Lecture 6. 对称性与守恒律Ⅱ：内部对称性

6.1 连续对称性

例子1： $SO(2)$

考虑两个具有相同质量的自由标量场，用$a=\{1,2\}$来标记，拉格朗日量为：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial^\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a-\mu^2\phi^a\phi^a)$$

现在拉式量满足一个非常明显的对称性，由于每一项都包括$\phi^a\phi^a$，其在$SO(2)$群表示的变换下不变。需要说明的是，在这里变换的平面不是空间中的$x-y$面或者$y-z$面，而是指标a构成的$1-2$面。也就是说，变换的表达式为：

$$\begin{aligned}\phi^1&\to\phi^1\cos\lambda+\phi^2\sin\lambda\\ \phi^2&\to\phi^2\cos\lambda-\phi^1\sin\lambda\end{aligned}$$

该变换下，拉氏量显然不变。当然，我们也可以往其加入诸如$-g(\phi^a\phi^a)^2$的相互作用量，$SO(2)$对称性仍保持。我们将其代入上一节得到的一般程序中去，容易得到对于该群的无穷小变换，有：

$$\begin{aligned}D\phi^1&=\phi^2\\ D\phi^2&=-\phi^1\end{aligned}$$

进而，有广义动量：

$$\pi_1^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^1)}=\partial^\mu\phi^1;\quad \pi_2^\mu=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^2)}=\partial^\mu\phi^2$$

我们有：

$$D\mathscr{L}=\partial_\mu F^\mu$$

得到$F^\mu=0$，从而有守恒流：

$$J^\mu=\pi_a^\mu D\phi^a-F^\mu=(\partial^\mu\phi^1)\phi^2-(\partial^\mu\phi^2)\phi^1$$

容易验证：$\partial_\mu J^\mu=0$。现在计算对应的守恒量，再一次，我们引入自由标量场表达式：

$$\phi^a(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}\Big(a_\mathbf{p}^{(a)}e^{-ip\cdot x}+a_\mathbf{p}^{(a)\dagger}e^{ip\cdot x}\Big)$$

和算符的对易关系：

$$[a_{\mathbf{p}}^{(a)}, a_{\mathbf{p}'}^{(b)}] = [a_{\mathbf{p}}^{(a)\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{(b)\dagger}] = 0$$
$$[a_{\mathbf{p}}^{(a)}, a_{\mathbf{p}'}^{(b)\dagger}] = \delta^{ab}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p'})$$

于是有:

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3\mathbf{x}[(\partial_0\phi^1)\phi^2 - (\partial_0\phi^2)\phi^1] \\ &= i\int d^3\mathbf{p}[a_{\mathbf{p}}^{(1)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(2)} - a_{\mathbf{p}}^{(2)\dagger}a_{\mathbf{p}}^{(1)}] \end{aligned}$$

上面的表达式已经被写成normal oreder的形式。它符合所有内部守恒量的性质：与能量对易，与动量对易，作用到真空态上得到0：$Q|0\rangle = 0$，很快我们也将看到，它是洛伦兹不变的。

计算可以得到:

$$[Q, a_{\mathbf{p}}^{(a)}] = -i\epsilon^{ab}a_{\mathbf{p}}^{(b)} \quad [Q, a_{\mathbf{p}}^{(a)\dagger}] = -i\epsilon^{ab}a_{\mathbf{p}}^{(b)\dagger}$$

我们可以通过定义新的算符来让事情变得简单:

$$\begin{aligned} b_{\mathbf{p}} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^{(1)} + ia_{\mathbf{p}}^{(2)}) \\ b_{\mathbf{p}}^{\dagger} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^{(1)\dagger} - ia_{\mathbf{p}}^{(2)\dagger}) \\ c_{\mathbf{p}} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^{(1)} - ia_{\mathbf{p}}^{(2)}) \\ c_{\mathbf{p}}^{\dagger} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{\mathbf{p}}^{(1)\dagger} + ia_{\mathbf{p}}^{(2)\dagger}) \end{aligned}$$

容易得到:

$$[b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = [c_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p'})$$
$$[b_{\mathbf{p}}, c_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = [b_{\mathbf{p}}^{\dagger}, c_{\mathbf{p}'}] = 0$$

容易看出，它们具有和$a^{(1)}$和$a^{(2)}$一样的对易关系，实际上它们构成一组正交基。首先我们有两个态，可以称为1介子和2介子。当我们处于一个简并子空间（相同的$\mathbf{p}$）中，我们可以自由地选取不同的正交基，它们则构成b介子和c介子。

通过这种替代，我们有:

$$Q = \int d^3\mathbf{p}[b_{\mathbf{p}}^{\dagger}b_{\mathbf{p}} - c_{\mathbf{p}}^{\dagger}c_{\mathbf{p}}] = N_b - N_c$$

这里N_b和N_c是粒子数，显然b介子和c介子是Q的本征态。Q在其本征态下被对角化:

$$[Q, b_{\mathbf{p}}] = -b_{\mathbf{p}} \quad [Q, b_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = b_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$
$$[Q, c_{\mathbf{p}}] = c_{\mathbf{p}} \quad [Q, c_{\mathbf{p}}^{\dagger}] = -c_{\mathbf{p}}^{\dagger}$$

这个例子可以很好地解释电荷守恒，只需要我们认为b介子带+1电荷，c介子带-1电荷，在这种情况下，这两种介子分别代表π^+和π^-介子。另一方面，我们也可以说这两个粒子是电子和正电子，此时Q代表轻子数。通过定义新算符，我们可以将哈密顿量写成：

$$H = \int d^3\mathbf{p}\,\omega_{\mathbf{p}}[b_{\mathbf{p}}^\dagger b_{\mathbf{p}} + c_{\mathbf{p}}^\dagger c_{\mathbf{p}}]$$

> 或者我们可以更进一步，定义：
>
> $$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2)$$
> $$\psi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 - i\phi^2)$$
>
> 那么有：
>
> $$\psi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(b_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + c_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip\cdot x}\right)$$
> $$\psi^*(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\left(b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-ip\cdot x} + c_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\right)$$
>
> 然后我们发现对易关系变得很简洁：
>
> $$[Q,\psi] = -\psi$$
> $$[Q,\psi^*] = \psi^*$$
>
> 类似可以验证，ψ和ψ^*满足自由标量场的所有推论（见3.4）。拉式量变为：
>
> $$\mathscr{L} = (\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi) - \mu^2\psi^*\psi$$
>
> 让拉式量对ψ^*求导，得到ψ的K-G方程，对ψ求导得到ψ^*的K-G方程。最小作用量原理给出：
>
> $$\delta\mathcal{S} = \int d^4x\,(A\delta\psi + A^*\delta\psi^*) = 0$$
>
> 其中A为某个表达式，由ψ和ψ^*的共轭关系得到运动方程为：$A = A^* = 0$
> 另外，对ϕ^1和 ϕ^2做旋转相当于给ψ乘上一个相位$e^{-i\lambda}$，这不会改变守恒流，我们称之为$U(1)$对称性，这实际上告诉我们：$SO(2) = U(1)$。

例子2：$SO(n)$

我们仍然保持我们拉式量的表达式

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi^{a}\partial_{\mu}\phi^{a}-\mu^{2}\phi^{a}\phi^{a})(-g(\phi^{a}\phi^{a})^{2})$$

最后一项是相互作用项。我们可以安装标准程序得到守恒量的表达式。但直观的方法是意识到n维旋转群的无穷小变换基是任意两个平面的无穷小旋转，比如1-2平面等。所以，我们会得到$\frac{1}{2}n(n-1)$个守恒量：

$$J_{\mu}^{[ab]}=(\partial^{\mu}\phi^{a})\phi^{b}-(\partial^{\mu}\phi^{b})\phi^{a}=-J_{\mu}^{[ba]}$$

让我们设想$SO(3)$群中的一个变换：

$$\begin{aligned}\psi&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^{1}+i\phi^{2})\\\psi^{*}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^{1}-i\phi^{2})\\\phi_{0}&=\phi^{3}\end{aligned}$$

ψ场使守恒荷Q^{12}下降1，ψ^{*}使其上升1，而ϕ^{0}不改变守恒荷。
这实际上用来描述3种π介子模型，当不存在电磁场和弱作用时，三个介子在质量上简并，我们称之为同位旋群。在这里我们拉出这个$SO(2)$子群讨论是因为当引入电磁场时$SO(3)$对称性破缺，但$SO(2)$对称性保持，这时其正对应电荷守恒，此时带电介子具有相同质量，而中性粒子的质量则与之不同。
当然，π介子和许多其他粒子相互作用，所以我们要在拉式量后面加上很多个“+”。

6.2 守恒荷的洛伦兹变换性质

在进入更一般讨论之前，我们先讨论守恒量在洛伦兹变换下的性质。注意到，守恒量与守恒流相差了一个指标，也就是说，如果守恒流在洛伦兹变换下表现为一个n阶张量，那么守恒量则应该表现为一个$n-1$阶张量。现在我们来证明这一点，首先我们有守恒流的洛伦兹变换：

$$J^{\mu}(x)\xrightarrow{\Lambda}J^{\mu\prime}(x')=\Lambda^{\mu}_{\nu}J^{\nu}(\Lambda^{-1}x)$$

现在给出Q的表达式：

$$Q\equiv\int d^{3}\mathbf{x}\;J^{0}(\mathbf{x},0)$$

现在我们要问的是，$Q'=Q$吗？让我们将表达式重写如下：

$$\begin{aligned}Q&=\int d^{4}x\;\delta(n\cdot x)n\cdot J(x)\\&=\int d^{4}x\;\partial_{\mu}\theta(n\cdot x)J^{\mu}(x)\end{aligned}$$

其中$n_{\mu}=(1,0,0,0)$，而$\partial_{\mu}\theta(n\cdot x)=n_{\mu}\delta(n\cdot x)$。通过把表达式写成四维矢量的形式，我们现在可以对其做变换了：

$$Q' = \int d^4x\, \delta(n\cdot x) n\cdot \Lambda J(\Lambda^{-1}x)$$

令$x = \Lambda x'$，$n = \Lambda n'$，由内积的洛伦兹不变性，我们有：

$$n\cdot x = n'\cdot x'$$
$$n\cdot \Lambda J = n'\cdot J$$

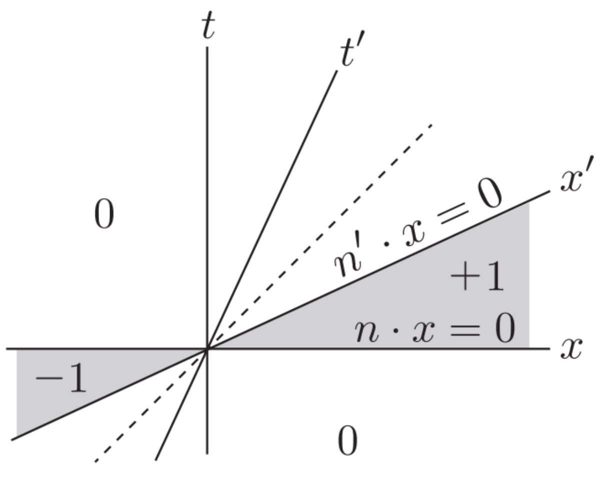
于是上式变为：

$$\begin{aligned} Q' &= \int d^4x'\, \delta(n'\cdot x')n'\cdot J(x') \\ &= \int d^4x\, \delta(n'\cdot x)n'\cdot J(x) \\ &= \int d^4x\, \partial_\mu \theta(n'\cdot x) J^\mu(x) \end{aligned}$$

现在计算$Q - Q'$：

$$\begin{aligned} Q - Q' &= \int d^4x\, \partial_\mu[\theta(n\cdot x) - \theta(n'\cdot x)]J^\mu(x) \\ &= -\int d^4x\, [\theta(n\cdot x) - \theta(n'\cdot x)]\partial_\mu J^\mu(x) + \int d^4x\, \partial_\mu([\theta(n\cdot x) - \theta(n'\cdot x)]J^\mu(x)) \\ &= -\int d^4x\, [\theta(n\cdot x) - \theta(n'\cdot x)]\partial_\mu J^\mu(x) + \int dS_\mu\, [\theta(n\cdot x) - \theta(n'\cdot x)]J^\mu(x) \end{aligned}$$

上式第二项在无穷远边界两项趋于相等，故积分得0；第一项积分也为0，可由下图直观看出。



the spacetime surfaces

于是$Q - Q' = 0$，所以$Q = Q'$，QED。

6.3 离散对称性(Discrete symmetries)

离散对称性具有如下变换形式：

$$\phi(x) \to \phi'(x)$$

但这是个没有参数的变换，我们不能进行类似让空间反演7°的操作，只有让空间反演或者不反演，并且再此操作下，拉式量不变：

$$\int d^4x\ \mathscr{L}(\phi, \partial^\mu\phi) = \int d^4x\ \mathscr{L}(\phi', \partial^\mu\phi')$$

但接着，我们无法像我们在连续变换中所做的那样，对离散对称性做无穷小变换，但我们仍然希望能用一个酉算符来描述有限变换。让我们用几个例子来深入这点。

荷翻转(Charge conjugation)

再次搬出我们的作用量：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a - \mu^2\phi^a\phi^a)(-g(\phi^a\phi^a)^2)$$

先让$g=0$，根据我们先前对$SO(2)$的分析，一个令荷翻转的变换应该使：

$$\begin{aligned}\phi^1 &\to \phi^1 = U^\dagger\phi^1U \\ \phi^2 &\to -\phi^2 = U^\dagger\phi^2U\end{aligned}$$

其中U正是我们所需要的酉算符。它使算符变换如下：

$$\begin{aligned}a_{\mathbf{p}}^{(1)} &\to U^\dagger a_{\mathbf{p}}^{(1)}U = a_{\mathbf{p}}^{(1)} \\ a_{\mathbf{p}}^{(2)} &\to U^\dagger a_{\mathbf{p}}^{(2)}U = -a_{\mathbf{p}}^{(2)}\end{aligned}$$

算符在作用于一个拥有明确1粒子数和2粒子数的态时，得到：

$$U\left|p_1, p_2, ..., p_n\right\rangle = (-1)^{N_2}\left|p_1, p_2, ..., p_n\right\rangle$$

这样，我们就有：

$$\begin{aligned}U^\dagger\phi^1U &= (-1)^{N_2}\phi^1(-1)^{N_2} = \phi^1 \\ U^\dagger\phi^2U &= (-1)^{N_2}\phi^2(-1)^{N_2} = -\phi^2\end{aligned}$$

> 上面第一个等式是因为ϕ^1和N_2对易，第二个等式则是ϕ^2作用于态上使N_2上升或下降1，故得到多一个(-1)。

同样，我们有：

$$\begin{aligned}\psi \xrightarrow{U} \psi^*, &\quad \psi^* \xrightarrow{U} \psi \\ b_{\mathbf{p}} \xrightarrow{U} c_{\mathbf{p}}, &\quad c_{\mathbf{p}} \xrightarrow{U} b_{\mathbf{p}}\end{aligned}$$

这个变换就是荷翻转（也许应该叫它正反粒子转换），我们通常称之为C对称性，同时给酉算符加下标“C”。一般来说，酉算符并不代表一个可观测量，所以即使它与哈密顿量对易，我们也不能

得到守恒量，但有时我们确实可以从酉算符中得到守恒量，那就是**当酉算符本身也是厄米的**时候。这就发生在上面介绍的例子中，因为我们令U_C作用两次得到了单位元：

$$U_C^2 = 1$$

由于U_C也是酉算符，所以：

$$U_C U_C^\dagger = 1 \Rightarrow U_C^\dagger = U_C$$

这体现在U_C作用于1粒子得到本征值1，2粒子得到本征值-1。然后我们有：

$$C : Q \to U_C^\dagger Q U_C = -Q$$

在这个特殊的例子里，尽管变换不是连续的，但我们仍然可以把态分解为C本征态的线性组合，因为C本身也是厄米的。当然，这通常不会被应用于实际，除非你有数量相同的粒子和反粒子，比如$\pi^+ - \pi^-$系统。

> 某些情况下，这可以用来推导跃迁振幅，但对$\pi^+ - \pi^-$体系这用处不大，而对电子-正电子体系，则可以利用它得到额外信息。

> 我们还没有真正推导粒子-反粒子对称性，先前推导的只是和实际对称性结构相似的一种对称性，只是为了向你们展示如何从拉格朗日场论中提取对称性。

宇称

宇称只改变空间坐标的符号，而保持时间坐标不变，有：

$$P : \begin{cases} \mathbf{x} \to -\mathbf{x} \\ t \to t \end{cases}$$

在吴健雄发现β衰变中宇称破缺之前，普遍认为任何相对性理论都应该是宇称守恒的。

标量场，比如质量，在宇称变换下不变，而三维矢量，比如速度，会改变符号：

$$P : m \to m, \quad P : \mathbf{v} \to -\mathbf{v}$$

此外，叉乘，比如角动量$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$，不会变号，而三重积$w = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$，虽然是标量，却会变号：

$$P : \mathbf{L} \to \mathbf{L} \quad P : w \to -w$$

为了把上面这两种情况和正常的矢量和标量进行区分，我们分别将其命名为轴矢量和赝标量。在有的场论中我们拥有这四种场，而在宇称变换中，它们会被重新混合，不妨假设这种变换是线性的，于是我们有一般的变换表达式：

$$P : \phi^a(\mathbf{x}, t) \to M_b^a \phi^b(-\mathbf{x}, t)$$

宇称变换把位于$(\mathbf{x}, t)$的场变成了位于$(-\mathbf{x}, t)$的场的线性组合，关键在于系数M_b^a的选取。

例子3：具有四次相互作用项的标量场

让我们写出：

$$\mathscr{L}^{(1)}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2-g\phi^4$$

在宇称变换下：

$$P:\begin{cases}\phi(\mathbf{x},t)\to\phi(-\mathbf{x},t)\\ \mathscr{L}^{(1)}(\mathbf{x},t)\to\mathscr{L}^{(1)}(-\mathbf{x},t)\\ \begin{Bmatrix}a_{\mathbf{p}}\\ a_{\mathbf{p}}^\dagger\end{Bmatrix}\to U_P^\dagger\begin{Bmatrix}a_{\mathbf{p}}\\ a_{\mathbf{p}}^\dagger\end{Bmatrix}U_P=\begin{Bmatrix}a_{-\mathbf{p}}\\ a_{-\mathbf{p}}^\dagger\end{Bmatrix}\end{cases}$$

有$U_P\left|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots,\mathbf{p}_n\right\rangle=\left|-\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2,\dots,-\mathbf{p}_n\right\rangle$。

同时，我们发现在变换$P':\phi(\mathbf{x},t)\to-\phi(\mathbf{x},t)$下，拉氏密度也保持不变，因为其是由$\phi^2$组成的。我们称这两种宇称变换分别为标量变换和赝标量变换，它们的酉算符之间满足：

$$U_{P'}=(-1)^N U_P$$

且有$U_{P'}\left|\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2,\dots,\mathbf{p}_n\right\rangle=(-1)^n\left|-\mathbf{p}_1,-\mathbf{p}_2,\dots,-\mathbf{p}_n\right\rangle$。

这个例子告诉我们，无论ϕ是标量场还是赝标量场，你都可以对其内部对称群的一个元素作用宇称，并得到宇称的另一个定义。这个理论有两种对称性，一种是类C的，另一种是类P的。它们的乘积CP也是一种对称性。当然，你也可以称CP对称性为P对称性，并将其作用于C对称性得到的（在最初定义是P的）对称性称为CP对称性。

例子4：三次和四次相互作用

现在拉式量变成了：

$$\mathscr{L}^{(2)}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2-g\phi^4-h\phi^3$$

由于三次项的存在，这时我们不能再定义宇称为：$\phi\to-\phi$了，我们只能认为所有的场都为标量。

> 实际上，对于弱作用，我们没有合适的办法定义宇称来使宇称守恒。

> ?
> 如果抛开弱力，我们有很多内部对称性。单参数交换群(the commuting one parameter groups)对应电子数，μ子数，核子数，电荷，和奇异数，电子的μ子的相对宇称(relative parity)是我们的convention。我们总可以把μ子数守恒和宇称守恒组合起来来改变μ子和ν_μ的宇称。电子和质子的相对宇称也是convention，质子和Λ超子的相对宇称也一样，它们同时满足奇异数守恒。这些convention通常是为了保证所有的相对宇称都为+1。

例子5：引入$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$

$$\mathscr{L}^{(3)}=\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}[(\partial_\mu\phi^a)^2-\mu_a^2(\phi^a)^2]-\lambda\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\mu\phi^1\partial^\nu\phi^2\partial^\rho\phi^3\partial^\sigma\phi^4$$

如果我们要宣称所有场都是标量场，那最后一项就不能保持宇称守恒。所有，我们不得不说这里面有1个或者3个场是赝标量场

例子6：加入三次方项

$$\mathscr{L}^{(4)} = \mathscr{L}^{(3)} - h\sum_{a=1}^{4}(\phi^a)^3$$

我们没有好的宇称定义给到这个拉式量。

例子7：加入复标量场

$$\mathscr{L}^{(5)} = \sum_{a=1}^{4}[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi^a)^2 - \frac{1}{2}\mu_a^2(\phi^a)^2 - h(\phi^a)^3] + \partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi - \mu_5^2\psi^*\psi$$
$$-\lambda\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial^\mu\phi^1\partial^\nu\phi^2\partial^\rho\phi^3\partial^\sigma\phi^4[(\psi)^2 + (\psi^*)^2]$$

现在我的拉式量中有5个场，三次项告诉我们ϕ^a都是标量场。虽然我们大概不会在任何严谨理论中看到这样的形式，但它还是很有趣，它具有我们要的所有性质：厄米性，和理论上可行的宇称定义。我们需要ψ在宇称变换下保证拉式量不变，而如下定义刚好符合这一点：

$$U_P^\dagger\begin{Bmatrix}\psi(\mathbf{x},t)\\ \psi^*(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}U_P = \begin{Bmatrix}i\psi(-\mathbf{x},t)\\ -i\psi^*(-\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}$$

通过这种定义，我们发现拉式量确实保持不变，当然这里会有人驳斥说，两次宇称作用必须是+1，但如果世界真像这个例子所描述的一样，那这个对称性就会非常有用，它也能将$\mathbf{x}$处的可观测量变为$-\mathbf{x}$处的可观测量，并像一个真的对称性一样对散射截面和能级等施加限制，而唯一的问题只是它的平方恰好不是1。如果我们不认为这是宇称，那什么才是呢？

时间反演

现在我们只剩下一个离散对称性没有讨论了，那就是T对称性。为何把它放在最后讨论是因为，它不是由酉算符来表示，而是由一个反酉算符表示。

考虑在势场中运动的一维粒子，经典理论在时间反演下不变：

$$T:\begin{cases}q(t)\to q(-t)\\ p(t)\to -p(-t)\end{cases}$$

在量子理论中，我们的第一个想法是，有没有对应的酉算符：

$$U_T^\dagger\begin{Bmatrix}q(t)\\ p(t)\end{Bmatrix}U_T \overset{?}{=} \begin{Bmatrix}q(-t)\\ -p(-t)\end{Bmatrix}$$

但这导致一个矛盾，我们知道：

$$[q(t),p(t)] = i$$

取$t=0$并作变换，得到：$U_T^\dagger[q(0),p(0)]U_T = -[q(0),p(0)]$

很不巧，式子右边是$-i$而不是i，这与我们的假设直接矛盾。第二个矛盾是，我们认为时间反演应该逆转时间演化，也就是：

$$U_T^\dagger e^{-iHt} U_T = e^{iHt}$$

令上式对时间求导然后取$t=0$，我们得到：

$$U_T^\dagger (-iH) U_T = iH$$

也就是说H和$-H$由时间反演变换相关联，这样关联的算符必须有相同的谱，但是但它们却没有共同下界，这都告诉我们，时间反演算符不是酉算符。接下来我将证明反酉算符是如何解决这些问题的，正如我们将看到的，它们也是反线性的。

不过在这之前，让我们先回顾酉算符的性质，算符U是酉的需要两个条件，首先它可逆，然后它作用到希尔伯特空间中任意两矢量保内积不变性：

$$(Ua, Ub) = (a, b)$$

算符U是线性的，当其满足：

$$U(\alpha a + \beta b) = \alpha U a + \beta U b$$

反酉算符Ω也是可逆的，且满足：

$$(\Omega a, \Omega b) = (a, b)^* = (b, a)$$

两个酉算符的乘积是一个酉算符，乘法表如下图。

	U	Ω
U	U	Ω
Ω	Ω	U

乘法表

一个典型的粒子是复共轭算符K，满足：

$$K(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = \alpha^*\psi_1^* + \beta^*\psi_2^*$$

算符A被称为是反线性的，当：

$$A(\alpha a + \beta b) = \alpha^* A a + \beta^* A b$$

就像酉算符自然是线性的一样，反酉算符自然是反线性的。对于伴随算符A，有：

$$(a, Aa) \to (a, \Omega^{-1} A \Omega a)$$

这也可以被视为对算符做变换：$A \to \Omega^{-1} A \Omega$

可以验证，这解决了上述两个矛盾。

Wigner的优雅理论告诉我们：up to phases，an operator that preserves the norm of the inner product must be either unitary or anti-unitary.

> 对称性变换只可能是酉算符或反酉算符，乘上一个相位因子。

有了这条定理，我们可以先验地说，对于对称性，我们只需要考虑酉和反酉算符。

现在我们看看能不能找到自由标量场的时间反演算符，所有我们再再再次搬出：

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$$

在相对性理论中，讨论Ω_{PT}比讨论Ω_T来得更方便。因为前者对洛伦兹矢量的四个分量都乘了-1，这个操作和洛伦兹群对易。那么，PT操作会对Fock空间的态做什么呢？对于能动量矢量，虽然空间反演了，但是时间也反演了，所以，也许我们可以直观地认为：

$$\Omega_{PT}\left|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n\right\rangle = \left|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, ..., \mathbf{p}_n\right\rangle$$

> 不过，这并不代表$\Omega_{PT} = 1$，因为它是一个反酉算符，所以它虽然把态变成了其自身，但它会把i乘上的态的系数变成$-i$。

由于Ω_{PT}并不改变动量$\mathbf{p}$，所以我们可以简单得到：

$$\Omega_{PT} a_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \Omega_{PT} \Rightarrow a_{\mathbf{p}} = \Omega_{PT}^{-1} a_{\mathbf{p}} \Omega_{PT}$$

而对于自由标量场，我们会得到：

$$PT : \phi(x) \to \Omega_{PT}^{-1}\phi(x)\Omega_{PT} = \phi(-x)$$

下一节我们会开始介绍扰动理论。