24 March 2022 at 22:29

DM HW4

1.

解.

由于 $\sum_{v\in V} d(v) = 2m = 2(n-1)$,

故

$$\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot i = 2\left(\sum_{i=1}^{k} n_i - 1\right).$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} n_i(2-i) = 2,$$

$$n_1 = 2 + \sum_{i=3}^{k} n_i(i-2),$$

为树叶的个数。

2.

证明:

设 $P=(v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k)$.

是树中某条极长道路。

此处有 $\Gamma(v_0) \subset P$,

$\Gamma(v_n) \subset P$.

(否则就不是极长).

由于树是连通图,

故若 v_0 不是树叶, 则有

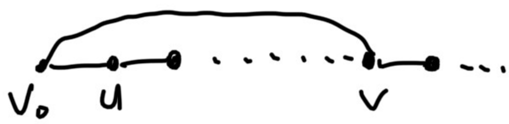
$d(v_0) = |\Gamma(v_0)| \geq 2$,

不失一般性 设

$u, v \in \Gamma(v_0)$ 且 $u \neq v$.

在P上, u, v 至少有一个不是与 v_0 直接相连,

例如:



但那个在P上不与 v_0 相邻的顶点, 是 v_0 的邻点,

故该树存在回路, 矛盾。

同理可证 $d(v_n) = 1$ ⊠.

3. 证明：

分为三个部分。
① 定义 Prufer 编码。
② 证明 Prufer 编码与树存在一一对应关系。
③ 证明对某一顶点度数列共有 $\binom{n-2}{d_1-1, d_2-1, \dots, d_n-1}$ 种

不同的 Prüfer 编码。

①. Prufer 编码的生成：

1. $T \leftarrow T_0$，T_0 是某一棵树，$P=\emptyset$ 是一空串。
2. 在 T 中选取编号 i 最小的顶点 v_i，使得 v_i 是树叶，即 $d(v_i)=1$.

$i \leftarrow \min\{j : v_j \in T \wedge d(v_j)=1\}$

3. 设 v_j 是 v_i 的邻点，即 $v_j \in \Gamma(v_i)$，将 j 加在串 S 的结尾，同时把 v_i 和 (v_i, v_j) 从 T 中删去。

$P \leftarrow P \cup \{j\}$，$T \leftarrow T - v_i$.

4. 若 T 是形如 •—• 的树，即 $|T|=2$，

P 即为 Prufer 编码，否则回到 2。

[简而言之，就是依次把 T 的树叶的邻点编码附在串尾，然后把树叶删去，直至 $|T|=2$.]

② 以下证明 Prufer 编码能被解码，变回那棵树。

由于 Prufer 编码上每一个位，都对应 T 的某一子树上，编号最小的顶点，于是就可以利用这一条件逐步还原那棵树。

下述的解码过程，① 中编码过程的逆运算，这就说明树和 Prufer 编码存在一一对应关系。

输入 S：S 是 Prufer 编码。

i). 设 $n \leftarrow |S|+2$,

d 是长度为 n 的数组, 且 $d[i]=1+$"i在S的出现次数", $T=N_n$是一棵空树。

$i \leftarrow 1$.

ii). 求最小的 j, s.t. $d[j]=1$.

这时就有 v_j是原树某一子树树叶, v_i为其邻边, 就记

$T \leftarrow T+(v_i, v_j)$

iii). $d[j] \leftarrow d[j]-1$

$d[i] \leftarrow d[i]-1$

$i \leftarrow i+1$.

iv). 若 $i<n$, 跳 ii), 否则跳 v).

v). 求 i, j s.t. $i \neq j$ 且 $d[i]=d[j]=1$,

把①(4)中那条边加回去,

$T \leftarrow T+(v_i, v_j)$, 运算结果即为原树。

③. 由于在②已证明

$\exists f$; $f: T \mapsto P$, P是Prufer码, 且 f^{-1} 存在, 故题目的命题

$\Leftrightarrow$ 给定 $d_1, d_2, \ldots, d_n$, 有 $\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}(d_i-1)!}$ 种 Prufer 码的可能性。

证明:

由于生成Prufer编码的过程中,每当一块树叶被拔除的时候,都会在串尾增加其邻边的编号,同时由树是连通图且T最
T 简~

终的形态是 —•，于是对顶点V_i，
会在 Prufer码出现的次数是d_i-1次。

$$\underbrace{\qquad\quad}_{V_1}\ \underbrace{\qquad\quad}_{V_2}\ \underbrace{\qquad\quad}_{V_3}\ \cdots\ \underbrace{\qquad\quad}_{V_n}$$

以上每一个"筐"都装有d_i-1个顶点。

只要将Prufer码数位对应的"树叶"放在筐内，就可以对应一棵给定顶点序列的树。

这相当于把$n-2$个顶点放在筐内，树的数目正是放筐的放法总数。

[即阶为n的树，对应长为$n-2$的Prufer码]

共有

$$\binom{n-2}{d_1-1}\binom{n-1-d_1}{d_2-1}\binom{n-d_1-d_2}{d_3-1}\cdots\binom{d_n-1}{d_n-1}$$

$$=\frac{(n-2)!}{(d_1-1)!\,\cancel{(n-d_1+1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-1-d_1)!}}{(d_2-1)!\,\cancel{(n-d_1-d_2)!}}\cdots\cdots\frac{\cancel{(d_n-1)!}}{(d_n-1)!\,(0)!}$$

$$=\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)!}$$