第四章部分习题解答及提示

4, 5, 7, 9, 10, 11, (1, 2, 6), 12 (1, 23), 16 (1, 3, 5)

其中第7题改为:

7. 设 $c_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in R$, $n \ge 0$. 若级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是R, 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的收敛半径是 R_1 , 级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 的收敛半径是 R_2 , 证明 $R = \min\{R_1, R_2\}$.

另外,原题中的提示<应改为≤.

第8题改为:

设r > 0,若级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ 收敛,而 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n = +\infty$,证明级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径是r. 第7题的证明:

不妨设 $R_1 \leq R_2$,则 $\min\{R_1, R_2\} = R_1$.若 $|z| < R_1$,则 $|z| < R_2$,由收敛半径的定义知,级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 和级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ 绝对收敛,即 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$ 和 $\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty$,这意味着

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| + \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| < +\infty,$$

即级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 绝对收敛,再由收敛半径的定义知 $R \ge R_1 = \min\{R_1, R_2\}$.

综上所述, $R = \min\{R_1, R_2\}$. 本题得证。

第9题的证明:

设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为R. 因级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ 收敛,由Abel定理知当|z| < r时,级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 绝对收敛,再由收敛半径的定义知 $R \ge r$. 若R > r,则由收敛半径的定义知级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n$ 绝对收敛,即 $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n < +\infty$,这与已知矛盾,故 $R \le r$. 综上所述,得R = r. 本题得证。

第10题的证明:

因级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz_0^n$ 绝对收敛,知 $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_nz_0^n|=M_0<+\infty$,因而当 $|z|\leq|z_0|=R$ 时,有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n| \le \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z_0^n| = M_0 < +\infty,$$

即级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ 绝对收敛,本题得证。