复变函数引论学习资料

0. 基本概念

0.1. 格林公式

∂D 为一分段简单光滑闭合曲线，D 是 ∂D 围成的一个区域，且$P(x,y),Q(x,y)$ 在 D 内连续可导，则

$$\oint_{\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D (Q_x - P_y)dxdy$$

0.2. 换元公式

设 $\mathbf{r} = \gamma(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ ，$t \in [0,1]$ 为一分段光滑曲线，则

$$\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \cdot dt$$

0.3. 复数的基本概念

复数域：

$$\mathbb{C} = \{(x+iy) : x, y \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

复数运算：

$$\begin{gathered} z = x + iy \\ z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \\ \bar{z} = x - iy, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \\ \Rightarrow |z|^2 = z\bar{z} \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z_2}}{|z_2|^2} \end{gathered}$$

极式表示：

$$\begin{gathered} z = re^{i\theta}, r = |z|, \theta = arg(z) = \operatorname{atan}2(y, x) \in [0, 2\pi) \\ e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \Rightarrow \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (cos\theta + i\sin\theta)^n, n \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

$$\oint_{|z|=\epsilon>0} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{d(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = 2\pi i$$

1. 复数、复变函数

1.1. 直线

复平面上的直线，都可以写成

$$\bar{\alpha} z+\alpha \bar{z}+\beta=0$$

的形式。

在平面坐标系，直线方程都可以表示为以下形式：

$$Ax+By+C=0$$

期中 $A, B, C \in \mathbb{R}$ 且不全为零。

设

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

那么就有

$$\frac{A-iB}{2} z+\frac{A+iB}{2} \bar{z}+C=0$$

令

$$\alpha=\frac{A+iB}{2}, \beta=C$$

即可。

1.2. 圆

复平面上的圆，都可以写成

$$z \bar{z}+\bar{\alpha} z+\alpha \bar{z}+\beta=0$$

的形式。

$$x^{2}+y^{2}=|z|^{2}=z \bar{z}$$

其余同 1.1.

1.3.

$$\begin{aligned}
\left|z_{1}+z_{2}\right|^{2}+\left|z_{1}-z_{2}\right|^{2} &=\left(z_{1}+z_{2}\right) \overline{\left(z_{1}+z_{2}\right)}+\left(z_{1}-z_{2}\right) \overline{\left(z_{1}-z_{2}\right)} \\
&=\left(z_{1}+z_{2}\right)\left(\bar{z}_{1}+\bar{z}_{2}\right)+\left(z_{1}-z_{2}\right)\left(\bar{z}_{1}-\bar{z}_{2}\right) \\
&=2\left(z_{1} \bar{z}_{1}+z_{2} \bar{z}_{2}\right)=2\left(\left|z_{1}\right|^{2}+\left|z_{2}\right|^{2}\right)
\end{aligned}$$

几何意义：对于一个平行四边形，其边长的平方和等于对角线长度的平方和。

1.4. ***求极值

对于给定的 $r \in \mathbb{R}^{+}, \alpha \in \mathbb{C}$, 分别求

$$\max _{|z| \leq r}\left|z^{n}+\alpha\right|, \min _{|z| \leq r}\left|z^{n}+\alpha\right| .$$

解：

1.4.1. 最大值：

设

$$I=\max_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=|z'|$$

1.4.1.1. $\alpha=0$ 时，显然有

$$|z^n+\alpha|=|z^n|\leq r^n$$

于是

$$I=r^n,z=re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi),z'=r^ne^{in\theta}$$

1.4.1.2. $\alpha\neq 0$ 时，

$$|z^n+\alpha|\leq|z^n|+|\alpha|\leq r^n+|\alpha|$$

这时 z' 一定满足两个不等式都取等号。

对于左侧的小于等于号，等号成立当且仅当 $\exists\lambda\in\mathbb{R}^+$， s.t. $z^n=\lambda\alpha$ 。

对于右侧的小于等于号，等号成立当且仅当 $|z|=r$ 。

这代表，$\lambda=|z^n|/|\alpha|=r^n/|\alpha|$。

于是又有 $z^n=r^n/|\alpha|\cdot\alpha=r^ne^{i\arg\alpha}$ 。

$$\Rightarrow z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+2k\pi)}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$$
$$z'=(r^n+|\alpha|)e^{i\arg\alpha},I=r^n+|\alpha|$$

综上，

$$\max_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=\begin{cases}r^n, & \alpha=0(z=re^{i\theta},\theta\in[0,2\pi))\\ r^n+|\alpha|, & \alpha\neq 0(z=z_k=re^{\frac{i(arg\alpha+2k\pi)}{n}},k=0,1,\cdots,n-1)\end{cases}$$

1.4.2. 最小值

设

$$J=\min_{|z|\leq r}|z^n+\alpha|=|z'|$$

1.4.2.1. $\alpha=0$ 时，显然有

$$|z^n+\alpha|=|z^n|\geq 0$$

于是

$$J=0,z'=0$$

1.4.2.2. $0<|\alpha|\leq r^n$ 时，

令 $z^n=-\alpha$，$z=(-\alpha)^{1/n}$，

$$z=z_k=|\alpha|^{1/n}e^{\frac{i(\arg\alpha+(2k+1)\pi)}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$$

显然有 $z'=J=0$.

1.4.2.3. $|\alpha| > r^n$ 时，

$$|z^n + \alpha| \geq |\alpha| - |z^n| \geq |\alpha| - r^n$$

两个等号在 $z^n = -r^n e^{i\arg\alpha}$ 时成立。

$$\Rightarrow z = z_k = re^{\frac{i(arg\alpha + (2k+1)\pi)}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$$
$$z' = (|\alpha| - r^n)e^{i\arg\alpha}, J = |\alpha| - r^n$$

综上，

$$\min_{|z|\leq r} |z^n + \alpha| = \begin{cases} 0, & \alpha = 0 (z = 0) \\ 0, & 0 < |\alpha| < r^n (z = z_k = |\alpha|^{1/n} e^{\frac{i(\arg\alpha + (2k+1)\pi)}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1) \\ |\alpha| - r^n, & |\alpha| > r^n (z = z_k = re^{\frac{i(arg\alpha + (2k+1)\pi)}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1) \end{cases}$$

1.5.

若 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在 z_0 连续，且 $f(z_0) \neq 0$，就一定存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall z : |z - z_0| < \delta$， 都有 $f(z) \neq 0$ 。

证明如下：

由于 $f(z_0) \neq 0$，可以取 $\epsilon = |f(z_0)|/2 > 0$。

而且

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$
$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$$
$$\forall z : |z - z_0| < \delta \to |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

$$\Rightarrow |f(z_0)|/2 > |f(z) - f(z_0)| > ||f(z)| - |f(z_0)|| \Rightarrow 0 < |f(z_0)|/2 < |f(z)| < 3|f(z_0)|/2$$

■

2. 复变函数的导数

2.1. 证明柯西-黎曼方程。

证明如下：

设 $f = u + iv, u, v \in C^1$，$f' = A + iB$。

由全微分的的定义，

$$
\begin{gathered}
df = f'(z)dz \\
df = u_x dx + iv_x dx + u_y dy + iv_y dy = (u_x dx + u_y dy) + i(v_x dx + v_y dy) \\
f'(z)dz = (A + iB)(dx + idy) = (Adx - Bdy) + i(Ady + Bdx) \\
\Rightarrow \begin{cases} A = u_x = v_y \\ B = v_x = -u_y \end{cases}
\end{gathered}
$$

■