

Formation d'un tas de sable

Clément Gaultier, Léo Roussel

8 mai 2021

Table des matières

1	Introduction au problème	3
1.1	Etude qualitative	3
1.2	Modèle de Prigozhin	4
2	Problème primal, problème dual, relations d'extrémalités	6
2.1	Définition	6
2.2	Lien avec le problème de Prigozhin	7
3	Résolution théorique d'un problème	9
3.1	Cas $\Omega = \mathbb{R}$	9
3.2	Cas $\Omega = [-1, 1]$	11
4	Résolution numérique	13
4.1	Résolution du problème en σ	13
4.2	Résolution du problème en u	14
	Annexe	20
	Bibliographie	21

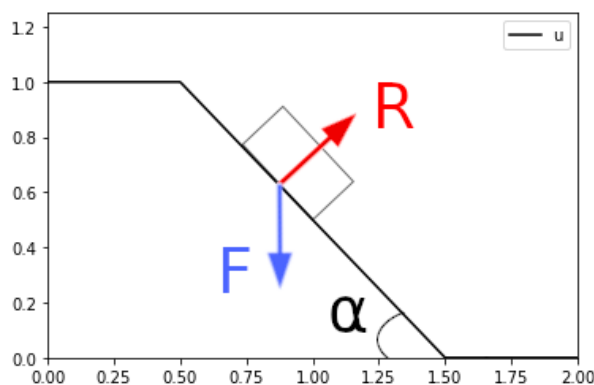
Chapitre 1

Introduction au problème

1.1 Etude qualitative

Le problème porte sur l'auto-organisation de la formation d'un tas de sable. On se donne une fonction f définie sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}$ et représentant la hauteur d'une quantité de sable qu'on lâche sur un intervalle et qui retombe instantanément. L'objectif de l'étude est de déterminer la fonction u qui modélise la hauteur du tas de sable stabilisé, à son état final.

Considérons un grain de sable glissant le long de la pente formée par le tas de sable encore instable : il est soumis d'une part à la gravité et d'autre part à la réaction de son support, qui dépend de l'angle décrit par la pente par rapport à l'horizontale, qu'on notera α . On se donne comme hypothèse que les grains de sable continuent de glisser, c'est-à-dire qu'il y a écoulement de sable tant que $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Cela signifie que le tas de sable, une fois stabilisé, vérifiera $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$; autrement dit, la fonction u doit nécessairement valider la condition $|\nabla u| \leq 1$ presque partout.



En outre, on suppose qu'il y a conservation de la matière entre l'instant initial et l'instant final. Si on écrit $\Omega =]a, b[$ où $a < b$, cela se traduit par l'expression suivante :

$$\int_a^b u(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \sigma(b) - \sigma(a),$$

où σ correspond à l'écoulement de sable ; autrement dit, $\sigma(x)$ est le flux de sable sortant au point x .

Par conséquent, si Ω contient le support de u , c'est-à-dire l'adhérence de l'ensemble des points où $u \neq 0$, alors la fonction σ est nulle au bord et on aura effectivement

$$\int_a^b u(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Dans le cas contraire, le glissement des grains de sable en dehors du domaine d'étude donnera lieu à des "pertes" de matière : on verra par la suite le "problème de la table" au paragraphe 3.2.

1.2 Modèle de Prigozhin

Afin de résoudre le problème, on utilise le modèle de projection de Prigozhin : on considère que la fonction u est la projection de f sur un ensemble K choisi de façon à traduire les hypothèses que l'on s'est données. On impose que f soit dans $L^2(\Omega)$ qui est un espace de Hilbert : dès lors, il y a existence et unicité de la projection à condition que K soit un sous-ensemble convexe fermé non vide de $L^2(\Omega)$.

Afin de respecter la contrainte de stabilité pour u , on introduit l'ensemble de projection :

$$K = \{v \in H_0^1(\Omega); |v'| \leq 1 \text{ p.p.}\}.$$

Démonstration. Montrons que K est un sous-ensemble convexe fermé de $L^2(\Omega)$:

- **inclusion** : $K \subset H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ donc $K \subset L^2(\Omega)$

- **convexité** : Soient $v, w \in K$, soit $t \in [0, 1]$, $H_0^1(\Omega)$ est convexe donc : $tv + (1-t)w \in H_0^1(\Omega)$; on a $|v'| \leq 1$ p.p et $|w'| \leq 1$ p.p donc :

$$|(tv + (1-t)w)'| \leq t|v'| + (1-t)|w'| \leq t + (1-t) \leq 1 \text{ p.p.},$$

d'où $tv + (1-t)w \in K$.

- **fermeture** : On a l'équivalence, pour toute fonction test ϕ telle que $\int_{\Omega} |\phi(x)| dx \leq 1$,

$$|v'| \leq 1 \iff \int_{\Omega} v(x)\phi'(x) dx \leq 1.$$

On se donne alors une suite (v_n) de K convergeant vers v : d'après la réciproque du théorème de convergence dominée, on peut extraire une sous-suite $(v_{\varphi(n)})$ convergeant vers v p.p. En utilisant l'équivalence ci-dessus et en passant à la limite, on obtient bien $|v'| \leq 1$ p.p, d'où $v \in K$. \square

Dès lors, f admet une unique projection u sur K , caractérisée par la relation

$$\forall v \in K, (f - u, v - u) \leq 0,$$

ce qui s'écrit dans $L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (f(x) - u(x))(v(x) - u(x)) \, dx \leq 0.$$

Cette caractérisation n'est pourtant pas suffisante pour calculer u en général : on va alors avoir recours à la notion de dualité en optimisation convexe afin d'expliciter la projection.

Chapitre 2

Problème primal, problème dual, relations d'extrémalités

2.1 Définition

L'objectif ici est de reformuler le problème initial afin de pouvoir définir son dual et obtenir les égalités dites de Euler-Lagrange, qui nous permettront d'expliciter u .

On définit le problème primal suivant :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{u \in V} (F(u) + G(\Lambda u)),$$

où F, G sont deux fonctions convexes, semi-continues inférieures sur respectivement V, Y deux Banach, et Λ est une application linéaire continue de V dans Y .

On introduit les relations d'extrémalités :

$$\forall p \in Y', \begin{cases} -F^*(\Lambda^*p) \leq -\langle p, \Lambda u \rangle + F(u), & (1) \\ -G^*(-p) \leq -\langle -p, \Lambda u \rangle + G(\Lambda u), & (2) \end{cases}$$

avec $H^*(p) = \sup_{u \in Y} (\langle p, u \rangle - F(u))$ la conjuguée de H .

En sommant ces deux inégalités, on obtient le problème dual de (\mathcal{P}) en passant au sup et à l'inf :

$$(\mathcal{D}) = \sup_{p \in Y'} - (F^*(\Lambda^*p) + G^*(-p)) \leq (\mathcal{P}).$$

Or, si on a la condition suffisante suivante donnée par [3] (voir aussi théorème I.11 dans [1] et proposition 7.12 dans [2]) :

$$\begin{cases} (\mathcal{P}) < +\infty, \\ \exists u_0 \in V \text{ tel que } G(\Lambda u_0) < +\infty, F(u_0) < +\infty, \end{cases}$$

alors on a $\underline{(\mathcal{D})} = (\mathcal{P})$.

De plus, si les extrema de chacun des deux problèmes sont atteints, c'est-à-dire si l'infimum du problème primal (\mathcal{P}) est un minimum et si le supremum du problème dual (\mathcal{D}) est un maximum, alors les relations d'extrémalités deviennent des égalités.

2.2 Lien avec le problème de Prigozhin

On travaille désormais en dimension 1. Posons $F(\sigma) = \int_{\Omega} |\sigma| dx$, $G(q) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f + q)^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx$, $\Lambda = \nabla$, $Y = L^2(\Omega)$ et $V = E := \{\sigma \in L^1(\Omega); \sigma' \in L^2(\Omega)\}$.

On a alors $F^*(q) = \chi_B(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \in B, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$

avec $B = \{p \in L^\infty(\Omega); |p| \leq 1\}$, $\Lambda^* = -\nabla$ et $G^*(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx$.

Dès lors, le problème primal (\mathcal{P}) s'écrit

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \int_{\Omega} |\sigma| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f + \sigma')^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx,$$

et son dual (\mathcal{D}) est donné par

$$(\mathcal{D}) = \sup_{u \in Y'} - \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \chi_B(u') \right) = \inf_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \chi_B(u') \right).$$

Par suite, le problème (\mathcal{D}) est le problème de projection de Prigozhin, et réciproquement, le problème (\mathcal{P}) est le dual du problème de Prigozhin.

On souhaite pouvoir exploiter les égalités d'Euler-Lagrange. Tout d'abord, vérifions si la condition suffisante pour l'égalité $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ est validée ici. Soit σ dans E , montrons que $J(\sigma)$ est majorée.

$$J(\sigma) = \int_{\Omega} |\sigma| dx + \int_{\Omega} \sigma' f dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma'^2 dx = \int_{\Omega} |\sigma| dx + \int_{\Omega} \sigma' \left(f + \frac{\sigma'}{2} \right) dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$J(\sigma) \leq \|\sigma\|_{L^1} + \|\sigma'\|_{L^2} (\|f\|_{L^2} + \frac{1}{2} \|\sigma'\|_{L^2}),$$

et comme σ est dans E et qu'on suppose f dans $L^2(\Omega)$, on a bien $(\mathcal{P}) < +\infty$.

Par ailleurs, pour une fonction σ_0 de E , on a

$$G(\Lambda\sigma_0) = G(\sigma'_0) = (\sigma'_0, f) + \frac{1}{2} \|\sigma'_0\|_{L^2}^2 \text{ et } F(\sigma_0) = \|\sigma_0\|_{L^1},$$

d'où, immédiatement par définition de E , $G(\sigma'_0) < +\infty$, $F(\sigma_0) < +\infty$.

On a alors bien $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$ ici. Il reste à montrer que les extrema respectifs des problèmes (\mathcal{P}) et (\mathcal{D}) sont atteints.

Démonstration. • Commençons par le problème (\mathcal{D}) : étant donné que ce problème est équivalent au problème de projection de Prigozhin et qu'on a montré l'existence et l'unicité d'une projection, on a dès lors bien

$$(\mathcal{D}) = \inf_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \chi_B(u') \right) = \min_{u \in Y'} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \chi_B(u') \right).$$

• Passons au problème (\mathcal{P}) . Si Ω est un intervalle borné de \mathbb{R} assez grand, tel que $\sigma \equiv 0$ en dehors de Ω , par densité des fonctions régulières dans E , on peut écrire

$$\inf_E J(\sigma) = \inf_{H_0^1(\Omega)} J(\sigma).$$

On se donne maintenant une suite minimisante σ_ϵ dans E vérifiant

$$\inf J(\sigma) \leq J(\sigma_\epsilon) < \inf J(\sigma) + \epsilon.$$

La suite σ_ϵ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ et la suite σ'_ϵ est bornée dans $L^2(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée σ_ϵ par abus de notation qui converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et par le théorème de Rellich,

$$\sigma_\epsilon \rightarrow \sigma \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

Par ailleurs, d'après le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki,

$$\sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma' \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent, comme la fonctionnelle J est semi-continue inférieure, on peut écrire

$$J(\sigma) \leq \liminf_{\substack{\sigma_\epsilon \rightarrow \sigma \\ \sigma'_\epsilon \rightharpoonup \sigma'}} J(\sigma_\epsilon),$$

d'où la convergence, et $\inf = \min$. □

Les égalités d'Euler-Lagrange nous donnent donc ici :

$$\begin{cases} |\sigma| = \sigma u' \text{ p.p.} & (1) \\ \sigma' = u - f \text{ p.p.} & (2) \end{cases}$$

On déduit de (1) par passage à la valeur absolue que nécessairement, on a :

$$|u'| \neq 0 \implies |u'| = 1.$$

D'autre part, (2) nous donne l'équation de conservation de la matière vue au paragraphe 1.1.

Par ailleurs, si le couple (u, σ) vérifie les égalités (1) et (2), alors

$$(1) + (2) = -(F^*(\Lambda^* u) + G^*(-u)) = F(\sigma) + G(\Lambda \sigma),$$

et comme $(\mathcal{D}) = (\mathcal{P})$, u est solution de

$$\int_{\Omega} (u - f)(u - v) dx \leq 0 \text{ pour tout } v \in K,$$

ce qui signifie qu'il suffit de résoudre (\mathcal{P}) pour obtenir la solution du problème de projection à partir des relations d'extrémalité.

Chapitre 3

Résolution théorique d'un problème

3.1 Cas $\Omega = \mathbb{R}$

On se donne la fonction f définie par

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1, 1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction appartient bien à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2 < +\infty.$$

On cherche un couple (u, σ) solution des égalités d'Euler-Lagrange, et donc tel que u, σ solutions respectives des problèmes (\mathcal{D}) et (\mathcal{P}) .

On se donne alors une fonction u conjecture de la solution au problème de Prigozhin et on souhaite déterminer la fonction σ dans E telle que (u, σ) vérifie les relations d'extrémalité : ainsi on aura montré que u est bien l'unique solution du problème. Par symétrie de u on travaille sur $[-\infty, 0]$. Puisqu'on est dans le cas $\Omega = \mathbb{R}$, on a l'hypothèse de conservation de la matière :

$$\int_{\Omega} u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

De plus, on sait que $u' = 0$ ou 1, ce qui nous amène à établir la conjecture suivante sur u :

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty; -\frac{3}{2}], \\ \frac{3}{2} + x & \text{si } x \in [-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}], \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}; 0]. \end{cases}$$

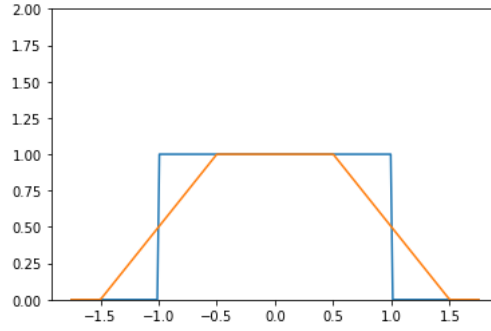


FIGURE 3.1 – f et u

Calculons $u - f$:

$$(u - f)(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -\frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} + x & -\frac{3}{2} \leq x \leq -1, \\ x + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2}, \\ 0 & -\frac{1}{2} \leq x \leq 0. \end{cases}$$

On intègre sur $] -\infty, 0]$. On obtient alors

- sur $[-\infty, -\frac{3}{2}]$, $\sigma = C1 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-\frac{3}{2}, -1]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x + C2$, $C2 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $\sigma = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3$, $C3 \in \mathbb{R}$,
- sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, $\sigma = C4 \in \mathbb{R}$.

Or, comme σ doit être dans $L^1(\mathbb{R})$ et que $\int_{-\infty}^{-\frac{3}{2}} C1 dx = \pm\infty$ si $C1 \neq 0$, on en déduit que $C1 = 0$.

Sur $[-\frac{1}{2}, 0]$, $u' = 0$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies \sigma = 0$ donc $C4 = 0$.

Sur $[-1, -\frac{1}{2}]$, $u' = 1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \implies |\sigma| = \sigma$, donc on a $\sigma \geq 0$, ce qui équivaut à $\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + C3 \geq 0$.

C'est un polynôme du second degré ayant pour minimum $-\frac{1}{8}$ en $x = -\frac{1}{2}$, on en déduit que $C3 \geq \frac{1}{8}$.

En faisant un raisonnement similaire sur $[-\frac{3}{2}, -1]$, on trouve que $C2 \geq \frac{9}{8}$. Cependant σ doit être continue, donc en $x = -\frac{3}{2}$ on a

$$\sigma(-\frac{3}{2}) = C1 = 0 = \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + C2 \implies C2 = \frac{9}{8} \text{ (et donc on a bien } C2 \geq \frac{9}{8}\text{)}.$$

De même en évaluant en $x = -\frac{1}{2}$, on trouve $C3 = \frac{1}{8}$ (et donc on a bien $C3 \geq \frac{1}{8}$).

De plus de tels choix pour C2 et C3 respectent également la continuité en -1 . Avec un calcul similaire sur $[0, +\infty]$ (on obtient un prolongement impair de σ), la fonction σ ainsi calculée est donc bien une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et de dérivée dans $L^2(\mathbb{R})$, qui respecte les conditions d'extrémalités avec u . On en déduit qu'elle est solution du problème dual et que u est bien solution du problème de Prigozhin sur \mathbb{R} .

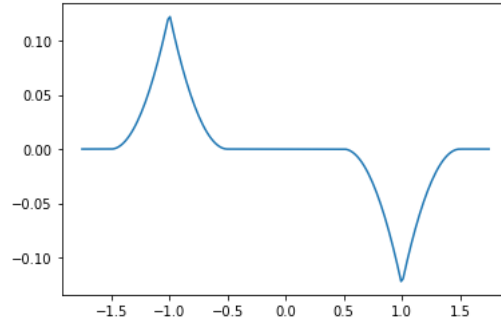


FIGURE 3.2 – σ calculé

3.2 Cas $\Omega = [-1, 1]$

On se donne la même fonction f que dans le problème précédent. On n'a plus la conservation de la masse ici car le sable peut s'écouler hors du domaine; on se donne alors comme conjecture :

$$u(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0], \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

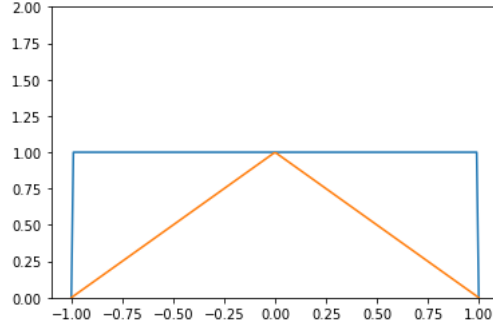


FIGURE 3.3 – f et u

Donc pour $x \in [-1, 0]$, $(u - f)(x) = x$ et $\sigma' = u - f \Leftrightarrow \sigma = \frac{x^2}{2} + C1$, $C1 \in \mathbb{R}$.

De plus $u' = 1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \Rightarrow \frac{x^2}{2} + C1 \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 0]$, d'où $C1 \geq 0$.

De même, pour $x \in [0, 1]$, $(u - f)(x) = -x$ et $\sigma' = u - f \Leftrightarrow \sigma = -\frac{x^2}{2} + C2$, $C2 \in \mathbb{R}$.

En outre, $u' = -1$ donc $|\sigma| = \sigma u' \Rightarrow \frac{x^2}{2} + C1 \leq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, donc $C2 \leq 0$.

En évaluant en 0, la continuité impose alors $C1 = C2$, et on déduit donc de $C1 \geq 0$ et $C2 \leq 0$ que $C1 = C2 = 0$. En conclusion, la fonction σ obtenue vérifie $\sigma \in L^1(\Omega)$ et $\sigma' \in L^2(\Omega)$ ainsi que les relations d'extrémalités avec u ce qui démontre notre conjecture.

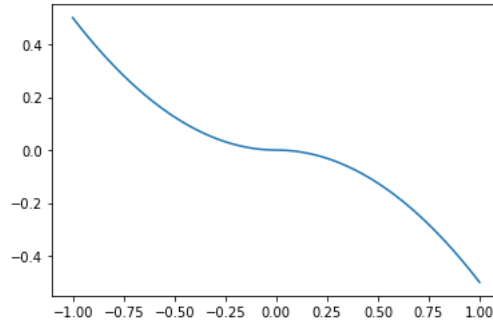


FIGURE 3.4 – σ calculé

Chapitre 4

Résolution numérique

On distingue deux approches pour la résolution du problème : soit trouver une solution σ du problème (\mathcal{P}) et retrouver u par les égalités d'Euler-Lagrange, soit déterminer u directement en résolvant le problème (\mathcal{D}) , en se ramenant à un problème de minimisation sans contraintes par la méthode de pénalisation.

4.1 Résolution du problème en σ

On rappelle le problème que l'on souhaite résoudre ici :

$$(\mathcal{P}) = \inf_{\sigma \in E} J(\sigma) = \inf \{J(\sigma); \sigma \in L^1(\Omega), \sigma' \in L^2(\Omega)\},$$

avec la fonctionnelle convexe J définie par

$$J(\sigma) = \int_{\Omega} |\sigma| dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (f + \sigma')^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f^2 dx.$$

Puisqu'on est dans le cadre d'un problème de minimisation sans contraintes, il suffit de calculer le gradient de J puis de construire un algorithme de descente qui renverra en sortie une fonction σ_0 discrétisée sur l'intervalle étudié.

On calcule donc dans un premier temps ∇J : soient $\epsilon > 0$, φ une fonction test, $\sigma \in E$; par définition de la différentiabilité, on peut écrire

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) + \epsilon \nabla J \cdot \varphi + o(\epsilon).$$

En développant le membre de gauche, on obtient

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) - \int_{\Omega} |\sigma| dx + \int_{\Omega} |\sigma + \epsilon\varphi| dx + \epsilon \left[\int_{\Omega} \sigma' \varphi' dx + \int_{\Omega} \varphi' f dx \right] + o(\epsilon).$$

Après intégrations par parties et simplifications, on en déduit

$$J(\sigma + \epsilon\varphi) = J(\sigma) + \epsilon \left[\int_{\Omega} \varphi \operatorname{sgn}(\sigma) dx - \int_{\Omega} \sigma'' \varphi dx - \int_{\Omega} \varphi f' dx \right] + o(\epsilon),$$

ce qui nous donne pour l'expression du gradient

$$\boxed{\nabla J(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) - \sigma'' - f'}.$$

On procède maintenant à une approximation par différences finies. En se ramenant à l'intervalle $[0,1]$ qu'on discrétise par $x_j = jh$ et $g^j = g(x_j)$ pour $j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, avec $h = \frac{1}{N+1}$, on pose $\Sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T$, $F = (f_1, \dots, f_N)^T$, et on trouve l'expression

$$(\nabla J(\Sigma))^T = \frac{\Sigma}{|\Sigma|} - A\Sigma - BF,$$

avec :

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Résolution du problème en u

On va chercher à déterminer une solution approchée du problème de minimisation :

$$\inf_{u \in K} G(u) = \inf_{u \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx.$$

On a vu que le problème était bien posé. Plutôt que d'essayer de résoudre le problème avec la contrainte $u \in K$ ($\Leftrightarrow |u'| \leq 1$), on utilise la méthode dite de pénalisation pour se ramener à un problème sans contraintes.

Pour un élément quelconque a , on définit

$$a_+ = \max(0, a),$$

et on introduit le problème approché suivant :

$$\inf_{u \in L^2(\Omega)} G_{\epsilon}(u) = \inf_{u \in L^2(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega} (|u'| - 1)_+^2 dx,$$

où le deuxième terme est le terme de pénalisation.

On veut implémenter une méthode numérique pour résoudre ce problème quelque soit la fonction initiale f . On va pour cela utiliser la méthode du gradient sur G_ϵ . Comme le gradient de la fonction $\Phi : u \mapsto (|u'| - 1)_+^2$ est donné par

$$\nabla \Phi = 2 \frac{u'}{|u'|} (|u'| - 1)_+,$$

il vient que le gradient de G_ϵ s'écrit

$$\nabla G_\epsilon(u) = u - f + \frac{1}{\epsilon} \frac{u'}{|u'|} (|u'| - 1)_+.$$

Pour la méthode numérique, on discrétisera u et f et on utilisera un taux d'accroissement pour le calcul de u' .

Annexe

Ci-dessous le code python utilisé pour la résolution numérique des deux problèmes de minimisation.

Code python pour le problème en σ

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.sparse import spdiags
plt.rcParams.update({'font.size': 20})

def A(n): # assemblage de la matrice de discretisation A
    diags = np.array([0,-1,1])
    data = np.array([[ -2 for i in range(n)], [1 for i in range(n)
    ]], [1 for i in range(n)])
    A = spdiags(data, diags, n, n).toarray()
    return A

def B(n): # assemblage de B
    diags = np.array([0,1])
    data = np.array([[ -1 for i in range(n)], [1 for i in range(n)
    ]])
    B = spdiags(data, diags, n, n).toarray()
    return B

def Jh(x, f):
    n = np.size(x)
    h=1/n
    P = np.dot(B(n),x)
    return (h*np.sum(np.abs(x)) + 1/2*1/h*np.dot(P,P) + np.dot(P
    ,f))

def nablaJh(x,f): # expression du gradient de J
    n = np.size(x)
    h=1/n
    P = np.dot(A(n),x)
    Q = np.dot(B(n),f)
```

```

        return (np.sign(x) - 1/(h**2)*P - 1/h*Q)

# parametres
N = 10
h = 1/N
niter, nitermax, imax = 0, 4000, 10
c1, beta, epsilon = 0.5, 0.75, 1e-5
tt = np.linspace(0,1,N)

# initialisation
x = np.zeros((N,))
f0 = lambda y : y*(y>=0)*(y<=1/2) + (1-y)*(y>1/2)*(y<=1)
f = np.array([f0(j*h) for j in range(N)])
J = Jh(x,f)
g = nablaJh(x,f)
K = np.dot(g,g)
norm_g = np.sqrt(K)
norm_g0=norm_g
t = h
F, I, G =[J],[], [norm_g]

# boucle d'optimisation
while norm_g>epsilon*norm_g0 and niter<nitermax:
    # line search
    i, t = 0, 1.2*t
    xt = x - t*g
    Jt= Jh(xt,f)
    while Jt>=J - c1*t*K and i<imax:
        t = beta*t
        xt = x - t*g
        Jt= Jh(xt,f)
        i+=1

    # updates
    x, J =xt, Jt
    g = nablaJh(x,f)
    K=np.dot(g,g)
    norm_g=np.sqrt(K)
    niter+=1

    # stockages
    I.append(i)
    G.append(norm_g/norm_g0)
    F.append(J)

# trace

```

```

fig , ax = plt.subplots(1,1, figsize=(15,8))
fig.subplots_adjust(top=0.82)
titre=r"niter={},  $\|\nabla J^h(\sigma)\|/\|\nabla J^h(\sigma_0)\| = \{ :1.4e \}$,  $h=\{ :1.2e \}$,  $J^h(\sigma)=\{ :1.4f \}$".format(
    niter,G[-1],h,J)
fig.suptitle(titre , fontsize = 30.0)

ax.plot(tt,x)
ax.set_title("$\sigma$",fontsize = 30.0)

plt.show()

```

res_sigma.py

niter=4000, $|\nabla J^h(\sigma)|/|\nabla J^h(\sigma_0)|=5.8507e-01$, $h=1.00e-01$, $J^h(\sigma)=0.0028$

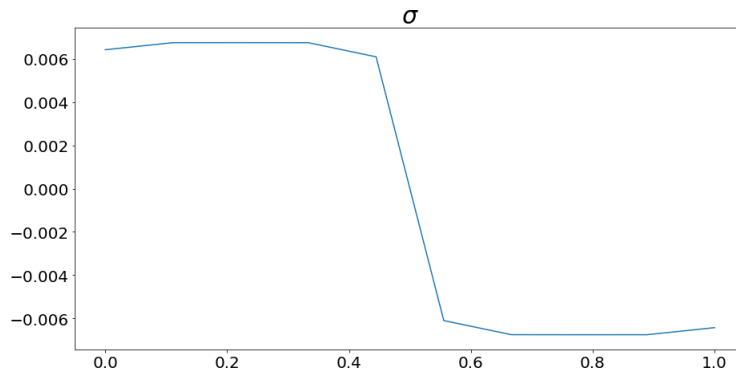


FIGURE 4.1 – Solution obtenue

Code python pour le problème en u

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#definition de f
def f(x):
    return (abs(x)<1)*1

#definition de la solution exacte usol pour ce cas particulier
de f
def usol(x):
    return (x<=0 and x>=-1)*(1+x) + (x<=1 and x>0)*(1-x)

#matrice utilisee pour d river une fonction discrete
def matrice_derivation(n):
    h=1/n

```

```

a1=-np.eye(n) #diagonale de -1
d2=np.ones(n-1) #sous-diagonale de 1
a3=np.diag(d2,1)+a1
return (1/h)*a3

#fonction G
def G(u,f,eps,h):

    n=len(u)
    uprime = np.dot(matrice_derivation(n),u)
    S=0

    for i in range(n):
        S+=(h/2)*((u[i]-f[i])**2) + (h/(2*eps))*(max(np.abs(
uprime[i])-1,0))**2

    return S

#fonction du gradient de G en une fonction u discretisee
def gradG(u,f,eps,h):

    n=len(u)
    uprime = np.dot(matrice_derivation(n),u)
    gradg = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        if uprime[i]!=0:
            gradg[i] = u[i]-f[i]+(1/eps)*(uprime[i]/np.abs(
uprime[i]))*max(np.abs(uprime[i])-1,0)
        else :
            gradg[i]=u[i]-f[i]

    return gradg

# methode gradient pas fixe
def pas_fixe(h,eps,tau,itermax,u0,f):
    vals_G=[G(u0,f,eps,h)]
    u=u0
    iterr=0

    while (np.linalg.norm(gradG(u,f,eps,h))> 1e-5 and iterr <
itermax ):

        u = u -tau*gradG(u,f,eps,h)
        iterr+= 1
        vals_G.append(G(u,f,eps,h))

```

```

        return u,vals_G

#conditions initiales et discretisation
N=50
h=1/N
subdivision=np.linspace(-1,1,N)
itermax=2000

Usol=np.zeros(N)
for i in range(N):
    Usol[i]=usol(subdivision[i])

f_discret=f(subdivision)
u0=f_discret #condition initiale egale f , car etat initial
             du tas de sable .

#tests avec differentes valeurs pour tau et eps :
tau=1
eps=200
U1=pas_fixe(h,eps,tau,itermax,u0,f_discret)[0]
G1=pas_fixe(h,eps,tau,itermax,u0,f_discret)[1]

tau2=0.015
eps2=0.2
U2=pas_fixe(h,eps2,tau2,itermax,u0,f_discret)[0]
G2=pas_fixe(h,eps2,tau2,itermax,u0,f_discret)[1]

plt.figure(figsize=[12,6])
plt.subplot(1,2,1)
plt.title("u pour tau=1 , eps=200")
plt.plot(subdivision,U1)
plt.subplot(1,2,2)
plt.title("G pour tau=0.015 , eps=0.2")
plt.plot(G1)
plt.show()

plt.figure(figsize=[12,6])
plt.subplot(1,2,1)
plt.title("u pour tau=0.015 , eps=4")
plt.plot(subdivision,U2)
plt.subplot(1,2,2)
plt.title("G pour tau=0.015 , eps=4")
plt.plot(G2)
plt.show()

```

TER.py

Bibliographie

- [1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson 1983.
- [2] F. et G. Demengel, *Convexité dans les espaces fonctionnels*, Ellipses, 2004.
- [3] Y. Ekeland et R. Temam, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, GauthierVillars, 1974.
- [4] L.C. Evans et F. Rezakhanlou, *A stochastic model for growing sandpiles and its continuum limit*, Comm. in Math. Physics, 197, 325-345 (1998).
- [5] F. Demengel, *Problèmes variationnels de la mécanique*, cours de troisième cycle, Université Paris-Sud, 1989.