作业 2 简答

李子钰, 肖子达

2021 年 10 月 14 日

问题 1. *Give a geometric description of* $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ *for the vectors* $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ *and* $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$. *Here geometric description means a necessary and sufficient condition on the coordinates of the vector for it to be in* $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

解答. 注意 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 的各个分量成比例，因此线性相关. 从而 $\mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中过原点且与 $\vec{v}_1$ 平行的直线.

问题 2. *Consider the vectors* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ *and* $\vec{b}$ *in* $\mathbb{R}^2$, *shown in the figure. Does the equation* $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3 v_3 = \vec{b}$ *have a solution? Is the solution unique? Use the figure to explain your answers.*

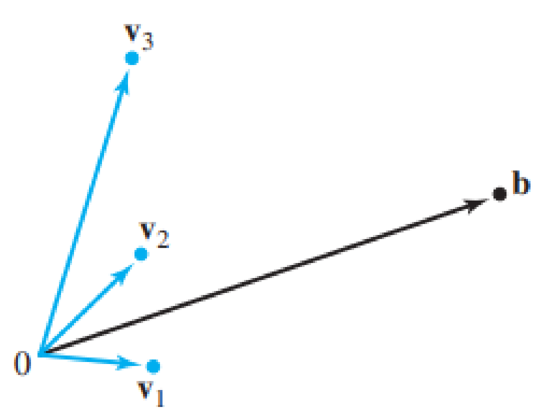

图 1: 问题 2

解答. 有解等价于 $\vec{b} \in \operatorname{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$，有唯一解等价于 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 表出 $\vec{b}$ 的方式不唯一.

问题 3. *Let* $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ *and* $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Is* u *in the plane in* $\mathbb{R}^3$ *spanned by the columns of* A *? Why or why not?*

解答. u 在此平面内即

$$\exists a, b \in \mathbb{R}, \quad s.t. \quad \vec{u} = a \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解出 $a = 2.5, b = 1.5$.

问题 4. *Let* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \\ -2 & -8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. *Do the columns of* B *span* $\mathbb{R}^4$? *Does the equation* $B\vec{x} = \vec{y}$ *have a solution for each* $\vec{y}$ *in* $\mathbb{R}^4$?

解答. 只要判断 $B\vec{x} = 0$ 是否有唯一解即可. 写出增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 7 & 0 \\ -2 & -8 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

并利用初等行变换将其化成

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

知道解不唯一. 故 B 的列向量不是线性无关的，从而张成不了 $\mathbb{R}^4$.

问题 5. *Solve the homogeneous linear system and write the set of solutions* *in parametric vector form.*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

解答. 增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & 0 \\ -3 & -7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

最后可被化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

问题 6. *Solve the nonhomogeneous linear system and write the set of solutions in parametric vector form. Provide a geometric comparison with the solution set in the above question.*

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6 \end{cases}$$

解答. 增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 4 \\ 1 & 4 & -8 & 7 \\ -3 & -7 & 9 & -6 \end{bmatrix}$$

可被化简为

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

从而解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

它是一个特解 $\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ + 对应齐次方程的通解 $t \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的形式.

问题 7. *Find the value(s) of h for which the vectors are linearly dependent. Justify the answer.*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ h \\ 4 \end{bmatrix}$$

解答. 由于 $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ 线性无关，这等价于判断 h 的取值，使得方程组

$$a \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ h \\ 4 \end{bmatrix}$$

有解. 先看没有 h 的两个方程

$$\begin{cases} 2a - 6b = 8 \\ a - 3b = 4, \end{cases}$$

把它写成

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix},$$

并化简增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

为

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解出

$$b = t, a = 4 + 3t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

从而

$$h = -4a + 7b = -5t - 16, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

即对 h 的任意取值，这些向量都是线性相关的.

In Questions 8 and 9 , mark each statement True or False. Justify your answer.

问题 8. *1. The columns of a matrix A are linear independent if the equation $A\vec{x} = 0$ has the trivial solution.*

2. If S is a linearly dependent set, then each vector is a linear combination of the other vectors in S.

3. The columns of any 4×5 matrix are linearly dependent.

4. If $\vec{x}$ and $\vec{y}$ are linearly independent, and if $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ is linearly dependent, then $\vec{z}$ is in $\text{Span}\{\vec{x}, \vec{y}\}$.

解答. *1.* 不对. 考虑只有平凡解才可以推出，有平凡解不行.

2. 不对，考虑 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，第三个向量不能被前两个线性组合出来.

3. 对的. 按照第一小问的办法写成线性方程组，会是一个五个未知数，但是只有四个方程的方程组. 求解时一定会出现自由变量，即解不唯一.

4. 对的. 设

$$a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{0},$$

如果 $c = 0$，则得到 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 线性相关. 故 $c \neq 0$，此时

$$\vec{z} = -\frac{a}{c}\vec{x} - \frac{b}{c}\vec{y}.$$

问题 9. *1. Two vectors are linearly dependent if and only if they lie on a line through the origin.*

2. *If a set contains fewer vectors than there are entries in the vectors, then the set is linearly independent.*

3. *If* $\vec{x}$ *and* $\vec{y}$ *are linearly independent, and if* $\vec{z}$ *is in* $\mathrm{Span}\{\vec{x},\vec{y}\}$*, then* $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ *is linearly dependent.*

4. *If a set in* $\mathbb{R}^n$ *is linearly dependent, then the set contains more vectors than there are entries in each vector.*

解答. *1.* 对的. 如果两个向量 $\vec{x},\vec{y}$ 共线，在 $\vec{y}\neq 0$ 时，$\exists c\neq 0$，使得 $\vec{x}=c\vec{y}$，把它写成

$$\vec{x}-c\vec{y}=0$$

即可见线性相关. 而在 $\vec{y}=0$ 时，与其在同一条直线的 $\vec{x}$ 可以是任意向量，此时有

$$0\cdot\vec{x}+1\cdot\vec{y}=0,$$

仍然满足线性相关的定义.

如果 $\vec{x},\vec{y}$ 线性相关，即存在 $a,b\in\mathbb{R}$，使得

$$a\vec{x}+b\vec{y}=0,$$

这里 a,b 不能同时为 0，不妨设 $a\neq 0$，则有

$$\vec{y}=-\frac{b}{a}\vec{x}.$$

2. 不对. 例如

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$$

是线性相关的.

3. 对的. 把 $\vec{z}=a\vec{x}+b\vec{y}$ 写成 $a\vec{x}+b\vec{y}-\vec{z}=\overrightarrow{0}$ 即可见.

4. 不对，仍然考虑

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}.$$

问题 10. *Suppose A is an $m\times n$ matrix with the property that for all $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^m$ the equation $A\vec{x}=\vec{b}$ has at most one solution. Use the definition of linear independence to explain why the columns of A must be linearly independent.*

解答. 如果 $A=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ 的列线性相关，则存在不全为零的 x_i，使得

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0.$$

也就是说 $A\vec{x}=0$ 是有非零解的. 注意若 $\vec{x}_0$ 为之非零解，则 $k\vec{x}_0$ 也为之非零解.

从而，若 $\vec{x}_1$ 为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解，则可以推出 $\vec{x}_1+k\vec{x}_0,\forall k\in\mathbb{R}$ 也为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解. 即，若 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，则一定有无穷多解.

然而对于某些 $\vec{b}$，$A\vec{x}=\vec{b}$ 是有解的，例如取 $\vec{b}=\vec{0}$. 这就与题干中的“$\forall b\in\mathbb{R}^m$，方程 $A\vec{x}=\vec{b}$ 至多有一个解”矛盾!

问题 11. *Suppose an $m\times n$ matrix A has n pivot columns. Explain why for each $\vec{b}$ in $\mathbb{R}^m$ the equation $A\vec{x}=\vec{b}$ has at most one solution.*

解答. 把增广矩阵 $(A|\vec{b})$ 用初等行变换进行化简成阶梯型矩阵 $(A'|\vec{b}')$，A' 会出现 n 个非零行，若 $\vec{b}'$ 对应非零行的分量出现 0，则此方程无解；全不为 0 则有唯一解.