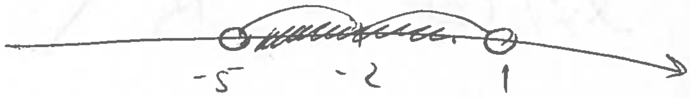
1

1ª F (explicação) 2

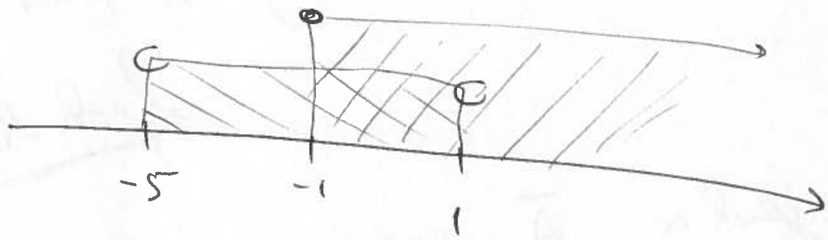
$$|x+2|<3$$

$]-5,1[$



A

$-5<x<1 \;,\; x \geq -1$

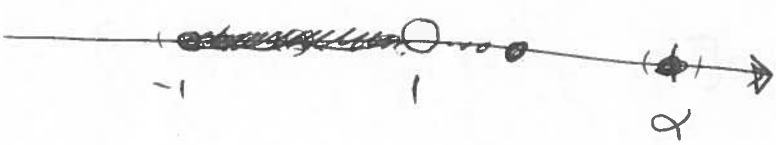


$|x-2| \geq 1.$

$]-\infty,1] \cup [3,+\infty[$

$$A = [-1,1[\;\cup\; \left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}$$

$2 \,,\; 1{,}25 \,,\; 1+1/9$



- $\text{int}(A) =]-1,1[\Rightarrow$ Como $\text{int}(A) \neq A$

A não é aberto

18/10

1

$\cdot\ fr(A) = \partial A = \{-1, 1\} \cup \{1 + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$

$\cdot\ ext(A) = \mathbb{R} \setminus \left(int(A) \cup fr(A) \right)$

$\cdot\ \boxed{\overline{A} = A \cup fr(A)} = [-1, 1] \cup \{1 + \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\}$

fecho ou aderência

Como $\overline{A} \neq A$, A não é ~~fechado~~

$\cdot\ A' =$ " é igual ao $\overline{A}$ menos os isolados "

derivado

pontos acumulação

$A' = [-1, 1]$

. <u>Majorantes</u> de A " de maior para cima "

$[2, +\infty[$

. <u>Supremo</u> " o menor dos majorantes "

$\to 2$

. <u>Máximo</u> " é o supremo se estiver no conj. "

$\to 2$

A é limitado pois tem majorantes e minorantes

SUCESSÕES

Por recorrência

(2.21)

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \end{cases}$$

a) Mostre que $u_n \le 2, \; \forall n \in \mathbb{N}$ (indução)

$P(n)$

Indução

1.º Será que $P(1)$ é verdade?

$P(1) \rightarrow u_1 \overset{?}{\le} 2 \rightarrow 1 \le 2$

2.º Sabendo que $P(n)$ é verdade (Hipótese), será que $P(n+1)$ é verdade (Tese)?

14/10

(2)

$P_{(n+1)} \longrightarrow u_{n+1} \overset{?}{\leq} 2$

$1 + \frac{u_n}{2} \overset{?}{\leq} 2$

$u_n \overset{?}{\leq} 2$ ✓ pois $P_{(n)}$ é verdade

b) Mostre que é monótona.

$u_1 = 1 \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$

está a crescer

crescente

$u_n \overset{?}{\leq} u_{n+1}$

$u_n - u_{n+1} \leq 0$

$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq 1$

$u_n \leq 1 + \frac{u_n}{2}$?

$2u_n \leq 2 + u_n$?

$u_n \leq 2$? ✓ (da a)

∴ é monótona crescente

1) Mostre que é convergente e calcule o limite

$\boxed{\text{monótona} + \text{limitada} \Rightarrow \text{convergente}}$

(a b)

$\underbrace{\overset{=1}{u_1} \leq u_n}_{\text{(a a) crescente}} \underbrace{\leq 2}_{\text{(a c)}}$

é limitada

é convergente.

Se é convergente $u_n \longrightarrow L$

também $u_{n+1} \longrightarrow L$

$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2}$

$L = 1 + \frac{L}{2} \Leftrightarrow L = 2$

19/00

$\therefore$ o limite é 2

③

2.7

5) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{3n^4 - 5n^2 - 7}{n^3 + n^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{3n^4}{n^3} = \lim 3n = +\infty$$

ou

$\div n^4$ $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{3n^4}{n^4} - \frac{5n^2}{n^4} - \frac{7}{n^4}}{\frac{n^3}{n^4} + \frac{n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4}}$$

$$= \lim \frac{3 - \frac{5}{n^2} - \frac{7}{n^4}}{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^4}} =$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{0 + 0 - 0} = \text{"}\frac{3}{0}\text{"} = +\infty$$

8) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{n}{n} = 1$$

- $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+2} \cancel{- 70n^{27}}}{2^{2n} \cancel{+ \sqrt{n} - 3n^{80}}}$$

$$= \lim \frac{3^n \times 3^2}{(2^2)^n} = 3^2 \lim \frac{3^n}{4^n}$$

$$= 9 \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

⚠

$$\lim a^n = \begin{cases} 0, & -1<a<1 \\ 1, & a=1 \\ +\infty, & a>1 \\ \text{não existe}, & a \leq -1 \end{cases}$$

---

e) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n} + (-1)^n$$

<u>n par</u> $\quad \lim \frac{10}{n} + 1 = 1$

<u>n ímpar</u> $\quad \lim \frac{10}{n} - 1 = -1$

$\Big\} \neq s$

19/10

$\therefore$ o limite não existe

4

Conjugado

h) $\lim \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \infty - \infty$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \lim \frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}\right)^2 - \left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim \frac{\cancel{n} + \sqrt{n} - \cancel{n}}{\sqrt{n+\cancel{\sqrt{n}}} + \sqrt{n}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{n \to +\infty} \frac{3 + \text{sen}^2(n+2x)}{n^3+1} =$$

infinitésimo × limitado

$$= \lim \underbrace{\frac{1}{n^3+1}}_{\downarrow\, 0} \times \underbrace{\left(3 + \text{sen}^2(n+2x)\right)}_{\text{limitado}} = 0$$

o) $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4n-3}{4n+1} \right)^n \to 1^{\infty} \Rightarrow \cancel{\text{nep}}$

CA

$$\left(\frac{4n-3}{4n+1} \right)^n = \left(\frac{4n+1-4}{4n+1} \right)^n \qquad \boxed{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \Rightarrow e^a}$$

$$\left(\frac{4n+1}{4n+1} - \frac{4}{4n+1} \right)^n = \left(1 + \frac{-4}{4n+1} \right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{-4}{4n+1} \right)^{4n+1} \right]^{\frac{n}{4n+1}}$$

$$\frac{n}{4n+1}$$

$$\left(e^{-4}\right)^{1/4} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

19/10

5

(218)

h) $\lim \sqrt[n]{(n+1)! - n!}$

$\|$

$$\boxed{\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}}$$

$$\lim \frac{(n+1+1)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!}$$

$$= \lim \frac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+1)! - n!}$$

$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}}$

$$= \lim \frac{(n+2)(n+1)n! - (n+1)n!}{(n+1)n! - n!} =$$

$$\lim \frac{\cancel{n!}\left((n+2)(n+1) - (n+1)\right)}{\cancel{n!}(n+1-1)} = \lim \frac{n^2}{n}$$

$= +\infty$

Enquadrado

2.16 $$\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

ou $$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\underbrace{n \times \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{a} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \times n}_{b}$$

n-ésimas (a) n-ésimas (b)

$$\lim \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 \qquad \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$$

∴ Pelo sucessão enquadrada o limite é 1

19/10

6

Séries

⚠ Se o termo geral $\not\to 0$

a série é divergente. (se $\to 0$ pode ou não conv.)

- $\sum \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+3}\right)^{n^2}$

$$\overset{\text{CA}}{=} \lim \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+3}\right)^{n^2} = \ldots = e^{\cdots}$$

$\therefore$ Como o termo geral $\not\to 0$, a série diverge

- $\sum \frac{n^2+2}{3n^2-8} \quad \overset{\text{CA}}{=} \lim \frac{n^2+2}{3n^2-8} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Como o termo geral $\not\to 0$, a série diverge

3.2

e) Soma de

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{5^{n-2}}$$

$$\parallel$$

$$6 \sum \frac{1}{5^n \times 5^{-2}} =$$

$$= \frac{6}{5^{-2}} \sum \frac{1}{5^n} =$$

$$= \frac{6}{5^{-2}} \sum \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\Downarrow$$

Série geométrica de razão $r = 1/5$

Como $-1 < \frac{1}{5} < 1$ ⟵ Converge

A Soma $S = \dfrac{\frac{6}{5^0}}{1 - 1/5} = \dfrac{6}{\frac{4}{5}} = \dfrac{30}{4}$

$= \dfrac{15}{2}$

Só dá para calcular a soma de

- geométrica
- Mengoli (telescópica)

Geométricas

$\sum r^n \quad -1 < r < 1$

$\Downarrow$

Converge

Soma é $S = \dfrac{1^{\circ} \text{termo}}{1 - r}$

19/10

7