Discrete Mathematics

离散数学(1)

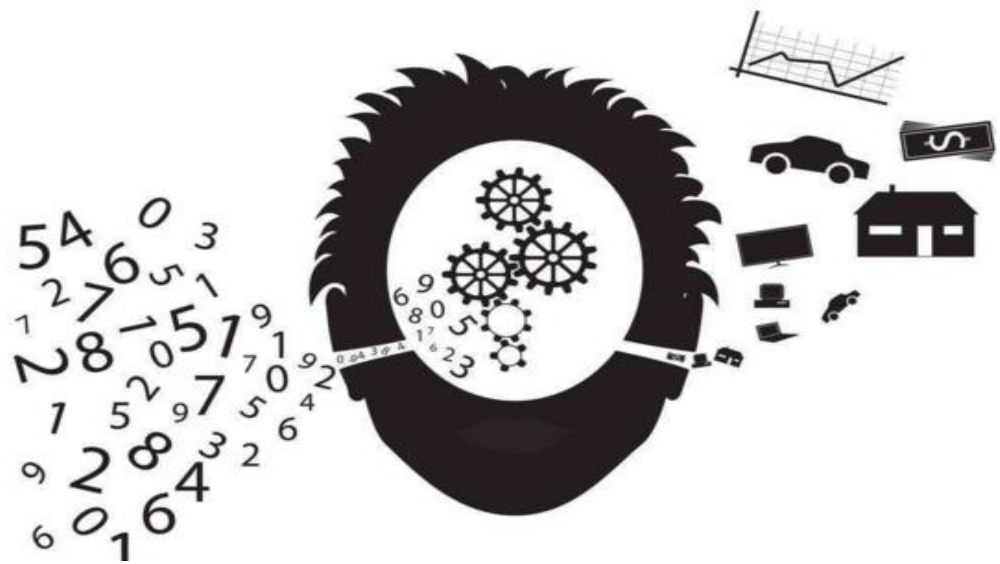
绪论与课程简介

马昱春

清華大學
Tsinghua University

提纲

- 什么是离散数学？
- 为什么要学离散数学？
- 如何学好离散数学？



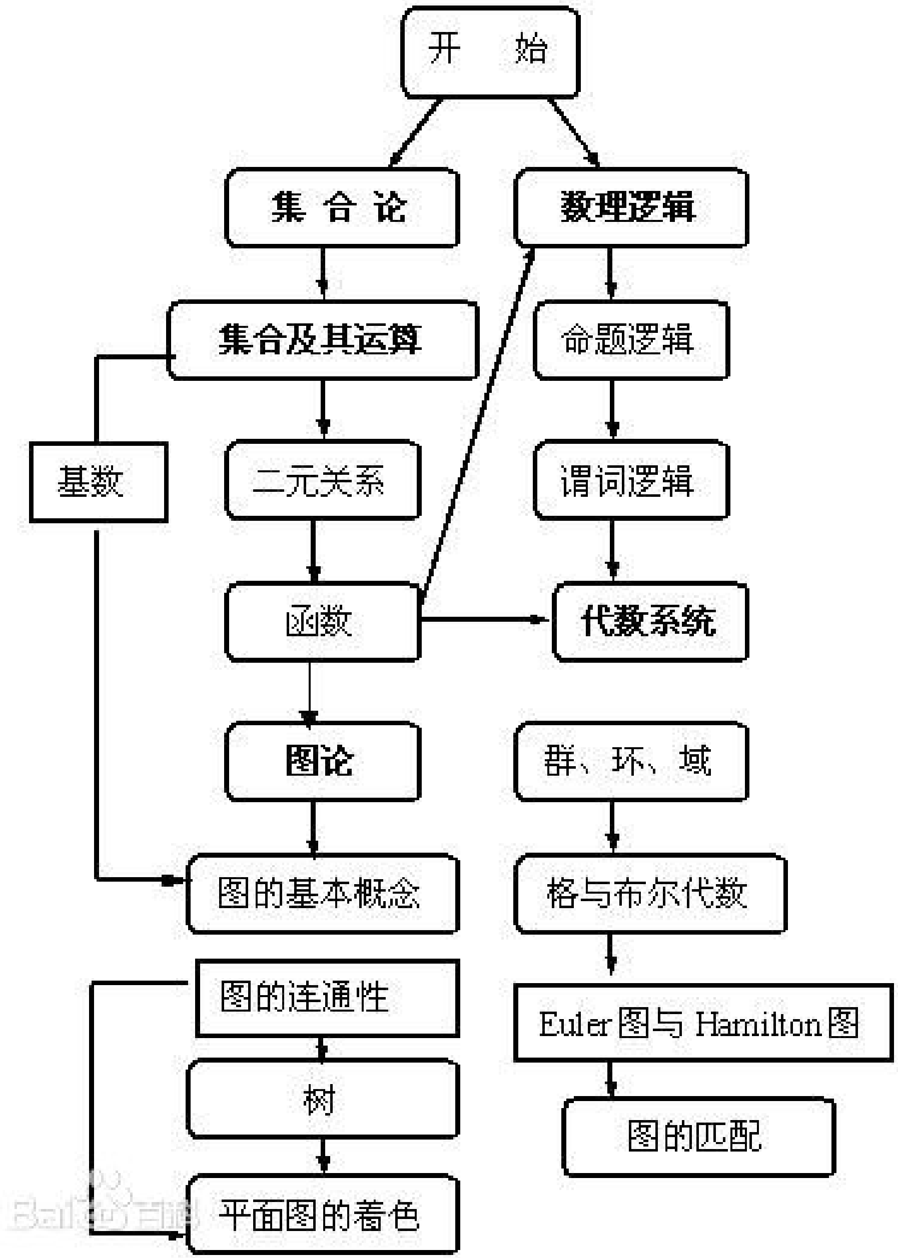
什么是离散数学？

离散数学（数学学科） 编辑

本词条由"科普中国"百科科学词条编写与应用工作项目 审核。

离散数学(Discrete mathematics)是研究离散量的结构及其相互关系的数学学科，是现代数学的一个重要分支。离散的含义是指不同的连接在一起的元素，主要是研究基于离散量的结构和相互间的关系，其对象一般是有限个或可数个元素。离散数学在各学科领域，特别在计算机科学与技术领域有着广泛的应用，同时离散数学也是计算机专业的许多专业课程，如程序设计语言、数据结构、操作系统、编译技术、人工智能、数据库、算法设计与分析、理论计算机科学基础等必不可少的先行课程。通过离散数学的学习，不但可以掌握处理离散结构的描述工具和方法，为后续课程的学习创造条件，而且可以提高抽象思维和严格的逻辑推理能力，为将来参与创新性的研究和开发工作打下坚实的基础。

Discrete mathematics is the study of mathematical structures that are fundamentally discrete rather than continuous. In contrast to real numbers that have the property of varying "smoothly", the objects studied in discrete mathematics – such as integers, graphs, and statements in logic[1] – do not vary smoothly in this way, but have distinct, separated values.[2] Discrete mathematics therefore excludes topics in "continuous mathematics" such as calculus and analysis. Discrete objects can often be enumerated by integers. More formally, discrete mathematics has been characterized as the branch of mathematics dealing with countable sets[3] (sets that have the same cardinality as subsets of the natural numbers, including rational numbers but not real numbers). However, there is no exact definition of the term "discrete mathematics."[4] Indeed, discrete mathematics is described less by what is included than by what is excluded: continuously varying quantities and related notions.


开 始
集 合 论
数理逻辑
集合及其运算
命题逻辑
基数
二元关系
谓词逻辑
函数
代数系统
图论
群、环、域
图的基本概念
格与布尔代数
图的连通性
Euler 图与 Hamilton 图
树
图的匹配
平面图的着色

什么是离散数学

- 离散数学(discrete mathematics)是
  - “研究离散结构的数学分科。” —《辞海》79年版, P355
  - 现代数学的重要分支
  - 计算机科学基础理论的核心课程
- 研究离散对象的的结构及其相互间关系的数学分支
  - 离散:只能用自然数或整数单位计算的变量.如自然数集
  - 连续:在一定区间内可以任意取值的变量. 如实数集
    - 微积分就是研究连续函数的数学分支

维基百科（Wikipedia）

离散数学是数学的几个分支的总称，研究基于离散空间而不是连续的数学结构。

与光滑变化的实数不同，离散数学的研究对象——例如整数、图和数学逻辑中的命题——不是光滑变化的，而是拥有不等、分立的值。

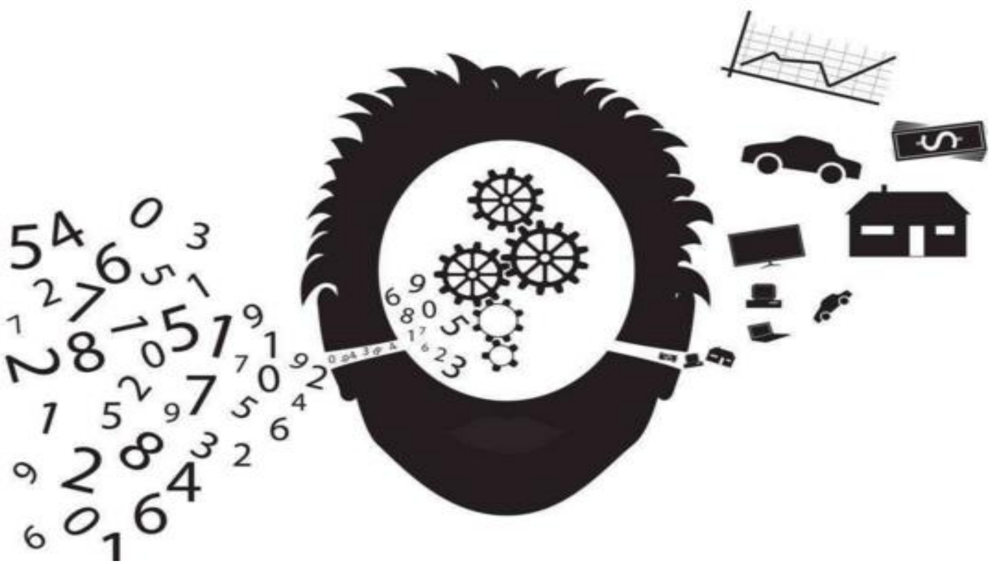
因此离散数学不包含微积分和分析等"连续数学"的内容。

维基百科（Wikipedia）

- 离散对象经常可用整数来**枚举**。更一般地，离散数学被视为处理**可数集合**的数学分支。
- 但应该说，离散数学尚不存在学术界普遍认可的定义。
- 实际上，离散数学经常被定义为不包含连续变化量及相关概念的数学，甚少被定义为包含什么内容的数学。

提纲

- 什么是离散数学？
- 为什么要学离散数学？
- 如何学好离散数学？



可以求解的问题

- 计算机系统中，有多少种方式可以选择一个合法的口令？
- 怎样设计两个整数相加的电路？
- 如何证明一个排序算法能正确排序？
- 网络上两台计算机之间是否存在通路？
- 怎样加密信息使得只有预期收件人才能阅读它？
- 怎样识别垃圾email消息？

离散数学与计算机科学的关系

- 数理逻辑：人工智能、程序正确性证明、程序验证等
- 集合论：关系数据库模型等
- 代数结构：软件规范、形式语义、编译系统、编码理论、密码学、数据仓库等
- 图论：数据结构、数据库模型、网络模型等
- 组合数学：算法分析与设计、编码理论、容错等

离散数学课程说明

- 研究对象----离散个体及其结构
- 研究思想----以集合和映射为工具、体现公理化和结构的思想
- 研究内容----包含不同的数学分支，模块化结构
  - 数理逻辑：推理、形式化方法
  - 集合论：离散结构的表示、描述工具
  - 代数结构：离散结构的代数模型
  - 图论：离散结构的关系模型
  - 组合数学：离散结构的存在性、计数、枚举、优化、设计

数理逻辑的研究内容

- **简单概括：两个演算加四论**

  命题演算与谓词演算 1-3, 4-5（章）

  集合论（集合、关系、函数、基数）9-12

  模型论（形式语言语法与语义间的关系）7

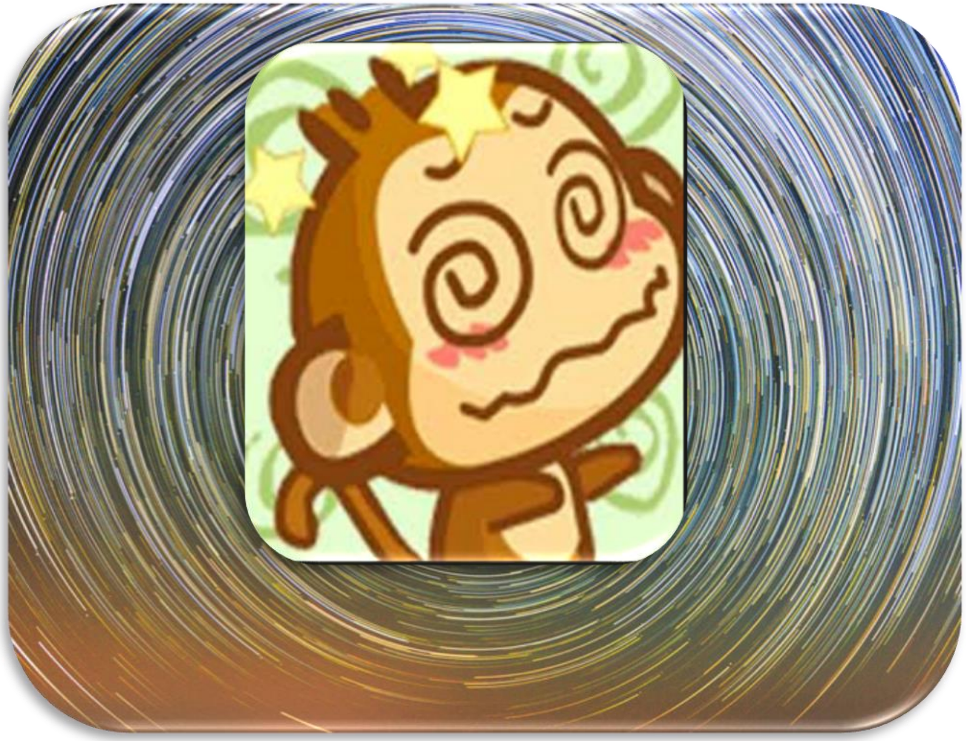
  递归论（可计算性与可判定性）6

  证明论（数学本身的无矛盾性）8

教材和参考书

- 教材
  - [T1] 数理逻辑与集合论(第2版),石纯一等编著, 清华大学出版社.
- 参考书
  - [R1] Discrete Mathematics and Its Applications, 第7版,K. Rosen,机械工业出版社.
  - [R2]屈婉玲, 耿素云, 张立昂. 离散数学, 高等教育出版社.

离　散　语　文



离散数学
形散神不散
数学与语文
万变不离逻辑

为什么要学习离散数学

- 提高数学论证和求解能力
- 培养抽象思维能力和逻辑推理能力（数理逻辑）
- 信息在计算机中是以离散形式存储的：为形式化描述方法奠定数学基础
  - 指专门用于描述、建立和验证计算机系统的数表示法
- 是计算机科学和技术的数学基础
  - 数据结构, 算法, 数据库理论, 自动机理论, 形式语言, 编译理论, 计算机安全, 操作系统, 人工智能, 数字电路

离散数学的重要性：应用

后续课程的基础，十分有助于深入学习和研究。

- 程序设计语言
- 数据结构与算法
- 计算方法（数值分析）
- 编译原理
- 操作系统
- 信息检索与数据库系统
- 形式语言与自动机
- 可计算性与计算复杂性理论
- 人工智能与机器人
- 计算机网络与通信等

程序设计语言简例

- IF … THEN … ELSE …
- IF P THEN Q ELSE S

例 $S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

if（x > 0）then S = 1;

if（x == 0）then S = 0

else S = -1;

程序设计语言简例

- IF … THEN … ELSE …
- IF *P* THEN *Q* ELSE *S*

例 $S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

if （x >0） then S = 1;

if （x == 0） then S = 0

else S = -1;

◆ if（x >0） then S = 1

else if（x == 0） then S = 0

else S = -1;

信息检索

- 在信息检索中广泛使用命题逻辑的知识和技术
- 简例：联结词AND用于匹配同时包含两个或多个检索项的记录
- 联结词OR用于匹配包含两个或多个检索项之一的记录
- 联结词NOT用于排除某个特定的检索项
- 检索举例（信息检索举例）

  discrete AND mathematics

  “discrete mathematics”

自然语言处理和日常交流

- 丈夫看妻子在厨房里忙着，问道：“我能帮你吗”？

- 妻子说：

  “好啊，那你拿那袋马铃薯，一半削皮，放在锅里煮”。

离散数学教你严谨地沟通

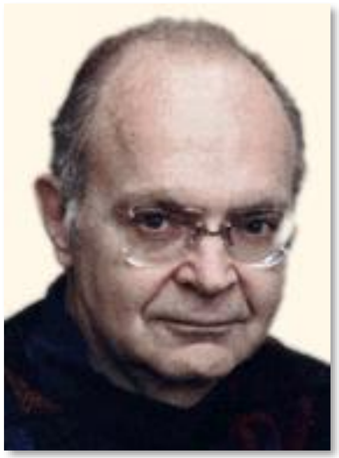
离散数学的重要性：大师的体会

1930-2002

“我现在年纪大了，搞了这么多年的错误不知犯了多少，现在觉悟了。我想，假如我早年在数理逻辑上好好下点工夫的话，我就不会犯这么多的错误。不少东西逻辑学家早就说过了，可是我并不知道。如果我能年轻二十岁的话，我就回去学逻辑。”

— E. W. Dijkstra（狄克斯特拉）
1972年Turing奖获得者

离散数学的重要性：大师的体会



1938-

用一组基本的指令来编制一个计算机程序，非常类似于从一组公理来构造一个数学证明。

— D. E. Knuth

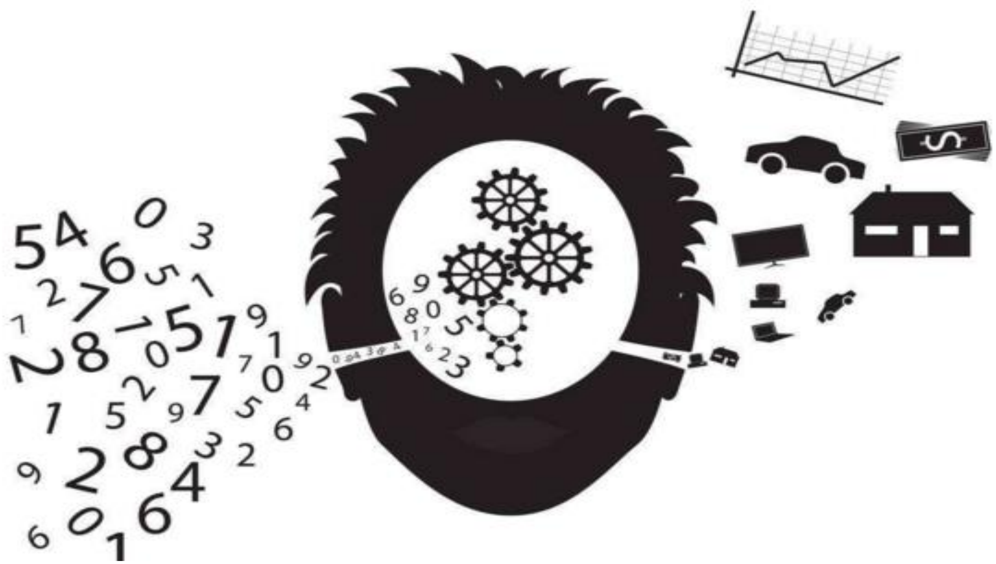
1974年Turing奖获得者

代表作：The Art of Computer Programming

Homepage - http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/

提纲

- 什么是离散数学?
- 为什么要学离散数学?
- 如何学好离散数学?



学习目标

本课程是计算机科学基础理论的重要课程，通过课时内的学习及课外练习，应能达到以下目标：

1. 对数理逻辑与集合论的基本概念有较深入的了解；
2. 系统地掌握命题演算、谓词演算及朴素集合论的经典内容；

学习本课程需具备的相关知识

- 一般而言，本课程并无先修课程要求。
- 只要具备高中所学的集合知识和简单的逻辑概念便可学习本课程。
- 若具有高等数学及普通线性代数的基础将十分有助于对本课程的理解和掌握。

知乎 首页 发现 话题 搜索你感兴

数学 离散数学

如何学好离散数学？

2 条评论 分享 邀请回答 ···

灵儿
计算机萌妹子

27 人赞同了该回答

也许有很多方式，但是
最快的方式……大概是明天考试吧

柳光晏

14 人赞同了该回答

概念很重要！！概念很重要！！概念很重要！！
证明很坑爹！！证明很坑爹！！证明很坑爹！！

知乎用户

19 人赞同了该回答

离散数学中的概念和定理偏多，思维较抽象，证明强调技巧性但变化不多。我觉得这是一门很需要找"感觉"的数学科目。首先要强记所学内容的相关定义和定理，随后学习证明过程时必须结合定义和定理，即每推一步就弄清其根据的是什么定义或定理。用这种方法学习一段时间后对证明就有一定感觉了，再做证明题就会感觉顺手很多。

上面提到这是一门很强调"感觉"的数学学科，与英语短文背多了语感就好的原理类似，在遇到瓶颈时用学习文科的方式（即在理解的基础上强记证明过程）来学习也是一个不错的办法。

课程要求

- 每周五交上周的作业
  - 写清名字与学号
  - 作业需手写后拍照并转成pdf文件上传至网络学堂提交。
  - 要求每次作业只能提交一个pdf文件。
  - 第n周作业的截止时间是第n+1周周五**<u>24点</u>**之前，在网络学堂上提交（其中调休前的作业可在国庆后的周五提交，具体会在网络学堂上公布）。每次作业满分10分，如晚交作业则按每天扣除此次作业0.5分计算（累计最多扣除5分或扣到0分为止），**<u>不足一天按一天计算</u>**
- 考核方式：平时作业30%，期末考试70%

- 课后答疑
- 微信群答疑

- 助教和老师
  - 主讲教师：马昱春
    133 9170 1679 myc@tsinghua.edu.cn
  - 助教信息详见作业说明文档

数理逻辑概论

什么是逻辑?

- 逻辑是研究推理(reasoning)的科学.
  - 英文logic源自希腊文logos(言词,思想,理性等等)
  - 中文“逻辑”一词由严复首先译用
    - 又称名理学,名学,论理学,理则学,辩学等.
- 西方逻辑起源可追溯到古希腊
  - 亚里士多德(Aristotle)
  - 斯多葛学派(the Stoics)
- 古代东方逻辑
  - 中国的名辩之学(名墨儒道各家)
  - 古印度的因明

逻辑学--七大基础学科之一

- 1974年，联合国教科文组织编制的学科分类中，逻辑学被列为七大基础学科之一。
  - 数学
  - 逻辑学
  - 天文学和天体物理学
  - 地球科学和空间科学
  - 物理学
  - 化学
  - 生命科学

逻辑的作用

- 如何获得知识(真理)?
  - 观察, 阅读, 讨论, 顿悟, ……
  - 从“旧知”经“推理”得出“新知”
    - 若“旧知”和“推理”都正确, 则“新知”正确.
    - 若“新知” 错而“推理”正确, 则抛弃“旧知”.
    - 逻辑研究怎样的推理是可靠的.
    - 逻辑还研究一组知识是否协调(一致, 相容).
- 逻辑思维能力是学习工作乃至日常生活中的重要能力.

逻辑的分类

- 逻辑学是研究人的思维形式及思维规律的科学
- 由于研究的对象和方法各有侧重而又分为辩证逻辑、形式逻辑。
- 辩证逻辑：是研究人的思维中的辩证法。
- 形式逻辑：是研究人的思维的形式和一般规律。

人的思维过程：

概念 $\Rightarrow$ 判断 $\Rightarrow$ 推理

推理:是由若干个已知的判断(前提)，推出新的判断(结论)的思维过程。

数理逻辑的引入

- 数理逻辑：是形式逻辑与数学相结合。
- 所谓“数学方法”：是建立一套有严格定义的符号，来研究形式逻辑。所以数理逻辑也称“符号逻辑”。
- 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化，即变成象数学演算一样完全形式化了的逻辑演算。
- 使用计算机必须首先学会编“程序”，那么什么是程序？

  程序＝算法＋数据

  算法＝逻辑＋控制
- 我们只讨论“命题逻辑”和“谓词逻辑”

数理逻辑 · 概念

数理逻辑（Mathematical Logic）

数学各领域中公共使用的逻辑推理，是逻辑学的一个分支。

——《岩波数学辞典》日本数学会
中译本书名《数学百科辞典》

数理逻辑·概念

- 用数学方法（主要是建立符号体系的方法）来研究推理的形式结构和推理规律的数学学科。
- 引入一套符号体系来研究推理规律的学科，故又称之为符号逻辑（Symbolic Logic）。

数理逻辑 · 概念

- 形式结构：
  概念、判断、推理之间的结构与联系

- 判断： 依据概念对事物是否具有某种
  属性进行肯定或否定的回答

- 推理：由一个或几个判断推出另一个
  判断的思维形式

数理逻辑的发展历程

数理逻辑前史时期 - 古典形式逻辑时期

这一时期主要工作有亚里士多德的三段论，斯多阿学派的命题逻辑和中世纪形式逻辑的形成与发展。

↓

数理逻辑初创时期 - 逻辑代数时期

数理逻辑创建于17世纪末，创始人是德国哲学家和数学家莱布尼茨。这一时期的主要成就有莱布尼茨的数理逻辑的伟大思想的形成，逻辑代数和关系逻辑的建立和发展。

↓

数理逻辑的奠定时期

这一时期从1879年弗雷格G. Frege《概念语言》的出版到希尔伯特的元数学纲领的提出，主要工作有逻辑演算的建立，朴素集合论、公理集合论以及第三次数学危机。为解决第三次数学危机所取得的结果：逻辑类型论，直觉主义数学基础和逻辑，形式公理学和证明论。

↓

数理逻辑发展初期

这一时期是20世纪30十年代，主要工作体现为哥德尔(Godel)的几项重大成果 - 完全性定理、理、不完全性定理和连续统假设的一致性等

↓

数理逻辑现代发展时期

这一时期从20世纪40年代开始。主要内容是各种非经典逻辑和四论 - 模型论、集合论、递归论和证明论的突飞猛进的发展

逻辑学的早期创始人

- 亚里士多德（公元前384—322）
  被公认为是逻辑学的创始人

- 柏拉图（约公元前427—347）
  首先把逻辑学的思想方法引入几何学

亚里士多德

- 三段论(syllogism)：从两个前提推出一个结论的逻辑论证形式
  - 1.大前提(major premise) 人都是两足动物
  - 2.小前提(minor premise) 希腊人都是人
  - 3.结论(conclusion) 希腊人都是两足动物
- 三段论是传统演绎推理的核心,在西方逻辑中一直处于统治地位,直至19世纪被数理逻辑(一阶谓词逻辑)所取代.

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

1. 德国 G.W.Leibniz（1646-1716）

- 首先把数学引入形式逻辑，明确提出用数学方法研究推理。
- 设想建立通用符号，通用语言，以便统一所有学科，成立世界科学院
- 试图以数学为标准将一切学科体系化
- 名　言：
  “如果我少受干扰，或者我更年轻，或者有青年人帮助我，我有望作出一种一般代数，用它可以将推理的正确性全部化为计算。”

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

2. 英国 G. Boole (1815-1864)

   德国 A.de Morgan (1806-1876)

   德国 Schroder (1841-1902)

- 共同创立了逻辑代数和关系代数
- 1847年 Boole 实现了命题演算

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

3. 德国 G.Frege (1848-1925)

- 1879年建立了第一个谓词演算系统
- 发表《计算概念》一书

名 言：

“数学的本质就在于

一切能证明的都要证明。”

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

4. 英国 B.Russell (1872-1970)

   与Whitehead合著的杰作

   三大卷本的《数学原理》问世

- 从逻辑学的基本法则出发建立了自然数理论，实数理论及解析几何学等。
- 名言：

  “逻辑学是数学的青年时代，

  而数学是逻辑学的壮年时代。”

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

5. 德国 G.Cantor (1845-1918)

   集合论的创始人，无穷

   德国 D.Hilbert (1862-1943)

   1900 数学大会　23个数学问题

   奥地利 K.Godel

- 1931年提出 Godel 不完全性定理

数理逻辑发展史中的若干代表人物与里程碑事件

6. 英国 Alan. M. Turing（图灵）

   1936年引入Turing机

（一种抽象的计算机模型）

例：根据下面事实找出凶手

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。　　7. 午夜时屋里灯灭了。

令A:清洁工谋害了经理　　B:秘书谋害了经理

C:谋害发生在午夜前　D:秘书的证词是正确的

E:午夜时屋里灯光灭了 H:清洁工富裕　G:经理有钱

$A \vee B \quad A \rightarrow \neg C \quad D \rightarrow C \quad \neg D \rightarrow \neg E \quad H \rightarrow \neg A \quad G \wedge \neg H \quad E$

$$E \Rightarrow B$$

数理逻辑的研究内容

“两个演算加四论”

命题演算与谓词演算 1–3，4–5（章）

集合论（集合、关系、函数、基数）9–12

模型论（形式语言语法与语义间的关系）7

递归论（可计算性与可判定性）6

证明论（数学本身的无矛盾性）8

“两个演算加一论”

第一章 命题逻辑的基本概念

1.1　命题

- 计算机是进行推理的重要工具
- 而推理必须包含前提和结论
- 前提和结论均由陈述句组成，因而陈述句就成为推理的基本要素
- 逻辑中所要求的是能判断真假的陈述句
- 从介绍逻辑的基本成分—命题开始讨论

命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。
2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值：命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题：与事实相符或表达的判断正确；真值为真

假命题：与事实不符或表达的判断错误；真值为假

规定：任何命题的真值都是唯一的；

不能非真非假，也不能既真又假。

命题判断并讨论真值

例1.1

（1）北京是中国的首都

（2）6是整数

（3）6是素数

（4）2 + 2 = 3

（5）2050年元旦北京下大雪　　　　（真值？）

（6）火星上有水

（7）任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和（真值？）

（5）2050年元旦北京下大雪　　　　（真值？）
（6）火星上有水
（7）任意充分大的偶数都可以表示成两个素数之和（真值？）

- （5）、（6）和（7）的真值尽管目前尚不清楚，但它们的真值是客观存在且唯一的。
- 目前暂时无法确定，将来总会真相大白
- 真值待定

命题判断并讨论真值

例1.2

（1）打开窗户。　　　　　(祈使句)

（2）今天天气真好啊！　　(感叹句)

（3）明天有雨吗？　　　　(疑问句)

(4) 和 (5) 的真值与命题讨论

（4） x大于y, 当x，y为变量时，无确定的真值。或理解为根据x，y的不同取值，它可真可假，无唯一的真值，因而多数教材不将其作为命题。

（5）我正在说假话 的情形比较特殊，

思考题，试分析其真值。

命题的符号化

- 用小写英文字母p，q，r，⋯表示命题，
- 注：教材中用大写英文字母表示命题，在前面部分课件中用小写英文字母，这里大小写暂不区分.
- 用“1”表示真，用“0”表示假，
- p：6是整数。（真命题）
- q：6是素数。（假命题）
- r：2050年元旦北京下大雪。（命题，真值待定）

简单命题与复合命题

- 简单命题：又称原子命题，不能再被继续分割的命题（不含任何联结词）
- 复合命题：由一个或几个简单命题通过联结词所构成的新的命题
- 复合命题也有确定的真值。
  - 依赖于构成该复合命题的各简单命题的真值以及联结词。

1.2　常用的5个命题联结词

- 常用的5个命题联结词：
- 否定联结词　　（非，¬）
- 合取联结词　　（与，∧）
- 析取联结词　　（或，∨）
- 蕴涵联结词　　（如果…，则…，→）
- 双蕴涵联结词　　（当且仅当，↔）

否定(negation)联结词

定义1.1　否定联结词

- 设p为命题，复合命题“非p”（或“p的否定”），称为p的否定式，记作 $\neg p$。
- 符号 $\neg$ 称作否定联结词。
- 规定 $\neg p$ 为真当且仅当p为假。
- 否定联结词的真值表

p	$\neg p$
0	1
1	0

合取(conjunction)联结词

定义1.2　合取联结词

设p, q为二命题，复合命题“p并且q”（或“p与q”)，称为p与q的合取式，记作$p \wedge q$，$\wedge$称作**合取联结词**。

并规定$p \wedge q$为真**当且仅当p与q同时为真**。

合取联结词

- 由定义可知，$p \wedge q$的逻辑关系为p与q同时成立。
- 只有p与q同时为真，$p \wedge q$才为真。
- 其它情况$p \wedge q$均为假。

合取联结词的真值表

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

合取联结词使用提示

联结词∧的使用需要注意以下几点：

1　联结词∧使用的**灵活性**。

自然语言中的“既…，又…”，“不但…，而且…”，“虽然…，但是…”，等联结词往往都可以符号化为∧。

2　命题逻辑中**仅考虑命题与命题之间的形式关系或逻辑内容**，对于毫无联系的二命题p，q，在逻辑中$p \wedge q$仍是可以讨论的。

3　逻辑联结词是自然用语中联结词的抽象，两者并不等同。**并非自然语言中所有的“与”或“和”都能简单套用联结词∧。**

例1．4　将下列命题符号化

（1）张明既聪明又勤奋。

（2）李强虽然聪明但不勤奋。

（3）张明与李强都是三好学生。

（4）张明与李强是同学。

解 首先将其中的原子命题符号化：

p: 张明聪明

q: 张明勤奋

r: 李强聪明

s: 李强勤奋

t: 张明是三好学生。

u: 李强是三好学生。

v: 张明与李强是同学。

例1．4 将下列命题符号化

（1）张明既聪明又勤奋。

（2）李强虽然聪明但不勤奋。

（3）张明与李强都是三好学生。

（4）张明与李强是同学。

于是命题符号化结果表示为：

（1）张明既聪明又勤奋。 $p \wedge q$

（2）李强虽然聪明但不勤奋。 $r \wedge \neg s$

（3）张明与李强都是三好学生。 $t \wedge u$

（4）张明与李强是同学。 v

析取(disjunction)联结词

定义1.3　析取联结词

- 设p，q为二个命题，复合命题“p或q”称p与q的析取式。记作$p \vee q$，$\vee$称作析取联结词
- 规定$p \vee q$为假当且仅当p与q同时为假
- 由定义可知，若$p \vee q$为真，则p与q中至少一个为真。因而只有p与q同时为假时，$p \vee q$才为假，其他情况下$p \vee q$均为真。

析取及异或联结词举例

例1.5 将下列命题符号化

（1）张明喜欢学数学或计算机。

（2）张明报考的第一志愿（唯一）只选择数学类或计算机类。

解 先将原子命题符号化

（1） p：张明报考数学类。

q：张明报考计算机类。

显然（1）中的“或”为相容或，即p与q可以同时为真，符号化为$p \vee q$。

(2) 张明报考的第一志愿只选择数学类或计算机类

设 r：张明选择数学类

s：张明选择计算机类

若将命题符号化为 $r \vee s$，由于 r，s 的联合取值情况有四种：同真，同假，一真一假（两种情况）。张明就可能同时选择数学专业和计算机，这不符合报考的实际情形。

如何达到只能选择唯一的第一志愿要求呢？

设　r：张明选择数学类

s：张明选择计算机类

可以使用多个联结词，将该命题符号化为

$$(r \wedge \neg s) \vee (\neg r \wedge s)$$

此复合命题为真当且仅当r，s中一个为真，且另一个为假。

由题意可知，（2）中的“或”应为排斥或（不可兼或）。

异或联接词与命题形式化

教材P10例3：　给出三个命题

p：　今晚我在家里看电视。

q：　今晚我去体育场现场看球赛。

r：　今晚我在家里看电视或去体育场看球赛。

问题是：命题 r和$p \vee q$表达的是否是同一命题？

（注：上述看电视与看球赛均指同一时间段）

异或联接词与命题形式化

同p 、q 和r 之间的真值关系可由下表给出

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

异或联接词与命题形式化

p	q	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

该表的前三行很容易理解。而第四行是说今晚我在家看电视，又去体育场看球赛。显然据题意假设，对同一个人、同一时间段这是不可能发生的事情。从而这时r 的真值为F。

这也说明:

r与p ∨q在逻辑上是并不相等的，即r 中出现的“或”不能以普通的“∨”来表示。

异或联接词与命题形式化

这里p，q和r 之间的逻辑关系，即为异或(也称不可兼或)。

以 $\overline{\vee}$ 表示，有 $r = p \,\overline{\vee}\, q$，不难验证：

$$r = (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

若以p, q分别表示一位二进制数字, 则r就表示了p与q 的和(不考虑进位)。

异或联接词与命题形式化

- 异或（不可兼或）联结词

  是二元命题联结词。

- 两个命题p和q的异或构成一个新的命题，记作$p\bar{\vee}q$。

- 当且仅当p与q的真值相异时，$p\bar{\vee}q$为T，否则$p\bar{\vee}q$的真值为F。

析取联结词“$\vee$” 与 异或“$\bar{\vee}$”的真值表

（注：$\bar{\vee}$为$\vee$上面加一横，见教材P10，不可兼或）

p	q	$p\vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p\bar{\vee} q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

蕴涵(implication)联结词

定义1.4 蕴涵联结词

设p，q为二命题，复合命题“如果p，则q”称为p与q的蕴涵式，记作$p \rightarrow q$。并称p是蕴涵式的前件，q为蕴涵式的后件，$\rightarrow$称作蕴涵联结词。

规定，$p \rightarrow q$为假 当且仅当 p为真 q为假。

蕴涵联结词的真值表

- $p \rightarrow q$的逻辑关系为
  - p是q成立的充分条件，但不必是q成立的必要条件；
  - $p \rightarrow q$为假当且仅当p为真且q为假。

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$p \to q = \neg p \vee q$

p	q	$p \to q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

在p、q的所有取值下，$p \to q$同$\neg p \vee q$都有相同的真值：$p \to q = \neg p \vee q$（真值相同的等值命题以等号联结）

这也说明$\to$可由$\neg$、$\vee$来表示，从逻辑上看"如果P则Q"同"非p或q"是等同的两个命题

实际上，$\{\neg, \vee\}$构成一个联结词的完备集，可表达任何联结词

因果关系

- 引入$\rightarrow$的目的是希望用来描述命题间的推理，表示因果关系
- 使用$p\rightarrow q$能描述推理
  - $p\rightarrow q$为真时，只要p为真必有q真，而不能出现p真而q假就够了
  - p为假时，q取真取假，并不违背p为真时q必真。从而仍可规定p为假时，$p\rightarrow q$取真

在使用联结词→时，要特别注意以下几点：

1. 在自然语言里，p与q的这种关系有许多不同的叙述方式，例如，“只要p，就q”，“因为p，所以q”，等等。都应符号化为$p \rightarrow q$。

2. 在自然语言中，“如果p，则q”中的前件p与后件q往往具有某种内在联系，而在数理逻辑中，p与q可以无任何内在联系。

3. 通常，“如果p，则q”希望用来描述命题间的推理，表示一种因果关系。但在数理逻辑中，作为一种规定，当p为假时，无论q是真是假，$p \rightarrow q$均为真。

关于充分条件和必要条件的说明

- 充分条件：http://baike.baidu.com/view/437108.htm
  - 如果A能推出B，那么A就是B的充分条件，记做A→B。
  - 如果有事物情况A，则必然有事物情况B；如果没有事物情况A而未必没有事物情况B，A就是B的充分而不必要条件
- 必要条件：http://baike.baidu.com/view/543416.htm
  - 如果没有A，则必然没有B；如果有A而未必有B，则A就是B的必要条件，记作B→A，读作“B蕴涵A”。

关于充分条件和必要条件的说明

- 充分条件：就是只要条件成立，结论就成立，则该条件就是充分条件。

  “如果缺少水分,植物会死亡”，“缺少水分”就是“植物会死亡”的充分条件。在自然语言中表示充分条件的词有：如果…那么…，只要…就…，若…则…

- 必要条件：就是如果该条件不成立，那么结论就不成立，则该条件就是必要条件。

  在自然语言中 表示必要条件的词有：只有…才…；仅当…，…；…，仅当…。

例题 仅当(r)我有时间(q）我去镇上。 $q\rightarrow r$

举例

- 令：p：天气好。q：我去公园。
- 1.如果天气好，我就去公园。
- 2.只要天气好，我就去公园。
- 3.若天气好，我就去公园。
- 4.仅当天气好，我才去公园。
- 5.只有天气好，我才去公园。
- 6.我去公园，仅当天气好。

可见“→”既表示充分条件（即前件是后件的充分条件）；也表示必要条件（即后件是前件的必要条件）。这一点要特别注意!!!它决定了哪个作为前件，哪个作为后件。

命题1.、2.、3.写成：$p \rightarrow q$

命题4.、5.、6.写成：$q \rightarrow p$

例1.6 将下列命题符号化，并指出各命题的真值

（1）如果1＋2＝3，则太阳从东方升起。

（2）如果1＋2 ≠ 3，则太阳从东方升起。

（3）如果1＋2＝3，则太阳不从东方升起。

（4）如果1＋2 ≠ 3，则太阳不从东方升起。

解　令 p：1＋2 = 3，p的真值为1。

q：太阳从东方升起，q的真值也为1。

符号化形式分别为

（1）$p \to q$　　（2）$\neg p \to q$

（3）$p \to \neg q$　　（4）$\neg p \to \neg q$

四个复合命题的真值分别为1，1，0，1。

以上四个蕴涵式的前件p与后件q之间没有什么内在联系

（5）只要是星期五，我就来上课。

（6）我没来上课，则今天不是星期五。

（7）只有星期五，我才来上课。

（8）除非是星期五，否则我不来上课。

（思考各句的逻辑关系）

（5）只要是星期五，我就来上课。
（6）我没来上课，则今天不是星期五。
（7）只有星期五，我才来上课。
（8）除非是星期五，否则我不来上课。（思考各句的逻辑关系）

解　令　r：今天是星期五，r 的真值为1。
s：我来上课，s的真值也为1。

（5）与“如果是星期五，我就来上课”的逻辑含义相同，均可符号化为$r \to s$。

（6）按照蕴涵式的逻辑关系，可直接符号化为$\neg s \to \neg r$。

（7）注意该句与命题（5）不同，将这句话换为逻辑上等价的另一个命题，“我来上课，那么今天一定是星期二”。由后一个命题可方便地符号化为$s \to r$。

（8）后半句提供的信息十分明确，即，如果不是星期二则我不来上课，据此写出该命题的符号化为$\neg r \to \neg s$。

双蕴涵(equivalence)联结词

定义1. 5　双蕴涵联结词

设p，q为二命题，复合命题“p当且仅当q”称作p与q的双蕴涵式，记作$p \leftrightarrow q$，其中$\leftrightarrow$称作双蕴涵联结词。并规定$p \leftrightarrow q$为真 当且仅当 p与q 同时为真或同时为假。

双蕴涵联结词的真值表

$p \leftrightarrow q$的逻辑关系为：

p与q互为充分必要条件

$p \leftrightarrow q$ 为真**当且仅当**

p与q同时为真或同时为假

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例1.7　将下列命题符号化，并讨论它们的真值

（1）若三角形ABC中有两个角相等，

则该三角形为等腰三角形。反之亦然。

（2）太阳从西方升起当且仅当大象会飞。

解　令 p：三角形ABC中有两个角相等；

q：三角形ABC为等腰三角形。

p值为1时，q值为1；p值为0时，q值为0。

则将（1）符号化为$p\leftrightarrow q$，其真值为1。

令 r：太阳从西方升起，真值为0；

s：大象会飞，真值为0。

则将（2）符号化为$r\leftrightarrow s$，其真值为1。

$x+y=2$当且仅当$2*(x+y)=4$

- 问题
  - 这是不是一个命题？
  - 可否形式化成 $x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
- 解
  - 不能形式化成$x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4$
  - $x+y=2$ No
  - 定义为十进制整数域
  - There exists x and y such that x+y = 2 Yes
  - For all x and all y, x+y = 2 Yes
  - 可形式化为$(\forall x \forall y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$
  - 可形式化为$(\exists x \exists y)(x+y=2 \leftrightarrow 2*(x+y)=4)$

More Examples

- A horse is white — No
- All the horses are white — Yes
- There exists a horse that is white — Yes
- My horses are white — Yes
- A horse is white if and only if a bird is blue — No
- All the horses are white if and only if all the birds are blue — Yes

What's Wrong Here?

ill-defined problem

- Example

$$x^2=2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \quad or \quad x = -\sqrt{2}$$

Why?

- Domain

1) x is an integer, no solution

2) x is a positive real number, $x = \sqrt{2}$

3) x is a real number, $x = \sqrt{2} \quad or \quad x = -\sqrt{2}$

常用的联结词

五种最基本、最常用的联结词$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，将它们组成一个集合

$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$，

称为一个联结词集。

其中$\neg$为一元联结词，

其余的都是二元联结词。

基本复合命题
（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

  （），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

1.3 合式公式及其赋值

- 上节介绍了将命题表示为符号串。
- 是否每个符号串都是命题呢？

$$p\ q \rightarrow$$

- 什么样的符号串才能表示命题呢？
- 如下命题形式定义的符号串表示的才是命题(公式)。
  – 在数理逻辑中，公式是表达命题的形式语法对象

1.3 合式公式及其赋值

- 命题常项或命题常元

　　简单命题是命题逻辑中最基本的研究单位，其值是确定的，又称为命题常项或命题常元。

- 命题变项或命题变元

　　真值可以变化的陈述句为命题变项或命题变元。也用p，q，r，…表示命题变项。

- 当p，q，r，…表示命题变项时，它们变成了取值为0或1的变项，因而命题变项已不再是一个固定的命题。

合式公式或命题公式

合式公式或命题公式的表示

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 {$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$} 中的联结词时，合式公式定义如下

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6 合式公式 (wff) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A \wedge B$），（$A \vee B$），（$A \rightarrow B$），（$A \leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有有限次地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

递推定义

命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。

若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；

若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

真值表及其构造方法

定义1.8　真值表

将命题公式A在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的具体步骤：

（1）找出公式中所含的全体命题变项p_1，p_2，…，p_n（若无下角标就按字典顺序排列），列出2^n个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。

（2）按照运算的优先次序写出各子公式。

（3）对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

真值表举例

例1.8　求下列公式的真值表，并求成真赋值和成假赋值。

（1）　$\neg p \vee q$

（2）　$p \wedge (p \to q) \to q$

$\neg p \vee q$的真值表如右表

其中10为成假赋值

其余3个赋值(00, 01, 11)均为成真赋值

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

$p \wedge (p \to q) \to q$ 的真值表

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设A为任一命题公式,

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假, 则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

命题公式的分类（续）

真值表可用来判断公式的类型：

（1）若真值表最后一列(公式结果)全为1，则公式为重言式；

（2）若真值表最后一列全为0，则公式为矛盾式；

（3）若真值表最后一列中至少有一个1，则公式为可满足式。

1.4 重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的**命题变项**都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

在第三章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用。

$$p\wedge(p\rightarrow q)\rightarrow q$$

1.4 重言式与代入规则

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

1. 4 重言式与代入规则

这一要求可以用代数的例子来说明，如对

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

可以用$a = cd$代入，仍会保持等式成立。

而若将$a + b$以 cd 代入，结果左端得 $(cd)^2$，但右端无法代入 cd ，不能保持等式成立。

1.4 重言式与代入规则

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式

公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后重言式的性质方得保持。

如$A = P \vee \neg P$，作代入 $\dfrac{P}{\neg Q}$

得 $B = \neg Q \vee \neg\ \neg Q$ 仍是重言式。

若仅将$\neg P$以Q代之得$B = P \vee Q$ (未做P的相关代入，则这不是代入，违反了规定2) 已不是重言式。

1.4 重言式与代入规则

举例：使用代入规则证明重言式。

例1：　判断$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$为重言式。

由 $P\vee\neg P$为重言式，　作代入

$$\frac{P}{(R\vee S)}$$

依据代入规则，便得$(R\vee S)\vee\neg(R\vee S)$。

这公式必是重言式。

1.4 重言式与代入规则

例2： 判断 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\to(P\vee Q)))\to(P\vee Q)$为重言式.

不难验证$(A\wedge(A\to B))\to B$是重言式。作代入：

$$\frac{A}{(R\vee S)},\frac{B}{(P\vee Q)}$$

便知 $((R\vee S)\wedge((R\vee S)\to(P\vee Q))\to(P\vee Q)$ 是重言式。

Thanks