1. 定義自然數

* 0 (或1) 是自然數 N
* 對於任意的自然數a, 都有一個後繼元素a’, 其也是自然數
* 對任意自然數b, c而言, b和c 相等 當僅 b 和c 的後繼數相等
* 0 (或1) 不是任何數的後繼數
* 對任何自然數的命題(判斷句),若能證明其對0(或1)成立, 在假設對自然數a成立的前提下可以推出該命題對a’成立, 則能證明該命題對所有自然數成立.

於是, 我們定義0的後繼為1, 1的後繼為2等

就有N={0,1,2,……}

1. 定義一個”群”

“群某程度上會將線代嘅野再抽象化”

群，由集合和(二元)運算組成

二元運算，就是將兩個元素結合的方法

設該二元運算為 (\*) , 集合為G (注意, 這裏的 \* 不是乘法, 是一種運算符)

則一個群可以寫成 (G, \*)

一個群”必須”滿足以下四個條件

1. 封閉性: 若a,b 在集合G 內，則 a\*b 在集合G內
2. 單位元: 集合G 內必須存有唯一元素e, 滿足對任意元素a都有 e\*a=a\*e=a
3. 逆元: 對任意元素a，必存在唯一的元素b 使得 a\*b=e
4. 結合律: 對任意元素 a,b,c 都有 (a\*b)\*c=a\*(b\*c)

舉個例: 上面嘅集合G, 我地設佢為自然數集合N, 二元運算為 + .

1. 1,2,1+2=3 都在自然數集合內
2. 1+e=e+1=1, e 在我們的理解是 “0”
3. 1+b=e=0 , 此時b 出界, 即是N內沒有該元素，於是可以引入整數的定義

三、定義整數

定義一個新集合, 使上式的b在該集合內

於是就有了”負數”的概念, 就是自然數在**加法**下的”逆元”

1. 顯然

用自然數集合, 加上自然數逆元組成的所有元素, 就可以構成那個新的集合, 稱為整數, 滿足條件3, 使整數的加法能構成一個群。(不過此處非嚴格定義)

1. 定義有理數、實數

有理數的定義可用”自然數加法不能構成群, 要擴充成整數才能構成群”,類比成”整數(非零)乘法不能構成群, 要擴充成非零有理數才可以”

Q={a/b| a, b為整數(其中b非零) 且若a非零, gcd(a,b)=1}

x^2-2=0 , x 不存在於Q中, 於是擴展定義實數

sqrt(2) 可定義為邊長為1的長方形的斜邊長度, 不過我們需先定義長度.

將 “無理化” 可以求出的連分數定義

但需注意, 這個連分數不可能在有限步寫完, 所以也有問題

定義一數列 為

可以證明 a\_n 存在下界k, k(<=2)為一實數

S(1): a\_1=2>k

S(n): a\_n>k

S(n+1): (a\_n+1)^2=a\_n^2/4+1/a\_n^2+1>=1+1=2

於是 a\_n^2 的下界是2

另外, , 等號只有n 趨向無限大時才能取

於是, a\_n 是單調減

但問題是, 極限也是沒有明確定義

可以定義實數為有理數序列的極限

若兩序列的極限相等, 可視為等價

以下定義等價關係

先定義二元關係

集合A, B 的笛卡兒積(直積)為

A x B={ (a,b) : aA, bB }