

# INTRODUCTION À FREEFEM++ : APPROXIMATION DE PROBLÈMES ELLIPTIQUES

## PROBLÈME AUX LIMITES DE BASE

On s'intéresse ici au problème de Neumann dans le carré unité  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  :

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $f : (x, y) \in \Omega \mapsto (1 + 2\pi^2) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ .

Vérifions rapidement que l'application  $u : (x, y) \in \Omega \mapsto \cos(\pi x) \cos(\pi y)$  est solution du problème :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) - \pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) = -2\pi^2 u,$$

d'où

$$-\Delta u + u = (1 + 2\pi^2)u = (1 + 2\pi^2) \cos(\pi x) \cos(\pi y) = f \text{ dans } \Omega.$$

De plus, si l'on considère  $\mathcal{S}_1 := \{(x, y); x \in [0, 1], y = 1\}$  l'une des faces du bord  $\partial\Omega$ , et  $n_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sa normale extérieure unitaire, on peut écrire, pour  $(x, y) \in \mathcal{S}_1$  :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u((x, y) + tn_1) - u(x, y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi x)(\cos(\pi(1+t)) - \cos(\pi))}{t},$$

et, d'après la formule de Taylor-Young, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\cos(\pi x)(\cos(\pi) + o(t) + 1)] = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(\pi x)(0 + o(1)) = 0.$$

De même, on fait le calcul sur chacune des autres faces et on trouve  $\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.}$

**Formulation variationnelle.** On considère le problème variationnel suivant, pour tout  $v$  dans  $H^1(\Omega)$  :

$$(\mathcal{V}) \quad \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx.$$

Montrons que  $(\mathcal{V})$  admet une unique solution  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ . On pose, pour tous  $u, v \in H^1(\Omega)$  :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx + \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \text{ et } \eta(v) = \int_{\Omega} f(x)v(x) \, dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on remarque que  $\eta$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ . Aussi, pour tous  $u, v \in H^1(\Omega)$ , on a :

$$|a(u, v)| \leq \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx \right| + \left| \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx \right| \leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2},$$

or  $\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla v\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \sqrt{\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2} \sqrt{\|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2} = \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}$ , donc l'application  $a$  est bien continue. En outre,  $a(u, u) = \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{H^1}^2$  pour tout  $u$  dans  $H^1(\Omega)$ . Dès lors, l'application  $a$  est une forme bilinéaire continue coercive sur  $H^1(\Omega)$ , donc d'après le théorème de Lax-Milgram, le problème variationnel  $(\mathcal{V})$  admet une unique solution  $u \in H^1(\Omega)$ .

Il s'agit maintenant de montrer l'équivalence entre le problème variationnel  $(\mathcal{V})$  et le système différentiel  $(\mathcal{P})$ . Soit  $\varphi$  une fonction test de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . En appliquant la formule de Stokes à  $(\mathcal{V})$ , il vient :

$$\left( - \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \varphi d\sigma \right) + \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx,$$

et comme  $\varphi$  est à support compact et donc nulle sur le bord, on obtient :

$$- \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} u(x) \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx.$$

Il en résulte que  $-\Delta u + u = f$  au sens faible et donc presque partout pour  $x \in \Omega$  par la réciproque du théorème de convergence dominée.

Revenons au problème variationnel, cette fois pour toute fonction test  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ . On a :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_{\Omega} \underbrace{[-(-\Delta u(x) + u(x)) + f(x)]}_{=0} v(x) dx \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ p.p sur } \partial\Omega.}$$

La réciproque est immédiate en multipliant l'équation différentielle par une fonction test. En conclusion, on a montré l'équivalence entre le problème  $(\mathcal{P})$  et sa formulation variationnelle  $(\mathcal{V})$  ainsi que l'existence et l'unicité de la solution dans  $H^1(\Omega)$ .

## CALCUL D'UNE SOLUTION APPROCHÉE PAR FREEFEM++

On va maintenant passer à la résolution numérique par éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , en faisant varier la précision du maillage selon  $N_x = N_y = 2^k$  pour  $k = 2, \dots, 7$ . On appelle  $V_h$  le sous-espace de dimension finie associé aux éléments finis  $\mathbb{P}_1$ , et on note  $h$  le pas de maillage,  $u_h$  la solution approchée. Comme  $V_h$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H^1(\Omega)$ , il existe une unique solution de  $(\mathcal{V})$  dans  $V_h$ .

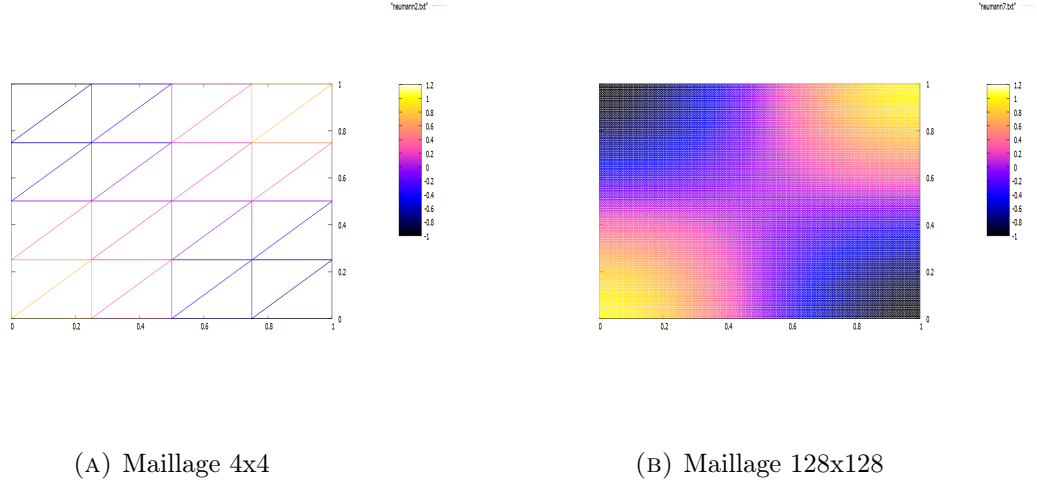


FIGURE 1. Résolution du problème de Neumann avec Freefem

**Estimation d'erreur.** Vérifions la convergence de la méthode en norme  $L^2$  et  $H^1$ . Comme  $f$  est dans  $L^2(\Omega)$ , alors  $u$  est dans  $H^2(\Omega)$  et par le lemme d'Aubin-Nitsche, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2}$$

De plus, en se ramenant par un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  à une triangulation uniforme de  $\mathbb{R}^2$  de pas 1, on considère un simplexe de référence  $\hat{K}$ . Si  $\hat{v}$  est dans  $H^1(\hat{K})$ , l'inégalité de Poincaré-Wirtinger nous donne :

$$\|\hat{v} - \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v} \|_{L^2(\hat{K})} \leq C \|\nabla \hat{v}\|_{L^2(\hat{K})},$$

où  $C$  est une constante positive. S'ensuit, par le difféomorphisme inverse, pour  $v$  dans  $H^1(K)$  :

$$\|v - \frac{1}{|K|} \int_K v \|_{L^2(K)} \leq Ch \|\nabla v\|_{L^2(K)}.$$

Dès lors, en prenant  $v = \nabla u$ , on en déduit :

$$\inf_{a,b} \left\| \nabla u - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|_{L^2(K)} \leq Ch \|\nabla v\|_{L^2(K)},$$

ce qui nous donne, en passant au carré et en sommant sur  $K$  :

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq Ch \|u\|_{H^2}$$

On calcule donc numériquement l'erreur en norme  $L^2$  et en norme  $H^1$  pour différentes valeurs de  $N$  et on obtient les résultats suivants :

$N$	$\ \cdot\ _{L^2}$	$\ \cdot\ _{H^1}$
4	0.0711886	0.815681
8	0.0198394	0.427257
16	0.00513012	0.216781
32	0.00129514	0.108859
64	0.00032468	0.0544965
128	8.1232e-05	0.0272576

ce qui s'accorde avec la théorie.

**Conditions limites de Dirichlet.** On souhaite résoudre le problème avec cette fois les conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On étudie le système :

$$(\mathcal{D}) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec  $f : (x, y) \in \Omega \mapsto (1 + 2\pi^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . On vérifie aisément qu'une solution du problème est donnée par la fonction  $u : (x, y) \in \Omega \mapsto \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . La formulation variationnelle reste identique, et on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram sur l'espace de Hilbert  $V := \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$  pour avoir l'équivalence. On a donc bien existence et unicité de la solution.

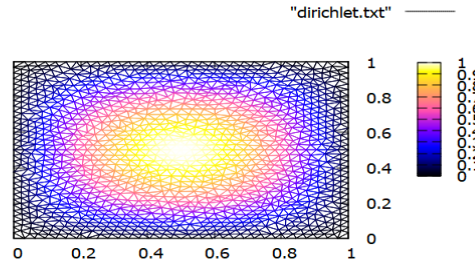


FIGURE 2. Résolution du problème avec conditions limites de Dirichlet homogènes pour  $N = 32$

De même, on obtient ici les estimations d'erreur :

$$\begin{cases} \|u - u_h\|_{L^2} \simeq 0.000763196, \\ \|u - u_h\|_{H^1} \simeq 0.0828271. \end{cases}$$

**Changement de domaine.** On peut étudier le même problème sur le domaine tronqué  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus ]a - \epsilon, a + \epsilon[^2$  pour  $a, \epsilon$  tels que  $|a \pm \epsilon| < 1$ , toujours avec les conditions de Dirichlet homogènes.

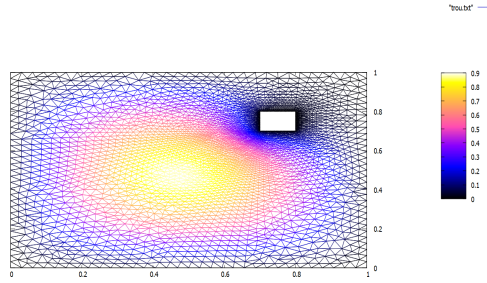


FIGURE 3. Résolution du problème sur  $\tilde{\Omega}$

#### APPLICATION : CUISSON D'UN GÂTEAU

On s'intéresse maintenant à la cuisson d'un gâteau. On considère un four représenté par le domaine  $\Omega = ]0, 1[^2$ , de frontière  $\partial\Omega = \partial\Omega_D \cup \partial\Omega_N$ , où  $\partial\Omega_D$  correspond aux côtés horizontaux et  $\partial\Omega_N$  aux côtés verticaux. Le gâteau est représenté par le domaine  $[0.2, 0.8] \times [0.3, 0.5]$ . On étudie le système aux conditions mixtes suivant :

$$(\star) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ T = T_D & \text{sur } \partial\Omega_D, \\ \nabla T \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_N, \end{cases}$$

où le coefficient de conductivité thermique  $\kappa$  vaut 10 dans le domaine  $G$  et vaut 1 dans  $\Omega \setminus G$ . De plus,  $T_D = 50$  sur le bord inférieur du four et  $T_D = 100$  sur le bord supérieur. Les conditions de Neumann sont nulles car on suppose une isolation thermique parfaite sur les parois verticales du four.

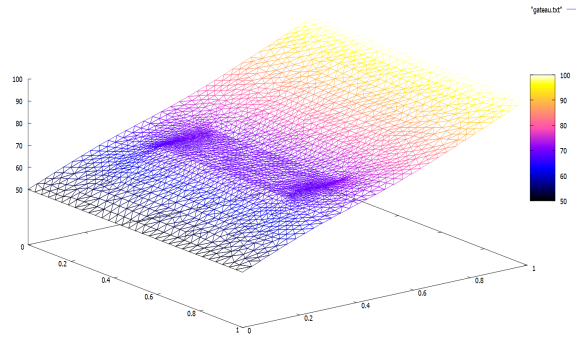


FIGURE 4. Simulation de la température dans un four à l'état stationnaire