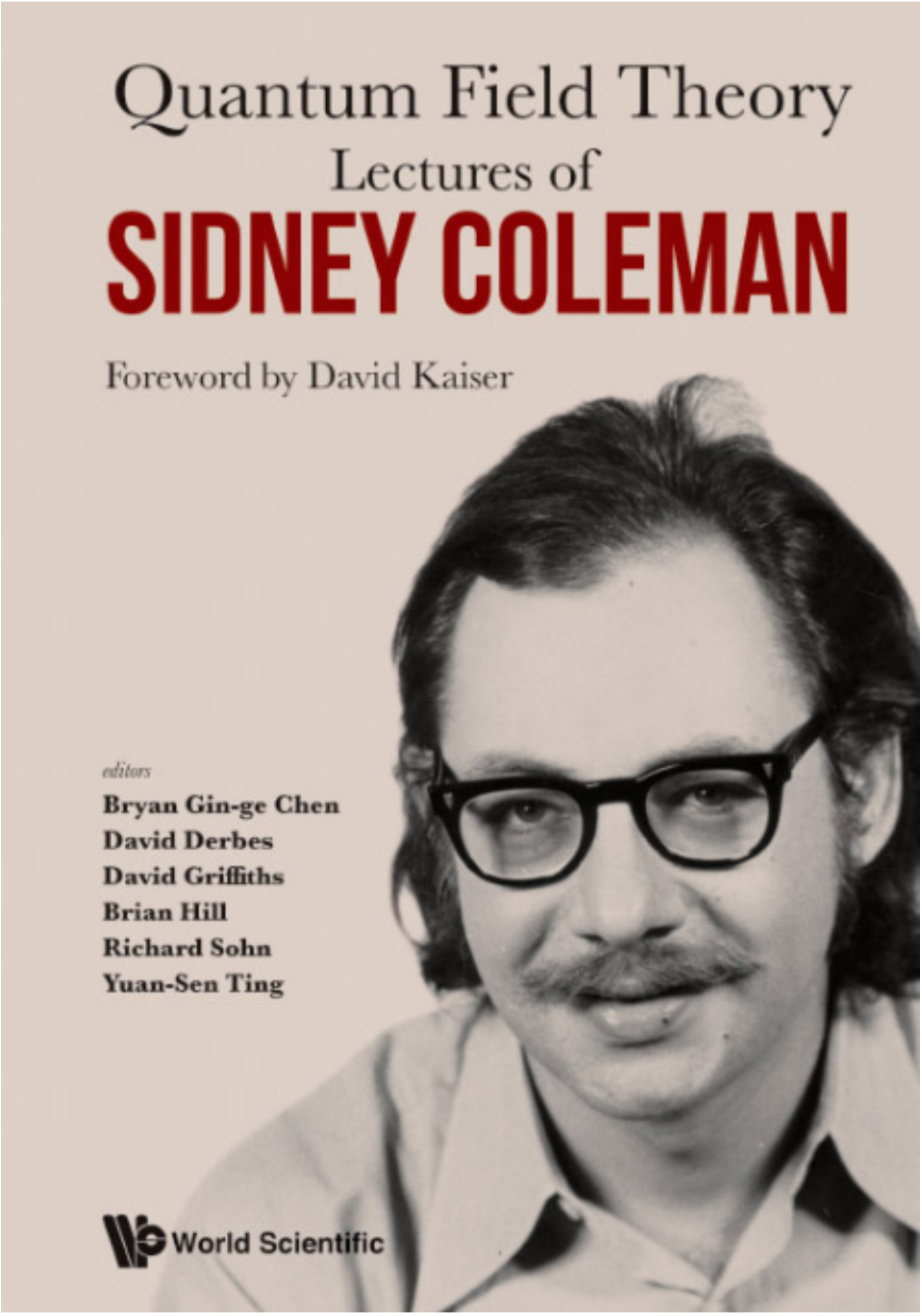
量子场论Quantum Field Theory



Lecture 1. 往量子力学里加入狭义相对论

1.1 引言

引入相对论的必要性

在$E \geq mc^2$的能级上，会发生反应$p+p \to p+p+\pi^0$，在更高能级上，会发生：$p+p \to p+p+p+\bar{p}$，此时相对论效应显著，量子力学不能够准确预测结果。

那么也许在低能态下可以不用考虑相对论效应？考虑对H的微扰δV，微扰论告诉我们能量的一阶微扰项为：

$$\delta E_0 = \langle 0| \delta V |0\rangle + \sum_n \frac{|\langle 0| \delta V |n\rangle|^2}{E_0 - E_n}$$

这个表达式中含有E_n，涉及所有可能的能级，自然包括那些相对论能级。对于低能量的高精度计算，考虑相对论效应是合理的；同时，有额外粒子的Intermediate states也会贡献$(v/c)^2$量级的修正量。总之，相对论修正和多体中间态的修正具有相同量级，**相对论迫使我们考虑多体问题**。

符号规定

我们规定

$$\hbar = c = 1$$

这个规定下有一个自由度，从量纲的角度来说：

$$[m] = [E] = [T]^{-1} = [L]^{-1}$$

此外有：

$$(1\text{ fermi})^{-1} \approx 197\text{MeV},\ m_e \approx 0.5\text{MeV} = 7.8 \times 10^{20}\text{s}^{-1} = 2.6 \times 10^{10}\text{cm}^{-1}$$

洛伦兹不变性

我们的物理建立在**闵可夫斯基空间**上，这是一个平坦的四维时空，我们可以写下坐标：

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x})$$

和四维动量：

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}) = (\varepsilon, \mathbf{p})$$

> 由于$\hbar = 1$，我们有$p = k$，其中$k^0 = \omega$。

在空间中，任一**逆变矢量**a^μ可被写成$a^\mu = (a^0, a^i) = (a^0, \mathbf{a})$
与之相应的**协变矢量**$a_\mu = (a_0, a_i) = (a^0, -\mathbf{a})$
故两者内积为：

$$a \cdot b \equiv a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a^0 b_0 + a^1 b_1 + a^2 b_2 + a^3 b_3 = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

其中$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$为三维空间的内积。

> 我们在这里采用爱因斯坦求和约定并将沿用，在该规定下，重复指标代表求和

内积是**洛伦兹不变量**，也可以被写成$g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$的形式。在此之上得到：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

> 采用$(+ - --)$度规符号

注意到：

$$g_{\mu\nu} A^\nu = A_\mu$$
$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$$

洛伦兹变换可由一个4×4矩阵Λ^μ_ν表示，更进一步有：

$$\Lambda : x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \equiv \Lambda x$$

由内积的洛伦兹不变性，我们有：

$$\Lambda a \cdot \Lambda b = a \cdot b$$

洛伦兹变换形成一个群，我们称之为$\mathrm{O}(3,1)$。O表示正交群，$(3,1)$表示它并非一个经典正交群，因为其位于闵可夫斯基空间中，其空间量和时间量具有不同的符号。

实际上，这个群对我们要讨论的内容来说太大了，因为其包括了一些“不自然”的变换：宇称反转和时间反转。我们在这里的讨论局限于连通的(connected)洛伦兹群，其中的群元可以通过连续变化从恒等式中得到。我们把这一类群称为$SO(3,1)$，其中S意味着“special”，群元的矩阵表示的行列式为1。

完整洛伦兹群的元素可以写为SO群元和以下集合作用的结果：$\{1, P, T, PT\}$，其中：

$$P : \mathbf{x} \to -\mathbf{x}$$
$$T : t \to -t$$

> 当我们说洛伦兹不变，我们一般指$SO(3,1)$的不变性

在洛伦兹群作用下，我们可以把矢量分为三类：**类时**、**类空**、**类光**。矢量a^μ的分类取决于a^2的正负。

> 考虑矢量x和y，那么可以定义其间隔$(x-y)^2 = (x^\mu - y^\mu)(x_\mu - y_\mu)$，其也是洛伦兹不变量

> 实际上世界应该由一个包含齐次(homogeneous)洛伦兹群和时空平移的更大的群来描述，我们称之为庞加莱群。

关于积分、微分和特殊函数的约定

基本的微分算符可以定义为：

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

它是一个协变矢量，满足：

$$\partial_\nu x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu$$

如果我们把算符和坐标都表为下指标，那么有：

$$\partial_\nu x_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^0}{\partial x^\nu} - \frac{\partial x^i}{\partial x^\nu} = g^\mu_\nu$$

进一步，我们有洛伦兹不变算符∂^2记为$\Box^2$：

$$\Box^2 = \partial^2 = \partial^\mu \partial_\mu = (\partial^0)^2 - \nabla^2$$

现在看积分，对一个a^μ的四个分量积分，我们有：

$$\int d^4 a = \int_{-\infty}^{\infty} da^0 \int_{-\infty}^{\infty} da^1 \int_{-\infty}^{\infty} da^2 \int_{-\infty}^{\infty} da^3$$

> 用$\delta^{(3)}(\mathbf{x})$表示三维的delta函数，$\delta^{(4)}(x)$表示四维delta函数。

> 定义四维时空上函数$F(x)$的傅里叶变换函数
>
> $$\tilde{F}(k) = \int d^4 x F(x) e^{ik\cdot x}$$
> $$F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{F}(k) e^{-ik\cdot x}$$

> 定义函数$\theta(x)$：
>
> $$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ if } x > 0 \\ 0, \text{ if } x < 0 \end{cases}$$
>
> $$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)$$

1.2 无自旋自由单粒子（质量为μ）的理论

理论构建

无自旋粒子态完全由动量决定，并且动量的分量构成了一组完备的交换变量(commuting variables)：

$$\mathbf{P}\left|\mathbf{p}\right\rangle = \mathbf{p}\left|\mathbf{p}\right\rangle$$

本征矢**归一化关系**为：

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$$

完备性关系为:

$$1 = \int d^3\mathbf{p} \left|\mathbf{p}\right\rangle \left\langle\mathbf{p}\right|$$

态函数$|\psi\rangle$可以被动量本征矢展开:

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{p}\psi(\mathbf{p}) \left|\mathbf{p}\right\rangle$$

其中$\psi(\mathbf{p}) \equiv \langle\mathbf{p}|\psi\rangle$。如果是非相对论性量子力学，现在只需要考虑$H = |\mathbf{p}|^2/2\mu$，然后由薛定谔方程给出态的随时演化:

$$H \left|\mathbf{p}\right\rangle = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\mu} \left|\mathbf{p}\right\rangle$$

但对于相对论性量子力学，我们由**质能方程**定义能量，采用:

$$H \left|\mathbf{p}\right\rangle = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2} \left|\mathbf{p}\right\rangle \equiv \omega_{\mathbf{p}} \left|\mathbf{p}\right\rangle$$

这就是无自旋自由单粒子的相对论性动力学方程。**首先，我们注意到方程是显然旋转和平移不变的。然后，我们证明这个方程是洛伦兹不变的。**

平移不变性

首先考虑平移，对于一个给定的矢量a^μ，应该有一个**线性算符**$U(a)$满足条件:

$$U(a)U(a)^\dagger = 1$$
$$U(0) = 1$$
$$U(a)U(b) = U(a+b)$$

满足这些条件的算符U具有这样的形式: $U(a) = e^{iP\cdot a}$，其中$P^\mu = (H, \mathbf{P})$

矢量被U变换形式如下:

$$U(a)\left|0\right\rangle = \left|a\right\rangle$$

其中$|x\rangle$代表中心在x的态函数。算符O的变换形式为:

$$O(x+a) = U(a)O(x)U(a)^\dagger$$

由上式可以推出期望值在变换下守恒，满足:

$$\langle a| O(x+a) |a\rangle = \langle 0| O(x) |0\rangle$$

如果只考虑空间变换，我们有:

$$\begin{aligned} U(a) &= e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \\ e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} |\mathbf{q}\rangle &= |\mathbf{q}+\mathbf{a}\rangle \\ e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} O(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} &= O(\mathbf{x}+\mathbf{a}) \end{aligned}$$

需要注意，只有依赖于坐标的算符满足这样的规则，对于位置算符本身，则满足:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} |\mathbf{q}\rangle &= (\mathbf{q}+\mathbf{a}) |\mathbf{q}+\mathbf{a}\rangle \\ e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} |\mathbf{q}\rangle &= (\mathbf{q}+\mathbf{a}) |\mathbf{q}\rangle \\ \Rightarrow e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \hat{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} &= \hat{\mathbf{q}} + \mathbf{a} \end{aligned}$$

> 如果从逻辑顺序考虑那么应该是:
>
> 1. 我们想要建立一个无自旋粒子的平动不变理论，包含酉算子$U(\mathbf{a})$;
> 2. 定义P^i为:
>
> $$P^i = i\frac{\partial U(\mathbf{a})}{\partial a^i}\bigg|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}}$$
>
>   那么$[P_i, P_j] = 0$并且$\mathbf{P} = \mathbf{P}^\dagger$;
> 3. 声明P^i构成一组完备基并且代表动量算符;
> 4. 定义$H = \sqrt{|\mathbf{P}|^2 + \mu^2}$，从而给出时间演化。

旋转不变性

对于旋转$R \in \mathrm{SO}(3)$，**酉算子**$U(R)$需要满足:

$$\begin{aligned} U(R)U(R)^\dagger &= 1 \\ U(1) &= 1 \\ U(R_1)U(R_2) &= U(R_1 R_2) \end{aligned}$$

只要我们设$U(R)|\mathbf{p}\rangle = |R\mathbf{p}\rangle$，那么上述三个条件的后两者自然满足。

> 现证明第一个条件:

> $$\begin{aligned} U(R)U(R)^\dagger &= U(R)\left[\int d^3\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\right]U(R)^\dagger \\ &= \int d^3\mathbf{p}(U|\mathbf{p}\rangle)(\langle\mathbf{p}|U^\dagger) \\ &= \int d^3\mathbf{p}\,|R\mathbf{p}\rangle\langle R\mathbf{p}| \end{aligned}$$
>
> 我们让$\mathbf{p}=R\mathbf{p}$，因为雅可比矩阵为1，故$d^3\mathbf{p}=d^3\mathbf{p'}$，有：
>
> $$U(R)U(R)^\dagger = \int d^3\mathbf{p}\,|R\mathbf{p}\rangle\langle R\mathbf{p}| = \int d^3\mathbf{p'}\,\langle p'|p'\rangle = 1$$

标记一个$|\psi'\rangle = U(R)|\psi\rangle$，满足：

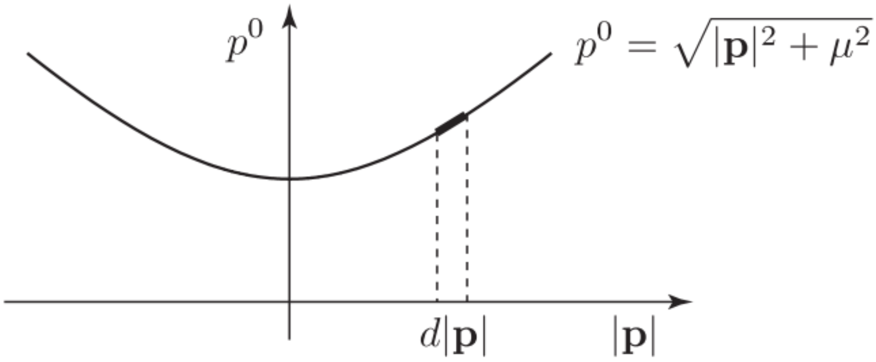
$$\langle\psi'|\,\mathbf{P}\,|\psi'\rangle = R\langle\psi|\,\mathbf{P}\,|\psi\rangle$$

那么我们有：

$$\begin{aligned} U(R)^\dagger\mathbf{P}U(R) &= R\mathbf{P} \\ U(R)^\dagger H U(R) &= H \end{aligned}$$

> 这里给出上面第一式的证明：
>
> $$\begin{aligned} U(R)^\dagger\mathbf{P}U(R) &= U(R)^{-1}\mathbf{P}(U(R)^{-1})^\dagger = U(R^{-1})\mathbf{P}U(R^{-1})^\dagger \\ &= U(R^{-1})\mathbf{P}\int d^3\mathbf{p}\,|p\rangle\langle p|\,U(R^{-1})^\dagger \\ &= U(R^{-1})\int d^3\mathbf{p}\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|\,U(R^{-1})^\dagger \\ &= \int d^3\mathbf{p}\mathbf{p}\,|R^{-1}\mathbf{p}\rangle\langle R^{-1}\mathbf{p}| \\ &= \int d^3\mathbf{p'}R\mathbf{p'}\,|\mathbf{p'}\rangle\langle\mathbf{p'}| \\ &= R\mathbf{P} \end{aligned}$$

构造洛伦兹不变方程组



将相空间限制在双曲线上

狭义相对论的时空是嵌套在四维时空上的一个双曲面。狭义相对论的四动量也被限制在四维动量空间中的一个双曲面上。 我们想要一个在双曲面$p^2 = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = \mu^2 (p^0 > 0)$上洛伦兹不变的测度。已知$d^4p$是洛伦兹不变的，那么为了将其局限在双曲面上，我们将之乘上一个同样洛伦兹不变的因子$\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)$，这样就得到了相对论性的度量：

$$\int_{p^0=-\infty}^{\infty} dp^0 \{d^3\mathbf{p}\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)\} = \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}}$$

其中$\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$，$p^\mu = (\omega_{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$。

> 此处的积分需要使用一个结论：$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - a_i)}{|f'(a_i)|}$，其中$\{a_i\}$是函数的零点。
> 证明：
>
> $$\int \delta(f(x))dx = \sum_i \int \delta(f_i(x))dx$$
>
> 其中我们定义$f_i(x) = f(a_i) + f'(a_i)x$为在零点$a_i$附近展开的泰勒级数，且只在$a_i$附近不为0，代入得到：
>
> $$\int \delta(f(x))dx = \sum_i \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} \delta(f(a_i) + f'(a_i)x)dx = \sum_i \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} \frac{\delta(x)}{|f'(a_i)|}dx$$
>
> 由于delta函数的性质，$\int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} = \int$，那么：

> $$\int \delta(f(x))dx = \sum_i \int \frac{\delta(x)}{|f'(a_i)|}dx$$
> $$\Leftrightarrow \delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-a_i)}{|f'(a_i)|}$$

四维动量矢被定义为$|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}\,|\mathbf{p}\rangle$，那么:

$$1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^4p\delta(p^2-\mu^2)\theta(p^0)\,|p\rangle\langle p| = \int d^3\mathbf{p}\,|\mathbf{p}\rangle\langle\mathbf{p}|$$

现在我们可以来定义洛伦兹变换，我们定义$U(\Lambda)\,|p\rangle = |\Lambda p\rangle$满足:

$$\begin{aligned}U(\Lambda)U(\Lambda)^\dagger &= 1\\ U(1) &= 1\\ U(\Lambda_1)U(\Lambda_2) &= U(\Lambda_1\Lambda_2)\\ U(\Lambda)^\dagger PU(\Lambda) &= \Lambda P\end{aligned}$$

那么$U(\Lambda)$即为洛伦兹变换算符。

> 证明使用了完备性关系和不变度量:
>
> $$1 = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}}\,|p\rangle\langle p|$$
> $$\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} = \frac{d^3\mathbf{p'}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p'}}}$$

1.3 确定位置算符X

推断算符表达式

我们还尚未指定粒子的位置，需要构造一个位置函数X满足本征方程。那么，算符X应该满足什么条件呢？首先，它们不包括洛伦兹不变性，而只包含平移和旋转不变性:

$$\begin{aligned}X &= X^\dagger\\ U(\mathbf{a})^\dagger XU(\mathbf{a}) &= e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}Xe^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} = X+\mathbf{a}\\ U(R)^\dagger XU(R) &= RX\end{aligned}$$

通过对第二个方程进行处理，我们得到$i[P_i, X_j] = \delta_{ij}$。通过对易关系，我们可以初步推断$X$的表达式满足：

$$X^i = i\frac{\partial}{\partial p_i} + R^i$$

其中R^i是一个于P^j对易的量，关键是寻找R^i的表达式。因为P^i构成一组完备的交换基，那么可知R_i一定是有关于P^i的函数；由于R^i也服从旋转不变性，这告诉我们：

$$R^i = p^i F(|\mathbf{p}|^2)$$

把未知标量场写成对一个标量场求导，那么我们有：

$$p^i F(|\mathbf{p}|^2) = \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \Rightarrow X^i = i\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i}$$

我们可以更进一步，通过对动量进行变换，我们可以完全消除掉第二项：

$$|\mathbf{p}\rangle \to |\mathbf{p}\rangle_G = e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} |\mathbf{p}\rangle$$

这个变换完全不影响特征态与特征值，也不影响它们仍是H的本征态，具有$\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$的本征值，也不影响归一化。实际上，这是一个**酉变换**，记作$U(G)$。在酉变换$|\mathbf{p}\rangle \to U(G)|\mathbf{p}\rangle$下，算符变换为$\mathbf{X} \to U(G)^\dagger \mathbf{X} U(G) = \mathbf{X}_G$。在变换下：

$$\begin{aligned}
X^i_G |\mathbf{p}\rangle_G &= e^{-iG(|\mathbf{p}|^2)} \left(i\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \right) e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} |\mathbf{p}\rangle_G \\
&= e^{-iG(|\mathbf{p}|^2)} e^{iG(|\mathbf{p}|^2)} \left(i\frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} - \frac{\partial G(|\mathbf{p}|^2)}{\partial p_i} \right) |\mathbf{p}\rangle_G \\
&= i\frac{\partial}{\partial p_i} |\mathbf{p}\rangle_G
\end{aligned}$$

可以看到，算符的表达式和非相对论下的位置算符表达式并没有什么不一样。

计算态演化

但是问题是：让我们设想一个粒子，在相对论下它不能超过光速。如果我们从一个粒子被明显局域化的态函数出发，让其随时间演化，然后观察在以后的某个时间，粒子的速度是否有非零可能超过光速。

首先，我们设定$t=0$的态为$\langle\mathbf{x}|\psi\rangle=\delta^{(3)}(\mathbf{x})$。鉴于算符$X^i$保持原有形式，我们可以像往常一样写出：

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$\langle\mathbf{p}|\psi\rangle=\int\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle\,d^3\mathbf{x}\,\langle\mathbf{x}|\psi\rangle=\int\frac{e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}}\delta^{(3)}(\mathbf{x})d^3\mathbf{x}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}},\ (t=0)$$

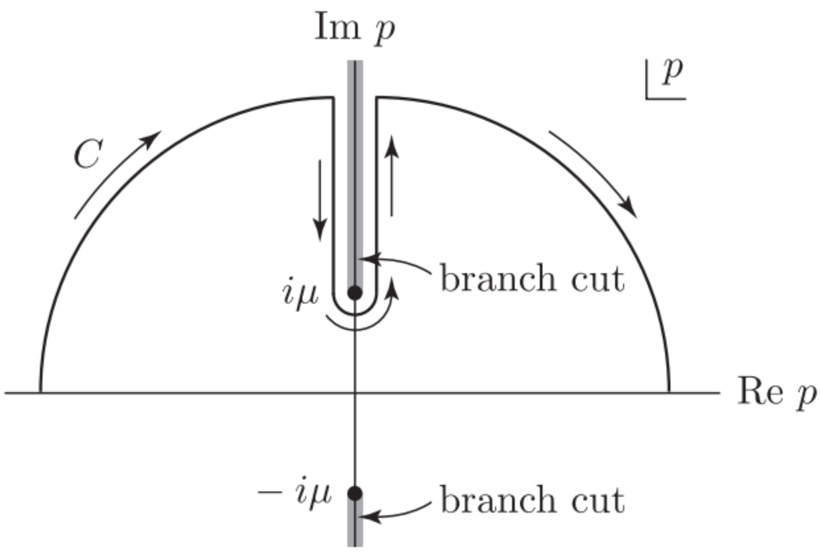
要计算t时刻的位置概率幅，我们需要给$|\psi\rangle$作用一个演化算符e^{iHt}，那么在时间t位于$\mathbf{x}$的概率幅为：

$$\langle\mathbf{x}|e^{iHt}|\psi\rangle=\int d^3\mathbf{p}\,\langle\mathbf{x}|e^{iHt}|\mathbf{p}\rangle\,\langle\mathbf{p}|\psi\rangle=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}$$

采用球坐标系，上式：

$$\begin{aligned}\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t}&=\int_0^\infty\frac{p^2dp}{(2\pi)^3}e^{i\omega_pt}\int_0^\pi e^{ipr\cos\theta}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\\&=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dp\,pe^{-i\omega_pt}\frac{\left(e^{ipr}-e^{-ipr}\right)}{ir}\\&=-i\frac{1}{(2\pi)^2r}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,pe^{ipr-i\omega_pt}\end{aligned}$$

> 为了计算积分，我们将其解析延拓到复数域上，让$p\to z=x+iy$，如下图。注意到，在$p=\pm i\mu$处函数存在奇点，故我们让积分路径绕开它。对于积分的外半圆，只要让$R\to\infty$，那么积分值为0，故积分化为对和y轴上重合却相反的路径积分的计算。



积分计算示意图

首先，奇点两侧的ω_p具有不同表达式：

$$\omega_p = \begin{cases} i\sqrt{y^2-\mu^2} & ,\ x=0+ \\ -i\sqrt{y^2-\mu^2} & ,\ x=0- \end{cases}$$

我们改用极坐标$Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta$，积分化为：

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}|e^{iHt}|\psi\rangle &= \frac{i}{(2\pi)^2 r}\left[\int_\infty^\mu dy\, ye^{-ry-\sqrt{y^2-\mu^2}t} + \int_\mu^\infty dy\, ye^{-ry+\sqrt{y^2-\mu^2}t}\right] \\ &= \frac{i}{(2\pi)^2 r}\int_\mu^\infty dy\, ye^{-ry}\left[e^{\sqrt{y^2-\mu^2}t} - e^{-\sqrt{y^2-\mu^2}t}\right] \\ &= \frac{i}{2\pi^2 r}\int_\mu^\infty dy\, ye^{-ry}\sinh\left(\sqrt{y^2-\mu^2}t\right) \end{aligned}$$

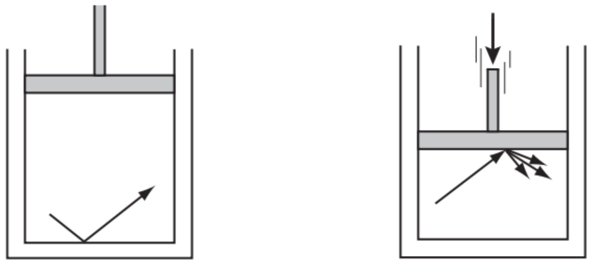
显然，积分因子恒为正，也就是说，在t时刻，在$r > t$的空间中，概率幅并不为0。让我们对表达式作个简化，首先忽略掉括号内指数衰减的项，然后令$\sqrt{y^2-\mu^2} \to y$，那么我们可以给出积分的一个上界：

$$\langle \mathbf{x}|e^{iHt}|\psi\rangle < \frac{i}{2\pi^2 r}\int_\mu^\infty dy\, ye^{-(r-t)y} = e^{-(r-t)\mu}\left(\frac{1}{(r-t)^2} + \frac{\mu}{(r-t))}\right)$$

可见，视界外的概率幅呈指数衰减。

量子数不确定性

现在的问题是，我们怎样精确地测量一个粒子的位置。玻尔提出过一个理想实验，制造一个无法穿过的带活塞的盒子并把粒子放在里面，那么随着活塞推进，我就可以把粒子的位置无限精确地确定。



思想实验

假设我要把粒子位置精确到它的康普顿波长$L \sim \mathcal{O}(1/\mu)$，那么不确定性原理就会告诉我们:

$$\Delta p \gtrsim \mathcal{O}(\mu)$$

如果Δp都具有μ的数量级，那么p肯定也有μ的数量级，那么我们就拥有足够的能量来生成粒子对了。这样，虽然粒子的位置十分精确，但我们不会知道盒子里有1个粒子，还是3个、5个、7个。也就是说，我们不能在单粒子理论中令人满意地定位粒子。所以就算我们能够确定某些东西的位置，那也不会是单个粒子。由于粒子对生成的机制，现在不仅动量和位置有不确定性关系，粒子数也与位置有不确定性关系了。

总之，相对论因果性与单粒子量子理论不自洽，自然界通过粒子对生成解决了这一冲突，这迫使我们进入对多自由粒子体系的讨论。