Lecture 19 狄拉克方程 I：构造拉格朗日量

19.1 从旋子(spinors)构建向量

我们想要构建一个包含向量的拉格朗日密度，我们知道旋转群中如何用泡利旋量表示自旋$\frac{1}{2}$粒子，对应表示$D^{(\frac{1}{2},0)}$和$D^{(0,\frac{1}{2})}$，我们有生成元：

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\sigma = (\mathbf{J}^{(+)} + \mathbf{J}^{(-)})$$
$$\mathbf{M} = \pm\frac{i}{2}\sigma = -i(\mathbf{J}^{(+)} - \mathbf{J}^{(-)})$$

考虑分别属于两表示的元素$u_\pm$，它们在绕轴旋转下的表现就像是泡利旋量一样：

$$R(\hat{\mathbf{n}}\theta) : u_\pm \to e^{-\frac{1}{2}i\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta} u_\pm$$

而在布施变换下，它们的变换则不一样：

$$A(\hat{\mathbf{a}}\phi) : u_\pm \to e^{\pm\frac{1}{2}i\sigma\cdot\hat{\mathbf{a}}\phi} u_\pm$$

我们称$u_\pm$为**Weyl旋量**，有：

$$P : u_\pm \to u_\mp$$

我们以u_+为例，知道它按照$D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda)$进行变换，考虑其共轭$u_+^\dagger$，按照先前讨论，其应该按照$D^{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda)$进行变换，那么考虑表示的直积，我们要如何组合旋量，使其按照直积表示变换？我们有：

$$D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda) \otimes D^{(0,\frac{1}{2})}(\Lambda) \sim D^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\Lambda)$$

对于这个表示，我们可以构建一个协变向量V^μ，其含有一个时间分量，对应表示$D^{(0)}$，和一个空间向量，对应表示$D^{(1)}$，它们的直和构成直积表示下的向量。对于标量，我们只有一个旋量的双线性形式：

$$V^0 = u_+^\dagger u_+$$

这在旋转下按照标量变换。类似地，我们乘上一个系数η，可以得到三个空间分量的表达式：

$$V^i = \eta u_+^\dagger \sigma^i u_+$$

这样的“形式主义”没有使我们误入歧途，至少现在没有。我们得到的四个双线性形式使得我们可以分别有一个$\mathrm{SO}(3)$标量和一个$\mathrm{SO}(3)$向量，然后把他们拼成我们想要的四向量。

让我们看看这些双线性形式如何在布施下变换，设变换的轴为z轴，我们有：

$$A(\hat{\mathbf{z}}\phi):\begin{cases}u_+\to e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}u_+\\ u_+^\dagger\to u_+^\dagger e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}\end{cases}$$

其中$\pm\frac{1}{2}\sigma_z=iM_z$是一个厄米矩阵。这就是洛伦兹变换和旋转的不同，我们在指数因子里面有一个i：

$$R:(e^{-\frac{1}{2}i\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta})^\dagger=e^{\frac{1}{2}i\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta}$$
$$A:(e^{\pm\frac{1}{2}\sigma\cdot\hat{\mathbf{a}}\phi})^\dagger=e^{\pm\frac{1}{2}\sigma\cdot\hat{\mathbf{a}}\phi}$$

在搞清楚它们如何变换之后，我们可以考虑向量的变换了，首先：

$$V^0=u_+^\dagger u_+\to u_+^\dagger e^{\sigma_z\phi}u_+$$

我们不妨将其展为级数，由于$\sigma^2=1$，我们有：

$$\begin{aligned}e^{\sigma_z\phi}&=\mathbf{1}+\sigma_z\phi+\frac{1}{2!}(\sigma_z\phi)^2+\frac{1}{3!}(\sigma_z\phi)^3+...\\&=\mathbf{1}(1+\frac{1}{2!}\phi^2+\frac{1}{4!}\phi^4+...)+\sigma_z(\phi+\frac{1}{3!}\phi^3+\frac{1}{5!}\phi^5+...)\end{aligned}$$

这恰好是$\cosh\phi$和$\sinh\phi$的展开式，我们有：

$$u_+^\dagger u_+\to u_+^\dagger u_+\cosh\phi+u_+^\dagger\sigma_z u_+\sinh\phi$$

也就是说：

$$V^0\to V^0\cosh\phi+(1/\eta)V^3\sinh\phi$$

不妨设$\eta=1$，定义：

$$V^\mu=(V^0,\mathbf{V})=(u_+^\dagger u_+,u_+^\dagger\sigma u_+)$$

现在考虑其他分量：

$$V^3=u_+^\dagger\sigma_z u_+\to u_+^\dagger e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}\sigma_z e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}u_+$$

其中：

$$u_+^\dagger e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}\sigma_z e^{\frac{1}{2}\sigma_z\phi}u_+=\sigma_z e^{\sigma_z\phi}=\sigma_z(\cosh\phi+\sigma_z\sinh\phi)=\sigma_z\cosh\phi+\sinh\phi$$

于是我们有:

$$V^3 \to V^3 \cosh\phi + V^0 \sinh\phi$$

对于$V^{1,2}$，由泡利旋量的反对易关系:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\mathbf{1}$$

我们可以得到:

$$V^{1,2} \to V^{1,2}$$

类似地，我们可以把这些运算应用到u_-上，定义W^μ:

$$W^\mu(W^0, \mathbf{W} = (u_-^\dagger u_-, -u_-^\dagger \sigma u_-))$$

顺便说一下，复共轭u_+^*与u_-等价，我们的起点来自对旋转变换做复共轭，得到:

$$R(\hat{\mathbf{n}}\theta) : u_+^* \to e^{+\frac{1}{2}i\sigma^*\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta} u_+^*$$

引入等式:

$$\sigma_y \sigma^* \sigma_y^{-1} = \sigma_y \sigma^* \sigma_y = -\sigma$$

这个等式很好证明，因为σ_y是唯一的复泡利矩阵，类似地，我们有:

$$\sigma_y e^{+\frac{1}{2}\sigma^*\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta} \sigma_y^{-1} = e^{-\frac{1}{2}i\sigma\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta}$$

类似地，我们有:

$$A(\hat{\mathbf{a}}\phi) : u_+^* \to e^{\frac{1}{2}\sigma^*\cdot\hat{\mathbf{a}}\phi} u_+^*$$

19.2 Weyl旋量对应的拉格朗日量

现在让我们尝试使用u_+构建一个经典自由场，就像之前一样，让我们首先定下一些准则:

Criteria for a Weyl Lagrangian

1. $\mathscr{L}$ must be a Lorentz scalar, to guarantee Lorentz invariance.
2. $\mathscr{L}$ must have an internal symmetry, to give a conserved charge.
3. $\mathscr{L}$ must be bilinear in the fields, to give linear equations of motion.
4. $\mathscr{L}$ should have no more than two derivatives, for simplicity.
5. The action $\mathcal{S} = \int d^4x\, \mathscr{L}$ should be real; $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$.

第一个条件无需讨论。对第二个条件，我们知道$\frac{1}{2}$自旋粒子和某些守恒律联系着，重子数守恒或者光子数守恒，因此我们希望在一个相位变换下拉格朗日量不变：

$$u_+ \to e^{i\alpha}u_+ \quad u_+^\dagger \to e^{-i\alpha}u_+^\dagger$$

我们知道，在标量场理论中，这个变换带给我们荷守恒定律。第三个，我们想要u_+的双线性形式，这样我们就会有线性运动方程，并保证其在相变换下的不变性。在标量情况下，我们希望在运动方程中使用不超过二阶求导，因此，为了简洁我们要求在拉格朗日密度任何相中的求导相的幂不超过2，因此，原则上我们可以在拉格朗日量中有三种项：

$$(a)u_+^\dagger u_+ \quad (b)u_+^\dagger \partial^\mu u_+ \quad (c)u_+^\dagger \partial^\mu \partial^\nu u_+$$

现在问题是，我们不知道它们是否与条件1相容。对于(a)的四种组合，我们已经看到它们都不像标量变换，而它们像向量的四个分量一样变换，而且我们不能通过向量内积来得到u_+的双线性形式，虽然我们可以得到一个标量，但是它会有如下形式：

$$V^\mu V_\mu = (u_+^\dagger u_+)^2 - (u_+^\dagger \sigma u_+) \cdot (u_+^\dagger \sigma u_+)$$

这很可怕，我们知道质量项会作为(a)形式的平方项出现，而现在看上去我们只能建立一个无质量粒子的理论。我们也知道这个理论将不会遵循宇称守恒，因为要构建宇称守恒的理论我们同时需要u_+和u_-。所以我们将会得到一个无法表达宇称不变性的无质量粒子理论，好吧，我们还有中微子。

类似的讨论也适用于(c)形式，导数算符是一个向量，所以这个线性形式像向量一样变换，我们将没有办法构建一个标量。

幸好我们还有(b)形式，我们可以让向量的指标与导数算符的指标一致，这样我们就可以构建一个两向量的洛伦兹不变积：

$$u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+$$

如果我们从这个表达式构造一个作用量，我们有：

$$\mathcal{S} \propto \int d^4x [u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+]$$

通过分部积分我们也可以把上式写成：

$$\mathcal{S} \propto -\int d^4x [(\partial_0 u_+^\dagger) u_+ + (\nabla u_+^\dagger) \cdot \sigma u_+]$$

现在，我们发现我们最终得到一个唯一的拉格朗日密度：

$$\mathscr{L} \propto u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+$$

现在我们还剩一个系数没有决定，为了满足条件5，我们发现拉格朗日密度前面的系数必须为纯虚数，通过缩放，我们最终有：

$$\mathscr{L} = \pm i(u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+)$$

对于u_-，我们可以写出：

$$\mathscr{L} = \pm i(u_- +^\dagger \partial_0 u_- - u_-^\dagger \sigma \cdot \nabla u_-)$$

19.3 Weyl方程

既然我们已经得到了拉格朗日密度的表达式，那么我们立刻可以通过标准流程得到运动方程，也就是Weyl方程：

$$(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) u_+ = 0$$

类似地对于u_-我们有：

$$(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla) u_- = 0$$

我们不妨对运动方程左乘$(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)$，得到：

$$(\partial_0 - \sigma \cdot \nabla)(\partial_0 + \sigma \cdot \nabla) u_+ = 0$$

由于：

$$(\sigma \cdot \nabla)^2 = \sigma_i \sigma_j \partial_i \partial_j = \frac{1}{2}\{\sigma_i, \sigma_j\} \partial_i \partial_j = \nabla^2$$

于是方程变为：

$$(\partial_0^2 - \nabla^2) u_+ = \Box^2 u_+ = 0$$

对于这个方程，我们有通解：

$$u_+(x) = u_{\mathbf{p}} e^{\pm i p \cdot x}$$

这和我们期望的无质量粒子解一致，其中$u_{\mathbf{p}}$是常数，并且由于$p^2 = 0$，我们有：

$$p^0 = |\mathbf{p}|$$

让我们定义$u_{\mathbf{p}}$，为了简洁考虑如下情形：

$$\mathbf{p} = p^0 \hat{\mathbf{z}} \quad \text{or} \quad p^\mu = p^0(1, 0, 0, 1)$$

所以我们有一个朝向z轴运动的粒子，将平面波解代入Weyl方程中我们得到：

$$(1 - \sigma_z) u_{\mathbf{p}} = 0$$

这很好解，让我们写下泡利矩阵的表达式：

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

我们得到：

$$u_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

这意味着Weyl方程对光锥上的每一个4动量值都有一个线性无关解。因此，当我们量子化这个理论时，我们可以预期，对于每个动量，我们可以用一个湮灭算符和一个产生算符来描述粒子。

让我们猜测这个粒子的量子理论，包括其的自旋。当然我不应该说“自旋”，因为对于一个无质量粒子，我们没有多余的框架来计算其角动量。然而，我们可以讨论其螺旋度，也就是角动量在其运动方向上的分量。所以让我们对一个具有动量p的态$|p\rangle$计算J_z。

让我们将这个理论与标量场理论对比，我们可以假设这个量子场包含一些湮灭和产生算符。因此，我们应该希望当我们把量子场放在真空态和单粒子态中间，我们会得到：

$$\langle 0|u_+(x)|p\rangle \propto u_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x}$$

这是很好的类比，让我们考虑$x=0$，有：

$$\langle 0|u_+(0)|p\rangle \propto u_{\mathbf{p}}$$

现在对于一个朝z轴方向移动的粒子，我们认为其是螺旋度J_z的本征态，满足；

$$J_z\,|p\rangle = \lambda\,|p\rangle$$

其中λ是该粒子的螺旋度。那么对于酉变换：

$$e^{-iJ_z\theta} = U(R(\hat{\mathbf{z}}\phi))$$

对于将希尔伯特空间中的态$|k\rangle$绕z轴旋转ϕ度，我们有如下本征方程：

$$e^{-iJ_z\theta}\,|p\rangle = e^{-i\lambda\theta}\,|p\rangle$$

那么：

$$e^{-i\lambda\theta}\,\langle 0|u_+(0)|p\rangle = \langle 0|u_+(0)e^{-iJ_z\theta}|p\rangle = \langle 0|e^{iJ_z\theta}u_+(0)e^{-iJ_z\theta}|p\rangle$$

这里我假设真空是旋转不变的，于是我们有：

$$\begin{aligned} e^{iJ_z\theta}u_+(0)e^{-iJ_z\theta} &= U(R(\hat{\mathbf{z}}\theta))^\dagger u_+(0)U(R(\hat{\mathbf{z}}\theta)) = D^{(\frac{1}{2},0)}(R(\hat{\mathbf{z}}\theta))u_+(0) \\ &= e^{-\frac{1}{2}i\sigma_z\theta}u_+(0) \end{aligned}$$

综上，我们有：

$$e^{-i\lambda\theta}\left\langle 0|u_+(0)|p\right\rangle \propto e^{-i\lambda\theta}u_{\mathbf{p}}$$
$$\left\langle 0|e^{iJ_z\theta}u_+(0)e^{-iJ_z\theta}|p\right\rangle \propto e^{-\frac{1}{2}i\sigma_z\theta}u_{\mathbf{p}} = e^{-\frac{1}{2}i\theta}u_{\mathbf{p}}$$

比较两式，我们得到：$\lambda = +\frac{1}{2}$。因此如果理论能被量子化，那么我们由u_+湮灭的粒子具有$\frac{1}{2}$的螺旋度，但我们的理论中没有螺旋度$-\frac{1}{2}$的粒子，这样的理论只有对于宇称不守恒的无质量粒子才成立，因为如果粒子有质量，我们总能找到一个比粒子速度更快的参考系，此时粒子运动方向相反，于是螺旋度变号。

但是，我们的理论中有两种粒子，因为这是一个带荷的场，因此这个场不仅会湮灭$+1$荷的粒子，也会产生-1荷的反粒子，如果我们把反粒子态作为左矢：

$$\langle p|\, u_+(0)$$

对应地我们会得到：

$$\langle p|\, e^{iJ_z\theta} = e^{+i\lambda'\theta}\,\langle p|$$

这个粒子的螺旋度$\lambda' = -\frac{1}{2}$。也就是说，如果我们能成功量子化我们的理论，其将会描述一个无质量粒子和其反粒子。这个粒子带有一个荷，而其反粒子带有一个反荷；这个粒子的螺旋度为$+\frac{1}{2}$，其反粒子的螺旋度为$-\frac{1}{2}$，我们约定，带有正的螺旋度的粒子被称为右手性粒子。

物理学家们起初认为这是愚蠢的数学学家的工作，没有宇称不变性，粒子无质量，和我们的世界完全不一样。但实际上Weyl的理论恰好描述了无质量中微子只有一个螺旋度（左旋），而反中微子有相反螺旋度。而有质量粒子的螺旋度则必须取其最大螺旋度到其负数这段间隔中所有的可能值。而无质量粒子如果具有宇称不变性，则可以取两种螺旋度。比如，光子就有+1和-1的螺旋度。这是因为电磁场是宇称不变的。如果电磁场不是宇称不变的，那就可以设想只有一个螺旋度的光子，比如+1。另外，我们总可以在电磁场中添加一个无质量标量场，并将得到的三个状态称为光子，于是我们就可以取其螺旋度为+1，0，-1。你可能会说加入标量场是不正常的，我同意你的看法，虽然这么做是可能的。正如泡利在一个相似的背景下所说：在建立理论时只使用不可约表示，“What God has put asunder, let no man join together.”

19.4 狄拉克方程

Weyl的理论很好的描述了自由中微子，但这个世界上存在许多有质量的$\frac{1}{2}$自旋粒子。为了超越无质量粒子，得到一个可能描述自由电子或者自由质子的合理理论，我们必须复杂化我们的理论。我们知道，质子和电子在很大程度上是宇称守恒的，所以我们现在尝试建立一个宇称守恒的理论。这个理论中我们同时需要u_+和u_-，因为宇称变换把u_+变成u_-。让我们列下有质量粒子所需要满足的规则：

Criteria for a Weyl Lagrangian

1. $\mathscr{L}$ must be a Lorentz scalar, to guarantee Lorentz invariance.
2. $\mathscr{L}$ must have an internal symmetry, to give a conserved charge.
3. $\mathscr{L}$ must be bilinear in the fields, to give linear equations of motion.
4. $\mathscr{L}$ should have no more than two derivatives, for simplicity.
5. The action $\mathcal{S} = \int d^4x \, \mathscr{L}$ should be real; $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$.

再一次我想要拉格朗日密度是场的双线性项从而得到一个线性的运动方程。我仍然想要保持荷守恒:

$$u_\pm \to e^{i\alpha} u_\pm \quad u_\pm^\dagger \to e^{-i\alpha} u_\pm^\dagger$$

但是我不需要两个守恒荷，所以我不会去说我们对u_+和u_-有独立的相变换。然后，我想要拉格朗日密度在宇称变换下保持不变:

$$u_+(\mathbf{x}, t) \to e^{i\phi_1} u_-(-\mathbf{x}, t), \quad u_-(\mathbf{x}, t) \to e^{i\phi_2} u_+(-\mathbf{x}, t) \quad \text{for some } \phi_1 \text{ and } \phi_2$$

其中相位的存在的现在继续考虑所有可能的双线性形式，我们有:

$$u_+^\dagger u_+, \quad u_+^\dagger \partial_\mu u_+, \quad u_-^\dagger u_- \quad u_-^\dagger \partial_\mu u_-$$

我们也会有像下面的项:

$$u_+^\dagger u_-, \quad u_+^\dagger \partial_\mu u_-, \quad u_-^\dagger u_+, \quad u_-^\dagger \partial_\mu u_+$$

而这些项中，洛伦兹不变的项都包含导数，它们在宇称变换下有以下行为:

$$P: \begin{cases} u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+ \to u_-^\dagger \partial_0 u_- - u_-^\dagger \sigma \cdot \nabla u_- \\ u_-^\dagger \partial_0 u_- - u_-^\dagger \sigma \cdot \nabla u_- \to u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma \cdot \nabla u_+ \end{cases}$$

注意到$u_\pm$变换的相位是无关紧要的，因为它们相消了，在宇称变换下它们变成了彼此，所以它们的和在宇称变换下是不变的，我们可以在此基础上建立一个宇称守恒理论。

那么$u_+^\dagger u_-$呢? u_+和u_-中有一个像$D^{\frac{1}{2},0}(\Lambda)$一样变换，另一个则以相反的方式变换。而将它们组合在一起我们会得到:

$$D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda) \otimes D^{(\frac{1}{2},0)}(\Lambda) \sim D^{(0,0)}(\Lambda) \oplus D^{(1,0)}(\Lambda)$$

我们从中得到一个标量，对应$D^{(0,0)}$。而第二个部分是一个反对称张量的一半，对应$D^{(1,0)}$。这意味着我们可以构造任意的标量，而不能构造一个含有导数的项。但是没关系，我们还是可以写出:

$$-mu_+^\dagger u_-$$

对其取共轭，就变成：

$$-m^* u_-^\dagger u_+$$

其中m是任意复数，考虑到厄米性，我们可以写下满足这5个条件的最一般的拉格朗日量：

$$\mathscr{L} = \pm\left[i\left(u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_+^\dagger \sigma\cdot\nabla u_+ + u_-^\dagger \partial_0 u_- - u_-^\dagger \sigma\cdot\nabla u_-\right) - m u_+^\dagger u_- - m^* u_-^\dagger u_+\right]$$

其中m是一个复数，不过我们很容易将其变成一个实数，只需要重新定义：

$$u_+ = u_+' e^{i\varphi}$$

也就是说，我可以把m的相位吸收进我们新的定义中。同样，这改变了宇称的定义，我们有：

$$u_\pm(\mathbf{x},t) \to u_\mp(-\mathbf{x},t)e^{i\phi_1}$$

一旦我们使m为实数，就不再能使ϕ_1和ϕ_2独立了，但我们还是有自由定义相ϕ_1，不妨定义一个标准宇称：

$$P : u_\pm(\mathbf{x},t) \to u_\mp(-\mathbf{x},t)$$

现在我们得到了m为实数的新拉格朗日密度：

$$\mathscr{L} = \pm\left[i\left(u_+^\dagger \partial_0 u_+ + u_-^\dagger \partial_0 u_- + u_+^\dagger \sigma\cdot\nabla u_+ - u_-^\dagger \sigma\cdot\nabla u_-\right) - m(u_+^\dagger u_- + u_-^\dagger u_+)\right]$$

这个拉格朗日密度对应的运动方程要更复杂：

$$i(\partial_0 + \sigma\cdot\nabla)u_+ = \mu_-$$
$$i(\partial_0 - \sigma\cdot\nabla)u_- = \mu_+$$

把上式中第一个等式左乘$i(\partial_0 - \sigma\cdot\nabla)$我们得到：

$$-(\partial_0^2 - \nabla^2)u_+ = m^2 u_+$$

类似地我们有：

$$-(\partial_0^2 - \nabla^2)u_- = m^2 u_-$$

所以我们看到，m实际上就是自由场的量子的质量。

但是我们的拉格朗日量看上去还是很丑，不妨简化我们的符号，设：

$$\psi = \begin{pmatrix} u_+ \\ u_- \end{pmatrix}$$

然后定义4×4矩阵α：

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma \end{pmatrix}$$

和4×4矩阵β：

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

于是这样我们就可以把拉格朗日量写成：

$$\mathscr{L} = \pm \left[i\psi^\dagger(\partial_0 + \alpha \cdot \nabla)\psi - m\psi^\dagger \beta \psi \right]$$

而从中我们可以得到运动方程如下：

$$i\partial_0 \psi + i\alpha \cdot \nabla \psi = m\beta\psi$$

这个方程就是狄拉克方程，而ψ、α和β的形式称为Weyl基，其中的两个矩阵称为狄拉克矩阵。