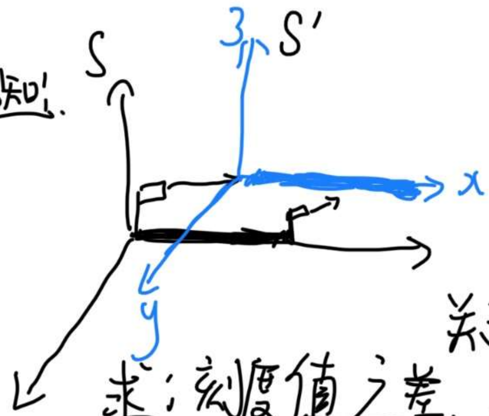
15 April 2022 at 22:10

大学物理B（1） HW6

8.3，8.5，8.6，8.7，8.8，8.9，8.10，8.12，8.14，8.19

8.3

8.3. 已知：



求：刻度值之差，关于S'系对结果的解释。

解：在S系，测定同时是固有时，
测定距离是固有长度，条件与"长度收缩"恰好相反，存在"长度膨胀"
在S'系现象，刻度值之差必然比一米大，

8.5 已知：

两事件同时在S系的x轴上发生，相距一米。S'系的观察为两米。

求S'系中，两事件的时间间隔.

解：

不失一般性，设事件1在S系的空坐标为 $(0,0,0,0)^T$，事件2为 $(0,1,0,0)^T$

※坐标为 (ct, x, y, z)。则在 S' 系

$$\begin{bmatrix} ct_1' & ct_2' \\ x_1' & x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct_1 & ct_2 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\gamma \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

故在 S' 系中，事件1坐标为 $(0,0,0,0)^T$

…2………… $(-\beta\gamma, \gamma, 0, 0)^T$.

$\Rightarrow x_2' - x_1' = \gamma - 0 = 2 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$

事件时间间隔 $\Delta t = |t_2' - t_1'| = |t_2| = \left|-\frac{\beta\gamma}{c}\right|$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2/c = \frac{\sqrt{3}}{c} \approx 5.77 \times 10^{-9}$ s.

8.6. 已知：地 O ← 飞船 O'

$T = 60$s，$\rightarrow$ $v = 4/5c$.

求：1). 地球反射电磁信号时，飞船上测得其与地球之距。

S

2). 飞船接收信号时，地球上测得飞船之距。

8.6. 已知: 地 $\longleftarrow$ 飞船

O $\longrightarrow$ O'

$T=60s$, $\longrightarrow$ $v=4/5c$.

求: 1). 地球反射电磁信号时，飞船上测得其与地球之距。

2). 飞船接收信号时，地球上测得飞船之距。

解: $\beta=\frac{4}{5}$, $\gamma=\frac{5}{3}$, $\beta\gamma=\frac{4}{3}$.

1). 设飞船永远处于坐标系原点，则地球远离坐标原点而去。

$\Rightarrow 2d=ct=60c$. $\Rightarrow d=30c\approx 9\times10^{9}\,m$

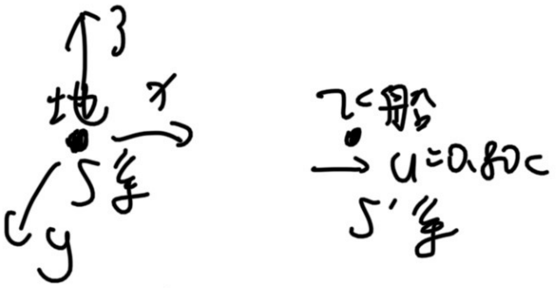
2). $t=0s$ 时，飞船上观察其与地球之距为 $30c-\frac{4}{5}c\cdot30=6c$，地球在飞船上的时空坐标为 $(0,-6c,0,0)$.

$t=60s$ 时，飞船的时空坐标为 $(60c,0,0,0)$

于是
$$\begin{bmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 60c\\ -6c & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 60c\\ -6c & \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-8c & 100c\\ -10c & 80c\end{bmatrix}$$
，则在飞船上 $t=60s$ 时，地球上观察其与飞船之距为

$80c-(-10c)=90c=2.7\times10^{10}\,m$

8.7. 已知：



(※)沿x方向运动.

飞船上观察一事件坐标为

$(-6.0\times10^{8}c,\ 1.8\times10^{17},\ 1.2\times10^{17},\ 0)$.

求在S系中，事件的时空坐标。

解：
$$\begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & & \\ \beta\gamma & \gamma & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}. \quad (\gamma=\tfrac{5}{3},\ \beta=\tfrac{4}{5})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{3}ct' + \frac{4}{3}x' \\ \frac{4}{3}ct' + \frac{5}{3}x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.98\times10^{16} \\ 6.02\times10^{16} \\ 1.2\times10^{17} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$t = -1.99\times10^{8}\,s.$

8.8. 对于(8.7)宇航员报告，光到达飞船时刻、结果是从光到达飞船的时刻，方向推算。

求：

1). 在 S' 系上，光到达飞船的时间。

2). 若飞船在接收信号后立即向地球发信息，地球观察者收到信息的时间。

3). S 系上观察超新星的时间。

解：1). 把电磁波传递时间考虑在内，则

$$t = -6\times10^8 + \frac{10^{17}\sqrt{1.8^2+1.2^2}}{3\times10^8} = 1.21\times10^8\,s.$$

2). 飞船接收信号时，飞船在 S' 系的坐标为

$(1.21\times10^8 c, 0, 0, 0)$

飞船在 S 系的坐标为

$(\gamma\times1.21\times10^8 c, \beta\gamma\times1.21\times10^8 c, 0, 0).$

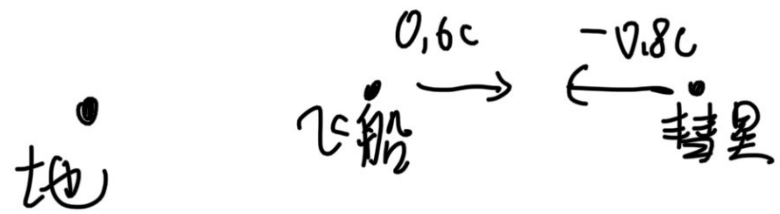
$= (2.02\times10^8 c, 1.61\times10^8 c, 0, 0).$

飞船立即向地球发射信号，地球接收时间应为 $2.02\times10^8 + 1.61\times10^8 = 3.6\times10^8\,s$ #.

3). 地球上观察超新星的时间应为

$$-1.99\times10^8 + \frac{10^{17}\sqrt{0.6^2+1.2^2}}{c} = 2.48\times10^8\,s.$$

8.9. 已知,



求: 1) 飞船上观察接近速率。

2) 飞船上观测时间。

解 1) 对彗星速度进行洛伦兹变换、

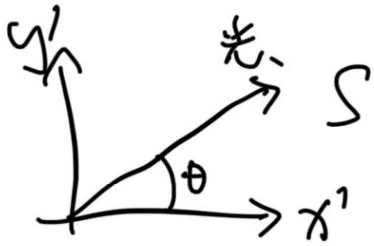
$$V_x' = \frac{\beta c + V_x}{1 - \frac{\beta}{c} V_x} = \frac{-0.6c - 0.8c}{1 + \frac{0.6}{c}(-0.8c)} = -\frac{1.4c}{1.48}$$

$$= 0.946\ m/s$$

2) 观测时间 Δt

$$= 5\sqrt{1 - 0.6^2} = 5 \times 0.8 = 4s$$

8.10: 已知:



S' 求在S系光线传播方向,证明S系中光线速率仍是c,

解: 光子运动方向矢量当是

$$V_x' = c\cos\theta,\ V_y' = c\sin\theta,\ V_z' = 0.$$

在S系中，

$$\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(1+\frac{\beta}{c}V_x'\right) = \gamma(1+\beta\cos\theta').$$

$$V_x = \frac{(\beta\gamma c+\gamma V_x')}{\gamma(1+\beta\cos\theta')} = \frac{\beta c + c\cos\theta'}{1+\beta\cos\theta'}$$

$$V_y = V_y'\cdot\frac{dt'}{dt} = \frac{c\sin\theta'}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}$$

于是 $\theta = \arctan\frac{V_y}{V_x}$

$$= \arctan\left(\frac{c\sin\theta'}{\gamma(\beta c+c\cos\theta')}\right) = \arctan\left(\frac{\sin\theta'}{\gamma(\beta+\cos\theta')}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{\sin\theta'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\theta'+u/c}\right).$$

又因 $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Leftrightarrow \gamma^2-1 = \gamma^2\beta^2$，故

$$V = \sqrt{V_x^2+V_y^2} = \frac{1}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\sqrt{\gamma^2c^2(\beta+\cos\theta')^2+c^2\sin^2\theta'}$$

$$= \frac{c}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\sqrt{\gamma^2\beta^2+2\beta\gamma^2\cos\theta'+\gamma^2\cos^2\theta'+\sin^2\theta'}$$

$$= \frac{c}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\sqrt{\gamma^2+2\beta\gamma^2\cos\theta'+(\gamma^2-1)\cos^2\theta'}$$

$$= \frac{c}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\sqrt{\gamma^2+2\beta\gamma^2\cos\theta'+\gamma^2\beta^2\cos^2\theta'}$$

$$= \frac{c}{\gamma(1+\beta\cos\theta')}\sqrt{\gamma^2(1+\beta\cos\theta')^2} = c \#.$$

8.12.

已知：一静质量 m_0 的粒子受 $\vec{F}=F\hat{x}$ 的力运动，

求：$v(t)$，$x(t)$，及其在 $t \ll \frac{m_0 c}{F}$，$t \gg \frac{m_0 c}{F}$ 的值。

解：$dp = F dt \Rightarrow p = mv = Ft$，

$$m_0^2 v^2 = (Ft)^2 - \frac{v^2}{c^2}(Ft)^2 \Rightarrow \left(m_0^2 + \frac{(Ft)^2}{c^2}\right) v^2 = (Ft)^2$$

$$\Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{(Ft)^2}{m_0^2 + \frac{(Ft)^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{(Ft)^2}{m_0^2 c^2 + (Ft)^2}}\, c$$

$$x(t) = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \frac{cFt'\,dt'}{\sqrt{(Ft')^2 + m_0^2 c^2}} = \frac{c}{F}\left(\sqrt{(Ft)^2 + m_0^2 c^2} - m_0 c\right)$$

$t \ll \frac{m_0 c}{F}$ 时，

必定有 $(Ft)^2 \ll (m_0 c)^2$.

$$v(t) \simeq \sqrt{\frac{(Ft)^2}{m_0^2 c^2}}\, c = \frac{Ft}{m_0 c}\cdot c = \frac{F}{m_0} t \ \#$$

$$x(t) = \frac{m_0 c^2}{F}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1\right) = \frac{m_0 c^2}{F}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2 + O(t^4)\right).$$

$$\approx \frac{1}{2}\frac{F^2 t^2}{m_0^2 c^2}\cdot\frac{m_0 c^2}{F} = \frac{1}{2}\frac{Ft^2}{m_0} \ \#$$

$t \gg m_0 c/F$，必定有 $(Ft)^2 \gg (m_0 c)^2$.

$$v(t) \approx \sqrt{\frac{(Ft)^2}{(Ft)^2}}\, c = c \ \#$$

$$x(t) = \frac{c}{F}\left(\sqrt{(Ft)^2 + (m_0^2 c^2)} - m_0 c\right) \approx \frac{c}{F}(Ft - m_0 c) = ct \ \#$$

8.14. 已知：电子被加速至动能 $E_k = 2.8\times10^9$ eV.

求：1). e^- 的速度与光速之差。

2). e^- 动量.

3). 在 240m 周长环内绕行的向心力，及偏转磁场强度。

解：$E_k = m_0c^2(\gamma-1)$

1). $2.8\times10^9\times1.6\times10^{-19} = 9.11\times10^{-31}\times(3\times10^8)^2(\gamma-1)$,

$\gamma-1=5464$, $\gamma^2=\frac{1}{(\sqrt{1-\beta^2})^2}=2.99\times10^7$,

$\beta = 0.9999999833\ldots$,

速度差 $= c-\beta c = 3\times10^8\times1.674\times10^{-8}=5.02$ m/s.

2). $E^2=(pc)^2+(m_0c^2)^2$, 且 $pc\gg m_0c^2$, 则

$p=\frac{E}{c}=\frac{\gamma m_0c^2}{c}=\gamma m_0 c = 5465\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^8$

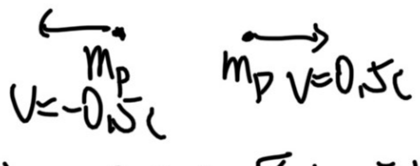
$= 1.49\times10^{-18}$ kgms^{-1}

3). 向心力由洛仑兹力提供，因此

$\frac{mv^2}{r}=evB \Rightarrow B=\frac{mv}{re}=\frac{2\pi mv}{d\cdot e}\approx\frac{2\pi\gamma m_0c}{d\cdot e}$

$=\frac{2\pi\times5465\times9.11\times10^{-31}\times3\times10^8}{240\times1.6\times10^{-19}}\approx0.2443=0.24$ T安.

8.19. 已知：



求：(1). 两质子相对原点动量，能量.

(2). 一个质子在另一质子固定的系的动量，能量.

解：(1). $p = mv = \gamma m_0 v = \dfrac{m_0 \cdot 0.5c}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \dfrac{m_0 c}{\sqrt{3}}$

$= 0.58\, m_0 c$

$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} m_0 c^2 = 1.15\, m_0 c^2$ #.

(2). "质子系" "原点系", $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$\beta\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\begin{bmatrix} E'/c \\ p_x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E/c \\ p_x \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & +1 \\ +1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} m_0 c \\ \frac{1}{\sqrt{3}} m_0 c \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} m_0 c$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} m_0 c,$$

故 $E' = \frac{5}{3} m_0 c^2 = 1.67\, m_0 c^2$ #

$p' = \frac{4}{3} m_0 c = 1.33\, m_0 c$ #