大学物理B（1） HW3

2022.3.14.

3.1, 3.3, 3.13, 3.15, 3.22, 3.24.

3.1. 已知：

一小球在简谐运动，振幅A，角频率ω。拉动小球的弹簧劲度系数为k，

求：$t=0$ 到 $t=\frac{\pi}{2\omega}$ 内，弹力施予小球的冲量。

解：$F=-kx=\frac{dp}{dt}$

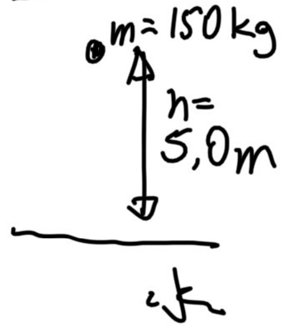
冲量 $I=\Delta p$

$$=\int_{p_1}^{p_2}dp=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}(-kx)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}-kA\cos\omega t\,dt$$

$$=-\frac{kA}{\omega}\sin\omega t\Big|_0^{\pi/2\omega}=-\frac{kA}{\omega}$$ #

3.3. 已知：



m 下水 0.30s 后，开始缓慢下沉

求：m 砸水力度。

解：

m 砸水之时，冲力F满足

$$F-mg=ma$$

$$\Rightarrow F=m(g+a)$$

$$=m\left(g+\frac{0-(-v)}{\Delta t}\right)$$

$$=m\left(g+\frac{\sqrt{2gh}}{\Delta t}\right)$$

$$=150\times\left(9.8+\frac{\sqrt{2\times9.8\times5}}{0.3}\right)$$

$$=6420\,N$$ #

3.13 求：太空静止的一组火箭，点火后，其质量的减少与初质量之比为多大时废气静止？

解：

设组合体的初速度为v_0，废气静止，即表示火箭运行速度的增量，应与喷出的速度相等。由火箭方程，

$$\Delta v = u \ln \frac{M_0}{M_1}$$，此时$\Delta v = u$

$$\Rightarrow \frac{M_0}{M_0 - \Delta m} = e,\quad 1 - \frac{\Delta m}{M_0} = \frac{1}{e},$$

$$\frac{\Delta m}{M_0} = 1 - \frac{1}{e} = 0.632$$ 共.

3.15 已知：

喷气式飞机：$v_0 = 210\,m/s$，发动机单位时间内吸入75kg空气，与3.0kg燃料燃烧后，相对飞机490 m/s向后喷出，求：发动机对飞机推力。

解：设u为向后喷气速度。设飞机质量、废气质量分别为M, m_0，则有

$$\dot{M}(t) = -3.0\ kg/s$$
$$\dot{m}(t) = 75\ kg/s.$$

$$p_i = M(t_0)\cdot v(t_0) + dm\cdot 0 = M(t_0)\cdot v(t_0)$$

$$p_f = M(t_1)\cdot v(t_1) + (dm - dM)(v-u)$$
$$= (M(t_0)+dM)\cdot(v(t_0)+dv) + (dm-dM)(v(t_0)-u).$$

$$p_i = p_f \Rightarrow \cancel{M(t_0)\,v(t_0)} = \cancel{M(t_0)\,v(t_0)} + M(t_0)\,dv + \cancel{dM\cdot v(t_0)} + dM\,dv + dm\cdot v(t_0) - dm\cdot u - \cancel{dM\,v(t_0)} + dM\cdot u$$

$dM\cdot dv$ 是高阶无穷小量，可略。

$$M(t_0)\frac{dv}{dt} + (v(t_0)-u)\frac{dm}{dt} + u\cdot\frac{dM}{dt} = 0$$

推力 $F = M(t_0)\frac{dv}{dt}$
$$= (490-210)\cdot 75 + 490\cdot 3$$
$$= 22500N$$ 共

3.22.

已知:

近地点高度: 205.5 km. (r_1-R)

远地点. : 35835.7 km (r_2-R)

近地点速度: 10.2 km/s

求:

(1). 远地点速率。

(2). 轨道运行周期.

解:

(1) 由于角动量守恒, 故有

$L=r_1\times p_1=r_2\times p_2$ 为定值

$\Rightarrow r_1\times mv_1=r_2\times mV_2$

$\Rightarrow v_2=\dfrac{r_1v_1}{r_2}$

$$=\frac{(6378+205.5)\times 10.2}{6378+35835.7}=1.59\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

(2). 由 Kepler 第二定律,

$\dfrac{dS}{dt}=\text{const.}$ ①.

而

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{v}{r}=\frac{1}{2}rv.$$

那么就有

$$T\cdot\frac{dS}{dt}=S=\pi ab.$$

$$\Rightarrow T=\frac{\pi ab}{\frac{dS}{dt}}$$

轨道半短轴长

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$
$$=\sqrt{a^2-(a-r_1)^2}$$
$$=\sqrt{(2a-r_1)(r_1)}=\sqrt{r_2r_1}$$

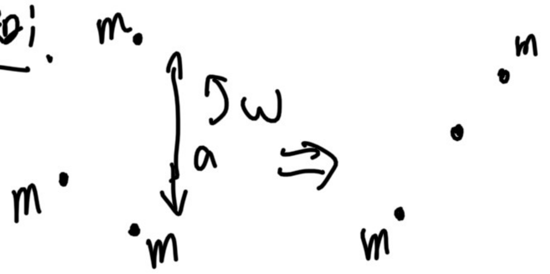
$$T=\frac{\frac{\pi}{2}(r_1+r_2)\cdot\sqrt{r_1r_2}}{\frac{1}{2}r_1v_1}$$

$$=\frac{\pi(r_1+r_2)}{v_1}\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$$

$=38057(s)\simeq 10.6(h)$ 实.

3.24、

已知：



求：1) 2) 碰前，3) 碰后

1). 三个质点的质心，及其速度。

2). 三个质点相对质心总角动量？碰后角动量

3). 系统绕质心转动的角速度？

解：

1).

定义原点在转动的两点的质心，

$\vec r_1 = \frac{1}{2}a\hat i$, $\vec r_2 = \vec r_3 = -\frac{1}{2}a\hat i$.

质心

$$\vec r_c = \frac{m(\frac{1}{2}a\hat i - \frac{1}{2}a\hat i - \frac{1}{2}a\hat i)}{3m} = -\frac{1}{6}a\hat i.$$

速度

$$\vec V_c = \frac{m\vec V + m(-\vec V) + m\cdot 0}{3m} = 0.$$

(2).

碰撞前，

总角动量 $\vec L_i$

$$= \sum \vec r \times \vec p.$$

$$= \frac{1}{2}a\hat i \times (m\vec V) + (-\frac{1}{2}a\hat i)\times(-m\vec V) + (-\frac{1}{2}a\hat i)\times\vec 0.$$

$$= a\hat i \times m\vec v = ma\hat i \times (\vec w \times \frac{1}{2}a\hat i)$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\vec w.$$

由角动量守恒 $\vec L_f = \vec L_i$

$$= \frac{1}{2}ma^2\vec w.$$

(3). $\vec L_i = \frac{1}{2}ma^2\vec w_i.$

$$= \vec L_f$$

$$= (\frac{1}{2}+\frac{1}{6})a\hat i \times [m\vec w_f \times (\frac{1}{2}+\frac{1}{6})a\hat i] + (-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})a\hat i \times [2m\vec w_f \times (-\frac{1}{2}+\frac{1}{6})a\hat i]$$

$$= \frac{2}{3}ma\hat i \times (\vec w_f \times \frac{2}{3}a\hat i) - \frac{2}{3}ma\hat i \times [\vec w_f \times (-\frac{1}{3}a\hat i)]$$

$$= \frac{4}{9}ma^2\vec w_f + \frac{2}{9}ma^2\vec w_f = \frac{2}{3}ma^2\vec w_f$$

故 $\frac{1}{2}ma^2\vec w_i = \frac{2}{3}ma^2\vec w_f \Rightarrow \vec w_f = \frac{3}{4}\vec w_i$ #.