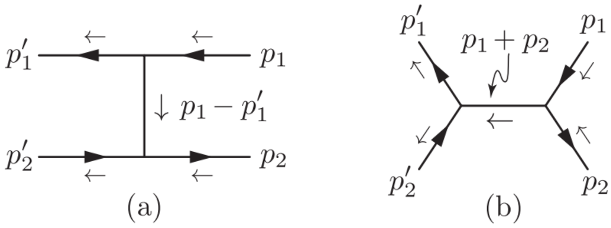
Lecture 11. 散射理论 I：Mandelstam变量，CPT和相空间

11.1 核子-反核子散射

给出：

$$2.6\ \mathrm{N}+\bar{\mathrm{N}}\rightarrow \mathrm{N}+\bar{\mathrm{N}}$$

对这个反应，我们有两个费曼图如下。



于是有不变振幅：

$$i\mathcal{A}_{fi}=(-ig)^2\left[\frac{i}{(p_1-p_1')^2-\mu^2+i\epsilon}+\frac{i}{(p_1+p_2)^2-\mu^2+i\epsilon}\right]$$

这里面的第一项和非相对论理论Born近似汤川势一样，但是第二项则不一样，分母里面是p_1+p_2，在中心系中，我们有：

$$p_1+p_2=(p_1^0+p_2^0,\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2)=(E_T,0)$$

这样，分母就是$E_T^2-\mu^2$分母为0的根位于$E_T=\pm\mu$，由于我们规定$\mu<2m$，所以不用担心分母为0的情况。但是，如果我们对其做partial-wave分析，我们会发现极点位于s-wave振幅。

那么，在非相对论微扰论中，我们有遇到类似的极点吗？是的，我们在二阶近似中遇到过，让我们写下二阶近似式：

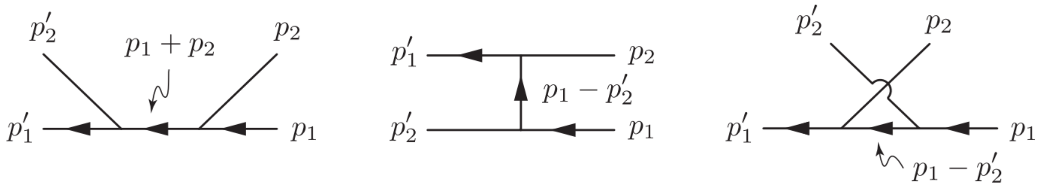
$$\mathcal{A}_{fi}\propto\langle f|V|i\rangle+\sum_n\frac{\langle f|V|n\rangle\langle n|V|i\rangle}{E_n-E_i}$$

其中E_n来自一组本征能量集合。如果在无微扰情况下存在一个孤立本征态$|n\rangle$使得本征值$E_{\mathbf{p}}=E_i=E_n$，那么我们就会得到一个极点。

11.2 核子-介子散射和介子对产生

$$2.7\ \mathrm{N}+\phi\rightarrow \mathrm{N}+\phi$$

下面是对应的费曼图。



(a) (b) (b′)

不变振幅：

$$i\mathcal{A}_{fi}=(-ig)^2\left[\frac{i}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\epsilon}+\frac{i}{(p_1-p_2')^2-m^2+i\epsilon}\right]$$

再一次，我们设：

$$\mathbf{p}_1=-\mathbf{p_2}=\mathbf{e}\mathfrak{p}\text{ where }\mathfrak{p}=|\mathbf{p}_1|=|\mathbf{p}_2|$$

那么，四动量就是：

$$\begin{aligned}p_1&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2},\mathbf{e}\mathfrak{p})\\p_2&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2},-\mathbf{e}\mathfrak{p})\\p_1'&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2},\mathbf{e}'\mathfrak{p})\\p_2'&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2},-\mathbf{e}'\mathfrak{p})\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}(p_1-p_2')^2&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2})^2-2\mathfrak{p}^2(1+\cos\theta)-m^2\\&=(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2})^2-\Delta_c^2-m^2\end{aligned}$$

这里Δ的定义和之前一样。不一样的是，这一次能量项并没有相消，所以势会更复杂一点，在核子-核子反应中，我们有：

$$\begin{aligned}(\text{exchange amplitude})\propto\frac{1}{\Delta_c^2+\mu^2}&\Rightarrow V(r)\propto\frac{e^{-\mu r}}{r}\\\Rightarrow(\text{exchange amplitude})\propto\frac{1}{\Delta_c^2+(1/R)^2}&\Rightarrow V(r)\propto\frac{e^{-r/R}}{r}\end{aligned}$$

这里，μ变成了一个范围参数，R。而在核子-介子散射中：

$$(\text{exchange amplitude})\propto\frac{1}{\Delta_c^2+m^2-(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2})^2}$$

这时候我们定义的范围参数就起作用了，考虑：

$$\lim_{\mathfrak{p}^2\to\infty}R^{-2}=\lim_{\mathfrak{p}^2\to\infty}[m^2-(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2})^2]=m^2$$

这时候两个粒子的质量差被忽略，势能恢复普通的汤川势。而另一个极端下：

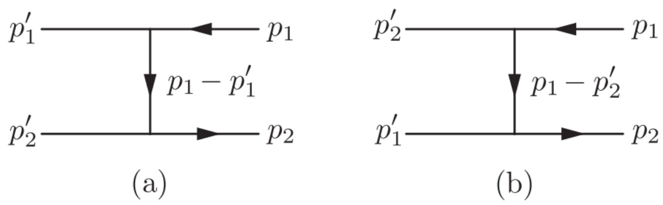
$$\lim_{\mathfrak{p}^2\to0}R^{-2}=\lim_{\mathfrak{p}^2\to0}[m^2-(\sqrt{\mathfrak{p}^2+m^2}-\sqrt{\mathfrak{p}^2+\mu^2})^2]=2m\mu-\mu^2$$

因此，我们有了一个交换势，这是非相对论理论所没有的。如果我们考虑自旋和同位旋，那么它就非常接近现实中的物理了。

接着我们有:

$$2.8\ \bar{\mathrm{N}}+\mathrm{N}\rightarrow\phi+\phi$$

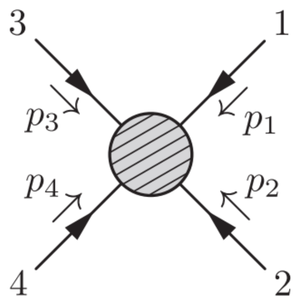
对应的费曼图如下。



11.3 Crossing对称性和CPT不变性

我们已经看到了在最低阶微扰论中的三种现象，并在非相对论理论中找到了它们的对应，分别是: direct汤川势，exchange汤川势能，和能量本征态极点。虽然这在相对论理论中没有什么新奇的，但是新奇的是这三个现象实际上是一个东西，我将其称为“crossing”，也可以称为crossing对称性，不过这个对称不是我们先前讨论的那种对称。

要介绍crossing，我得先介绍一个更一般的场论。考虑我们有一个包含四种不同粒子的场论。它们之间具有各种三线性(trilinear)相互作用，形成各种Born近似图。我要介绍一个包含每种粒子各一个的更一般的图，我不知道里面发生了什么，也不想得到具体的过程，所以我画了一个●，得到下图。



crossing图

从右往左读，这个图对应反应:

$$1+2=\bar{3}+\bar{4}$$

由能动量守恒:

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0$$

实际上，如果我们通过判断p_r^0的正负来判断入射和出射，那么这个图就可以用来表述一系列反应。然后，我们需要一系列运动学变量来描述这个系统。依据能动量守恒，我们需要3个变量，如果反应式给定，那我们只需要两个: 中心能和散射角；在这里，我们引入:

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 \\
t &= (p_1+p_3)^2 = (p_2+p_4)^2 \\
u &= (p_1+p_4)^2 = (p_2+p_3)^2
\end{aligned}
$$

这三个变量中任意两个组合都可以作为相对论不变量的完备基，任何相对性不变量都可以表为它们的组合。假如我们考虑$1+3 \to \bar{2}+\bar{4}$，也就是，一个t反应，那么t就代表中心系能量，s和u代表动量传递。s，t，u被称为Mandelstam不变量。

由于这三个不变量中只有两个是独立的，所以我们可以由其中两个推出剩下一个：

$$
\begin{aligned}
s+t+u &= (p_1+p_2)^2+(p_3+p_4)^2+(p_1+p_3)^2+(p_2+p_4)^2+(p_1+p_4)^2+(p_2+p_3)^2 \\
&= 3\sum_i p_i \cdot p_i + 2\sum_{i>j} p_i \cdot p_j \\
&= 3\sum_i m_i^2 + 2\sum_{i>j} p_i \cdot p_j
\end{aligned}
$$

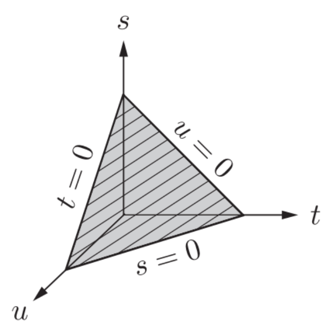
注意到：

$$
0 = (\sum_i p_i)^2 = \sum_i p_i \cdot p_i + 2\sum_{i>j} p_i \cdot p_j = \sum_i m_i^2 + 2\sum_{i>j} p_i \cdot p_j
$$

所以有：

$$
s+t+u = \sum_i m_i^2
$$

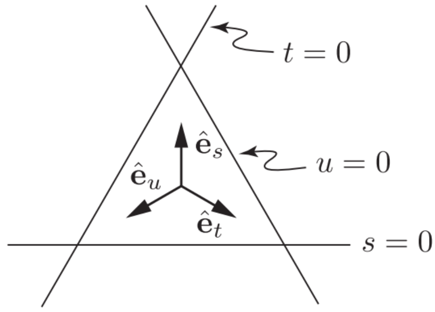
实际上，我们可以直观地用图来表示这个关系。



Mandelstam平面

定义这个位于平面的三个基矢为$\hat{\mathbf{e}}_s$、$\hat{\mathbf{e}}_t$、$\hat{\mathbf{e}}_u$，我们有：

$$
\hat{\mathbf{e}}_s + \hat{\mathbf{e}}_t + \hat{\mathbf{e}}_u = 0
$$



Mandelstam平面与基矢

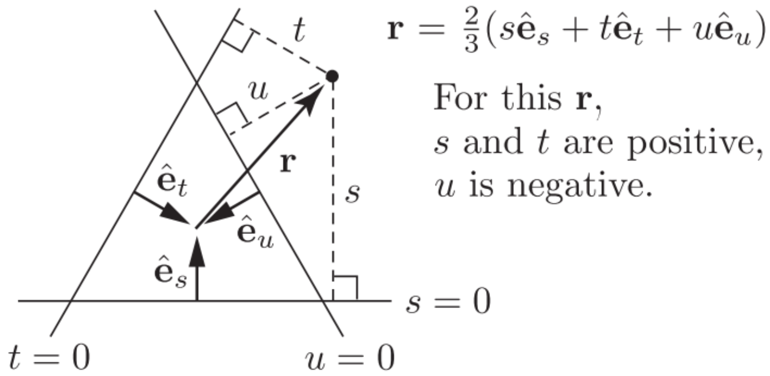
那么一个从中心指向(s,t,u)点的向量可以被写为：

$$\mathbf{r}=\frac{2}{3}(s\hat{\mathbf{e}}_s+t\hat{\mathbf{e}}_t+u\hat{\mathbf{e}}_u)$$

反过来，我们有：

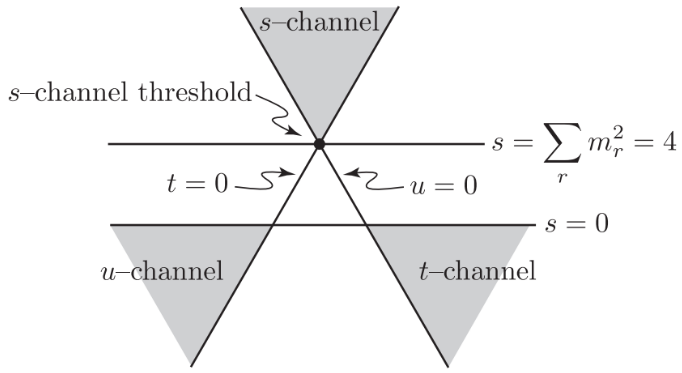
$$s=\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{e}}_s+\frac{1}{3}\sum_i m_i^2$$

进一步，可以通过做垂线来直接得到s,t,u。



Mandelstam平面与基矢

这个图在2-2反应和三粒子衰变中都很重要。在三粒子衰变中，我们会有Dalitz图，而现在，我们讨论的是Mandelstam-Kibble图。注意到，不是M-K图中的每一点都对应实际的物理过程，我们将其画在下面的图中。



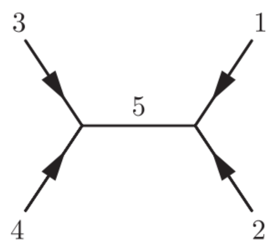
M-K图

中心系中，$p_1 + p_2 = (E - 1 + E_2, \mathbf{0})$，对应s-反应的区域可以被表为：

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2 = 4$$

s-反应中s的最小值为4，而t和u分别对应之前的$-\Delta^2$和$-\Delta_c^2$，最大值为0。这种研究散射的方法的好处是，所有变量都是对称的，所以我们只需要做一次，而不是三次。随着质量的改变，图会相应的扭曲，并在高能时趋近于等质量图，但阴影区域永远不会重叠。

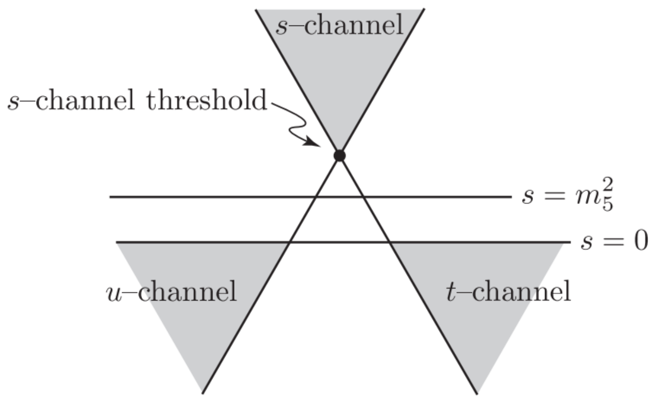
特别地，让我们考虑一个有第五种粒子的情况，如下图。



从右往左读，我们得到一个s-反应，给我们一个项：

$$\frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m_5^2} = \frac{1}{s - m_5^2}$$

这是一个meromorphic函数，极点最好位于1-2临界之下。遗憾的是，把这涉及两个变量，所以我不能简单地把它画出来，有示意图如下。



综上所述，我们先前讨论的三种现象：汤川势，交换势和极点，都是一个meromorphic函数的三个方面。实际上，这种方法也可以被用于高阶扰动。这些现象，看似彼此分离，实际上却通过解析延拓

(analytic continuation)的方法连接在一起。

一般来说，对于任何洛伦兹不变相互作用，对于所有微扰理论，如果我取所有四维动量并改变它们的符号，振幅不会改变。这种不变性被称为CPT对称性。在改变符号的过程中，所有入射粒子都变成了出射反粒子，对所有阶都成立，这就是CPT定理。

CPT定理告诉我们，C对称性可以破缺，P对称性可以破缺，T对称性可以破缺，我们可以写下许多例子。但是，只要这个世界是洛伦兹不变的，那么CPT对称性就永远不会破缺。

让我们用例子进一步说明这一点，给出一个s-反应：

$$1+2 \rightarrow \bar{3}+\bar{4}$$

振幅可以写为：

$$\mathcal{A}_{fi}=\mathcal{A}(p_1,p_2,-p_3,-p_4)$$

首先，我们作用C宇称，得到$\mathcal{A}_{fi}^C$：

$$C:1+2 \rightarrow \bar{3}+\bar{4} \longrightarrow \bar{1}+\bar{2} \rightarrow 3+4$$

现在作用TP宇称：

$$TP:1+2 \rightarrow \bar{3}+\bar{4} \longrightarrow 3+4 \rightarrow \bar{1}+\bar{2}$$

T改变的时间的流向，而P纠正了速度的方向，综上，我们有：

$$\mathcal{A}_{fi}^{TPC}=A(-p_1,-p_2,p_3,p_4)$$

于是：

$$\mathcal{A}_{fi}=\mathcal{A}_{fi}^{TPC}$$

如果我们在实验中发现CPT对称性破缺，这不会像是Wu-Ambler发现downfall of parity，不像Fitch-Cronin在K^0中发现CP破缺。那只会让我们说：这意味着这不是一个CP守恒的理论，这不会是一场革命。但如果我们发现CPT对称破缺，那意味着所有理论都崩塌了，我们必须重新开始，那将是一场革命。

11.4 相空间和S矩阵

讲了这么多抽象概念和漂亮的公式，是时候做点脏活了。现在我们可以求出所有S矩阵元，除了不知道如何把它们和散射联系在一起，后者是实验能够测得的量。本节，我们将从S矩阵元推导出散射截面$d\sigma/d\Omega$。

这是一个纯粹运动学问题，有两种方法。一种是非常小心地考虑一个实验室系中的相对散射波包，但是这会花很长时间。所以，我们会采取第二种方法，把所有东西放在盒子里，计算盒中的散射振幅，再让盒子变成无穷大。考虑一个特征长度L的盒子，我们有：

$$\mathbf{p}=\frac{2\pi}{L}(n_x,n_y,n_z)$$

我们给出本征态的正交归一化关系：

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

同样有：

$$[a_{\mathbf{p}}, a^{\dagger}_{\mathbf{p}'}] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$$

于是，自由场变为：

$$\phi(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip\cdot x} + a^{\dagger}_{\mathbf{p}} e^{ip\cdot x})$$

我们给出跃迁概率：

$$(\text{transition probability}) = |\langle f|\mathrm{S}-1|i\rangle|^2$$

考虑单粒子初始状态：

$$|i\rangle = |\mathbf{p}\rangle$$

如果我们要研究衰变过程，计算粒子寿命，那单粒子初态会很合适。如果我们想要考虑散射，那么我们就需要2粒子初态，归一化有：

$$|i\rangle = \sqrt{V}\,|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$$

现在开始计算，我们会得到：

$$\langle f|\mathrm{s}-1|i\rangle = i\mathcal{A}^{VT}_{fi}(2\pi)^4\delta^{(4)}_{VT}(p_f - p_i)\prod_{\text{final}}\left[\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_f}}}\frac{1}{\sqrt{V}}\right]\prod\left[\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}}\right]\frac{1}{\sqrt{V}}$$

我们也得到了一个不变振幅，但是是求和而不是积分，于是我们有：

$$\lim_{V,T\to\infty}\mathcal{A}^{VT}_{fi} = \mathcal{A}_{fi}$$

跃迁振幅的前三项看上去像是相对论化的，但实际上不是，因为态$|\mathbf{p}\rangle$没有被合适的正规化，我们有：

$$\langle 0|\psi(x)|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{1}{\sqrt{V}}e^{-ip\cdot x}$$

我们要把能量因子和$\sqrt{V}$作用到所有产生湮灭算符上，然后把$\frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}\frac{1}{\sqrt{V}}$乘上所有初态和末态。如果我们有两个粒子，就会有$(\frac{1}{\sqrt{V}})^2$，所以需要乘上一个$\sqrt{V}$来抵消掉它。

接着，我们考虑δ_{VT}，写下其显式表达式：

$$(2\pi)^4\delta^{(4)}_{VT}(p) \equiv \int_V d^3\mathbf{x}\int_{-T/2}^{T/2} dt\ f(t)e^{ip\cdot x}$$

我们看到，当VT趋于无穷，上式变为：

$$\lim_{V,T\to\infty}\int_V d^3\mathbf{x}\int_{-T/2}^{T/2} dt\ f(t)e^{ip\cdot x} = \int d^4x\ e^{ip\cdot x} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p)$$

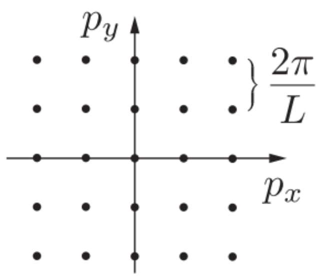
但是，我们要考虑的是它的平方，通过Parseval定理，我们有：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}|(2\pi)^4\delta_{VT}^{(4)}(p)|^2 &= \int_V d^3\mathbf{x}\left[\int_V d^3\mathbf{x}'\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')}\right]\int \frac{d\omega_\mathbf{p}}{2\pi}\left|\int_{-T/2}^{T/2} dt\, e^{i\omega_\mathbf{p}t}f(t)\right|^2 \\
&= \int_V d^3\mathbf{x}\int_V d^3\mathbf{x}'\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\int \frac{d\omega_\mathbf{p}}{2\pi}|\tilde{f}(\omega_\mathbf{p})|^2 \\
&= \int_V d^3\mathbf{x}\int dt\,|f(t)|^2 = VT
\end{aligned}
$$

因此我们得到：

$$
\lim_{V,T\to\infty}[(2\pi)^4\delta_{VT}^{(4)}(p)]^2 = (2\pi)^4 VT\delta^{(4)}(p)
$$

现在在我们求极限之前还有最后一件事，那就是δ^2的VT系数，这个系数使时空趋于无穷时事情变得很蠢。这个问题是因为本质上我们是在对相空间中的小点进行求和。



态密度

实际上，我们有态密度：

$$
\left(\frac{n_x n_y n_z}{p_x p_y p_z}\right)d^3\mathbf{p} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3\mathbf{p} = \frac{V d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}
$$

所有，我们实际上要求的是微分跃迁概率：

$$
\begin{pmatrix}\text{differential transition} \\ \text{probability}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{transition} \\ \text{probability}\end{pmatrix}\times\prod_{\text{final}}\frac{V d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}
$$

我们不想计算总的跃迁概率，而是跃迁到一个小相空间范围内态的概率。现在，我们把所有因子乘起来，得到：

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\text{diff. transition} \\ \text{probability}\end{pmatrix} &= |\langle f|\mathrm{S}-1|i\rangle|^2\times\prod_{\text{final}}\frac{V d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \\
&= |\mathcal{A}_{fi}^{VT}|^2(2\pi)^4 VT\delta^{(4)}(p_f-p_i)\left[\prod_{\text{final}}\frac{1}{2E_f}\frac{1}{V}\frac{V d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3}\right]\left[\prod_{\text{initial}}\left(\frac{1}{2E_i}\right)\right]\frac{1}{V}
\end{aligned}
$$

Ta-daa!我们发现所有V都相互消除掉了，但等等，我们不是还有T吗？好吧，让我们再做一次除法，于是我们得到：

$$\begin{pmatrix}\text{diff transition}\\ \text{probability}\\ \text{per unit time}\end{pmatrix} = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i)|\mathcal{A}_{fi}|^2 \prod_{\text{final}} \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \prod_{\text{initial}} \frac{1}{2E_i}$$

这就是我们最终得到的微分散射截面，有时被写为下式:

$$\frac{\text{diff.trans.prob}}{\text{unit time}} = |\mathcal{A}_{fi}|^2 D \prod_{\text{initial}} \frac{1}{2E_i}$$

其中:

$$D = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_f - p_i) \prod_{\text{final}} \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f}$$

下一节中将用这些公式来计算衰变、散射等过程。由于是下节主要讲应用问题，故跳过。