Discrete Mathematics
离散数学(1)

第四章 谓词逻辑的基本概念

马昱春

清華大學
Tsinghua University

教材如是说……

前两章是对命题逻辑从语义出发做了较直观的、**不严谨地、非形式化**的解释性地讨论。

而建立了公理系统的命题逻辑，面貌就改观了，从理论上提高了一步，使对命题逻辑讨论有了坚实的基础。

回顾：第三章主要内容

- 本章介绍**命题逻辑的公理化**，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：
- 介绍命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍一个命题逻辑公理系统的构成。
- **给出公理**，通过定理推演的实例，使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述。

复习 – 命题演算

命题演算形式系统

语法
- 命题公式
- 等值公理
- 等值公式
- 推理形式

语义
- 真值指派
- 公式的值
- 永真式

可靠性：凡是推出来的都是正确的

完备性：凡是正确的都可以推出来

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

举例1：

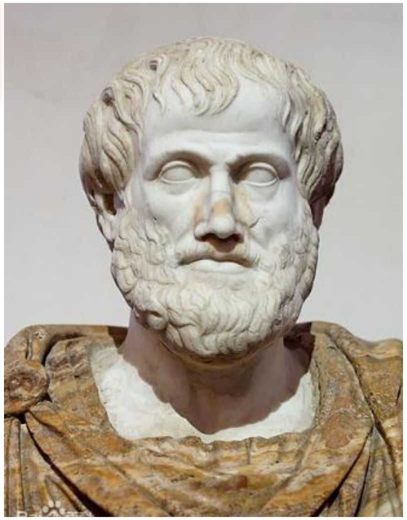
P：张三是学生
Q：李四是学生

P，Q 两个独立的命题，未能反映或突出二者的共性与特点。
因此，有必要深入研究它们的形式结构和逻辑关系。


At the heart of Frege's new language lay a very simple idea. Yet, it was enough to open up for us new, virgin territory.
FROM ARISTOTLE TO BOOLE, LOGICIANS EMPLOY SYLLOGISMS OF THE TYPE "SOCRATES IS A MAN". BUT IF WE ARE TO STUDY LOGICALLY MATHEMATICS ITSELF WE SHALL NEED MORE!
HM... LIKE WHAT EXACTLY?
WE NEED TO INTRODUCE VARIABLES! WE HAVE TO BE ABLE TO SAY THINGS LIKE "X IS A MAN"...
...WHICH IS TRUE IF, FOR EXAMPLE, X IS EQUAL TO "RUSSELL" BUT FALSE IF IT IS ONE OF...
THESE THREE COOK—
ACH! WOMAN!
?

命题逻辑的局限性 & 引入谓词逻辑的必要性

$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$ (三段论)



亚里士多德

举例2：三段论

P: 凡是人都是要死的.
Q: 苏格拉底是人.
R: 所以苏格拉底是要死的.

利用命题逻辑，仅能形式化为（$P \wedge Q$）$\to R$
显然，对于任意的P，Q，R 来说，这个推理形式不是重言式，即，在命题逻辑中无法给出完整准确的描述。

问题的提出

- 需要进一步分析推理结构
  - 上述推理中，各命题之间的关系在于简单命题的成分之间

- 需要进一步分解简单命题
- 简单命题的符号化

主谓宾

凡是人都是要死的.

简单命题的结构

主语	谓语	宾语
↑	↑	↑
讨论对象	对象的性质或关系	讨论对象
↓	↓	↓
个体词(组)	谓词	个体词(组)

- 个体词，谓词

凡是人都是要死的.

第四章 谓词逻辑的基本概念

4.1 谓词和个体词
4.2 函数和量词
4.3 合式公式
4.4 自然语句的形式化
4.5 有限域下公式的表示法
4.6 公式的普遍有效性和判定问题

命题逻辑与谓词逻辑

- 命题逻辑存在的问题
  - 问题出在“凡”字
  - 没有表达出个体和总体之间的内在联系和数量关系

凡有理数都是实数

- 关系
  - 谓词逻辑是命题逻辑的推广
  - 命题逻辑是谓词逻辑的特殊情形
- 例子

P(x)表示“x是学生” P(张三)

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在清华大学
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）
- π的平方是非负的
- 所有实数的平方都是非负的
- 有一个比2^{1000}大的素数

π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：... 是无理数，表示“π”的性质

张三与李四同在清华大学

- 解

个体：张三、李四

谓词：…与…同在清华大学，表示张三和李四的关系

个体：张三

谓词：…与李四同在清华大学，表示张三的性质

个体：李四

谓词：张三与…同在清华大学，表示李四的性质

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…

个体：y

谓词：x和…的和等于z

谓词可以表示：1）单个个体的性质（一元谓词）；2）两个个体词直接的关系（2元谓词）；3）n个个体之间的关系或性质（n元谓词）

π的平方是非负的

个体：π

谓词： …的平方是非负的

个体：π的平方

谓词： …是非负的

"π的平方"是一个复合个体，需要进一步分解

个体：π

函数：…的平方

谓词：…是非负的

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数

函数：…的平方

谓词：…是非负的

"所有"是什么

量词：所有

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数

谓词：…比2^{1000}大

“有一个”是什么

量词：有一个

例1：分析下列各命题的个体词和谓词

- π是无理数
- 张三与李四同在清华大学
- x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）n元谓词
- π的平方是非负的 复合个体，函数
- 所有实数的平方都是非负的 所有？
- 有一个比2^{1000}大的素数 有一个？

4.1 谓词和个体词

- 谓词逻辑：区分主语、谓语，引入变元，
  引入谓词、量词
- 可将谓词逻辑理解为
  命题逻辑 **+｛个体词，谓词，量词，函数｝**
- 这里讨论的是**一阶谓词逻辑**，或称**狭谓词逻辑**。
- 谓词逻辑的三要素
  - 个体词，谓词和量词
  - 函数

4.1 谓词和个体词

4-1-1　个体词（主词）

- 个体词是指所研究对象中可以独立存在的具体的或抽象的个体。
  - 张三，李四
- 在一个命题中，个体词通常是表示思维对象的词，又称作主词。

4.1 谓词和个体词

4-1-2 个体常项与个体变项

- 将表示具体或特定客体的个体词称作个体常项，用小写字母a， b， c，…表示；
- 将表示抽象或泛指的个体词称作个体变项，用小写字母x， y， z， …表示；
- 并称个体变项的取值范围为个体域或论域，以D表示。
- 约定有一个特殊的个体域，它由世间一切事物组成，称之为总论域。

4. 1 谓词和个体词

4-1-3 谓词(Predicate)

- 谓词是用来刻划个体词的性质或多个个体词间关系的词。

  $P(x)$, $Q(x, y)$

- 谓词又可看作是由给定的个体域到集合{T, F}上的一个映射。

4.1 谓词和个体词

4-1-4 谓词常项与谓词变项

- 表示具体性质或关系的谓词称作谓词常项;
- 表示抽象或泛指的性质或关系的谓词称作谓词变项。
- 谓词常项与谓词变项都用大写英文字母$P, Q, R, \ldots$表示，可根据上下文区分。

4.1 谓词和个体词

4-1-5 一元与多元谓词

- 在一个命题中，如果个体词只有一个，这时表示该个体词性质或属性的词便是一元谓词，以 $P(x)$, $Q(x)$, …表示。
- 如果一个命题中的个体词多于一个，则表示这几个个体词间关系的词便是多元谓词，以$P(x, y)$，$Q(x, y, z)$, …等表示。
- 一般地，用$P(a)$表示个体常项a具有性质P，用$P(x)$表示个体变项x具有性质P。
- 用$P(a, b)$表示个体常项a, b具有关系P，用$P(x, y)$表示个体变项x, y具有关系P。
- 更一般地，用$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$表示含n ($n \geq 1$)个命题变项x_1, $x_2,\ldots,x_n$的n元谓词。

4.1 谓词和个体词

4-1-6 谓词逻辑与命题逻辑

- 有时将不带个体变项的谓词称作零元谓词。当此时的零元谓词又为谓词常项时，零元谓词即化为命题。
- 因此，命题逻辑中的命题均可以表示成零元谓词，或认为一个命题是没有个体变项的零元谓词。

4.2 函数和量词

4-2-1 谓词逻辑中的函数

- 在谓词逻辑中可引入函数，它是某一个体域（不必是实数）到另一个体域的映射。
- 谓词逻辑中的函数一般不单独使用，而是嵌入在谓词中。约定函数符号用小写字母表示。
- 如函数*father*(x) 表示x的父亲，若$P(x)$ 表示x 是教师
- 则$P(father(x))$ 就表示x的父亲是教师。
- 当x的取值确定后，$P(father\ (x))$ 的值或为真或为假。
- “张三的父亲和母亲是同学”可描述成 *CLASSMATE*(*father* (张三) , *mother* (张三))
  - 谓词*CLASSMATE*(x, y)表示x和y是同学
  - *father*(x)、*mother*(x)是函数。

4.2 函数和量词

4-2-2 量词(Quantifier)

- 表示个体常项或变项之间数量关系的词称为**量词**。
- 量词是对个体词所加的限制或约束的词。
- 量词分为**全称量词**和**存在量词**两种。

4-2-2 全称量词

- 日常生活和数学中常用的“所有的”，“一切的”，“任意的”，“每一个”，“凡”等词可统称为全称量词;
- 将它们符号化为“$\forall$”，并用$(\forall x)$, $(\forall y)$等表示个体域中所有的个体。
- 用$(\forall x)P(x)$,$(\forall y)Q(y)$等分别表示个体域中所有个体都有性质P和性质Q。

全称量词

全称量词的定义

- 命题$(\forall x)P(x)$当且仅当对论域中的所有x，$P(x)$均为真时方为真。
- 而$\mathbf{(\forall \boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x}) = F}$成立，**当且仅当至少**存在一个$x_0 \in D$，使$P(x_0) = F$。
- 注意$\mathbf{((\forall \boldsymbol{x})P(\boldsymbol{x})) = F}$与

  $\mathbf{(\forall \boldsymbol{x})\ (P(\boldsymbol{x}) = F)}$的区别

  $P(x)$表示x是女人？

例2 判断下列全称命题的真假.

- 所有的素数都是奇数；　假
- 对每一个无理数x，x^2也是无理数；　假
- 任何实数都有算术平方根；　假
- 每个指数函数都是单调函数；　真
- $\forall x \in \mathrm{R}$，$x^2>-1$.　真

4-2-3 存在量词(Existential quantifier)

- 思考：下列语句是命题吗？(1)与(3)，(2)与(4)之间有什么关系？
- (1)$2x+1=3$；
- (2)x能被2 和3 整除；
- (3)存在一个$x_0 \in \mathrm{R}$，使$2x_0+1=3$；
- (4)至少有一个$x_0 \in \mathrm{Z}$，x_0能被2 和3 整除.

4-2-3 存在量词

- 日常生活和数学中常用的“存在一个”，“有一个”，“有些”，“有的”等词可统称为存在量词，将它们符号化为“∃”；
- 用$(\exists x)$,$(\exists y)$等表示个体域中有的个体；
- 用$(\exists x)P(x)$,$(\exists y)Q(y)$等分别表示在个体域中存在个体具有性质P，存在个体具有性质Q。

全称量词和存在量词的含义归纳

	何时为真	何时为假
$\forall x P(x)$	对个体域中的每个x，$P(x)$都为真	至少存在一个x，使$P(x)$为假
$\exists x P(x)$	个体域中至少有一个x，使$P(x)$为真	对个体域中的每个x，$P(x)$都为假

练习

1.判断下列语句是全称命题还是特称命题：

(1)没有一个实数α，$\tan\alpha$无意义. 全称

(2)存在一条直线其斜率不存在. 特称

(3)所有圆的圆心到其切线的距离都等于半径吗？不是命题

(4)圆外切四边形，其对角互补. 全称

(5)有的指数函数不是单调函数. 特称

4-2-4 约束变元与自由变元

- 量词所约束的范围称为量词的辖域。
- 在公式$(\forall x)A$和$(\exists x)A$中，A为相应量词的辖域。
- 在$(\forall x)$和$(\exists x)$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现。
- 所有约束出现的变元称为约束变元。
- A中不是约束出现的其它变元均称为自由变元。

辖域例子

- $(\forall x)P(x)\vee Q(y)$
- $(\forall x)P(x)\vee Q(x)$
- $(\forall x)(\,P(x,y) \rightarrow Q(x,z)\,)$
- $(\forall x)(\,P(x) \rightarrow Q(y)\,) \rightarrow (\exists y)(\,H(x) \wedge L(x,y,z)\,)$
- $\forall x\exists y\forall z(A(x,y)\rightarrow B(x,y,z))\wedge C(t)$

$\forall z$的辖域

$\exists y$的辖域

$\forall x$的辖域

变元易名规则

$(\forall x)P(x)= (\forall y)P(y)$

$(\forall x)(P(x)\rightarrow Q(x,y)) \neq (\forall y)(P(y)\rightarrow Q(y,y))$

说明

对约束变元和自由变元有如下几点说明：

(1) 对约束变元用什么符号表示无关紧要。

(2) 一个谓词公式如果无自由变元，它就表示一个命题。

3) 一个n元谓词$P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$，若在前边添加k个量词，使其中的 k个个体变元变成约束变元，则此 n元谓词就变成了n-k元谓词。

4.3 合式公式

4-3-1 一阶谓词逻辑

- 在所讨论的谓词逻辑中，限定量词仅作用于个体变项，不允许量词作用于命题变项和谓词变项，也不讨论谓词的谓词。

非一阶示例：$\forall p(p \rightarrow Q(x))$， $\exists Q(Q(x) \rightarrow P(x))$

- 在这样的限定范围内的谓词逻辑称为一阶谓词逻辑。一阶谓词逻辑是相对于高阶谓词逻辑而言的。

4.3 合式公式

4-3-2 一阶谓词逻辑的符号集

- 个体常项：*a, b, c, …*（小写字母）。
- 个体变项：*x, y, z, …*（小写字母）。
- 命题变项： *p, q, r, …*（小写字母）。
- 谓词符号：*P, Q, R, …*（大写字母）。
- 函数符号： *f, g, h, …*（小写字母）。
- 联结词符号 ¬, ∧, ∨, →, ↔ 。
- 量词符号： ∀, ∃ 。
- 括号与逗号： （ ） ,

4-3-3 合式公式定义

(1) 命题常项、命题变项、和原子谓词公式（不含联结词的谓词公式）是合式公式。

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$也是合式公式。

(3) 若A,B是合式公式，而无变元x在A,B的一个中是约束的而在另一个中是自由的，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是合式公式（最外层括号可省略）。

（此处教材限制较严）

(4) 若A是合式公式，则$(\forall x)A$, $(\exists x)A$也是合式公式

(5) 只有有限次地应用(1)-(4)构成的符号串才是合式公式。

谓词逻辑中的合式公式也称为谓词公式，简称公式。

4.4 自然语句的形式化

- 利用计算机进行推理的基础工作。
- 在分析的基础上，将问题分解成一些合适的谓词表示；即先做一些谓词（函数）设定；
- 然后使用量词、联接词将设定的谓词构成合式公式。

符号化：π是无理数

- 解

个体：π（代表圆周率）

谓词：… 是无理数，以F表示

符号化：$F(\pi)$

张三与李四同在清华大学

个体：张三、李四

谓词：…与…同在清华大学，以G表示

符号化：G(张三,李四)

个体：张三

谓词：…与李四同在清华大学，以G'表示

符号化：G'(张三)

个体：李四

谓词：张三与…同在清华大学，以G''表示

符号化：G''(李四)

x和y的和等于z （x，y，z是确定的数）

个体：x、y、z

谓词：…和…的和等于…，以R表示

符号化：$R(x,y,z)$

个体：x、z

谓词：…和y的和等于…，以R'表示

符号化：$R'(x, z)$

个体：x、y、z

函数：…与…的和，以f表示

谓词：…等于…，以R''表示

符号化：$R''(f(x,y),z)$

所有实数的平方都是非负的

个体：每一个实数，以x表示
函数：...的平方，以f表示
谓词：...是非负的，以R表示
量词：所有，以$\forall$表示
符号化：$(\forall x)R(f(x))$
另解：
个体：每一个数，以z表示
谓词：是一个实数，以R'表示
函数：...的平方，以f表示
谓词：...是非负的，以R表示
量词：所有，以$\forall$表示
符号化：$(\forall z)(R'(z)\rightarrow R(f(z)))$

有一个比2^{1000}大的素数

个体：一个素数，以x表示

谓词：…比2^{1000}大，以P_1表示

量词：有一个，以∃表示

符号化： $(\exists x)\, P_1(x)$

还可以表示为：$(\exists x)\,(\, P_2(x) \wedge P_1(x)\,)$

x：一个数　　　P_2: …是一个素数

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

分析：所有的有理数都是实数

即对任一事物而言，如果它是有理数，则它是实数。

即对任一x 而言，如果x 是有理数，那么x 是实数。

设$P(x)$：x 是有理数，$Q(x)$：x 是实数，

这句话的形式描述应为

$(\forall x)(P(x) \to Q(x))$

$(\forall x)(P(x) \land Q(x))$??

4.4.1 “所有的有理数都是实数”的形式化

- 因为x的论域是一切事物的集合, 所以x是有理数是一个条件。
- 需注意这句话不能形式化为

$$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))$$

上式的意思是说， 对所有的x， x是有理数而且又是实数.

- “所有的…都是…”，这类语句的形式描述只能使用“→”而不能使用“∧”。

八股原则

4.4.2 “有的实数是有理数”的形式化

- 同前 $P(x)$：x是有理数，$Q(x)$：x是实数

  则这句话的形式描述应为

$$(\exists x)(Q(x) \land P(x))$$

- 需注意的是不能使用

$$(\exists x)(Q(x) \rightarrow P(x))$$

4.4.3 “没有无理数是有理数”的形式化

- 该句中有否定词，对任一x而言，如果x是无理数，那么x不是有理数。
- 设$A(x)$: x是无理数，

  $B(x)$：x是有理数，

这句话的形式描述为

$$\neg(\exists x)(A(x) \wedge B(x))$$

“没有无理数是有理数”的形式化

其它逻辑上等价的描述包括

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow \neg B(x))$$

$$(\forall x)(B(x) \rightarrow \neg A(x))$$

4.4.4 命题符号化（1）

- 在个体域分别限制为(a)和(b)条件时，将下面两个命题符号化

(1)凡是人都呼吸

(2)有的人用左手写字

其中: (a) 个体域D_1为人类集合；

(b) 个体域D_2为全总个体域.

解 (a) 令$F(x)$: x呼吸. $G(x)$: x用左手写字

在D_1中除人外，再无别的东西，因而

(1) 符号化为 $(\forall x)\, F(x)$

(2) 符号化为 $(\exists x)\, G(x)$

4.4.4 命题符号化（1）

(b) D_2中除有人外，还有万物， 因而在 (1)，(2)符号化时，必须考虑将人分离出来。令$M(x)$: x是人（**用于表明x的特性**）

在D_2中，

(1)对于宇宙间一切事物而言，如果事物是人，则他要呼吸; (2)在宇宙间存在着用左手写字的人.

(1)，(2)的符号化形式分别为

$(\forall x)\ (M(x)\rightarrow F(x))$ 和 $(\exists x)(M(x)\wedge G(x))$

其中$F(x)$与$G(x)$的含义同(a)中.

在谓词演算中，命题的符号表达式与论域有关系。

1.每个自然数都是整数。

(1).如果论域是自然数集合N，令 $I(x)$：x是整数，则命题的表达式为 $\forall xI(x)$。

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\forall xI(x)$表示“所有个体都是整数”，显然这是假的命题，此表达式已经不能表达原命题了。

因此需要添加谓词$N(x)$：x是自然数，用于表明x的特性，于是命题的符号表达式为 $\forall x(N(\mathrm{x})\rightarrow I(x))$

2.有些大学生吸烟。

(1).如果论域是大学生集合S，令$A(x)$：x吸烟，则命题的表达式为 $\exists x A(x)$

(2).如果论域扩大为全总个体域时，上述表达式$\exists x A(x)$表示“有些个体吸烟”，就不是表示此命题了，故需要添加谓词 $S(x)$：x是大学生，用于表明x的特性，于是命题的表达式为 $\exists x(S(x) \wedge A(x))$

- 从上述两个例子可以看出，命题的符号表达式与论域有关。当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为特性谓词。特性谓词往往就是给定命题中量词后边的那个名词。如上面两个例子中的“所有*自然数*”、“有些*大学生*”。
- 特性谓词的添加方法如下：
  - 如果前边是全称量词，特性谓词后边是蕴含联结词“→”；如果前边是存在量词，特性谓词后边是合取联结词“∧”。

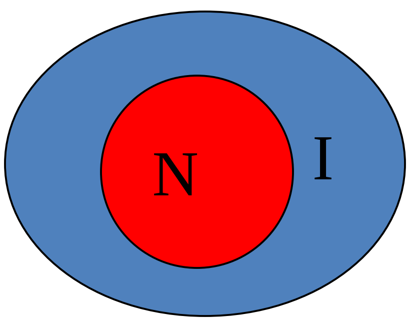
八股原则

- 为什么必须这样添加特性谓词？

1. 每个自然数都是整数。
2. 有些大学生吸烟。

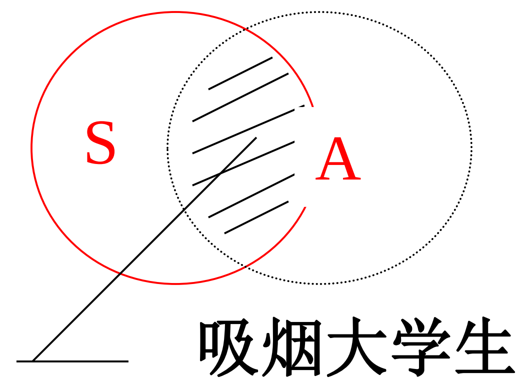
令N:自然数集合，I:整数集合，

S:大学生集合，A:烟民的集合。



I包含N

$\forall x(N(x) \rightarrow I(x))$



吸烟大学生是S与A的交集

$\exists x(S(x) \wedge A(x))$

4.4.4 命题符号化（2）

1）对于任意的x，均有x^2-3x+2=(x-1)(x-2)

2）存在x，使得x+5=3

其中：(a) 个体域$D_1=\mathbf{N}$　　(b) $D_2=\mathbf{R}$

解

(a) 令 $F(x)$: $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, $G(x)$: $x+5=3$ 则有

命题1)为 $(\forall x)\, F(x)$，命题2)为 $(\exists x)\, G(x)$

在D_1内，命题1）为真，命题2）为假

(b) 在D_2内，符号化形式相同。命题1）为真，命题2）为真

说明

从4. 4. 4的几个例子可以看出

- 在不同个体域内，同一个命题的符号化形式可能不同，也可能相同.
- 同一个命题，在不同个体域中的真值也可能不同.

其它例题

将下列命题符号化，并讨论真值。

（1）每个人都长着黑头发。

（2）有的人登上过月球。

（3）没有人登上过木星。

（4）在校学习的大学生不都住在学校。

（1）每个人都长着黑头发。

解： 由于本题未指明个体域，因而应用总论域，并令 $H(x)$: x是人。

令**$B(x)$: x长着黑头发**。则命题（1）符号化为

$$(\forall x)\ (H(x) \rightarrow B(x))$$

设a为某金发姑娘，则$H(a)$为真，而$B(a)$为假，所以$H(a) \rightarrow B(a)$为假，故上式所表示的命题为假。

(2) 有的人登上过月球。

解： 令$H(x)$: x是人，$M(x)$: x登上过月球。

有的人登上 过月球 符号化为

$$(\exists x)\ (H(x) \land M(x))$$

设a是1969年完成阿波罗登月计划的美国人，则 $H(a) \land M(a)$为真，所以上式命题为真。

(3)没有人登上过木星

解：令$H(x)$: x是人, $J(x)$: x登上过木星。

没有人登上过木星符号化为

$$\neg(\exists x)\,(H(x)\wedge J(x))$$

到目前为止，还没有任何人登上过木星，所以对任何人a，$H(a)\wedge J(a)$均为假，因而$(\exists x)\,(H(x)\wedge J(x))$为假，故上式命题为真。

(4)在校学习的大学生不都住在学校

解：令$S(x)$: x是大学生，$L(x)$: x住在学校。

在校学习的大学生未必都住在学校

符号化为

$$\neg(\forall x)\ (S(x) \rightarrow L(x))$$

容易讨论，(4)中命题为真。

$$(\exists x)\ (S(x) \land \neg L(x))$$

n（$n\geq 2$）元谓词的符号化

例　将下列命题符号化：

（1）兔子比乌龟跑得快。

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快。

（4）不存在跑得同样快的两只兔子。

解　本题未指明个体域。故默认为总论域。

出现二元谓词，故引入两个个体变项x与y

令 $R(x)$: x是兔子;　$T(y)$: y是乌龟;

$F(x, y)$: x比y跑得快;

$S(x, y)$: x与y跑得同样快

这4个命题分别符号化为

（1）兔子比乌龟跑得快。

$$(\forall x)(\forall y)(\ R(x)\land T(y)\ \rightarrow F(x,\ y)\ )$$

（2）有的兔子比所有的乌龟跑得快。

$$(\exists x)(\ R(x)\land(\forall y)(T(y)\ \rightarrow F(x,\ y))\ )$$

（3）并不是所有的兔子都比乌龟跑得快

$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x) \wedge T(y) \rightarrow F(x, y))$

（4）不存在跑得同样快的两只兔子

$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y) \wedge S(x, y))$ ✗

$\neg(\exists x)(\exists y)(R(x) \wedge R(y) \wedge \neg E(x, y) \wedge S(x, y))$

$E(x, y)$：x, y是相同的

有些语句的形式化可能有多种形式

“并不是所有的兔子都比乌龟跑的快。”

令$R(x)$：x是兔子，$T(y)$：y是乌龟，$F(x, y)$：x比y跑得快

这句话可形式化为

$$\neg(\forall x)(\forall y)(R(x) \land T(y) \rightarrow F(x, y))$$

也可以形式化为 $(\exists x)(\exists y)(R(x) \land T(y) \land \neg F(x, y))$

若令$E(x, y)$：x与y跑得同样快, 则还可符号化为(注意与原句有差别)

$$(\exists x)(\exists y)(R(x) \land T(y) \land E(x, y))$$

例：不管白猫黑猫，抓到老鼠就是好猫

设$C(x)$：x是猫　　$B(x)$：x是黑的

$W(x)$：x是白的　$G(x)$：x是好的

$M(y)$：y是老鼠

$K(x,y)$：x抓住y

命题的表达式为:

$$\forall x(\ C(x) \wedge (W(x)\ \bar{\vee}\ B(x)) \rightarrow$$
$$(\exists y(M(y) \wedge K(x,y)) \rightarrow G(x))\ \ )$$

4.4.5　自然数集的形式描述

论域是自然数集，将下列语句形式化：

1.　对每个数，有且仅有一个相继后元。
2.　没有这样的数，0是其相继后元。
3.　对除0而外的数，有且仅有一个相继前元。

＊ 可将这三句话作为建立自然数集合的公理。

引入谓词：$E(x, y)$ 表示 $x = y$,

函数 $f(x)$ 表示个体 x 的相继后元,

即 $f(x) = x+1$。

函数 $g(x)$ 表示个体 x 的相继前元,

即 $g(x) = x-1$。

4.4.5 自然数集的形式描述（续）

- 语句1需注意“唯一性”的描述，常用的办法是如果存在两个则它们必相等。
- 即若对每个x都存在y，y是x的相继后元，而且对任一 z，如果 z 也是 x 的相继后元，那么 y和z 必相等。

于是对语句1的描述为

$$(\forall x)(\exists y)(\ E(y, f(x)) \wedge (\forall z)(\ E(z, f(x)) \rightarrow E(y, z)\ )\ )$$

关于“唯一性”的一般描述

“唯一性”的一般描述：

常用的办法是：

先表示存在一个，同时如果还能找到另一个的话，则它们一定相等。

一般描述可表述为：

$(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)(P(y) \rightarrow E(x, y)))$

其中 $E(x, y)$表示 $x = y$。

4.4.5　自然数集的形式描述（续）

语句 2. 没有这样的数，0是其相继后元。

描述比较简单，即，

不存在这样的x，它的相继后元等于0。可写成

$$\neg(\exists x)E(0, f(x)) \quad 或$$

$$(\forall x)\neg E(0, f(x))$$

4.4.5　自然数集的形式描述（续）

语句3. 对除 0 而外的数, 有且仅有一个相继前元。

需注意的是对“除 0 而外”的描述，可理解为如果 $x \neq 0$，则...的形式。

于是语句3可描述为

$$(\forall x)\ (\neg E(x, 0) \rightarrow (\exists y)(E(y, g(x)) \wedge$$

$$(\forall z)(E(z, g(x)) \rightarrow E(y, z))))$$

除$\neg E(x, 0)$外，与语句1的结构完全相同

4.4.6 “至少有一偶数是素数”与“至少有一偶数并且至少有一素数”的形式化

需注意两者的区别

记 $A(x)$ 表示x是偶数，$B(x)$ 表示x是素数，则两句话可分别形式描述为

$(\exists x)(A(x)\wedge B(x))$ 与

$(\exists x)A(x)\wedge(\exists x)B(x)$

这两个逻辑公式并不等值。

4.4.6 （续）

同样，“一切事物它或是生物或是非生物”与“或者一切事物都是生物，或者一切事物都是非生物”

的形式化也是不同的，可分别形式描述为：

$$(\forall x)(A(x)\overline{\vee}B(x))$$

$$(\forall x)A(x)\vee(\forall x)B(x)$$

这两个逻辑公式也不等值。

4.4.6 （续）

“一切素数都是奇数”与

“若一切事物都是素数，那么一切事物都是奇数”

分别形式化为：

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$$

与 $(\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$

两者显然也不等值。

4.4.9 "函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述

"函数$f(x)$在$[a, b]$上的点x_0处连续"的形式描述（可考虑加一些函数设定）

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)$$

$$(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)))$$

$P(x, \varepsilon)$: x的绝对值小于ε

$$(\forall \varepsilon)(\varepsilon > 0 \rightarrow (\exists \delta)(\delta > 0 \wedge (\forall x)$$

$$(P(x - x_0, \delta) \rightarrow P(f(x) - f(x_0), \varepsilon))))$$

4.4.10 对谓词变元多次量化的分析

(1) $(\forall x)(\forall y)P(x,y) = (\forall x)((\forall y)P(x,y))$

(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y) = (\forall x)((\exists y)P(x,y))$

(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y) = (\exists x)((\forall y)P(x,y))$

(4) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) = (\exists x)((\exists y)P(x,y))$

量词的优先级高于逻辑联结词

4.5 有限域下公式的表示法

4-5-1 有限域下全称量词和存在量词的表示

将论域限定为有限集，不失一般性，用 $\{1,2,\ldots,k\}$来表示，这时全称量词和存在量词可化为如下公式：

$$(\forall x)P(x) = P(1)\wedge P(2)\wedge\ldots\wedge P(k)$$
$$(\exists x)P(x) = P(1)\vee P(2)\vee\ldots\vee P(k)$$

这种情况下可以说，全称量词是合取词的推广；存在量词是析取词的推广。

4.5 有限域下公式的表示法

- 在有限域下，可将$(\forall x)P(x)$化成由合取词来描述的命题公式。
- 在有限域下，可将$(\exists y)P(y)$化成由析取词来描述的命题公式。
- 但是**在无限域下，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。**

4.5 有限域下公式的表示法

- 严格地说，在无穷集$\{1, 2, \ldots, k, \ldots\}$上

  $$P(1)\wedge P(2)\wedge \ldots \wedge P(k)\wedge \ldots$$

  $$P(1)\vee P(2)\vee \ldots \vee P(k)\vee \ldots$$

  都是没有定义的, 不是合式公式。
- 一般而言，谓词逻辑的公式不能转换为命题逻辑的公式。

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-1)

$(\forall x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y)\, P(1, y) \land (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \land (P(2, 1) \land P(2, 2))$

$(\exists x)(\forall y)\, P(x, y)$

$= (\forall y) P(1, y) \lor (\forall y) P(2, y)$

$= (P(1, 1) \land P(1, 2)) \lor (P(2, 1) \land P(2, 2))$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

$= (\exists x)P(x, 1) \wedge (\exists x)P(x, 2)$

$= (P(1, 1) \vee P(2, 1)) \wedge (P(1, 2) \vee P(2, 2))$

$(\exists x)(\exists y)P(x, y)$

$= (\exists y)P(1, y) \vee (\exists y)P(2, y)$

$= (P(1, 1) \vee P(1, 2)) \vee (P(2, 1) \vee P(2, 2))$

4.5.2 在{1, 2}域上多次量化公式(4-2)

$$
\begin{aligned}
&(\exists x)(\forall y)\,P(x,y)\\
&= (\forall y)P(1,y)\lor(\forall y)P(2,y)\\
&= (P(1,1)\land P(1,2))\lor(P(2,1)\land P(2,2))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\forall y)(\exists x)P(x,y)\\
&= (\exists x)P(x,1)\land(\exists x)P(x,2)\\
&= (P(1,1)\lor P(2,1))\land(P(1,2)\lor P(2,2))
\end{aligned}
$$

- 将$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$写成析取范式可明显看出它与$(\exists x)(\forall y)P(x, y)$ 的差别：

$$
\begin{aligned}
&(\forall y)(\exists x)P(x, y)\\
&= (P(1,1)\land P(1,2))\lor(P(2,1)\land P(2,2))\lor\\
&\quad (P(1,1)\land P(2,2))\lor(P(2,1)\land P(1,2))\\
&= (\exists x)(\forall y)P(x,y)\lor\\
&\quad (P(1,1)\land P(2,2))\lor(P(2,1)\land P(1,2))
\end{aligned}
$$

4.5.2 在域{1, 2}上多次量化公式(4-4)

- 从而有

  $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y) \Rightarrow (\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$

- 当对有的谓词公式难于理解时, 可在有限域{1, 2}上转换成命题逻辑公式做些分析, 常会帮助理解。
- P(x,y)表示x和y是好朋友
- $(\exists x)(\forall y)\ P(x, y)$ 存在万人迷
- $(\forall y)(\exists x)\ P(x, y)$ 所有人都有朋友

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-1 普遍有效公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为真，则称A为普遍有效的公式。

例: $(\forall x)(P(x) \vee \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \rightarrow P(y)$ (y是x个体域中的一个元素)

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \rightarrow (\forall x)(P(x) \vee Q(x))$

$(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) =$

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) \vee$

$(P(1) \wedge Q(2)) \vee (Q(1) \wedge P(2))$

4. 6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-2 不可满足公式

设A为一个谓词公式，若A在任何解释下真值均为假，则称A为不可满足的公式。

例： $(\exists x)(P(x) \wedge \neg P(x))$

$(\forall x)P(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)$

解释一下什么叫“任何解释？”

个体域D 个体常项a 谓词符号P 函数符号*f*

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-3 可满足公式

设*A*为一个谓词公式，若至少存在一个解释使*A*为真，则称*A*为可满足的公式

- 普遍有效的公式一定是可满足的公式
- $(\exists x)P(x)$ 在任一非空的个体域中可满足

公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数

- $(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$
  在D1上不可满足，但在D2上可满足

- $(\forall x)P(x) \vee (\forall x)\neg P(x)$
  在D1上普遍有效，但在D2上则不是。

D1 = {0}; D2= {0,1}
解释
令P(0) =1, P(1)=0

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-4 有限域上公式普遍有效性的几个结论

- 有限域上一个公式的可满足性和普遍有效性依赖于个体域中个体的个数。
- 即在某个含k 个元素的k 个体域上普遍有效（或可满足），则在任一k 个体域上也普遍有效（或可满足）。

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- 如果某公式在k 个体域上普遍有效，则在$k-1$个体域上也普遍有效。

  大范围内普遍有效 => 小范围内也普遍有效

  有限域上普遍有效，并不保证无限域上普遍有效 。

- 如果某公式在k 个体域上可满足，则在$k+1$个体域上也可满足。

  小范围内可满足 => 大范围内也可满足

4.6 公式的普遍有效性和判定问题

- 如果某公式在k 个体域上普遍有效，则在$k-1$个体域上也普遍有效。

  大范围内普遍有效 => 小范围内也普遍有效

  有限域上普遍有效，并不保证无限域上普遍有效 。

- 如果某公式在k 个体域上可满足，则在$k+1$个体域上也可满足。

  小范围内可满足 => 大范围内也可满足

4. 6 公式的普遍有效性和判定问题

4-6-5 谓词逻辑的判定问题

- 谓词逻辑的判定问题，指的是谓词逻辑任一公式的普遍有效性的判定问题。
- 若说谓词逻辑是可判定的，就要求给出一个能行的方法，使得对任一谓词公式都能判定是否为普遍有效。

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

1. 一阶谓词逻辑是不可判定的。

　对任一谓词公式而言，没有一个能行的方法判明它是否是普遍有效的。

- 判定问题的困难在于个体域是个无穷集以及对谓词设定的任意性

命题逻辑是否是可判定的？

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

2. 一阶谓词逻辑的某些子类是可判定的。

其中包括：

(1) 仅含一元谓词变项的公式是可判定的

(2) $(\forall x_1)(\forall x_2) \ldots (\forall x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和$(\exists x_1)(\exists x_2) \ldots (\exists x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$型公式若$P$中无量词和其它自由变项也是可判定的

(3) 个体域有穷时的谓词公式是可判定的。

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

1936年Turing和Church分别独立地证明：

一阶谓词逻辑的普遍有效性是半可判定的

如果公式本身是普遍有效(或不可满足)的，则存在有限的判定算法，否则不存在有限的判定算法。

4-6-6 谓词逻辑的判定问题的几个结论

- 没有一般的方法使得在有限步内判别一阶逻辑的公式是否普遍有效或不可满足。
- 如果公式本身是普遍有效（或不可满足），那么就能在有限步内完成判定。
- 对于其它类型的公式则不一定能在有限步内得出结论，判定过程有可能永不停止。

总结：谓词逻辑的基本概念

- 4.1 谓词*和个体词
- 4.2 函数和量词*
- 4.3 合式公式
- 4.4 自然语句的形式化*
- 4.5 有限域下公式的表示法
- 4.6 公式的普遍有效性和判定问题

谢 谢