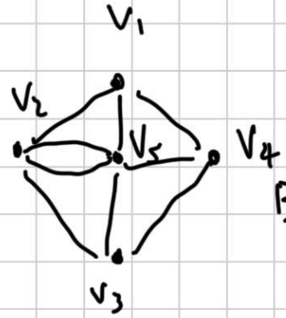
DM HW5

4. 解.



$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_5 B_5^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

(a). 树数 $= \det(B_5 B_5^T) = 101.$

(b). 必含 (v_1, v_5) 的树和.

把 B_5 第二列~~删~~去,

$$B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B' B'^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

含 (v_1, v_5) 的树数 $= 101 - \det(B' B'^T)$

$= 101 - 57 = 44$ #.

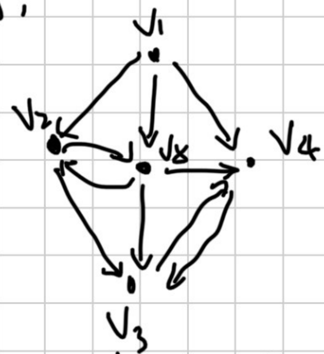
(c). 不含 (v_4, v_5) 的树.

把 B_5 最后一列删去:

$$B'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B'' B''^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

不含 (v_4, v_5) 的树数 $= \det(B'' B''^T) = 60$ #

5.



$$B_1=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0&1&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&0&-1&1&0&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\vec{B}_1=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0&0&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&0&0&0&0&0&-1\\0&0&-1&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\vec{B}_1 B_1^T=\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&2\end{bmatrix},\ \det(\vec{B}_1 B_1^T)$$

$= 24$，为以 v_1 为根的根树数目。

(b). 不含 (v_1,v_5) 的 v_1 根树：

把 (v_1,v_5) 所在的列从基本关联矩阵中删去。

$$B_1'=\begin{bmatrix}-1&0&1&1&0&0&-1&0&0\\0&0&-1&0&1&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&-1&1&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

$$\vec{B}_1'=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&-1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&-1&0&0&0&-1\\0&0&0&-1&0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$\vec{B}_1' B_1'^T=\begin{bmatrix}2&0&0&-1\\-1&3&-1&-1\\0&-1&3&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

不含 (v_1,v_5) 的根树数 $=\det[\vec{B}_1' B_1'^T]=8$.

(c). 含 (v_2,v_3) 的 v_1 根树：

把 (v_2,v_3) 所在列删去：

$$B_1''=\begin{bmatrix}-1&0&0&1&0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&-1&0\\0&-1&0&0&-1&1&0&0&-1\\0&0&-1&-1&0&0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

$$\vec{B}_1'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{B}_1'' {B_1''}^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

令 (v_1, v_2) 的 v_1 根树数 $= 24 - \det(\vec{B}_1'' {B_1''}^T) = 24 - 15 = 9$ #.

11. 解:

设 $S_f = [S_{f_{11}}, I]$.

取 C' 的前四行,记为 C''. C'' 经初等行变换的行阶梯式有四个主元,故 $r(C'') = 4$,是回路矩阵.

由于

$$C'' = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ 1 & -1 & & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C''}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \end{array}, \quad C_f = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|cccc} & -1 & -1 & 0 & 0 \\ I & 0 & 1 & -1 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{matrix} e_1 & e_3 & e_2 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \end{array}$$

由于 C_f 是关于余树边 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 的回路矩阵,故 $S_{f_{11}} = -C_{f_{12}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$
$e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6\ e_7\ e_8$.

13. 证明：

由于

$$|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|.$$

而任意割集都是基本割集经有限次对称差运算生成，即

$\forall S$; S是G的割集，$S = \bigoplus_{S_{f_i} \in S'} S_{f_i}$

（其中S'是元素为基本割集的集合）.

且G的所有的基本割集都有偶数条边，故G的任意割集都有偶数条边。

由于G连通，且不存在割点，而$\forall v$; $v \in V(G)$，把v从G分离的割集都有偶数条边，故$\forall v$; $v \in V(G)$，都有$2 \mid d(v)$，从而G存在欧拉回路。$\boxtimes$.

9. 说明：

由于$\vec{B_k}$把代表出度的1置为零，故$\vec{B_k}$的行向量两两正交，$\vec{B_k}\vec{B_k^T}$为对角矩阵，而且

$$\vec{B_k} \cdot \vec{B_k^T} = \mathrm{diag}(d(v_1), \cdots, d(v_{k-1}), d(v_{k+1}), \cdots, d(v_n)),$$

故$\det(\vec{B_k} \cdot \vec{B_k^T})$是满足以下性质的图，不一定是树和.

性质：

$$\begin{cases} d^-(v_i)=1, & v_i\in V(G),\ v_i\neq v_k. \\ d^-(v_k)=0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

以 (5) 为例，

$$\det(\vec{B_1}\cdot\vec{B_1}^T)=2\times3\times3\times2=36.$$

显然 v_1 根树都符合上述性质，但这同时意味存在 12 个子图，那些子图不是连通图，如下，