Lecture 3.构造标量场

3.1 确保相对论因果性

在普通的非相对论量子力学中，一个哈密顿量就代表一个可观测量。只要量可以被测量，那么我们就可以使用各种方法来测量之，只存在技术问题。具体来说，每个观测者可以观测每个观测量，包括非对易观测量。

> 假设我测得一个电子的σ_x，然后我出去了一会儿，这时Carlo Rubbia坐喷气式飞机过来，溜进房间测量了σ_y，那么当我回来再测量σ_x时，我会发现测量值发生了巨大的改变。系统不再处于σ_x的本征态，而是处于σ_y的本征态了。

但是这里存在一个问题。如果我们假设所有观测者能够测量所有观测量，考虑到相对论的因果关系，那么观测只能是局域的。

> 作为一个观测者，我的观测具有一定的空间范围（太阳系地球轨道），我的观测也只有一定的时间范围（如果戒烟的话大概75年），故而也存在一个时空范围，在其之内我所做的所有实验都是孤立的。
> 假设存在另一个局域的观察者，但他在仙女座。显然，那个观测者显然不能像Carlo Rubbia一样溜进我的实验室，但他可以留在仙女座，然后测量一个不可对易的观测量（先前说过，所有观测者能够测量所有观测量），那么我的实验结果就会改变。
> 相对论介入了，这个仙女座的观测者不可能以超光速发送信息来改变我的观测量。那么情况就很明了了，显然，我不能测量一切，他也不能测量一切，但一定有我能测量的东西，也一定有他能测量的东西，但是我能测量的东西和他能测量的东西一定是**可对易的**。否则，他就可以远在仙女座而遥控的我的观测量，这不可能。

从量子力学的角度看，就是厄米算符也是局域的，在所有厄米算符的集合中，只有一部分可以被一个局域的观测者测量。让我们更加具体一点，假设存在两个时空区域R_1和R_2并且它们在相对论上是没有因果关系的。那么对于任何一个R_1上的点x_1和R_2上的点x_2，我们有：

$$\text{Regions } R_1 \text{ and } R_2 \text{ are spacelike separated:}$$
$$x_1 \in R_1 \text{ and } x_2 \in R_2 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 < 0$$

也就是说，两时空中任意两点之间的间隔是**类空**的。设在R_1中有观测$\mathcal{O}_1$，在R_2中有观测$\mathcal{O}_2$，那么：

$$\text{If } (\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 < 0, \text{ then } [\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$$

> 这种局域化的特征，我们可以在经典电动力学中找到。麦克斯韦方程组是描述场的方程，比如定义在时空区域R_1上的电场$\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$。我们可以引入函数$f(x)$来判断x是否处于R_1区域中。电磁场是一个天生局域化的实体，我们无法在地球设计仪器测量仙女座的电场，这为我们提供了线索。

类似电磁场，我们需要一个量子场$\phi(x)$（也许是一堆量子场），算符值场(Operator values field) $\phi^a(x)$（观测就是算符，是一个时空函数）。那么我们可以自然推想，我们在区域R_1中测量的可观测值是建立于R_1的局域场的概念之上。**量子力学和相对论迫使我们引入场的概念，实际上，相对论量子力学就是量子场论。**

那么在相对论量子力学框架下实现相对论因果性的一个方法（也许不是唯一的方法）是：**构建一个量子场**。

> 量子场的概念是本课程的两个heroes之一，另一个是S矩阵。

如何将观测局域化？量子场给出了答案。一旦我们有了这个定义，那么我们将不再担心如何去局域化一个粒子。因为后者不再重要，重要的是：**如果我们知道观测在哪里，我们就不需要知道粒子在哪里。**

也就是说，只要你知道盖格计数器在哪，并且我们知道当其响起时意味着什么，那么用盖格计数器进行测量的意义就变了。**最终，我们是在描述观测，而不是粒子。** 如果两个有类空间隔的场对易，那么作为场函数的观测值对易。

当我们建立一个量子场，我们立即可以解决两个问题。**首先，我们使理论与相对论因果性相容，然后，我们使粒子在哪里的问题变得无关紧要。**

> 最后，这些场不仅和空间有关，还和时间有关，也即是说，我们的理论是建立在海森堡图景上的。

3.2 标量量子场所需要满足的条件

我们现在尝试在N个完备的粒子场$\phi^a(x)$中构建我们的观测值表达式，而量子场本身由产生湮灭算符表征。接下来给出几个条件（其中有一些是必要的，有一些只是为了简化）来给出局域化的定义。然后我们将介绍一个简单例子。最后，我们会考虑系统性地放松条件，并考虑更复杂的例子。

以下5个条件决定了场的表达式：

（1）$[\phi^a(x),\phi^b(y)]=0 \text{ if } (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2<0$，以确保类空观测量对易；

（2）$\phi^a(x)=\phi^a(x)^\dagger$，场需要是厄米的，以满足可观测量条件；

（3）$e^{-iP\cdot y}\phi^a(x)e^{iP\cdot y}=\phi^a(x-y)$，场在平移下适当变换；

（4）$U(\Lambda)^\dagger\phi^a(x)U(\Lambda)=\phi^a(\Lambda^{-1}x)$，场在洛伦兹变换下视为标量作变换；

（5）我们假设场是算符的线性组合：

$$\phi^a(x)=\int d^3\mathbf{p}[F^a_{\mathbf{p}}(x)a_{\mathbf{p}}+G^a_{\mathbf{p}}(x)a^\dagger_{\mathbf{p}}]$$

首先讨论前两个条件，我们可能会经常遇到非厄米场，其由两个厄米算符通过构成分别构成实部和虚部联系起来，那么这个场的厄米部分和反厄米部分都分别代表一个可观测量。换言之：

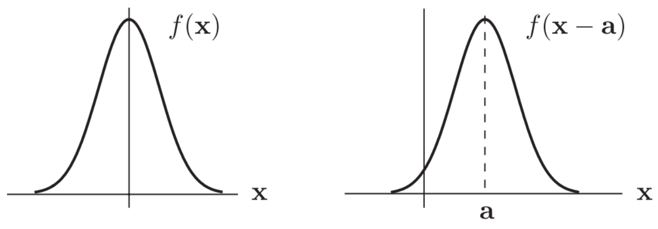
$$[\phi^a(x)^\dagger, \phi^b(y)^\dagger] = 0 \text{ if } (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 < 0$$

对于第三和第四个条件，我们先前知道在Fock空间中，时空平移和洛伦兹变换是作用在空间中的态上，我们也许能从中获得一些启发去解决场的变换的问题。

首先，讨论平移变换。 假设我们有一个电子气体或者Thomas-Fermi模型，那么其电子密度构成一个场$\rho(\mathbf{x})$。对任意态$|\psi\rangle$，我们有期望值：

$$f(\mathbf{x}) = \langle\psi|\rho(\mathbf{x})|\psi\rangle$$

那么考虑态的变换$|\psi'\rangle = e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}|\psi\rangle$，这等同于我把一箱子电子提起来往右移了一个距离$\mathbf{a}$，那么此时期望值$\langle\psi'|\rho(\mathbf{x})|\psi'\rangle$应该怎么变换？物理上来说，此时期望值应该是$f(\mathbf{x}-\mathbf{a})$



期望值的变换

由于$|\psi\rangle$可以任意选取，且算符是完全由其期望值确定，所以我们可以得到：

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}-\mathbf{a}) &= \langle\psi'|\rho(\mathbf{x})|\psi'\rangle = \langle\psi|e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}\rho(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\rho(\mathbf{x}-\mathbf{a})|\psi\rangle \\ \Leftrightarrow \rho(\mathbf{x}-\mathbf{a}) &= e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}}\rho(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}} \end{aligned}$$

如果算符和态同时平移，那么期望值不变。我们可以将其推广到四维空间，那么就有我们的第三个条件：

$$e^{-iP\cdot a}\phi(x)e^{iP\cdot a} = \phi(x-a)$$

这实际上是四个方程，前三个只是重写了先前的空间方程，而第四个，如果a只指向时间轴，那么就是海森堡运动方程的积分形式，因为$P^0 = H$。

接下来讨论空间旋转，有变换：

$$\phi^a(\mathbf{x}) \xrightarrow{R} \phi^{a\prime}(\mathbf{x}') = R^a_b\phi^b(R^{-1}\mathbf{x})$$

如果场像标量一样旋转：$R^a_b = \delta^a_b$，也就是说：

$$U(R)^\dagger\rho(\mathbf{x})U(R) = \rho(R^{-1}\mathbf{x})$$

对于矢量场，比如$\nabla\rho(\mathbf{x})$，我们会发现：

$$U(R)^\dagger\nabla\rho(\mathbf{x})U(R) = R\nabla\rho(R^{-1}\mathbf{x})$$

此外，我们还有张量场、旋量场……

现在我们讨论洛伦兹变换，总地来说，我们有:

$$\phi^a(x) \xrightarrow{\Lambda} \phi^{a\prime}(x') = S_b^a(\Lambda)\phi^b(\Lambda^{-1}x)$$

$$\phi^{a\prime}(x') = U(\Lambda)^\dagger \phi^a(x) U(\Lambda) = \phi^a(\Lambda^{-1}x)$$

同样，我们可以就此继续讨论张量场、旋量场的变换，但是，标量场是最简单的，所以在条件四中我们就假设我们的场像标量一样变换，如果标量走不通，我们再继续考虑更复杂的场。

前两个条件是广泛适用而且必要的，而条件三和四只是简化假设。我们可以设想酉算子分别作用于态上和算符上，有$|\psi\rangle \to U|\psi\rangle$，$A \to U^\dagger AU$，**但它们不会同时作用**。

条件五是一个超级简化的条件。我们有算符a和$a^\dagger$，让我们不妨假设量子场是它们的线性组合。如果这样不够，我们再考虑算子的二次和更高的幂。但我们会看到，这是没必要的。

3.3 标量量子场的显式形式

为了利用上这五个条件，我们需要回顾一下产生湮灭算符的性质:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p'}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p'})$$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p'}}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p'}}^\dagger] = 0$$

那么，在平移变换下，我们有:

$$e^{iP\cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{-iP\cdot x} = e^{ip\cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

$$e^{iP\cdot x} a_{\mathbf{p}} e^{-iP\cdot x} = e^{ip\cdot x} a_{\mathbf{p}}$$

对洛伦兹变换，我们有:

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}}^\dagger U^\dagger(\Lambda) = a_{\Lambda\mathbf{p}}^\dagger$$

$$U(\Lambda) a_{\mathbf{p}} U^\dagger(\Lambda) = a_{\Lambda\mathbf{p}}$$

> 为了构建场，我们需要依次运用五个条件，其中第一个是最难验证的。

首先条件五给出了场表达式的一个初步形式。我们尽量尝试寻找最一般的解，从$\phi(0)$开始，我们给出含有$\alpha(p)$和$\alpha^\dagger(p)$的一个洛伦兹不变的表达式为:

$$\phi(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}\left[f_p\alpha(p) + g_p\alpha^\dagger(p)\right]$$

这里f_p和g_p是p的未知函数，可以看出，满足条件五的函数有无穷多个。注意到对于条件四，有一个特殊情况:

$$U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) = \phi(0) \text{ because } \Lambda 0 = 0$$

通过对$\phi(0)$的表达式作用变换，我们有:

$$
\begin{aligned}
\phi(0) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f_p\alpha(p)+g_p\alpha^\dagger(p)\Big] \\
&= U(\Lambda)\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f_p\alpha(p)+g_p\alpha^\dagger(p)\Big]U^\dagger(\Lambda) \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f_pU(\Lambda)\alpha(p)U^\dagger(\Lambda)+g_pU(\Lambda)\alpha^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda)\Big] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f_p\alpha(\Lambda p)+g_p\alpha^\dagger(\Lambda p)\Big] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f_{\Lambda^{-1}p}\alpha(p)+g_{\Lambda^{-1}p}\alpha^\dagger(p)\Big]
\end{aligned}
$$

那么我们有：$f_p=f_{\Lambda^{-1}p}$，$g_p=g_{\Lambda^{-1}p}$。我们知道在狭义相对论动量p被限制在双曲面上，通过洛伦兹变换我可以遍历双曲面上的每一点，也就是说，这两个系数与动量无关，于是我们有：

$$
f_p=f\text{，}g_p=g
$$

所以，通过条件四和条件五我们得到了一个非常强的条件——两个常数。那么对$\phi(x)$呢？利用条件三，我们有：

$$
\phi(x)=e^{iP\cdot x}\phi(0)e^{-iP\cdot x}
$$

将平移变换作用于$\phi(0)$上并代入其表达式，我们得到：

$$
\begin{aligned}
\phi(x) &= e^{iP\cdot x}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[f\alpha(p)+g\alpha^\dagger(p)\Big]e^{iP\cdot x} \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[fe^{iP\cdot x}\alpha(p)e^{-iP\cdot x}+ge^{iP\cdot x}\alpha^\dagger(p)e^{-iP\cdot x}\Big] \\
&= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big[fe^{-ip\cdot x}\alpha(p)+ge^{ip\cdot x}\alpha^\dagger(p)\Big]
\end{aligned}
$$

我们发现，在$\phi(x)$的一般表达式中我们仍然只有两个未知常数f和g。

现在，在应用条件一和条件二之前，先总结一下情况。一个满足条件三、四、五的一般场可以写成是两个场之和，让我们称这两个场为：$\phi^{(+)}(x)$和$\phi^{(-)}(x)$，它们分别具有表达式：

$$
\begin{aligned}
\phi^{(+)}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}a_\mathbf{p}e^{-ip\cdot x} \\
\phi^{(-)}(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}a^\dagger_\mathbf{p}e^{ip\cdot x}
\end{aligned}
$$

于是我们有：

$$
\phi(x)=f\phi^{(+)}(x)+g\phi^{(-)}(x)
$$

注意到$\phi^{(+)}(x)=\phi^{(-)}(x)^\dagger$，是时候应用条件二——厄米性了。$\phi^{(+)}(x)$和$\phi^{(-)}(x)$有两个厄米的组合：

$$\begin{aligned}\phi^1(x)&=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)\\ \phi^2(x)&=i(\phi^{(+)}(x)-\phi^{(-)}(x))\end{aligned}$$

那么我们可以构建一个满足条件二的最一般形式：

$$\phi(x)=e^{i\theta}\phi^{(+)}(x)+e^{-i\theta}\phi^{(-)}(x)$$

这里θ可以是任何实数。最后我们要使场表达式满足条件一，这里有三种可能性：

（1）两个独立解$\phi^1(x)$和$\phi^2(x)$彼此对易，故它们的任何线性组合都是可观测的；

（2）只有特定组合$e^{i\theta}\phi^{(+)}(x)+e^{-i\theta}\phi^{(-)}(x)$是可观测的；

（3）条件五的假设走不通，我们需要考虑弱化条件或者考虑更复杂的形式；

所以要么我们有两个场，要么我们只有一个场但必须满足条件二的形式，实际上，如果我们定义：

$$a_{\mathbf{p}}\to e^{i\theta}a_{\mathbf{p}},\ a_{\mathbf{p}}^\dagger\to e^{-i\theta}a_{\mathbf{p}}^\dagger$$

这不会改变前面的方程，所以场可以等价为：$\phi=\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x)$。也就是说，问题变成了：要么我们有两个局域场，它们若类空则对易；要么我们有它们的和作为可观测量，而它们的差为不可观测量。

现在我们验证第一种可能，考虑：

$$\begin{aligned}[\phi^1(x),\phi^2(y)]&=i[\phi^{(+)}(x)+\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)-\phi^{(-)}(y)]\\ &=i[\phi^{(+)}(x),\phi^{(+)}(y)]-i[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]\\ &\quad+i[\phi^{(-)}(x),\phi^{(+)}(y)]-i[\phi^{(-)}(x),\phi^{(-)}(y)]\\ &=0?\end{aligned}$$

可以看出，上式第二个等号后的第一项和最后一项自然为0，现在计算：

$$\begin{aligned}[\phi^{(+)}(x),\phi^{(-)}(y)]&=\left[\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x},\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}a_{\mathbf{p}'}^\dagger e^{-ip'\cdot y}\right]\\ &=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot y}[a_{\mathbf{p}},a_{\mathbf{p}'}^\dagger]\\ &=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\int\frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}}e^{-ip\cdot x}e^{ip'\cdot y}\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\\ &=\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}e^{-ip\cdot(x-y)}\equiv\Delta_+(x-y;\mu^2)\end{aligned}$$

这是一个Neumann函数，它是时空点距离和质量的函数，也许我们可以认为这是一个洛伦兹不变量：

$$\Delta_+(x) = \Delta_+(\Lambda x)$$

事实如此，因为函数中指数是一个洛伦兹不变标量。类似我们有：

$$[\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}] = -\Delta_+(y-x)$$

那么我们实际上需要验证的是：当$x^2 < 0$，$\Delta_+(x)$是否为零？好吧，它不为0，考虑对其作时间的一阶导：

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta_+(x) = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{-ip\cdot x}$$

这个积分不为0，也就是说，对类空矢量该函数存在梯度，故显然第（1）种情况被排除了，现在我们只能考虑第（2）种情况。现在我们只有一个场，所以我们只需要检查一个对易关系，我们有：

$$\begin{aligned}
[\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^{(+)} + \phi^{(-)}, \phi^{(+)} + \phi^{(-)}] \\
&= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] + [\phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y)] \\
&= \Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x) \equiv i\Delta(x-y)
\end{aligned}$$

其中，$i\Delta(x-y)$是一个新的洛伦兹不变函数，当宗量为类空矢量，我们有$\Delta_+(x-y) = \Delta_+(y-x)$，那么我们可以立即得到：$i\Delta(x-y) = 0$

看来，我们应该采纳第（2）种情况，那么我们的单自由粒子标量量子场（质量μ）就具有如下形式：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}}\Big(a_\mathbf{p} e^{-ip\cdot x} + a_\mathbf{p}^\dagger e^{ip\cdot x}\Big)$$

当然我们也可以写成$\alpha(p)$的形式：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big(\alpha(p) e^{-ip\cdot x} + \alpha^\dagger(p) e^{ip\cdot x}\Big)$$

3.4 以自由标量场作为基本对象的讨论

先前我们引入产生湮灭算符，然后证明整个理论根据它们的性质来定义，本节我们证明整个理论可以由自由量子场的特定性质来重建。

第一个性质很容易证明：

$$\Box^2\phi(x) + \mu^2\phi(x) = 0$$

这个等式告诉我们在动量空间$p^2 = \mu^2$。这个方程有个著名的名字：Klein-Gordan方程。最早是薛定谔写下了这个方程，仅仅作为相对论的一个量子表达式。但这个方程的解有正频率和负频率，于是他说：“如果这是一个单粒子波动方程，那么我们就犯迷糊了，因为我们只想要正能量。”**我们的等式不是一个单粒子波动方程，而是一个量子场方程，其中粒子可以产生和湮灭。**

> 首先我们写出：

> $$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-\mu^2)\theta(p_0)\Big(\alpha(p)e^{-ip\cdot x} + \alpha^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\Big)$$
>
> 那么有:
>
> $$\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-\mu^2)\theta(p^0)(-p^2)\Big(\alpha(p)e^{-ip\cdot x} + \alpha^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\Big)$$
>
> 显然:
>
> $$(\Box^2+\mu^2)\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3}\delta(p^2-\mu^2)\theta(p^0)(\mu^2-p^2)\Big(\alpha(p)e^{-ip\cdot x} + \alpha^\dagger(p)e^{ip\cdot x}\Big) = 0$$

我们已经给出了第二个性质:

$$[\phi(x),\phi(y)] = i\Delta(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}\Big[e^{-ip\cdot(x-y)} - e^{ip\cdot(x-y)}\Big] = 0 \text{ if } (\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 < 0$$

这两个性质完全定义了Hilbert-Fock空间。我们将从它们出发推导出其他条件。

现在我们回到Klein-Gordon方程，其解具有如下形式:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\Big(a_{\mathbf{p}}e^{-ip\cdot x} + b_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\Big)$$

厄米性要求$b_{\mathbf{p}} = a^\dagger_{\mathbf{p}}$，那么我们就得到了先前写出的标量场的形式。现在我们就可以把这个表达式回代到对易关系中并作傅里叶变换而推出$a_{\mathbf{p}}$和$a^\dagger_{\mathbf{p}}$的对易关系。

最后，由条件三:

$$\phi(x-a) = e^{iP\cdot a}\phi(x)e^{iP\cdot a}$$

我们可以通过对上式进行简单的微分得到海森堡运动方程:

$$-\frac{\partial\phi(x-a)}{\partial a^0}\bigg|_{a=0} = \frac{\partial\phi(x)}{\partial t} = i[H,\phi(x)]$$

代入场的表达式我们得到:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\Big(a_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x} + a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\Big) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\Big(-i\omega_{\mathbf{p}}a_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x} + i\omega_{\mathbf{p}}a^\dagger_{\mathbf{p}}e^{ip\cdot x}\Big)\\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}}\Big(i[H,a_{\mathbf{p}}]e^{ip\cdot x} + i[H,a^\dagger_{\mathbf{p}}]e^{ip\cdot x}\Big)\end{aligned}$$

这样，我们又得到了哈密顿和升降算符的对易关系。当然在上面的推导中我们没有定义零点能，我们仍然定义其为零。

事情还没完。我们可以继续将性质二（也就是条件一）弱化，其可以被两个方程替代，我们称之为条件一(a)和条件一(b)。条件一(a)是等时对易关系，也就是$\phi(\mathbf{x},t)$和$\phi(\mathbf{y},t)$的对易关系；条件一(b)则是$\dot{\phi}(\mathbf{x},t)$和$\phi(\mathbf{y},t)$的对易关系。

为什么我们可以作这种替换呢？这是因为Klein-Gordon方程是一个对时间的二阶微分方程，我们可以将$\square_x^2=\partial_x^2$作用到对易子上，假设y是固定的，那么我们有：

$$(\square_x^2+\mu^2)[\phi(x),\phi(y)]=0$$

这个方程需要初值条件，也就是，条件一(a)和条件一(b)：

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] &= i\Delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
[\dot{\phi}(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] &= i\frac{\partial}{\partial x^0}\Delta(x-y)\bigg|_{x^0=y^0}
\end{aligned}$$

我们可以直接将其计算出来，那么就得到：

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big(e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big)=0 \\
[\dot{\phi}(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big(-i\omega_\mathbf{p}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-i\omega_\mathbf{p}e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big) \\
&= -i\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2)}\Big(e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big) \\
&= -i\int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}=-i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

3.5 展望

我们知道在非相对论量子力学中，有这么几个经典对易子：

$$\begin{aligned}
[q^a(t),q^b(t)] &= 0 \\
[p^a(t),q^b(t)] &= -i\delta^{ab} \\
[p^a(t),p^b(t)] &= 0
\end{aligned}$$

这前两个对易式与条件一(a)(b)具有一定程度的相似性，我们不妨验证一下第三个对易式的相似性：

$$\begin{aligned}
[\dot{\phi}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)] &= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_\mathbf{p})}\Big(-\omega_\mathbf{p}^2e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}+\omega_\mathbf{p}^2e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big) \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2)}(-\omega_\mathbf{p})\Big(e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}-e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\Big)=0
\end{aligned}$$

总结一下，我们有：

$$\begin{aligned}
[\phi(\mathbf{x},t),\phi(\mathbf{y},t)] &= [\dot{\phi}(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)]=0 \\
[\phi(\mathbf{x},t),\dot{\phi}(\mathbf{y},t)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})
\end{aligned}$$

这看上去似乎与我们的系统有模糊的联系，为了阐明这种联系，我们在下一章将以另一种独立的方法发展出我们的系统。这种方法称为规范量子化(canonical quantization)方法。而在那之前，我们会首先回顾拉格朗日和哈密顿力学。