1，证明：

以 $G_1, G_2, \ldots, G_k$ 表示 G 的 k 个连通支。

第 G_i 个连通支，有 n_i 个结点。

由于 G 是简单图，故

$$m_i \le \frac{1}{2} n_i(n_i-1),\ i\in\{1,2,\ldots,k\},$$

而由于 $m=\sum_{i=1}^{k} m_i$,

$$n_i \le n-(k-1) = n-k+1.$$

故

$$m=\sum_{i=1}^{k} m_i \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(n_i-1)$$
$$\le \frac{1}{2}(n-k+1)\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)$$
$$= \frac{1}{2}(n-k+1)(n-k).$$

⊠

5，

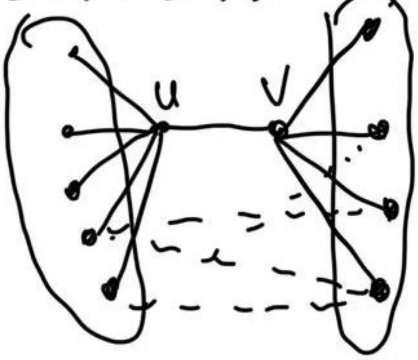
证明：

(a) 先证明引理：

$$\sum_{v\in V} d(v)^2 = \sum_{(u,v)\in E}\big(d(u)+d(v)\big).$$

证：$d(v)$ 是 v 关联的边数，于是 $d(v)$ 在右式出现的次数，恰好就是 $d(v)$ 次，$d(u)$ 同理。移项后就得左式。

由于简单图 G 是 $\triangle$-free 的，故 $\forall u,v\in V$，都有 $\Gamma(u)\cap\Gamma(v)=\emptyset$，即



5a. 续.

这就有 $d(u)+d(v)\leq n$,

即

$$\sum_{v\in V} d(v)^2 = \sum_{(u,v)\in E}(d(u)+d(v)) \leq nm \quad \boxtimes$$

(b). 由柯西不等式知.

$$\left(\sum_{v\in V} d(v)\right)^2 \leq n\cdot\sum_{v\in V} d(v)^2$$

而 $\sum_{v\in V} d(v) = 2m$

即

$$4m^2 = \left(\sum_{v\in V} d(v)\right)^2 \leq n\cdot\sum_{v\in V} d(v)^2$$

$$\leq n\cdot n\cdot m.$$

$$\Rightarrow 4m^2 \leq n^2\cdot m$$

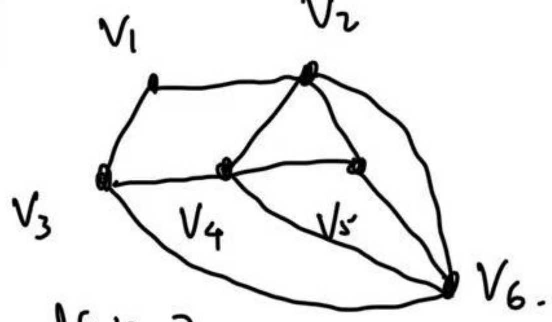
$$\Leftrightarrow m \leq \frac{n^2}{4} \quad \boxtimes$$

6. 解:

设有简单图 G, 其有 6 个结点, $V_1, V_2, \cdots, V_5$ 是房间, V_0 是屋外空间,

$e_1, e_2, \cdots, e_8$ 表示门.

这样, G 就能表示成如下的图.



$d(V_1)=2$,
$d(V_2)=4$
$d(V_3)=3 \leftarrow$
$d(V_4)=4$
$d(V_5)=3 \leftarrow$
$d(V_6)=4$.

由于奇度结点只有两个, 故存在欧拉通路, 通过各门一次.

例:

$(V_3, V_1, V_2, V_4, V_3, V_6, V_4, V_5, V_2, V_6, V_5)$.

$e_1, e_2, \cdots, e_8$ 表示门.

(2). 证明:

$n(\geq 4)$ 中, 任两人合起来, 都认识其他的人.

类似于例 2.4.5, 对人物及其关系, 以一简单图 G 表示之。

设 G 的结点 n, 是那 $n(\geq 4)$ 人, $(v_i, v_j) \in E$ $\Leftrightarrow$ i 与 j 认识。

由题设知, $\forall u, v \in V$,

$d(u) + d(v) \geq n-2$.

1). $(u, v) \in E$.

此处有 $d(u) + d(v) \geq n$.

2). $(u, v) \notin E$.

此时, 即有 $\Gamma(u) = \Gamma(v)$。

对 $\Gamma(u) = \Gamma(v)$ 的证明:

$\forall u' \in \Gamma(u)$, 由于 $(u, v) \notin E$, 必有 $(u', v) \in E$,

否则 u, u' 都与 v 不认识, 与题设矛盾。

于是 $\Gamma(u) \subseteq \Gamma(v)$,

由对称性知 $\Gamma(v) \subseteq \Gamma(u)$.

与此同时

$|\Gamma(u)| = |\Gamma(v)| = n-2$.

这就有 $d(u) + d(v) \geq 2n-4$.

$n \geq 4$ 时, $2n-4 \geq n$.

即当 $n \geq 4$ 时,

$\forall u, v \in V$,

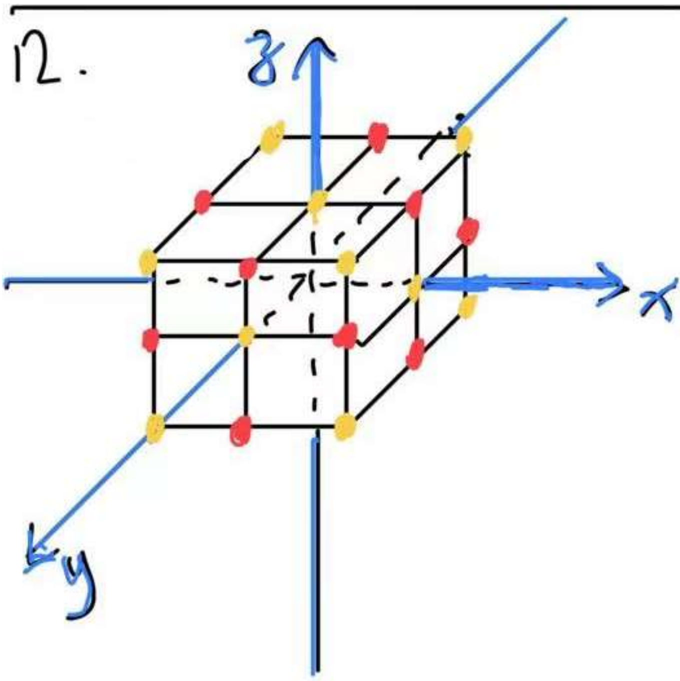
$d(u) + d(v) \geq n$.

由 1) 2) 和 Ore 定理

G 必然存在 H 回路

证毕。 ☒.

12.



原题等价于求一条从(1,1,1)到(0,0,0)，并走遍各晶格点的道路。

对晶格点按以下方法染色：要求邻点染不同的颜色。

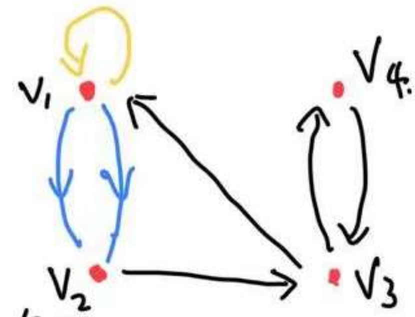
例：对"角结点"染以黄色，其邻点染以红色。

如果这样的H道路P存在，在P上的结点必定被交错地染以红、黄色。

而且必定是以一个黄色结点开始，以一个红色结点(0,0,0)结束。

这就蕴含P上有偶数个结点。但由于P是一条H道路，道路上有27个结点，与"P上有偶数个结点"矛盾，故这样的H道路不存在，即原题答案是否定的。☒

练习题。



解：

设 A 为表示结点间边数的"邻接矩阵。

那么

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

乘法原理

而长度为 k，从 v_1 到 v_4 的道路条数为 $(A^k)_{14}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

v_1 到 v_4，长为 1,2,3,4 的道路各有 0,0,2,2 条。

11(选) 证明：

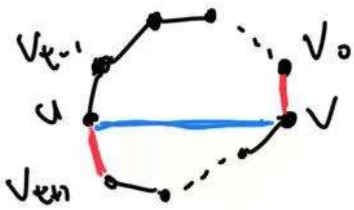
以数学归纳法证之。

设 $S(q)$：$\delta(G) \geq \frac{n+q}{2}$ 的简单图 G，存在包含 q 条边的 H 回路，其中要求这 q 条边互不相邻。

$q=0$ 时，有 $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$，由推论 2.4.2 知 $S(0)$ 成立。①.

现假设 $q=k$ 时成立，当 $q=k+1$，就存在一条含 k 条非邻边的 H 回路。对剩下的那条边，若其在 H 回路上，命题得证。否则有以下情况：

令该边为 $e=(u,v)$，即



原有的 H 回路为

$P' = (v_0 v_1 \cdots v_{t-1} u v_{t+1} \cdots v v_0)$,

若 $(v_{t+1}, v_0) \in E(G)$,

则 $P = P' \oplus \{(u, v_{t+1}), (v, v_0), (u, v), (v_{t+1}, v_0)\}$

就是原题求的 H 回路。

以下是 $(v_{t+1}, v_0) \notin E(G)$ 的情况。

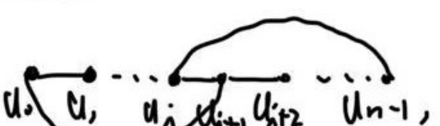
此时,可以设

$P'' = (v_0, v_1, \cdots, v_{t-1}, u, v, \cdots, v_{t+2}, v_{t+1})$

对 P'' 上的结点重编号,

$P = (u_0, u_1, \cdots, u_{n-1})$.

以下证明在这条极长道路 P 上,必然存在以下情况:



其中 (u_i, u_{i+1}) 是那 $k+1$ 条选定的边以外的边。

设 $\Gamma'(u_{n-1})$ 为

$\Gamma'(u_{n-1}) = \{u_i : (u_{i-1}, u_{n-1}) \in E(G)\}$.

P 极长,且 $(u_0, u_{n-1}) \notin E(G)$.

则

$|\Gamma'(u_{n-1}) \cup \Gamma(u_0)| \leq n-2$.

又因 $\delta(G) \geq \frac{n+k+1}{2}$

故 $|\Gamma'(u_{n-1})| \geq \frac{n+k+1}{2}$,

$|\Gamma(u_0)| \geq \frac{n+k+1}{2}$,

即 $|\Gamma'(u_{n-1}) \cap \Gamma(u_0)| \geq$

$n+k+1-(n-2) = k+3$

这就说明必定存在 $u_i \in \Gamma(u_0) \cap \Gamma'(u_{n-1})$

(u_i, u_{i+1}) 不是那 $k+1$ 条选定的边

且 $(u_0, u_{i+1}), (u_i, u_{n-1}) \in E(G)$。

$P \oplus \{(u_0, u_{i+1}), (u_i, u_{n-1}), (u_i, u_{i+1})\}$,

即为所求 H 回路,于是

$S(k) \Rightarrow S(k+1)$. ②

由①,②和第一数学归纳法,

$S(q)$ 成立。 $\boxtimes$