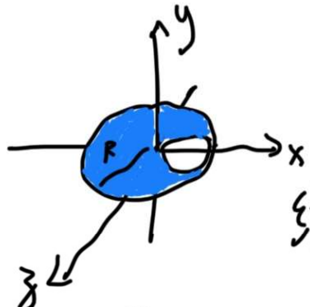
31 March 2022 at 01:26

大学物理B（1） HW5

5.10, 5.11, 5.14, 5.16, 5.19, 5.21, 5.27.

(5.10) 求：



图中质量为m的薄板绕y轴的转动惯量。

解：设原本的薄板的质量为M，则所求惯量为原有薄板的转动惯量与被挖去部分的转动惯量之差。

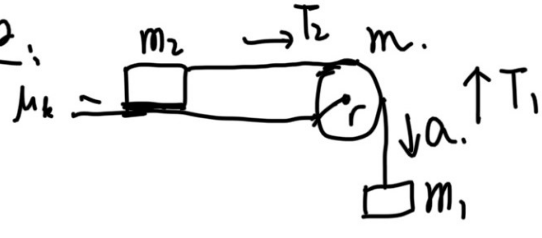
易知被挖去部分，$J = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{M}{4}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2$.

$= \frac{3}{2}\cdot\frac{MR^2}{16} = \frac{3}{32}MR^2$.

同时又 $m = \frac{3}{4}M$，则所求转惯量

$= \frac{1}{2}MR^2 - \frac{3}{32}MR^2 = \frac{13}{32}\left(\frac{4}{3}m\right)R^2 = \frac{13}{24}mR^2$ 解.

(5.11) 已知：



求：a，T_1，T_2.

解：易知，
$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = T_2 - \mu_k m_2 g \\ r(T_1 - T_2) = J\alpha = \frac{1}{2}mr^2\alpha. \\ a = r\alpha. \end{cases}$$

故有 $a = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1 g - (T_1 - T_2) - \mu_k m_2 g\right)$

$$= \frac{1}{m_1+m_2}(m_1 g - \frac{1}{2}ma - \mu_k m_2 g),$$

$$\Rightarrow (m_1+m_2+\frac{1}{2}m)a = m_1 g - \mu_k m_2 g.$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_1 - \mu_k m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}m} g \#.$$

$$T_1 = m_1(g-a) = m_1\left(1 - \frac{m_1-\mu_k m_2}{m_1+m_2+m/2}\right)g$$

$$= \frac{(1+\mu_k)m_2+m/2}{m_1+m_2+m/2}\cdot m_1 g \#$$

$$T_2 = m_2(a+\mu_k g) = m_2\left(\frac{m_1-\mu_k m_2}{m_1+m_2+m/2}+\mu_k\right)g$$

$$= \frac{(1+\mu_k)m_2+m/2}{m_1+m_2+m/2}\cdot m_2 g \#$$

(5.14) 已知.

滑动摩擦系数 μ_k

求. 上圆盘摩擦力矩, 达 ω 的时间,

驱动力矩做的功, 上圆盘的动能。

解. 对上圆盘的质点 dm, 都有摩擦力矩

$$dM = \vec{r}\times d\vec{f} = \vec{r}\times\mu_k\vec{g}\cdot dm$$

设圆密度 $\rho = \frac{m}{\pi R^2}$, 即 $m = \pi r^2\rho$.

$dm = 2\pi r\rho\, dr$

摩擦力矩 $M = \int dM = \int r\cdot\mu_k g\cdot dm$

$$= \int_0^R 2\pi\rho\mu_k g r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\cdot\frac{m}{\pi R^2}\mu_k g R^3 = \frac{2}{3}\mu_k m g R \#$$

角速度由0增长至ω需Δt时间，

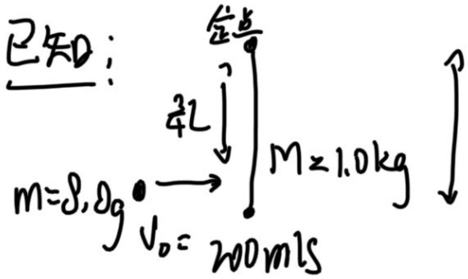
$$\alpha \Delta t = \omega \Rightarrow \Delta t = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\frac{M}{I}} = \omega \cdot \frac{\frac{1}{2} mR^2}{\frac{2}{3}\mu_k mgR} = \frac{3}{4}\frac{\omega R}{\mu_k g}.$$

驱动力矩做功$A = M\theta$,

$$= \frac{2}{3}\mu_k mgR \cdot \omega \cdot \frac{3}{4}\frac{\omega R}{\mu_k g} = \frac{1}{2} mR^2\omega^2.$$

动能$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{4}mR^2\omega^2$ #.

(5.16)、已知：



, $L = 0.40m$.

求：1) m刚附在M时，M的角速度。

2)、M的最大偏转角。

解：1) 由角动量守恒，

$$\frac{3}{4}Lmv_0 = m\left(\frac{3}{4}L\right)^2\omega_0 + \frac{1}{3}ML^2\omega_0 = L^2\omega_0\left(\frac{9}{16}m + \frac{1}{3}M\right).$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{\frac{3}{4}mv_0}{\left(\frac{9}{16}m+\frac{1}{3}M\right)L} = \frac{36mv_0}{(27m+16M)L} = 8.88\ rad\ s^{-1}$$ #.

2). 由机械能守恒、并由偏转角极大时，$\omega=0$.

$$\left(\frac{3}{4}mgL + \frac{1}{2}MgL\right)\cdot(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2 + m\cdot\left(\frac{3}{4}L\right)^2\right)\omega_0^2,$$

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{6}M + \frac{9}{32}m\right)L\omega_0^2}{\left(\frac{3}{4}m + \frac{1}{2}M\right)g}\right) = 94.2^\circ$$ #.

(5.19). 飞船中有三人绕环形舱内壁同向跑动，求：产生人造重力。 $r=2.5m$

(1). 若该人造重力等于地面的地球重力，求 v。

(2). 飞船最初静止，若按(1)跑动，求飞船旋转角速度。，三人质量 70kg， $J_飞 = 3\times10^5 kg\cdot m^2$。

解：(1). $g = a = \frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{gR} = \sqrt{9.8\times2.5} = 4.95 ms^{-1}$

(2). 由角动量守恒，

$$0 = \vec{r}\times 3m\vec{v} - J\omega.$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{3mrv}{J} = \frac{3\times70\times2.5\times4.95}{3\times10^5} = 8.67\times10^{-3} rad s^{-1}$$

(5.21). 已知：

PSR B0531+21 是蟹状星云中心的一颗脉冲星，周期性 ($T=0.033s$) 向地球发射电磁波脉冲。上述周期为该中子星的转动周期，且 $\Delta T = 1.26\times10^{-5}s/a$ 增大。

(1). 求 PSR B0531+21 的自转角加速度。

(2). 设其质量 $=1.5\times10^{30}kg \approx m_日$，半径 10km，求转动动能减少的速度。

(3). 求其停止转动的时间间距。

解：

(1). $\omega = \frac{2\pi}{T}$， $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2\pi}{T^2}\cdot\frac{dT}{dt} = -\frac{2\pi}{0.033^2}\cdot\frac{1.26\times10^{-5}}{3.15\times10^7}$

$= -2.31\times10^{-9}\ \mathrm{rad\ s^{-2}}$ #.

(2). $\frac{dE_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2\right)$,

$= \frac{2}{5}mr^2\omega\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{2}{5}\times1.5\times10^{30}\times(10000)^2\times\frac{2\pi}{0.033}\times(-2.31\times10^{-9})$

$= -2.64\times10^{31}\ \mathrm{J\ s^{-1}}$.

(3). $\Delta t = \frac{-E_k}{\frac{dE_k}{dt}} = \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\omega^2}{\frac{2}{5}mr^2\omega\cdot\frac{d\omega}{dt}} = -\frac{\frac{2\pi}{T}}{-\frac{4\pi}{T^2}\cdot\frac{dT}{dt}} = \frac{T}{2\frac{dT}{dt}}$

$= \frac{0.033}{2\times1.26\times10^{-5}}(a) = 1310(a)$ #.

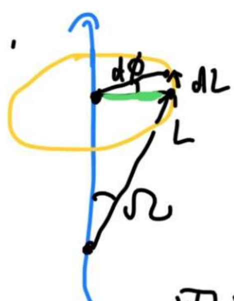
(5.27) 已知：地球自转转轴倾角（与黄道面法向量的夹角）$23.5°$

旋进周期 26000 a.

地球自转转动惯量 $J = 8.05\times10^{37}\ \mathrm{kg\ m^2}$.

求：$|dL/dt|$，日、月对地合力矩。

解：



一方面，对黄道平面 绿线长度 $= \frac{|d\vec{L}|}{d\phi}$

另一方面，对黄道平面的法向量而言，绿线长度 $= |\vec{L}|\sin\Omega$

因此 $\frac{|d\vec{L}|}{d\phi} = |\vec{L}|\sin\Omega$,

$\left|\frac{d\vec{L}}{dt}\right| = |\vec{L}|\sin\Omega\cdot\frac{d\phi}{dt} = J\omega\sin\Omega\frac{d\phi}{dt}$

$= 8.05\times10^{37}\times\frac{2\pi}{86400}\cdot\sin23.5°\cdot\frac{2\pi}{26000\times3.15\times10^{7}}$

$= 1.79\times10^{22}\ \mathrm{kg\cdot m^2\ s^{-2}}$.

同时 $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$，故 $1.79\times10^{22}\ \mathrm{N\cdot m}$ 即为日、月对地的合力矩。