1ª frequência de IPE
2014 / 2015

1.

a) X – nº de ciclos de carregamentos de uma bateria até à perda de capacidade

X é uma variável quantitativa discreta

b) $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{n} = \frac{\text{Sum}}{n} = \frac{699803}{100} = 6998{,}03$ logo, em média, o nº de ciclos de carregamentos da bateria até à perda de capacidade observados foi de 6998 ciclos

$\tilde{x} = P_{50} = 6990{,}5$ logo em 50% das observações o nº de ciclos de carregamentos da bateria até à perda de capacidade foi inferior ou igual a 6990,5 e nas restantes 50% foi superior ou igual a 6990,5 ciclos.

$s = 92{,}353$ logo o desvio típico em relação à média do nº de ciclos de carregamentos da bateria até à perda de capacidade é de 92,353 ciclos.

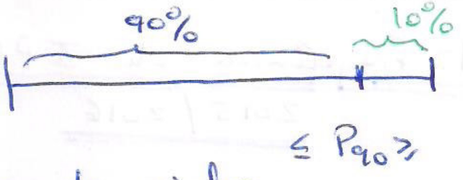
c) O maior outlier é 7247 = máx.

Como min = 6804, pois $a = \text{máx} - \text{min} \Leftrightarrow \text{min} = \text{max} - a = 7247 - 443 = 6804$, e o maior valor não atípico inferior é

$$Q_1 - 1{,}5\,IQ = 6935 - 1{,}5 \times (7052{,}5 - 6935) =$$
$$= 6935 - 1{,}5 \times 117{,}5 = 6758{,}75$$

então temos que o mínimo dos dados é superior ao maior valor não atípico inferior. Portanto, não existem outliers inferiores.

d) Como $P_{90} = 7118{,}4$



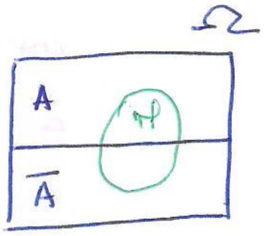
então o número mínimo de ciclos de carregamentos da bateria até à perda de capacidade em 10% das baterias é 7118,4 ciclos.

2. Acontecimentos:

A - painéis fotovoltaicos monocristalinos

$\overline{A}$ - " " policristalinos

M - sistema de migro-geração



$P(A) = 0{,}45$, $P(M|A) = 0{,}80$, $P(\overline{A}|M) = 0{,}50$

a). i) $P(\overline{A}) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A) = 0{,}55$

ii) $P(A|M) = ?$

Como $P(\overline{A}|M) = \dfrac{P(\overline{A} \cap M)}{P(M)} = \dfrac{P(M) - P(A \cap M)}{P(M)} =$

$= 1 - \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} = 1 - P(A|M) \Leftrightarrow P(A|M) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

iii) $P(M) = ?$

Como $P(A \cap M) = P(M|A) . P(A) = 0{,}80 \times 0{,}45 = 0{,}36$

e, pelos cálculos efetuados anteriormente, tem-se que

$P(A|M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(M)} \Leftrightarrow P(M) = \dfrac{P(A \cap M)}{P(A|M)} = \dfrac{0{,}36}{0{,}5} = 0{,}72.$

b) X - v.a. q representa o nº de vendas de painéis solares fotovoltaicos policristalinos, em 10 vendas.

$n = 10$. Considerando uma venda, ao acaso, só há dois casos possíveis :

A - a venda corresponde a um painel fotovoltaico policristalino

ou

$\overline{A}$ - a " não corresponde a um painel fotovoltaico policristalino

assim a probabilidade de sucesso $p = P(A) = 0{,}55 \Rightarrow$ $q = 1 - p = 0{,}45$, logo $X \sim B(n = 10; p = 0{,}55)$, donde

$$f(x) = P(X = x) = {}^{10}C_x \times 0{,}55^x \times 0{,}45^{10-x},$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots, 10$.

$$P(X \geq 8) = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) =$$
$$= {}^{10}C_8 \times 0{,}55^8 \times 0{,}45^2 + {}^{10}C_9 \times 0{,}55^9 \times 0{,}45^1 + {}^{10}C_{10} \times 0{,}55^{10} \times 0{,}45^0$$
$$= \frac{10!}{8!\,2!} \times 0{,}55^8 \times 0{,}45^2 + 10 \times 0{,}55^9 \times 0{,}45 + 1 \times 0{,}55^{10} \times 1 =$$
$$= 0{,}0996.$$

3.

X\Y	-1	0	1	$f_X(x)$	
0	0,1	0,1	0,1	0,3	$= P(X=0)$
2	0,1	0,2	0,1	0,4	$= P(X=2)$
4	0,1	0,1	0,1	0,3	$= P(X=4)$
$f_Y(y)$	0,3	0,4	0,3	1	
	$= P(Y=-1)$	$= P(Y=0)$	$= P(Y=1)$		

a) Como $Y^2(\Omega) = \{0, 1\}$, então temos que calcular $f_{Y^2}(1)$ e $f_{Y^2}(2)$. Dado que, pelos cálculos anterior, a função de probabilidade marginal de Y é:

y	-1	0	1
$f_Y(y)$	0,3	0,4	0,3

então vem que :

$f_{Y^2}(1) = P(Y^2=1) = P(Y=1) + P(Y=-1) = 0,3+0,3 = 0,6$

e $f_{Y^2}(0) = P(Y^2=0) = P(Y=0) = 0,4$. Logo, a função de massa de probabilidade de Y^2 é definida por:

y	0	1
$f_{Y^2}(y)$	0,4	0,6

. Por outro lado, como

$F_{Y^2}(0) = P(Y^2 \leq 0) = P(Y^2=0) = 0,4$

e $F_{Y^2}(1) = P(Y^2 \leq 1) = 1$, temos que

a função distribuição de Y^2 é definida por:

$$F_{Y^2}(y) = \begin{cases} 0 & , y<0 \\ 0,4 & , 0 \leq y < 1 \\ 1 & , y \geq 1. \end{cases}$$

b) X e Y são v.a. independentes sse

$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$,

$\forall x \in \{0,2,4\}$ e $\forall y \in \{-1,0,1\}$

Como $f_{X,Y}(0,-1) = 0,1 \neq 0,09 = 0,3 \times 0,3 = f_X(0) \cdot f_Y(-1)$,

então podemos concluir que as v.a. X e Y não são independentes.

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

Como $E(XY) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j f_{X,Y}(x_i, y_j) =$

$= 0 \times (-1) \times f_{X,Y}(0,-1) + 0 \times 0 \times f_{X,Y}(0,0) + 0 \times 1 f_{X,Y}(0,1) + 2 \times (-1) f_{X,Y}(2,-1) +$

$+ 2 \times 0 f_{X,Y}(2,0) + 2 \times 1 f_{X,Y}(2,1) + 4 \times (-1) \times f_{X,Y}(4,-1) + 4 \times 0 f_{X,Y}(4,0) +$

$+ 4 \times 1 f_{X,Y}(4,1) = 0+0+0 - 2 \times 0,1 + 0 + 2 \times 0,1 - 4 \times 0,1 + 0 + 4 \times 0,1 =$

$= -0,2 + 0,2 - 0,4 + 0,4 = 0$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i f_X(x_i) = 0\times f_X(0) + 2\times f_X(2) + 4\times f_X(4) =$$
$$= 0 + 2\times 0{,}4 + 4\times 0{,}3 = 2$$

e

$$E(Y)=\sum_{j=1}^{3} y_j f_Y(y_j) = -1\times f_Y(-1) + 0\times f_Y(0) + 1\times f_Y(1) =$$
$$= -1\times 0{,}3 + 0 + 1\times 0{,}3 = 0$$

Portanto, vem

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 2\times 0 = 0.$$

c) $$E[X|Y=1] = \sum_{i=1}^{3} x_i f_{X|Y=1}(x_i,1) = \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{f_{X,Y}(x_i,1)}{f_Y(1)} =$$

$$= 0 + 2\cdot\frac{f_{X,Y}(2,1)}{f_Y(1)} + 4\cdot\frac{f_{X,Y}(4,1)}{f_Y(1)} = 2\times\frac{0{,}1}{0{,}3} + 4\times\frac{0{,}1}{0{,}3} =$$

$$= \frac{6}{3} = 2$$

4. X - v.a. q representa o nº de parafusos aparafusados pelo robô, em 10 segundos

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda=10), \quad f(x) = \frac{e^{-10}\cdot 10^x}{x!}, \text{ para } x=0,1,2,\dots$$

a) $$P(X\le 8) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=8) =$$

$$= \frac{e^{-10}\cdot 10^0}{0!} + \frac{e^{-10}\cdot 10}{1!} + \frac{e^{-10}\cdot 10^2}{2!} + \dots + \frac{e^{-10}\cdot 10^8}{8!} =$$

$$= e^{-10}\left(1 + 10 + \frac{10^2}{2!} + \dots + \frac{10^8}{8!}\right) = 0{,}3328,$$ logo a probabilidade de o robô aparafusar 8 parafusos em 10 segundos é 33,28%.

b) Seja X' - v.a. q representa o nº de parafusos aparafusados, num minuto e meio.

Como 1,5 minutos = 90 s = 9 × 10 s, então $X' \sim \mathcal{P}(\lambda'=90s)$, pelo Teorema da aditividade para a distribuição de Poisson.

Portanto, conclui-se que num minuto e meio o robô aparafusa em média 90 parafusos.

c) $P(X' \geq 86) = ?$

Como $\lambda' = 90 > 20$, então podemos afirmar que $X' \overset{a}{\sim} N(\mu = 90; \sigma = \sqrt{\lambda} = \sqrt{90})$. Portanto, vem que

$$P(X' \geq 86) \simeq P\left(Z \geq \frac{86-90}{\sqrt{90}}\right) = 1 - P(Z \leq -0{,}42) = 1 - \phi(-0{,}42) =$$

$$= \phi(0{,}42) = 0{,}6628 .$$

Donde, a probabilidade do robô aparafusar no mínimo 86 parafusos, num minuto e meio, é de 66,28%.

5. Sejam X - v.a. q representa o nº médio de horas de sol na região A
e Y - v.a. " " " " médio " " " " " " B

$X \sim N(\mu_X = 10{,}5;\ \sigma_X^2 = 0{,}25)$ e $Y \sim N(\mu_Y = 11{,}5;\ \sigma_Y = 0{,}75)$

a.i) $P(X \geq 9) = 1 - P(X < 9) = 1 - P\left(Z < \frac{9-10{,}5}{\sqrt{0{,}25}}\right) = 1 - \phi(-3) =$

$= \phi(3) = 0{,}9987$

ii) $P(9{,}8 < X < 12{,}1) = P\left(\frac{9{,}8-10{,}5}{\sqrt{0{,}25}} < Z < \frac{12{,}1-10{,}5}{\sqrt{0{,}25}}\right) =$

$= P(-1{,}4 < Z < 3{,}2) = \phi(3{,}2) - \phi(-1{,}4) = \phi(3{,}2) - 1 + \phi(1{,}4) =$

$= 0{,}9993 - 1 + 0{,}9192 = 0{,}9185$

b) $P(Y > k) = 0{,}8770 \Leftrightarrow 1 - P(Y \leq k) = 0{,}8770 \Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{k-11{,}5}{0{,}75}\right)$

$= 0{,}8770 \Leftrightarrow 1 - \phi\left(\frac{k-11{,}5}{0{,}75}\right) = 0{,}8770 \Leftrightarrow \phi\left(-\frac{k-11{,}5}{0{,}75}\right) = 0{,}8770 =$

$= \phi(1{,}16) \Leftrightarrow -\frac{k-11{,}5}{0{,}75} = +1{,}16 \Leftrightarrow k = 11{,}5 - 0{,}75 \times 1{,}16 = 10{,}63$

Logo, em 87,7% dos dias, o nº médio de horas de sol por dia na região B ultrapassa as 10,63 h.

c) Seja $W = X + Y$ - a v.a. q representa o nº médio de horas de sol nas duas regiões (A e B) por dia

Pelo Teorema da aditividade para a distribuição Normal, temos que $W \sim N\left(\mu = 10{,}5 + 11{,}5 = 22 \; ; \; \sigma = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} = \sqrt{0{,}8125} \simeq 0{,}9\right)$.

Portanto, tem-se

$$P(W \leq 21) = P\left(Z \leq \frac{21-22}{0{,}9}\right) = \phi(-1{,}11) = 1 - \phi(1{,}11) =$$

$$= 1 - 0{,}8665 = 0{,}1335.$$

Logo, a probabilidade de, nas duas regiões, o nº médio de horas de sol não exceder 21 h é de 13,35%.