中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

宇宙学常数问题

The Cosmological Constant Paradox

真空能计算

对谐振子的分析告诉我们存在基态能量$\frac{1}{2}\hbar\omega$，我们将之称为零点能。以电磁场为例，我们可以将其傅里叶分解，每一个 $\vec{k}$ 对应一种模态，并具有频率 $\omega\left(\vec{k}\right) = c|\vec{k}|$ ，每一个模态对应一个谐振子，具有$\frac{1}{2}\hbar\omega(\vec{k})$的零点能。即使场未被激发，零点能也存在。

一个简单计算真空能的方法是，简单把所有模态对应的零点能相加：

$$E_{vacuum} \sim \sum_{\vec{k}} \hbar\omega(\vec{k}) \sim \sum_{\vec{k}} |\vec{k}|$$

当$V \to \infty$，$\sum_{\vec{k}} \to V\int d^3k$，那么：

$$E_{vacuum} \to V\int d^3k|\vec{k}|$$

我们设Λ为真空能量密度，那么有：

$$\Lambda \sim \frac{V\int d^3k\left|\vec{k}\right|}{V} \sim \int_0^{M_c} k^3 dk \sim M_c^4$$

在这里，我们定义M_c为截止质量，在自然单位制下，其具有长度的负一次方的量纲。

M_c 表征着我们对电磁场的认识程度，在超出 M_c的量级，我们认为电磁理论可能不再适用，故M_c作为一种保守估计存在。

我们知道真空中存在各种场，其中每一个都对真空能有贡献，其中M_c可能在不同场中也不同。

我们可以尝试代入各种量级的M_c进去，比如普朗克质量$M_{pl} = M_c \sim 10^{19} GeV$。

宇宙常数问题

将M_{pl}代入计算，可以得到：

$$\Lambda \sim 10^{112} eV^4$$

而实验的观测值是$M_c \sim 10^{-3} eV$，对应的$\Lambda \sim 10^{-12} eV^4$。

我们发现，Λ的计算值和实验值差了123个数量级。

这个问题被称为宇宙常数问题。

引入有效场论观点

我们写出广义相对论真空下作用量为：

$$S = M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} R$$

其中R具有长度的-2次方的量纲。

有效场论尝试改变广义相对论作用量，保持量纲一致，引入新的项得到：

$$S = M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} [R + l^2 (\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma})]$$

其中已经省略了高阶项，α、β、γ为无量纲系数。

我们主要关心l，设$l = l_p$，这是一个非常小的数。

导数算符可以视为$\partial \to 1/L$，也具有一个长度的负1次方的量纲。如果$\frac{l}{L} \ll 1$，那么更高阶的项被抑制。

我们通过求导的阶数来区分每一项，那么每一项的作用就取决于(l/L)的次方，通过设定L为我们想要研究的尺度，我们就可以研究系统在该尺度下的性质。

同样地，我们当然可以引入量纲为0的项，于是作用量变为：

$$S = M_p^2 \int d^4x \sqrt{-g} (\frac{1}{l_c^2} + R + l^2 (\alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \gamma R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}) + \cdots)$$

最大质量与最小质量

从作用量可以看出：

$$\Lambda \sim \frac{M_p^2}{l_C^2}$$

由弗里德曼方程，我们有$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \sim G\rho \Rightarrow H^2 \sim G\Lambda \sim \frac{\Lambda}{M_p^2}$

通过上面两个关系我们有：$H^2 \sim \frac{1}{l_c^2}$

我们发现，l_c是哈勃尺度的，它远大于l。

我们进一步定义$\Lambda \equiv l_\Lambda^{-4}$，自然有：$l_\Lambda \sim \sqrt{l_p l_c} = \sqrt{l_p l_U}$

类似地，我们定义$M_U \sim 1/l_U$，那么可以知道：

$$M_\Lambda \sim \sqrt{M_p M_U}$$

我们知道普朗克质量$M_p \sim 10^{19} GeV$和宇宙的某种康普顿质量$M_U \sim 2 \times 10^{-33} eV$，那么得到$M_\Lambda \sim 4 \times 10^{-3} eV$。

发展历史

- 泡利首先担心了真空能对引力的影响。他使用电子半径倒数作为M_c，发现这样的宇宙视界不会超过月球。
- 爱因斯坦不相信零点能，但许多实验都证明了零点能的存在，比如反应$\gamma + H_2 \to H + H$，由能量守恒证明了H_2包含$\frac{1}{2}\hbar\omega$；海森堡不确定性原理也可以从理论推出零点能，氦在接近绝对零度下存在流动性；以及卡西米尔效应
- 1960s，Y.B.Lel’dovich再次提出了这个问题
- 1970s，大家开始广泛意识到这个问题
- 在1990s测量到暗能量前，倾向于认为$\Lambda = 0$

几个解决问题的思路

- 自然性：有一种说法称当存在一个非常小的无量纲数ϵ，那么在$\epsilon = 0$时会出现新的对称性；
- 对极红外的探索，对于达到宇宙大小的波长，引力可能存在不同的性质
- 人择定理
- Λ的衰减
- 在作用量中添加不满足$\int d^4x(\ldots)$形式的项

THANKS

谢谢大家

附录

附录