



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

大爆炸宇宙学

STANDARD COSMOLOGY

谭子立 21305208

红移现象

1912年，[维斯托·斯里弗](#)首次测量了一个“旋涡星云”

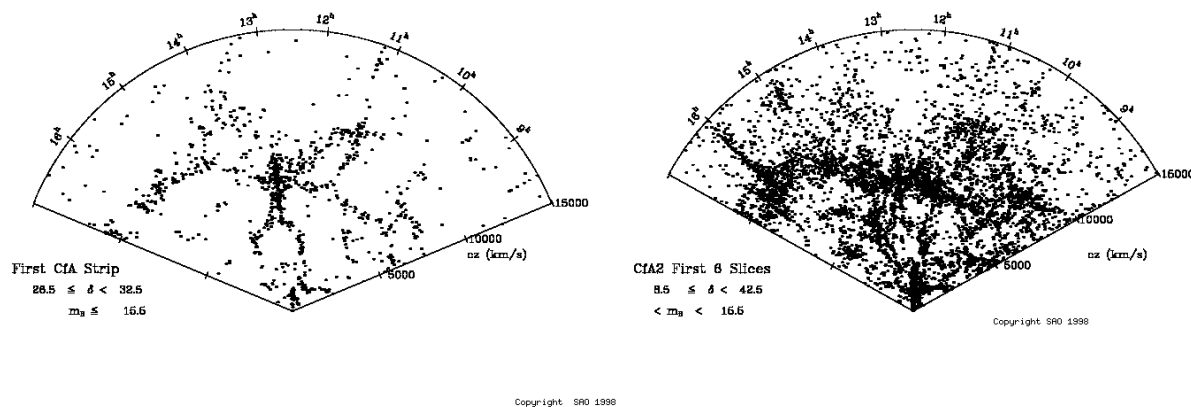
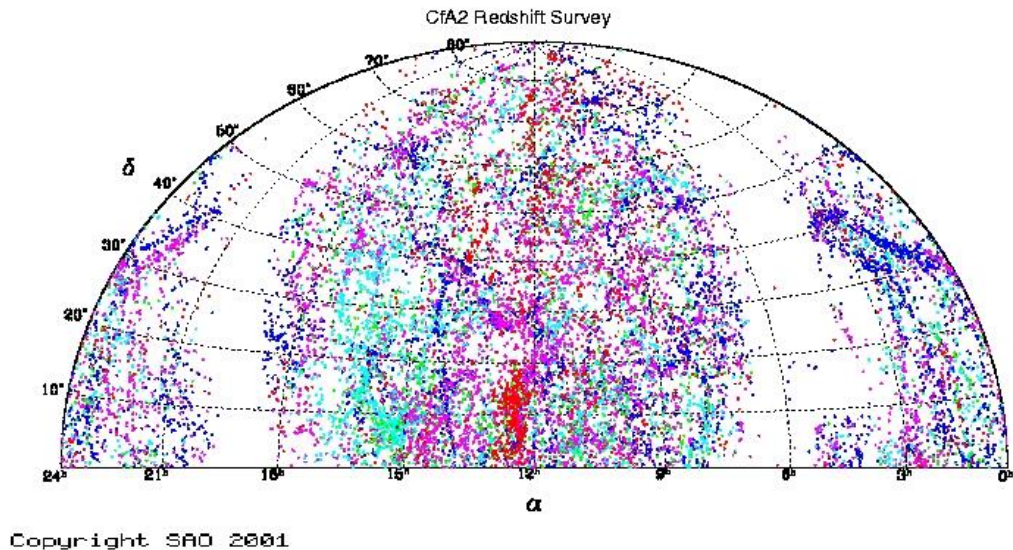
（“旋涡星云”是当时对[旋涡星系](#)的旧称法）的[多普勒频移](#)，
其后他又证实绝大多数类似的星云都在退离[地球](#)。

1924年起，哈勃为勒梅特的理论提供了实验条件：他在[威尔逊山天文台](#)利用口径250厘米的胡克望远镜费心建造了一系列天文距离指示仪，这些仪器使他能够通过观测星系的红移量来推测星系与地球之间的距离。

1929年，哈勃发现星系远离地球的速度同它们与地球之间的距离刚好成正比，这就是所谓[哈勃定律](#)。

$$\text{Distance} = \frac{\text{velocity}}{\text{Hubble's Constant}} = \frac{V}{H_0}$$

勒梅特根据[宇宙学原理](#)推测，当观测足够大的空间时，没有特殊方向和特殊点，因此哈勃定律说明宇宙在膨胀。



图一 CfA探测结果[1]

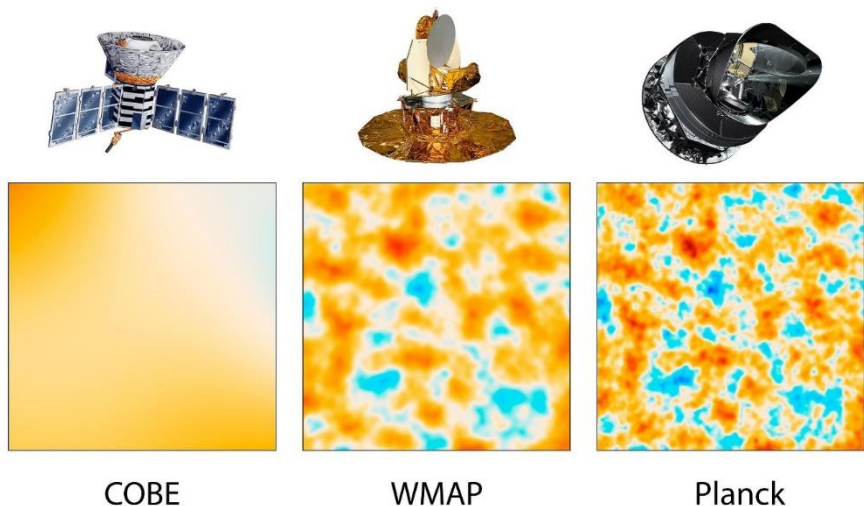
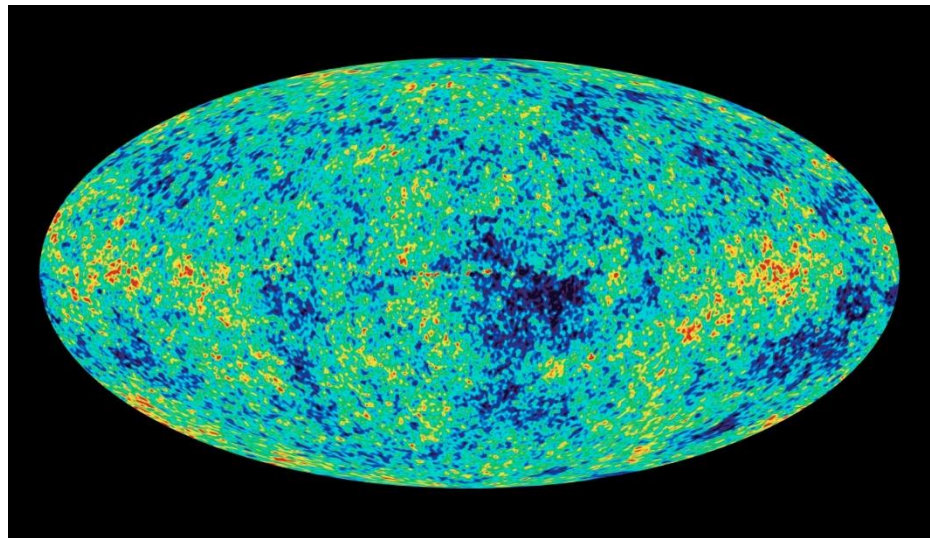
CMBR

在大爆炸发生的几分钟内，宇宙的温度降低到大约十亿开尔文的量级，密度降低到大约海平面附近空气密度的水平。在大约37.9万年之后，电子和原子核结合成为原子（主要是氢原子），而通过与物质脱耦，辐射得以在宇宙空间中相对自由的传播，这个辐射的残迹就形成了今天的宇宙微波背景辐射。

排除太阳系运动造成的偶极各向异性，宇宙背景辐射温度在10arc seconds – 180°的涨落幅度

$$\frac{\Delta T}{T} \lesssim 10^{-4}$$

宇宙背景辐射温度在大尺度上是各向同性的与均匀的，这佐证了大爆炸理论的正确性。



图二 根据WMAP对宇宙微波背景辐射的观测所绘制的图像。[2]

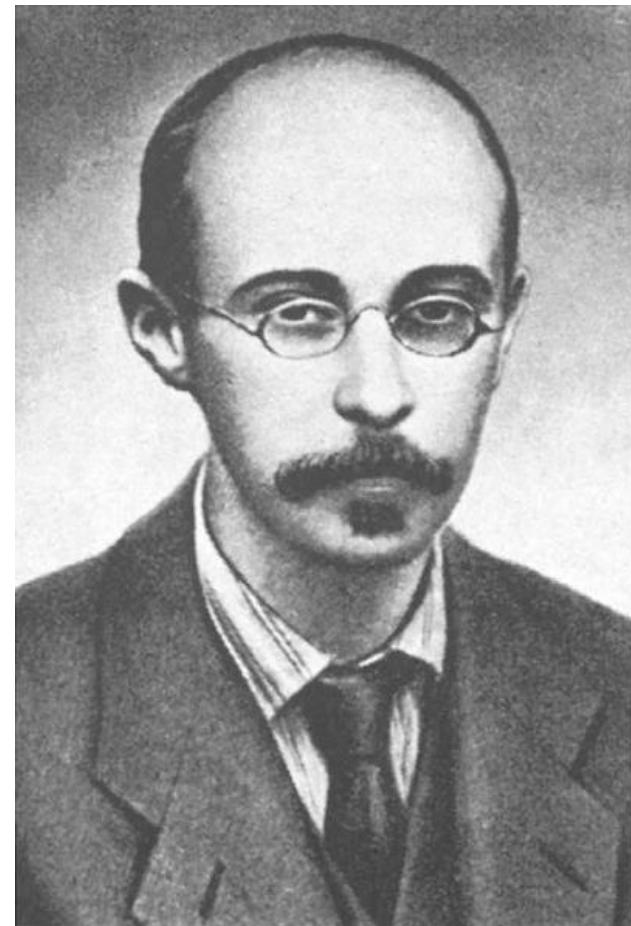
FRW度规

度规是定义在矢量空间上的一个 $(0, 2)$ 型张量：

- 可以利用度规定义矢量的长度 $|v| := \sqrt{|g(v, v)|}$;
- 定义四维洛伦兹度规为 $(-1, 1, 1, 1)$ ，号差为2；
- 可以根据 $g(v, v)$ 将矢量分为类空、类时、类光的；

按照[宇宙学原理](#)，在宇宙学尺度上天体系统最重要的特征之一是均匀和各向同性。[霍华德·P·罗伯逊](#)和沃尔克分别于1935年和1936年证明，适用于上述均匀性和各向同性要求的四维时空只有3种，它们的时空度规具有下列形式：FRW的时空度规具有如下形式：

$$ds^2 = R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) - c^2 dt^2$$



弗里德曼方程

对于一个具有FRW度规的空间，
引入爱因斯坦场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathcal{R} g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} \\ = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

将宇宙视作理想流体，可以得到
弗里德曼方程：

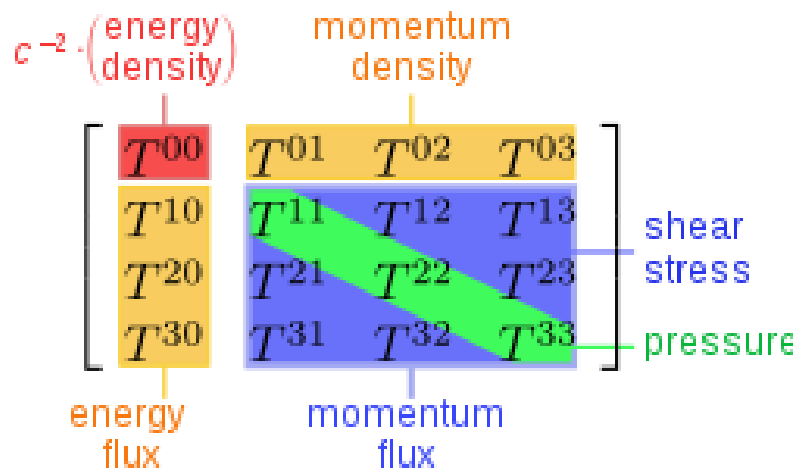
$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho$$

书中这一节将光速 c 视为1，将宇宙学常数 Λ 视为0。

我们知道，爱因斯坦场方程中右侧
有一项应力张量 $T_{\mu\nu}$ ，引入理想流体
假设，我们有：

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$$

其中 $\rho(t)$ 和 $p(t)$ 是随时的。



理想流体满足连续性方程，由上可以导出和热力学第一定律相似的形式：

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3)$$

考虑 $p = w\rho(c^2)$ ，代入上式积分可得到：

$$\rho \propto R^{-3(1+w)}$$

我们可以通过 w 来划分宇宙的主导对象：

- 辐射：($p = \frac{1}{3}\rho$) $\Rightarrow \rho \propto R^{-4}$
- 物质：($p = 0$) $\Rightarrow \rho \propto R^{-3}$
- 真空能量：($p = -\rho$) $\Rightarrow \rho \propto \text{const}$



暴涨

宇宙年龄的导出

根据弗里德曼方程，和 ρ 与 R 的标度率关系，我们可以推算宇宙的年龄：

- 辐射主导： $t \equiv H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1-\Omega_0+\Omega_0 x^{-2}]^{-\frac{1}{2}}}$
- 物质主导： $t \equiv H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[1-\Omega_0+\Omega_0 x^{-1}]^{-\frac{1}{2}}}$

对于不同的 Ω_0 ，我们会积分得到不同表达式。

现代的 t 表达式为：

$$t = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{VAC}^{-\frac{1}{2}} \ln \left[\frac{1 + \Omega_{VAC}^{\frac{1}{2}}}{(1 - \Omega_{VAC})^{-\frac{1}{2}}} \right]$$

其中 $\Omega_{VAC} = \frac{\rho_{VAC}}{\rho_c}$ 并假设 $\Omega_{VAC} + \Omega_{MATTER} = 1$ 。

下图[3]是 $H_0 t_0$ 关于 Ω_{VAC} 的曲线：

- 随着 Ω_{VAC} 增加，宇宙年龄也增加，并且会大于 H_0^{-1}
- $\Omega_{VAC} \rightarrow \infty, t_0 \rightarrow \infty$

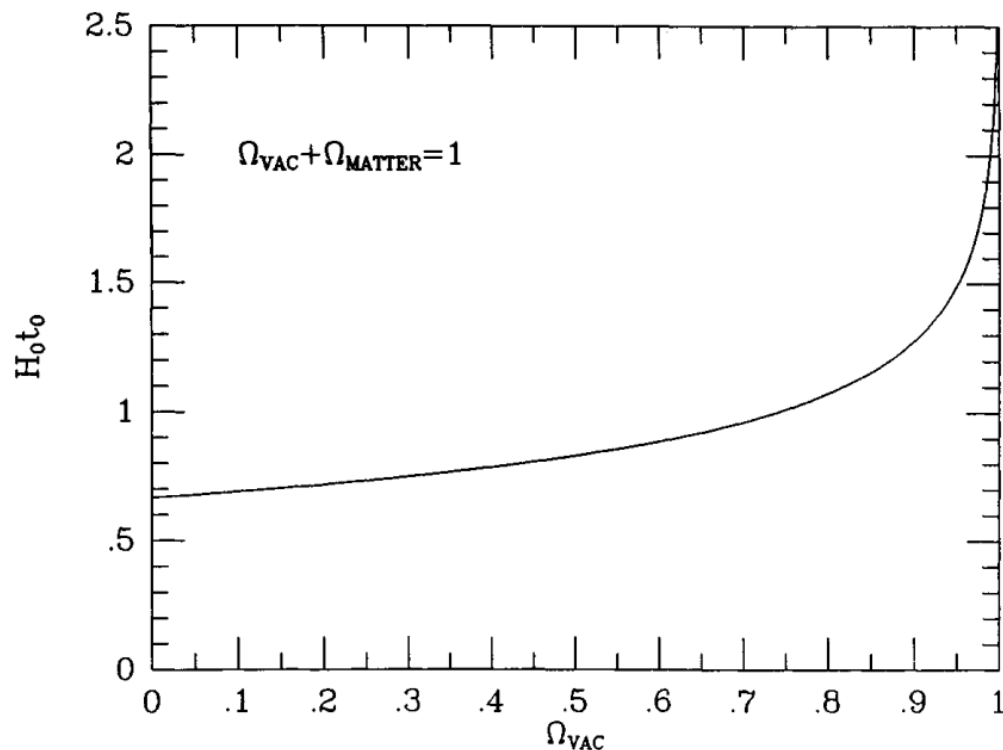


Fig. 3.2: The age of a $k = 0$ Universe with both matter and vacuum energy.



视界疑难 (均匀性疑难)

从这一页开始用
 $a(t)$ 指代 $R(t)$

视界距离的定义如下:

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = R(t) \int_0^{R(t)} \frac{dR(t')}{\dot{R}(t')R(t')}$$

- 若 $R(t) \propto t^n \Rightarrow d_H(t) = \frac{t}{1-n}$, 其中 $n < 1$ 。
- $d_H(t)$ 是有穷的说明宇宙的膨胀使得宇宙的各个部分失去了因果联系。

联立弗里德曼方程代入前式得到:

$$d_H(t) = \frac{1}{H_0(1+z)} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[x^2(1-\Omega_0) + \Omega_0 x^{1-3w}]^{\frac{1}{2}}}$$

从 $d_H(t)$ 的表达式中可以看出, 如果 $w < -\frac{1}{3}$, 积分发散, 视界不存在。

接下来介绍视界疑难问题:

首先需要明确当今可观测宇宙与视界距离的概念。

其中前者特指的是我们当今能观测到的那个宇宙, 后者则是处于我们视界内的宇宙。两者只在当今有:

$$D_{\text{今可观}}(t_0) = D_H(t_0)$$

易知 $D_{\text{今可观}}(t) \propto a(t)$

根据视界距离的定义可以推导出:

$$\begin{cases} D_H(t) = 2(ct), & \text{(RD)} \\ D_H(t) = 3(ct), & \text{(MD)} \end{cases}$$

那么当光子退耦 $t = t_{\gamma d} \cong 10^{13}s$ 时, 有:

$$D_{\text{今可观}}(t_{\gamma d}) \cong 2 \times 10^{23}m, \quad D_H(t_{\gamma d}) \cong 6 \times 10^{21}m$$



视界疑难 (续)

而若 $t = 10^{-43}s$, 我们有:

$$D_{\text{今可观}}(10^{-43}s) \cong 3 \times 10^{-5}m,$$

$$D_H(10^{-43}s) \cong 6 \times 10^{-35}m$$

可以看出, 两者差了几十个数量级。

根据视界距离的定义, 视界内的粒子与视界外的粒子不会有相互作用, 也就是说, 当今可观测宇宙在早期根本不可能充分自我搅拌。

而我们却观测到CMBR的各向同性, 也就是说我们只能规定宇宙的初态是各向同且均匀的。

接下来介绍平直性疑难问题:

根据标准模型, Ω 与1的偏离会随时间被严重放大。我们可以定义 $\epsilon(t)$ 为:

平直性疑难

$$\epsilon(t) = |\Omega - 1| = \left| \frac{\rho - \rho_c}{\rho} \right| = \frac{3|k|}{8\pi\rho(t)a^2(t)}$$

若 $k \neq 0$, 进一步有:

$$\epsilon(t) \propto (\rho a^2)^{-1} = \begin{cases} (\rho a^{-4})^{-1} a^2 \propto a^2, & (RD) \\ (\rho a^{-3})^{-1} a \propto a, & (MD) \end{cases}$$

根据先前结论 $T_\gamma \propto \frac{1}{a}$, 已知 $T(10^{-43}s) \cong 3 \times 10^{31}K$, 有:

$a(t_0) \cong 10^{31}a(10^{-43}s) \Rightarrow \epsilon(t_0)$ 是 $\epsilon(10^{-43}s)$ 的 $10^{31} \sim 10^{62}$ 倍
进一步估算显示: $\epsilon(t_0) = 10^{60}\epsilon(10^{-43}s)$

即使设 $\epsilon(t) < 10 \Rightarrow \epsilon(10^{-43}s) \cong 10^{-59}$

那么 $\Omega(10^{-43}s) \cong (1 \mp 10^{-59})^{-1} \cong 1 \pm 10^{-59}$,

如果那时 Ω 稍大一点, 宇宙还未演化就将收缩为奇点, 这说明极早期宇宙被“不可思议地”微调至1。

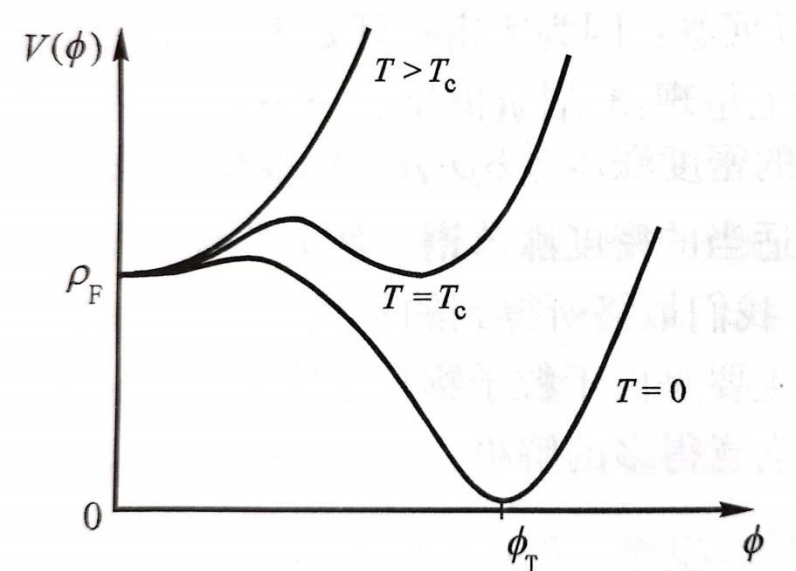
暴涨模型

我们主要介绍Guth的暴涨理论：

根据大统一理论（SU(5)理论），随着温度升高，有：

温度	现象
$T > T_C$	电、弱、强相互作用统一
$T < T_C$	内部对称性自发破缺，强分离，电弱统一
$T \approx 10^2 GeV$	电弱统一内部对称性也破缺

其中 $T_C \cong 10^4 GeV$ 。引入Higgs场 ϕ ，其有效势 $V(\phi)$ 可解释能量密度，适当选取模型中自由参数，有：



其中 ρ_F
 $\sim (10^{14} GeV)^4 \hbar^{-3} c^{-5}$
 $\cong 10^{76} kg \cdot m^{-3}$,
 $\phi = 0$ 和 $\phi = \phi_T$ 分别
 被称为假真空态和
 真真空态。

当今宇宙的 ϕ 场在 $T \cong 0$ 曲线的真真空态 $\phi = \phi_T$ 附近作微小涨落，其真空能量密度相应于一个宇宙常数 Λ 。

暴涨模型的优点是其对初始条件的要求很低，主要要求是甚早期宇宙中含有某些温度高于 T_C 的小区域，并且正在膨胀。

随着 T 随着膨胀逐渐小于 T_C ， $V(\phi)$ 出现两个极小值， ϕ 场可以通过量子隧道效应穿越势垒从假真空态变为真真空态，对应一阶相变。

而考虑到大统一理论的某些未知参数值，相变过程发生要比冷却过程缓慢得多，也就是 ϕ 场在 $T < T_C$ 时仍要在假真空态滞留一段时间才相变进入真真空态。

我们可以选择适当的参数使得区域过冷到接近 $T = 0$ 时而仍处于假真空态，在这段时间内，由于 $\rho_F \gg \rho_R$ ，故可认为总密度 $\rho \cong \rho_F$ 。

暴涨下尺度因子演化

根据弗里德曼方程，代入恒定能量密度 $\rho = \rho_F$ ，考虑到假真空对应压强为负的理想流体，有 $p = -\rho$ ，令：

$$\chi \equiv \left(\frac{8\pi G \rho_F}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \cong 10^{34} \text{s}^{-1}$$

由于 a 很小时 k 可忽略，方程简化为：

$$\frac{\dot{a}}{a} = \chi = \text{const}$$

解得：

$$a(t) \propto e^{\chi t}$$

在这段时间中，由于 a 在很小时间内急剧增长，远大于标准模型中 a 的增长速率，故称暴涨。

暴涨持续了约 10^{-32}s 或更长，起于

$t_C \cong 10^{-34} \text{s}$ ，终于

$t_F \cong 10^{-32} \text{s}$ ，此时发

生了对称性破缺引起的

相变， ϕ 场由假真空态

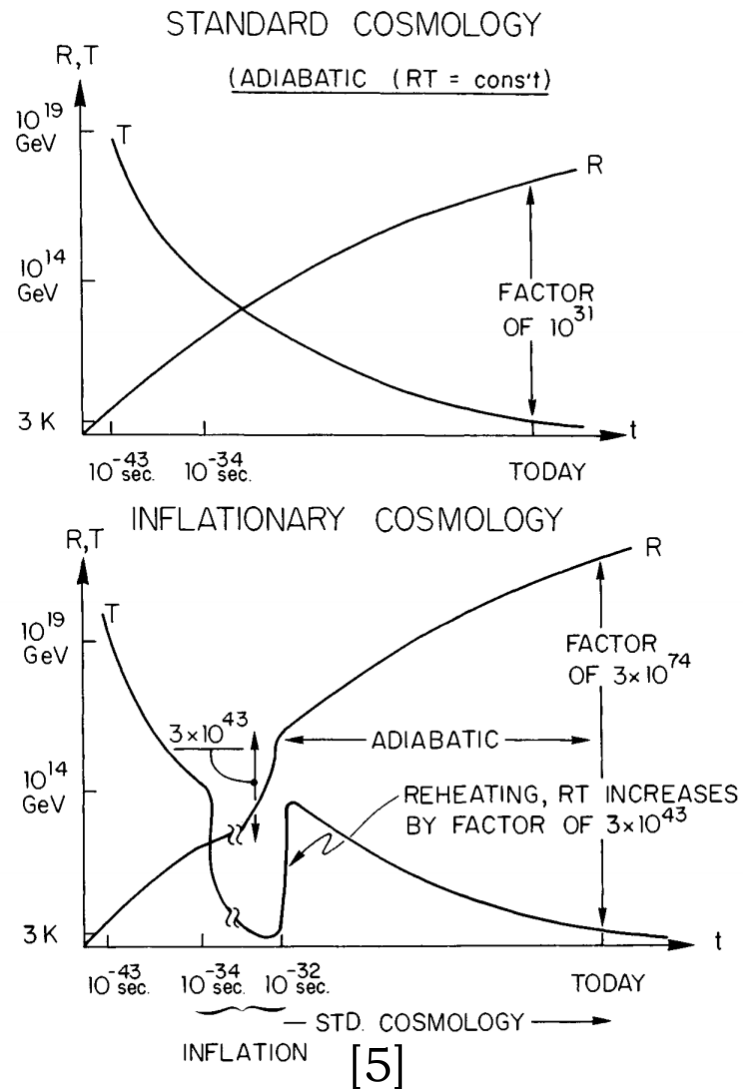
相变为真真空态(泡)，

潜热释放，区域重新被

加热到接近 T_C 的温度，

然后按照标准模型进行

演化。



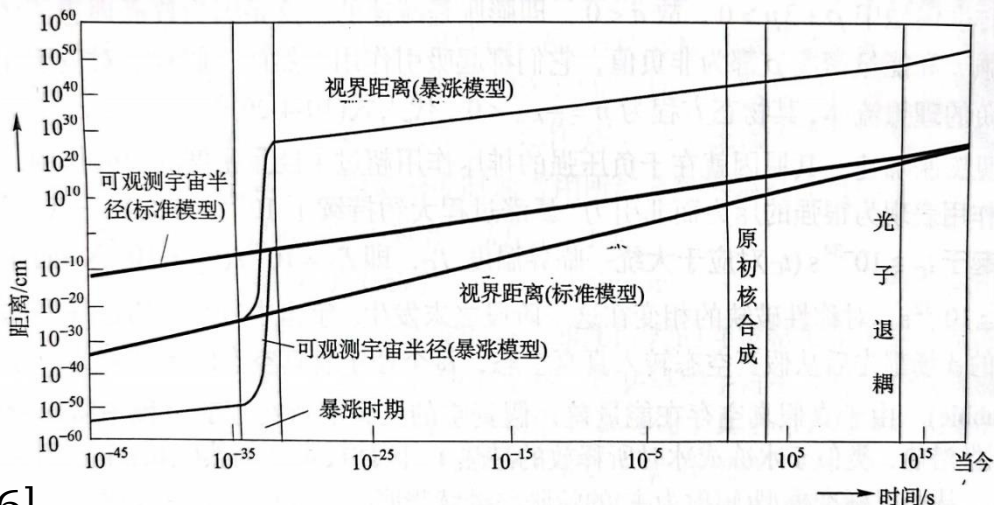
暴涨对疑难的解释

对平直性疑难的解释：

在标准模型中 ρa^3 或 ρa^4 是常数，故 $\epsilon(t)$ 以 a 或 a^2 的方式被放大。

而在暴涨过程中 $\rho = \rho_F$ 是常数，故 $\epsilon(t)$ 以 a^{-2} 方式被缩小， a 的暴涨导致的 ϵ 缩小的量级很可能比正常膨胀导致的 ϵ 的增大的量级还大得多。导致 Ω 非常接近1。

对视界疑难的解释：

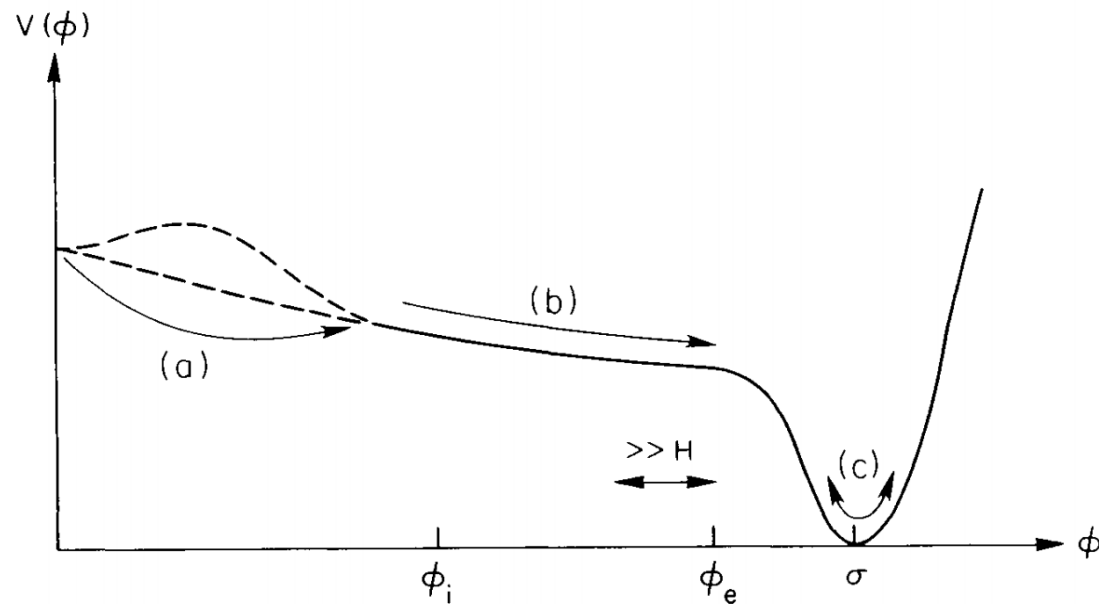


[6]

图 10-20 视界距离和可观测宇宙大小在两种模型中的演化曲线[参见 Guth and Steinhardt (1984)]
[图中“可观测宇宙(暴涨模型)”中的可观测宇宙仍指标准模型的当今可观测宇宙]

暴涨理论后续

- Guth的暴涨模型由其自身的弱点“体面退出问题”而被淘汰，但其暴涨的思想则被继承。
- 混沌暴涨模型



此为Linde、Albrecht和Steinhardt于1982年提出的势垒，包含慢滚过程，有别于Guth的“旧暴涨(old inflation)”



谢谢大家



附录



附录