Algoritmos y Estructuras de Datos III

Trabajo Práctico 1

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Algoritmo greedy

Informe

Integrante	LU	Correo electrónico
Braginski Maguitman, Leonel Alan	385/21	leobraginski@gmail.com
Deganis, Gaston Lucas	295/20	gastondeganis@gmail.com

Parte I

Problemática

1. Actividades

Llamamos actividad a la tupla$(s_i,\, t_i)$ donde $s_i,\, t_i \in \mathbb{N}$. s_i representa el inicio de una actividad y t_i el final de la misma. Una actividad es un intervalo en la recta $\mathbb{N}$.
Definimos $A = \{A_1, ..., A_n\}$ como un conjunto de actividades. En particular para este problema suponemos que $1 \leq s_i < t_i \leq 2n$ para toda actividad en A

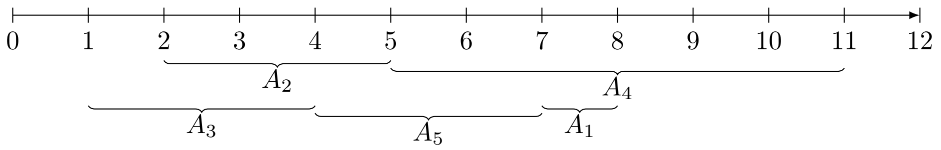
2. Problema

Dado A el conjunto de actividades previamente mencionado se busca diseñar un algoritmo que determine el subconjunto de actividades S que contenga la máxima cantidad de actividades de forma que no se solapen en la recta $\mathbb{N}$.

3. Ejemplo

Supongamos que tenemos el conjunto A el cual contiene las siguientes actividades

Actividad	s_i	t_i
1	7	8
2	2	5
3	1	4
4	5	11
5	4	7



Se puede ver como en este caso la solución óptima va a ser tomar $\{A_3,\, A_5,\, A_1\}$. Ya que no existe otra solución con cardinalidad mayor que cubra más o lo mismo que esta sin que se solape ningún intervalo.

Parte II

Algoritmo

Este problema se puede resolver usando una estrategia greedy en $O(n)$.
Esta solución se construye mediante un ciclo sobre los elementos del conjunto, en el cual se toma en cada iteración la actividad cuyo final t_i sea el más chico posible, y que no solape con las actividades previamente elegidas.
A simple vista esta implementación es $O(n^2)$ ya que por cada actividad busca el mínimo entre todas las actividades.
Esto se puede mejorar si ya tenemos las actividades ordenadas sobre t_i. En particular para este problema sabemos que $1 \leq s_i < t_i \leq 2n$ por lo que podemos ordenar el conjunto de actividades en $O(2n)$ porque sabemos que t_i esta acotado en 2n y podemos utilizar CountingSort.
Tener las actividades ordenadas nos permite determinar en $O(n)$ el conjunto óptimo viendo en cada iteración i que A_i no solape con las actividades anteriores.
Es importante destacar que la solución óptima siempre va a tener incluida la primer actividad del conjunto ordenado. Esto se debe a que la primer actividad es siempre la del final mas chico posible, lo mismo que se busca por estrategia greedy.

maximizarActividades (**in** A: `conj(Actividad)`) $\rightarrow P$: secu(Actividad)

Ord : `secu(Actividad)` $\leftarrow$ **CountingSort**(A) $\triangleright\ O(2n)$
$P \leftarrow \{\ Ord_1\ \}$
ult : `Actividad` $\leftarrow\ Ord_1$
for $2 \leq i \leq n$ **do** $\triangleright\ O(n)$
  if $Ord_i.s \geq ult.t$ **then**
    $P \leftarrow P \cup \{Ord_i\}$
    $ult \leftarrow\ Ord_i$
return P.indices

Complejidad: $O(2n) + O(n) = O(n)$

4. Ultimas observaciones

Este algoritmo tiene complejidad lineal en todos sus casos, no existen instancias más fáciles o difíciles. Esto es porque en cualquier caso la entrada este ordenada o no, se ejecutara `CountingSort` y `maximizarActividades` con la misma complejidad para cualquier instancia. CountingSort no puede suponer que una instancia ya esta ordenada. Ordenar una instancia ya ordenada sigue siendo $O(2n)$

Parte III

Demostración

Denotamos como P a la solución `greedy`, vamos a demostrar la correctitud del algoritmo y por lo tanto que P es la solución óptima para este problema. En particular demostraremos que la solución P es aquella que cubre la mayor cantidad de actividades sin que ninguna se solape. También denotamos a A como el conjunto de actividades ya ordenadas y Ult a la ultima actividad válida agregada a P

Para demostrar que este algoritmo `greedy` es correcto y óptimo, vamos a definir un invariante Q que se cumplirá para cada iteración i :
$Q(i)$: "En el í-esimo paso la solución P de máxima cardinalidad contiene a las actividades de A_1 a A_i sin solaparse y es parte de una solución máxima de A_1 a A_n"

5. Correctitud

Lo vamos a probar por inducción:

5.1. Caso Base:

Por definición del algoritmo se ordenarán las actividades de forma ascendente según el horario de terminación de la actividad (del t), y siempre P contendrá al primer elemento de ese conjunto ordenado.

Probemos entonces que vale $Q(1)$:

$Q(1)$: P tiene únicamente el índice de la primer actividad del conjunto ordenado, se puede deducir entonces que $A_i = A_1$
$\Rightarrow$ P cubre de A_1 a A_i
$\Rightarrow$ las actividades en P no se solapan, ya que hay una sola
$\Rightarrow$ P es un conjunto de máxima cardinalidad porque tienen todas las actividades de A_1 a A_i
$\Rightarrow$ Sea A' otra actividad que termina mas temprano que A_1, entonces podemos remplazar A_1 por A' en P y en particular P sigue teniendo el mismo tamaño y no hay solapamientos por lo que P es parte de una solución máxima

de A_1 a A_n.
$\therefore$ Vale el invariante en el caso base. Vale Q(1)

5.2. Paso Inductivo:

`HI`: La solución P de máxima cardinalidad contiene a las actividades que cubren de A_1 a A_i sin que ninguna se solape, es parte de una solución máxima de A_1 a A_n y es extensible a otras soluciones óptimas.

Suponemos que $Q(i)$ vale y queremos probar que también vale $Q(i+1)$. Antes de la iteración $i+1$, por `HI`, sabemos que P es el conjunto de máxima cardinalidad de intervalos sin solaparse de A_1 a A_i y es parte de una solución máxima.

Al finalizar la iteración $i+1$ se tendrá un conjunto P' que será una extensión de P según las decisiones que se tomen durante la iteración. Es decir: $P \subseteq P'$. Se tienen dos posibles decisiones:

5.2.1. Decisión 1

$$A_{i+1}.s < Ult.t$$

En este caso, el horario de inicio de la actividad del $i+1$-ésimo elemento ordenado ($A_{i+1}.s$) es menor estricto que el horario de finalización de la última actividad seleccionada ($Ult.t$). Es decir, se solapa. Por definición del invariante (y del algoritmo) no se pueden seleccionar dos actividades que se solapen. Acá no agregamos A_{i+1} a P' por lo que P se extiende a la misma solución de antes.
Veamos que pasa si agregamos A_{i+1} a P':
Si el algoritmo decide que $A_{i+1} \in P'$ entonces $Ult \notin P$. En particular si P se podía extender a una solución mas grande entonces en el paso anterior no hubiese agregado a Ult. Pero esto es absurdo ya que Ult si se agrego asumiendo que P en el paso anterior era extensible a una solución óptima, no agregar a Ult implica romper la `HI` porque no se esta buscando extender P a solución óptima. Este absurdo viene de suponer que $A_{i+1} \in P'$, por lo que debe pasar que $P' = P$.
Sigue que como $P' = P$ es la única solución óptima extensible de P y esta por `HI` cumplía con el invariante, entonces P' es de máxima cardinalidad, cubre de A_1 a A_{i+1} sin solaparse y es parte de una solución máxima.
$\therefore$ Podemos ver entonces que vale $Q(i+1)$.

5.2.2. Decisión 2

$$A_{i+1}.s \geq Ult.t$$

Es decir, que el horario de inicio de la actividad del $i+1$-ésimo elemento ordenado ($A_{i+1}.s$) es mayor o igual que el horario de finalización de la última actividad seleccionada ($Ult.t$). En este caso, hay que agregar A_{i+1} a P.
Acá $P' = P \cup \{A_{i+1}\}$.
$\Rightarrow$ $P \subseteq P'$ y por `HI` P cubre de A_1 a A_i $\Rightarrow$ al agregar A_{i+1} a P hace que P' cubra de A_1 a A_{i+1}.
$\Rightarrow$ El tiempo de inicio de A_{i+1} es después de la finalización del ultimo agregado a P $\Rightarrow$ P' no tiene actividades que se solapen.
$\Rightarrow$ Por `HI` P es de cardinalidad máxima y P' extiende a P entonces P' también es de cardinalidad máxima.
$\Rightarrow$ Sea A' otra actividad que termina antes que A_{i+1}, entonces podemos remplazar estas dos en la solución y mantenemos el mismo tamaño de P' por lo que P' es parte de una solución máxima.
$\therefore$ Podemos ver entonces que vale $Q(i+1)$

5.3. Optimalidad

Tomamos $A = \{A_1, ..., A_n\}$.
Q(n) = "La solución P de máxima cardinalidad contiene a las actividades de A_1 a A_n sin solaparse"

Ahora bien, como demostramos que el invariante es correcto. Q(n) vale al finalizar la ultima iteración y nos asegura que P tiene la secuencia de índices de la solución óptima.
$\therefore Q(n)\checkmark \Rightarrow P$ es solución óptima

Parte IV

Demostración empírica

6. Experimento

Se probó el algoritmo con 16 conjuntos de datos arbitrariamente grandes. Esto con el objetivo de mostrar que la complejidad es $O(n)$ con pruebas reales. Para cada conjunto de pruebas generado probamos cuanto tardó el algoritmo con el cronometro de C++, estas pruebas se hicieron 10 veces por cada conjunto y sacamos un promedio de cada una. En 1* se muestran los tiempos de ejecución obtenidos en función del tamaño de los casos de test. En 2* usamos el método de regresión lineal para formar una recta entre todos los puntos obtenidos. Esto muestra que la curva de complejidad es lineal.

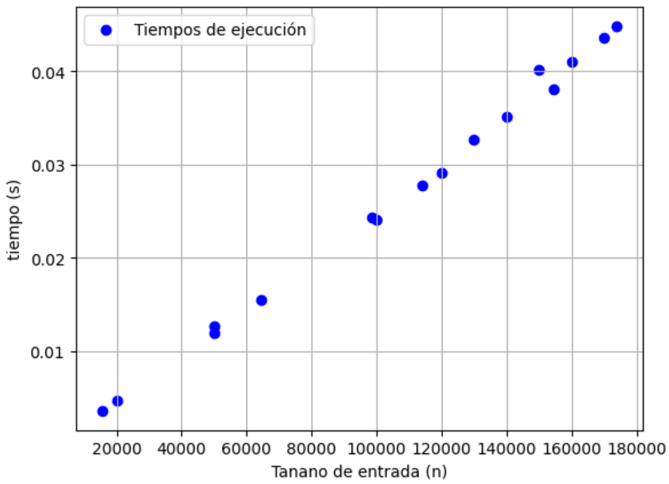


Figura 1: Tiempos obtenidos tras las pruebas

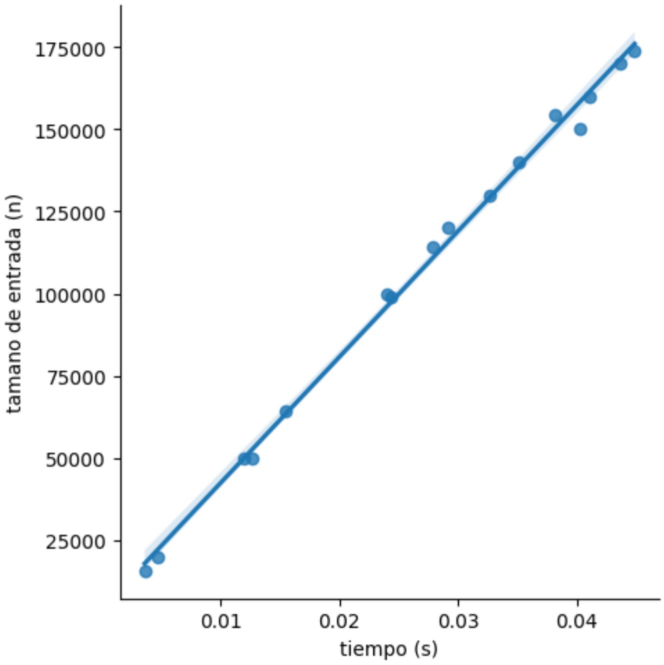


Figura 2: Regresión lineal aplicada a los datos obtenidos