Tipologia:

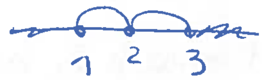
1ª Frequência (Resumos)

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x+2| < 3 \wedge x+1 \geq 0\} \cup \{1 + \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$$

$|x+2| < 3$ $\qquad -3 < x+2 < 3$

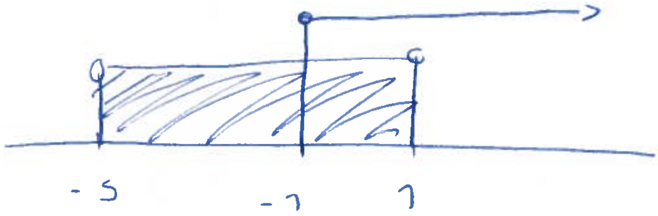
$-5 < x < 1$ $\qquad]-5;1[$ $\quad -5 < x < 1$

$|x-2| \geq 1$



$]-\infty;1] \cup [3;+\infty[$

$x+1 \geq 0 \iff x \geq -1$



$$A = [-1;1[\cup \{1 + \frac{1}{n^2}\}$$

$\longrightarrow 1 + \frac{1}{1} = 2;\ 1{,}25,\ \frac{17}{9}$

- Interior → saber se A é aberto ou não

$int(A) =]-1;1[\Rightarrow$ como $int(A) \neq A$

$\longrightarrow$ A não é aberto

• se $A =]-1;1[$ e $int(A) =]-1;1[$ então A era aberto.

- Fronteira

$fr(A) = \partial A = [-1,1] \cup \{1 + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$

- Exterior

$ext(A) = \mathbb{R} \setminus \{int(A) \cup fr(A)\}$

- Fecho → fecho ou aderência

$\bar{A} = A \cup fr(A) = [-1;1] \cup \{1 + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$ como $\bar{A} \neq A$, A não é fechado

- Derivado $\qquad A' =$ "é igual ao $\bar{A}$ menos os isolados"

pontos de acumulação

$A' = [-1;1]$

Majorante de A "do maior para cima"

$[2; +\infty[$

- Supremo "o menor do majorante"

2

- Maximo "é o supremo se estiver no conjunto $\mathcal{A}$"

2

- Minorado de A

$]-\infty; -1]$

- Ínfimo de A

-1

- Mínimo de A

-1

Como A não é aberto nem fechado, é limitado pois tem majorantes e minorantes.

Sucessões:

Por recorrência: $x_n = \begin{cases} u_n = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2} \end{cases}$

a) Mostre que $x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$ (indução)
$\hookrightarrow P_n$

1º $P(1) \rightarrow x_1 \leq 2 \rightarrow 1 \leq 2$ Verdade ✓

2º $P(n)$

$P(n+1) \rightarrow x_{n+1} \overset{?}{\leq} 2$

$1 + \frac{x_n}{2} \leq 2$

$\frac{x_n}{2} \leq 1 \Leftrightarrow x_n \leq 2$ ✓ pois $P(n)$ é verdade

b) Mostre que é monótona

$x_1 = 1 \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$

está a crescer $\rightarrow$ crescente

$x_n \overset{?}{\leq} x_{n+1}$

$x_n \leq 1 + \frac{x_n}{2}$?

$2x_n \leq 2 + x_n$ ✓ Verdade

Logo é monótona

c) Mostre que é convergente e calcule o limite

monótona + limitada ⇒ convergente

$\downarrow$ a) e b)

$x_1 \leq u_n \leq 2$ ↳ linea a)

$\downarrow$ 1

é limitada convergente

Se é convergente:

$x_n \to L$

$x_{n+1} \to L$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{2}$$

$$L = 1 + \frac{L}{2}$$

$$L = 2$$

Logo o limite é 2.

—— " ——

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^4 - \cancel{5n^2 - 7}}{n^3 + \cancel{n^2 - 1}} = \frac{3n^{\cancel{4}}}{\cancel{n}^3} = 3n = +\infty$$

—— " ——

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + \cancel{1}}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{n}{n} = 1$$

—— " ——

$$\lim \left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^n \to 1^\infty \Rightarrow \text{nepper}$$

C. A.

$$\left(\frac{4n-3}{4n+1}\right)^n = \left(\frac{4n+1-4}{4n+1}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{a}{u}\right)^u \Rightarrow e^a$$

$$\left(1 + \frac{-4}{4n+1}\right)^n$$

$$\frac{4n-3}{4n+1} = \frac{4n+1 \;\; -3}{4n+1}$$

$$\left(\left(1 + \frac{-4}{4n+1}\right)^{4n+1}\right)^{\frac{\cancel{n}}{4\cancel{n}\cancel{+1}}}$$

$$= \left(e^{-4}\right)^{\frac{1}{4}} = e^{-1}$$

$\lim \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$\dots \frac{(n+1+1)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!}$$

$$\dots \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!} = \dots \frac{(n+2)(n+1)\,n! - (n+1)n!}{(n+1)\,n! - n!}$$

$$\dots \frac{\cancel{n!}\left((n+2)(n+1) - (n+1)\right)}{\cancel{n!}\left((n+1) - 1\right)} = \frac{(n+2)(n+1) - (n+1)}{(n+1) - 1} = \frac{n^2}{n} = +\infty$$

$$n^2 + n + 2n + 2 - n + 1$$

$$n^2 + 3n + 2 - n + 1$$

$$n^2 + 3n - n + 3$$

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{(n+1) - 1}$$

$$\frac{n^2 + \cancel{2n + 3}}{n}$$

$$\lim \frac{3^{n+2} + \cancel{7 \otimes n^{27}}}{2^{2n} + \cancel{\sqrt{n} - 3n^{80}}} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{3^{n+2}}{2^{2n}} = \frac{3^n \times 3^2}{(2^2)^n}$$

$$= 3^2 \lim \frac{3^n}{4^n} = 9 \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & -1 < a < 1 \\ 1, & a = 1 \\ +\infty, & a > 1 \\ \text{não existe} & a \leq -1 \end{cases}$$

Alternadas

$$\lim \frac{10}{n} + (-1)^n$$

n par $\quad \frac{10}{n} + 1 = 1$

n ímpar $\quad \frac{10}{n} - 1 = -1$

$\neq$ logo o limite não existe.

Séries:

Se o termo geral $\not\to 0$ a série é divergente.

(se $\to 0$ pode ou não convergir)

$$\sum \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$$

C.A.

$$\lim \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \dots \left(\frac{2n^2+3-4}{2n^2+3}\right)^{n^2}$$

$$\left(\frac{2n^2+3-4}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left(\left(1+\frac{-4}{2n^2+3}\right)^{2n^2+3}\right)^{\frac{n^2}{2n^2+3}} = \cancel{\left(1+\frac{2}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \left[\left(1+\frac{2}{2n^2+3}\right)^{2n^2+3}\right]^{\frac{n^2}{2n^2+3}}}$$

$$= \left(e^{-4}\right)^{1/2}$$

$$= \left(e^{2}\right)^{1/5}$$

logo como o termo geral $\not\to 0$, a série diverge.

$$\sum \left(\frac{n^2+7}{3n^2-8}\right)$$

C.A.

$$\lim \left(\frac{n^2+\cancel{7}}{3n^2-\cancel{8}}\right) = \frac{1}{3} \quad \text{diverge}$$

Soma de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{5^{n-2}}$$

$$6 \sum \frac{1}{5^{n-2}} = 6 \sum \frac{1}{5^n \times 5^{-2}} = \frac{6}{5^{-2}} \sum \frac{1}{5^n}$$

$$\frac{6}{5^{-2}} \times \sum \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$\downarrow$

série geométrica de razão $r = \frac{1}{5}$

como $-1 < \frac{1}{5} < 1 \to$ converge

$$\text{soma } S = \frac{\frac{6}{5^0}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{6}{4/5} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Só dá para calcular a soma de:

- geométrica
- mengoli (telescópio)

Geométricas

$\sum r^n \quad -1 < r < 1$

$\downarrow$

converge

soma é $S = \frac{1^\circ \text{ termo}}{1-r}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \infty - \infty$$

$$\ldots \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)} = \ldots \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)^2}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}$$

$$= \ldots \frac{\left(\cancel{n} + \sqrt{n} - \cancel{n}\right)}{\left(\sqrt{n} + \sqrt{n}\right)} = \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{2\cancel{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$$

— // —

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3+\operatorname{sen}^2(n+27)}{n^3+1} = \ldots \underbrace{\frac{1}{n^3+1}}_{\downarrow \; 0} \times \underbrace{3+\operatorname{sen}^2(n+27)}_{\downarrow \; \text{limitado} = C}$$

Enquadradas:

$$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \quad \text{ou} \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\underbrace{n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\lim \frac{n}{\sqrt{n^{\cancel{2}}+\cancel{n}}} = 1} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \times n}_{\lim \frac{n}{\sqrt{n^{\cancel{2}}+\cancel{1}}} = 1}$$

$\to$ n.º de termos

Logo pela sucessão enquadrada o limite é 1 //

Critérios de comparação

- Séries de Dirichlet (divisão de polinómios ou raíze)

$$\sum \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \alpha \leq 1 \text{ diverge} \\ \alpha > 1 \text{ converge} \end{cases}$$

Ex: $\sum \frac{n+7}{\sqrt[3]{n^5}+4n-2}$ → grau 1 (numerador), → grau $\frac{5}{3}$ (denominador) $1-\frac{5}{3}=\frac{2}{3}$

$1+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3}$

$$\lim \frac{\frac{n+\cancel{7}}{\sqrt[3]{n^5}\cancel{+4n-2}}}{\frac{1}{n^{2/3}}} = \lim \frac{n\times n^{2/3}}{\sqrt[3]{n^5}} = \lim \frac{n^{5/3}}{n^{5/3}} = 1 > 0$$

$\alpha \leq 1$, a série diverge

- Critério de D'Alembert (ou da razão)

(fatoriais ou algo elevado a n (sem estar tudo elevado a n))

$$\sum u_n \to \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} >1 \text{ diverge} \\ <1 \text{ converge} \end{cases}$$

Nota: se o limite der 1 o critério é inconclusivo. Às vezes é necessário ajeitar um nepper.

Ex: $\sum \frac{5^n n!}{n^n}$

$$\lim \frac{\left(\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{5^n n!}{n^n}\right)} = \lim \frac{n^n \times 5^{n+1} \times (n+1)!}{5^n n! \,(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{n^n \times \cancel{5^n} \times 5 \,(\cancel{n+1})\cancel{n!}}{\cancel{5^n} \times \cancel{n!}\,(n+1)^n \,\cancel{(n+1)}}$$

$$= 5 \times \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \longrightarrow \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n \quad \left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n \quad (e^{-1})$$

$$= 5 \times e^{-1} = \frac{5}{e} > 1$$

logo diverge

- Critério de Cauchy ... quando está tudo elevado a n.

$$\sum u_n \to \limsup \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} >1 \text{ diverge} \\ <1 \text{ converge} \end{cases} \to \text{se for} = 1 \text{ é inconclusivo}$$

ex. $\sum \ln^n (2+(-1)^n) = \sum (\ln(2+(-1)^n))^n$

$$\limsup \sqrt[\cancel{n}]{(\ln(2+(-1)^n))^{\cancel{n}}} = \lim\sup \ln(2+(-1)^n)$$

$= \ln(3) > 1$

logo é divergente

- Soma de séries Mengoli

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n+k}) \to \text{temos que colocar assim}$$

A soma da série é: soma $= a_1 + a_2 + \dots + a_k - k \lim_{n\to+\infty} a_n$

$k=2$; soma $= a_0 + a_1 - 2\lim_{n\to+\infty} a_n$

↳ se o limite for $\to \infty$ ↓ divergente

Ex: $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{n(n+1)}$ $\quad 3 \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 3\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ → Esta série começa em 2; como $k=1$ a soma dos primeiros é apenas a_2

soma $= a_2 - 1\lim_{n\to+\infty} a_n$

$= \frac{1}{2} - 1\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$

→ $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ e é a soma