Introdução à Probabilidade e Estatística

Ficha N^{o}4: Distribuições de Probabilidade

Para as licenciaturas em: Eng. Civil, Eng. das Energias Renováveis, Eng. Geológica, Eng. Informática e Eng. Mecatrónica

2^o semestre 2014/15 — 2h Teóricas + 2h Práticas

Docentes: Patrícia Filipe e Ana Isabel Santos

Nota: Alguns dos exercícios propostos nesta ficha foram retirados dos manuais constantes na bibliografia (ver programa da cadeira).

1. **(1ª Frequência 2013)** Estudos recentes revelaram que, em Portugal, no 4^o trimestre de 2012, do total de edifícios licenciados, 56% correspondiam a construções novas e, destas, 70% destinavam-se a habitação familiar.

   (a) Qual a probabilidade de um edifício licenciado ser antigo? *(Ver Ficha n.º2)*

   (b) Qual a probabilidade de um edifício licenciado ser novo e não ser destinado a habitação familiar? *(Ver Ficha n.º2)*

   (c) Analisados ao acaso 8 licenciamentos, determine a probabilidade de pelo menos 6 corresponderem a construções novas.

2. **(1ª Frequência 2013)** A energia eólica representa o aproveitamento da energia cinética contida no vento para produção de energia mecânica (rotação das pás) que pode ser transformada em energia eléctrica por um gerador eléctrico. A energia eólica é produzida por um aerogerador, usualmente constituído por uma torre de 50 a 120 m de altura, que possui no topo um rotor, com 3 pás (de 25 m a 45 m cada), e a chamada "nacelle" que abriga o gerador e os sistemas de controlo da máquina (http://www.eneop.pt). Admita que o vento faz as pás darem em média 18 voltas por minuto.

   (a) Qual a probabilidade das pás darem 25 voltas num minuto?

   (b) Determine o desvio-padrão do número de voltas dadas pelas pás em 5 minutos.

   (c) Qual a probabilidade de, em 5 minutos, o número de voltas ser no mínimo 100?

3. **(1ª Frequência 2013)** Seja X uma variável aleatória que representa a produção anual de energia eléctrica a partir de fontes de energia eólica (em GWh). Considere

que a probabilidade da produção anual de energia eléctrica proveniente de fontes de energia eólica exceder 7000 GWh é de 75.8% e que esta variável segue uma distribuição normal com uma variância de 4 000 000 GWh^2.

(a) Determine o valor da produção média anual de energia eléctrica proveniente de fontes de energia eólica.
(Caso não consiga resolver esta alínea considere para este valor 8400 GWh.)

(b) Determine a probabilidade da produção anual de energia eléctrica proveniente de fontes de energia eólica:

i. ser de pelo menos 7500 GWh;

ii. estar entre 8500 GWh e 9200 GWh.

4. **(2ª Frequência/Exame 2013)** Uma determinada empresa pretende recrutar funcionários para uma nova área de negócio que pretende desenvolver. Para se candidatar aos lugares disponíveis é necessário realizar um teste. Sabe-se que os resultados do teste seguem uma distribuição normal de média 100 e variância 225. De entre os requisitos para contratação do funcionário é exigida a classificação mínima no teste de 115. Houve 60 candidatos aos lugares disponíveis pela empresa.

(a) Qual a probabilidade de um candidato, seleccionado ao acaso, verificar o requisito exigido relativamente à classificação no teste?

(b) Qual a probabilidade de um qualquer candidato obter uma classificação no teste entre 94 e 118?

(c) Qual a percentagem de candidatos que se espera atingirem uma classificação acima de 100?

(d) Determine a probabilidade de, entre os candidatos, em pelo menos 17 se verificar o requisito exigido relativamente à classificação no teste.

5. **(Exame de recurso 2013)** Uma fábrica produz discos de travão para automóveis de alta cilindrada. O diâmetro dos discos segue uma distribuição normal de média 322 mm e variância 0.0025 mm^2. O departamento de controlo de qualidade da fábrica avalia regularmente se o diâmetro dos discos produzidos estão dentro dos valores de qualidade exigidos.

(a) Seleccionado aleatoriamente um disco de travão produzido na fábrica, calcule a probabilidade do seu diâmetro:

i. exceder os 322.07 mm;

ii. estar entre 321.95 mm e 322.02 mm;

(b) Complete a frase: *"Em 93.7% dos casos o diâmetro do disco de travão não ultrapassa os __ mm".*

(c) Na fábrica existem 8 máquinas de produção de discos de travão. Uma máquina é inspeccionada sempre que produz discos que apresentem um diâmetro fora do intervalo [321.95; 322.05]. Calcule a probabilidade de pelo menos 2 máquinas serem inspeccionadas.

6. **(1ª Frequência — 31 de Março de 2012)** Uma conhecida fábrica de cerâmica produz azulejos que são embalados em caixas com quinze unidades. Sabe-se que o número de azulejos com defeitos segue uma distribuição de Poisson de variância igual a 2.

   (a) Qual a probabilidade de um qualquer azulejo ser defeituoso?

   (b) Qual a probabilidade de no máximo 2 azulejos serem defeituosos?

   (c) Numa caixa escolhida aleatoriamente, qual a probabilidade de todos os azulejos se encontrarem em bom estado (ou seja, sem qualquer defeito)?

7. **(Exame Época Normal — 14 de Junho de 2012)** O número de viaturas que atestam o depósito de gasolina numa pacata vila alentejana numa manhã (5h), de um certo dia, é bem representado por uma distribuição de Poisson de média 5.1. Considere também que o número de viaturas que atestam o depósito de gasolina na mesma vila alentejana numa tarde (5h), de um certo dia, é bem representado por uma distribuição de Poisson de média 8.4. Considere ainda que as viaturas que atestam o depósito de manhã não o fazem à tarde.

   (a) Qual a probabilidade de, em duas horas da parte da manhã, quanto muito uma viatura atestar o depósito de gasolina na vila alentejana?

   (b) Em média, quantas viaturas atestam o depósito de gasolina na pacata vila alentejana durante todo o dia (10h)?

   (c) Qual a probabilidade de, num dia (10h), 15 viaturas atestarem o depósito de gasolina na vila alentejana?

8. **(1ª Frequência — 30 de Abril de 2011)** Sabe-se que o número de alunos que chegam, por hora, para tirar dúvidas com a docente A duas semanas antes de uma frequência é uma v. a. X com distribuição Poisson com variância igual a 1.

   (a) Determine o número médio de alunos que chegam por "dia de atendimento" com a docente A. (Considere que o "dia de atendimento" é constituído por 4h).

   (b) Qual a probabilidade de chegarem no máximo 2 alunos por "dia de atendimento" com a docente A?

   (c) Considere agora que existem duas docentes (a A e a B) para tirar dúvidas e que o número de alunos que chegam, por "dia de atendimento" (4h), para tirar dúvidas com a docente B (duas semanas antes de uma frequência) é uma v. a. Y com distribuição Poisson com média igual a 2. Calcule a probabilidade do total de alunos que aparecem em 5 "dias de atendimento" seja de quanto muito 20 alunos.

9. **(Exame de Época Normal — 4 de Julho de 2011)** Um dos elevadores dum grande edifício público transporta, no máximo 20 pessoas de cada vez. A carga máxima transportada pelo elevador é de 1300kg. Os utilizadores deste elevador pertencem a um largo extracto duma população em que se verificou que o peso duma pessoa é aproximadamente normal com média 61Kg e desvio-padrão 10Kg.

(a) Qual a probabilidade de haver nas 20 pessoas, que em certo momento viajam no elevador, quanto muito duas com peso superior a 40Kg e inferior a 85Kg?

(b) Calcule a probabilidade do peso médio destes 20 utilizadores exceder os 60Kg.

10. **(2ª Frequência — 16 de Maio de 2009)** No âmbito de um estudo sobre a criação de um novo Centro Comercial na cidade de Évora, constatou-se que 40% dos cidadãos residentes na cidade de Évora concordam com esta criação. Inquiridos 10 cidadãos residentes na cidade de Évora, calcule:

    (a) a probabilidade de nenhum cidadão discordar com a criação de um novo Centro Comercial na cidade de Évora.

    (b) a probabilidade de pelo menos 2 cidadãos concordarem com a criação de um novo Centro Comercial na cidade de Évora

    (c) o número médio de cidadãos que discordam da criação de um novo Centro Comercial na cidade de Évora.

    (d) o desvio padrão do número de cidadãos que concordam com a criação de um novo Centro Comercial na cidade de Évora.

11. **(2ª Frequência — 16 de Maio de 2009)** Um exemplo clássico da distribuição de Poisson envolve o número de militares do exército Prussiano mortos entre 1875 e 1894 devido a um coice de cavalo. Sabendo que a probabilidade de num ano ter morrido no mínimo um militar devido a um coice de cavalo é igual a 0.864 (i.e. $P(X \geq 1) = 0.864$), calcule:

    (a) a probabilidade de em 2 anos ter morrido 1 ou mais militares devido a um coice de cavalo.

    (b) o número esperado de militares mortos num mês devido a um coice de cavalo.

    (c) a probabilidade de entre 1875 e 1894 (20 anos) terem morrido menos de 60 militares devido a um coice de cavalo.

12. **(2ª Frequência — 16 de Maio de 2009)** Numa pequena e média empresa de fornecimento de materiais de construção, sabe-se que as vendas diárias de areia (em toneladas) têm um comportamento aleatório, traduzido por uma distribuição normal, com média 2 e variância 0.04.

    (a) Qual a probabilidade de a empresa vender, diariamente, mais do que 2.5 toneladas de areia?

    (b) Qual a probabilidade de a empresa vender, diariamente, entre 1.5 e 2.5 toneladas de areia?

    (c) Determine a quantidade mínima de areia que é vendida diariamente em 50% casos.

    (d) Qual a probabilidade de numa qualquer semana (6 dias) escolhida ao acaso, se ter pelo menos 2 dias em que as vendas de areia não tenham ultrapassado as 2.5 toneladas?

13. **(3ª Frequência/Exame normal — 18 de Junho de 2009)** Através de estudos realizados, é possível admitir que ocorre no Japão (na província de Tóquio) uma média de 2 sismos por mês. Admitindo que o número de sismos que ocorre na província de Tóquio, por mês, segue uma distribuição de Poisson,

    (a) Determine:

    i. a probabilidade de ocorrer um sismo num mês.

    ii. a probabilidade de ocorrer quanto muito 5 sismos em 3 meses.

    (b) Admitindo agora que na província de Shizuoka ocorre uma média de 3 sismos de dois em dois meses e que os sismos registados em ambas as províncias (de Tóquio e de Shizuoka) são independentes entre si e ambos seguem uma distribuição de Poisson, determine a probabilidade de nos próximos 2 anos o número de sismos em ambas as zonas (ou seja, total) ter excedido os 90.

14. **(Exame de recurso — 27 de Junho de 2012)** Considere que a quantidade de gasolina vendida numa manhã (5h) numa pacata vila alentejana é bem descrita por uma distribuição normal de média $30l$ e variância $3l^2$ e que a quantidade vendida numa tarde (5h), nessa mesma vila, é também bem descrita por uma distribuição normal de média $45l$ e variância $16l^2$. Considere ainda que quem se abastece de gasolina de manhã não o faz à tarde.

    (a) Qual a probabilidade da quantidade de gasolina vendida numa manhã na vila alentejana ser inferior a $25l$?

    (b) Qual a probabilidade de num dia serem vendidos mais de $80l$ de gasolina?

    (c) Em 10 viaturas escolhidas ao acaso das que abastecem durante o dia (10h), qual a probabilidade de pelo menos 2 delas abastecerem entre $65l$ e $80l$?

15. **(3ª Frequência/Exame normal — 18 de Junho de 2009)** Um posto de transformação permite uma carga total de 2800kW. Sabe-se que esse posto de transformação alimenta uma fábrica com um consumo permanente de 2500kW. Além disso, alimenta uma população de 100 consumidores domésticos, gastando cada um, em média, 2kW (com desvio-padrão de 0.5kW) em electrodomésticos e, em média, 0.5kW (com desvio-padrão de 0.25kW) em iluminação, podendo estes dois tipos de consumo ser considerados independentes. Admita que ambos os consumos seguem uma distribuição normal.

    (a) Calcule a probabilidade de um consumidor (escolhido ao acaso de entre os 100) gastar em electrodomésticos entre 1.5 e 3 kW.

    (b) Calcule a probabilidade de um consumidor (escolhido ao acaso de entre os 100) gastar em iluminação mais de 0.95 kW.

    (c) Sendo $W_i, i = 1, 2, ..., 1000$ o consumo total de electricidade (em kW) do consumidor doméstico, tal que $W_i = X_i + Yi$, $i = 1, 2, ..., 100$ (em que X_i representa o consumo em electrodomésticos e Y_i representa o consumo em iluminação), obtenha, para o total dos consumidores, a média e a variância do consumo total de electricidade.

(d) Calcule o valor de x tal que $P[X < x] = 0,15$.

16. **(Exame de Recurso — 9 de Julho de 2009)** A resistência ao choque de certo tipo de mosaico cerâmico tem, em unidades convenientes, distribuição Normal de média igual a 3 e variância igual a 0.25.

    (a) Qual a probabilidade de um desses mosaicos ter uma resistência entre 2,5 e 3,5?

    (b) Qual a maior resistência que 20% dos mosaicos apresenta?

    (c) Em 10 mosaicos escolhidos ao acaso de um grande lote, qual a probabilidade de pelo menos 9 terem uma resistência superior a 3,5?

17. **(Exame de Época Normal — 21 de Junho de 2008)** Numa fábrica existem 15 máquinas, 8 são novas e 7 são antigas. Sabe-se que a probabilidade de uma máquina antiga estar em mau estado de conservação é 0,5; enquanto que numa nova essa probabilidade é 0,1.

    Para avaliar o estado de conservação das máquinas escolheram-se, ao acaso, 4 máquinas para inspecção.

    (a) Qual a probabilidade de terem sido escolhidas pelo menos 2 máquinas antigas?

    (b) Qual a probabilidade da 1ª máquina escolhida para inspecção estar em mau estado de conservação?

18. **(Exame de Recurso — 12 de Julho de 2008)** Os portugueses são dos cidadãos europeus com menor envergadura física, tendo em média menos 4,4 centímetros e menos 3,2 quilos que o cidadão médio da União Europeia, revela um estudo encomendado pela Comissão Europeia.

    De acordo com os dados do Eurobarómetro sobre Saúde, Alimentação e Nutrição, os portugueses têm em média 1,65 metros de altura e pesam 69 quilos, o que os coloca no penúltimo lugar quer da tabela de *altura* (apenas à frente dos malteses), quer do *ranking* do *peso* (apenas com italianos atrás).

    Suponha que a variável *altura* dos portugueses segue uma distribuição normal.

    (a) Sabendo que a probabilidade de encontrar um português que meça menos de 1,70 metros é 0,75, determine a variância da distribuição.

    (b) Calcule a probabilidade de encontrar um português que meça mais de 1,49 metros mas menos de 1,73 metros?

    (c) Qual a probabilidade de que, em 10 portugueses escolhidos ao acaso e com reposição, pelo menos 2 tenham mais de 1,70 metros?

19. **(2ª Frequência — 18 de Junho de 2007)** Estudos tecnológicos para a qualificação de certo tipo de rochas naturais e/ou ornamentais, tendo em vista a sua aplicação industrial, usam um certo tipo de laser. Estudos efectuados permitiram aceitar com válida a hipótese do tempo de vida de um laser ter uma distribuição normal de média igual a 7000h e um desvio padrão igual a 600h.

(a) Qual a probabilidade do tempo de vida de um laser, escolhido ao acaso, ser quanto muito de 5300 horas de funcionamento?

(b) Qual a duração que 90% desses lasers excede?

(c) Qual a probabilidade de em 10 lasers escolhidos ao acaso 4 deles apresentarem um tempo de vida superior a 5300h?

20. **(Exame Recurso — 7 de Julho de 2007)** O número de fendas significativas numa auto-estrada, a ponto de exigirem reparação imediata, tem distribuição de Poisson com desvio padrão igual a 2 falhas por Km.

    (a) Qual é a probabilidade de não haver fendas que exijam reparação imediata em 3 Km de auto-estrada?

    (b) O estado de uma auto-estrada é considerado grave se num percurso de 3 Km forem encontradas 8 fendas que exijam reparação imediata. Foram escolhidas aleatoriamente 10 auto-estradas com tráfego semelhante. Calcule a probabilidade de 5 delas se encontrarem em estado grave.

    (c) Devido à má construção das auto-estradas verificou-se (passados 4 anos após a conclusão das mesmas) uma média de 25 fendas por Km a exigirem reparação imediata. Perante este cenário, calcule a probabilidade de num Km existirem menos de 18 fendas.

21. **(Exame Especial — 27 de Setembro de 2007)** A pluviosidade anual, medida em $\mathrm{cm}^3/\mathrm{m}^2$, numa determinada região tem sido estudada e revelou um comportamento distribucional normal com média $65\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{m}^2$ sendo possível concluir que em 14,92% dos anos estudados choveu mais de $85\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{m}^2$.

    (a) Qual o desvio padrão da variável aleatória que mede a pluviosidade anual nessa região?

    (b) Calcule a probabilidade da pluviosidade anual se situar entre 65 e $85\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{m}^2$?

22. O tempo de funcionamento (em horas) de um certo equipamento é uma v.a. X com distribuição exponencial de parâmetro 1/2, ou seja, é uma v.a. com a seguinte função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{x}{2}},\ x \geq 0.$$

    (a) Calcule a probabilidade de que a 1ª avaria ocorra pelo menos 1 hora depois do inicio do funcionamento do equipamento.

    (b) Calcule a probabilidade de que a 1ª avaria não ocorra depois das 4 horas de funcionamento do equipamento.

    (c) Prove que a probabilidade de que o equipamento dure mais de 10h sabendo que já está a funcionar há 3 horas é igual à probabilidade de que o equipamento dure pelo menos 7 horas.

23. Considere a variável aleatória X com a seguinte função de distribuição:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0{,}25x}, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Defina a função densidade da variável aleatória X.

(b) Calcule o valor médio e a variância da variável aleatória X.

(c) Calcule a probabilidade de em três observações independentes da variável aleatória X se obter, em todas elas, valores superiores a 1,5.

Docentes: Dulce Gomes e Patrícia Filipe