

Lecture 10. 质量重整化和费曼图

现在我们考虑模型三：

$$\mathcal{H}_I = g\psi^*\psi\phi f(t)$$

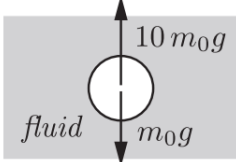
这一次，我们有两个新的特征。首先，像上节的能量转换问题一样，我们要考虑**质量重整化**，它具有两种意思，既用于形容遇到的问题，也用于我们解决问题的方法，也就是在拉格朗日密度中增加反项。

第二个特征就是Wick图不再有像之前两个模型中一样的简单结构。在模型三中我们有一个无穷的连接图集合。因此，我们会得到一个开放的 S 矩阵，也许只有外星人能计算。我们能做的只是为每一个特定的散射过程设定一个特殊的矩阵元素，并在微扰理论中按顺序计算之，直到到达计算极限。这时再使用Wick图不太方便，所以我们会使用另一种图，也就是费曼图，用来表征一个Wick算符对一个特定矩阵元素的作用。

10.1 模型三的质量重整化

让我们考虑一个流体中的球，它的动力学问题首先被George Green于1834年所研究，就是格林函数的那个格林，发表于Transactions of the Royal Society of Edinburgh。

假设我们有一个体积 V 的球，充填了很轻的气体，浸没在密度 ρ 的无粘液体中。我们有：

$$m_0 = \frac{1}{10}\rho V$$


示意图

按照静力学分析，此时球的加速度应该是 $9g$ 。但如果我们拿一个乒乓球之类的放到泳池里做实验，我们会发现乒乓球上浮的加速度显然没有 $9g$ 。也许你会说这是由于液体阻力，但阻力通常和速度有关，而在球开始运动的时候，阻力并不能造成显著作用。

Green在处理小振动问题时发现："Hence in this last case [of a spherical mass] we shall have the true time of the pendulum's vibration, if we suppose it to move in vacuo, and then simply conceive its mass augmented is diminished by the whole weight of the same volume of fluid." Green告诉我们，实际上存在一个有效质量，也就是我们能在水里测得的乒乓球的质量，如果宇宙被塞满了水，那么有效质量为：

$$m = m_0 + \frac{1}{2}\rho V$$

于是加速度就变成了：

$$a = \frac{F_{net}}{m} = \frac{9m_0g}{6m_g} = 1.5g$$

十年后，Stokes给出了对这个现象的物理解释，就是NS方程的那个S。他指出当一个球在流体中以 \mathbf{v} 运动，流体并不会呆着不动，而是会随着球流动。如果让我们计算流体和球的总动量 \mathbf{p}_{total} ，我们会发现答案是球的动量 $m_0\mathbf{v}$ 加上流体的动量，后者由勒让德多项式的0阶和1阶表示，于是我们得到：

$$\mathbf{p}_{total} = m_0\mathbf{v} + \mathbf{p}_{fluid} = m_0\mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho V\mathbf{v} + \mathcal{O}(|\mathbf{v}|^2) = m\mathbf{v} + (\text{high orders of } |\mathbf{v}|)$$

我们看到，乒乓球和水的相互作用改变了乒乓球的有效质量。另一个例子是Lorentz的电子理论，他把电子看作是带电荷 e 的具有等效半径 r 的刚体。于是我们有能量：

$$E = m_0c^2 + \frac{ke^2}{r}$$

但如果我们设

$$m = m_0 + \frac{ke^2}{rc^2}$$

那么你就不仅得到了电子的动量，也得到了电磁场的动量。从上面的陈述中我们可以总结：一般情况下，每当我们有一个粒子与一个连续系统相互作用时，它的质量就会改变。

现在回到我们的问题上来，让我们考虑介子的质量。首先，我们有拉格朗日密度：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2\phi^2 - g\psi^*\psi\phi + \dots$$

当然我们还有核子项，但在这里省略了。然后我们记 μ_0 为没有任何相互作用下介子的质量。但是随着相互作用介入，我们没有理由再相信 ϕ^2 前面的系数还是 μ_0^2 ，相反，这应该是一个动态的数，并且需要复杂的计算，不管怎样：

$$\mu^2 \neq \mu_0^2$$

这不仅是一个现象，也是散射理论的一个问题，就和能量与真空态不匹配一样。如果我们打开相互作用的开关，那么入射单介子态的质量，也就是能量，就会改变。这样，在散射过程中，即使对于一个单独的介子，其也会具有一个相位，就像真空态也有一个相位一样。当我们计算单介子-单介子的 S 矩阵元是，我们应该认为其为1，就好像真空-真空的矩阵元也为1一样。单实际上我们不会得到一，而是一些荒谬的相位因子。

为了避免这个问题，我们引入反项。考虑如下的拉格朗日密度：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi - m^2\psi^*\psi + f(t)\left[-g\psi^*\psi\phi + a + \frac{1}{2}b\phi^2 + c\psi^*\psi\right]$$

其相互作用哈密顿密度为：

$$\mathcal{H}_I = -f(t) \left[-g\psi^*\psi\phi + a + \frac{1}{2}b\phi^2 + c\psi^*\psi \right]$$

可以看到，我们有对应真空的反项 a ，对应介子质量的反项 $\frac{1}{2}b\phi^2$ ，和对应核子质量的反项 $c\psi^*\psi$ 。其中， b 和 c 的引入是为了保证在我们开启相互作用时，核子和介子的质量保证不变，就好像我们引入 a ，是为了保证真空能量在开关相互作用时保持不变一样。因为相互作用，介子质量开始改变，但没关系，我同时打开了 b 和裸质量 μ_0^2 ，所以物理质量就总是 μ^2 ，这消除了不匹配的相位。

虽然我加入了三个项，但它们并不是任意的，而是被限制的。我们有：

$$\begin{aligned}\langle 0|S|0\rangle &= 1 \Rightarrow a \\ \langle \mathbf{q}|S|\mathbf{q}'\rangle &= \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \Rightarrow b \\ \langle \mathbf{p}|S|\mathbf{p}'\rangle &= \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \Rightarrow c\end{aligned}$$

这里 $|\mathbf{q}\rangle$ 是介子态， $|\mathbf{p}\rangle$ 是核子态。另一个限制来自于有效质量的物理含义：有多少质量是相互作用所带来的，又有多少质量是上帝给的，我们有：

$$\begin{aligned}\mu_0^2 &= \mu^2 - b \\ m_0^2 &= m^2 - c\end{aligned}$$

10.2 模型三的费用规则

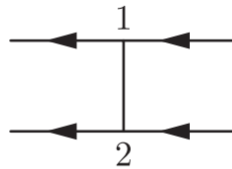
现在我们介绍费曼图。首先我们知道，Wick展开式中每一项都对应很多独立的散射过程。进一步，让我们考虑一个有动量 \mathbf{p}_1 的核子和一个有动量 \mathbf{p}_2 的核子经过散射变成一个有动量 \mathbf{p}'_1 的核子和一个动量 \mathbf{p}'_2 的核子，反应式为：

$$N(\mathbf{p}_1) + N(\mathbf{p}_2) \rightarrow N(\mathbf{p}'_1) + N(\mathbf{p}'_2)$$

这是一个二阶展开：

$$\langle p'_1, p'_2 | (S - 1) | p_1, p_2 \rangle$$

这里我们把本征态进行了相对论正规化，这一项对应的Wick图如下。



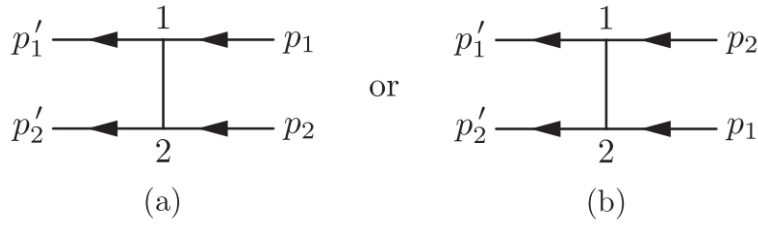
$\mathcal{O}(g^2)$ 的Wick图

这来自：

$$\frac{1}{2}(-ig)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 T(\psi(x_1)^*\psi(x_1)\phi(x_1)\psi(x_2)^*\psi(x_2)\phi(x_2))$$

在Wick图中外线如何延申并不重要，而新图表示论中对外线有特殊规定。我会把所以会湮灭粒子的初态放在右边，并把产生粒子的末态放在左边。然后我会在线旁边标记其产生或者湮灭的粒子的动

量。比如下图。



$\mathcal{O}(g^2)$ 的动量图

我想要首先讨论这个图的combinatoric factors，然后讨论我们如何计算这些图。它们的combinatoric factors比Wick图简单，这是因为对于这一类图，我们注意到所有顶点都是唯一的，如果我们假设 $p_1 \neq p_2$, $p'_1 \neq p'_2$ 。比如，我用1来标记 p_1 入射的核子连接的顶点，那么除了少数几个例外，所有其他的顶点都被唯一确定了，比如2顶点就是你沿着介子线到达的顶点。我们通过排列1和2得到的对应图将会不一样，这实际上消除了戴森公式中的 $2!$ 。这也就告诉我们，要删去顶点的上的标记，只需要删除 $\frac{1}{n!}$ 的因子。我们将这种不标记顶点只标记端点的图称为费曼图。

对于模型三的理论，戴森公式中的 $\frac{1}{n!}$ 都被消去，除了无外线的非连接图(比如真空-真空)。不过这些项不会干扰我们，因为在指数定理中它们都变成了系数乘在表达式前面，并且被反项抵消掉。另外，如果我们想要计算基态的能量密度，那么就必须考虑组合方式，但是，如果我们只对矩阵元素感兴趣，那这些就都会相互抵消，所以也不用担心。

还有一种情况是比如我们有一个 ϕ^4 理论，然后有四条介子线出来，那我们可能会有一些困扰，不过至少在这个模型内，这么做没问题。实际上，对于核子-介子理论和之后的QED，这么做都没有问题， $\frac{1}{n!}$ 被完美地消掉了。当然，在费曼图中，我们也有多余的对称性，对此要保持谨慎，不能简单地认为所有的 $S(D)$ 都为1。

现在我们开始实际计算这些图。首先考虑图(a)，其对应的项为：

$$\frac{1}{2}(-ig)^2 \int d^4x_1 d^4x_2 : \psi(x_1)^* \psi(x_1) \psi(x_2)^* \psi(x_2) : \overline{\phi(x_1) \phi(x_2)}$$

首先我们计算非缩并场的振幅，比如：

$$\langle 0 | \psi(x) | p \rangle = e^{-ip \cdot x}$$

这来自我们对相对论正规化的本征态，保证了上面这个简单的形式，方便了之后的计算。于是我们有：

$$\begin{aligned} \langle p'_1 p'_2 | : \psi(x_1)^* \psi(x_1) \psi(x_2)^* \psi(x_2) : | p_1 p_2 \rangle &= \langle p'_1 p'_2 | \psi(x_1)^* \psi(x_2)^* \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\ &= \langle p'_1 p'_2 | \psi(x_1)^* \psi(x_2)^* | 0 \rangle \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1 p_2 \rangle \end{aligned}$$

分别计算，得到：

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1 p_2 \rangle &= \underbrace{e^{-ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2}}_{\substack{p_1 \text{ absorbed at } x_1 \\ p_2 \text{ absorbed at } x_2}} + \underbrace{e^{-ip_1 \cdot x_2 - ip_2 \cdot x_1}}_{\substack{p_1 \text{ absorbed at } x_2 \\ p_2 \text{ absorbed at } x_1}} \\
\langle p'_1 p'_2 | \psi(x_1)^* \psi(x_2)^* | 0 \rangle &= \underbrace{e^{ip'_1 \cdot x_1 + ip'_2 \cdot x_2}}_{\substack{p'_1 \text{ emitted at } x_1 \\ p'_2 \text{ emitted at } x_2}} + \underbrace{e^{ip'_1 \cdot x_2 + ip'_2 \cdot x_1}}_{\substack{p'_1 \text{ emitted at } x_2 \\ p'_2 \text{ emitted at } x_1}}
\end{aligned}$$

于是有：

$$\begin{aligned}
\langle p'_1 p'_2 | \psi^*(x_1) \psi^*(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \psi(x_1) \psi(x_2) | p_1 p_2 \rangle \\
&= \left(e^{ip'_1 \cdot x_1 + ip'_2 \cdot x_2} + e^{ip'_1 \cdot x_2 + ip'_2 \cdot x_1} \right) \left(e^{-ip_1 \cdot x_1 - ip_2 \cdot x_2} + e^{-ip_1 \cdot x_2 - ip_2 \cdot x_1} \right) \\
&= \underbrace{\left[e^{ix_1 \cdot (p'_1 - p_1) + ix_2 \cdot (p'_2 - p_2)} \right]}_{\text{Diagram (a)}} + \underbrace{\left[e^{ix_1 \cdot (p'_1 - p_2) + ix_2 \cdot (p'_2 - p_1)} \right]}_{\text{Diagram (b)}} + (x_1 \leftrightarrow x_2)
\end{aligned}$$

省略号里面包含另外两种排列方式，不过由于积分顺序不影响积分值，图(c)和图(a)贡献一样，图(d)和图(b)贡献一样。所以我们可以去掉顶点的标记，视为同一个图，并简单地删除戴森公式中的 $\frac{1}{2!}$ 因子。在先前推导中，我们有：

$$\overline{\phi(x_1) \phi(x_2)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x_1 - x_2)} \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

现在计算：

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, p'_2 | (S - 1) | p_1, p_2 \rangle &= (-ig)^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{ix_1 \cdot (p'_1 - p_1 - q) + ix_2 \cdot (p'_2 - p_2 + q)} \\
&\quad + (p_1 \leftrightarrow p_2) \\
&= (-ig)^2 (2\pi)^4 \int d^4 q \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \delta^{(4)}(p'_1 - p_1 - q) \delta^{(4)}(p'_2 - p_2 + q) \\
&\quad + (p_1 \leftrightarrow p_2)
\end{aligned}$$

由于 $\delta(x - a)\delta(x - b) = \delta(b - a)\delta(x - b)$ ，上式变为：

$$\begin{aligned}
\langle p'_1, p'_2 | (S - 1) | p_1, p_2 \rangle &= (-ig)^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + p'_2 - p_1 - p_2) \times \\
&\quad \int d^4 q \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left[\delta^{(4)}(p'_1 - p_1 - q) \delta^{(4)}(p'_2 - p_1 + q) \right]
\end{aligned}$$

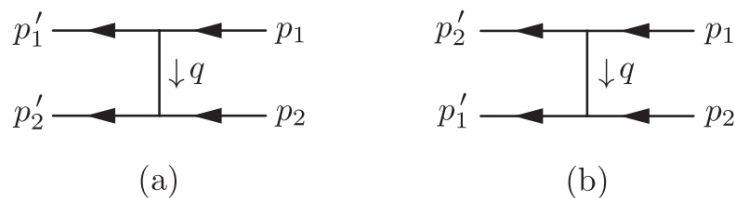
于是我们只剩下一个位于内部介子线上对动量 q 的积分，让我们定义不变费曼振幅 \mathcal{A}_{fi} ：

$$\langle f | (S - 1) | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i \mathcal{A}_{fi}$$

在我们的模型中，反应 $NN \rightarrow NN$ 的振幅为：

$$\mathcal{A}_{fi} = (-ig)^2 \frac{1}{(p_1 - p'_1)^2 - \mu^2 + i\epsilon} + (-ig)^2 \frac{1}{(p_1 - p'_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

第一项对应图(a)，第二项对应图(b)，对应图如下。



图(a)代表一个动量 p_1 的核子入射并在一点进行相互作用，出射一个 p_1' 的核子并发射一个动量 q 的虚拟的介子，这个介子与 p_2 的核子相互作用，并出射 p_2' 的核子。由于进行相互作用的时空点 x_1 和 x_2 可能在任何位置，所以我们需要对时空进行积分。更进一步地说，虚拟介子不是一个真介子，它可以拥有任意动量 q ，于是 q 也被积分，虽然我们可以从 $(q^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1}$ 中看出，介子倾向于呆在质壳层上。

这样的模型驱使费曼思考量子电动力学。在路径积分的表述下，它们有了更深的物理意义。

给定拉格朗日密度，我们给出一系列规则来约束我们画图的方式，以产生对应实际物理过程的振幅。这就是**费曼规则**。

<i>Feynman rules for Model 3</i>		
1. For external lines $\begin{Bmatrix} \text{incoming} \\ \text{outgoing} \end{Bmatrix}$, momenta are directed $\begin{Bmatrix} \text{in} \\ \text{out} \end{Bmatrix}$.		
2. Assign a directed momentum to every internal line.		
3. For every ...		
(a) internal meson line		$\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}$
(b) internal nucleon line		$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
(c) vertex		$-ig (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - q - p)$
(d) meson mass counterterm		$ib (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q' - q)$
(e) nucleon mass counterterm		$ic (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p)$
(f) vacuum counterterm	\times	$ia (2\pi)^4 \delta^{(4)}(0)$
4. Integrate over all internal momenta (lines belonging to “virtual particles”).		

模型三的费曼规则

注意到，在顶点和反项中，我们有一个关于能动量守恒的 δ 函数。我们具有一个动量流，流入顶点的动量的总和等于流出的动量总和，这也体现在 δ 函数中。

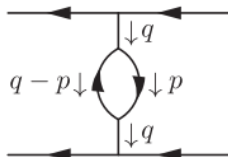
对 a 反项，没有动量， δ 函数中是0，如果系统在一个盒子中，那么 $(2\pi)^4\delta^{(4)}(0)$ 就等于 VT ，对应盒子中的时空体积，这个反项是为了消除真空图。就像 a 一样，反项 b 和 c 也可以被表为一个带系数 g 的无穷级数。

对于介子反项前面的 $\frac{1}{2}$ ，注意到我们总是有向前缩并和向后缩并两种选择，所以它们共同消除了这个系数。

就这样，让我们一步一步进行，最后我们得到一个超级大积分，包含我们所需要的一切东西。所以，我们可以忘了Wick定理，忘了戴森公式，忘了场，我们只要有这些规则，就可以计算所有散射过程。

注意到，对每个 dp ，我们都有一个 $\frac{1}{2\pi}$ ，而对每一个 δ 函数，我们都有一个 2π 。

对于 $NN \rightarrow NN$ 反应，图(a)不是唯一的可能性，还需要考虑，比如下图。



另一种可能

对于中间的虚过程，能动量守恒能保持是因为每一个顶点的 δ 函数。而对虚粒子，最有趣的是它们无须位于质壳层上，它们可以有任何4-动量，所有我们需要对相空间积分，给出：

$$\tilde{\Delta}_F(q^2) = \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

这个解释来源于费曼，奇迹般地，在Dyson和Wick之前得到这些规则：费曼是个天才。上面的表达式给出了两个顶点间虚粒子的概率振幅，称为费曼传播子。

10.3 模型三不大于 g^2 阶的费曼图

现在我们将系统地推导模型三中的费曼图到 g^2 阶。首先，我们只有两个 \mathcal{O}_g 图：

$$1.1 \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{---} = 0 \quad \text{if } \mu < 2m$$

$$1.2 \quad \text{---} \bigcirc = 0$$

图1.1代表一个介子衰变为正反核子，除非我们设定的 μ 足够大，不然就会得0。我之后会讨论这种情况，但现在让我们先假定介子是稳定的，于是这个反应因为不符合能动量守恒而被排除。当然，我们也不会有一个核子衰变为一个核子加一个介子的反应发生，因为它们都发生在质壳层上。图1.2就更不可能，它代表真空中自发吸收介子。

然后，我们有23个 $\mathcal{O}(g^2)$ 图（考虑对称性只有17个）：

$$2.1 \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} = 0 \quad \text{if } \mu < 2m$$

图2.1是图1.1的两倍，在所有 $\mathcal{O}(g^2)$ 图中，这个图拥有最多的外线。但接下来我将从最少外线的图开始介绍，从0外线到4外线。

$$2.2 \quad (a) \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \quad (c) \quad \times \quad (\text{computed to } \mathcal{O}(g^2))$$

图2.2包括三个不同的图，两个对应真空能，一个对应反项。从图2.2(a)和(b)中我们得到真空自能修正，于是我们引入一个反项。这些图是 g^2 阶对 $\langle 0|S|0\rangle$ 过程的唯一贡献，反项使这三个图的贡献总和为0，使得没有 $\mathcal{O}(g^2)$ 的项作用于真空-真空振幅：

$$\langle 0|S|0\rangle = 1 \text{ to } \mathcal{O}(g^2)$$

也就是说，微扰对真空-真空振幅无修正。当然，反过来，我们可以通过计算无反项的修正来得到真空能量密度 a 。让我们继续讨论有两个外线的图。

$$2.3 \quad (a) \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad (b) \quad \longrightarrow \quad \times \quad \longrightarrow$$

第一项对应我们计算介子裸质量到 g^2 阶精度很有帮助。然后，介子的质量重整化反项 b 精确地使这两项的总贡献为0。否则，我们就会有介子-介子反应的 g^2 阶修正，于是我们就不能够使：

$$\langle \mathbf{q}|S - 1|\mathbf{q}'\rangle = 0$$

同样地，我们有：

$$2.4 \quad (a) \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad (b) \quad \begin{array}{c} \bigcirc \\ \longrightarrow \end{array} \quad (c) \quad \longrightarrow \quad \times \quad \longrightarrow$$

和介子一样，这是有关核子的三张图，我们可以从前两张图得到核子的裸质量，并引入第三张图使：

$$\langle \mathbf{p}|S - 1|\mathbf{p}'\rangle = 0 \text{ to } \mathcal{O}(g^2)$$

接下来我们只剩下有四个外线的费曼图，它们表述了7个不同的过程，但我们只会考虑其中的四个，因为其他的过程都可以从这4个过程中通过对称性得到。我们必须要有2个入射线和两个出射线，否则它们会因为能动量守恒而消失。

首先，考虑核子-核子散射：

$$2.5 \text{ } N + N \rightarrow N + N$$

我们也会有反核子-反核子散射，它们和核子-核子散射由 C 宇称相联系：

$$N + N \rightarrow N + N \xleftrightarrow{C} \bar{N} + \bar{N} \rightarrow \bar{N} + \bar{N}$$

我们有核子-反核子散射：

$$2.6 \text{ } N + \bar{N} \rightarrow N + \bar{N}$$

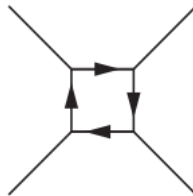
C 宇称在这里没什么帮助。我们有核子-介子散射：

$$N + \phi \rightarrow N + \phi \xleftrightarrow{C} \bar{N} + \phi \rightarrow \bar{N} + \phi$$

最后，我们有核子反核子湮灭反应：

$$\bar{N} + N \rightarrow \phi + \phi \xleftarrow{T} \phi + \phi \rightarrow N + \bar{N}$$

你可能想问反应 $\phi + \phi \rightarrow \phi + \phi$ ，这个反应确实会发生，但是它处在 $\mathcal{O}(g^4)$ 阶：



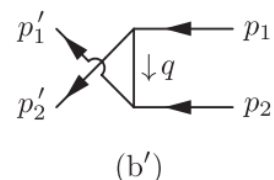
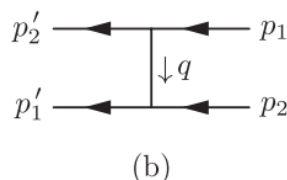
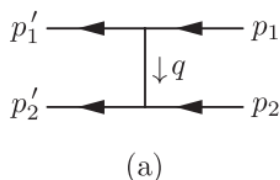
现在，我们得到了4种 $\mathcal{O}(g^2)$ 的具有4外线的反应。对每种反应，我们都有两种费曼图，我对所有四种过程写下2种费曼图，然后解释每一项的物理意义。

为了简化，我使用下面的符号：

$$\langle p'_1 p'_2 | S - 1 | p_1 p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f - p_i) i \mathcal{A}_{fi}$$

10.4 模型三的核子-核子散射 ($\mathcal{O}(g^2)$ 阶)

首先，我们给出对应散射2.5的费曼图，我们先前已经讨论过。但我们现在会再画一次，带有一点细微的改变：



反应 $NN \rightarrow NN$ 费曼图

(a)和(b)我之前已经画过，有时我们会看到类似(b')的形式，它和(b)是同一张图，只是(b')固定了端点指标的位置。

虽然我们已经推导过其的不变振幅，但现在我们可以用费曼规则重新计算一遍：

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_1 + q - p_1) \frac{i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} (-ig)(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 - q - p_2) \\ &= -g^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 + p'_1 - p_2 - p_1) \frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

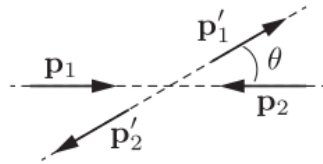
考虑到动量流传递相反（图(c)），我们得到一个相反的因子，于是得到：

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 + p'_1 - p_2 - p_1) i\mathcal{A}_{fi} \\ &= -g^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p'_2 + p'_1 - p_2 - p_1) \left[\frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{i}{(p_1 - p'_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right] \end{aligned}$$

最终，我们得到：

$$i\mathcal{A}_{fi} = -g^2 \left[\frac{i}{(p_1 - p'_1)^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \frac{i}{(p_1 - p'_2)^2 - \mu^2 + i\epsilon} \right]$$

我们现在来解释这两项之间的含义。首先，相对论性量子力学会在低能情形下简化为非相对论性量子力学。而在非相对论力学中有许多有关Born近似的计算，那么有类似的表达式吗？



动量中心散射 $NN \rightarrow NN$

在中心系下我们有：

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{ep} \text{ where } p = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$$

那么，四动量就是：

$$\begin{aligned} p_1 &= (\sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{ep}) \\ p_2 &= (\sqrt{p^2 + m^2}, -\mathbf{ep}) \end{aligned}$$

定义新的单位矢量 \mathbf{e}' ，我们有：

$$\begin{aligned} p'_1 &= (\sqrt{p^2 + m^2}, \mathbf{e}'p) \\ p'_2 &= (\sqrt{p^2 + m^2}, -\mathbf{e}'p) \end{aligned}$$

那么表达式中的分母 $(p_1 - p'_1)^2$ 就是：

$$(p_1 - p'_1)^2 = (\sqrt{p^2 + m^2} - \sqrt{p^2 + m^2})^2 - p^2(\mathbf{e} - \mathbf{e}')^2 = -2p^2(1 - \cos \theta) = -\Delta^2$$

其中 θ 是散射角， $\Delta = |\Delta|$ ， Δ 是非相对论动量传递：

$$\Delta \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1$$

另一个分母：

$$(p_1 - p'_2)^2 = -p^2(\mathbf{e} + \mathbf{e}')^2 = -2p^2(1 + \cos \theta) = -\Delta_c^2$$

类似地：

$$\Delta_c \equiv \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2$$

把这两项换进去，我们可以得到新的不变振幅 \mathcal{A}_{fi} ：

$$\mathcal{A}_{fi} = g^2 \left[\frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} + \frac{1}{\Delta_c^2 + \mu^2} \right]$$

这里我们丢掉 $i\epsilon$ 因为分母显然为正。这个表达式和我们之前推导的非常相似。人们在量子场论被发展前就进行了许多碰撞实验，散射已经被非相对论量子力学充分描述。非相对论下的振幅为：

$$\mathcal{A}_{fi\text{NR}} = \langle f|V|i \rangle \propto \int d^3\mathbf{r} V(r) e^{-i\Delta \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\Delta)$$

在最低阶扰动理论中。这是有名的**Born近似**，非相对论量子散射的基石。把Yukawa势代入：

$$\tilde{V}(\Delta) \propto g^2 \frac{1}{\Delta^2 + \mu^2} \text{ if } V(r) = V_{\text{Yukawa}}(r) = g^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

如果用汤川势代入非相对论理论计算，得到的正是相对论理论的最低阶非平凡阶的第一个项。那么第二项呢？实际上，它也有非相对论近似，让我们引入交换算符 \mathcal{E} ，作用于两粒子态可以交换两粒子：

$$\mathcal{E}\psi(r_1, r_2) = \psi(r_2, r_1)$$

如果考虑非相对论散射，具有势能：

$$V(r) \propto V_{\text{Yukawa}}(r) \mathcal{E}$$

然后我们就有：

$$\langle f|V|i \rangle \propto \int d^3\mathbf{r} V_{\text{Yukawa}}(r) e^{-i\Delta_c \cdot \mathbf{r}} = \tilde{V}(\Delta_c)$$

交换 p'_1 和 p'_2 ，散射振幅不变，因为全同粒子不可分辨。由于我们正在研究多粒子体系，其自动满足Bose统计，必须具有正确的对称性。那么相互作用能为：

$$V(r) = V_{\text{Yukawa}}(1 + \mathcal{E})$$

下一节我们将用类似方法继续讨论核子-反核子散射。特别地，我们会讨论二阶微扰理论的散射截面和CPT不变性，然后会麻烦却必要地从S矩阵中推导散射截面。

