

Introdução à Probabilidade e Estatística

Testes de Hipóteses Não Paramétricos

Departamento de Matemática
Universidade de Évora
Ano lectivo de 2016/17

Testes de Hipóteses — de Ajustamento

Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma a.a. (i.i.d.) de uma população com f.d. $F(x|\theta)$, (ou f.d.p. (ou f.m.p.) $f(x|\theta)$), com $\theta \in \Theta$ parâmetro desconhecido (em geral), mas estimável por um dos métodos de estimação.

Questão: Como saber qual a forma da f.d. $F(x|\theta)$?

Para tal, começa-se por estabelecer as seguintes hipóteses:

H_0 : Os dados provêm de uma distribuição $F(x|\theta)$

vs

H_1 : Os dados não provêm de uma distribuição $F(x|\theta)$

Teste de Ajustamento

Para averiguar se as amostras foram retiradas de populações com uma dada distribuição podemos usar os seguintes **testes (ou ensaios) de ajustamento (testes não-paramétricos)**:

- ▶ **Teste de Kolmogorov-Smirnov (K-S)** — v.a.'s quantitativas
- ▶ **Teste ajustamento do Qui-Quadrado** — quer a v.a.'s sejam do tipo quantitativo ou qualitativo, mas em que as observações são repartidas em classes.

Teste de Ajustamento

Em geral, na prática, a distribuição não está completamente especificada.

Admitindo, por exemplo, que ela é Normal não sabemos qual o seu valor médio e/ou qual o seu desvio-padrão, pelo que torna-se necessário estimar este(s) parâmetro(s) a partir dos dados amostrais.

No caso em que é necessário proceder-se a estimações o **Teste de Kolmogorov-Smirnov** torna-se conservativo, isto é, tende a não rejeitar a hipótese nula. Neste casos usa-se o teste de K-S com a [modificação de Lilliefors](#).

Teste de Ajustamento

<i>Teste de Ajustamento de K-S</i>
Analyze
Descriptive Statistics
Explore
Dependent list
Plots
Normality Plots with Tests (<i>com modificação de Lilliefors</i>)

Quando a dimensão da amostra é inferior a 50 o programa SPSS em: *Analyze/Descriptive Statistics/Explore/Dependent list/Plots* usa simultaneamente para testar a normalidade da população o teste de K-S (com a correcção de Lilliefors) e o teste de Shapiro-Wilk.

Podemos efectuar os testes de K-S **sem** a modificação de Lilliefors.

<i>Teste de Ajustamento de K-S</i>
Statistics
NonParametric tests
<u>1</u> Sample K-S

Teste de Ajustamento do Qui-Quadrado

Podemos efectuar os testes do **Qui-Quadrado de Ajustamento**
Exemplo. As classes que se seguem resultam da geração de 20 números pseudo-aleatórios que se supõe que tenham **distribuição normal reduzida**:

Classes	n_i
≤ -0.5	5
$] -0.5, 0.5]$	8
> 0.5	7

Teste, aos níveis usuais de significância, a normalidade dos dados.

Aos valores de n_i chama-se **Valores Observados** e representa-se por O_i . Os valores de E_i são designados por **Valores Esperados**.

Teste de Ajustamento do Qui-Quadrado

Os valores de E_i obtêm-se calculando as probabilidades, através da distribuição postulada, p_i e multiplicando estas pela dimensão da amostra. Ou seja, $E_i = nP_i$.

Após a determinação dos E_i procede-se ao cálculo da seguinte estatística de teste:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2_{(k-p-1)}$$

k representa o nº de classe ou categorias e p o nº de parâmetros que tivermos de estimar para o cálculo das probabilidades p_i .

Rejeita-se a hipótese H_0 se $\chi^2_{Obs} > \chi^2_{(k-p-1); 1-\alpha}$.

Testes do Qui-Quadrado: Requisitos

Requisitos:

1. As observações (individuais) são independentes;
2. 80% das frequências esperadas (E_{ij}) são superiores ou iguais a 5;
3. Nenhuma frequência esperada é inferior ou igual a 1.

Teste de Ajustamento do Qui-Quadrado

Classes	O_i	p_i	E_i
≤ -0.5	5	0.3085	6.17
$] -0.5, 0.5]$	8	0.383	7.66
> 0.5	7	0.3085	6.17

$$\chi_{obs}^2 = \frac{(5 - 6.17)^2}{6.17} + \frac{(8 - 7.66)^2}{7.66} + \frac{(7 - 6.17)^2}{6.17} = 0.3486$$

Dado que $\chi_{obs}^2 < 5.991 (= \chi_{2;0.95}^2)$, não se rejeita H_0 para um nível de significância de 5%. Ou seja, não existe evidência estatística suficiente para rejeitar a hipótese de que os dados não provenham de uma distribuição normal reduzida.

Teste de Ajustamento do Qui-Quadrado

Teste de Ajustamento do Qui-Quadrado

Analyze

NonParametric tests

Chi-Square

Test Variable List

Expected Values — Values

Obs. Em *Expected Values* indicar a probabilidade, por ordem sequencial, a testar para cada uma das categorias. Não se esqueça de pressionar o botão **Add** de modo a que as probabilidades sejam consideradas.

Teste de independência do Qui-Quadrado

Pretende-se testar a independência entre duas variáveis aleatórias, X e Y , que se encontram agrupadas em classes ou categorias mutuamente exclusivas e exaustivas. As hipóteses a testar são, pois,

H_0 : X e Y são independentes

H_1 : X e Y não são independentes

A classificação dos elementos da amostra dá lugar a uma tabela de dupla entrada, designada por **Tabela de Contigência**:

	Y	B_1	B_2	...	B_j	...	B_C	Total
X								
A_1		O_{11}	O_{12}	...	O_{1j}	...	O_{1C}	$O_{1.}$
A_2		O_{21}	O_{22}	...	O_{2j}	...	O_{2C}	$O_{2.}$
...	
A_i		O_{i1}	O_{i2}	...	O_{ij}	...	O_{iC}	$O_{i.}$
...	
A_L		O_{L1}	O_{L2}	...	O_{Lj}	...	O_{LC}	$O_{L.}$
Total		$O_{.1}$	$O_{.2}$...	$O_{.j}$...	$O_{.C}$	n

L = número de categorias da v.a. X (nº de linhas); C = número de categorias da v.a. Y (nº de colunas);
 n = dimensão total da amostra

O_{ij} = frequência absoluta simples, conjunta, das categorias A_i e B_j , $i = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, C$;

$O_{i.}$ = frequência absoluta marginal da categoria A_i , de X , $i = 1, 2, \dots, L$;

$O_{.j}$ = frequência absoluta marginal da categoria B_j , de Y , $j = 1, 2, \dots, C$.

Procedemos ao cálculo das frequências esperadas

$$E_{ij} = \frac{O_{i.} \times O_{.j}}{n}.$$

A estatística de teste é dada por

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^C \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \sim \chi^2_{(L-1) \times (C-1)}.$$

Rejeitamos a hipótese de independência entre as variáveis, X e Y , ao nível de significância α , quando $\chi^2_{obs} > \chi^2_{(L-1) \times (C-1), 1-\alpha}$.

Condições de aplicabilidade: **não mais de 20% de $E_{ij} < 5$;**
todos os $E_{ij} > 1$.

Quando alguma destas condições falha deve-se proceder à agregação dessas classes com as adjacentes.

No caso das tabelas 2×2 costuma-se efectuar a **correção de Yates**, para melhorar a aproximação à distribuição χ^2 , que consiste em considerar a seguinte estatística de teste:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^C \frac{(|O_{ij} - E_{ij}| - 0.5)^2}{E_{ij}} \\ &= \frac{n(O_{11}O_{22} - O_{12}O_{21} - 0.5n)^2}{O_{1.}O_{2.}O_{.1}O_{.2}} \sim \chi^2_{(L-1) \times (C-1)=1}\end{aligned}$$

NOTA: Para tabelas 2×2 que não cumpram as condições de aplicabilidade (amostras pequenas) é calculado o teste Exacto de Fisher.

Outros Testes Não Paramétricos

Quando falha alguma das condições de aplicabilidade dos testes paramétricos que estudámos anteriormente, como por exemplo a normalidade e/ou a homogeneidade (ou igualdade) das variâncias populacionais, existem testes não paramétricos alternativos os quais não exigem pressupostos tão rígidos como os paramétricos e são aplicáveis independentemente da forma da distribuição.

- ▶ Teste do Sinal e Teste de Wilcoxon: alternativa aos testes paramétricos para a média ou comparação de médias no caso em que se tem uma amostra ou duas amostras emparelhadas;
- ▶ Teste de Mann-Whitney: alternativa aos testes paramétricos para comparação de médias no caso em que se tem duas amostras independentes;