主观题 1分

设置

对课程内容和作业有什么疑问吗？欢迎投稿或弹幕！

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

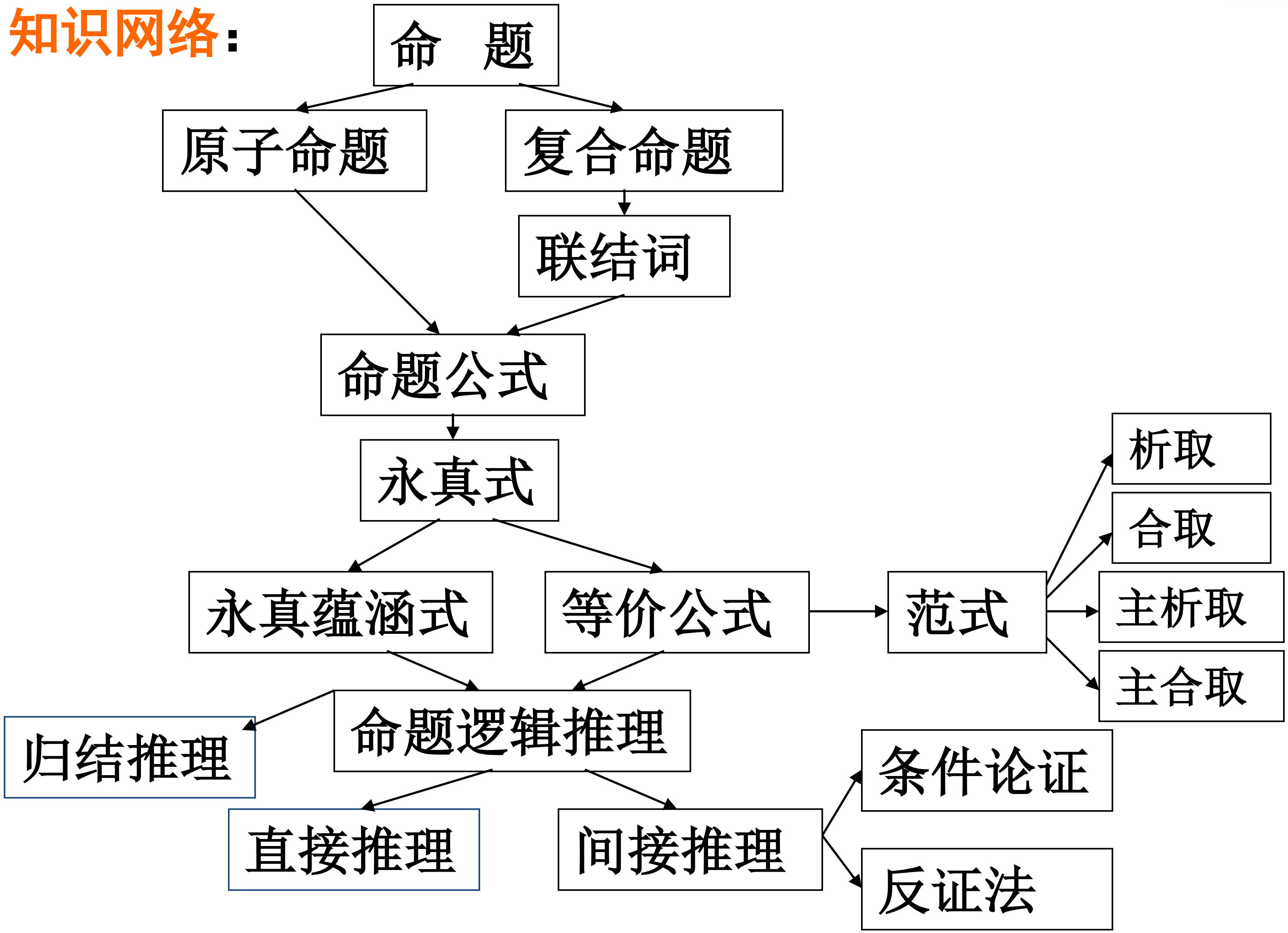
作答

第二章小结:主要内容

2.1 等值定理
2.2 等值公式
2.3 命题公式与真值表的关系
2.4 联接词的完备集
2.5 对偶式
2.6 范式
2.7 推理形式
2.8 基本的推理公式
2.9 推理演算
2.10 归结推理法
补充：应用举例

第一章和第二章　小结

知识网络：



第二章小结

- 对偶式
  - 定义：$\boldsymbol{A}$中出现的$\vee$, $\wedge$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{F}$ 分别以$\wedge$, $\vee$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{T}$ 代换
  - 6个定理
- 范式
  - 析取范式，合取范式
  - 极小项，主析取范式，极大项，主合取范式
  - 主范式的4个用途

回顾：范式

2.6.4　析取范式

析取范式是形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i=1,\ldots,n)$为合取式。

2.6.5　合取范式

合取范式是形如

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

的公式，其中$A_i\,(i=1,\ldots,n)$为析取式。

任一命题公式都存在与之等值的合取范式和析取范式。但命题公式的合取范式和析取范式并不唯一。

第二章小结

- 推理形式
  - 自然语句描述的推理关系 – 引入符号，抽象化并以条件式表示出来
  - 重言蕴涵
  - 重言蕴涵的5个结果
- 基本推理公式
  - 16个？

$P \wedge Q \Rightarrow P$ $P \Rightarrow P \vee Q$

$P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$ （假言推理）

$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$ (三段论)

2.7.3 重言蕴含几个结果

(1) 如果$A \Rightarrow B$成立，若A为重言式，则B也是重言式。

(2) 若 $A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow A$同时成立，必有$A=B$; 反之亦然。

(3) 若$A \Rightarrow B$且$B \Rightarrow C$同时成立，则有$A \Rightarrow C$

(4) 若 $A \Rightarrow B$且$A \Rightarrow C$同时成立，则$A \Rightarrow B \wedge C$

(5) 若$A \Rightarrow C$且$B \Rightarrow C$同时成立，则$A \vee B \Rightarrow C$

注意：$A \Rightarrow B$ 中 A自身不能必假！

若A永假， 则$A \rightarrow B$ 肯定永真，虽然$A \Rightarrow B$ 也成立，但已失去意义！

公式13

证明： $(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R) \Rightarrow Q\vee S$

$$(P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(P\vee R)$$

$$= (P\rightarrow Q)\wedge(R\rightarrow S)\wedge(\neg P\rightarrow R)$$

$$\Rightarrow (P\rightarrow Q)\wedge(\neg P\rightarrow S)$$

$$= (\neg Q\rightarrow \neg P)\wedge(\neg P\rightarrow S)$$

$$\Rightarrow \neg Q\rightarrow S$$

$$= Q\vee S$$

推理演算

- <u>主要的推理规则</u>

（1）前提引入规则；*推理过程中可随时引入前提*

（2）结论引入规则；*中间结论可作为后续推理的前提*

（3）代入规则；*仅限于重言式中的命题变项*

（4） 置换规则；*利用等值公式对部分公式进行置换*

（5）分离规则；*由A及A→B成立，可将B分离出来*

（6） 条件证明规则。$A_1 \wedge A_2 \Rightarrow B$ 与 $A_1 \Rightarrow A_2 \rightarrow B$ *等价*

推理演算举例：条件证明规则

例题6: $P\rightarrow(Q\rightarrow S), \neg R\vee P, Q \Rightarrow R\rightarrow S$

证明		
	(1) R	**附加前提**引入
	(2) $\neg R\vee P$	前提引入
	(3) P	(1)(2)分离规则
	(4) $P\rightarrow(Q\rightarrow S)$	前提引入
	(5) $Q\rightarrow S$	(3)(4)分离规则
	(6) Q	前提引入
	(7) S	(5)(6)分离规则
	(8) $R\rightarrow S$	条件证明规则

例

- 如果我学习，那么我数学不会不及格。如果我不热衷于玩游戏，那么我将学习。但是我数学不及格。因此，我热衷于玩游戏。
- 解：设 P：我学习。

  Q：我数学及格。

  R：我热衷于玩游戏。
- 于是符号化为：

$P \rightarrow Q$，$\neg R \rightarrow P$，$\neg Q \Rightarrow R$

$$P \to Q,\ \neg R \to P,\ \neg Q \Rightarrow R$$

(1) $P \to Q$	
(2) $\neg R \to P$	
(3) $\neg R \to Q$	(1)(2)三段论
(4) $\neg Q \to R$	置换
(5) $\neg Q$	前提引入
(6) R	(4)(5)分离

2.8 基本的推理公式

证明 $A \Rightarrow B$ 的几种方法:

1. 证 $A \rightarrow B$ 是重言式
2. 证 $A \wedge \neg B$ 为矛盾式
3. 真值表法
4. 证 $\neg B \Rightarrow \neg A$ 即反证法
5. 解释法
6. ……

哪种方法适合计算机做推理?

2.10 归结法

- 出发点：
  基于推理规则的方法，规则与公式较多，技巧较高。
  能否仅建立一条推理规则，便于机器证明与程序实现。

- 理论依据：**定理2.8.2**

  $A \Rightarrow B$ 成立当且仅当 $A \wedge \neg B$ 是矛盾式。

- $(P \to Q) \wedge P \Rightarrow Q$ 成立当且仅当 $(P \to Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 是矛盾式

- （ 合取 ）范式

- $(\neg P \vee Q) \wedge P \wedge \neg Q$ 是矛盾式

互补对？

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg R)$

$(P \rightarrow Q) \wedge (\neg R \rightarrow P)$

$\neg R \rightarrow Q$

$R \vee Q$

2.10 归结法

$(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

$\Downarrow$

$Q \wedge R$

- 归结法推理规则

设　子句1　　$C1 = L \vee C1'$

子句2　　$C2 = \neg L \vee C2'$

(其中L和¬L为互补对)

$C1 = \neg L \rightarrow C1'$

$C2 = \neg C2' \rightarrow \neg L$　　因而

新子句(归结式)　$R(C1，C2) = C1' \vee C2'$

(去掉互补对的新子句)

2. 10 归结法

$C1 = L \vee C1'$
$C2 = \neg L \vee C2'$

- 归结法推理规则 (续)

需证明$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$。

$C1 \wedge C2 \rightarrow C1' \vee C2'$为永真式 （定理2.8.1）
证明: 设在任一解释下，C1和C2均为真
若$L = T$，则$\neg L = F$，从而必有$C2' = T$ （∵C2为真）
若$L = F$，则$\neg L = T$，从而必有$C1' = T$ （因为C1为真）
综合上述均有$C1' \vee C2'$为真
因此，$C1 \wedge C2 \Rightarrow R(C1，C2)$
归结的过程就是逐步去掉互补对

归结推理

$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots\ldots \wedge C_n$

$C_i = L \vee C_i'$ $C_j = \neg L \vee C_j'$

$C_i \wedge C_j \rightarrow C_i' \vee C_j'$

……

$P \wedge \neg P$

矛盾式

$C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots\ldots \wedge C_n$为矛盾式

2.10 归结法

- 归结法步骤：

1. 从$A\wedge\neg B$ 出发（欲证$A \Rightarrow B$，等价于证 $A\wedge\neg B$ 是矛盾式）

2. 建立子句集S，将$A\wedge\neg B$ 化成**合取**范式：

$$C_1\wedge C_2\wedge\ldots\wedge C_n$$

其中C_i 为析取式。由诸C_i 构成子句集

$$S = \{ C_1, C_2, \ldots, C_n \}$$

$C1 \wedge C2 => R(C1, C2)$

重言蕴含

3. 对S 中的子句作归结（消互补对），归结结果（归结式）仍放入S 中。重复此步。

4. 直至归结出矛盾式（□）。

例：请根据下面事实，找出凶手：

1. 清洁工或者秘书谋害了经理。
2. 如果清洁工谋害了经理，则谋害不会发生在午夜前。
3. 如果秘书的证词是正确的，则谋害发生在午夜前。
4. 如果秘书的证词不正确，则午夜时屋里灯光未灭。
5. 如果清洁工富裕，则他不会谋害经理。
6. 经理有钱且清洁工不富裕。
7. 午夜时屋里灯灭了。

令 A:清洁工谋害了经理。 B:秘书谋害了经理。

C:谋害发生在午夜前。 D:秘书的证词是正确的.

E:午夜时屋里灯光灭了。H:清洁工富裕.

G:经理有钱.

命题符号为:

$A \vee B,\ A \to \neg C,\ D \to C,\ \neg D \to \neg E,\ H \to \neg A,\ G \wedge \neg H,\ E$

$\Rightarrow ?$

$A \vee B, A \to \neg C, B \to C, D \to C, \neg D \to \neg E, H \to \neg A, G \wedge \neg H, E \Rightarrow ?$

解：

(1)	E	前提引入
(2)	$\neg D \to \neg E$	前提引入
(3)	D	(1)(2)归结
(4)	$D \to C$	
(5)	C	
(6)	$A \to \neg C$	前提引入
(7)	$\neg A$	(5)(6)归结
(8)	$A \vee B \ (\neg A \to B)$	前提引入
(9)	B	(7)(8)分离

结果是秘书谋害了经理

2.10 归结法 证明举例

补充：推理规则应用题，构造下面推理的证明：

例1：如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。

或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。

A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

因此，小李没向B队投球。

如果小张守第一垒并且小李向B队投球，则A队将获胜。
或者A队未取胜，或者A队成为联赛第一名。
A队没有成为联赛第一名。小张守第一垒。

解：先将简单命题符号化。

P：小张守第一垒；

Q：小李向B队投球；

R：A队取胜；

S：A队成为联赛第一名。

前提：$(P \wedge Q) \rightarrow R$，$\neg R \vee S$，$\neg S$，$P$

结论：$\neg Q$

前提： $(P\wedge Q)\rightarrow R$， $\neg R\vee S$， $\neg S$， P

结论：$\neg Q$

证明：

(1) Q	结论的否定引入
(2) $\neg R\vee S$	前提引入
(3) $\neg S$	前提引入
(4) $\neg R$	(2) (3)归结
(5) $(P\wedge Q)\rightarrow R$	前提引入
(6) $\neg(P\wedge Q)$	(4) (5)归结
(7) $\neg P\vee\neg Q$	(6)置换
(8) P	前提引入
(9) $\neg Q$	(7)(8)归结
(10) $Q\wedge\neg Q$	(1)(9)合取

Discrete Mathematics

离散数学(1)

第三章 命题逻辑的公理化

马昱春

清華大學
Tsinghua University

教材如是说……

前两章是对命题逻辑从语义出发做了较直观的、**不严谨地、非形式化**的解释性地讨论。

而建立了公理系统的命题逻辑，面貌就改观了，从理论上提高了一步，使对命题逻辑讨论有了坚实的基础。

第三章主要内容

- 本章介绍**命题逻辑的公理化**，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容概括如下：
- 介绍命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍一个命题逻辑公理系统的构成。
- 通过定理推演的实例，给出使用公理系统进行定理证明的过程和方法。
- 此外，对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做简要的叙述。

问题1：
为什么要建立或引入命题逻辑的公理系统


With my friend Moore, I sought enlightenment at the feet of the latest fashionable Hegelian.
THE TRANSITION FROM THE CATEGORY OF CONTRADICTION SHOWS THAT THE EXCLUSIVE REFLECTION OF THE STABLE OPPOSITION MAKES IT A NEGATIVE, AND THUS THE REFLECTION DEGRADES ITS PREVIOUS STABLE OF DETERMINATIONS TO THE LEVEL OF BEING ONLY DETERMINATIONS. AND SINCE THE POSITION HAS BEEN MADE POSITION, IT HAS GONE BACK TO UNITY WITH ITSELF.
OH DEAR!
Moore understood me.
THEY CALL THIS TRASH PHILOSOPHY? I WANT TO FIND MY WAY TO REALITY, MAN! I WANT A METHOD TO ACQUIRE CERTAIN KNOWLEDGE!
WELL, HEGEL IS OBVIOUSLY NOT YOUR MAN!
...BUT WHO IS?
IF ONLY PHILOSOPHY HAD A EUCLID!
YOUR BOWLER IS READY, SIR!


SOMEONE TO GIVE IT STRONG FOUNDATIONS AND A LOGICALLY PRECISE LANGUAGE!
THAT'S EXACTLY WHAT LEIBNIZ DID...
...WITH HIS "CALCULUS RATIOCINATOR"!
"RATIOCINATOR"?
YES! A WAY TO MAKE THINKING AS CLEAR AS GEOMETRY!
SO CLEAR THAT WHEN A DISAGREEMENT ARISES, WE JUST HAVE TO SAY...
ZDRONK
DRRRRRR
CLUNK
"CALCULEMUS!"
"...LET US CALCULATE."
BUT FOR THAT TO HAPPEN, LOGIC WOULD HAVE TO BECOME AN EXACT SCIENCE!
THE STRUGGLE HAS JUST BEGUN...


WHAT LEIBNIZ DREAMT OF WITH THE "CALCULUS RATIOCINATOR", GEORGE BOOLE CONTINUED WITH HIS "LAWS".
?
PERHAPS YOU'D LIKE TO TRY IT ON, SIR?
WHY DON'T I KNOW THIS?
BECAUSE PHILOSOPHERS THINK IT'S MATHEMATICS AND MATHEMATICIANS PHILOSOPHY!
LOOK...
!
My first meeting with Euclid had planted a seed...
THE ATOMS OF LOGIC ARE THE PROPOSITIONS.
...But hearing about Leibniz's dream was the actual calling.
WHICH WE COMBINE THROUGH CERTAIN LAWS.
After that day I knew: I was a...
...LOGICIAN!
AHA... AND NOW THE PLOT THICKENS!

问题1：为什么要建立或引入命题逻辑的公理系统

- 重言式——命题逻辑研
- 重要的重言式是逻辑规
- 如何掌握这些逻辑规律，以便从整体上理解和掌握命题逻辑，而不仅仅停留在对部分公式所作的直观解释性的讨论上。
- 需要系统、全面、严谨地研究等值式和推理式
- 需要掌握重言式所揭示的逻辑规律的全体，将它们作为一个整体来考虑。

问题2：
什么叫做公理系统?

3.1 公理系统(axiom system)的结构

公理系统的概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（**axiom system**）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

t my espair id not last. or finally net a man efreshingly gorous his pproach.
TO ACHIEVE ANY KIND OF CERTAINTY IN MATHEMATICS WE MUST RE-EXAMINE ITS BASIC ASSUMPTIONS, WE MUST BEGIN AT THE BEGINNING.
PROPOSITION XV. If $x \neq y$, then $y \neq x$.
PROPOSITION XVI. If $z \neq xy$, then $z \neq x$, $z \neq y$, $z \neq x+y$.
PROPOSITION XVII. If $z \neq xy$, then $\bar{x}\bar{y} \neq \bar{z}$, $\bar{x}+\bar{y} \neq \bar{z}$.
PROPOSITION XVIII. If $z \neq x+y$, then $z \neq x$, $z \neq y$, $z \neq xy$.
PROPOSITION XIX. If $z \neq x+y$, then $\bar{x}\bar{y} \neq \bar{z}$, $\bar{x}+\bar{y} \neq \bar{z}$.
PROPOSITION XX. If $xz \neq y$, and $x \neq y+z$, then $x \neq y$.
HEAR, HEAR!
lfred Whitehead, und a strong and dred spirit.
...A mentor.
OH, THERE ARE PEOPLE WHO CAN SEE THE SITUATI CLEARLY, RUSSELL BUT ALL OF THEM ARE, ALAS, ON THE CONTINENT.
IF WE UNITE THE HEALTHY PARTS OF MATHEMATICS AND THE CONCEPTUAL SOPHISTICATION OF THE NEW LOGIC, WE CAN LAUNCH A POWERFUL ATTACK.
"NEW"? LOGIC HAS NOT ADVANCED ONE BIT AFTER BOOLE!
SURE, IT HAS COME A CERTAIN WAY SINCE OLD ARISTOTLE...
BUT IS IT STRONG ENOUGH YET TO DEAL WITH MATHEMATICS?
THERE IS AN OLD GERMAN SAYING: "IF YOU WANT TO LEARN SOMETHING, GO ON A JOURNEY!"
It was Whitehead, more than anyone else, who helped we see beyond the provincialism of the English mathematical establis

五条几何公理

1.过相异两点，能作且只能作一直线（直线公理）。

2.线段(有限直线)可以任意地延长。

3.以任一点为圆心、任意长为半径，可作一圆(圆公理)。

4.凡是直角都相等(角公理)。

5.两直线被第三条直线所截，如果同侧两内角和小于两个直角， 则两直线作会在该侧相交。

五条一般公理

（a,b,c,d 皆为正数）

1.跟同一个量相等的两个量相等；即若 a=c 且 b=c，则 a = b（等量代换公理）。

2.等量加等量，其和相等；即若 a=b 且 c=d，则 a+c = b+d（等量加法公理）。

3.等量减等量，其差相等；即若 a=b 且 c=d，则 a-c = b-d（等量减法公理）。

4.完全叠合的两个图形是全等的（移形叠合公理）。

5.全量大於分量，即 a+b>a（全量大於分量公理）。

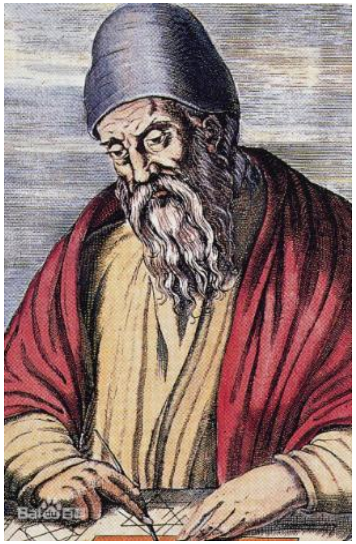
译者序 ……………………… (1)
导读 ……………………… (1)

第Ⅰ卷 几何基础 / 1

定义 ……………………… (2)
公设 ……………………… (4)
公理 ……………………… (4)
命题Ⅰ.1 ……………………… (5)
命题Ⅰ.2 ……………………… (7)
命题Ⅰ.3 ……………………… (8)
命题Ⅰ.4 ……………………… (9)
命题Ⅰ.5 ……………………… (10)
命题Ⅰ.6 ……………………… (12)
命题Ⅰ.7 ……………………… (13)
命题Ⅰ.8 ……………………… (14
命题Ⅰ.9 ……………………… (15)
命题Ⅰ.10 ……………………… (17)
命题Ⅰ.11 ……………………… (18)
命题Ⅰ.12 ……………………… (19)
命题Ⅰ.13 ……………………… (19)
命题Ⅰ.14 ……………………… (20)
命题Ⅰ.15 ……………………… (21)
命题Ⅰ.16 ……………………… (22)
命题Ⅰ.17 ……………………… (24)
命题Ⅰ.18 ……………………… (25)
命题Ⅰ.19 ……………………… (26)
命题Ⅰ.20 ……………………… (27)
命题Ⅰ.21 ……………………… (28)
命题Ⅰ.22 ……………………… (29)
命题Ⅰ.23 ……………………… (30)
命题Ⅰ.24 ……………………… (31)
命题Ⅰ.25 ……………………… (32)
命题Ⅰ.26 ……………………… (33)
命题Ⅰ.27 ……………………… (35)
命题Ⅰ.28 ……………………… (36)
命题Ⅰ.29 ……………………… (37)
命题Ⅰ.30 ……………………… (38)
命题Ⅰ.31 ……………………… (39)
命题Ⅰ.32 ……………………… (40)
命题Ⅰ.33 ……………………… (41)
命题Ⅰ.34 ……………………… (42)
命题Ⅰ.35 ……………………… (43)
命题Ⅰ.36 ……………………… (44)
命题Ⅰ.37 ……………………… (45)
命题Ⅰ.38 ……………………… (46)
命题Ⅰ.39 ……………………… (47)

公理系统的例子——Euclid几何学

- Euclid几何学就是一个典型的公理系统。
  - 公元前300年欧几里得的《几何原本》
  - 希尔伯特1899年发表的著作《几何基础》
- Euclid平面几何学的公理体系由五条公设和五组公理构成。
- 公理是在任何数学学科里都适用的不需要证明的基本原理
- 公设则是几何学里的不需要证明的基本原理，就是现代几何学里的公理。
- 利用10条公理配合优多诸斯检定法则、反证法（归谬法）与尺规作图，推导出所有的几何定理，这是逻辑的证明过程。



英文：Euclid；希腊文：Ευκλειδης，
公元前330年—公元前275年

Euclid alone has looked at beauty bare.

E.S.V. Millay, 1892～1950

定义

公理或运动的定律

第一卷 论物体的运动

第一章 论用于此后证明的最初比和最终比方法

第二章 论求向心

第三章 论物体在偏心的圆锥截线上的运动

第四章 论由给定的焦点，求椭圆形、抛物线形和双曲线形轨道

第五章 论当焦点未被给定时求轨道

第六章 论在给定的轨道上求运动

第七章 论物体的直线上升和下降

第八章 论求轨道，物体在任意种类的向心力推动下在其上运行

第九章 论物体在运动着的轨道上的运动及拱点的运动

第十章 论物体在给定表面上的运动及摆的往复运动

第十一章 论以向心力互相趋向的物体的运动

命题逻辑的公理系统

- 命题演算的重言式可组成一个严谨的公理系统，它是从一些作为初始命题的重言式（公理）出发，应用明确规定的推理规则，进而推导出一系列重言式（定理）的演绎体系。
- 命题逻辑的公理系统是一个抽象符号系统，不再涉及到真值。

问题3：

公理系统是怎样构成的?

主要包括哪几部分?

形式主义学派

- 在非欧几何产生之后，在数学和数学哲学研究中弥漫的“重建数学基础”的气氛
- 希尔伯特计划
  - 是一个关於公理系统相容性的严谨证明的一项计划；
  - 为全部的数学提供一个安全的理论基础
- 要研究证明的形式，其实有三大要素：

1. 证明使用的语言：【形式语言】
2. 证明的基本格式：【推理规则】
3. 证明所采用的公理集合

- 具备这三大要素的体系，称作【形式系统】。

公理系统的结构

1. 初始符号

公理系统内允许出现的全体符号的集合。

2. 形成规则

公理系统内允许出现的合法符号序列的形成方法与规则

3. 公理

精选的最基本的重言式，作为推演其它所有重言式的依据。

4. 变形规则

公理系统所规定的推理规则。

5. 建立定理

所有的重言式和对它们的证明。

类比：语言结构“公理系统”

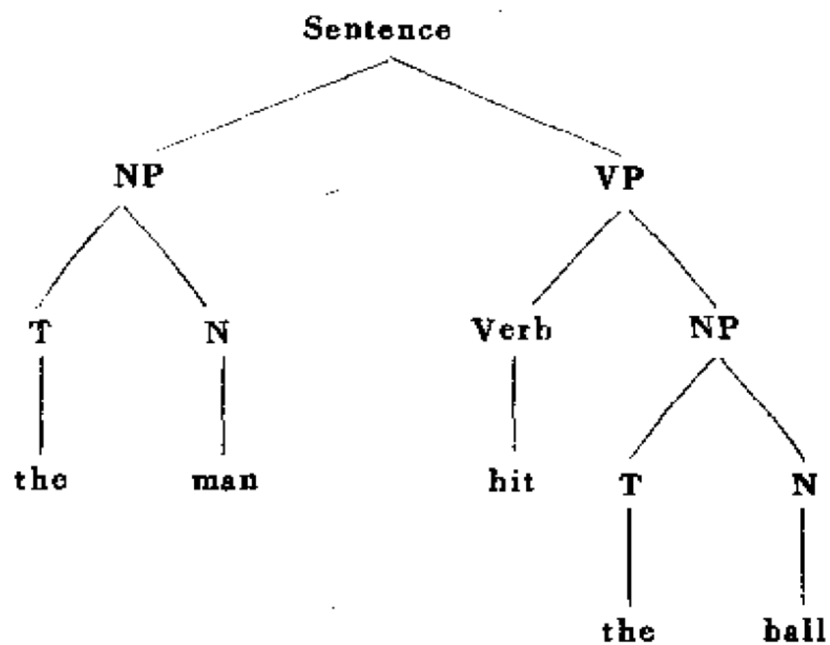
诺姆·乔姆斯基《句法结构》

1. 初始符号

英文单词和标点符号。

2. 形成规则

生成符合语法的句子。



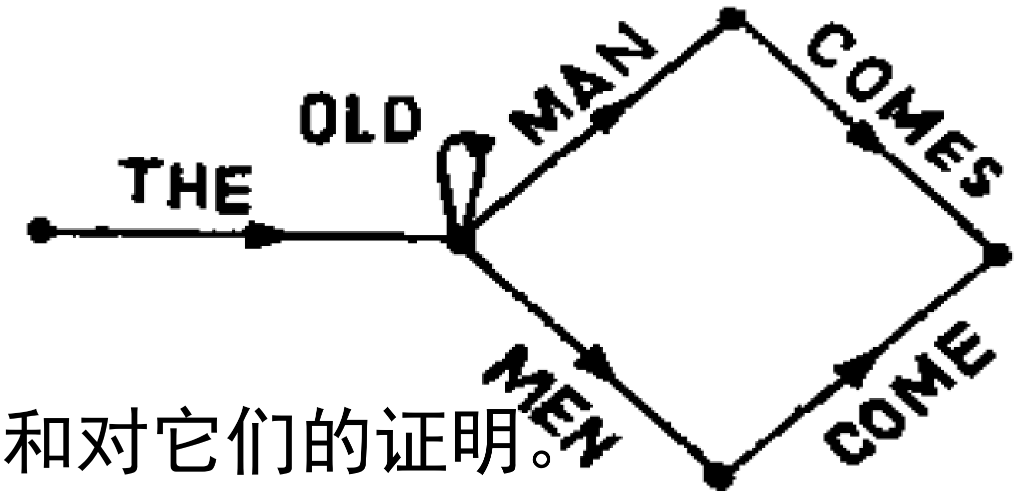
3. 公理

精选的最基本的句子类型，作为推演其它所有复杂句子的依据：陈述句、疑问句、祈使句、感叹句

类比：语言结构“公理系统”

4. 变形规则

公理系统所规定的推理规则。



5. 建立定理

所有合法的句子和对它们的证明。

3.2 命题逻辑的公理系统

罗素(Russell)公理系统

1. 初始符号

   A, B, C, ...

（大写英文字母,表示命题）

¬, ∨（表示联结词）

( )（圆括号）

⊢（断言符），

写在公式前,

如⊢*A*表示*A*是所要肯定的，或说*A*是永真式。

由Frege最先引入。

罗素(Russell)公理系统

2. 形成规则

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如A, B, C...）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

罗素(Russell)公理系统

3，定义

(1) $(A \to B)$ 定义为 $(\neg A \vee B)$。

(2) $(A \wedge B)$ 定义为$\neg(\neg A \vee \neg B)$。

(3) $(A \leftrightarrow B)$定义为$((A \to B) \wedge (B \to A))$ 。

罗素(Russell)公理系统

4. 公理

公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律）

公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$ (类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

罗素(Russell)公理系统

5. 变形(推理)规则

- **代入规则**

　　如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash A\frac{\pi}{B}$（将合式公式$\boldsymbol{A}$中出现的符号π 处处都代以合式公式$\boldsymbol{B}$）。

- **分离规则**

　　如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，$\vdash \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。

- **置换规则**

　　定义的左右两边可互相替换。设公式$\boldsymbol{A}$，替换后为$\boldsymbol{B}$，则如果 $\vdash \boldsymbol{A}$，那么 $\vdash \boldsymbol{B}$。

罗素(Russell)公理系统

6. 定理的推演

定理的证明必须依据公理或已证明的定理，同时证明的过程（符号的变换过程）必须依据变形规则。

定理推演举例

4、公理

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律）

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3.2.1

定理3.2.1 $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$

证明：

(1) $\vdash(Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R))$ 公理4

(2) $\vdash(Q\to R)\to((\neg P\vee Q)\to(\neg P\vee R))$ (1)代入$\frac{P}{\neg P}$

(3) $\vdash(Q\to R)\to((P\to Q)\to(P\to R))$ 定义(1)

证毕

3、定义

(1) $(A\to B)$ 定义为 $(\neg A\vee B)$。

(2) $(A\wedge B)$ 定义为 $\neg(\neg A\vee\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$ 定义为 $((A\to B)\wedge(B\to A))$

三段论原则

4、公理

公理1 $\vdash((P\vee P)\rightarrow P)$（重言律）

公理2 $\vdash(P\rightarrow(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\rightarrow(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\rightarrow R)\rightarrow((P\vee Q)\rightarrow(P\vee R)))$

定理3.2.2

定理3.2.2 $\vdash P\rightarrow P$

证明：

(1) $\vdash P\rightarrow P\vee Q$	公理2
(2) $\vdash P\rightarrow P\vee P$	(1)代入$\frac{Q}{P}$
(3) $\vdash P\vee P\rightarrow P$	公理1
(4) $\vdash(Q\rightarrow R)\rightarrow((P\rightarrow Q)\rightarrow(P\rightarrow R))$	定理3.2.1
(5) $\vdash(P\vee P\rightarrow P)\rightarrow((P\rightarrow P\vee P)\rightarrow(P\rightarrow P))$	(4)代入$\frac{Q}{P\vee P}$，$\frac{R}{P}$
(6) $\vdash(P\rightarrow P\vee P)\rightarrow(P\rightarrow P)$	(3), (5)分离
(7) $\vdash P\rightarrow P$	(2), (6)分离

证毕

定理3. 2. 3

定理3.2.3 $\vdash \neg P \vee P$

证明：

(1) $\vdash P \rightarrow P$ 定理3.2.2

(2) $\vdash \neg P \vee P$ (1) 定义1

证毕

4、公理

公理1 $\vdash((P\vee P)\to P)$（重言律）

公理2 $\vdash(P\to(P\vee Q))$

（∨引入律，类似第2章中的基本推理公式4）

公理3 $\vdash((P\vee Q)\to(Q\vee P))$（类似析取交换律）

公理4 $\vdash((Q\to R)\to((P\vee Q)\to(P\vee R)))$

定理3. 2. 4

定理3.2.3 $\vdash\neg P\vee P$

定理3.2.4 $\vdash P\vee\neg P$

证明：

(1) $\vdash(P\vee Q)\to(Q\vee P)$ 公理3

(2) $\vdash(\neg P\vee P)\to(P\vee\neg P)$ (1) 代入$\frac{P}{\neg P},\frac{Q}{P}$

(3) $\vdash\neg P\vee P$ 定理3.2.3

(4) $\vdash P\vee\neg P$ (2) (3) 分离

证毕

定理3.2.5

定理3.2.5 $\vdash P \to \neg\neg P$

证明：

(1) $\vdash P \vee \neg P$ 定理3.2.4

(2) $\vdash \neg P \vee \neg\neg P$ (1) 代入$\dfrac{\neg P}{P}$

(3) $\vdash P \to \neg\neg P$ (2) 定义1

证毕

补充定理3.2.8： $\vdash P\to(Q\to(P\land Q))$

证：

（1） $\vdash P\lor\neg P$　　定理3.2.4

（2） $\vdash(\neg P\lor\neg Q)\lor\neg(\neg P\lor\neg Q)$　　(1)代入$\dfrac{P}{\neg P\lor\neg Q}$

（3） $\vdash(\neg P\lor\neg Q)\lor(P\land Q)$　　(2) 定义2

（4） $\vdash\neg P\lor\neg Q\lor(P\land Q)$　　括号省略规则

（5） $\vdash P\to(Q\to(P\land Q))$　　(4) 定义1和结合律

证毕

结合律?

3、定义

(1) $(A\to B)$ 定义为 $(\neg A\lor B)$。

(2) $(A\land B)$ 定义为$\neg(\neg A\lor\neg B)$。

(3) $(A\leftrightarrow B)$定义为$((A\to B)\land(B\to A))$

补充定理3.2.9：$\vdash P \vee \neg P \vee \neg Q$

- **证明：**

$(1) \vdash P \to P \vee Q$　　公理2

$(2) \vdash P \vee \neg P \to P \vee \neg P \vee Q$　　(1)代入 $\dfrac{P}{P \vee \neg P}$

$(3) \vdash P \vee \neg P$　　定理3.2.4

$(4) \vdash P \vee \neg P \vee Q$　　(2) (3)分离

思考题

- 在罗素公理系统中证明三段论

$$\vdash (P \to Q) \land (Q \to R) \to (P \to R)$$

- 在罗素公理系统中证明结合律

$$\vdash P \lor (Q \lor R) \to (P \lor Q) \lor R$$

网络学堂讨论区提交

公理系统

- 罗素公理系统
- $Q \vee Q \to Q$
- $Q \to Q \vee R$
- $Q \vee R \to R \vee Q$
- $(P \to Q) \to (P \vee R \to Q \vee R)$

- 弗雷格公理系统
- $Q \to (R \to Q)$
- $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- $(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$
- $(Q \to R) \to (\neg R \to \neg Q)$
- $\neg\neg Q \to Q$
- $Q \to \neg\neg Q$

- 卢卡西维茨公理系统
- $Q \to (R \to Q)$
- $(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
- $(\neg Q \to \neg R) \to (R \to Q)$

3.3 公理系统的完备性和演绎定理

- 问题：

  是否所有的定理都可由公理系统推导出来？（完备性）

  非重言式或不成立的公式是否也可推导出来？（可靠性）

3.3.1 公理系统的完备性

- 公理系统的完备性是指，是否所有的重言式或所有成立的定理都可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，完备性是指所建立的系统所能推演出的定理少不少。

3.3.2 公理系统的可靠性

- 公理系统的可靠性是指，非重言式或者不成立的公式是否也可由所建立的公理系统推导出来。
- 形象地说，可靠性是指所建立的系统所能推演出的定理多不多。
- 不具备可靠性的系统是不能使用的。

命题逻辑的公理系统具有以下性质

- **语义完全性（公理系统的完备性）**

  任一重言式在命题逻辑的公理系统中都是可证的。即重言式是定理。

- **语义无矛盾性（相容性）**

  公理系统必须不含有矛盾。

- **命题演算的可判定性**

  任给一个公式，存在一种机械的方法在有穷步内判定该公式是否为定理。

证明：所建立的公理系统是完备的

设A是任一重言式，需说明它在公理系统中是可以证明的（定理），即$\vdash A$成立可将A写成与之等值的合取范式(任何一个式子就两种方式，一种是简单析取式，一种是合取范式)

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$$

其中每个A_i都是析取式，

∵A是重言式，故每个Ai亦为重言式

每个A_i必可表为$\pi \vee \neg\pi \vee B$的形式，

π是命题变项。

若Ai为重言式，则它必含一个互补对

反证法：令$A_i = B_1 \vee B_2 \vee \ldots\ldots \vee B_m$

$P_1, \ldots, P_n$是出现在A_i中的所有的命题变项，则$B_i = P_j$或$\neg P_j$

假设A_i中不存在互补对，则一定存在一个解释I_k，使得$B_1 = B_2 = \ldots\ldots = B_m = F$，矛盾。

<u>若将A_i中的不带否定符号的命题变项都取0值，带否定号的命题变项都取1值，此赋值为A_i的成假赋值</u>

因此A_i一定存在一个互补对，可以表示为$\pi \vee \neg\pi \vee B$

证明：所建立的公理系统是完备的

由公理系统

（1） $\vdash P \vee \neg P$ （定理3.2.4）

（2） $\vdash P \vee \neg P \vee Q$（定理3.2.9）

从而有 $\vdash A_i$（$i=1,\ldots,n$）(2) 与$\pi \vee \neg \pi \vee B$的形式相同

又依 $\vdash P \to (Q \to P \wedge Q)$（补充定理3.2.8）

利用分离规则证明 $\vdash A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$

$\vdash \mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \to \mathbf{P} \wedge \mathbf{Q})$

$\vdash \mathbf{A}_1 \to (\mathbf{A}_2 \to \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2)$

$\vdash \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2$

… …

具有代表性的命题逻辑的公理系统

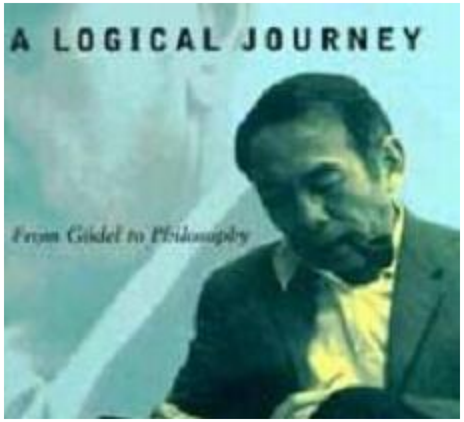
系统名称	年代	公理总条数	彼此独立的条数
Russell公理系统	1910	5	4
Frege公理系统	1879	6	3
Hilbert—Bernays	1934	15	
王浩算法	**1959**	1 (10条变形规则)	
自然演绎系统		0 (5条变形规则)	

第三章主要内容（续2）

- 介绍命题逻辑的另一公理系统——王浩算法；
- 给出该算法的具体结构；
- 举例说明使用该算法进行定理推演的过程；

3.4 王浩算法：定理证明自动化系统

王浩算法是利用计算机来实现定理证明的机械化方法，由美籍华裔科学家王浩于1959年提出。



王浩算法及其影响（一）

- 1958年，王浩编写了三个处理一阶逻辑的程序，其中包括一些当时未解决的问题。
- 程序用**SAP**语言（一种汇编语言）编写，
- 在**IBM 704**机器上实现。
- 王浩使用该程序，将数学原理（**Principia Mathematica)**一书中一阶逻辑部分的全部定理，在不到**9**分钟内证明完毕。

Seven (Flies) in **One Blow**

H. Wang, "Toward Mechanical Mathematics," in *IBM Journal of Research and Development*, vol. 4, no. 1, pp. 2-22, Jan. 1960.

The gallant tailor: seven (flies) in one blow.

IBM 704: 220 theorems (in the propositional calculus) in three minutes.

Hao Wang

Toward Mechanical Mathematics

Abstract: Results are reported here of a rather successful attempt at proving all theorems, totalling near 400, of *Principia Mathematica* which are strictly in the realm of logic, viz., the restricted predicate calculus with equality. A number of other problems of the same type are discussed. It is suggested that the

王浩算法及其影响（二）

我真希望，在Whitehead和我浪费了十年时间用手算来证明这些定理之前，就知道有这种可能性。我愿相信，演绎逻辑中的一切都能由机器来完成。

—— **B.Russell(1872-1970，英国)**

1950年Nobel文学奖获得者

《西方哲学史》《人类的知识—它的极限和范围》

《我的心路历程》《Principia Mathematica》作者

王浩算法及其影响（三）

Turing机器首次用类似计算机的模型进行阐述，始见于王（浩）的论文中。该文所包含的结果，如用过去的方式来表示将会困难得多。

—— M. Minsky

美国MIT计算机系教授，人工智能创始人之一

1969年Turing奖获得者

代表作《The Society of Mind》

王浩算法及其影响（四）

1972年美国洛克菲勒大学授予Godel名誉学位，王浩在授予仪式上为Godel致贺词。

1977年10月，王浩应邀在中科院做了6次关于数理逻辑的学术讲演，讲演内容的中译本《数理逻辑通俗讲话》于1983年由科学出版社出版(校图书馆有此书)。

王浩算法与罗素系统的主要差别

(1) 初始符号中的联结词扩充为5个常用联结词，分别是 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$；

为方便描述推理规则和公理，引入公式串$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$。

(2) 定义了相继式。即，如果α和β都是公式串，则称 $\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 是相继式。其中α为前件，β为后件；

前件：“,” − ∧ 后件：“,” − ∨

$\alpha \xrightarrow{s} \beta$ 为真，记为$\alpha \overset{s}{\Rightarrow} \beta$

王浩算法与罗素系统的主要差别

(3) 公理只有一条：如果
公式串α和β的公式都只是命题变项A，B，…，$\alpha\ {}_s\!\Rightarrow \beta$是公理（为真）的充分必要条件是$\alpha$和$\beta$中至少含有一个相同的命题变项；

(4) 变形（推理）规则共有10条，分别包括5条前件规则和5条后件规则；

王浩算法与罗素系统的主要差别

(5) 定理推演的过程将所要证明的定理写成相继式形式；

然后反复使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式

若所有无联结词的相继式都是公理，则定理得证，否则定理不成立。

变形规则（前件规则1-3）

前件规则：

$\neg\Rightarrow$　　如果$\alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow X, \gamma$

　　　　那么$\alpha, \neg X$，$\beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\wedge\Rightarrow$　　如果X，Y，$\alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

　　　　那么$\alpha, X \wedge Y$，$\beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

$\vee\Rightarrow$　　如果$X, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$ 而且$Y, \alpha, \beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

　　　　那么$\alpha, X \vee Y$，$\beta \ {}_s\!\Rightarrow \gamma$

变形规则（前件规则4–5）

前件规则：

$\to\Rightarrow$　　如果$Y, \alpha, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow \gamma$

而且$\alpha, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow X, \gamma$

那么$\alpha, X\to Y, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow \gamma$

$\leftrightarrow\Rightarrow$　　如果$X，Y，\alpha, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow \gamma$

而且$\alpha, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow X, Y, \gamma$

那么$\alpha, X\leftrightarrow Y, \beta \ {}_s\!\!\Rightarrow \gamma$

变形规则（后件规则1-3）

后件规则：

$\Rightarrow\neg$　　如果$X, \alpha\ s\Rightarrow \beta, \gamma$
　　　　那么$\alpha\ s\Rightarrow \beta, \neg X, \gamma$

$\Rightarrow\wedge$　　如果 $\alpha\ s\Rightarrow X, \beta, \gamma$, 而且 $\alpha\ s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$
　　　　那么 $\alpha\ s\Rightarrow \beta, X\wedge Y, \gamma$

$\Rightarrow\vee$　　如果 $\alpha\ s\Rightarrow X, Y, \beta, \gamma$
　　　　那么 $\alpha\ s\Rightarrow \beta, X\vee Y, \gamma$

变形规则（后件规则4–5）

后件规则：

$\Rightarrow\rightarrow$　　如果$X, \alpha \; s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

　　　　那么$\alpha \; s\Rightarrow \beta, X \rightarrow Y, \gamma$

$\Rightarrow\leftrightarrow$　　如果$X, \alpha \; s\Rightarrow Y, \beta, \gamma$

　　　　而且$Y, \alpha \; s\Rightarrow X, \beta, \gamma$

　　　　那么$\alpha \; s\Rightarrow \beta, X\leftrightarrow Y, \gamma$

定理推演

定理证明所使用的算法：

(1)　将所要证明的定理$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B$写成相继式形式：

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \; {}_S\!\Rightarrow B$$

并从这个相继式出发。

定理推演

(2) 反复（反向）使用变形规则，消去全部联结词以得到一个或多个无联结词的相继式。

(3) 若所有无联结词的相继式都是公理，则命题得证，否则命题不成立。

王浩算法推理举例与说明可演示

定理推演举例和说明

例1 证明 $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 成立

证明: (1) $\neg Q \wedge (P\rightarrow Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ （写成相继式）

(2) $\neg Q , (P\rightarrow Q) \overset{s}{\Rightarrow} \neg P$ ($\wedge \Rightarrow$) 前件规则2

(3) $P\rightarrow Q \overset{s}{\Rightarrow} Q , \neg P$ ($\neg \Rightarrow$) 前件规则1

(4) $Q \overset{s}{\Rightarrow} Q, \neg P$ 而且 $\overset{s}{\Rightarrow} Q , \neg P , P$ ($\rightarrow \Rightarrow$)前件规则4

(5) $P , Q \overset{s}{\Rightarrow} Q$ 而且 $P \overset{s}{\Rightarrow} Q , P$ ($\Rightarrow \neg$) 后件规则1

(5)中两个相继式都已无联接词，而且 $\overset{s}{\Rightarrow}$ 两端都有共同的命题变项，从而都是公理，定理得证。

$\neg\Rightarrow$ 如果 $\alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} X, \gamma$
那么 $\alpha, \neg X, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$

$\wedge\Rightarrow$ 如果 $X, Y, \alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$
那么 $\alpha, X \wedge Y, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$

$\vee\Rightarrow$ 如果 $X, \alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$ 而且 $Y, \alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$
那么 $\alpha, X \vee Y, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$

$\rightarrow\Rightarrow$ 如果 $Y, \alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$
而且 $\alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} X, \gamma$
那么 $\alpha, X\rightarrow Y, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$

$\leftrightarrow\Rightarrow$ 如果 $X, Y, \alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$
而且 $\alpha, \beta \overset{s}{\Rightarrow} X, Y, \gamma$
那么 $\alpha, X\leftrightarrow Y, \beta \overset{s}{\Rightarrow} \gamma$

$\Rightarrow\neg$ 如果 $X, \alpha \overset{s}{\Rightarrow} \beta, \gamma$
那么 $\alpha \overset{s}{\Rightarrow} \beta, \neg X, \gamma$

定理推演举例和说明

对算法的一些说明：

(1) 如例1中因(5)是公理,自然成立；

对(5)使用规则$\Rightarrow\neg$(正向)便得(4)；

对(4)使用规则$\rightarrow\ \Rightarrow$(正向)便得(3)；

对(3)使用规则$\neg\ \Rightarrow$(正向)便得(2)。

例1 证明 $(\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow \neg P$ 成立

证明：(1) $\neg Q \wedge (P\rightarrow Q)\ s\Rightarrow \neg P$ （写成相继式）

(2) $\neg Q, (P\rightarrow Q)\ s\Rightarrow \neg P$ （$\wedge\ \Rightarrow$）前件规则2

(3) $P\rightarrow Q\ s\Rightarrow Q, \neg P$ （$\neg\ \Rightarrow$）前件规则1

(4) $Q\ s\Rightarrow Q, \neg P$ 而且 $s\Rightarrow Q, \neg P, P$ （$\rightarrow\ \Rightarrow$）前件规则4

(5) $P, Q\ s\Rightarrow Q$ 而且 $P\ s\Rightarrow Q, P$ （$\Rightarrow\neg$）后件规则1

(5)中两个相继式都已无联接词，而且s⇒两端都有共同的命题变项，从而都是公理，定理得证。

定理推演举例和说明

(2) 证明方法是从所要证明的定理出发，反向使用推理规则（消联结词），直到公理的过程。

(3) 对证明的解释，是反过来从公理出发，经正向使用推理规则（加联结词），直到所要证明的定理。

(4) 限于命题逻辑的定理证明，仅使用五个常用的联结词以及重言蕴涵符号就已足够，引入符号串和相继式完全是为描述推理规则以及公理的方便。

定理推演举例和说明

(5) 由所建立的王浩算法可证明命题逻辑的所有定理，从而是完备的公理系统。算法是可实现的机械方法，可用此算法用计算机来证明命题逻辑中描述的定理。

(6) 算法的另一优点是当所证公式不是定理时，也可以得到相应结果。当消去所有联结词后，得到的相继式中有的不是公理时，便知所要证明的并不是定理。

定理推演举例和说明（例2，选读）

例2 证明$((P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S)) \to (S \vee R)$成立

证明:

(1) $(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to S) \ {}_{s}\Rightarrow (S \vee R)$ （写成相继式）

(2) $P \vee Q$， $P \to R, Q \to S \ {}_{s}\Rightarrow (S \vee R)$ $(\wedge \Rightarrow)$

(3) $P \vee Q, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\Rightarrow S, R$ $(\Rightarrow \vee)$

(4a) $P, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\Rightarrow S, R$ 而且

(4b) $Q, P \to R, Q \to S \ {}_{s}\Rightarrow S, R$ $(\vee \Rightarrow)$

定理推演举例和说明（例2，选读）

(5a) P, R, Q→S $_s$⇒ S, R 而且

(5b) P, Q→ S s$_s$⇒ P, S, R ((4a)→=>)

(6a)P, R, S $_s$⇒ S, R 而且

(6b) P, R $_s$⇒ Q,S, R ((5a)→=>)

(7a) P, S $_s$⇒ P, S, R

(7b) P $_s$⇒ Q, P, S, R ((5b)→=>)

定理推演举例和说明（例2，选读）

(8a) $Q, R, Q \to S \ {}_s\!\Rightarrow S, R$

(8b) $Q, Q \to S \ {}_s\!\Rightarrow P, S, R$ ((4b)→=>)

(9a) $Q, R, S \ {}_s\!\Rightarrow S, R$而且

(9b) $Q, R \ {}_s\!\Rightarrow Q, S, R$ ((8a)→=>)

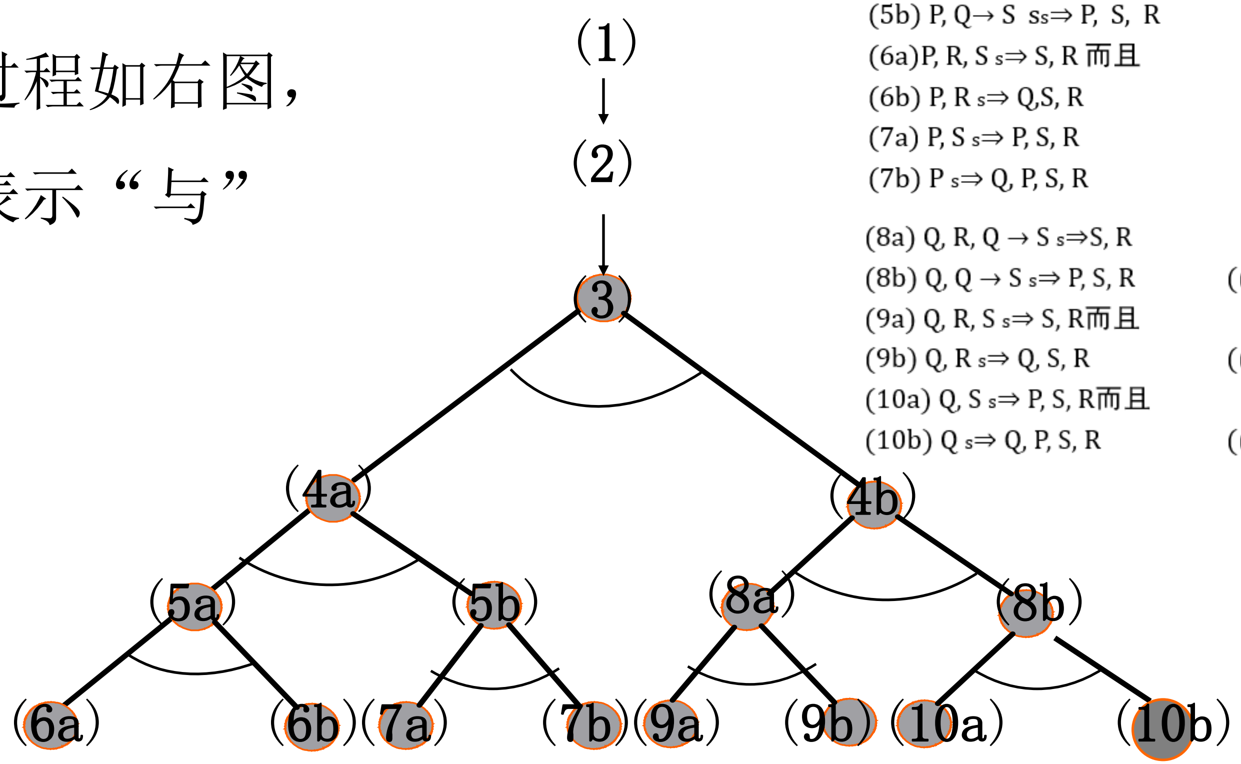
(10a) $Q, S \ {}_s\!\Rightarrow P, S, R$而且

(10b) $Q \ {}_s\!\Rightarrow Q, P, S, R$ ((8b)→=>)

定理推演举例和说明

证明过程如右图，

圆弧表示“与”



(5a) P, R, Q→S s⇒ S, R 而且
(5b) P, Q→ S ss⇒ P, S, R ((4a)→=>)
(6a)P, R, S s⇒ S, R 而且
(6b) P, R s⇒ Q,S, R ((5a)→=>)
(7a) P, S s⇒ P, S, R
(7b) P s⇒ Q, P, S, R ((5b)→=>)

(8a) Q, R, Q → S s⇒S, R
(8b) Q, Q → S s⇒ P, S, R ((4b)→=>)
(9a) Q, R, S s⇒ S, R而且
(9b) Q, R s⇒ Q, S, R ((8a)→=>)
(10a) Q, S s⇒ P, S, R而且
(10b) Q s⇒ Q, P, S, R ((8b)→=>)

第三章主要内容（续3）

- 介绍不含公理的命题逻辑的自然演绎系统；
- 并通过实例展示该系统在定理证明中的异同；

3.5 自然演绎系统

- 自然演绎系统也是一种逻辑演算体系，与公理系统的明显区别在于它的出发点只是一些变形规则而没有公理，是附有前提的推理系统。
- 自然演绎系统可导出公理系统的所有定理，同时自然演绎系统的所有定理也可由重言式来描述，从而可由公理系统导出。

3.5.1 初始符号

除罗素公理系统的符号外，引入

$\Gamma=\{A_1, \ldots, A_n\}=A_1, \ldots, A_n$

表示有限个命题公式的集合；

$\Gamma \vdash A$

表示Γ，A之间有形式推理关系，Γ为形式前提，A为形式结论，或说使用推理规则可由Γ得A。

3.5.2 形成规则(同罗素公理系统)

- 根据形成规则得到的符号序列称合式公式。

(1) 符号π是合式公式（π为命题，如A, B, C...）

(2) 若A, B是合式公式，则$(A \vee B)$是合式公式

(3) 若A是合式公式，则$\neg A$是合式公式。

(4) 只有符合(1) (2) (3)的符号序列才是合式公式。

3.5.3 变形规则

（1） $A_1, \ldots, A_n \vdash A_i (i=1,\ldots,n)$。肯定前提律

（2）如果$\Gamma \vdash A$，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash B$。传递律

（3）如果Γ，$\neg A \vdash B$且Γ，$\neg A \vdash \neg B$，则$\Gamma \vdash A$。反证律

（4）$A \rightarrow B$，$A \vdash B$。蕴涵词消去律（分离规则）

（5）如果Γ，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \rightarrow B$。蕴涵词引入律。

3.5.4 公理

- 自然演绎系统的公理集为空集.

3.5.5 定理

定理3.5.1 $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$

证明：

(1) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C$，$A \vdash A \rightarrow B$　　规则1

(2) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C$，$A \vdash A$　　规则1

(3) $A \rightarrow B$，$A \vdash B$　　规则4

(4) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C$，$A \vdash B$　　规则2和(1),(2),(3)

(5) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C$，$A \vdash B \rightarrow C$　　规则1

(6) $B, B \rightarrow C \vdash C$　　规则4

(7) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C$，$A \vdash C$　　规则2和(4),(5),(6)

(8) $A \rightarrow B$，$B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$　　规则5

（1） $A_1, \ldots, A_n \vdash A_i (i=1,\ldots,n)$。肯定前提律

（2） 如果$\Gamma \vdash A$，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash B$。传递律

（3） 如果Γ，$\neg A \vdash B$且Γ，$\neg A \vdash \neg B$，则$\Gamma \vdash A$。反证律

（4） $A \rightarrow B$，$A \vdash B$。蕴涵词消去律（分离规则）

（5） 如果Γ，$A \vdash B$，则$\Gamma \vdash A \rightarrow B$。蕴涵词引入律。

- 上述定理在罗素公理系统中被描述成

  $\vdash((A\rightarrow B)\wedge(B\rightarrow C))\rightarrow(A\rightarrow C)$

- 在定理的证明中，不涉及公理，而将A→B，B→C作为条件，使用推理规则来作推理，推理过程比用公理的情形容易。
- 可以证明罗素公理系统与自然演绎系统是等价的，因此，自然演绎系统也是完备的.

(1) 包含规则：若 $A \in \Gamma$ 则 $\Gamma \vdash A$ 。特别地 $A \vdash A$。

– 包含规则也称为前提引入规则。

(2) 前提附加：若 $\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma, B \vdash A$ 。

– 前提附加规则也称为弱化规则。

– $\Gamma, B \vdash A$ 是 $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$ 的简写。

(3) 否定引入：若 $\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma \vdash \neg\neg A$。

(4) 否定消去：若 $\Gamma, \neg A \vdash B$ 且 $\Gamma, \neg A \vdash \neg B$ 则 $\Gamma \vdash A$。

– 否定消去也称为反证法

(5) 合取引入：若 $\Gamma \vdash A$ 且 $\Gamma \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash A \wedge B$。

(6) 合取消去：若 $\Gamma \vdash A \wedge B$ 则 $\Gamma \vdash A$ 且 $\Gamma \vdash B$。

(7) 析取引入：若 $\Gamma \vdash A$ 或 $\Gamma \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash A \vee B$。

(8) 析取消去：若 $\Gamma, A \vdash C$ 且 $\Gamma, B \vdash C$ 则 $\Gamma, A \vee B \vdash C$

– 析取消去的另外描述形式：若 $\Gamma \vdash A \vee B$，$\Gamma, A \vdash C$ 且 $\Gamma, B \vdash C$ 则 $\Gamma \vdash C$。

(9) 蕴涵引入：若 $\Gamma, A \vdash B$ 则 $\Gamma \vdash A \to B$ 。（CP 规则）

(10) 蕴涵消去：若 $\Gamma \vdash A \to B$ 且 $\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma \vdash B$ 。

(11) 等价引入：若 $\Gamma, A \vdash B$ 且 $\Gamma, B \vdash A$ 则 $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$。

– 或：若 $\Gamma \vdash A \to B$ 且 $\Gamma \vdash B \to A$ 则 $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$。

(12) 等价消去：若 $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$ 且 $\Gamma \vdash A$ 则 $\Gamma \vdash B$ 。

– 或：若 $\Gamma \vdash A \leftrightarrow B$ 则 $\Gamma \vdash A \to B$ 且 $\Gamma \vdash B \to A$。

(13) 等值替换：若 $A \vdash B, B \vdash A$ 且 $\Gamma \vdash \Phi(A)$，则 $\Gamma \vdash \Phi(B)$；$\Phi(A)$ 描述 N 的一个含子式 A 的公式。

第三章主要内容（续4）

- 概括介绍了非标准逻辑的概念；
- 给出了几个典型的多值逻辑和模态逻辑。

3.6 非标准逻辑

- 前面的命题逻辑通常称作标准（古典）的命题逻辑，而除此之外的命题逻辑可统称作**非标准逻辑**。
- 其中一类是与古典逻辑有相违背之处的非标准逻辑，如多值逻辑，模糊逻辑等。$P \vee \neg P$
- 另一类是古典逻辑的扩充，如模态逻辑，时态逻辑等。

3.6.1 多值逻辑

- 在古典命题逻辑中，命题定义的取值范围仅限于真和假两种，故又称作二值逻辑。
- 多值逻辑将命题定义的取值范围推广到可取多个值。
- 因此，多值逻辑是普通二值逻辑的推广，并在此基础上研究如何给出各种取值含义的解释以及命题运算规律是否保持等问题。

多值逻辑

- 已有的多值逻辑研究以三值逻辑为主，具有代表性的包括
- Kleene 逻辑（**1952**）；
- Lukasiewicz 逻辑（**1920**）；
- Bochvar 逻辑（**1939**）等。

3.6.2 模态逻辑

- 考虑必然性和可能性的逻辑是模态逻辑
- 引入“可能的世界”作为参量（条件），必然真表示所有可能的世界下为真，而可能真表示在现实世界下为真，不要求所有可能的世界下为真。存在的问题是可能的世界如何描述还有待研究。
- 有一种观点认为，命题逻辑是用来描述永恒或绝对真理的，模态逻辑和谓词逻辑则是描述非永恒或相对真理的。

3.6.3 不确定性推理与非单调逻辑

- 不确定性推理与非单调逻辑是人工智能系统中经常使用的知识表示和推理方法
- 首先，标准逻辑是单调的。一个正确的公理加到理论T中得到理论T'，$T \subset T'$。如果$T \vdash P$必有$T' \vdash P$。即随着条件的增加，所得结论也必然增加。
- 而对于非单调逻辑，一个正确的公理加到理论T中，有时反而会使预先所得到的一些结论失效。

第三章小结

- 本章介绍了命题逻辑的公理化，是命题逻辑理论的系统化和抽象化，主要内容总结如下：
- 介绍了命题逻辑的公理系统的概念和基本结构，并以具有代表性的罗素公理系统为例，详细介绍了一个命题逻辑公理系统的构成；

重点掌握公理系统概念

- 从一些公理出发，根据演绎规则推导出一系列定理，这样形成的演绎体系叫做公理系统（**axiom system**）。
- 公理系统自成体系，是一个抽象符号系统。又称之为形式系统。

第三章小结(续1)

- 通过大量定理推演的实例，给出了使用公理系统进行定理证明的过程和方法；
- 此外，还对公理系统的完备性、可靠性和演绎定理做了简要的叙述。

- 思考题：（网络学堂讨论区提交）
  - 罗素公理系统怎么证明结合律

- 代码小课题
  - 归结推理的实现
  - 王浩算法的实现
  - 微信报名

谢谢