HW 11

13

证明:

$\forall a, b \in H_1$,

设 $a = x^{-1} h_a x$, $b = x^{-1} h_b x$.

由于G是群,故有 $b^{-1} = (x^{-1} h_b x)^{-1}$
$= x^{-1} h_b^{-1} x$.

$ab^{-1} = (x^{-1} h_a x)(x^{-1} h_b^{-1} x) = x^{-1} h_a h_b^{-1} x$.

由于H是G的子群,故有 $h_b^{-1} \in H$, $\Rightarrow h_a h_b^{-1} \in H$
$\Rightarrow x^{-1} h_a h_b^{-1} x \in H_1$
$\Rightarrow ab^{-1} \in H_1$

由a,b的任意性和定理8.2.7即证。 ⊠

14. 证明:

引理:G的两个子群的交,是G的子群。

证明:

设 H_1, H_2 是G的两个子群,则 H_1, H_2 的单位元,都必定与G的单位元相等。

$\Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

设 $a \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow a \in H_1 \wedge a \in H_2$ ①

$b \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow b \in H_1 \wedge b \in H_2$. ②

① ∧ ② $\Rightarrow ab^{-1} \in H_1$ ($b^{-1} \in H_1$), $ab^{-1} \in H_2$ ($b^{-1} \in H_2$).

$\Rightarrow ab^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

由定理8.2.7和a,b的任意性,即有 $H_1 \cap H_2$ 是G的子群。

回到原题，设 $H_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 G 的子群

令 $S(n)$: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} H_i$ 是 G 的子群。

$S(1)$ 显然 ③

设 $S(k)$ 成立，

$S(k+1)$: $\bigcap\limits_{i=1}^{k+1} H_i = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i\right) \cap H_{k+1}$，由归纳假设知 $\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i$ 是 G 的子群，由引理知 $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} H_i\right) \cap H_{k+1}$ 是 G 的子群，因此 $S(k) \Rightarrow S(k+1)$ ④

由③④和第一数学归纳法原理知命题成立。

2、解：

$\sigma = (1\ 4\ 6\ 2\ 3\ 5)$

$\tau = (1\ 2)(3\ 5)(4\ 6)$，

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 6)(2\ 5)$$

$$\sigma^{-1} = (1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 5\ 3\ 2\ 6\ 4)$$

$$= (1\ 5)(5\ 3)(3\ 2)(2\ 6)(6\ 4)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma\tau)\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$$

25. 证明：(偶数阶的有限群存在二阶元素)

以下证一个更强的结论：偶数阶的有限群有奇数个二阶元素。

设该群为 $(G,\cdot)$ 并设 $S\subseteq G$ s.t.

$S=\{g\in G: o\langle g\rangle \geq 3\}$.

由于 g 的逆元 g^{-1} 唯一，且 $o\langle g\rangle = o\langle g^{-1}\rangle$，故 $|S|$ 为偶数。

因此 $G-S$ 只有一阶、二阶元素，且 $|G-S|$ 为偶。

加上 $(G,\cdot)$ 只有唯一的一阶元素，即单位元 e，因此 $G-S-\{e\}$ 就是所有的二阶元素，有奇数个。显然存在性为该结论的推论。$\boxtimes$

27. 解：

$\alpha=(1\ 3\ 2\ 4)$, $\alpha^2=(1\ 2)(3\ 4)$.

$\alpha^3=(1\ 4\ 2\ 3)$, $\alpha^4=e$

设 $H=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$，由 Lagrange 定理，$G$ 关于 H 的陪集，共有 $4!/4=6$ 个。

① $eH=He=\{e,\alpha,\alpha^2,\alpha^3\}$.

② $(1\ 2)H=\{(1\ 2),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3),(3\ 4)\}$.

② $(1\ 2)H=\{(1\ 2),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (3\ 4)\}$.

$H(1\ 2)=\{(1\ 2),\ (1\ 4)(2\ 3),\ (3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4)\}$.

③ $(1\ 3)H=\{(1\ 3),\ (2\ 4\ 3),\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 2)\}$

$H(1\ 3)=\{(1\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2),\ (2\ 3\ 4)\}$

④ $(1\ 4)H=\{(1\ 4),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4)\}$

$H(1\ 4)=\{(1\ 4),\ (2\ 4\ 3),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 2\ 3)\}$.

⑤ $(2\ 3)H=\{(2\ 3),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 3\ 4\ 2),\ (1\ 4\ 3)\}$

$H(2\ 3)=\{(2\ 3),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 2\ 4\ 3),\ (1\ 4\ 2)\}$

⑥ $(2\ 4)H=\{(2\ 4),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 3)\}$

$H(2\ 4)=\{(2\ 4),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3)\}$

由于S_4的其他元素已在上述陪集出现,故以上六组为S_4关于$\langle\alpha\rangle$的陪集。

所有

30. 证明: $(B\subseteq A\subseteq G)$.

由于 $|G|<+\infty$. 故由 Lagrange 定理知

$|G|=[G:1]=[G:A][A:1]$

$=[G:A]|A| \Rightarrow [G:A]=\frac{|G|}{|A|}$ ①

同理 $[A:B]=\frac{|A|}{|B|}$ ②.

①∧② $\Rightarrow [G:A]\cdot[A:B]=\frac{|G|}{|A|}\cdot\frac{|A|}{|B|}=\frac{|G|}{|B|}=[G:B]$ ⊠.