Simplificação de funções

Sistemas Digitais 2016/2017

Pedro Salgueiro
pds@di.uevora.pt

Sumário

- Expressão mínima
- Simplificação algébrica
- Mapa de Karnaugh
  - Mapa de Karnaugh
  - Função incompletamente especificada
  - Minimização usando maxtermos
  - Mapa de 5 variáveis
- Método de bridging
- Exercícios

Expressão mínima

- O que é?
  - É uma expressão booleana o mais simples possível
- Mais simples como?
  - Mínimo número de termos
  - Mínimo número de literais
  - **Pressupõe que a função esteja numa forma canónica!**
- Como obter
  - Simplificação algébrica
    - Por vezes é difícil e carece experiência
  - Mapa de Karnaugh

Simplificação algébrica

- Utilizada para obter expressões **mais simples** ou sob **formas específicas**
- Mais simples
  - $F = \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,C + B\,C =$
    $(\overline{A}\,\overline{B} + A + B)\,C = 1 \cdot C = C$
- Só com um tipo de porta
  - $G = \overline{A}\,\overline{B}\,D + \overline{A}\,\overline{C} + A\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$
  - NAND
    - $G = \overline{\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,D} \,.\, \overline{\overline{A}\,\overline{C}\,D} \,.\, \overline{A\,C\,D} \,.\, \overline{A\,\overline{B}\,\overline{D}}}$
  - NOR
    - $G = \overline{A + B + \overline{D}} + \overline{A + C + \overline{D}} + \overline{\overline{A} + \overline{C} + \overline{D}} + \overline{\overline{A} + B + D}$

Mapa de Karnaugh

- 3 variáveis
  - 8 combinações possíveis

A \ BC	00	01	11	10
0				
1				

- 4 variáveis
  - 16 combinações possíveis

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

- Entre dois quadrados adjacentes só muda uma variável

Características

- Fácil preenchimento a partir dos mintermos
    - Cada mintermo corresponde a um quadrado do mapa
- Fácil obtenção da forma normal disjuntiva
    - **Agrupar** quadrados com valor 1
        - Cada grupo corresponde a um produto de variáveis com número mínimo de literais
    - **Incluir** todos os 1
        - A expressão é uma soma com um número mínimo de termos
    - **Mantêm-se** as variáveis que não mudam
        - 1 corresponde à variável
        - 0 corresponde ao seu complemento

Mapa de Karnaugh

Função de 3 variáveis

- $F(A,B,C) = \sum m(4,6,7)$

	A	B	C	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

- Mapa

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

$A\,\overline{C}$ $\quad$ $A\,B$

- Termos
  - $T1 = A\,B$
  - $T2 = A\,\overline{C}$
  - $F = A\,B + A\,\overline{C}$

Outra função

– $F(A,B,C) = \sum m(0, 2, 4, 5, 6)$

	A	B	C	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

- Mapa

$\overline{C}$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

$A\,\overline{B}$

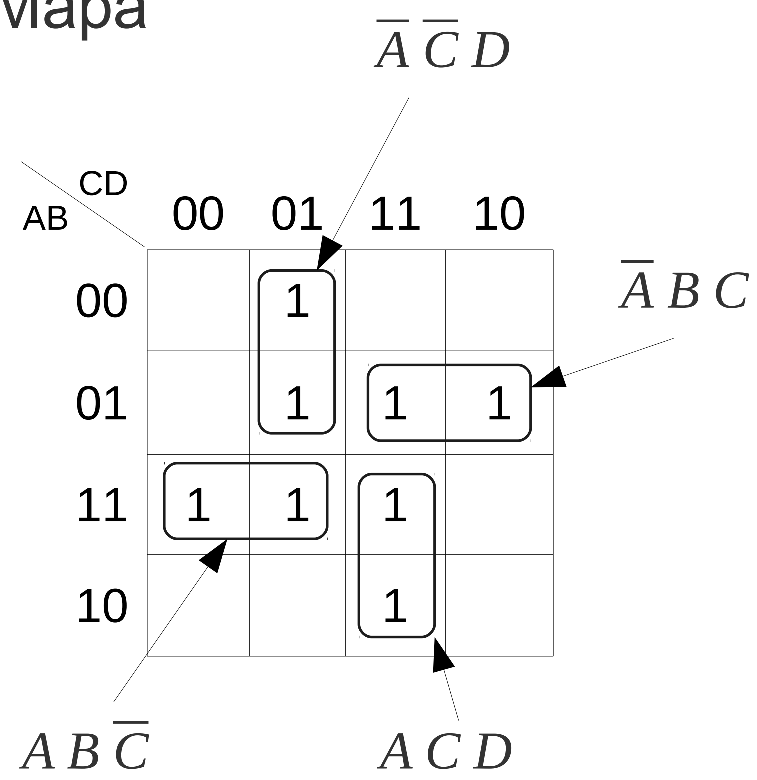
- Termos
  - $T1 = A\,\overline{B}$
  - $T2 = \overline{C}$
  - $F = A\,\overline{B} + \overline{C}$

Mapa de Karnaugh

Função de 4 variáveis

- $F(A,B,C,D) = \sum m(1,5,6,7,11,12,13,15)$

- Mapa



- Termos
  - $T1 = \bar{A}\,\bar{C}\,D$
  - $T2 = \bar{A}\,B\,C$
  - $T3 = A\,C\,D$
  - $T4 = A\,B\,\bar{C}$
  - $F = \bar{A}\,\bar{B}\,D + \bar{A}\,B\,C + A\,C\,D + A\,B\,\bar{C}$

Mapa de Karnaugh

Função de 4 variáveis

- $F(A,B,C,D) = \sum m(1,5,6,7,11,12,13,15)$

- Mapa

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		
01		1	1	1
11	1	1	1	
10			1	

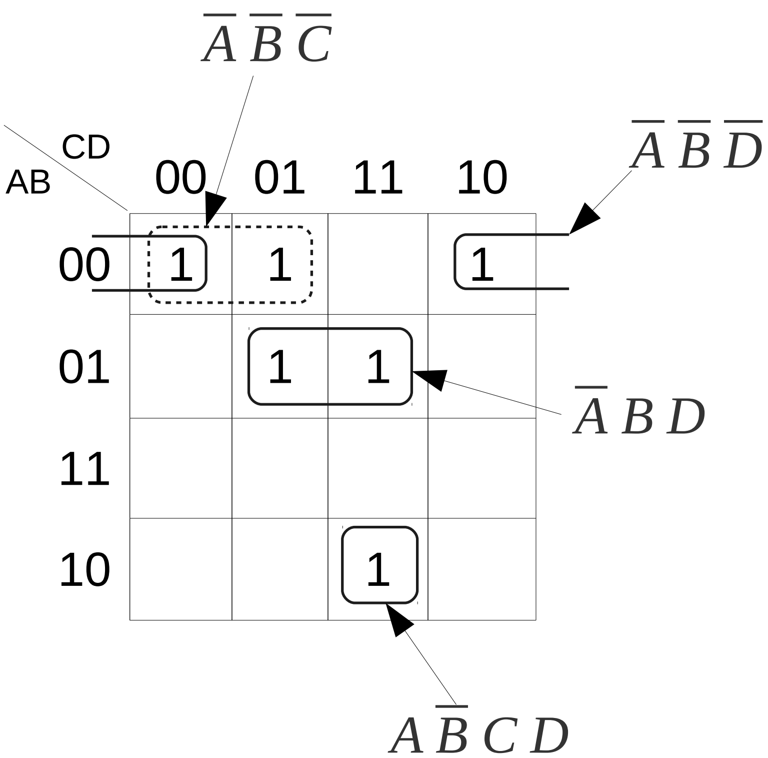
- Termos
  - $T1 = \overline{A}\,\overline{C}\,D$
  - $T2 = \overline{A}\,B\,C$
  - $T3 = A\,B\,D$
  - $T4 = A\,B\,\overline{C}$
  - $F = \overline{A}\,\overline{B}\,D + \overline{A}\,B\,C + A\,B\,D + A\,B\,\overline{C}$

- Fazer grupos de 4 "1s"
  - Seria necessário agrupar os restantes 1s, formando 5 termos

Outra função

- $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,5,7,11)$

- Mapa



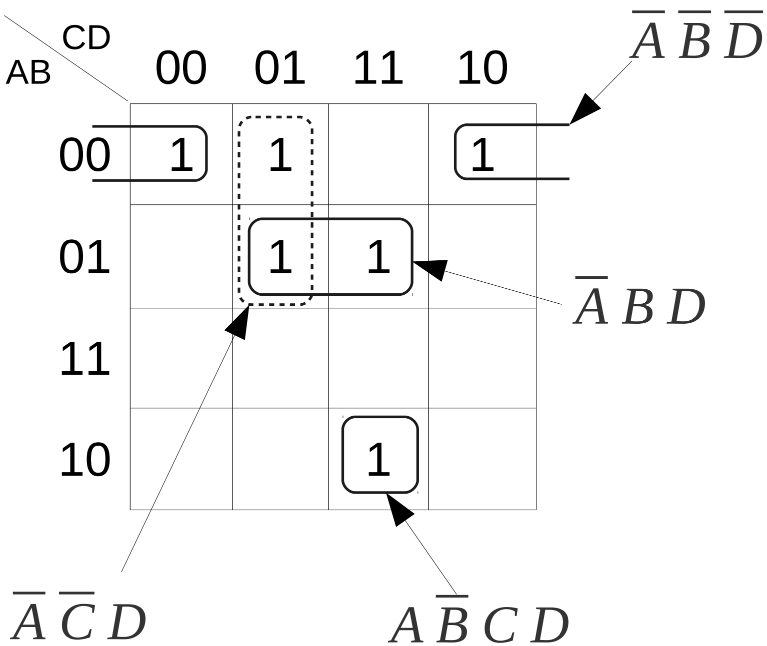
- Termos
  - $T1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$
  - $T2 = \overline{A}\,B\,D$
  - $T3 = A\,\overline{B}\,C\,D$
  - $T4 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

- $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

Outra função

- $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,5,7,11)$

- Mapa



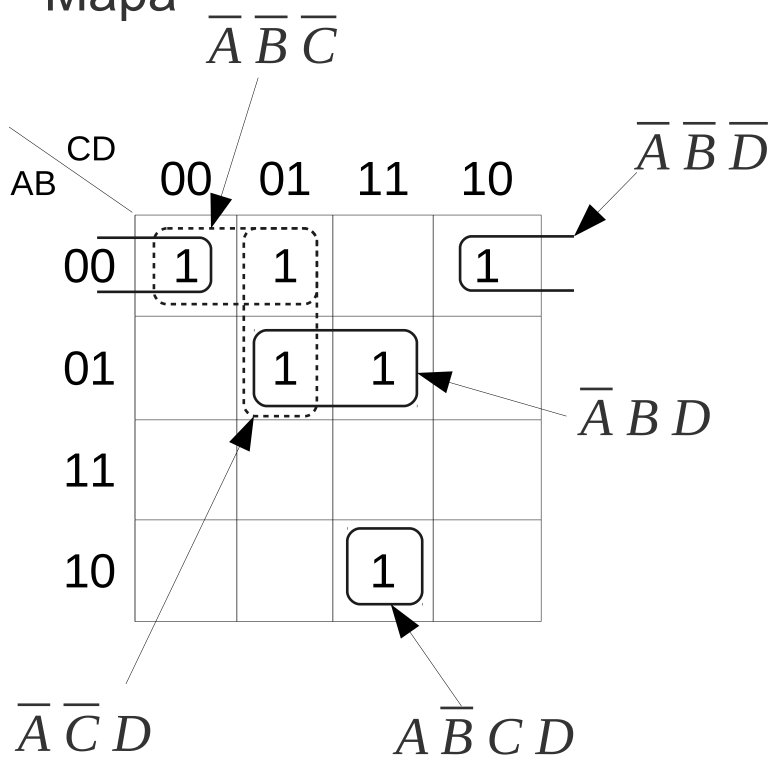
- Termos
  - $T1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$
  - $T2 = \overline{A}\,B\,D$
  - $T3 = A\,\overline{B}\,C\,D$
  - $T4 = \overline{A}\,\overline{C}\,D$

- $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{C}\,D$

Mapa de Karnaugh

Outra função

- $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,2,5,7,11)$
- Mapa



- Termos
  - $T1 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D}$
  - $T2 = \overline{A}\,B\,D$
  - $T3 = A\,\overline{B}\,C\,D$
  - $T4 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
  - $T4 = \overline{A}\,\overline{C}\,D$
- $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
- $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{A}\,B\,D + A\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,\overline{C}\,D$
- Existem dois grupos distintos que podem ser utilizados na expressão mínima da função.

Mapa de Karnaugh

Ainda outra

- $F(A,B,C,D) = \sum m(0,1,5,7,8,10,14,15)$

- Mapa

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

- $F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,D + A\,B\,C + A\,\overline{B}\,\overline{D}$

- $F = \overline{A}\,\overline{B}C + B\,C\,D + A\,C\,\overline{D} + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$

Economia de variáveis

- Grupos de **dois** “1”s
  - Economia de 1 variável
- Grupos de **quatro** “1”s
  - Economia de 2 variáveis
- Grupos de **oito** “1”s
  - Economia de 3 variáveis
- . . .
- Grupos de 2^n “1”s
  - Economia de *n* variáveis

Mapa de Karnaugh

Algoritmo

1. Preencher o mapa com os 1s da função.
2. Considerar e assinalar qualquer 1 que não possa ser agrupado com nenhum outro.
3. Identificar 1s que podem ser combinados com um outro único 1 apenas de uma forma. Assinalar esses grupos. Quadrados que podem ser agrupados em grupos maiores são deixados temporariamente de lado.
4. Identificar os 1s que podem ser combinados com outros três 1s apenas de uma forma. Se os quatro 1s não tiverem sido incluídos em nenhum grupo de dois, assinalar esse grupo de quatro. Novamente, quadrados que podem ser agrupados em grupos maiores são deixados temporariamente de lado.
5. Repetir o processo para grupos de oito, etc...
6. Se, ao terminar o processo anterior, restarem alguns 1s não incluídos em nenhum grupo, agrupá-los com outros 1s (já incluídos noutros grupos) lembrando que a intenção é obter o menor número de grupos possível.

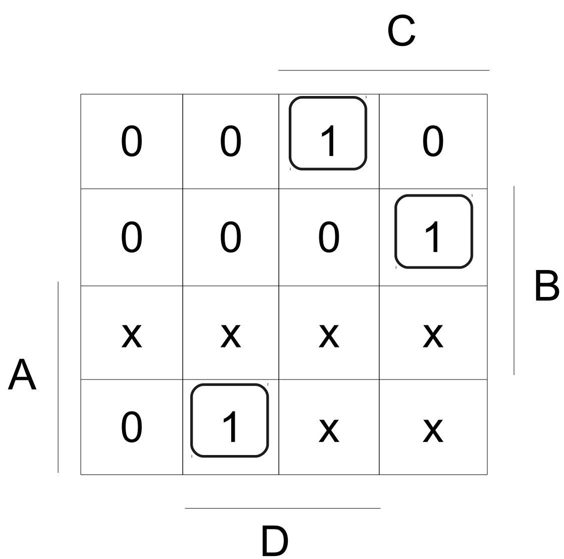
Função incompletamente especificada

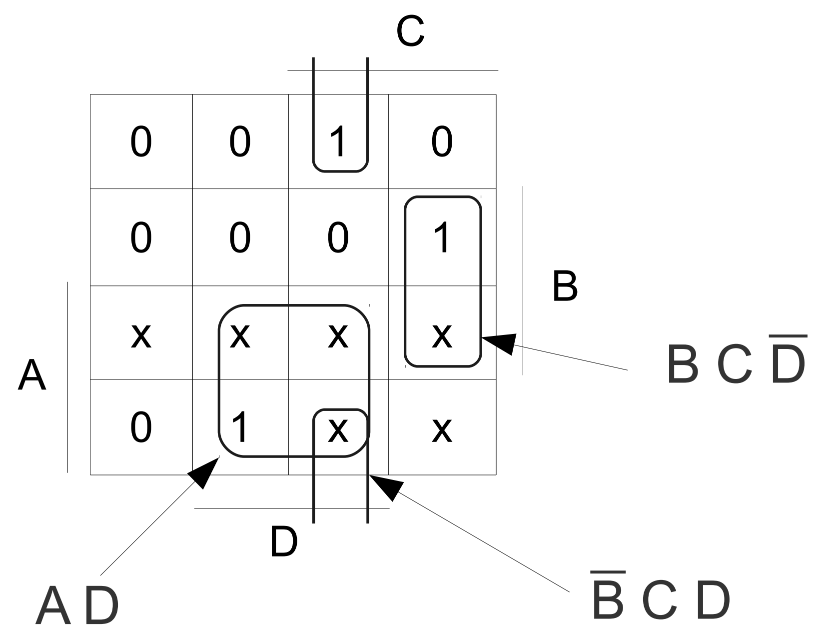
- É uma função que contém uma ou mais indiferenças

- Indiferença
  - Configuração onde é indiferente o valor da função
    - nunca ocorre
    - não interessa o seu valor

- Permite minimizar adicionalmente a expressão
  - É considerada **1** se permitir simplificar a expressão
  - Caso contrário, é considerada **0**

Exemplo





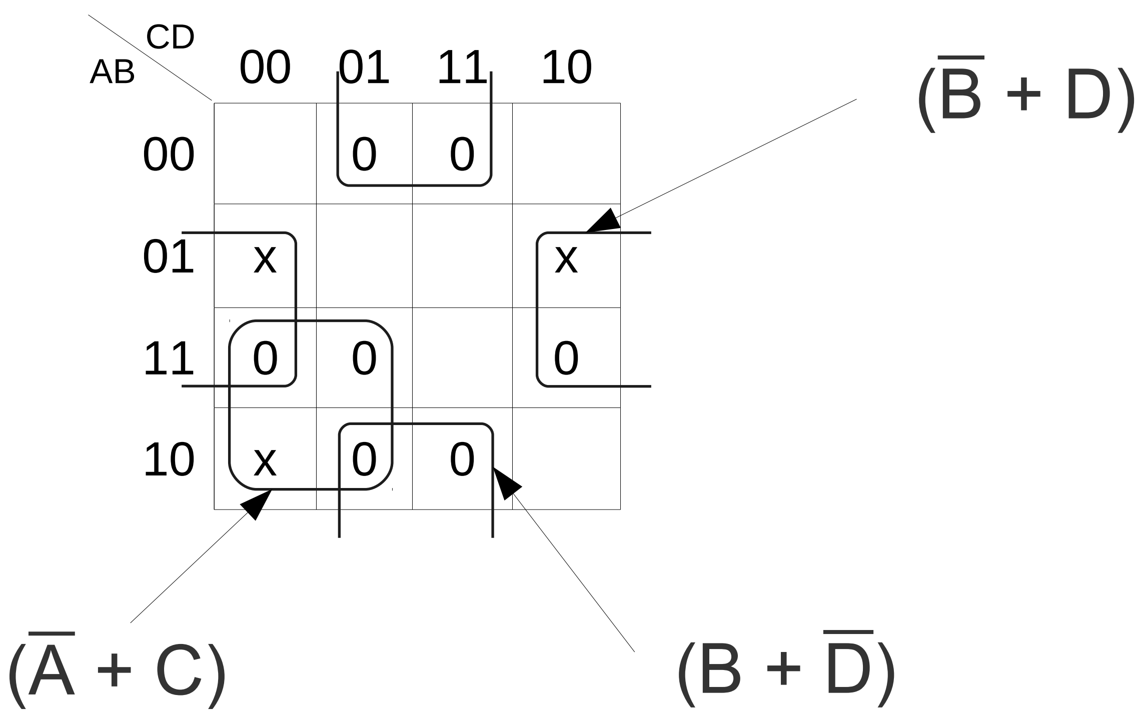
- $F(A,B,C,D) = \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D + \overline{A}\,B\,C\,\overline{D} + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D$
- $F(A,B,C,D) = A\,D + \overline{B}\,C\,D + B\,C\,\overline{D}$

Minimização com maxtermos

- Também é possível associar maxtermos
- Obtém-se a forma normal conjuntiva
  - **Agrupar** quadrados máximos com valor da função 0
    - Cada grupo corresponde a uma soma de variáveis com número mínimo de literais
  - **Incluir** todos os 0
    - A expressão é um produto com número mínimo de factores
  - **Mantêm-se** as variáveis que não mudam
    - 0 corresponde à variável
    - 1 corresponde ao complemento

Função com indiferenças

- $F(A, B, C, D) = \prod M(1,3,9,11,12,13,14)$ com indiferenças em 4, 6, 8



- $F(A, B, C, D) = (B + \overline{D})(\overline{B} + D)(\overline{A} + C)$

Mapa de 5 variáveis

A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Mapa de 5 variáveis

A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1		
11				
10		1	1	

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11	1		1	
10		1	1	

Mapa de 5 variáveis

A = 0

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	1	
01	1	1		
11				
10		1	1	

A = 1

BC \ DE	00	01	11	10
00	1	1	1	
01				
11	1		1	
10		1	1	

- $F = A\,B\,C\,\overline{D}\,\overline{E} + A\,B\,D\,E + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{D} + \overline{C}\,E$

Método de bridging

- Método para definir nova função F a partir de uma função G
  - **Dadas** quaisquer funções F e G,
  - **Encontrar** as funções X e Y que satisfazem $F = G \, . \, X + Y$
- X e Y realizam a ponte entre a função G e a função F
- Utilizar mapas de Karnaugh

Funções auxiliares

- $F = G . X + Y$
- Mapa da função X
  - **0** nos quadrados em que F = 0 e G = 1
  - **1** nos quadrados em que F = 1 e G = 1
  - **Indiferente** nos quadrados em que G = 0
- Mapa da função Y
  - **1** nos quadrados em que F = 1 e G = 0
  - **0** nos quadrados em que F = 0
  - **Indiferente** nos quadrados em que F = 1 e G = 1

Exemplo

- Quais as funções X e Y tais que a função $F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,4,8,10,11,14,15)$ possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis
  - A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

Exemplo

- Quais as funções X e Y tais que a função F(A, B, C, D) = ∑ m(0,1,2,4,8,10,11,14,15) possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis
    - A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11			1	1
10			1	1

=

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

·

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

+

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exemplo

- Quais as funções X e Y tais que a função $F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,4,8,10,11,14,15)$ possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis
  - A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11			1	1
10			1	1

=

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

·

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	1	x	1
01	1	x		x
11	x		x	1
10	1	x	1	x

+

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Exemplo

- Quais as funções X e Y tais que a função F(A, B, C, D) = ∑ m(0,1,2,4,8,10,11,14,15) possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis
  - A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11			1	1
10			1	1

=

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

·

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	1	x	1
01	1	x		x
11	x		x	1
10	1	x	1	x

+

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

$X = \overline{B} + \overline{D}$

Exemplo

– Quais as funções X e Y tais que a função $F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,4,8,10,11,14,15)$ possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis

- A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11			1	1
10			1	1

=

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

·

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	1	x	1
01	1	x		x
11	x		x	1
10	1	x	1	x

+

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	x		x
01	x			
11			1	x
10	x		x	1

$X = \overline{B} + \overline{D}$

Exemplo

- Quais as funções X e Y tais que a função $F(A, B, C, D) = \sum m(0,1,2,4,8,10,11,14,15)$ possa ser sintetizada a partir de um XOR de 4 variáveis
  - A função XOR de *n* variáveis é 1 para um nº impar de 1s à entrada, e 0 caso contrário

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1			
11			1	1
10			1	1

=

AB \ CD	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

·

AB \ CD	00	01	11	10
00	x	1	x	1
01	1	x		x
11	x		x	1
10	1	x	1	x

+

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	x		x
01	x			
11			1	x
10	x		x	1

$X = \overline{B} + \overline{D}$

$Y = A\,C + \overline{B}\,\overline{D}$

Exercícios

1. Indique a forma normal disjuntiva mínima das funções
   a) *F(A,B,C,D)* = $\sum m$(0-2, 4 – 7, 10)
   b) *G(A,B,C,D)* = $A\ B\ C + A\ \overline{B} + B\ C + D$
2. Obtenha a soma de produtos mínimos para a função F= $\prod$ M (1,2,5,8,9,12,15,17,19,23-25,28-31) com indiferenças nas posições 0,3,11,21,26,27
3. Determine essa expressão mínima usando mapas de Karnaugh para a função f(A,B,C,D,E) = $\prod$ M(2,4,7,9,10,12,18,24,30,31), com indiferenças nas posições 11, 15, 26, 28 e 29 de forma a ser facilmente implementada com NANDs.
   a) Qual o valor da função com entrada (ABCDE) = (11101). Porquê?