UNIVERSIDADE DE ÉVORA
ESCOLA DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

Introdução à Probabilidade e Estatística

Ficha Nº3: Variáveis e Vectores Aleatórios

Para as licenciaturas em: Eng. Civil, Eng. das Energias Renováveis, Eng. Geológica, Eng. Informática e Eng. Mecatrónica

2º semestre 2014/15 — 2h Teóricas + 2h Práticas

Docentes: Patrícia Filipe e Ana Isabel Santos

Nota: Alguns dos exercícios propostos nesta ficha foram retirados dos manuais constantes na bibliografia (ver programa da cadeira).

1. **(1ª Frequência 2013)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias, em que X toma valores de 2, 3 e 4 e $Y = 3X$. Sabe-se que $P(X = 2) = P(X = 4) = 0.3$.

   (a) Determine as funções massa de probabilidade de X e de Y.

   (b) Construa a função distribuição de Y.

   (c) Determine $P(X \leq 3)$, $P(Y = 10)$, $P(Y > 7)$ e $P(Y \leq 9|X \geq 3)$

   (d) Construa a função massa de probabilidade conjunta de (X, Y).

   (e) Determine o valor esperado e variância para cada uma das variáveis.

   (f) Calcule e interprete o valor do coeficiente de correlação de (X, Y).

2. **(2ª Frequência/Exame 2013)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Sabe-se que X é uma variável aleatória, com valor esperado 2.21, cuja função de probabilidade é dada por:

x	1	2	3
$f(x)$	0,32	A	B

A variável aleatória Y, pode assumir valor 2 ou 5, sendo que a P[$Y > 2$]= 0.85. O par aleatório (X, Y) possui a seguinte função massa de probabilidade conjunta:

$X \backslash Y$	2	5
1	**C**	0.27
2	0	3**C**
3	2**C**	0.43

   (a) Determine **A**, **B** e **C**. *Caso não consiga obter estes valores, use as letras para as alíneas seguintes.*

   (b) Determine a função distribuição da variável Y.

(c) Calcule o valor médio e o desvio-padrão da variável Y.
(d) Calcule a probabilidade de $Y = 5$ condicionada a $X = 2$.
(e) Sabendo que $Y = 2$, calcule o desvio-padrão da $2X$.
(f) As variáveis X e Y são independentes?

3. **(Exame de recurso 2013)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes. Ambas as variáveis podem assumir valor 2, 3 ou 5. Diga, justificando convenientemente, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Se $P[X = 2] = 0.7$ e $P[X = 2, Y < 3] = 0,35$ então $P[Y = 2] = 0.5$.
   (b) Se $P[X = 5|Y \geq 3] = 0.1$ então $P[X = 5] = 0.2$.
   (c) $E[X|Y = 3] = 2.5$ logo $E[4X + 12] = 22$.
   (d) $Var[8X - Y] = 8Var[X] + Var[Y]$
   (e) Se E[XY]=2,73 então $Cov[X, Y] = 3.47$.

4. Na tabela seguinte apresenta-se a função de probabilidade relativa ao número de exercícios (X) que um aluno tenta resolver durante a aula prática de uma determinada disciplina.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

   (a) Determine a função distribuição do número de exercícios que os alunos tentam resolver numa aula.
   (b) Qual a probabilidade de durante uma aula um aluno tentar resolver no máximo 2 exercícios?
   (c) Sabendo que um aluno tentou resolver menos de 2 exercícios qual a probabilidade de não ter tentado resolver qualquer exercício?
   (d) Considerando $Y = 15 - 4X$, calcule $E[Y]$ e $Var[Y]$.

5. Suponha que numa determinada cidade, o número de assoalhadas por casa apresenta a seguinte distribuição:

x	1	2	3	4
$f(x)$	0,4	A	0,2	B

   (a) Tendo em conta que a probabilidade de uma casa ter no máximo 2 assoalhadas é de 0.7 determine A e B;
   (b) Determine a função distribuição do número de assoalhadas por casa;
   (c) Qual a probabilidade do número de assoalhadas por casa ser no máximo 3?
   (d) Qual a probabilidade do número de assoalhadas por casa ser de pelo menos 2?
   (e) Determine e interprete o valor esperado e o desvio-padrão do número de assoalhadas por casa.

6. **(1ª Frequência 2011).**Seja X uma variável aleatória à qual corresponde a seguinte função massa de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{20}, & x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0, & \text{restantes casos} \end{cases}$$

   (a) Mostre que, para que $f(x)$ seja uma função massa de probabilidade, $a = 1$.

   (b) Qual a probabilidade da variável aleatória tomar quanto muito o valor 2?

   (c) Calcule o valor esperado e a variância de $2X - 1$.

7. **(1ª Frequência 2009).** Seja X a variável aleatória que representa o número de vezes que cada aluno das várias Licenciaturas da Universidade de Évora se matriculam na disciplina de IPE. Admita que X tem a seguinte função massa de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{10 - x^2}{16}, & x = 1, 2, 3 \\ 0, & \text{restantes casos} \end{cases}$$

   (a) Qual a probabilidade de um aluno das várias Licenciaturas da Universidade de Évora fazer a disciplina de IPE à primeira?

   (b) Calcule a probabilidade de um aluno se inscrever quanto muito 2 vezes à disciplina.

   (c) Determine a função de distribuição da variável X e represente-a graficamente.

   (d) Determine o número médio de vezes que um aluno se matricula a IPE.

   (e) Prove que $Var[X - 1] = Var[X]$.

   (f) Calcule $Var[2X - 1]$.

8. A fim de analisar a capacidade de germinação de sementes em certo cereal foram semeadas cinco sementes em cada vaso de um conjunto de vasos iguais, contendo o mesmo tipo de solo. Registou-se, então, o número de sementes germinadas. Obtiveram-se os seguintes resultados:

Nº de sementes germinadas por vaso	0	1	2	3	4	5
Nº de vasos	16	32	87	137	98	25

   Seja X a variável aleatória que indica o número de sementes germinadas, por vaso.

   (a) Defina a sua função massa de probabilidade.

   (b) Calcule a probabilidade de terem germinado quanto muito três sementes.

   (c) Calcule a probabilidade de terem germinado entre duas a cinco sementes, inclusive.

   (d) Calcule a probabilidade de terem germinado mais de uma e menos de cinco sementes.

   (e) Calcule a probabilidade de terem germinado menos de quinze sementes?

9. Considere a variável aleatória discreta X que assume os valores $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ cuja função massa de probabilidade é:

x_i	-2	-1	0	1	2
$f(x_i)$	12/60	15/60	10/60	6/60	m

(a) Determine o valor de m de modo que $f(x_i)$ seja uma função massa de probabilidade;

(b) Seja $Y = X^3 + 3X^2 + 2X$. Construa a função massa de probabilidade de Y e calcule $P(Y > 0)$.

10. Seja X uma dada variável aleatória contínua com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 \leq x < 1 \\ a, & 1 \leq x < 2 \\ -ax + 3a, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & \text{restantes casos} \end{cases}$$

(a) Mostre que para $f(x)$ seja uma função de densidade, $a = 1/2$.

(b) Calcule $P[X < 1]$ e $P[1 < X \leq 3]$.

11. Seja X uma variável aleatória que associa a cada indivíduo o tempo necessário para completar um determinado teste padrão. Constatou-se que X pode tomar valores entre 50 e 70 minutos e definiu-se a sua função densidade de probabilidade do seguinte modo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & 50 \leq x \leq 70 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Determine a função de distribuição de X.

(b) Calcule a probabilidade de um indivíduo demorar entre 61 a 70 minutos a completar o teste.

(c) Determine o tempo médio necessário para completar o teste.

12. A distribuição conjunta das variáveis aleatórias, independentes, X e Y é dada pela seguinte tabela:

$X\backslash Y$	0	1	2	$f(x)$
1	0,06		0,02	0,2
2	0,15		0,05	
3				0,3
$f(y)$	0,3		0,1	

   (a) Complete a tabela.

   (b) Indique a função distribuição da variável aleatória X.

   (c) Calcule $E(X|Y=2)$.

   (d) Seja $Z = 2X - 4Y$, calcule $E(Z)$ e $Var(Z)$.

13. Suponha que numa determinada cidade, o número de filhos por família (X) e o número de assoalhadas por casa (e por família) (Y) apresentam a seguinte distribuição conjunta:

$X\backslash Y$	1	2	3
2	0,08	0,05	0
3	0,15	0,15	0,05
4	0,17	0,10	0,25

   (a) Determine a função massa de probabilidade do número de filhos por família;

   (b) Calcule a função de distribuição do número de assoalhadas por casa;

   (c) Qual a probabilidade do número de assoalhadas por casa ser de pelo menos 2?

   (d) Calcule a probabilidade de uma família morar numa casa de 2 assoalhadas, sabendo que tem 3 filhos;

   (e) Se uma família vive numa casa com 3 assoalhadas, quantos filhos se espera que essa família tenha?

14. **(2ª Frequência 2009).** Considere que a editora "D. Quixote e Sr. Pança" possui duas máquinas impressoras. Cada uma destas máquinas trabalha em conjunto na impressão de uma determinada obra (quer isto dizer que cada máquina imprime, em separado mas em simultâneo, vários exemplares da mesma obra). No final da impressão, verifica-se que cada obra pode apresentar no máximo 3 pequenos defeitos.

    Considere duas variáveis aleatórias X e Y, onde X representa o número de defeitos em cada obra impressa e Y o tipo de máquina . Seja $f(x, y)$ a função massa de probabilidade conjunta do par (X, Y), dada por:

$Y\backslash X$	0	1	2	3
1	0.125	0.0625	0.1875	0.125
2	0.0625	0.0625	0.125	0.25

   (a) Defina a função massa de probabilidade marginal da variável X.

   (b) Calcule a função de distribuição conjunta no ponto $(1, 2)$.

(c) Seleccionou-se aleatoriamente uma obra do conjunto das obras impressas e verificou-se que esta não apresentava qualquer defeito. Qual a probabilidade desta obra ter sido impressa na máquina 1?

15. **(Exame de Época Normal 2009).** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas que representam, respectivamente, o número de avarias graves num dado veículo automóvel antes da instalação de GPL e depois da instalação de GPL. De um estudo prévio, sabe-se que a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y) é dada por

$X \backslash Y$	0	1	2
0	a	0.3	b
1	c	0.2	d

e que a função de distribuição marginal da variável Y dada por:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.3, & 0 \leq y < 1 \\ 0.8, & 1 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

(a) Complete a tabela sabendo ainda que $E(XY) = 0,4$ e que $E(X^2) = 0,4$.

Nota: Se não resolveu a alínea (a) considere nos cálculos seguintes as letras a, b, c e d.

(b) Calcule a probabilidade de um dado veículo não ter tido nenhuma avaria grave antes da instalação de GPL e ter tido quanto muito uma avaria grave depois da instalação de GPL.

(c) Sabendo que um dado veículo teve duas avarias graves depois de ter instalado o GPL, calcule a probabilidade de antes não ter tido qualquer avaria grave.

(d) Será que o número de avarias graves num dado veículo automóvel antes e depois da instalação do GPL estão relacionados? Justifique e comente o valor obtido.

(e) Calcule $Var[Y|X = x]$.

16. **(Exame de Recurso 2009).** Uma possível codificação de um jogo de computador é a seguinte:
O jogador escolhe ao acaso uma das três opções $(-1, 0, 1)$ e
O computador responde através da escolha, também aleatória, de outras três opções $(0, 1, 2)$.
O resultado do jogo é determinado pelo produto XY, onde X representa a escolha do jogador e Y a escolha do computador.

(a) Escreva as funções massa de probabilidade marginais da variáveis X e Y.

(b) Calcule o valor esperado da variável X.

(c) Determine a função massa de probabilidade conjunta do par (X, Y), assumindo que
$P[X = -1, Y = 1] = P[X = 1, Y = 2] = 1/6$
e que
$P[X = 1, Y = 1] = P[X = -1, Y = 2] = 1/9$

(d) Calcule a variância de XY.

(e) Determine a função massa de probabilidade de Y condicionada a $X = 0$.

17. **(1ª Frequência 2008).** Com o objectivo de analisar o tipo de precaução que os alunos de outras licenciaturas, que não a de Eng. Informática, tomam relativamente ao seu computador foi feito um estudo sobre não só o número de mensagens electrónicas marcadas por mês como *junk* antes de serem apagadas, como também o número de vezes, igualmente num mês, que foram feitas actualizações do anti-virus.

Seja X a variável aleatória que representa o número de mensagens marcadas como *junk* e Y o número de vezes que o anti-virus foi actualizado.

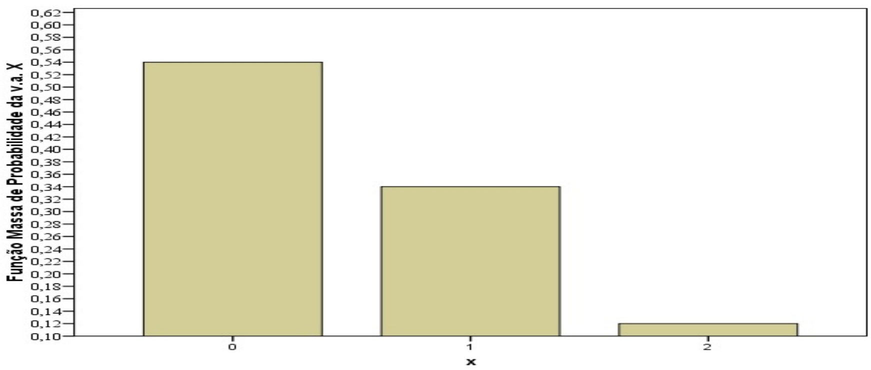

Figure 1: Função Massa de Probabilidade Marginal da v.a. X

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 0.05, & 0 \leq y < 1 \\ 0.15, & 1 \leq y < 2 \\ 0.6, & 2 \leq y < 3 \\ 1, & y \geq 3 \end{cases}$$

Tendo em conta toda a informação fornecida anteriormente sobre as variáveis aleatórias X e Y e considerando que estas são independentes, responda às questões que se seguem.

Nota: Diz-se que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes

- se $f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

- ou se $F(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

onde $f(x,y)$ representa a função massa de probabilidade conjunta do par (X,Y) e $F(x,y)$ representa a função de distribuição conjunta do par (X,Y).

(a) Determine a função de distribuição marginal da variável X e represente-a graficamente.

(b) Calcule a função de distribuição conjunta no ponto $(1,1)$.

(c) Qual a probabilidade da razão entre o número de mensagens marcadas como *junk* e o número de vezes que o anti-virus foi actualizado ser superior a 1?

(d) Calcule a variância da variável X.

(e) Calcule o valor esperado da variável $W = X + 2Y$.

(f) Calcule $E[XY]$.

18. **(2ª Frequência 2008).** Voltemos à questão colocada na frequência anterior, em que se pretendia analisar o tipo de precaução que os alunos de outras licenciaturas (que não a de Eng. Informática) tomavam relativamente ao seu computador. Para tal, foi feito um estudo sobre o número de mensagens electrónicas marcadas por mês como *junk* antes de serem apagadas e o número de vezes, igualmente num mês, em que foram feitas actualizações do anti-virus.

Seja X a variável aleatória que representa o número de mensagens marcadas como *junk* e Y o número de vezes que o anti-virus foi actualizado. Considere a seguinte função massa de probabilidade conjunta:

$X\backslash Y$	0	1	2	3	
0	0,027	0,054	0,243	0,216	0,54
1	0,017	0,034	0,289		0,34
2		0,012	0,06	0,048	0,12

(a) Sabendo que um aluno escolhido ao acaso marcou durante um mês duas mensagens como *junk*, determine a função massa de probabilidade da variável Y.

(b) Calcule $P(\frac{Y}{X} > \frac{1}{2} | X > 1)$.

(c) Calcule o valor esperado de Y^2, sabendo que $X = 2$.

(d) Sabendo que $E[XY] = 1,164$, qualifique a existência de relação, caso esta exista, entre as variáveis X e Y.

(e) Determine a covariância entre Z e W, sabendo que $Z = 2X$ e $W = -Y$.

19. **(Exame de Época Normal 2008).** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com função massa de probabilidade conjunta $f(x,y)$, da forma:

$$f(x,y) = k(2x+y),\ x = 0,1,2 \quad \text{e} \quad y = 0,1,2,3.$$

Calcule

(a) o valor da constante k.

(b) $P(X \geq 1, Y \leq 2)$.

(c) a função massa de probabilidade da v.a. X condicional a $Y = 0$.

(d) $Var[X|Y = 0]$.

20. **(1ª Frequência — 5 de Maio de 2007)** Sejam X e Y duas variáveis aleatórias discretas. Sabe-se que X é uma variável aleatória discreta cuja função de distribuição é da forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0,3, & 0 \leq x < 1 \\ 0,5, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

Considere ainda o par aleatório (X, Y) com a seguinte função massa de probabilidade conjunta

$X \backslash Y$	3	4	5
A	D	0,14	0,1
B	0,04	E	0,05
C	F	0,3	0,2

(a) Defina a função massa de probabilidade da variável X e represente-a graficamente.

(b) Complete a tabela. Ou seja, determine os valores de A, B, C, D, E e F.

(c) Sabendo que a variável X toma o valor C, calcule a probabilidade da variável Y tomar o valor 4.

(d) Calcule a variância da variável $Z = X - Y$.

(e) Sabendo que $X = 1$, calcule o valor esperado de Y^2.

21. **(Exame de Recurso — 7 de Julho de 2007)** O Evaristo pode encontrar-se num dos três estados de espírito: **1** - radiante; **2** - assim-assim; **3** - macambúzio. Seja X a variável aleatória que define o estado de espírito do Evaristo, cuja função massa de probabilidade é apresentada na tabela seguinte:

x_i	1	2	3
$f_X(x_i)$	0,2	0,3	0,5

Seja Y a variável aleatória que define o estado do tempo: **0** - Dia chuvoso com vento; **1** - Dia ameno de Outono; **2** - Dia de Primavera. Na tabela seguinte apresenta-se a função massa de probabilidade da variável X condicionada a $Y = 0$.

x_i	1	2	3
$f(x\|y = 0)$	0,68	0,3	0,02

Sejam X e Y as duas variáveis aleatórias discretas anteriormente definidas, com função massa de probabilidade conjunta dada por:

$X\backslash Y$	0	1	2	
1	0,068	0,08	0,052	
2	**a**	0,11	**b**	
3	**c**	0,01	**d**	
	0,1	0,2	0,7	1

(a) Preencha a tabela da função massa de probabilidade conjunta.

Nota. A não resposta à alínea a) não implica a não realização das restantes alíneas. Caso não consiga responder à alínea a) use, sempre que necessário, as letras a, b, c, e d para responder às questões seguintes.

(b) Determine a função de distribuição da variável Y.

(c) Calcule $E[XY]$.

(d) Calcule a função de distribuição conjunta no ponto $(3, 1)$.

(e) Determine $Var[X|Y = 0]$.

Docentes: Dulce Gomes e Patrícia Filipe