Lecture 20 狄拉克方程Ⅱ：方程的解

20.1 狄拉克基

上一节中我们得到:

$$\mathscr{L} = \pm\left[i\psi^\dagger(\partial_0 + \boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla)\psi - m\psi^\dagger\beta\psi\right]$$

其中m是实数，我们还得到$\boldsymbol{\alpha}$、β和ψ。注意到两个矩阵是厄米的，它们遵守狄拉克代数（也称Clifford代数）：

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0$$

另外，我们可以将洛伦兹布施和旋转的生成元用α和β表示，我们有:

$$\mathbf{M} = \frac{i}{2}\boldsymbol{\alpha}$$

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}$$

这是因为，u_+和u_-在旋转下变换形式相同。然后我们有宇称:

$$P : \psi(\mathbf{x}, t) \to \beta\psi(-\mathbf{x}, t)$$

如果我们改变ψ的组合方式，那么两个矩阵和生成元的表达式也会改变，但是狄拉克和洛伦兹代数不会变，实际上我们先前选取的特殊基被称为狄拉克方程的Weyl表示，而狄拉克一开始写下的表示是:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} u_+ + u_- \\ u_+ - u_- \end{pmatrix}$$

在这个基下拉格朗日密度中的项不变:

$$i\psi^\dagger\partial_0\psi = iu_+^\dagger\partial_0 u_+ + iu_-^\dagger\partial_0 u_-$$

但是在这个我们称为标准表示的表示下，两个矩阵有如下形式:

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\quad \beta=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}$$

但是其他式子都不变。

20.2 平面波解

标准表示使我们寻找小$\mathbf{p}$极限下的解变得非常容易，此时β项占主导。对于狄拉克方程：

$$i\partial_0\psi+i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi=\beta m\psi$$

首先我们考虑正频率解：

$$\psi(\mathbf{x},t)=u_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x}$$

由于我们知道所有狄拉克方程的解都应该满足K-G方程，所以p^0也就是$E_{\mathbf{p}}$：

$$E_{\mathbf{p}}=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$$

我们把解代入狄拉克方程，得到：

$$[E_{\mathbf{p}}-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}]u_{\mathbf{p}}=\beta m u_{\mathbf{p}}$$

当$\mathbf{p}=0$，在标准表示下方程就很好解，首先$E=m$，然后我们有：

$$u_{\mathbf{0}}=\beta u_{\mathbf{0}}$$

这个方程有两个独立解$u_{\mathbf{0}}^{(r)},r=1,2$。显式地写出来就是：

$$u_{\mathbf{0}}^{(1)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad u_{\mathbf{0}}^{(2)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

这一组解可以被归一化如下：

$$\begin{aligned}u_{\mathbf{0}}^{(r)\dagger}u_{\mathbf{0}}^{(s)}&=2m\delta^{rs}\\ u_{\mathbf{0}}^{(r)\dagger}\boldsymbol{\alpha}u_{\mathbf{0}}^{(s)}&=0\end{aligned}$$

把这两个条件并在一起我们得到：

$$(u_{\mathbf{0}}^{(r)\dagger}u_{\mathbf{0}}^{(s)},u_{\mathbf{0}}^{(r)\dagger}\boldsymbol{\alpha}u_{\mathbf{0}}^{(s)})=(2m,\mathbf{0})\delta^{rs}$$

这种归一化，看上去可能是洛伦兹不变的，如果是的话，那其对于非零$\mathbf{p}$的解也成立。

通过像我们在Weyl方程中做的那样，我们发现$u^{(1)}$对应一个$J_z=\frac{1}{2}$的解，而$u^{(2)}$对应一个$J_z=-\frac{1}{2}$的解，就像是电子一样。于是我们得到了一个有质量$\frac{1}{2}$自旋粒子的理论，其对每一个$\mathbf{p}$都至少有两个解。

现在考虑动量非零的情况，由于我们的理论是洛伦兹不变的，所以只需要施加一个布施在零动量上就可以了，让我们定义：

$$u_{\mathbf{p}}^{(r)}=e^{-i\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{M}\phi}u_{\mathbf{0}}^{(r)}=e^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{a}}\phi}u_{\mathbf{0}}^{(r)}$$

其中$\hat{\mathbf{a}}=\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$，$\cosh\phi=\frac{E_{\mathbf{p}}}{m}$，由于对静止粒子$E_{\mathbf{p}}=m$，所以得到$\phi=0$。于是我们发现，归一化条件对所有动量都成立：

$$(u_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}u_{\mathbf{p}}^{(s)},u_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}\boldsymbol{\alpha}u_{\mathbf{p}}^{(s)})=2(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\delta^{rs}$$

类似地，我们有负频率解：

$$\psi(\mathbf{x},t)=v_{\mathbf{p}}e^{+ip\cdot x}$$

代入狄拉克方程得到：

$$v_{\mathbf{0}}=-\beta v_{\mathbf{0}}$$

于是有：

$$v_{\mathbf{0}}^{(1)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\quad v_{\mathbf{0}}^{(2)}=\sqrt{2m}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

同样有归一化关系：

$$(v_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}v_{\mathbf{p}}^{(s)},v_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}\boldsymbol{\alpha}v_{\mathbf{p}}^{(s)})=2(E_{\mathbf{p}},\mathbf{p})\delta^{rs}$$

20.3 泡利定理

我们已经介绍了狄拉克矩阵的两种不同表示，任意4×4的可逆矩阵都可以将一个表示变为另一个。但是，无论哪种表示都遵循狄拉克代数，我们对此有：

Theorem 20.1. Any set of 4×4 matrices with unit squares obeying the Dirac algebra is equivalent to the Weyl representation.

实际上整个理论的结构被嵌入在这些代数方程中，任何等价的4×4矩阵定义了同一个狄拉克方程。这隐含着重要意义：所有宇称守恒的只包含$\frac{1}{2}$自旋粒子的不可约洛伦兹表示等价。实际上我们只有一个这样的表示，其他的都是通过相似变换得到的。

> 证明略过。

20.4 γ矩阵

首先我们定义一个ψ的特殊伴随：

$$\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \beta$$

这被称为狄拉克伴随，这个定义的动机是因为拉格朗日项中的$m\psi^\dagger \beta\psi$，我们有：

$$m\psi^\dagger \beta\psi = m\overline{\psi}\psi$$

这样看起来比较自然，在狄拉克基下，令：

$$(u_+ + u_-) = \begin{pmatrix} \zeta \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad (u_+ - u_-) = \begin{pmatrix} \xi \\ \chi \end{pmatrix}$$

我们有：

$$\overline{\psi}\psi = u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger U_+ = \frac{1}{2}[(|\zeta|^2 + |\eta|^2) - (|\xi|^2 + |\chi|^2)]$$

由场的伴随可以得到矩阵的伴随，因为我们知道$\overline{(A\psi)} = \overline{\psi}\ \overline{A}$，所以答案很明显：

$$\overline{A} \equiv \beta A^\dagger \beta$$

洛伦兹变换由洛伦兹矩阵表示：

$$\Lambda : \psi \to D(\Lambda)\psi$$

而对于洛伦兹矩阵我们也可以取狄拉克伴随，其中$D(\Lambda) \sim D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda) \oplus D^{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda)$，我们有：

$$\overline{(D(\Lambda)\psi)} = \overline{\psi}\ \overline{D}(\Lambda)$$

因为$\overline{\psi}\psi$是一个洛伦兹标量，所以：

$$\Lambda : \overline{\psi}\psi \to \overline{\psi D}(\Lambda)D(\Lambda)\psi = \overline{\psi}\psi$$

于是我们得到：

$$\overline{D}(\Lambda)D(\Lambda)=1$$

我们先前知道，我们可以从双线性形式构建两个4向量：

$$\begin{aligned}V^\mu &= (u_+^\dagger u_+, u_+^\dagger \sigma u_+)\\ W^\mu &= (u_-^\dagger u_-, -u_-^\dagger \sigma u_-)\end{aligned}$$

把它们加起来我们得到：

$$V^\mu+W^\mu=U^\mu=(\psi^\dagger\psi,\psi^\dagger\alpha\psi)$$

通过插入$\beta^2=1$，我们得到：

$$(\psi^\dagger\beta\beta\psi,\psi^\dagger\beta\beta\alpha\psi)=(\overline{\psi}\beta\psi,\overline{\psi}\beta\alpha\psi)\equiv(\overline{\psi}\gamma^0\psi,\overline{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi)$$

这里我们定义了狄拉克矩阵：

$$\gamma^\mu=(\gamma^0,\gamma^i)\equiv(\beta,\beta\alpha^i)$$

在狄拉克基中：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{pmatrix}\quad \gamma^i=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}^i\\ -\boldsymbol{\sigma}^i & \mathbf{0}\end{pmatrix}$$

在洛伦兹变换下：

$$\Lambda:\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\to\overline{\psi D}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)\psi$$

由于向量在洛伦兹变换下有：

$$\Lambda:U^\mu\to\Lambda^\mu_\nu U^\nu$$

所以我们有：

$$\overline{D}(\Lambda)\gamma^\mu D(\Lambda)=\Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu$$

稍微滥用一下语言，我们说γ矩阵像向量一样变换。而实际上矩阵本身根本不变换，变换的是$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$。通过定义我们可以得到$\gamma$矩阵的反对易关系：

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\}=2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$$

另外，我们有：

$$(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0;\quad(\gamma^i)^\dagger=-\gamma^i;\quad\overline{\gamma}^\mu=\gamma^\mu;\quad(\gamma^\mu)^\dagger=\gamma_\mu$$

于是，我们可以把拉格朗日量写成γ矩阵的形式：

$$\mathscr{L} = \pm\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$$

> 费曼引入了一个有用的简写：
>
> Products of 4-vectors and gamma matrices occur frequently. Feynman introduced a useful shorthand for these products:
>
> $$\gamma^\mu a_\mu \equiv \not{a} \tag{20.86}$$
>
> (pronounced "a slash"). Then
>
> $$(\not{a})^2 = a_\mu a_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \tfrac{1}{2} a_\mu a_\nu \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = a^\mu a_\mu = a^2 \tag{20.87}$$
>
> and similarly
>
> $$\{\not{a}, \not{b}\} = 2a^\mu b_\mu = 2a \cdot b \tag{20.88}$$
>
> The Dirac Lagrangian can be rewritten in the slash notation,
>
> $$\mathscr{L} = \pm\overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi \tag{20.89}$$
>
> and the equation of motion (from varying $\overline{\psi}$)
>
> $$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \tag{20.90}$$
>
> If we multiply on the left with $(i\not{\partial} + m)$, we obtain the Klein–Gordon equation:
>
> $$(i\not{\partial} + m)(i\not{\partial} - m)\psi = 0 = -[(\not{\partial})^2 + m^2]\psi = -(\Box^2 + m^2)\psi \tag{20.91}$$
>
> That is, each of the four components of ψ satisfies the Klein–Gordon equation.

20.5 双线性旋量积

我们已经知道，$\overline{\psi}\psi$是洛伦兹标量，$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$是洛伦兹矢量，现在我们想要知道其他双线性组合的变换性质。我们将会得到16种独立的双线性形式：标量、向量、反对称张量、轴矢量和赝标量。首先，考虑宇称变换。先前我们知道，对狄拉克旋量有：

$$P : \psi(\mathbf{x}, t) \to \gamma^0\psi(-\mathbf{x}, t)$$

取伴随得到：

$$\overline{\gamma^0\psi}(-\mathbf{x}, t) = \overline{\psi}(-\mathbf{x}, t)\overline{\gamma^0} = \overline{\psi}(-\mathbf{x}, t)\gamma^0$$

于是我们有：

$$P : \overline{\psi}(\mathbf{x}, t) \to \overline{\psi}(-\mathbf{x}, t)\gamma^0$$

结果我们得到：

$$P : \overline{\psi}\psi(\mathbf{x}, t) \to \overline{\psi}\psi(-\mathbf{x}, t)$$

类似地我们得到:

$$P:\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi(\mathbf{x},t)\rightarrow\begin{cases}\overline{\psi}\gamma^{0}\psi(-\mathbf{x},t), & \text{if } \mu=0\\ -\overline{\psi}\gamma^{i}\psi(-\mathbf{x},t), & \text{if } \mu\neq 0\end{cases}$$

最复杂的表达式是:

$$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi=\frac{1}{2}\overline{\psi}\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\}\psi+\frac{1}{2}\overline{\psi}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\psi=g^{\mu\nu}\overline{\psi}\psi+\frac{1}{2}\overline{\psi}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]\psi$$

这个表达式的对称部分没有什么新奇的，但是反对称部分值得关注。定义:

$$\sigma^{\mu\nu}=\frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}]$$

容易验证$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$是一个张量，这是两个$\gamma$的情况。那么3个$\gamma$呢? 我们知道$\gamma$矩阵的平方等于1，所以只有当三个矩阵都不同时才不等价于单矩阵情况。三个矩阵乘积只能产生四种独立矩阵。我们定义:

$$\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}\gamma^{\mu}=-i\gamma_{5}\gamma^{\mu}$$

也就是说:

$$\gamma_{5}\equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}=\frac{1}{4!}i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}\\ \mathbf{1}&\mathbf{0}\end{pmatrix}\text{(Dirac basis)}$$

我们有性质:

$$(\gamma_{5})^{2}=1;\quad(\gamma_{5})^{\dagger}=\gamma_{5}=-\overline{\gamma_{5}};\quad\{\gamma_{5},\gamma^{\mu}\}=0$$

量$i\overline{\psi}\gamma_{5}\psi$在洛伦兹变换下表现得像个标量，但在宇称变换下我们有:

$$P:i\overline{\psi}\gamma_{5}\psi(\mathbf{x},t)\rightarrow i\overline{\psi}\gamma^{0}\gamma_{5}\gamma^{0}\psi(-\mathbf{x},t)=-i\overline{\psi}\gamma_{5}\psi(-\mathbf{x},t)$$

也就是说，$i\overline{\psi}\gamma_{5}\psi$是个赝标量。另外，我们有量$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi$，在洛伦兹变换下它表现得像个矢量，但在宇称变换下:

$$P:\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi(\mathbf{x},t)\rightarrow\begin{cases}-\overline{\psi}\gamma^{0}\gamma_{5}\psi(-\mathbf{x},t) & \text{if } \mu=0\\ \overline{\psi}\gamma^{i}\gamma_{5}\psi(-\mathbf{x},t) & \text{if } \mu\neq 0\end{cases}$$

量$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi$被称为轴矢量。于是我们有下表。

Label	*Product*		*Under P*	*Components*	*Lorentz*
S	$\overline{\psi}\psi$	$\rightarrow$	$\overline{\psi}\psi$	1	scalar
V	$(\overline{\psi}\gamma^0\psi, \overline{\psi}\gamma^i\psi)$	$\rightarrow$	$(\overline{\psi}\gamma^0\psi, -\overline{\psi}\gamma^i\psi)$	4	vector
T	$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	$\rightarrow$	$\overline{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	6	tensor
A	$(\overline{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi, \overline{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	$\rightarrow$	$(-\overline{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi, \overline{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi)$	4	axial vector
P	$\overline{\psi}i\gamma_5\psi$	$\rightarrow$	$-\overline{\psi}i\gamma_5\psi$	1	pseudoscalar

20.6 正交性和完备性

略。