

Lecture 15 重整化 I：反项的确定

上一节中，我们得到了6个重整化条件，它们在微扰的每一阶都满足。

15.1 A 的Perturbative Determination

扰动理论是为了计算格林函数，所以我们想要把我们的6个重整化条件用格林函数的形式表出。但现在，只有 A 能直接做到这一点：

$$\langle 0 | \phi'(0) | 0 \rangle = 0$$

介子场的实际真空期望值应该为0，可以由格林函数的图表示如下。

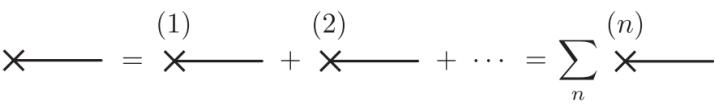

$$= 0$$

A 的重整化条件

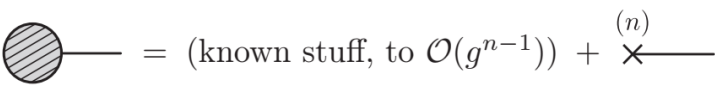
这使得在微扰理论中迭代确定重整化反项 A 变得很容易，我们可以把其按 g 的阶数展开：

$$A = \sum_n A_n \quad \text{where } A_n \propto g^n$$

用图可以表示如下。


$$= \overset{(1)}{\text{cross}} + \overset{(2)}{\text{cross}} + \dots = \sum_n \overset{(n)}{\text{cross}}$$

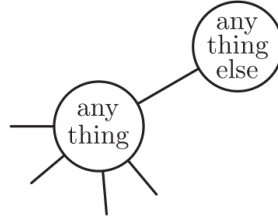
现在让我们假设我们已经把所有东西都算到了 $n - 1$ 阶，包括我们还没有开始的 $\{B, C, \dots, F\}$ ，现在我们来看看怎么计算 A_n 。论证非常简单，因为求和对任何 g 都为0，现在我们把这个图计算到 $\mathcal{O}(g^n)$ 阶，得到下面两项：


$$= (\text{known stuff, to } \mathcal{O}(g^{n-1})) + \overset{(n)}{\text{cross}}$$

假设我们是计算狂魔，已经把其他所有可能的费曼图都算出来了，现在唯一的未知数就是第二项，且其不能作为任何费曼图的内部组成部分，否则就会超越 $n - 1$ 阶。然后我们知道未知部分加上已知部分得0，于是就可以通过迭代把所有系数都算出来。

我们稍后会看到，同样的事情发生在其他反项上面。我们可以通过这样的方式来表达我们的重整化条件——图的某个总和——等于0。我们会仔细选取一个和来使我们可以很方便地把所有东西计算到 n 阶，然后使其的 n 阶反项有一个非常简单的形式，于是我们就可以通过递归来求得所有反项。

对于其他反项来说，设想我们有下图：



蝌蚪图

我们可以把所有anything else加起来，于是有：

$$\sum_{\text{anything else}} \text{tadpole diagram} = \text{tadpole diagram with shaded circle} = 0$$

15.2 Källén – Lehmann谱表示

我们从考虑两点函数 $\langle 0 | \phi'(x) \phi'(y) | 0 \rangle$ 开始，我们可以通过其重新构建 $\tilde{G}'^{(2)}$ ，首先，对一般态，我们有：

$$\langle n | \phi'(y) | 0 \rangle = e^{ip_n \cdot y} \langle n | \phi'(0) | 0 \rangle$$

特别地，对于单粒子态，由重整化条件，我们有：

$$\langle p | \phi'(0) | 0 \rangle = 1$$

通过上面两式，让我们在两点函数中间插入完备基，得到：

$$\begin{aligned} \langle 0 | \phi'(x) \phi'(y) | 0 \rangle &= \sum_n \langle 0 | \phi'(x) | n \rangle \langle n | \phi'(y) | 0 \rangle = \sum_n e^{-ip_n \cdot (x-y)} |\langle n | \phi'(0) | 0 \rangle|^2 \\ &= \cancel{|\langle 0 | \phi'(0) | 0 \rangle|^2} + \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \cancel{|\langle p | \phi'(0) | 0 \rangle|^2} + \sum'_n |\langle n | \phi'(0) | 0 \rangle|^2 e^{-ip_n \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} + \sum'_n |\langle n | \phi'(0) | 0 \rangle|^2 e^{-ip_n \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (15.9)$$

注意到，这里面的第一项我们曾经见过，那就是自由场的： $\Delta_+(x-y; \mu^2)$ ，我们会从后面的求和中得到 p_n 的洛伦兹不变函数，由于我们的理论只有正能解，它可以被写为：

$$\sum_n ' |\langle n | \phi'(0) | 0 \rangle|^2 e^{ip_n \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \sigma(q^2) \theta(q^0) e^{-iq \cdot (x-y)}$$

很遗憾，上面的表达式违背了我们之前的约定。按照这个写法，我们有：

$$\sigma(q^2) \theta(q^0) = \sum_n ' (2\pi)^3 \delta^{(4)}(q - p_n) |\langle n | \phi'(0) | 0 \rangle|^2$$

注意到， σ 的宗量是 q^2 而不是 q ，这是为了满足洛伦兹不变性。我们可以得到它的一些一般性质。在微扰理论中，我们希望最轻的多粒子态是通过把 ϕ' 作用到真空上来产生——要么是两个介子，要么是核子-反核子对。所以在微扰论中我们希望当 q^2 比这些态要轻的时候， $\sigma(q^2)$ ：

$$\sigma(q^2) = 0 \text{ if } q^2 < \min(4\mu^2, 4m^2)$$

当然这只存在于微扰表述中。实际中，我们有更低的束缚态。如果说在理论中最轻的粒子是介子，那么实际上我们往往有：

$$\sigma(q^2) = 0 \text{ if } q^2 < \mu^2 + \eta \text{ for some } \eta > 0$$

另外，我们总有：

$$\sigma(q^2) \geq 0$$

现在，我们可以有：

$$\langle \phi'(x) \phi'(y) | 0 \rangle = \Delta_+(x-y; \mu^2) + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^3} \int_0^\infty da^2 \delta(a^2 - q^2) \sigma(a^2) \theta(q^0) e^{-iq \cdot (x-y)}$$

这里我们又一次重写了表达式，引入了参数 a^2 。现在给出 Δ_+ 的定义：

$$\begin{aligned} \Delta_+(x-y; \mu^2) &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2\omega_{\mathbf{p}}} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} \delta(p^2 - \mu^2) \theta(p^0) e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned}$$

容易看出，表达式等于：

$$\langle 0 | \phi'(x) \phi'(y) | 0 \rangle = \Delta_+(x-y; \mu^2) + \int_0^\infty da^2 \sigma(a^2) \Delta_+(x-y; a^2)$$

也就是说，我们把两场乘积的真空期望值写成了自由场真空期望值的叠加，由理论的质量谱积起来，这就是Källén – Lehmann谱表示，我们可以把其写成如下形式：

$$\langle 0 | \phi'(x) \phi'(y) | 0 \rangle = \int_0^\infty da^2 \rho(a^2) \Delta_+(x-y; a^2)$$

其中 $\rho(a^2) = \delta(\mu^2 - a^2) + \sigma(a^2)$ 。通过谱表示，我们可以很容易得到：

$$\langle 0 | [\phi'(x), \phi'(y)] | 0 \rangle = i\Delta(x-y; \mu^2) + \int_0^\infty da^2 \sigma(a^2) i\Delta(x-y; a^2)$$

现在计算等时对易关系，我们得到：

$$\langle 0 | [\phi'(x) \dot{\phi}'(y) | 0 \rangle = Z_3^{-1} \langle 0 | [\phi_s(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}_s(\mathbf{y}, t)] | 0 \rangle = Z_3^{-1} i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

其中 $\phi_s = \phi - \langle 0 | \phi | 0 \rangle$ 。由于：

$$i \frac{\partial}{\partial x^0} \Delta(x-y) \Big|_{x_0=y_0} = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

只要把上面计算的对易关系求个导，我们就可以得到：

$$\langle 0 | [\phi'(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}'(\mathbf{y}, t)] | 0 \rangle = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[1 + \int_0^\infty da^2 \sigma(a^2) \right]$$

进行比较我们就得到了Lehmann求和法则：

$$Z_3^{-1} = 1 + \int_0^\infty da^2 \sigma(a^2)$$

由于 $\sigma(a^2)$ 非负，所以我们有：

$$Z_3 \leq 1$$

15.3 重整化介子的传播子 \tilde{D}'

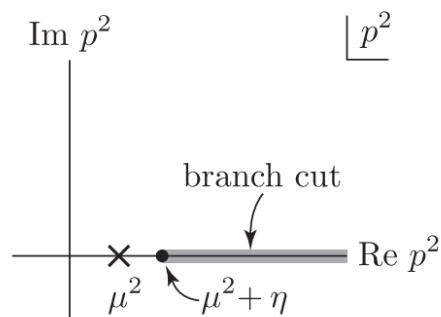
说了这么多，我们还没有开始用我们的重整化条件表示微扰，所以我们现在来计算重整化的格林函数。以 $\tilde{G}'^{(2)}$ 为例，首先有定义：

$$\tilde{G}'^{(2)}(p, p') \equiv (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p') \tilde{D}'(p^2)$$

我们对其使用谱表示，有：

$$\tilde{D}'(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + \int_0^\infty da^2 \sigma(a^2) \frac{i}{p^2 - a^2 + i\epsilon}$$

传播子的谱表示告诉我们一些有趣的事实，考虑其在复平面上的性质，除了在 μ^2 以外都有良好定义，我们有：



而 σ 只在branch cut处不为0。但是其实要注意一下 σ 的发散性。如果我们继续算下去没有遇到任何困难，那我们可以忽略这个问题；但如果真的发散，那我们就要残忍的截断紫外部分。如果我们这么干，那我们就会得到一个无力而没有价值的理论，这不是真正的物理。但让我们继续计算得到最终的S矩阵元，如果我们把截断去掉然后发现它们有极限，那我们很开心，我们得到了让人满意的结果，尽管中间过程是垃圾。但如果我们算出的矩阵元也不收敛，那就不用担心数学严谨了，因为我们什么也做不了。这就是我们对于紫外发散的一般态度。

回到传播子上面，通过Schwarz反射定则，我们可以简单看出其满足：

$$[-i\tilde{D}'(p^2)]^* = -i\tilde{D}'((p^2)^*)$$

由先前得到的公式，我们有：

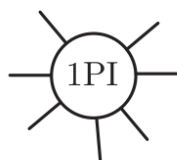
$$\text{Im}[-i\tilde{D}'(p^2)] = -\pi\sigma(p^2), \quad p^2 \text{ real, and } p^2 > \mu^2$$

branch cut上面和下面的差与解析函数虚部相连：

$$\tilde{D}'(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} + (\text{a function analytic at } p^2 = \mu^2)$$

这个方程包含两个重整化条件，对于质量，我们有位于 μ^2 的极点；对于波函数，极点的留数(residue)为 i ，如果我们采用不同的重整化条件，那留数也会改变。

我们需要调整一下条件，来使其满足我们的计算。让我们定义一种特殊的格林函数，我们称其为单粒子不可约格林函数，我们用1PI来标记，如下图。



单粒子不可约图

这是一个包含所有连接图（不可通过切断一个内线而变成两部分的）的总和。按照约定，我们计算1PI时，不必包含能动量守恒的 δ 函数，也不必计算外线传播子，这样的约定会简

化我们的代数。让我们从模型三中找出两个例子如下。

Diagram (a): Not 1PI

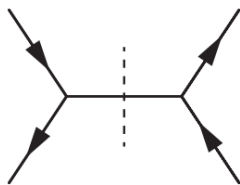
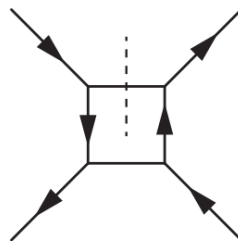


Diagram (b): 1PI



两个例子

现在我们可以用简单的形式来表达质量和波函数重整化条件。考虑1PI的2粒子函数，我们定义：

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \equiv -i\tilde{\Pi}'(p^2)$$

我们把 $\tilde{\Pi}'(p^2)$ 称为介子自能算符(meson self-energy operator)。

现在让我们看向两粒子格林函数： \tilde{D}' ，用 $\tilde{\Pi}'$ 来表示它。我们只需要画一些简单的图，然后我们可以简单地把它们变成方程。首先，我们有一条简单的直线，作为零阶。然后我们有一个单粒子不可约图连着两条外线；再之后我们有一个实际上单粒子可约的图，然后我们接着可以继续写下去，最后得到：

$$\tilde{D}'(p^2) \equiv \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

那么我们如何用写成方程的形式呢？把左边的 δ 函数都去掉，首先我们有：

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon}$$

那么：

$$\begin{aligned}\tilde{D}'(p^2) &= \tilde{D} + \tilde{D}[i\tilde{\Pi}'(p^2)]\tilde{D} + \tilde{D}[-i\tilde{\Pi}'(p^2)]\tilde{D}[-i\tilde{\Pi}'(p^2)]\tilde{D}[-i\tilde{\Pi}'(p^2)]\tilde{D} + \dots \\ &= \frac{i}{p^2 - \mu^2 - \tilde{\Pi}'(p^2) + i\epsilon}\end{aligned}$$

一系列图加起来得到了分母中的质量项 $\mu^2 + \tilde{\Pi}'(p^2)$ ，这就是为什么它被称为自作用能。我们不妨将其展为级数：

$$\tilde{\Pi}'(p^2) = \tilde{\Pi}'(\mu^2) + (p^2 - \mu^2) \frac{d\tilde{\Pi}'}{dp^2} \Big|_{\mu^2} + \dots$$

其中 $\tilde{\Pi}'(p^2) = 0$ ，由于极点的存在。于是分母就变成：

$$(p^2 \mu^2) \left[1 - \frac{d\tilde{\Pi}'}{dp^2} \Big|_{\mu^2} \right] + \dots$$

为了使留数为 i ，我们同样有

$$\left. \frac{d\tilde{\Pi}'}{dp^2} \right|_{\mu^2} = 0$$

于是我们发现极点和极点的留数实际上对应着两个重整化条件。这样做的好处是，我们可以迭代确定B和C反项的系数，就像我们对A做的一样。这两项对应着一个相互作用，用一个叉表示，我们有：

$$\frac{\quad}{p' \rightarrow \quad \times \quad \leftarrow p} \quad i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p') \left[Bp^2 - C \right]$$

像之前一样，让我们设：

$$B = \sum_n B_n, \text{ and } B_n \propto g^n; \quad C = \sum_n C_n, \text{ and } C_n \propto g^n$$

用图表示，就是：

$$\text{---}\times\text{---} = \sum_n \text{---}\overset{(n)}{\times}\text{---}$$

假设我们知道 $n - 1$ 阶的一切，那么把其计算到 n 阶，我们就有：

[illegible]

于是我们有：

$$\begin{aligned} i(B_n \mu^2 - C_n) &= -(\text{knownstuff})|_{\mu^2} \\ iB_n &= -\frac{d}{dp^2}(\text{knownstuff})|_{\mu^2} \end{aligned}$$

这个流程同样适用于核子场，我们同样给出：

$$\tilde{S}'(p) \equiv \text{diagram with a shaded circle} \quad -i\tilde{\Sigma}'(p^2) \equiv \text{diagram with a circle labeled 1PI}$$

同样有：

$$\int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} = \frac{1}{ab}$$

变量 x 是费曼参数，我们假设 a 和 b 不会使积分域中存在极点，因此我有：

$$-i\tilde{\Pi}^f(p^2) = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[q^2 + 2p \cdot qx + p^2 x - m^2 + i\epsilon]^2}$$

如果我们令： $k \equiv q + px$ ，那么积分变成：

$$-i\tilde{\Pi}^f(p^2) = g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - p^2 x^2 + p^2 x - m^2 + i\epsilon]^2}$$

现在回到发散的问题，实际上这是可以避免的，因为我们并不关心 $\tilde{\Pi}^f$ ，而是 $\tilde{\Pi}'$ ，而如果让我们看向其表达式中的两项，我们发现差 $\tilde{\Pi}^f(p^2) - \tilde{\Pi}^f(\mu^2)$ 在高 q 下表现出 $1/q^6$ 的性质，显然收敛，而对其的导数使被积函数下降了 q^2 ，显然也收敛。天哪！我们进行重整化是为了把具有错误的展开系数和错误的质量的微扰论变成正确的微扰论。而前者出现了发散，后者则刚好不发散。重整化，我的超人。

15.4 单圈积分表

让我们考虑如下的积分形式：

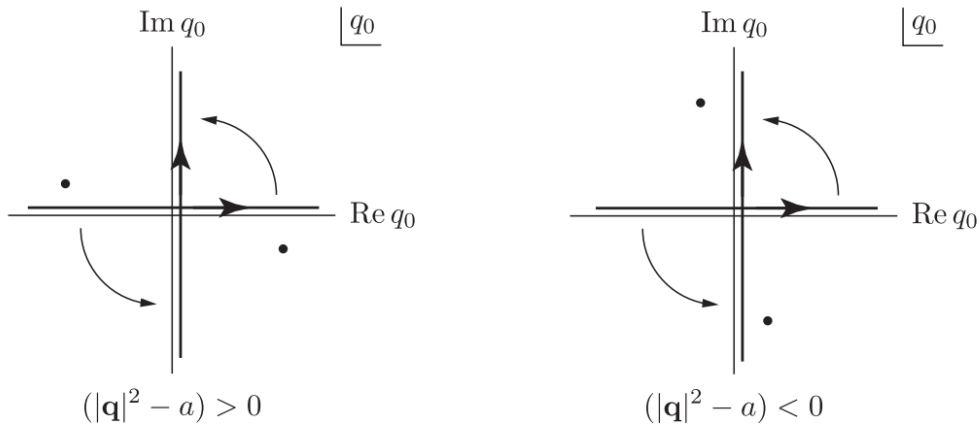
$$I_n = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + a + i\epsilon)^n}$$

我们一般只考虑 $n \geq 3$ ，此时积分收敛。但有时求和中会出现 $n = 1, 2$ 的情况，所以我们还是应该提供它们的积分，但是是通过将其表为收敛组合的方式。

要做这个积分我将会旋转 q_0 的积分轮廓，首先，让我们把 q_0 拎出来：

$$I_n = \int \frac{dq_0 d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q_0^2 - (|\mathbf{q}|^2 - a - i\epsilon)]^n}$$

让我们考虑 q_0 复平面的奇点何时出现。我们有 $|\mathbf{q}|^2 - a > 0$ 和 $|\mathbf{q}|^2 - a < 0$ 两种情况展示如下。



对 q_0 的Wick旋转

但不管是哪种情况，我们都可以把积分轮廓旋转，使其沿着一条假想的轴。我们可以这么做，因为这个旋转没有越过任何一个奇点。这就是**Wick旋转**，这个旋转把我们的积分域从Minkowski空间变换到了欧拉空间。不妨定义：

$$q_0 = iq_4$$

于是：

$$q^2 = -q_E^2 = -(|\mathbf{p}|^2 + q_4^2)$$

$$d^4q = id^4q_E = idq_4 d^3\mathbf{q}$$

然后，我们的积分就变成了：

$$I_n = i \int \frac{d^4q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-q_E^2 + a + i\epsilon]^n}$$

现在我们有了一个位于4维欧拉空间的各向同性的积分。每个人都知道怎么在3维欧拉空间进行球积分，那4维呢？考虑：

$$\int d^4q_E f(q_E^2)$$

引入变量 $z = q_E^2$ ，我们有：

$$\int d^4q_E f(q_E^2) = \alpha \int_0^\infty z dz f(z)$$

也就是说，这个积分应该是某些由角积分得到的常数 α ，乘上积分来自 $r^3 dr$ 的微元 $z dz$ 再乘上 $f(z)$ 。为了计算 α ，我们不妨设 $f = e^{-q_E^2}$ 。于是有：

$$\int d^4q_E f(q_E^2) = \int d^4q_E e^{-q_E^2} = \prod_{i=1}^4 \int_{-\infty}^{\infty} dq_i e^{-q_i^2} = (\sqrt{\pi})^4 = \pi^2$$

而对于右边：

$$\alpha \int_0^\infty z dz e^{-z} = \alpha \Gamma(2) = \alpha \cdot 1! = \alpha$$

于是我们立即得到： $\alpha = \pi^2$ ，于是有一般积分法则：

$$\int d^4 q_E f(q_E^2) = \pi^2 \int_0^\infty z dz f(z)$$

现在我们给出积分表，实际上， $\tilde{\Pi}^f(p^2)$ 可以从 $n = 1$ 的情况推出：

$$I_1(a) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2 + a} = i \int \frac{d^4 q_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{-q_E^2 + a}$$

通过对 a 进行微分我们可以得到其他积分。让我们假设这个积分在 Λ 截断，然后我们对其应用先前的公式，有：

$$I_1(a) = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{z dz}{z - a}$$

由于分子可以被写为 $z - a + a$ ，我们容易得到：

$$\int_0^\Lambda \frac{z dz}{z - a} = \Lambda + a \ln \frac{\Lambda - a}{(-a)}$$

而右边可以被近似为：

$$\Lambda + a \ln \Lambda - a \ln(-a) + \mathcal{O}(a^2/\Lambda)$$

由于 Λ 要远大于 a ，我们可以忽略最后一项。然后我们有：

Integral table for Feynman parametrized integrals

The Minkowski space integral,

$$I_n(a) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + a)^n} \quad (\text{I.1})$$

with n integer and $\text{Im } a > 0$, is given by

$$I_n(a) = i \left[16\pi^2 (n-1)(n-2) a^{n-2} \right]^{-1} \quad (\text{I.2})$$

for $n \geq 3$. For $n = 1, 2$,

$$I_1 = \frac{i}{16\pi^2} a \ln(-a) + \dots \quad (\text{I.3})$$

and

$$I_2 = -\frac{i}{16\pi^2} \ln(-a) + \dots \quad (\text{I.4})$$

where the dots indicate divergent terms that cancel when two such terms are subtracted, provided the total integrand vanishes for high q faster than q^{-4} .

其中 I_n 可以通过对 a 求导递推得出。