中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Cosmic No-Hair Theorems

谭子立 邱林蔚

Bianchi模型

先前的暴涨模型解决了经典宇宙学依赖宇宙初始条件的问题。但是，矛盾的是，暴涨宇宙学却是基于FRW度规，而后者规定时空必然是各向同性的和均匀的。

所以，关键在于，我们需要寻找一个对于一般初始条件也成立的暴涨模型，也就是说，在这里是否存在一个无毛定理。

Bianchi模型就是这样一个模型，它假定宇宙是均匀但各向异性的。在此情况下，扩张速率有定义：

$$H^2 \equiv \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{V}}{V}\right)^2 = \left(\frac{\dot{\bar{R}}}{\bar{R}}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} + F(x_1, x_2, x_3)$$

其中x_i为三个方向的规模变量(scale factor)，定义$V = x_1x_2x_3$为体积规模变量，$\bar{R} \propto V^{\frac{1}{3}}$为平均规模变量。

ρ是能量密度，分为真空能量密度ρ_ϕ和普通能量密度

F是一个衡量各向异性膨胀影响的参数，定义为：

$$F \equiv \frac{8\pi G_{\rho_{AN}}}{3} \propto \bar{R}^{-6}$$

其中ρ_{AN}为各向异性能量密度。

需要注意的是，FRW模型是Bianchi模型的一种特殊情况：

- $k > 0$ →IX model
- $k = 0$ →I & VII(0) model
- $k < 0$ →V & VII(n) model

各向异性动力学

Bianchi模型的ϕ的动力学和FRW是一致的:

$$\ddot{\phi}+3H\dot{\phi}+V'(\phi)=0$$

同样地，我们要求$\phi=\mathrm{const}$，并且初值$\phi=\phi_i\neq\sigma$。并且在$\phi\simeq\phi_i$时，要求$V(\phi_i)\equiv V_0$，也就是非零常真空能量。

由于缺乏具体物理模型表述暴涨，我们先前假设ϕ会“慢滚”向最低势能，同时，$a(t)$会以指数级(N_{TOT})增长。同时我们推出慢滚时，必须满足:

$$|V''(\phi_i)|\leq 9H_V^2$$

$$\frac{|V'(\phi_i)|}{m_{PL}}\leq\left(\frac{27}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}H_V^2$$

其中$H_V^2=\frac{8\pi V_0}{3m_{PL}^2}$。

要证明无毛定理需要三个条件：：

（1）一个具有非零真空能的宇宙会最终演化成de-Sitter宇宙；

（2）在其演化成de-Sitter宇宙前，ϕ的势不会降到真真空，否则reheating就不会发生；

（3）确保暴涨前的各向异性不会保存到暴涨后，否则将与CMBR的观测相违背；

对于条件（1），Wald已经证明，对于Bianchi IX模型，宇宙膨胀会导致F下降，这样ρ_{AN}就会下降，但ρ_ϕ不会改变。于是宇宙迅速演化到由真空能主导:

$$H^2=\frac{8\pi G\rho_\phi}{3}$$

无毛定理证明（2）

但是，Wald的理论不能直接适用于暴涨，因为在一个暴涨宇宙中，只有当$\phi \neq \sigma$时，$V(\phi_i) \equiv V_0$。这就是为什么我们需要条件（2），只要慢滚够慢，那么$\ddot{\phi}$便可忽略，ϕ的动力学方程变为：

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{V'(\phi)}{3H}$$

这些同样需要满足先前的条件。由于在de-Sitter空间，普通能量密度、各向异性、曲率，都只会导致使膨胀加速。而在物理上，越快的膨胀速度会导致越小的$\dot{\phi}$,故滚动也越慢。通过对上式积分，我们可以得到：

$$\int_{\phi_i}^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{-V'(\phi)} = \int_0^{t_V} \frac{\mathrm{d}t}{3H}$$

其中t_V是宇宙变为真空能主导的时刻。

为了能够推算宇宙具体花了多少时间来变成真空能主导，我们假设：

① $\bar{R} \propto t^n$，于是$3H = 3nt^{-1.38}$

②$\frac{\Delta\phi}{\phi_i}$足够小，使得积分式中分母的$V'(\phi) \simeq V'(\phi_i)$

那我们将上两个假设代入，可以得到：

$$\frac{\Delta\phi}{-V'(\phi_i)} \simeq \frac{1}{6n} t_V^2$$

根据假设①的幂律关系，我们可以直接推得$t = nH^{-1}$，回代上式可以得到：

$$\Delta\phi \simeq \frac{n}{2} \frac{-V'(\phi_i)}{3H_V} H_V^{-1}$$

这说明ϕ的改变量十分微小，只有(n/2)乘以di-Sitter第一个哈勃时间的变化，故第二个条件也被证明了。

无毛定理证明（3）

在暴涨结束后，各向异性和曲率的减缓速率要慢于能量密度的减缓速率，故我们需要一个足够大的N_{TOT}来使宇宙足够平坦和各向同性。可以推出：

$$\frac{\rho_{AN}}{\rho_0} \leq e^{-2N_{TOT}} \left(\frac{M}{T_{RH}}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{T_{RH}}{10\mathrm{eV}}\right)^2 \left(\frac{10\mathrm{eV}}{3\mathrm{K}}\right)$$

为了确保各向异性是相对小的，我们要求$\frac{\rho_{AN}}{\rho_0} \leq 1$，于是有：

$$N_{TOT} \geq N_{min} = 53 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{M}{10^{14}\mathrm{GeV}}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{T_{RH}}{10^{10}\mathrm{GeV}}\right)$$

需要说明的是，di-Sitter空间的e-folds数不受之前的状态所影响，那么如果仅仅指定ϕ_i和$V(\phi)$的模型能够通过充分的暴涨来解决平直性疑难和各向同性疑难，那么就可以解释今日的曲率和各向异性。

当然，膨胀只是推迟了各向异性的增长，如果确实存在暴涨前的各向异性，而其衰减速度又要小于其他能量密度的衰减的话，那么在指数级的时间t_{AN}后，宇宙就可能变为各向异性/曲率主导：

$$t_{An} \geq e^{(3N_{TOT}-3N_{min})} 10^{10}\mathrm{yr}$$

通过以上步骤，可以证明无毛定理。

总地来说，除了一些高度正弯曲的Bianchi IX模型以外，其他均匀各向异性模型都会暴涨、变得各向同性，并且直到今天仍然保持各向同性。

初始条件不够均匀的情况

可以考虑一个对均匀性的小扰动，这个扰动超出视界外足够远($R\lambda \gg H_V^{-1}$)，具有波长λ，穿过视界时具有振幅ε_H。由于扰动是超视界的，其振幅不会随暴涨而变化，所以当扰动进入视界时，我们有:

$$\left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)_{HOR} = \varepsilon_H$$

此时$R\lambda \simeq H^{-1}$。

由于暴涨的存在，我们需要给波长增加一个$e^{N_{TOT}}$的系数，也就是说，暴涨没有减小不均匀性，而是推迟了扰动进入视界的时间。

当然，我们不用担心今天视界内的不均匀性，它们在暴涨发生的时候是在视界内的，其振幅由de-Sitter产生的标量场波动决定。

还有科学家在探究负曲率空间并已经取得了一定成果。

总而言之，有限的暴涨不会使宇宙永远各向同性、均匀且平坦。也不是所有初始时空都会膨胀。

然而，一大类初始时空在膨胀过程中，创造了非常大的光滑平坦的区域，这些区域很容易就能覆盖我们目前的哈勃体积。在$N_{TOT} \simeq 60$的测量值下，这还不错！(Not bad for 60 or so e-folds of work!)

虽然暴涨不能改变时空初始的各向异性和不均匀性，但它很好地推迟了它们，但只要我们的初始时空带有这种性质，那么随着时间推移最后这些性质会重新出现。

THANKS

谢谢大家

附录

附录