# LINEAR ALGEBRA-FINAL EXAMINATION

**Question 1** (10pts=2+2+2+2+2)
Let $A$ and $B$ be two $n \times n$ matrices. Mark each statement below about $A$ and $B$ true or false, and justify your answer.

(1) If $A$ and $B$ are row equivalent, then $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.
(2) If $A$ and $B$ are row equivalent, then $\det(A) = \det(B)$.
(3) If $A$ and $B$ doesn't commute (i.e. $AB \neq BA$), then $\det(AB) \neq \det(BA)$.
(4) If $A$ and $B$ doesn't commute, then $A$ and $B$ can not be simultaneously diagonalized, i.e. there doesn't exist a new coordinate system with respect to which both $A$ and $B$ are diagonal.
(5) If $A$ and $B$ commute, then $A$ and $B$ can be simultaneously diagonalized.

**Question 2** (21pts=$3 \times 3 + 4 \times 3$).

(1) Determine which matrices below are diagonalizable over the real numbers, and explain briefly your answer.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, \qquad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (c) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) Determine the type (positive definite, negative definite, indefinite) of the quadratic form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ for the matrices $A$ below, and explain briefly your answer.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (b) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (c) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (d) \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**Question 3** (15pts=6+4+5)

(1) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculate $\det(A)$ and $\det(B)$.

(2) Let $A_n$ be the $n \times n$ matrix $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculate $\det(A_n)$.

(3) Let $B_n$ be the $n \times n$ matrix $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Show that $\det(B_n) = \det(B_{n-1}) + \det(A_{n-1})$ for $n \geq 2$ by row expansion or column expansion, and deduce $\det(B_n)$ from it.

**Question 4** (12pts=5+5+2)

Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) Diagonalize $A$ over the complex numbers.

(2) Find an invertible real matrix $P$ such that $A = P \begin{bmatrix} a & -b & \\ b & a & \\ & & c \end{bmatrix} P^{-1}$ with $a, b, c$ real.

(3) What kind of geometric property can we infer from (2) about the linear transformation $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ defined by $A$?

**Question 5** (20pts=4+7+5+4)

Let $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Calculate the length of $\mathbf{v}_i, i = 1, 2, 3$, and the angles between them.

(2) Apply the Gram-Schmidt process to get a $QR$-factorization of $A$.

(3) Let $W = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Calculate $\text{Proj}_W(\mathbf{v}_3)$ and the distance from $\mathbf{v}_3$ to $W$.

(4) Let $P$ be the parallelogram spanned by $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$, let $\Sigma$ be the parallelepiped spanned by $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Calculate the area of $P$ and the volume of $\Sigma$.

**Question 6** (22pts=5+6+5+6)

Let $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Find an orthogonal diagonalization of $B = A^t A$.

(2) Deduce from (1) a singular value decomposition of $A$.

(3) Consider the quadratic form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{x}$. Make an orthogonal change of variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ such that $Q(\mathbf{y})$ has no cross-product term. Let $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid Q(\mathbf{x}) \leq 1\}$, calculate the area of $S$.

(4) Calculate the extreme values

$$M = \max\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \quad \text{and} \quad m = \min\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

and find out the vectors $\mathbf{x}$ for which the extreme values are attained.

**Question 7** (Bonus, 25pts=5+10+10)

(1) Let $A$ be an $m \times n$ matrix, consider the quadratic form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x}$. Show that $Q(\mathbf{x})$ is positive definite if and only if $A$ has linearly independent columns.

(2) Let $A$ be an $n \times n$ matrix. Show that the extreme value problems

$$M_1 = \max\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \quad \text{and} \quad M_2 = \max\{\|A^t A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

attains the maximum for the same vector $\mathbf{x}$, and that the maximum satisfies $M_2 = M_1^2$.

(3) Let $A$ be an $n \times n$ matrix. Show that $A^t A$ must be similar to $AA^t$.

## 线性代数–期末考试

**问题 1** （10 分 =2+2+2+2+2）

令 $A$ 和 $B$ 为两个 $n \times n$ 矩阵。判断下列断言是否正确，并简要清晰地解释为什么。

(1) 如果 $A$ 和 $B$ 行等价，那么 $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$。

(2) 如果 $A$ 和 $B$ 行等价，那么 $\det(A) = \det(B)$。

(3) 如果 $A$ 和 $B$ 不交换（即 $AB \neq BA$），那么 $\det(AB) \neq \det(BA)$。

(4) 如果 $A$ 和 $B$ 不交换，那么 $A$ 和 $B$ 不能被同时对角化，即不存在一个新的坐标系使得 $A$ 和 $B$ 在此坐标系下均为对角矩阵。

(5) 如果 $A$ 和 $B$ 交换，那么 $A$ 和 $B$ 可以被同时对角化。

**问题 2** (21 分 $=3 \times 3 + 4 \times 3$).

(1) 判断以下哪个矩阵在实数范围内可以对角化，并简要解释你的回答。

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (c)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 判断二次型 $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}$ 的类型（正定、负定、不定），$A$ 为以下矩阵，并简要解释你的回答。

$$(a)\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad (b)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (c)\ \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (d)\ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

**问题 3** (15 分 =6+4+5)

(1) 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{bmatrix}$，计算 $\det(A)$ 和 $\det(B)$。

(2) 令 $A_n$ 为 $n \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$，计算 $\det(A_n)$。

(3) 令 $B_n$ 为 $n \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$。利用行列式按行或按列展开的性质，证明对 $n \geq 2$ 递推关系 $\det(B_n) = \det(B_{n-1}) + \det(A_{n-1})$ 成立，并由此得到 $\det(B_n)$ 的值。

**问题 4** (12 分 =5+5+2)

令 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 在复数范围内，对 $A$ 作对角化。

(2) 找到一个可逆的实矩阵 $P$ 使得 $A = P \begin{bmatrix} a & -b & \\ b & a & \\ & & c \end{bmatrix} P^{-1}$，其中 $a, b, c$ 为实数。

(3) 从 (2) 中我们可以得到由 $A$ 定义的线性映射 $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ 的什么几何性质？

**问题 5** (20 分 =4+7+5+4)

令 $A = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 计算 $\mathbf{v}_i$ 的长度，$i = 1, 2, 3$，并计算它们之间的夹角。

(2) 使用 Gram-Schmidt 过程，计算 $A$ 的 $QR$-分解。

(3) 令 $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$，计算 $\mathrm{Proj}_W(\mathbf{v}_3)$ 以及 $\mathbf{v}_3$ 到 $W$ 的距离。

(4) 令 $P$ 为 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 张成的平行四边形，令 $\Sigma$ 为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 张成的平行六面体，计算 $P$ 的面积和 $\Sigma$ 的体积。

**问题 6** (22 分 =5+6+5+6)

令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$。

(1) 计算矩阵 $B = A^t A$ 的正交对角化。

(2) 利用 (1) 的结果，得到 $A$ 的一个奇异值分解。

(3) 考虑二次型 $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{x}$。找到一个正交变量替换 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ 使得 $Q(\mathbf{y})$ 没有交叉项。令 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2 \mid Q(\mathbf{x}) \le 1\}$，计算 $S$ 的面积。

(4) 计算极大值和极小值

$$M = \max\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \qquad m = \min\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\},$$

并找到达到极大值和极小值的向量 $\mathbf{x}$。

**问题 7** (加分题，25 分 =5+10+10)

(1) 令 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵，考虑二次型 $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A^t A \mathbf{x}$。证明 $Q(\mathbf{x})$ 是正定的当且仅当 $A$ 的列向量线性无关。

(2) 令 $A$ 为 $n \times n$ 矩阵。证明极值问题

$$M_1 = \max\{\|A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}, \qquad M_2 = \max\{\|A^t A\mathbf{x}\| \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

在同一个向量 $\mathbf{x}$ 处达到极大，并且极大值满足 $M_2 = M_1^2$。

(3) 令 $A$ 为 $n \times n$ 矩阵，证明 $A^t A$ 一定和 $AA^t$ 相似。