中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

Inflation as Scalar Field Dynamics

简化

我们现在探究标量场ϕ在暴涨过程中的演化，为了使问题可解，我们有必要做出一些简化。

- 我们假设暴涨中的宇宙满足RW度规，同时由真空能贡献的能量密度要远大于其他的能量密度，于是有弗里德曼方程：

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_\phi}{3} - \frac{k}{R^2}$$

- 我们假设标量场均匀且初始值$\phi_i \neq \sigma$，后者为真真空态。假设不均匀性足够小，在标量场梯度迅速红移的情况下可以被忽略(我的理解是你把一块带有褶皱的桌布快速摊开，那么它就会变得平整)。在此情况下，只有标量场的0动量模式是重要的。
- 量子涨落可以视作对均匀场的小修正：

$$\phi(t) = \phi_{cl} + \Delta\phi_{QM}, \Delta\phi_{QM} \ll \phi_{cl}$$

现在考虑一个最小耦合的标量场ϕ，其拉格朗日密度为：

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi}{2} - V(\phi) = \frac{\dot\phi^2}{2} - V(\phi)$$

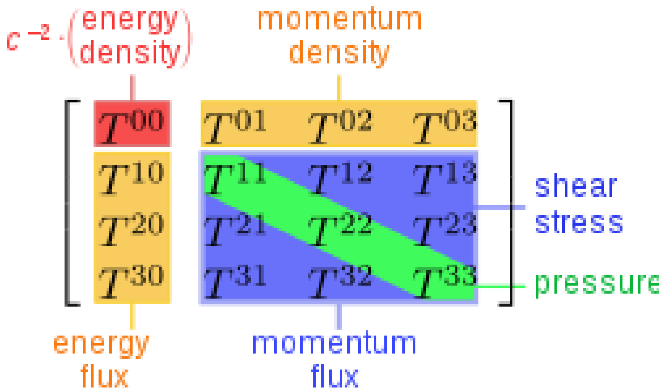
其应力张量(能动张量)分量为：

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi - \mathcal{L}g^{\mu\nu}$$

在此我们忽略ϕ与其他场的相互作用(事实证明这些作用十分微弱)。

因为ϕ是空间均匀的，故应力张量为理想流体形式，有：

$$\begin{cases}\rho_\phi = \frac{\dot\phi^2}{2} + V(\phi)[+\frac{(\nabla\phi)^2}{2R^2}] \\ p_\phi = \frac{\dot\phi^2}{2} - V(\phi)[-\frac{(\nabla\phi)^2}{6R^2}]\end{cases}$$



括号中的梯度项会指数衰减，故可以忽略。(若括号内为主导项，那么$p = -\frac{\rho}{3}$，不会发生暴涨)

ϕ的动力方程

我们可以通过改变作用量：

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}$$

或者通过能动量守恒：

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$$

推导出ϕ的动力方程如下：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

其中$3H\dot{\phi}$一项对应宇宙膨胀和宇宙膨胀导致的动量场($\dot{\phi}$)红移, $\Gamma_\phi\dot{\phi}$一项对应ϕ粒子的衰变宽度，后者在$\phi = \sigma$处振荡的阻尼对应着其衰变为更轻的粒子，释放热量。

上面的运动方程，和球从小斜坡滚入山谷的方程是一样的，在运动过程中，我们可以简单的将其分为“慢滚”和“阻尼振荡”两个时期。

慢滚时期：

在该阶段，$\ddot{\phi}$项可以忽略，ϕ粒子尚未开始衰变故$\Gamma_\phi\dot{\phi}$项亦可忽略，我们有：

$$3H\dot{\phi} = -V'(\phi)$$

在这一阶段，膨胀所导致的阻尼和势能降低相互抵消。为确保两者大致在同一量级(也就是说 $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$)我们需要：

$$\begin{cases} |V''(\phi)| \ll 9H^2 \simeq \dfrac{24\pi V(\phi)}{m_{Pl}^2} \\ \left|\dfrac{V'(\phi)m_{Pl}}{V(\phi)}\right| \ll (48\pi)^{1/2} \end{cases}$$

振荡时期：

在这个时期，ϕ随时间快速发展，坠入势阱，振荡频率$\omega^2 = V'' \gg H^2$。我们可以将方程写为：

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\dot{\phi}^2 + \Gamma_\phi\dot{\phi}^2 = 0$$

ϕ的动力方程

此时ϕ在σ附近快速振荡，我们可以把$\dot{\phi}^2$用平均值代替

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle_{cycle} = \rho_\phi$$

方程变为：

$$\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi \rho_\phi = 0$$

该方程在第五章中(5.63)以及求解，解为：

$$\rho_\phi = M^4 \left(\frac{R}{R_{osc}}\right)^{-3} e^{-\Gamma_\phi (t - t_{osc})}$$

其中osc代表振荡开始的时期，M^4代表此时标量场的真空能。

我们假设ϕ粒子的衰变产物相对其自身非常轻(相对论性)。重加热方程如下：

$$\dot{\rho}_R + 4H\rho_R = \Gamma_\phi \rho_\phi$$

$$H^2 = 8\pi G(\rho_\phi + \rho_R)/3$$

其中ρ_R是相对论性衰变产物的能量密度。

在osc时刻后的重加热时期($t = t_{osc} \simeq H^{-1} \sim m_{Pl}/M^2$直到$t \simeq \Gamma_\phi^{-1}$)，NR ϕ粒子主导了质量密度，宇宙进入物质主导时期，有$R(t) \propto t^{2/3}$。此时，宇宙过冷，$\rho_R = 0$，可以解出(5.3)：

$$\rho_R \simeq \frac{m_{Pl}^2 \Gamma_\phi}{10\pi t}[1 - \left(\frac{t}{t_{osc}}\right)^{-\frac{5}{3}}]$$

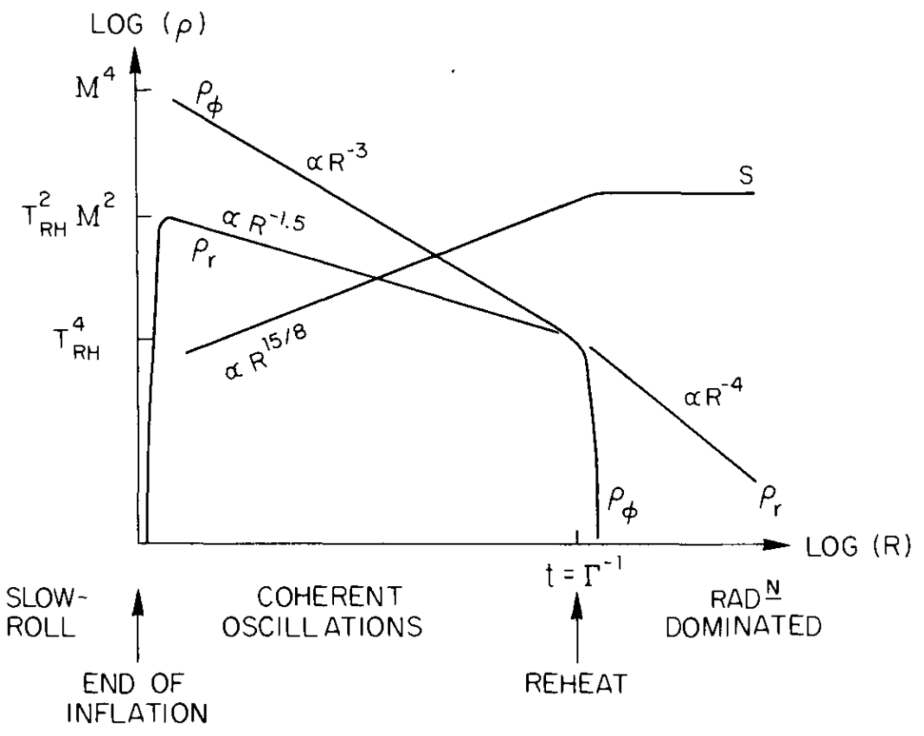


Fig. 8.3: Summary of the evolution of ρ_ϕ, ρ_R, and S during reheating.

ϕ的动力方程

当 $t \simeq \Gamma_\phi^{-1}$，$\phi$ 粒子开始迅速衰变，宇宙变为辐射主导，单位共动体积内的熵趋于平稳。接下来就是熟悉的辐射主导的绝热阶段的经典宇宙学的开始。

此时的温度：

$$T_{RH} \equiv T\left(t \simeq \Gamma_\phi^{-1}\right) \simeq 0.55 g_*^{-\frac{1}{4}} \left(m_{Pl}\Gamma_\phi\right)^{1/2}$$

首先其由Γ_ϕ决定，其次$T_{RH} \ll M$，这是由于许多初始真空能红移出去了(导致了熵增)。

在重加热时期中或者之后，存在一个关键事件：重子生成。通过两种方法：

- X-玻色子非平衡衰变(需要T_{RH}足够大)
- 由ϕ粒子直接衰变而成(在这种情况下$n_B/s \simeq eT_{RH}/m_\phi$)

最后，我们可以定量计算暴涨过程来解决视界疑难和平直性疑难。首先，我们可以得到划定的区域内最终熵：

$$S_{patch} \simeq e^{3N_{TOT}} \left(\frac{M^4}{T_{RH}^4}\right) H^{-3} T_{RH}^3 \simeq \frac{e^{3N_{TOT}} m_{Pl}^3}{M^2 T_{RH}}$$

视界疑难的熵等效表述则要求$S_{patch} > 10^{88}$，于是我们有：

$$N_{TOT} \gtrsim N_{min} = 53 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{M}{10^{14}\text{GeV}}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{T_{RH}}{10^{10}\text{GeV}}\right)$$

对于处于1GeV到10^{19}GeV之间的M和T_{RH}，计算出N_{min}位于24到68之间。同时暴涨前的曲率半径为：$(R_{curv})_i = \frac{H^{-1}}{|\Omega_i|^{\frac{1}{2}}}$

经过暴涨和重加热，可以计算出曲率半径内的熵：$S_{curv} \equiv (R_{curv})_{RH}^3 T_{RH}^3 = S_{patch}/|\Omega_i - 1|^{3/2}$

ϕ的动力方程

可以看到，通过这种方式计算的熵和原来的只相差一个因子，考虑到绝热过程中熵为常数，为解决平直性问题，我们需要修正N_{min}为：

$$N'_{min} = 53 + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{M}{10^{14}\mathrm{GeV}}\right) + \frac{1}{3}\ln\left(\frac{T_{RH}}{10^{10}\mathrm{GeV}}\right) + \frac{1}{2}\ln(|\Omega_i - 1|)$$

另外我们有：

$$\frac{R_{curv}}{H_0^{-1}} = e^{N_{TOT}-N_{min}}/|\Omega_i - 1|^{1/2}$$

可以得到：

$$|\Omega_0 - 1| = e^{2(N_{TOT}-N_{min})}/|\Omega_i - 1|$$

对于成功的暴涨模型，N_{TOT}通常远大于N_{min}，使得$S_{patch} \gg 10^{88}$并且$|\Omega_0 - 1| \ll 1$。

THANKS

谢谢大家

附录

附录