Formation d'un tas de sable

Clément Gaultier, Léo Roussel

4 septembre 2021

Table des matières

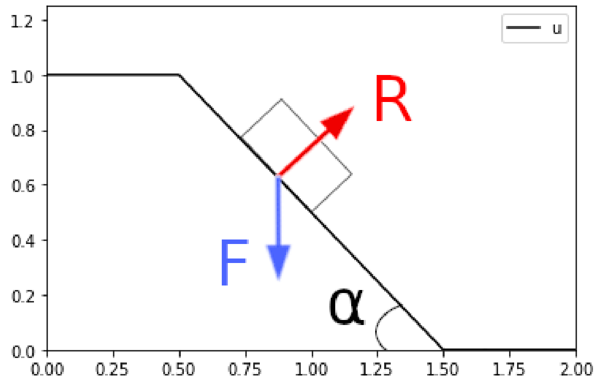
Chapitre 1

Introduction au problème

1.1 Etude qualitative

Le problème porte sur l'auto-organisation de la formation d'un tas de sable. On se donne une fonction f définie sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}$ et représentant la hauteur d'une quantité de sable qu'on lâche sur un intervalle et qui retombe instantanément. L'objectif de l'étude est de déterminer la fonction u qui modélise la hauteur du tas de sable stabilisé, à son état final.

Considérons un grain de sable glissant le long de la pente formée par le tas de sable encore instable : il est soumis d'une part à la gravité et d'autre part à la réaction de son support, qui dépend de l'angle décrit par la pente par rapport à l'horizontale, qu'on notera α. On se donne comme hypothèse que les grains de sable continuent de glisser, c'est-à-dire qu'il y a écoulement de sable tant que $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Cela signifie que le tas de sable, une fois stabilisé, vérifiera $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$; autrement dit, la fonction u doit nécessairement valider la condition $|\nabla u| \leq 1$ presque partout.



En outre, on suppose qu'il y a conservation de la matière entre l'instant initial et l'instant final. Si on écrit $\Omega =]a, b[$ où $a < b$, cela se traduit par l'expression suivante :

$$\int_a^b u(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \sigma(b) - \sigma(a),$$

où σ correspond à l'écoulement de sable ; autrement dit, $\sigma(x)$ est le flux de sable sortant au point x.

Par conséquent, si Ω contient le support de u, c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points où $u \neq 0$, alors la fonction σ est nulle au bord et on aura effectivement

$$\int_a^b u(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans le cas contraire, le glissement des grains de sable en dehors du domaine d'étude donnera lieu à des "pertes" de matière : on verra par la suite le "problème de la table" au paragraphe 3.2.

1.2 Modèle de Prigozhin

Afin de résoudre le problème, on utilise le modèle de projection de Prigozhin : on considère que la fonction u est la projection de f sur un ensemble K choisi de façon à traduire les hypothèses que l'on s'est données. On impose que f soit dans $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert : dès lors, il y a existence et unicité de la projection à condition que K soit un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(\Omega)$.

Afin de respecter la contrainte de stabilité pour u, on introduit l'ensemble de projection :

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p}\}.$$

Démonstration. Montrons que K est un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$:

• **inclusion** : $K \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ donc $K \subset L^2(\Omega)$

• **convexité** : Soient $v, w \in K$, soit $t \in [0, 1]$, $H_0^1(\Omega)$ est convexe donc : $tv + (1-t)w \in H_0^1(\Omega)$; on a $|v'| \leq 1$ p.p et $|w'| \leq 1$ p.p donc :

$$|(tv + (1-t)w)'| \leq t|v'| + (1-t)|w'| \leq t + (1-t) \leq 1 \text{ p.p},$$

d'où $tv + (1-t)w \in K$.

• **fermeture** : On a l'équivalence, pour toute fonction test ϕ telle que $\int_\Omega |\phi(x)|\,dx \leq 1$,

$$|v'| \leq 1 \iff \int_\Omega v(x)\phi'(x)\,dx \leq 1.$$

On se donne alors une suite (v_n) de K convergeant vers v : d'après la réciproque du théorème de convergence dominée, on peut extraire une sous-suite $(v_{\varphi(n)})$ convergeant vers v p.p. En utilisant l'équivalence ci-dessus et en passant à la limite, on obtient bien $|v'| \leq 1$ p.p, d'où $v \in K$. □

Dès lors, f admet une unique projection u sur K, caractérisée par la relation

$$\forall v \in K, (f - u, v - u) \leq 0,$$

ce qui s'écrit dans $L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (f(x) - u(x))(v(x) - u(x))\, dx \leq 0.$$

Cette caractérisation n'est pourtant pas suffisante pour calculer u en général : on va alors avoir recours à la notion de dualité en optimisation convexe afin d'expliciter la projection.

Chapitre 2

Problème primal, problème dual, relations d'extrémalités

2.1 Définition

L'objectif ici est de reformuler le problème initial afin de pouvoir définir son dual et obtenir les égalités dites de Euler-Lagrange, qui nous permettront d'expliciter u.

On définit le problème primal suivant :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{u \in V} (F(u) + G(\Lambda u)),$$

où F, G sont deux fonctions convexes, semi-continues inférieures sur respectivement V, Y deux Banach, et Λ est une application linéaire continue de V dans Y.

On introduit les relations d'extrémalités :

$$\forall p \in Y', \left\{ \begin{array}{rl} -F^\star(\Lambda^\star p) \leq - < p, \Lambda u > + F(u), & (1) \\ -G^\star(-p) \leq - < -p, \Lambda u > + G(\Lambda u), & (2) \end{array} \right.$$

avec $H^\star(p) = \sup_{u \in Y} (< p, u > - F(u))$ la conjuguée de H.

En sommant ces deux inégalités, on obtient le problème dual de $(\mathcal{P})$ en passant au sup et à l'inf :

$$(\mathcal{D}) = \sup_{p \in Y'} - (F^\star(\Lambda^\star p) + G^\star(-p)) \leq (\mathcal{P}).$$

Or, si on a la condition suffisante suivante donnée par [3] (voir aussi théorème I.11 dans [1] et proposition 7.12 dans [2]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{P}) < +\infty, \\ \exists u_0 \in V \text{ tel que } G(\Lambda u_0) < +\infty, F(u_0) < +\infty, \end{array} \right.$$

alors on a $\underline{(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})}$.

De plus, si les extrema de chacun des deux problèmes sont atteints, c'est-à-dire si l'infimum du problème primal $(\mathcal{P})$ est un minimum et si le supremum du problème dual $(\mathcal{D})$ est un maximum, alors les relations d'extrémalités deviennent des égalités.

2.2 Lien avec le problème de Prigozhin

On travaille désormais en dimension 1. Posons $F(\sigma) = \int_\Omega |\sigma|\,dx$, $G(q) = \frac{1}{2}\int_\Omega (f+q)^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f^2\,dx$, $\Lambda = \nabla$, $Y = L^2(\Omega)$ et $V = E := \{\sigma \in L^1(\Omega); \sigma' \in L^2(\Omega)\}$.

On a alors $F^\star(q) = \chi_B(q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \in B, \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases}$

avec $B = \{p \in L^\infty(\Omega); |p| \leq 1\}$, $\Lambda^\star = -\nabla$ et $G^\star(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2\,dx$.

Dès lors, le problème primal $(\mathcal{P})$ s'écrit

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \int_\Omega |\sigma|\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (f+\sigma')^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega f^2\,dx,$$

et son dual $(\mathcal{D})$ est donné par

$$(\mathcal{D}) = \sup_{u \in Y'} -\left(\frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2\,dx + \chi_B(u')\right) = \inf_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2\,dx + \chi_B(u')\right).$$

Par suite, le problème $(\mathcal{D})$ est le problème de projection de Prigozhin, et réciproquement, le problème $(\mathcal{P})$ est le dual du problème de Prigozhin.

On souhaite pouvoir exploiter les égalités d'Euler-Lagrange. Tout d'abord, vérifions si la condition suffisante pour l'égalité $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ est validée ici. Soit σ dans E, montrons que $J(\sigma)$ est majorée.

$$J(\sigma) = \int_\Omega |\sigma|\,dx + \int_\Omega \sigma' f\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma'^2\,dx = \int_\Omega |\sigma|\,dx + \int_\Omega \sigma'(f + \frac{\sigma'}{2})\,dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$J(\sigma) \leq \|\sigma\|_{L^1} + \|\sigma'\|_{L^2}(\|f\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|\sigma'\|_{L^2}),$$

et comme σ est dans E et qu'on suppose f dans $L^2(\Omega)$, on a bien $(\mathcal{P}) < +\infty$.

Par ailleurs, pour une fonction σ_0 de E, on a

$$G(\Lambda\sigma_0) = G(\sigma_0') = (\sigma_0', f) + \frac{1}{2}\|\sigma_0'\|_{L^2} \text{ et } F(\sigma_0) = \|\sigma_0\|_{L^1},$$

d'où, immédiatement par définition de E, $G(\sigma_0') < +\infty$, $F(\sigma_0) < +\infty$.

On a alors bien $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ ici. Il reste à montrer que les extrema respectifs des problèmes $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{D})$ sont atteints.

Démonstration. • Commençons par le problème $(\mathcal{D})$: étant donné que ce problème est équivalent au problème de projection de Prigozhin et qu'on a montré l'existence et l'unicité d'une projection, on a dès lors bien

$$(\mathcal{D}) = \inf_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \chi_B(u') \right) = \min_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2} \int_\Omega (u-f)^2 \, dx + \chi_B(u') \right).$$

• Passons au problème $(\mathcal{P})$. Si Ω est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ assez grand, tel que $\sigma \equiv 0$ en dehors de Ω, par densité des fonctions régulières dans E, on peut écrire

$$\inf_E J(\sigma) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J(\sigma).$$

On se donne maintenant une suite minimisante σ_ϵ dans E vérifiant

$$\inf J(\sigma) \leq J(\sigma_\epsilon) < \inf J(\sigma) + \epsilon.$$

La suite σ_ϵ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et la suite σ'_ϵ est bornée dans $L^2(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée σ_ϵ par abus de notation qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et par le théorème de Rellich,

$$\sigma_\epsilon \to \sigma \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki,

$$\sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma' \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent, comme la fonctionnelle J est semi-continue inférieure, on peut écrire

$$J(\sigma) \leq \liminf_{\substack{\sigma_\epsilon \to \sigma \\ \sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma'}} J(\sigma_\epsilon),$$

d'où la convergence, et $\underline{\inf = \min}$. □

Les égalités d'Euler-Lagrange nous donnent donc ici :

$$\begin{cases} |\sigma| = \sigma u' \text{ p.p,} & (1) \\ \sigma' = u - f \text{ p.p.} & (2) \end{cases}$$

On déduit de (1) par passage à la valeur absolue que nécessairement, on a :

$$|u'| \neq 0 \Longrightarrow |u'| = 1.$$

D'autre part, (2) nous donne l'équation de conservation de la matière vue au paragraphe 1.1.

Par ailleurs, si le couple (u, σ) vérifie les égalités (1) et (2), alors

$$(1) + (2) = -(F^\star(\Lambda^\star u) + G^\star(-u)) = F(\sigma) + G(\Lambda\sigma),$$

et comme $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$, u est solution de

$$\int_\Omega (u-f)(u-v) \, dx \leq 0 \text{ pour tout } v \in K,$$

ce qui signifie qu'il suffit de résoudre $(\mathcal{P})$ pour obtenir la solution du problème de projection à partir des relations d'extrémalité.

Chapitre 3

Résolution théorique d'un problème

3.1 Cas $\Omega = \mathbb{R}$

On se donne la fonction f définie par

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction appartient bien à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} 1\, dx = 2 < +\infty.$$

On cherche un couple (u, σ) solution des égalités d'Euler-Lagrange, et donc tel que u, σ solutions respectives des problèmes $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{P})$.

On se donne alors une fonction u conjecture de la solution au problème de Prigozhin et on souhaite déterminer la fonction σ dans E telle que (u, σ) vérifie les relations d'extrémalité : ainsi on aura montré que u est bien l'unique solution du problème. Par symétrie de u on travaille sur $[-\infty, 0]$. Puisqu'on est dans le cas $\Omega = \mathbb{R}$, on a l'hypothèse de conservation de la matière :

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

De plus, on sait que $u' = 0$ ou 1, ce qui nous amène à établir la conjecture suivante sur u :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty; -\frac{3}{2}], \\ \frac{3}{2} + x & \text{si } x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]. \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; 0]. \end{cases}$$

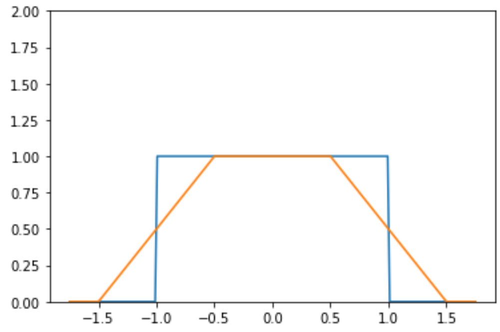


FIGURE 3.1 – f et u

Calculons $u - f$:

$$(u-f)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} + x & -\frac{3}{2} \leq x \leq -1, \\ x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ 0 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

On intègre sur $]-\infty, 0]$. On obtient alors

- sur $[-\infty, -\frac{3}{2}]$, $\sigma = C1 \in \mathbb{R}$,

- sur $[-\frac{3}{2}, -1]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C2$, $C2 \in \mathbb{R}$,

- sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3$, $C3 \in \mathbb{R}$,

- sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, $\sigma = C4 \in \mathbb{R}$.

Or, comme σ doit être dans $L^1(\mathbb{R})$ et que $\int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}} C1\, dx = \pm\infty$ si $C1 \neq 0$, on en déduit que $C1 = 0$.

Sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, $u' = 0$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies \sigma = 0$ donc $C4 = 0$.

Sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $u' = 1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies |\sigma| = \sigma$, donc on a $\sigma \geq 0$, ce qui équivaut à $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3 \geq 0$.

C'est un polynôme du second degré ayant pour minimum $-\frac{1}{8}$ en $x = -\frac{1}{2}$, on en déduit que $C3 \geq \frac{1}{8}$.
En faisant un raisonnement similaire sur $[-\frac{3}{2}, -1]$, on trouve que $C2 \geq \frac{9}{8}$. Cependant σ doit être continue, donc en $x = -\frac{3}{2}$ on a

$$\sigma(-\frac{3}{2}) = C1 = 0 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + C2 \implies C2 = \frac{9}{8} \text{ (et donc on a bien } C2 \geq \frac{9}{8}).$$

De même en évaluant en $x = -\frac{1}{2}$, on trouve $C3 = \frac{1}{8}$ (et donc on a bien $C3 \geq \frac{1}{8}$).

De plus de tels choix pour C2 et C3 respectent également la continuité en -1. Avec un calcul similaire sur $[0, +\infty]$ (on obtient un prolongement impair de σ), la fonction σ ainsi calculée est donc bien une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et de dérivée dans $L^2(\mathbb{R})$, qui respecte les conditions d'extrêmalités avec u. On en déduit qu'elle est solution du problème dual et que u est bien solution du problème de Prigozhin sur $\mathbb{R}$.

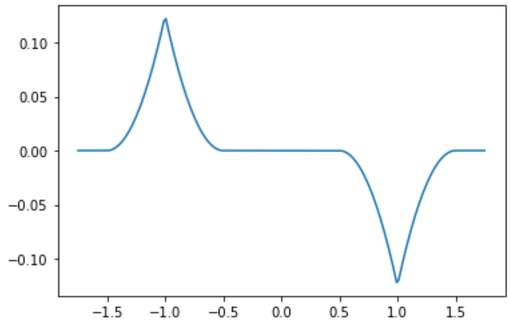


FIGURE 3.2 – σ calculé

3.2 Cas $\Omega = [-1, 1]$

On se donne la même fonction f que dans le problème précédent. On n'a plus la conservation de la masse ici car le sable peut s'écouler hors du domaine ; on se donne alors comme conjecture :

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

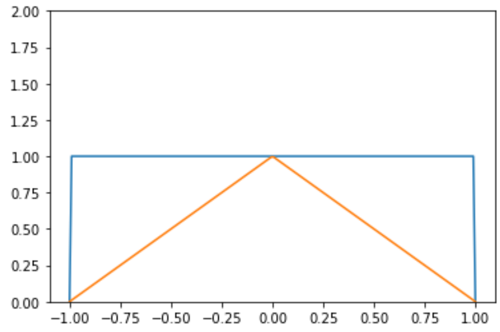


FIGURE 3.3 – f et u

Donc pour $x \in [-1, 0]$, $(u - f)(x) = x$ et $\sigma' = u - f \Leftrightarrow \sigma = \frac{x^2}{2} + C1$, $C1 \in \mathbb{R}$.

De plus $u' = 1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies \frac{x^2}{2} + C1 \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 0]$, d'où $C1 \geq 0$.

De même, pour $x \in [0, 1]$, $(u - f)(x) = -x$ et $\sigma' = u - f \Leftrightarrow \sigma = -\frac{x^2}{2} + C2$, $C2 \in \mathbb{R}$.

En outre, $u' = -1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies \frac{x^2}{2} + C1 \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $C2 \leq 0$.

En évaluant en 0, la continuité impose alors $C1 = C2$, et on déduit donc de $C1 \geq 0$ et $C2 \leq 0$ que $C1 = C2 = 0$. En conclusion, la fonction σ obtenue vérifie $\sigma \in L^1(\Omega)$ et $\sigma' \in L^2(\Omega)$ ainsi que les relations d'extrémalités avec u ce qui démontre notre conjecture.

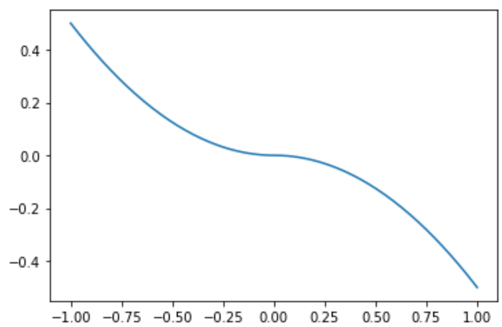


FIGURE 3.4 – σ calculé

Chapitre 4

Résolution numérique

On distingue deux approches pour la résolution du problème : soit trouver une solution σ du problème $(\mathcal{P})$ et retrouver u par les égalités d'Euler-Lagrange, soit déterminer u directement en résolvant le problème $(\mathcal{D})$, en se ramenant à un problème de minimisation sans contraintes par la méthode de pénalisation.

4.1 Résolution du problème en σ

On rappelle le problème que l'on souhaite résoudre ici :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \inf \{J(\sigma); \sigma \in L^1(\Omega), \sigma' \in L^2(\Omega)\},$$

avec la fonctionnelle convexe J définie par

$$J(\sigma) = \int_\Omega |\sigma| \, dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (f + \sigma')^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega f^2 \, dx.$$

Puisqu'on est dans le cadre d'un problème de minimisation sans contraintes, il suffit de calculer le gradient de J puis de construire un algorithme de descente qui renverra en sortie une fonction σ_0 discrétisée sur l'intervalle étudié.

On calcule donc dans un premier temps ∇J : soient $\epsilon > 0$, φ une fonction test, $\sigma \in E$; par définition de la différentiabilité, on peut écrire

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) + \epsilon \nabla J.\varphi + o(\epsilon).$$

En développant le membre de gauche, on obtient

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) - \int_\Omega |\sigma| \, dx + \int_\Omega |\sigma + \epsilon\varphi| \, dx + \epsilon \left[\int_\Omega \sigma'\varphi' \, dx + \int_\Omega \varphi' f \, dx \right] + o(\epsilon).$$

Après intégrations par parties et simplifications, on en déduit

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) + \epsilon \left[\int_\Omega \varphi \, \mathrm{sgn}(\sigma) \, dx - \int_\Omega \sigma''\varphi \, dx - \int_\Omega \varphi f' \, dx \right] + o(\epsilon),$$

ce qui nous donne pour l'expression du gradient

$$\boxed{\nabla J(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) - \sigma'' - f'.}$$

On procède maintenant à une approximation par différences finies. En se ramenant à l'intervalle [0,1] qu'on discrétise par $x_j = jh$ et $g^j = g(x_j)$ pour $j \in [\![0, N+1]\!]$, avec $h = \frac{1}{N+1}$, on pose $\Sigma = (\sigma_1, \cdots, \sigma_N)^T$, $F = (f_1, \cdots, f_N)^T$, et on trouve l'expression

$$(\nabla J(\Sigma))^T = \frac{\Sigma}{|\Sigma|} - A\Sigma - BF,$$

avec :

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Résolution du problème en u

On va chercher à déterminer une solution approchée du problème de minimisation :

$$\inf_{u \in K} G(u) = \inf_{u \in K} \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2\,dx.$$

On a vu que le problème était bien posé .Plutôt que d'essayer de résoudre le problème avec la contrainte $u \in K$ ($\Leftrightarrow |u'| \leq 1$), on utilise la méthode dite de pénalisation pour se ramener à un problème sans contraintes.
Pour un élément quelconque a, on définit

$$a_+ = \max(0, a),$$

et on introduit le problème approché suivant :

$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} G_\epsilon(u) = \inf_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2\,dx + \frac{1}{2\epsilon}\int_\Omega (|u'|-1)_+^2\,dx,$$

où le deuxième terme est le terme de pénalisation.

On veut implémenter une méthode numérique pour résoudre ce problème quelque soit la fonction initiale f. On va pour cela utiliser la méthode du gradient sur G_ϵ. Comme le gradient de la fonction $\Phi : u \mapsto (|u'|-1)_+^2$ est donné par

$$\nabla\Phi = 2\frac{u'}{|u'|}(|u'|-1)_+,$$

il vient que le gradient de G_ϵ s'écrit

$$\nabla G_\epsilon(u) = u - f + \frac{1}{\epsilon}\frac{u'}{|u'|}(|u'|-1)_+.$$

Pour la méthode numérique, on discrétisera u et f et on utilisera un taux d'accroissement pour le calcul de u'.

Bibliographie

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1983.

[2] F. et G. Demengel, *Convexité dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, 2004.

[3] Y. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, GauthierVillars, 1974.

[4] L.C. Evans et F. Rezakhanlou, *A stochastic model for growing sandpiles and its continuum limit*, Comm. in Math. Physics, 197, 325-345 (1998).

[5] F. Demengel, *Problèmes variationnels de la mécanique*, cours de troisième cycle, Université Paris-Sud, 1989.