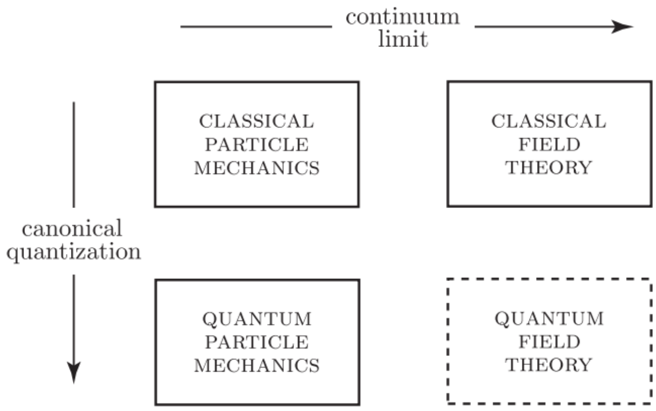
Lecture 4.The method of the missing box



the missing box

本节我们会逐一回顾上面格子中的内容。

4.1 经典力学

经典力学依赖于广义坐标（时间为宗量的实函数），记为$q^a(t)$，$a=1,2,...,N$。引入拉格朗日量：

$$L=L(q^1,q^2,...,q^N,\dot{q}^1,\dot{q}^2,...,\dot{q}^N)$$

定义作用量$\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\;L(q^a,\dot{q}^a,t)$$

根据哈密顿原理，由拉格朗日量可以得到运动方程，考虑坐标的微小变化$q^a\to q^a+\delta q^a$，其所导致的作用量变化为：

$$\delta\mathcal{S}=0$$

进一步给定$\delta q^a(t_1)=\delta q^a(t_2)=0$，我们可以作变分得到：

$$\delta\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\left[\frac{\partial L}{\partial q^a}\delta q^a+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}\delta\dot{q}^a\right]$$

令$p_a\equiv\dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^a}$，那么就有：

$$\delta\mathcal{S}=\int_{t_1}^{t_2}dt\left(\left[\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{dp_a}{dt}\right]\delta q^a\right)+p_a\delta q^a\Big|_{t_1}^{t_2}$$

由先前条件，我们可以得到运动方程：

$$\frac{\partial L}{\partial q^a}-\frac{dp_a}{dt}=0$$

以上便是欧拉拉格朗日方程，定义哈密顿量$H \equiv p_a \dot{q}^a - L$，可以得到哈密顿运动方程：

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a$$
$$\frac{\partial H}{\partial q^a} = -\dot{p}_a$$

> 需要注意：q^a和p_a是完备且独立的。

4.2 量子力学

规范量子化是从一个经典力学体系出发得到量子力学体系的标准程序(uniform procedure)。

经典力学变量服从规范泊松括号关系：

$$\{q^a, q^b\} = 0 = \{p_a, p_b\};\ \{q^a, p_b\} = \delta^a_b$$

我们把这些经典变量看作随时算符(海森堡图景)，且满足对易关系：

$$[q^a(t), q^b(t)] = 0 = [p_a(t), p_b(t)];\ [q^a(t), p_b(t)] = i\delta^a_b$$

我们假设由q^a和p_a构成的基**厄米**且**完备**。

量子力学中的哈密顿量和经典力学具有相同表达式，只是现在其中的力学量变成了算符。

> 在量子表达式中，算符的作用顺序不能随意调换，并且表达式也应该是厄米的
> 由对易关系有：$q^a p_b = p_b q^a + i\hbar\delta^a_b$,在经典极限下第二项趋于无穷小，于是量子体系就变成了经典体系。

从海森堡图景出发，可以得到海森堡运动方程：

$$\frac{dA}{dt} = i[H, A] + \frac{\partial A}{\partial t}$$

第二项只当算符表达式含时时不为零。若坐标和动量表达式都不含时，那么可以得到：

$$\begin{cases} \dfrac{dq^a}{dt} & = i[H, q^a] = i(-i\dfrac{\partial H}{\partial p_a}) = \dfrac{\partial H}{\partial p_a} \\ \dfrac{dp_a}{dt} & = i[H, p_a] = i(i\dfrac{\partial H}{\partial q^a}) = -\dfrac{\partial H}{\partial q^a} \end{cases}$$

4.3 经典场论

场论和经典理论的唯一不同在于，场论研究的变量是无限多的。也就是说：$q^a(t) \to \phi^a(\mathbf{x}, t)$

> 有人认为在场论中可以把$x = (t, \mathbf{x})$作为经典理论中的t处理，而这显然是错误的。比如，在经典理论中我们需要给出在一个固定时刻的初始条件，而在场论中我们可以固定时间t，但需要对每个$\mathbf{x}$给出初始值。所以，正确的做法应该是：
>
> $$t \to t$$
> $$a \to a, \mathbf{x}$$

无论怎样，我们只关系洛伦兹不变的理论。既然先前的作用量是对时间进行积分，那么认为新的作用量对空间进行积分是合理的。同样，由于被积函数只涉及时间的一阶导数，那么它应该也只涉及空间的一阶导数。于是，我们可以写出：

$$L = \int \mathscr{L} d^3\mathbf{x} = \int d^3\mathbf{x}\, \mathscr{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x), x)$$

这是一个关于ϕ^a、$\partial_\mu \phi^a$和x的函数。数学上来说，我们需要担心收敛性问题，但从物理角度考虑，我们默认它有良好的性质，足够光滑并且收敛。于是作用量表达式为：

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L = \int d^4x\, \mathscr{L}(\phi^a(x), \partial_\mu \phi^a(x), x)$$

由最小作用量原理，我们可以得到欧拉-拉格朗日方程：

$$0 = \delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} \delta \phi^a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \delta(\partial_\mu \phi^a) \right)$$

设定$\delta\phi^a(\mathbf{x}, t_1) = \delta\phi^a(\mathbf{x}, t_2) = 0$，那么有：

$$0 = \delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)} \right) \right] \delta\phi^a$$

定义$\pi_a^\mu \equiv \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^a)}$，有：

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi^a} - \partial_\mu \pi_a^\mu = 0$$

> 实际上，$\pi_a^0(\mathbf{x}, t) \leftrightarrow p_a(t)$，我们把$\pi_a^0$叫做规范动量密度,有时简写为$\pi_a$。

现在我们考虑单个实标量场的拉格朗日密度，要构造这样一个场，首先它显然满足$\phi(x) = \phi^*(x)$；
其次，出于简单考虑，我们假设运动方程是线性的，也就是说，拉格朗日密度需要是ϕ和$\partial_\mu \phi$的平方，所以求导就可以得到线性的运动方程；
第三，我们需要运动方程是洛伦兹不变的，所以拉格朗日密度应该是一个洛伦兹标量；
综合以上三点，我们可以构造一个一般表达式如下：

$$\mathscr{L} = \pm \frac{1}{2} \left(a \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + b\phi^2 \right)$$

若定义$\phi \to \phi' = \phi\sqrt{|a|}$，那么上式变为：

$$\mathscr{L} = \pm \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (b/a)\phi^2 \right)$$

定义$\pi^\mu = \dfrac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \pm \partial^\mu \phi$，那么欧拉-拉格朗日方程给出：

$$\partial_\mu \pi^\mu = \pm(b/a)\phi \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi = (b/a)\phi$$

这个方程和Klein-Gordon方程很像。接下来我们推导哈密顿形式。对应经典力学中的$H = p_a \dot{q}^a - L$，我们写出场论的对应式：

$$H = \int d^3\mathbf{x}(\pi_a \dot{\phi}^a - \mathscr{L})$$

定义哈密顿密度$\mathscr{H} = \pi_a \dot{\phi}^a - \mathscr{L}$，我们把先前的简单拉格朗日密度表达式代入，得到：

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Big[\pi\dot{\phi} \mp \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \mp \frac{1}{2}(b/a)\phi^2\Big] \\ &= \pm\Big[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - \frac{1}{2}(b/a)\phi^2\Big]\end{aligned}$$

我们取$\pm$为正，因为我们不想能量为负，为此我们最好选取(b/a)为负数，设$(b/a) = -\mu^2$，这样表达式中只剩下一个未知数μ，于是我们有：

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \mu^2\phi^2\Big) \\ \mathscr{H} &= \frac{1}{2}\Big(\pi^2 + |\nabla\phi|^2 + \mu^2\phi^2\Big)\end{aligned}$$

由其得到的运动方程就是Klein-Gordon方程：

$$\Box^2\phi + \mu^2\phi = 0$$

4.4 量子场论

我们只需要简单像之前在经典理论中所做的一样，对场进行量子化：

$$\begin{aligned}[\phi^a(\mathbf{x},t), \phi^b(\mathbf{y},t)] &= [\pi_a(\mathbf{x},t), \pi_b(\mathbf{y},t)] = 0 \\ [\phi^a(\mathbf{x},t), \pi^b(\mathbf{y},t)] &= i\delta^a_b\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned}$$

哈密顿量：$H = \int d^3\mathbf{x}\ \mathscr{H}$。让我们回到先前的例子，其哈密顿量表达式如下：

$$H = \frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\Big(\pi(\mathbf{x},t)^2 + |\nabla\phi(\mathbf{x},t)|^2 + \mu^2\phi(\mathbf{x},t)^2\Big)$$

这里有个普适的方法来计算任意算符对时间的导数，那就是海森堡方程，应用到这个例子上我们有：

$$\dot{\phi}(\mathbf{x},t) = i[H,\phi(\mathbf{x},t)] = i\int d^3\mathbf{y}\ \frac{1}{2}[\pi(\mathbf{y},t)^2, \phi(\mathbf{x},t)] = i\int d^3\mathbf{y}\ \pi(\mathbf{y},t)(-i\delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x})) = \pi(\mathbf{x},t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}(\mathbf{x},t) &= i[H,\pi(\mathbf{x},t)] = i\int d^3\mathbf{y}\ \frac{1}{2}\Big\{\Big[|\nabla\phi(\mathbf{y},t)|^2, \pi(\mathbf{x},t)\Big] + \mu^2\Big[\phi(\mathbf{y},t)^2, \pi(\mathbf{x},t)\Big]\Big\} \\ &= \nabla^2\phi(\mathbf{x},t) - \mu^2\phi(\mathbf{x},t) = \ddot{\phi}(\mathbf{x},t)\end{aligned}$$

到这里，我们已经通过两种路径来得到了同一方程。前一种路径，也就是前三节的内容，是十分物理的。从单粒子出发到多粒子体系，我们对于场的引入有充分的动机；而第二种方法则更加机械一些，我们只需要通过规范量子化就可以导出方程，但这一路径缺乏动机，优点则是比较简洁（只占据一节的内容）。

> 然而，在之后我们几乎只用第二种路径。为什么呢？考虑相互作用：$\lambda\phi^4(\mathbf{x},t)$，让我们写出新的拉格朗日密度：$\mathscr{L} \to \mathscr{L} - \lambda\phi^4(\mathbf{x},t)$，第一种路径对其毫无办法，而通过规范量子化，我们至少可以形式上写出其量子表达式。对相互作用项的展开包含两个产生算符和两个湮灭算符。微扰理论的

> 第一阶展开可以从一个两粒子态到另一个两粒子态，二阶展开则使两粒子态变为四粒子态、六粒子态。

4.5 Normal ordering

还有一件事要做，那就是把先前推导出的用产生湮灭算符表示的自由场的表达式代入上节来看看有没有问题。我们有哈密顿量：

$$H=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\Big(\pi(\mathbf{x},t)^2+|\nabla\phi(\mathbf{x},t)|^2+\mu^2\phi(\mathbf{x},t)^2\Big)$$

有自由粒子标量场：

$$\phi(x)=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\Big(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}+b_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\Big)$$

代入场的表达式，经过计算我们得到：

$$H=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{p}(a_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}^\dagger+a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}})\omega_{\mathbf{p}}$$

这与先前的结论很像，但不完全相同。在第二节我们给出：

$$H=\int d^3\mathbf{p}(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}})\omega_{\mathbf{p}}$$

我们把上面的式子改写为：

$$H=\int d^3\mathbf{p}(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}}^\dagger])\omega_{\mathbf{p}}=\int d^3\mathbf{p}(a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}}+\frac{1}{2}\delta^{(3)}(0))\omega_{\mathbf{p}}$$

可以看到，实际上前式比后式多了一项，这是我们不想要的。这意味着在空间处处存在一个“无穷大”的零点能。在广义相对论中，能动张量中的T_{00}意味着能量密度。通过变换$T_{\mu\nu}\to T_{\mu\nu}-\Lambda g_{\mu\nu}$，我们可以改变真空能量密度的大小。

但实际上，在这门课中，我们设定其为0，而不会解释为什么。

> They don't explain it in any course given at Harvard because nobody knows why it is zero.

当然，还有一种办法形式上解决的这个问题，也就是normal ordering。考虑一组自由标量场$\{\phi^{a_1}(x_1),...,\phi^{a_n}(x_n)\}$，它们的normal-oredered积记作：$:\phi^{a_1}(x_1)\phi^{a_2}(x_2)\cdots\phi^{a_n}(x_n):$

这不是普通的积，而是将所有湮灭算符排在右边，把所有产生算符排在左边。这听上去很蠢，但是却很有用，在接下来的内容里，这帮助我们写下局部场的哈密顿量：

$$H=\frac{1}{2}\int d^3\mathbf{x}\Big(:\pi^2+|\nabla\phi|^2+\mu^2\phi^2:\Big)$$

需要注意的是，这只是一种标记，不能够被当成某种算符来使用。