Formation d'un tas de sable

Roussel Léo, Gaultier Clément

Université de Lille

27 mai 2021

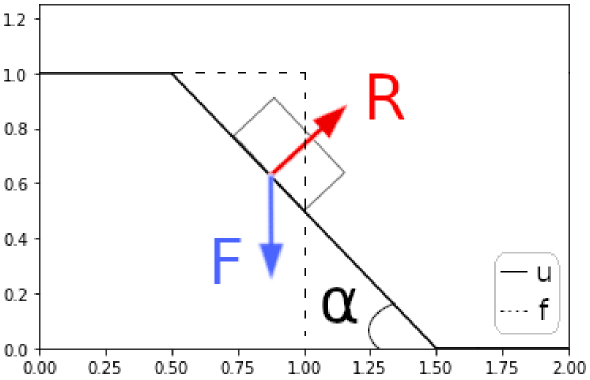
Table des matières

Table des matières

On cherche à modéliser l'auto-organisation de la formation d'un tas de sable. On définit :

- une fonction f définie sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}$, représentant la hauteur d'une quantité de sable qu'on lâche sur un intervalle, et qui retombe instantanément, On cherche à modéliser l'auto-organisation de la formation d'un tas de sable. On définit :

- une fonction f définie sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}$, représentant la hauteur d'une quantité de sable qu'on lâche sur un intervalle, et qui retombe instantanément,
- une fonction u modélisant la hauteur du tas de sable à l'état final une fois le système stabilisé.


1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00
R
F
α
u
f

On se donne les hypothèses suivantes :

- condition nécessaire de stabilité : il y a écoulement de sable tant que $\alpha > \frac{\pi}{4}$; autrement dit, à l'état final, on a nécessairement $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$, ce qui se traduit par $|u'| \leq 1$ p.p, On se donne les hypothèses suivantes :

- condition nécessaire de stabilité : il y a écoulement de sable tant que $\alpha > \frac{\pi}{4}$; autrement dit, à l'état final, on a nécessairement $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$, ce qui se traduit par $|u'| \leq 1$ p.p,
- conservation de la matière : si Ω contient le support de u, alors l'écoulement de sable est nul sur $\partial\Omega$ et on a

$$\int_\Omega u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx,$$

Contre-exemple : $\Omega =]-1,1[$, $\mathrm{supp}(u) = [-1,1]$ ("problème de la table").

Modèle de projection de Prigozhin

f dans $L^2(\Omega)$, $K \subset L^2(\Omega)$ convexe fermé : $u = \mathcal{P}_K(f)$ projeté de f sur K.

Modèle de projection de Prigozhin

f dans $L^2(\Omega)$, $K \subset L^2(\Omega)$ convexe fermé : $u = \mathcal{P}_K(f)$ projeté de f sur K.

On pose ici

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

Modèle de projection de Prigozhin

f dans $L^2(\Omega)$, $K \subset L^2(\Omega)$ convexe fermé : $u = \mathcal{P}_K(f)$ projeté de f sur K.

On pose ici

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

K sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega) \Rightarrow$ existence et unicité de la projection.

Modèle de projection de Prigozhin

f dans $L^2(\Omega)$, $K \subset L^2(\Omega)$ convexe fermé : $u = \mathcal{P}_K(f)$ projeté de f sur K.

On pose ici

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

K sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ $\Rightarrow$ existence et unicité de la projection.
Caractérisation de u :

$$\forall v \in K, (f - u, v - u) \leq 0$$

Modèle de projection de Prigozhin

f dans $L^2(\Omega)$, $K \subset L^2(\Omega)$ convexe fermé : $u = \mathcal{P}_K(f)$ projeté de f sur K.

On pose ici

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

K sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$ $\Rightarrow$ existence et unicité de la projection.
Caractérisation de u :

$$\forall v \in K, (f - u, v - u) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in K, \int_\Omega (f(x) - u(x))(v(x) - u(x))\, dx \leq 0.$$

Table des matières

On considère le problème primal suivant :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{u \in V} (F(u) + G(\Lambda u)),$$

où F, G fonctions convexes, semi-continues inférieures sur respectivement V, Y espaces de Banach, et $\Lambda : V \to Y$ linéaire continue.

On considère le problème primal suivant :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{u \in V} (F(u) + G(\Lambda u)),$$

où F, G fonctions convexes, semi-continues inférieures sur respectivement V, Y espaces de Banach, et $\Lambda : V \to Y$ linéaire continue.

Transformée de Legendre-Fenchel

La conjuguée ou transformée de Legendre-Fenchel d'une fonction convexe F définie sur V est l'application F^* définie sur V' par

$$F^*(p) = \sup_{u \in V} (< p, u > -F(u)).$$

Relations d'extrémalité : soient $u \in V, p \in Y'$,

$$-F^*(\Lambda^* p) \leq -< p, \Lambda u > +F(u), \tag{1}$$

$$-G^*(-p) \leq -< -p, \Lambda u > +G(\Lambda u). \tag{2}$$

Problème primal, problème dual, relations d'extrémalité

Définition

Relations d'extrémalité : soient $u \in V, p \in Y'$,

$$-F^*(\Lambda^* p) \leq - < p, \Lambda u > + F(u), \tag{1}$$

$$-G^*(-p) \leq - < -p, \Lambda u > + G(\Lambda u). \tag{2}$$

$$(1) + (2) \Longrightarrow (\mathcal{D}) = \sup_{p \in Y'} -\left(F^*(\Lambda^* p) + G^*(-p)\right) \leq (\mathcal{P})$$

Relations d'extrémalité : soient $u \in V, p \in Y'$,

$$-F^*(\Lambda^* p) \leq -< p, \Lambda u > +F(u), \tag{1}$$

$$-G^*(-p) \leq -< -p, \Lambda u > +G(\Lambda u). \tag{2}$$

$$(1) + (2) \implies (\mathcal{D}) = \sup_{p \in Y'} -(F^*(\Lambda^* p) + G^*(-p)) \leq (\mathcal{P})$$

Or, si on a

$$(\mathcal{P}) < +\infty, \exists u_0 \in V, F(u_0) < +\infty, G(\Lambda u_0) < +\infty, \tag{3}$$

alors $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$, et si leurs extrema respectifs sont atteints (1) et (2) deviennent des égalités (égalités de Euler-Lagrange).

On pose $V = E := \{\sigma \in L^1(\Omega); \sigma' \in L^2(\Omega)\}$, $Y = L^2(\Omega)$ et

$$F(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx, \; G(q) = \frac{1}{2} \int_\Omega (f+q)^2 \, dx, \; \Lambda = \mathrm{div},$$

On pose $V = E := \{\sigma \in L^1(\Omega); \sigma' \in L^2(\Omega)\}$, $Y = L^2(\Omega)$ et

$$F(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx, \; G(q) = \frac{1}{2}\int_\Omega (f+q)^2 \, dx, \; \Lambda = \mathrm{div},$$

avec

$$F^*(q) = \chi_B(q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in B, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \; G^*(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \, dx, \; \Lambda^* = -\nabla,$$

où $B := \{p \in L^\infty(\Omega); |p| \leq 1\}$.

On pose $V = E := \{\sigma \in L^1(\Omega); \sigma' \in L^2(\Omega)\}$, $Y = L^2(\Omega)$ et

$$F(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx, \ G(q) = \frac{1}{2}\int_\Omega (f+q)^2 \, dx, \ \Lambda = \mathrm{div},$$

avec

$$F^*(q) = \chi_B(q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in B, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \ G^*(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \, dx, \ \Lambda^* = -\nabla,$$

où $B := \{p \in L^\infty(\Omega); |p| \leq 1\}$.
On obtient alors

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (f+\sigma')^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f^2 \, dx,$$

et

$$(\mathcal{D}) = \inf_{u \in L^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \chi_B(u') \right).$$

A-t-on les égalités d'Euler-Lagrange ?

- $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ par la condition (3),

A-t-on les égalités d'Euler-Lagrange ?

- $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ par la condition (3),
- le problème $(\mathcal{D})$ atteint son extremum (problème de projection de Prigozhin)

A-t-on les égalités d'Euler-Lagrange ?

- $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ par la condition (3),
- le problème $(\mathcal{D})$ atteint son extremum (problème de projection de Prigozhin)
- le problème $(\mathcal{P})$ atteint son extremum : $\inf\limits_{\sigma \in E} J(\sigma) = \inf\limits_{\sigma \in H_0^1(\Omega)} J(\sigma)$; si σ_ϵ suite minimisante de J dans E, σ_ϵ bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et σ'_ϵ bornée dans $L^2(\Omega)$ d'où

$$\begin{cases} \sigma_\epsilon \to \sigma \text{ (Rellich)}, \\ \sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma' \text{ (Banach-Alaoglu-Bourbaki)}, \end{cases}$$

et comme J est convexe et en particulier semi-continue inférieure, on a

$$J(\sigma) \leq \liminf_{\substack{\sigma_\epsilon \to \sigma \\ \sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma'}} J(\sigma_\epsilon).$$

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma| = \sigma u' \text{ p.p,} \\ \sigma' = u - f \text{ p.p.} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |u'| \neq 0 \Rightarrow |u'| = 1, \\ \int_\Omega u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx + [\sigma]_{\partial\Omega}\,. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} |\sigma| = \sigma u' \text{ p.p,} \\ \sigma' = u - f \text{ p.p.} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} |u'| \neq 0 \Rightarrow |u'| = 1, \\ \int_\Omega u(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\,dx + [\sigma]_{\partial\Omega} \,. \end{array}\right.$$

Si (u, σ) vérifie (1) et (2), comme $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$, u est solution du problème de projection de Prigozhin : il suffit de résoudre le problème $(\mathcal{P})$ pour obtenir la solution du problème de projection.

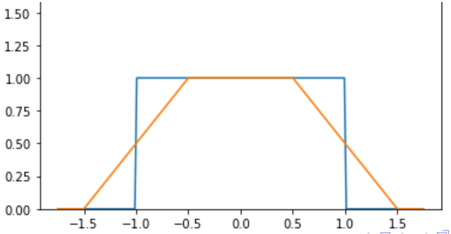
Table des matières

On se donne la fonction f définie par

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On conjecture la solution suivante (projeté sur K) :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty; -\frac{3}{2}], \\ \frac{3}{2} + x & \text{si } x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]. \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; 0]. \end{cases}$$



On cherche σ tel que :

$$\begin{cases} |\sigma| = \sigma u' \text{ p.p,} & (1) \\ \sigma' = u - f \text{ p.p.} & (2) \end{cases}$$

Calcul de $u - f$:

$$(u-f)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} + x & -\frac{3}{2} \leq x \leq -1, \\ x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ 0 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

(2) nous donne alors :

- sur $[-\infty, -\frac{3}{2}]$, $\sigma = C1 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-\frac{3}{2}, -1]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C2,\ C2 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3,\ C3 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, $\sigma = C4 \in \mathbb{R}$.

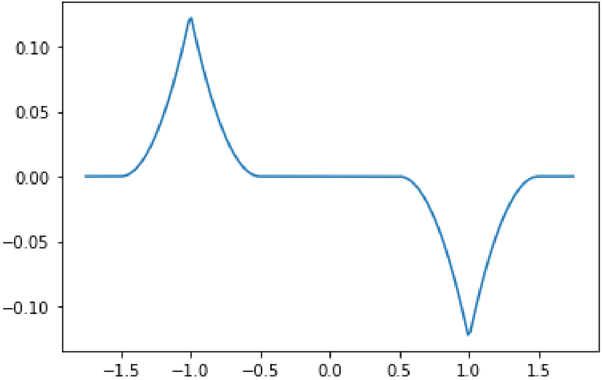
et (1) impose donc :

- sur $[-\frac{2}{2}, -1]$, $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C2 \geq 0$.
- sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3 \geq 0$.

Conservation de la masse $\Longrightarrow$: $C1 = 0$

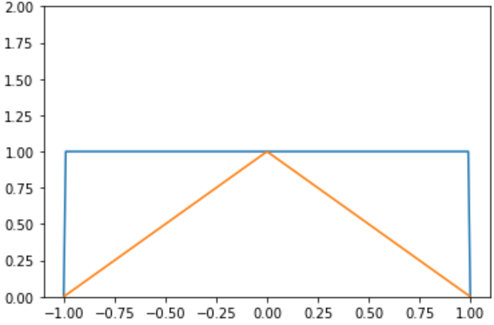
Continuité $\Longrightarrow$ $C2 = \frac{9}{8}$ et $C3 = \frac{1}{8}$

On a alors pour σ :



On reprend le même f .
On conjecture alors pour u :

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$



On applique une méthode similaire :

Calcul de $u - f$:

$$(u-f)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-1,0], \\ -x & \text{si } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Et donc (2) implique :

- sur $[-1,0]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + C1,\ C1 \in \mathbb{R}$.
- sur $[0,1]$, $\sigma = -\frac{x^2}{2} + C2,\ C2 \in \mathbb{R}$

La continuité nous donné $C1 = C2$,

Et (1) impose $C1 \geq 0$ et $C2 \leq 0$, donc $C1 = C2 = 0$

On a ainsi pour σ :

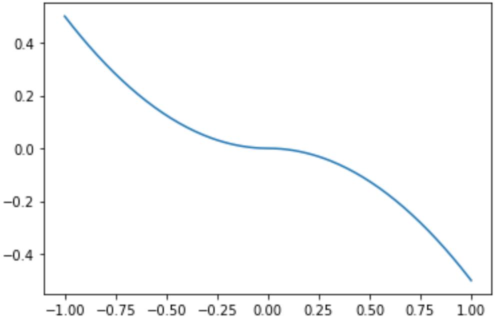


Table des matières

Pour f quelconque ,On veut résoudre numériquement le problème :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \inf \{J(\sigma); \sigma \in L^1(\Omega), \sigma' \in L^2(\Omega)\},$$

Où J définie par :

$$J(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (f + \sigma')^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega f^2 \, dx.$$

$\Longrightarrow$ C'est un problème convexe sans contrainte

On veut utiliser une algorithme du gradient à pas optimal.

Pour déterminer ∇J , on passe par l'écriture :

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) + \epsilon\nabla J.\varphi + o(\epsilon).$$

Où φ fonction test .

En développant et en utilisant l'IPP ,on finit par obtenir :

$$\nabla J(\sigma) = \text{sgn}(\sigma) - \sigma'' - f'.$$

Discrétisation :

On se donne $N \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{N+1}$,

et On définit le maillage $x_j = jh$, $j \in [0, N+1]$

Soit $\Sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N)^T$, $F = (f_1, \cdots, f_N)^T$ interpolées de σ et f

On a alors :

$$(\nabla J(\Sigma))^T = \frac{\Sigma}{|\Sigma|} - A\Sigma - BF,$$

Avec :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Implémentation :

A la n-ieme itération , on pose $\Sigma^{n+1} = \Sigma^n - \tau_{opt} \nabla J(\Sigma)$

Où τ_{opt} déterminé par un linesearch avec le critère d'Armijo.

Résultats pour $f = \chi_{[-1,1]}$:

niter=4000, $|\nabla J^h(\sigma)|/|\nabla J^h(\sigma_0)|$=5.8507e-01, h=1.00e-01, $J^h(\sigma)$=0.0028

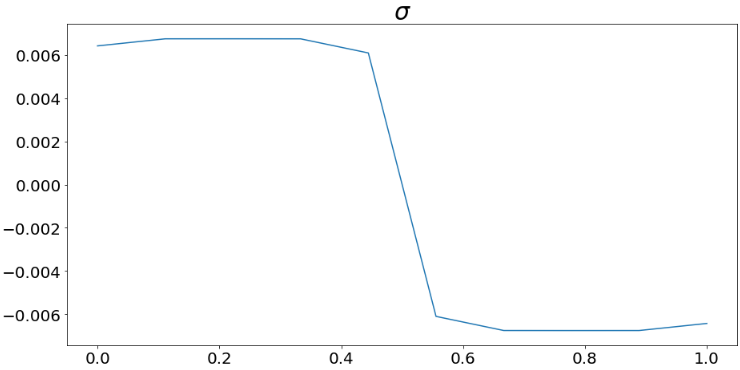


Figure – Solution obtenue

On veut minimiser sur $[-1;1]$:

$$\inf_{u \in K} G(u) = \inf_{u \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 \, dx.$$

$\Longrightarrow$ Comment gérer la contrainte $u \in K$?

$\Longrightarrow$ **méthode de la pénalisation :**

$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} G_\epsilon(u) = \inf_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_\Omega (|u'|-1)_+^2 \, dx,$$

où $a_+ = \max(0, a)$

Méthode du gradient à pas fixe :

la fonction $\Phi : u \mapsto (|u'| - 1)_+^2$ a pour gradient :

$$\nabla\Phi = 2\frac{u'}{|u'|}(|u'| - 1)_+$$

Et donc :

$$\nabla G_\epsilon(u) = u - f + \frac{1}{\epsilon}\frac{u'}{|u'|}(|u'| - 1)_+.$$

Discrétisation :

On discretise $[-1;1]$ en N intervalles :

On pose $h = \frac{2}{N}$ et u_h l'interpolée de u

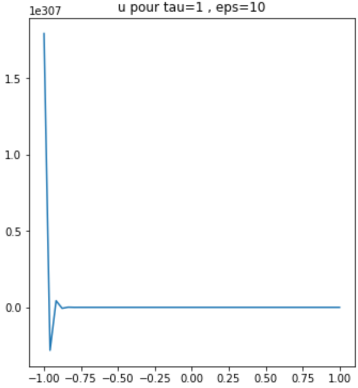
Pour u' , on pose $u'_{hi} = \frac{u_{hi+1} - u_{hi}}{h}$

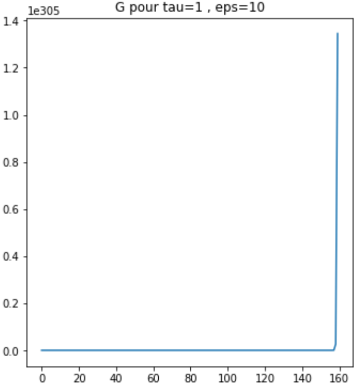
Implémentation :

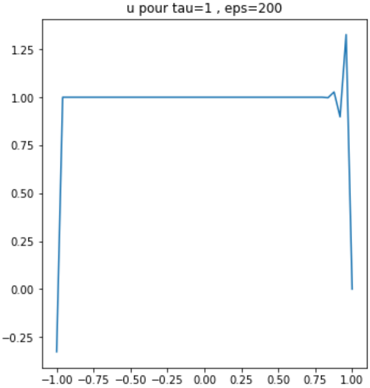
Pour condition initiale , on prend $u_h^0 = f_h$

A la n-ieme itération , on pose $u_h^{n+1} = u_h^n - \tau \nabla G_\epsilon(u_h^n)$

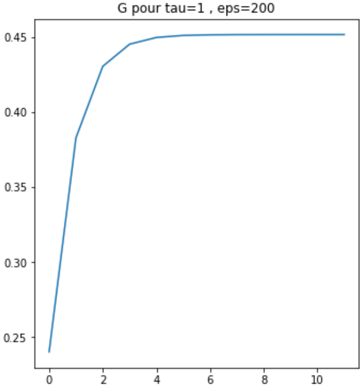
Résultats pour $f = \chi_{[-1,1]}$ **:**



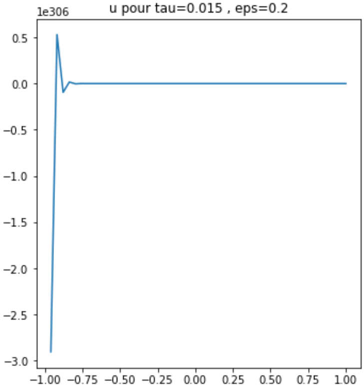




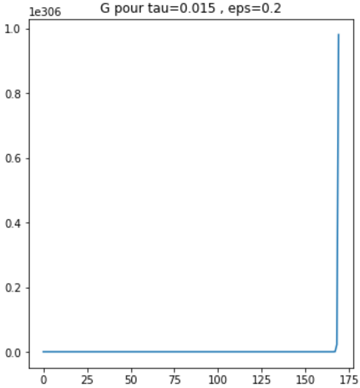
u pour tau=1 , eps=200
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00



G pour tau=1 , eps=200
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0 2 4 6 8 10



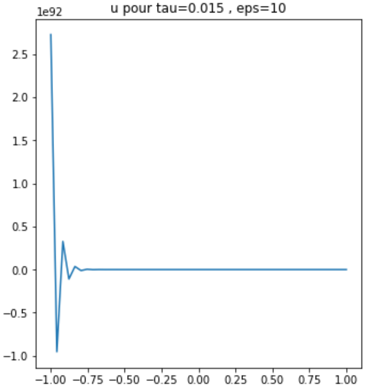
u pour tau=0.015 , eps=0.2
1e306
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

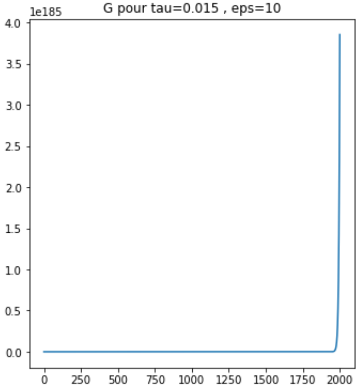


G pour tau=0.015 , eps=0.2
1e306
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
25
50
75
100
125
150
175

Résolution numérique

Problème en u , Cas $\Omega = [-1; 1]$





Résolution numérique

Problème en u , Cas $\Omega = [-1;1]$