Séries de termos alternados 2ºF (resumo)

$\sum (-1)^n a_n$
↳ $\cos(n\pi)$ é igual

$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ se o $\lim_{x\to+\infty}$ e $\lim_{x\to-\infty} = 0$

fazer

1º Ver a convergência absoluta

$$\sum \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$$

grau de cima $= 0$
grau de baixo $= \frac{1}{2}$

baixo - cima $= \frac{1}{2}$ (diverge)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{n^{1/2}}} \right) = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n} + \cancel{1}} = 1 > 0$$

$$\boxed{\frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha > 1 \text{ converge} \\ \alpha \leq 1 \text{ diverge} \end{array}}$$

∴ por comparação as séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ e $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ têm a mesma natureza.

Mas $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (série de Dirichlet com $\alpha \leq 1$)

∴ A nossa também diverge.

∴ A série não converge absolutamente

2º Ver a convergência simples

$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ a_n

→ $a_n \to 0$? $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$

→ a_n é decrescente?

$a_n \geq a_{n+1}$

$\frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}+1}$ ✓

> Critério de Leibniz
> $\sum (-1)^n a_n$
> converge se
> → $a_n \to 0$
> → a_n decrescente

∴ Pelo critério de Leibniz a série converge simplesmente.

$$\sum (-1)^n \frac{e^{n+2}-1}{e^n+5}$$

n par $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^n} \times e^2 - \cancel{1}}{\cancel{e^n} \cancel{+5}} = e^2$

$\therefore$ Como o termo geral não tende para 0, a série diverge.

Funções:

(Domínios)

- $\frac{1}{u}$ (99!) $\Rightarrow u \neq 0$
- $\sqrt[\text{par}]{u} \to u \geq 0$
- $\log u \Rightarrow u > 0 \to D' = \mathbb{R}$
- $\left.\begin{array}{l}\text{arcsen}\, u \\ \text{arccos}\, u\end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq u \leq 1$

$a^x \to D = \mathbb{R} \to D' a^x > 0$

$tg\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$ $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$

$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\, x \\ \cos x\end{array}\right\} D' = [-1, 1]$

Outros exemplos:

$f(x) = 4(1-x)^{-2} = \frac{4}{(1-x)^2} \Rightarrow 1-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$

$f(x) = (x+4)^{3/4} = \sqrt[4]{(x+4)^3} \Rightarrow (x+4) \geq 0 \Rightarrow x \geq -4$

$f(x) = \tan(3x) = \frac{\text{sen}\, 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \cos 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\text{sen} 3x \neq 0 \Rightarrow 3x \neq k\pi$

$tg(3x) \neq 0 \Rightarrow 3x \neq k\pi$

$\ln(\ln x)$

$D = \{ x \in \mathbb{R} : \ln x > 0 \text{ e } x > 0 \}$

$x > e^0$

$x > 1$

$D =]1; +\infty[$

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ $D = \{ x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 > 0 \}$

$=]-2, 2[$

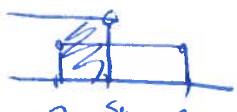
$f(x) = \ln(1 - \text{arcsen}(x))$

$D = \{ x \in \mathbb{R} : 1 - \text{arcsen}(x) > 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \}$

$\text{arcsen}(x) > 1$

~~sen(x)~~

$x < \text{sen}(1)$



$D = [-1; \text{sen} 1[$

Limites notáveis

$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

$f(x) = x^2 - 3$

$D = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3 \geq 0 \}$

$x^2 - 3 \geq 0$

$x^2 \geq 3$

$x \geq \pm\sqrt{3}$

$x \geq \sqrt{3}$ $\quad x \geq -\sqrt{3}$

$D =]-\infty ; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3} ; +\infty[$

$f(x) = \ln \left(\frac{2+x}{2-x} \right)$ $\qquad D = \{ x \in \mathbb{R} : \frac{2+x}{2-x} > 0 \wedge 2 - x \neq 0 \}$

$x \neq 2$

	$-\infty$	-2		2	$+\infty$
$2+x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$+$	N.D.	$-$

$2 + x > 0$

$x > -2$

$2 - x > 0$

$x < +2$

$D =]-2 ; 2[$

— // —

$\operatorname{sen} x = 1$

$x = \operatorname{arcsen}(1)$

$e^x = 4$

$x = \ln(4)$

$5^x = 2$

$x = \log_5(2)$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
sen	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tg	0	$+\infty$	0	$-\infty$

— // —

$(x^p)' = p \times x^{p-1}$

$(x)' = 1$

$(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \times g)' = f' \times g + g' \times f$

$(k \times f)' = k \times f'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$

$(e^x)' = e^x \qquad (e^u)' = u' e^u$

$(a^x)' = \ln a \times a^x \qquad (a^u)' = u' \times \ln a \times a^u$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \times \cos u \qquad (\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1 \to (x)'}{\sqrt{1 - x^2}}$

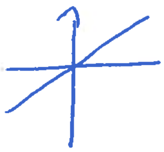
$(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1 \to (x)'}{\sqrt{1 - x^2}}$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{(x)'}{1 + x^2}$

Paridade:

- $f(-x) = f(x) \rightarrow$ par

- $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ ímpar



$\ln(A) + \ln(B) = \ln(AB)$

$\ln(A) - \ln(B) = \ln\left(\frac{A}{B}\right)$

$\ln(a^b) = b \ln a$

$f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

$f(-x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = \ln\left(\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -f(x)$

$\downarrow$

ímpar

— // —

$f(x) = \text{arctg}(3x)$

$\text{arctg}(3x) = y$

$3x = \text{tg}\, y$

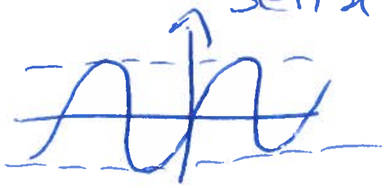
$x = \frac{\text{tg}\, y}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{\text{tg}\, y}{3}$

} Inversa

$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

sen x



$D = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{R}\}$

arc sen x

⚠ $D' = \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

— // —

$f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$

$f(-x) = (-x)^n$ $\rightarrow$ se n é par $\rightarrow f(x) = x^n = f(x)$ é par

$\rightarrow$ se n é ímpar $\rightarrow f(x) = -x^n = f(-x)$ é ímpar

— // —

$f(x) = \frac{\pi}{4} - 3\,\text{arcsen}(2x)$

$D \Rightarrow$ $-1 \leq 2x \leq 1$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$D = \left[-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right]$

$D' \Rightarrow$ $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(2x) \leq \frac{\pi}{2}$

$+3\frac{\pi}{2} \geq -3\,\text{arcsen}(2x) \geq -\frac{3\pi}{2}$

$+\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - 3\,\text{arcsen}(2x) \geq -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{7\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - 3\,\text{arcsen}(2x) \geq -\frac{5\pi}{4}$

$D' = \left[-\frac{5}{4}\pi ; \frac{7\pi}{4}\right]$

$f^{-1} = ?$

$$\frac{\pi}{4} - 3\arcsin(2x) = y$$

$$-3\arcsin(2x) = y - \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin(2x) = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{-3}$$

$$2x = \operatorname{sen}\left(\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-3}\right)$$

$$x = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{y-\frac{\pi}{4}}{-3}\right)}{2}$$

$f(x) = \frac{\pi}{4}$

$$\cancel{\frac{\pi}{4}} - 3\arcsin(2x) = \cancel{\frac{\pi}{4}}$$

$$-\arcsin(2x) = 0$$

$$2x = \operatorname{sen}(0)$$

$$x = 0$$

—//—

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}}_{\downarrow \, 1} \times \underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\downarrow \, 1} = 1$$

Função contínua: (polinomiais, racionais, exponenciais, logarítmicas)

$x = a \to \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Teorema de Bolzano: (Mostrar que tem um único zero em $\mathbb{R}$)

$f(x) = 2x^3 + 4x - 1$

- f é contínua em $\mathbb{R}$ pois é polinomial $[0, 1]$
- $f(a) \times f(b) < 0$ $\quad f(0) = -1$, $f(1) = 5$

Logo $f(a) \times f(b) = -5 < 0$

Assim existe pelo menos 1 zero.

Teorema de Weierstrass: f é contínua e limitada em $[a, b]$, então ela tem um máximo e um mínimo

Diferenciabilidade:

$x = a \qquad f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad f'_{esq}(a) = f'_{dir}(a)$

Se f é diferenciável $\Rightarrow$ f é contínua

Equação da reta tangente no ponto $x = a$:

$$y - f(a) = f'(a) \times (x - a)$$

$f(x) \Rightarrow$ ponto (x_0, y_0)

$(y - y_0) = \underbrace{m}_{f'(x)} (x - x_0)$

$a = 1 \quad f(1) = -\dfrac{1}{2} \; ; \; f'(1) = -\dfrac{1}{4}$

$y + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4} \times (x - 1) \Leftrightarrow$

$y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}$

$\cancel{y = -\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{1}{2}}$

$\cancel{y = -\dfrac{x - 1 - 2}{4}}$

$\cancel{y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{4}}$

$\dfrac{-x+1}{4} - \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{-x}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{-x}{4} + \dfrac{1-2}{4} = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}$

Teorema de Rolle:

- f é contínua em $[a, b]$
- f é diferenciável em $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

$\exists\, c \in]a, b[: f'(c) = 0$

Ex: $f(x) = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x \quad [-\pi, \pi]$

$f(-\pi) = 1$

$f(\pi) = 1$

como $f(-\pi) = f(\pi)$ então

$\exists\, c \in]-\pi, \pi[:$

$f'(c) = 0$

Teorema de Lagrange:

- f é contínua em $[a, b]$
- f é diferenciável em $]a, b[$

$\exists\, c \in]a, b[: f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{arctg} x, \quad x > 0$$

$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad [a, b] \to [0, x] \qquad f' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$0 < c < x \qquad f'(c) = \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(0)}{x - 0}$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} < \frac{1}{1+0^2}$$

$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < x$$

$f(x) = e^x - x - 2$

$f(0) = -1$ ⊖

$f(2) = e^2 - 4 =$ ⊕

tem 2 soluções

· f é contínua em $[0,2]$ ✓

· $f(0) \times f(2) < 0$ ✓

Pelo T. Bolzano $\exists\, c \in]0,2[: f(c) = 0$

↳ pelo menos um

Provar que é a única solução

$f' = e^x - 1 > 0$ em $]0,2[$

$]0,+\infty[$

f é estritamente crescente em $]0,+\infty[$

Logo a tem um zero é único!

$\therefore$ Há exatamente um zero entre $]0,2[$

$]0,+\infty[$

~~$e^x - 1 > 0$~~

~~$e^x > 1$~~

~~$x > \ln(0)$~~

~~$]0;+\infty[$~~

Outro em $]-2,0[$

$f(-2) = e^{-2}$ ⊕

$f(0) =$ ⊖

- é contínua em $[-2,0]$

- $f(-2) \times f(0) < 0$

↳ $e^x - 1 > 0$ em $]-2;0[$

$]-\infty;0[$

Pelo T. Bolzano $\exists\, c \in]-2,0[: f(c) = 0$

⇒ Para ser diferenciável em $x = a$

1º tem de ser contínua em $x = a$.

2º $f'_{esq}(a) = f'_{dir}(a)$

⇒ Uma função não definida por ramos é contínua no seu domínio.

⇒ A função é prolongável por continuidade a $x = 0$ se o limite $\lim_{x \to 0} f(x)$ existir.

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$$f(x) \begin{cases} f(x), & \mathbb{R} \setminus \{a\} \\ L, & x = a \end{cases}$$

$D = \mathbb{R} \setminus \{a\}$

Regra cauchy

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x\cos x - \operatorname{sen} x)}{x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{R.C.}{=}} \frac{1\times \cancel{\cos x} + x\times(-\operatorname{sen} x) - \cancel{\cos x}}{3x^2}$$

$$= -\frac{\cancel{x}\operatorname{sen} x}{3x^2} = -\frac{\operatorname{sen} x}{3x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{R.C.}{=}} -\frac{\cos x}{3} = -\frac{1}{3} \;//$$

1° Truque

$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} = (\infty - \infty)$ Reduzir ao mesmo denominador

$$= \frac{x\log x - (x-1)}{(x-1)\log x} = \frac{0}{0} \underset{R.C.}{=} \frac{1\times\log x + x\times\frac{1}{x} - 1}{1\times\log x + (x-1)\times\frac{1}{x}} = \frac{\log x}{\log x\left(\frac{x-1}{x}\right)'} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{R.C.}{=}}$$

$$= \frac{1/x}{1/x + \frac{(x-1)(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{1+0} = 1 \;//$$

2° Truque

$\lim_{x\to+\infty} x\times\operatorname{sen}\left(\frac{a}{x}\right) = \infty\times 0$ fazer o inverso do produto mais simples

$$\lim_{\dots} \frac{1\times\operatorname{sen}\left(\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \underset{R.C.}{=} \frac{-a/x^2 \times \cos\left(a/x^2\right)}{-1/x^2} = \dots \; a\cos\left(a/x^2\right)$$

3° Truque

$\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0$ ou 1^∞ ou ∞^0 ou 0^∞ -> elevados

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{0\times\infty} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1\times\ln x}{1/x}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x}}} = e^0 = 1$$