第七章
代数结构基本知识 I

计算机系网络所：张小平

清華大學
Tsinghua University

主要内容

- **7.1 集合与映射**
- 7.2 等价关系
- 7.3 代数系统的概念
- 7.4 同构与同态

集合与映射

- 设S是任意一个集合，如果元素a属于S，记记为 $a \in S$，否则记 $a \notin S$。
- S中不同元素的个数称为该集合的**基数**，
  用 $|S|$ 表示。
- 当集合S确定之后，能相应地得到另一个集合 $\rho(S)$，$\rho(S)$是S的全部子集的集合。
  的**幂集**
- $\rho(S)$ 的基数是 $2^{|S|}$

Tsinghua University

集合与映射

- $\rho(S)$ 中的元素A，是集合S的一个子集，可以刻划为

$$A=\{x\in S\mid P(x)\}$$

  其中P代表某种性质

- 因此A可以解释为：具有性质P的S的元素的集合

集合与映射

- 集合运算：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

分配律！

集合与映射

- 定义7.1.1 设S和T是给定的两个集合，如果有一个规则 f，使对任意一个元素 $x \in S$，在T中有唯一的元素 y 与之对应。则称 f 是S到T的一个映射

  记作 f：S→T 和 $y = f(x)$，S称为 f 的定义域，T为 f 的值域，y 称为 x 的象，x 称为 y 的原象。

Tsinghua University

集合与映射

- 根据定义：
  - S中每个元素在T中都有象
  - T中的每个元素在S中不一定都有原象
  - 习惯上我们将S中全部元素的象所构成的集合称为f的象，记作$f(S)$。显然$f(S)\subseteq T$。

Tsinghua University
清華大學

集合与映射

- 定义7.1.2 两个映射f，g

$$f: \quad A_1 \to B_1$$

$$g: \quad A_2 \to B_2$$

当且仅当 $A_1 = A_2$，$B_1 = B_2$， 且对任意 $x \in A$ ，

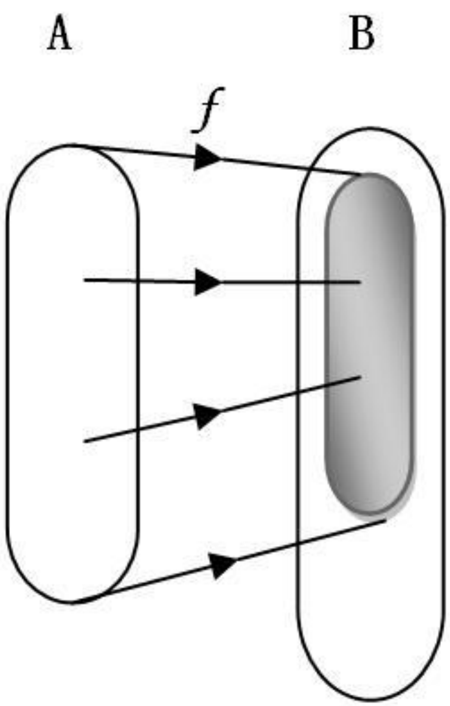
都有 $f(x) = g(x)$，称 f 和 g 是**相等的映射**，

记为f= g

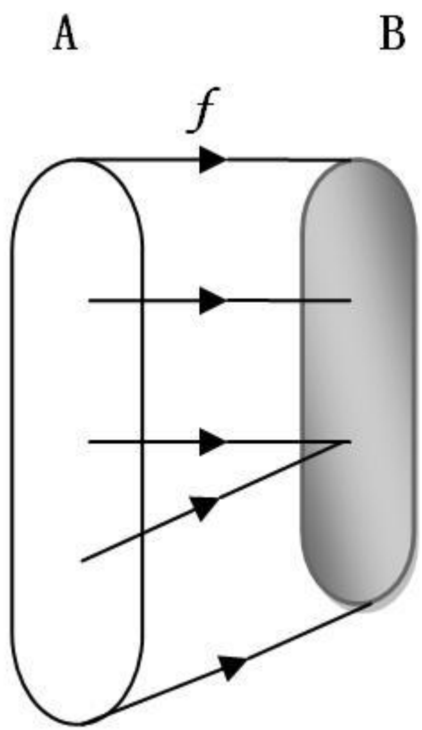
- 定义7.1.3 设f是A到B的一个映射。

1. 若对任意 $a_i \neq a_j, a_i, a_j \in A$，都有 $f(a_i) \neq f(a_j)$，称f是A到B的单射。
2. 若 $f(A) = B$，则称f是A到B的满射。
3. 若f既是单射又是满射，则称它是A到B的双射。

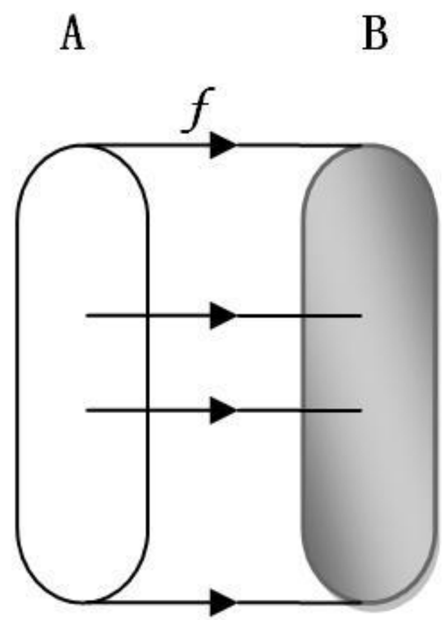
集合与映射



单射



满射



双射

集合与映射

- 定义7.1.4 设A、B、C是三个集合，有两个映射：

$$f: \quad A \to B$$

$$g: \quad B \to C$$

则由 f 和 g 可确定一个A到C的映射 h,

$$h: \quad a \to g(f(a))$$

称 h 为 f 与 g 的**合成**，记作 $h = gf$，亦即

$$h(a) = (gf)(a) = g(f(a))$$

$$gf(a) = g(f(a))$$

集合与映射

- 映射的合成一般不满足 交换律，

  但是满足结合律。

例如： $\alpha: \quad A \to B$， $\beta: \quad B \to C$， $\gamma: \quad C \to D$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = (\gamma\beta)(\alpha(a)) = (\underline{(\gamma\beta)\alpha})(a)$$

$$\gamma(\beta(\alpha(a))) = \gamma((\beta\alpha)(a)) = (\underline{\gamma(\beta\alpha)})(a)$$

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$$

集合与映射

- 定理7.1.1 设 f 是 A 到 B 的映射，I_A 和 I_B 分别是 A 与 B 中的恒等映射，则

$$I_B f = f \quad , \quad f I_A = f$$

证明：

- $I_B f$ 和 f 具有相同的定义域 A 和相同的值域 B，且对于任意的 $a \in A$，都有

$$I_B f(a) = I_B(f(a)) = f(a)$$

- 因此 $I_B f = f$
- 同理可证：$f I_A = f$

清華大學 Tsinghua University

集合与映射

- 定义7.1.5 设两个映射：

$$f: \quad A \to B \qquad g: \quad B \to A$$

若 $gf = I_A$ 成立，则称 f 是**左可逆映射**，g 是**右可逆映射**，并称 g 是 f 的**左逆映射**，f 是 g 的**右逆映射**。

又若 $fg = I_B$ 也成立，则称 f 和g 都是**可逆映射**。

思考：可逆映射是否一定是双射？

集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射f：

  f是左可逆的充要条件是f为单射

  f是右可逆的充要条件是f为满射

集合与映射

- 证明：
  - 必要性：f 左可逆 $\Longrightarrow$ f 为单射
  - 如何证明 f 是单射？

$$\forall a_1, a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

  - 由 f 左可逆，可知必存在 g： $B \to A$，使得 $gf = I_A$

$$a_1 = I_A(a_1) = gf(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = gf(a_2) = I_A(a_2) = a_2$$

必要性得证！

集合与映射

- 证明：
  - 充分性：f为单射 $\Longrightarrow$ f左可逆
  - 如何证明f左可逆？构造g！ $gf = I_A$
  - 定义g： $B \to A$ 如下：

$$g(b)=\begin{cases} a, & 若存在a\in A,使f(a)=b \\ a_0, & 若b\notin f(A) \quad 且a_0\in A \end{cases}$$

  - 此时， $\forall a\in A \quad gf(a)=g(f(a))=g(b)=a$
  - 因此 $gf = I_A$

充分性也得证！

Tsinghua University

集合与映射

- 定理7.1.2 A 到 B 的映射f：

  f是左可逆的充要条件是f为单射

  f是右可逆的充要条件是f为满射

集合与映射

- 推论：f：$A \to B$ 是可逆映射，当且仅当 f 是双射

集合与映射

- 定理7.1.3 设 f 是 A 到 B 的映射。

且 $gf = I_A$， $fh = I_B$， 则 $g = h$

证明：

$$g = gI_B = g(fh) = (gf)h = I_Ah = h$$

可逆映射的逆映射是唯一的！