第三章 树II

计算机系网络所：张小平

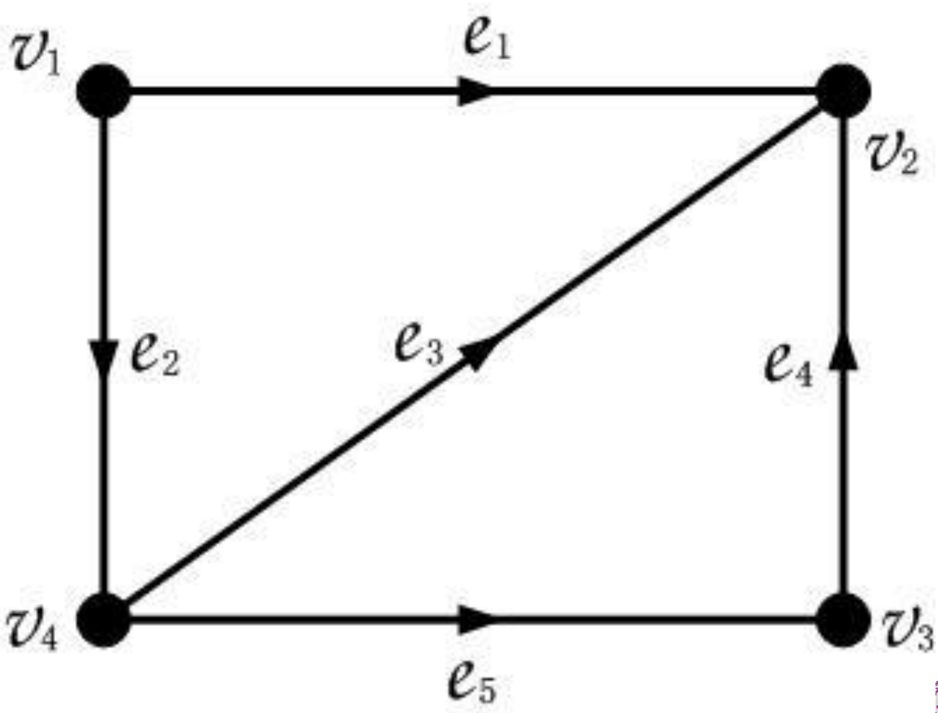
清華大學
Tsinghua University

主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- **3.3 支撑树的计数**
- 3.4 回路矩阵与割集矩阵
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝

支撑树的计数

- 给定连通图G，其支撑树可以有多少个？



支撑树的计数

- 定理3.3.1 (Binet-Cauchy定理)已知两个矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{ij})_{n\times m}$，满足 $m\le n$，则

$$\det(AB)=\sum_i A_i B_i$$

其中 A_i，B_i 都是 m 阶行列式

A_i 是从 A 中取不同的 m 列所成的行列式；

B_i 是从 B 中取相应的 m 行构成的行列式；

结果为全部组合求和

支撑树的计数

例：已知

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 3\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 0 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$ 求 $\det(AB)$

解：方法1：由矩阵乘法

$$AB=\begin{bmatrix}28 & 17\\ 2 & 16\end{bmatrix}$$

因此 $\det(AB)=28\times16-17\times2=414$

支撑树的计数

方法2：根据比内－柯西定理计算

$$A=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}4\\-2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\4\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} \boxed{5 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix}$$

$$\det(AB)=\sum_i A_i B_i$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 3\\-2 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5 & 1\\0 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 2\\-2 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}5 & 1\\4 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3 & 2\\4 & 3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}0 & 3\\4 & 2\end{vmatrix}$$

$$=414$$

支撑树的计数－有向连通图

- 定理3.3.2 设B_k的是有向连通图$G=(V,E)$的某一基本关联矩阵，则G的不同支撑树的数目是
$$\det(B_k B_k^T)$$

证明：设 $B_k=(b_{ij})_{(n-1)\times m}$

– 由比内－柯西定理，$\det(B_k B_k^T)=\sum_i |B_i|\left|B_i^T\right|$

– 其中$|B_i|$是B_k的某$\boldsymbol{n}-1$阶子阵的行列式

– $\left|B_i^T\right|$是对应的B_i^T的$\boldsymbol{n}-1$阶子阵的行列式

– 有$|B_i|=\left|B_i^T\right|$

支撑树的计数－有向连通图

- 因此，可以得到

$$\det(B_k B_k^T) = \sum_i |B_i||B_i^T| = \sum_i |B_i|^2$$

- 由定理3.2.6，如果$|B_i| \neq 0$，则其所对应的边构成G的一棵树
- 再由定理3.2.2，$|B_i|$只能为0，1或－1
- 因此，$\det(B_k B_k^T)$恰恰是G中不同树的数目

证毕！

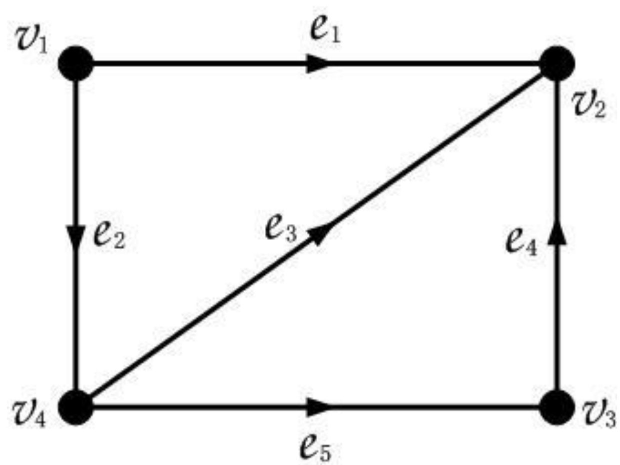
支撑树的计数

- 采用比内－柯西定理计算矩阵乘积的行列式通常比较复杂
- 其价值在于：揭示了乘积矩阵的行列式与各矩阵的子阵行列式之间的关系
- 连通图中不同支撑树的计数恰好利用了这种关系，从而可以用代数的方法很容易解决支撑树的计数问题

清華大学 Tsinghua University

支撑树的计数－有向连通图

例：



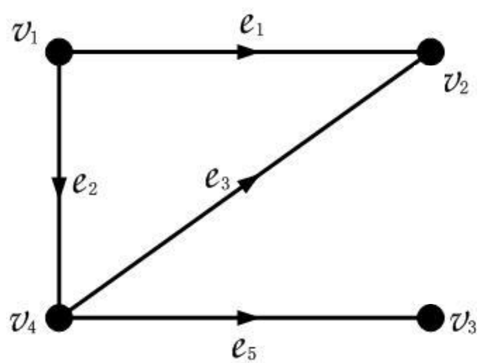
$$B=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\right] \longrightarrow B_4=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array}\right]$$

$$\det(B_4 B_4^T)=8$$

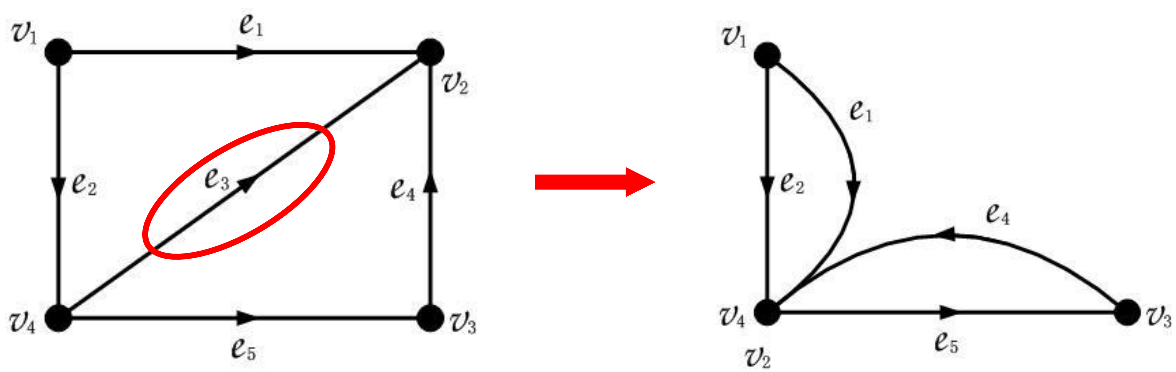
支撑树的计数－有向连通图

思考：

– 计算G中不含某特定边e的树的数目，如何计算？



– 计算G中必定含特定边e的树的数目，如何计算？



支撑树的计数－无向连通图

思考：

- 无向连通图的关联矩阵不存在－1元素，如何计算其支撑树的数目？

- 对无向连通图G的每边任给一个方向，得到有向连通图G'，则G'的支撑树与G的支撑树一一对应！

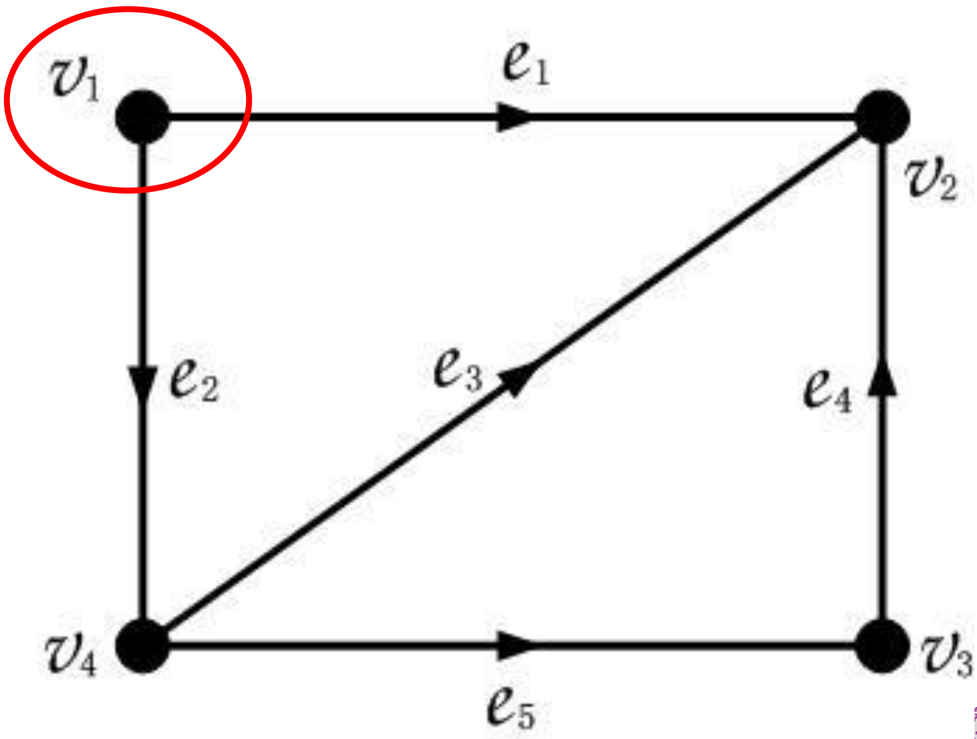
支撑树的计数－小结

- 有向连通图中支撑树的计数
  - 采用基本关联矩阵计算
  - 含特定边的计数
  - 不含特定边的计数

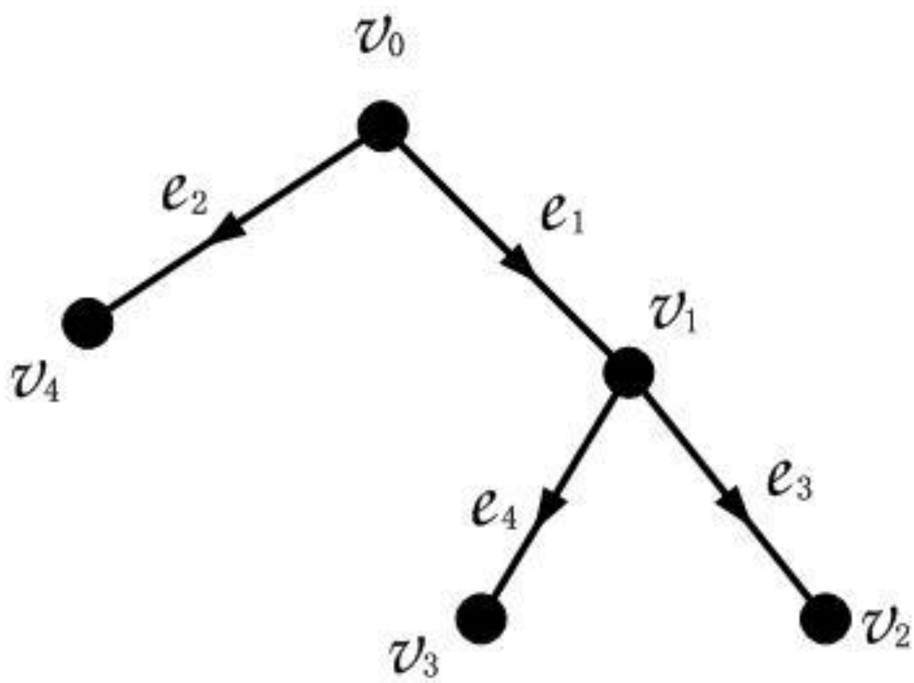
- 无向连通图中支撑树的计数

支撑树的计数

- 给定连通图G，其支撑树可以有多少个?
- 以某结点为根的支撑树可以有多少个?



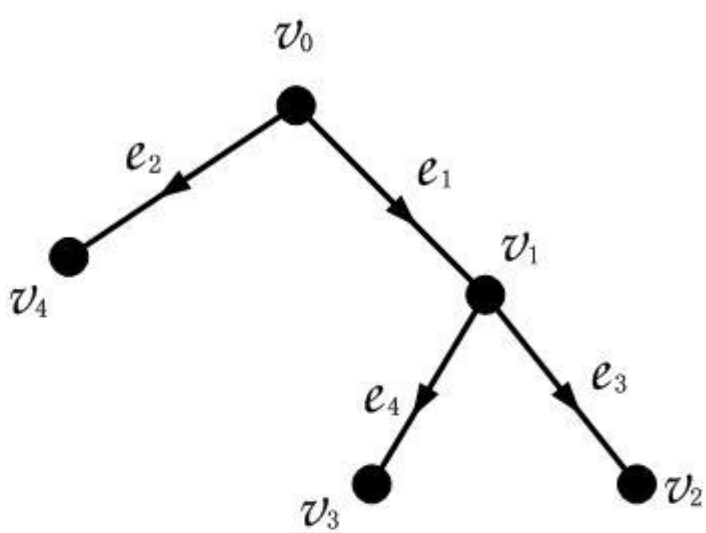
支撑树的计数－根树的计数



支撑树的计数－根树的计数

- 定义3.3.1 T为有向树，若T中存在某结点v_0的负度为0，其余结点负度为1，则称T为以v_0为根的外向树，或称**根树**，用$\vec{T}$表示。

例：

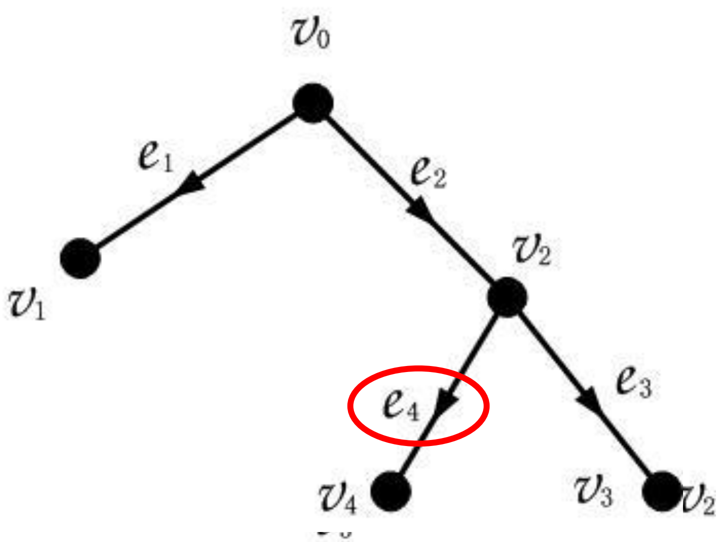


$$
B_0=\begin{array}{c}v_0\\v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\ \\\end{array}\left[\begin{array}{cccc} & & & \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}\right]
$$

特点：除v_0外，每行只有一个-1

支撑树的计数－根树的计数

- 如果对根树的结点和边重新进行编号，使每条边 $e=(v_i,v_j)$ 都满足 v_i 的编号小于 v_j 的编号，同时 $e=(v_i,v_j)$ 的编号为 e_j



$$B_0' = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

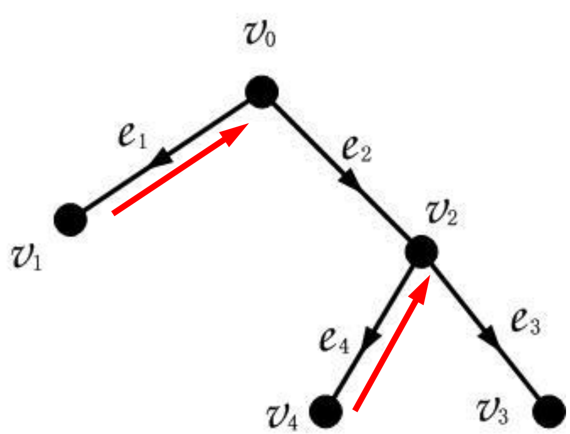
思考：为什么按照规则编号后，根树中根结点对应的基本关联矩阵一定是上三角矩阵？

支撑树的计数－根树的计数

思考：

- 无向树是否一定有“根”？
- 有向树是否一定有“根”？
- 非根数基本关联矩阵是否可调整为上三角矩阵？

非根树基本关联矩阵
可调整为上三角矩阵且
对角线上将出现“1”元素



$$B_0' = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \atop \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array}$$

支撑树的计数－根树的计数

- 令$\vec{B}_k$表示有向连通图G的基本关联矩阵B_k中全部1元素改为0后的矩阵。

- 相应地，G的支撑树的基本关联矩阵，可调整为上三角矩阵，但原先的“1”变为了“0”。
  - 如果该树为非根树，则对角线将出现“0”元素
  - 如果该树为根树，则对角线全部为“－1”元素

行列式为零

行列式绝对值为“1”

清華大学 Tsinghua University

支撑树的计数－有向连通图

- 定理3.3.2 设B_k的是有向连通图G=(V,E)的某一基本关联矩阵，则G的不同树的数目是

$$\det(B_k B_k^T)$$

- 定理3.3.3 有向连通图G中以v_k为根的根树数目是

$$\det(\vec{B}_k B_k^T)$$

支撑树的计数－根树的计数

- 证明：
  - 由比内－柯西定理 $\det(\vec{B}_k B_k^T)=\sum_i |\vec{B}_i||B_i^T|$
  - 若 $|B_i^T| \neq 0$，说明这$n-1$条边构成了G的一棵树
  - 若 $|\vec{B}_i| \neq 0$，说明该树是以v_k为根的根树。
  - 二者的乘积非零说明存在一棵v_k为根的根树。
  - 由于遍历了所有$n-1$条边的组合，因此

$$\det(\vec{B}_k B_k^T)=\sum_i |\vec{B}_i||B_i^T|$$

为以v_k为根的根树的数目！

Tsinghua University

支撑树的计数－根树的计数

思考：

- 如何计算以v_0为根节点不含某特定边e的根树的数目？

$$G' = G - e$$

计算G'的以v_0为根节点根树的数目即可

支撑树的计数－根树的计数

- 如何计算以v_0为根节点必含某特定边e的根树的数目？
  - 将该边收缩为一点 ❌
  - 先计算以v_0为根节点的根树数目，再计算不含边e的根树数目，求差值即可。
  - 其他计算方法：设 $e=(u,v)$

    将除e之外所有以v为终点的边都删掉得到G'，然后计算G'的以v_0为根节点根树的数目即可

支撑树的计数－小结

- 有向连通图支撑树的计数
  - 比内－柯西定理
  - 基本关联矩阵性质
  - 含特定边、不含特定边的计算方法
- 无向连通图支撑树的计数
  - 无向→有向变换
- 有向连通图根树的计数
  - 根树基本关联矩阵的性质和特点
  - 计算方法

主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- **3.4 回路矩阵与割集矩阵**
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝

回路矩阵与割集矩阵 – 回路矩阵

- 定义3.4.0 有向连通图$G=(V,E)$中存在回路C。给定回路C一个参考方向，则C中的边如和此方向一致，称之为**正向边**，否则称之为**反向边**。

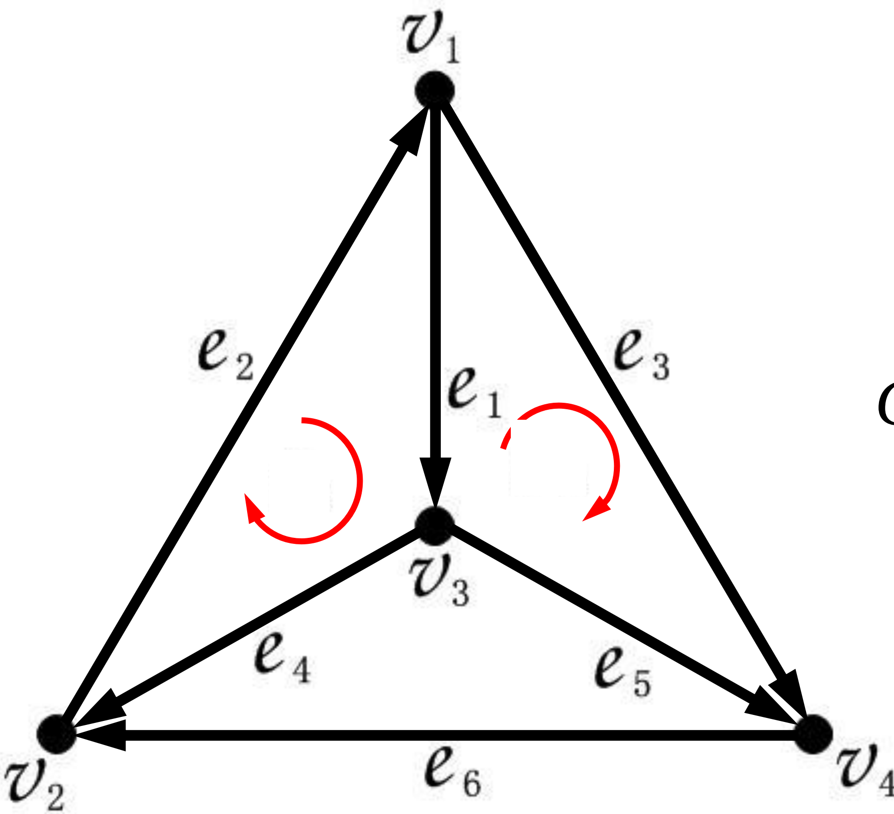
清華大學 Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定义3.4.1 有向连通图G的全部初级回路构成的矩阵，称为G的**完全回路矩阵**，记为C_e：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & ,e_j\in C_i\text{且与回路}C_i\text{方向一致}\\ -1 & ,e_j\in C_i\text{且与回路}C_i\text{方向相反}\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}$$

例：



$$C_e=\begin{array}{cc} \begin{array}{c} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6\\ c_7 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\\ & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \end{array}$$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

思考：

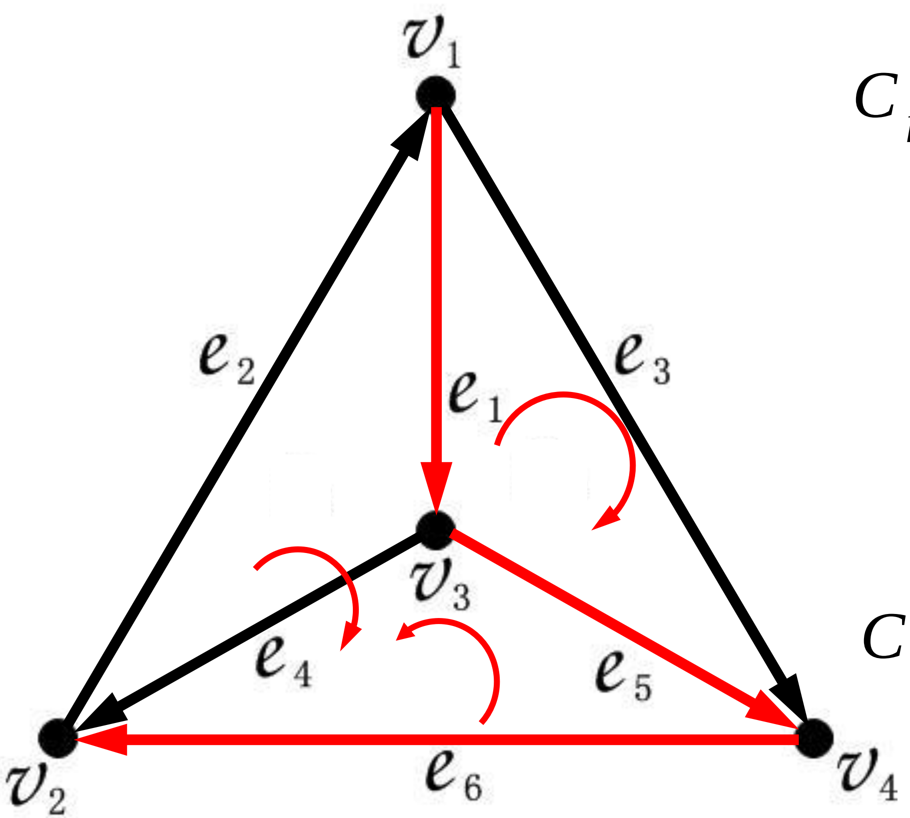
- 图G中会有多少个初级回路?
- 考虑极端情况：G为完全图
  - 任意不少于三个节点就可以形成一个初级回路

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定义3.4.2 当有向图G=(V,E)的支撑树 T 确定后，每条余树边e所对应的回路称为**基本回路**，该回路的方向与e的方向一致。由全部基本回路构成的矩阵称为G的**基本回路矩阵**，记为

$$C_f$$

例：



$$C_f=\begin{array}{c}c_{e2}\\c_{e3}\\c_{e4}\\ \\\end{array}\begin{bmatrix}1&1&0&0&1&1\\-1&0&1&0&-1&0\\0&0&0&1&-1&-1\\e_1&e_2&e_3&e_4&e_5&e_6\end{bmatrix}$$

$$C_f=\begin{array}{c}c_{e2}\\c_{e3}\\c_{e4}\\ \\\end{array}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}&\boxed{\begin{matrix}1&1&1\\-1&-1&0\\0&-1&-1\end{matrix}}\\\begin{matrix}e_2&e_3&e_4\end{matrix}&\begin{matrix}e_1&e_5&e_6\end{matrix}\end{bmatrix}$$

$$C_f=(I \quad C_{f_{12}})$$

显然，基本回路矩阵的秩为$m-n+1$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.1 有向连通图G=(V,E)的关联矩阵B和完全回路矩阵C_e的边次序一致时，恒有：

$$BC_e^T=0$$

证明：设 $D=BC_e^T$，则

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\cdot c_{jk}$$

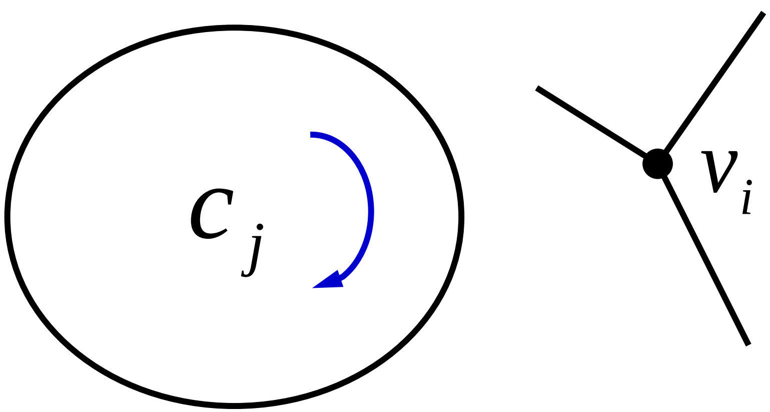
其中b_{ik}是结点v_i和边e_k的关联情况

c_{jk}是回路c_j和边e_k的关联情况

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

回路C_j与结点v_i只有两种情况：

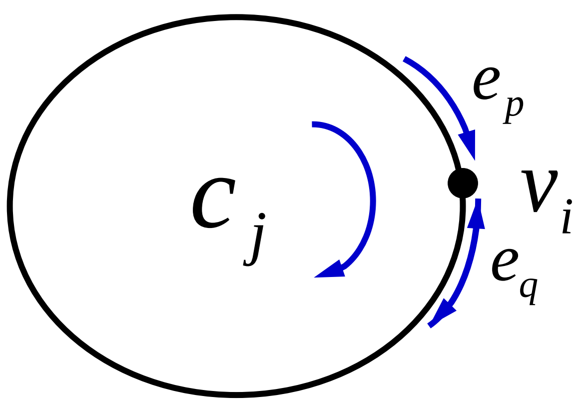
- C_j不经过结点v_i：
  - 与v_i关联的任一边都不是C_j中的边
  - 此时b_{ik}不为零时，c_{jk}一定为零
  - c_{jk}不为零时，b_{ik}一定为零



$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\cdot c_{jk}=0$$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- C_j经过结点v_i：
  - 则C_j必定经过与v_i关联的两条边e_p和e_q
  - 若e_p和e_q同向，则c_{jp}和c_{jq}同正负，b_{ip}和b_{iq}一正一负
  - 若e_p和e_q反向，则c_{jp}和c_{jq}一正一负，b_{ip}和b_{iq}同正负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$BC_e^T = 0$$

证毕！

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 思考：
  - 关联矩阵任一行与完全回路矩阵任一行向量的转置乘积是否为零？
  - 关联矩阵与基本回路矩阵的转置矩阵的乘积是否为零？
  - 基本关联矩阵与基本回路矩阵的转置矩阵乘积是否为零？

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 推论：有向连通图的基本关联矩阵B_k，基本回路矩阵C_f，在边次序一致的情况下，有

$$B_k C_f^T = 0$$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.4 若有向连通图G=(V,E)的基本关联矩阵 B_k 是和基本回路矩阵 C_f 的边次序一致，并设 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$，$B_k=(B_{11} \quad B_{12})$，则

$$C_{f_{12}} = -B_{11}^T \cdot (B_{12}^{-1})^T$$

证明：

－ 由推论知 $B_k C_f^T=0$，写成块矩阵形式

$$(B_{11} \quad B_{12})\begin{bmatrix} I \\ C_{f_{12}}^T \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B_{12} \cdot C_{f_{12}}^T = -B_{11}$$

证毕！

清華大學 Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.4说明了基本关联矩阵和基本回路矩阵之间的关系
  - 说明根据基本关联矩阵，可以通过计算得到基本回路矩阵

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.2 有向连通图G=(V,E)完全回路矩阵的秩为$(m-n+1)$

证明：

- 基本回路矩阵为完全回路矩阵的子阵（列数相等，行数不等）。
- 基本回路矩阵秩为$m-n+1$
- 则完全回路矩阵的秩不小于$m-n+1$

即：$$ran(C_e) \geq m-n+1$$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- sylvester定理： 设A,B分别为n×m与m×s的矩阵， 则ran (AB) ≥ran (A) + ran (B) – m

$$B\text{：}\ n\times m \qquad ran(B)=n-1$$

$$C_e^T\text{：}\ m\times s \qquad ran(C_e^T)=?$$

$$BC_e^T=0 \ \Rightarrow ran(BC_e^T)=0$$

即： $$ran(C_e^T)\le m-n+1$$

故： $$ran(C_e)=m-n+1$$

证毕！

Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定义3.4.3 有向连通图G中$(m-n+1)$个互相独立的回路组成的矩阵，称为G的**回路矩阵**，记为C。

- 回路矩阵C具有以下几个简单性质：
  - 基本回路矩阵C_f是回路矩阵
  - $BC^T=0$，其中B与C的边次序一致
  - $C=P\cdot C_f$，其中P为非奇异方阵，C与C_f边次序一致

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.3 连通图G=(V,E)的回路矩阵C的任一$(m-n+1)$阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于G的某一棵余树

证明：

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 充分性： 已知余树 $\overline{T}$ ⇨ 对应行列式非零
  - 可构造出G的基本回路矩阵 $C_f = (I \quad C_{f_{12}})$。
  - 对给定的回路矩阵C进行列交换，使其边序与C_f一致，这样可写为 $C = (C_{11} \quad C_{12})$，其中$C_{11}$对应余树 $\overline{T}$
  - 由性质3，$C = P \cdot C_f$ ，即

$$(C_{11} \quad C_{12}) = P(I \quad C_{f_{12}}) = (P \quad P \cdot C_{f_{12}})$$

  - 因此，$C_{11} = P$，P非奇异，即C_{11}行列式非零

充分性证毕

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 必要性：已知回路矩阵C的某$(m-n+1)$阶子阵行列式非零。
  - 将这$(m-n+1)$列放在前面，写为$C=(C_{11}\quad C_{12})$
  - 求证C_{11}对应的是一棵余树（反证法）：
  - 假设C_{12}对应的不是一棵树，则C_{12}中必含回路，不妨设为C_x
  - 由于回路矩阵的各行线性无关，且完全回路矩阵秩为$m-n+1$

任意一个回路都可以由回路矩阵各行向量线性表示！

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 因此，C_x一定可以由C中各行线性表示，即C经过行初等变换，可以得到表示C_x的行向量

$$C=(C_{11} \quad C_{12}) \longrightarrow C'=\begin{bmatrix} C_{11}' & C_{12}' \\ \multicolumn{2}{c}{C_x} \end{bmatrix} \longrightarrow C'=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} C_{11}' \\ 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} C_{12}' \\ C_{12}'' \end{matrix} \end{bmatrix}$$

- 即C_{11}可经过行初等变换，可得到
- 说明C_{11}行列式为零，与前提矛盾。
- 因此C_{12}对应的是一棵树，C_{11}对应其余树！

必要性证毕！

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

- 定理3.4.3 连通图G=(V,E)的回路矩阵C的任一$(m-n+1)$阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于G的某一棵余树

vs

- 定理3.2.6 令B_k是有向连通图G的基本关联矩阵，那么B_k的任意$n-1$阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成G的一棵支撑树。

主要内容

- 3.1 树的有关定义
- 3.2 基本关联矩阵及其性质
- 3.3 支撑树的计数
- **3.4 回路矩阵与割集矩阵**
- 3.5 支撑树的生成
- 3.6 Huffman树
- 3.7 最短树
- 3.8 最大分枝

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定义3.4.4 设S为有向图G=(V,E)的边子集，若
  - $G' = (V, E - S)$ 比G的连通支数多1
  - 对任意S的真子集S'，$G'' = (V, E - S')$ 与G的连通支数相同

  则称S为G的一个**割集**

- 一般给割集S一个方向，称它为**有向割集**

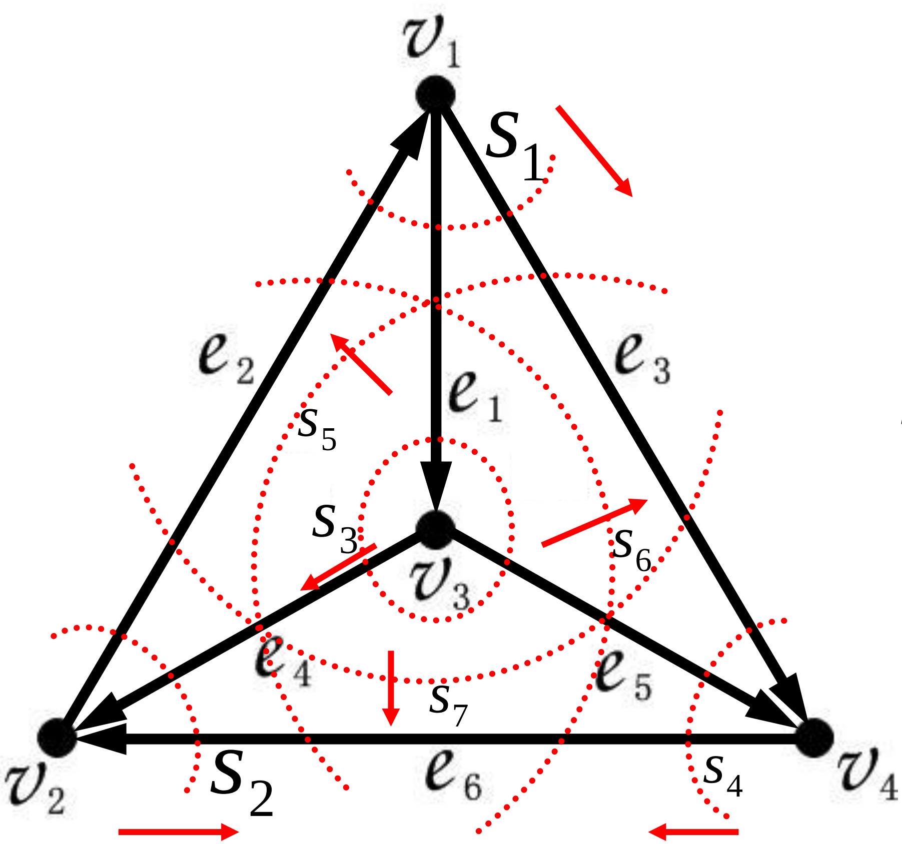
?

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定义3.4.5 有向连通图G的全部割集构成的矩阵，称为G的完全割集矩阵，记为S_e：

$$s_{ij}=\begin{cases}1 & ，e_j\in S_i \text{ 且与割集} S_i \text{方向一致} \\ -1 & ，e_j\in S_i \text{ 且与割集} S_i \text{方向相反} \\ 0 & ，\text{其他}\end{cases}$$

例：



$$S_e=\begin{array}{c}
\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6
\end{array}\right]
\end{array}$$

回路矩阵与割集矩阵－回路矩阵

思考：

- 图G中会有多少个割集？
  - 一个割集可将连通图分为两个部分，连通图的一个划分就对应一个割集
  - n个结点划分为两个部分，有多少种分法？
  - 设想将n个不同的球放入两个盒子

$$\frac{2^n-2}{2}=2^{n-1}-1$$

完全割集矩阵规模为$(2^{n-1}-1)\times m$

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

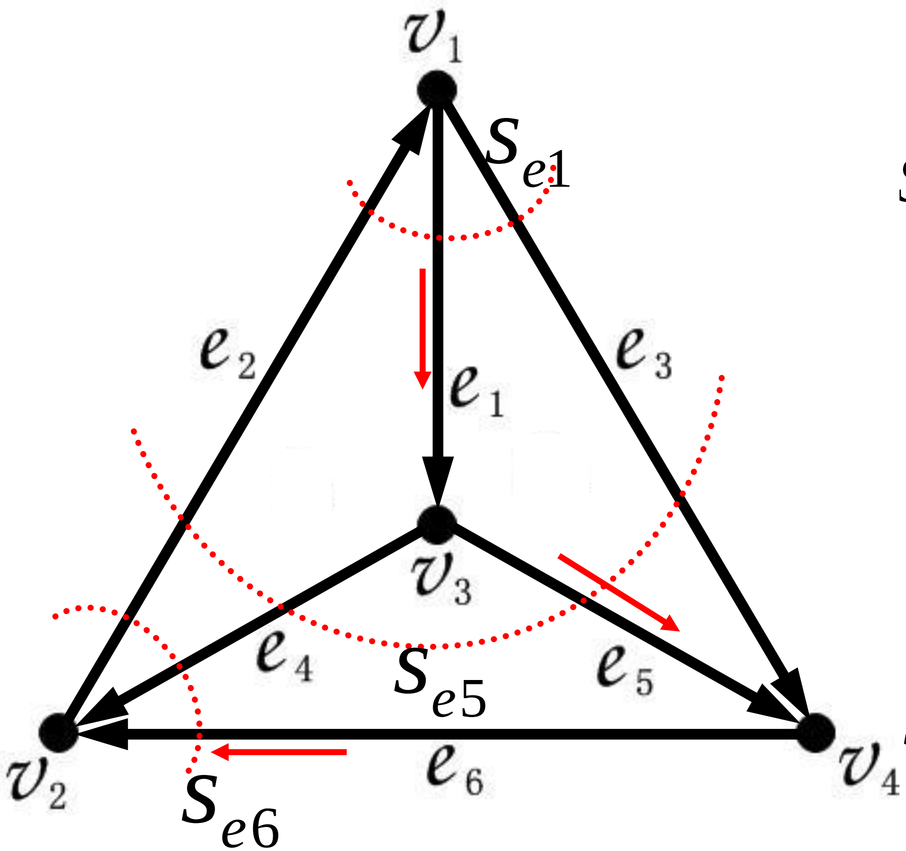
- 定义3.4.6 设T是连通图 G 的一棵树，e_i是树枝。对应e_i存在G的割集S_i，S_i只包括一条树枝e_i及某些余树枝，且与e_i的方向一致。此时称S_i为G的对应树T的一个**基本割集**

- 定义3.4.7 给定有向连通图G的一棵树T，由对应T的全部基本割集组成的矩阵称为**基本割集矩阵**，记为

$$S_f$$

清華大学 Tsinghua University

例：



$$S_f=\begin{array}{c} \\ s_{e1} \\ s_{e5} \\ s_{e6} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$S_f=\begin{array}{c} \\ s_{e1} \\ s_{e5} \\ s_{e6} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_2 & e_3 & e_4 & e_1 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

S_f 的秩为 $n-1$

$$S_f=\begin{pmatrix} S_{f_{11}} & I \end{pmatrix}$$

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图G的完全回路矩阵C_e和完全割集矩阵S_e的边次序一致时，有

$$S_e C_e^T = 0$$

证明：设$D = S_e C_e^T$，则

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \cdot c_{jk}$$

其中s_{ik}是第i个割集s_i中e_k的情况

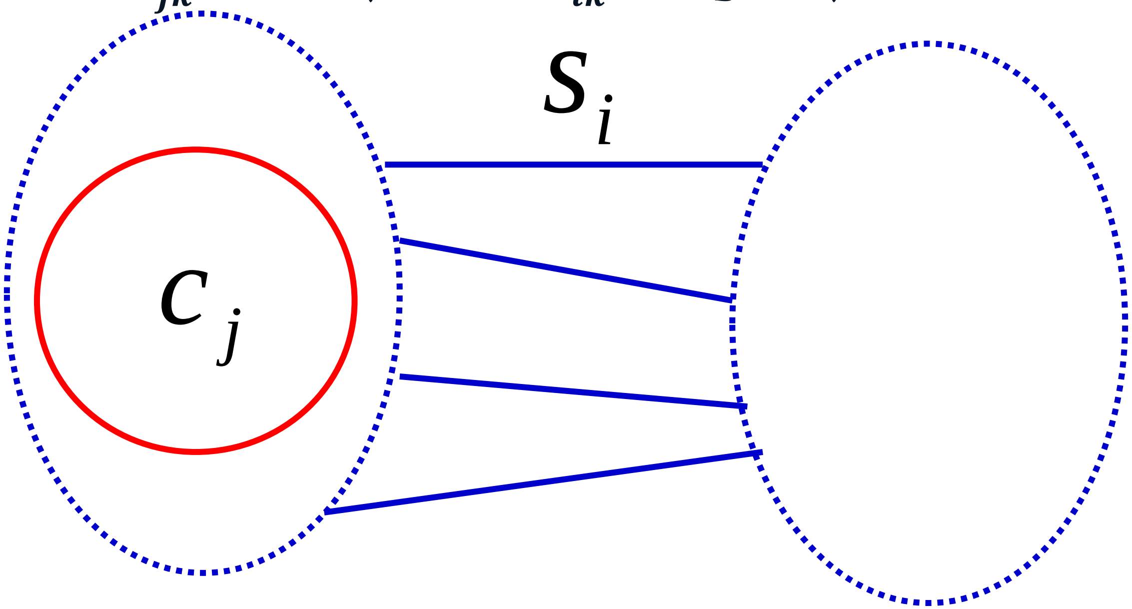
c_{jk}是第j个回路c_j中e_k的情况

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

回路C_j与割集S_i只有两种情况：

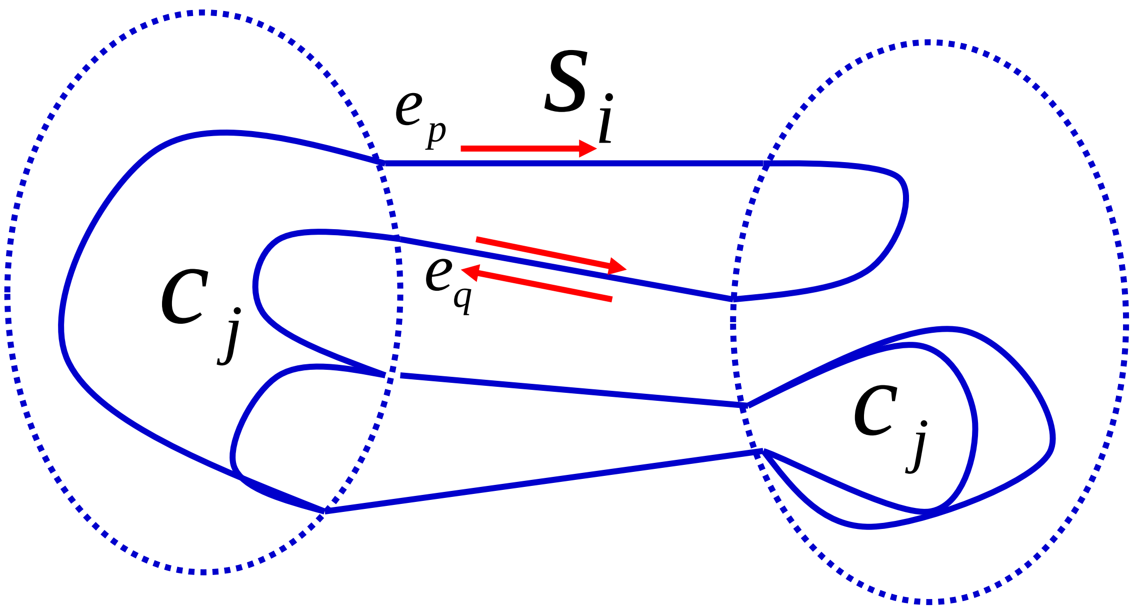
- C_j与割集S_i无公共边（不相交）：
  - 此时S_i中的任一边都不是C_j中的边
  - s_{ik}不为零时，c_{jk}一定为零
  - c_{jk}不为零时，s_{ik}一定为零

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{m} s_{ik}\cdot c_{jk}=0$$



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- C_j与割集S_i有公共边（相交）：
  - 则C_j必定与S_i有成对出现的偶数条公共边e_p和e_q
  - 若e_p和e_q同向，则C_{jp}和C_{jq}一正一负，S_{ip}和S_{iq}同正负
  - 若e_p和e_q反向，则C_{jp}和C_{jq}同正负，S_{ip}和S_{iq}一正一负



$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} s_{ik} \cdot c_{jk} = 0$$

$$S_e C_e^T = 0$$

证毕！

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图G的完全回路矩阵C_e和完全割集矩阵S_e的边次序一致时，有

$$S_e C_e^T = 0$$

- 思考：
  - 完全割集矩阵的任一行，与完全回路矩阵的任一行的转置乘积，是否为零？
  - 基本割集矩阵、基本回路矩阵是什么关系？

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.5 当有向连通图G的完全回路矩阵C_e和完全割集矩阵S_e的边次序一致时，有

$$S_e C_e^T = 0$$

- 定理3.4.1 有向连通图G=(V,E)的关联矩阵B和完全回路矩阵C_e的边次序一致时，恒有：

$$B C_e^T = 0$$

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.6 有向连通图G=(V,E)完全割集矩阵的秩为$(n-1)$

证明：

– 由于基本割集矩阵(秩为$n-1$)是完全割集矩阵的行子阵，所以完全割集矩阵的秩不小于$n-1$

– 由于 $S_e C_e^T$=0，根据sylvester定理

Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- sylvester定理：设A,B分别为n×m与m×s的矩阵，则ran (AB) ≥ran (A) + ran (B) – m

$$S_e: \quad p \times m \qquad ran(S_e) = ?$$

$$C_e^T: \quad m \times q \qquad ran(C_e^T) = m - n + 1$$

$$S_e C_e^T = 0 \quad \Rightarrow ran(S_e C_e^T) = 0$$

即： $$ran(S_e) \le n - 1$$

故： $$ran(S_e) = n - 1$$

证毕！

清華大學 Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定义3.4.8 有向连通图G中$(n-1)$个互相独立的割集组成的矩阵，称为G的**割集矩阵**，记为S。割集矩阵S具有以下几个简单性质：
  - 基本割集矩阵S_f是割集矩阵
  - $SC^T=0$，其中S与C的边次序一致
  - $S=P\cdot S_f$，其中P为非奇异方阵，S与S_f边次序一致

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.7 有向连通图G=(V,E)的割集矩阵S的任一$(n-1)$阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于G的某棵树

证明：

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 充分性：已知G的树T ⇨ 其对应子阵行列式非零
  - 构造基本割集矩阵 $S_f = \begin{pmatrix} S_{f_{11}} & I \end{pmatrix}$。
  - 对给定的割集矩阵S进行列交换，使其边序与S_f一致，这样可写为$S = (S_{11} \quad S_{12})$，其中$S_{12}$对应树$T$
  - 由性质3，$S = P \cdot S_f$，即

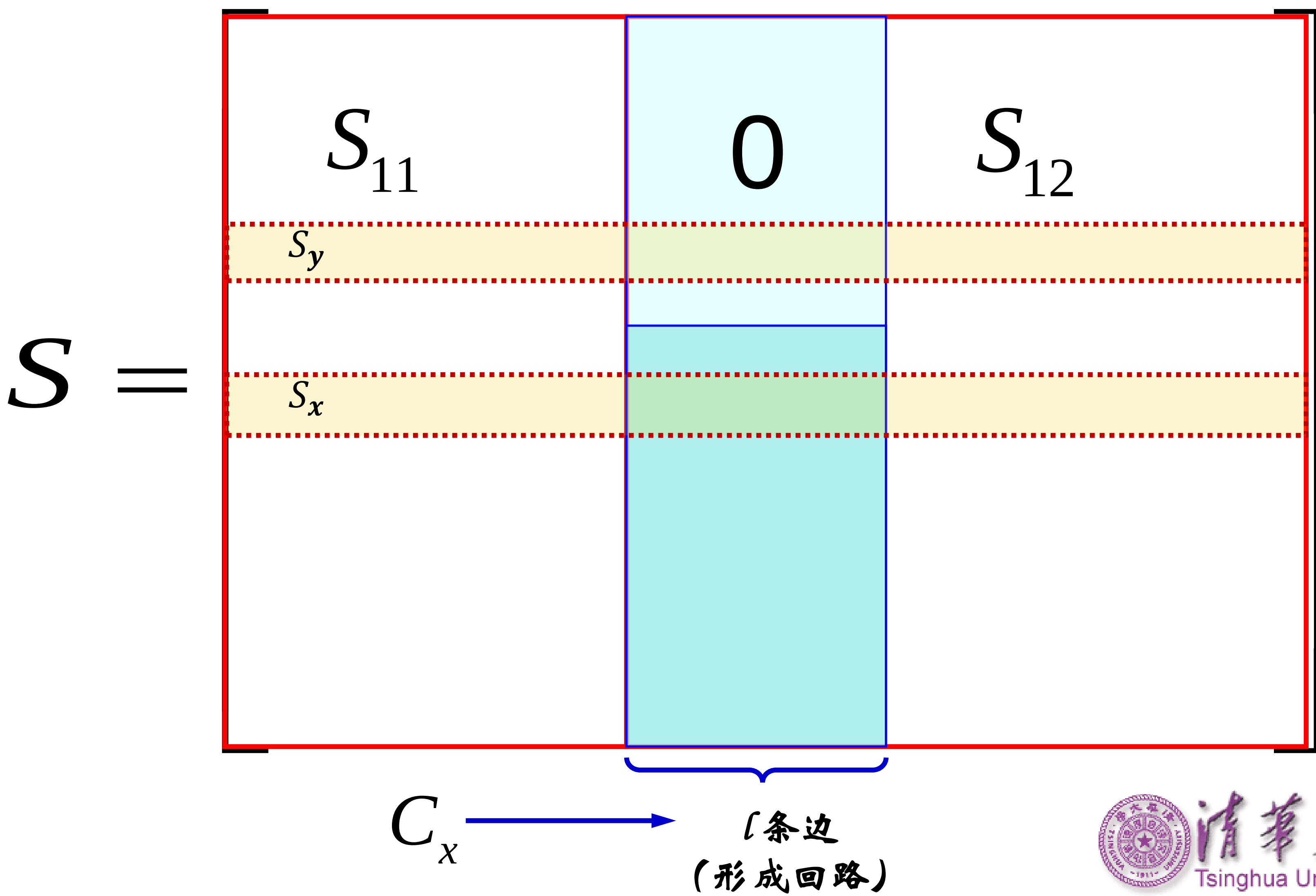
$$(S_{11} \quad S_{12}) = P\begin{pmatrix} S_{f_{11}} & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \cdot S_{f_{11}} & P \end{pmatrix}$$

  - 因此，$S_{12} = P$，P非奇异，即S_{12}行列式非零

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 必要性：已知割集矩阵S的某$(n-1)$阶子阵行列式非零 ⟹ 所对应列构成一棵树
  - 将这$(n-1)$列调整在后面，写为$S=(S_{11}\quad S_{12})$
  - 反证法证明S_{12}对应的是一棵树：
  - 假设S_{12}对应的不是一棵树，则S_{12}所对应的边中必含回路，不妨设此回路为C_x，其边数为$l\ (l<n)$

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵



回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 必要性：已知割集矩阵S的某(n－1)阶子阵行列式非零。
  - 将这(n－1)列调整在后面，写为 $S=(S_{11} \quad S_{12})$
  - 反证法证明S_{12}对应的是一棵树：
  - 假设S_{12}对应的不是一棵树，则S_{12}所对应的边中必含回路，不妨设此回路为C_x，其边数为l $(l<n)$
  - C_x所对应的列形成S_{12}的子阵，而该子阵每一行的元素或者全零、或者1、-1成对出现，因此该子阵的l个列向量之和为零，因此S_{12}的列向量线性相关，即S_{12}行列式为零
  - 矛盾！

证毕！

Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.7 有向连通图G=(V,E)的割集矩阵S的任一(n－1)阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于G的某棵支撑树
- 定理3.4.3 连通图G=(V,E)的回路矩阵C的任一(m－n＋1)阶子阵行列式非零，当且仅当这些列对应于G的某一棵余树
- 定理3.2.6 令B_k是有向连通图G的基本关联矩阵，那么B_k的任意n－1阶子阵行列式非零的充要条件是其各列所对应的边构成G的一棵支撑树。

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 思考：
  - 基本回路矩阵
  - 基本割集矩阵
  - 基本关联矩阵

它们的关系是什么？

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.8 设S_f和C_f分别是连通图G中关于某棵树T的基本割集矩阵和基本回路矩阵，且边次序一致。并设$S_f=\begin{pmatrix}S_{f_{11}} & I\end{pmatrix}$，$C_f=\begin{pmatrix}I & C_{f_{12}}\end{pmatrix}$，则 $S_{f_{11}}=-C_{f_{12}}^T$

证明：由推论有 $S_f\cdot C_f^T=0$

即

$$\begin{pmatrix}S_{f_{11}} & I\end{pmatrix}\begin{bmatrix}I\\ C_{f_{12}}^T\end{bmatrix}=0$$

证毕！

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 定理3.4.4 若有向连通图G=(V,E)的基本关联矩阵B_k是和基本回路矩阵C_f的边次序一致，并设 $C_f=(I \quad C_{f_{12}})$， $B_k=(B_{11} \quad B_{12})$， 则

$$C_{f_{12}}=-B_{11}^T\cdot(B_{12}^{-1})^T$$

Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－割集矩阵

- 推论3.4.1 当连通图G的基本关联矩阵B_k与基本割集矩阵S_f的边次序一致，并设：

$$B_k=(B_{11} \quad B_{12})\text{，}\ S_f=\left(S_{f_{11}} \quad I\right)$$

则：$$S_{f_{11}}=B_{12}^{-1}\cdot B_{11}$$

证明：由定理3.4.4，及定理3.4.8，

$$S_{f_{11}}=-C_{f_{12}}^{T}=-\left(-B_{11}^{T}\cdot(B_{12}^{-1})^{T}\right)^{T}=B_{12}^{-1}\cdot B_{11}$$

证毕！

Tsinghua University

回路矩阵与割集矩阵－小结

- 基本概念：
  - 回路矩阵、割集矩阵、基本回路矩阵、基本割集矩阵、完全回路矩阵、完全割集矩阵
- 回路矩阵基本性质
- 割集矩阵基本性质

- 基本回路矩阵、基本割集矩阵、基本关联矩阵三者关系

清華大學 Tsinghua University

作业

- 课后
  - 4、5、11、13
- 选作
  - 9

- 下下次课：习题课
  - 持续接受报名，截止下周五下午6:00，请见网络学堂具体通知

Tsinghua University