

## FOSA STR - Leo Rauschenberger

- 15min Einlesezeit+120min (man darf während der Einlesezeit schreiben!)
- Taschenrechner erlaubt (darf nur nicht kommunikationsfähig sein)

### Basics:

<b>Schubfeldträger</b>	$U = A + (s + b) - 2k$ Bei 3D: ... - 3k
<b>Stat. Unbestimmter Balken</b>	$U = A + V - 3n$ Beachte: 3 auch wenn 2D !!!!
<b>Verschiebungsmethode</b>	$U = A + n - 2k$
<b>Mehrzelliger Hohlquerschnitt</b>	
<b>Längenbezogene Last</b>	$n_x = \frac{P}{b} = \frac{\sigma b s}{b} = \sigma s$ $b \text{ or } U = 2\pi R$
	$\tau = \frac{t_0}{s}$






Kreisring: $I_y = \pi R^3 s$ Rechteck: $I_y = \frac{ab^3}{12}$ Schwerpunkt: $z_{sp} = \frac{\sum A_i z_{si}}{\sum A_i}$ Schubmodul: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$U = 2\pi R$ $A = \pi^2 R$ Spannung: $\sigma = \frac{P}{A}$ Dehnung: $\epsilon = \frac{\sigma}{E}$
---	---

Die Belastung steht bei  $j$  immer im Nenner!

# Schubfeldträger

$A$  = Auflagerkräfte    $s$  = Stäbe    $b$  = Bleche    $k$  = Knoten

$U = A + (s + b) - 2k$    Bei 3D: ... -  $3k$

	$s = 4$ $b = 1$ $k = 4$		$s = 12$ $b = 6$ $k = 8$
	$s = 8$ $b = 5$ $k = 4$		$s = 20$ $b = 11$ $k = 12$
			$s = 28$ $b = 16$ $k = 16$

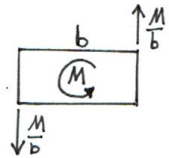
Hinweis:

- 2-fach stat. Unbestimmt z.B. 1-fach innerlich & 1-fach äußerlich
- Nach Aufschneiden  $b=0$  an dieser Stelle!
- System darf nicht kinematisch beweglich werden!!!

	1-fach	2-fach	t
0-System	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lager lösen</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Lager lösen</li> <li>• aufschneiden</li> </ul>	$\frac{N}{mm}$
1-System	<ul style="list-style-type: none"> <li>• keine äußeren Kräfte</li> <li>• Schubfluss durch Einheitskräfte wiederherstellen</li> </ul>		$\frac{1}{mm}$
2-System		<ul style="list-style-type: none"> <li>• keine äußeren Kräfte</li> <li>• Auflagerkräfte durch Einheitskräfte wiederherstellen</li> </ul>	1

Ein Schnitt bedeutet, dass es keine durchgehenden Kräfte geben kann, d.h. Unterbrechung der Schubspannungen  $t$ . Die einzelnen Cubes sind aber in sich intakt und auch das Blech bleibt erhalten.

## Einfache Regeln

Momente in Kräfte umwandeln	
Beim freischneiden versuchen den 3D Träger in 2D-Träger zu wandeln	2/2011 u Vorlesung

## Pfeilrichtung

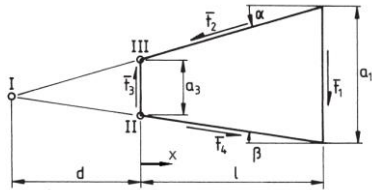
- Richtung des Abbaus der Zugspannung (+)
- Richtung des Aufbaus der Druckspannung (-)

Farbcode für t: braun, N: lila

1. **An 1 Knoten anliegende Bilanzen aufstellen.** Wichtig: Bilanzen müssen komplett sein; zur Not im Kastenträger schneiden!
2. **T in angrenzenden Blechen finden**
3. **T im nächsten Kasten finden**

## Längskräfte:

- Zug ist positiv, Druck negativ!
- Auch bei  $t=0$  kann Normalkraft übertragen werden!!
- Auch nach Einführung der ,1' Kräfte geben die Stäbe keinen Schubfluss weiter, e.g.
- **Trapezfeld**



Gegenüberliegend & parallel		$t_1 a_1^2 = t_3 a_3^2$
Adjunkt		$t_1 a_1 = t_2 a_3 (= t_4 a_3)$ $t_1 a_1 = t_2 a_3 (= t_4 a_3)$
Gegenüberliegend & NICHT parallel		$t_2 = t_4$

Mittlerer Feldschubfluss:

$$t_m = \sqrt{t_1 t_3} = \sqrt{t_2 t_4}$$

Normalkräfte:

Generell:  $N(x) = \int_0^x t dx + N_0$





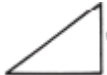
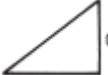
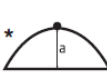
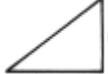

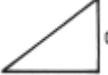


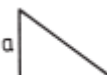




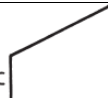
Trapez:

Mit  $\bar{x} = x \cos \alpha$

→  $N(\bar{x}) = \dots$

q		
---	--	--

## Kraftgrößenverfahren (S.19)

		$ac \cdot l$	
		$\frac{1}{2} ac \cdot l$	
or vice-versa			
		$\frac{1}{3} ac \cdot l$	
			
		$\frac{1}{6} ac \cdot l$	
		$\frac{1}{6} a \cdot l (c + 2d)$	Immer die Seite des Trapezes verdoppeln, wo das Dreieck hoch ist (+ - egal)
		$\frac{1}{6} a \cdot l (2c + d)$	
		$\frac{1}{6} l (a(2c + d) + b(c + 2d))$	Vorne*(2Vorne+andere) +hinten*(2Hinten+andere) Steigungen an sich nicht relevant (+ - egal)
		$\frac{1}{6} c \cdot l (c + d)$	

$$t = t_0 + t_1 X_1 + \dots + t_n X_n$$

$$N = N_0 + N_1 X_1 + \dots + N_n X_n$$

$$F = F_0 + F_1 X_1 + \dots + F_n X_n$$

Also:

2-fach	$\delta_{11} X_1 = -\delta_{10}$	$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad [N]$ Negatives Vorzeichen beachten!!
1-fach	$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{bmatrix}$ $\delta_{12} = \delta_{21}$	Taschenrechner!

Verschiebungsbeiwerte  $\delta$  mit dem Verfahren nach Maxwell-Mohr:

$$\delta_{ij} = \sum \frac{1}{EA} \int_l N_i N_j dx + \sum \frac{1}{Gh} (t_i t_j A_S)$$

$$\delta_{10} \quad [mm]$$

$$\delta_{11} \quad \left[ \frac{mm}{N} \right]$$

$A$  = Querschnittsfläche Stäbe

$A_S$  = Blechfläche

$h$  = Dicke Bleche

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Immer von außen (Corners) nach innen

## Stat. unbestimmter Balken

Statische Unbestimmtheit

$$U = A + V - 3n$$

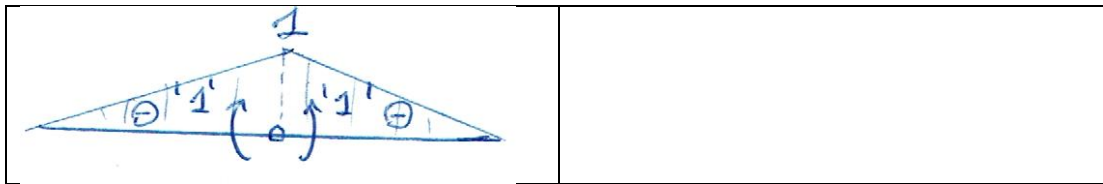
Auflagerkräfte A:

Feste Einspannung	3	
Auflager	2	

Wertigkeit der Verbindungselemente V:

0	Ohne Gelenke
2	1 Gelenk, 2 Zweige
4	1 Gelenk, 3 Zweige
6	1 Gelenk, 4 Zweige
3	Mit Schnitt

Anzahl Teilsysteme, Stäbe, Bleche n



Verschiebungsbeiwerte  $\delta$

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{N_i N_j}{EA} dx + \int_l \frac{M_i M_j}{EI} dx$$

# Verschiebungsmethode (S.21)

Grad der statischen Unbestimmtheit

$$U = A + n - 2k \quad n \text{ Anzahl Stäbe/Balken/Balken mit Stabanteil, } k \text{ Anzahl der Knoten}$$

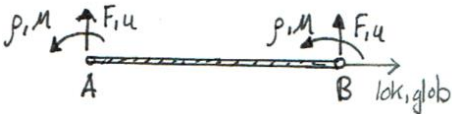

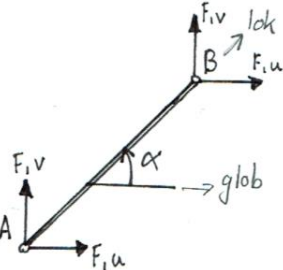
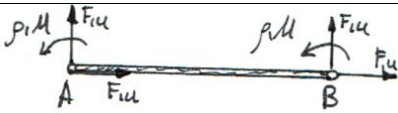
→ Stat. Bestimmtheit für Verschiebungsmethode NICHT relevant!

Grad der kinematischen Unbestimmtheit

$V$  = Anzahl der unbekannten Verschiebungsgrößen. Bei Balken beinhaltet dies auch die Verdrehungen.

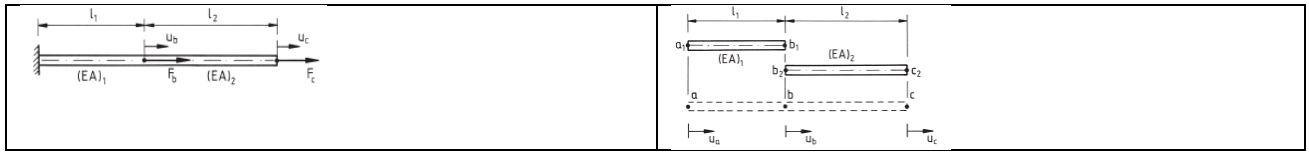
= Anzahl der Glg mit Unbekannten

- Balken haben einen Stabanteil, wenn sie auch Verschiebungen in Längsrichtung haben.

	lokal	global
<b>Balken</b>	 $\frac{2I_y E}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ \varphi_A \\ v_B \\ \varphi_B \end{pmatrix}$ <p>N.B. Bei Senkrechtem Balken von <math>u, \varphi</math> statt <math>v</math> abh.</p>	<p>Meist global=lokal gewählt aufgrund der Komplexität</p> <p>Unbedingt die Richtung beachten (A → B) sonst muss diagonal vertauscht werden!!</p>
<b>Stab</b>	 $\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$ <p>N.B. Bei Senkrechtem Stab: <math>\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 &amp; -1 \\ -1 &amp; 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \end{pmatrix}</math> d.h. von <math>v</math> statt <math>u</math> abh.</p>	 $[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ $= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$
<b>Balken mit Stabanteil</b>	 <p>A ist hier 2x2 Matrix!!!</p> $= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & b_{12} & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & b_{22} & b_{22} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & b_{31} & b_{32} & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{41} & b_{42} & 0 & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$ <p>a=Stabanteil, b=Balkenanteil N.B. Bei Senkrechtem Balken -&gt; anpassen!</p>	<p>Meist global=lokal gewählt aufgrund der Komplexität.</p> <p>Andere Schreibweise:</p> $[B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 & B_{14} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & B_{23} & 0 & B_{25} & B_{26} \\ 0 & B_{32} & B_{33} & 0 & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & B_{52} & B_{53} & 0 & B_{55} & B_{56} \\ 0 & B_{62} & B_{63} & 0 & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}$

### Vorgehen:

- Wenn erwünscht, U,V, berechnen (nicht erforderlich)
- System zerlegen, falls ein mittiger Kraftangriffspunkt vorliegt: (SS12)



- Gesamtsteifigkeitsmatrix aufstellen
- Aus Gesamtsteifigkeitsmatrix die gesuchte Matrix ablesen

	$M = 0$ dort wo nicht fest eingespannt
	$v, v, \phi = 0$ wo fest eingespannt

- Gleichungssystem lösen nach  $v, v, \phi$   
Fx-991; eqn. Mode 5 -> 1 oder 2

$$w = \sqrt{u_D^2 + v_D^2}$$

$$\alpha = \text{atan} \frac{v_D}{u_D}$$

- Gleichungssystem lösen nach  $F, M$   
→ System per Hand lösen.
- Um die Auflagerkräfte an einem Punkt zu bestimmen, muss man die Verschiebung an einem Ort kennen. Diese muss  $\neq 0$  sein.
- In lokale Koordinaten übertragen indem:

$$\begin{pmatrix} F'_{cx} \\ F'_{cy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_{cx} \\ F_{cy} \end{pmatrix}$$

→ Hieraus kann *Stabkraft = Kraft entlang Stab* =  $F'_{cx}$  abgelesen werden.

Ausgehend von:

	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$		
$0^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix}$ = lokale Koordinaten	$60^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} .25 & .433 & -.25 & -.433 \\ .433 & .75 & -.433 & -.75 \\ -.25 & -.433 & .25 & .433 \\ -.433 & -.75 & .433 & .75 \end{bmatrix}$
$30^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} .75 & .433 & -.75 & -.433 \\ .433 & .25 & -.433 & -.25 \\ -.75 & -.433 & .75 & .433 \\ -.433 & -.25 & .433 & .25 \end{bmatrix}$	$90^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \\ u_B \\ v_B \end{pmatrix}$
$45^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} .5 & .5 & -.5 & -.5 \\ .5 & .5 & -.5 & -.5 \\ -.5 & -.5 & .5 & .5 \\ -.5 & -.5 & .5 & .5 \end{bmatrix}$	$120^\circ$	$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} .25 & -.433 & -.25 & .433 \\ -.433 & .75 & .433 & -.75 \\ -.25 & .433 & .25 & -.433 \\ .433 & -.75 & -.433 & .75 \end{bmatrix}$ d.h. Vorzeichenwechsel der Einträge im Vgl zu 60 Grad

In allen 4 Quadranten bis auf das Vorzeichen dieselben Faktoren.



Fehlersuche:

- Richtige Stablänge L verwendet?
- Kraft/Moment mit richtigem Vorzeichen?
- 2x2 und 4x4 Matrizen nicht durcheinanderwerfen!

## Knicken

Elastisches Knicken:

$$P_{krit} = \pi^2 \frac{EI_y}{l^2}$$

$I_z$  wählen wenn diese Richtung weicher!

**Biegedrillknicken:** früher auch als Kippen bezeichnet: Verdrehen des Stabquerschnitts sowie seitliches Ausweichen der Stabachse

# Schalen (S.30)

## Allgemein

Definition

- Dünnwandig  $s \ll L, s \ll R$
- Gekrümmte Struktur

Unterscheidung zwischen:

- Allg. Schale
- Rotationsschale (zB Kegel)
- Zylinderschale



## Örtliches Beulen (der Stringer)

Beulsteifigkeit erhöhen durch:

- Wanddicke (schwer)
- Konstruktiv mit Sicken, Falzen, Spant-, Stringer-Versteifung

Typen:

- Wellschale
- Trapezschale
- Sandwichschale

Beim Beulen bleiben die Kanten des Profils gerade, während die Wände ausbeulen (Beim Knicken weicht stattdessen die Stabachse aus).

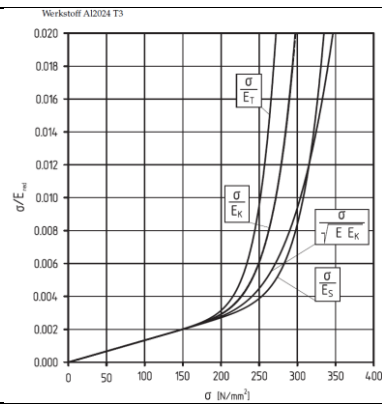
$$\frac{\sigma_{0.2}}{E} = \dots$$

$$\frac{\sigma_{kr,e}}{E} = 0.39 \left( \frac{s}{b} \right)^2 \leq \frac{\sigma_{0.2}}{E}$$

$$\frac{\sigma_{kr,b}}{E} = 3.62 \left( \frac{s}{b} \right)^2 \leq \frac{\sigma_{0.2}}{E}$$

<p>Reduziertes E-Modul:</p> $E_{red} = \sqrt{E \cdot E_K}$ $\frac{\sigma_{0.2}}{E} = \frac{280}{70'000} = 0.004$ $\frac{\sigma_{0.2}}{E} = \frac{280}{75'000} = 0.00373$ <p>Wert muss <math>\leq \sigma_{0.2}</math> sein, sonst wird <math>\sigma_{0.2}</math> genommen!</p> $0.004 \rightarrow 240 \frac{N}{mm^2}$ $0.0045 \rightarrow 250$	<p>FOSA S.24</p>
---	------------------

0.005 → 260  
 0.006 → 270  
 0.007 → 280  
 0.008 → 290  
 0.009 → 297  
 0.010 → 315  
 0.020 → 350





$$P_{krit, \text{örtl}} = \sigma_{\text{örtl}} F n \quad n \text{ die Anzahl der Stringer}$$

$$j = \frac{P_{krit, \text{örtl}}}{P}$$

### Örtliches Versagen / Crippling (der Stringer) / Tragfähigkeit der Stringer

$$g = \# \text{Schnitte} + \text{Wertigkeit}_{\text{Sections}} * \# \text{Sections}$$

1	 g=2	$\sigma_{cripp} = \sigma_{0,2} 0,56 \left[ \frac{gs^2}{F} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{0,2}}} \right]^{0,85} \leq \sigma_{0,2}$	
2	 g=3	$\sigma_{cripp} = \sigma_{0,2} 0,67 \left[ \frac{gs^2}{F} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{0,2}}} \right]^{0,4} \leq \sigma_{0,2}$	

Wenn  $\sigma_{cripp} > \sigma_{0,2}$  dann  $\boxed{\rightarrow \sigma_{cripp} = \sigma_{0,2}}$

$$P_{krit, \text{cripp}} = \sigma_{cripp} F n$$

$$j = \frac{P_{krit, \text{cripp}}}{P}$$

## Teilschaleninstabilität (TSI)

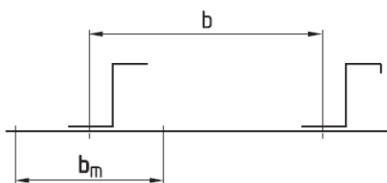
- Haut befindet sich im Nachbeulbereich!
- Spante bleiben unverformt
- Spannungumlagerung von Haut auf Stringer

$$\sigma_{krTSI} = \sigma_{cripp} - \frac{1}{E} \left( \frac{\lambda'}{2\pi} \sigma_{cripp} \right)^2$$

**HOCH ^2 beachten!!!!**

$$\sigma_{krTSI} < \sigma_{02}$$

Sonst mit  $\frac{\sigma_{krTSI}}{E}$  plast. Korrektur!



$$\lambda' = \frac{l_{SP}}{\sqrt{c_{SP} \frac{I_y}{A}}} = \frac{l_{SP}}{\sqrt{c_{SP} i}}$$

**Spante**

- Abstand Spante:  $l_{SP} = \frac{L}{n_{SP}-1}$ 
  - ( $n_{SP} - 1$  da Segmente zählen)
- torsionsweich:  $c_{SP} = 1$  (offene Profile OR gelenkige Lagerung)
- starr:  $c_{SP} = 2$  (geschlossene Profile OR torsionsstarre Lagerung)

**Stringer & Mitttragende Breite:**

- $I_{y, strm}$
- $A_{strm} = F + b_m h$

Annahme:  $b_m = \frac{1}{3} b$  (oder wie gegeben)

$$\text{Abstand Stringer: } b = \frac{u}{n_{str}} - d_{Stringerfüße} = \frac{2\pi R}{n_{str}} - d_{Stringerfüße}$$

Bei Hutprofilen, Rechteckprofilen muss  $d_{Stringerfüße}$  d.h. die Distanz zwischen den gedachten Verbindungspunkten abgezogen werden!!!

$$P_{kr} = \sigma_{krTSI} \cdot (A_{Str} + b_m h) \cdot n_{str}$$

$$j = \frac{P_{kr}}{P} = \frac{\sigma_{krTSI} \cdot (A_{Str} + b_m h) \cdot n_{str}}{P}$$

Beispiel: Schalenhautdicke  $h$ , Anzahl Spante  $n_{SP}$  oder mitttragende Breite  $b_m$  berechnen:

$$\frac{\sqrt{(\sigma_{cripp} - \sigma_{krTSI})E}}{\frac{\sigma_{cripp}}{2\pi}} = \lambda' = \frac{l_{SP}}{\sqrt{c_{SP} i}}$$

Mit:

- $\sigma_{cripp}$  gegeben oder berechnen aus vorherigem
- $\sigma_{krTSI}$  gegeben oder über j:  $\sigma_{krTSI} = \frac{jP}{(A_{Str} + b_m h)n_{str}}$

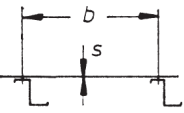
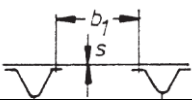
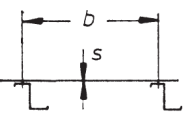
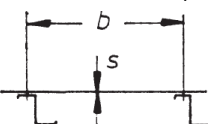
$n_{str}$	$\sigma_{krTSI}$ gegeben: $n_{str} = \frac{1}{F} \left( \frac{jP}{\sigma_{krTSI}} - \frac{1}{3} 2\pi R h \right)$ Resultat aufrunden!
$n_{SP}$	

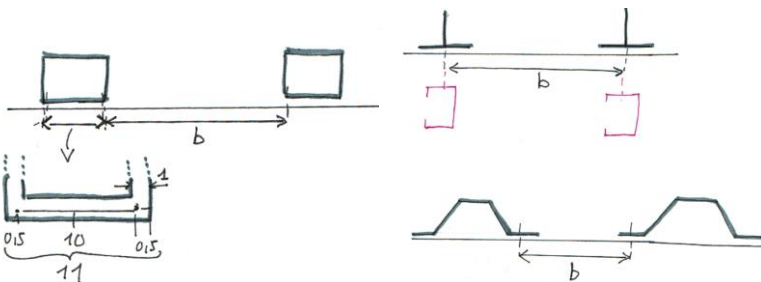
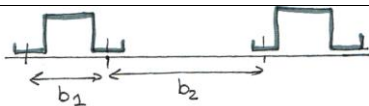
# 1. Iterationsschritt

$$b_m^* = b_{(1)}^3 \sqrt{\frac{\sigma_{krB}}{\sigma_{TSI,1}}}$$

- $b_{(1)}$  Breite des Hautfeldes
- Durch  $b_{mneu}$  ergibt sich neues F, etc!

Szenarien:

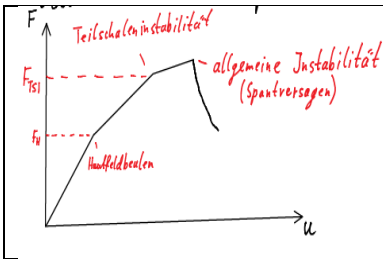
<b>Querschnitt ist torsionsweich</b> 	$\sigma_B = 3.62 E \left(\frac{s}{b}\right)^2 + 3.92 \left(\frac{s}{R}\right)^{1.54}$  Mittragende Breite = Stringerteilung = $\frac{2\pi R}{n_{str}}$
<b>Querschnitt wird durch Anschluss an Haut geschlossen (zB Winter 2015)</b> 	$\sigma_B = 6.32 E \left(\frac{s}{b_1}\right)^2 + 3.92 \left(\frac{s}{R}\right)^{1.54}$  Mittragende Breite = Stringerteilung = $\frac{2\pi R}{n_{str}}$
<b>Querschnitt wird durch Anschluss an Haut <u>NICHT</u> geschlossen</b> <p>→ Betrachten wie 2 torsionsweiche Querschnitte</p> <p>1. Zwischen Spanten:</p>  <p>2. Unter Spanten:</p> 	$\sigma_{Bb1} = 3.62 E \left(\frac{s}{b_{zwischen}}\right)^2 + 3.92 \left(\frac{s}{R}\right)^{1.54}$  Mittragende Breite = Mitte Fuß bis Mitte Fuß 2 Stringer = $\frac{2\pi R}{n_{str}} - d_{HutFu\beta abstand}$  $\sigma_{Bb2} = 3.62 E \left(\frac{s}{b_{unter}}\right)^2 + 3.92 \left(\frac{s}{R}\right)^{1.54}$  Mittragende Breite = Mitte Fuß bis Mitte Fuß eines Stringer = $d_{HutFu\beta abstand}$



## Notes:

- Stringer & Spant sollen an Kreuzungspunkt möglichst nicht unterbrochen werden.

--	--



## Allgemeine Instabilität

Wenn die Stützwirkung der Spante auf die Stringer nicht mehr ausreicht und diese unter Last nachgeben.

Nach Shanley

- **Außenliegende Spante -> konservativ**

$$I_{erf, Spant(außen)} \geq \frac{n_x R^4}{1273 l E}$$

Mit

$$E = E_{spant(hier)}$$

$$n_x = 1.1 \frac{Pj}{\pi D}$$

$$n_x = 1.1 \frac{Pj}{b n_{str}} \text{ mit } b \text{ der Abstand zwischen Hutquerschnitten}$$

- **Innenliegend -> „optimistisch“-> Spantsteifigkeit  $I_{erf}$  verdoppelt**

$$I_{erf, Spant(innen)} \geq 2 I_{erf, Spant}$$

Vorliegendes mit erforderlichem vergleichen:

$$I_{vorh, Spant} > I_{erf, Spant}$$

Nach Van der Neut

In der Praxis für orthotrop versteifte Schalen besser.

## Membranschale

Prinzip: Superposition d.h Lastfälle überlagern

U = axiale Verschiebung

V=radiale

$$\text{Dimloser Schalenparameter: } \kappa = \left[ 3(1 - \nu^2) \frac{r^2}{t^2} \right]^{0.25} \quad \text{HOCH 1/4!} \quad \mu = \nu$$

Gesucht: Verschiebung am OBEREN Rand

	$u' = -\frac{P}{Et} \rightarrow u(x) = \int_x^L u' ds \quad \text{über gesamte Länge integrieren}$ $w(x) = -\nu \frac{Pr}{Et}$ <p><math>x = 0</math> setzen!</p> <p>Streckenrandlast <math>P = F/2\pi R</math></p>
	$u'(x=0) = \dots \text{ (greift nur oben an) } \rightarrow u(x) = \int_0^L u' ds$ $w(x) = \dots$
	$u' \rightarrow u(x) = \int_0^L u' ds \quad \text{über gesamte Länge integrieren}$ $w(x) = \dots$

Ein System mit Festlagern ist einfach unbestimmt, 0-System wie oben und 1 System:



## Mehrzelliger Hohlquerschnitt (S.22) & (S.9)

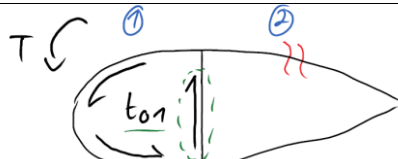

Statische Bestimmtheit:

$$U = n - 1$$

n die Anzahl der Zellen

$$M_T = 2A t_0$$

Erste Bret'sche Formel (**Seite 11**)

0-System		$\rightarrow t_{01} = \frac{M_T}{2A_1}$
1-System		<p>Momentenggw:</p> $\sum M = 0 = M_{T1} + M_{T2}$ $0 = 2A_1 t_{11} + 2A_2 t_{12} \quad \text{mit } t_{12} = 1$ $\rightarrow t_{11} = -\frac{A_2}{A_1}$

Wie sonst:

$$\delta_{ij} = \dots$$

## Rechteckige Platte (S.27)

An belasteten Rändern gelenkig <u>Freie Längsränder!</u>	$\sigma_{kr} = 0.904E \left(\frac{s}{a}\right)^2$ <p>OR Euler-Längsstreifen</p> $P_{krit} = \pi^2 \frac{E^* I_y}{l^2} \quad \text{mit } E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$
An 4 Rändern gelenkig oder eingespannt	$\sigma_{kr} = k_\sigma E \left(\frac{s}{b}\right)^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Gelenkig (belastete können eingespannt sein) <math>\xrightarrow{asym} k_\sigma \approx 3.62</math></li> <li>Eingespannt (belastete können gelenkig sein) <math>\xrightarrow{asym} k_\sigma \approx 6.32</math></li> </ul>
An 3 Rändern...	<p>Buchstabe „C“ stellt die Form der Stützung/Einspannung dar.</p> $\sigma_{kr} = k_\sigma E \left(\frac{s}{b}\right)^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Eingespannt: <math>\xrightarrow{asym} k_\sigma \approx 1.15</math></li> <li>Gestützt: <math>k_\sigma = 0.39 + 0.87 \left(\frac{b}{a}\right)^2</math></li> </ul>
Platte unter Schub	<p><math>\rightarrow b &lt; a</math> !</p> $\tau_{kr} = k_\tau E \left(\frac{s}{b}\right)^2$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Eingespannt: <math>\xrightarrow{asym} k_\tau \approx 8.15</math></li> <li>Gestützt: <math>\xrightarrow{asym} k_\tau \approx 4.85</math></li> </ul>
Allseitig gelenkig gelagert	$n_e = \frac{\pi^2}{b^2} \frac{E s^3}{12(1-\nu^2)}$ $\alpha = \frac{a}{b}$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Einseitiger Druck;</li> </ul>

	<i>Konservativ (S.27):</i> $\sigma_{kr} = 3.62E \left(\frac{s}{b}\right)^2$
--	--

- Interaktion:
- $n_0 = \frac{P}{b} \left[\frac{N}{mm}\right]$  Kraft auf Platten**breite** bezogen  $\rightarrow \sigma = \frac{n_0}{s}$
- $m$  = Anzahl Halbwellen in Längsrichtung -> Aus Girlande im Diagramm ablesen!!!

## Diagonalzugfeld (S.30)

Im Vergleich zum Schubfeld:

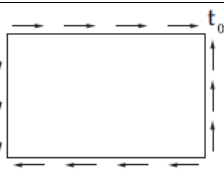
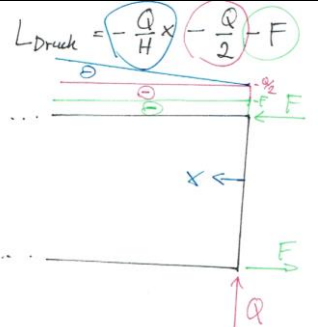
- Zusätzliche Gurtkräfte
- Biegung in den Gurten
- Druckbelastung der Pfosten
- Größere Schubverformungen

Ideales Zugfeld:  $\sigma = 45grad$

**Wird die kritische (Schub)Spannung überschritten?**

$\tau_0 = \frac{Q}{SH}$  (FOSA)  $Q$  ist die Gesamtkraft also z.B.  $2Q, 3Q$ , etc.

$\tau_{krit} = \frac{t_{okrit}}{s} = \frac{kn_e}{s}$  wobei (S.29):

 <p>konstanter Schub</p>	$n_e = \frac{\pi^2 K}{b^2}; \quad \alpha = \frac{a}{b}; \quad K = \frac{E \cdot s^3}{12(1 - \nu^2)}$ $t_{0krit} = kn_e$	$k = \frac{4.0}{\alpha^2} + 5.34$ für $\alpha \geq 1$ , $k = \frac{5.34}{\alpha^2} + 4.0$ für $\alpha \leq 1$	
--	--	--	--

$\Rightarrow j = \frac{\tau_0}{\tau_{krit}} < 1$  Sicherheit gegen Ausbildung Diagonal-Schubfeld

Bedingung zur Ausbildung eines Diagonalschubfeldes:  $\tau_0 = \tau_{krit}$

## Gurt

Gurt wird auf Druck und auf Biegung belastet.

		Maximal bei $x = \frac{B}{2}$
Überlastung Druckgurt	$L = -\frac{Q}{H}x - \frac{Q}{2} - F(\text{Axialkräfte!})$ Mit: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\frac{Q}{H}x</math> durch Momentenschnitt</li> <li>• <math>\frac{Q}{2}</math> Hälfte der senkrechten Last, da Scherkräfte in 45 Winkel wirken.</li> <li>• Es kann vorkommen, dass Lu noch mit einem Sicherheitsfaktor <math>j</math> multipliziert werden muss.</li> </ul>	$\sigma_L = \frac{L\left(\frac{B}{2}\right)}{A_{Gurt}} < 0$
Druckbiegung	$M_V = M_0 \frac{1}{1 - \frac{ P }{P_{krit,Gurt}}}$ Mit: <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>P\left(\frac{B}{2}\right) = \left L\left(\frac{B}{2}\right)\right </math></li> <li>• <math>P_{krit,Gurt} = c^2 \frac{\pi^2 EI_y}{l^2}</math> oder geg.</li> <li>• <math>(M_0 = -EI_y w''</math> wenn <math>w''</math> geg)</li> <li>• <math>M_0</math> aus Momentenschnitt</li> </ul> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>M_0(x) = -\frac{1}{2}px^2</math> </div> $p = \frac{Q}{H}$	$\sigma_B = \frac{M_V\left(\frac{B}{2}\right)}{W_{(y)}} < 0$ W das Widerstandsmoment $W_y = \frac{I_y}{8}$ $M_V\left(\frac{B}{2}\right) = M_{max}$ max. Biegemoment



GESAMT		$\sigma_{Druck,max} = \sigma_L + \sigma_B$ Sicherheit gegen Plastizität: $j = \frac{\sigma_{0.2}}{ \sigma_{Druck,max} }$

Pfosten  $N = \frac{Qa}{H}$

Größere Schubverformungen -> Siehe FOSA

## Rayleigh-Ritz

Anzahl der Koeffizienten = min. Höhe Ansatz + Anzahl RB

$$k = n + m$$

Biegelinie Ansatz 4. Ordnung:

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$$

$$w(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$$

Vereinfachen durch RBs:


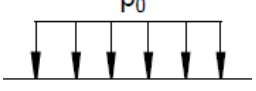
Geometrische RBs:	$w(0) = 0$ $w'(0) = 0$
Statische RBs:	$w''(l) = 0$ $w'''(l) = 0$

**Biegelinie berechnen!** → alle Unbekannten im Ansatz finden

- **Fx-991:** Integral-Taste und von 0 bis 1 integrieren
- Trinom:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$\pi = \pi_i + \pi_a$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial a_i} \stackrel{\text{def}}{=} 0 \text{ wobei } a_i \text{ die Parameter im Ansatz}$$

Innen $\pi_i$		Aussen $\pi_a$	
N.B: u,w bei inner Kraft immer quadriert			
Biegemoment	$\frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx$	Einzelkraft (quer) 	$-Fw(x_F)$
Normalkraft	$\frac{1}{2} \int_0^L EA u'(x)^2 dx$	Einzelkraft (parallel)	$-Fu(x_F)$
		Streckenlast (quer) 	$-\int_0^L q(x)w(x)^2 dx$
		Knickstab	$-\frac{1}{2} \int_0^L F w'(x)^2 dx$

**Beispiel 1:** Biegebalken unter Streckenlast

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx - \int_0^L q(x)w(x) dx$$

Nach gesuchter Variable ableiten:  $(\frac{1}{2} \cdot 2)$ :

$$\rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_i} = EI \int_0^L w''(x) \frac{\partial w''(x)}{\partial a_i} dx - \int_0^L q(x) \frac{\partial w(x)}{\partial a_i} dx$$

### Beispiel 2: Knickstab

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI w''(x)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L F w'(x)^2 dx$$

Nach gesuchter Variable ableiten: ( $\frac{1}{2} \cdot 2$ ):

$$\rightarrow \frac{\partial \pi}{\partial a_i} = EI \int_0^L w''(x) \frac{\partial w''(x)}{\partial a_i} dx - \int_0^L F w'(x) \frac{\partial w'(x)}{\partial a_i} dx$$

→ Daraus  $P_{krit} = \dots$

→ Stabilität:  $\frac{\partial^2 \pi}{\partial a_i^2} < 0$  instabil(labil),  $\frac{\partial^2 \pi}{\partial a_i^2} > 0$  stabil,  $\frac{\partial^2 \pi}{\partial a_i^2} = 0$  indifferent

→ Güte des Ansatzes prüf durch vergleich mit Euler-Lösung

## Stabilität der Schale (S.32)

Axiallast (*)	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\sigma_{xkr,th} = 0.605 E \frac{s}{R}</math> </div> <p>Imperfektionsempfindlichkeit</p> $\rho_{99} = 6.48 \left( \frac{s}{R} \right)^{0.54}$ $\sigma_{kr,r} = \rho_{99} \sigma_{krth}$ <p>Belastung</p> $\sigma_x = \frac{P}{2\pi R s}$
Innendruck (*)	<p>Reduktion der Imperfektionsempfindlichkeit (S.33)</p> $\rho_{99,n} = \rho_{99} + \Delta\rho$ $\sigma_{kr,r} = \rho_{99,n} \sigma_{krth}$ <p>Entlastung (mit Kesselformel):</p> $\sigma_{x,vorh} = \underbrace{\frac{P}{2\pi R s}}_{\sigma_x} - \underbrace{\frac{p_i R}{2s}}_{\sigma_{xpi}} \quad \text{note:}$
Biegemoment (*)	<p>Reduktion der Imperfektionsempfindlichkeit (Erhöhung <math>\rho_{99}</math> um 20%)</p> $\rho_{99,n} = (\rho_{99} + \Delta\rho) \cdot 1,2$ <p>+<math>\Delta\rho</math> nur bei Kombination mit Innendruck</p> $\sigma_{kr,r} = \rho_{99,n} \sigma_{krth}$ <p>Entlastung (mit Kesselformel):</p> $\sigma_{Druck,max} = \frac{M_B}{I_y} R - \frac{p_i R}{2s} \quad \text{mit } I_y = \pi R^3 s$
Außendruck (**)	$\rho_{au} = 0.7 + \Delta\rho$ <p>Belastung ist Umfangsspannung:</p> $\sigma_\phi = \frac{pR}{s}$
Torsion (**)	$\rho_\tau = 0.65 + \Delta\rho$ <p>+<math>\Delta\rho</math> nur bei Kombination mit Innendruck</p> <p>Belastung:</p> $\tau = \frac{M_T}{W_T} \quad \text{mit } W_T = 2Ah_{min} \text{ (S.11)}$

(\*) bei Kombinationen dieser Belastungen ändert sich nur  $\rho_{99}$  indem die Abminderungsfaktoren kombiniert werden:  $\rho_{99,n} = (\rho_{99}(Axial) + \Delta\rho(Innendruck)) \cdot 1,2$  (Biegemoment)

(\*\*) bei zusätzlichem Außendruck/Torsion Gleichung für kombinierte Belastung anwenden!

$$j = \frac{P_{kr}}{P} = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma}$$

**Kombiniert:**

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{xkr}}j\right)^{1.1} + \left(\frac{\sigma_\phi}{\sigma_{\phi kr}}j\right)^{1.1} + \left(\frac{\tau}{\tau_{kr}}j\right)^2 = 1$$

- Bei mit  $p_i$  kombinierter Belastung muss der Abminderungsfaktor für Torsion/Außendruck/Biegemoment ggf. auch um  $\Delta\rho$  erhöht werden!!

### Sandwich (S.37)

Vorteile:

- massengünstige Bauweise bei Steifigkeitsanforderungen
- gute Formhaltigkeit

Nachteile:

- hoher Aufwand bei der Fertigung
- schlecht inspizierbar (Delaminationen)
- schlecht reparierbar

$c$  = „core“ oder  $K$  = „Kern“

$f$  = „Flansch“ oder [ ]

$H = t_f + t_c$  wenn symmetrisch!!!

$G_c = \frac{E_c}{2(1+\nu)}$  pos. Vorzeichen!

### Allg. Instabilität

Rechteckige Platte (S.38)

Zylinder (S.39):

$$n_{kr} = k_x D \frac{\pi^2}{L^2} \quad n \text{ ist bezogen auf Länge, hier auf Umfang}$$

- Kern schubstarr  $R^* \approx 0$

$$k_x = \frac{4\gamma L^2}{\pi^2 R H}$$

$$D = \frac{E_f t_f H^2}{2(1-\nu^2)} \quad (+vernachl.)$$

Mit  $1 - \nu^2 = 1 - 0.09 = 0.91$

- Kern schubnachgiebig  $R^* \neq 0$




$R^* =$

$k_x$  aus Grafik

$$j = \frac{n_{kr}}{n_x}$$

### Knittern:

- Es werden NUR die Deckenschichten betrachtet!
- Ggf. Plastische Korrektur durchführen (S.38)!

Eine Deckenschicht		$\sigma_{kn} = 0.5 \sqrt[3]{E_c G_c E_f} \sqrt[3]{\dots}$
Beide Deckenschichten		<p>Symmetrisch. wenn <math>&gt; \sigma_{02}</math> dann <math>\sigma_{kn,sym} = \sigma_{kn,el} \rightarrow \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{kn,sym}}</math></p> $\sigma_{kn,sym} = \sqrt{\frac{E_f E_c t_f}{3H}}$ <p>Antimetrisch. wenn <math>&gt; \sigma_{02}</math> dann <math>\sigma_{kn,an} = \sigma_{kn,el} \rightarrow \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{kn,an}}</math></p> $\sigma_{kn,an} = \frac{G_c H}{2t_f}$ <p>Die Sicherheit wird mit der kleineren Last (d.h. bei schubstarrem Kern der symmetrischen Last berechnet).</p>
Intracell-Beulen (Honigwabenkern)		$\sigma_{int} = 0.75 E_f \left(\frac{t_f}{d}\right)^{1.5}$ wenn $> \sigma_{02}$ dann $\sigma_{int} = \sigma_{kn,el} \rightarrow \frac{\sigma_{02}}{\sigma_{int}}$

$$j = \frac{F_{kr}}{F} = \frac{\sigma_{kr} \cdot 2t_f \cdot 2\pi R}{F} \quad \text{oder} \quad j = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma_x} = \frac{\sigma_{kr}}{n_x / 2t_f} \quad \text{es gibt 2 Flansche}$$

**Wichtig! Es tragen nur die Deckenlagen!!!**

### Fehlersuche

- Potenzen beachten.
- Ggf. Plastische Korrektur durchführen!

### Allgemeine Instabilität

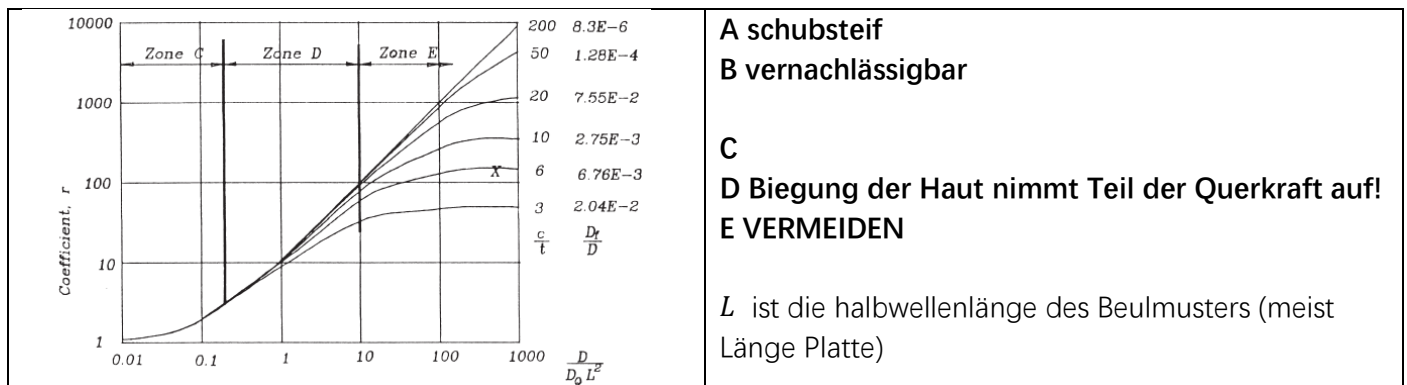
	$\phi_x =$  $\phi_y = \dots$
---	------------------------------------

Bei schubweich muss der gefundene Wert  $n_{kr}$  durch Faktor r geteilt werden!

## Sandwich-Master-Diagramm

Gesamtverformung  $\approx$  (Biegeverformung schubstarr)  $\cdot r$

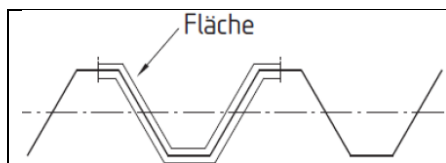
kritische Last  $\approx$  (kritische Last schubstarr)  $/ r$



## Massenvergleich Zylinderschalen:

Dichten gegeben.  $\rho_{Al} = 2.7 \frac{g}{cm^3} = 2700 \frac{kg}{m^3}$

- $m_{isotrop} = BLH\rho$
- $m_{orthotrop} = (BLH + n_{str}A_{Str})\rho$
- $m_{sandwich} = BL(2t_f\rho_f + t_c\rho_c)$



Wellblechschale

$$g = 12!!!$$

$$I_y = \frac{a^3 s}{12} \frac{1}{\cos \alpha} + \dots$$

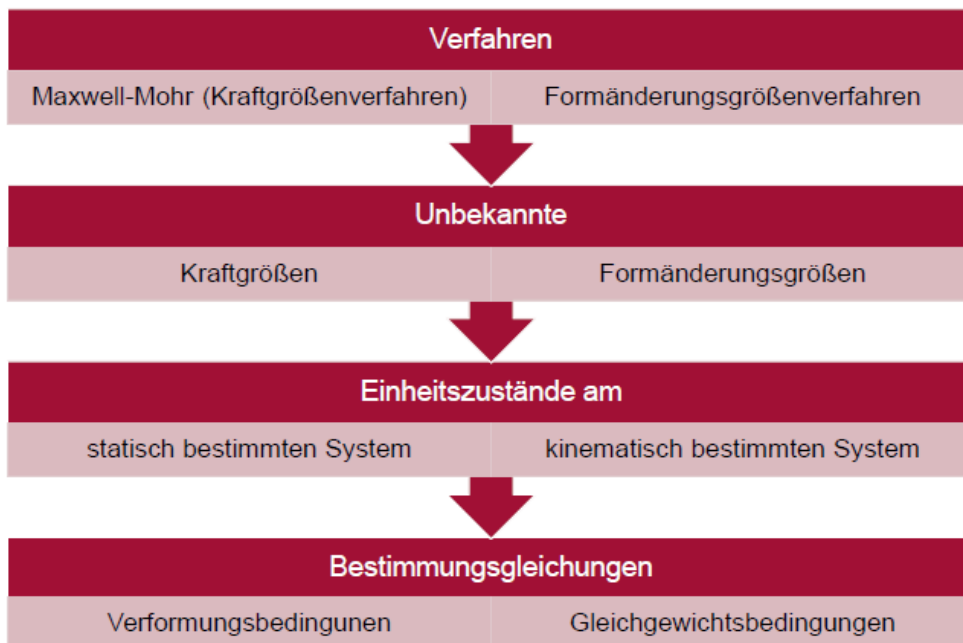
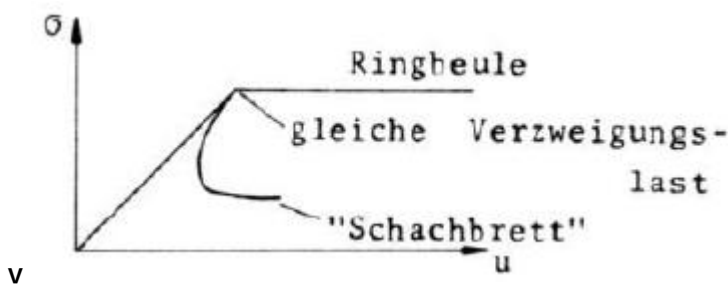
$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a$$

$\Pi_i$  setzt sich zusammen

aus Biegemoment	$\frac{1}{2} \int_0^l EI w''(x)^2 dx$
aus Normalkraft	$\frac{1}{2} \int_0^l EA u'(x)^2 dx$
aus Einzeldehnfeder	$\frac{1}{2} c_F w_c^2$
aus Einzeldrehfeder	$\frac{1}{2} c_M w_c'^2$
aus Streckdehnfeder	$\frac{1}{2} \int_0^l c_F w(x)^2 dx$
aus Streckdrehfeder	$\frac{1}{2} \int_0^l c_M w'(x)^2 dx$

$\Pi_a$  setzt sich zusammen

aus Einzelkraft (quer zum Stab)	$- F w(x_F)$
aus Einzelkraft (in Stabrichtung)	$- F u(x_F)$
aus Einzelmoment	$- M^L w'(x_M)$
aus Streckenlast (quer zum Stab)	$- \int_0^l q(x) w(x) dx$
aus Streckenlast (in Stabrichtung)	$- \int_0^l p(x) u(x) dx$
aus Streckenmoment	$- \int_0^l m^L(x) w'(x) dx$
bei Knickstäben nur	$+ \frac{1}{2} \int_0^l S_0 w'(x)^2 dx$ mit $S_0 = \lambda F$



## Elastische Bettung

Bettungsziffer:  $\beta = 1mm \frac{s E}{R^2}$