# 第九章　集 合

后半部分（9.5-9.7）

# 第九章 集合

- 9.1 集合的概念与表示方法
- 9.2 集合间的关系和特殊集合
- 9.3 集合的运算
- 9.4 集合的图形表示法
- 9.5 集合运算的性质和证明
- 9.6 有限集合的基数
- 9.7 集合论公理系统

$$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$$

$$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$$

$$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \;\nabla\; x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

**元素x ∈ 集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合$A$，$\varnothing \subseteq A$ $E = \quad x \mid x = x$

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z\,)$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$\cup\, \varnothing = \varnothing$

$\cap\, \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

| | $\cup$ | $\cap$ | $\oplus$ |
|---|---|---|---|
| 交换 | $A\cup B=B\cup A$ | $A\cap B=B\cap A$ | $A\oplus B=B\oplus A$ |
| 结合 | $(A\cup B)\cup C=$<br>$A\cup(B\cup C)$ | $(A\cap B)\cap C=$<br>$A\cap(B\cap C)$ | $(A\oplus B)\oplus C=$<br>$A\oplus(B\oplus C)$ |
| 幂等 | $A\cup A=A$ | $A\cap A=A$ | |

| | $\cup$与$\cap$ | $\cap$与$\oplus$ |
|---|---|---|
| 分配 | $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$<br>$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ | $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$ |
| 吸收 | $A\cup(A\cap B)=A$<br>$A\cap(A\cup B)=A$ | |

吸收律的前提：$\cup$、$\cap$可交换

| | $-$ | $\sim$ |
|---|---|---|
| ***D.M*** **律** | $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$<br>$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ | $\sim(B\cup C)=\sim B\cap\sim C$<br>$\sim(B\cap C)=\sim B\cup\sim C$ |
| 双重否定 | | $\sim\sim A=A$ |
| | $\varnothing$ | $E$ |
| 补元律 | $A\cap\sim A=\varnothing$ | $A\cup\sim A=E$ |
| 零律 | $A\cap\varnothing=\varnothing$ | $A\cup E=E$ |
| 同一律 | $A\cup\varnothing=A$ | $A\cap E=A$ |
| 否定 | $\sim\varnothing=E$ | $\sim E=\varnothing$ |

# 9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统(axiom systems for set theory)是一阶谓词公理系统的扩展，它包括一阶谓词公理系统和几个集合论公理。集合论公理系统可以推出一阶谓词的所有定理，也可以推出集合论的定理。
  - 悖论的发现促使人们借助于公理化方法，以期排除集合论中的已知悖论并系统地整理G.康托的理论和方法

- ZFC公理系统用10组公理描述集合的基本性质和集合实例的定义方式。
- ZFC公理系统已经被普遍接受为现代数学的基础，其基本思想是：
  - **把“集合”当作整个数学的第一概念，没有定义，也不可能定义。**
  - **建立一个一阶逻辑语言，用于精确地表达关于集合的命题。**
- 设定若干公理，用于指定集合的构造方法和必须具备的性质，以避免出现矛盾。
- 应用一阶逻辑推理系统证明集合定理，即关于集合的永真命题。

**(ZF1)外延公理：**一个集合完全由它的元素所决定。如果两个集合含有同样的元素，则它们是相等的。

**(ZF2)空集合存在公理：**即存在一集合s，它没有元素。

**(ZF3)无序对公理：**也就是说，任给两个集合x、y，存在第三个集合z，使得w∈z当且仅当w=x或者w=y。这个公理实际说的是，给定两个集合x和y，我们可以找到一个集合A，它的成员完全是x和y。

**(ZF4)并集公理：**也就是说，任给一集合x，我们可以把x的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使w∈y当且仅当存在z使z∈x且w∈z"。

**(ZF5)幂集公理：**也就是说，任意的集合x，也是一集合。

准确的定义："对任意集合x，存在集合y，使z∈y当且仅当对z的所有元素w，w∈x"。

**(ZF6)无穷公理：**也就是说，存在一集合x，它有无穷多元素。

准确的定义："存在一个集合，使得空集是其元素，且对其任意元素x，也是其元素。"

根据皮亚诺公理系统对自然数的描述，此即：存在一个包含所有自然数的集合。

**(ZF7)分离公理模式：**"对任意集合x和任意对x的元素有定义的逻辑谓词P(z)，存在集合y，使z∈y当且仅当z∈x而且P(z)为真"。

**(ZF8)替换公理模式：**也就是说，对于任意的函数，对于任意的集合t，当x属于t时，都有定义（ZF中唯一的对象是集合，所以必然是集合）成立的前提下，就一定存在一集合s，使得对于所有的x属于t，在集合s中都有一元素y，使y=F(x)。也就是说，由F(x)所定义的函数的定义域在t中的时候，那么它的值域可限定在s中。

**(ZF9)正则公理：**也叫基础公理。所有集都是良基集。说明一个集合的元素都具有最小性质，例如，不允许出现x属于x的情况。

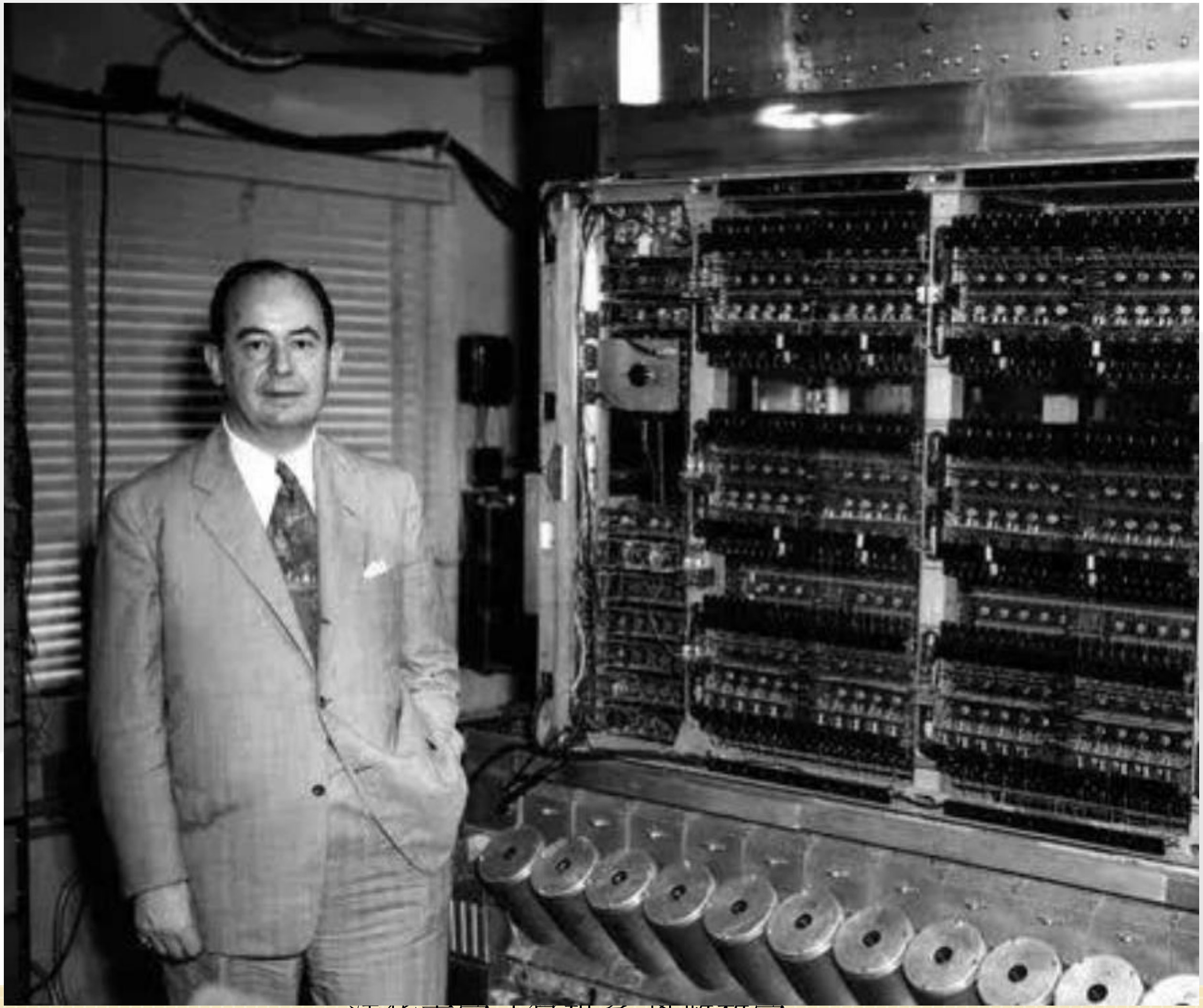
准确的定义："对任意非空集合x，x至少有一元素y使x∩y为空集。"

**注：以上全部即是ZF公理系统的内容，再加上选择公理就构成了ZFC公理系统。**

（AC）选择公理：对任意集c存在以c为定义域的选择函数g，使得对c的每个非空元集x，g(x)∈x。

**注2：空集公理是可以由其它公理导出。一般认为ZF公理系统可以不包含空集公理。**

- 公理集合论是由德国数学家策梅洛(Zermelo)所开创。
  - 1908年他首先 提出了7组集合公理。这些公理是用自然语言和数学语言进行描述的。
  - 1921年弗兰克尔（Frankel）指出这些公理不足以证明某些特定集合的存在性。
  - 1922年弗兰克尔用一阶逻辑语言对策梅洛的公理系统进行完善，形成了ZFC公理系统，其中Z指策梅洛，F指弗兰克尔，C指选择公理（axiom of choice）。
  - 几乎同时斯克莱姆（Skolem）也在做这项工作，并于1922年独立于弗兰克尔提出了ZFC公理系统中的替换公理。
  - 为什么C需要单独出来?
  - 选择公理存在一定争议
    - Banach-Tarski 悖论，它表明你可以将一个实心球分成几个部分，并将这些部分重新组装成两个新的实心球，每个球的大小与原来的球相等。换句话说，你可以获得两个球。



# ZFC公理系统

- 1925年，冯诺依曼在其论文中指出这个公理系统不能排除包含自己的集合，并提出正则公理(axiom of regularity)以排除这个现象。
- ZFC公理系统共有10组公理，被普遍接受为数学的严格基础。
- 冯诺依曼
  - 大多数数学家证明了他们能证明的，冯·诺伊曼证明了他想要的。
  - 约翰·冯·诺伊曼可能是有史以来最聪明的人。
  - 冯·诺伊曼被称为“伟大数学家的最后一位代表”。

- 冯·诺依曼是一个非常善于统筹和利用心理要素，达成自己科研目的的人。
  - 在工作上，用数学思维解析问题的冯·诺依曼，喜欢将庞大无比任务，用拆解的方式分派成一个个看似散乱却浑然一体的小任务，分配给最适合的人。
  - 这充分诠释了他的天生领袖气质，也是他能坐镇美国导弹研究实验室、国家防御研究委员会等等国家机关的关键。
  - 因为每个任务，他都能找到最适合这个任务的人。
-

- 普林斯顿大学高等研究院迎来60华诞时，曾回顾过往总结研究院**成立至今三大标志性成果**。
  - 在经过充分讨论之后，这三大成果终于出炉。
  - 第一个是：哥德尔不完全性定理。
  - 第二个是：杨振宁和李政道推翻宇称守恒定律。
  - 第三个是：冯.诺依曼为高等研究院做的**大量工作。**

# 9.7.1 ZFC集合论公理系统

- **ZFC公理系统是著名的集合论公理系统**
- **其它还有GB(Godel & Bernays)公理系统等**
- **ZFC公理系统共包含10条集合论公理**

# 9.7 集合论公理系统

- 集合论公理系统的一个基本思想是“任一集合的所有元素都是集合”。

  集合论研究的对象只是集合。除集合外的其它对象（如有序对、数字、字母）都要用也完全可以用集合来定义。

- 集合论公理系统的主要目的：

  （1）判定集合的存在性；

  （2）由已知集合构造出所有合法的集合（合法性）

$$A\cup B = \quad x \mid x\in A\vee x\in B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x\in E\wedge x\notin A$$

$$A\cap B = \quad x \mid x\in A\wedge x\in B$$

$$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = \quad x \mid x\in A \ \nabla \ x\in B$$

$$A-B = \quad x \mid x\in A\wedge x\notin B$$

$$= (A\cup B)-(B\cap A)$$

**元素x** $\in$ **集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \rightarrow x\in B)$$

$$A\subset B \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge A\neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x\neq x$ 对任意的集合A， $\varnothing\subseteq A$ $E = \quad x \mid x = x$

$$A\subseteq A$$

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z\in A\wedge x\in z)$$

$$\bigcup\varnothing = \varnothing$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z\in A \rightarrow x\in z)$$

$\bigcap\varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x\subseteq A$$

## 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统

- (1) 外延公理(**Axiom of extensionality**)

两集合相等的充要条件是它们恰好具有同样的元素。

$$(\forall x)(\forall y)(x = y \leftrightarrow (\forall z)(z \in x \leftrightarrow z \in y))$$

与定理9.2.1形式相同。

这个公理表明一个集合由其元素唯一确定。

$$A\cup B = \quad x \mid x\in A \vee x\in B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x\in E \wedge x\notin A$$

$$A\cap B = \quad x \mid x\in A\wedge x\in B$$

$$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = \quad x \mid x\in A \ \nabla \ x\in B$$

$$A - B = \quad x \mid x\in A\wedge x\notin B$$

$$= (A\cup B) - (B\cap A)$$

**元素x** $\in$ **集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x\in A \leftrightarrow x\in B)$$

$$A\subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x\in A \rightarrow x\in B)$$

$$A\subset B \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge A\neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x\neq x$ 对任意的集合A， $\varnothing \subseteq A$

$$E = \quad x \mid x = x$$

$$A\subseteq A$$

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq C)\Rightarrow A\subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A\subseteq B\wedge B\subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z\in A\wedge x\in z)$$

$$\cup\varnothing = \varnothing$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z\in A \rightarrow x\in z)$$

$\cap\varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x\subseteq A$$

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (2) 空集存在公理
- 存在不含任何元素的集合(空集)。

$$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$$

- 该公理定义了集合论中的第一个集合——空集。
- 且由外延公理可知，空集是唯一的。

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (3) 无序对集合存在公理

- 对任意的集合 $x$ 和$y$，存在一个集合 $z$, 它的元素恰好为 $x$ 和$y$。

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow ((u = x) \vee (u = y)))$$

- 已知 $x$ 和$y$ 是集合,由该公理可构造$z = \{x, y\}$ 也是集合

当$x$=$y$ 时则构造出恰好有一个元素的集合。

有了该公理，便可无休止地构造许多具体的集合。

{Ø}、{{Ø}}、{{{Ø}}}、{Ø，{Ø}}……一元集或二元集

{Ø，{Ø}，{{Ø}}}是不是集合?

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

**元素$x$ $\in$ 集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$

$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合$A$，$\varnothing \subseteq A$

$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$

$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

{∅，{∅}，{{∅}}}=∪{<u>{∅，{∅}}</u>，<u>{{{∅}}}</u>}

- (4) 并集合存在公理

  对任意的集合 $x$，存在一个集合$y$, 它的元素恰好为 $x$ 的元素的元素。

  $$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\exists u)(z \in u \wedge u \in x))$$

  任给一集合$x$，我们可以把$x$的元素的元素汇集到一起，组成一个新集合。

- 解决了集合的广义并的存在性
  (集合的广义并是集合)

$A \cup B = \ x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \ x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \ x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \ x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \ x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

**元素x　　∈　　集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$　　$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\varnothing = \ x \mid x \neq x$　　对任意的集合A，$\varnothing \subseteq A$　　$E = \ x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \ x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$　　$\cup \varnothing = \varnothing$

$\bigcap A = \ x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$　　$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \ x \mid x \subseteq A$$

# 9.7.1 ZF (Zermelo-Frankel) 集合论公理系统 (续)

- (5) 子集公理模式(分离公理模式)

对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 $x$，存在一个集合$y$, 它的元素 $z$ 恰好既是 $x$ 的元素又使 $P(z)$ 为真。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge P(z)))$$

对任意的集合$x$，存在$x$的子集$y$，$y$的元素$z$使$P(z)$为真.

不只是一条公理，而是无限多条有同样模式的公理，

可解决交集、差集、广义交、广义并和笛卡儿积的存在性。

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- 例：以交集和差集为例
- 定理9.7.1 对任意的集合A，交集A∩B是集合。

对任意的集合$x$，存在$x$的子集$y$， $y$的元素z使$P(z)$为真。

对任意的集合A，存在A的子集A∩B，其元素使$z \in B$为真

$$y = \{ z \mid z \in x \land P(z)\} \qquad y \subseteq x，y\text{是 }x\text{的子集，}$$

$$A \cap B = \{ z \mid z \in A \land z \in B\}$$

子集公理保证了上述集合的存在性。

$A-B = \{ z \mid z \in A \land z \notin B\}$ 差集仅需将$P(z)$ 代为$z \notin B$。

- (5) 子集公理模式(分离公理模式)

  对任意的谓词公式 $P(z)$，对任意的集合 $x$，存在一个集合$y$, 它的元素 $z$ 恰好既是 $x$ 的元素又使 $P(z)$ 为真。

  对任意的集合$x$，存在$x$的子集$y$, $y$的元素$z$使 $P(z)$为真.

集合不能独立定义，需要从已经存在的集合中分离出来；

所有集合的集合不存在！

# 集合的存在性(续)

- 定理9.7.5 万有集不存在定理

  不存在集合$A$，使任一集合都是 $A$的元素。
- Russell悖论

# 罗素悖论的解决

- H = { $x$ | $x$ 是一个集合 ∧ $x \notin x$ }
- 子集公理模式(分离公理模式)：对任意的集合$x$，存在$x$的子集$y$, $y$的元素$z$使$P(z)$为真.
- $P(z) = z \notin z$ -> $H=\{x|P(x)\}$ 是集合吗？
- **子集公理成立的才是ZFC公理系统认可的**
- **套用**子集公理模式(分离公理模式)

## $P(x) = x \notin x$ -> $H=\{x|P(x)\}$成立吗？

- 定理9.7.5 万有集不存在定理
  不存在集合$A$，使任一集合都是$A$的元素。
- 证明：假设存在集合$A$，使任一集合都是$A$的元素。选$P(x)$为$x \notin x$, 依据子集公理，存在集合

$$A_0 = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin x \}$$

即 $x \in A_0$ 等价于 $x \in A \wedge x \notin x$

取 $x = A_0$，则有代入上一行

$A_0 \in A_0$等价于$A_0 \in A \wedge A_0 \notin A_0$。这是不可能的

所以，假设矛盾，定理得证。

$$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$$

$$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$$

$$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$$

$$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \ \nabla \ x \in B$$

$$= (A \cup B) - (B \cap A)$$

**元素$x$ $\in$ 集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$ 对任意的集合$A$，$\varnothing \subseteq A$ $E = \quad x \mid x = x$

$$A \subseteq A$$

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

$$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$$

$$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$$

$\cup \varnothing = \varnothing$

$\cap \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

# 为什么∩Ø无意义？

- 假设∩Ø为集合，则有广义交的定义，

$$\bigcap A = \{x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$$x \in \bigcap \varnothing \Leftrightarrow |(\forall y)(\boxed{y \in \varnothing} \rightarrow x \in y)$$

$x \in \bigcap \varnothing$ **永真**

- 则∩Ø为所有集合的集合，与上述定理矛盾，因此规定∩Ø不存在。

$A \cup B = \quad x \mid x \in A \vee x \in B$

$A \cap B = \quad x \mid x \in A \wedge x \in B$

$A - B = \quad x \mid x \in A \wedge x \notin B$

$-A = E - A = \quad x \mid x \in E \wedge x \notin A$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \quad x \mid x \in A \,\nabla\, x \in B$

$= (A \cup B) - (B \cap A)$

**元素$x$ $\in$ 集合A**

$$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$$A \neq B \Leftrightarrow (\exists x)\neg(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$　　$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$

$\varnothing = \quad x \mid x \neq x$　　对任意的集合$A$，$\varnothing \subseteq A$　　$E = \quad x \mid x = x$

$A \subseteq A$

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

$\bigcup A = \quad x \mid (\exists z)(z \in A \wedge x \in z)$　　$\cup\, \varnothing = \varnothing$

$\bigcap A = \quad x \mid (\forall z)(z \in A \rightarrow x \in z)$　　$\cap\, \varnothing$无意义

$$P(A) = \quad x \mid x \subseteq A$$

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (6) 幂集合公理 (集合的幂集是集合)

  对任意的集合 $x$，存在一个集合$y$, 它的元素恰好是 $x$ 的子集。

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (\forall u)(u \in z \rightarrow u \in x))$$

$$(\forall A)(\exists P(A))(\forall z)(z \in P(A) \leftrightarrow z \subseteq A))$$

对任意的集合A，存在一个集合P(A)，恰好以A的一切子集为元素。故集合的幂集是集合。

注：后一写法非正式，仅用于帮助理解。

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (7) 正则公理

  对任意的非空集合 $x$，存在 $x$ 的一个元素，它和 $x$ 不相交。

$$(\forall x)(x \neq \varnothing \rightarrow (\exists y)(y \in x \wedge (x \cap y = \varnothing)))$$

对任意非空集合$x$，$x$至少有一元素$y$使$x \cap y$为空集

- 此时称该元素为集合 $x$ 的一个极小元。
- 结论：任一非空集合都有极小元。

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- 例：

设 $B=\{\{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$， $B_1=\{\emptyset\}$,

则 $B_1 \in B$ 且 $B_1 \cap B= \emptyset$ ,

所以$B_1$是B中的极小元。

设 $B_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$， 尽管 $B_2 \in B$,

但 $B_2 \cap B = \{\{\emptyset\}\}$,

所以$B_2$不是B中的极小元。

- 利用正则公理可以证明不存在下列形式的集合：
- $x \in x$(不存在以自身为元素的集合)：
- 如果这样的集合x存在，那么{x}只有x一个元素， x既是x的元素，也是自己本身，则$\{x\} \cap x = \{x\}$非空，不合于正则公理。
- 不存在无限递降的集合序列。
- 对任何非空的传递集合A，必有$\emptyset \in A$
- 计算机理论里的意义？

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (8) 无穷公理

存在一个由所有自然数组成的集合

$$(\exists x)(\phi \in x \wedge (\forall y)(y \in x \rightarrow (y \cup \ y\ ) \in x))$$

$$(\exists N)(\phi \in N \wedge (\forall y)(y \in N \rightarrow y^{+} \in N))$$

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- **自然数的集合表示方法：**
- Zermelo 1908年曾给出一种方法：
- $0 = \varnothing$， $1 = \{\varnothing\}$， $2 = \{\{\varnothing\}\}$， …
- 满足$0 \in 1 \in 2 \in \ldots$。 但 '$\in$' 关系不满足传递性。
- 即由 $A \in B \wedge B \in C$ 成立，却推不出 $A \in C$ 成立。
- 未能准确刻画自然数本身所固有的良好性质。

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 需注意每个自然数均包含两方面的信息：
- （1）序数（排序） order
- （2）基数（对应的个数）cardinal
- 1924年，Von Neumann在满足序数与基数两种性质的意义下，通过定义后继，给出了另一种自然数的表示：

# 后继与自然数

- 定义9.7.3 前驱与后继

  对任意的集合$A$，定义集合

  $$A^+ = A \cup \{A\}$$

  $A^+$称为$A$的后继，$A$称为$A^+$的前驱。

- 定义9.7.4 用后继定义自然数
  集合$0 = \varnothing$是一个自然数。若集合$n$是一个自然数，则集合$n+1 = n^+$也是一个自然数。

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 按照上述定义，每个自然数可表示为：

$$0=\varnothing$$

$$1=0^{+}=0\cup\{0\}=\{0\}=\{\varnothing\}$$

$$2=1^{+}=1\cup\{1\}=\{0,1\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$$

$$3=2^{+}=2\cup\{2\}=\{0,1,2\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$$

$$\cdots$$

$$n+1=n^{+}=n\cup\{n\}=\{0,1,\cdots,n\}.$$

## Zur Einführung der transfiniten Zahlen

Von JOHANN v. NEUMANN in Budapest.

### Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist: den Begriff der *Cantor*schen Ordnungszahl eindeutig und konkret zu fassen.

Dieser Begriff wird nach *Cantors* Vorgang gewöhnlich als „Abstraktion" einer gemeinsamen Eigenschaft aus gewissen Klassen von Mengen gewonnen.[1]) Dieses etwas vage Verfahren wollen wir durch ein anderes, auf eindeutigen Mengenoperationen beruhendes, ersetzen. Das Verfahren wird in den folgenden Zeilen in der Sprache der naiven Mengenlehre dargestellt werden, es bleibt aber (im Gegensatz zu *Cantors* Verfahren) auch in einer „formalistischen", axiomatisierten Mengenlehre richtig. So behalten unsere Schlüsse auch im Rahmen der *Zermelo*schen Axiomatik (wenn man das *Fränkel*sche Axiom[2]) hinzufügt) volle Geltung.

Wir wollen eigentlich den Satz: „Jede Ordnungszahl ist der Typus der Menge aller ihr vorangehenden Ordnungszahlen" zur Grundlage unserer Überlegungen machen. Damit aber der vage Begriff „Typus" vermieden werde, in dieser Form: „Jede Ordnungszahl ist die Menge der ihr vorangehenden Ordnungszahlen." Dies ist kein bewiesener Satz über Ordnungszahlen, es wäre vielmehr, wenn die transfinite Induktion schon begründet wäre, eine Definition derselben. Nach ihr wird (O ist die leere Menge, $(a, b, c, \ldots)$ die Menge mit den Elementen $a, b, c, \ldots$)

$$0 = O,$$
$$1 = (O),$$
$$2 = (O, (O)),$$
$$3 = (O, (O), (O, (O))),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\omega = (O, (O), (O, (O)), (O, (O), (O, (O))), \ldots\ldots),$$
$$\omega + 1 = (O, (O), (O, (O)), \ldots\ldots, (O, (O), (O, (O)) \ldots\ldots)),$$

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 定义9. 7. 5 自然数的性质
- 对任意的自然数 $m$ 和 $n$

$$m < n \Leftrightarrow m \subset n \Leftrightarrow n > m$$

$$m \leq n \Leftrightarrow m \subseteq n \Leftrightarrow n \geq m$$

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 定义9.7.6 集合的三歧性
  对集合$A$，如果对任意的集合$A_1 \in A$和 $A_2 \in A$，使

$$A_1 \in A_2,\quad A_1 = A_2,\quad A_2 \in A_1$$

三式中恰好有一个成立，就称集合$A$有三歧性。

# 9.7.4 无穷公理和自然数集合

- 定理9.7.11 自然数的三歧性
- 自然数集合$N$有三歧性。
- 每个自然数都有三歧性。即

$$(\forall m)(\forall n)(m \in N \wedge n \in N \rightarrow m < n \vee m = n \vee m > n)$$

## 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (9) 替换公理模式
  对于任意的谓词公式$P(x, y)$，如果对任意的 $x$ **存在唯一**的$y$使得$P(x, y)$为真，那么对所有的集合$t$ 就存在一个集合$s$，使 $s$中的元素 $y$恰好是 $t$中元素 $x$ 所对应的那些$y$。

$$(\forall x)(\exists ! y)P(x,y) \rightarrow (\forall t)(\exists s)(\forall u)(u \in s \leftrightarrow (\exists z)(z \in t \wedge P(z,u)))$$

- 其中$(\forall x)(\exists ! y)P(x,\ y)$表示$(\forall x)(\exists y)(P(x,\ y) \wedge (\forall z)(P(x,\ z) \rightarrow z = y))$
  符号 $\exists ! y$ 表示存在唯一的$y$。
- 替换公理是子集公理模式的二元推广。

# 9.7.1 ZF(Zermelo-Frankel)集合论公理系统(续)

- (10) 选择公理

  对任意的关系$R$，存在一个函数 $F$，$F$ 是 $R$ 的子集，而且 $F$ 和 $R$ 的定义域相等。

$$(\forall 关系R)(\exists 函数F)(F \subseteq R \wedge dom(R) = dom(F))$$

- 在第11章函数中还将详细介绍该公理。

# 集合的存在性

- 定理9.7.1 交集存在定理

  对任意的集合 $A$和 $B$，交集 $A \cap B$是集合。

- 定理9.7.2  差集存在定理

  对任意的集合 $A$和 $B$，差集 $A - B$是集合。

- 定理9.7.3 广义交存在定理

  对任意的非空集合 $A$，广义交$\cap A$是集合。

- 定理9.7.4 笛卡儿积存在定理

  对任意的集合 $A$和 $B$，笛卡儿积 $A\times B$是集合。

# 集合的重要性质

- 定理9.7.6 集合的重要性质1
  对任意的集合$A$，$A \notin A$。

- 定理9.7.7 集合的重要性质2
  对任意的集合 $A$和 $B$，有

$$\neg(A \in B \wedge B \in A)$$

# 第九章 主要内容

- 集合的谓词与图形表示法；
- 幂集、广义并与广义交、笛卡尔积的计算；
- 某些特殊集合（如传递集合）的概念；
- 集合的基本运算、主要证明方法；
- 有限集合的基数；
- 自然数在集合论中的表示（无穷公理）
- 集合论公理系统的一般了解

# 【第九章小结】

- 本章讨论了集合及其运算，它是后面四章的基础。
- 介绍了外延、内涵和图形等三种不同的表示方法；
- 基于文氏图的图形表示是帮助理解多个集合情形的直观形象的工具。

# 【第九章小结】（续2）

- 介绍了集合间的关系和特殊集合以及并、交、差、余、对称差、广义并、广义交，笛卡儿积等多种运算；
- 详细介绍了集合运算的性质（11个运算定律）和两种证明方法（谓词逻辑与集合恒等式）。
- 其中部分基本规则只能用谓词逻辑的方法来证明，而其它运算性质则可用两种方法加以证明

# 【第九章小结】（续3）

- 介绍了集合基数的概念和有限集合基数的计算方法。重点讨论了包含排斥原理及其应用方法；
- 介绍了集合论公理系统的基本思想，并简要介绍了ZF公理系统的10条集合论公理，从而提供了一种由满足存在性的少数集合构造所有合法集合的方法。

科学悖论是促进理论发展的一种动力。