<u>Gasdynamik FOSAv3 - Leo Rauschenberger</u>

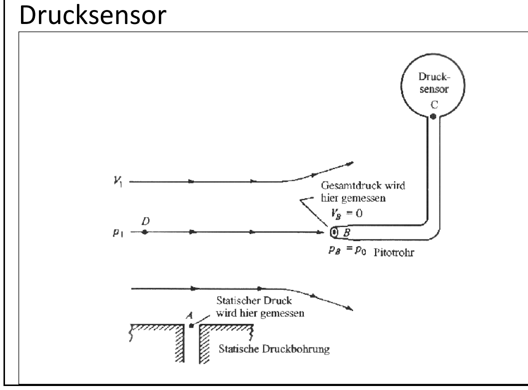
Allgemein: Keine Interpolation / SPD immer auf bereits eingezeichneten Linien / Dauer: 2h (4 Aufgaben = 30min pro Aufgabe) / Taschenrechner / **Geodreieck !!!**

<u>Basic</u>

$1\,Pa = 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}^2} = 10^{-5}\,bar$ $R = 287\frac{J}{kgK}$ $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$ $p = \rho RT$ $Ma = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\gamma RT}}$	$A = \frac{\pi d^2}{4}$ $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma}$ $\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

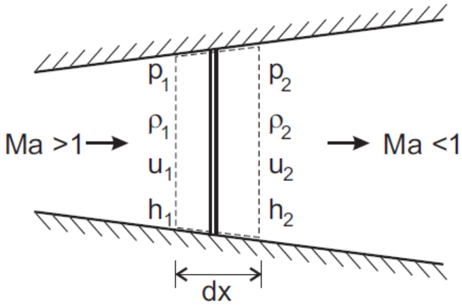
Zustandswerte

$p_0 = p_{tot}$ $\boxed{p_0 = p + \frac{\rho u^2}{2}}$	Druck <u>mit Geschwindigkeit</u> Auch: Ruhedruck (da zur Messung die Strömung auf 0 abgebremst werden muss) p_K Kesseldruck p_t Pitotdruck (wie in LAT) p_{SP} Staupunktdruck (zB an Kugelsonde)
$p = p_{stat}$	Druck <u>ohne Geschwindigkeit</u> Statischer Druck (die Strömung fließt am Messpunkt unabgebremst vorbei) p_s

Drucksensor 	Kugelsonde

Winkel

ν	Prandtl Meyer Winkel
α	Machscher Winkel
β	Strömungswinkel = Winkel zwischen Stromlinie und Horizontale



$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$
$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$
$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}\,.$$

Konti	$\dot m_1 = \dot m_2$ $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$
Impuls	$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_1 u_1^2$
Energiesatz	**Darf über Stoß hinweg aufgestellt werden da $T_0 = konst.$!** Zwischen Ruhezone und Strömung (z.B. Kessel & Öffnung): $c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2}$ Zwischen zwei Strömungszonen: $c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$ $\leftrightarrow T_1\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{Ma_1^2}{2}\right) = T_2\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{Ma_2^2}{2}\right)$

Einlauf:

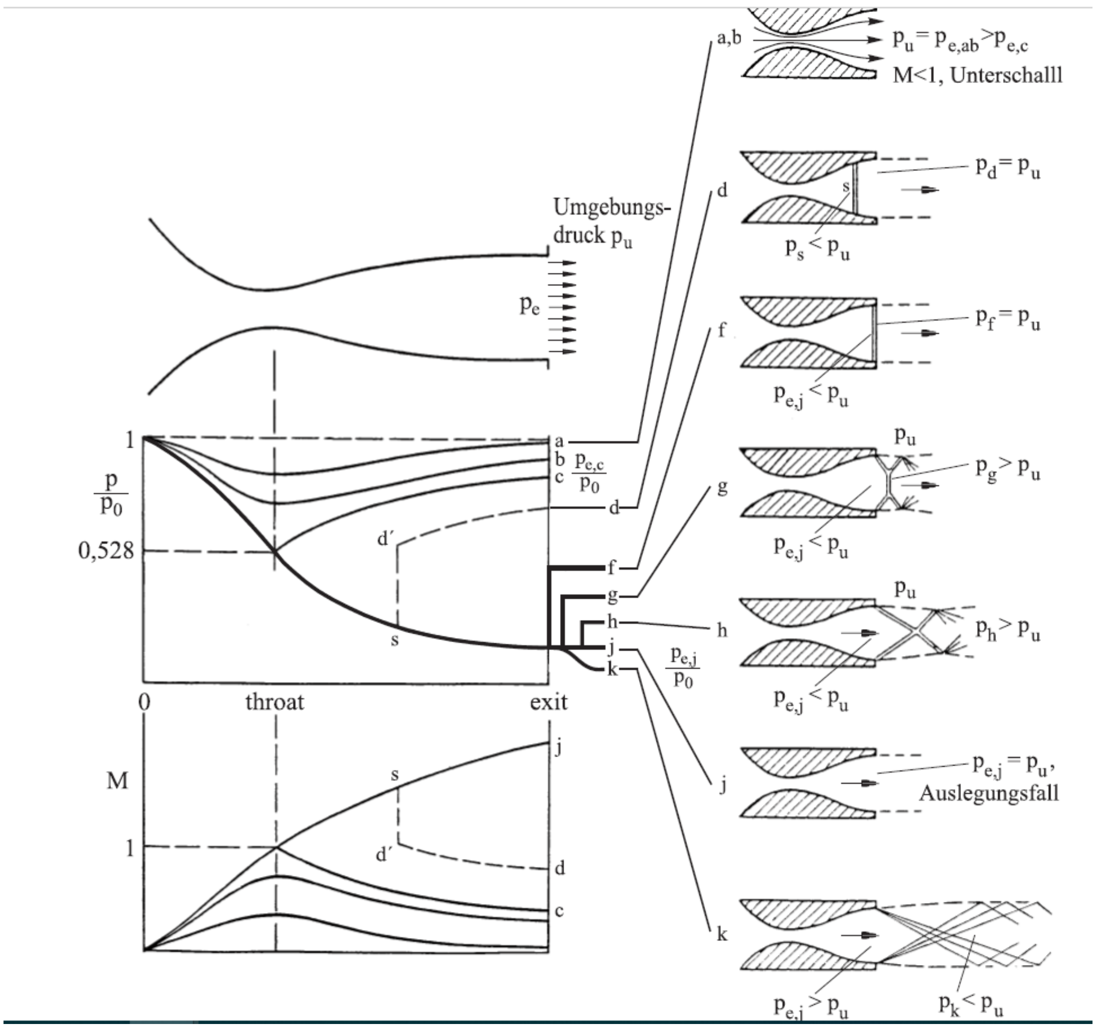
Senkrechter Stoß	$\boldsymbol{Ma_1^* Ma_2^* = 1}$	$Ma_2^* = \frac{1}{Ma_1^*}$
Angepasste Düse		$p_u = p_E$
isentrop		$p_{01} = p_{02}$

Mach‘sche Linien führen zu keiner Ma-Zahl Änderung

$F_A = pA$

Vorgehensweisen:

Gesucht	**Gegeben**	**Vorgehensweise**
M_2	M_1, β	$\xrightarrow{D2} \sigma \rightarrow M_1 \sin\sigma \xrightarrow{D3} \frac{p_2}{p_1}, \frac{p_{02}}{p_{01}}\ etc. \rightarrow \frac{p_2}{p_{02}} \xrightarrow{T1} M_2$
ρ_0		$\frac{p_0}{RT_0}$
ρ^*		$\frac{\rho^*}{\rho_0}\rho_0$
$\dot{m}$		$\rho_\infty u_\infty A_\infty$ $\rho_\infty Ma_\infty \cdot a_\infty A_\infty$
T_e	$u_e, c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$	$T_0 - \frac{u_e^2}{2c_p}$
u_e	M_{ae}	$M_{ae}\sqrt{\gamma R \frac{T_e}{T_o} T_o}$
Schubkraft		$F_N - F_{Druckkräfte} = I_{aus} - I_{ein} = \dot{m}_{aus}u_{aus} - \dot{m}_{ein}u_{ein}$ Eg. $F_{Druckkräfte} = (p_e - p_u)A_e$



Senkrechter Stoß

- Wenn Ma1 bekannt, ist auch die Machzahl nach dem Stoß bekannt!

$$\boxed{\boldsymbol{Ma_1^* Ma_2^* = 1}}$$

- Für D3:

$$\boxed{Ma_{1,n} = Ma_1}$$

- Ruhetemperatur bleibt konstant
- Vor senkrechtem Stoß Ma>1, dahinter Ma<1
- Entropieänderung (Ex.3)

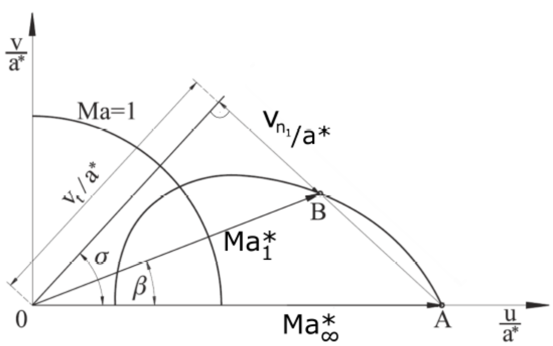
$$\frac{\Delta s}{R} = -\ln\left(\frac{p_{02}}{p_{01}}\right)$$

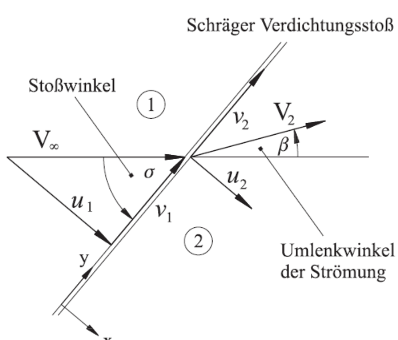
- Wert aus D3 ablesen (vor einsetzen invertieren!!)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2}$$

$$\boxed{T_{01} = T_{02}}$$

Starke & schwache Stöße



<table>
<tr>
<td>


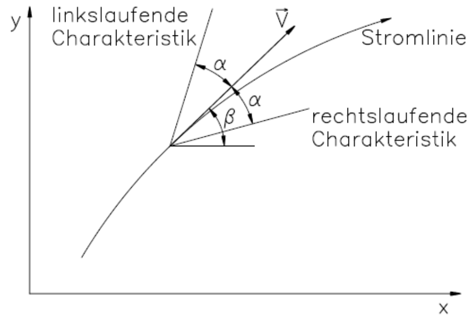
</td>
<td>
Stoßwinkel σ_1
Umlenkungswinkel β_2

Für D3 (d.h. die oben hergeleiteten Beziehungen gelten nun nur für die <u>normale Machzahl</u>) :
$\boxed{Ma_{1,n} = Ma_1 \sin \sigma_1}$

Rechenregel (oder aus D3)
$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(Ma_{1n}^2 - 1)$

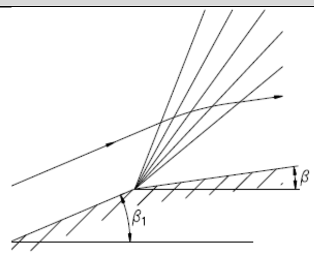
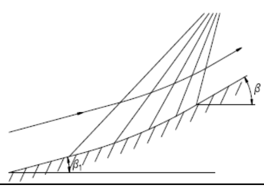
Weiterhin:
$\boxed{T_{01} = T_{02}}$
</td>
</tr>
</table>

PM und Charakteristiken



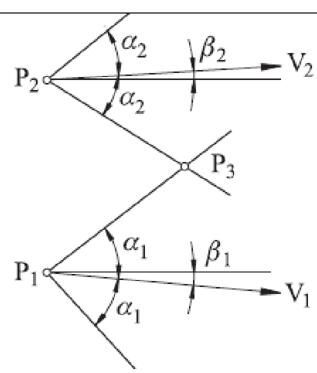
Prandtl-Meyer Eigenschaften:

- Infinitesimal schwache Schrägstöße
- Strömungsgebiet in dem es nicht zur Überschneidung der Mach'schen Linien kommt
- Isentrop
- Prandtl-Meyer Winkel ν ist in Tabelle 1. Er wird für Ma=1 zu null!
- Ruhedruck bleibt gleich bei PM! $\rightarrow \boxed{\boldsymbol{p_{01} = p_{02}}}$
- Nur einfache Gebiete!!!

Prandtl-Meyer Str.	**Expansion (Eckenströmung)**		$\nu = \nu_1 + \lvert\Delta\beta\rvert$ $\boldsymbol{p_{01} = p_{02}}$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_1}\right)$
	Kompression		$\nu = \nu_1 - \lvert\Delta\beta\rvert$ $\boldsymbol{p_{01} = p_{02}}$ $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{Ma_1}\right)$

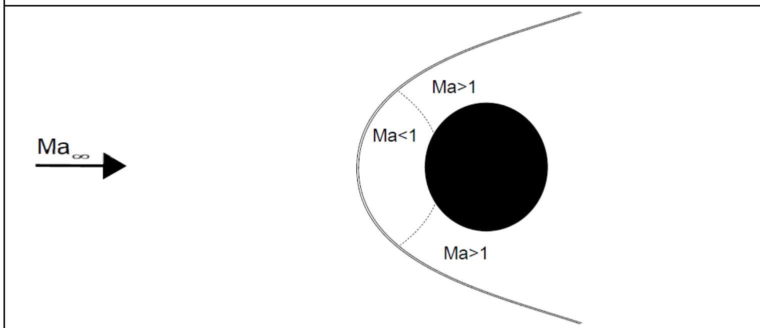
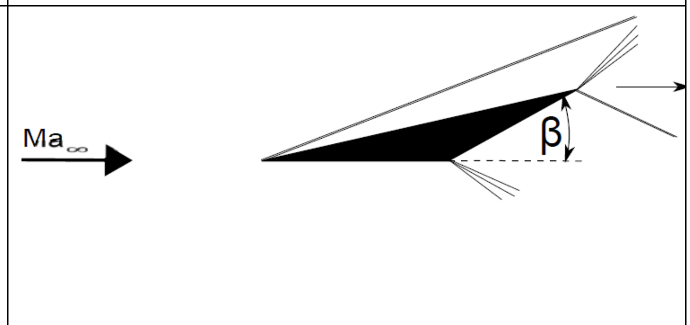
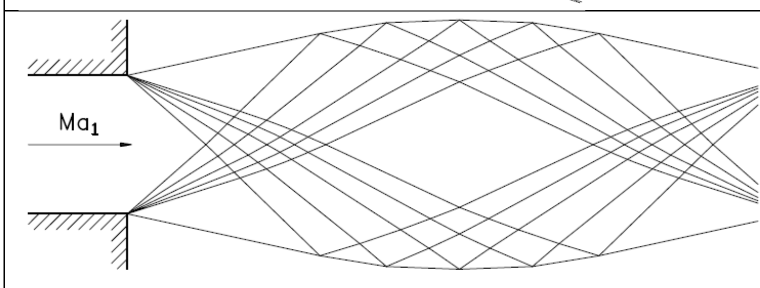
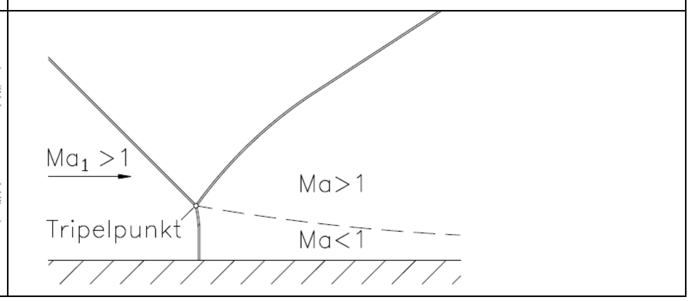
Charakteristiken

- Auch in nicht einfachen Gebieten anwendbar

Charakteristik	**rechtslaufend**		$\nu_2 + \beta_2 = \nu_3 + \beta_3$ $y' = \frac{dy}{dx} = \tan(\beta - \alpha)$ $\delta = \beta - \alpha$
	linkslaufend		$\nu_1 - \beta_1 = \nu_3 - \beta_3$ $y' = \frac{dy}{dx} = \tan(\beta + \alpha)$ $\delta = \beta + \alpha$
einfaches Gebiet			Die Zustände entsprechen einander $\nu_1 = \nu_2$

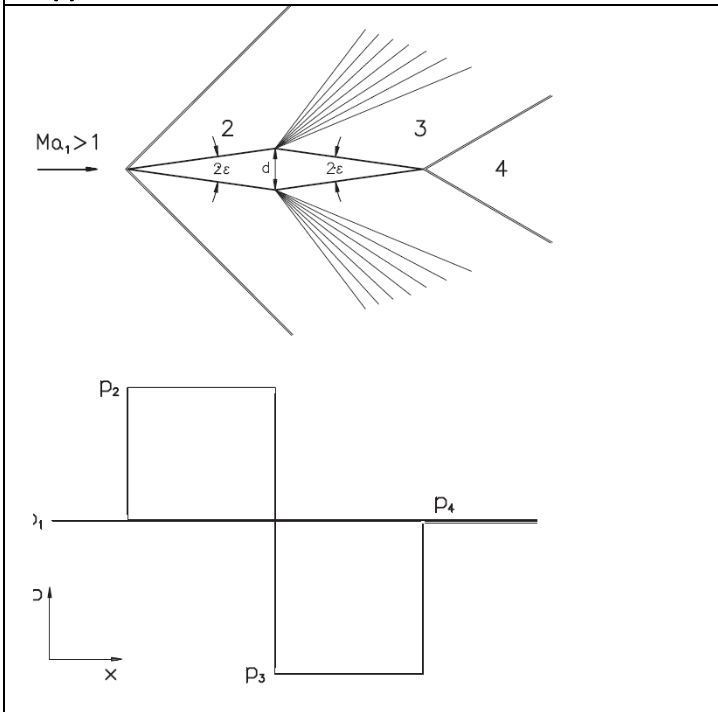
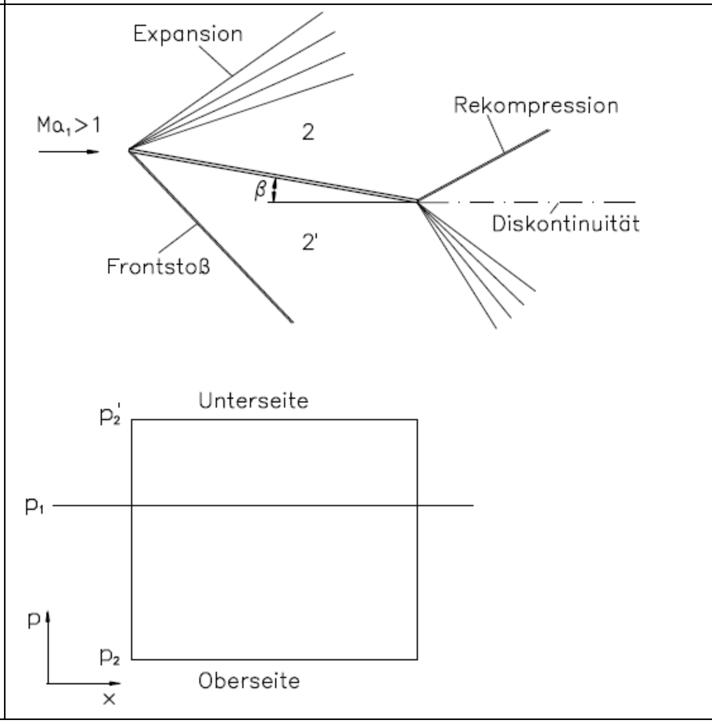
		$\beta_1 = \beta_2$
Auf Symmetrielinie/ Freistrahlrand angepasste Düse		$\beta = 0$
Wand		$\beta = \beta_{Wand}$
Adiabate Strömung (?)		$T_0 = T_{1,0} = T_{2,0} = \cdots$
Schallzustand		$Ma = 1: \quad \nu = 0$
Mittlere Charakteristik		$\frac{\beta_{max}}{2}$

Beispiele:

Am Freistrahlrand werden Expansionen als Kompressionen reflektiert.

An festen Wänden / Symmetrielinien expandieren Expansionen weiter.

Doppelkeil	**Ideal dünne Platte**
	

(Linearisierte) Potentialtheorie

Voraussetzungen:

- homentrope Strömung (adiabat, reibungsfrei, isoenergetisch)
- Kleine Geschwindigkeitsstörungen

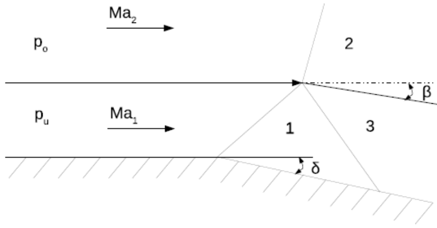
Mit: $\lambda = \sqrt{Ma_\infty^2 - 1}$

Kontur	v', u' linearisierte Werte. Exakt: $\frac{dy}{dx} = \frac{v'}{u_\infty + u'}$ Approx.: $\frac{dy}{dx} = \frac{v'}{u_\infty}$ Mit $v' = -\lambda f'$ $u' = f'$
Druckbeiwert	$\boxed{c_p = -2\frac{u'}{u_\infty}}$
	Exakt: $c_P = \frac{2\frac{dy}{dx}}{\lambda + \frac{dy}{dx}}$ Approx.: $\boxed{c_P = \frac{2}{\lambda}\frac{dy}{dx}}$
	$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2}u_\infty^2}$ Mit $\rho = \frac{p}{RT}$ & $u^2 = Ma^2\gamma RT$: $c_p = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right) = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p}{p_0}\frac{p_0}{p_\infty} - 1\right)$
Auftriebsbeiwert	Bei Profillänge L: $\boxed{c_A = \frac{1}{L}\int_0^L \left(c_{pu} - c_{po}\right) dx}$ Bei symmetrischem Profil ergibt sich: $c_A = 4\frac{\alpha}{\lambda}$
Widerstandsbeiwert	$\boxed{c_W = \frac{1}{L}\int_0^L \left(c_{po}\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_K - c_{pu}\left.\frac{dy}{dx}\right\vert_K\right) dx}$

Vorgehen:

<table>
<tr><td>

In Gebiete aufteilen



</td><td>

Profil ohne Aussenwände:

- Die Charakteristischen Linien gehen unter winkel $\alpha = \arcsin \frac{1}{Ma_\infty}$ vom Profil aus. (Da dies nur eine Appproximation ist, gilt die lin. Potentialtheorie NUR für schwache Störungen/ schlanke Profile!)

Profil mit Außenwänden (im Windkanal):

- Reflexion muss betrachtet werden!
- Reflektierte Wellen dürfen nicht auf das Modell auftreffen!

</td></tr>
<tr><td>

Wellenglg als Lösungsansatz:

Mach'sche Linien mit positiver oder negativer Steigung beschreiben:

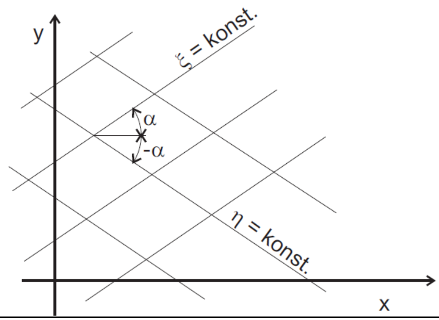
$y \geq 0$: $\phi = f(\xi) = f(x - \lambda y)$

$y \leq 0$: $\phi = g(\eta) = g(x + \lambda y)$

Oder kombiniert:

$\phi(x, y) = f + g$

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

Geschwindigkeiten graphisch beschreiben:

$v' = u_\infty \left.\frac{dy}{dx}\right|_K$

</td><td>

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_K$ gegeben oder leicht aus der Kontur ablesbar

Die Kleinwinkelnäherung kann genommen werden!

</td></tr>
<tr><td>

Geschwindigkeiten aus Wellengleichungen:

$v' = \phi_y = \lambda(-f' + g')$

f' & g' finden und einsetzen in:

$u' = \phi_x = f' + g'$

Wobei:

$u' = 0 \rightarrow c_p = 0$ wenn glatt

</td><td>

Also:

</td></tr>
<tr><td>

Einsetzen in z.B.

$$c_P = -2\frac{u'}{u_\infty}$$

</td><td></td></tr>
<tr><td>

Ggf. gleichsetzen mit:

$$c_p = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p}{p_\infty} - 1\right)$$

</td><td></td></tr>
</table>

Für Benennung und Winkel sind immer <u>das dahinter liegende Gebiet relevant!!</u>

(Dies ist auch beim Einzeichnen des Stromlinienverlaufs zu beachten!!)

Ähnlichkeit

4 Fälle:

- Bei Überschallströmungen gilt natürlich: $\lambda = \sqrt{\boldsymbol{Ma_\infty^2 - 1}}$
- $c_p = c_a$

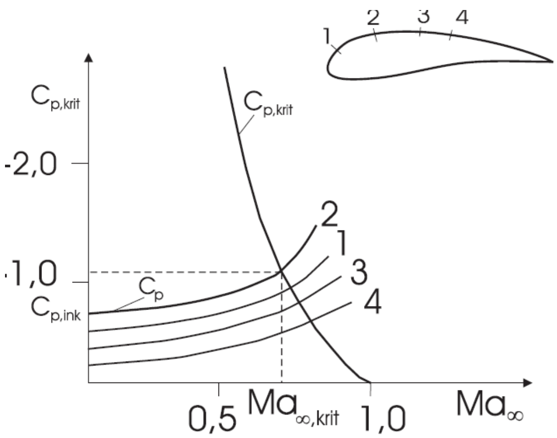
	Allgemein		$\boldsymbol{c_p \frac{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}}{d/t} = konst.}$
1	Potentiallinienanalogie	$c_p = konst.$	$\frac{\lambda}{\left(\frac{d}{t}\right)} = konst.$ Wenn angestellt: $\epsilon_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\epsilon_1$
2		$Ma_\infty = konst.$	$\frac{c_p}{\left(\frac{d}{t}\right)} = konst.$
3	**Prandtl-Glauert-Regel**	$\boldsymbol{\frac{d}{t} = konst.}$ - **Gleiches Profil** - **2D Profil**	$\boldsymbol{c_p\lambda = konst.}$ **Wenn angestellt:** $\boldsymbol{\epsilon_2 = \epsilon_1}$
4	**Göthert Regel/ Stromlinienanalogie**	$\boldsymbol{\left(\frac{d}{t}\right)\lambda = konst.}$ - **Auch auf 3D anwendbar** - **Gleiche Stromlinien** - **Tragflügel**	$\boldsymbol{c_p\lambda^2 = konst.}$ **Wenn angestellt:** $\boxed{\boldsymbol{\epsilon_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\epsilon_1}}$

N.B: Unterschallströmungen sind NIE ähnlich zu Überschallstr.

Prandtl-Glauert erlaubt es Wasser mit Luftversuch vergleichen:

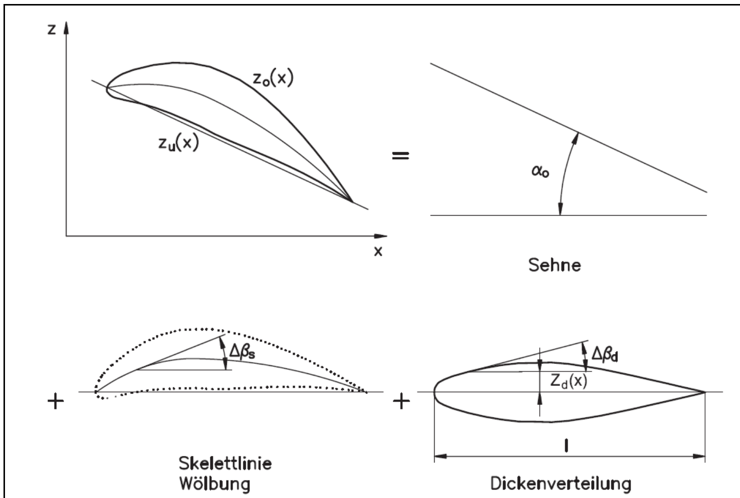
$$M_{inkompr} = 0 \;\&\; M_\infty < 1$$

$$c_{pink.} = c_p\sqrt{1 - Ma_\infty^2}$$



<u>Theorie für schlanke, schwach angestellte Profilen:</u>

Nur anwendbar, wenn die Potentiallinienanalogie gilt. D.h. mit Göthert NICHT kompatibel.

	$\boxed{c_w = \frac{4}{\sqrt{Ma^2-1}}(\epsilon_0^2 + K)}$ $K = \overline{\Delta\beta_d^2} + \overline{\Delta\beta_S^2}$ $K = \overline{\left(\frac{\mathrm{d}z_\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2} + \overline{\left(\frac{\mathrm{d}z_S}{\mathrm{d}x}\right)^2}$ $\boxed{c_a = \frac{4\,\epsilon_0}{\sqrt{Ma^2-1}}}$ $y_d = \frac{y_0 - y_u}{2}$

Fragestellungen:

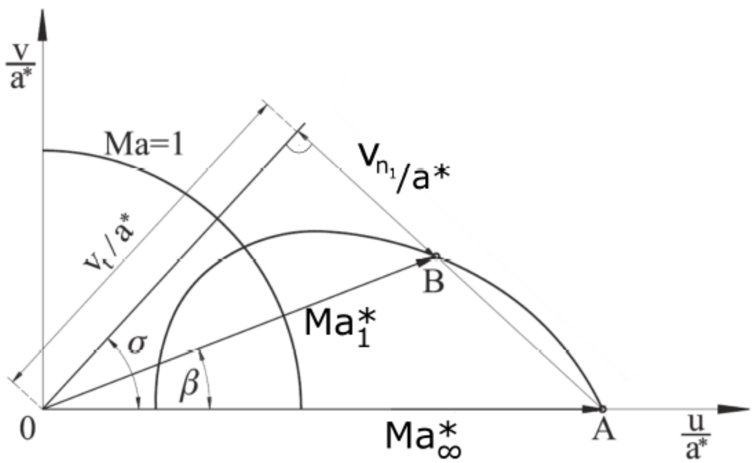
$c_{w2} = ?$	$c_w = \frac{4}{\lambda}(\epsilon_0^2 + K)$ 2x aufstellen und nach $\frac{4}{\lambda}K$ umstellen (K ist i.d.R. NICHT 0!!) ➔ $c_{w2} = c_{w1} + c_{A1}\left(\frac{\epsilon_2^2}{\epsilon_1} - \epsilon_1\right)$
$\frac{c_a}{c_w} = max.$	$$\frac{c_a}{c_w} = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + K}$$ $$\frac{c_a}{c_w} = \frac{\epsilon\left(\frac{c_a}{c_w}\right)_1}{\left(\frac{c_a}{c_w}\right)_1(\epsilon^2 - \epsilon_1^2) + \epsilon_1}$$ ➔ $\frac{\partial\left(\frac{c_a}{c_w}\right)}{\partial\epsilon} = \frac{K - \epsilon^2}{(\epsilon^2 + K)^2} = 0 \rightarrow \epsilon_g = \sqrt{K}$ K ermitteln z.B. anhand früherem Versuch, dann: $$c_w(\epsilon_g) = \cdots$$

$F_A =?$	$F_A = \rho_\infty \frac{u_\infty^2}{2} c_A b_1 t_1$
$F_W =?$	$F_W = \rho_\infty \frac{u_\infty^2}{2} c_W b_1 t_1$

Tabellen

Meist soll der nächstgelegene Wert verwendet werden.

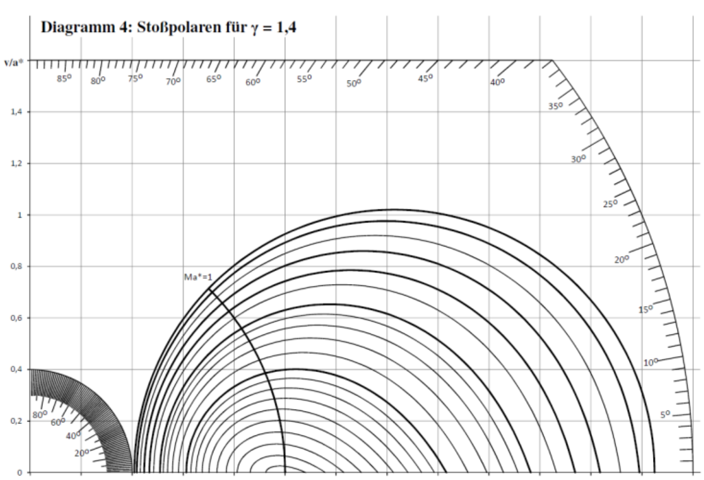
Stoßpolarendiagramm (D4 oder SPD)



Für Werte, welche zwischen den dargestellten Polaren liegen, müssen neue Polaren eingezeichnet werden.

Mit

$$\boldsymbol{a^* = \sqrt{\gamma R T^*}}$$



Skalierung ca. 10cm = Mach 1 in Klausur

Kessel (mit Düse)

Auslegungsfall	**Nicht-Auslegungsfall**

Schub

$F_{Schub} - F_{Druckkräfte} = \dot{I}_{aus} - \dot{I}_{ein} = \dot{m}_{aus} u_{aus} - \dot{m}_{ein} u_{ein}$

- $F_{Druckkräfte} = (p_e - p_u) A_e$
- FD nur wenn die Druckkammer sich bewegt
- Oft $\dot{m}_{ein} \approx 0$

Energiesatz:

Oft kann sich zunutze gemacht werden, dass an einer Stelle die Strömung nicht in Bewegung ist:

Zwischen Ruhezone und Strömung (z.B. Kessel & Öffnung):

$$c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2}$$

Zwischen zwei Strömungszonen:

$$c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$\leftrightarrow T_1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{Ma_1^2}{2} \right) = T_2 \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{Ma_2^2}{2} \right)$$

Stoß entsteht in der Düse; Position

Düse

$\boldsymbol{\beta_{max}}$ bestimmen

Ss16 a1

Durchströmung (mit mehreren verengten Querschnitten)

Wichtig! In den kritischen Querschnitten sind die Verhältnisse bekannt (im Auslegungszustand)!

$$\boldsymbol{Ma = 1}$$

Ma	Ma*	p/p_0	ρ/ρ_0	T/T_0	A*/A	ν [°]
1,00	**1,000**	**0,5283**	**0,6339**	**0,8333**	**1,0000**	**0,00**

- Nicht auf denselben krit. Querschnitt beziehen, sondern auf den gerade davor!
-

Damit Keine Überschallströmung auftritt (im gesamten Kanal)

Im <u>Auslegungsfall</u> tritt im engsten Querschnitt IMMER der Schallzustand auf!

Es lässt sich anhand des Druckverhältnisses im Austrittsquerschnitt feststellen, welcher Fall vorliegt:

- $Ma_{E,Ausleg} = \cdots$ in T1: $\frac{A^*}{Ae} = \cdots$
- In T1 <u>im Unterschall</u> bei $\frac{A^*}{Ae} \rightarrow \frac{p_e krit}{p_0}$
- Wenn $\frac{p_u}{p_0} > \frac{p_e krit}{p_0}$ dann überall Unterschall

$\boldsymbol{p_2}$ damit im $\boldsymbol{A_E}$ ein senkrechter Verdichtungsstoß auftritt: (Ex2)

- Machzahl Mae & p1e vor Stoß entspricht Auslegungsfall
- Aus D3 $\frac{p_2}{p_1}$
- P2 rechnen!

Stoß lokalisieren (Ex3)

Meist über Ruhedruckverlust!

Einlauf

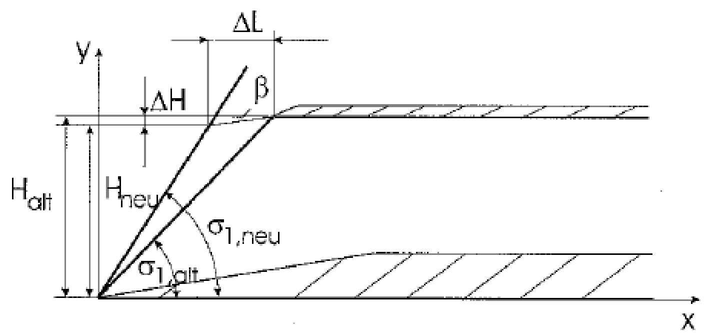
<table>
<tr><th>Auslegungsfall</th><th>Nicht-Auslegungsfall</th></tr>
<tr><td>

$\dot{m} = \rho u A = \rho u h b$

Höhe berechnen:
$tan\,\sigma_0 \; = \frac{H}{L}$

</td><td>

1. Durch Absenkung von Ma_∞ wird der Stoß aus dem TW herausgedrückt



$\Delta H = H - H_n$ mit ΔH aus $\tan\beta = \frac{\Delta H}{\Delta L} = \frac{\Delta H}{L - H_n/\tan\sigma_{1neu}}$

$$\leftrightarrow \tan\beta\left(L - \frac{H_n}{\tan\sigma_{1neu}}\right) = H - H_n$$

Nach H_n auflösen!

Fall: $M_{a\infty} < (M_{a\infty})_{ausl}$

$$\dot{m}_{ausl} = \rho_\infty (M_{a\infty})_{ausl} a_\infty h_{ausl}$$

$$\dot{m} = \rho_\infty M_{a\infty} a_\infty h$$

$$\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{ausl}} = \frac{M_{a\infty}}{(M_{a\infty})_{ausl}} \frac{h}{h_{ausl}}$$

$$\rightarrow \dot{m} = \dot{m}_{ausl} \frac{M_{a\infty}}{(M_{a\infty})_{ausl}} \frac{h}{h_{ausl}}$$

$$h < h_{ausl}$$

$$\rightarrow \dot{m} < \dot{m}_{ausl}$$

2. Durch Erhöhung der Anströmmachzahl geht der Stoß ins TW hinein

Höhe bleibt gleich, aber die Machzahl nimmt zu; also höherer Massenstrom

</td></tr>
</table>

	Fall: $M_{a\infty} > (M_{a\infty})_{ausl}$ $\dot{m}_{ausl} = \rho_\infty (M_{a\infty})_{ausl} a_\infty h$ $\dot{m} = \rho_\infty M_{a\infty} a_\infty h$ $\frac{\dot{m}}{\dot{m}_{ausl}} = \frac{M_{a\infty}}{(M_{a\infty})_{ausl}}$ $\to \dot{m} = \dot{m}_{ausl} \frac{M_{a\infty}}{(M_{a\infty})_{ausl}}$ $\to \dot{m} > \dot{m}_{ausl}$

Note: Bei isentroper Kompression, also schwachen Stößen (siehe SS04)

- ist β nicht bekannt.
- Muss mit α statt σ gerechnet werden
- D3 nicht anwendbar!!

Isentropenbeziehungen!

$$\frac{p_1}{P_\infty} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_\infty}\right)^\gamma =$$
$$\frac{T_1}{T_\infty} = \left(\frac{p_1}{P_\infty}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Isentropenbeziehungen:

$\dot{m} = \rho u A = \rho u h b$

Oft muss h ermittelt werden aus der Einlauflänge

Skizze

Geschwindigkeits-Flächenbeziehung

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{1 - M^2}\frac{dA}{A}$$

$Ma > 1$

$Ma = 1$

$Ma < 1$

Messzeit berechnen:

Messzeitende ist erreicht, wenn ein senkrechter Verdichtungsstoß am Messstreckende Auftritt. D.h. von Auslegungsfall bis senkrechter stoß

Die Machzahl ist bei stoßfreier Düsenströmung nur vom Flächenverhältnis $A_e = A_H$ abhängig und somit konstant $(= Me)$. Der Totaldruck im Kessel ändert sich infolge des Ausströmens.

Massenänderung im Kessel: