作业 8 简答

李子钰，肖子达

2021 年 12 月 3 日

习题 1. *Without writing A, find an eigenvalue of A and describe the eigenspace:*

1. *T is the transformation on $\mathbb{R}^2$ that reflects points across some line through the origin.*
2. *T is the transformation on $\mathbb{R}^3$ that rotates points about some line through the origin.*

解答.

1. A 有特征值 -1 与 1，其中 $\lambda = 1$ 对应的特征子空间是反射轴，$\lambda = -1$ 对应的特征子空间是与反射轴垂直的直线.
2. 解特征多项式可以得到 A 有特征值 $1, e^{i\theta}$ 与 $e^{-i\theta}$, 这里 θ 是旋转角度. $\lambda = 1$ 对应的特征子空间是旋转轴. 但是注意，当我们把它看成实线性变换时，另外两个就不是特征值了，因为找不到定义满足的实特征向量.

评论 1. $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换，实特征值对应某个方向上的伸缩，复特征值对应某个平面上的旋转与伸缩的复合.

习题 2. *Let $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ be eigenvectors of a matrix A, with eigenvalues λ and μ respectively. Let c_1, c_2 be scalars. Define $\mathbf{x}_k = c_1\lambda^k\mathbf{u} + c_2\mu^k\mathbf{v}$, $k = 0, 1, 2, \cdots$.*

1. *What is $\mathbf{x}_{k+1}$, by definition?*
2. *Compute $A\mathbf{x}_k$ from the formula for $\mathbf{x}_k$, and show that $A\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$.*

解答.

1. $\mathbf{x}_{k+1} = c_1\lambda^{k+1}\mathbf{u} + c_2\mu^{k+1}\mathbf{v}$;

2. 直接计算

$$A\mathbf{x}_k = A\left(c_1\lambda^k\mathbf{u} + c_2\mu^k\mathbf{v}\right) = c_1\lambda^k A\mathbf{u}+c_2\mu^k A\mathbf{v} = c_1\lambda^k(\lambda\mathbf{u})+c_2\mu^k(\mu\mathbf{v}) = c_1\lambda^{k+1}\mathbf{u}+c_2\mu^{k+1}\mathbf{v} = \mathbf{x}_{k+1}.$$

评论 2. 这是我们利用方程组来解常系数线性递推数列的依据.

习题 3. *Find the characteristic polynomial and eigenvalues of the matrices*

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

解答. 令 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, 则有

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-9\lambda+32, \quad p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-10\lambda+25,$$

直接计算 A 的特征值是 $\dfrac{9\pm\sqrt{-47}}{2}$,$B$ 的特征值是二重[1]特征值 5.

习题 4. *Find the characteristic polynomial of the following matrices, with the cofactor expansion of the determinant:*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

解答. 令 $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & -2 \end{bmatrix}$, 直接计算

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 0 \\ 5 & 8 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 95\lambda + 150$$

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 7 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 25\lambda - 28.$$

[1] 指代数重数

习题 5. *Diagonalize the following matrices if possible, it is known that the first matrix has eigenvalues* $\lambda = 2, 8$*, and that the second matrix has eigenvalues* $\lambda = 2, 1$*:*

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

解答. 令 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -6 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 解齐次线性方程组

$$(A - 2I)\overrightarrow{x} = 0$$

得到两个线性无关解 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 它们是属于特征值 2 的线性无关的特征向量. 解齐次线性方程组

$$(A - 8I)\overrightarrow{x} = 0$$

得到非零解 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 这是属于 8 的特征向量. 把它们拼凑成矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 计算 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, 从而

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{bmatrix}.$$

同理得到 B 的属于特征值 2 的特征向量 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 与属于特征值 1 的特征向量 $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 拼成过渡矩阵 $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, 以及

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，从而

$$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

习题 6. *1. A is a 5×5 matrix with two eigenvalues, one eigenspace is 3-dimensional, and the other eigenspace is 2-dimensional. Is A diagonalizable? Why?*

2. A is a 4×4 matrix with three eigenvalues. One eigenspace is 1-dimensional, and one of the other eigenspaces is 2-dimensional. Is it possible that A is not diagonalizable? Why?

解答. *1.* 可以，因为可以找到 $2+3=5$ 个线性无关的特征向量.

2. 可以，因为 $1+1+2=4$，我们恰好能找到 4 个线性无关的特征向量.

评论 3. 如果只有两个特征值，可能就不能对角化，例如

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

习题 7. *Define $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ by $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.*

1. Find the image under T of $\mathbf{p}(t) = 5 + 3t$.

2. Show that T is a linear transformation.

3. Find the matrix for T relative to the basis $\{1, t, t^2\}$ for $\mathbb{P}_2$ and the standard basis for $\mathbb{R}^3$.

解答. *1.* $T(\mathrm{p}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

2. $T\left(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{p}_i\right) = \begin{bmatrix} \left(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{p}_i\right)(-1) \\ \left(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{p}_i\right)(0) \\ \left(\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{p}_i\right)(1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i(-1) \\ \mathbf{p}_i(0) \\ \mathbf{p}_i(1) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n c_i T\left(\mathbf{p_i}\right).$

3. 设 A 为所求矩阵，则有

$$A = \begin{bmatrix} T(1) & T(t) & T\left(t^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

习题 8. *Let A and B be similar square matrices, show that they have the same rank.*

解答. 只要说明 $AX=0$ 与 $BX=0$ 的解空间维数相同，这又只要说明解空间 V_A 与 V_B 同构. 设 P 为可逆矩阵，使得 $PAP^{-1}=B$，从而可构造线性映射

$$T: V_A \to V_B, \qquad T(\vec{x}) = P\vec{x},$$

利用 P 可逆，直接验证这是一个一一映射，从而是线性同构.

习题 9. 1. *The* trace *of a square matrix A is the sum of the diagonal entries of A, and is denoted* $\mathrm{Tr}(A)$. *It can be verified that* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ *for any two $n \times n$ matrices A and B. Show that if A and B are similar, then* $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

2. *Suppose that A is diagonalizable, show that* $\mathrm{Tr}(A)$ *equals the sum of the eigenvalues of A.*

解答. 1. 利用 $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}(BP)\right) = \mathrm{Tr}\left((BP)P^{-1}\right) = \mathrm{Tr}(B)$ 立刻得到.

2. 此时可取 B 为对角矩阵，这里 B 对角线上的元素恰为 A 的全部特征值，于是 B 的 *trace* 是对角线上元素之和，也就是 A 的特征值之和.

习题 10. 1. *Diagonalize the matrix* $\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *in the realm of complex matrices if possible.*

2. *Express the matrix* $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ *in the form PCP^{-1}, with P an invertible* real *matrix and C of the form* $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ *with a, b* real.

解答. *1.* 解方程 $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 17 - 8\lambda + \lambda^2 = 0$ 得到 $\lambda_1 = 4 - i$ 与 $\lambda_2 = 4 + i$，以及属于它们的特征向量 $\begin{bmatrix} 1-i \\ 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$. 取 $P = \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，算得[2] $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$. 从而

$$\begin{bmatrix} \frac{i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ -\frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-i & \\ & 4+i \end{bmatrix}.$$

2. 设 λ 为矩阵 A 的复特征值，$\mathbf{x}$ 为 A 的属于 λ 的复特征向量. 则有

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow A\left(\Re(\lambda) + i\Im(\lambda)\right) = \left(\Re(\lambda) + i\Im(\lambda)\right)\left(\Re(\mathbf{x}) + i\Im(\mathbf{x})\right),$$

整理后得到

$$\begin{aligned} A[\Re(\mathbf{x})\Im(\mathbf{x})] &= [\Re(\lambda)\Re(\mathbf{x}) - \Im(\lambda)\Im(\mathbf{x}) \quad \Im(\lambda)\Re(\mathbf{x}) + \Re(\lambda)\Im(\mathbf{x})] \\ &= \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{x}) & \Im(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re(\lambda) & \Im(\lambda) \\ -\Im(\lambda) & \Re(\lambda) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

解 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 5 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 13 - 4\lambda + \lambda^2 = 0$ 得到 $\lambda = 2 \pm 3i$，算出 $2 - 3i$ 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1+3i \\ 2 \end{bmatrix}$，从而

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

---

[2]使用 2 阶矩阵的逆公式算最简单.