SUN YAT-SEN UNIVERSITY

3.1 The Friedmann Equation

报告人：谭子立 邱林蔚

弗里德曼方程的导出

FRW的时空度规具有如下形式:

$$ds^2 = R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right) - c^2 dt^2$$

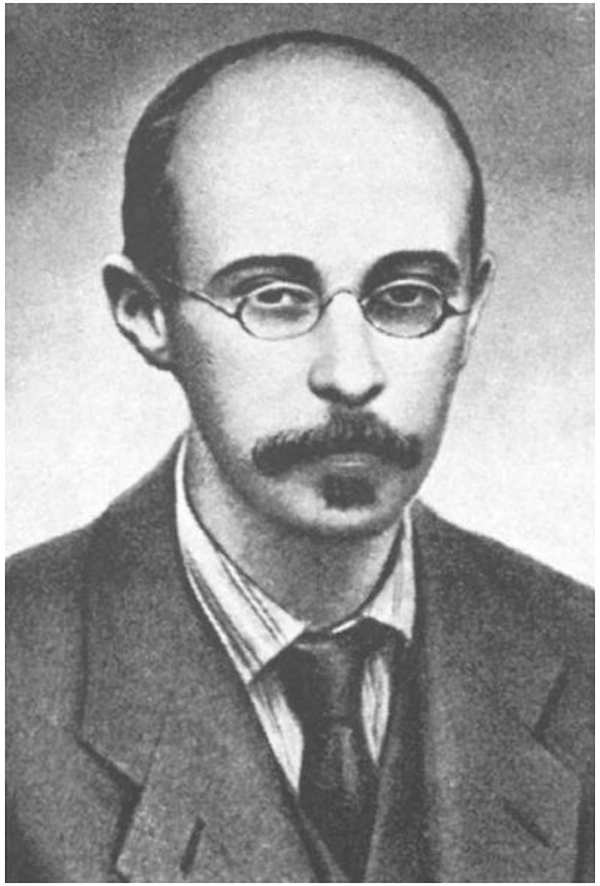
引入爱因斯坦方程:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

将宇宙视作理想流体，可以得到弗里德曼方程:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

书中这一节将光速c视为1，将宇宙学常数Λ视为0



场方程的导出

爱因斯坦方程基于一个假设，即：作用量在度规张量的微小改变下不变。

$$\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$$

导出爱因斯坦场方程的作用量$S = S_{E-H} + S_M$，有以下表达式：

$$S_{E-H} = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(\mathcal{R} + 2\Lambda) \rightarrow \delta S_{E-H} = \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}\right)\delta g_{\mu\nu}$$

$$S_M = \sum_{fields}\int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}_{fields} \rightarrow \delta S_M = -\frac{1}{2}\sum_{fields}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}_{fields}\,\delta g_{\mu\nu}$$

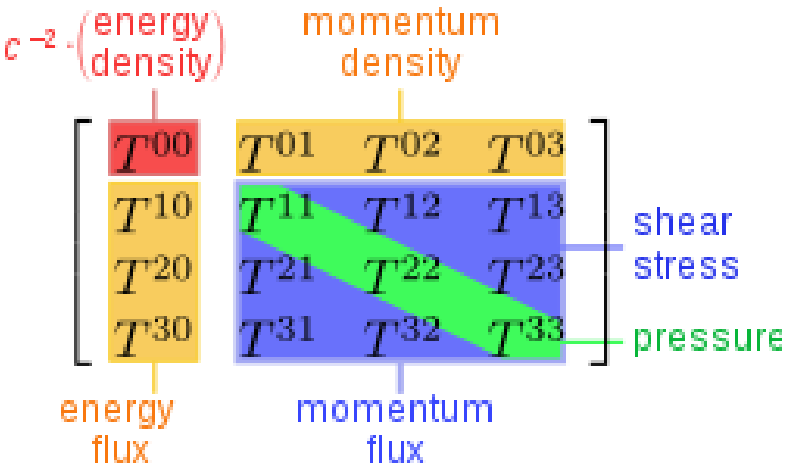
其中S_{E-H}是爱因斯坦-希尔伯特作用量，S_M是“物质”作用量。

流体假设

我们知道，爱因斯坦场方程中右侧有一项应力张量$T_{\mu\nu}$，用来描述占据空间的物质具有的性质（？）。

为使其与度规张量保持一致，其也必须是对角的；考虑空间各向同性，对角阵上三个空间分量也要相同，而理想流体则刚好满足这种性质，于是我们有：

$$T^{\mu}_{\nu} = diag(\rho, -p, -p, -p)$$



其中$\rho(t)$和$p(t)$是随时的。

理想流体满足连续性方程，由上可以导出和热力学第一定律相似的形式：

$$d(\rho R^3) = -pd(R^3)$$

物理意义为：一个体积元内能量的改变等于压力对体积做的功。

ρ和p的关系

进一步地，考虑$p = w\rho(c^2)$，其中w是一个与时间无关的标量。

代入先前式子积分可得到：

$$\rho \propto R^{-3(1+w)}$$

我们可以通过w来划分宇宙的主导对象：

- 辐射：$(p = \frac{1}{3}\rho) \Rightarrow \rho \propto R^{-4}$→早期宇宙
- 物质：$(p = 0) \Rightarrow \rho \propto R^{-3}$→青年宇宙
- 真空能量：$(p = -\rho) \Rightarrow \rho \propto const$→极早期宇宙（暴涨）

这种简单（只有一个参数）的近似被实验证明是精确的，尽管实际上方程右侧受到多种因素影响：物质、辐射、真空能量、相干标量场、宇宙弦、畴壁？（domain walls）。

求解$R(t)$

已知FRW度规下的里奇张量满足：

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{R}}{R}$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{2k}{R^2}\right] g_{ij}$$

里奇标量为：

$$\mathcal{R} = -6\left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2}\right]$$

代入爱因斯坦场方程，考虑时间坐标，立刻得到弗里德曼方程：

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

考虑空间坐标，得到：

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = -8\pi G p$$

将上两式相减得到：

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

现在$\dot{R} \geq 0$（加速膨胀），如果以前$\rho + 3p > 0$，那么$\ddot{R} < 0$，这预示着存在一个$R = 0$的奇点（大爆炸）。

宇宙的膨胀速度由哈勃参数表征：

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}$$

它不是一个常数，但现在的哈勃参数，可由常数H_0表示。

其他参数的导出

用哈勃参数来表示弗里德曼方程可以得到：

$$\frac{k}{H^2R^2} = \frac{\rho}{3H^2/8\pi G} - 1 = \Omega - 1$$

其中Ω是当前密度和临界密度之比，有：

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} \qquad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Ω的大小决定了宇宙的结构

$$k = +1 \Rightarrow \Omega > 1, \mathrm{CLOSED}$$

$$k = 0 \Rightarrow \Omega = 1, \mathrm{FLAT}$$

$$k = -1 \Rightarrow \Omega < 1, \mathrm{OPEN}$$

视曲率项k可以忽略，容易得到：

$$H^2 \propto \rho$$

结合先前的结论，有：

- 辐射：$H^2 \propto R^{-4}$→早期宇宙
- 物质：$H^2 \propto R^{-3}$→青年宇宙

尽管现在的宇宙$|\Omega - 1|$处处接近一致，但在早期:

$$|\Omega - 1| \simeq \begin{cases} \frac{R}{R_0} = (1+z)^{-1}(MD) \\ \left(\frac{R_{EQ}}{R_0}\right)\left(\frac{R}{R_{EQ}}\right)^2 \simeq 10^4(1+z)^{-2}(RD) \end{cases}$$

$R_{EQ} \simeq 10^{-4}R_0$是过渡阶段的R值

拓展

FRW的空间曲率为：

$$^{3}\mathcal{R} = \frac{6k}{R^2(t)} = 6H^2(\Omega - 1)$$

进一步定义曲率半径：

$$R_{curv} = \frac{H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}}$$

由之前的式子可以看出，早期宇宙是非常平坦的，曲率半径远大于哈勃半径。

再次回顾先前对q_0的定义：

$$q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}(t_0)/R(t_0)}{H_0^2}$$

用Ω表示，我们有：

$$q_0 = \Omega_0\left[1 + \frac{3p}{\rho}\right]/2 \equiv \Omega_0[1 + 3w]/2$$

同样，我们有：

- 辐射：$\left(p = \frac{1}{3}\rho\right) \Rightarrow q_0 = \Omega_0/2$→早期宇宙
- 物质：$(p = 0) \Rightarrow q_0 = \Omega_0$→青年宇宙
- 真空能量：$(p = -\rho) \Rightarrow q_0 = -\Omega_0$→极早期宇宙（暴涨）

THANKS

谢谢大家

附录