HW 10

8. 3, 6, 7, 10, 11, 12.

3. 证明：由于 $(S,\cdot)$ 元素满足消去律，故
$(ab)^2 = a^2b^2 \Leftrightarrow abab = aabb$
$\Leftrightarrow bab = abb \Leftrightarrow ba = ab$ $\boxtimes$.

6. 证明：
σ 是 $(S,\cdot)$ 到 $(T,*)$ 的同构映射，因此
$\forall s \in S$，$\sigma(s) \in T$，且任意 $t \in T$ 都可以 $\sigma(s)$ 表示。
$\sigma(e) * \sigma(s) = \sigma(e \cdot s) = \sigma(s) = \sigma(s \cdot e)$
$= \sigma(s) * \sigma(e)$
$\Rightarrow \sigma(e) * \sigma(s) = \sigma(s) = \sigma(s) * \sigma(e)$ $\boxtimes$.

7. 证明：
引理：若 $a, b \in G$，且 $x = (ab)^{-1}$，则 $x = b^{-1}a^{-1}$.
证：由定义知 $(ab)x = x(ab) = e$.
$x(ab) = e \Leftrightarrow x \cdot ab \cdot b^{-1} = b^{-1}$
$\Leftrightarrow xa = b^{-1} \Leftrightarrow xa \cdot a^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$
$\Leftrightarrow x = b^{-1}a^{-1}$ $\square$.
由题设可知 $\forall a \in G$，$a = a^{-1}$.
因此 $\forall a, b \in G$，
$ab = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1} = ba$，故 G 是 Abel 群。
$\boxtimes$

10. 证明：
(唯一)：先假设解存在，则有
$xaxba = xbc \Rightarrow axba = bc \Rightarrow xba = a^{-1}bc$
$\Rightarrow x = a^{-1}bc(ba)^{-1}$
$= a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$.
显然 $a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$ 对应 G 内唯一元素。

(唯一性) …… $axba = bc \Rightarrow xba = a^{-1}bc$

$xaxba = xbc \Rightarrow$

$\Rightarrow x = a^{-1}bc(ba)^{-1}$

$= a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$.

显然 $a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$ 对应 G 内唯一元素。

(存在)：左 $= (a^{-1}bca^{-1}b^{-1})a(a^{-1}bca^{-1}b^{-1})ba$

$= a^{-1}bca^{-1}b^{-1}bca^{-1}a$.

$= a^{-1}bca^{-1}c = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}bc$

$= xbc =$ 右.

故 $x = a^{-1}bca^{-1}b^{-1}$ 是唯一解。

11. 证明：（$*$应为 $(a,b)(c,d) = (ac, ad+b)$.

1) 结合律：

$((a,b)(c,d))(e,f)$

$= (ac, ad+b)(e,f) = (ace, acf+ad+b)$,

$(a,b)((c,d)(e,f))$

$= (a,b)(ce, cf+d) = (ace, acf+ad+b)$. $\square$.

2) 单位元：

$(1,0)(c,d) = (1\cdot c, 1\cdot d+0) = (c,d)$

$(a,b)(1,0) = (a\cdot 1, a\cdot 0+b) = (a,b)$ $\square$.

3) 逆元：$\forall (a,b) \in G$.

$(a,b)\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a\cdot\frac{1}{a}, a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)$

$= (1,0)$.

$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)(a,b) = \left(\frac{1}{a}\cdot a, \frac{1}{a}\cdot b - \frac{b}{a}\right) = (1,0)$,

因此 (a,b) 与 $\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$ 互为逆元. $\square$.

4) 由运算定义，显然有封闭性（是代数系统）.

由 1) 2) 3) 4) 即证。$\boxtimes$.

12. 证明:

必要性: a 有逆元 b, 故 $ab=ba=e$.

1). $ab=e \Rightarrow aba=e\cdot a=a$.

2). $ab\cdot ba=e\cdot e=e \Rightarrow ab^2a=e$.

充分性:

$\begin{cases} aba=a \\ ab^2a=e \end{cases} \Rightarrow$ 1) $ab^2(aba)=e$

$\Leftrightarrow (ab^2a)ba=e\cdot ba=ba=e$.

$\Downarrow$

2). $(aba)b^2a=ab\cdot(ab^2a)=ab\cdot e=ab=e$.

1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow ab=ba=e$. 因此 a,b 互为逆元。 $\square$.