UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Introdução à Probabilidade e Estatística

Soluções da Ficha Nº3: Variáveis e Vectores Aleatórios

Para as licenciaturas em: Eng. Civil, Eng. das Energias Renováveis, Eng. Geológica, Eng. Informática e Eng. Mecatrónica

2º semestre 2014/15 — 2h Teóricas + 2h Práticas

Docentes: Patrícia Filipe e Ana Isabel Santos

1. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, em que X toma valores de 2, 3 e 4 e $Y = 3X$...

   (a)

x	2	3	4
$f(x)$	0,3	0,4	0,3

y	6	9	12
$f(y)$	0,3	0,4	0,3

   (b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 6 \\ 0.3, & 6 \leq y < 9 \\ 0.7, & 9 \leq x < 12 \\ 1, & x \geq 12 \end{cases}$$

   (c) $P(X \leq 3) = 0,7$, $P(Y = 10) = 0$, $P(Y > 7) = 0,7$ e $P(Y \leq 9|X \geq 3) = 0,5714$

   (d)

$X \backslash Y$	6	9	12
2	0,3	0	0
3	0	0,4	0
4	0	0	0,3

   (e) $\mu_X = E(X) = 3$, $\sigma_X^2 = 0,6$, $\mu_Y = E(Y) = 9$ e $\sigma_Y^2 = 5,4$.

   (f) $\rho_{(X,Y)} = 1$, as variáveis apresentam uma associação linear positiva perfeita.

2. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Sabe-se que X é uma variável aleatória, com valor esperado 2.21...

(a) **A**=0.15, **B**=0.53 e **C**=0.05.

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 2 \\ 0.15, & 2 \leq y < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

(c) $\mu_Y = E(Y) = 4.55$ e $\sigma_Y = 1.07$

(d) $P(Y = 5|X = 2) = 1$

(e) $\sigma_{2X|Y=2} = 1.88$.

(f) As variáveis X e Y não são independentes.

3. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes. Ambas as variáveis podem assumir valor 2, 3 ou 5...

   (a) Verdadeira. Como X e Y são independentes,
   $P[X = 2, Y < 3] = P[X = 2]P[Y < 3] = 0,35$ e como $P[X = 2] = 0,7$, logo $P[Y < 3] = P[Y = 2] = 0.5$.

   (b) Falsa. Como X e Y são independentes,
   $P[X = 5|Y \geq 3] = P[X = 5] = 0.1 \neq 0.2$

   (c) Verdadeira. Como X e Y são independentes,
   $E[X|Y = 3] = E[X] = 2.5$ logo $E[4X + 12] = 4E[X] + 12 = 22$.

   (d) Falsa. $Var[8X - Y] = 64Var[X] + Var[Y]$

   (e) Falsa. Como X e Y são independentes, $Cov[X, Y] = 0$.

4. Na tabela seguinte apresenta-se a função de probabilidade relativa ao número de exercícios...

   (a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.2, & 0 \leq x < 1 \\ 0.3, & 1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 3 \\ 0.8, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

   (b) $P(X \leq 2) = 0.7$

   (c) $P(X = 0|X < 2) = 0.667$

   (d) $E(Y) = 7$ e $Var[Y] = 28.8$

5. Suponha que numa determinada cidade, o número de assoalhadas por casa...

   (a) A=0.3 e B=0.1

   (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.4, & 1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 3 \\ 0.9, & 3 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

(c) $P(X \leq 3) = 0.9$

(d) $P(X \geq 2) = 0.6$

(e) $\mu_X = E(X) = 2$ e $\sigma_X = 1$

6. Seja X uma variável aleatória à qual corresponde a seguinte função massa de probabilidade...

   (a)

   (b) $P(X \leq 2) = 0.25$

   (c) $E[2X - 1] = 6$ e $Var[2X - 1] = 7$

7. Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes que cada aluno das várias Licenciaturas da Universidade de Évora...

   (a) $P(X = 1) = 0.5625$

   (b) $P(X \leq 2) = 0.9375$

   (c)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.5625, & 1 \leq x < 2 \\ 0.9375, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

   (d) $E(X) = 1.5$

   (e)

   (f) $Var[2X - 1] = 1.5$

8. A fim de analisar a capacidade de germinação de sementes em certo cereal foram semeadas cinco sementes em cada vaso de um conjunto de vasos iguais...

   (a)

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	16/395	32/395	87/395	137/395	98/395	25/395

   (b) 0,6886

   (c) 0,8785

   (d) 0,8152

   (e) 1.

9. Considere a variável aleatória discreta X que assume os valores $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ cuja função massa de probabilidade é:

   (a) 17/60

y_i	0	6	24
$f(y_i)$	37/60	6/60	17/60

(b)

$P(Y > 0) = 23/60.$

10. Seja X uma dada variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade

    (a)

    (b) $P[X < 1] = 1/4$ e $P[1 < X \leq 3] = 3/4$.

11. Seja X uma variável aleatória que associa a cada indivíduo o tempo ....

    (a)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 50 \\ \frac{x}{20} - \frac{50}{20}, & 50 \leq x \leq 70 \\ 1, & x > 70 \end{cases}$$

    (b) $P(61 \leq X \leq 70) = 0,45$

    (c) $E(X) = 60$

12. A distribuição conjunta das variáveis aleatórias, independentes, X e Y ...

    (a)

$X\backslash Y$	0	1	2	$f(x)$
1	0,06	0,12	0,02	0,2
2	0,15	0,30	0,05	0,5
3	0,09	0,18	0,03	0,3
$f(y)$	0,3	0,6	0,1	

    (b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.2, & 1 \leq x < 2 \\ 0.7, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

    (c) $E(X|Y = 2) = 2,1$.

    (d) $E(Z) = 1$ e $Var(Z) = 7,72$.

13. Suponha que numa determinada cidade, o número de filhos por família (X) e o número de assoalhadas por casa (e por família) (Y) ...

x_i	2	3	4
$f_X(x_i)$	0,13	0,35	0,52

(a)

(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1 \\ 0.4, & 1 \leq y < 2 \\ 0.7, & 2 \leq y < 3 \\ 1, & y \geq 3 \end{cases}$$

(c) $P(Y \geq 2) = 0,6$

(d) $P(Y = 2|X = 3) = 0,4286$

(e) $E(X|Y = 3) = 3,83$

14. Considere que a editora "D. Quixote e Sr. Pança" possui duas máquinas impressoras...

    (a)

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.1875	0,125	0,3125	0,375

    (b) $F(1, 2) = P(X \leq 1, Y \leq 2) = 0.3125$

    (c) $P(Y = 1|X = 0) = 0.667$

15. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas que representam, respectivamente, o número de avarias graves num dado veículo automóvel antes da instalação de GPL e depois da instalação de GPL...

    (a) $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 0.1$ e $d = 0.1$

    (b) $P(X = 0, Y \leq 1) = 0.5$

    (c) $P(X = 0|Y = 2) = 0.5$

    (d) $Corr(X, Y) = 0.1166$. O número de avarias graves num dado veículo automóvel antes e depois da instalação do GPL estão fracamente relacionados.

    (e) $Var[Y|X = 0] = 0.4724$ e $Var[Y|X = 1] = 0.5$

16. Uma possível codificação de um jogo de computador é a seguinte: O jogador escolhe ao acaso uma das três opções $(-1, 0, 1)$ e...

    (a)

    (b) $E[X] = 0$.

x_i	-1	0	1
$f_X(x_i)$	1/3	1/3	1/3

y_i	0	1	2
$f_Y(y_i)$	1/3	1/3	1/3

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1/18	1/6	1/9
0	4/18	1/18	1/18
1	1/18	1/9	1/6

y_i	0	1	2
$f_{Y\|X=0}(y_i)$	4/6	1/6	1/6

(c)

(d) $Var[XY] = 1.3858.$

(e)

17. Com o objectivo de analisar o tipo de precaução que os alunos de outras licenciaturas, que não a de Eng. Informática, tomam relativamente ao seu computador...

(a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.54, & 0 \leq x < 1 \\ 0.88, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(b) $F(1,1) = 0,132$

(c) 0,012

(d) $Var[X] = 0,4836$

(e) $E[W] = 4,98$

(f) $E[XY] = 1,276$

18. Voltemos à questão colocada na frequência anterior, em que se pretendia analisar o tipo de precaução que os alunos de outras licenciaturas (que não a de Eng. Informática) tomavam relativamente ao seu computador...

(a)

y_i	0	1	2	3
$f(y_i)$	0	0,1	0,5	0,4

(b) 0,9

(c) 5,7

(d) $Cov(X,Y) = -0,04008$. Conclusão?

(e) $Cov(Z,W) = 0,08016$

19. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com função massa de probabilidade conjunta $f(x, y)$, da forma:

$$f(x, y) = k(2x + y),\ x = 0, 1, 2 \quad \text{e} \quad y = 0, 1, 2, 3.$$

   (a) $k = 1/42$

   (b) $P(X \geq 1, Y \leq 2) \approx 0,57143$

   (c)

x_i	0	1	2
$f(x_i \mid y = 0)$	0	1/3	2/3

   (d) $\approx 0,222$

20. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas...

   (a)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0.3	0.2	0.5

   (b)

$X \backslash Y$	3	4	5
0	0,06	0,14	0,1
1	0,04	0,11	0,05
2	0	0,3	0,2

   (c) 0,6.

   (d) 0,9275.

   (e) 16,85.

21. O Evaristo pode encontrar-se num dos três estados de espírito: **1** - radiante; **2** - assim-assim; **3** - macambúzio...

   (a) $a = 0,03$; $b = 0,16$; $c = 0,002$ e $d = 0,488$.

   (b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0,1, & 0 \leq y < 1 \\ 0,3, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

   (c) $E[XY] = 3,81$

   (d) $F(3, 1) = 0,3$.

   (e) $Var[X \mid Y = 0] = 0,2644$

Docentes: Dulce Gomes e Patrícia Filipe