# 第三章部分习题解答及提示

3. 错误。例如，$f(z)=z$, 则$Re[f(z)]=x, Im[f(z)]=y$. 令$C:|z|=1$, 即$f(z)=z=e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta,\ 0\le\theta\le 2\pi$.

则有

$$\begin{aligned}\oint_C Re[f(z)]dz &= \int_0^{2\pi}\cos\theta d(e^{i\theta})=\int_0^{2\pi} i\cos\theta(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta \\ &= i\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta-\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=\pi i\neq 0.\end{aligned}$$

同理可证：

$$\begin{aligned}\oint_C Im[f(z)]dz &= \int_0^{2\pi}\sin\theta d(e^{i\theta})=\int_0^{2\pi} i\sin\theta(\cos\theta+i\sin\theta)d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta+i\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta d\theta=-\pi\neq 0.\end{aligned}$$

10. 证明：(a). 当曲线C包含原点时，记$2d(>0)$为$C$到原点的最小距离，则由闭路变形定理，知

$$\oint_C \frac{1}{z^2}dz=\oint_{|z|=d}\frac{1}{z^2}dz=\int_0^{2\pi}\frac{ide^{i\theta}d\theta}{d^2e^{2i\theta}}=\frac{-i}{d}\int_0^{2\pi}e^{-i\theta}d\theta=0.$$

(b). 当曲线C不包含原点时，被积函数$f(z)=\frac{1}{z^2}$在C内和C上均解析，故知积分为零。

16. 错误。反例见习题10.

17. 提示：利用Cauchy积分公式(3.5.1).

21. 提示：证明两边均等于$2\pi i f'(z_0)$.

27. (1) $\overline{i\overline{f(z)}}=\overline{i(\overline{u-iv})}=\overline{v+iu}=v-iu$. 这时由Cauchy-Riemann定理得

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial(-u)}{\partial y},\quad \frac{\partial(-u)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故$\overline{i\overline{f(z)}}$也解析。

(2) 的结论可由(1)得到。

(3). 证明：由$|f(z)|^2=u^2+v^2$，可得

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2=2\left[(u_x)^2+(v_x)^2+uu_{xx}+vv_{xx}\right],$$

及

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 = 2\left[(u_y)^2 + (v_y)^2 + uu_{yy} + vv_{yy}\right].$$

将以上两式相加并利用$u_{xx} + u_{yy} = v_{xx} + v_{yy} = 0$得：

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}|f(z)|^2 + \tfrac{\partial^2}{\partial y^2}|f(z)|^2 \\
&= 2\left[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2\right] + 2\left[u(u_{xx} + u_{yy}) + v(v_{xx} + v_{yy})\right] \\
&= 2\left[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2\right].
\end{aligned}$$

再利用Cauchy-Riemann定理$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$和导数公式$f'(z) = u_x + iv_x$得上面等式的右边为

$$4\left[(u_x)^2 + (v_x)^2\right] = 4|f'(z)|^2.$$

补充题证明：

令$r > R_0$, 由Cauchy 积分公式得：(这里用到$z = re^{i\theta}$, $|z| = r,\ dz = ire^{i\theta}d\theta,\ |dz| = rd\theta > 0$),

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(0)\right| &= \left|\tfrac{n!}{2\pi i}\right| \left|\oint_{|z|=r} \tfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \le \tfrac{n!}{2\pi} \oint_{|z|=r} \left|\tfrac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \\
&= \tfrac{n!}{2\pi} \oint_{|z|=r} \tfrac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz| \le \tfrac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tfrac{M(r)}{r^{n+1}} r d\theta \\
&= \tfrac{n! M(r)}{r^n}.
\end{aligned}$$

当$f(z)$有界时，存在常数$M_0 > 0$, 使得$M(r) \le M_0$, 当$n \ge 1$时有

$$0 \le \left|f^{(n)}(0)\right| \le \frac{n! M_0}{r^n} \to 0, \quad r \to +\infty,$$

即得$f^{(n)}(0) = 0, n = 1, 2, \cdots$. 由Taylor 公式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \equiv f(0).$$

即$f(z)$为常数。

类似的，当$|f(z)| \le M \cdot (\sum_{k=0}^n |z|^k)$, 可得$M(r) \le M \cdot (\sum_{k=0}^n r^k)$，

因而有

$$0 \le \left|f^{(n+j)}(0)\right| \le \frac{(n+j)! M \cdot (\sum_{k=0}^n r^k)}{r^{n+j}} = (n+j)! M \cdot \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{r^{n+j-k}}\right) \to 0, \quad r \to +\infty,$$

$j = 1, 2, \cdots$. 由Taylor 级数可得

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

这表明$f(z)$是一次数不超过$n$的多项式. 命题得证.