第十章 关系

马昱春
清华大学计算机系

第十章　关系

回顾：关系的性质

自　反：

$$\forall x(x \in X \rightarrow xRx)$$

非自反：

$$\forall x(x \in X \rightarrow x \not R x)$$

对　称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

反对称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

回顾：关系的闭包(CLOSURE)

定义10.5.2 闭包的定义

设R是非空集合A上的关系，如果A上有另一个关系R'满足：

满足性质

（1）R'是自反的（对称的或传递的）；

包含关系

（2）$R \subseteq R'$；

（3）对A上任何自反的（对称的或传递的）关系R''，$R' \subseteq R''$。

最小的那个

则称关系R'为R的自反（对称或传递）闭包

闭包

一般将R的自反闭包记作$r(R)$，对称闭包记作$s(R)$，传递闭包记作$t(R)$。

关系的闭包

- 定理：设A是集合，R_1和R_2是A上的二元关系，$R_1 \subseteq R_2$，则有：
  - $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
  - $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
  - $t(R_1) \subseteq t(R_2)$
- $r(R_1) \subseteq r(R_2)$

证明：$r(R_1) = R_1 \cup I_A$，$r(R_2) = R_2 \cup I_A$

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是自反的，则s(R),t(R)也自反
  - 若R是对称的，则r(R),t(R)也对称
  - 若R是可传递的，则r(R)也可传递

s(R)是不是传递的?

关系的闭包

- 若R是传递的，s(R)不一定是传递的
  - 反例：R={<a,b>,<c,b>}，

  R是传递的

  s(R)={<a,b>,<b,a>,<c,b>,<b,c>}

  s(R)不是传递的

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：归纳法证明若R是对称，则R^n也对称

n=1，显然成立

假设R^n对称，对任意<x,y>

$$\langle x,y\rangle \in R^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists t(\langle t,x\rangle \in R \wedge \langle y,t\rangle \in R^n)$$

$$\Rightarrow \langle y,x\rangle \in R \circ R^n \Rightarrow \langle y,x\rangle \in R^{n+1}$$

关系的闭包

- 定理：设X是一集合，R是X上的二元关系，则有：
  - 若R是对称的，则t(R)也对称

证明：任取<x,y>，有

$$<x,y>\in t(R)$$

$$\Rightarrow \exists n(<x,y>\in R^n)$$

$$\Rightarrow \exists n(<y,x>\in R^n)$$

$$\Rightarrow <y,x>\in t(R)$$

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.11 闭包同时具有的多种性质1　　对非空集合A上的关系R，

（1）若R是自反的，则$s(R)$和$t(R)$是自反的；

（2）若R是对称的，则$r(R)$和$t(R)$是对称的；

（3）若R是传递的，则$r(R)$是传递的。

10.5 关系的闭包(CLOSURE)

定理10.5.12 闭包同时具有的多种性质2

对非空集合A上的关系R,

（1） $rs(R) = sr(R)$

（2） $rt(R) = tr(R)$

（3） $st(R) \subseteq ts(R)$

其中 $rs(R) = r(s(R))$，其它类似。

$r(R) \rightarrow sr(R) \rightarrow tsr(R)$

关系的性质

- 自反？ 对称？ 传递？
- 日常生活中的关系？
  - 同龄人
  - 同班同学
  - ……

10.6 等价关系和划分 (EQUIVALENT RELATION & PARTITION)

定义10.6.1 等价关系

设R为非空集合A上的关系，如果R是

自反的、

对称的

和传递的，

则称R为A上的等价关系。

典型的等价关系

- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）

例：整数集上的同余关系

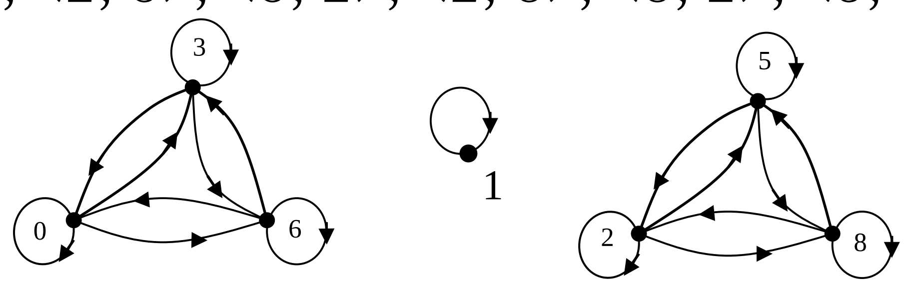
- 整数集上关系R={（x，y）|x-y能被m整除}。
- 关系R是等价关系。

  证明：R有自反性；对称性；传递性。

- 设A={0，1，2，3，5，6，8}，R为A上的模3等价关系，则

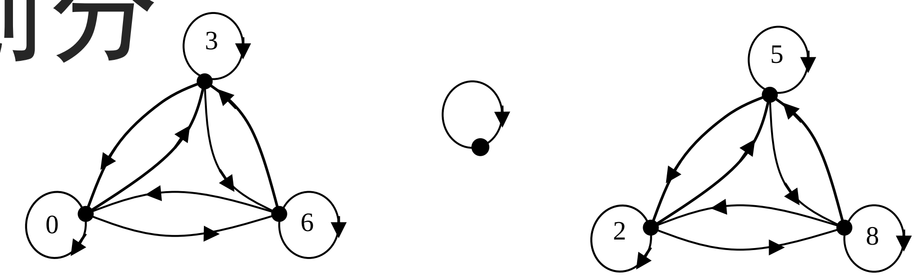
R={<0，0>，<1，1>，<2，2>，<3，3>，<5，5>，<6，6>，<8，8>，<0，3>，<3，0>，<0，6>，<6，0>，<2，5>，<5，2>，<2，8>，<8，2>，<3，6>，<6，3>，<5，8>，<8，5>}。

R的关系图见图



是否等价关系中有天然的划分？

10.6 等价关系与划分



等价类

设R是非空A集合上的等价关系，对于任何$x \in A$，令：

- $[x]_R = \{y | y \in A \wedge xRy\}$
- $[x]_R$是由$x \in A$生成的R等价类
- x为等价类$[x]_R$的表示元素

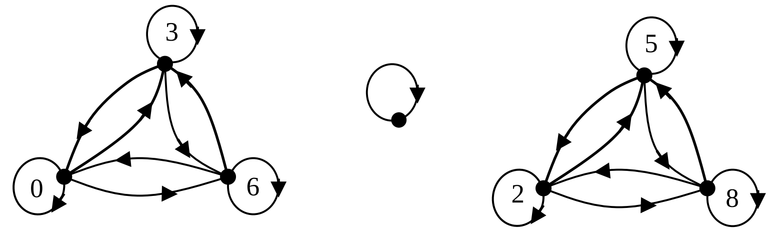
等价关系与划分 $[x]_R = \{y|y \in A \wedge xRy\}$

$[x]=[y]$ ⟺ xRy

- 定理 设A是一个集合，R是A上的等价关系，xRy当且仅当$[x]=[y]$
- 证明：
  - 充分性，因为$x\in[x]=[y]$,即$x\in[y]$，

  所以yRx，由于等价关系满足对称，所以xRy。
  - 必要性，已知xRy，考虑$[x]$的任意元素z，有zRx。根据R的传递性，有zRy，因此$z\in[y]$。证明$[x]\subseteq[y]$。类似可证明$[y]\subseteq[x]$，所以$[x]=[y]$

等价关系与划分



- **定理：** 设A是一个集合，R是A上的等价关系，
  - 对于所有$x,y\in A$，或者$[x]=[y]$，或者$[x]\cap[y]=\varnothing$

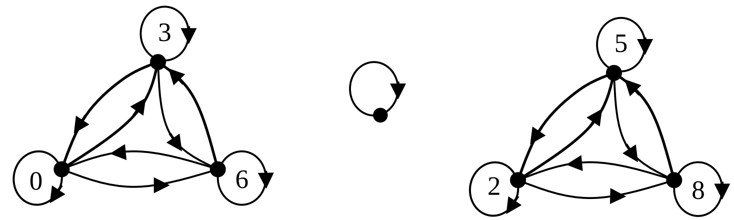
证明： 只需证明如果$x \not R y$，则$[x]\cap[y]=\varnothing$

反证法： 假设$[x]\cap[y]\neq\varnothing$，则$\exists z\in[x]\cap[y]$

$\Rightarrow \langle x,z\rangle\in R \wedge \langle z,y\rangle\in R$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in R$ (矛盾!)

10.6 等价关系与划分



定理 设R是集合A上的等价关系，则

$$A = \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$$

证明：首先易证$\cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$

其次，对任意$y \in A$

$$y \in A \Rightarrow y \in [y]_R \wedge y \in A$$

$$\Rightarrow y \in \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$$

所以：$A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$

等价类覆盖集合

10.6 等价关系与划分

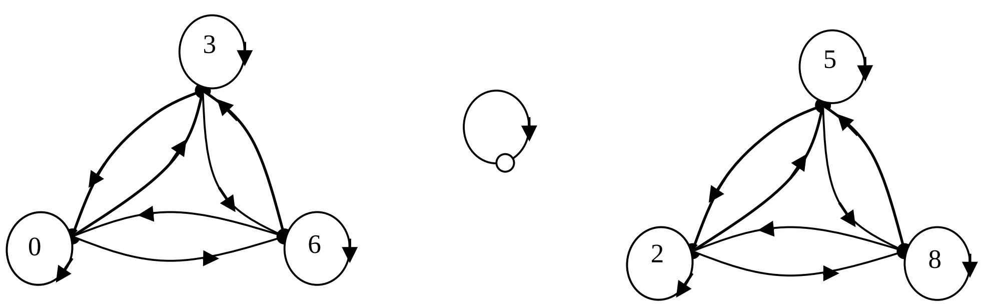
等价类

- 由等价类的定义性质知:X内的任两元素对于R的等价类或相等或分离，故X内所有元素对R的等价类的并集就是X。
- 也可以说，X的元素对于R的等价类定义了X的一个划分，且这样的划分就是唯一的。原因：由等价类的性质知等价关系R构成的类两两不相交，且覆盖X，且X的所有元素对于R的等价类是唯一的。

10.6 等价关系与划分

讨论

- 等价类$[x]_R$是一个集合，$[x]_R \subseteq A$ ($[x]_R$是A的子集)
- $[x]_R$中的元素是在A中，所有与x具有等价关系R的元素所组成的集合
- 在等价关系中的关系图中，
  - 每个连通子图中的所有点就构成一个等价类



10.6 等价关系与划分

例

- $A=\{a,b,c,d\}$
- $R=\{<a,a>，<b,b>，<a,b>，<b,a>，<c,c>，<d,d>，<c,d>，<d,c>\}$
- $[a]_R=\{a,b\}=[b]_R$
- $[c]_R=\{c,d\}=[d]_R$

10.6 等价关系与划分

例

- 设$A = N$
  $R = \{< x, y > | x \in A \wedge y \in A \wedge (x - y)$可被3整除$\}$
- 等价类

  $[0]_R = \{0，3，6，9 \ldots\}$

  $[1]_R = \{1，4，7，10 \ldots\}$

  $[2]_R = \{2，5，8，11 \ldots\}$

10.6 等价关系与划分

商集：R是A上的等价关系，R的所有等价类构成的集合记为A/R：$\{[x]_R \mid x \in A\}$

- 例：A为全班同学的集合，$|A| = n$，$(n \in N)$

  按指纹的相同关系R_1是一个等价关系

  $$A/R_1 = \{[x_1]_{R_1}, \ldots [x_\mathrm{n}]_{R_1}\}$$

  同姓关系R_2是一等价关系

  $$A/R_2 = \{[张]_{R_2}，[李]_{R_2}，\ldots\}$$

10.6 等价关系与划分

划分：给定一非空集合A，A的一个划分为非空子集族$S = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$，满足：

(1) $\varnothing \notin S$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in S \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$

非空子集，不相交，并为A

10.6 等价关系与划分

等价关系与划分有一一对应关系

- 划分到等价关系转化：A是一非空集合，S是A的一个划分，下述关系必定是一个等价关系

$$R=\{<x,y>\mid x,y\in A \wedge x,y\text{在}S\text{的同一划分}\}$$

- 等价关系到划分的转化：设A是非空集合，R是A上的等价关系。R的商集是A的划分

10.6 等价关系与划分

例1 整数集Z上，$R=\{<x,y>)|x-y$能被4整除$\}$

$$=\{<x,y>|x\equiv y(mod4)\}$$

R是等价关系，由Z上元素所构成的类分别以余数为0、1、2、3分类：

$[0]_R=\{\ldots-8,-4,0,4,8,12\ldots\ldots\}=\{4k\}$

$[1]_R=\{\ldots-7,-3,1,5,9,13\ldots\ldots\}=\{4k+1\}$

$[2]_R=\{\ldots-6,-2,2,6,10,14\ldots\ldots\}=\{4k+2\}$

$[3]_R=\{\ldots-5,-1,3,7,11,15\ldots\ldots\}=\{4k+3\}$

分析等价类的性质

- 令$W = [\mathrm{i}]_R$ i=0,1,2,3

1、任$w \in W$，wRw

2、任w_1、$w_2 \in W$，$[w_1]_R = [w_2]_R$

3、 $[0]_R \cap [1]_R = \varnothing, \ldots, [2]_R \cap [3]_R = \varnothing,$

$[0]_R \cup [1]_R \cup [2]_R \cup [3]_R = Z$

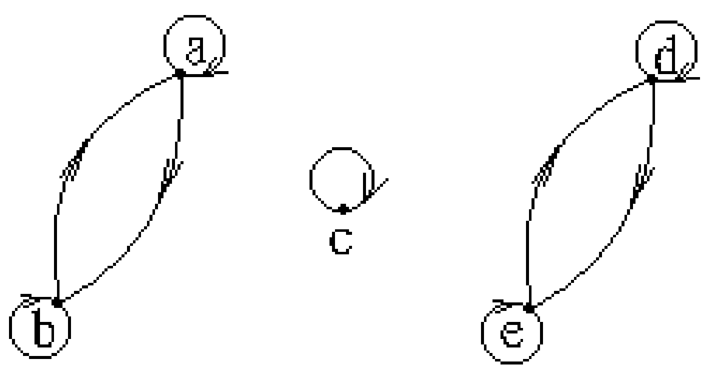
- 得$Z/R = \{[0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R\}$, 这个商集是$Z$上的一个划分。这些类称为模4的剩余类。

10.6 等价关系与划分

例 $A=\{a,b,c,d,e\}, S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$

对应划分S的等价关系为

$R=\{a,b\}\times\{a,b\}\cup\{c\}\times\{c\}\cup\{d,e\}\times\{d,e\}=\{<a,a>,<b,b>,<a,b>,$
$<b,a>,<c,c>,<d,d>,<e,e>,<d,e>,<e,d>\}$



分析等价类的性质

定理：任一集合上的一个划分可产生一个等价关系。

证明：

- 设$C=\{C_1,C_2\ldots\ldots C_m\}$，$C_i$为$C$的划分块，由$C$可建立一个关系

$$R=(C_1\times C_1)\cup(C_2\times C_2)\cup\ldots\ldots\cup(C_m\times C_m)$$

- 易知R是等价关系。
- 集合上的等价关系和其上的划分是一一对应的。

10.6 等价关系与划分

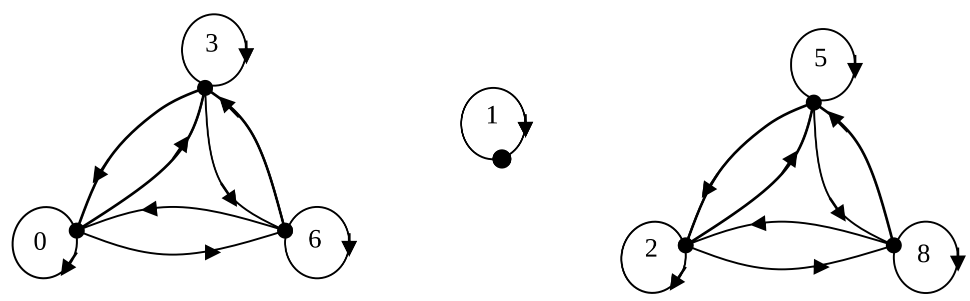
例 设$A=\{0,1,2,3,5,6,8\}$，R为Z上模3等价关系$R=\{<0,0>,<1,1>,<2,2>,<3,3>,<5,5>,<6,6>,<8,8>,<0,3>,<3,0>,<0,6>,<6,0>,<2,5>,<5,2>,<2,8>,<8,2>,<3,6>,<6,3>,<5,8>,<8,5>\}$，$R$的关系图见图

- 模3的等价类：

[0]={0,3,6}=[3]=[6]，

[1]={1}，

[2]={2,5,8}=[5]=[8]。



10.6 等价关系与划分

例 设$X=\{a,b,c,d,e\}$，求由划分$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$确定的等价关系。

$R1=\{a,b\}\times\{a,b\}$

$=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$

$R2=\{c\}\times\{c\}=\{<c,c>\}$

$R3=\{d,e\}\times\{d,e\}$

$=\{<d,d>,<d,e>,<e,e>,<e,d>\}$

$R=R1\cup R2\cup R3$

由划分的定义可知：

集合A的划分和A上的等价关系可以建立一一对应。即：

A的一个划分确定了A上的一个等价关系；反之亦然。

定理10.6.2 等价关系诱导出的划分

- 对非空集合A上的等价关系R，A的商集A/R就是A的划分，称为由等价关系R诱导出的A的划分，记作π_R。

定理10.6.3 划分π诱导出的A上的等价关系

- 对非空集合A上的一个划分π，令A上的关系R_π为

$$R_\pi=\{\langle x,y\rangle \mid (\exists z)(z\in\pi\wedge x\in z\wedge y\in z)\}$$

R_π则为A上的等价关系，它称为划分π诱导出的A上的等价关系。

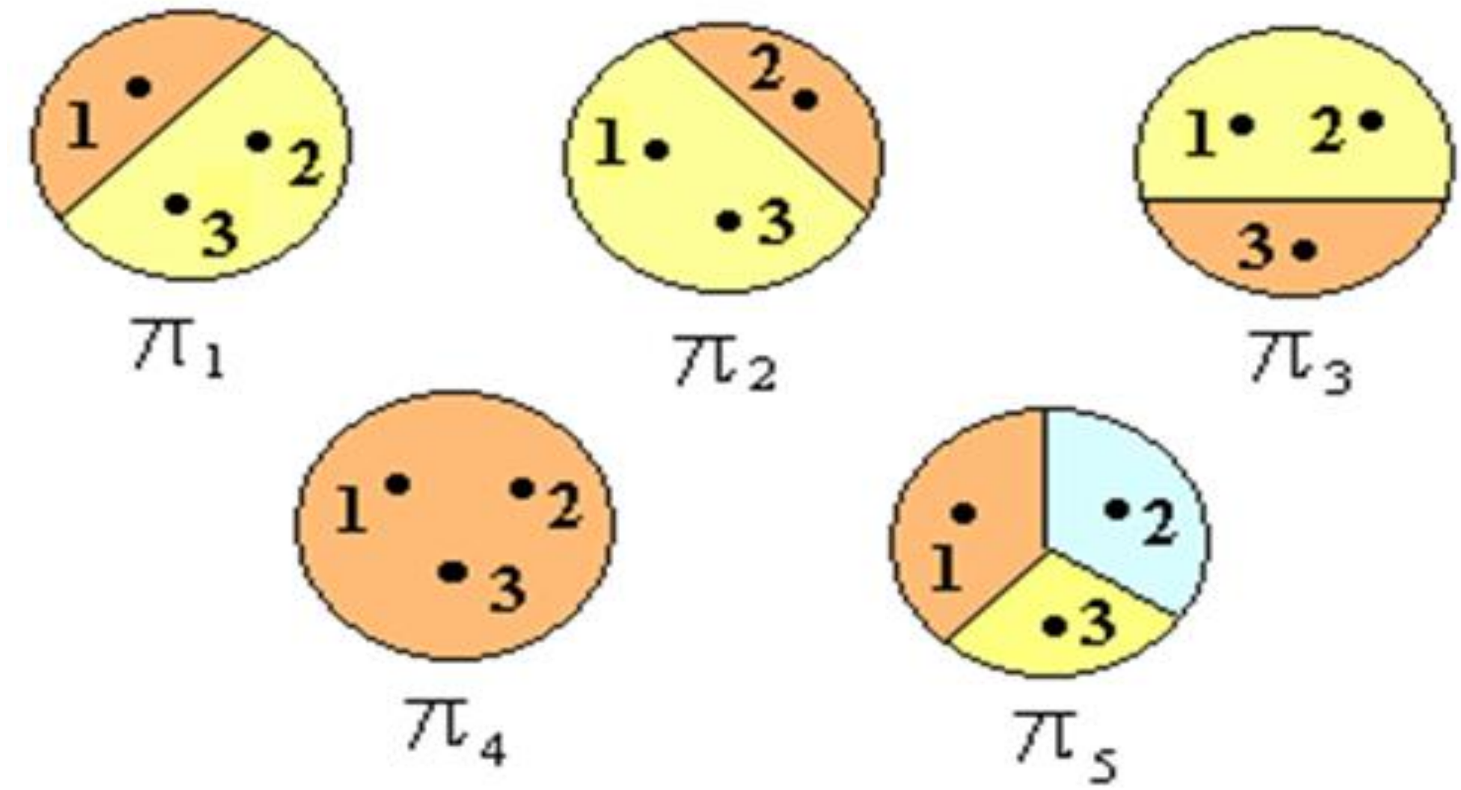
定理10.6.4 划分π和A上的等价关系R

- 对非空集合A上的一个划分π，和A上的等价关系R，π诱导R当且仅当R诱导π。

实 例

例6：给出A＝{1,2,3}上所有的等价关系。

求解思路：先做出A的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系。



10.6 等价关系与划分

思考题

计算集合A上不同的等价关系的个数。

如$P182$上例6，$A=\{1,2,3\}$时，A上可得到5个不同的等价关系，即$f(A_3) = 5$。

- 当$|A|= 4$时，$f(A_4) =?$
- 当$|A|= 5$时，$f(A_5) =?$
- 当$|A|= n$时，$f(A_n) =?$

STIRLING数

定义: n个有区别的球放到m个相同的盒子中,要求无一空盒,其不同的方案数称为第二类Stirling数.

定理: 第二类Stirling数S(n,m)有下列性质:

$(a)\ S(n,0)=0,$ $(b)\ S(n,1)=1,$

$(c)\ S(n,2)=2^{n-1}-1,$ $(d)\ S(n,n-1)=C(n,2),$

$(e)\ S(n,n)=1.$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

定理：第二类Stirling数满足下面的递推关系，

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1),(2-10-6)$$
$$(n>1,m\geq 1).$$

证明：设有n个有区别的球$b_1,b_2,\cdots,b_n$,从中取一个球设为 b_1 把n个球放到m个盒子无一空盒的方案的全体可分为两类。

（a）b_1独占一盒，其方案数显然为 $S(n-1,m-1).$

（b）b_1不独占一盒，这相当于先将剩下的 $n-1$个球放到m个盒子，不允许空盒，共有 $S(n-1,m)$种不同方案，然后将b_1球放进其中一盒，方案数为 $mS(n-1,m).$

根据加法法则有$S(n,m)=S(n-1,m-1)+mS(n-1,m).$

STIRLING数

红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的两个盒子里。

$$S(5,2)=2S(4,2)+S(4,1)=2\times 7+1=15,$$

故共有15种不同的方案。

先把绿球取走，余下的四个球放到两个盒子的方案已见前面的例子。和前面一样用r，y，b，w分别表示红，黄，蓝，白球，绿球用g表示.

STIRLING数

g 不独占一盒				g 独占一盒	
第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子	第 1 盒子	第 2 盒子
rg yg bg wg ryg rbg rwg	ybw rbw ryw ryb bw yw yb	r y b w ry rb rw	ybwg rbwg rywg rybg bwg ywg ybg	g	rybw

- **例 第二类Stirling数的展开式** $S(n,m)=\frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m}C(m,k)(-1)^k(m-k)^n$
- $S(n,m)$的组合意义：将n个有标志的球放入m个**无区别**的盒子，而且无一空盒的方案数.
- 先考虑n个有标志的球，放入m个**有区别**的盒子，无一空盒的方案数.

解：n个有标志的球放入m个有区别的盒子的事件全体为S，$|S|=m^n$

A_i表示第i个盒子为空，$i=1,2\ldots m$;

$|A_i| = (m\text{-}1)^n$ 共有 $C(m,1)$个

$|A_i \cap A_j| = (m\text{-}2)^n$ 共有 $C(m,2)$个

……………….

求无空盒的方案数

m个有区别盒子,无空盒的方案数:

$$N = |\overline{A1} \cap \overline{A2} \ldots\ldots \cap \overline{An}|$$

$$= m^n - C(m,1)(m-1)^n + C(m,2)(m-2)^n + \ldots + (-1)^m C(m,m)(m-m)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

而第二类Stirling数要求盒子无区别,则:

$$S(n,m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^n$$

推论: 因为S(m,m) = 1,

$$m! = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m,k)(m-k)^m$$

第十章　关系

关系的性

自　反：

$\forall x(x$ ∈

非自反：

$\forall x(x$ ∈

对　称：

$\forall x \forall y($

典型的等价关系

- 平面几何中三角形间的相似关系
- 同学集合中同班同学的关系
- 同学集合中同年龄的关系
- 同学集合中的老乡关系
- 但朋友关系并非等价关系（不满足传递）
- 非空集合A上的恒等关系、全域关系
- 空关系不是等价关系（满足非自反故不满足自反性）

反对称：

$$\forall x \forall y(x \in X \wedge y \in X \wedge xRy \wedge yRx \to x = y)$$

传　递：

$$\forall x \forall y \forall z(x \in X \wedge y \in X \wedge z \in X \wedge xRy \wedge yRz \to xRz)$$

10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.1 （相容关系）

对非空集合A上的关系R，如果R是 自反的、对称的，则称R为A上的相容关系。

- 与等价关系的区别：不一定满足传递性
- 例：朋友关系、认识关系等

名字中有同字的关系？

相容关系举例

- 例1 **A**是英文单词的集合

  A={cat, teacher, cold, desk, knife, by}

  A 上的关系**R**为

  R={< x, y >| x和 y 至少有一相同字母}

  容易证明，**R**是自反的，对称的，但不是传递的，因此，**R**是相容关系。

令x_1=cat，x_2=teacher，x_3=cold，x_4=desk，x_5=knife，x_6=by

则$R=\{\langle X_1,X_1\rangle,\langle X_1,X_2\rangle,\langle X_1,X_3\rangle,$

$\langle X_2,X_1\rangle,\langle X_2,X_2\rangle,\langle X_2,X_3\rangle,\langle X_2,X_4\rangle,\langle X_2,X_5\rangle,$

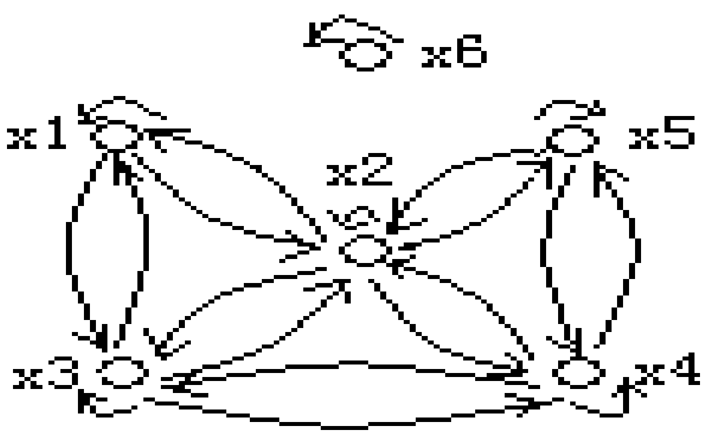
$\langle X_3,X_1\rangle,\langle X_3,X_2\rangle,\langle X_3,X_3\rangle,\langle X_3,X_4\rangle,$

$\langle X_4,X_2\rangle,\langle X_4,X_3\rangle,\langle X_4,X_4\rangle,\langle X_4,X_5\rangle,$

$\langle X_5,X_2\rangle,\langle X_5,X_4\rangle,\langle X_5,X_5\rangle$

$\langle X_6,X_6\rangle\}$

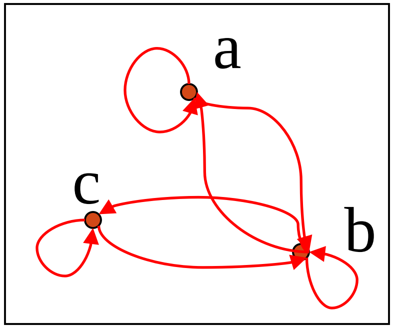
R的关系图为

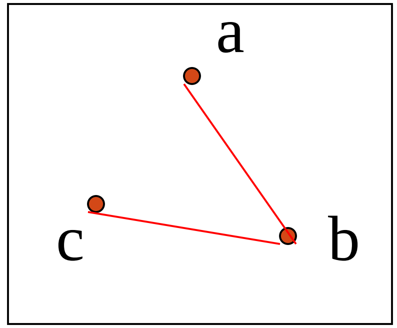


R的关系矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 相容关系的图形表示与矩阵表示





$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{1} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{matrix}$$

关系图

- 每个节点都有自回路
- 有向弧成对出现

所以，可以省去自回路，用单线代替来回弧线。

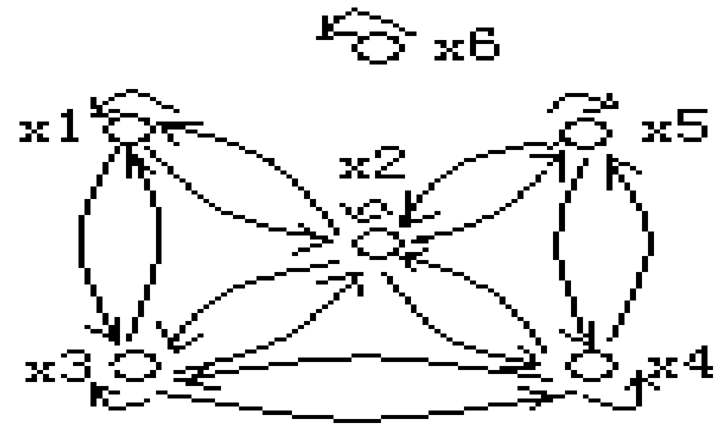
关系矩阵

- 主对角线全为1
- 矩阵关于主对角线对称

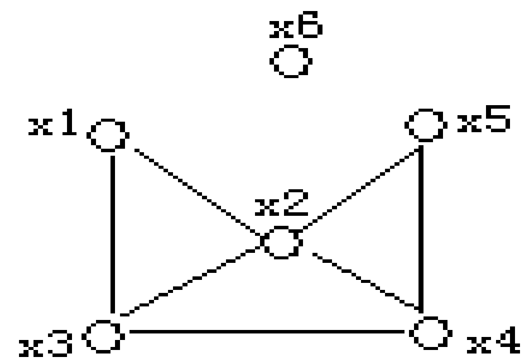
所以，只需主对角线以下部分即可表示全部信息。

2、表示：简化关系矩阵、关系图

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



x_2	1					
x_3	1	1				
x_4	0	1	1			
x_5	0	1	0	1		
x_6	0	0	0	0	0	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6



10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.2 **（相容类）** 对非空集合A上的相容关系R，若$C \subseteq A$，且C中任意两个元素x和y有xRy，则称C是由相容关系产生的相容类，简称相容类。这个定义也可以写成：

$$C = \{\, x \mid x \in A \wedge (\forall y)(y \in C \to xRy) \}$$

相容类的判定：在关系图中

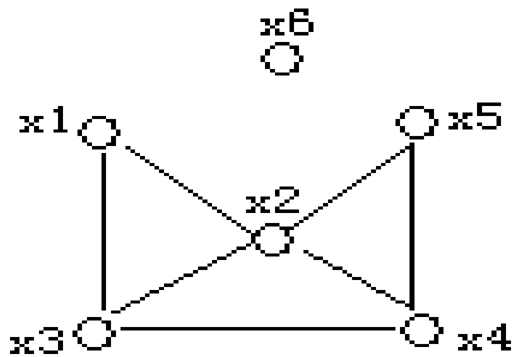
（1）完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个结点构成的单元素的集合.

例如上例的相容关系

r={<X1,X1>,<X1,X2>,<X1,X3),<X2,X1>,<X2,X2>,<X2,X3>,<X2,X4>,<X2,X5>,<X3,X1>,<X3,X2>,<X3,X3>,<X3,X4>,<X4,X2>,<X4,X3>,<X4,X4>,<X4,X5>,<X5,X2>,<X5,X4>,<X5,X5>



可产生相容类{x1，x2}，{x1，x3}，{x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}等等。

相容类{x1，x2}中加进x3组成新的相容类{x1， x2，x3}，

相容类{x1，x3}中加进x2组成新的相容类{x1， x2，x3}，

相容类{x2，x3}中加进x1组成新的相容类{x1， x2，x3}

- 相容类 {x6}和{x2，x4，x5}加入任一新元素，就不再组成相容类，称它们是最大相容类。

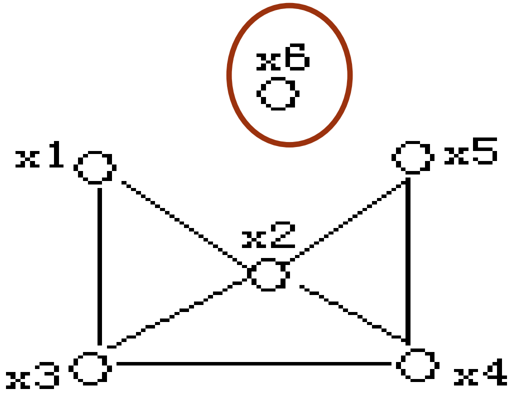
10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.3 （最大相容类） 对非空集合A上的相容关系R，一个相容类若不是任何相容类的真子集，就称为最大相容类，记作C_R。

对最大相容类C_R有下列性质：

$$(\forall x)(\forall y)((x \in C_R \wedge y \in C_R) \rightarrow xRy)$$ 和

$$(\forall x)(x \in A - C_R \rightarrow (\exists y)(y \in C_R \wedge x\not R y))$$



最大相容类

最大相容类的判定：在关系图中

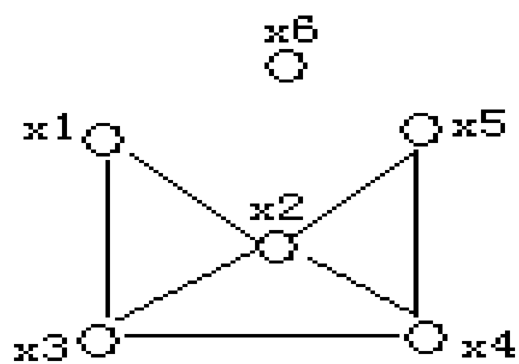
（1）最大完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个孤立结点构成的单元素的集合.

（所谓完全多边形就是其每个顶点都与其它顶点连接的多边形。）

如上面例题中，{x1， x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5}，{x2，x3，x4}都是最大相容类。



所有最大相容类的求解算法？

利用相容关系图可找出所有最大相容类。

(1)最大完全多边形的顶点集合构成最大相容类；

(2) 孤立结点构成最大相容类；

(3)不是完全多边形边的两个端点集合构成最大相容类。

定理**10.7.1** （**最大相容类的存在性**）

对非空有限集合**A**上的相容关系***R***，若***C***是一个相容类，则存在一个最大相容类C_R，使 $C \subseteq C_R$。

设R为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_R，使得$C \subseteq C_R$。

证明：设A={a_1，a_2，……，a_n}，构造相容类序列

$$C_0 \subset C_1 \subset C_2 \subset \ldots, \text{其中} C_0=C$$

且$C_{i+1}= C_i \cup \{a_j\}$，其中j是满足$a_j \notin C_i$而$a_j$与$C_i$中各元素都有相容关系的最小足标。

由于A的元素个数|A|=n，所以至多经过n-|C|步，就使这个过程终止，而此序列的最后一个相容类，就是所要找的最大相容类。

此定理的证明告诉我们找最大相容类的方法。

10.7 相容关系和覆盖

定义10.7.4 覆盖

- 对非空集合A，若存在集合Ω满足下列条件：

  (1)$(\forall x)(x \in \Omega \rightarrow x \subseteq A)$

  (2)$\emptyset \notin \Omega$

  (3)$\cup \Omega = A$

- 则称Ω为A的一个覆盖，称Ω中的元素为Ω的覆盖块。

❑ **划分：**给定一非空集合**A**，**A**的一个划分为非空子集族$\mathbf{S=\{A_1, A_2, \ldots A_m\}}$，满足：

① $\emptyset \notin \mathbf{S}$

② $\forall x \forall y(x, y \in S \land x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)$

③ $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = A$

10.7 相容关系和覆盖

定理10.7.2 （完全覆盖）

对非空集合A上的相容关系R，最大相容类的集合是A的一个覆盖，称为A的完全覆盖，记作$C_R(A)$。而且$C_R(A)$是唯一的。

定理10.7.3 （覆盖与相容关系）

对非空集合A的一个覆盖

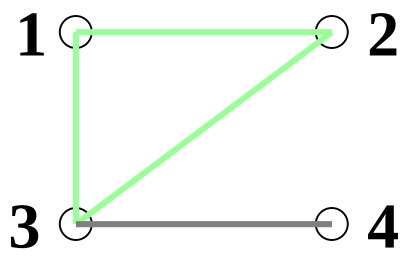
$\Omega=\{A_1,A_2,\ldots A_n\}$，由$\Omega$确定的关系

$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup\ \ldots\cup A_n\times A_n$

是A上的相容关系。

不同的覆盖可能构造出相同的相容关系。

例 设A={1，2，3，4}，集合{{1，2，3}，{3，4}}和{{1，2}，{2，3}，{1，3}，{3，4}}都是A的覆盖，但它们可以产生相同的相容关系如图所示:



定理3 集合A上相容关系 r 与完全覆盖$C_r(A)$存在一一对应。

注意：给定集合A的覆盖不是唯一的，
但完全覆盖是唯一的。

如前面的例子，设A是由下列英文单词组成的集合。

A={cat，teacher，cold，desk，knife，by}

定义关系：

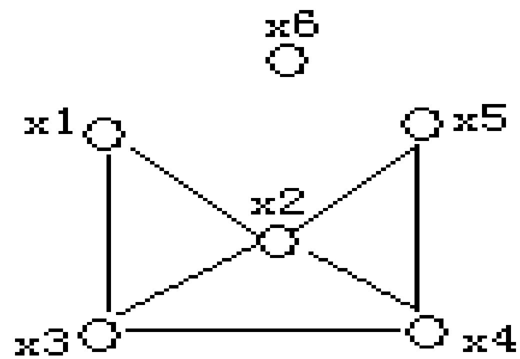
r={<x，y>|x，y∈A，x和y至少有一个相同的字母}。

r是一个相容关系。

r的关系矩阵和关系图分别为：

x_2	1				
x_3	1	1			
x_4	0	1	1		
x_5	0	1	0	1	
x_6	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5

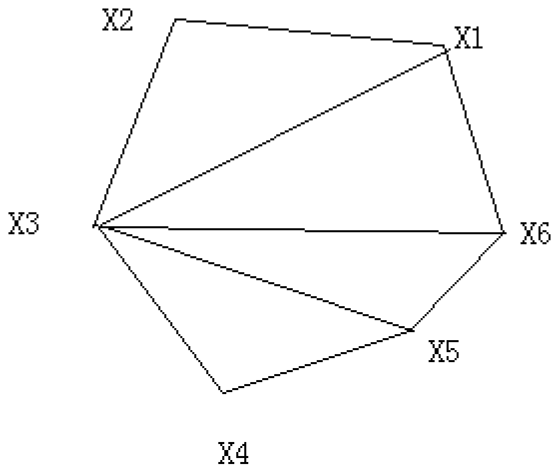
x_6



最大相容类为{x1， x2，x3}，{x6}，{x2，x4，x5},{x2，x4，x3}

集合A的**完全覆盖**$C_r(A)$={ {x1, x2,x3} ,{x6},{x2,x4,x5} ,{x2,x4,x3} }

相容关系图为：



解：最大相容类为:

{x1， x2，x3}，{x1，x3，x6}，{x3，x5， x6}， {x3，x4， x5}。

集合A的完全覆盖:

$C_r(A)$={{x1, x2,x3},{x1,x3,x6}, {x3,x5, x6},{x3,x4, x5}}

相容类: 设r为集合A上的相容关系，若$C \subseteq A$，如果对于C中任意两个元素a_1、a_2有$a_1 r a_2$，称C是由相容关系r产生的相容类。

相容类的判定：在关系图中

（1）完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个结点构成的单元素的集合.

最大相容类: 设r为集合A上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类，称作最大相容类，记作C_r。

最大相容类的判定：在关系图中

（1）最大完全多边形的顶点的集合；

（2）任一条不是完全多边形的边的连线上的两个结点构成的集合；

（3）任一个孤立结点构成的单元素的集合.

设r为有限集A上的相容关系，C是一个相容类，那么必存在一个最大相容类C_r，使得$C \subseteq C_r$。

完全覆盖

在集合A上的给定相容关系r，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_r(A)$。

设$C=\{C_1, C_2, \ldots, C_r\}$是集合A的覆盖，由C决定的关系$R=(C_1\times C_1)\cup(C_2\times C_2)\cup\ldots\cup(C_r\times C_r)$是A上的一个相容关系。

集合A上的相容关系r与完全覆盖$C_r(A)$存在一一对应。

偏序关系

在普通生活中常见的许多粗劣（愚昧）的思维方式，可以通过学习数学来改善。有一种近乎是常见的且容易引起误解的假设，认为事物必须按线性次序来排列，这种假设可以通过学习偏序来消除。 — **Cambridge Report**

- 次序在现实生活中常见：
  - 小于，包含等
- 研究序理论的动机：
  - 研究一般次序关系
  - 推导出一般序关系的性质
  - 这些关系可以应用于所有特定的序关系

10.8 偏序关系 (PARTIAL ORDERING RELATION)

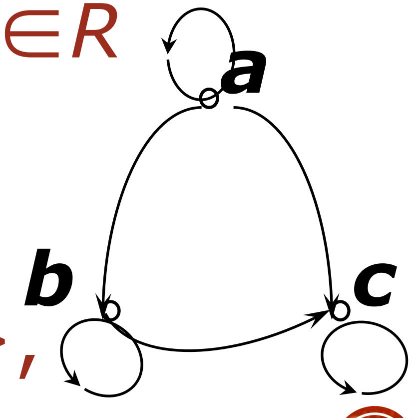
定义10.8.1 （偏序关系 半序关系）

对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系。

在不会产生误解时，偏序关系R通常记作$\leq$。当xRy时，可记作$x \leq y$，读作x“小于等于”y。偏序关系又称弱偏序关系，或半序关系。

偏序关系

- 偏序关系R (记作$\preccurlyeq$)
  - 自反性: $\forall a \in A$, 有$<a,a> \in R$
  - 反对称性: $\forall a,b \in R$, 如果$<a,b> \in R$且$<b,a> \in R$, 则必有$a = b$
  - 传递性: $\forall a,b,c \in A$, 如果$<a,b> \in R, <b,c> \in R$, 必有$<a,c> \in R$
- 例: 偏序关系
  - $A = \{a,b,c\}$
  - $R = \{<a,a>,<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>,<c,c>\}$



偏序关系举例

- 设A是实数集合的非空子集，则A上的小于等于关系和大于等于关系都是A上的偏序关系。
- 设A为正整数集合Z^+的非空子集，则A上的整除关系D_A

  $$D_A = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \mid y\}$$

  是A上的偏序关系。

偏序关系举例

- 设A为一集合，P(A)为A的幂集，则P(A)上的包含关系$R_{\subseteq}$

  $$R_{\subseteq} = \{\langle x, y \rangle \mid x, y \in P(A) \land x \subseteq y\}$$

  是P(A)上的偏序关系。

- 例 A={a, b}， P(A)={∅, {a}, {b}, A}

  试写出P(A)上的包含关系$R_{\subseteq}$。

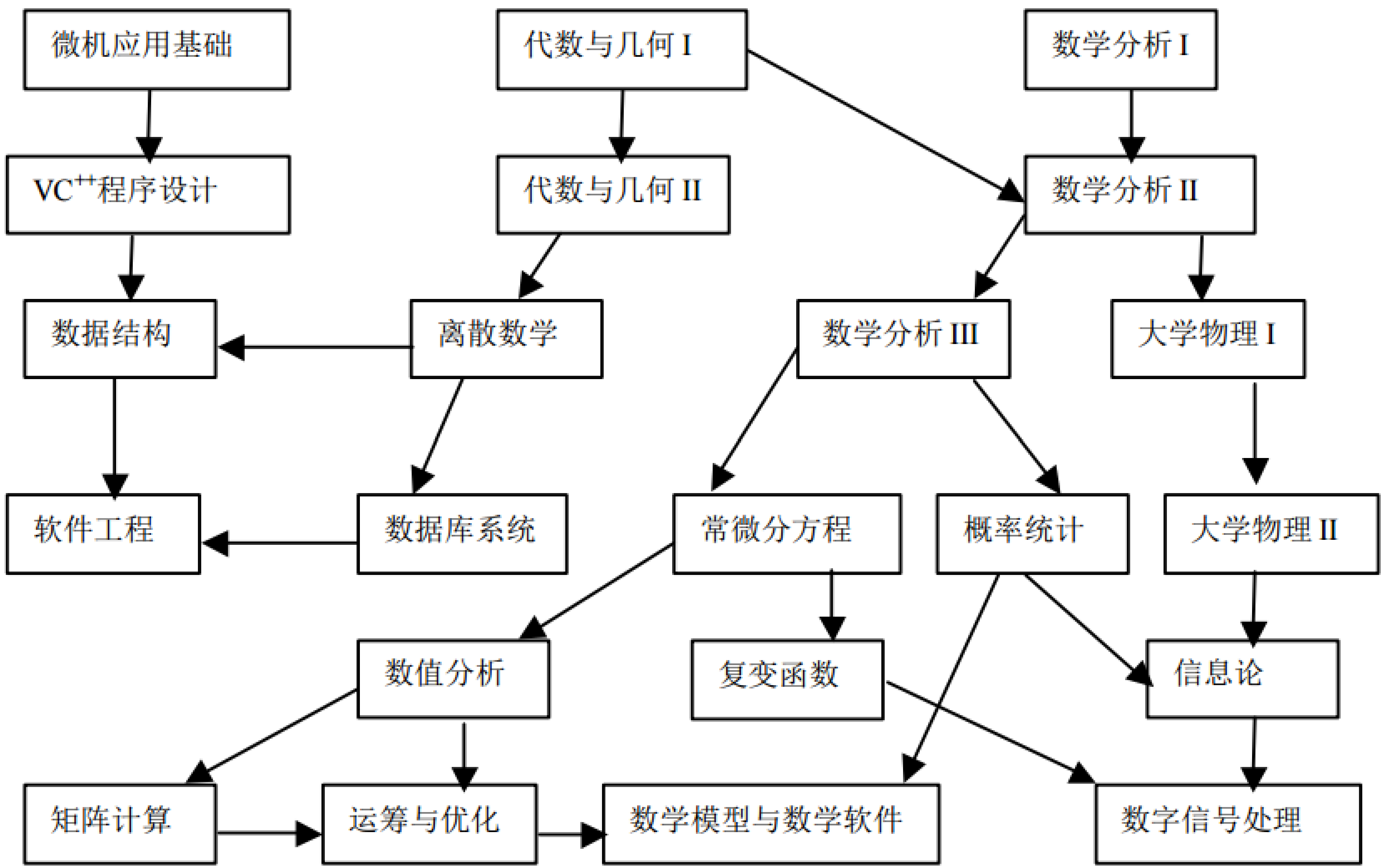
10.8 偏序关系

定义10.8.3 （偏序集）

集合A与A上的关系R一起称为一个结构。集合A与A上的偏序关系R一起称为一个偏序结构，或称偏序集，并记作〈A, R〉。

如〈P(A), ⊆〉是偏序集。

应用：课程设置



微机应用基础
代数与几何 I
数学分析 I
VC++程序设计
代数与几何 II
数学分析 II
数据结构
离散数学
数学分析 III
大学物理 I
软件工程
数据库系统
常微分方程
概率统计
大学物理 II
数值分析
复变函数
信息论
矩阵计算
运筹与优化
数学模型与数学软件
数字信号处理

10.8 偏序关系 (PARTIAL ORDERING RELATION)

定义10.8.2 （拟序关系 强偏序关系）

对非空集合A上的关系R，如果R是非自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系 (Quasi-ordering relation)。

在不会产生误解时，拟序关系R通常记作$<$。当xRy时，可记作$x<y$，读作x“小于”y。拟序关系又称强偏序关系。

定义10.8.1 （偏序关系 半序关系）

对非空集合A上的关系R，如果R是自反的、反对称的和传递的，则称R为A上的偏序关系。

10.8 偏序关系 (PARTIAL ORDERING RELATION)

- 定理10.8.1　R为A上的拟序关系，
  则R是反对称的。

xRy，若yRx，则xRx，与非自反性矛盾。

（可见，偏序与拟序差别只在自反性上）

- 定理10.8.2　对A上的拟序关系R，
  $R \cup R^0$是A上的偏序关系。
- 定理10.8.3　对A上的偏序关系R，
  $R - R^0$是A上的拟序关系。

偏序关系

- 哈斯图
  - 得名于德国数学家Helmut Hasse
  - 用来表示有限偏序集的一种数学图表
    - 偏序集：<A, $\preccurlyeq$>
    - 依据Birkhoff (1948)，这么叫是因为Hasse有效的利用了它们。
    - Hasse不是第一个使用它们的人，它们早就出现在如Vogt (1895)中.
    - 抽象有向无环图的传递简约.

10.8 偏序关系

定义10.8.4 （盖住关系）

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$，如果 $x, y \in A$，$x \leq y$，$x \neq y$，且不存在元素 $z \in A$ 使得 $x \leq z$ 且 $z \leq y$，则称 y 盖住 x。A 上的盖住关系 $\operatorname{cov} A$ 定义为

$$\operatorname{cov} A = \{\langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge y\text{盖住}x\}$$

10.8 偏序关系

- 哈斯图思路：

  ① 所有结点的自回路均省略

  ② 省略所有弧上的箭头，适当排列A中元素的位置，如$a \preccurlyeq b$，则a画在b的下方

  ③ 如$a \preccurlyeq b$，$b \preccurlyeq c$，则必有$a \preccurlyeq c$，a到b有边，b到c有边，则a到c的无向弧省略

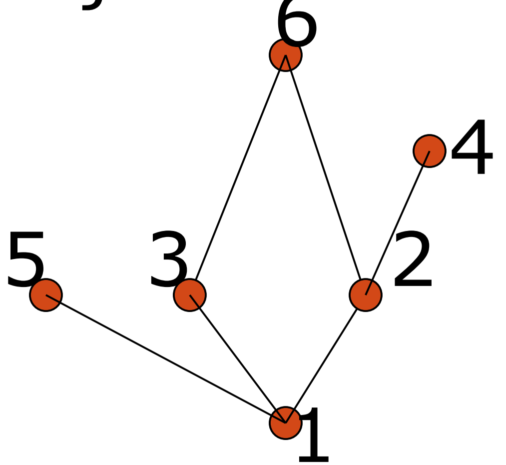
条件2，3等于说如果b盖住a，则画一条从a到b的弧线，否则不画

盖住关系的基数即哈斯图边数。

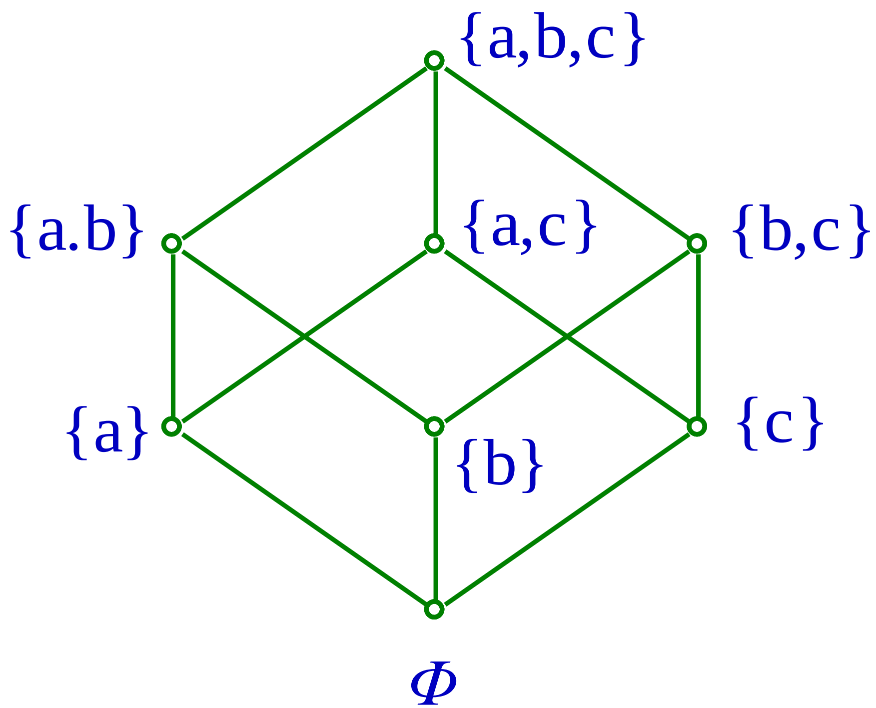
偏序关系

- 例：画出下列偏序集的哈斯图。
  - $\langle\{1,2,3,4,5,6\},R_{整除}\rangle$
  - $R_{整除}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 3,6\rangle\}$

同一层次的顶点无次序关系



例 $A=\{a,b,c\}$, $<P(A),\subseteq>$ 是偏序集，它的哈斯图如下图（图10.8.2）



偏序集中的8个特殊元素(最大元、最小元)

定义 对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B,

如果存在元素$b\in B$，使得任意$x\in B$都有$x\preccurlyeq b$,

则称b为B的最大元素，简称为最大元;

如果存在元素$b\in B$，使得任意$x\in B$都有$b\preccurlyeq x$,

则称b为B的最小元素，简称为最小元。

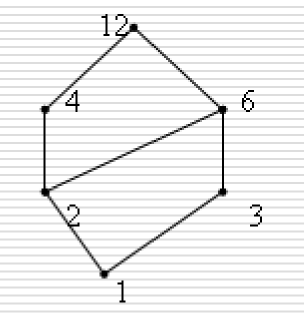
对于例中偏序关系①

（即集合$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系），

令$B1= \{1, 6\}$、$B2= \{1, 2, 3\}$、$B3= \{4, 6, 12\}$、

$B4= \{2, 4, 6\}$、$B5= \{1, 2, 6, 12\}$、$B6= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。

分别求出$B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$和$B6$的最大元和最小元。



整除关系

解:

对于集合$B1= \{1, 6\}$，最大元为6，最小元为1；

对于集合$B2= \{1, 2, 3\}$，元素2和3不可比，

所以，不存在最大元，最小元为1；

对于集合$B3= \{4, 6, 12\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最小元，最大元为12；

对于集合$B4= \{2, 4, 6\}$，元素4和6不可比，

所以，不存在最大元，最小元为2；

对于集合$B5= \{1, 2, 6, 12\}$，最大元为12，最小元为1；

对于集合$B6= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，最大元为12，最小元为1。

偏序集中的8个特殊元素(极大元、极小元)

定义 对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B，
如果存在元素$b\in B$，使得B中不存在其它元素x满足$b\preccurlyeq x$，
则称b为B的极大元素，简称为极大元；

如果存在元素$b\in B$，使得B中不存在其它元素x满足$x\preccurlyeq b$，
则称b为B的极小元素，简称为极小元。

注意：最大（小）元 vs. 极大（小）元
最大（小）元必须与B中每个元素都可比，
极大（小）元无此要求(只要求没有比它更大或更小的元素)。

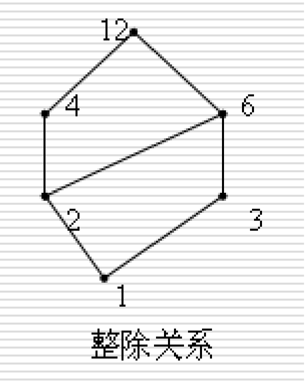
对于偏序关系①

（即集合$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系），

令$B1=\{1, 6\}$、$B2=\{1, 2, 3\}$、$B3=\{4, 6, 12\}$、

$B4=\{2, 4, 6\}$、$B5=\{1, 2, 6, 12\}$、$B6=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。

分别求出$B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$和$B6$的极大元和极小元。



解:

对于集合$B1=\{1, 6\}$，极大元为6，极小元为1；

对于集合$B2=\{1, 2, 3\}$，极大元为2和3，极小元为1；

对于集合$B3=\{4, 6, 12\}$，极大元为12，极小元为4和6；

对于集合$B4=\{2, 4, 6\}$，极大元为4和6，极小元为2；

对于集合$B5=\{1, 2, 6, 12\}$，极大元为12，极小元为1；

对于集合$B6=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$，极大元为12，极小元为1。

10.8 偏序关系

定义10.8.5 （最小元 最大元 极小元 极大元）

对偏序集 $\langle A, \le \rangle$，且 $B \subseteq A$，(y在B中)

(1) 若 $(\exists y)(y \in B \land (\forall x)(x \in B \to y \le x))$

则称 y 为 B 的最小元，

(2) 若 $(\exists y)(y \in B \land (\forall x)(x \in B \to x \le y))$

则称 y 为 B 的最大元，

(3) 若 $(\exists y)(y \in B \land (\forall x)((x \in B \land x \le y) \to x = y))$

则称 y 为 B 的极小元，

(4) 若 $(\exists y)(y \in B \land (\forall x)((x \in B \land y \le x) \to x = y))$

则称 y 为 B 的极大元。

注意几个区别

对于偏序集A上的子集B，

（1）B中的最小元应小于等于B中其它各元；

（2）B中的极小元应不大于B中其它各元（它小于等于B中一些元，可与B中另一些元无关系）；

（3）最小元（最大元）不一定存在，若存在必唯一；

（4）在非空有限集合B中，极小元（极大元）必存在，但不一定唯一；

（5）极大元不一定是最大元，但最大元显然是极大元；

偏序集中的8个特殊元素(上界、下界)

定义　对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B，

如果存在元素$a\in A$，使得任意$x\in B$都有$x\preccurlyeq a$，

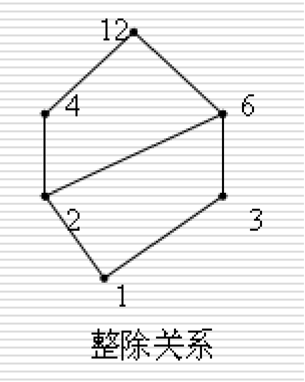
则称a为子集B的上界；

如果存在元素$a\in A$，使得任意$x\in B$都有$a\preccurlyeq x$，

则称a为子集B的下界。

注意：B的上（下）界不一定是B中的元素！

对于偏序关系（即集合$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系），令$B1= \{1, 6\}$、$B2= \{1, 2, 3\}$、$B3= \{4, 6, 12\}$、$B4= \{2, 4, 6\}$、$B5= \{1, 2, 6, 12\}$、$B6= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。分别求出$B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$和$B6$的上界和下界。



解:

对于集合B1= {1, 6}，上界为6和12，下界为1；

对于集合B2= {1, 2, 3}，上界为6和12，下界为1；

对于集合B3= {4, 6, 12}，上界为12，下界为1和2；

对于集合B4= {2, 4, 6}，上界为12，下界为1和2；

对于集合B5= {1, 2, 6, 12}，上界为12，下界为1；

对于集合B6= {1, 2, 3, 4, 6, 12}，上界为12，下界为1。

偏序集中的8个特殊元素(上确界,下确界)

定义　对于偏序集$<A, \preccurlyeq>$和集合A的任意子集B，

如果存在B的某个上界a，使得对于B的任意上界x都有$a \preccurlyeq x$，

则称a为子集B的最小上界或上确界，记为 $\sup(B) = a$；

如果存在子集B的某个下界a，使得B的任意下界x都有$x \preccurlyeq a$，

则称a为子集B的最大下界或下确界，记为$\inf(B) = a$。

说明：

令C是由B的所有上界组成的集合，

则C的最小元c称为B的上确界；

令C是B的所有下界的集合，

则C的最大元c称为B的下确界。

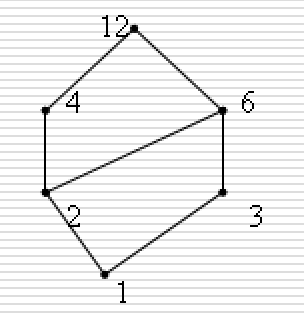
对于偏序关系①

（即集合$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$上的整除关系），

令$B1= \{1, 6\}$、$B2= \{1, 2, 3\}$、$B3= \{4, 6, 12\}$、

$B4= \{2, 4, 6\}$、$B5= \{1, 2, 6, 12\}$、$B6= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$。

分别求出$B1$、$B2$、$B3$、$B4$、$B5$和$B6$的上确界和下确界。



整除关系

解：

对于集合B1，上确界为6，下确界为1；

对于集合B2，上确界为6，下确界为1；

对于集合B3，上确界为12，下确界为2；

对于集合B4，上确界为12，下确界为2；

对于集合B5，上确界为12，下确界为1；

对于集合B6，上确界为12，下确界为1。

10.8 偏序关系

定义10.8.6 （上界 下界 上确界 下确界）(y在A中)

对偏序集 $\langle A, \leq \rangle$ 且 $B \subseteq A$

(1) 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \leq y))$

则称y为B的上界，

(2) 若 $(\exists y)(y \in A \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow y \leq x))$

则称y为B的下界，

(3) 若集合 $C = \{y \mid y\text{是 }B\text{ 的上界}\}$

则C的最小元称为B的上确界或最小上界

(4) 若集合 $C = \{y \mid y\text{是 }B\text{的下界}\}$

则C的最大元称为B的下确界或最大下界

8大元的性质

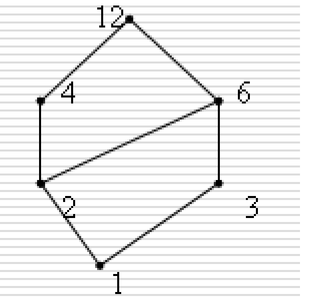
定理 对于偏序集$<A,\preccurlyeq>$和集合A的任意子集B:

① 若b为B的最大元，则b为B的极大元、上界和上确界;

② 若b为B的最小元，则b为B的极小元、下界和下确界;

③ 若a为B的上界且$a \in B$，则a为B的最大元;

④ 若a为B的下界且$a \in B$，则a为B的最小元。



整除关系

8大元的性质

定理 对于偏序集$<A, \preccurlyeq>$和集合A的任意子集B:

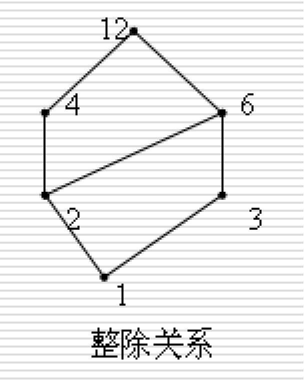
① 若B有最大元，则B的最大元惟一；

② 若B有最小元，则B的最小元惟一；

③ 若B有上确界，则B的上确界惟一；

④ 若B有下确界，则B的下确界惟一；

⑤ 若B为有限集，则B的极大元、极小元恒存在。



偏序关系

- 可比：a与b可比 $\Leftrightarrow$ $a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$
  - 可比不同于等于
- 例：A={1，2，3}，$\preccurlyeq$是A上的整除关系
  - 1，3可比
- 全序关系R：R是A上的偏序关系，满足：
  - $\forall a,b \in A$, a与b可比
- 例：实数上的≤,≥关系是全序关系

10.8 偏序关系

定义10.8.8（全序关系与全序集）

对偏序集$\langle A, \leq \rangle$，如果对任意的 $x, y \in A$，x和y都可比，则称≤为A上的全序关系 **(Total ordering relation)**，或称线序关系。并称$\langle A, \leq \rangle$为全序集。

偏序与全序

- 偏序只对部分元素成立关系R，全序对集合中任意两个元素都有关系R。
- 例如：
  - 集合的包含关系就是半序，也就是偏序，因为两个集合可以互不包含；
  - 而实数中的大小关系是全序，两个实数必有一个大于等于另一个；
  - 又如：复数中的大小就是半序，虚数不能比较大小。

判断下列关系是否为全序关系？并给出其哈斯图。

① 集合{2, 3, 4, 6, 8, 12}上的整除关系$R1$；

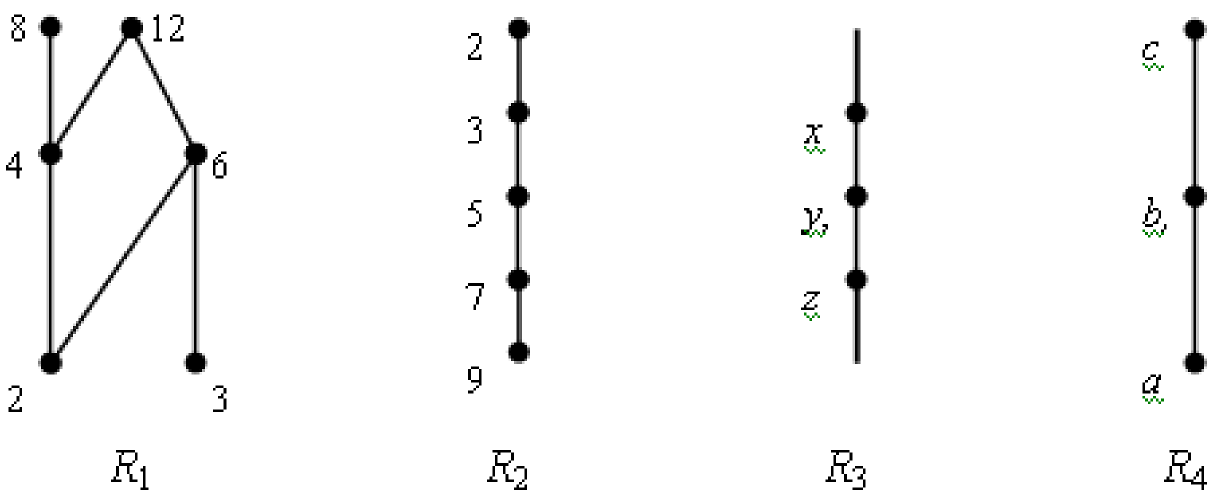
② 集合{2, 3, 5, 7, 9}上的大于等于关系$R2$；

③ 实数集合上的小于等于关系$R3$；

④ 集合$\{a, b, c\}$上的关系$R4=\{<a,a>, <b,b>, <c,c>, <a,b>, <b,c>, <a,c>\}$；

解：关系①、②、③和④都是偏序关系。

②、③和④都是全序关系；①不是全序关系。



谢　　谢

myc@mail.tsinghua.edu.cn