Introdução à Probabilidade e Estatística

Testes de Hipóteses

Departamento de Matemática
Universidade de Évora

Ano lectivo de 2016/17

Patrícia Filipe

Testes de Hipóteses

Testes de Hipóteses

A teoria dos testes de hipóteses tem como objectivo validar ou não determinadas afirmações acerca da população com base na informação amostral. Em particular, nos testes de hipóteses paramétricos a validação diz respeito apenas aos parâmetros da população. As hipóteses envolvidas são:

- Hipótese nula, H_0: usualmente da forma $\theta = \theta_0$ onde θ_0 é um valor especificado e que estabelece que não há mudança.
- Hipótese alternativa, H_1: indica que houve mudança e especifica a natureza da mudança.

Tipos de testes de hipóteses

Se pretendemos testar hipóteses relativas a um dado parâmetro θ,

- se H_0: $\theta = \theta_0$ vs H_1: $\theta \neq \theta_0$ o teste é bilateral;
- se H_0: $\theta \leqslant \theta_0$ vs H_1: $\theta > \theta_0$ o teste é unilateral direito;
- se H_0: $\theta \geqslant \theta_0$ vs H_1: $\theta < \theta_0$ o teste é unilateral esquerdo.

Estatística de teste

A forma clássica de realização de um teste de hipóteses recorre a uma estatística $W = W(X_1, X_2, ..., X_n)$, designada por estatística de teste, para a qual conhecemos a distribuição de probabilidade associada. Trabalhamos então com o conjunto de todos os valores particulares $w_{obs} = W(x_1, x_2, ..., x_n)$. Nestas circunstâncias, um teste de hipóteses estabelece uma regra que permite determinar quando devemos rejeitar, ou não, a H_0. De facto, conhecendo a distribuição da estatística de teste, de acordo com um nível de significância fixo, definimos uma região de rejeição (R.R.), ou região crítica e uma região de aceitação (R.A.). A regra de decisão é:

- Rejeitar H_0 se $w_{obs} \in \mathbf{R.R.}$;
- Não rejeitar H_0 se $w_{obs} \in \mathbf{R.A.}$.

Testes de Hipóteses

Após se estabelecerem as hipóteses H_0 e H_1:

1. Obtenção de uma *estatística de teste* que possua uma distribuição que seja conhecida sob a condição da *hipótese nula*, H_0, ser verdadeira.
2. Fixação de um *nível de significância* α, que significa o risco máximo que se está disposto a correr de se rejeitar incorrectamente a hipótese nula.
3. Determinação das regiões de aceitação e de rejeição da hipótese nula.

Tipos de erro

Face à decisão tomada relativamente à hipótese nula podemos estar a cometer um de dois tipos de erro correspondentes às decisões erradas:

	REALIDADE	
	H_0 **verdadeira**	H_0 **falsa**
DECISÃO **Não rejeitar** H_0	decisão correcta	decisão incorrecta (Erro de tipo II)
Rejeitar H_0	decisão incorrecta (Erro de tipo I)	decisão correcta

Podemos calcular a probabilidade de cometer cada um destes erros:

- A probabilidade de cometer um erro de tipo I

$$P\,[\textbf{Erro de tipoI}] = P\,[\text{rejeitar H}_0\,|\text{H}_0 \text{ verdadeira}] < \alpha;$$

- A probabilidade de cometer um erro de tipo II

$$\begin{aligned}\beta\,(\theta_1) &= P\,[\textbf{Erro de tipo II}] = P\,[\text{não rejeitar H}_0\,|\text{H}_0 \text{ falsa}] = \\ &= P\,[\text{não rejeitar H}_0\,|\text{H}_1 \text{ verdadeira}] = \\ &= P\,[\text{não rejeitar H}_0\,|\,\theta = \theta_1\,]\end{aligned}$$

O valor de $\beta\,(\theta_1)$ diminui à medida que o verdadeiro valor de θ, θ_1, se afasta de θ_0, visto que neste caso é menos provável que não se detecte o verdadeiro valor.

Na abordagem aos testes de hipóteses é dada maior importância ao facto de evitar que se cometa o erro de tipo I, i.e., *rejeitar* H_o *sendo ela verdadeira*, pelo que se fixa inicialmente o valor do nível de significância α, de forma a estabelecer a probabilidade máxima de estarmos a cometer um erro de tipo I.

Na prática, os níveis de significância mais utilizados são:

0.01, **0.05** e 0.1.

Valor-p (p-value)

O **valor-p (*p-value*)** é o menor nível de significância, a partir do qual se rejeita a hipótese nula, i.e., **rejeitamos H_0 para $\alpha \geqslant$ valor-p**.

$$\textbf{valor-p} = P\left[\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \,|\mathrm{H}_0 \text{ verdadeira}\right]$$

Seja $W = W\left(X_1, X_2, ...X_n\right)$ a estatística de teste a utilizar para testar hipóteses θ, e w_{obs} o valor observado de W.

- $H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta > \theta_0 \Rightarrow$ valor-p $= P\left[W \geqslant w_{obs} \mid \mathrm{H}_0\right];$
- $H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta < \theta_0 \Rightarrow$ valor-p $= P\left[W \leqslant w_{obs} \mid \mathrm{H}_0\right]$
- $H_0 : \theta = \theta_0 \;\; vs \;\; H_1 : \theta \neq \theta_0 \Rightarrow$

$\rightsquigarrow$ se a distribuição da estatística de teste é simétrica, então

valor-p $= 2 \times P\left[W \geqslant |w_{obs}| \mid \mathrm{H}_0\right];$

$\rightsquigarrow$ se a distribuição da estatística de teste é assimétrica, então

valor-p $= 2 \times \min\left(P\left[W \leqslant w_{obs} \mid \mathrm{H}_0\right], P\left[W \geqslant w_{obs} \mid \mathrm{H}_0\right]\right).$

Potência do teste

A função potência de teste, $\pi(\theta_1)$, designa a probabilidade associada à decisão correcta de rejeição de H_0 quando esta hipótese é na realidade falsa, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\pi(\theta_1) &= P\left[\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_0 \text{ falsa}\right] \\
&= P\left[\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \mathrm{H}_1 \text{ verdadeira}\right] \\
&= P\left[\text{rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \theta = \theta_1\right] \\
&= 1 - P\left[\text{não rejeitar } \mathrm{H}_0 \mid \theta = \theta_1\right] \\
&= 1 - \beta(\theta_1)
\end{aligned}
$$

Testes de Hipóteses aos Parâmetros

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma a.a. (i.i.d.) de uma população com f.d.p. (ou f.m.p.) $f(x|\theta)$, com $\theta \in \Theta$ parâmetro desconhecido. A finalidade na realização de um teste de hipóteses consiste em, recolhida uma a.a. de um dado modelo X verificar se se deve, ou não, rejeitar a hipótese de que $\theta \in \Theta_0$. Ou seja, está-se a tentar avaliar a plausibilidade a favor ou contra uma dada restrição no espaço paramétrico.
Para tal, começa-se por estabelecer as seguintes hipóteses:

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

onde $\Theta_1 = \overline{\Theta_0}$, com $\overline{\Theta_0}$ o complementar de Θ_0.

Teste de Hipóteses para o Valor Médio

- H_0: $\mu = \mu_0$ vs H_1: $\mu \neq \mu_0$;
- H_0: $\mu \leqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu > \mu_0$;

  ou
- H_0: $\mu \geqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu < \mu_0$.

em que o primeiro caso se designa por teste bilateral e os dois últimos por testes unilaterais (à direita e à esquerda, respectivamente).

Teste de Hipóteses para o Valor Médio com σ^2 conhecida

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma a.a. i.i.d. com σ^2 conhecida.

- Se os dados forem provenientes de uma população **normal**

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

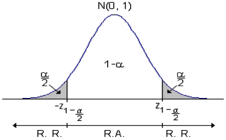
- Se os dados forem provenientes de uma população **qualquer e $\mathbf{n > 30}$**

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma} \dot{\sim} N(0, 1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

Teste de Hipóteses para o Valor Médio com σ^2 conhecida

Teste bilateral

$H_0 : \mu = \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu \neq \mu_0$



R.R.: $\left]-\infty ; -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right[\cup \left]z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; +\infty\right[$

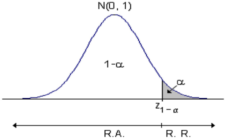
R.A.: $\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} ; z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$

Rejeitar H_0 se $|z_{obs}| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

p-value $= 2 \times P\left[Z > |z_{obs}|\right]$

Teste unilateral direito

$H_0 : \mu \leqslant \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu > \mu_0$



R.R.: $]z_{1-\alpha} ; +\infty[$

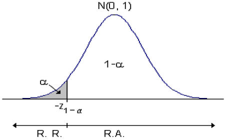
R.A.: $]-\infty ; z_{1-\alpha}]$

Rejeitar H_0 se $z_{obs} > z_{1-\alpha}$

p-value $= P\left[Z > z_{obs}\right]$

Teste unilateral esquerdo

$H_0 : \mu \geqslant \mu_0 \ vs \ H_1 : \mu < \mu_0$



R.R.: $]-\infty ; -z_{1-\alpha}[$

R.A.: $[-z_{1-\alpha} ; +\infty[$

Rejeitar H_0 se $z_{obs} < -z_{1-\alpha}$

p-value $= P\left[Z < z_{obs}\right]$

Teste de Hipóteses para o Valor Médio com σ^2 desconhecida

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma a.a. i.i.d. com σ^2 desconhecida.

- Se os dados forem provenientes de uma população **normal**

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \sim t_{(n-1)} \quad \text{Estatística de Teste}$$

- Se os dados forem provenientes de uma população **qualquer e $\mathbf{n > 30}$**

$$Z = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \dot{\sim} N(0,1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

Teste de Hipóteses para o Valor Médio com σ^2 desconhecida

Teste bilateral	Teste unilateral direito	Teste unilateral esquerdo
$H_0 : \mu = \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu > \mu_0$	$H_0 : \mu \geqslant \mu_0$ *vs* $H_1 : \mu < \mu_0$
R.R.: $\left]-\infty; -t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\right[\cup \left]t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right[$	R.R.: $\left]t_{n-1,1-\alpha}; +\infty\right[$	R.R.: $\left]-\infty; -t_{n-1,1-\alpha}\right[$
R.A.: $\left[-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}; t_{n-11-\frac{\alpha}{2}}\right]$	R.A.: $\left]-\infty; t_{n-1,1-\alpha}\right]$	R.A.: $\left[-t_{n-1,1-\alpha}; +\infty\right[$
Rejeitar H_0 se $\lvert t_{obs}\rvert > t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$	**Rejeitar** H_0 se $t_{obs} > t_{n-1,1-\alpha}$	**Rejeitar** H_0 se $t_{obs} < -t_{n-1,1-\alpha}$
p-value $= 2 \times P\left[T > \lvert t_{obs}\rvert\right]$	p-value $= P\left[T > t_{obs}\right]$	p-value $= P\left[T < t_{obs}\right]$

Exemplo

Um gerente de uma empresa informática tem a seu cargo 10 vendedores. Verificando pouca evolução nas vendas médias (por mês) efectuadas pelos seus vendedores (há algum tempo que as vendas médias não passavam de 13.5) este gerente resolveu atribuir novas percentagens de lucro aos seus vendedores. Assim, passado algum tempo, registou as vendas médias de cada um dos seus vendedores, tendo obtido a seguinte amostra:

15.1	14.3	12.8	16.2	15.9
12.7	13.5	14.1	16.2	14.3

Haverá evidência suficiente para concluir que o novo incentivo é eficaz?

Exemplo

Para dar resposta a esta questão admitir alguns pressupostos:

- O grupo de vendedores é *homogéneo* pelo que cada nº de vendas registado pode considerar-se como a realização de uma mesma variável aleatória, ou seja, qualquer nº de vendas registado poderia ter sido obtido por qualquer um dos 10 vendedores.
- A população para a qual se vai fazer a inferência é a de todo o nº possível de vendas médias que qualquer destes vendedores realizaria se lhe fosse possível repetir as vendas após idênticas condições, um nº indefinido de vezes.
- A população referida distribui-se de acordo com um modelo Normal de valor médio μ e desvio-padrão σ.

Exemplo

Tendo em conta estes pressupostos a eficácia do incentivo pode ser reduzida ao confronto das seguintes hipóteses:

$$H_0 : \mu \leqslant 13.5 \quad vs \quad H_1 : \mu > 13.5$$

A estatística de teste que nos irá permitir tomar a decisão é a seguinte:

$$T = \frac{\bar{X} - 13.5}{S/\sqrt{n}}$$

Exemplo

De modo a poder-se inferir temos primeiro de calcular o valor que a estatística T assumiu no caso em estudo. Para tal calculou-se a média e o desvio-padrão amostrais,

$$\bar{x} = 14.51 \quad e \quad s = 1.3311$$

Então, o valor observado, neste caso concreto, pela estatística de teste T foi

$$t = \frac{14.51 - 13.5}{1.311/\sqrt{10}} = 2.436$$

Exemplo

Confronte-se agora o valor observado da estatística de teste com determinados *quantis de probabilidade da distribuição da estatística de teste* (valores tabelados).

Por exemplo, escolhendo um nível de significância de 5%

$$t_{9;0,95} = 1,833$$

Como o *ponto crítico* para este teste é de 1.833, a *região de rejeição* é dada pelo conjunto de pontos à direita de 1.833.

Como $t_{obs} = 2.436 > 1.833$ então, ao nível de significância de 5%, rejeita-se a hipótese nula de que o incentivo não foi eficaz.

Pelo que esta amostra dá-nos indicações de que a nova política de incentivos foi eficaz.

Exemplo

Uma maneira análoga de testar a hipótese formulada é através do cálculo do *p-value*.
Consultando a tabela da distribuição *t-Student*, e considerando 9 graus de liberdade, obteve-se

$$p - value \approx 0.02.$$

Exemplo

Interpretação dos resultados:

Estamos a testar se o número de vendas médio dos vendedores de determinada loja de material informático se mantém em 13.5 ou se, pelo facto de se ter obtido uma média amostral de 14.51, tal será suficiente para concluir pela forte evidência de que esse número aumentou.

O que o *p-value* nos indica é que se o número de vendas médio continuasse centrado em 13.5 então a probabilidade dos vendedores realizarem vendas cujas médias do número de vendas dessem valores superiores ao valor observado (14.51) seria de aproximadamente de apenas 2%.

Exemplo

Fixando como limite máximo para a probabilidade de cometer erro do tipo I, ou seja, fixando como nível de significância, o valor de 5% verificamos que o *p-value* é inferior a este valor. Quer isto dizer que se rejeita a hipótese nula, ou seja, que há uma forte evidência que o número de vendas já não está centrado em 13.5 mas sim num valor superior.

Podemos dizer que o erro que estamos a cometer ao dizer que a nova política de incentivos foi eficaz é de apenas 2%.

Quanto menor for o valor do *p-value* maior é a evidência em rejeitar a hipótese nula, H_0.

Cálculo do p-value — Testes usando a Distribuição Normal

- Testes Bilaterais

$$\text{p-value} = P(Z > z_{obs}) + P(Z < -z_{obs}) = 2[1 - P(Z \leqslant |z_{obs}|)]$$

- Testes Unilaterais à Direita

$$\text{p-value} = P(Z > z_{obs}) = 1 - P(Z \leqslant z_{obs})$$

- Testes Unilaterais à Esquerda

$$\text{p-value} = P(Z < z_{obs})$$

Nota: Do caso da distribuição t-Student basta substituir a distribuição Normal por esta, nos correspondentes graus de liberdade.

Teste de Hipóteses para a Proporção

- $H_0\colon p = p_0$ vs $H_1\colon p \neq p_0$;
- $H_0\colon p \leqslant p_0$ vs $H_1\colon p > p_0$;

  ou
- $H_0\colon p \geqslant p_0$ vs $H_1\colon p < p_0$.

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma a.a. i.i.d. proveniente de uma distribuição **Bernoulli e $\mathbf{n > 30}$**.

$$Z = \frac{\overline{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \dot{\sim} N(0,1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

Teste de Hipóteses para a Variância

- H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ vs H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$;
- H_0: $\sigma^2 \leqslant \sigma_0^2$ vs H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$;

  ou
- H_0: $\sigma^2 \geqslant \sigma_0^2$ vs H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$.

Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma a.a. i.i.d. proveniente de uma distribuição **Normal**.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \frown \chi^2_{(n-1)} \quad \text{Estatística de Teste}$$

Cálculo do p-value — Testes para a(s) Variância(s)

- Testes Bilaterais

$$\text{p-value} = 2\min\{P(\chi^2_k < \chi^2_{obs}), P(\chi^2_k > \chi^2_{obs})\}$$

- Testes Unilaterais à Direita

$$\text{p-value} = P(\chi^2_k > \chi^2_{obs}) = 1 - P(\chi^2_k \leqslant \chi^2_{obs})$$

- Testes Unilaterais à Esquerda

$$\text{p-value} = P(\chi^2_k < \chi^2_{obs})$$

Nota: Do caso da comparação de variâncias basta substituir a distribuição Qui-Quadrado pela distribuição F, nos correspondentes graus de liberdade.

Teste de Hipóteses para a Diferença de Valores Médios

- H_0: $\mu_1 - \mu_2 = \mu_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \mu_0$;
- H_0: $\mu_1 - \mu_2 \leqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \mu_0$;

  ou
- H_0: $\mu_1 - \mu_2 \geqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \mu_0$.

Teste de Hipóteses para a Diferença de Valores Médios

Sejam $(X_{1,1}, X_{1,2}, \cdots, X_{1,n_1})$ e $(X_{2,1}, X_{2,2}, \cdots, X_{2,n_2})$ duas a.a.'s i.i.d. e independentes entre si, com σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas.

- Se os dados forem provenientes de uma população **normal**

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

- Se os dados forem provenientes de uma população **qualquer e $\mathbf{n_1 > 30}$ e $\mathbf{n_2 > 30}$**

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1) \quad \text{Estatística de Teste}$$

Teste de Hipóteses para a Diferença de Valores Médios

Sejam $(X_{1,1}, X_{1,2}, \cdots, X_{1,n_1})$ e $(X_{2,1}, X_{2,2}, \cdots, X_{2,n_2})$ duas a.a.'s i.i.d. e independentes entre si, com σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas.

- Se os dados forem provenientes de uma população **normal e** $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$$T = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t_{(n_1+n_2-2)}$$

- Se os dados forem provenientes de uma população **qualquer e** $\mathbf{n_1 > 30}$ **e** $\mathbf{n_2 > 30}$

$$Z = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2} - \mu_0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \dot{\sim} N(0,1)$$ Estatística de Teste

Teste de Hipóteses para a Diferença de Valores Médios - Amostras Emparelhadas

Consideremos, agora, o caso em que temos duas amostras aleatórias de igual dimensão n, $(X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n})$ e $(X_{21}, X_{22}, ..., X_{2n})$ que formam uma amostra emparelhada constituída por n pares, (X_{1i}, X_{2i}), $i = 1, 2, ..., n.$ Cada par é reduzido a um único valor $D_i = X_{1i} - X_{2i}$, $i = 1, 2, ..., n$, e a média e desvio-padrão amostrais são, respectivamente,

$$\bar{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i \quad \text{e} \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - \bar{D}\right)^2.$$

As variáveis aleatórias D_1, D_2,...,D_n são independentes e identicamente distribuídas com distribuição normal de média $\mu_D = \mu_1 - \mu_2.$

Teste de Hipóteses para a Diferença de Valores Médios - Amostras Emparelhadas

- H_0: $\mu_D = \mu_0$ vs H_1: $\mu_D \neq \mu_0$;
- H_0: $\mu_D \leqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu_D > \mu_0$;

  ou
- H_0: $\mu_D \geqslant \mu_0$ vs H_1: $\mu_D < \mu_0$.

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{D} - \mu_0}{S_D} \frown t_{(n-1)}$$

com $\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)$ e $S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)^2 - n\overline{D}^2}{n-1}$

Teste de Hipóteses para a Diferença de Proporções

- H_0: $p_1 - p_2 = p_0$ vs H_1: $p_1 - p_2 \neq p_0$;
- H_0: $p_1 - p_2 \leqslant p_0$ vs H_1: $p_1 - p_2 > p_0$;
  ou
- H_0: $p_1 - p_2 \geqslant p_0$ vs H_1: $p_1 - p_2 < p_0$.

Sejam $(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$ e $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$ duas a.a.'s i.i.d. e independentes entre si e proveniente de uma distribuição **Bernoulli e $\mathbf{n_1 > 30}$ e $\mathbf{n_2 > 30}$**.

$$Z = \frac{\overline{p_1} - \overline{p_2} - p_0}{\sqrt{\overline{p}^*(1 - \overline{p}^*)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} \dot{\frown} N(0,1) \text{ com } \overline{p}^* = \frac{n_1\overline{p_1} + n_2\overline{p_2}}{n_1 + n_2}$$

Teste de Hipóteses para a Razão de Variâncias

- H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \sigma_0^2$ vs H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \sigma_0^2$;
- H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leqslant \sigma_0^2$ vs H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > \sigma_0^2$;
  ou
- H_0: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geqslant \sigma_0^2$ vs H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \sigma_0^2$.

Sejam $(X_{1,1}, X_{1,2}, \cdots, X_{1,n_1})$ e $(X_{2,1}, X_{2,2}, \cdots, X_{2,n_2})$ duas a.a.'s i.i.d. e independentes entre si e proveniente de uma distribuição **Normal**.

$$F = \frac{1}{\sigma_0^2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \frown F_{(n_1-1;n_2-1)} \quad \text{Estatística de Teste}$$