中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

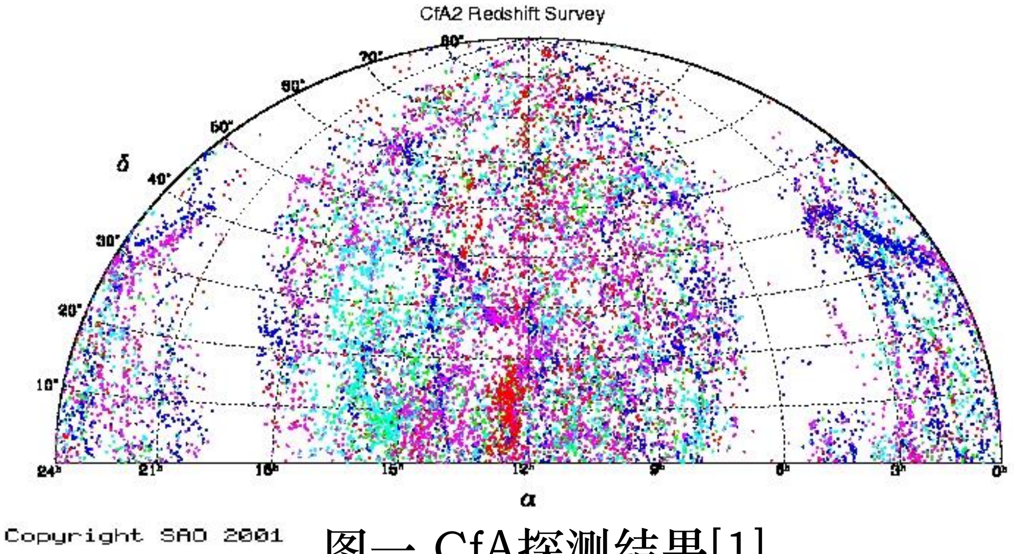
暴胀宇宙学
INFLATION

报告人：谭子立
小组成员：邱林蔚（组长），曾沛元

红移现象

1929年，哈勃发现星系远离地球的速度同它们与地球之间的距离刚好成正比，这就是所谓哈勃定律。

$$Distance = \frac{velocity}{Hubble's\ Constant} = \frac{V}{H_0}$$



图一 CfA探测结果[1]

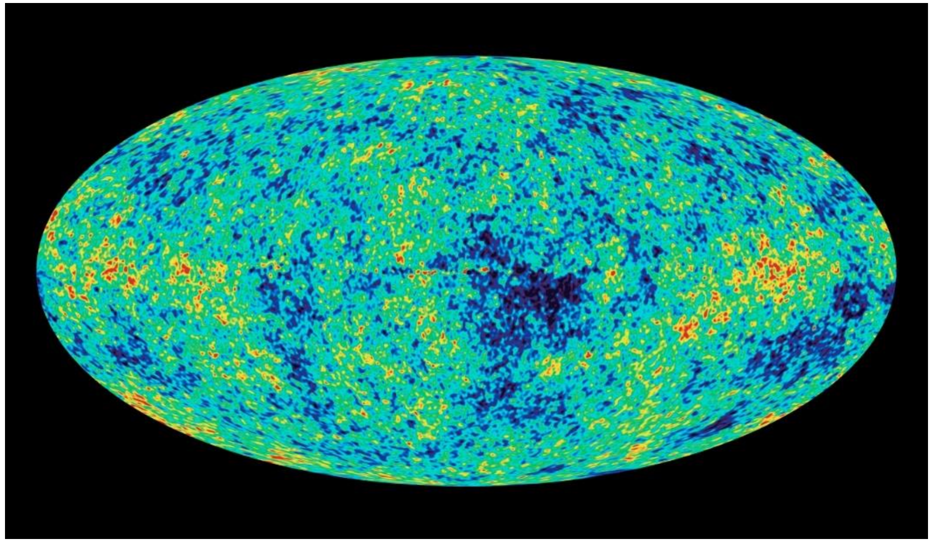
CMBR

通过与物质脱耦，辐射得以在宇宙空间中相对自由的传播，这个辐射的残迹就形成了今天的宇宙微波背景辐射。

宇宙背景辐射温度的涨落幅度

$$\frac{\Delta T}{T} \lesssim 10^{-4}$$

宇宙背景辐射温度在大尺度上是各向同性的与均匀的。



图二 宇宙微波背景辐射 [2]

标准宇宙学

FRW度规具有下列形式：

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2\right)$$

引入Einstein场方程：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R} g_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

将宇宙视作理想流体，可以得到Friedmann方程：

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

根据Friedmann方程，我们可以推算宇宙的年龄。

Friedmann方程也可以用密度参数Ω表示：

$$\frac{k}{H^2 R^2} = \Omega - 1$$

可以把宇宙演化按不同元素主导分为：

表 1: 不同宇宙演化趋势

	能量密度 ρ	宇宙尺度因子 a	哈勃常数 H
辐射主导	$\propto a^{-4}$	$\propto t^{1/2}$	$1/(2t)$
物质主导	$\propto a^{-3}$	$\propto t^{2/3}$	$2/(3t)$
宇宙学常数主导	Const	$\propto \exp(\sqrt{\Lambda/3}t)$	$\sqrt{\Lambda/3}$

视界疑难

在宇宙早期$t = 10^{-43}s$，我们有：

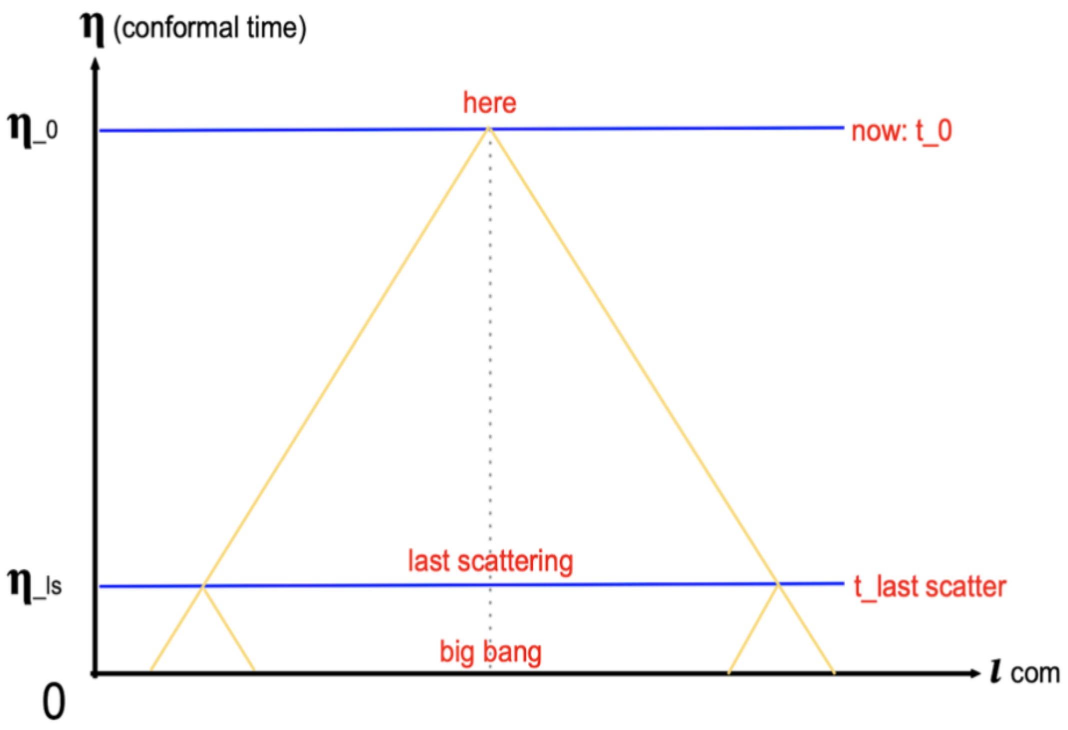
$$D_{今}(10^{-43}s) \cong 3 \times 10^{-5}m$$

$$D_H(10^{-43}s) \cong 6 \times 10^{-35}m$$

根据视界距离的定义，视界内的粒子与视界外的粒子不会有相互作用。

可见，当今宇宙的各部分在早期根本不可能充分相互作用。

而我们却观测到CMBR的各向同性，也就是说我们只能规定宇宙的初态是各向同且均匀的。



图三 视界示意图

平直性疑难

根据标准模型，Ω与1的偏离会随时间被严重放大。我们可以定义$\epsilon(t)$为：

$$\epsilon(t) = |\Omega - 1|$$

估算显示：

$$\epsilon(t_0) = 10^{60}\epsilon(10^{-43}s)$$

如果那时Ω稍大一点，宇宙还未演化就将收缩为奇点，这说明极早期宇宙的曲率被“不可思议地”微调至1。

磁单极子疑难

根据标准宇宙学模型，磁单极子在宇宙早期的高温下会大量产生并它们应该一直存在到今天，而且密度非常高，以至于成为宇宙的主要组成部分。

然而事实并非如此，现在对它们的所有寻找都以失败告终，物理学家将现在宇宙中的磁单极子密度限制在了一个非常低的范围内。

暴胀模型

暴胀被定义为宇宙加速膨胀的时期：

$$\text{Inflation} \Leftrightarrow \ddot{a} > 0$$

1. 暴胀阶段需要负压强
2. 标量场具有表现为动态宇宙学常数的特性

引入标量场ϕ，我们给出其拉式量

$$\mathcal{L} = -a^3[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + V(\phi)]$$

由Euler-Lagrange方程和Friedmann方程得到：

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)]$$

此即为暴胀的动力学方程，需要注意ϕ在空间中被设定为均匀的。

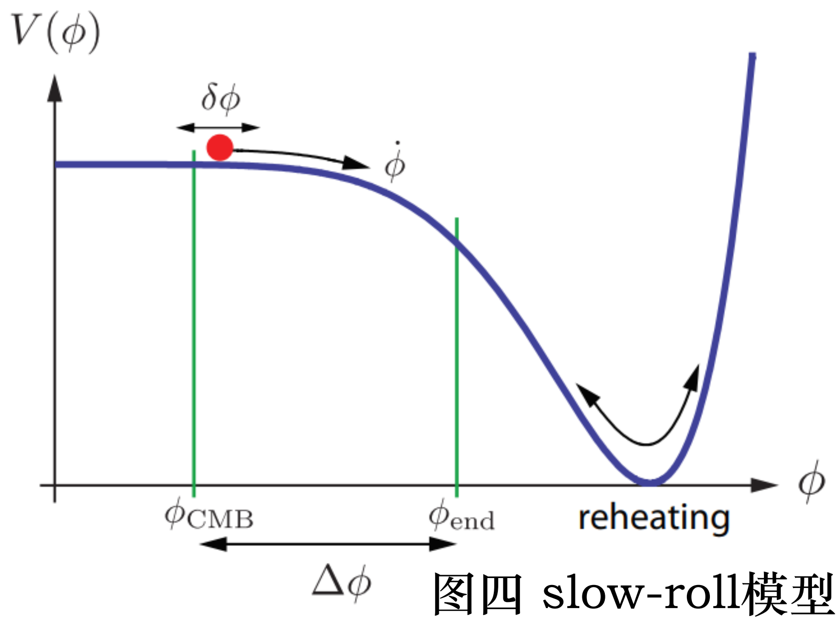
在标量场随时演化过程中，会出现一个势能平坦的过程，此时H和$\dot{\phi}$在单位哈勃时间中几乎不变：

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \qquad |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|$$

在此之上定义slow-roll参数：

$$\epsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{H}\right) = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2}M_{Pl}^2\left[\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}\right]^2, \qquad \eta = \frac{M_{Pl}^2 V''}{V}$$

在slow-roll条件下我们要求：$\epsilon \ll 1$，$\eta \ll 1$。



图四 slow-roll模型

暴胀下量子涨落

暴胀前，有着 sub-Horizon scale 的量子涨落。

暴胀过程中，共动视界快速收缩，这些扰动迅速脱离视界，变成 super-Horizon scale 并被冻结为经典的标量微扰和张量微扰。

暴胀结束后，随着视界的扩张，这些扰动重新进入视界被我们观测到，形成 CMBR。

slow-roll 条件下，傅里叶空间中微扰项场方程：

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k + \left(\frac{k}{a}\right)^2 \delta\phi_k = 0$$

对此方程量子化得到功率谱。

原初功率谱

标量扰动的功率谱：$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \left[\left(\frac{H}{\dot{\phi}_0}\right)\left(\frac{H}{2\pi}\right)\right]^2_{k=aH}$

张量扰动功率谱：$\mathcal{P}_T(k) = 2\mathcal{P}(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2_{k=aH}$

张量-标量比：$r \coloneqq \frac{\mathcal{P}_T(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)} = 16\epsilon_V$

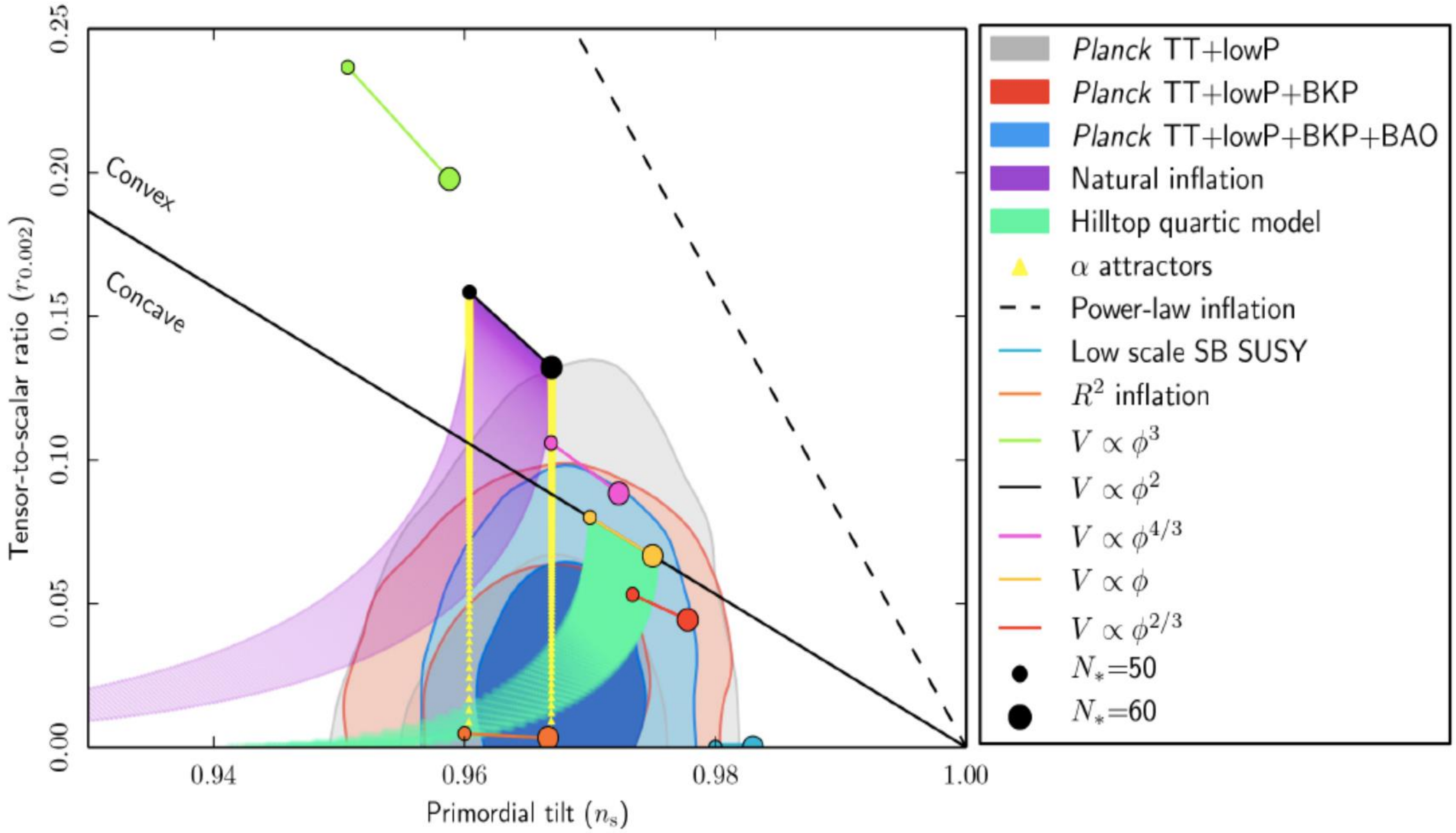
谱因子：

$$n_s(k) - 1 = \frac{d\ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\ln k} \approx -6\epsilon_V + 2\eta_V$$

$$n_t(k) = \frac{d\ln \mathcal{P}_T}{d\ln k} \approx -2\epsilon_V$$

由于 slow-roll 条件的约束，功率谱应该是标度不变的。

暴胀可能模型



图五 各种可能的暴胀模型与观测结果的相图[3]

THANKS

谢谢大家

真空能

对谐振子的分析告诉我们存在基态能量$\frac{1}{2}\hbar\omega$，我们将之称为零点能。我们设Λ为真空能量密度，那么有:

$$\Lambda \sim \frac{V\int d^3k\,|\vec{k}|}{V} \sim \int_0^{M_c} k^3 dk \sim M_c^4$$

在这里，我们定义M_c为截止质量，在自然单位制下，其具有长度的负一次方的量纲。

宇宙常数问题

将M_{pl}代入计算，可以得到:

$$\Lambda \sim 10^{112} eV^4$$

而实验的观测值是$M_c \sim 10^{-3} eV$，对应的$\Lambda \sim 10^{-12} eV^4$。

我们发现，Λ的计算值和实验值差了123个数量级。

这个问题被称为宇宙常数问题。

发展历史

- 泡利首先担心了真空能对引力的影响。
- 许多实验都证明了零点能的存在，氦在接近绝对零度下存在流动性；以及卡西米尔效应。
- 1960s，Y.B.Lel’dovich再次提出了这个问题
- 1970s，大家开始广泛意识到这个问题
- 在1990s测量到暗能量前，倾向于认为$\Lambda = 0$

几个解决问题的思路

- 自然性：有一种说法称当存在一个非常小的无量纲数ϵ，那么在$\epsilon = 0$时会出现新的对称性；
- 极红外段引力可能存在不同的性质
- 人择定理
- Λ的衰减
- 在作用量中添加不满足$\int d^4x(\ldots)$形式的项

附录

附录