Introdução à Probabilidade e Estatística

Distribuições de Probabilidade Discretas e Contínuas

Departamento de Matemática
Universidade de Évora

Ano lectivo de 2016/17

Patrícia Filipe

Distribuições de Probabilidade Discretas

Distribuição uniforme

Diz-se que uma variável aleatória X tem uma distribuição uniforme discreta se assume todos os seus valores com igual probabilidade. Se X é uma variável aleatória que toma valores x_1, x_2, ..., x_n, diz-se que esta variável aleatória tem distribuição uniforme, e escreve-se $X \sim U(n)$, se a sua função de probabilidade for dada por

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & x = x_1, x_2, ..., x_n \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O parâmetro caracterizador desta distribuição é o n $(n \in \mathbb{N})$.

Exemplo X-número de pintas obtidas no lançamento de um dado honesto. $X \sim U(6)$.

Distribuição uniforme

Se X é uma v.a. discreta com distribuição uniforme,

$$E[X] = \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ e } Var[X] = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

No caso particular em que a variável aleatória assume os valores $1,\ 2, ..., n$, tem-se

$$E[X] = \mu = \frac{n+1}{2} \text{ e } Var[X] = \sigma^2 = \frac{n^2-1}{12}$$

Distribuição de Bernoulli

Consideremos uma experiência aleatória na qual se observa a realização ou não de um determinado acontecimento A. A realização de A designamos por sucesso sendo a realização do acontecimento complementar, $\bar{A}$, designada por insucesso. Esta experiência tem apenas dois resultados possíveis.

$$P[A] = p \text{ e } P\left[\bar{A}\right] = q = 1 - p.$$

A uma experiência aleatória com as características descritas anteriormente chamamos prova de Bernoulli.

Distribuição de Bernoulli

Seja X uma v.a. associada ao resultado de uma prova de Bernoulli, i.e., toma o valor 1, com probabilidade p, se o resultado da prova for sucesso e o valor 0, com probabilidade $q = 1 - p$, se se verificar o insucesso. Diz-se que X tem distribuição de Bernoulli e

$$f(x) = P[X = x] = \begin{cases} p^x . (1-p)^{1-x}, & x = 0, 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Esta distribuição tem um só parâmetro p $(p \in [0,\ 1])$ e escreve–se $X \sim B(1, p)$ para indicar que X tem distribuição de Bernoulli de parâmetro p e

$$E[X] = \mu = p \text{ e } Var[X] = \sigma^2 = p(1-p) = p.q$$

Exemplo X-número de vezes que sai cara no lançamento de uma moeda. $X \sim B\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Distribuição Binomial

Considere-se agora uma sucessão de provas de Bernoulli independentes. Em cada prova observa-se a ocorrência ou a não ocorrência de um determinado acontecimento A, com probabilidade $P[A] = p$, constante prova a prova.

$X-$ número de sucessos em n repetições da experiência

$$f(x) = P[X = x] = {}^{n}C_{x}\, p^{x} (1-p)^{n-x}, \; x = 0, 1, 2, ..., n$$

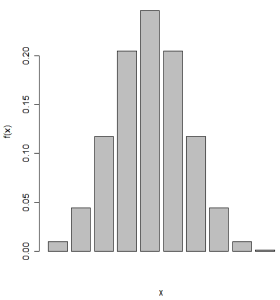
é a sua f.m.p., que nos dá a probabilidade de obter x sucessos, seja qual for a ordem por que estes se realizem.

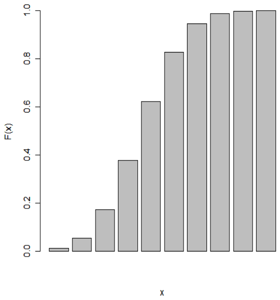
X tem distribuição binomial de parâmetros n $(n \in \mathbb{N})$ e p $(0 < p < 1)$. Simbolicamente $X \sim B(n, p)$.

$$E[X] = \mu_X = np \text{ e } Var[X] = \sigma_X^2 = np(1-p) = npq$$

Distribuição Binomial

Gráficos da função massa de probabilidade (à esq.) e da função de distribuição (à dir.) da *B(10,0.5)*.





Exemplo X-número de vezes que sai cara no lançamento de 10 moedas. $X \sim B\left(10,\ 0.5\right)$.

Distribuição Binomial

Seja $(X_1,\ldots,X_n)$ uma sequência de v.a.'s i.i.d.

Teorema

Se $X_i \sim \text{Ber}(p),\ i=1,\ldots,n,$ então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n,p)$

Teorema

Se $X_i \sim B(n_i,p),\ i=1,\ldots,n,$ então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(\sum_{i=1}^{n} n_i, p\right)$

Distribuição Binomial

Exemplo Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes que seguem uma distribuição binomial com parâmetros $(n_X = 10, p_X = 0.7)$ e $(n_Y = 15, p_Y = 0.7)$, respectivamente. Calcule:

a) a probabilidade de X ser no máximo 4;

b) a probabilidade de $X + Y$ ser superior a 22.

Distribuição Geométrica

Se X representa o número de provas independentes até ocorrer um sucesso, diz-se que X segue uma distribuição geométrica de parâmetro p, em que p representa a probabilidade de ocorrer sucesso. Simbolicamente $X \sim G(p)$. A função massa de probabilidade de X é

$$f(x) = P[X = x] = p(1-p)^{x-1},\ x = 1, 2, ...;\ 0 < p < 1$$

e

$$E[X] = \mu_X = \frac{1}{p} \text{ e } Var[X] = \sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Exemplo X-número de lançamentos de uma moeda ao ar até sair cara. $X \sim G(0.5)$.

Distribuição Geométrica

Propriedades no cálculo de probabilidades:

- $P[X \leqslant n] = 1 - (1-p)^n$;
- $P[X \geqslant n] = (1-p)^{n-1}$;
- $P[n \leqslant X \leqslant m] = (1-p)^{n-1} - (1-p)^m$

A distribuição geométrica goza da propriedade de “falta de memória”, o processo binomial recomeça em cada prova. Para todo $m > n$,

$$P[X > m | X > n] = P[X > m - n]$$

Distribuição Binomial negativa

Se X representa o número de provas independentes até ocorrer r sucessos, diz-se que X segue uma distribuição Binomial Negativa de parâmetros r e p. Simbolicamente $X \sim BN(r,p)$. A função massa de probabilidade de X é

$$f(x) = P[X = x] = {}^{x-1}C_{r-1}\, p^r (1-p)^{x-r},\ x = r, r+1, ...;\ 0 < p < 1$$

e

$$E[X] = \mu_X = \frac{r}{p} \text{ e } Var[X] = \sigma_X^2 = r\frac{1-p}{p^2}$$

Quando $r = 1$, $X \sim G(p)$.

Exemplo X-número de lançamentos de uma moeda ao ar até obter 3 vezes cara. $X \sim BN(3,\ 0.5)$.

Distribuição Binomial negativa

Teorema

Se $Y \sim BN(1;p)$ e $W \sim BN(r;p)$, com Y e W independentes, então $Y + W \sim BN(r+1,p)$

Corolário

Se $W \sim BN(r;p)$, então $W =^d X_1 + X_2 + ... + X_r$ onde $X_i \sim G(p)$ independentes, $1 \leqslant i \leqslant r$.

Corolário

Se $Y \sim BN(k;p)$ e $W \sim BN(r;p)$, com Y e W independentes, então $Y + W \sim BN(k+r,p)$

Distribuição Multinomial

Generaliza a binomial. Dada uma experiência em que cada prova pode ter mais do que dois resultados possíveis, verificando todas as outras condições referidas na distribuição binomial, diz-se que estamos perante uma experiência multinomial.
Suponhamos que cada prova tem k resultados possíveis:

$$A_1,\ A_2, ...,\ A_k \text{ com probabilidades } p_1,\ p_2, ...,\ p_k$$

com $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, ..., k$ e $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.
Sejam $X_1, X_2, ..., X_k$ as v.a. que designam o número de vezes que ocorre cada um dos acontecimentos nas n provas, e $\frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}$ são todas as maneiras possíveis de que seja verificada tal ocorrência, então

$$P\left[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_k = x_k\right] = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

Para cada v.a. X_i temos, $E\left[X_i\right] = np_i$ e $Var\left[X_i\right] = np_i\left(1 - p_i\right)$.

Distribuição Hipergeométrica

São seleccionados, sem reposição, n elementos de uma população de dimensão N, dos quais K correspondem a "sucesso".
X- número de sucessos em n

$$f(x) = P[X = x] = \frac{{}^{K}C_x \, {}^{N-K}C_{n-x}}{{}^{N}C_n}, \, x = 0, 1, 2, \ldots n$$

onde $p = \frac{K}{N}$, probabilidade de numa extracção ao acaso se obter um sucesso, e

$$E[X] = \mu_X = np \text{ e } Var[X] = \sigma_X^2 = n\frac{N-n}{N-1}p(1-p)$$

Simbolicamente, escrevemos $X \sim H(N, n, K)$.

Exemplo X-número de bolas vermelhas num conjunto de 4 bolas extraídas, sem reposição, de um saco contendo 30 bolas, das quais 5 são vermelhas. $X \sim H(30,\ 4,\ 5)$.

Distribuição Hipergeométrica

Quando N é um valor grande quando comparado com n, a probabilidade de sucesso em cada extracção sem reposição varia muito pouco de prova para prova, por conseguinte esbate-se a diferença entre tiragens sem reposição e com reposição. Sendo assim, a distribuição hipergeométrica aproxima-se da distribuição binomial. Logo,

$$n << N \text{ então } H(N, n, K) \approx B\left(n, \frac{K}{N}\right).$$

Como regra prática, pode considerar-se boa aproximação quando $n < N/10$.

Distribuição de Poisson

Seja X o número de "sucessos" que ocorrem num dado intervalo de tempo ou domínio específico, diz-se que X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, em que λ representa o número médio de sucessos que ocorrem no intervalo de tempo ou domínio especificado. Simbolicamente $X \sim P(\lambda)$. A função de probabilidade de X é

$$f(x) = P[X = x] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, 2, ...$$

e

$$E[X] = \mu_X = \lambda \text{ e } Var[X] = \sigma_X^2 = \lambda$$

Distribuição de Poisson

A distribuição de Poisson constitui um modelo matemático de fenómenos aleatórios sse são verificadas as seguintes condições:

- o número de sucessos que ocorre num dado intervalo de tempo ou domínio é independente do número de sucessos que ocorre em qualquer outro intervalo ou domínio disjunto dos anteriores;
- a probabilidade de que um acontecimento se realize uma vez em qualquer intervalo muito curto é proporcional à amplitude do intervalo e não depende do número de sucessos que ocorrem fora desse intervalo;
- a probabilidade de que o acontecimento se realize mais do que uma vez num intervalo de amplitude muito pequena é desprezável.

Distribuição de Poisson

Se X representa o número de sucessos num determinado intervalo de tempo, sob certas condições, $X \sim P(\lambda)$. Sendo, este parâmetro λ, o valor esperado de X, pode interpretar-se como o ritmo médio a que ocorrem os sucessos por intervalo unitário. Se as condições se mantêm e o intervalo considerado, em vez de se unitário, tem amplitude h, a variável aleatória Y, que representa o número de sucessos no novo intervalo, tem distribuição de Poisson com parâmetro λh

Distribuição Poisson

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma sequência de v.a.'s i.i.d.

Teorema

Se $X_i \sim P(\lambda_i),\ i = 1, \ldots, n,$ então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$

Teorema

Se $X_i \sim P(\lambda),\ i = 1, \ldots, n,$ então $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda)$

Aproximação da distribuição Binomial pela Poisson:

Na prática, se $X \sim B(n, p)$, com $n > 20$ e $p \leqslant 0.05$ então $X \dot\sim P_{\lambda = np}$

Distribuições de Probabilidade Contínuas

Distribuição uniforme

Diz-se que uma variável aleatória contínua X tem distribuição uniforme no intervalo $]a, b[$, com $a < b$, escrevendo-se $X \sim U(a, b)$ quando a sua f.d.p. é da forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases} .$$

A correspondente função distribuição é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}$$

Se $X \sim U(a, b)$, então

$$E[X] = \mu = \frac{a+b}{2} \text{ e } Var[X] = \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Distribuição exponencial

A distribuição exponencial tem a sua origem associada ao processo de Poisson, muito embora a sua utilização na modelação estatística seja bastante ampla, aplicando-se, para além do tempo de espera entre eventos originados por um processo de Poisson, a fenómenos como o tempo de vida de equipamentos, montantes de indemnizações.

Se a sucessão de eventos constitui um processo de Poisson e a contagem é iniciada em 0, o tempo de espera pela chegada do primeiro evento é uma variável aleatória, T, com distribuição exponencial.

Distribuição exponencial

Se T segue uma distribuição exponencial com parâmetro λ, que denotamos por $T \sim Exp(\lambda)$, a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0$$

e a correspondente função distribuição é

$$F(t) = P[T \leqslant t] = 1 - e^{-\lambda t},\ \ t > 0.$$

$$E[T] = \mu_T = \frac{1}{\lambda} \text{ e } Var[T] = \sigma_T^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Distribuição normal

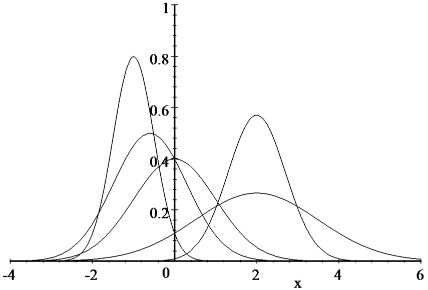
Diz-se que uma variável aleatória, X, segue uma distribuição normal (ou gaussiana) com parâmetros μ e σ e representa-se por $X \sim N(\mu, \sigma)$, se a sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right],$$

$-\infty < x < +\infty,\ -\infty < \mu < +\infty,\ 0 < \sigma < +\infty$.

Os parâmetros da distribuição normal, μ e σ, correspondem, respetivamente à média e desvio-padrão da variável aleatória.

Distribuição normal



Curvas da $N(-1,\ 0.5)$, $N(-0.6,\ 0.8)$, $N(0,\ 1)$, $N(2,\ 1.5)$ e $N(2,\ 0.7)$ (da esquerda para a direita).

- A curva normal é simétrica relativamente a $x = \mu$;
- A curva da normal é unimodal, em que a moda é $x = \mu$;
- A curva da normal tem pontos de inflexão em $x = \mu + \sigma$ e $x = \mu - \sigma$.

Distribuição normal

A função distribuição de uma variável aleatória com distribuição $N(\mu, \sigma)$ é definida pelo integral

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt,$$

para o qual não se consegue solução analítica. Sendo necessário recorrer a métodos numéricos.

Existem valores tabelados da função distribuição da variável aleatória normal com $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, diz-se que esta variável aleatória (também designada por normal reduzida) tem distribuição normal padrão, $N(0, 1)$, e usualmente representa-se por Z. Nesta situação, a função distribuição é dada por

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] dt.$$

Distribuição normal

Podemos transformar uma variável aleatória normal qualquer numa variável aleatória normal reduzida. Com efeito,

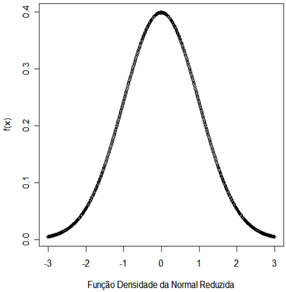
$$\boxed{X \sim N(\mu,\ \sigma) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,\ 1)}$$

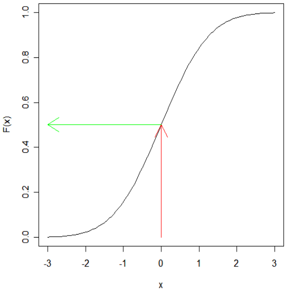
A consulta da tabela da normal disponível em www.moodle.uevora.pt, permite obter os valores da função de distribuição da normal padrão para pontos não negativos, ou seja, a tabela apresenta os valores de $\Phi(z) = P[Z \leqslant z]$, para $z \geqslant 0$.

Como consequência da simetria, temos $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

Representações Gráficas da Distribuição Normal Reduzida

Gráficos da função densidade de probabilidade (à esq.) e da Função de distribuição (à dir.) da *N(0,1)*.





Distribuição Normal Reduzida

A normal reduzida (ou padronizada)

1. $P(Z \leqslant -z) = P(Z \geqslant z) = 1 - P(Z < z) = 1 - \Phi(z)$;
2. $P(Z \geqslant -z) = P(Z \leqslant z) = \Phi(z)$;
3. $P(Z > z) = 1 - P(Z \leqslant z) = 1 - \Phi(z)$;
4. $P(a < X \leqslant b) = P\left(Z \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leqslant \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Distribuição normal

Algumas áreas...

$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) = 0,6827$;

$P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) = 0,9545$;

$P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) = 0,9973$.

Distribuição normal

Teorema da aditividade

Sejam $X_1, X_2, ..., X_n$, variáveis aleatórias normais independentes, tais que

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), \ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2), \ ..., \ X_n \sim N(\mu_n, \sigma_n).$$

Então,

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma), \text{ com } \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \text{ e } \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}.$$

Aproximações à distribuição normal

Aproximação da distribuição Binomial pela normal

Se $X \sim B\,(n, p)$, com n grande $(n > 50)$, $np \geqslant 5$ e $nq \geqslant 5$, então $X \dot{\sim} N\left(\mu = np,\ \sigma = \sqrt{npq}\right)$, logo $\dfrac{X - np}{\sqrt{npq}} \dot{\sim} N\,(0,\ 1)$

Aproximação da distribuição Poisson pela normal:

Se $X \sim P_\lambda$, com λ grande $(\lambda > 20)$, então $X \dot{\sim} N\left(\mu = \lambda,\ \sigma = \sqrt{\lambda}\right)$, logo $\dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \dot{\sim} N\,(0,\ 1)$

Aproximações à distribuição normal

Correcção de continuidade:

$$
\begin{aligned}
P[X \geqslant a] &\simeq P\left[Z \geqslant \frac{(a-0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right] = 1-\Phi\left(\frac{(a-0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right)\\
P[X > a] &\simeq P\left[Z > \frac{(a+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right] = 1-\Phi\left(\frac{(a+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right)\\
P[X \leqslant b] &\simeq P\left[Z \leqslant \frac{(b+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right] = \Phi\left(\frac{(b+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right)\\
P[X < b] &\simeq P\left[Z < \frac{(b-0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right] = \Phi\left(\frac{(b-0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right)\\
P[X = a] &\simeq P\left[\frac{(a-0.5)-\mu_X}{\sigma_X} \leqslant Z \leqslant \frac{(a+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right]\\
&= \Phi\left(\frac{(a+0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{(a-0.5)-\mu_X}{\sigma_X}\right).
\end{aligned}
$$

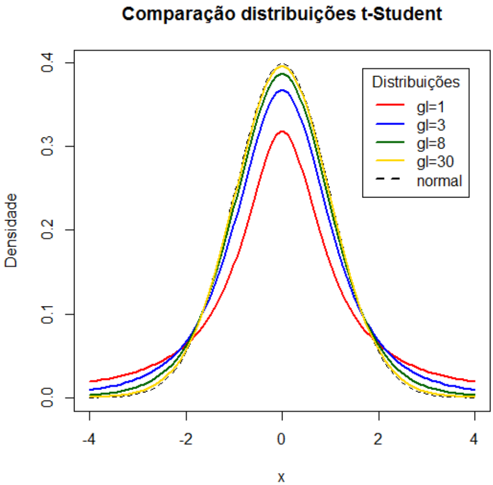
Distribuição t-student

A fd.p. de uma variável aleatória T com distribuição t-student com n graus de liberdade, é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ -\infty < t < +\infty.$$

Esta função é simétrica em torno de $t = 0$.
Uma v.a. T, em que $T \sim t_n$, tem valor médio $\mu_T = 0$ e variância $\sigma_T^2 = \dfrac{n}{n-2}$ $(n > 2)$.
À medida que n, o número de graus de liberdade, aumenta a distribuição t-student tende para a distribuição normal padrão, $N(0,1)$.

Função Densidade de Probabilidade da t-student



Distribuição qui-quadrado

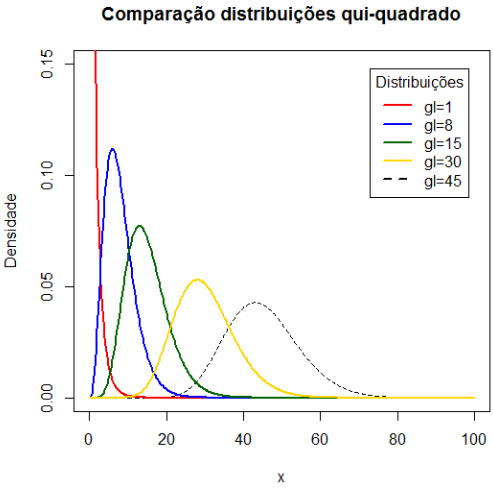
Diz-se que uma v.a. X tem distribuição qui-quadrado com n graus de liberdade, e representa-se por $X \sim \chi_n^2$, se a sua f.d.p. for dada por

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, x > 0, n > 0$$

onde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy \ (\alpha > 0)$ é a função gama.

Se $X \sim \chi_n^2$ então $E[X] = \mu_X = n$ e $Var[X] = \sigma_X^2 = 2n$.

Função Densidade de Probabilidade da qui-quadrado



Distribuição qui-quadrado

Teorema da aditividade:

Sejam $X_1, X_2, ..., X_k$ variáveis aleatórias independentes tais que $X_i \sim \chi^2_{n_i}$, para $i = 1, 2, ..., k$. Então

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \chi^2_n, \text{ com } n = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Teorema:

Se $Z \sim N(0,1)$, então, $X = Z^2 \sim \chi^2_1$

Propriedades da distribuição qui-quadrado

Generalização, resultante dos teoremas anteriores:

Dadas $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ variáveis aleatórias independentes normais reduzidas, a variável aleatória

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2 \sim \chi_n^2.$$

Outra propriedade...

Sejam X e Y duas v.a.'s independentes. $X \sim N(\mu, \sigma)$ e $Y \sim \chi^2_{(n)}$. Então,

$$T = \frac{\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_{(n)}$$

Distribuição F-Snedecor

Dadas $U \sim \chi^2_m$ e $V \sim \chi^2_n$ v.a. independentes,

$$X = \frac{U/m}{V/n}$$

tem distribuição F com m e n graus de liberdade, $X \sim F_{m,n}$

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{m-2}{2}}}{\left[1+\frac{m}{n}x\right]^{\frac{m+n}{2}}},\ 0 < x < +\infty$$

$$E[X] = \mu_X = \frac{n}{n-2} \quad (n > 2)$$

$$Var[X] = \sigma^2_X = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad (n > 4).$$

Teorema: Se $X \sim F_{m,n}$, então $Y = \frac{1}{X} \sim F_{n,m}$.

Exercícios

1. No fabrico em série de determinado tipo de chaves surgem aproximadamente 4% de chaves defeituosas. Determine a probabilidade:
   a) de uma amostra de 10 chaves conter exactamente 3 defeituosas;
   b) de uma amostra de 25 chaves conter no mínimo 5 defeituosas.
2. Uma urna contem 20 bolas brancas, 15 azuis e 12 vermelhas. Fazem-se 8 extracções de uma bola com reposição. Calcule a probabilidade de obter:
   a) 4 bolas brancas, 3 azuis e 1 vermelha;
   b) 2 vermelhas e pelo menos 4 brancas;
   c) pelo menos 7 bolas azuis.

Exercícios

3. Suponha que, de 120 candidatos a um emprego numa empresa de telecomunicações, apenas 80 têm as qualificações pretendidas. Qual a probabilidade de, num grupo de 5 candidatos seleccionados para uma entrevista piloto, apenas 2 terem as qualificações pretendidas.
4. Numa fábrica o número de peças defeituosas produzidas por uma determinada máquina segue uma distribuição de Poisson. Em média, a cada 300 peças produzidas, são encontradas 2 peças defeituosas. Determine a probabilidade de serem encontradas:
   a) no mínimo 3 peças com defeito, em 300 peças.
   b) 8 peças com defeito, em 900 peças;
   c) no máximo 40 peças com defeito, em 4500 peças;

Exercícios

5. Sabendo que o tempo gasto para resolver um teste é normalmente distribuído com média de 20 minutos e variância de 16 minutos:
   a) Determine a probabilidade de demorar mais do que 23 minutos a resolver o teste.
   b) Determine a probabilidade de demorar entre 16 e 22 minutos a resolver o teste
   c) Qual o tempo máximo que 25% das pessoas leva a resolver o teste?

Exercícios

6. De acordo com os dados do Eurobarómetro sobre Saúde, Alimentação e Nutrição, os portugueses têm em média 1,65 metros de altura e pesam 69 quilos, o que os coloca no penúltimo lugar quer da tabela de *altura* (apenas à frente dos malteses), quer do *ranking* do *peso* (apenas com italianos atrás). Suponha que a variável *altura* dos portugueses segue uma distribuição normal.
   a) Sabendo que a probabilidade de encontrar um português que meça menos de 1,70 metros é 0,68, determine a variância da distribuição.
   b) Calcule a probabilidade de encontrar um português que meça mais de 1,49 metros mas menos de 1,73 metros?
   c) Qual a probabilidade de que, em 10 portugueses escolhidos ao acaso e com reposição, pelo menos 2 tenham mais de 1,70 metros?