+2a}\bigg|_{z=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}=\frac{2\pi}{-a+\sqrt{a^2-b^2}+a}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

综上，

$$I_{a,b}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

***5.7.

$$I_{A,B}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{2d\theta}{A^2(1+\cos 2\theta)+B^2(1-\cos 2\theta)}=\int_0^{2\pi}\frac{d(2\theta)}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\theta}$$
$$=\int_0^{4\pi}\frac{d\phi}{(A^2+B^2)+(A^2-B^2)\cos 2\phi}=\frac{4\pi}{\sqrt{(A^2+B^2)^2-(A^2-B^2)^2}}=\frac{4\pi}{\sqrt{4A^2B^2}}=\frac{2\pi}{AB}$$

***5.8.

$$I_n=\oint_{|z|=1}\frac{1-\cos 5z^6}{z^n}dz=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}5^{2k}}{(2k)!}\oint_{|z|=1}z^{12k-n}dz$$

非零项k 一定满足 $k=(n-1)/12, n\geq 13$ 且 $n\equiv 1 \pmod{12}$

$$I_n=\begin{cases}2\pi i\frac{(-1)^{(n-13)/12}5^{(n-1)/6}}{((n-1)/6)!}, & n\geq 13\wedge n\equiv 1\pmod{12}\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

***5.9.

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

被积函数是偶函数，因此

$$I_n = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}} = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}}$$

作 $C_R = \{z : z = Re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi\}, \Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$.

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}}\right| \le \int_{C_R}\frac{|dz|}{|1+z^{2n}|} \le \int_{C_R}\frac{|dz|}{|z^{2n}|-1} = \frac{\pi R}{R^{2n}-1} = \frac{\pi}{R^{2n-1}-R^{-1}} \to 0, R\to+\infty$$

因此

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}} = \int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^{2n}} + \int_{C_R}\frac{dz}{1+z^{2n}} \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^{2n}} = 2I_n, R\to+\infty$$

而第一个半圆的路径积分的被积函数的奇点，是 $1+z^{2n}=0$ 在上半平面的零点，共有 n 个。所以，

$$I_n = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2}\oint_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^{2n}} = \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}\left[\frac{1}{1+z^{2n}}, z_k\right] = \pi i\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2nz_k^{2n-1}} = -\frac{\pi i}{2n}\sum_{k=1}^{n}z_k$$

$z_k^{2n} = -1 \Rightarrow z_k = e^{(2k-1)\pi i/(2n)} = e^{-\pi i/(2n)}(e^{\pi i/n})^k$

$$I_n = -\frac{\pi i}{2n}e^{-\pi i/(2n)}\sum_{k=1}^{n}(e^{\pi i/n})^k = -\frac{\pi i}{2n}e^{-\pi i/(2n)}\frac{e^{\pi i/n}(1+1)}{1-e^{\pi i/n}} = \frac{\pi}{2n}\cdot\frac{2ie^{\pi i/(2n)}}{e^{\pi i/n}-1} = \frac{\pi}{2n}\cdot\left(\frac{e^{\pi i/(2n)}-e^{-\pi i/(2n)}}{2i}\right)^{-1} = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}.$$

推广：

$$I_{r,n} = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{r^{2n}+x^{2n}} = \frac{r}{r^{2n}}\int_0^{+\infty}\frac{d(x/r)}{1+(x/r)^{2n}} = \frac{1}{r^{2n-1}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

***5.10.

$$I_{a,b,k} = \int_0^{+\infty}\frac{x^3\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

解：

被积函数是偶函数，因此

$$I_{a,b,k} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

记

$$J_{a,b,k} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\cos kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

而 $\frac{x^3\cos kx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 是奇函数，积分值为零，因此 $J_{a,b,k} = 2iI_{a,b,k}$。

另一方面，作 $C_R = \{z : z = Re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi\}, \Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$.

$$(!!) : \frac{2}{\pi}x \le \sin x, x \in [0, \pi/2]$$

$$\left|\int_{C_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right| \le \int_{C_R}\frac{R^3e^{-ky}|dz|}{|z^2+a^2||z^2+b^2|} < \int_{C_R}\frac{R^3e^{-kR\sin\theta}Rd\theta}{R^4}$$

$$= \int_0^{\pi}e^{-kR\sin\theta}d\theta = 2\int_0^{\pi/2}e^{-kR\sin\theta}d\theta < 2\int_0^{\pi/2}e^{-2kR\theta/\pi}d\theta = \frac{2\pi(1-e^{-\frac{kR}{2}})}{kR} \to 0, R\to+\infty$$

因此

$$\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = \int_{-R}^{R}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} + \int_{C_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} \to \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3e^{ikx}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = J_{a,b,k}, R\to+\infty$$

而在上半平面，ai, bi 是被积函数仅有的两个奇点。与此同时，

$$\frac{z^3e^{ikz}}{[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]'} = \frac{z^3e^{ikz}}{2z(2z^2+a^2+b^2)} = \frac{z^2e^{ikz}}{2(2z^2+a^2+b^2)}$$

所以

$$J_{a,b,k} = \lim_{R\to+\infty}\oint_{\Gamma_R}\frac{z^3e^{ikz}dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)} = 2\pi i\left(\operatorname{Res}\left[\frac{z^3e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, ai\right] + \operatorname{Res}\left[\frac{z^3e^{ikz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}, bi\right]\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{-a^2e^{-ak}}{2(-a^2+b^2)} + \frac{-b^2e^{-bk}}{2(a^2-b^2)}\right) = \frac{\pi i(a^2e^{-ak}-b^2e^{-bk})}{a^2-b^2}, I_{a,b,k} = \frac{J_{a,b,k}}{2i} = \frac{\pi(a^2e^{-ak}-b^2e^{-bk})}{2(a^2-b^2)}$$

推广：

$$I_{a,b,k}=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin kx dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{\pi(e^{-ak}-e^{-bk})}{2(a^2-b^2)}$$

6. 共形映射

6.0. 定义

（笔者上课的学期由于疫情，杨大伯就跳过了定义了，6.0. 是笔者自己加上的补充内容）

设复平面上有一光滑曲线 $C: z = z(t), t \in \mathbb{R}$。 下面讨论 $z'(t)$ 的几何意义、

$\arg z'(t_0)$ 是 C 在 $z_0 = z(t_0)$ 处的切线于正实轴的有向夹角。

解析函数的导数--几何意义：

$w = f(z)$ 在 D 内解析。

设 $z_0 \in D, f'(z_0) \neq 0$ 。

如果存在光滑曲线 $C: z = z(t), t \in [\alpha, \beta], z_0 \in C,$

$w = f(z) = (f \circ z)(t), w'(z_0) = (f' \circ z)(t_0) \cdot z'(t_0).$

$\Rightarrow \arg(w'(z_0)) - \arg(z'(t_0)) = \arg((f' \circ z)(t_0)) = \arg(f'(z_0))$。

因此f 在z_0的转动角大小与 C 的形状、方向无关。

那么，对于两条曲线 $C_1, C_2,$

$$\arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0) = \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$$

因此对于两条光滑曲线，其交点及其邻域在D内，则两条曲线在原像切线的夹角，与像的切线的夹角保持一致，是为解析函数的**保角性**。

对于光滑曲线C 上的一点 z_0，设$z \in C$， 那么 $f(z_0), f(z) \in f(C)$。

令 $z - z_0 = re^{i\phi}, f(z) - f(z_0) = \rho e^{i\psi}$，$z \to z_0$，可以得到$z_0$ 关于 C 的切向量经过映射后的伸缩率：

$$\frac{\rho}{r} = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

同样与曲线无关。

因此解析函数在定义域内某个点的这样的伸缩率与转动角，不因该点依附在哪条曲线而有所不同。

可以定义**共形映射**为：

在复平面上，如果 f 在 z_0 的邻域内是单射函数，且在 z_0 具有保角性，和伸缩率的不变性，则 f 在 z_0 共形。f 在 D 内每个点都共形，则 f 是 D 内的共形映射。

定理：

对于任何在z_0共形的函数，都存在 c, $(f \circ z)'(t_0) = c \cdot z'(t_0)$。

显然解析函数都是共形映射，伸缩率为 $|f'(z_0)|$， 转动角为 $\arg f'(z_0)$。

定理：

分式线性映射具有保圆性。

LFT maps lines and circles into lines and circles.

1. $w = 1/z$ ($c \neq 0$)

Let $z = x + iy$, then

$$w = \frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = u + iv$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{Dx}{x^2 + y^2} + \frac{Ey}{x^2 + y^2} + \frac{F}{x^2 + y^2} = 1 + Du - Ev + F(u^2 + v^2) = 0$$

2. $w = (az + b)/d$ ($c = 0$) (translation+rotation+scaling) must preserve lines and circles. ■

初等函数映射：

幂级数：角形域$\longrightarrow$ 角形域

指数函数：带型域 $\longrightarrow$ 角形域

儒可夫斯基函数(Joukowsky) $w = z + 1/z$。（圆盘$\longrightarrow$ 飞机机翼）

6.1. 分式线性映射

分子、分母的次数不超过一，总的次数不超过一的复映射，是为分式线性映射。

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\Rightarrow\frac{dw}{dz}=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2},ad-bc\neq 0$$

***6.1.1.

单位圆盘$|z|<1$到单位圆盘$|w|<1$的分式线性映射，都具有下列形式：

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z},\theta\in[0,2\pi),|z_1|<1.$$

这是因为要把圆盘内某一个点 z_1，映到原点，它的反演点就要映到无穷远点了。

证明不变式

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2}=\frac{|dw|}{1-|w|^2}$$

证明如下：

证明原命题等价于证明

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2},$$

而

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|=|e^{i\theta}|\left|\frac{(1-\bar{z_1}z)+(z-z_1)\bar{z_1}}{(1-\bar{z_1}z)^2}\right|=\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}$$

于是只需要证明

$$\frac{1-|w|^2}{1-|z|^2}=\frac{1-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}$$

而

$$\begin{aligned}1-|w|^2=1-w\bar{w}=1-\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z}\cdot\overline{\frac{z-z_1}{1-\bar{z_1}z}}=1-\frac{(z-z_1)(\bar{z}-\bar{z_1})}{|1-\bar{z_1}z|^2}=1-\frac{z\bar{z}-z\bar{z_1}-z_1\bar{z}+z_1\bar{z_1}}{|1-\bar{z_1}z|^2}\\=\frac{1-z_1\bar{z}-\bar{z_1}z+|z_1z|^2-|z|^2+z\bar{z_1}+z_1\bar{z}-|z_1|^2}{|1-\bar{z_1}z|^2}=\frac{(1-|z|^2)(1-|z_1|^2)}{|1-\bar{z_1}z|^2}\end{aligned}$$

■

给出圆盘 $|z-z_0|\leq r$ 到 $|w-w_0|\leq R$ 的线性映射，其中 $z_1\to w_0$。

对单位圆盘作置换 $z'=(z-z_0)/r,w'=(w-w_0)/R.$

$$\frac{w-w_0}{R}=e^{i\theta}\frac{\frac{z-z_0}{r}-\frac{z_1-z_0}{r}}{1-\frac{\bar{z_1}-\bar{z_0}}{r}\cdot\frac{z-z_0}{r}}=re^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(\bar{z_1}-\bar{z_0})(z-z_0)}\Rightarrow w=w_0+rRe^{i\theta}\frac{z-z_1}{r^2-(\bar{z_1}-\bar{z_0})(z-z_0)},$$
$$\theta\in[0,2\pi),|z_1-z_0|<r$$

准不变式：

$$\frac{|d(\frac{z-z_0}{r})|}{1-|\frac{z-z_0}{r}|^2}=\frac{|d(\frac{w-w_0}{R})|}{1-|\frac{w-w_0}{R}|^2}\Leftrightarrow\frac{r|dz|}{r^2-|z-z_0|^2}=\frac{R|dw|}{R^2-|w-w_0|^2}$$

6.1.2. 上半平面到单位圆盘的分式线性映射：

$$w=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{z-\bar{z_1}},\mathrm{Im}(z_1)>0,\theta\in[0,2\pi)$$

最简形式：$w=\frac{z-i}{z+i}$.

*6.1.3. 上半平面到上半平面的分式线性映射

$$a,b,c,d\in\mathbb{R},w=\frac{az+b}{cz+d}$$

是上半平面到上半平面的分式线性映射，当且仅当 $ad-bc>0$。

证明：

令 $z=x+iy,w=u+iv$，

$$w=\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}=\frac{(ax+b)+iay}{(cx+d)+icy}=\frac{[(ax+b)+i(ay)][(cx+d)-icy]}{(cx+d)^2+(cy)^2}$$
$$=\frac{((ax+b)(cx+d)+acy^2)+i(ay(cx+d)-cy(ax+b))}{(cx+d)^2+(cy)^2},$$
$$v=\frac{y(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy)^2},$$
$$vy=\frac{y^2(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy)^2}\geq 0\Leftrightarrow ad-bc>0$$

■

*****6.1.4.**

求单值解析映射 $f:D_1\to D_2$。

$D_1=\{z:|z-A|>A,|z-B|<B\},D_2:|w|<1$。

解：

1. 把原像映到一竖长条(原点映到无穷远点)，$z=2A$ 映到原点：

$$z_1=\frac{z-2A}{z}$$

2. 把竖长条旋转 $\pi/2$ ，变成一横长条：

$$z_2=iz_1$$

3. 把横长条拉伸，把宽度由 $\frac{B-A}{B}$ 调整为 π。

$$z_3=\frac{\pi B}{B-A}z_2$$

4. 把横长条映到整个上半平面：

$$z_4=e^{z_3}$$

5. 把上半平面映到单位圆：

$$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}$$

综上，

$$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}=\frac{e^{z_3}-i}{e^{z_3}+i}=\frac{e^{\frac{\pi B}{B-A}z_2}-i}{e^{\frac{\pi B}{B-A}z_2}+i}=\frac{e^{\frac{i\pi B}{B-A}z_1}-i}{e^{\frac{i\pi B}{B-A}z_1}+i}=\frac{e^{\frac{i\pi B(z-2A)}{(B-A)z}}-i}{e^{\frac{i\pi B(z-2A)}{(B-A)z}}+i}$$

6.2. 黎曼定理

任意的在复平面内部，且不等于复平面的单连通域与单位圆盘同胚。

证明：略（笔者水平暂未能独自写证明）。