Lecture 7. 微扰散射导论

7.1 薛定谔图景和海森堡图景

首先介绍薛定谔图景，其中动力学变量不随时改变：

$$q_S(t)=q_S(0)=q_S \quad p_S(t)=p_S(0)=p_S$$

态是随时的，遵守薛定谔方程：

$$i\frac{d}{dt}\left|\psi(t)\right\rangle_S=H(p_S,q_S,t)\left|\psi(t)\right\rangle_S$$

薛定谔图景的基本动力学问题是，给定态$|\psi(t')\rangle$，我们需要定义演化算符$U(t,t')$，从而使：

$$\left|\psi(t)\right\rangle_S=U(t,t')\left|\psi(t')\right\rangle$$

U是一个酉算符，可以由薛定谔方程保概率幅性质推出。算符U满足群性质：

$$U(t,t')U(t',t'')=U(t,t'')$$

U算符也满足薛定谔方程：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t')=H(p_S,q_S,t)U(t,t')$$

初始条件为$U(t',t')=1$。初始条件和传递性的约束告诉我们：$U(t,t')=U^{-1}(t',t)$

求解薛定谔方程得到：

$$U(t,t')=e^{-iH(p_S,q_S)(t-t')}$$

海森堡图景告诉我们：态不随时，算符随时，有定义：

$$\left|\psi(t)\right\rangle_H=\left|\psi(0)\right\rangle_H=\left|\psi(0)\right\rangle_S$$

所以我们有：

$$\left|\psi(0)\right\rangle_H=e^{iH(p_S,q_S)t}\left|\psi(t)\right\rangle_S$$

海森堡图景中基本的p和q算符随时，有：

$$q_H(t) = U(t,0)^\dagger q_H(0)U(t,0) = U(t,0)^\dagger q_S U(t,0)$$

无论哪种图景，都要求测量值相等：

$${}_S\langle\psi(t)|\, A_S(t)\,|\psi(t)\rangle_S = {}_H\langle\psi(t)|\, A_H(t)\,|\psi(t)\rangle_H$$

由该性质我们得到两种图景之间的算符变换：

$$A_H(t) = U^\dagger(t,0)A_S(t)U(t,0) = U(0,t)A_S(t)U^\dagger(0,t)$$

把其作用到$p_H(t)$和$q_H(t)$上，我们就得到海森堡图景下的运动方程：

$$\frac{d}{dt}p_H(t) = i[H(p_H, q_H, t), p_H(t)]$$

7.2 相互作用图景

薛定谔图景和海森堡图景的动力学都依赖于求解U算符。我们设

$$H = H_0(p,q) + H'(p,q,t)$$

于是我们就得到了相互作用图景，也称狄拉克图景。在此图景下，我们有：

$$\begin{aligned} q_I(t) &= e^{iH_0(p_S,q_S)t} q_S(t) e^{-iH_0(p_S,q_S)t} \\ |\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0(p_S,q_S)t}\,|\psi(t)\rangle_S \\ A_I(t) &= e^{iH_0(p_S,q_S)t} A_S(t) e^{-iH_0(p_S,q_S)t} = U_0(t,0)^\dagger A_S(t) U_0(t,0) \end{aligned}$$

对其求导，得到：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle_I &= e^{iH_0(p_S,q_S)t}(iH_0 - iH)\,|\psi(t)\rangle_S \\ &= e^{iH_0(p_S,q_S)t}(-iH'_S(p_S,q_S,t))e^{-iH_0(p_S,q_S)t}\,|\psi(t)\rangle_I \\ &= -iH'(p_I,q_I,t)\,|\psi(t)\rangle_I \end{aligned}$$

这里$H'(p_I,q_I,t) \equiv H_I(t) = e^{iH_0(p_S,q_S)t}H'_S(p_S,q_S,t)e^{-iH_0(p_S,q_S)t}$。

$H'_S(p_S,q_S,t)$可以被展开为p_S和q_S的级数，并且我们可以把$e^{-iH_0t}e^{iH_0t}$插到各个地方来吧p_S和q_S转化为p_I和q_I。实际上，关键在于求解上面的动力学方程，注意到微扰可以含时或者不含时，但我们总是会视H_I为一个多项式，比如$\lambda\phi^4$。

为了求解动力学方程，我们引入$U_I(t,t')$，满足：

$$|\psi(t)\rangle_I = U_I(t,t')\,|\psi(t')\rangle_I$$

我们可以对其做像之前一样的操作，并且得到U_I也是一个酉算符，也满足传递性，也有其逆元。实际上，U_I并不是一个独立的量，首先我们有：

$$|\psi(0)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_I = |\psi(0)\rangle_S\,; \quad A_H(0) = A_I(0) = A_S(0)$$

然后我们有：

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{iH_0t}\,|\psi(t)\rangle_S = U_I(t,0)\,|\psi(0)\rangle_I$$

于是便得到：

$$\begin{aligned}U_I(t,0) &= e^{iH_0t}U(t,0) = e^{iH_0t}e^{-iHt}\\ U_I(t,t') &= U_I(t,0)U_I^\dagger(t',0) = e^{iH_0t}U(t,t')e^{-iH_0t'}\end{aligned}$$

最后，我们得到：

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,t') = H_I(t)U_I(t,t')$$

7.3 戴森公式

我们的目标是求解上面的微分方程，因此，我们想要找到一个形式上的级数解来求解狄拉克图景下的动力学。如果我们要求解一维的量子力学系统，那么解的形式很简单：

$$U_I(t,t') = T\exp\left(-i\int_{t'}^{t} dt''\; H_I(t'')\right)$$

这就是戴森公式，只有当$t > t'$时有效，不过这并不影响，因为我们只需要取逆就可以得到$t < t'$的U_I。将指数项展开可以得到：

$$U_I(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} dt_1 H_I(t_1) + \frac{(-i)^2}{2!}T\left(\int_{t'}^{t}\int_{t'}^{t} dt_1 dt_2 H_I(t_1)H_I(t_2)\right) + \ldots$$

第一项是1，第二项只包含一个算符，时间排序算符对它们没有作用。而对第三项包含双重积分，在$t_1 > t_2$时，我们首先有$H_I(t_1)$然后再写$H_I(t_2)$，当$t_2 > t_1$时，两个算符的顺序将会改变。

容易验证其满足

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,t') = H_I(t)U_I(t,t')$$

7.4 散射和S矩阵

接下来介绍散射理论。我们有经典非相对论性哈密顿量:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

假设有一个波包，从无穷远处入射，进入势场，然后变成很多碎片从射向各个方向，过了很久之后又变成波包，那么散射理论就是要描述中间发生了什么。我们采用薛定谔图景。

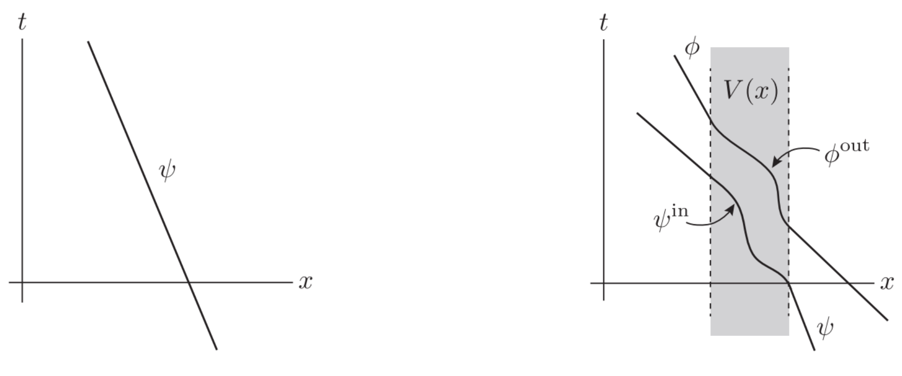
对自由粒子，我们有哈密顿量H_0，和态矢量$|\psi(t)\rangle$，希尔伯特空间$\mathcal{H}_0$。我们设实际的哈密顿量为H，希尔伯特空间为$\mathcal{H}$。在离势场很远的地方，我们可以认为波包满足自由粒子的薛定谔方程。我们把这个时候的态叫做$|\psi(t)\rangle^{\text{in}}$，它与自由粒子态的关系满足:

$$\lim_{t\to-\infty}\left|\left|e^{-iH_0t}|\psi\rangle - e^{-iHt}|\psi\rangle^{\text{in}}\right|\right| = 0$$

另一边，考虑$|\phi(t)\rangle \in \mathcal{H}_0$，同样定义$|\phi(t)\rangle^{\text{out}}$，满足:

$$\lim_{t\to\infty}\left|\left|e^{-iH_0t}|\phi\rangle - e^{-iHt}|\phi\rangle^{\text{out}}\right|\right| = 0$$

现在进入散射过程，图示如下。



自由粒子和散射

现在我们想要获得概率，然后得到振幅，一个之前像$|\psi\rangle$的态在未来变成一个像$|\phi\rangle$的态，也就是${}^{\text{out}}\langle\phi|\psi\rangle^{\text{in}}$。实际势场和自由场的偏差促使我们定义一个$\mathcal{H}_0$上的非常重要的算符：散射矩阵S。它的定义如下:

$$\langle\phi|\mathrm{S}|\psi\rangle \equiv {}^{\text{out}}\langle\phi|\psi\rangle^{\text{in}}$$

S矩阵满足$\mathrm{S}\mathrm{S}^\dagger = \mathrm{S}^\dagger\mathrm{S} = 1$，如果哈密顿量不含时，那么$[\mathrm{S}, H_0] = 0$。

现在我们进入一个例子。考虑一个三粒子体系，所有粒子具有相同质量，哈密顿量可以写为：

$$H = \sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{2m} + V_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) + V_{23}(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|) + V_{13}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|)$$

更进一步，让我们假设只凭$V_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$就可以形成一个单独的束缚态，质心薛定谔方程为：

$$-\frac{1}{2\mu}\nabla^2\psi_0(r) + V_{12}(r)\psi_0(r) = \epsilon\psi_0(r)$$

再进一步，我们可以看作这是一个质子，一个电子和一个中性π_0介子。这里面只有质子和电子可以结合形成氢原子，当然，氢原子有无数种结合态。现在考虑散射，我们想象在很久以前，它们三都是自由粒子，于是我们有态：$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\rangle_I^{\text{in, out}}$，那么哈密顿量：

$$H_0 = \sum_{i=1}^{3}\frac{p_i^2}{2m}$$

这是第一种情况。第二种情况是质子和电子形成氢原子，介子是自由粒子，于是我们有态$|\mathbf{p}, \mathbf{p}_3\rangle_I I^{\text{in, out}}$，哈密顿量：

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{p_3^2}{2m} + V_{12}(r) + \frac{p_{\text{cm}}^2}{4m}$$

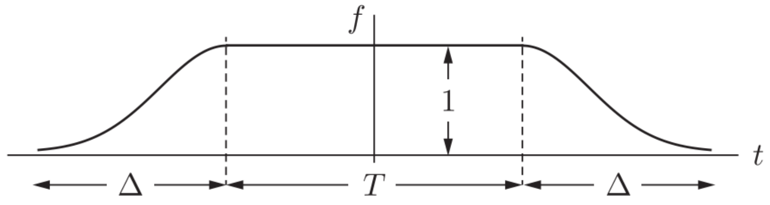
所有I情况的in态与II情况的in态正交，out态之间也正交。三个遥远的自由粒子不经过散射的话没有理由结合形成束缚态。另一方面，对于I的in和II的out，情况就不一样了，反过来也一样。

那么在量子场论中，我们如何漂亮地描述相对论性量子散射，幸运的是，我们有局域性(locality)。我们可以同样假设在很久以前有很多相隔甚远的粒子，它们属于一个巨大的Fock空间，我们可以设想一个有1个电子，17个光子，14个质子，4个α粒子和4种束缚态的体系，然后我们就会有很多很多S矩阵。

因为关于散射的内容在之后会变得非常非常抽象，所以我们会举很多例子。回到之前的例子，让我们采用一个非常粗略的近似，那就是令：

$$H = H_0 + H_I(t) \to H_0 + f(t, T, \Delta) H_I(t)$$

这里我们引入了函数f，它的示意图如下。



开关函数(adiabatic function)f

这个函数的出现使得在无穷远处，原本理论只是渐近于自由理论，现在则完全就是自由理论。现在粒子就是自由粒子，随着它接近势场，f函数开始增大，就好像我们打开了相互作用的开关，然后散射发生，在那之后，我们把开关关掉，于是场又变成了自由场。

这样做的好处是我们可以得到一个非常简单的S矩阵表达式，由于在很久以前和很远以后的哈密顿量就是H_0，所以矩阵可以被写为：

$$\mathrm{S} = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \Delta \to \infty \\ (\Delta/T) \to 0}} \mathrm{U_I}(\infty, -\infty)$$

也就是说，我们首先定义了开关函数f，然后我们再通过求极限去掉它。

> 至于求极限右边的表达式，证明过程如下。
>
> $$\begin{aligned} \langle \phi | \mathrm{S} | \psi \rangle &=^{\text{out}} \langle \phi | \psi \rangle^{\text{in}} = \lim_{\substack{t \to -\infty \\ t' \to \infty}} \langle \phi | U_I^\dagger(0, t') U_I(0, t) | \psi \rangle \\ &= \lim_{\substack{t \to -\infty \\ t' \to \infty}} \langle \phi | U_I(t', t) | \psi \rangle = \langle \phi | U_I(\infty, -\infty) | \psi \rangle \\ &\Rightarrow S = U_I(\infty, -\infty) \end{aligned}$$

这个方法确实存在问题，但我们会暂时先采用它，以快速进入含时微扰部分，我们会做大量计算，最终，我们会发现这个方案太过简单，从而完全抛弃它，并用新的模型取而代之。下一节，我们会从戴森公式开始，到用图(diagrams)的方式来评估(evaluate)U_I矩阵。