中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

3.2 The Expansion Age of the Universe

报告人：谭子立 邱林蔚

弗里德曼方程

我们先写出弗里德曼方程:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\rho$$

考虑到$H\equiv\frac{\dot{R}}{R}$

可以把方程改写为:

$$\frac{k}{H^2R^2}=\frac{\rho}{3H^2/8\pi G}-1\equiv\Omega-1$$

其中$\Omega\equiv\frac{\rho}{\rho_c}$，$\rho_c\equiv\frac{3H^2}{8\pi G}$

对于t_0，可以用弗里德曼方程表示k:

$$k=R_0^2H_0^2(\Omega_0-1)$$

同理有$\Omega_0=\frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0$

另一方面，考虑到在物质主导和辐射主导下:

- 辐射: $\left(p=\frac{1}{3}\rho\right)\Rightarrow\rho\propto R^{-4}\Rightarrow\frac{\rho}{\rho_0}\propto\frac{R^{-4}}{R_0^{-4}}$
- 物质: $(p=0)\Rightarrow\rho\propto R^{-3}\Rightarrow\frac{\rho}{\rho_0}\propto\frac{R^{-3}}{R_0^{-3}}$

弗里德曼方程有如下形式:

- 辐射: $\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\frac{R^{-4}}{R_0^{-4}}\rho_0\Rightarrow\frac{\dot{R}^2}{R_0^2}+\frac{k}{R_0^2}=\frac{8\pi G}{3}\frac{R_0^2}{R^2}\rho_0$
- 物质: $\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi G}{3}\frac{R^{-3}}{R_0^{-3}}\rho\Rightarrow\frac{\dot{R}^2}{R_0^2}+\frac{k}{R_0^2}=\frac{8\pi G}{3}\frac{R_0}{R}\rho_0$

把k的表达式代入得到:

$$\dot{R}=R_0H_0\sqrt{\frac{R_0^2}{R^2}\Omega_0-\Omega_0+1}=\frac{dR}{dt}\ \text{（辐射）}$$

$$\dot{R}=R_0H_0\sqrt{\frac{R_0}{R}\Omega_0-\Omega_0+1}=\frac{dR}{dt}\ \text{（辐射）}$$

宇宙年龄

设$x = \frac{R}{R_0}$，将dt移到一侧积分，立得：

辐射主导：

$$t \equiv H_0^{-1}\int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1-\Omega_0+\Omega_0 x^{-2}]^{-\frac{1}{2}}}$$

物质主导：

$$t \equiv H_0^{-1}\int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1-\Omega_0+\Omega_0 x^{-1}]^{-\frac{1}{2}}}$$

进行分类讨论，先考虑物质主导情况。

对于$\Omega_0 > 1$：

$$t = \frac{H_0^{-1}\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{\frac{3}{2}}}\left[\cos^{-1}\left(\frac{\Omega_0 z-\Omega_0+2}{\Omega_0 z+\Omega_0}\right) - \frac{2(\Omega_0-1)^{\frac{1}{2}}(\Omega_0 z+1)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0(1+z)}\right]$$

对于$\Omega_0 > 1$：

$$t = \frac{H_0^{-1}\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}}\left[-\cosh^{-1}\left(\frac{\Omega_0 z-\Omega_0+2}{\Omega_0 z+\Omega_0}\right) + \frac{2(1-\Omega_0)^{\frac{1}{2}}(\Omega_0 z+1)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0(1+z)}\right]$$

对于$\Omega_0 = 1$：$t = \left(\frac{2}{3}\right)H_0^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}$

```
In[12]:= B = Integrate[1/(1 - Ω0 + Ω0*(1/x)), {x, 0, 1/(z + 1)}];
         积分
In[13]:= %12
```

Out[13]= $\frac{1-\Omega 0+(1+z)\,\Omega 0\left(\mathrm{Log}[-\Omega 0]-\mathrm{Log}\left[-\frac{1+z\,\Omega 0}{1+z}\right]\right)}{(1+z)\,(-1+\Omega 0)^2}$ if condition

由$z+1 = \frac{R_0}{R(t)}$，可知当$t = t_0$，$z = 0$

将后者代入即可得到当前宇宙的年龄

宇宙年龄

我们将$z=0$代入，可以得到：

对于$\Omega_0>1$：

$$t_0=\frac{H_0^{-1}\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{\frac{3}{2}}}[\cos^{-1}\left(\frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}\right)-\frac{2(\Omega_0-1)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0}]$$

对于$\Omega_0>1$：

$$t_0=\frac{H_0^{-1}\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}}[-\cosh^{-1}\left(\frac{2-\Omega_0}{\Omega_0}\right)+\frac{2(1-\Omega_0)^{\frac{1}{2}}}{\Omega_0}]$$

对于$\Omega_0=1$： $t_0=\left(\frac{2}{3}\right)H_0^{-1}$

可以看到，这时宇宙年龄变成自变量为Ω_0的函数。

容易发现t_0随Ω_0增加而下降。定性地分析，更大的相对密度会导致宇宙更加迅速的膨胀

为了方便理解，我们可以把t_0展开成：

$$t_0\simeq\frac{2}{3}H_0^{-1}[1-\frac{1}{5}(\Omega_0-1)+\cdots]$$

通过简单分析，可以得到两个结论:

- $\Omega_0\to0\Rightarrow t\to H_0^{-1}(1+z)^{-1}=9.78\times10^9h^{-1}(1+z)^{-1}years$
- 在早期宇宙，$(1+z)\gg\Omega_0^{-1}$，此时t退化成：

$$t\simeq\frac{2}{3}(1+z)^{-\frac{3}{2}}H_0^{-1}\Omega_0^{-\frac{1}{2}}$$

这是由于在z足够大时，弗里德曼方程中$\frac{k}{R^2}$这一项可以忽略不计

于是$t\to\left(\frac{2}{3}\right)H^{-1}\sim\rho^{-\frac{1}{2}}\propto z^{-\frac{3}{2}}H_0^{-1}\Omega_0^{-\frac{1}{2}}$

- 对于一个物质主导下$\Omega_0=1$的宇宙，其年龄$t_0=6.52\times10^9yr$

在h不远大于0.5的情况下，这个结果与根据恒星演化和核宇宙年代学对宇宙年龄估计下限相一致。

宇宙年龄

现在考虑辐射主导的情况。此时宇宙年龄

$$t = H_0^{-1}\frac{\left(\sqrt{\Omega_0(1+z)^2} - \sqrt{\Omega_0(1+z)^2 - \Omega_0 + 1}\right)}{(\Omega_0 - 1)(1+z)}$$

进而有：

$$t = H_0^{-1}\frac{\sqrt{\Omega_0}}{\Omega_0 - 1}$$

同样，t可以在$\Omega_0 = 1$附近展开：

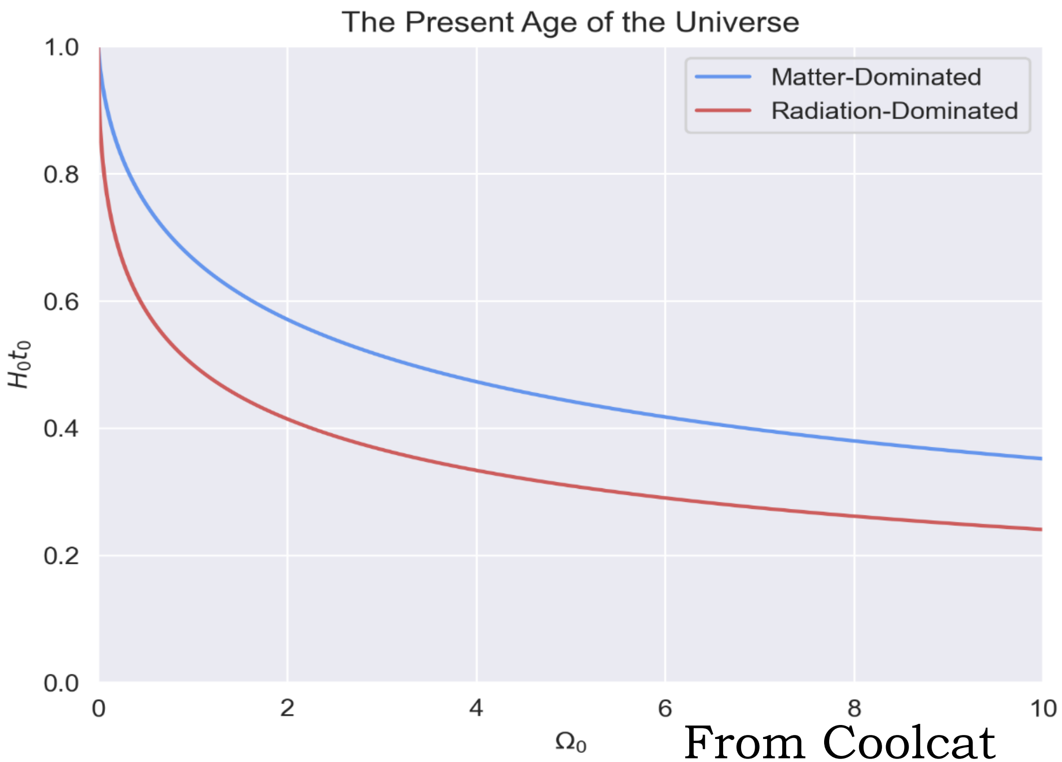
$$t_0 \simeq \frac{1}{2}H_0^{-1}[1 - \frac{1}{4}(\Omega_0 - 1) + \cdots]$$

若$(1+z) \gg \Omega_0^{-1}$，t退化成：

$$t \simeq \frac{1}{2}(1+z)^{-2}H_0^{-1}\Omega_0^{-\frac{1}{2}}$$

这张图展现了物质主导和辐射主导下，宇宙年龄随Ω_0的变化。

- 当$\Omega_0 \to 0$，$H_0 t_0 \to 1$
- 当$\Omega_0 = 1$，$H_0 t_0 = \begin{cases} 2/3, MD \\ 1/2, RD \end{cases}$
- 当$\Omega_0 \to \infty$，$H_0 t_0 \to \begin{cases} \left(\frac{\pi}{2}\right)\Omega_0^{-\frac{1}{2}} \\ \Omega_0^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$



From Coolcat

关于早期宇宙的讨论

- 注意到积分起始点在$x = 0 \Rightarrow R = 0$。可见，通常定义$R = 0$时作为时间零点。
- 这样定义所导致的一个问题是，在0到$t_?$（$R(t) = R_?$）的这个时间段内，我们关于宇宙的知识是不够充分的。也就是说，我们无法确定$t_?$。
- 好消息是，0到$R_?$对宇宙年龄的贡献是非常小的，我们可以简单认为此时$R \sim t^n (n < 1)$。只有当$R \sim t^n (n > 1)$时，我们不再能忽略这个过程。
- 另外需要注意的是，我们只能说宇宙年龄处于H_0^{-1}这个规模内，过分精确的运算是无意义的。

宇宙年龄

现代的t表达式为:

$$t = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{VAC}^{-\frac{1}{2}} \ln\left[\frac{1+\Omega_{VAC}^{\frac{1}{2}}}{(1-\Omega_{VAC})^{-\frac{1}{2}}}\right]$$

其中$\Omega_{VAC} = \frac{\rho_{VAC}}{\rho_c}$并假设$\Omega_{\mathrm{VAC}} + \Omega_{MATTER} = 1$。

右图是$H_0 t_0$关于Ω_{VAC}的曲线:

- 随着Ω_{VAC}增加，宇宙年龄也增加，并且会大于H_0^{-1}
- $\Omega_{VAC} \to \infty$，$t_0 \to \infty$

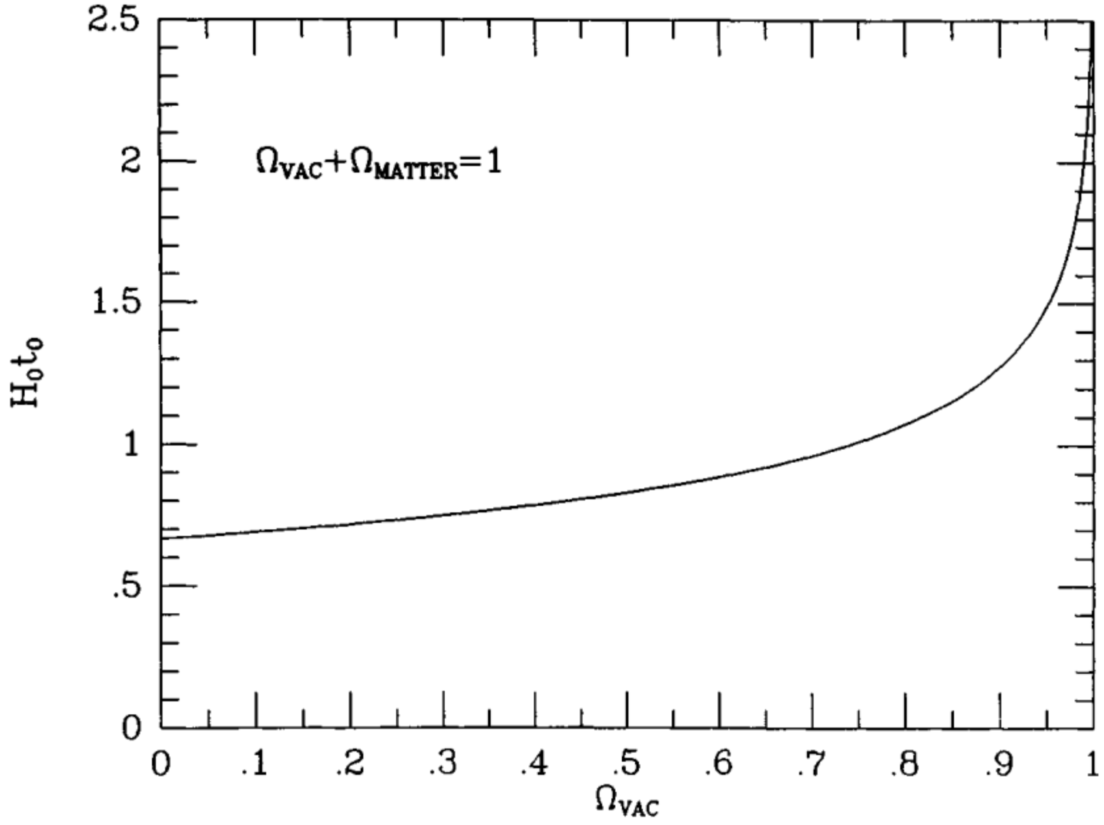


Fig. 3.2: The age of a $k=0$ Universe with both matter and vacuum energy.

附录

我们都知道，现代对Ω_0的实测值非常接近0。

通过测量某一粒子的Ω_X来限制Ω_0的大小，两者满足：

$$\Omega_X h^2 \le \Omega_0 h^2 \lesssim 1$$

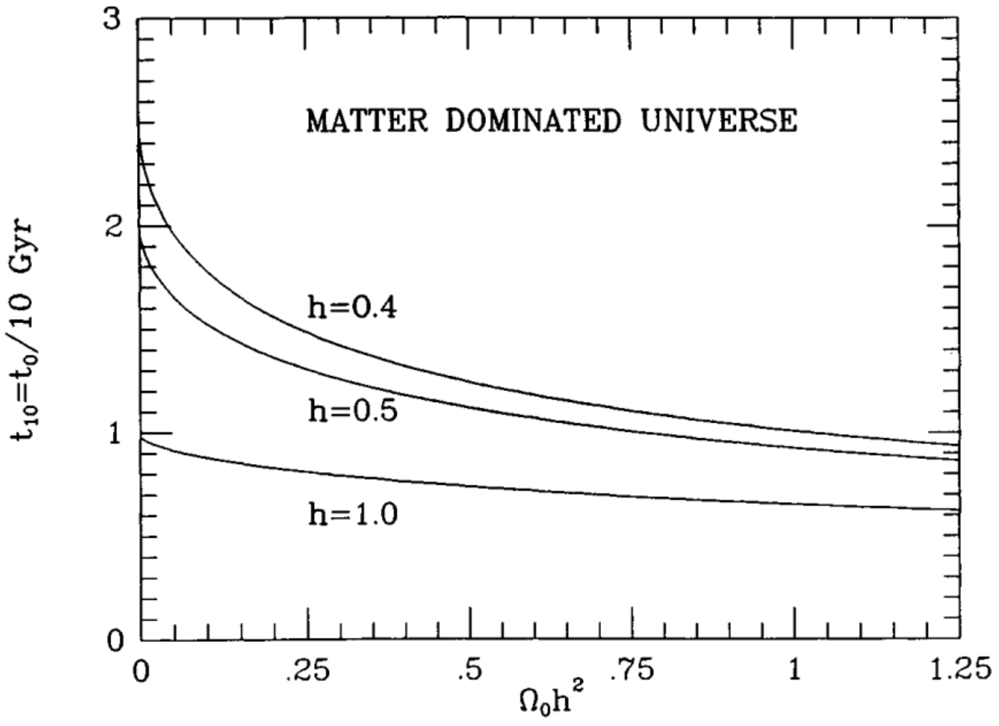
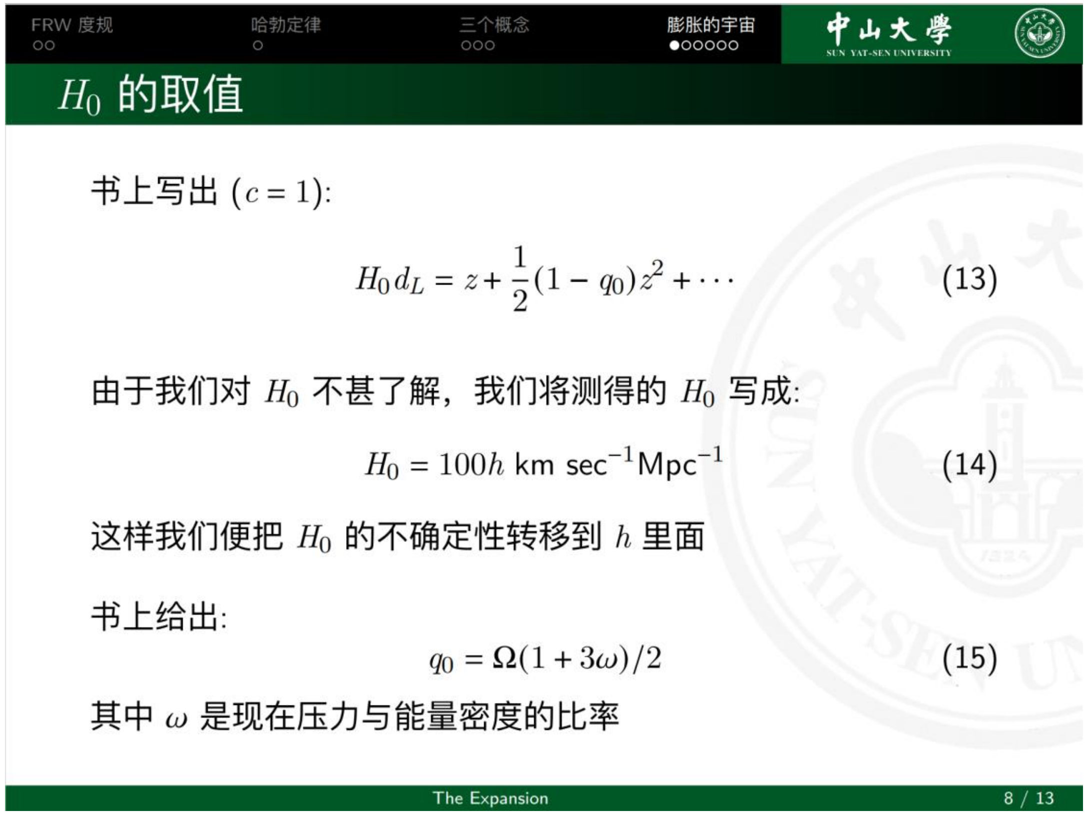


Fig. 3.3: The age of a matter-dominated Universe as a function of $\Omega_0 h^2$.



h是这么来的↑

附录

考虑一个$\Omega_0 > 1$的物质主导模型。

虽然可以给出t的表达式，但却不能给出一个“闭合形式”(closed form)。

只能通过一个“发展中的”(development)参数θ来表出：

$$\frac{R(t)}{R_0} = \frac{(1-\cos\theta)\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)}$$

$$H_0 t = \frac{(\theta - \cos\theta)\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

同样对于$\Omega_0 < 1$：

$$\frac{R(t)}{R_0} = \frac{(\cosh\psi - 1)\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H_0 t = \frac{(\sinh\psi - \psi)\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{\frac{3}{2}}}$$

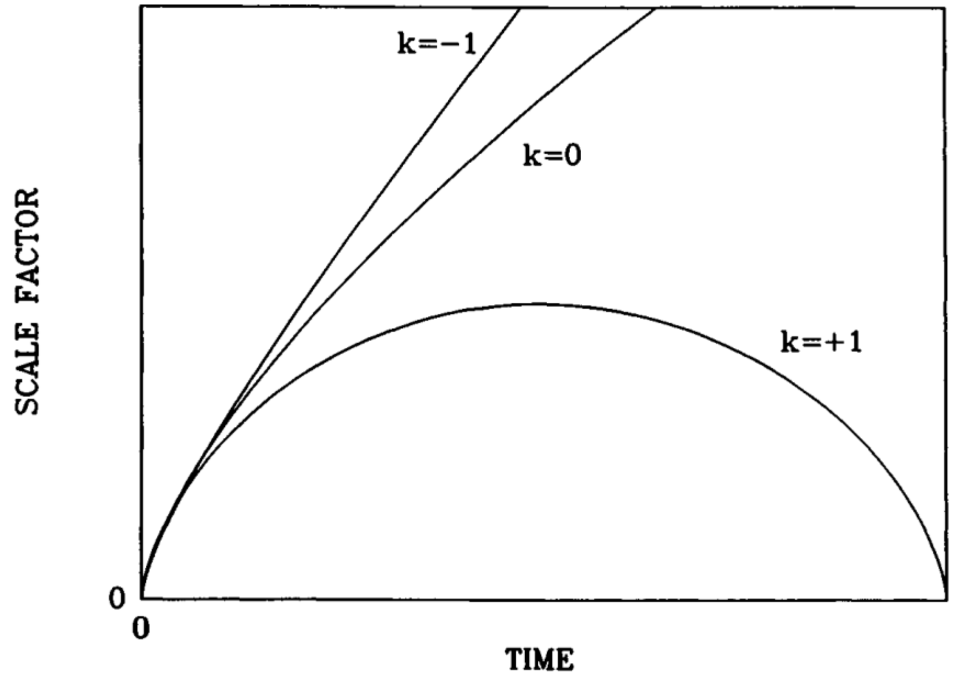


Fig. 3.4: The evolution of $R(t)$ for closed ($k = +1$), open ($k = -1$), and flat ($k = 0$) FRW models.

THANKS

谢谢大家