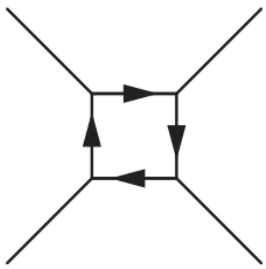
Lecture 13 格林函数和海森堡场

现在我们考虑有不在质壳上的外线的图（注意到我们讨论的范围不局限于模型三），对于下面的图，我们先前计算了其在质壳上的情况，现在我们计算其不在质壳上的部分。

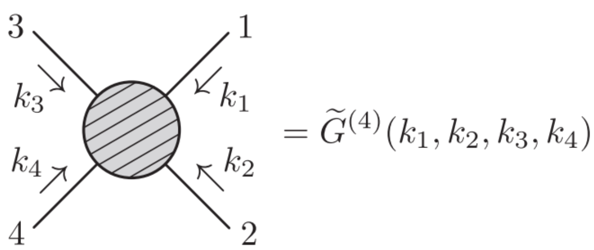


$\mathcal{O}(g^4)\ \ \phi+\phi\to\phi+\phi$散射

这是一个很有趣的东西，因为它可以是更复杂费曼图的一个组成部分。为了简洁，我们只会讨论有着介子外线的图。

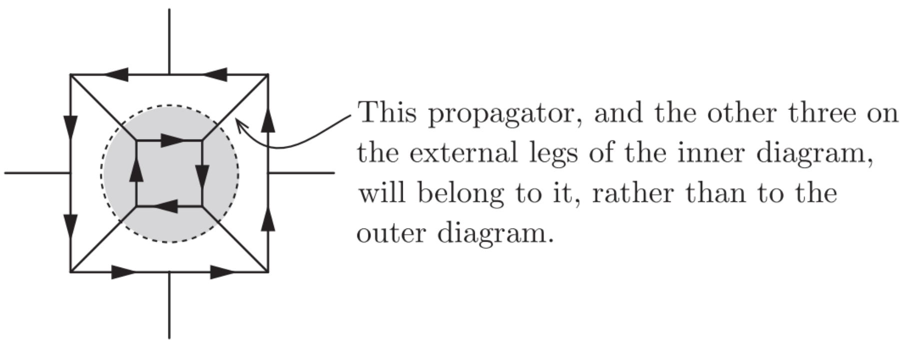
13.1 $\tilde{G}^{(n)}(k_i)$的图定义

让我们定义一个四点函数(four-point function)$\tilde{G}^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4)$，作为具有四个介子外线的所有阶的所有图之和，并将其用图表示如下。



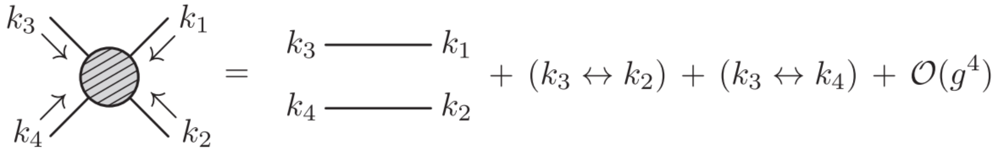
$\tilde{G}^{(4)}(k_1,...,k_4)$的图表示

我有自由定义这些图，它们可以包括所有连通图，所有非连通图，所有δ函数，所有传播子。



作为内部图的bolb

我们给出$\tilde{G}^{(4)}(k_1,...,k_4)$级数的前几项作为例子，我们可以继续求高阶项。



$\tilde{G}^{(4)}(k_1, ..., k_4)$的级数

计算得到:

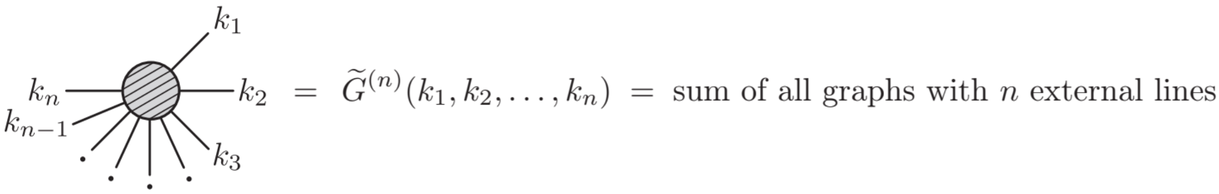
$$\tilde{G}^{(4)}(k_1,k_2,k_3,k_4) = (2\pi)^4\delta^{(4)}(k_1+k_3)\frac{i}{k_1^2-\mu^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta^{(4)}(k_2+k_4)\frac{i}{k_4^2-\mu^2+i\epsilon}+...$$

一旦我们得到$\tilde{G}^{(4)}$，就可以计算相应的矩阵元:

$$\langle k_3,k_4|\mathrm{S}-1|k_1,k_2\rangle = \prod_{r=1}^{4}\left[(-i)(k_r^2-\mu^2)\right]\tilde{G}^{(4)}(-k_3,-k_4,k_1,k_2)$$

这里我们为初态和末态加上了质壳条件。注意到，二阶项对其没有贡献，因为二阶项只有两个传播子，而前面有四个0。所以这就是我们的想法：定义整个相空间的函数$\tilde{G}^{(4)}(k_i)$，然后从中取下在质壳上的一部分。

类似地，我们定义$\tilde{G}^{(n)}(k_i)$:



它遵守以下约定:
1.动量k_i指向内部;
2.外线包括传播子$(k_i^2-\mu^2+i\epsilon)^{-1}$;
3.包含所有四动量守恒δ函数;
4.包含所有连通图;
5.包含所有非连通图;

也许你已经注意到，$\tilde{G}$意味着这是一个傅里叶变换，于是我们有:

$$G^{(n)}(x_1,...,x_n) = \int\frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}...\frac{d^4k_n}{(2\pi)^4}e^{-ik_1\cdot x_1-...-ik_n\cdot x_n}\tilde{G}^{(n)}(k_1,...,k_n)$$

13.2 $G^{(n)}(x_i)$的广义函数$Z[\rho]$

通过改变哈密顿量，我们得到$\tilde{G}^{(n)}(k_i)$的第二种含义。比如，考虑:

$$\mathscr{H} = \mathscr{H} + \rho(x)\phi(x)$$

这里$\rho(x)$是光滑函数，且会随x趋向无穷而趋于0。如果我们要计算$\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle$，我们会得到一个新图:

对相互作用项$\rho(x)\phi(x)$的费曼图

由于约定1.我们不妨把他看成$-i\tilde{\rho}(-k)$，于是我们就得到:

对相互作用项$\rho(x)\phi(x)$的费曼图

由于ρ是一个实函数，其频域对称，我们可以把其写成$-i\tilde{\rho}(k)^*$。这就是我们在模型一中获得的顶点值。如果我们现在考虑$\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle$，我们可以把其展开为一个级数，作为$\rho$的泛函，得到：

$$\langle 0|\mathrm{S}|0\rangle_\rho = Z[\rho] \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_n}{(2\pi)^4} \tilde{G}^{(n)}(k_1, \dots, k_n)\tilde{\rho}(-k_1)\dots\tilde{\rho}(-k_n)$$

注意到，这里的$1/n!$并没有被消除。通过Parseval定理，我们有：

$$\int dx\ f(x)g(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k)\tilde{g}(k)^* = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k)\tilde{g}(-k)$$

于是我们有：

$$Z[\rho] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n\ G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)\rho(x_1)\dots\rho(x_n)$$

也就是说，$G^{(n)}(x_1 \dots x_n)$是格林函数，其给出了系统对外部扰动的反应。上式有趣的地方在于，系统的所有物理信息（至少有关介子部分）都被嵌入函数$Z[\rho]$中。如果我们知道$Z[\rho]$，就知道$G^{(n)}$；如果你知道$G^{(n)}$，那就能计算系统的散射振幅。所以，$Z[\rho]$也被称为生成函数。如果我们将$Z[\rho]$展为ρ的级数，那么其系数就是格林函数：

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = i^n \frac{\partial^n Z[\rho]}{\partial\rho(x_1)\dots\partial\rho(x_n)}\bigg|_{\rho(x)=0}$$

我们可以耍一些数学小技巧，比如定义一个只包含连接图的格林函数的生成函数：

$$Z_c[\rho] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n\ G_c^{(n)}(x_1, \dots x_n)\rho(x_1)\dots\rho(x_n) = \ln Z[\rho]$$

上式也可以被写成：

$$Z[\rho] = \exp\{iW[\rho]\}$$

13.3 无开关函数的散射

先前的计算建立在旧的框架下，现在让我们忘掉旧理论，考虑没有$f(t)$的情况，首先，我们设置：

$$f(t) = 1$$

但是我们仍可以考虑

$$\mathscr{H} \to \mathscr{H} + \rho(x)\phi(x)$$

现在对$Z[\rho]$由实际真空态$|0\rangle^P$进行重新定义，我们有：

$$Z[\rho] =^P \langle 0|U_I(\infty, -\infty)|0\rangle^P$$

其中$U_I(\infty, -\infty)$是薛定谔图景下的算符。假定我们已经正规化我们的理论使得：

$$H\,|0\rangle^P = 0$$

这里的H不包含$\rho(x)$，否则我们的哈密顿量会随时改变，从而使基态难以定义。给出归一化常数：

$$ {}^{P}\langle 0|0\rangle^{P} = 1 $$

现在我们引入源$\rho(x)$，那么我还呆在真空态的概率幅是多少？现在，我们原来通过定义$f(t)$获得的S矩阵表达式失效了。但是，我们仍然可以定义$\tilde{G}^{(n)}(k_i)$和$G(x_i)$作为$Z[\rho]$的系数。

现在，我们要问两个问题：

问题一 $\tilde{G}^{(n)}(k_i)$仍然由费曼图的和来定义吗?

问题二 下面等式仍然成立吗?

$$ \langle k_3,k_4|\mathrm{S}-1|k_1,k_2\rangle = \prod_{r=1}^{4}\Big[(-i)(k_r^2-\mu^2)\Big]\tilde{G}^{(4)}(-k_3,-k_4,k_1,k_2) $$

上面的等式和扰动理论无关，是否我们可以从上式直接俄得到S矩阵呢？实际上，上面两个问题的答案都是“Yes”。

马上，我们会构造始态和末态，然后我们将得到S矩阵元，发现它是上式右侧加上一个修正因子，后者被称为**波函数重整化**。

13.4 海森堡图景下的格林函数

现在考虑问题一。首先我们把哈密顿密度写为：

$$ \mathscr{H} \to \mathscr{H} + \rho(x)\phi(x) \equiv'' \mathscr{H}_0'' + \mathscr{H}_I $$

我们把源项$\rho(x)\phi(x)$视为相互作用哈密顿密度。把模型三的$\mathscr{H}$视为$\mathscr{H}_0$，其实际上是真正自由哈密顿密度$\mathscr{H}_0$加上：

$$ \mathscr{H}' = g\psi^*(x)\psi(x)\phi(x) $$

我们可以这么做，因为戴森公式允许我们把哈密顿量分为一个自由部分和相互作用部分。当$\rho=0$，相互作用图景下的场和海森堡图景下的场一致：

$$ ''\phi_I(x)'' = \phi_H(x) \quad \text{when } \rho(x)=0 $$

因此我们现在可以使用戴森公式来计算$Z[\rho]$：

$$ Z[\rho] = {}^{P}\langle 0|U_I(\infty,-\infty)|0\rangle^{P} = {}^{P}\langle 0|T\exp\Big[-i\int d^4x\ \rho(x)\phi_H(x)\Big]|0\rangle^{P} $$

现在，我不能再用Wick公式，因为海森堡场对任意间隔没有c数对易子，但我仍然可以将其展为级数：

$$ Z[\rho] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1...d^4x_n\rho(x_1)...\rho(x_n)\,{}^{P}\langle 0|T(\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n))|0\rangle^{P} $$

将其与之前的公式对比，我们得到：

$$ G^{(n)}(x_1,...,x_n) = {}^{P}\langle 0|T(\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n))|0\rangle^{P} $$

现在我们得到了●的第三个含义：格林函数。它们在相空间是真空的$T(\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n))$的期望值。现在我们要问，它是所有费曼图之和$G^{(n)\mathrm{Feyn}}(x_1,...,x_n)$吗？首先，我们有：$Z[\rho]^{\mathrm{Feyn}}$的表达式：

$$Z[\rho]^{\text{Feyn}}=\lim_{\substack{t_+\ \to\ +\infty\\ t_-\ \to\ -\infty}}\frac{\langle 0|T\exp\left[-i\int_{t_-}^{t_+}d^4x\ (\mathscr{H}_I+\rho\phi_I)\right]|0\rangle}{\langle 0|T\exp -i\int_{t_-}^{t_+}d^4x\ \mathscr{H}_I|0\rangle}$$

这里的$\mathscr{H}_I$是模型三的相互作用哈密顿密度。分子趋近于$U_I(\infty,-\infty)$的真空期望值，而分母则等于没有ρ时的真空期望值。它消除了可能出现在我们的图中的非连通的真空泡。你可能会说，我们已经设置了反项来消除真空泡，所有没必要这么做。但是这只适用于具有$f(t)$的理论，后面我们会看到这样设置分母的作用。

注意到上面表达式中是裸真空态，为了将其与真正的格林函数等同，我们需要找出是什么把裸真空变成了实际真空。展开$Z[\rho]^{\text{Feyn}}$，我们得到：

$$Z[\rho]^{\text{Feyn}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int d^4x_1...d^4x_n\ \rho(x_1)...\rho(x_n)G^{(n)\text{Feyn}}(x_1,...,x_n)$$

于是：

$$G^{(n)\text{Feyn}}(x_1,...x_n)=\lim_{\substack{t_+\ \to\ +\infty\\ t_-\ \to\ -\infty}}\frac{\langle 0|T\exp\left[-i\int_{t_-}^{t_+}d^4x\ \mathscr{H}_I\right]\phi_I(x_1)...\phi_I(x_n)|0\rangle}{\langle 0|T\exp -i\int_{t_-}^{t_+}d^4x\ \mathscr{H}_I|0\rangle}$$

注意到我们可以把分子中的指数拆分，于是得到：

$$G^{(n)\text{Feyn}}(x_1,...x_n)=\lim_{\substack{t_+\ \to\ +\infty\\ t_-\ \to\ -\infty}}\frac{\langle 0|U_I(t_+,t_1)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)...U_I(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U_I(t_n,t_-)|0\rangle}{\langle 0|U_I(t_+,t_-)|0\rangle}$$

由于：

$$U_I(t_{i-1},t_i)=U_I(t_{i-1},0)U_I(0,t_i)$$

我们可以将相互作用图景的场变成海森堡图景下的场，于是最终得到：

$$G^{(n)\text{Feyn}}(x_1,...x_n)=\lim_{\substack{t_+\ \to\ +\infty\\ t_-\ \to\ -\infty}}\frac{\langle 0|U_I(t_+,0)\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n)U_I(0,t_-)|0\rangle}{\langle 0|U_I(t_+,0)U_I(0,t_-)|0\rangle}$$

看上去还不错，我们已经把场变成了海森堡图景下的场，并且也满足时间排序，现在的问题是剩下的裸真空的相互作用图景下的演化算符。

我们有两个极限，现在一个一个算。令：

$$\langle\psi|\equiv\langle 0|U_I(t_+,0)\phi_H(x_1)...\phi(x_n)|$$

于是：

$$\langle\psi|U_I(0,t_-)|0\rangle=\langle\psi|e^{iHt_-}-e^{iH_0t_-}|0\rangle=\langle\psi|e^{iHt}|0\rangle$$

第二个等号是由于裸真空对自由哈密顿量的本征值为0。我们有一组完备基：

$$H\left|n\right\rangle=E_n\left|n\right\rangle$$

特别地，对于物理真空态，我们有：

$$H\left|0\right\rangle^P=0$$

将其插入完备性关系，我们得到：

$$\langle\psi|e^{iHt_-}|0\rangle = \sum_n \langle\psi|n\rangle\langle n|e^{iHt_-}|0\rangle = \langle\psi|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|e^{iHt_-}|0\rangle + \sum_{n\neq|0\rangle^P}\langle\psi|n\rangle\langle n|e^{iHt_-}|0\rangle$$
$$= \langle\psi|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|0\rangle + \sum_{n\neq|0\rangle^P} e^{-iE_nt_-}\langle\psi|n\rangle\langle n|0\rangle$$

当$t\to-\infty$，根据Riemann-Lebesgue引理，我们有其他项相消，只留下第一项，于是有：

$$\lim_{t_-\to-\infty}\langle\psi|U_I(0,t_-)|0\rangle = \langle\psi|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|0\rangle$$

有了这个关系，我们得到：

$$\begin{aligned}
G^{(n)\mathrm{Feyn}}(x_1,...x_n) &= \lim_{\substack{t_+\to+\infty\\ t_-\to-\infty}} \frac{\langle 0|U_I(t_+,0)\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n)U_I(0,t_-)|0\rangle}{\langle 0|U_I(t_+,0)U_I(0,t_-)|0\rangle}\\
&= \lim_{\substack{t_+\to+\infty\\ t_-\to-\infty}} \frac{\langle 0|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|U_I(t_+,0)\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n)U_I(0,t_-)|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|0\rangle}{\langle 0|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|0\rangle^P\ {}^P\langle 0|0\rangle}\\
&= \lim_{\substack{t_+\to+\infty\\ t_-\to-\infty}} {}^P\langle 0|U_I(t_+,0)\phi_H(x_1)...\phi_H(x_n)U_I(0,t_-)|0\rangle^P\\
&= G^{(n)}(x_1,...x_n)
\end{aligned}$$

这样，我们就回答了第一个问题。其中用到的技巧是，当时间趋于无穷，我们把除了真空态以外的东西都消除了。

13.5 构造初态和末态

现在考虑问题二。给定$G^{(n)}$我们如何计算矩阵S，这个问题和微扰理论无关，也和我们如何把哈密顿量分为两部分无关。首先，我们要考虑如何构造初态和末态的问题。

由于我们总是使用海森堡图景，这里我们标记：

$$\phi(x)\equiv\phi_H(x)$$

同时，由于我们将只会讨论实际真空，于是有：

$$|0\rangle\equiv|0\rangle^P$$

它满足以下条件：

$$\begin{aligned}
P^\mu|0\rangle &= 0\\
\langle 0|0\rangle &= 1
\end{aligned}$$

真空态是动量算符和能量算符的本征态，具有本征值0。同时，真空态本身被归一化。考虑我们有一个单介子态$|p\rangle$，那么我会相对论性地正规化它们：

$$\langle p'|p\rangle = (2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

这些态是动量算符的本征态：

$$P^\mu|p\rangle = p^\mu|p\rangle \quad \text{where } p^0=\omega_{\mathbf{p}}=\sqrt{|\mathbf{p}|^2+\mu^2}$$

接着，我们需要对场做出几个约定，首先，我希望场的真空期望值是0。由于平移不变性，其与x无关：

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{-iP\cdot x}|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle$$

如果真空能不为0，可以通过重新定义场来使其为0：

$$\phi(x) \to \phi'(x) - \langle 0|\phi(0)|0\rangle \Rightarrow \langle 0|\phi'(x)|0\rangle = 0$$

第二个，我需要正规化单粒子矩阵元：

$$\langle k|\phi'(x)|0\rangle = \langle k|e^{iP\cdot x}\phi'(0)e^{-iP\cdot x}|0\rangle = e^{ik\cdot x}\langle k|\phi'(0)|0\rangle$$

由于洛伦兹变换不改变$\phi'(0)$，也不改变单粒子态，所以$\langle k|\phi'(0)|0\rangle$是洛伦兹不变的，且只依赖于$k^2$。由质壳条件$k^2=\mu^2$，所以$\langle k|\phi'(0)|0\rangle$是一个常数，我们约定其为：

$$\langle k|\phi'(0)|0\rangle = \sqrt{Z_3}$$

现在我们可以重定义：

$$\phi'(x) = Z_3^{-1/2}(\phi(x) - \langle 0|\phi(0)|0\rangle) \equiv Z_3^{-1/2}\phi_s(x)$$

其中$\phi_s(x)$是subtracted field。我会假设Z_3不为0。那么$\phi'(x)$在实际真空和重整自由单粒子态之间的矩阵元和在裸真空和裸单粒子态之间的矩阵元相同：

$$\langle k|\phi'(x)|0\rangle$$

以上两个条件只是一种约定。$\phi'(x)$被称为重整化场，当$\phi(x)$是规范场，遵守规范对易关系。Z_3被称为场重整化常数。重整化场表现得它们好像是自由场一样。实际上它们不是，所以我们需要对其做出一些限制，在这个过程中我们会遇到许多问题，首先我们需要发展一些表示平面波函数的符号：

$$|f\rangle \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k})\,|k\rangle$$

和这些波函数相联系的是函数：

$$f(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k}) e^{-ik\cdot x}$$

这是K-G方程的正能解：

$$(\square^2 + \mu^2)f(x) = 0$$

另一方面，我们有：

$$\langle k'|f\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k})\,\langle k'|k\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}} F(\mathbf{k})(2\pi)^3 2\omega'_{\mathbf{k}}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = F(\mathbf{k}')$$

如果把上面的$|f\rangle$换成$|k\rangle$，那么右边就变成了$(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$。

现在我要定义一个第一眼看上去很丑的算符：

$$\phi'^f(t) \equiv i\int d^3\mathbf{x}[\phi'(x)\partial_0 f(x) - f(x)\partial_0\phi'(x)]$$

记住，$\phi'(x)$是一个海森堡场，与x有关，而上面的场只与t有关。更具体地，我们可以计算它的真空-真空矩阵元：

$$\langle 0|\phi'^f(t)|0\rangle = 0$$

同样，我们可以计算：

$$
\begin{aligned}
\langle k|\phi'^f(t)|0\rangle &= i\int d^3\mathbf{x}\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}'}}F(\mathbf{k}')[-i\omega_{\mathbf{k}'}e^{-ik'\cdot x}-e^{-ik'\cdot x}\partial_0]\langle k|\phi'(x)|0\rangle \\
&= i\int d^3\mathbf{x}e^{ik\cdot x}\int\frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}'}}F(\mathbf{k}')e^{-ik'\cdot x}[-i\omega_{\mathbf{k}'}-i\omega_{\mathbf{k}}] \\
&= i\left[\frac{-2i\omega_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}}}\right]F(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k}) = \langle k|f\rangle
\end{aligned}
$$

于是我们有：

$$
\phi'^f(t)\left|0\right\rangle = \left|f\right\rangle
$$

另一方面，计算得到：

$$
\langle 0|\phi'^f(t)|k\rangle = 0
$$

如果我们把自己限制在单粒子态的子空间中，那么$\phi'^f(t)$就像是$|f\rangle$的产生算符。那么对于多粒子态呢？如果我们取$|n\rangle$，那么有本征关系：

$$
P^\mu\left|n\right\rangle = p_n^\mu\left|n\right\rangle
$$

那么态$|n\rangle$的矩阵元可以由类似的方法得出。我们有：

$$
\langle n|\phi'(x)|0\rangle = \langle n|e^{iP\cdot x}\phi'(0)e^{-iP\cdot x}|0\rangle = e^{ip_n\cdot x}\left\langle n|\phi'(0)|0\right\rangle
$$

我们不知道$\langle n|\phi'(0)|0\rangle$是什么，但可以先继续：

$$
\begin{aligned}
\langle n|\phi'^f(t)|0\rangle &= i\int d^3\mathbf{x}[\partial_0 f - f\partial_0]e^{ip_n\cdot x}\left\langle n|\phi'(0)|0\right\rangle \\
&= i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}F(\mathbf{k})(-i\omega_{\mathbf{k}}-iE_n)\left\langle n|\phi'(0)|0\right\rangle\int d^3\mathbf{x}\, e^{-i(k-p_n)\cdot x} \\
&= \left[\frac{\omega_{\mathbf{p}_n}+E_n}{2\omega_{\mathbf{p}_n}}\right]F(\mathbf{p}_n)\left\langle n|\phi'(0)|0\right\rangle e^{-i(\omega_{\mathbf{p}_n}-E_n)t}
\end{aligned}
$$

关键在于指数因子，多例子态总有$E_n > \omega_{\mathbf{p}_n}$，也就是说这个指数因子实际上是振荡的，可以通过积分消掉，类似地，我们有：

$$
\lim_{t\to\pm\infty}\langle n|\phi'^f(t)|0\rangle = 0
$$

让$\langle\psi|$成为一个正规化的态，然后考虑极限下的$\langle\psi|\phi'^f(t)|0\rangle$，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\pm\infty}\langle\psi|\phi'^f(t)|0\rangle &= \lim_{t\to\pm\infty}\sum_n\left\langle\psi|n\right\rangle\left\langle n|\phi'^f(t)|0\right\rangle \\
&= \lim_{t\to\pm\infty}[\left\langle\psi|0\right\rangle\left\langle 0|\phi'^f(t)|0\right\rangle + \sum_{n,\,\text{single}-\text{p}}\left\langle\psi|n\right\rangle\left\langle n|\phi'^f(t)|0\right\rangle + \sum_{n,\,\text{multi}-\text{p}}\left\langle\psi|n\right\rangle\left\langle n|\phi'^f(t)|0\right\rangle] \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\left\langle\psi|k\right\rangle\left\langle k|\phi'^f(x)|0\right\rangle = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{k}}}\left\langle\psi|k\right\rangle F(\mathbf{k}) = \langle\psi|f\rangle
\end{aligned}
$$

这和之前的公式十分相似，单粒子态位于左侧。算符把部分$F(\mathbf{k})$投影出来得到：$\langle\psi|f\rangle$。也就是说，我们有了一些既可以作用与很久以前也可以作用于很久以后的态$|f\rangle$的产生算符。