Aula - 13

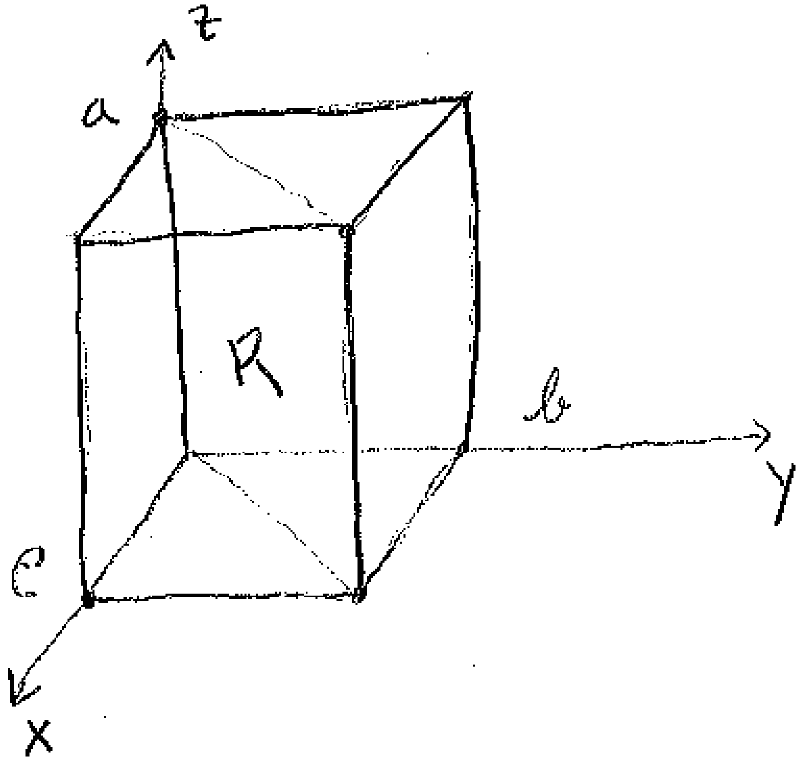
5.5 Exercícios (pg - 194)

6-1. Calcular as integrais triplas.

1.a) $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x+y+z)\, dx\, dy\, dz.$

Observações:
A região de integração é uma das mais simples possíveis:

$R = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq c,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq z \leq a\}$



$$\int_0^a\int_0^b\left[\int_0^c (x+y+z)\,dx\right]dy\,dz =$$

$$= \int_0^a\int_0^b \left[\frac{x^2}{2}+yx+zx\right]_{x=0}^{x=c} dy\,dz =$$

$$= c\int_0^a \left[\int_0^b \frac{c}{2}+y+z\;dy\right]dz =$$

$$= c\int_0^a \left[\frac{c}{2}y+\frac{y^2}{2}+zy\right]_{y=0}^{y=b} dz =$$

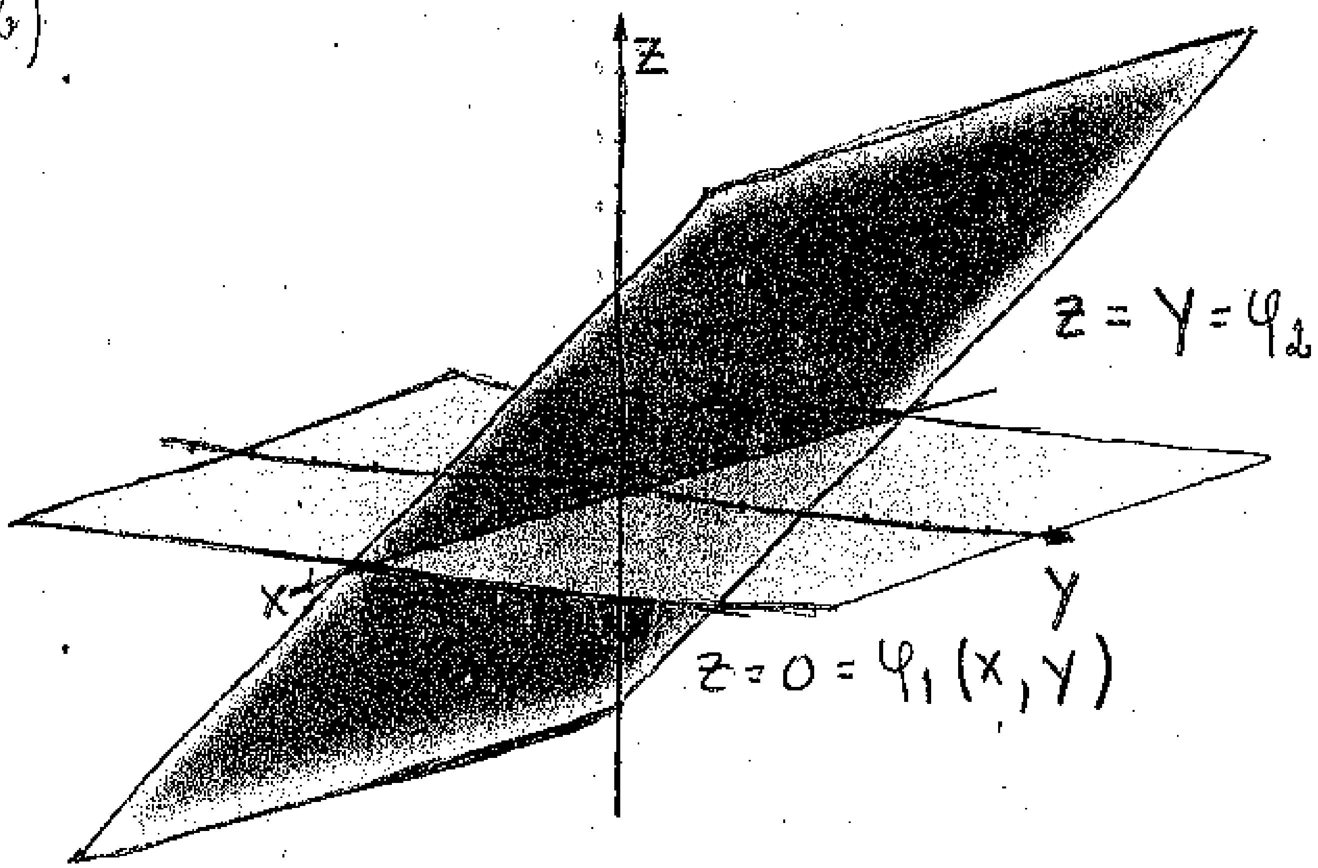
$$= cb\int_0^a \frac{c}{2}+\frac{b}{2}+z\;dz =$$

$$= cb\left[\frac{c}{2}z+\frac{b}{2}z+\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=a} =$$

$$= cba\left(\frac{c}{2}+\frac{b}{2}+\frac{a}{2}\right).$$

$$\boxed{P\,u^\alpha u' = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1},\quad \alpha \neq -1}$$

1. b)



$$\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx \quad (a>0)$$

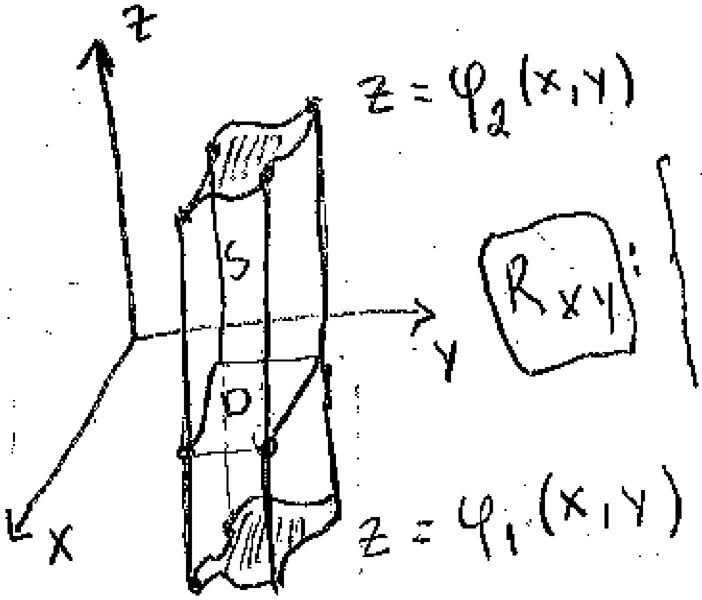
Observação:

Nesta caso a área de integração já é um pouco mais complicada:

$$R_{xy}: \begin{cases} \begin{cases} 0 \leq x \leq a & (a>0) \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \\ 0 \leq z \leq y \end{cases}$$

$\boxed{13-4}$

Estamos a integrar numa numa área do tipo R_{XY}:



$$\boxed{R_{XY}} : \begin{cases} (x,y) \in D \\ \varphi_1 \leq z \leq \varphi_2 \end{cases}$$

Neste caso particular $D : \begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$

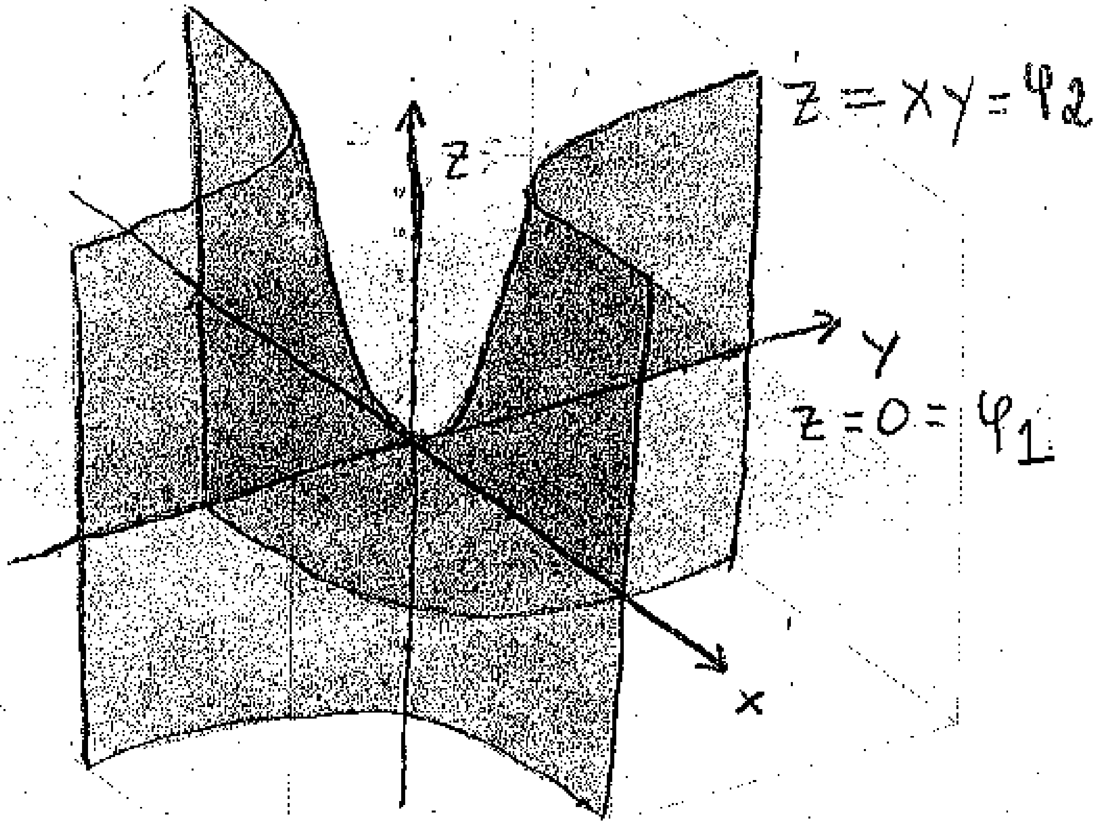
e $\varphi_1(x,y) = 0$ e $\varphi_2(x,y) = y$.

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyz \, dz \, dy \, dx = \int_0^a \int_0^x \frac{xy}{2} \left[z^2 \right]_{z=0}^{z=y} dy \, dx$$

$$= \int_0^a \int_0^x \frac{xy^3}{2} \, dy \, dx = \int_0^a \frac{x}{8} \left[y^4 \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

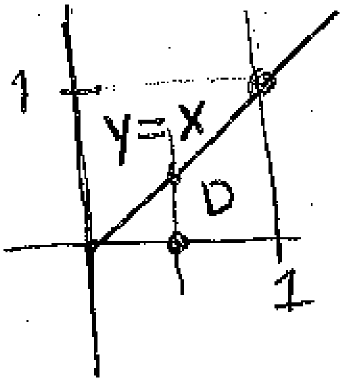
$$= \int_0^a \frac{x^5}{8} \, dx = \frac{1}{48} \left[x^6 \right]_0^a = \frac{a^6}{48}.$$

1.c) $\iiint_S (xy^2z^3)\,dV$, onde S é o sólido limitado pela superficie $z = xy$ e os planos $y = x$, $x = 1$ e $z = 0$



Nota: o ponto (0,0) é um ponto de sela da função $\varphi_2(x,y) = xy$.

Determine-se a região de integração D em xoy:



$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$R_{xy}: \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \le z \le xy \end{cases}$$

$$\iiint_S x y^2 z^3 \, dV = \int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x y^2 z^3 \, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^x x y^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=xy} dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^5 y^6}{4} \, dy\, dx =$$

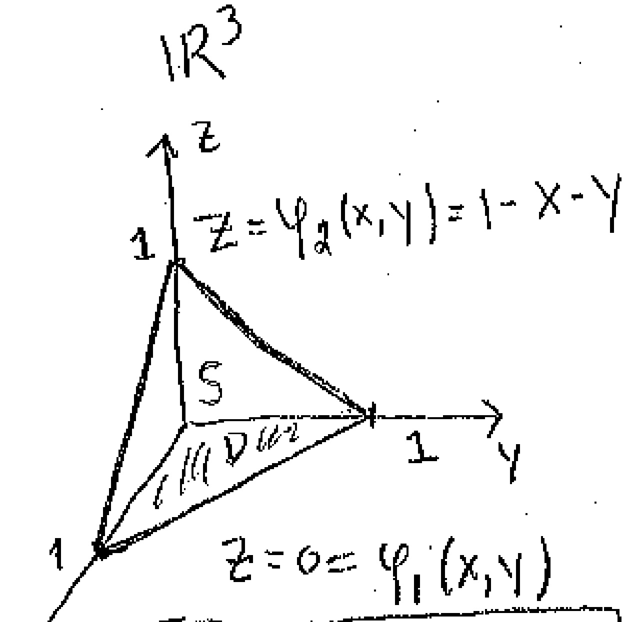
$$= \int_0^1 \frac{x^5}{28} \left[y^7 \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28} \, dx =$$

$$= \frac{1}{364} \left[x^{13} \right]_0^1 = \frac{1}{364}$$

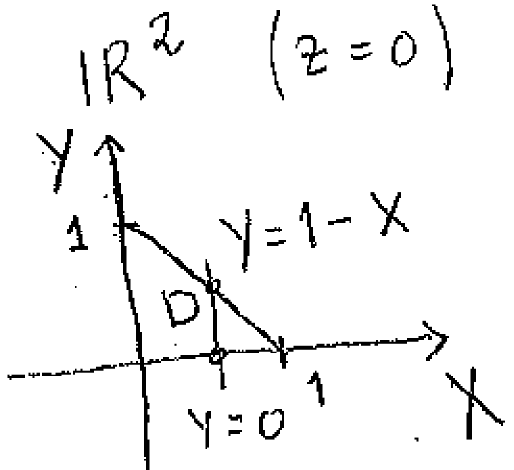
1. d) $\iiint_S (1+x+y+z)^{-3}\, dV$,

com S o sólido limitado pelos três planos coordenados, de equações: $z=0$, $y=0$ e $x=0$, e pelo plano de equação $x+y+z=1$.

Como a função $z = 1-x-y = \varphi_2(x,y)$ é muito simples, vou começar por representar o sólido em $\mathbb{R}^3$:



X



$$\boxed{P\left(\frac{u'}{u}\right) = \ln(|u|)}$$

$$R_{xy}: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1-x \\ 0 \le z \le 1-x-y \end{cases}.$$

$\boxed{13-8}$

$$\iiint_S (1+x+y+z)^{-3}\, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\, dz \right] dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y+z)^2} \right]_{z=0}^{z=1-x-y} dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} -\frac{1}{8} + \frac{(1+x+y)^{-2}}{2}\, dy \right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{y}{8} \right]_{y=0}^{y=1-x} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+x+y} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx$$

$$= \int_0^1 -\frac{1}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{1+x} \right] dx =$$

$$= \int_0^1 -\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}\, dx =$$

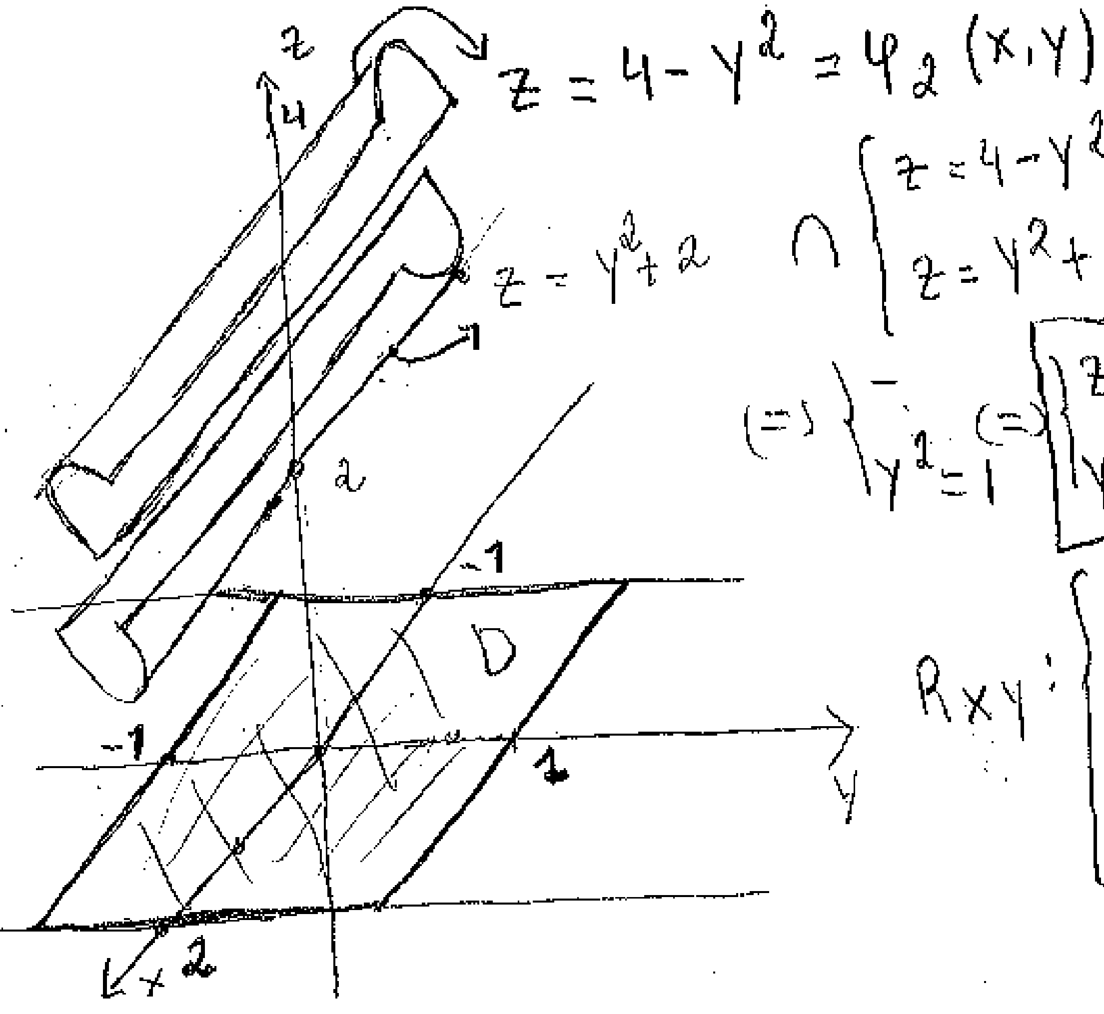
$$= -\frac{3}{8} \left[x \right]_0^1 + \frac{1}{16} \left[x^2 \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\ln(|1+x|) \right]_0^1 =$$

$$= -\frac{5}{16} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

6-2. Calcular o volume dos sólidos limitados pelas superfícies dadas, utilizando integrais triplos:

2.a Pelos "cilindros" $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$ e pelos planos $x = -1$ e $x = 2$.

- Representação geométrica de S



$$\cap \begin{cases} z = 4 - y^2 \\ z = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow 4 - y^2 = y^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z = 3 \\ y = -1 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} z = 3 \\ y = 1 \end{cases}}.$$

$$R_{xy}: \begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 1 \\ y^2 + 2 \leq z \leq 4 - y^2 \end{cases}$$

Assim o volume de S é dado por:

$$V(S) = \int_{-1}^{2}\int_{-1}^{1}\int_{2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx = \boxed{8}.$$

2. b) Pelos parabolóides

$z = x^2+y^2$, $z = x^2+2y^2$ e

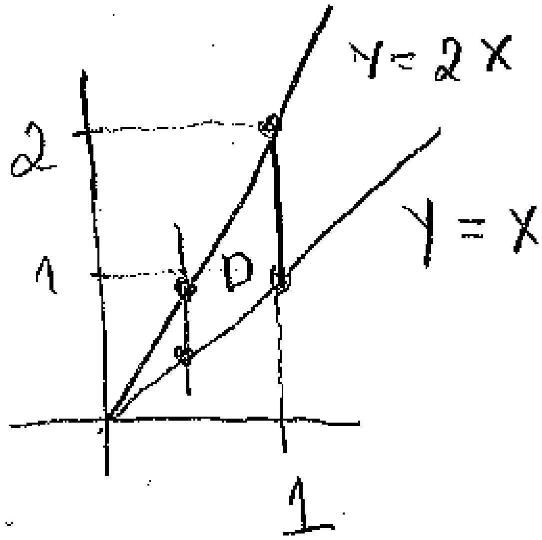
pelos planos $y = x$, $y = 2x$ e $x = 1$.

Como $\varphi_1(x,y) = x^2+y^2 \leq x^2+2y^2 = \varphi_2(x,y)$

só é necessário encontrar a

região de integração em

$\mathbb{R}^2$.



$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$$

$$x^2+y^2 \le z \le x^2+2y^2$$

Assim o volume de S é dado por:

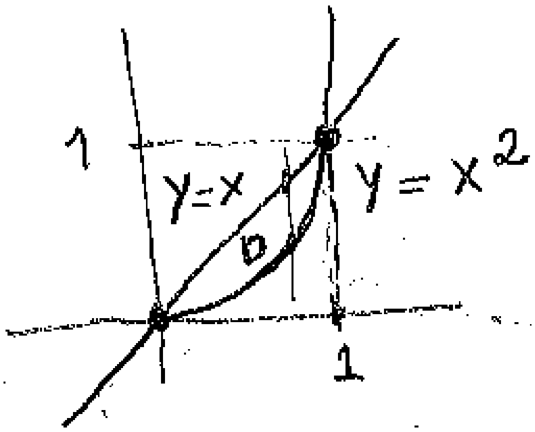
$$V(S) = \int_0^1 \int_x^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz\, dy\, dx = \boxed{\frac{7}{12}}$$

2.c) Pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, pelo "cilindro" $y = x^2$ e o plano $y = x$.

Também neste caso os limites de z são simples, pois

$$\varphi_1(x,y) = x^2 + y^2 \le 2(x^2+y^2) = \varphi_2(x,y);$$

encontremos agora os limites de integração no plano XOY



$$R_x: \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases},$$

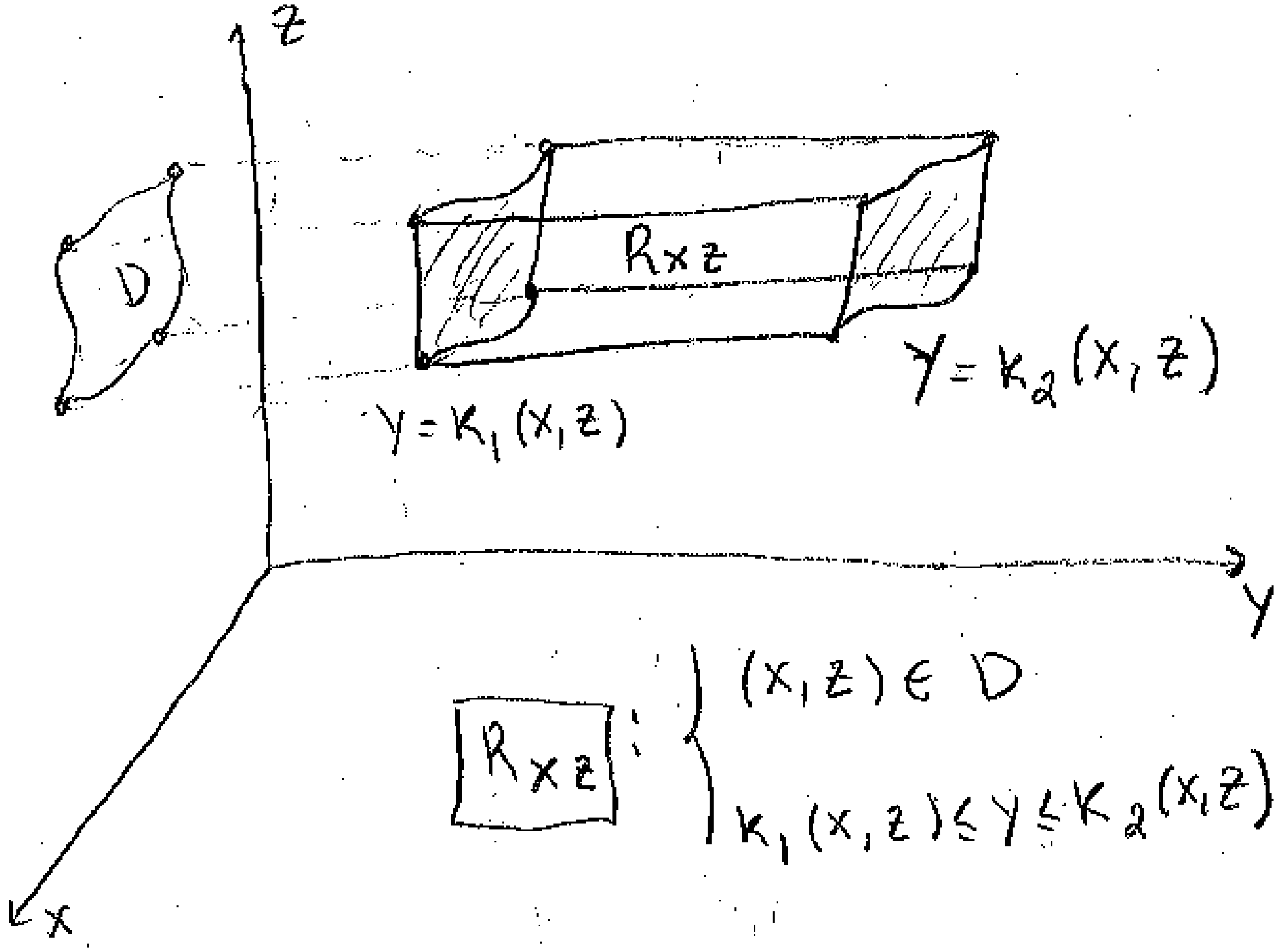
logo o volume pretendido pode ser calculado usando o seguinte integral triplo:

$$V(S) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x^2+y^2}^{2(x^2+y^2)} dz\,dy\,dx = \boxed{\frac{3}{35}}$$

$$\boxed{\cap \begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}} \vee \boxed{\begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}}.}$$

Exercícios extra:

Observação: também é possível integrar em regiões do tipo:



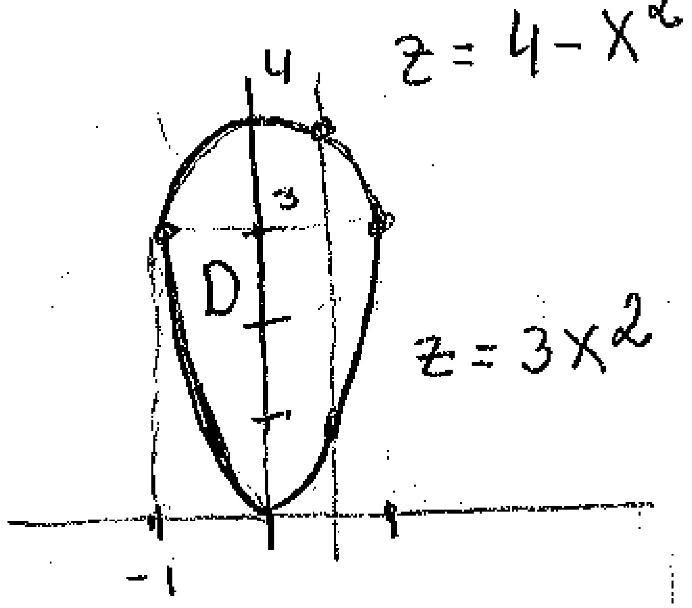
$$\boxed{R_{xz}}: \begin{cases} (x,z) \in D \\ K_1(x,z) \leq y \leq K_2(x,z) \end{cases}$$

$$\iiint_{R_{xz}} f\, dV = \iint_D \int_{K_1(x,z)}^{K_2(x,z)} f\, dy\, dA.$$

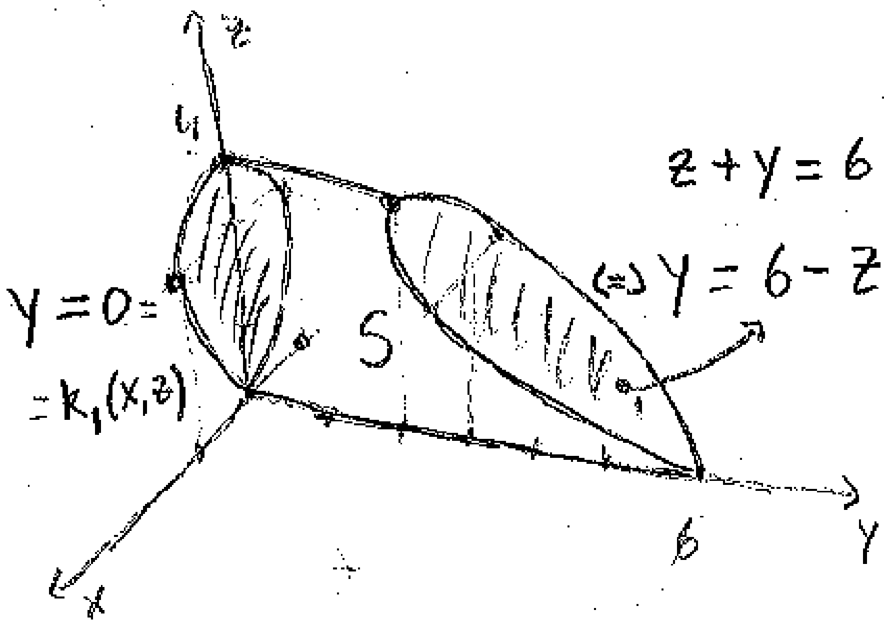
E.1) Escreva um integral triplo que permita calcular o volume do sólido delimitado pelos gráficos de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $z + y = 6$ e $y = 0$.

Vamos desenhar a projecção de S no plano xOz ($y = 0$)

$$\cap \begin{cases} z = 3x^2 \\ z = 4 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 3 \\ x = 1 \end{cases}.$$



$$D_x : \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ 3x^2 \leq z \leq 4 - x^2 \end{cases}$$



$$S=R_{xz}: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 3x^2 \le z \le 4-x^2 \\ 0 \le y \le 6-z \end{cases},$$

assim um integral triplo que permite calcular o volume de S é:

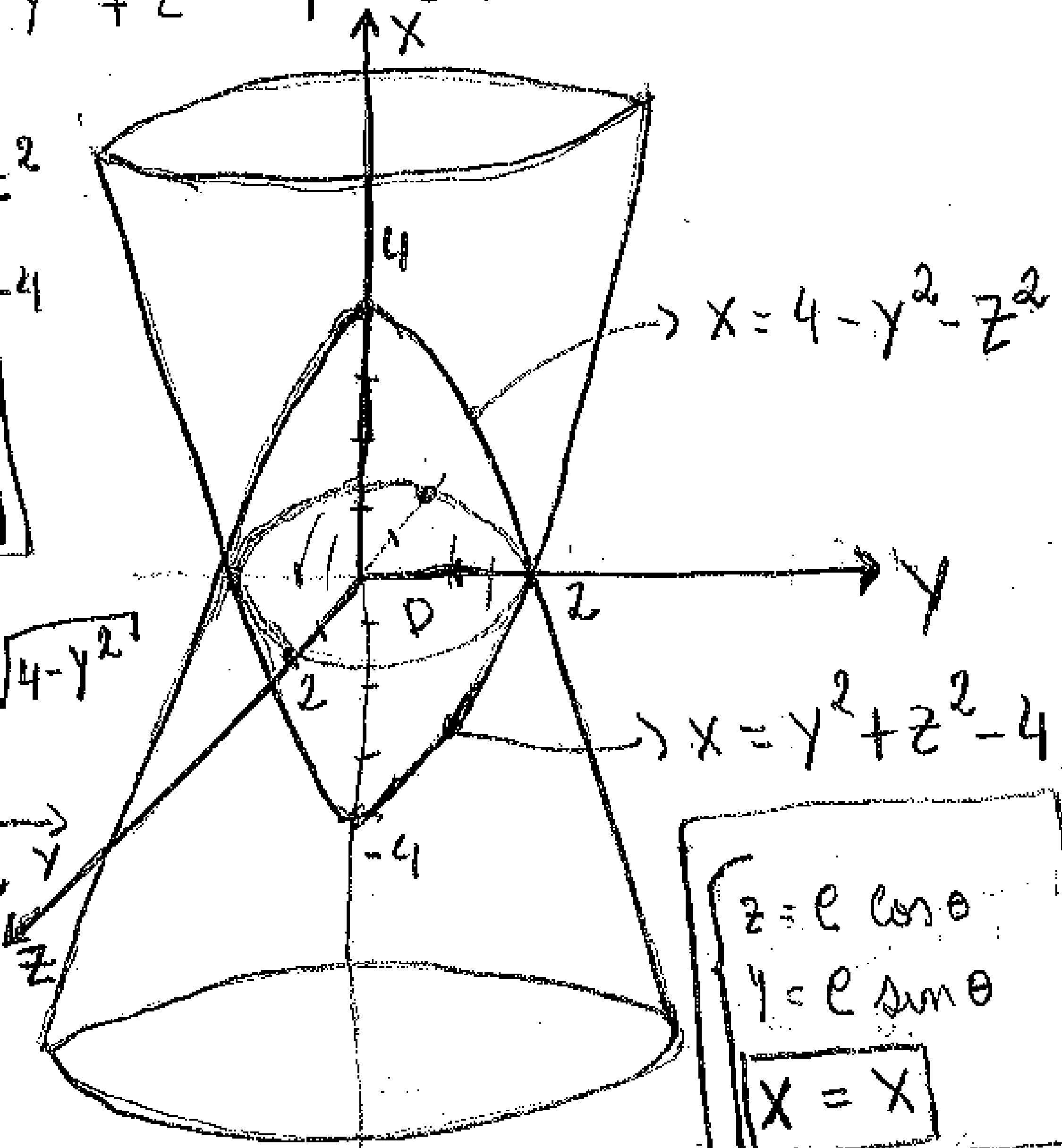
$$V(S)=\int_{-1}^{1}\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_{0}^{6-z} dy\,dz\,dx$$

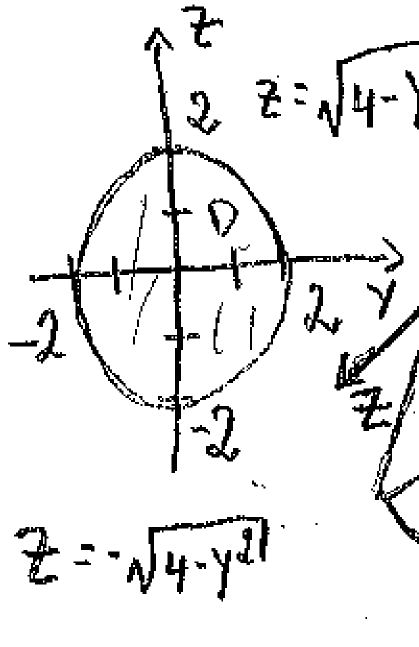
E-2) Escreva um integral triplo que permita calcular o volume do sólido limitado pelas superfícies de equação:

$$X = Y^2 + Z^2 - 4 \quad e \quad X = 4 - Z^2 - Y^2.$$

$$\cap \begin{cases} x = 4 - y^2 - z^2 \\ x = y^2 + z^2 - 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{cases}}$$





Coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} z = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ \boxed{X = X} \\ \rho = \sqrt{y^2 + z^2} \end{cases}$$

13-17

$$S = R_{yz} : \begin{cases} -2 \leq y \leq 2 \\ -\sqrt{4-y^2} \leq z \leq \sqrt{4-y^2} \\ y^2+z^2-4 \leq x \leq 4-z^2-y^2 \end{cases}.$$

Assim um integral triplo que permite calcular o volume do sólido é:

$$V(S) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{y^2+z^2-4}^{4-z^2-y^2} dx\,dz\,dy =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2-4}^{4-\rho^2} \rho \, dx\, d\theta\, d\rho =$$

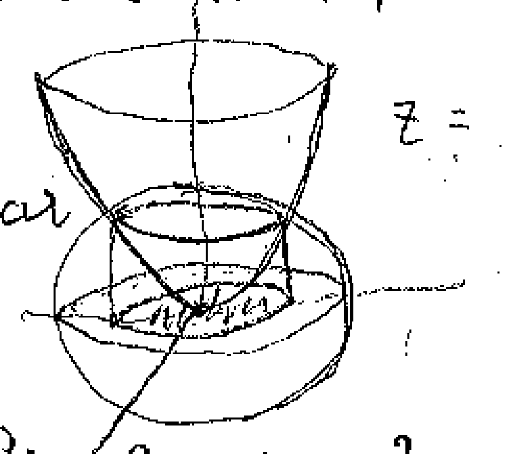
$$=$$

6-3) Calcular o volume dos sólidos limitados pelas superfícies indicadas, utilizando integrais triplos e uma mudança de variáveis conveniente.

3. a) Pela esfera $x^2+y^2+z^2=4$ e pelo parabolóide $x^2+y^2=3z$.

$$z=\frac{x^2+y^2}{3}$$

temos de encontrar a intersecção entre as equações.

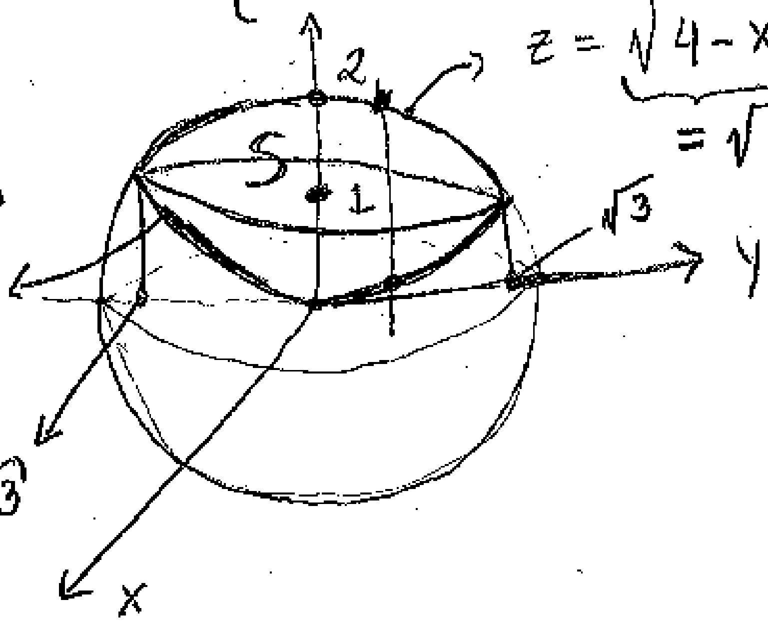


$\boxed{13\text{-}19}$

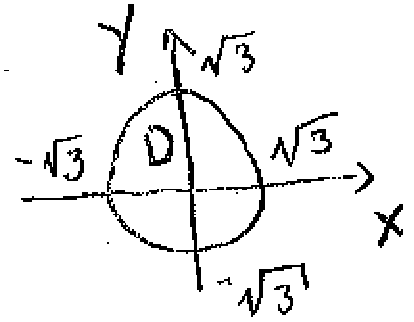
$$\cap \begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ z=\dfrac{x^2+y^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=3 \\ z=1 \end{cases}$$

$$z=\underbrace{\sqrt{4-x^2-y^2}}_{=\sqrt{4-\rho^2}}$$

$$z=\overbrace{\frac{x^2+y^2}{3}}^{=\frac{\rho^2}{3}}$$



A projeção de S em $\mathbb{R}^2$ é:



- Vamos usar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

- $S_{\rho\theta z}=\left\{(\rho,\theta,z): 0\leq\rho\leq\sqrt{3},\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ \frac{\rho^2}{3}\leq z\leq\sqrt{4-\rho^2}\right\}$

$$V(S)=\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \, dz\, d\theta\, d\rho=\boxed{\frac{19}{6}\pi}.$$

$\rho \downarrow$ importante

3. b) Pela superfície de equação:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 x \,, \quad a>0.$$

Temos de usar coordenadas esféricas

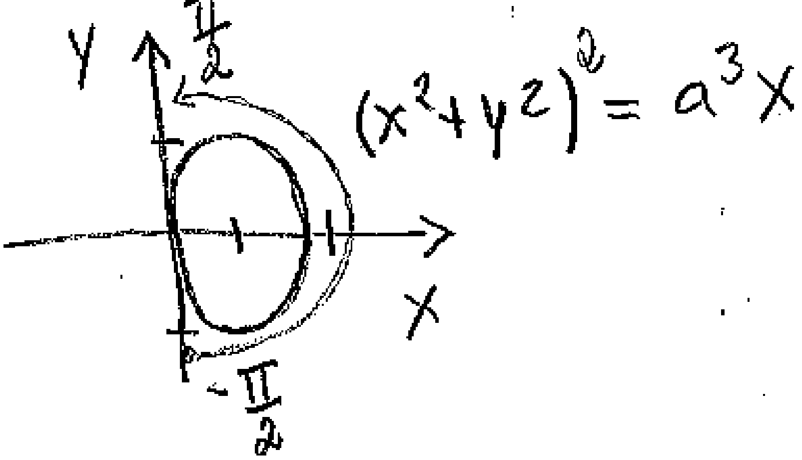
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \\ \rho^2 = x^2+y^2+z^2 \end{cases} , \quad \begin{cases} \rho \in \mathbb{R}^+_0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \\ \varphi \in [0,\pi] \end{cases}.$$

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 x \Leftrightarrow \rho^4 = a^3\rho\cos\theta\sin\varphi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho = a\sqrt[3]{\cos\theta\sin\varphi}}$$

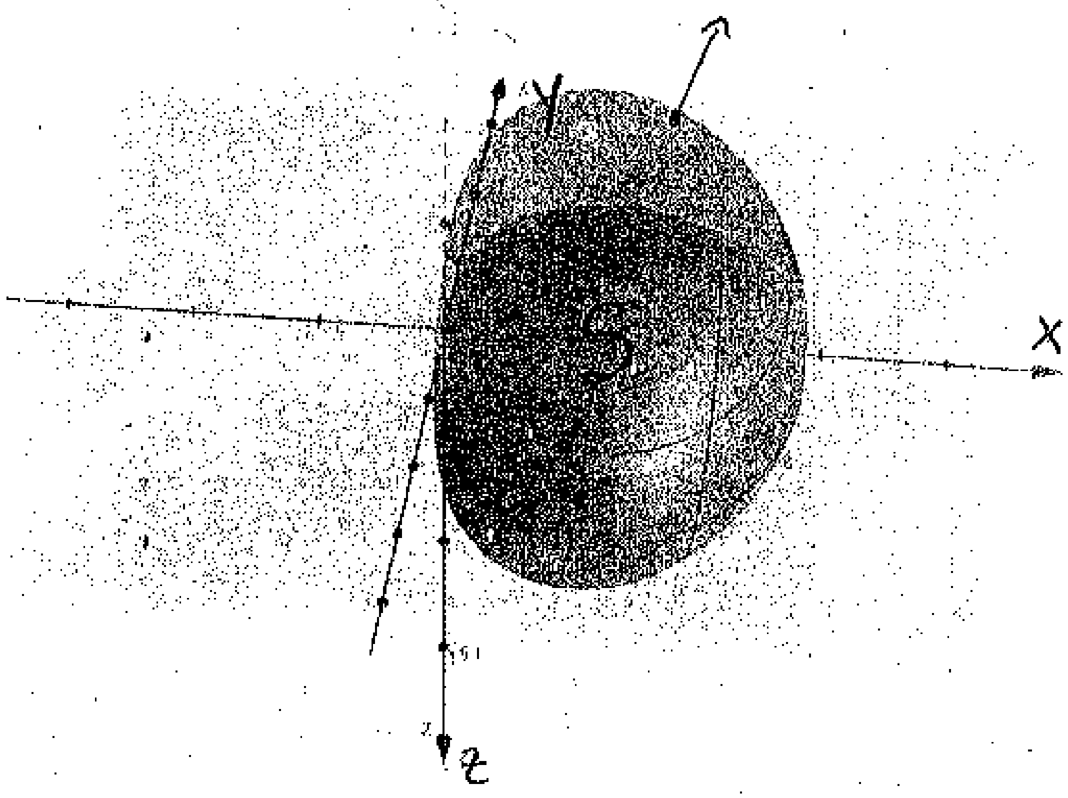
A projecção em XoY de S é:

$$\boxed{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}}$$

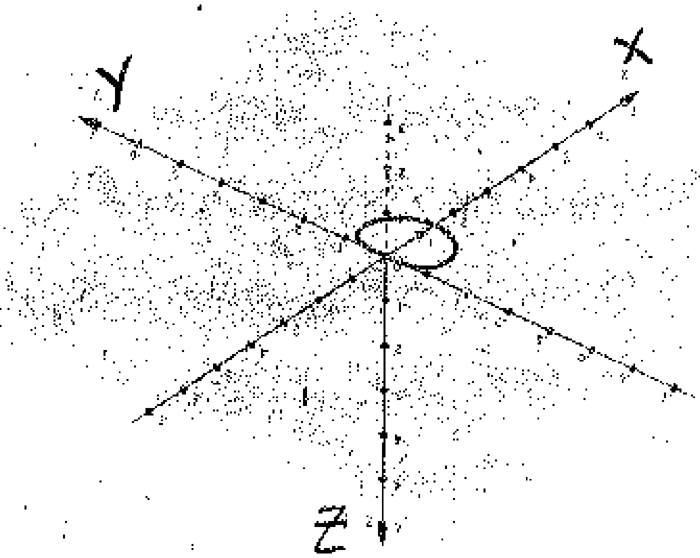


(13-21).

$$\rho = a\sqrt[3]{\cos\theta\sin\varphi} \Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 x$$



$$(x^2+y^2)^2 = a^3 x$$



Assim:

$$S_{\rho\theta\varphi}: \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq a\sqrt[3]{\cos\theta \sin\varphi} \end{cases};$$

pelo que o volume do sólido é dado por:

$$V(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta \sin\varphi}} \underbrace{\left[\rho^2 \sin\varphi\right]}_{\text{importante, é o jacobiano.}} d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \frac{a^3}{3}\pi.$$

$\boxed{13-23}$

3.c) Pela esfera $x^2+y^2+z^2=r^2$ e pelo paraboloide

$$x^2+y^2=r^2-2zr,\ z\geq 0 \text{ e } \boxed{r>0}.$$

$$x^2+y^2=r^2-2zr \Leftrightarrow 2rz=r^2-x^2-y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z=\frac{r}{2}-\frac{x^2+y^2}{2r}}$$

Calcule-se a intersecção das igualdades:

$$\cap \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x^2+y^2+2rz=r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(z-2r)=0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=r^2 \end{cases}} \vee \cancel{\begin{cases} z=2r \\ x^2+y^2=-3r^2 \end{cases}}$$

impossível

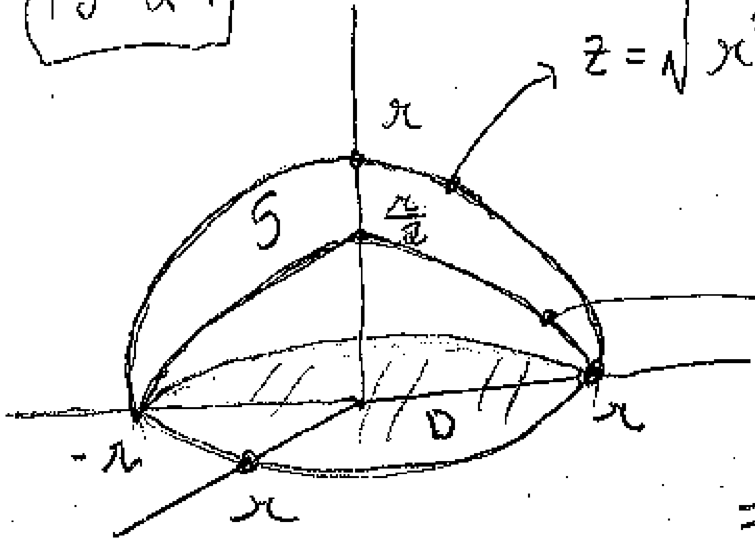
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \rho^2 = x^2 + y^2 \end{cases} \qquad S : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq r \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \dfrac{r^2 - \rho^2}{2r} \leq z \leq \sqrt{r^2 - \rho^2} \end{cases}$$

Assim o volume de S pode ser calculado usando o integral

$$V(S) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{\frac{r^2+\rho^2}{2r}}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho .$$

$\rightarrow$ importante.

$\boxed{13\text{-}24}$



$$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}=\sqrt{r^2-\rho^2}$$

$$z=\frac{r}{2}-\frac{x^2+y^2}{2r}=$$

$$=\frac{r}{2}-\frac{\rho^2}{2r}=\frac{r^2-\rho^2}{2r}$$

Podemos usar coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ \rho^2=x^2+y^2 \end{cases} \qquad S:\begin{cases} 0\leq\rho\leq r \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \\ \dfrac{r^2-\rho^2}{2r}\leq z\leq\sqrt{r^2-\rho^2} \end{cases}$$

Assim o volume de S pode ser calculado usando o integral

$$V(S)=\int_0^r\int_0^{2\pi}\int_{\frac{r^2-\rho^2}{2r}}^{\sqrt{r^2-\rho^2}}\rho\,dz\,d\theta\,d\rho.$$

importante.

$\boxed{13\text{-}25}$

3. d) Pelas esferas:

$x^2+y^2+z^2=1$, $x^2+y^2+z^2=16$

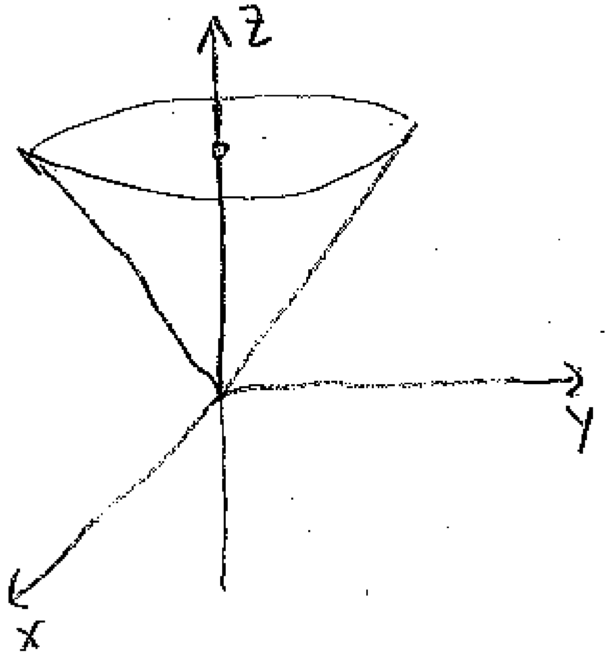
e por $x^2+y^2=z^2$, $x,y,z=0$,

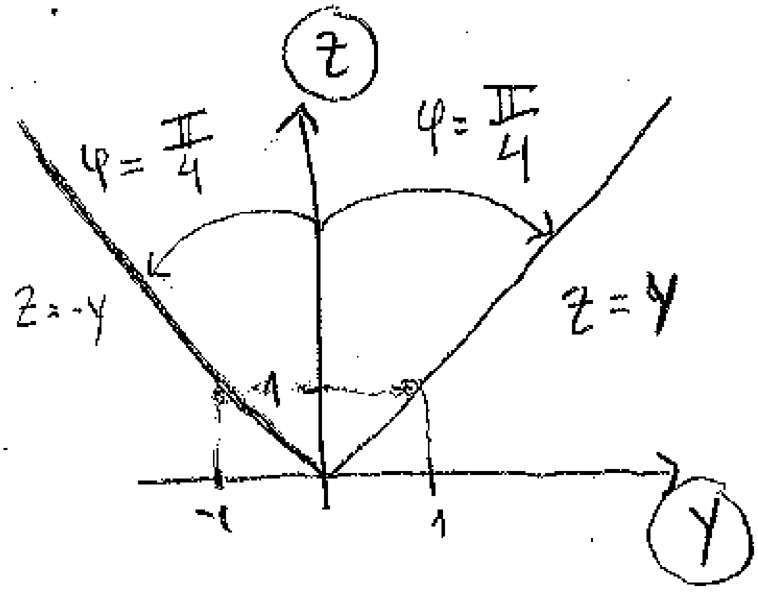
com $x,y,z \geq 0$.

Observe-se que:

$$z^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$$

é um cone:



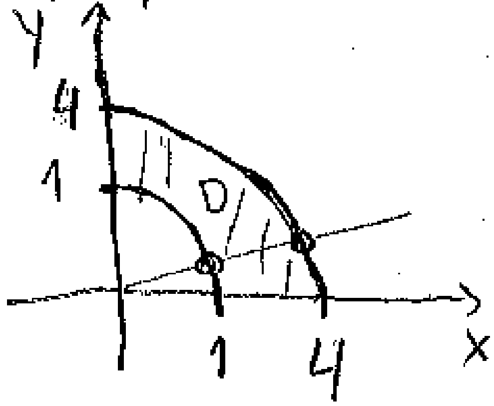


$$\boxed{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}}$$

13-26

relativamente às esferas,

projecção em XOY: $(z=0)$



$$D: \begin{cases} 1 \le \rho \le 4 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}}$$

Assim usando coordenadas esféricas temos a vida facilitada e o volume pedido pode ser calculado através do integral:

$$V(S) = \int_1^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left[\rho^2 \sin\varphi\right]}_{\text{importante!}} d\varphi\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \frac{21\pi\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}}.$$