

Lecture 9. 扰动理论 II : Divergences and counterterms

现在我们看向模型二，其哈密顿密度为：

$$\mathcal{H} = g\phi(x)\rho\mathbf{x}$$

注意到 $\rho(\mathbf{x})$ 独立于时间，所以需要加上开关函数：

$$H_I(t) = g \int d^3\mathbf{x} \phi(x) \rho(\mathbf{x}) \rightarrow f(t, T, \Delta) H_I(t)$$

9.1 引入反项(counterterm)

有些奇怪的事情发生了，它向我们表明，我们对开关函数的使用有些太过乐观了，如果使用公式计算 S 矩阵，我们有不平凡依赖时间的项，有在极限时不为0的项，我们本来应该有：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0 | U_I(T, -T) | 0 \rangle = \langle 0 | S | 0 \rangle = 1$$

但在相互作用图景下，事实并非如此。接下来我们将解释这背后的物理，并展示如何解决上面的问题，然后我们就可以通过把所有图相加来求解模型。

首先让我们介绍一些符号。我们用 $|0\rangle$ 来表示非相互作用图景下的基态，有：

$$H_0 |0\rangle = 0$$

然后有实际的基态 $|0\rangle_P$ ，基态能量不为0：

$$H |0\rangle_P = (H_0 + H_I) |0\rangle_P = E_0 |0\rangle_P$$

现在让我们看看在薛定谔图景下，模型二的基态如何演化的，见下表。

时间 t	薛定谔态
$t < -(T/2 + \Delta)$	$ 0\rangle$
$-T/2$	$e^{-i\gamma_-} 0\rangle_P$
$T/2$	$e^{-i(\gamma_- + E_0 T)} 0\rangle_P$

$$\left[t > (T/2 + \Delta) \quad \left| e^{-i(\gamma_+ + \gamma_- + E_0 T)} |0\rangle \right| \right]$$

对 $t < -(T/2 + \Delta)$ ，演化算符作用到基态不改变基态，因为能量为0：

$$|0\rangle_{t < -(T/2 + \Delta)} = U(t, -(T/2 + \Delta)) |0\rangle = e^{iH_0(t - (T/2 + \Delta))} |0\rangle = |0\rangle$$

在第一个 Δ 中，我们有开关函数缓慢上升，可以认为态函数变成了 $|0\rangle_P$ 乘上某个相位因子，有：

$$|0\rangle_{t = -(T/2)} = \exp \left(-i \int_{-(T/2 + \Delta)}^{-(T/2)} dt [H_0 + f(t)H_I(t)] \right) |0\rangle = e^{-i\gamma_-} |0\rangle_P$$

在开关函数为1的这一段时间内，时间演化遵从相互作用哈密顿力学，由于 $|0\rangle_P$ 是这个态下的本征矢，所以有：

$$|0\rangle_{t = (T/2)} = U_I(T/2, -T/2) e^{-i\gamma_-} |0\rangle_P = e^{-i\gamma_-} e^{-iHT} |0\rangle_P = e^{-i\gamma_-} e^{-iE_0 T} |0\rangle_P$$

经过第二个 Δ ，基态变成非相互理论的基态，同样，我们乘上另一个相因子，得到：

$$|0\rangle_{t = (T/2) + \Delta} = e^{-i(\gamma_+ + \gamma_- + E_0 T)} |0\rangle$$

这是通过薛定谔图景能直接得到的态，如果我们幸运，这应该是正确的，而且根据时间反演不变性， $\gamma_+ = \gamma_-$ 。于是，我们有：

$$\langle 0 | U(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{-i(\gamma_+ + \gamma_- + E_0 T)}$$

现在转换到相互作用图景，在先前讨论中我们知道 $U_I(t, 0) = e^{-iH_0 t} U(t, 0)$ ，于是 $U_I(0, t) = U(0, t) e^{iH_0 t}$ ，根据传递性， $U(\infty, -\infty) = U(\infty, 0) U(0, -\infty) = U_I(\infty, 0) U_I(0, -\infty)$ ，于是：

$$\langle 0 | S | 0 \rangle = \langle 0 | U_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{-i(\gamma_+ + \gamma_- + E_0 T)}$$

一个什么也没有的初态，应该就像一滩死水，什么都不会发生，所以等式右边应该是1。但是实际上我们却得到了一个相位，来自自由场理论和相互作用理论，如果它们二者不匹配，那么就会得到相位因子，如果我们能让它们匹配，那就能解决这个问题。

现在有一个非常简单的办法，就是在哈密顿量里面加入一个counterterm，这样就可以消除基态的相因子，我们写下：

$$H_I \rightarrow \left[g \int d^3 \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t) - a \right] f(t)$$

这是一个常数，而我们要做的只是确保它满足：

$$a \int dt f(t) = a(T + \mathcal{O}(\Delta)) = \gamma_+ + \gamma_- + E_0 T$$

这样，相因子就会被消除。可以看出，我们可以计算出 a 。比如，随着 T 趋于无穷：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} aT(1 + \mathcal{O}(\frac{\Delta}{T})) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\gamma_+ + \gamma_- + E_0 T)$$

因此我们有： $a = E_0$ 。到目前，我们可以通过引入这个常数做两件事，第一，我们消除了相位因子；第二，我们找到了一种利用 U_I 矩阵计算基态能量的方法。

9.2 计算模型二的 S 矩阵

让我们首先回顾一下之前做了什么，我们加入了一个常量，从而使粒子离 ρ 足够远的时候，我们能够“提供”它们在自由场中所具有的能量。

但是在模型三中，我们不能这么做，因为粒子即使在非常远的地方也会有相互作用。

接下来我们将显式地计算 S 矩阵，然后我们就会得知，先前的假设是否正确。首先给出完备的连接图的基如下，称为 D_1, D_2, D_3 。

$$\begin{array}{ccc} 1 \bullet \text{---} & 1 \bullet \text{---} \bullet 2 & \times \\ D_1, D_2, D_3 \end{array}$$

其中 D_3 代表反项。它们的对称数分别为 $1, 2, 1$ 。然后我们分别计算 O_1, O_2, O_3 。

$$\begin{aligned} O_1 &= -ig \int d^3 \mathbf{x} dt \rho(\mathbf{x}) \phi(x) f(t) \\ O_2 &= (-ig)^2 \int d^4 x_1 d^4 x_2 \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} \rho(\mathbf{x}_1) \rho(\mathbf{x}_2) f(t_1) f(t_2) \\ O_3 &= ia \int dt f(t) \end{aligned}$$

那么， S 矩阵可以表为：

$$S = U_I(\infty, -\infty) =: \exp \left(\frac{O_1}{1!} + \frac{O_2}{2!} + \frac{O_3}{1!} \right) :$$

或者，象征性地：

$$S =: e^{(1)+(2)+(3)} := e^{(2)+(3)} : e^{(1)} :$$

由于 $\langle 0|S|0\rangle = 1$ 的限制，我们得到：

$$(2) + (3) = 0$$

这个等式告诉我们，如果我们想要计算基态能量，那只要计算 D_2 即可。而如果我们想要计算 S 矩阵，那 D_2 和 D_3 无贡献。加入的常量抵消了无外线Wick图的积分项，因为其贡献的相因子被常量抵消了。现在要计算 S ，我们只需要计算 D_1 。Let's go.

$$U_I(\infty, -\infty) =: \exp \left(-ig \int d^3\mathbf{x} dt f(t) \rho(\mathbf{x}) \phi(x) \right) :$$

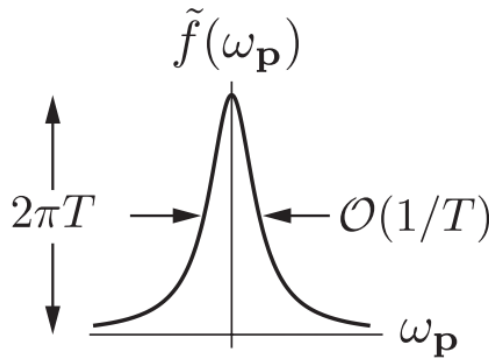
这个计算和模型一中所做计算相近，除了原来的 $\rho(x)$ 变成了 $\rho(\mathbf{x})$ 和 $f(t)$ ，像之前一样，我们代入表达式并进行傅里叶变换：

$$\begin{aligned} O_1 &= -ig \int d^3\mathbf{x} dt \rho(\mathbf{x}) f(t) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) \\ &= -ig \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left(\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}}) \tilde{\rho}(\mathbf{p}) a_{\mathbf{p}} + \tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})^* \tilde{\rho}(\mathbf{p})^* a_{\mathbf{p}}^\dagger \right) \end{aligned}$$

在这里我们做了一个三维的傅里叶变换和一个一维的傅里叶变换。好的，这告诉我们什么呢？ $f(t)$ 是一个在很大的 T 范围内都恒定的常数，那么对于其的傅里叶变换：

$$\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}}) = \int dt e^{-i\omega_{\mathbf{p}} t} f(t)$$

它应该很接近常函数的傅里叶变换， δ 函数，我们可以画出其示意图如下。



$f(t)$ 的傅里叶变换

我们差不多能得到一个随 $1/T$ 衰减的函数，其高度的阶为 $2\pi T$ ，而覆盖面积为 2π 。当 $T \rightarrow \infty$ ，它就会变成 2π 乘一个 δ 函数。这会导致一些有趣的结果，由于 $\omega_{\mathbf{p}}$ 总是大于 μ ，所以当 $\tilde{f}(t)$ 足够集中，我们会得到：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} O_1 = 0$$

所以我们有：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S = \lim_{T \rightarrow \infty} : e^{(1)} := e^0 = 1$$

随着 $T \rightarrow \infty$ ， S 矩阵趋近于0的指数，也就是1。这个 S 矩阵确实是酉矩阵，完全不依赖于 T 。但是，这个结果十分平凡，就好像我们放了一块砖头在那里并发送了一个介子，然而介子并没有散射，而是穿了过去。

这个结果同样解释了模型一中介子的产生问题。在模型一中，我们知道除非 $\tilde{\rho}(\mathbf{p}, \omega_{\mathbf{p}})$ 在质壳上非0，否则算符 O_1 会消去。实际上， $\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})$ 也会在除了 $\omega_{\mathbf{p}} = 0$ 附近的小邻域以外的地方为0，其不为0的地方不包括质壳。回到我们的问题，我们知道介子可以被一个源吸收或者释放。而一个像 $\rho(\mathbf{x})$ 的源不能传递能量，它只能传递动量，这解释了为什么它不可以吸收或者释放一个介子，因为这个过程需要能量传递。介子总是有非零能量，所以 S 矩阵只能为1，所以在模型二中没有散射。

就散射而言，模型二是完全失败的。有人在Born近似中求解了相同的模型，一开始看上去模型是否能散射还很模糊，直到发现所有Born级数的所有四阶项奇迹般相消，人们才意识到他们应该计算这个模型的 S 矩阵，对所有阶都为1。这个结果对无质量粒子也适用。接下来计算基态能量。

9.3 计算模型二的基态能量

由先前分析我们知道， D_2 和 D_3 相消，也就是：

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{O_2}{2!} + O_3 \right] = 0$$

O_2 和 O_3 的表达式已经给出，由先前计算，我们有：

$$\overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

于是：

$$\begin{aligned} \frac{O_2}{2!} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-ig^2}{2!} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{|\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 |\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})|^2}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-ig^2}{2!} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \int \frac{d\omega_{\mathbf{p}}}{2\pi} \frac{|\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})|^2}{\omega_{\mathbf{p}}^2 - |\mathbf{p}|^2 - \mu^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

当 T 足够大， \tilde{f} 在 $\omega_{\mathbf{p}}$ 附近有极锐的峰，这意味这我们可以简单认为 $\omega_{\mathbf{p}} = 0$ 并且由于此时分母不再可能为0，故可以丢掉 $i\epsilon$ ，于是我们有：

$$\frac{O_2}{2!} = \frac{ig^2}{2!} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2}{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2} \int \frac{d\omega_{\mathbf{p}}}{2\pi} |\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})|^2$$

这里我们引入Parseval定理：

$$\int \frac{d\omega_{\mathbf{p}}}{2\pi} |\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})|^2 = \int dt |f(t)|^2$$

考虑到函数 $f(t)$ 的性质，我们有：

$$\int dt |f(t)|^2 = T + \mathcal{O}(\Delta) = T(1 + \mathcal{O}(\Delta/T))$$

于是我们有：

$$O_3 = ia \int dt f(t) = iaT(1 + \mathcal{O}(\Delta/T))$$

由 $O_3 = -\frac{O_2}{2!}$ ，我们得到：

$$iaT(1 + \mathcal{O}(\Delta/T)) = T(1 + \mathcal{O}(\Delta/T)) \frac{ig^2}{2!} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2}{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$$

从中我们可以提取出等式：

$$a = E_0 = -\frac{g^2}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2}{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$$

根据变分原理，如果在期望值为0的无扰动哈密顿量中加入一个项，那其总是会使能量降低，于是我们得到等式右边的负号。现在我们将再从相空间转回位置空间：

$$E_0 = -\frac{1}{2}g^2 \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \rho(\mathbf{x}) V(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y})$$

其中：

$$V(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$$

我们知道静电学的能量可以表为：

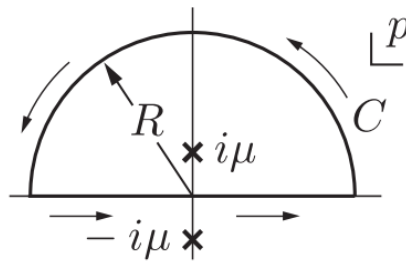
$$E = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y} \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

这和我们得到的能量有相近之处，我们可以称之为量子介子静力学。不过，我们的模型前面是负号，这意味这相同荷的粒子相互吸引。而我们模型中的势也和静电学中的

不一样，不妨让我们计算一下，设 $|\mathbf{p}| = p$, $|\mathbf{x}| = r$, 有：

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(2\pi)^3(p^2 + \mu^2)} \int_0^\pi d\theta e^{ipr \cos \theta} \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{dp p^2}{(p^2 + \mu^2)} \left(\frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{ipr} \right) \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp p e^{ipr}}{(p^2 + \mu^2)} \end{aligned}$$

最后一个积分可以用Cauchy定理求解，我们有两个极点位于 $p = \pm i\mu$ ，由于 r 恒为正，我们可以只计算复平面上半，见下图。



积分示意图

于是我们有：

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_C \frac{dp p e^{ipr}}{(p + i\mu)(p - i\mu)} = -\frac{i}{(2\pi)^2 r} \left[2\pi i \left(\frac{i\mu e^{-\mu r}}{2i\mu} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi r} e^{-\mu r} \end{aligned}$$

这被称为汤川势。我们的“核子荷密度”，具有和汤川势成正比的相互作用能。注意到，在 $r = 0$ 附近，汤川势和库伦势表现相似，但随着 r 增大，汤川势迅速下降。虽然我们的介子不会散射，但它仍可传递核子间的力。

我们可以把两核子系统看成：

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

这里的 δ'' 代表某种与 δ 函数相近的函数。我们计算其能量：

$$E_0 = -g^2 \frac{e^{\mu|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}{4\pi|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + (\text{term independent of } \mathbf{x}_1 \text{ and } \mathbf{x}_2)$$

两个核子之间的力是吸引力，且具有短程性。某个规则告诉我们，在偶数自旋粒子间传递的力相互吸引，在奇数自旋粒子间传递的力相互排斥。我们的力来自0自旋玻色子，所以是吸引力。

如果我们具有一个点荷：

$$\rho(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$$

那么就像静电势一样，能量趋于无穷：

$$\text{As } \rho(\mathbf{x}) \rightarrow \delta^{(3)}(\mathbf{x}), E_0 \rightarrow \infty$$

这种发散称为**紫外发散(ultraviolet divergence)**，因为对于位置空间的 δ 函数，其相空间的对应是常数，这意味这我们不能使紫外项为0，积分随 $d^3\mathbf{p}/|\mathbf{p}|^2$ 的阶增长。

这种发散，和距离无关，是无关紧要的。首先，点粒子是一种理想假设；其次，就算我们不能计算点粒子的能量，这并不影响我们计算粒子间的相互作用能，而后者是收敛的。但在模型三中，我们没有这种理想源，所以在计算能量传递时，会出现问题。

9.4 模型二的基态波函数

我们不仅可以计算基态能量，还可以计算基态波函数。我们有一组基态 $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle$ 作为 H_0 的本征态，我们可以把基态展为基的线性组合，只需要计算系数：

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | 0 \rangle_P$$

实际上，含时微扰并没有那么多限制。我们可以做在非相对论量子力学中所做的一切，我们有相互作用哈密顿量：

$$H_I(t) = g \int d^3\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}, t) \rho(\mathbf{x}) f(t)$$

在我们先前的讨论中，我们已经得到：

$$U(0, -\infty) |0\rangle = |0\rangle_P$$

左右同乘演化算符，我们得到：

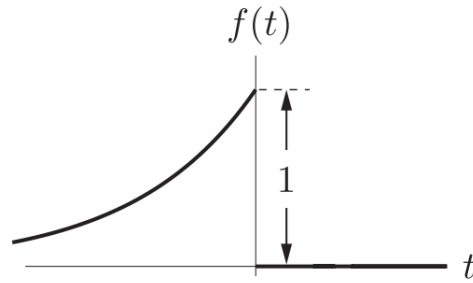
$$U_I(0, \infty) |0\rangle = |0\rangle_P$$

考虑开关函数：

$$f(t) = e^{\epsilon t}, \text{ for } t < 0$$

我们可以将其拓展为：

$$f(t) = \begin{cases} e^{\epsilon t}, & \text{if } t < 0 \\ 0, & \text{if } t > 0 \end{cases}$$



函数示意图

对实际情况，我们有 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 。这样，我们就有：

$$U_I(\infty, -\infty) |0\rangle = |0\rangle_P$$

于是，我们得到：

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | 0 \rangle_P = \langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | U_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle$$

上式给出了通过非相互作用哈密顿波函数表示基态的关系，或者我们更加物理地说，在基态中找到 n 个自由玻色子的振幅。我们要指出，人们使用的这种使用非相互作用系统的本征态来形容相互作用的基态的语言是容易导致混淆的。实际上里面并没有粒子在移动。

通过应用模型一得到的结果，我们有：

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n | U_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle = e^{\frac{1}{2}(-\alpha + i\beta)} h(\mathbf{p}_1^* \mathbf{p}_2^* \dots \mathbf{p}_n^*)$$

当然，这里的定义和模型一中不同，我们有：

$$h(\mathbf{p}) = \frac{-ig\tilde{\rho}(\mathbf{p})\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}$$

现在计算 $f(t)$ 的傅里叶变换：

$$\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}}) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} f(t) = \int_{-\infty}^0 dt e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} e^{\epsilon t} = \frac{1}{\epsilon - i\omega_{\mathbf{p}}} \rightarrow \frac{i}{\omega_{\mathbf{p}}} \text{ as } \epsilon \rightarrow 0$$

类似地，我们得到：

$$\alpha = \int d^3\mathbf{p} |h(\mathbf{p})|^2 = g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 |\tilde{f}(\omega_{\mathbf{p}})|^2 \rightarrow g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}^3} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2$$

我们最终发现：

$$P(n) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!}$$

这正是泊松分布。但是不一样的是，当我们取点粒子做源时，展开式爆炸了：

$$\begin{aligned} \alpha &= g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}^3} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \sim g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}^3} \\ &\sim g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2|\mathbf{p}|^3} \sim g^2 \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{dp}{p} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

其中， $\frac{d^3\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|^2} \sim dp$ 也就是说，此时 α 发散。还记得我们曾经得出：

$$\langle N \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n) = \alpha$$

随着源越来越集中，平均粒子数变得越来越大，而同时， $P(n)$ 则趋近于0。当源完全收为一点，泊松分布的峰值朝向无穷大。幸运的是，我们之后不会计算这种问题，而且也没必要担心这个问题，因为在实际理论中我们没有自由度去“关闭”相互作用。另一个幸运的是，在这个理论中可以物理测量的东西，并没有发散。但是，之后就不一定了。

9.5 红外发散

接下来我们来说另一种发散，通过模型一也许能够更好地认识它。我们先前给出：

$$\alpha \rightarrow g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}^3} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2$$

若 $\tilde{\rho}(0) \neq 0$ ，我们有：

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \alpha = \infty$$

当 $\mu = 0$ ， $\omega_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|$ 。于是在低能段积分发散，我们称之为红外发射。由于我们最终要遇到无质量粒子理论，其在相互作用中表现为辐射，所以也许我们应该稍微讲一下。

这个发散是不物理的。不如我们把无质量粒子叫做光子，如果我们有一个源缓缓作用又缓缓消失，那我们平均会辐射出无穷的光子，这听上去很蠢。这个模型和真实的光子实验相差很大，在真正的实验中，我们有一个探测器，比如光电倍增管。虽然有无数个光子辐射出来，但是它们只携带有限的能量，让我们计算：

$$\langle E \rangle = \int d^3\mathbf{p} |h(\mathbf{p})|^2 \omega_{\mathbf{p}} = g^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}^3} |\tilde{\rho}(\mathbf{p})|^2 \omega_{\mathbf{p}}$$

这个量并不发散，这个神奇的事实让我们想起芝诺疑难：你只有有限的能量分配，但是光子是无质量的，你可以给每个光子分配越来越小的能量，比如你给第一个光子一半能量，给第二个四分之一，第三个八分之一……

这无限多光子中的大部分都有任意小的能量，这意味着它们的波长非常长，以致于不能够被仪器检测到。要测量一个波长为一千光年的光子，我们大概需要一个长一千光年的天线。所以，我们得到发散的真正原因，是因为我们在问一个非物理的问题，就好像我们在问没有相互作用下的一个点源的能量一样。

所以我们要改变提问的方法，我们应该问：如果我们的实验装置只能检测动量大于某个阈值 $|\mathbf{p}|_{\min}$ 的光子，那么我们可以检测到的平均光子数是多少。对应到计算上就是，我们不会一直积分到0。

这样，我们就会得到一个有限的 α 。看啊，我们被拯救了。如果我们马虎，就很可能问出经验上无法回答的问题。如果我们足够谨慎，把提问的范围限制在实验能够达到的位置，那么我们就能够得到非发散的答案，尽管在某些条件下其可能是发散的。

到目前为止，在我们的简单理论中，发散都只存在于不可观测量中。这样的理论被称为**可重整化的**。下一节，我们将介绍我们的模型三。