

# **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**



## **MAP3121 - Métodos Numéricos e Aplicações**

**Exercício Programa 1**

**01/07/2021**

### **Integrantes:**

Bruno Carneiro Camara - 11257230

Leonardo Akira Shimabukuro - 9838053

**São Paulo - Escola Politécnica**

**1º Semestre de 2021**

## **Sumário:**

<b>Introdução:</b>	<b>3</b>
<b>Testes:</b>	<b>5</b>
Tarefa a:	5
Tarefa b:	8
Tarefa c:	10
<b>Anexo:</b>	<b>12</b>

## Introdução:

Neste primeiro exercício programa, o grupo trabalhou na obtenção de autovalores e autovetores a partir do algoritmo QR com deslocamentos espectrais em matrizes tridiagonais simétricas. Além disso, o grupo pôde ver a aplicação prática de tal algoritmo observando os modos de vibração do sistema massa-mola.

O algoritmo QR utiliza como base a fatoração QR e a rotação de Givens, que são detalhadas abaixo:

A rotação de Givens consiste em uma transformação linear na qual é gerada uma rotação no plano gerado por dois eixos de coordenadas. A rotação de Givens pode ser representada matricialmente como mostrado na figura abaixo:

$$G(i, j, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & -s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Sendo:  
 $c = \cos(\theta)$   
 $s = \sin(\theta)$

Vale notar que a matriz de Givens modificará apenas duas linhas da matriz tridiagonal uma vez que só existem duas linhas com cosseno e seno e o resto da matriz é basicamente a matriz identidade (conforme mostrado acima).

No nosso caso particular, queremos, ao multiplicar a matriz de rotação de Givens por uma matriz tridiagonal, zerar o elemento imediatamente abaixo à diagonal principal na linha em que temos o primeiro cosseno da matriz de Givens.

Ao repetir sucessivamente esse processo de transformação de Givens, terminamos com uma matriz triangular superior R, ou seja fatoramos a matriz tridiagonal em Q e R, sendo  $Q = Q_1^T Q_2^T Q_3^T Q_4^T Q_5^T \dots Q_{n-1}^T$ .

O algoritmo QR consiste em sistematizar o processo descrito acima e armazenar os autovetores a cada iteração. A matriz de autovetores é obtida por:

$$V^{(k+1)} = V^k + Q^k$$

O Deslocamento espectral é uma melhoria do algoritmo, que visa fazê-lo convergir de forma mais rápida por meio de uma subtração de um múltiplo da matriz identidade,  $\mu_k$ , à matriz tridiagonal simétrica. Dessa forma diminuimos o módulo da razão dos autovalores.

Nos exercícios aplicados do sistema massa-mola utilizamos esses mesmos métodos para encontrar a solução pedida e plotar os gráficos.

## Testes:

### Tarefa a:

A rotina de testes aplica o método QR em uma matriz tridiagonal simétrica, cujos elementos na diagonal principal possuem valor -1 e cujos elementos nas subdiagonais possuem valor 2. O tamanho da matriz a ser testada é recebida como entrada do usuário.

Os autovalores e autovetores de matrizes deste formato são conhecidos analiticamente, através das fórmulas

$$\lambda_j = 2(1 - \cos(\frac{j\pi}{n+1})), j = 1, \dots, n$$

e

$$v_j = (\sin(\frac{j\pi}{n+1}), \sin(\frac{2j\pi}{n+1}), \dots, \sin(\frac{nj\pi}{n+1})).$$

Comparando os resultados obtidos através do nosso método com os resultados previstos analiticamente, foi possível confirmar o correto funcionamento do algoritmo QR implantado com deslocamento espectral. A saída dos testes para matrizes maiores que 8x8 se encontra no anexo deste relatório.

Figura 1 - Saída da rotina de teste do algoritmo QR para uma matriz 4x4

```
Digite o tamanho da matriz a ser testada: 4

Metodo QR sem deslocamento espectral
Convergiu em 45 iteracoes
Autovalores:
3.618 / 2.618 / 1.382 / 0.382
Autovetores:
 0.372  0.601  0.601  0.372
-0.602 -0.372  0.372  0.602
 0.602 -0.372 -0.372  0.601
-0.372  0.602 -0.602  0.372

Metodo QR com deslocamento espectral
Convergiu em 7 iteracoes
Autovalores:
3.618 / 2.618 / 1.382 / 0.382
Autovetores:
 0.372  0.602  0.601  0.372
-0.602 -0.372  0.372  0.602
 0.602 -0.372 -0.372  0.601
-0.372  0.601 -0.602  0.372
```

Figura 2 - Saída da rotina de teste do algoritmo QR para uma matriz 8x8

```
Metodo QR sem deslocamento espectral
Convergiu em 143 iteracoes
Autovalores:
3.879 / 3.532 / 3.000 / 2.347 / 1.653 / 1.000 / 0.468 / 0.121
Autovetores:
 0.161  0.303  0.408  0.464  0.464  0.408  0.303  0.162
-0.303 -0.464 -0.408 -0.161  0.161  0.408  0.464  0.303
 0.408  0.408  0.000 -0.408 -0.408 -0.000  0.408  0.409
-0.464 -0.161  0.408  0.303 -0.303 -0.408  0.161  0.464
 0.464 -0.161 -0.408  0.303  0.303 -0.408 -0.162  0.464
-0.408  0.408  0.000 -0.408  0.408  0.000 -0.409  0.408
 0.303 -0.464  0.408 -0.161 -0.161  0.408 -0.464  0.303
-0.161  0.303 -0.408  0.464 -0.464  0.408 -0.303  0.161

Metodo QR com deslocamento espectral
Convergiu em 15 iteracoes
Autovalores:
3.879 / 3.532 / 3.000 / 2.347 / 1.653 / 1.000 / 0.468 / 0.121
Autovetores:
 0.161  0.303  0.408  0.464  0.464  0.408  0.300  0.166
-0.303 -0.464 -0.408 -0.161  0.162  0.409  0.459  0.311
 0.408  0.408 -0.000 -0.408 -0.408  0.001  0.401  0.415
-0.464 -0.161  0.408  0.303 -0.303 -0.408  0.154  0.467
 0.464 -0.161 -0.408  0.303  0.303 -0.409 -0.168  0.462
-0.408  0.408 -0.000 -0.408  0.408 -0.001 -0.415  0.401
 0.303 -0.464  0.408 -0.161 -0.161  0.408 -0.470  0.295
-0.161  0.303 -0.408  0.464 -0.464  0.408 -0.306  0.156
```

Foi também possível observar uma redução considerável na quantidade de iterações necessárias para a convergência quando o deslocamento espectral é aplicado.

**Tabela 1: Quantidade de iterações para diferentes tamanhos de matrizes**

<b>Iterações</b>	<b>4 x 4</b>	<b>8 x 8</b>	<b>16 x 16</b>	<b>32 x 32</b>
Sem Deslocamento	45	143	473	1600
Com Deslocamento	7	15	31	59

### Tarefa b:

Foi aplicado o algoritmo QR com deslocamento espectral para realizar o cálculo dos autovalores e autovetores a fim de observar os modos de vibração de sistemas massa-mola.

Inicialmente foram realizadas duas simulações. A primeira com as massas nas posições iniciais -2, -3, -1, -3 e -1, a segunda com as massas nas posições iniciais 1, 100, -4, 3 e -2. Os gráficos contendo seus deslocamentos estão ilustrados abaixo.

**Figura 3: Simulação com 5 molas com as posições iniciais -2, -3, -1, -3 e -1.**

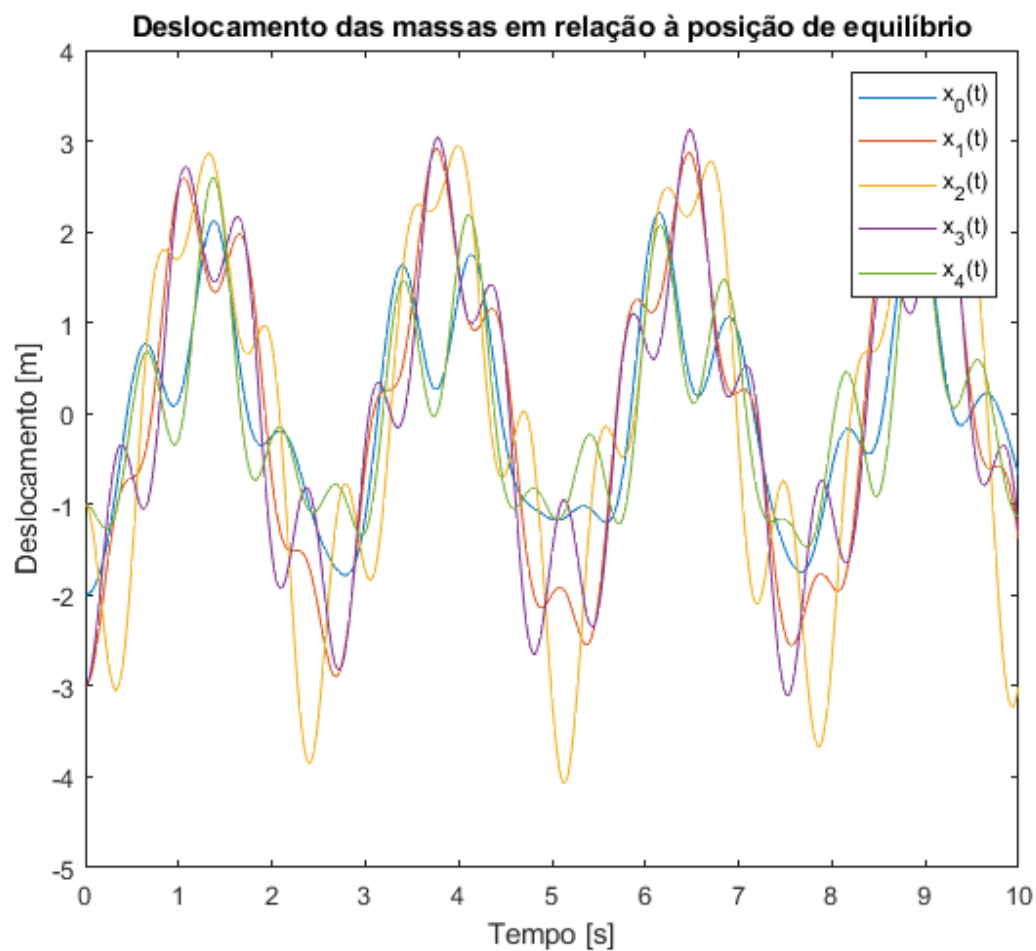
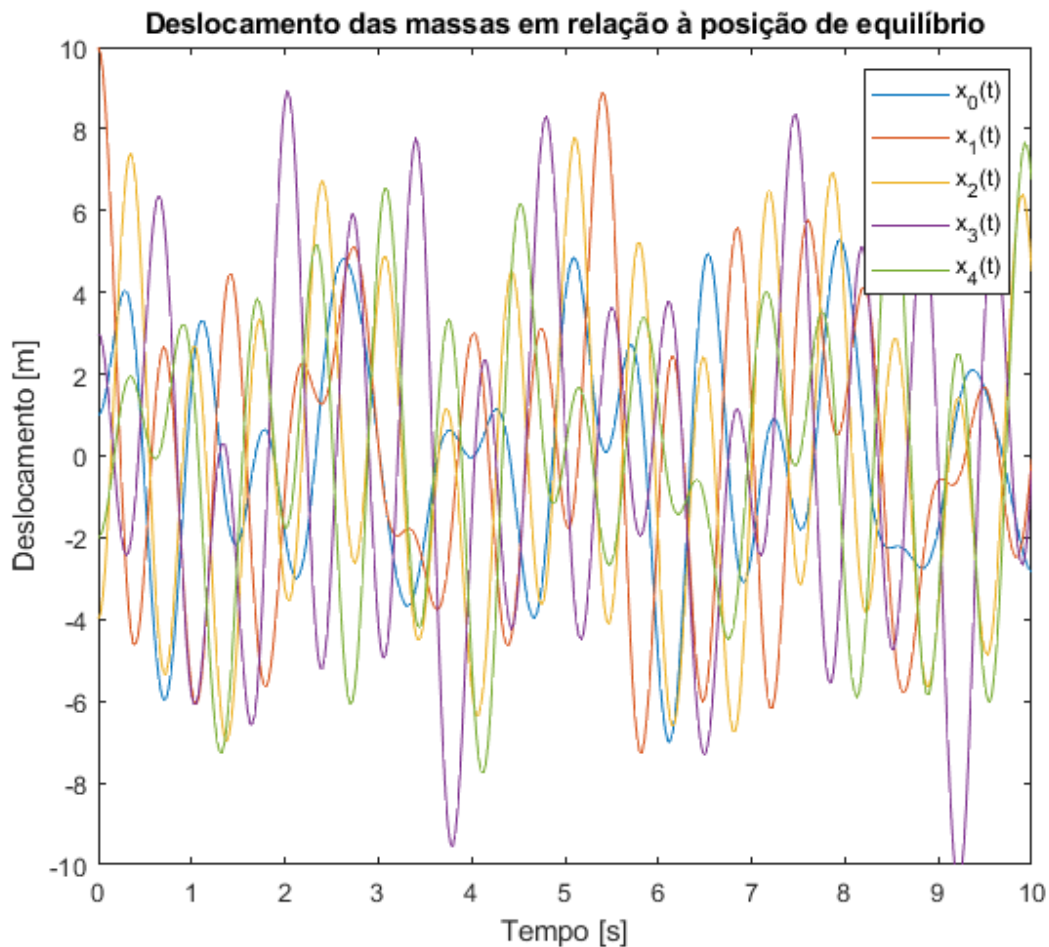




Figura 4: Simulação com 5 molas com as posições iniciais 1, 10, -4, 3 e -2.



Foi realizada também uma simulação onde as posições iniciais das massas correspondem ao modo de maior frequência do sistema. Os valores de  $x_i(0)$  foram obtidos através do cálculo do autovetor associado ao autovalor de maior valor da matriz A. Para os coeficientes das molas especificados no enunciado, foram obtidos os autovalores da figura abaixo, e o autovetor associado ao maior autovalor é (0.185, -0.386, 0.556, -0.591, 0.397).

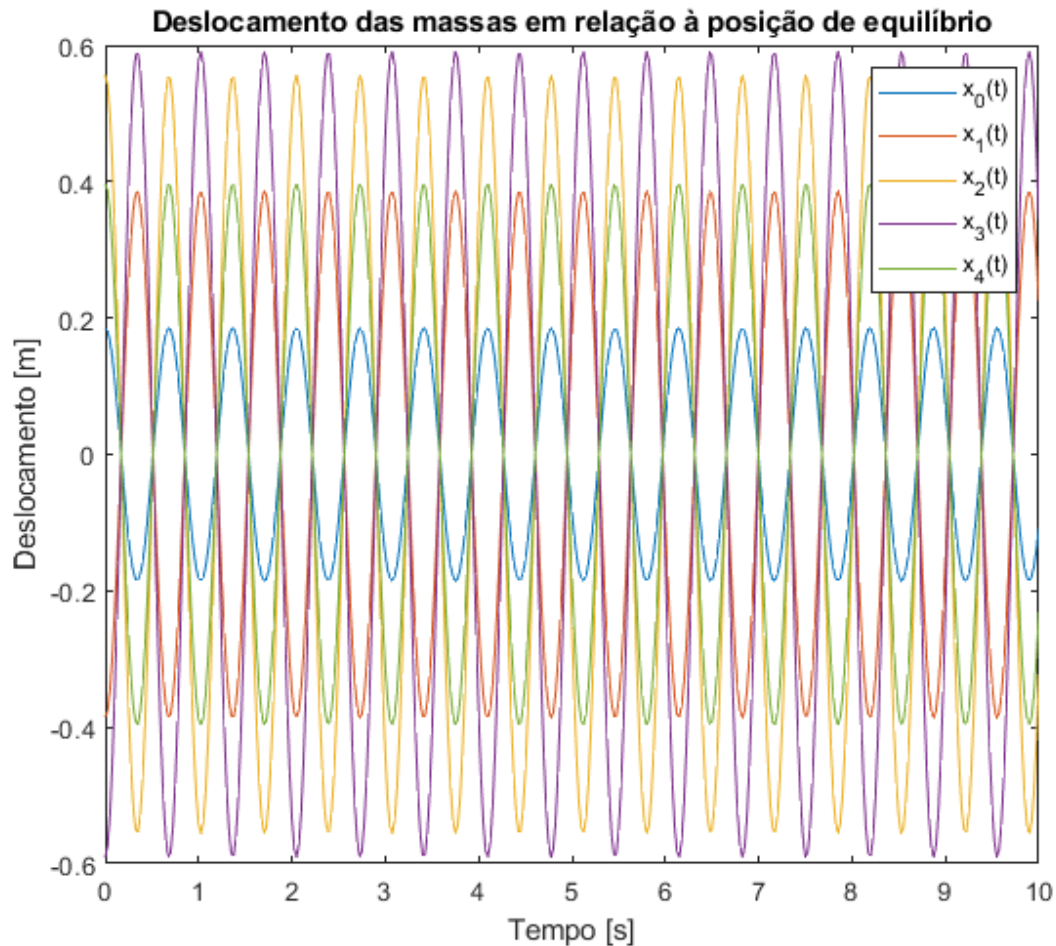
Figura 5: Autovalores e autovetores calculados a partir da matriz A.

```
Matriz de autovalores:
84.744 / 67.099 / 44.763 / 22.394 / 6.000

Matriz de autovetores:
0.185  0.473  0.600  0.534  0.312
-0.386 -0.588 -0.107  0.473  0.519
0.556  0.192 -0.564 -0.067  0.576
-0.591 0.378  0.097 -0.518  0.480
0.397 -0.501  0.549 -0.468  0.268
```

A frequência de vibração para esta entrada corresponde à raiz quadrada de 84,744, equivalente a 9,205 rad/s ou 1,465 Hz, como pode ser observado no gráfico da simulação.

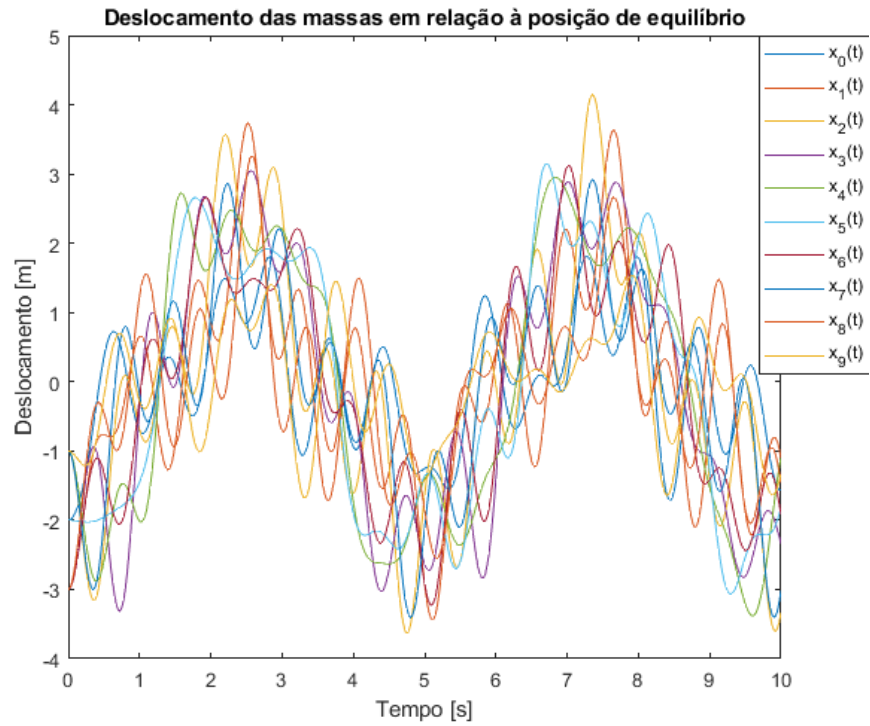
**Figura 6: Simulação com 5 molas com as posições iniciais 0,185, -0,386, 0,556, -0,591 e 0,397.**



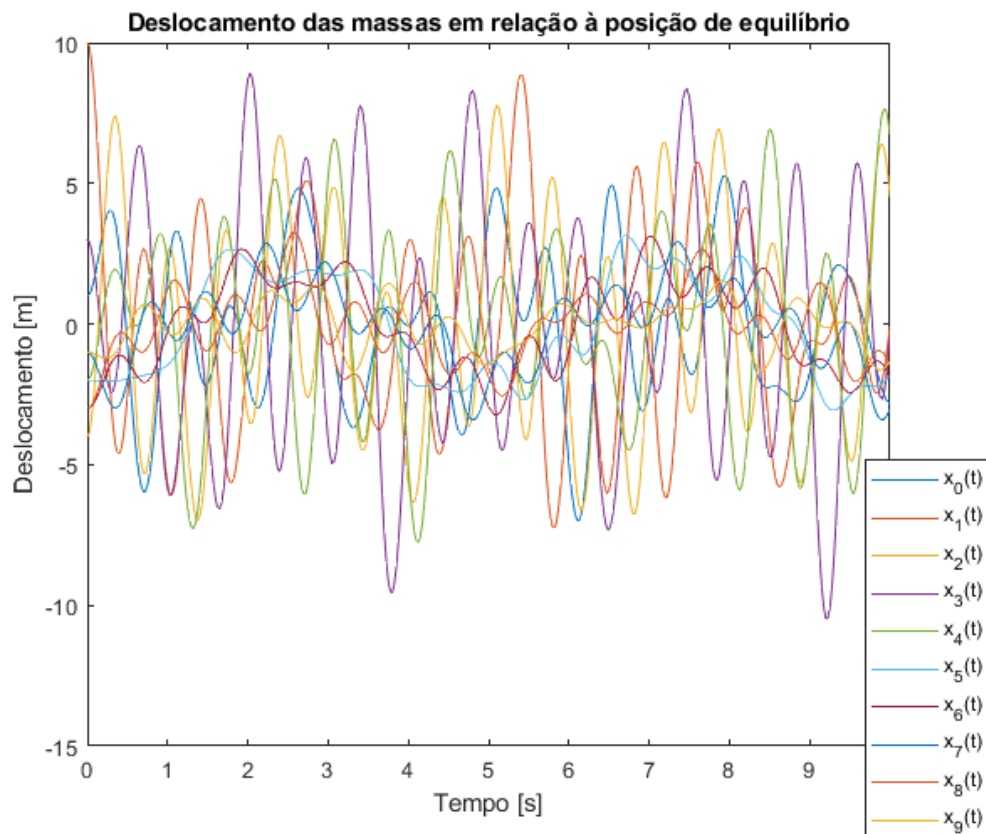
### Tarefa c:

Por fim, foram realizadas simulações com um conjunto adicional de cinco molas, cujas posições iniciais relativas são iguais às do primeiro conjunto. Os coeficientes das 11 molas que conectam estas massas são definidas pela fórmula  $k_i = (40 + 2(-1)^i)$ . As posições iniciais foram as mesmas dos testes com 5 molas, e os gráficos destas simulações estão ilustrados abaixo.

**Figura 7: Simulação com 10 molas com as posições iniciais -2, -3, -1, -3, -1, -2, -3, -1, -3 e -1.**



**Figura 8: Simulação com 10 massas com as posições iniciais 1, 10, -4, 3, -2, 1, 10, -4, 3 e -2.**



## Anexo:

Saída dos testes do método QR com deslocamento espectral

Matriz 16 x 16

```
Metodo QR sem deslocamento espectral
Convergiu em 473 iteracoes
Autovalores:
3.966 / 3.865 / 3.700 / 3.478 / 3.205 / 2.891 / 2.547 / 2.185 / 1.815 / 1.453 / 1.109 / 0.795 / 0.522 / 0.300 / 0.135 / 0.034
Autovetores:
0.063 0.124 0.181 0.231 0.274 0.307 0.330 0.342 0.342 0.330 0.307 0.274 0.231 0.180 0.124 0.064
-0.124 -0.231 -0.307 -0.342 -0.330 -0.274 -0.181 -0.063 0.063 0.180 0.274 0.330 0.341 0.307 0.231 0.126
0.181 0.307 0.342 0.274 0.124 -0.063 -0.231 -0.330 -0.330 -0.231 -0.063 0.124 0.273 0.341 0.306 0.184
-0.231 -0.342 -0.274 -0.063 0.181 0.330 0.307 0.124 -0.124 -0.307 -0.330 -0.181 0.063 0.273 0.340 0.235
0.274 0.330 0.124 -0.181 -0.342 -0.231 0.063 0.307 0.307 0.063 -0.231 -0.342 -0.181 0.123 0.327 0.277
-0.307 -0.274 0.063 0.330 0.231 -0.124 -0.342 -0.181 0.180 0.342 0.124 -0.231 -0.330 -0.064 0.270 0.310
0.330 0.181 -0.231 -0.307 0.063 0.342 0.124 -0.274 -0.274 0.124 0.342 0.063 -0.307 -0.232 0.176 0.332
-0.342 -0.063 0.330 0.124 -0.307 -0.181 0.274 0.231 -0.231 -0.274 0.180 0.307 -0.123 -0.330 0.058 0.342
0.342 -0.063 -0.330 0.124 0.307 -0.181 -0.274 0.231 0.231 -0.274 -0.181 0.307 0.124 -0.330 -0.068 0.341
-0.330 0.181 0.231 -0.307 -0.063 0.342 -0.124 -0.274 0.274 0.124 -0.342 0.063 0.307 -0.230 -0.185 0.328
0.307 -0.274 -0.063 0.330 -0.231 -0.124 0.342 -0.180 -0.181 0.342 -0.124 -0.231 0.330 -0.062 -0.277 0.304
-0.274 0.330 -0.124 -0.181 0.342 -0.231 -0.063 0.307 -0.307 0.063 0.231 -0.342 0.180 0.125 -0.333 0.270
0.231 -0.342 0.274 -0.063 -0.181 0.330 -0.307 0.124 0.124 -0.307 0.330 -0.180 -0.063 0.275 -0.343 0.227
-0.181 0.307 -0.342 0.274 -0.124 -0.063 0.231 -0.330 0.330 -0.231 0.063 0.124 -0.274 0.342 -0.308 0.177
0.124 -0.231 0.307 -0.342 0.330 -0.274 0.181 -0.063 -0.063 0.181 -0.274 0.330 -0.342 0.307 -0.232 0.121
-0.063 0.124 -0.181 0.231 -0.274 0.307 -0.330 0.342 -0.342 0.330 -0.307 0.274 -0.231 0.181 -0.124 0.062

Metodo QR com deslocamento espectral
Convergiu em 31 iteracoes
Autovalores:
3.966 / 3.865 / 3.700 / 3.478 / 3.205 / 2.891 / 2.547 / 2.185 / 1.815 / 1.453 / 1.109 / 0.795 / 0.522 / 0.300 / 0.135 / 0.034
Autovetores:
0.063 0.124 0.181 0.231 0.274 0.307 0.330 0.342 0.342 0.330 0.307 0.274 0.231 0.125 -0.180 -0.061
-0.124 -0.231 -0.307 -0.342 -0.330 -0.274 -0.181 -0.063 0.063 0.181 0.274 0.330 0.342 0.205 -0.325 -0.121
0.181 0.307 0.342 0.274 0.124 -0.063 -0.231 -0.330 -0.330 -0.231 -0.063 0.124 0.275 0.211 -0.409 -0.176
-0.231 -0.342 -0.274 -0.063 0.181 0.330 0.307 0.124 -0.124 -0.307 -0.330 -0.180 0.064 0.136 -0.418 -0.227
0.274 0.330 0.124 -0.181 -0.342 -0.231 0.063 0.307 0.307 0.063 -0.231 -0.342 -0.180 0.000 -0.355 -0.270
-0.307 -0.274 0.063 0.330 0.231 -0.124 -0.342 -0.180 0.181 0.342 0.124 -0.232 -0.330 -0.155 -0.238 -0.304
0.330 0.181 -0.231 -0.307 0.063 0.342 0.124 -0.274 -0.274 0.124 0.342 0.062 -0.308 -0.279 -0.092 -0.328
-0.342 -0.063 0.330 0.124 -0.307 -0.180 0.274 0.231 -0.231 -0.274 0.181 0.307 -0.125 -0.331 0.053 -0.341
0.342 -0.063 -0.330 0.124 0.307 -0.181 -0.274 0.231 0.231 -0.274 -0.180 0.307 0.122 -0.288 0.171 -0.343
-0.330 0.181 0.231 -0.307 -0.063 0.342 -0.124 -0.274 0.274 0.124 -0.342 0.064 0.306 -0.155 0.247 -0.332
0.307 -0.274 -0.063 0.330 -0.231 -0.124 0.342 -0.181 -0.180 0.342 -0.124 -0.231 0.330 0.035 0.275 -0.310
-0.274 0.330 -0.124 -0.181 0.342 -0.231 -0.063 0.307 -0.307 0.063 0.231 -0.341 0.182 0.231 0.262 -0.277
0.231 -0.342 0.274 -0.063 -0.181 0.330 -0.307 0.124 0.124 -0.307 0.330 -0.181 -0.062 0.376 0.221 -0.234
-0.181 0.307 -0.342 0.274 -0.124 -0.063 0.231 -0.330 0.330 -0.231 0.063 0.124 -0.273 0.428 0.165 -0.183
0.124 -0.231 0.307 -0.342 0.330 -0.274 0.181 -0.063 -0.063 0.180 -0.274 0.330 -0.341 0.370 0.107 -0.126
-0.063 0.124 -0.181 0.231 -0.274 0.307 -0.330 0.342 -0.342 0.330 -0.307 0.274 -0.231 0.213 0.052 -0.064
```

Matriz 32x32

### Metodo OR sem deslocamento espectral

Convergiu em 1600 iteracoes

Autovalores:

3.991 / 3.964 / 3.919 / 3.857 / 3.778 / 3.683 / 3.572 / 3.447 / 3.310 / 3.160 / 3.000 / 2.831 / 2.654 / 2.472 / 2.285 / 2.095 / 1.905 / 1.715 / 1.528 / 1.346 / 1.169 / 1.000 / 0.840 / 0.690 / 0.553 / 0.428 / 0.317 / 0.222 / 0.143 / 0.081 / 0.036 / 0.009

Autovetores:

0.021	0.047	0.069	0.091	0.113	0.133	0.152	0.176	0.186	0.201	0.213	0.224	0.233	0.239	0.244	0.246	0.246	0.244	0.239	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.176	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030
-0.047	-0.091	-0.133	-0.170	-0.213	-0.244	-0.264	-0.284	-0.293	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.170	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030	0.013	0.009	0.006
-0.092	-0.186	-0.244	-0.264	-0.284	-0.304	-0.313	-0.304	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003	-0.001
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.170	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030	0.013	0.009	0.006
-0.092	-0.186	-0.244	-0.264	-0.284	-0.304	-0.313	-0.304	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003	-0.001
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.170	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030	0.013	0.009	0.006
-0.092	-0.186	-0.244	-0.264	-0.284	-0.304	-0.313	-0.304	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003	-0.001
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.170	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030	0.013	0.009	0.006
-0.092	-0.186	-0.244	-0.264	-0.284	-0.304	-0.313	-0.304	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003	-0.001
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.213	0.201	0.186	0.170	0.152	0.133	0.113	0.091	0.069	0.046	0.030	0.013	0.009	0.006
-0.092	-0.186	-0.244	-0.264	-0.284	-0.304	-0.313	-0.304	-0.293	-0.284	-0.273	-0.264	-0.252	-0.243	-0.233	-0.224	-0.213	-0.201	-0.186	-0.170	-0.152	-0.133	-0.113	-0.091	-0.069	-0.046	-0.030	-0.013	-0.009	-0.006	-0.003	-0.001
0.009	0.013	0.186	0.224	0.244	0.264	0.284	0.304	0.313	0.304	0.293	0.284	0.273	0.264	0.252	0.243	0.233	0.224	0.2													

0.091	-0.170	0.224	-0.246	0.2
-------	--------	-------	--------	-----

-0.069    0.133    -0.186

0.047	-0.09
0.023	0.04

0.023	0.047	-0.009	0.092	-0.113	0.133	-0.152	0.170	0.180	0.201	-0.213	0.224	-0.233	0.239	-0.244	0.240	-0.240	0.244	-0.239	0.233	-0.224	0.213	-0.201	0.180	-0.170	0.152	-0.133	0.113	-0.092	0.070	-0.047	0.017
-------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	-------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------	--------	-------

---

Método QR com deslocamento espectral																																															
Convergência em 59 iterações																																															
Autovalores:																																															
-3.091 / 3.964 / 3.919 / 3.857 / 3.778 / 3.683 / 3.572 / 3.447 / 3.310 / 3.160 / 3.000 / 2.831 / 2.654 / 2.472 / 2.285 / 2.095 / 1.905 / 1.715 / 1.528 / 1.346 / 1.169 / 1.000 / 0.840 / 0.690 / 0.553 / 0.428 / 0.317 / 0.222 / 0.143 / 0.081 / 0.009 / 0.036																																															
0.023	0.047	0.069	0.092	0.113	0.133	0.152	0.170	0.186	0.201	0.219	0.285	0.233	0.239	0.244	0.246	-0.271	0.215	0.239	0.233	0.224	-0.290	0.043	0.186	0.170	0.152	0.134	0.115	0.112	0.033	0.011	0.037																
-0.047	-0.092	-0.133	-0.170	-0.201	-0.224	-0.239	-0.246	-0.244	-0.233	-0.085	-0.270	-0.152	-0.113	-0.069	-0.023	-0.072	0.015	0.133	0.152	0.186	0.315	0.023	0.244	0.246	0.240	0.225	0.204	0.111	0.066	0.020	0.074																
0.069	0.133	0.186	0.224	0.244	0.244	0.224	0.186	0.133	0.069	0.063	-0.028	-0.133	-0.186	-0.224	-0.244	0.244	0.251	-0.215	-0.186	-0.133	-0.069	-0.054	-0.043	0.133	0.186	0.224	0.245	0.240	0.285	0.099	0.026	0.118															
-0.091	-0.170	-0.224	-0.246	-0.233	-0.186	-0.113	-0.023	0.069	0.152	-0.137	0.293	0.261	0.133	0.047	0.138	-0.031	-0.261	-0.239	-0.243	0.252	-0.073	-0.069	0.024	0.133	0.188	0.240	0.324	0.132	0.026	0.043																	
-0.113	-0.201	-0.244	0.233	0.170	0.069	-0.047	-0.152	-0.224	-0.246	0.036	-0.249	-0.023	0.092	0.186	0.239	-0.213	0.215	0.091	-0.024	-0.133	0.325	-0.015	-0.224	-0.152	-0.046	0.071	0.178	0.326	0.164	0.019	0.174																
-0.133	-0.224	-0.244	-0.186	-0.069	0.069	0.186	0.244	0.224	0.133	0.122	-0.054	-0.224	-0.144	-0.186	-0.069	-0.193	0.047	0.244	0.224	0.133	0.186	0.082	-0.224	-0.244	-0.186	-0.068	0.078	0.289	0.191	0.006	0.201																
-0.152	-0.239	0.224	0.113	-0.047	-0.186	-0.246	-0.200	-0.069	0.092	-0.137	0.293	0.170	0.023	-0.133	-0.233	0.160	-0.215	0.233	0.170	0.244	-0.204	0.110	-0.070	-0.201	-0.246	-0.186	-0.039	0.221	0.213	-0.015	0.222																
-0.170	-0.246	-0.186	-0.023	0.152	0.244	0.200	0.046	-0.133	-0.239	-0.022	-0.223	0.113	0.023	0.224	0.092	0.233	-0.065	-0.233	-0.113	0.069	-0.320	0.019	0.133	0.133	-0.047	-0.201	-0.144	-0.136	0.131	0.226	0.044																
0.186	0.244	0.133	-0.069	-0.224	-0.224	-0.069	0.133	0.244	0.186	0.170	-0.075	-0.244	-0.133	0.069	0.224	-0.096	0.214	-0.133	-0.244	-0.186	-0.146	-0.115	0.244	0.133	-0.070	-0.225	-0.220	0.030	0.228	-0.078	0.242																
-0.201	-0.233	-0.069	0.152	0.246	0.133	-0.092	-0.239	-0.186	0.024	-0.119	0.285	-0.047	-0.170	-0.244	-0.113	-0.255	0.083	0.170	-0.047	-0.224	0.150	-0.153	0.186	0.239	0.091	-0.135	-0.245	-0.067	0.217	-0.117	0.238																
0.213	0.213	-0.000	-0.213	-0.213	-0.000	0.213	0.213	-0.000	-0.213	-0.086	-0.195	0.213	0.213	0.000	-0.213	0.025	-0.211	0.213	0.213	0.000	0.299	-0.036	0.000	0.213	0.213	-0.002	-0.215	-0.145	0.194	-0.159	0.225																
-0.224	-0.186	0.069	0.244	0.133	-0.133	-0.244	-0.069	0.186	0.224	0.205	-0.091	-0.186	0.069	0.244	0.133	0.258	-0.104	-0.069	0.186	0.224	0.176	0.138																									