



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

3.6 Horizons

报告人：谭子立 邱林蔚



视界距离

视界距离的定义由2.2给出：

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')}$$

- 若 $R(t) \propto t^n \Rightarrow d_H(t) = \frac{t}{1-n}$, 其中 $n < 1$ 。
- $d_H(t)$ 是有穷的说明宇宙的膨胀使得宇宙的各个部分失去了因果联系（离开了光锥？）。

对于一个不考虑曲率（ $\Omega_0 = 1$ ）的宇宙（作为对早期宇宙的一种近似），根据弗里德曼方程的推论，考虑

$z + 1 = \frac{R_0}{R(t)}$, 立得：

- 辐射： $t \simeq \frac{1}{2}(1+z)^{-2}H_0^{-1}\Omega_0^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow R \propto t^{\frac{1}{2}}, d_H(t) = 2t$
- 物质： $t = \left(\frac{2}{3}\right)H_0^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow R \propto t^{\frac{2}{3}}, d_H(t) = 3t$

考虑曲率，重写 $d_H(t)$ 表达式如下：

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = R(t) \int_0^{R(t)} \frac{dR(t')}{\dot{R}(t')R(t')}$$

同时用更一般形式写出弗里德曼方程：

$$\dot{R}^2 = R_0^2 H_0^2 \left[1 - \Omega_0 + \Omega_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{1+3w} \right]$$

代入前式得到：

$$d_H(t) = \frac{1}{H_0(1+z)} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{[x^2(1-\Omega_0) + \Omega_0 x^{1-3w}]^{\frac{1}{2}}}$$

从 $d_H(t)$ 的表达式中可以看出，如果 $w < -\frac{1}{3}$ ，积分发散，视界不存在。

推论

由先前公式计算得到，对于一个物质主导宇宙 ($w = 0$) :

定义视界距离与三维球(3-sphere)在 t 时周长 $2\pi R(t)$ 之比:

$$d_H(t) = \begin{cases} \frac{1}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_0-1}} \cos^{-1} \left[1 - \frac{2(\Omega_0-1)}{\Omega_0(1+z)} \right], & \text{for } \Omega_0 > 1 \\ 2H_0^{-1}(1+z)^{-\frac{3}{2}}, & \text{for } \Omega_0 = 1 \\ \frac{1}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_0-1}} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{2(1-\Omega_0)}{\Omega_0(1+z)} \right], & \text{for } \Omega_0 < 1 \end{cases}$$

$$\frac{d_H(t)}{2\pi R(t)} = \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left[1 - \frac{2(\Omega_0-1)}{\Omega_0(1+z)} \right]$$

- 考虑 $(1+z) \rightarrow \infty$, $\frac{d_H(t)}{2\pi R(t)} \rightarrow \sqrt{\frac{\Omega_0-1}{\pi^2 \Omega_0(1+z)}} \rightarrow 0$

- 考虑宇宙膨胀到极点时, 即 $\frac{R_{max}}{R_0} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0-1}$, 那么此时

$$z_{min} = -\Omega_0^{-1}, \quad \frac{d_H(t)}{2\pi R(t)} = \frac{1}{2}, \quad \text{也就是说此时可观测宇宙占整体宇宙的一半。}$$

- 随着宇宙开始收缩, 可以推断当 $\frac{d_H(t)}{2\pi R(t)} = 1$ 时, 整个宇宙将是可见的。

- 对于早期宇宙 $1+z \gg \Omega_0^{-1}$, $d_H(t) \rightarrow \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_0}(1+z)^{\frac{3}{2}}} = 3t$, 与先前结论相符。

- 对于 $k = 0$ or $k = -1$, 空间无限大, 故只有 $k = \pm 1$ 是有意义的。



推论

回到 d_H 表达式:

$$d_H(t) = R(t) \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = R(t) \int_0^{R(t)} \frac{dR(t')}{\dot{R}(t')R(t')}$$

通过改变积分的限度, 我们可以得到一个传播到我们时遭受红移 z 的辐射和其源的坐标 r 之间的关系:

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \int_{R_1}^{R_0} \frac{dR(t')}{\dot{R}(t')R(t')}$$

考虑 $w = 0$, $k = -1, 0, \text{ or } +1$, 解得:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2\Omega_0 z + (2\Omega_0 - 4)(\sqrt{\Omega_0 z + 1} - 1)}{H_0 R_0 \Omega_0^2 (1 + z)} \\ \frac{dr_1}{(1 - kr_1^2)^{1/2}} = \frac{dz}{R_0 H_0 (1 + z) [1 - \Omega_0 + \Omega_0 (1 + z)]^{1/2}} \end{cases}$$

对于辐射主导宇宙: $d_H(t) = 2t, s = 2\pi^2 g_* T^3 / 45$, 有

$$\begin{cases} S_{HOR} = \frac{4\pi}{3} t^3 s = 0.050 g_*^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{Pl}}{T} \right)^3 \\ (N_B)_{HOR} = B S_{HOR} = 1.9 \times 10^{-10} (\Omega_B h^2) g_*^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{m_{Pl}}{T} \right)^3 \\ (M_B)_{HOR} = 0.29 M_\odot (\Omega_B h^2) g_*^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{MeV}{T} \right)^3 \end{cases}$$

对于物质主导宇宙: $d_H(t) \simeq 3t, s = s_0 (1 + z)^3 = 2970 (1 + z)^3 \text{ cm}^{-3}$, 有:

$$\begin{cases} S_{HOR} \simeq \frac{4\pi}{3} t^3 s = 2.9 \times 10^{87} (\Omega_0 h^2) g_*^{-\frac{3}{2}} (1 + z)^{-\frac{3}{2}} \\ (N_B)_{HOR} = B S_{HOR} \simeq 1.1 \times 10^{79} \left(\Omega_B / \Omega_0^{\frac{3}{2}} h \right) (1 + z)^{-\frac{3}{2}} \\ (M_B)_{HOR} \simeq 9.4 \times 10^{21} M_\odot \left(\Omega_B / \Omega_0^{\frac{3}{2}} h \right) (1 + z)^{-\frac{3}{2}} \end{cases}$$

现在视界内熵在 10^{88} 数量级, 重子数在 10^{79} 数量级。早期宇宙到现在经历了若干个过程。标准模型中粒子视界的影响是显著的。



我们的宇宙有多大

我们的宇宙有多大？

- 对于一个闭($k = +1$)的宇宙，我们有：

$$2\pi R_{\text{curv}} = \frac{2\pi H^{-1}}{|\Omega - 1|^{1/2}}$$

- 对于 $k = 0$ or -1 ，宇宙在空间上是无穷的。

更明智的问法是：可观测宇宙现在有多大？过去有多大？

让我们考虑平坦宇宙的情况：

现在的视界距离 $d_H = 3t_0 = 2H_0^{-1} \Rightarrow D_0(t_0) = 4H_0^{-1}$ 。

有： $D_0(t) = \frac{R(t)}{R_0} D_0(t_0) = \frac{R(t)}{R_0} 4H_0^{-1}$ 。

而考虑在时间 t 以后没有显著熵增， $R(t)$ 和 R_0 的关系可通过等熵关系得到： $g_{*S}(t_0)R_0^3T_0^3 = g_{*S}(t)R_0^3(t)T^3(t)$ 。

考虑到 $g_{*S}(t_0) = 3.91$ ，我们有：

$$D_0(t) = 4 \left[\frac{3.91}{g_{*S}(t)} \right]^{\frac{1}{3}} \frac{T_0}{T(t)} H_0^{-1}$$

当可观测宇宙处于普朗克时间时，温度为 T_{Pl} ，普朗克时间 $t_{Pl} = m_{Pl}^{-1}$ ，有如下关系：

$$t_{Pl} = 0.301 g_*^{-\frac{1}{2}} m_{Pl} / T_{Pl}^2$$

$$T_{Pl} = 0.55 g_*^{-\frac{1}{4}} m_{Pl}$$

回代得到：

$$D_0(t_{Pl}) = \frac{11.5}{g_{*S}^{\frac{1}{12}}(t_{Pl})} \frac{T_0}{m_{Pl}} H_0^{-1} = 1.4 h^{-1} \times 10^{-3} \text{cm}$$

其中 g_{*S} 取106.75，只考虑了 $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ 模型的自由度。



视界疑难 (均匀性疑难)

从这一页开始用
 $a(t)$ 指代 $R(t)$

通过对CMBR的分析，我们有能量密度随波长变化满足

普朗克公式：

$$du = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1 \right)^{-1} d\lambda$$

考虑退耦后 a 增大一个因子 α 使得 $a' = \alpha a$ ，则单位体积

光子数降为 α^{-3} ，每一光子能量由因为红移减为 α^{-1} 。

故单位体积中能量降为 $du' = \alpha^{-4} du$ 。

为了使不同 $a(t)$ 下背景辐射都可以用普朗克公式描述，

可以设 $\lambda' \equiv \alpha \lambda$ ，这样我们有：

$$du' = \frac{8\pi hc}{\lambda'^5} \left(e^{\frac{hc}{kT'\lambda'}} - 1 \right)^{-1} d\lambda'$$

其中 $T' \equiv \alpha^{-1} T \Rightarrow T_\gamma \propto \frac{1}{a}$

接下来介绍视界疑难问题：

首先需要明确当今可观测宇宙与视界距离的概念。

其中前者特指的是我们当今能观测到的那个宇宙，后者

则是处于我们视界内的宇宙。两者只在当今有：

$$D_{\text{今可观}}(t_0) = D_H(t_0)$$

易知 $D_{\text{今可观}}(t) \propto a(t)$

而由先前推导，有：

$$\begin{cases} D_H(t) = 2(c)t, & \text{(RD)} \\ D_H(t) = 3(c)t, & \text{(MD)} \end{cases}$$

那么当光子退耦 $t = t_{\gamma d} \cong 10^{13} s$ 时，有：

$$D_{\text{今可观}}(t_{\gamma d}) \cong 2 \times 10^{23} m, \quad D_H(t_{\gamma d}) \cong 6 \times 10^{21} m$$



视界疑难 (续)

而若 $t = 10^{-43}s$, 我们有:

$$D_{\text{今可观}}(10^{-43}s) \cong 3 \times 10^{-5}m,$$

$$D_H(10^{-43}s) \cong 6 \times 10^{-35}m$$

可以看出, 两者差了几十个数量级。

根据视界距离的定义, 视界内的粒子与视界外的粒子不会有相互作用, 也就是说, 当今可观测宇宙在早期根本不可能充分自我搅拌。

而我们却观测到CMBR的各向同性, 也就是说我们只能规定宇宙的初态是各向同且均匀的。

接下来介绍平直性疑难问题:

根据标准模型, Ω 与1的偏离会随时间被严重放大。我们可以定义 $\epsilon(t)$ 为:

平直性疑难

$$\epsilon(t) = |\Omega - 1| = \left| \frac{\rho - \rho_c}{\rho} \right| = \frac{3|k|}{8\pi\rho(t)a^2(t)}$$

若 $k \neq 0$, 进一步有:

$$\epsilon(t) \propto (\rho a^2)^{-1} = \begin{cases} (\rho a^{-4})^{-1} a^2 \propto a^2, & (RD) \\ (\rho a^{-3})^{-1} a \propto a, & (MD) \end{cases}$$

根据先前结论 $T_\gamma \propto \frac{1}{a}$, 已知 $T(10^{-43}s) \cong 3 \times 10^{31}K$, 有:

$a(t_0) \cong 10^{31}a(10^{-43}s) \Rightarrow \epsilon(t_0)$ 是 $\epsilon(10^{-43}s)$ 的 $10^{31} \sim 10^{62}$ 倍
进一步估算显示: $\epsilon(t_0) = 10^{60}\epsilon(10^{-43}s)$

即使设 $\epsilon(t) < 10 \Rightarrow \epsilon(10^{-43}s) \cong 10^{-59}$

那么 $\Omega(10^{-43}s) \cong (1 \mp 10^{-59})^{-1} \cong 1 \pm 10^{-59}$,

如果那时 Ω 稍大一点, 宇宙还未演化就将收缩为奇点, 这说明极早期宇宙被“不可思议地”微调至1。

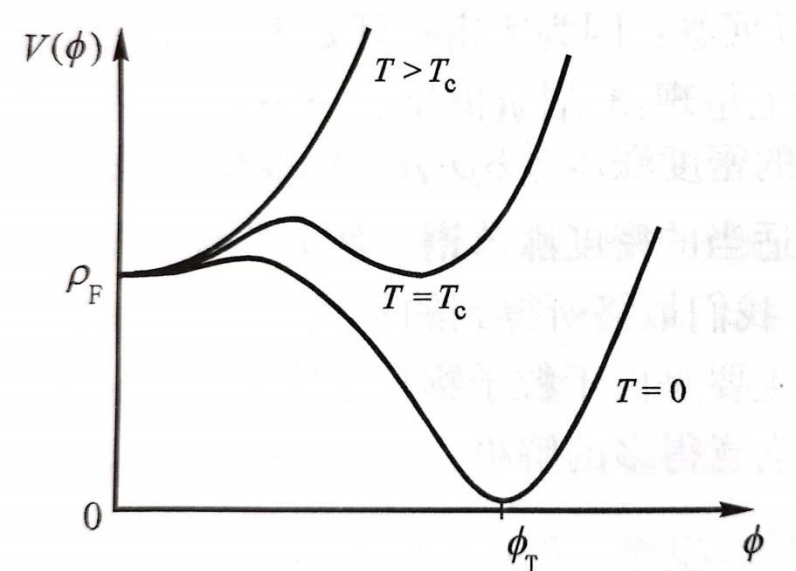
暴涨模型

我们主要介绍Guth的暴涨理论：

根据大统一理论（SU(5)理论），随着温度升高，有：

温度	现象
$T > T_C$	电、弱、强相互作用统一
$T < T_C$	内部对称性自发破缺，强分离，电弱统一
$T \approx 10^2 GeV$	电弱统一内部对称性也破缺

其中 $T_C \cong 10^4 GeV$ 。引入Higgs场 ϕ ，其有效势 $V(\phi)$ 可解释能量密度，适当选取模型中自由参数，有：



其中 ρ_F
 $\sim (10^{14} GeV)^4 \hbar^{-3} c^{-5}$
 $\cong 10^{76} kg \cdot m^{-3}$,
 $\phi = 0$ 和 $\phi = \phi_T$ 分别
 被称为假真空态和
 真真空态。

当今宇宙的 ϕ 场在 $T \cong 0$ 曲线的真真空态 $\phi = \phi_T$ 附近作微小涨落，其真空能量密度相应于一个宇宙常数 Λ 。

暴涨模型的优点是其对初始条件的要求很低，主要要求是甚早期宇宙中含有某些温度高于 T_C 的小区域，并且正在膨胀。

随着 T 随着膨胀逐渐小于 T_C ， $V(\phi)$ 出现两个极小值， ϕ 场可以通过量子隧道效应穿越势垒从假真空态变为真真空态，对应一阶相变。

而考虑到大统一理论的某些未知参数值，相变过程发生要比冷却过程缓慢得多，也就是 ϕ 场在 $T < T_C$ 时仍要在假真空态滞留一段时间才相变进入真真空态。

我们可以选择适当的参数使得区域过冷到接近 $T = 0$ 时而仍处于假真空态，在这段时间内，由于 $\rho_F \gg \rho_R$ ，故可认为总密度 $\rho \cong \rho_F$ 。

暴涨下尺度因子演化

根据弗里德曼方程，代入恒定能量密度 $\rho = \rho_F$ ，考虑到假真空对应压强为负的理想流体，有 $p = -\rho$ ，令：

$$\chi \equiv \left(\frac{8\pi G \rho_F}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \cong 10^{34} \text{s}^{-1}$$

由于 a 很小时 k 可忽略，方程简化为：

$$\frac{\dot{a}}{a} = \chi = \text{const}$$

解得：

$$a(t) \propto e^{\chi t}$$

在这段时间中，由于 a 在很小时间内急剧增长，远大于标准模型中 a 的增长速率，故称暴涨。

暴涨持续了约 10^{-32}s 或更长，起于

$t_C \cong 10^{-34} \text{s}$ ，终于

$t_F \cong 10^{-32} \text{s}$ ，此时发

生了对称性破缺引起的

相变， ϕ 场由假真空态

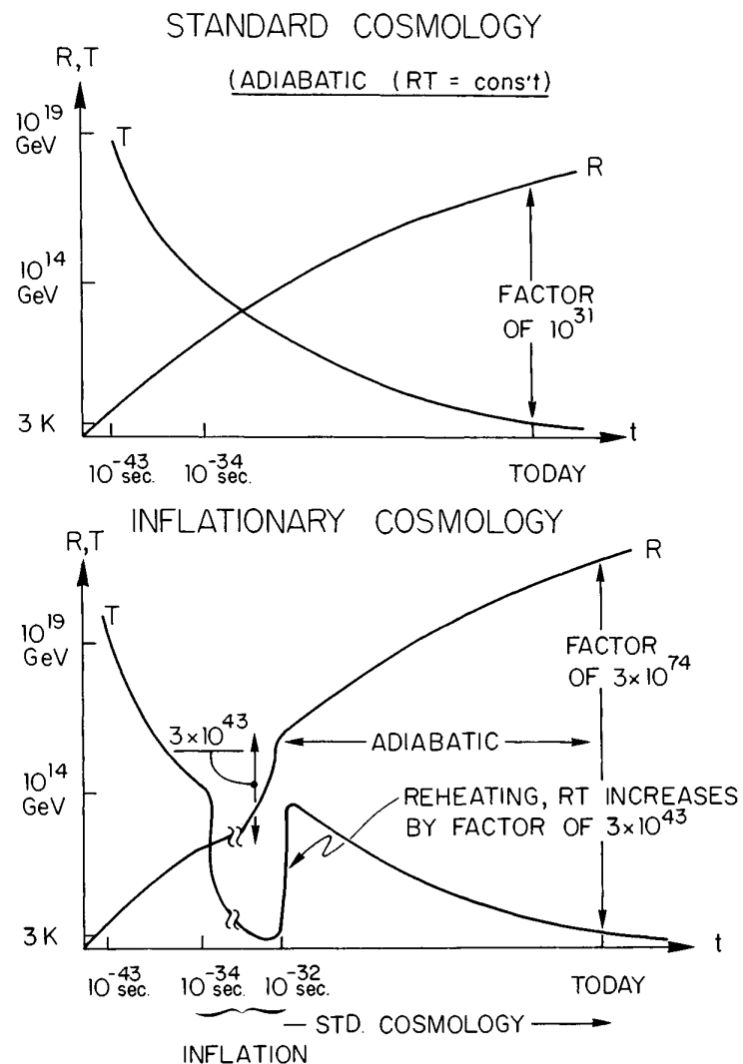
相变为真真空态(泡)，

潜热释放，区域重新被

加热到接近 T_C 的温度，

然后按照标准模型进行

演化。



暴涨对疑难的解释

对平直性疑难的解释：

在标准模型中 ρa^3 或 ρa^4 是常数，故 $\epsilon(t)$ 以 a 或 a^2 的方式被放大。

而在暴涨过程中 $\rho = \rho_F$ 是常数，故 $\epsilon(t)$ 以 a^{-2} 方式被缩小， a 的暴涨导致的 ϵ 缩小的量级很可能比正常膨胀导致的 ϵ 的增大的量级还大得多。导致 Ω 非常接近1。

对视界疑难的解释：

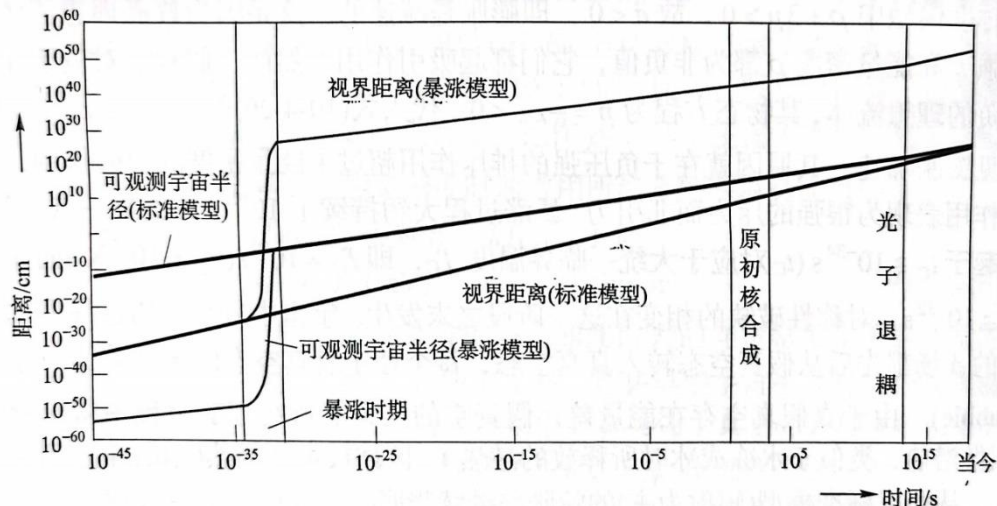
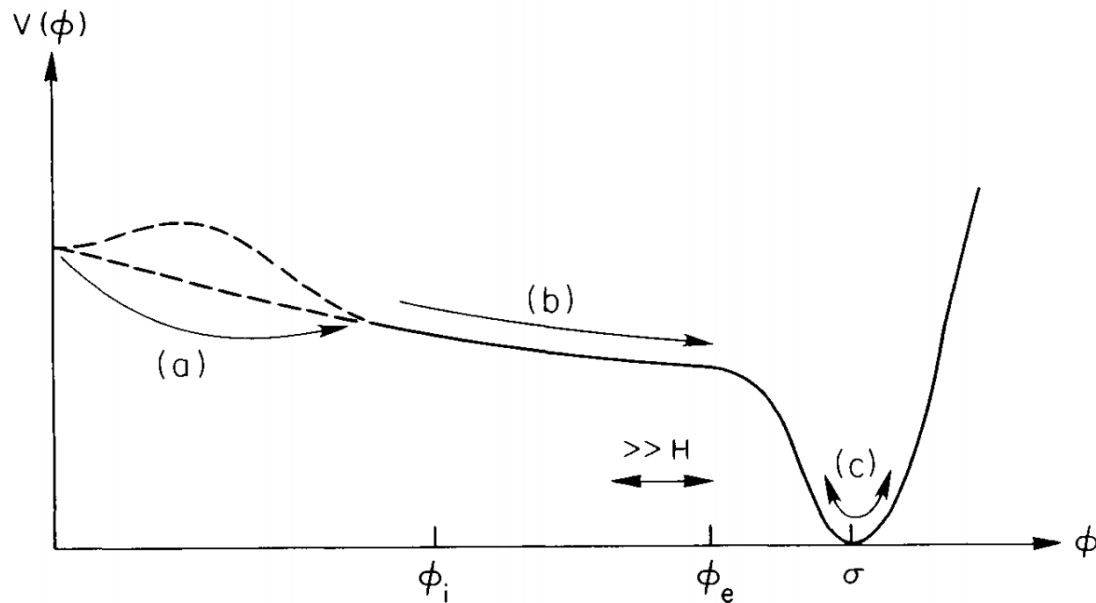


图 10-20 视界距离和可观测宇宙大小在两种模型中的演化曲线[参见 Guth and Steinhardt (1984)]
[图中“可观测宇宙(暴涨模型)”中的可观测宇宙仍指标准模型的当今可观测宇宙]

暴涨理论后续

- Guth的暴涨模型由其自身的弱点“体面退出问题”而被淘汰，但其暴涨的思想则被继承。
- 混沌暴涨模型



此为Linde、Albrecht和Steinhardt于1982年提出的势垒，包含慢滚过程，有别于Guth的“旧暴涨(old inflation)”



谢谢大家



附录



附录