- Trigonometria

Utilidades

→ $sen^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$

→ $tg\, \alpha = \frac{sen\, \alpha}{cos\, \alpha}$

→ $1 + \frac{1}{tg^2 \alpha} = \frac{1}{sen^2 \alpha}$

→ $1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{cos^2 \alpha}$

|| $cos(a+b) = cos\,a\, cos\,b - sen\,a\, sen\,b$

|| $cos(a-b) = cos\,a\, cos\,b + sen\,a\, sen\,b$

|| $sen(a+b) = sen\,a\, cos\,b + sen\,b\, cos\,a$

|| $sen(a-b) = sen\,a\, cos\,b - sen\,b\, cos\,a$

$tg(a-b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\, tg\,b}$ || $tg(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\, tg\,b}$

→ $cos(2a) = cos^2 a - sen^2 a$

→ $sen(2a) = 2\, sen\,a\, cos\,a$

→ $tg(2a) = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2 a}$

- Limites

$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ || $\lim_{\substack{x \to 0 \\ ax \to 0}} \frac{sen(ax)}{ax}$ || $\lim_{x \to +\infty} \frac{sen\, x}{x} = 0$

- Derivadas

$(sen\, u)' = u' \times cos\, u$

$(cos\, u)' = -u' \times sen\, u$

$(tg\, u)' = \frac{u'}{cos^2 u}$

$z_1 \times z_2 = \rho_1 \times \rho_2\ cis(\theta_1 + \theta_2)$

$z^n = (\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n cis(n\theta)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ cis(\theta_1 - \theta_2)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\ cis\, \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ $k \in \{0, \dots, n-1\}$

$i^0 = 1$ $\quad i^2 = -1$

$i^1 = i$ $\quad i^3 = -i$

- Números complexos

$i^2 = -1$

$z = a + bi$

$\bar{z} = a - bi$

- Módulo e argumento

$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$

$tg\, \theta = \frac{b}{a}$

$z = \rho\ cis\, \theta$

$\bar{z} = \rho\, cis(-\theta)$

$-z = \rho\, cis(\pi + \theta)$

· Logaritmos

$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$

$\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

$\ln\left(\dfrac{1}{+\infty}\right) = -\infty$

$\ln(0^+) = -\infty$

$\ln(e^-) = 0^+$

$\dfrac{+\infty}{0}$ / $\dfrac{+\infty}{0^+} = +\infty$ \ $\dfrac{+\infty}{0^-} = -\infty$

· Limites

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = +\infty$ || $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ || $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln|x|}{x} = 0$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$ || $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log_a(x)}{x^n} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^p} = 0$ || $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$

$\lim_{x\to+\infty} (a^x) = +\infty$ || $\dfrac{0}{+\infty} = 0 \times \dfrac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to a} x = a$ || $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

$e = \lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

· Assintotas

A.V. $x = a$

$\lim_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$

A.H. $y = b$

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

A.O. $y = mx + b$

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx)$

· Derivadas

$f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ || $f'(a) = \lim_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

$(k)' = 0$

$(x^p)' = p \times x^{p-1}$

$(x)' = 1$

$(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$

$(k \times f)' = k \times f'$

$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$

$(e^x)' = e^x$ // $(e^{-x}) = -e^x$

$(e^u)' = u' \times e^u$

$(a^x)' = \ln a \times a^x$

$(a^u)' = u' \times \ln a \times a^u$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

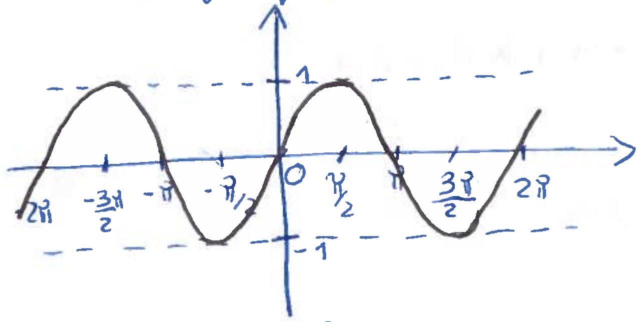
$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$

$\boxed{(f \cdot g)' = f'(g(x)) \times g'(x)}$

Trigonometria

• Função seno

$x \mapsto f(x) = \operatorname{sen} x$



Valor máximo 1 para $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$

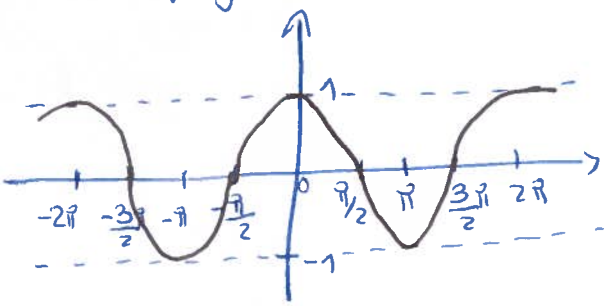
Valor mínimo -1 para $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$

Zeros $x = K\pi, K \in \mathbb{Z}$

- $D = \mathbb{R}$ • $D' = [-1;1]$
- A função seno é contínua em $\mathbb{R}$
- A função é periódica e 2π é o período positivo mínimo.
  $\Downarrow$ $\operatorname{sen}(x + 2K\pi) = \operatorname{sen}(x),\ K \in \mathbb{Z}$
- A função é ímpar.
  $\Downarrow$ $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

Função cosseno

$x \mapsto g(x) = \cos(x)$



Valor máximo 1 para $x = 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$

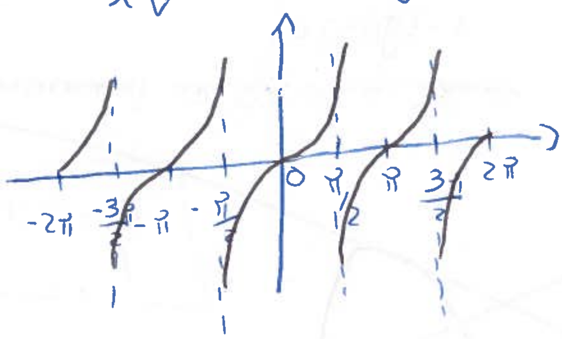
Valor mínimo -1 para $x = \pi + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z}$.

Zeros $x = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z}$

- $D = \mathbb{R}$ • $D' = [-1;1]$
- A função cosseno é contínua em $\mathbb{R}$
- A função é periódica e 2π é o período positivo mínimo.
  $\Downarrow$ $\cos(x + 2K\pi) = \cos x,\ K \in \mathbb{Z}$
- A função é par.
  $\Downarrow$ $\cos(-x) = \cos(x)$

Função tangente

$x \mapsto h(x) = \operatorname{tg}(x)$



Zeros $x = K\pi\ ,\ K \in \mathbb{Z}$

- $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + K\pi,\ K \in \mathbb{Z} \right\}$
- $D' = \mathbb{R}$
- É contínua em todo o seu domínio.
- A função é periódica e π é o período positivo mínimo.
  $\Downarrow$ $\operatorname{tg}(x + K\pi) = \operatorname{tg}(x)$
- A função é ímpar.
  $\Downarrow$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$

$f(x) = \operatorname{sen} x$

$f(x) + 2 \rightarrow$ sobe 2

$f(x - \frac{\pi}{2}) \rightarrow$ desloca $\frac{\pi}{2}$ para a direita

$2f(x) \rightarrow$ a amplitude aumenta para 2 $\Updownarrow$

$f(2x) \rightarrow$ o zero passa a ser em $\frac{\pi}{2}$; π; $\frac{3}{2}\pi$...

$|f(x)| \rightarrow$ só tem parte positiva

$f(|x|) \rightarrow$ $D(|-\frac{\pi}{2}|) = D(|\frac{\pi}{2}|)$

Equações trigonométricas

$\rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \vee x = \pi - a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi \vee x = -a + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

• Determinar período da função

$f(x+p) = f(x)$

Ex: $f(x) = 2 - \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$\cancel{2} - \cos\left(\frac{x+p}{3}\right) = -\cos\left(\frac{x}{3}\right) + \cancel{2}$

$\frac{x+p}{3} = \frac{x}{3} + 2k\pi$

$\cancel{x} + p = \cancel{x} + 6k\pi$

$p = 6k\pi$

$k = 1 \quad p = 6\pi$

Fundamental

$\operatorname{sen} x = \frac{op.}{hip}$ || $\cos x = \frac{adj}{hip}$

$\operatorname{tg} x = \frac{op}{adj}$ || $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ ...

$-1 \leq \operatorname{sen} \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

$\operatorname{tg} \in \mathbb{R}$

• Fórmulas trigonométricas

$\rightarrow \operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

$\rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$

$\rightarrow 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 a}$

$\rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$

$\rightarrow \cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\rightarrow \cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\rightarrow \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\rightarrow \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

$\rightarrow \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

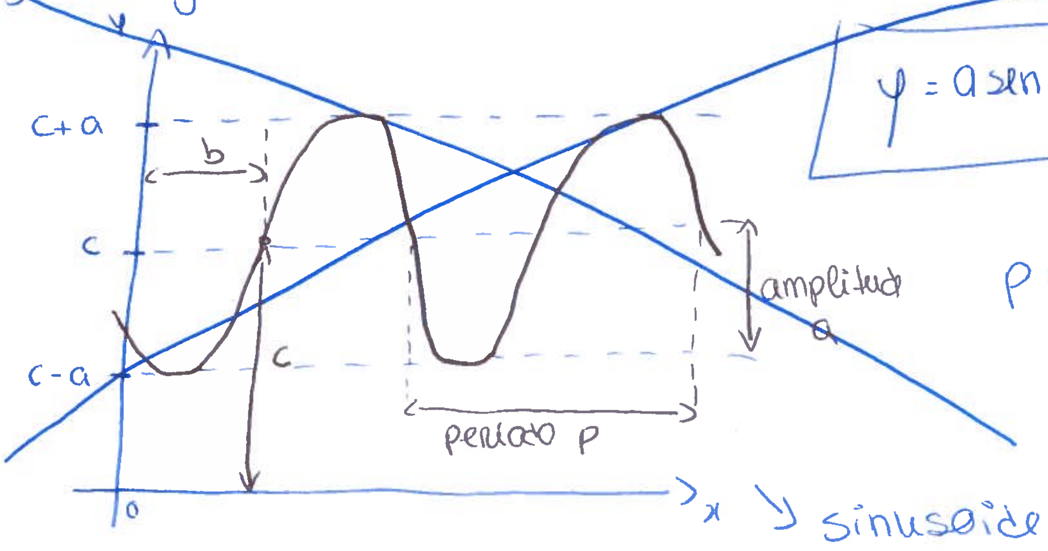
$\rightarrow \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

$\rightarrow \cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

$\rightarrow \operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$

$\rightarrow \operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$

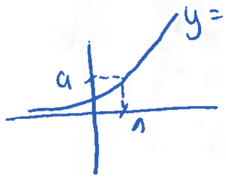
• As funções trigonométricas como modelos de fenómenos reais (11º ano)



$\boxed{y = a \operatorname{sen}[k(x-b)] + c}$

$p = \frac{2\pi}{|k|}$

Função exponencial de base a (*)



$D = \mathbb{R}$

$D' = \mathbb{R}^+$ $\quad a^x > 0$

$a^0 = 1$

Injetiva $x = y$

Estritamente crescente $x < y$

$a^x \times a^y = a^{x+y}$

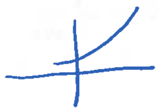
$(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

Exponencial cresce mais rápido do que todas.

Função exponencial de base e

$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (*)



$x \nearrow e^x$

$x \nearrow e^{-x}$

Logaritmos (regras) (*)

$a^x = y \rightarrow x = \log_a y$

$\log_{10} 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$

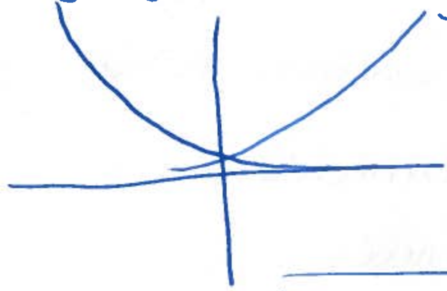
$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

$\log_7 1 = 0$

$\log_{15} 15 = 1$

$\log_a a^x = x$ // $a^{\log_a x} = x$

$\log_a a = 1$ // $\log_a 1 = 0$ // $\log_e x = \ln x$



$e^{x+3} - 2$

↳ valor mínimo

Mudança de base (*)

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a}$

Função logarítmica de base a

$D = \mathbb{R}^+$ $\quad D > 0$

$D' = \mathbb{R}$

1 é o único zero

É injetiva $(x = y)$

crescente $x < y$

É o inverso da função exponencial de base a mais rápido

Limites notáveis (*)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^n}=+\infty \leftarrow \text{mais rápido} \quad \vee \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{a^x}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}(a^x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}(a^x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \qquad \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a(x)}{x^n}=0}_{\uparrow\ \text{mais lento}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$$

- $\lim_{x\to a} x = a$

- $0\times\infty$
  - $\frac{0}{0} \to$ Ruffini
  - $\underbrace{\frac{\infty}{\infty} \;/\; \infty-\infty}_{\text{grau maior}}$

- $\frac{+\infty}{0}$
  - $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty\times\frac{1}{0^+} = +\infty\times+\infty$
  - $\frac{+\infty}{0^-} = +\infty\times\frac{1}{0^-} = +\infty\times-\infty = -\infty$

- $\frac{0}{+\infty} = 0\times\frac{1}{+\infty} = 0\times 0 = 0$

— // —

- **Estudo da continuidade**

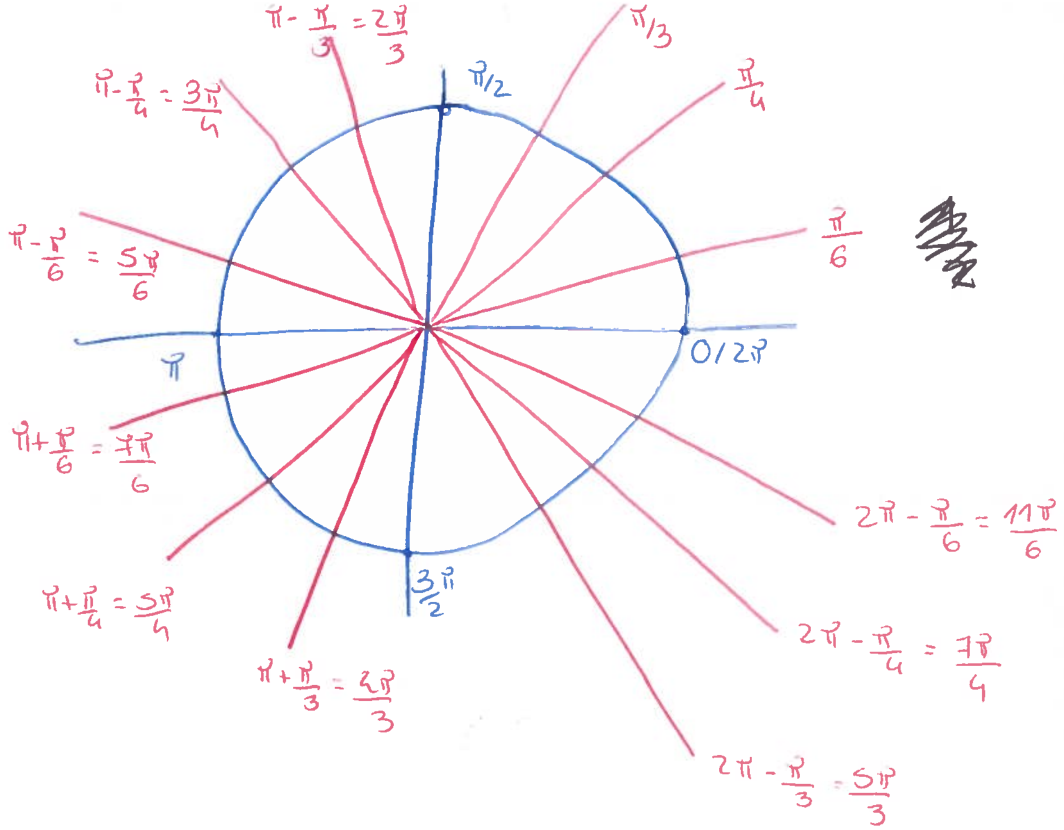
f é contínua à direita para $x=a$ se $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

- **Funções contínuas no seu domínio**

- Polinomiais
- Racionais
- Exponenciais
- Logarítmicas
- se f e g são contínuas então $f+g$, $f-g$, $f\times g$, $\frac{f}{g}$, $(f)^p$, $\sqrt[p]{f}$ $p\in\mathbb{N}$ e $g\neq 0$.

— // —

Em $]a,b[$ a função é contínua porque é uma soma de funções contínuas (uma ...).



	sen(α)	cos(α)	tg(α)
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

	sen(α)	cos(α)	tg(α)
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

	sen(α)	cos(α)	tg(α)
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

	sen(α)	cos(α)	tg(α)
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$