



UNIVERSIDAD NACIONAL DE LOJA



PERIODO ACADÉMICO: OCTUBRE 2019 – MARZO 2020

PRACTICA # 2

ASIGNATURA: SIMULACIÓN

RESULTADO DE APRENDIZAJE DE LA PRÁCTICA: Aplica los generadores congruenciales lineales para generar números aleatorios y realiza pruebas de aleatoriedad y uniformidad.

TIEMPO PLANIFICADO: 3 HORAS

NUMERO DE ESTUDIANTES: PARALELO (A y B)

1. Determine el ciclo o período de vida de los siguientes generadores congruenciales:

- $x_{i+1} = (21x_i + 15) \bmod (31)$ con $x_0 = 21$
El periodo será = 30
- $x_{i+1} = (13x_i + 9) \bmod (128)$ con $x_0 = 7$
El periodo será = 128
- $x_{i+1} = (17x_i) \bmod (31)$ con $x_0 = 23$
El periodo será = 30
- $x_{i+1} = (121 + x_i) \bmod (256)$ con $x_0 = 17$
El periodo será = 256
- $x_{i+1} = (21x_i + 15) \bmod (31)$ con $x_0 = 21$
El periodo será = 30

2. Determine el ciclo o período de vida de los siguientes generadores congruenciales:

- $x_{i+1} = (137x_i + 47) \bmod (17)$
Con semilla 17 el periodo será = 4
- $x_{i+1} = (191x_i + 17) \bmod (23)$
Con semilla 17 el periodo será = 22
- $x_{i+1} = (237x_i + 71) \bmod (37)$
Con semilla 17 el periodo será = 9
- $x_{i+1} = (117x_i + 31) \bmod (19)$
Con semilla 3 el periodo será = 6
- $x_{i+1} = (157x_i + 47) \bmod (37)$
Con semilla 15 el periodo será = 3
- $x_{i+1} = (321x_i + 11) \bmod (27)$
Con semilla 20 el periodo será = 18

3. A través del programa desarrollado realice el cálculo de la serie congruencial

$x_{i+1} = (553 + 121x_i) \bmod (177)$ con $x_0 = 23$, haga lo siguiente:

- Determine el ciclo o período de vida.

Constante Multiplicativa 'a'	553
Constante Aditiva 'c'	121
Semilla X0	23
Modulo	177

El periodo será = 87

1		150.0		0,85	32		22.0		0,12	63		50.0		0,28
2		118.0		0,67	33		29.0		0,16	64		54.0		0,31
3		140.0		0,79	34		168.0		0,95	65		7.0		0,04
4		147.0		0,83	35		172.0		0,97	66		161.0		0,91
5		109.0		0,62	36		125.0		0,71	67		33.0		0,19
6		113.0		0,64	37		102.0		0,58	68		121.0		0,68
7		66.0		0,37	38		151.0		0,85	69		149.0		0,84
8		43.0		0,24	39		62.0		0,35	70		174.0		0,98
9		92.0		0,52	40		90.0		0,51	71		13.0		0,07
10		3.0		0,02	41		115.0		0,65	72		2.0		0,01
11		31.0		0,18	42		131.0		0,74	73		87.0		0,49
12		56.0		0,32	43		120.0		0,68	74		106.0		0,60
13		72.0		0,41	44		28.0		0,16	75		104.0		0,59
14		61.0		0,34	45		47.0		0,27	76		39.0		0,22
15		146.0		0,82	46		45.0		0,25	77		139.0		0,79
16		165.0		0,93	47		157.0		0,89	78		26.0		0,15
17		163.0		0,92	48		80.0		0,45	79		159.0		0,90
18		98.0		0,55	49		144.0		0,81	80		145.0		0,82
19		21.0		0,12	50		100.0		0,56	81		44.0		0,25
20		85.0		0,48	51		86.0		0,49	82		36.0		0,20
21		41.0		0,23	52		162.0		0,92	83		130.0		0,73
22		27.0		0,15	53		154.0		0,87	84		176.0		0,99
23		103.0		0,58	54		71.0		0,40	85		78.0		0,44
24		95.0		0,54	55		117.0		0,66	86		79.0		0,45
25		12.0		0,07	56		19.0		0,11	87		23.0		0,13
26		58.0		0,33	57		20.0		0,11	88		150.0		0,85
27		137.0		0,77	58		141.0		0,80					
28		138.0		0,78	59		91.0		0,51					
29		82.0		0,46	60		59.0		0,33					
30		32.0		0,18	61		81.0		0,46					
31		0.0		0,00	62		88.0		0,50					

b. Realice las pruebas de promedios con un nivel de confianza del 95%, frecuencias y series con n = 10.

Prueba de promedios:

Datos:

nivel de confianza; 0.95

Zcritico:1.96

Hipotesis:

Hipotesis nula H_0 : $U = 1/2$

Hipotesis alterna H_1 : $U \neq 1/2$

Tamaño de la muestra :87

sumatoria: 43,64407

Nconfianza: 0.95

Zcritico: 1.96

Promedio: 0,50166

Zestadistico: 0,05351

Prueba de hipotesis:

Zestadistico < Zcritico; por lo tanto no se
puede rechazar H_0 de que los numeros pseudoaleatorios
tiene una media de 0.5

Prueba de frecuencias

Datos:

N: 87

n: 5

gl: 4

χ^2 critico: 9.4877

Hipotesis:

H_0 : Los numero pseudoaleatorios provienen de una
distribucion uniforme

H_1 : Los numero pseudoaleatorios no provienen de una
distribucion uniforme

#intervalo	FE	FO	(FO-FE)	(FO-FE) ² /FE
0,2	17.4	18	0,60000	0,36000
0,4	17.4	14	-3,40000	11,56000
0,6	17.4	20	2,60000	6,76000
0,8	17.4	18	0,60000	0,36000
1,0	17.4	17	-0,40000	0,16000
Total				1,10345

χ^2 calucado: 1,10345

Prueba de hipotesis:

Se acepta la hipotesos H_0 ya que
 χ^2 calculado < χ^2 critico

Prueba de series

Datos:

N:86
n:4
gl:15
 α : 0.05
X^{critico}:24.9958

Hipotesis:

H0: Los numero pseudoaleatorios provienen de una
distribucion uniforme
H1: Los numero pseudoaleatorios no provienen de una
distribucion uniforme

6	7	5	6
4	6	4	4
8	2	4	7
4	6	6	7

	0.25	0.5	0.75	1.0
#intervalo	FE	FO	(FO-FE)	(FO-FE) [*] /FE
1	5.375	6	0.625	0,3906
2	5.375	7	1.625	2,6406
3	5.375	5	-0.375	0,1406
4	5.375	6	0.625	0,3906
5	5.375	4	-1.375	1,8906
6	5.375	6	0.625	0,3906
7	5.375	4	-1.375	1,8906
8	5.375	4	-1.375	1,8906
9	5.375	8	2.625	6,8906
10	5.375	2	-3.375	11,3906
11	5.375	4	-1.375	1,8906
12	5.375	7	1.625	2,6406
13	5.375	4	-1.375	1,8906
14	5.375	6	0.625	0,3906
15	5.375	6	0.625	0,3906
16	5.375	7	1.625	2,6406
Total	86.0	86.0		7,0233

x^{calucado}:7,0233

Prueba de hipotesis:

Se acepta la hipotesos H0 ya que
Xcalculado < Xcritico

4. Realice las pruebas de frecuencias, series y corridas a los primeros 200 aleatorios de los siguientes generadores:

a. $x_{i+1} = (1117x_i + 3057)d \quad (1679567) \text{ con } x_0 = 1457$

Constante Multiplicativa 'a'	3057
Constante Aditiva 'c'	1117
Semilla X0	1457
Modulo	167967

Secuencia generada

1 0.5240553209903148	41 0.5019974161591265	81 0.6752814540951496	121 0.223264099354218388	161 0.5589014508802325
2 0.04376454898878947	42 0.6127513142462507	82 0.34205528466901236	122 0.5249840742526806	162 0.5683854566670834
3 0.7948763745259485	43 0.18741776658510303	83 0.6696553489673567	123 0.8829651062411069	163 0.5609911470705555
4 0.9437270416212709	44 0.9427625664565064	84 0.1430519090059357	124 0.23097989486029993	164 0.9565867104847976
5 0.980216352021528	45 0.03181577333642918	85 0.3163359469419588	125 0.11218870373347145	165 0.29222406782284616
6 0.5280382456077682	46 0.2674692052605571	86 0.04563991736472045	126 0.9675174290187953	166 0.335625450237249
7 0.21956693874391994	47 0.6600105973197116	87 0.5278774997469741	127 0.7074306262539666	167 0.013651491066697625
8 0.22278185595980163	48 0.6590461221549471	88 0.7281668422964035	128 0.6220745741723076	168 0.7392583066911953
9 0.050783784910131156	49 0.7106455434698482	89 0.012687015901933118	129 0.6886233605410587	169 0.91929367078057
10 0.2526805860675014	50 0.4500765031226372	90 0.7908577280060964	130 0.1282632898128799	170 0.2874016919990236
11 0.45120172414819576	51 0.8905201616984288	91 0.6587246304333589	131 0.107527073770443	171 0.5936225568117547
12 0.3303208368310442	52 0.3267844278935743	92 0.727845305748153	132 0.7169146320408175	172 0.7108062893306424
13 0.7974483082966539	53 0.9866461864532914	93 0.029866823006900164	133 0.6146802645757797	173 0.9414765995701536
14 0.8061285847815345	54 0.18404210350842726	94 0.3706680478903594	134 0.08421892395530074	174 0.10061500175629737
15 0.3417337929474242	55 0.6233605410586603	95 0.1388725166252895	135 0.46390064715092844	175 0.586710484797609
16 0.6868551560723237	56 0.6198241321211905	96 0.5399334393065305	136 0.15092845618484582	176 0.5806021420874339
17 0.7228622289901987	57 0.809022010275828	97 0.5831740758601391	137 0.3949406728702662	177 0.9073984770818078
18 0.7964838331338894	58 0.18693552900272078	98 0.7698000202420714	138 0.3402870802002774	178 0.9237945548828044
19 0.8577280060964356	59 0.4685622771139569	99 0.28531199580870054	139 0.26425428804467543	179 0.04660439252948496
20 0.08116475260021314	60 0.4015312531628237	100 0.2054213029940405	140 0.832008668369382	180 0.476278078432073
21 0.1272988146481154	61 0.487691034548453	101 0.9795733685783518	141 0.4571493209975769	181 0.9887358826436146
22 0.15912649508534416	62 0.8781427304172843	102 0.5624378598177023	142 0.5121244053891538	182 0.5722433573261414
23 0.4563455916936065	63 0.48897700143480566	103 0.3791875785124459	143 0.5709573904397888	183 0.35459346181095097
24 0.05512392315157144	64 0.8093435019974161	104 0.18307762834366273	144 0.42339269023081916	184 0.9988628718736419
25 0.5204831901504462	65 0.16973572189775374	105 0.674959623735615	145 0.31810415141069376	185 0.5304494335196794
26 0.12376240571064555	66 0.8887519572296939	106 0.3592550917739794	146 0.4510409782874017	186 0.5905683854566671
27 0.34832437323998167	67 0.9213833669708931	107 0.24946566885161967	147 0.8389207403835277	187 0.37420445682782927
28 0.8342591104204993	68 0.6756029458167379	108 0.6231997951978663	148 0.5873534682407854	188 0.9496746384706519
29 0.33675067126280755	69 0.3248554775640453	109 0.128424035673674	149 0.5462025278774998	189 0.16201992057963766
30 0.45345216619931294	70 0.0898450290830937	110 0.5989271702179595	150 0.7477778373132817	190 0.3015473277489031
31 0.20992218709627486	71 0.6629040228140052	111 0.927009472098686	151 0.9634987824989433	191 0.8368310441932046
32 0.738776069108813	72 0.5042478582102436	112 0.8746063214798145	152 0.42242821506605466	192 0.1991522144230712
33 0.4450933814380206	73 0.4923526645114814	113 0.678178795894431	153 0.3697035727255949	193 0.8149696071252092
34 0.6571171718254181	74 0.12874552739526215	114 0.18725702072430894	154 0.2793643989593194	194 0.3687390975608304
35 0.8138443860996505	75 0.5817273631129924	115 0.4513624700089899	155 0.023617734435930866	195 0.24207135925509177
36 0.9289384224282151	76 0.34719915221442305	116 0.821720932785607	156 0.20606428643721683	196 0.01879535861210833
37 0.7714074788500122	77 0.39445843528788394	117 0.007543148356522412	157 0.9451737543684176	197 0.6423285526323623
38 0.19931296028386528	78 0.866086790857728	118 0.0660546416855692	158 0.4028172200491763	198 0.6050355129281347
39 0.3063697035727256	79 0.63396978787107	119 0.9356897485815666	159 0.4188918061285848	
40 0.578833937618699	80 0.05223049765727792	120 0.41021152964570423		
		121 0.023296242714342698		

Prueba de Frecuencias

Datos:

N: 200
n: 5
gl: 4
 $\chi^2_{\text{critico}}: 9.4877$

Hipotesis:

H0: Los numero pseudoaleatorios provienen de una
distribucion uniforme
H1: Los numero pseudoaleatorios no provienen de una
distribucion uniforme

#intervalo	FE	FO	(FO-FE)	(FO-FE) ² /FE
0,2	40.0	40	0,00000	0,00000
0,4	40.0	39	-1,00000	1,00000
0,6	40.0	47	7,00000	49,00000
0,8	40.0	37	-3,00000	9,00000
1,0	40.0	37	-3,00000	9,00000
Total				1,70000

$\chi^2_{\text{calucado}}: 1,70000$

Prueba de hipotesis:

Se acepta la hipotesis H0 ya que
 $\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$

Prueba de series

Datos:

N:199
n:4
gl:15
 $\alpha: 0.05$
 $\chi^2_{\text{critico}}:24.9958$

Hipotesis:

H0: Los numero pseudoaleatorios provienen de una
distribucion uniforme
H1: Los numero pseudoaleatorios no provienen de una
distribucion uniforme

9	14	11	9
15	9	22	10
15	13	11	12
10	15	12	12

0.25 0.5 0.75 1.0

#intervalo	FE	FO	(FO-FE)	(FO-FE)²/FE
1	12.4375	9	-3.4375	11,8164
2	12.4375	14	1.5625	2,4414
3	12.4375	11	-1.4375	2,0664
4	12.4375	9	-3.4375	11,8164
5	12.4375	15	2.5625	6,5664
6	12.4375	9	-3.4375	11,8164
7	12.4375	22	9.5625	91,4414
8	12.4375	10	-2.4375	5,9414
9	12.4375	15	2.5625	6,5664
10	12.4375	13	0.5625	0,3164
11	12.4375	11	-1.4375	2,0664
12	12.4375	12	-0.4375	0,1914
13	12.4375	10	-2.4375	5,9414
14	12.4375	15	2.5625	6,5664
15	12.4375	12	-0.4375	0,1914
16	12.4375	12	-0.4375	0,1914
Total	199.0	199.0		13,3417

$\chi^2_{\text{calculado}}: 13,3417$

Prueba de hipotesis:

Se acepta la hipotesis H_0 ya que

$\chi^2_{\text{calculado}} < \chi^2_{\text{critico}}$

Prueba de corridas

10111100000011011110000010010001011110011101001110101011100001010111001100100110:

1010001101110001110011001001011110010010001100111100110000001

101100011111000000100111100011011101111001101110100101000011

positivas: 100

negativas: 100

corridas 95

promedio: 101.0

desviacion: 9,950

Valor de Z: -0,603

los numero pseudoaleatorios pasanla prueba de aleatoriedad puesto que $Z < Z_{\text{critico}}$

- Para el generador del problema anterior tome ahora los datos del 101 al 200 y realice las pruebas de Kolmogorov-Smirnov con un nivel de confianza del 95%, póker con un valor de $\alpha = 0.05$ y corridas con un valor de $\alpha = 0.05$

Prueba Kolmogorov-Smirnov

Datos:

n: 200
 alfa: 0.05
 dcritico: 0.242

i	Xi	Fnx	Dn=max Fnx-Xi				
102	0,00754	0,51000	0,50246	155	0,54620	0,77500	0,22880
103	0,01365	0,51500	0,50135	156	0,55890	0,78000	0,22110
104	0,01880	0,52000	0,50120	157	0,56099	0,78500	0,22401
105	0,02330	0,52500	0,50170	158	0,56244	0,79000	0,22756
106	0,02362	0,53000	0,50638	159	0,56839	0,79500	0,22661
107	0,04660	0,53500	0,48840	160	0,57096	0,80000	0,22904
108	0,06605	0,54000	0,47395	161	0,57224	0,80500	0,23276
109	0,08422	0,54500	0,46078	162	0,58060	0,81000	0,22940
110	0,10062	0,55000	0,44938	163	0,58671	0,81500	0,22829
111	0,10753	0,55500	0,44747	164	0,58735	0,82000	0,23265
112	0,11219	0,56000	0,44781	165	0,59057	0,82500	0,23443
113	0,12826	0,56500	0,43674	166	0,59362	0,83000	0,23638
114	0,12842	0,57000	0,44158	167	0,59893	0,83500	0,23607
115	0,15093	0,57500	0,42407	168	0,60504	0,84000	0,23496
116	0,16202	0,58000	0,41798	169	0,61468	0,84500	0,23032
117	0,18308	0,58500	0,40192	170	0,62207	0,85000	0,22793
118	0,18726	0,59000	0,40274	171	0,62320	0,85500	0,23180
119	0,19047	0,59500	0,40453	172	0,64233	0,86000	0,21767
120	0,19915	0,60000	0,40085	173	0,67496	0,86500	0,19004
121	0,20606	0,60500	0,39894	174	0,67817	0,87000	0,19183
122	0,22326	0,61000	0,38674	175	0,68862	0,87500	0,18638
123	0,23098	0,61500	0,38402	176	0,70743	0,88000	0,17257
124	0,24207	0,62000	0,37793	177	0,71081	0,88500	0,17419
125	0,24947	0,62500	0,37553	178	0,71691	0,89000	0,17309
126	0,26425	0,63000	0,36575	179	0,73926	0,89500	0,15574
127	0,27936	0,63500	0,35564	180	0,74778	0,90000	0,15222
128	0,28740	0,64000	0,35260	181	0,81497	0,90500	0,09003
129	0,29222	0,64500	0,35278	182	0,82172	0,91000	0,08828
130	0,30155	0,65000	0,34845	183	0,83201	0,91500	0,08299
131	0,31810	0,65500	0,33690	184	0,83683	0,92000	0,08317
132	0,33563	0,66000	0,32437	185	0,83892	0,92500	0,08608
133	0,34029	0,66500	0,32471	186	0,87461	0,93000	0,05539
134	0,35459	0,67000	0,31541	187	0,88297	0,93500	0,05203
135	0,35926	0,67500	0,31574	188	0,90740	0,94000	0,03260
136	0,36874	0,68000	0,31126	189	0,91929	0,94500	0,02571
137	0,36970	0,68500	0,31530	190	0,92379	0,95000	0,02621
138	0,37420	0,69000	0,31580	191	0,92701	0,95500	0,02799
139	0,37919	0,69500	0,31581	192	0,93569	0,96000	0,02431
140	0,39494	0,70000	0,30506	193	0,94148	0,96500	0,02352
141	0,40282	0,70500	0,30218	194	0,94517	0,97000	0,02483
142	0,41021	0,71000	0,29979	195	0,94967	0,97500	0,02533
143	0,41889	0,71500	0,29611	196	0,95659	0,98000	0,02341
144	0,42243	0,72000	0,29757	197	0,96350	0,98500	0,02150
145	0,42339	0,72500	0,30161	198	0,96752	0,99000	0,02248
146	0,45104	0,73000	0,27896	199	0,98874	0,99500	0,00626
147	0,45136	0,73500	0,28364	200	0,99886	1,00000	0,00114
148	0,45715	0,74000	0,28285				
149	0,46390	0,74500	0,28110				
150	0,46406	0,75000	0,28594				
151	0,47628	0,75500	0,27872				
152	0,51212	0,76000	0,24788				
153	0,52498	0,76500	0,24002				
154	0,53045	0,77000	0,23955				

Dn: 0,50638

Se rechaza H0 y se acepta H1: Los números no provienen de una distribución uniforme

Prueba de corridas

```
1100100101111001001000110011110011000000101100011111000000100111100011011101111001101110100101000011
positivas: 50
negativas: 50
corridas 45
promedio: 51.0
desviacion: 7,000
Valor de Z: -0,857
los numero pseudoaleatorios pasan la prueba de aleatoriedad puesto que Z < Zcritico
```

6. Obtenga una secuencia de aleatorios (200) con el generador congruencial $x_{i+1} = (69069x_i) \bmod(4294967296)$ con $x_0 = 1$ y efectúe lo siguiente:

Constante Multiplicativa 'a'	69069
Constante Aditiva 'c'	69069
Semilla X0	1
Modulo	4294967296

- Prueba de promedios con un nivel de confianza del 90%
- Prueba de frecuencias con $n = 10$
- Prueba de series con $n = 10$
- Prueba de Kolmogorov con un nivel de confianza del 90%
- Prueba de póker con un valor de $\alpha = 0.1$
- Prueba de las corridas con un valor de $\alpha = 0.1$

6. INVESTIGACIÓN COMPLEMENTARIA (a elaborar por el estudiante)

Investigar y resumir acerca del método de generación de números pseudo-aleatorios llamado "Mersenne Twister"

El Mersenne twister es un generador de números pseudo-aleatorios desarrollado en 1997, por Matsumoto y Nishimura. Su nombre proviene del hecho de que se usan números tipos Mersenne. Se dice que un número M es un número de Mersenne si es una unidad menor que una potencia de 2, es decir $M_n = 2^n - 1$. La sucesión es de tipo $2^{2^{n+1}}$ es periódica, con período $2^{2^{19937}-1} = 10^{600}$ números.

La librería random es un generador de números pseudo-aleatorios que usa el algoritmo Mersenne-Twister. Funciones relacionadas con random:

- random.seed().** Inicia la semilla (valor inicial de la sucesión). Por default, la semilla se escoge como el tiempo actual del sistema cuando la librería random se importa.
- random.randrange(inicio, final, tamaño de paso):** Regresa un elemento selecto de forma aleatoria, desde el valor inicial hasta el valor final con el número de pasos que indicamos.
- random.choice(seq):** Regresa un elemento random para una secuencia dada no vacía. Escoge un elemento aleatorio de una lista.
- random.shuffle(seq):** Reacomoda una lista de manera aleatoria.
- random.random():** Regresa un valor flotante tipo random entre el intervalo [0.0,1.0).

- **random.uniform(a,b):** Regresa un flotante escogido aleatoriamente entre el intervalo [a,b].

7. DISCUSIÓN (a elaborar por el estudiante)

Se trata de un generador pseudoaleatorio que es rápido, seguro y eficiente además que un período extenso que reduce la probabilidad de causar problemas.

8. CONCLUSIONES (a elaborar por el estudiante)

Este generador tiene propiedades deseables como un periodo largo ($2^{19937-1}$) por lo que permite muchas pruebas de aleatoriedad.

9. RECOMENDACIONES (elaborar por el estudiante)

Mersenne Twister se debe utilizar en los siguientes sistemas o bibliotecas: Python, Ruby, R, PHP, Common Lisp, C ++ Boost, Julia, Octave, Excel, Mathematica, etc.

BIBLIOGRAFÍA:

- Alberto, Marva; Schwer, Ingrid; Cámara, Viviana; Fumero, Yanina (2005). Matematica Discreta. Universidad Nac. del Litoral. p. 295. [ISBN 9789875084315](#).
- Blanco Castañeda, Liliana (2004). [Probabilidad](#). textos. Univ. Nacional de Colombia. p. 295. [ISBN 9789587014495](#).
- Simulación : Un Enfoque Práctico, 2a. Edición de la 4a. en Inglés by Raúl Coss Bu

Firma del Presidente de Curso de Sexto A