HW 9

9.17.

问：一容器被中间的隔板分成相等的两半，一半装有氦气，$T=250\,K$，另一半装有氧气，$T=310\,K$。二者压强相等，求去除隔板后，两种气体混成的气体温度。

解：He，O_2 的压强、体积相等，假设是理想气体，于是

(其)n为摩尔数 $nT = \frac{pV}{R} = C \Rightarrow n_{He}\cdot 250 = n_{O_2}\cdot 310 \Rightarrow \frac{n_{O_2}}{n_{He}} = \frac{25}{31}.$

总内能 $U = \underbrace{\frac{3}{2}n_{He}RT_{He} + \frac{5}{2}n_{O_2}RT_{O_2}}_{\text{前}} = \underbrace{\left(\frac{3}{2}n_{He} + \frac{5}{2}n_{O_2}\right)RT_1}_{\text{后}}$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{\frac{3}{2}n_{He}\cdot 250 + \frac{5}{2}\cdot\frac{25}{31}n_{He}\cdot 310}{\frac{3}{2}n_{He} + \frac{5}{2}\cdot\frac{25}{31}n_{He}} = 284\ K.$$

9.18.

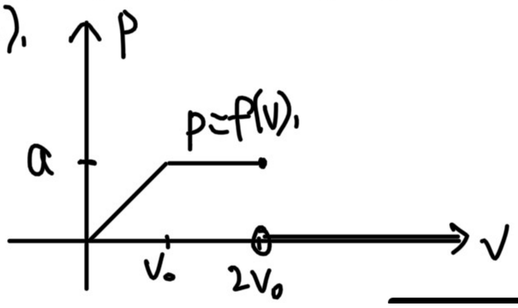
问：有N个粒子，其速率分布函数为 $f(v) = \begin{cases} av/v_0, & 0\le v\le v_0 \\ a, & v_0\le v\le 2v_0 \\ 0, & v>2v_0 \end{cases}$

(1). 作速率分布曲线，并求a. (2). $v>v_0$，$v<v_0$ 的粒子数。

(3). 求粒子平均速率。

解：(事实上 本题是概率分布为统计题).

(1).



$f(v)$ 必满足

$$\int_0^{\infty} f(v)\,dv = 1 \Rightarrow \frac{(2v_0+v_0)a}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{3v_0}.$$

(2). $\#(v>v_0) = N\cdot a\cdot(2v_0 - v_0) = N a v_0 = \frac{2}{3}N$.

$\#(v<v_0) = N - \#(v>v_0) = \frac{1}{3}N$.

(3). $$\int_0^{+\infty} v f(v)\,dv = \int_0^{v_0} v\cdot\frac{av}{v_0}\,dv + \int_{v_0}^{2v_0} v\cdot a\,dv$$

$$= \frac{2}{3v_0^2}\cdot\frac{1}{3}v_0^3 + \frac{2}{3v_0}\cdot\frac{1}{2}(4v_0^2 - v_0^2) = \frac{2}{9}v_0 + v_0 = \frac{11}{9}v_0 \ \#$$

9.19.

问：日冕的温度为2×10^6 K，求其电子的方均根速率。星际空间的温度为2.7K，气体主要是氢原子，求其方均根速率。1994年有人曾用激光冷却法，使一群Na原子几乎停止运动，温度2.4×10^{-11} K，求Na原子的方均根速率。

解：$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}kT \Rightarrow \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

电子：$\sqrt{\overline{v_{e^-}^2}} = \sqrt{\frac{3k_B\cdot 2\times10^6}{9.11\times10^{-31}}} = 9.54\times10^6\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

氢：$\sqrt{\overline{v_{p^+}^2}} = \sqrt{\frac{3k_B\cdot 2.7}{1.6\times10^{-27}}} = 259\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

Na：$\sqrt{\overline{v_{Na}^2}} = \sqrt{\frac{3k_B\cdot 2.4\times10^{-11}}{23\times1.67\times10^{-27}}} = 1.61\times10^{-4}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$.

26.

问：容器容积20L，装有1.1 kg的CO_2气体，温度为13°C，分别利用实际气体、理想气体状态方程求气压，并求CO_2内压强。$a = 3.64\times10^5\ \mathrm{Pa\cdot L^2\,mol^{-2}}$，$b = 0.0427\ \mathrm{L\,mol^{-1}}$.

解：实际气体：$(p + \frac{an^2}{V^2})(V - nb) = nRT$.（n为摩尔数）

$n(CO_2) = \frac{1.1\times1000}{12+16+16} = 25$ mol.

$(12+16+16$

$$\Rightarrow p = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2} = \frac{25\times 8.31\times 286}{20\times10^{-3}-25\times 0.0927\times10^{-3}} - \frac{625\times 3.64\times10^{-1}}{(20\times10^{-3})^2}$$

$$= 3.14\times10^{6} - 5.69\times10^{5} = 2.57\times10^{6}\,\mathrm{Pa}$$

理想气体：$pV=nRT$.

$$p = \frac{25\times 8.31\times 286}{20\times10^{-3}} = 2.97\times10^{6}\,\mathrm{Pa}.$$

内压强为 5.65×10^{5} Pa.

28.（问）在标准状态下，He 的黏度 $\eta = 1.89\times10^{-5}\,\mathrm{Pa\cdot s}$，$M = 0.004\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}$，$\bar{v} = 1.20\times10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. 试求

(1). 标准状况下，氦原子的平均自由程。

(2). 氦原子直径。

解：(1). $\eta = \frac{1}{3} n\cdot m\cdot \bar{v}\,\bar{\lambda}$. （$n$ 为单位体积气体分子数）

$$\Rightarrow \bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\bar{v}\cdot n\cdot m},$$

标准状态下，单位体积有 $\frac{1000}{22.4}$ mol 气体.

因此 $\bar{\lambda} = \frac{3\eta}{\bar{v}\cdot n\cdot m} = \frac{3\times 1.89\times10^{-5}}{1.20\times10^{3}\times\frac{1000}{22.4}\times 0.004} = 2.65\times10^{-7}\,\mathrm{m}$.

#

(2). $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} \Rightarrow \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}n\bar{\lambda}} \Leftrightarrow \pi d^2 = \frac{1}{\sqrt{2}n\bar{\lambda}} \Leftrightarrow d = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\cdot\pi n\bar{\lambda}}}$,

$$n = \frac{1000}{22.4}\times 6.022\times10^{23} = 2.69\times10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}.$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}\cdot\pi\cdot 2.69\times10^{25}\times 2.65\times10^{-7}}} = 1.78\times10^{-10}\,\mathrm{m}$$

#

29. 问：热水瓶胆两壁间距 $l=0.4\,cm$，充满 $t=27°C$ 的 N_2，N_2 分子的有效直径 $d=3.7\,Å$，两壁间压强降低到多大以下时，N_2 的热导率才会比它在常压下的数值小？

解：由热导率的定义，$K=\frac{1}{3}mn\bar{v}\bar{\lambda}C_v$.

针对 $\bar{\lambda}$，　$\bar{\lambda}=\min\left\{l,\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}\right\}$，$p=nk_BT \Leftrightarrow n=\frac{p}{k_BT}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}=\frac{k_BT}{\sqrt{2}\sigma p}<l \Leftrightarrow p>\frac{k_BT}{\sqrt{2}\sigma l}\text{ 时，}\bar{\lambda}=\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma},$$

即 $\bar{\lambda}(p)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}, & p>\frac{k_BT}{\sqrt{2}\sigma l}\\ l, & \text{otherwise.}\end{cases}$

$$\Rightarrow K(p)=\frac{1}{3}mn\bar{v}\bar{\lambda}C_v=\frac{1}{3}\frac{mp\bar{v}\bar{\lambda}C_v}{k_BT}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}\frac{m\cancel{p}\bar{v}C_v}{\cancel{k_BT}}\cdot\frac{\cancel{k_BT}}{\sqrt{2}\sigma\cancel{p}}=\frac{1}{3}\frac{m\bar{v}C_v}{\sqrt{2}\sigma}, & p>\frac{k_BT}{\sqrt{2}\sigma l}\\ \frac{1}{3}\frac{mp\bar{v}lC_v}{k_BT}, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

因此，当 $p<\frac{k_BT}{\sqrt{2}\sigma l}=\frac{1.38\times300.15}{\sqrt{2}\times\pi(3.7\times10^{-10})^2\times0.004}=1.70\,Pa$ 时，热导率下降。

30. 问：设有一半径为 R 的水滴悬浮在空气中，由于蒸发而体积逐渐缩小，蒸发出的水蒸气扩散到周围空气中。设其近邻处，水蒸气密度为 ρ，远处为 ρ_∞，水蒸气在空气中的扩散系数为 D，水的密度为 ρ_w。证明：

(1). 水滴蒸发速率 $W=4\pi D(\rho-\rho_\infty)R$.

(2). 全部蒸发完需要的时间为 $t=\rho_w R^2/2D(\rho-\rho_\infty)$.

证明：

(1). 扩散定律：$dM = -D\frac{d\rho}{dz}\,dS\,dt$.

$\Rightarrow \frac{dM}{dt} = -D\cdot\frac{d\rho}{dr}\,4\pi r^2 = -4\pi D\frac{d\rho}{dr}r^2$.

*：

这样的水蒸气质量相等.

于是 $\frac{d\rho}{dr}r^2 = K$，$\Rightarrow \int_{\rho}^{\rho_\infty}\frac{d\rho}{K} = \int_{R}^{\infty}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{\rho_\infty-\rho}{K} = -\frac{1}{R}$

$\Leftrightarrow K = (\rho-\rho_\infty)R$.

$\frac{dM}{dt} = -4\pi D(\rho-\rho_\infty)R$ $\boxtimes$.

(2). $\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4\pi}{3}\rho_w r^3\right) = 4\pi\rho_w r^2\cdot\frac{dr}{dt}$

$r=R$ 则有

$\cancel{4\pi}R^2\rho_w\frac{dR}{dt} = -\cancel{4\pi}D(\rho-\rho_\infty)\cancel{R}$.

$\frac{dR}{dt} = -\frac{D(\rho-\rho_\infty)}{R\rho_w}$.

水滴大小由 $r=R$ 连续变化至 $r=0$. $\Rightarrow$

$\int_R^0 r\,dr = \int_0^t -\frac{D(\rho-\rho_\infty)}{\rho_w}dt' \Rightarrow -\frac{1}{2}R^2 = -\frac{D(\rho-\rho_\infty)}{\rho_w}t$

$\Rightarrow t = \frac{\rho_w R^2}{2D(\rho-\rho_\infty)}$ $\otimes$.