



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

计算模拟方法期末论文

旋转圆柱外表面粘性薄膜行为的模拟研究

2024 年 5 月 20 日

目录

1	引言	3
2	润滑近似与实验	4
2.1	润滑近似	4
2.2	实验结果讨论	5
3	有限元模拟	6
3.1	相场方法	6
3.2	求解与提取参数	7
3.3	转速对动力学过程的影响	8
3.4	材料对动力学过程的影响	9
4	简述两相薄膜流动不同模拟方法	10
4.1	薄膜流动	10
4.2	VoF 方法	11
4.3	水平集方法	12
4.4	相场方法	12
4.5	晶格玻尔兹曼方法	13
4.6	有限元方法和有限体积法的对比	14
5	总结	14
6	写在最后	15

摘要

水平旋转圆柱外表面上的粘性流体会驻留在滚筒上，这类问题已经经过了长期的研究。本文研究了相较于常见的润滑油更加黏稠的蜂蜜在圆柱外表面的动力学过程，探究了过往理论在此情况下的适用性。并且通过有限元方法模拟，我们揭示了其沿轴不稳定性的演化，进而补充了过往理论 [1] 中的不足。模拟结果显示了在良好初始情况下，薄膜仍然会演化出不稳定现象，这表明即使在较低的转速下，薄膜仍然可能演化出类似于旋转方向相反的后退破浪的深度不连续现象，只是需要更长的时间。此外我们研究了圆柱材料对于现象的影响，揭示了在我们的研究情景下，材料的接触角也会一定程度影响薄膜的演化。我们也讨论了此现象的可能的不同模拟方法，旨在揭示我们选择有限元相场方法模拟此动力学过程的合理性。

关键词：多相流；薄膜流动；有限元方法；动态接触角

1 引言

水平旋转圆柱的内表面或外表面上的粘性流动在工业生产中有很多应用，因而受到了广泛地研究，一个典型的例子就是轴承上的润滑油 [2][3]。但在这里，我们研究的问题的来源非常生活化——早餐时旋转蜂蜜棒使得蜂蜜滞留在棒上。我们将蜂蜜棒简化为圆柱来进行研究，这使得我们的研究与轴承上的润滑油非常类似，只是将流体更换为了更加黏稠的蜂蜜。高粘度可能导致一些区别，最明显的问题就是——棒上滞留的粘性流体变多了，这可能导致通用的薄膜流动的简化 [1][4] 失效，在文章的第二部分我们会讨论这个问题。

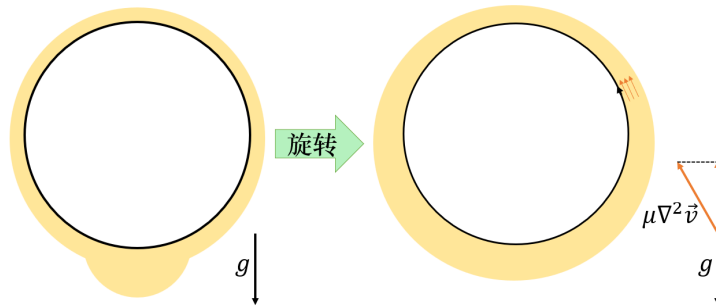


图 1: 粘滞力与重力平衡使得粘性液体滞留在圆柱上

在文章的第三部分我们会引入有限元方法模拟这个动力学过程，并提取参量将模拟结果与实验结果对比。我们选取转速和材料接触角作为自变量来讨论我们的模拟的适用范围，并借此半定量讨论这两个参数对动力学过程的影响。

在第四部分，我们叙述了此动力学过程的可能的不同的模拟方法，并说明各自的优势和劣势。最后，我们基于流体不稳定性 [5] 讨论模拟结果产生的可能原因以及对于系统的影响，并探讨过往该领域数值计算的结果 [6][7] 在此动力学过程中的适用性。

2 润滑近似与实验

2.1 润滑近似

薄膜流动的基本假设就是润滑近似 [4]，这时纳维-斯托克斯方程 $\partial \rho \mathbf{v} / \partial t = \rho \mathbf{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}$ 可以忽略掉惯性项和压力项。

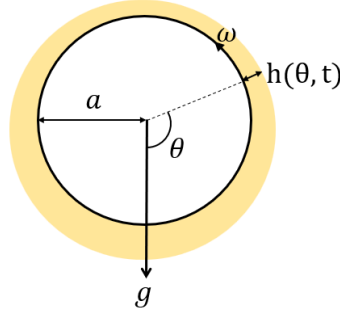


图 2: 二维截面的润滑近似

对于压力项有: $\frac{\partial p}{\partial \theta} / \frac{\partial p}{\partial r} = O\left(\frac{h_0}{a}\right)$ 。对于惯性项有: 惯性力/粘性力 $= \rho u \frac{\partial u}{\partial x} / \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\rho U^2}{l} / \frac{\mu U}{h^2} = \text{Re}\left(\frac{h_0}{a}\right)^2 \approx 0.0004$ 。故纳维-斯托克斯方程退化为:

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = g \cos \theta$$

$$\text{边界条件为: } \begin{cases} r = a \text{ 时, } u = U \\ r = a + h(\theta, t) \text{ 时, } \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

同样的，将连续性方程化为积分形式:

$$Q(\theta, t) = \int_0^h u \, dy = Uh - \frac{g}{3} v h^3 \cos \theta \quad (2)$$

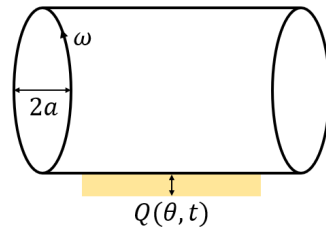


图 3: 二维截面的润滑近似通过积分扩展到三维

联立式 1 和式 2 可以解得: 当且仅当 $Q \leq \frac{2}{3} \left(\frac{U^3 v}{g} \right)^{\frac{1}{2}}$ 时, 存在棒上最大流体承载量的稳态解 $M = 2\pi \rho a \bar{h} l = 1.057 \times \frac{4\pi}{3} a l \left(\frac{\rho \mu U}{g} \right)^{1/2}$ [1]。这个解使用了幂展开来进行近似, 其精度已经经过过往数值计算 [8] 的检验, 足够在我们的情况下使用。

2.2 实验结果讨论

在实验中，我们可以观察到，较高转速下会演化出类似花瓣的深度不连续现象，这与过往过程到的现象一致 [6][7]。

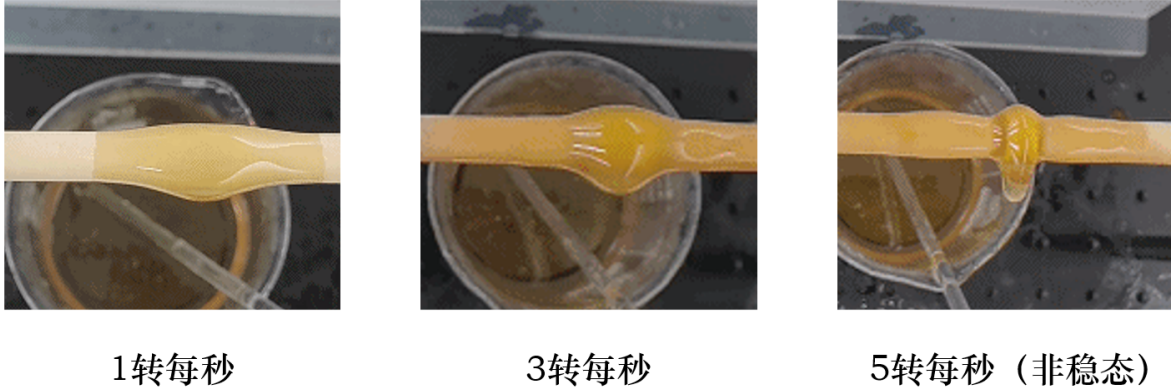


图 4: 不同转速下的形态

将实验的结果与润滑近似的计算结果对比，观察其在我们的情况下的适用性。

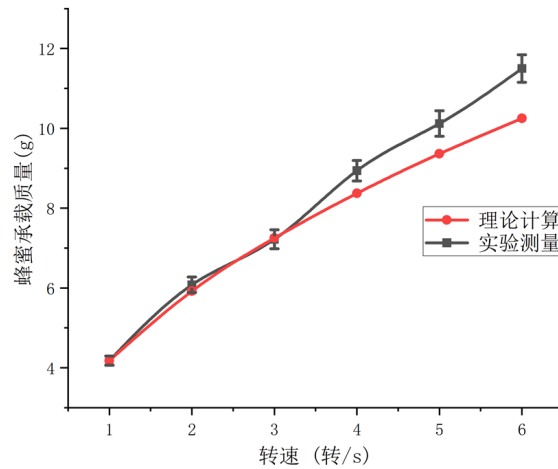


图 5: 不同转速下的最大流体承载量

结果显示，在高转速下，实验结果与理论结果的差距较大。这是由于在较大转速时，液膜的厚度更大，润滑近似可能失效，导致了计算结果与实验结果的偏差。当然，在较大的液膜厚度下，不稳定现象也更加显著地导致系统快速失稳，一段时间后部分流体将从棒上滴落，这一现象我们将在后续讨论。

3 有限元模拟

3.1 相场方法

相场方法通常被用来模拟固体物理中的枝晶生长等介观过程，不过其也可以被用作两相流模拟的方法 [9]。相比于更加经典的 VOF 方法和水平集方法，相场的控制方程是介观尺度的，因而对于介观和微观流动有更好的效果，在这里我们使用相场方法主要是为了更好地解析表面张力对系统的影响。在我们的模拟中，我们求解与相场耦合的完整的纳维-斯托克斯方程：

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} + (\mathbf{F}_{st}) \cdot \nabla - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (3)$$

其中的 $\mathbf{F}_{st} = G \nabla \phi$ 是表面张力，由耦合的相场模型的化学势定义。

相场方法的基本思想是系统总朝着最小化自由能的方向发展。吉布斯自由能 $G = H - TS$ ，对于凝聚态 $H \approx U$ ：混合自由能 $\Delta G^m \approx \Delta U^m - T \Delta S^m$ ，混合之后的微观态 $\Omega = \frac{(N_A + N_B)!}{N_A! N_B!}$ ，自由能变化为 $\Delta G^m = \Omega x_A (1 - x_A) + RT(x_A \ln x_A + (1 - x_A) \ln(1 - x_A))$ 。一个典型的自由能泛函可以写为：

$$F[\phi] = \int_{\Omega} \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) \right) dV$$

相场方程求解的方程是基于菲克定律的最小化系统的自由能的 Cahn-Hilliard 方程：

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 (c^3 - c - \gamma \nabla^2 c) \quad (4)$$

在我们的求解中，Cahn-Hilliard 方程表示为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = \nabla \cdot \left(\frac{\gamma \lambda}{\epsilon^2} \nabla \psi \right) \quad (5)$$

其中， $\psi = -\nabla \cdot (\epsilon^2 \nabla \phi) + (\phi^2 - 1) \phi$

表面张力系数定义为 $\sigma = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\lambda}{\epsilon}$

化学势 G 为 $G = \lambda \left[-\nabla^2 \phi + \frac{\phi(\phi^2 - 1)}{\epsilon^2} \right] = \frac{\lambda}{\epsilon^2} \psi$

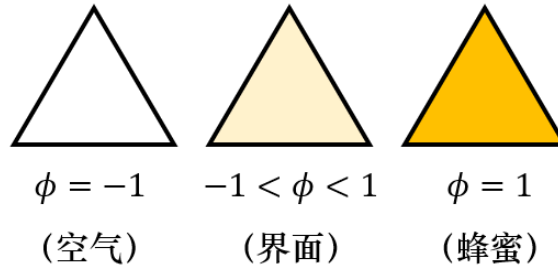


图 6: 相场变量物理意义

3.2 求解与提取参数

我们使用 COMSOL Multiphysics® 6.0 通过有限元方法 [10][11] 求解模型，相场的界面厚度由软件自动控制，迁移率取 $\chi = 1 \times 10^{-4} \text{m} \cdot \text{s} / \text{kg}$ ，后处理提取相场变量 $\phi = 0.4$ 的等值面作为两相界面。

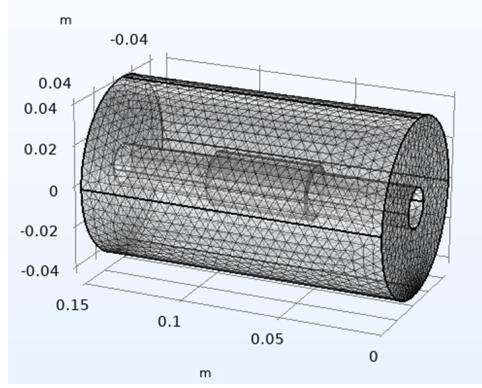


图 7: 建模与网格划分

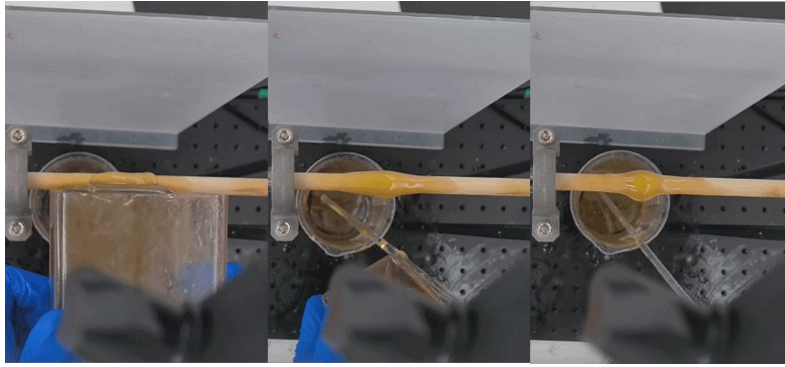


图 8: 实验：棒上蜂蜜的演化

我们可以通过观察实验中棒上流体的动力学演化——蜂蜜会向内积聚形成环结构，半经验性地总结流体演化的几何构型为正弦波，并提取波长 λ 和振幅 $\frac{h}{2}$ ，

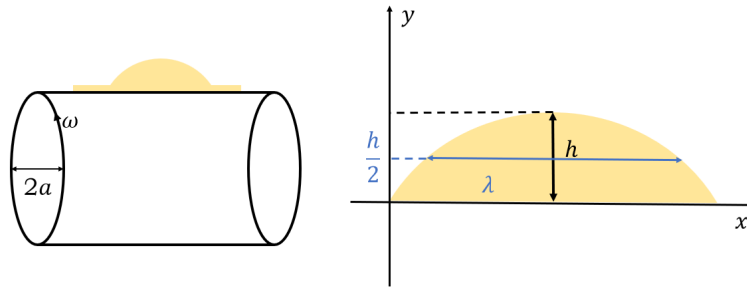


图 9: 简化几何以提取参量

对比模拟的结果，可以观察到类似的现象，故我们可以使用这两个参数验证模拟的可靠性。

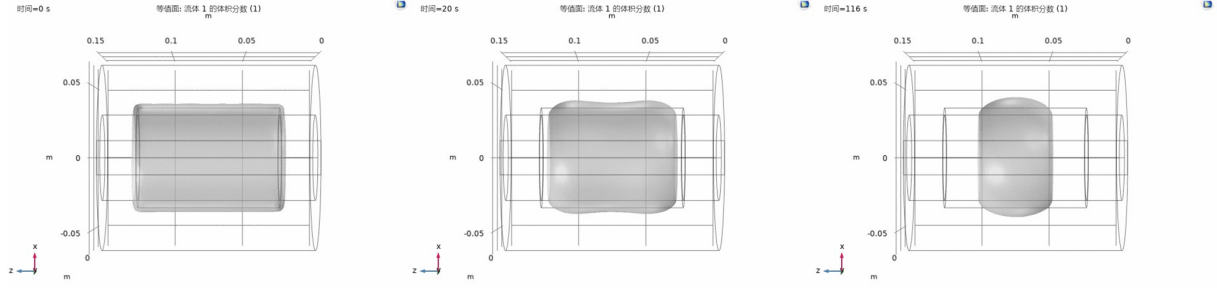


图 10: 模拟：棒上蜂蜜的演化

3.3 转速对动力学过程的影响

我们选取 1 转每秒和 3 转每秒两组参量研究，更高速的情况下粘性流体会迅速发展出“花瓣”偏离我们的经验几何构型。此外，由于模拟和实验的初始条件不能完全一致以及拍摄条件的限制，我们时间零点选取为实验中观察到环状经验构型的第一帧，然后在模拟中使用相同的波长和振幅以对齐。我们的研究主要聚焦于动力学演化过程，并且实验结果表明此过程并非初值敏感，因而我们认为这样的简化是合理且必要的。

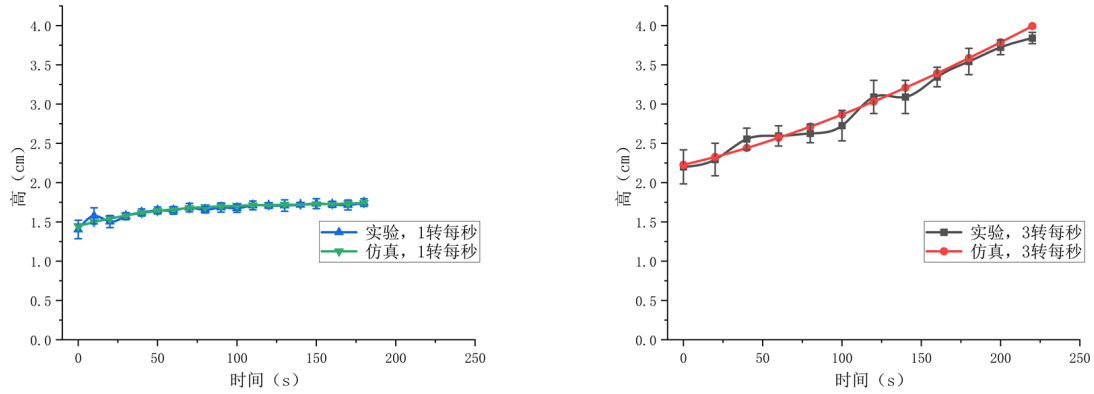


图 11: 不同转速下振幅的演化

在 1 转每秒时，演化过程速度较慢，高从 1.5cm 慢增长。在 3 转每秒时，演化过程速度较快，高从 2.2cm 增长至 4.0cm。

同样地，在 1 转每秒时，演化过程速度较慢，半高宽从 3.5cm 减少至 1.0cm。在 3 转每秒时，演化过程速度较快，半高宽从 1.5cm 减少至 0.8cm，，环化过程在我们选取的时间零点前已经基本完成，故初始半高宽较低。

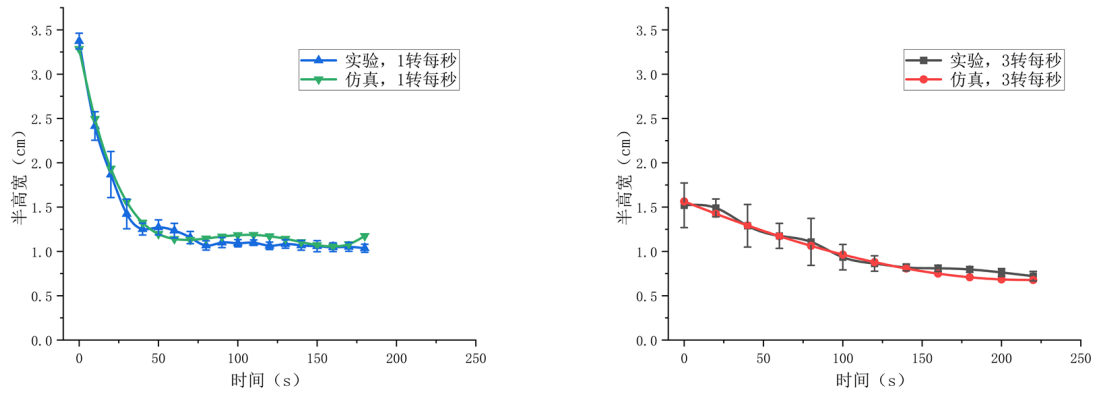


图 12: 不同转速下波长的演化

3.4 材料对动力学过程的影响

在我们研究的过程中，材料主要带来的影响为引入了三相界面的接触角，进而影响了粘性液体的边界。在二维的理论分析中，材料的影响影响由于认为粘性液体覆盖了圆柱外表面而不用被考虑。在我们的研究中，我们模拟了 1 转每秒时木制棒和金属棒上的动力学演化，并讨论其区别。相场方法提供了一种简单有效的方法来引入接触角，通过自由能最小化，相场模型可以不像水平集方法那样额外引入杨-拉普拉斯方程就可以考虑材料接触角。

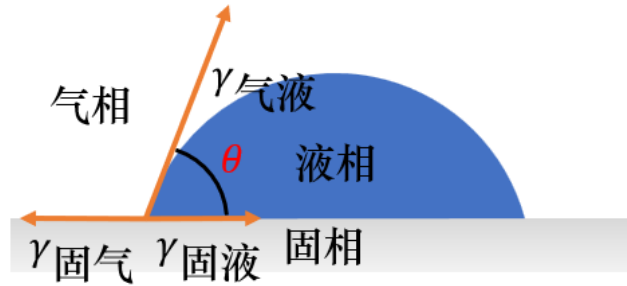


图 13: 三相接触角示意图

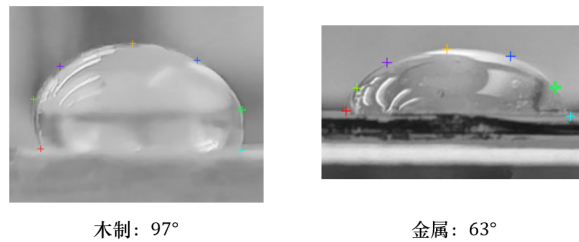


图 14: 不同材料的接触角

我们的模拟计算如下：

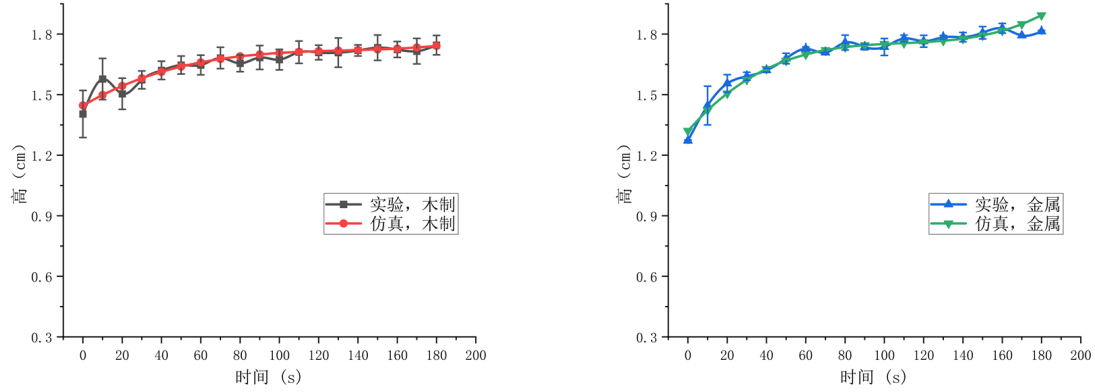


图 15: 不同材料下振幅的演化

对于木制棒，演化过程速度较慢，高从 1.4cm 慢增长。对于金属棒，演化过程速度较快，高从 1.3cm 增长至 1.8cm。

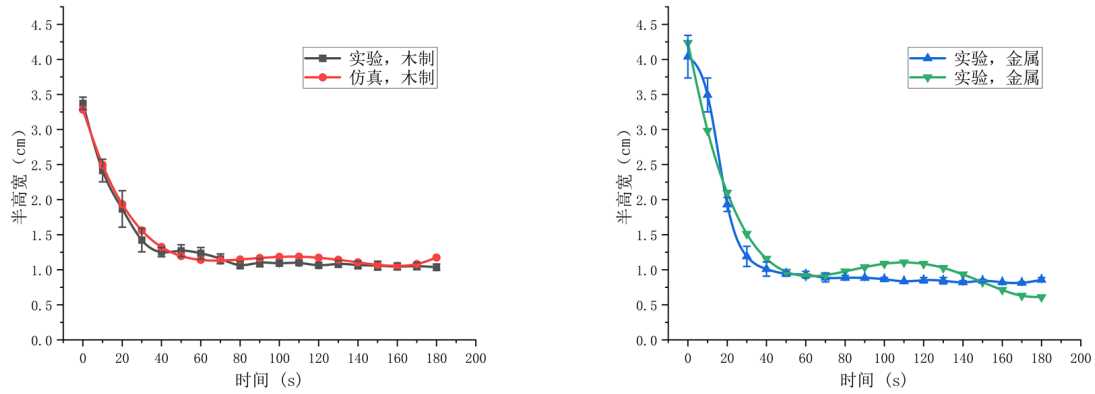


图 16: 不同材料下波长的演化

对于木制棒，演化过程速度较慢，半高宽从 3.5cm 减少至 1.0cm。对于金属棒，演化过程速度较快，半高宽从 3.5cm 减少至 1.0cm。

总的来说，材料的接触角主要影响动力学过程的初始状态，并且影响随着时间变得更小。这是因为动力学过程的演化几乎总会使得三相界面的夹角大于接触角，发展而成的环形粘滞流动由流体的性质决定。

4 简述两相薄膜流动不同模拟方法

4.1 薄膜流动

在一些完全不需要考虑膜厚变化情况的工况下，可以使用薄膜流动方程。

连续性方程通常写作:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

其中, h 是薄膜的厚度, u 是流体在薄膜方向的速度, x 是沿薄膜方向的坐标, t 是时间。

动量方程可以写作:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho g - \frac{\partial p}{\partial x}$$

其中, μ 是流体的动力粘度, ρ 是密度, g 是重力加速度, p 是压力。

这类方程的求解相对简单, 因为其计算域被简单地限制在一个薄膜存在的壳上, 可以通过有限差分、有限元或者有限体积求解, 当然, 其局限性也相对强, 在我们的工况下, 它就不能很好地模拟动力学演化的过程。除了薄膜流动以外, 其他方法都耦合完整的流体动力学方程, 他们的普适性更好, 计算难度也更强。

4.2 VoF 方法

VoF (Volume of Fluid) 方法目前最泛用和通用的两相流模拟方法之一。它广泛应用于模拟具有自由表面的流体, 如水波、气泡等。VoF 方法的核心是追踪流体在计算域中的体积分数。

在 VoF 方法中, 关键方程包括以下几部分:

1. 体积分数方程: 这个方程用于追踪流体在每个计算网格中的体积分数。体积分数 C 的定义是一个网格单元中目标流体的体积与该单元总体积的比例。 $C = 1$ 表示单元完全被目标流体填满, $C = 0$ 则表示没有目标流体。体积分数方程通常表达为:

$$\frac{\partial(\rho C)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho C \mathbf{u}) = 0$$

其中, ρ 是流体密度, \mathbf{u} 是流速矢量, t 是时间。

2. 流体动力学方程: 纳维-斯托克斯方程, 用于描述流体的运动。这些方程通常包括动量方程和连续性方程。动量方程表示为:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) + \mathbf{F}$$

连续性方程表示为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

其中, p 是压力, μ 是动力粘度, \mathbf{F} 是体积力 (如重力)。

3. 界面追踪: 在 VoF 方法中, 流体界面是通过体积分数的梯度来确定的。界面通常定义在 $C = 0.5$ 的等值面上。

这些方程联合起来, 可以使用有限体积法计算模拟两相流体 (如液体和气体) 的界面动力学。VoF 方法的主要问题在于其模拟的精度很大程度取决于网格, 这导致其在模拟微流体、多孔介质、气泡或液膜时常常出现一些困难, 有些情况下加密网格可能可以

解决问题，但是会大幅提升计算难度；在更小的尺度上，VoF 的准确性受限于流体动力学方程。

4.3 水平集方法

水平集方法 (Level Set Method) 是一种数学和数值技术，用于追踪和捕捉界面和曲面的演化。它特别适用于处理复杂的界面运动，如合并、断裂等。这种方法通过引入一个隐式定义的水平集函数 (通常记为 ϕ) 来表示界面。

在水平集方法中，关键方程包括：

1. 水平集方程：这是一个偏微分方程，用于描述水平集函数 ϕ 随时间的演化。通常，这个方程可以表示为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0$$

其中， \mathbf{u} 是流体速度矢量。这个方程表明， ϕ 沿着速度场 \mathbf{u} 的方向传输。

2. 重初始化方程：在实际应用中，水平集函数 ϕ 可能会因为数值方法的错误而偏离其理想的形状 (通常是距离函数)。因此，需要定期使用重初始化方程来纠正这个问题。重初始化方程的一个常见形式是：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = S(\phi_0)(1 - |\nabla \phi|)$$

其中， ϕ_0 是原始的水平集函数， τ 是一个人工时间参数， $S(\phi_0)$ 是一个符号函数，表示 ϕ_0 的正负。

3. 流体动力学方程：与 VoF 方法一样，水平集方法通常与纳维-斯托克斯方程结合使用，以描述流体的运动。这包括动量方程和连续性方程。

水平集方法的一个主要优点是能够处理复杂的界面变化，如分裂和合并。它不需要明确地追踪界面的位置，而是通过水平集函数来间接表示界面。这使得方法在处理复杂几何和拓扑变化时更加灵活和强大。然而，这种方法也需要适当的数值技巧来维持数值稳定性和准确性。

水平集可以和 VoF 耦合计算，既可以使用有限体积法，也可以使用有限元。水平集的方程更加泛用，这导致其计算难度更高，并且也失去了 VoF 体积守恒的性质。和 VoF 类似地，在更小的尺度上，水平集的准确性受限于流体动力学方程。

4.4 相场方法

相场方法 (Phase-Field Method) 是一种用于模拟和研究多相系统 (如液体和气体之间的界面) 的数学和计算框架。它通过引入一个连续的相场变量 (通常记为 ϕ) 来描述不同相之间的界面。这种方法在处理复杂界面动力学，如相变、界面形成和演化方面非常有效。

在相场方法中，关键方程通常包括：

1. 相场方程：这是描述相场变量 ϕ 随时间演化的偏微分方程。Cahn-Hilliard 方程和 Allen-Cahn 方程是两种常用的相场方程。例如，Allen-Cahn 方程的一种形式可以写为：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -M \frac{\delta F}{\delta \phi}$$

其中， M 是一个动力学参数，通常称为迁移率； F 是自由能泛函， $\frac{\delta F}{\delta \phi}$ 是关于 ϕ 的变分导数。

2. 自由能泛函：自由能泛函 F 描述了系统的热力学性质，通常包括界面能项和体积能项。一个典型的自由能泛函可以写为：

$$F[\phi] = \int_{\Omega} \left(\frac{\epsilon}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) \right) dV$$

其中， ϵ 是相关界面宽度的衡量参数， $f(\phi)$ 是体积自由能密度，通常与物质的相态有关。

3. 流体动力学方程：与其他界面追踪方法一样，相场方法通常与纳维-斯托克斯方程结合使用，以模拟流体动力学行为。这包括处理流体动量和质量守恒的方程。

类似水平集，相场方法的一个主要优势是能够自然地处理复杂界面的拓扑变化，如相界面的分裂和合并；其自由能的底层形式也使得其更擅长表面张力的影响。此外，相场方法提供了一个连续的界面描述，这在数值处理上通常比离散的界面追踪方法更加稳定和灵活。然而，这也意味着界面参数会很大程度地影响模拟结果，一组不正确的参数可能计算出非常奇怪的结果——例如，一滴液体在下落的过程中逐渐充满一个一立方米的池子。

相场方法一般使用有限元。类似水平集方法，相场方法的方程十分泛用，这导致其计算难度和参数输入都具备不低的要求。尽管相场方程本身是介观尺度的，但在更小的尺度上，相场的准确性依然受限于流体动力学方程。

4.5 晶格玻尔兹曼方法

格子玻尔兹曼方法 (Lattice Boltzmann Method, 简称 LBM) 是一种较新颖的无网格计算流体动力学 (CFD) 的方法，它基于微观粒子模型和统计物理学原理，与传统基于纳维-斯托克斯方程的 CFD 方法有所不同。

LBM 的核心是玻尔兹曼方程，它描述了在离散的时间和空间格点上粒子分布函数的演化。这个方程通常可以表示为两个步骤：碰撞 (collision) 和流动 (streaming)。

1. 碰撞步骤：在这一步，粒子分布函数根据局部粒子相互作用进行更新。最常用的碰撞模型是 BGK (Bhatnagar-Gross-Krook) 近似，其方程可以表示为：

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)]$$

其中, $f_i(\mathbf{x}, t)$ 是在位置 \mathbf{x} 和时间 t 的第 i 个方向上的粒子分布函数, \mathbf{e}_i 是第 i 个方向上的离散速度, δt 是时间步长, τ 是松弛时间, f_i^{eq} 是平衡分布函数。

2. 流动步骤: 在这一步, 粒子沿着它们的离散速度方向进行移动。

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t)$$

在流动步骤后, 粒子分布函数在格子节点上更新。

此外, 流体的宏观属性 (如密度和速度) 可以通过对所有方向的粒子分布函数进行求和来计算:

$$\text{- 密度: } \rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad \text{- 速度: } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \sum_i \mathbf{e}_i f_i(\mathbf{x}, t)$$

LBM 的优势在于其简单的数值实现和对复杂边界条件的自然处理能力。它通过微观粒子模型来模拟流体行为, 因此在处理流体中的细微结构和复杂界面时表现出色。然而, LBM 在处理高速流动和强烈压缩性流动方面存在一些限制。

LBM 方法可以取代纳维斯-托克斯方程与 VoF、水平集或相场方法耦合来模拟两相流, LBM 方法是介观尺度的, 其在多孔介质等微流体情况下表现优于纳维斯-托克斯方程。其求解是完全显式的, 这使得其并行效率更好, 并且可以被 cuda 加速。然而其在较大尺度下, LBM 的计算时间一般高于传统的网格方法, 这与其他粒子类 CFD 方法类似。

4.6 有限元方法和有限体积法的对比

在流体流动研究中, 有限元法 (FEM) 和有限体积法 (FVM) 各有优缺点, 且适用于不同情境。FEM 在数值分析领域被广泛用于流体流动研究, 支持节点间断伽辽金法, 一种采用不连续基函数的 FEM。而 FVM, 作为商业 CFD 软件的主流方法, 已投入大量研发资源。

两者的比较归结于数学模型和数值模型的差异。尽管 FEM 和 FVM 在理论精确度上存在差异, FEM 通常具有更高的理论精度, 但实际应用中, 软件的实现细节和算法优化对性能影响更大。FEM 优势在于高阶精度和灵活的离散化方法, 但在局部守恒方面略逊于 FVM。FVM 则以局部守恒和处理对流主导流动的能力为主要优点。COMSOL 公司在开发 FEM 方法上取得显著进展, 特别是在不连续基函数和基函数方面, 但同时也指出两种方法都有改进和优化的空间。[12]

5 总结

我们在前人二维截面有限元研究 [10][11] 的基础上探究了三维情况下圆柱外表面上的粘性流体的动力学演化, 发现在此情况下高转速时润滑近似的计算结果不够理想。同时针对三维有界提出了环化的经验性几何简化, 进而提取参数研究了转速和材料对于动力学过程的影响。我们发现中低转速下, 环的演化速度和模态与转速相关; 材料则主要影响初态。

以往的研究普遍认为粘性流体的“花瓣”形状是由 Rayleigh-Taylor 不稳定性导致的 [6][7]，一种普遍的研究方法是通过波浪理论 [13] 改写纳维-斯托克斯方程为 $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{R}{R+h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sigma h^3}{3\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{R^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \rho R \Omega^2 \frac{h^3}{3\mu} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$ ，假设存在扰动 $h(y, t) = h_0 + \alpha e^{\omega t} \cos(ky)$ ，可以通过增长率 $\omega = \frac{R}{R+h_0} \frac{\sigma h_0^3}{3\mu} \left[\left(1 + \frac{\rho R \Omega^2}{\sigma} \right) \frac{k^2}{R^2} - k^4 \right]$ 解得截止波长 $\lambda_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{1 + \frac{\rho R \Omega^2}{\sigma}}}$ 和最快增长波长 $\lambda_{max} = \frac{2\sqrt{2}\pi R}{\sqrt{1 + \frac{\rho R \Omega^2}{\sigma}}}$ 。

但是在这里粘性流体的环化发生在形成“花瓣”之前，其成因可能不同，我们猜想粘性液体的环化可能是 Plateau-Rayleigh 不稳定性 [14] 导致的，其一般被用于射流破碎的研究中，射流中其波长的增长率可以被写作 $\omega = \frac{T(1-k^2 R^2)}{2R\mu} \Phi(kR) = \frac{T}{2R\mu} (1-x^2) \Phi(x)$ [15]。此外，粘性液体的环化和形成“花瓣”间应该存在一个理论边界，具体内容需要更进一步地研究。

我们认为所有泛用的两相流模拟方法应该都适用于这个动力学过程，相场方法对于表面张力和表面张力梯度效应可能更加准确，但是局限于计算资源，我们尚未尝试其他方法。

6 写在最后

本文的内容由第 13 届中国大学生物理学术竞赛中山大学代表队的相关研究内容整理而来，本文研究主体由本人独立完成。在此感谢谭子立同学负责了本研究中的部分实验、数据处理和文字整理工作；感谢黄臻成老师对本课题的指导；感谢中山大学物理学院开放物理实验室提供的实验场地；感谢其他相关老师和同学在第 13 届中国大学生物理学术竞赛提供的相关支持。

参考文献

- [1] HK Moffatt. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder. *Journal de mécanique*, 16(5):651–673, 1977.
- [2] JRA Pearson. The instability of uniform viscous flow under rollers and spreaders. *Journal of Fluid Mechanics*, 7(4):481–500, 1960.
- [3] Alfred G Emslie, Francis T Bonner, and Leslie G Peck. Flow of a viscous liquid on a rotating disk. *Journal of Applied Physics*, 29(5):858–862, 1958.
- [4] 吴望一. 流体力学 (第二版). 北京大学出版社, 2021.
- [5] François Gallaire and P-T Brun. Fluid dynamic instabilities: theory and application to pattern forming in complex media. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 375(2093):20160155, 2017.

- [6] PL Evans, LW Schwartz, and RV Roy. Steady and unsteady solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: Two-dimensional theoretical and numerical modeling. *Physics of Fluids*, 16(8):2742–2756, 2004.
- [7] PL Evans, LW Schwartz, and RV Roy. Three-dimensional solutions for coating flow on a rotating horizontal cylinder: Theory and experiment. *Physics of Fluids*, 17(7), 2005.
- [8] Erik B Hansen and Mark A Kelmanson. Steady, viscous, free-surface flow on a rotating cylinder. *Journal of Fluid mechanics*, 272:91–108, 1994.
- [9] T Preney, P Namy, and JD Wheeler. Adaptive mesh refinement: Quantitative computation of a rising bubble using comsol multiphysics®. In *COMSOL Conf*, 2016.
- [10] André Von Borries Lopes. *Dynamics of free surface flows on rotating cylinders*. The University of Manchester (United Kingdom), 2018.
- [11] RC Peterson, PK Jimack, and MA Kelmanson. On the stability of viscous free-surface flow supported by a rotating cylinder. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 457(2010):1427–1445, 2001.
- [12] Ed Fontes. 有限元法 (fem) vs. 有限体积法 (fvm) . <https://cn.comsol.com/blogs/fem-vs-fvm/>, 11 2018. Accessed: [2023/11/16].
- [13] Chia-shun Yih. Instability of a rotating liquid film with a free surface. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 258(1292):63–89, 1960.
- [14] Lord Rayleigh et al. On the capillary phenomena of jets. *Proc. R. Soc. London*, 29(196-199):71–97, 1879.
- [15] S Tomotika. On the instability of a cylindrical thread of a viscous liquid surrounded by another viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, 150(870):322–337, 1935.