Discrete Mathematics

离散数学(1)

第一章　命题逻辑的基本概念

马昱春

清華大學
Tsinghua University

命题(proposition)

命题是一个能判断真假且非真即假的陈述句。

1. 命题必须是一个陈述句，而祈使句、疑问句和感叹句都不是命题。
2. 作为命题的陈述句所表达的判断结果有真假之别

命题的真值: 命题所表达的判断结果，

真值只取两个值：真或假(1或0)。

真命题: 与事实相符或表达的判断正确; 真值为真

假命题: 与事实不符或表达的判断错误; 真值为假

规定: 任何命题的真值都是唯一的;

不能非真非假，也不能既真又假。

内容回顾

- 命题
  - 是一个能判断真假且非真即假的陈述句
  - 两个特征
- 简单命题与复合命题
- 否定联结词 （非，$\neg$ ）
- 合取联结词 （与，$\wedge$ ）
- 析取联结词 （或，$\vee$ ）
- 蕴涵联结词 （如果…，则… ，$\rightarrow$ ）
- 双蕴涵联结词 （当且仅当，$\leftrightarrow$ ）

基本复合命题
（5个常用联结词）的真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

关于联结词的几点说明

- 对简单命题多次使用联结词集中的联结词，可以组成更为复杂的复合命题。
- 求复合命题的真值时，除依据前面的真值表外，还要规定联结词的优先顺序
- 教材中规定的联结词优先顺序为：

  （），$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$，

  同一优先级的联结词，先出现者先运算。
- 在逻辑中所关心的是复合命题中命题之间的真值关系，而并不关心命题的内容。

真值表

- Truth table
- http://web.stanford.edu/class/cs103/tools/truth-table-tool/

Truth Table Generator

This tool generates truth tables for propositional logic formulas. You can enter logical operators in several different formats. For example, the propositional formula p ∧ q → ¬r could be written as p /\ q -> ~r, as p and q => not r, or as p && q -> !r. The connectives ⊤ and ⊥ can be entered as T and F.

p /\ q -> ~r

p	q	r	$((p \land q) \to \neg r)$
F	F	F	**T**
F	F	T	**T**
F	T	F	**T**
F	T	T	**T**
T	F	F	**T**
T	F	T	**T**
T	T	F	**T**
T	T	T	**F**

真值表

- Truth table

何为公式？

- https://www.cs.utexas.edu/~learnlogic/truthtables/
- https://truthtablemaker.com/

Open project

报名实现真值表程序或演示网页

合式公式或命题公式

合式公式或命题公式的表示

将命题变项用联结词和圆括号按一定的逻辑关系联结起来的符号串。

当使用联结词集 {¬, ∧, ∨, →, ↔} 中的联结词时，合式公式定义如下

合式公式(命题公式)的定义

定义1.6　合式公式 (wff) (well formed formulas)

（1）单个命题变项是合式公式，并称为原子命题公式。

（2）若A是合式公式，则（$\neg A$）也是合式公式。

（3）若A，B是合式公式，则（$A\wedge B$），（$A\vee B$），（$A\rightarrow B$），（$A\leftrightarrow B$）也是合式公式。

（4）只有有限次地应用（1）～（3）形成的符号串才是合式公式。

合式公式也称为命题公式或命题形式，简称公式。

- 设A为合式公式，B为A中的一部分，若B也是合式公式，则称B为A的子公式。

递推定义

命题公式的赋值或解释

定义1.7　赋值或解释

设p_1，p_2，…，p_n是出现在公式A中的全部的命题变项，给p_1，p_2，…，p_n各指定一个真值，称为对A的一个赋值或解释。

若指定的一组值使A的真值为1，则称这组值为A的成真赋值；

若使A的真值为0，则称这组值为A的成假赋值。

课堂思考题

- 解
- 记 A 表示 **IF** P **THEN** Q **ELSE** R
  将其形式化（用所学的联接词表示）
- 记 $A_1 = (P \to Q) \wedge (\neg P \to R)$
- 记 $A_2 = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$
- 列出A_1 和A_2的真值表如下

P	Q	R	$P\to Q$	$\neg P\to R$	A_1	$P\wedge Q$	$\neg P\wedge R$	A_2
0	0	0	1	0				
0	0	1	1	1	1		1	1
0	1	0	1	0				
0	1	1	1	1	1		1	1
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	1				
1	1	0	1	1	1	1		1
1	1	1	1	1	1	1		1

真值表及其构造方法

定义1.8　真值表

将命题公式*A*在所有赋值下的取值情况列成表，称作A的真值表。

构造真值表的具体步骤：

（1）找出公式中所含的全体命题变项p_1，p_2，…，p_n（若无下角标就按字典顺序排列），列出2^n个赋值。规定赋值从00…0开始，然后按二进制加法，直到11…1为止。

（2）按照运算的优先次序写出各子公式。

（3）对应各个赋值计算出各子公式的真值，直到最后计算出公式的真值。

命题公式的分类

定义1.9　重言式 矛盾式 可满足式

设A为任一命题公式，

1. 若A在它的各种赋值下取值均为真，则称A是重言式或永真式。

2. 若A在它的各种赋值下取值均为假，则称A是矛盾式或永假式。

3. 若A不是矛盾式，则称A是可满足式

命题公式的分类（续）

真值表可用来判断公式的类型：

（1）若真值表最后一列(公式结果)全为1,则公式为重言式；

（2）若真值表最后一列全为0,则公式为矛盾式；

（3）若真值表最后一列中至少有一个1,则公式为可满足式。

1.4 重言式与代入规则

代入规则

一个重言式，对其中所有相同的**命题变项**都用一合式公式代换，其结果仍为一重言式。这一规则称为代入规则。

换句话说，A是一个公式，对A使用代入规则得到公式B，若A是重言式，则B也是重言式。

在第三章公理系统中，代入规则视作重要的推理规则经常使用。

$$p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$$

1.4 重言式与代入规则

代入规则的具体要求为：

1. 公式中被代换的只能是命题变项（原子命题），而不能是复合命题。

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项施以相同的代换。

1.4 重言式与代入规则

2. 对公式中某命题变项施以代入，必须对该公式中出现的所有同一命题变项代换同一公式

公式A经代入规则可得任一公式，而仅当A是重言式时，代入后重言式的性质方得保持。

如$A = P \lor \neg P$，作代入 $\dfrac{P}{\neg Q}$

得 $B = \neg Q \lor \neg\ \neg Q$ 仍是重言式。

若仅将$\neg P$以Q代之得$B = P \lor Q$ (未做P的相关代入，则这不是代入, 违反了规定2) 已不是重言式。

1.5　命题形式化

所谓命题形式化（符号化），就是用命题公式的符号串来表示给定的命题。

- 命题符号化的方法

  1. 明确给定命题的含义。

  2. 对复合命题，找联结词，分解出各个原子命题。

  3. 设原子命题符号，并用逻辑联结词联结原子命题符号，构成给定命题的符号表达式。

化繁为简，各个击破

例1.说离散数学无用且枯燥无味是不对的。

P：离散数学是有用的。

Q：离散数学是枯燥无味的。

该命题可写成：$\neg(\neg P \wedge Q)$

例2.如果小张与小王都不去，则小李去。

P：小张去。 Q：小王去。 R：小李去。

该命题可写成：$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow R$

- 例3. 仅当天不下雨且我有时间，才上街。
  P：天下雨。Q：我有时间。R：我上街。
  该命题可写成： $R \rightarrow (\neg P \wedge Q)$
- 例4.人不犯我，我不犯人；人若犯我，我必犯人。
  P：人犯我。Q：我犯人。
  该命题可写成：$(\neg P \rightarrow \neg Q) \wedge (P \rightarrow Q)$

或写成： $P \leftrightarrow Q$

P是Q的必要条件

P是Q的充分条件

P是Q的充分且必要条件

例5：除非你努力，否则你将失败。

解：

可理解为：如果你不努力，那么你将失败.

设 P：你努力. Q：你失败.

该命题可写成： $\neg P \to Q$

- 注意：如果理解为“如果你努力，你将成功.”，对吗？

- “除非你努力，否则你将失败。”
  - 你不努力，一定会失败！
  - 你努力了，一定会成功吗？

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家。

解：

设 P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题若写成：$(\neg P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$？？？

注意：中间的联结词一定是"$\wedge$"，而不是"$\vee$"，也不是"$\overline{\vee}$"。

因为原命题表示："天不下雨时我做什么，天下雨我又做什么"的两种作法，其中有一种作法是假的，则我说的是假话，所以中间的联结词一定是"$\wedge$"。

IF $\neg$ *P* THEN *Q* ELSE *R*

逻辑是否完全表达了例6呢？

Q=1 and S=1？

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	$\neg P$	$\neg P \to Q$	$P \to R$	$(\neg P \to Q) \land (P \to R)$
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
~~0 1 1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~
1 0 0	0	0	1	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
~~1 1 1~~	~~0~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

例6：若天不下雨，我就上街；否则在家

P：天下雨。Q：我上街。R：我在家。

该命题可写成：$(\neg P\rightarrow Q)\wedge(P\rightarrow R)\wedge \neg(Q\wedge R)$

还可以形式化为：$(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\bar{\vee}(P\wedge\neg Q\wedge R)$

问题：若天不下雨，我就上街；否则在家

P Q R	P	¬P→Q	P→ R	(¬P→Q)∧(P→ R) ∧¬(Q∧R)
0 0 0	1	0	1	0
0 0 1	1	0	1	0
0 1 0	1	1	1	1
0 1 1	1	1	1	0
1 0 0	0	0	1	0
1 0 1	0	1	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	0	1	1	0

1.6　波兰表达式

括号的使用，联结词的中缀、前缀、后缀形式的选择，都直接影响到同一公式描述和计算的复杂程度。

若用计算机来识别、计算、处理逻辑公式，不同的表示方法会带来不同的效率。

1.6.1 计算机识别括号的过程

合式公式的定义中使用的是联结词的中辍表示，又引入括号以便区分运算次序，这些都是人们常用的方法。

计算机识别处理这种中辍表示的公式，需反复自左向右，自右向左的扫描。

如考察下面公式真值的计算过程

$$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$$

1.6.1 计算机识别括号的过程

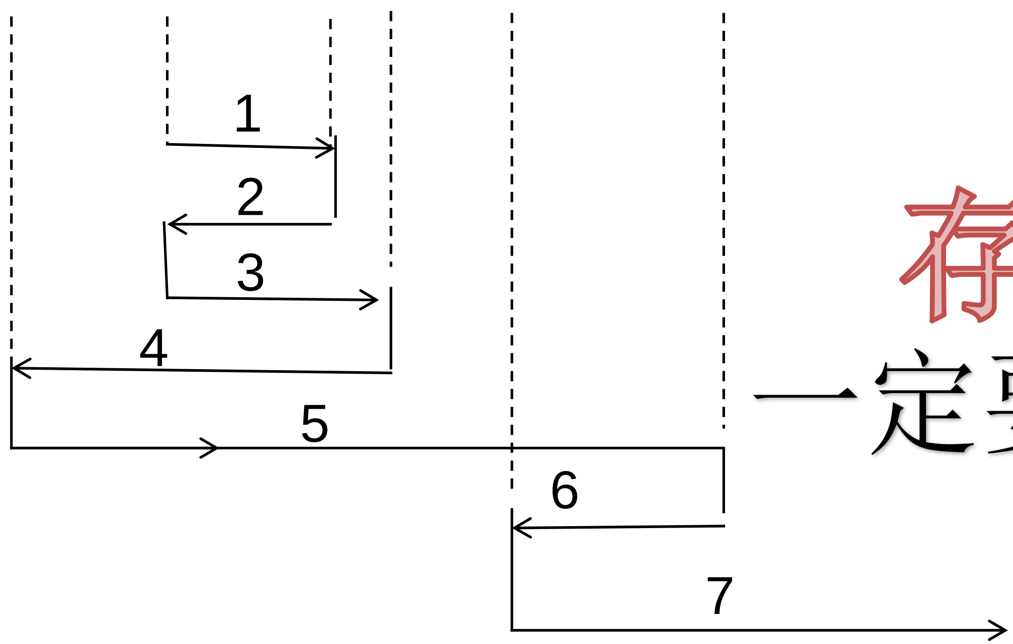
开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式$(Q \wedge R)$方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式$(P \vee (Q \wedge R))$并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

1.6.1 计算机识别括号的过程

如图1.6.1所示的扫描过程1→2→3→…→6→7。

$$(P \vee (Q \wedge R)) \vee (S \wedge T)$$



繁

存储状态

一定要括号吗?

开始从左向右扫描，至发现第一个右半括号为止，便返回至最近的左半括号，得部分公式(Q∧R)方可计算真值。

随后又向右扫描，至发现第二个右半括号，便返回至第二个左半括号，于是得部分公式(P∨(Q∧R))并计算真值，重复这个过程直至计算结束。

1.6.1 计算机识别括号的过程

公式中的运算符是否非要括号才能定义呢？

若一个式子中同时使用两种或两种以上运算符放置方式时，无论对运算符的优先级怎样进行规定，括号都不能完全避免。

主要问题是什么？ $\log_a M$ $n! + (n-1)!+\ldots\ldots$

解决方案：将中置、后置全部换成前置

或将中置、前置全部换成后置

这样，便可不使用任何括号。

1.6.2 波兰式

一般而言，使用联结词构成公式有三种方式，

中置式如	$P \vee Q$	（中缀式）
前置式如	$\vee PQ$	（前缀式）
后置式如	$PQ\vee$	（后缀式）

前置式用于逻辑学是由波兰的数理逻辑学家 J. Lukasiewicz提出的，故称之为波兰表达式。

1.6.2 波兰式

- 如将公式P∨((Q∧R)∧S)的这种中置表示化成波兰式，可由内层括号逐步向外层脱开(或由外层向内逐层脱开）的办法。

1.6.2 波兰式

$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

1

$\vee$**QR**

2

$\wedge \vee$**QRS**

3

$\vee$**P**$\wedge \vee$**QRS**

1.6.2 波兰式

- 以波兰式表达的公式，当计算机识别处理时，可自右向左扫描一次完成，避免了重复扫描。
- 同样**后置表示（逆波兰式）**也有类似的优点。而且自左向右一次扫描（看起来更合理）可识别处理一个公式，非常方便，常为计算机的程序系统所采用。
- 只不过这种表示的公式，人们阅读起来不大习惯。

1.6.2 波兰式

举例：中置变前置 $P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

由里向外：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$P\vee(\vee QR\wedge S)$

$P\vee\wedge\vee QRS$

$\vee P\wedge\vee QRS$

由外向里：

$P\vee((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\ ((Q\vee R)\wedge S)$

$\vee P\wedge(Q\vee R)\ S$

$\vee P\wedge\vee QRS$

1.6.2 逆波兰式

举例：中置变后置　$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$

$$P \vee ((Q \vee R) \wedge S)$$

$$P\ ((Q \vee R) \wedge S) \vee$$

$$P\ (Q \vee R)\ S \wedge \vee$$

$$P\ QR \vee S \wedge \vee$$

思考题：
单目运算符怎么处理？

前置波兰式：
-a+b

第一章小结

命题逻辑(Logic)

- 研究命题的推理演算
- 命题逻辑的应用
  - 数学上定理的推导
  - 在计算机科学上，验证程序的正确性

主要内容

- 命题的基本概念
- 命题联结词
- 命题合式公式、重言式
- 自然语句的形式化

第一章小结（续）

- 本章主要介绍了命题逻辑的基本概念，它是后面两章的基础；
- 介绍了命题、命题变项、简单命题和复合命题；
- 介绍了命题联结词及其真值表
  - 否定联结词¬
  - 合取联结词∧
  - 析取联结词∨
  - 蕴涵联结词→
  - 双蕴涵联结词↔

第一章小结（续）

- 介绍了合式公式及其递归定义；
- 介绍了重言式、矛盾式和可满足式；在此基础上，介绍了代入规则以及如何利用代入规则证明重言式；
- 介绍了如何形成自然语句的合式公式（命题的形式化）以及较为复杂的自然语句形式化；
- 介绍了计算机识别合式公式（括号）的过程，在此基础上，介绍了波兰表达式及其在计算机识别处理过程的优势。

Discrete Mathematics

离散数学(1)

第二章：命题逻辑的等值和推理演算

马昱春

清華大學
Tsinghua University

主要内容

- 主要讨论命题逻辑的等值和推理演算，是命题逻辑的核心内容。
- 介绍命题公式等值的概念，并通过等值定理给出命题公式等值的充要条件。
- 介绍推理形式和推理演算，给出近于数学的推理

主要内容

前言

- 推理形式和推理演算是数理逻辑研究的基本内容
- 推理形式是由前提和结论经蕴涵词联结而成的
- 推理过程是从前提出发，根据所规定的规则来推导出结论的过程
- 重言式是重要的逻辑规律，正确的推理形式、等值式都是重言式

2.1 等值定理

等值:

给定两个命题公式 A和 B，设$P_1, P_2, \ldots, P_n$为出现于A和B中的所有命题变项，则公式A和B共有2^n个解释。

若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的、或称等价记作

A=B 或 $A \Leftrightarrow B$。

判断公式是否等值

- $P \to (Q \to R)$与$(P \land Q) \to R$
- $(P \to Q) \to R$与$(P \land Q) \to R$

$P\to(Q\to R)$与$(P\wedge Q)\to R$
$(P\to Q)\to R$与$(P\wedge Q)\to R$

$P\ Q\ R$	$Q\to R$	$P\wedge Q$	$P\to Q$	$P\to(Q\to R)$	$(P\wedge Q)\to R$	$(P\to Q)\to R$
0 0 0	1					
0 0 1	1					
0 1 0	0					
0 1 1	1					
1 0 0	1					
1 0 1	1					
1 1 0	0					
1 1 1	1					

$P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1			1		
0 0 1	1			1		
0 1 0	0			1		
0 1 1	1			1		
1 0 0	1			1		
1 0 1	1			1		
1 1 0	0			0		
1 1 1	1			1		

$P \to (Q \to R)$与$(P \land Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \land Q) \to R$

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \land Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \land Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1	0		1		
0 0 1	1	0		1		
0 1 0	0	0		1		
0 1 1	1	0		1		
1 0 0	1	0		1		
1 0 1	1	0		1		
1 1 0	0	1		0		
1 1 1	1	1		1		

$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$
$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$与$(P\wedge Q)\rightarrow R$

$P\ Q\ R$	$Q\rightarrow R$	$P\wedge Q$	$P\rightarrow Q$	$P\rightarrow(Q\rightarrow R)$	$(P\wedge Q)\rightarrow R$	$(P\rightarrow Q)\rightarrow R$
0 0 0	1	0		1	1	
0 0 1	1	0		1	1	
0 1 0	0	0		1	1	
0 1 1						
1 0 0	1	0		1	1	
1 0 1	1	0		1	1	
1 1 0	0	1		0	0	
1 1 1	1	1		1	1	

$$P\rightarrow(Q\rightarrow R)=(P\wedge Q)\rightarrow R$$

$P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1	0	1	1	1	
0 0 1	1	0	1	1	1	
0 1 0	0	0	1	1	1	
0 1 1	1	0	1	1	1	
1 0 0	1	0	0	1	1	
1 0 1	1	0	0	1	1	
1 1 0	0	1	1	0	0	
1 1 1	1	1	1	1	1	

$P \to (Q \to R)$与$(P \wedge Q) \to R$
$(P \to Q) \to R$与$(P \wedge Q) \to R$

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \wedge Q$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \wedge Q) \to R$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1	0	1	1	1	0
0 0 1	1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	1	1	1	0
0 1 1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
1 0 0	1	0	0	1	1	1
1 0 1	1	0	0	1	1	1
1 1 0	0	1	1	0	0	0
1 1 1	1	1	1	1	1	1

$$(P \to Q) \to R \neq (P \wedge Q) \to R$$

2.1 等值定理

- 定理2.1.1
  设A，B为两个命题公式，$A = B$的**充分必要条件**是$A \leftrightarrow B$为一个重言式。

等值定理的证明

1．必要性：$\leftarrow$

若$A \leftrightarrow B$是重言式，则在任一解释下，$A \leftrightarrow B$的真值均为真。

由 $A \leftrightarrow B$的定义，仅当A、B真假值相同时，才有$A \leftrightarrow B = \mathrm{T}$。

所以在任一解释下，A、B都有相同的真值，从而有$A = B$。

等值定理的证明

2．充分性：→

若有$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$，则在任一解释下，$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$都有相同的真值，依 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$的定义，$\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$的取值一定为真，故推出 $\boldsymbol{A}\leftrightarrow\boldsymbol{B}$是重言式。

证毕

等值定理

等值定理的实用性之一：

若证明两个公式等值，只要证明由这两个公式构成的双条件式是重言式。

等值关系满足等价关系的三个性质：

自反性　　$A = A$.

对称性　　若$A = B$，则$B = A$.

传递性　　若$A = B$，$B = C$，则$A = C$

等价关系

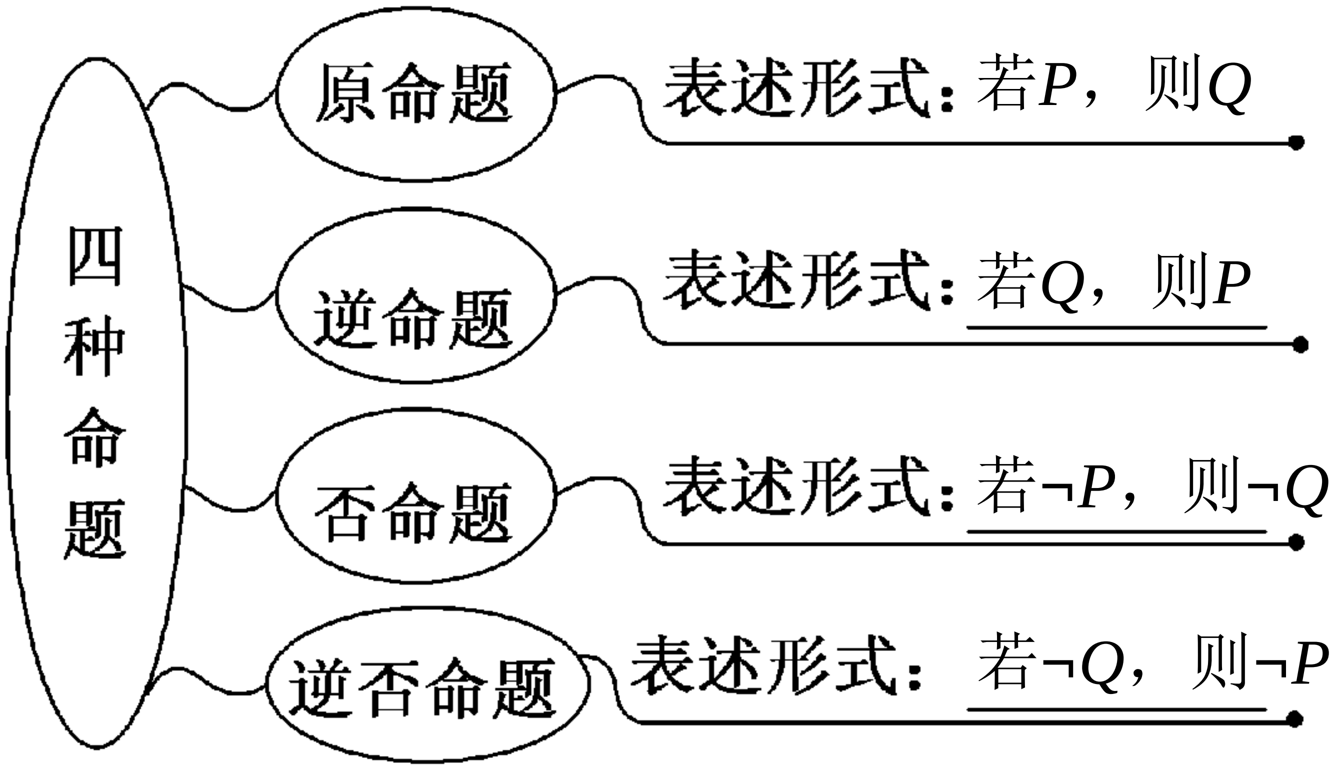
逆命题、否命题与逆否命题

逆命题：若将$P \to Q$视为原命题，则称$Q \to P$为它的逆命题。

否命题：若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg P \to \neg Q$为它的否命题。

逆否命题：若将$P \to Q$视为原命题，则称$\neg Q \to \neg P$为它的逆否命题。

四种命题



逆命题、否命题与逆否命题

两个重要结论

1. 一个命题（**原命题**）与它的逆否命题等值

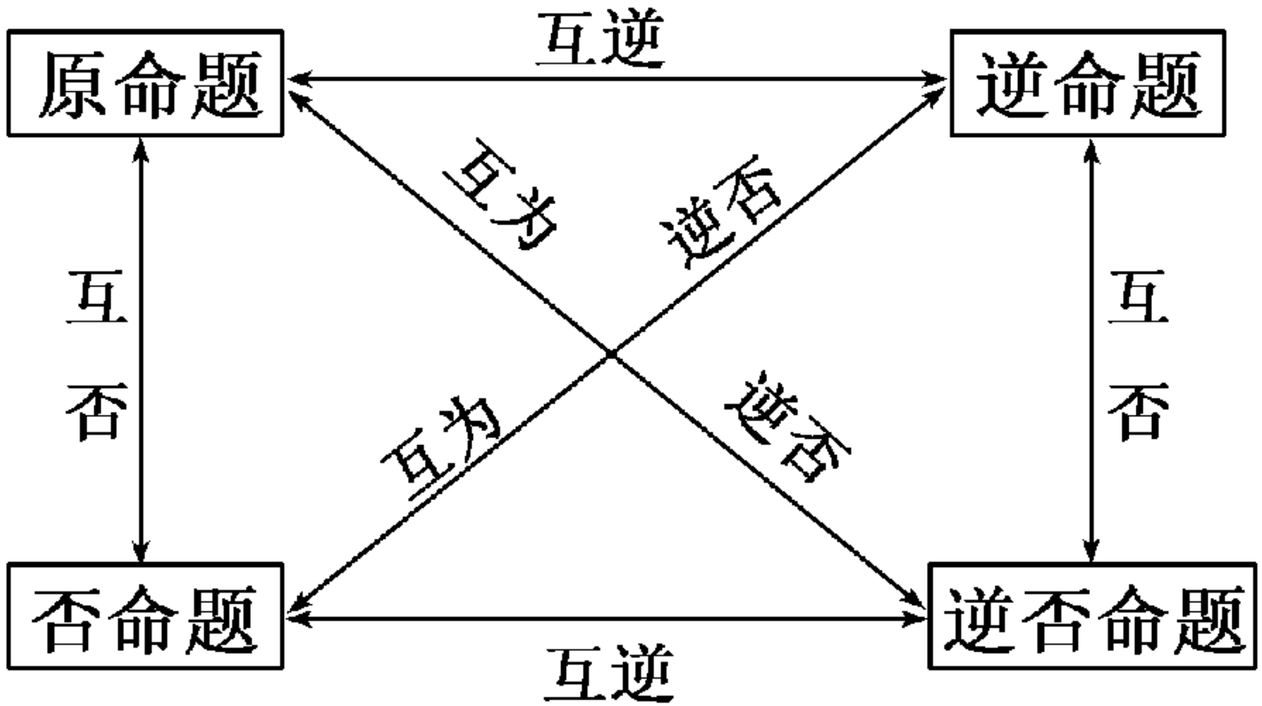
即 $P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$

2. 一个命题的逆命题与它的否命题等值

即 $Q \rightarrow P = \neg P \rightarrow \neg Q$

举例 证明 若a^2是偶数，则a是偶数。利用结论1。

四种命题间的逆否关系



2.2 等值公式

2.2.1　子公式

若X是合式公式A的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式A的子公式。

2.2 等值公式

2.2.2 置换规则

设X为公式 A的子公式，用与X等值的公式Y 将A中的X 施以代换，称为置换，该规则称为置换规则。

置换后公式 A化为公式B，置换规则的性质保证公式 A与公式 B等值，即$A=B$。

且当 A是重言式时，置换后的公式 B也是重言式。

2. 2 等值公式

定理2.2.1：

设$\Phi(A)$是含命题公式A的命题公式， $\Phi(B)$是用命题公式B置换了$\Phi(A)$中的A之后得到的命题公式

如果$A = B$，则$\Phi(A) = \Phi(B)$ 。

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

1. 双重否定律

$$\neg\neg P = P$$

2. 结合律

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R = P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$$

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \neq P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

"→" 不满足结合律

$P\ Q\ R$	$Q \to R$	$P \to Q$	$P \to (Q \to R)$	$(P \to Q) \to R$
0 0 0	1	1	1	0
0 0 1	1	1	1	1
0 1 0	0	1	1	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1
1 1 0	0	1	0	0
1 1 1	1	1	1	1

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

3. 交换律

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \wedge Q = Q \wedge P$$

$$P \leftrightarrow Q = Q \leftrightarrow P$$

$$P \rightarrow Q \neq Q \rightarrow P$$

“→” 不满足交换律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

4. 分配律

$$P \lor (Q \land R) = (P \lor Q) \land (P \lor R)$$
$$P \land (Q \lor R) = (P \land Q) \lor (P \land R)$$
$$P \to (Q \to R) = (P \to Q) \to (P \to R)$$
$$P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \neq (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)$$

“$\leftrightarrow$” 不满足分配律

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

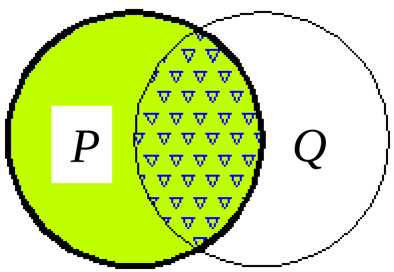
5. 等幂律（恒等律）

$$P \lor P = P$$
$$P \land P = P$$
$$P \to P = T$$
$$P \leftrightarrow P = T$$

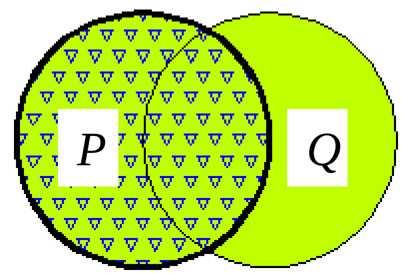
2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

6. 吸收律

$$P \vee (P \wedge Q) = P$$
$$P \wedge (P \vee Q) = P$$



$P \vee (P \wedge Q)$



$P \wedge (P \vee Q)$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

7. 摩根（De Morgan）律：

$$\neg (P \lor Q) = \neg P \land \neg Q$$

$$\neg (P \land Q) = \neg P \lor \neg Q$$

对蕴含词、双条件词作否定有

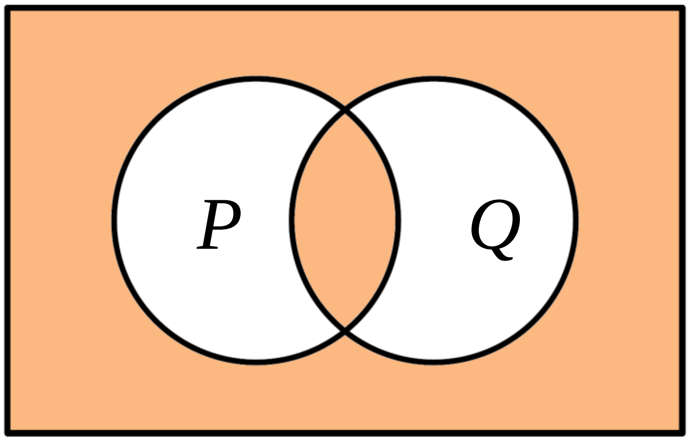
$$\neg(P \rightarrow Q) = P \land \neg Q$$

$$\neg(P \leftrightarrow Q) = \neg P \leftrightarrow Q = P \leftrightarrow \neg Q$$

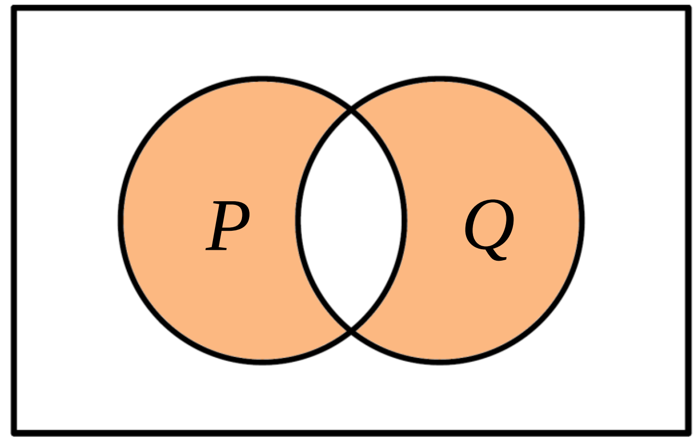
$$= (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q)$$ （借助图形）

$P \leftrightarrow Q$ 和$\neg(P \leftrightarrow Q)$的文氏图

- $P \leftrightarrow Q = (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$
- $\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$



$P \leftrightarrow Q$



$\neg(P \leftrightarrow Q)$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

8. 同一律:

$$P \vee F = P \qquad P \wedge T = P$$

$$T \rightarrow P = P \qquad T \leftrightarrow P = P$$

还有

$$P \rightarrow F = \neg P \qquad F \leftrightarrow P = \neg P$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

9. 零律：

$$P \vee T = T$$

$$P \wedge F = F$$

还有

$$\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{T} = \mathrm{T}$$

$$\mathrm{F} \rightarrow \mathrm{P} = \mathrm{T}$$

2.2.3 基本的等值公式(命题定律)

10. 补余律:

$P \vee \neg P = T \qquad P \wedge \neg P = F$

还有

$P \to \neg P = \neg P$

$\neg P \to P = P$

$P \leftrightarrow \neg P = F$

常用的等值公式

- 蕴涵等值式 $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
- 前提合取合并 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) = (P \wedge Q) \rightarrow R$
- 等价等值式：$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
- 假言易位：$P \rightarrow Q = \neg Q \rightarrow \neg P$
- 等价否定等值式：$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- 归谬论：$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) = \neg P$

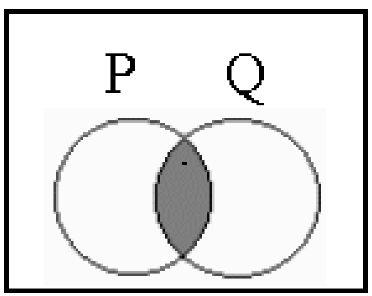
常用的等值公式

- $P\leftrightarrow Q = (P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$ 从取真来描述双条件
- $P\leftrightarrow Q = (P\vee\neg Q)\wedge(\neg P\vee Q)$ 从取假来描述双条件
- $P\rightarrow(Q\rightarrow R) = Q\rightarrow(P\rightarrow R)$ 前提交换
- $(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$ 前提析取合并

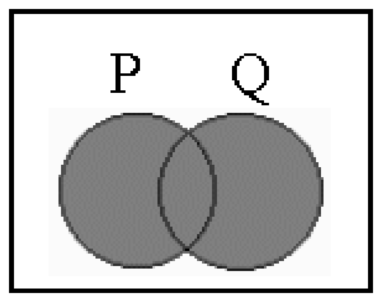
证明其他等值式

文氏图(Venn Diagram)

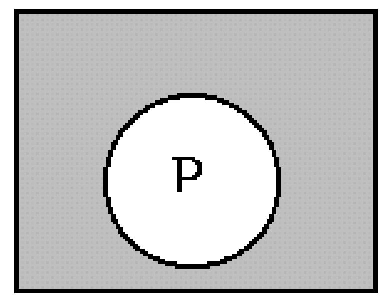
- 将P、Q理解为某总体论域上的子集合，并规定：
  - P∧Q为两集合的公共部分(交集合)
  - P∨Q为两集合的全部(并集合)
  - ¬P为总体论域(如矩形域)中P的余集



P∧Q



P∨Q

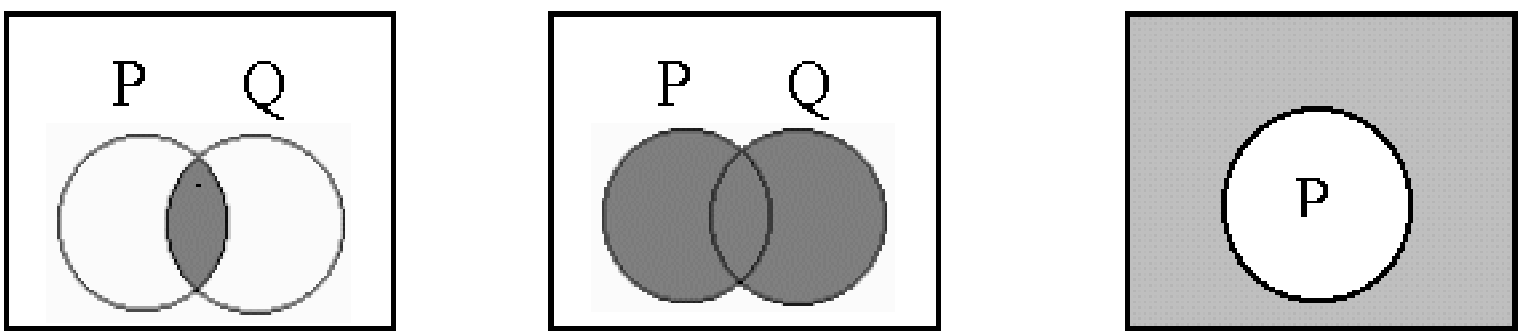


¬P

文氏图

从Venn 图，因$P\wedge Q$较P来得“小”，$P\vee Q$较P来得“大”，从而有

$P\vee(P\wedge Q) = P$　　　　$P\wedge(P\vee Q) = P$



$P\wedge Q$　　　$P\vee Q$　　　$\neg P$

2.2.4 等值演算

- 定义
  - 由已知等值式推演出另外一些等值式的过程称为等值演算。
- 方法
  - 方法1：列真值表。
  - 方法2：公式的等价变换.

置换定律:A是一个命题公式，X是A中子公式，如果$X=Y$，用Y代替A中的X得到公式B，则$A=B$。

公式等值演算的用途

- 判别命题公式的类型
  - 重言式
  - 矛盾式
  - 可满足式
- 验证两个公式等值
- 解决实际问题

用途1：判别命题公式的类型

- 例1　判别$\neg(P\wedge Q)\to(\neg P\vee(\neg P\vee Q))$公式类型.

解　原式

$\neg\neg(P\wedge Q)\vee((\neg P\vee\neg P)\vee Q)$　(蕴涵等值式,结合律)

$=(P\wedge Q)\vee(\neg P\vee Q)$　(双重否定律，幂等律)

$=(P\wedge Q)\vee(Q\vee\neg P)$　(交换律)

$=((P\wedge Q)\vee Q)\vee\neg P$　(结合律)

$=Q\vee\neg P$　(吸收律)

可满足式

用途1：判别命题公式的类型

- 例2　　判别$\neg(P \rightarrow (P \vee Q)) \wedge R$公式类型.

解　原式

$= \neg(\neg P \vee P \vee Q) \wedge R$　　(蕴涵等值式)

$= (P \wedge \neg P \wedge \neg Q) \wedge R$　　(摩根律)

$= \mathrm{F} \wedge R$　　(补余律，零律)

$= \mathrm{F}$　　(零律)

矛盾式

用途2：**验证两个公式等值**

例3：证明$P\to(Q\to R)=(P\wedge Q)\to R$

- 证明：

$$
\begin{aligned}
P\to(Q\to R) &= P\to(\neg Q\vee R) && \text{（置换）}\\
&= \neg P\vee(\neg Q\vee R) && \text{（置换）}\\
&= (\neg P\vee\neg Q)\vee R && \text{（结合律）}\\
&= \neg(P\wedge Q)\vee R && \text{（摩根律）}\\
&= (P\wedge Q)\to R && \text{（置换）}
\end{aligned}
$$

例4：证明$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=(P\vee Q)\rightarrow R$

$(P\rightarrow R)\wedge(Q\rightarrow R)=$

$=(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$ 蕴含等值式

$=(\neg P\wedge\neg Q)\vee R$ 分配律

$=\neg(P\vee Q)\vee R$ 摩根律

$=(P\vee Q)\rightarrow R$ 蕴含等值式

例5：$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)=P$

证明：

$(P\wedge(Q\vee R))\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)$

$=P\wedge((Q\vee R)\vee(\neg Q\wedge\neg R))$ 分配律

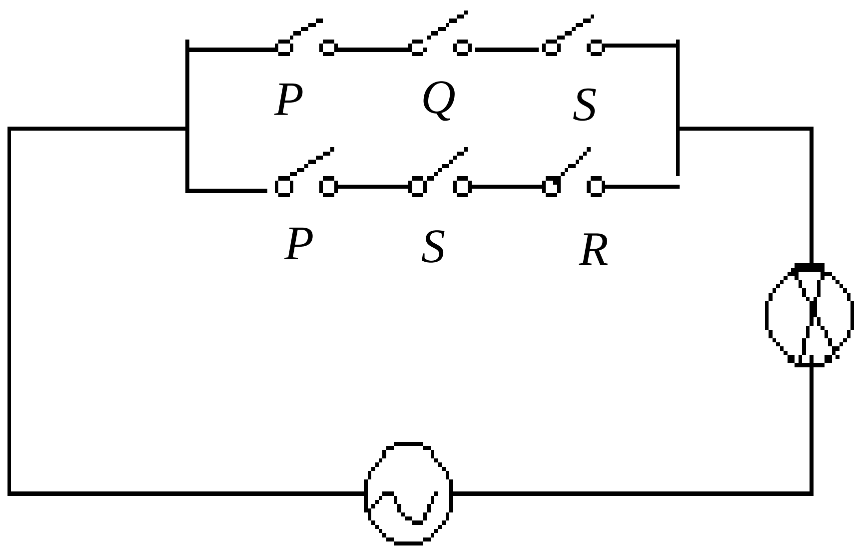
$=P\wedge((Q\vee R)\vee\neg(Q\vee R))$ 摩根律

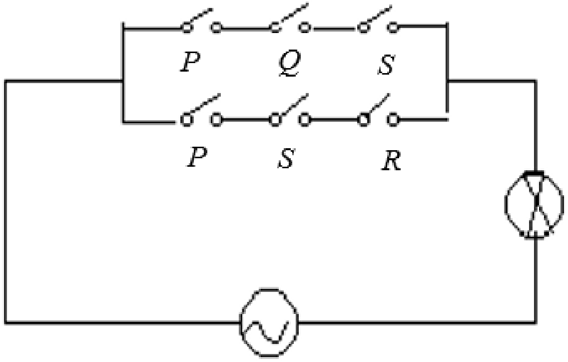
$=P\wedge \mathrm{T}$ 同一律

$=P$

用途3：解决实际问题

- **例6：试用较少的开关设计一个与下图有相同功能的电路。**





解：**可将该图所示之开关电路用下述命题公式表示：**

$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

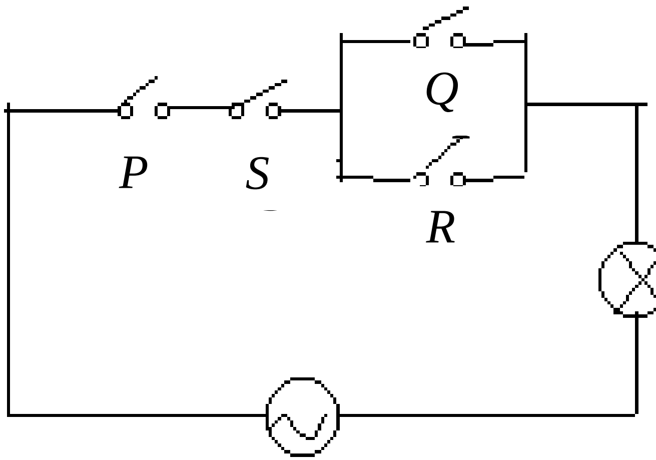
利用基本等值公式，将上述公式转化为：

$$(P \wedge Q \wedge S) \vee (P \wedge R \wedge S)$$

$$= ((P \wedge S) \wedge Q) \vee ((P \wedge S) \wedge R)$$

$$= (P \wedge S) \wedge (Q \vee R)$$

所以其开关设计图可简化为



例：推导比赛名次

- **例 A,B,C,D 4人做百米竞赛，观众甲、乙、丙预报比赛的名次为：**

  甲：C第一，B第二；

  乙：C第二，D第三；

  丙：A第二，D第四

比赛结束后发现甲、乙、丙每人报告的情况都是各对一半，试问实际名次如何（无并列者）？

甲：C第一，B第二
乙：C第二，D第三
丙：A第二，D第四

解：A_i,B_i,C_i,D_i *表示A,B,C,D第i名，i=1,2,3,4*

① $(C_1 \wedge \neg B_2) \vee (\neg C_1 \wedge B_2) = \mathrm{T}$

② $(C_2 \wedge \neg D_3) \vee (\neg C_2 \wedge D_3) = \mathrm{T}$

③ $(A_2 \wedge \neg D_4) \vee (\neg A_2 \wedge D_4) = \mathrm{T}$

①∧② = T 由于C不能既第一又第二，B和C不能都第二，所以

④ $(C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) \vee (\neg C_1 \wedge B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3) = \mathrm{T}$

③∧④ = T 由于A，B不能同时第二，D不能第三又第四，所以

$$A_2 \wedge \neg D_4 \wedge C_1 \wedge \neg B_2 \wedge \neg C_2 \wedge D_3 = \mathrm{T}$$

所以C第一，A第二，D第三，B第四.

2.3 命题公式与真值表的关系

- 对任一依赖于命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$的命题公式 A 来说，可由$P_1, P_2, \ldots, P_n$的真值，根据命题公式 A，给出A的真值，从而建立起由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表。
- 反之，若给定了由$P_1, P_2, \ldots, P_n$到 A的真值表，可以用下述方法写出命题公式A对$P_1, P_2, \ldots, P_n$的逻辑表达式：

2.3 命题公式与真值表的关系

1. 从取1的行来列写

考查命题公式 A的真值表中取1 的行，若取1的行数共有m行，则命题公式 A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \vee Q_2 \vee \cdots \vee Q_m$$

其中 $Qi = (R_1 \wedge R_2 \wedge \ldots \wedge R_n)$，

$$R_i = P_i \text{ 或 } \neg P_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

若该行的$P_i = 1$，则$R_i = P_i$；否则$R_i = \neg P_i$

P	*Q*	*A*	*B*
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

例1：从取1的行来列写

$$A= (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge Q)$$

$$B = (\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

例2：从取0的行来列写

$\neg A= P \wedge \neg Q$ $\qquad$ $A=(\neg P \vee Q)$

$$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

2. 3 命题公式与真值表的关系

2. 从取0的行来列写

考查真值表中取0的行，若取0的行数共有k行，则命题公式A可以表示成如下形式：

$$A = Q_1 \wedge Q_2 \wedge \cdots \wedge Q_k$$

其中 $Q_i = (R_1 \vee R_2 \vee \cdots \vee R_n)$，

$R_i = P_i$ 或 $R_i = \neg P_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

进一步理解

- 从取1的行来列写

$A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_m$

- 故从取0的行来列写

$\neg A = (\ \wedge\ )_1 \vee (\ \wedge\ )_2 \vee \ldots \vee (\ \wedge\ )_l$ 从而

$A = (\ \vee\ )_1 \wedge (\ \vee\ )_2 \wedge \ldots \wedge (\ \vee\ )_l$

其中$(\ \vee\ )_1$中每一项也相应取反，因此

若该行的 $P_i = 1$，则 $R_i = \neg P_i$

若该行的 $P_i = 0$，则 $R_i = P_i$.

例2：从取0的行来列写

P	Q	A	B
F	F	T	T
F	T	T	T
T	F	F	F
T	T	T	F

$A = (\neg P \vee Q)$

$B = (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$

两个重要的命题联结词

与非联接词

与非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用与非联接词"↑"联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P\uparrow Q$。读作P和Q的"与非"。当且仅当P和Q的真值都是1时，$P\uparrow Q$的真值为0，否则$P\uparrow Q$的真值为1。

$$P\uparrow Q \;=\neg(P\wedge Q)$$

（真值表）

P	Q	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

两个重要的命题联结词

或非联接词

或非联接词是二元命题联结词。两个命题P和Q用或非联接词“↓”联结起来，构成一个新的复合命题，记作$P \downarrow Q$。读作P和Q的“或非”。当且仅当P和Q的真值都是0时，$P \downarrow Q$的真值为1，否则$P \downarrow Q$的真值为F。

$$P \downarrow Q = \neg(P \vee Q)$$

（真值表）

P	Q	$P \downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

异或联结词

- 不可兼或。$P\bar{\vee}Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$
  - 当且仅当P和Q的值不一样的时候，的真值为1；
  - 当P和Q的值相同，异或结果为0。

P	Q	$P\bar{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

2.4 联接词的完备集

2.4.1 真值函项

对所有的合式公式加以分类，将等值的公式视为同一类，从中选一个作代表称之为真值函项。每一个真值函项就有一个联结词与之对应。

举例：N=2时的所有真值函项

N = 2时的所有真值函项

P	Q	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

注意 真值函项方向的设定。

$g_0 = F$ $\quad g_1 = P \wedge Q$ $\quad g_6 = P \bar{\vee} Q$

$g_7 = P \vee Q$ $\quad g_8 = P \downarrow Q$ $\quad g_9 = P \leftrightarrow Q$

$g_{13} = P \rightarrow Q$ $\quad g_{14} = P \uparrow Q$ $\quad g_{15} = T$

$g_3 = P$ $\quad g_5 = Q$

$g_{10} = \neg Q$ $\quad g_{12} = \neg P$

尚余

$g_2 = P \wedge \neg Q$ $\quad g_4 = \neg P \wedge Q$

$g_{11} = P \vee \neg Q = Q \rightarrow P$

对于二值逻辑，

n个命题变元$P_1, P_2, \ldots, P_n$可定义 2^{2^n} 个 n元联接词

若推广到多值逻辑结果如何

m^{m^n} ？

2.4 联接词的完备集

2.4.2 联接词的完备集

C是一个联结词的集合，如果任何n元($n\geq 1$)真值函项都可以由仅含C中的联结词构成的公式表示，则称C是完备的联结词集合，或说C是联结词的完备集。

联结词的完备集

定理2.4.1

{ ¬， ∨， ∧}是完备的联结词集合。

- 从前面介绍的由真值表列写命题公式的过程可知，任一公式都可由¬， ∨， ∧表示， 从而{¬, ∨, ∧}是完备的。
- 一般情形下， 该定理的证明应用数学归纳法， 施归纳于联结词的个数来论证。

定理2.4.1 $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词集合

另一证法，因为任何n（$n\geq1$）元真值函数都与唯一的一个主析取范式（后面介绍）等值，而在主析取范式中仅含联结词$\neg, \vee, \wedge$，所以$S = \{\neg, \vee, \wedge\}$是联结词的完备集。

联结词的完备集

推论： 以下联结词集都是完备集：

（1） $S_1 = \{\neg, \wedge\}$

（2） $S_2 = \{\neg, \vee\}$

（3） $S_3 = \{\neg, \rightarrow\}$

（4） $S_4 = \{\uparrow\}$

（5） $S_5 = \{\downarrow\}$

证明{↑}，{↓}都是联结词完备集

- 已知$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备集，证明其中每个联结词都可以由↑来表示

$\neg P = \neg(P \wedge P) = P \uparrow P$

$P \wedge Q = \neg\neg(P \wedge Q) = \neg(P \uparrow Q) = (P \uparrow Q) \uparrow (P \uparrow Q)$

$P \vee Q = \neg(\neg P \wedge \neg Q) = \neg P \uparrow \neg Q = (P \uparrow P) \uparrow (Q \uparrow Q)$

证毕

一些重要的全功能联结词集合

- {¬, ∧}, {¬, ∨}可以构成功能联结词集合。使用上述全功能联结词集合表达的命题公式类的系统常称为Boole代数系统。
- {¬, →}也可构成全功能联结词集合。该全功能联结词集合在研究逻辑系统的演绎与推理，以及在程序系统的研究中经常遇到。
- {↑}，{↓}是全功能联结词集合。在大规模集成电路中有广泛的应用。

小结

- 等值定理
  - 若在任一解释下，公式A和B的真值都相同，则称A和B是等值的
- 等值公式
  - 置换规则
  - 基本的等值公式
  - 常用等值公式
  - 等值演算及其应用
- 命题公式与真值表的关系
  - 从取T的行来写
  - 从取F的行来写

小结

- 联结词的完备集
  - **可以证明，**{¬ , ∨}**，** {¬ , ∧}**，** {¬ , →}**，** {↑}**，** {↓}**都是联结词功能完全组；**
  - **而**{¬ **，** ↔}**，** {¬ }**，** {∧}**，** {∨}**，** {∧**，** ∨}**都不是联结词功能完全组**；
  - **使用联结词集**{¬ **，** ∧**，** ∨}.

谢谢

myc@tsinghua.edu.cn

思考题：解决实际问题

例：在某次研讨会的中间休息时间，3名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人判断如下：

甲：王教授不是苏州人，是上海人。

乙：王教授不是上海人，是苏州人。

丙：王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完这3人的判断后，王教授笑着说，你们3人中**有一人说得全对，有一人说对了一半，另一人说得全不对**。

试用逻辑演算分析王教授到底是哪里人。