大学物理B（1） HW4

4.4，4.6，4.8，4.13，4.17，4.18，4.24，4.25，4.26

4.4，

已知：

求：运行功率。其是否等于单位时间内落砂获得的动能？

解：

落砂冲量 $I = F\,dt = dm\cdot v - dm\cdot 0$

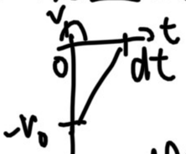
$\Rightarrow F = (dm/dt)\cdot v$，

而功率 $P = Fv = \frac{dm}{dt}v^2 = 50\times 2.25 = 113\,W$.

单位时间内，落砂获得的动能：

$\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{dt} = \frac{1}{2}P$，其小于运行功率。

在落砂刚附在传送带上时，把传送带视为静止，则落砂在传送带的初速度 $v_0=-v$，速度受摩擦力影响提升至零；



$dx = -\frac{1}{2}v_0\,dt$

单位时间内，摩擦力做功 $\frac{dA}{dt} = \frac{d(Fx)}{dt} = v\frac{dm}{dt}\cdot\left(-\frac{1}{2}v_0\right) = -\frac{1}{2}\frac{dm}{dt}v_0^2$，

转为内能。内能与落砂动能之和为运行所做的功。

4.6. 已知:

求: 子弹、木块动能变化.

子弹和木块间摩擦力对子弹和木块所做的功。

解: 由动量守恒, $mv=(m+M)v'$, $\Rightarrow v'=\frac{m}{m+M}v$,

子弹动能变化 $\Delta E_{kz}=\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{m}{m+M}\right)^2-1\right)v^2$.

木块动能变化 $\Delta E_{kw}=\frac{1}{2}Mv'^2=\frac{1}{2}\frac{m^2M}{(m+M)^2}v^2$ 及

同时可设摩擦力为f, 则

$$\begin{cases} f(s_1+s')=-\Delta E_{kz} \\ f's_1=\Delta E_{kw} \end{cases}$$ 为摩擦力所做的功。

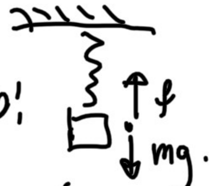
证明: 系统总机械能增量=一对摩擦力之一给s'做的功。

证: 总机械能增量

$$f=f' \Rightarrow fs'=-\frac{1}{2}m\left[1-\left(\frac{m}{m+M}\right)^2\right]v^2+\frac{1}{2}M\frac{m^2}{(m+M)^2}v^2$$

$$=-\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}MV^2.$$ 故.

4.8. 已知:



把坐标系零点重设在平衡位置.

证明在位置 y 时，弹性势能+重力势能 $=\frac{1}{2}ky^2$，

证明：平衡时，$0=m\ddot{y}=mg-ky'$，y'是端初位平衡位置与端物后平衡位置之距。

于是 $y'=\frac{mg}{k}$.

在 y 时，重力势能 E_p mgy，

弹性势能 $E_r=\frac{1}{2}k(y'-y)^2-\frac{1}{2}ky'^2$

$$=-ky'y+\frac{1}{2}ky^2$$

$$=-mgy+\frac{1}{2}ky^2.$$

故 $E_r+E_p=-mgy+\frac{1}{2}ky^2+mgy=\frac{1}{2}ky^2$ 得.

4.13. 已知:

求：1). 离开槽底端时，物体和槽的速度。

2). $A\to B$，物体对槽做的功.

3). 到B时对槽的压力。

解：

1). 机械能、动量守恒. $\longrightarrow \oplus$.

$$\begin{cases} mgR = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} M V_M^2 \\ 0 = m V_m - M V_M. \end{cases}$$

所以 $V_M = \frac{m}{M} v_m$.

$$mgR = \frac{1}{2} m V_m^2 + \frac{1}{2} M \cdot \frac{m^2}{M^2} V_m^2,$$

$$2gR = \left(1 + \frac{m}{M}\right) V_m^2,$$

$$V_m = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}} = \sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} \ \#, \quad V_M = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} = m\sqrt{\frac{2gR}{M(M+m)}} \ \#.$$

2). A_{AB}

$$= \frac{1}{2} M V_M^2 = \frac{1}{2} M \cdot \frac{m^2 \cdot 2gR}{M(m+M)} = \frac{m^2 gR}{m+M} \ \#.$$

3). 到B时,

$$N' - mg = ma = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R}\left(\sqrt{\frac{2MgR}{M+m}} + m\sqrt{\frac{2gR}{M(m+M)}}\right)^2.$$

$$N' = mg + \frac{m}{\cancel{R}}\left[\frac{2Mg\cancel{R}}{M+m} + \frac{4mg\cancel{R}\cancel{\sqrt{M}}}{(m+M)\cancel{\sqrt{M}}} + \frac{m^2 \cdot 2g\cancel{R}}{M(m+M)}\right],$$

$$= mg + \frac{m}{M(m+M)}\left[2M^2 g + 4Mmg + 2m^2 g\right],$$

$$= mg + \frac{2mg}{M(\cancel{m+M})}(m+M)^{\cancel{2}} = mg + \frac{2m(m+M)g}{M}.$$

$$=(3+\frac{4m}{M})mg$$ #.

4.17. 证明行星在轨总能量为

$$E=-\frac{GMm}{r_1+r_2}$$

r_1、r_2为近日点、远日点距

证明：由机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{GMm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{GMm}{r_2}.$$

由开普勒第二定律

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}r_1v_1=\frac{1}{2}r_2v_2 \Rightarrow v_2=\frac{r_1}{r_2}v_1$$

$$\frac{GMm}{r_1r_2}(r_1-r_2)=\frac{1}{2}m\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)v_1^2.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2=\frac{GMm(r_1-r_2)}{r_1r_2\cdot\left(\frac{r_1^2}{r_2^2}-1\right)}$$

$$=\frac{GMmr_2(r_1-r_2)}{r_1(r_1^2-r_2^2)}=\frac{GMmr_2}{r_1(r_1+r_2)}.$$

故总能量

$$=\frac{GMmr_2}{r_1(r_1+r_2)}-\frac{GMm}{r_1}$$

$$=\frac{GMm}{r_1}\left(\frac{r_2}{(r_1+r_2)}-1\right)=\frac{GMm}{r_1}\cdot-\frac{r_1}{r_1+r_2}$$

$= -\frac{GMm}{r_1+r_2}$ 4.

4.18、"霍曼转移轨道"。

$h_1 = 1400km$

$h_2 = 36000km$.

(1). 停泊 → 转移:

动能增量 $\Delta E_k = -\frac{GMm}{r_2+r_1} - \left(-\frac{GMm}{2r_1}\right)$.

$= -\frac{GM}{(r_2+r_1)r_1} \cdot \frac{r_1-r_2}{2}$.

$= -\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times500\times(7800-42300)}{2\times7800\times(42300+7800)\times10^3}$

$= 8.80\times10^9 J$.

转移 → 同步:

$\Delta E_k = -\frac{GMm}{2r_2} - \left(-\frac{GMm}{r_1+r_2}\right)$

$= -\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times500\times(7800-42300)}{2\times(42300+7800)\times42300000}$

$= 1.62\times10^9 J$.

(2). $V_{停} = \sqrt{\frac{GM}{R_1}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{7800\,000}} = 7.15\ km/s$

$V_{同} = \sqrt{\frac{GM}{r_2}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{42300\,000}} = 3.07\ km/s$

在转移轨道上,

$\vec{V}|_{r_1} = \sqrt{\frac{2GMr_2}{r_1(r_1+r_2)}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times42300\times10^3}{7800\times10^3\times(7800+42300)\times10^3}}$

$= 9.29\ km/s.$

$\vec{V}|_{r_2} = \sqrt{\frac{2GMr_1}{r_2(r_1+r_2)}} = \sqrt{\frac{2\times6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times7800}{42300(7800+42300)\times10^3}}$

$= 1.71\ km/s.$

故 ΔV_1 (停→转) $= 9.29-7.15 = 2.14\ km/s$

ΔV_2 (转→同) $= 3.07-1.71 = 1.36\ km/s$

4.24.

求证: 二体问题→单体问题,

一质点在另一质点系中动能 = 两质点的内动能.

证明:

动能 $= E_k = \frac{1}{2}MV_{21}^2 = \frac{m_1m_2}{2(m_1+m_2)}(V_2-V_1)^2.$

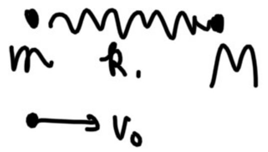
内动能 $E_{kin} = \frac{1}{2}m_1(V_1-V_c)^2 + \frac{1}{2}m_2(V_2-V_c)^2,$

同时 $V_c = \frac{1}{m_1+m_2}(V_1m_1+V_2m_2)$. 因此.

$$E_{k内} = \frac{m_1}{2(m_1+m_2)^2}\left(\cancel{v_1 m_1} + v_1 m_2 - \cancel{v_1 m_1} - v_2 m_2\right)^2 + \frac{m_2}{2(m_1+m_2)^2}\left(v_2 m_1 - v_1 m_1\right)^2$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)^8}\left(\cancel{m_1+m_2}\right)(v_1-v_2)^2 = \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2 = E_k$$

4.25. 已知:



求: (以约化质量方式做) 弹簧最大压缩长度。

解: 由机械能守恒, $\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_0^2 = \frac{1}{2}k x_{max}^2$,

$$x_{max} = \sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}\,v_0 \quad \#$$

4.26. 已知:

求: 最近距离。 (*). $U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e\cdot e}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r}$. ①

解:
$$\begin{cases} \text{能量守恒} \Rightarrow \frac{1}{2}m_p v_0^2 + \frac{1}{2}(4m_p)v_0^2 = \frac{1}{2}m_p v_{1H}^2 + \frac{1}{2}(4m_p)v_{1\alpha}^2 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e^2}{r} \\ \text{动量守恒} \Rightarrow m_p v_0 + (4m_p)(-v_0) = m_p v_{1H} + (4m_p)v_{1\alpha} \quad ② \end{cases}$$

由②得 $-3v_0 = v_{1H} + 4v_{1\alpha} \Rightarrow v_{1\alpha} = -\frac{3v_0 + v_{1H}}{4}$

r 取极小 $\Leftrightarrow$ $U(r)$ 取极大

$\Leftrightarrow$ E_k 取极小,

$$E_k = \frac{1}{2}m_p v_{1H}^2 + \frac{1}{2}\cdot 4m_p\cdot\left(-\frac{3v_0+v_{1H}}{4}\right)^2.$$

即 $\begin{cases} \dfrac{dE_k}{dv_{1H}}=0 \Rightarrow m_p v_{1H} + 2m_p\cdot 2\left(-\dfrac{3v_0+v_{1H}}{4}\right)\left(-\dfrac{1}{4}\right)=0, \\ \dfrac{d^2E_k}{dv_{1H}^2}>0 \Rightarrow v_{1H}+\dfrac{3v_0+v_{1H}}{4}=0. \Rightarrow v_{1H}=-\dfrac{3}{5}v_0 \end{cases}$

同时 $\dfrac{d^2E_k}{dv_{1H}^2}=m_p+m_p\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4}m_p>0.$

故 $v_{1H}=-\dfrac{3}{5}v_0$ 时 $U(r)$ 取极大、此时

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2e^2}{r}=\frac{5}{2}m_p v_0^2-\frac{1}{2}m_p v_{1H}^2-\frac{1}{2}(4m_p)\left(-\frac{3v_0+v_{1H}}{4}\right)^2$$

$$=\frac{5}{2}m_p v_0^2-\frac{9}{50}m_p v_0^2-2m_p\cdot\frac{9}{25}v_0^2.$$

$$=\left(\frac{5}{2}-\frac{9}{10}\right)m_p v_0^2=\frac{8}{5}m_p v_0^2,$$

$$r_{min}=\frac{2ke^2}{\frac{8}{5}m_p v_0^2}=\frac{5}{4}\cdot\frac{ke^2}{m_p v_0^2} \#.$$