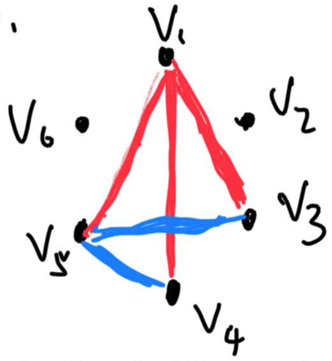
DM HW3

1. 证明:

6. 在证明在9个人中,或有四人互相认识,或有三人互不认识前,先证明以下引理:

在任意6人中,或有三人互相认识,或有三人互不认识。

以下以蓝色(边)表示两人互不认识,红边表示互相认识。

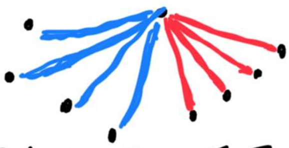


(V_3, V_4) 无论是红色还是蓝色,该图都一定有三角形,引理得证。

回到原题。以一个九阶完全图 $G=(V,E)$ 表示该九人的关系,同样以红、蓝边表示各人是否认识。下面以反证法证之。

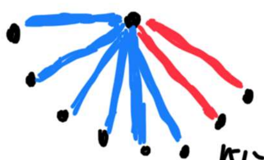
I). $\forall v \in V$, v 连上至少五条红边,则原命题成立:

若 v 只"认识另外四人",这样 v 不认识的四人中,只要存在两个人互不认识,就会有"三人互不认识",如下。



若不存在两人互不认识,就代表那四人互相认识。□

II). $\forall v \in V$, v 连上至多五条边,则原命题成立:



若 v 至少认识6个人,则由引理知该6人,必定存在三人互相认识,或"三人互不认识"。若是"三人互相认识"的情况,由于该三人都认识 v,故就存在四人互相认识。□

Ⅲ).由Ⅰ)、Ⅱ)及选择结点的任意性,可以得出若命题不成立,那九个人都各自认识其他五个人,不认识三个人。
删去G上的红边,此时就有$\forall v\in V$, $d(v)=5$. 而

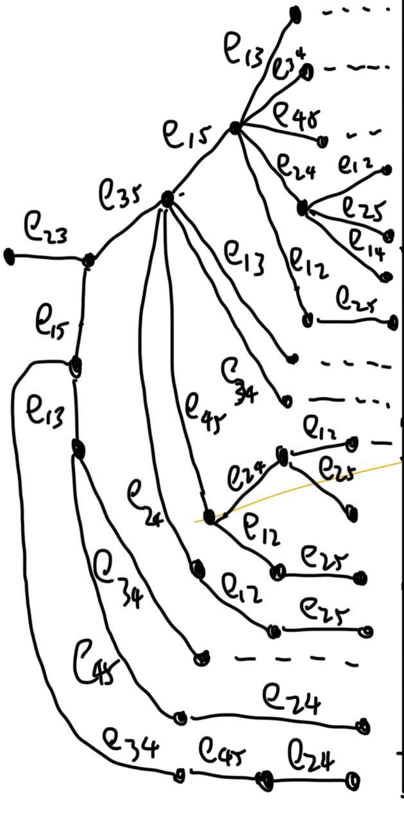
$$=\sum_{v\in V} d(v)=9\times 5=45,$$

与性质1.1.1矛盾,故命题得证。□.

2,

13.解:

e_{ij}	e_{23}	e_{35}	e_{15}	e_{13}	e_{34}	e_{45}	e_{24}	e_{12}	e_{25}	e_{14}
$w(e)$	26	27	29	33	34	35	38	42	49	52



d	是否有效	d_0
--	×	$+\infty$
--	×	
--	×	
162	×	
169	×	
172	✓	172
173	○	
--	×	
--	×	
168	×	
175	○	
179	○.	
182	○.	
--	×	
161	✓	161
162	○	

本列是否有效一栏,若d_0在未更新前已有$d\geq d_0$,则有效性无需判断,记为○。d_0在有更新,才显示更新后的值。

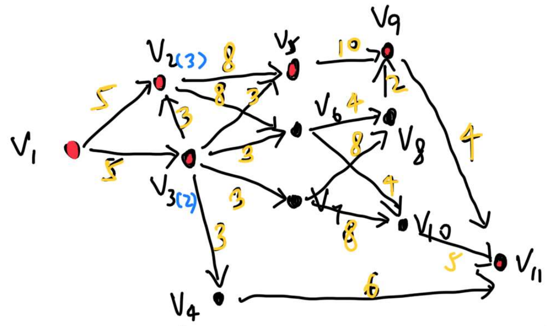
故最短的H回路为$H=(v_2,v_3,v_1,v_5,v_4,v_2)$.
总长为161.

注意: PT 图上的【蓝标】是对该图某些顶点的编号作必要的修改，确保【每条边的始点编号小于终点】。

【表上】的是修改后的编号，【关键路径】的编号是修改前（原图）的编号。

17、解：

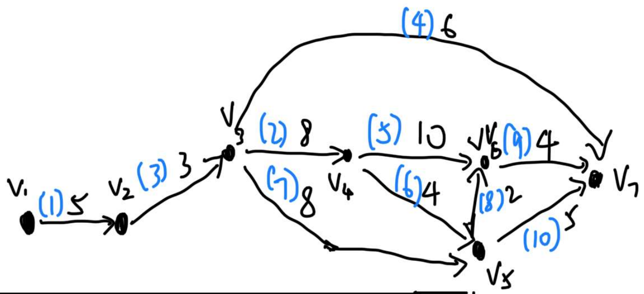
(1) PT 图：



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\pi(i)$	0	5	8	8	16	16	8	20	26	20	30
i	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\pi(i,11)$	0	5	4	6	14	10	14	6	22	25	30
$\tau(i)$	30	25	26	24	16	20	16	24	8	5	0
$t(i)$	0	5	0	4	8	4	0	16	0	0	0

于是关键路径为 $(V_1, V_3, V_2, V_5, V_9, V_{11})$，3, 5, 10 的允许延误时间分别为 0, 0, 5。

(2)、PERT 图。



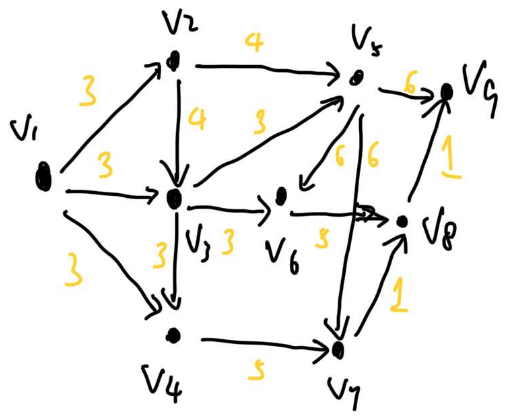
i	1	2	3	4	5	6	7
$\pi(i)$	0	5	8	16	20	26	30
i	7	6	5	4	3	2	1
$\pi(i,7)$	0	4	6	14	22	25	30
$\tau(i)$	30	26	24	16	8	5	0

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t(i)$	0	0	0	16	0	5	8	4	0	5

关键路径同样是 (1), (3), (2), (5), (9)，或

$(V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7)$。

练习题:



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π(i)	0	3	7	10	10	16	16	21	22
i	9	8	7	6	5	4	3	2	1
π(i,n)	0	1	2	6	12	6	15	19	22
t(i)	22	21	20	16	10	16	7	3	0
t(i)	0	0	4	0	0	6	0	0	0

最长路: $[V_1, V_2, V_3, V_5, V_6, V_8, V_9]$.