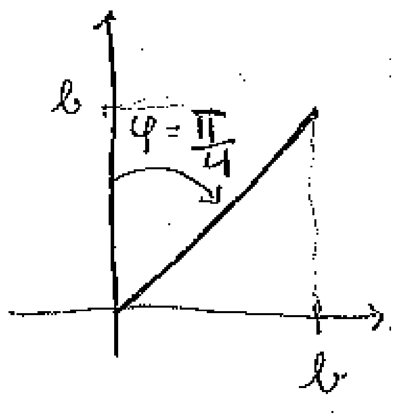
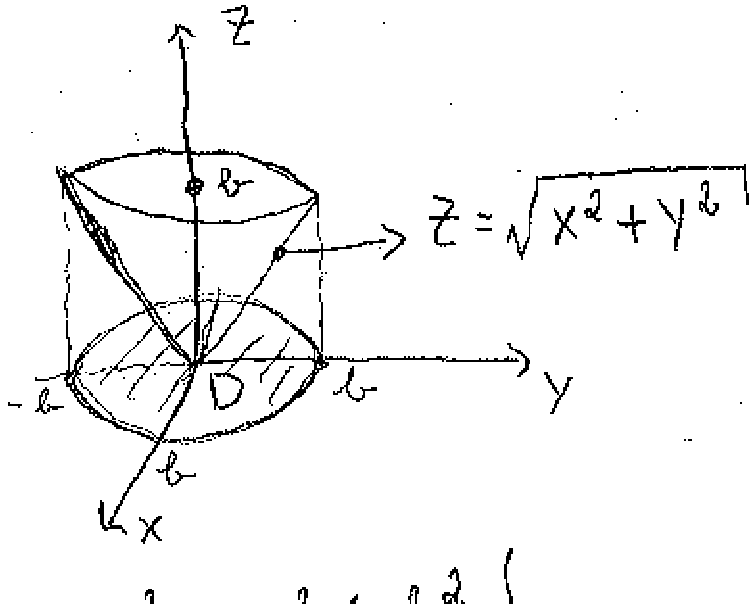
6.5 Exercícios (Página-206)

7-1) Determine uma parametrização para:

1.a) a superfície de revolução de um cone de altura $b > 0$ e gerado pela reta $z = x$, $y = 0$.





$$D_{uv} = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le b^2\}$$

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases}.$$

1.b) A superfície esférica de centro na origem e raio r.

Vamos usar as coordenadas esféricas,

$D_{\theta\varphi} = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$

$$g(\theta, \varphi) = \begin{cases} x = r \cos\theta \sin\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\varphi \end{cases}.$$

1.c) A superfície definida por

$$x + 2y + 3z = 4.$$

Vou apresentar várias parametrizações, mas em todas $D = \mathbb{R}^2$.

i) Usando a equação $\boxed{x = 4 - 2y - 3z}$:

$$g(u,v) = \begin{cases} x = 4 - 2u - 3v \\ y = u \\ z = v \end{cases} ;$$

ii) usando a equação $\boxed{y = \frac{4 - x - 3z}{2}}$

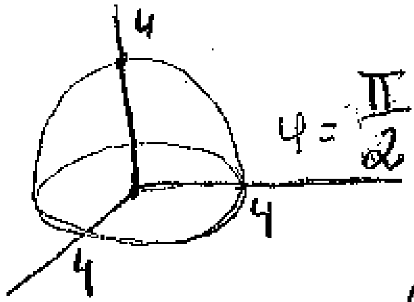
$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = \frac{4 - u - 3v}{2} \\ z = v \end{cases}$$

iii) usando a equação $\boxed{z = \frac{4 - x - 2y}{3}}$

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{4 - u - 2v}{3} \end{cases} .$$

1.d) A superfície caraterizada em coordenadas retangulares por:

$$x^2+y^2+z^2=16 \wedge z \geq 0.$$



• Uma parametrização é:

$$g(\theta,\varphi)=\begin{cases} x=4\cos\theta\sin\varphi \\ y=4\sin\theta\sin\varphi \\ z=4\cos\varphi \end{cases},\quad (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

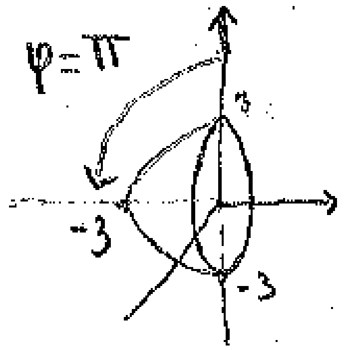
• Outra parametrização é:

$$D_{uv}=\{(u,v): u^2+v^2\leq 16\}$$

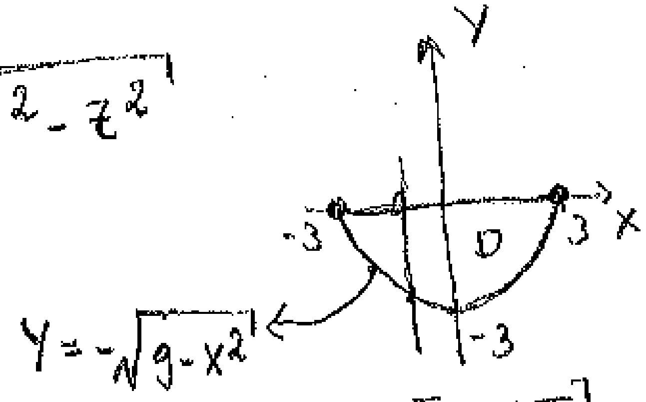
$$g(u,v)=\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\sqrt{16-u^2-v^2} \end{cases}$$

1.b) A superfície caraterizada em coordenadas retangulares por:

$$x^2+y^2+z^6=9 \wedge y<0.$$



$$y=-\sqrt{9-x^2-z^2}$$



$\theta\in[\pi,2\pi]$.

Podemos parametrizar de 2 formas:

$$g(\theta,\varphi)=\begin{cases}x=3\cos\theta\sin\varphi\\ y=3\sin\theta\sin\varphi\\ z=3\cos\varphi\end{cases},\ (\theta,\varphi)\in[\pi,2\pi]\times[0,\pi]$$

$$g(u,v)=\begin{cases}x=u\\ y=-\sqrt{9-u^2-v^2}\\ z=v\end{cases}$$

$$D_{uv}=\{(u,v):-3\le u\le 3,-\sqrt{9-u^2}\le v\le 0\}.$$

2) Determine em coordenadas cartesianas (retangulares) a condição que define:

2.a) a superfície definida parametricamente por:

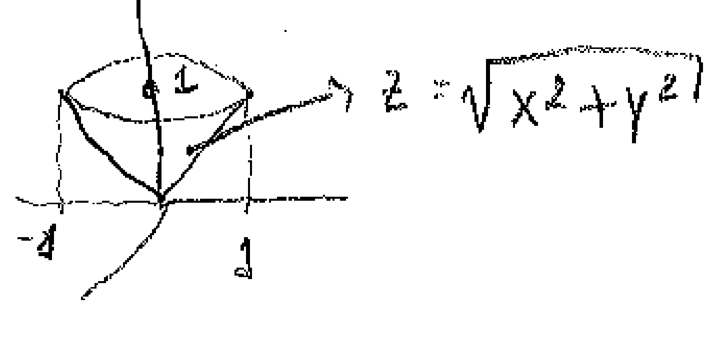
$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2+v^2} \end{cases},$$

para $(u,v) \in \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 1\}$.

Eliminando os parametros u e v obtemos

$$z = \sqrt{x^2+y^2}$$

definida em $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$



2.b) a superficie definida parametricamente por:

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases}$$

para $(u,v) \in \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1 \land 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

Tem-se:

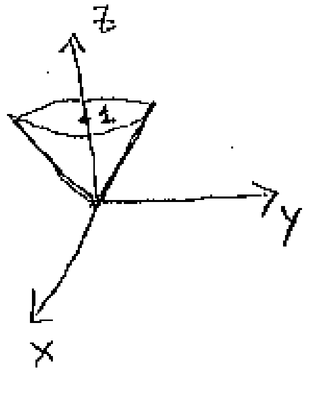
$$x^2 + y^2 = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v =$$

$$= u^2 \underbrace{(\cos^2 v + \sin^2 v)}_{=1} = u^2 = z^2.$$

g parametriza um cone de equação

$$z^2 = x^2 + y^2$$

com $0 \leq z \leq 1$



2.c) A superfície definida parametricamente por:

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$

$D = \{(u,v) : 0 \leq u \leq 1 \wedge 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

$x^2 + y^2 = u^2\cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 = z$.

Pelo que g parametriza a superfície que é a porção do paraboloide definido pelas condições:

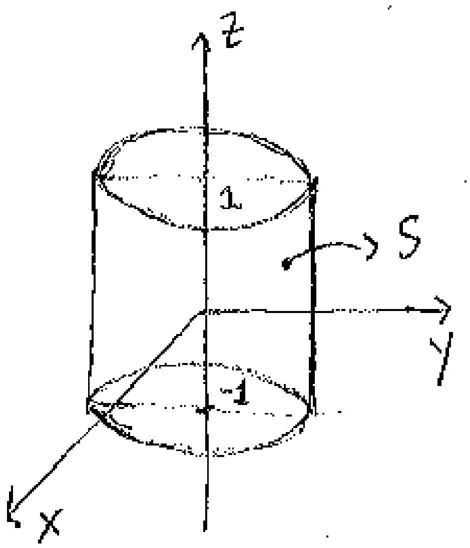
$z = x^2 + y^2, \quad 0 \leq z \leq 1$.

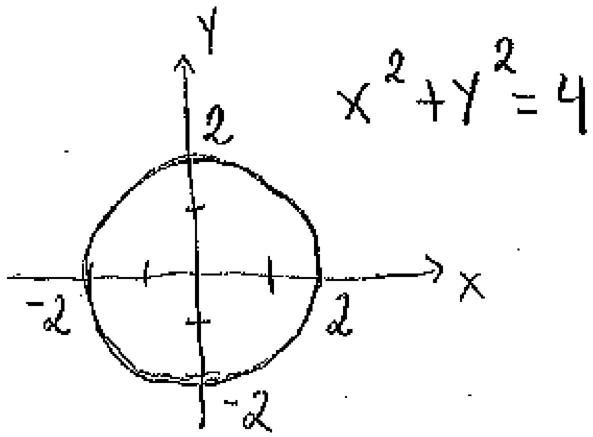
3) Calcule a integral de superfície

$$\iint_S xy \, dS$$

com S a superfície cilíndrica

$x^2 + y^2 = 4$ e $-1 \leq z \leq 1$.





Podemos parametrizar S da seguinte forma:

$$g(\theta, z) = \begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

com $D_{\theta z}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 1 \end{cases}$.

$$g_\theta \times g_z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

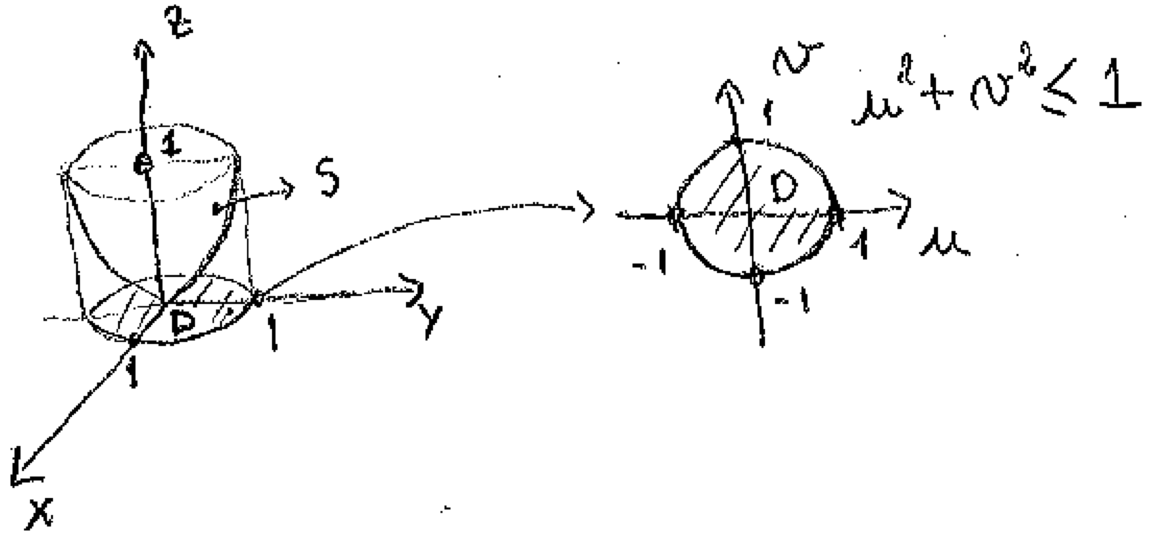
$$\|g_\theta \times g_z\| = 2\|(\cos\theta, \sin\theta, 0)\| = 2\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 2.$$

$$\iint_S \overbrace{xy}^{=f(x,y)}\, dS = \iint_{D_{\theta z}} f[g(\theta, z)]\, \|g_\theta \times g_z\|\, dA =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 4\cos\theta\sin\theta\,(2)\, dz\, d\theta = 8\int_0^{2\pi} 2\cos\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$= 8\left[\sin^2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

4) Calcule a área da superfície S definida por $z = x^2 + y^2$ com $z \leq 1$.



Uma parametrização de S é:

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

com $D_{uv} = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}$.

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (-2u, -2v, 1)$$

A área de superfície pedida é: $\boxed{14-12}$

$$A = \iint_S dS = \iint_{D_{uv}} \| g_u \times g_v \| \, dA =$$

$$= \iint_{D_{uv}} \sqrt{4u^2 + 4v^2 + 1} \, dA = \qquad \boxed{\begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho \operatorname{sen}\theta \\ \rho^2 = u^2 + v^2 \end{cases}}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} \int_0^1 (4\rho^2+1)(8\rho) \, d\rho \, d\theta =$$

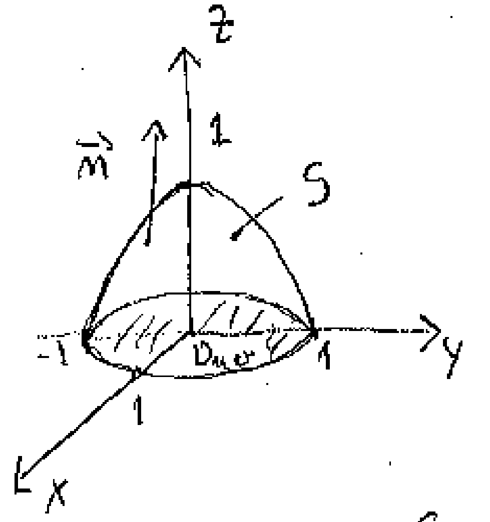
$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[(4\rho^2+1)^{3/2} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta =$$

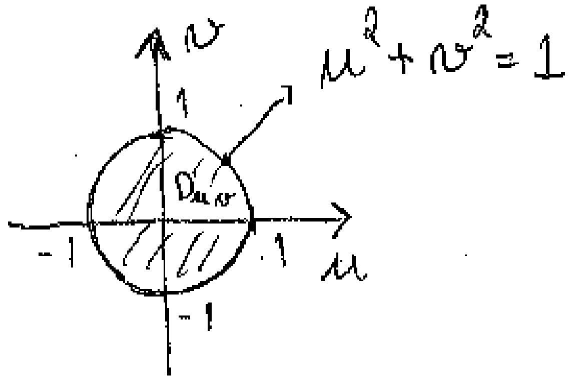
$$= \frac{1}{2}\left(5\sqrt{5}-1\right) \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{(5\sqrt{5}-1)\pi}{6}.$$

5) Calcule o fluxo do campo de forças:

$$F(x,y,z) = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 = (x,y,z)$$

através da superfície S definida por $z = 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq 0$ (~~[illegible]~~) orientada para fora.





$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u^2 - v^2 \end{cases}$$

$$D_{uv} = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

$$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = (2u, 2v, 1).$$

- Dado que a superfície é orientada para fora devemos usar este vetor e não o seu simétrico $(-2u, -2v, -1)$.

- O fluxo pedido é dado pelo integral de superfície

$$\iint_S F | n \, dS = \iint_{D_{uv}} F[g(u,v)] | n \, dA =$$

$$= \iint_{D_{uv}} (u, v, 1-u^2-v^2) | (2u, 2v, 1) \, dA =$$

$$= \iint_{D_{uv}} u^2 + v^2 + 1 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2+1) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \frac{3\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{Pg-14-14-a}}$

Observação: relativamente ao facto do vector $n = (g_u \times g_v)/\|g_u \times g_v\|$ apontar para fora ou para dentro.

1º) passo:

Temos de escolher um ponto $P_0 \in S$, por exemplo, fazendo $(u_0, v_0) = (0,0) \in D_{uv}$, obtemos

$$P_0 = (0,0,1) \text{ e } n(0,0) = (0,0,1);$$

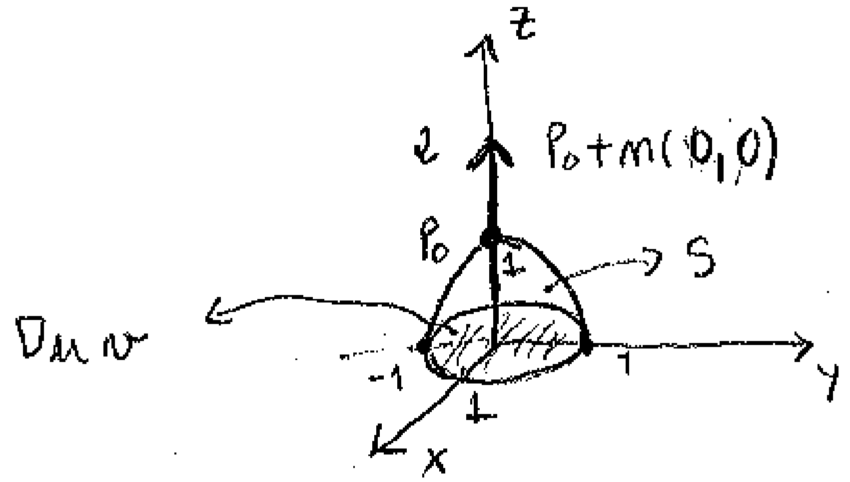
e o simétrico de $n(0,0)$ é

$$-n(0,0) = (0,0,-1).$$

2º) Passo

Vamos calcular a soma de P_0 com $n(0,0)$:

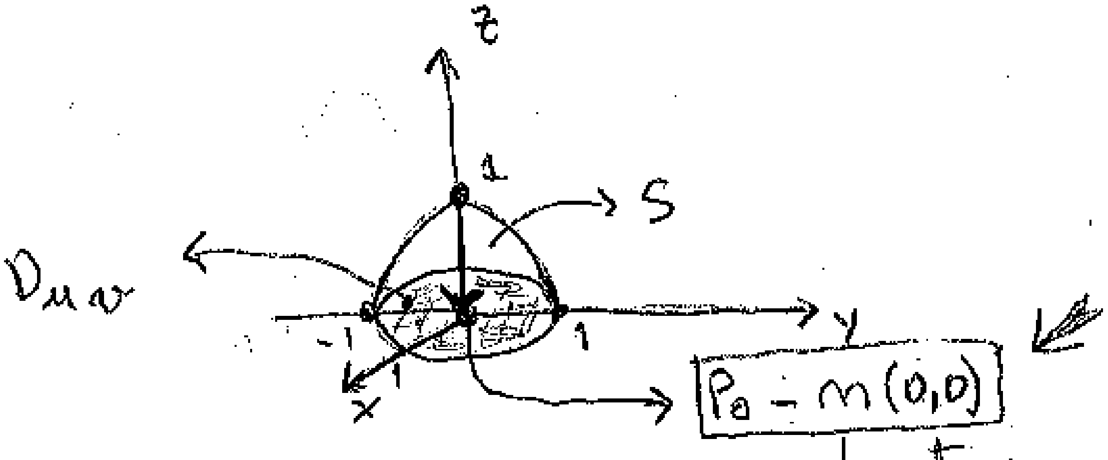
$$P_0 + n(0,0) = (0,0,1) + (0,0,1) = (0,0,2).$$



Neste caso n aponta para fora.

Calculemos a soma de P_0 com $-n(P_0)$:

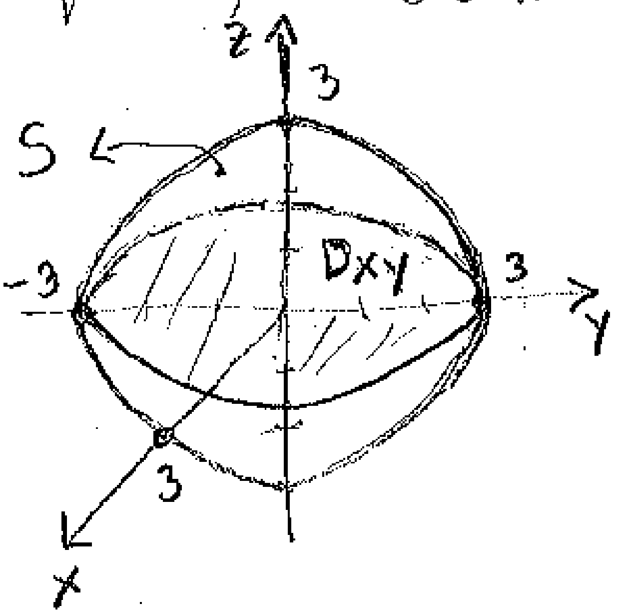
$$P_0 - n(0,0) = (0,0,1) - (0,0,1) = (0,0,0)$$

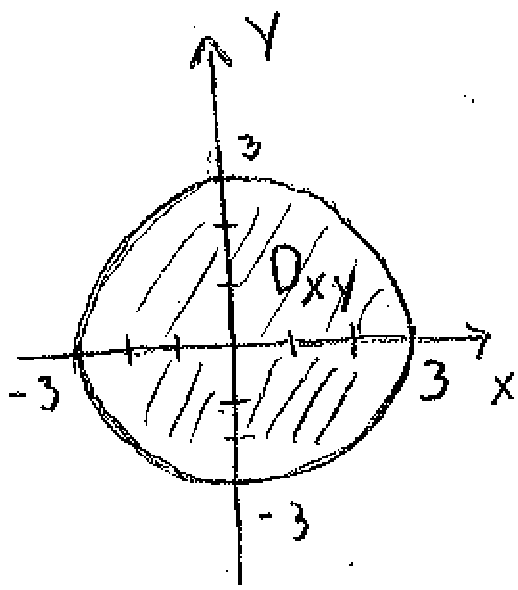


Neste caso o vetor aponta para dentro.

14-15

6) Mostre que o fluxo do campo de forças $F(x,y,z) = z\,e_3 = (0,0,z)$ através da superfície S definida por $x^2+y^2+z^2=9$ orientada para fora, é 36π.



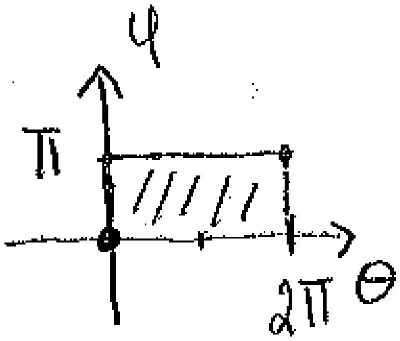


Para parametrizar a nossa superfície esférica vamos utilizar coordenadas esféricas com $\rho = 3$.

$\boxed{14-16}$

$$g(\theta,\varphi)=\begin{cases} x=3\cos\theta\sin\varphi\\ y=3\sin\theta\sin\varphi \\ z=3\cos\varphi\end{cases}$$

$$D_{\theta\varphi}=[0,2\pi)\times[0,\pi]$$



Assim:

$$g_\theta\times g_\varphi = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & e_3\end{array}\\ \begin{vmatrix} -3\sin\theta\sin\varphi & 3\cos\theta\sin\varphi & 0\\ 3\cos\theta\cos\varphi & 3\sin\theta\cos\varphi & -3\sin\varphi \end{vmatrix}\end{array} =$$

$$= -9\left(\cos\theta\sin^2\varphi,\ \sin\theta\sin^2\varphi,\ \sin\varphi\cos\varphi\right) = N.$$

Façamos $(\theta,\varphi)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ assim

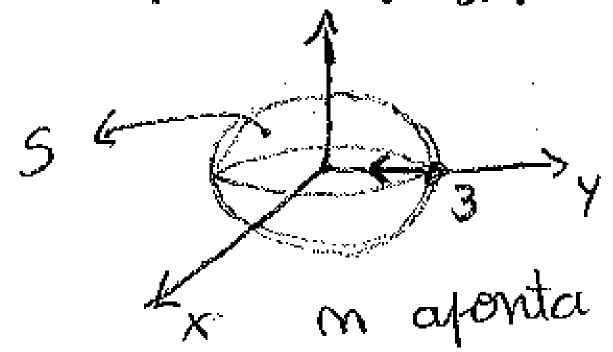
$\boxed{P_0(0,3,0)\in S}$, $N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=(0,-9,0)$. e

$\boxed{n\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=(0,-1,0).}$

14-17

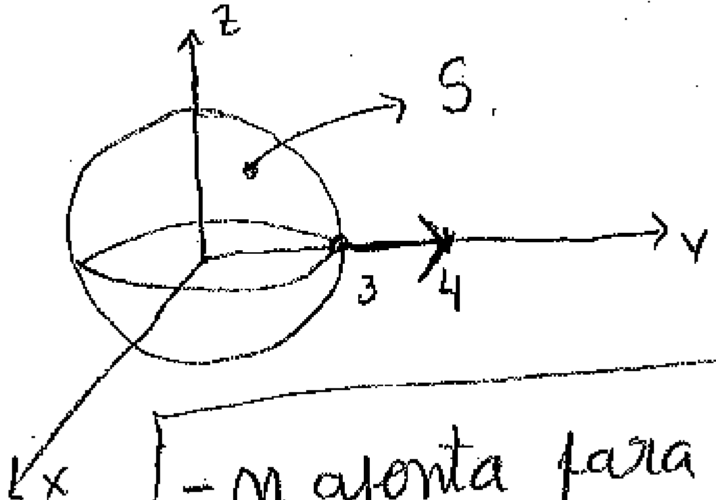
Para escolhermos o vector que aponta para fora calculem-se novamente as somas:

- $P_0(0,3,0) + n\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = (0,2,0)$



n aponta para dentro.

$P_0(0,3,0) - n\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) = (0,4,0)$



$\boxed{-n \text{ aponta para fora}}$

Portanto vamos usar $-n$ nos cálculos.

$\boxed{14\text{-}18}$

O fluxo pedido é:

([illegible])

$$\iint_S F | n \, dS = \iint_S (0,0,z) | n \, dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} 9 \int_0^{\pi} (0,0,3\cos\varphi) | (\cos\theta \sin^2\varphi, \sin\theta \sin^2\varphi, \sin\varphi\cos\varphi) \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 27 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos^2\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= -27 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} d\theta = 18 \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 36\pi.$$

Observação:

O rotacional de um campo vetorial

$$F(x,y,z) = \left(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\right)$$

é, por definição, dado por:

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right).$$

7) Considere a circunferência C de equação $x^2+y^2=4$, limitada superiormente pela superfície S de equação $z=4-x^2-y^2$ e um campo vetorial

$$F(x,y,z)=(x^2y\,,\,yz\,,\,xz)$$

Mostre que

$$\oint_C x^2y\,dx+yz\,dy+xz\,dz=$$

$$=\iint_S (-y,-z,-x^2)\,|\,m\,dS=$$

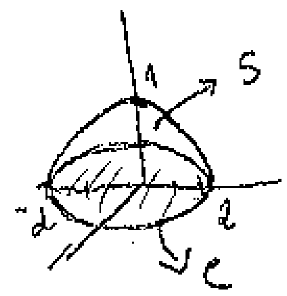
$$=-4\pi.$$

$\boxed{14\text{-}21}$

Para aplicarmos o teorema de Stokes temos de calcular

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & yz & xz \end{vmatrix} =$$

$$= (-y, -z, -x^2);$$



assim

$$\oint_C x^2 y\, dx + yz\, dy + xz\, dz =$$

$$= \iint_S \operatorname{rot} F \,|\, n \, dS =$$

$$= \iint_S (-y, -z, -x^2) \,|\, n \, dS.$$

Para calcular o integral $\boxed{14-22}$ de linha vamos usar a linha:

$$\alpha(t) = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 0),\ t \in [0, 2\pi]$$

$$\alpha'(t) = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0),\ \text{assim:}$$

$$\oint_C x^2 y\, dx + yz\, dy + xz\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t)^2\, 2\sin t\,(-2\sin t)\, dt = -16\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= -16\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,(1-\cos^2 t)\, dt =$$

$$= -16\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt}_{\text{por partes}} + 16\underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, dt}_{\text{por partes}} = -4\pi$$

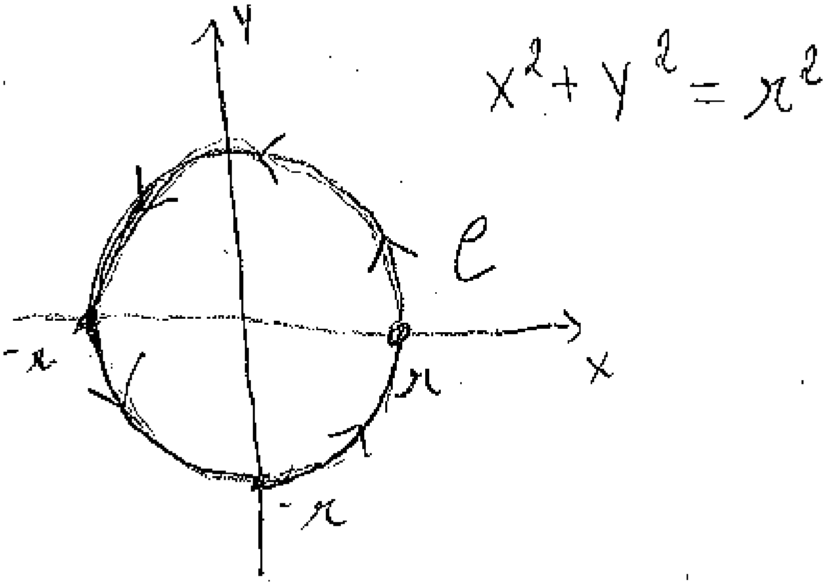
14-23

8) Transforme o integral de linha:

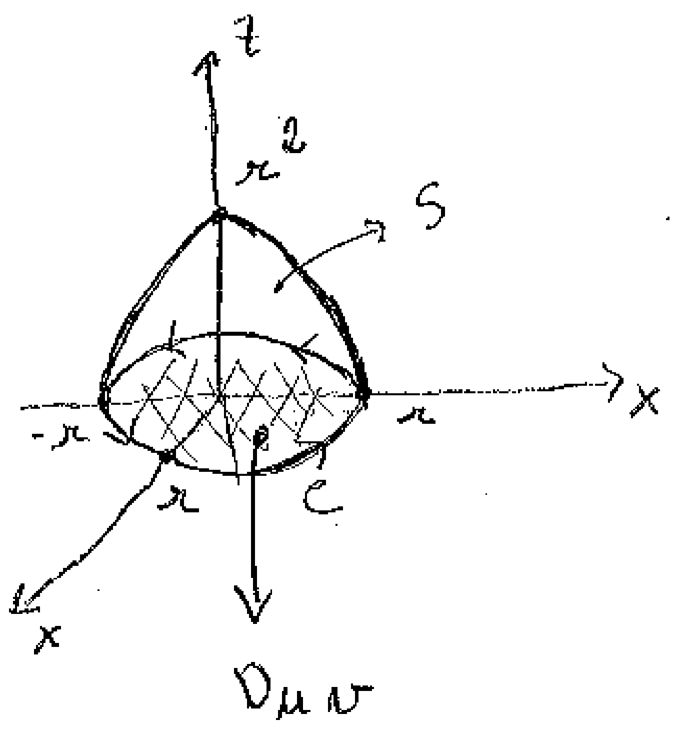
$$\oint_{\mathcal{C}} x^2yz\,dx + xy^2\,dy + (x+z)\,dz$$

num integral duplo, sabendo que $\mathcal{C}$ é a circunferência $x^2+y^2=r^2$.

Consideremos a circunferência $\mathcal{C}$ sobre o plano xoy orientada positivamente (sentido direto)



Considerando ainda uma superfície S, à nossa escolha, limitada por C, por exemplo, o paraboloide $z = r^2 - x^2 - y^2$, podemos aplicar o teorema de Stokes a C e a S.



• Calcule-se o rotacional $\boxed{14\text{-}25}$

de $F(x,y,z) = (\underbrace{x^2yz}_{f_1}, \underbrace{xy^2}_{f_2}, \underbrace{x+z}_{f_3})$;

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} \overset{+}{\vec{e}_1} & \overset{-}{\vec{e}_2} & \overset{+}{\vec{e}_3} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & xy^2 & x+z \end{vmatrix} =$$

$$= (0, x^2y - 1, y^2 - x^2x).$$

Uma parametrização de S é

$$g(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = r^2 - u^2 - v^2 \end{cases}$$

com $D_{uv} = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq r\}$.

$\boxed{14-26}$

$$N = g_u \times g_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} =$$

$$= (2u, 2v, 1).$$

Assim, pelo teorema de Stokes,

$$\oint_C x^2yz\,dx + xy^2\,dy + (x+z)\,dz =$$

$$= \iint_S \text{rot}\,F \,|\, n\,dS = \iint_S (0, x^2y - 1, y^2 - x^2z) \,|\, n\,dS =$$

$$= \iint_{D_{uv}} (0, u^2v - 1, v^2 - u^2(r^2 - u^2 - v^2)) \,|\, (2u, 2v, 1)\,dA$$

$$= \iint_{D_{uv}} 2v(u^2v - 1) + v^2 - u^2(r^2 - u^2 - v^2)\,dA =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{r} \left[2\rho \sin\theta(\rho^3\cos^2\theta\sin\theta - 1) + \rho^2\sin^2\theta - \rho^2\cos^2\theta(r - \rho^2)\right]\rho\,d\rho\,d\theta =$$

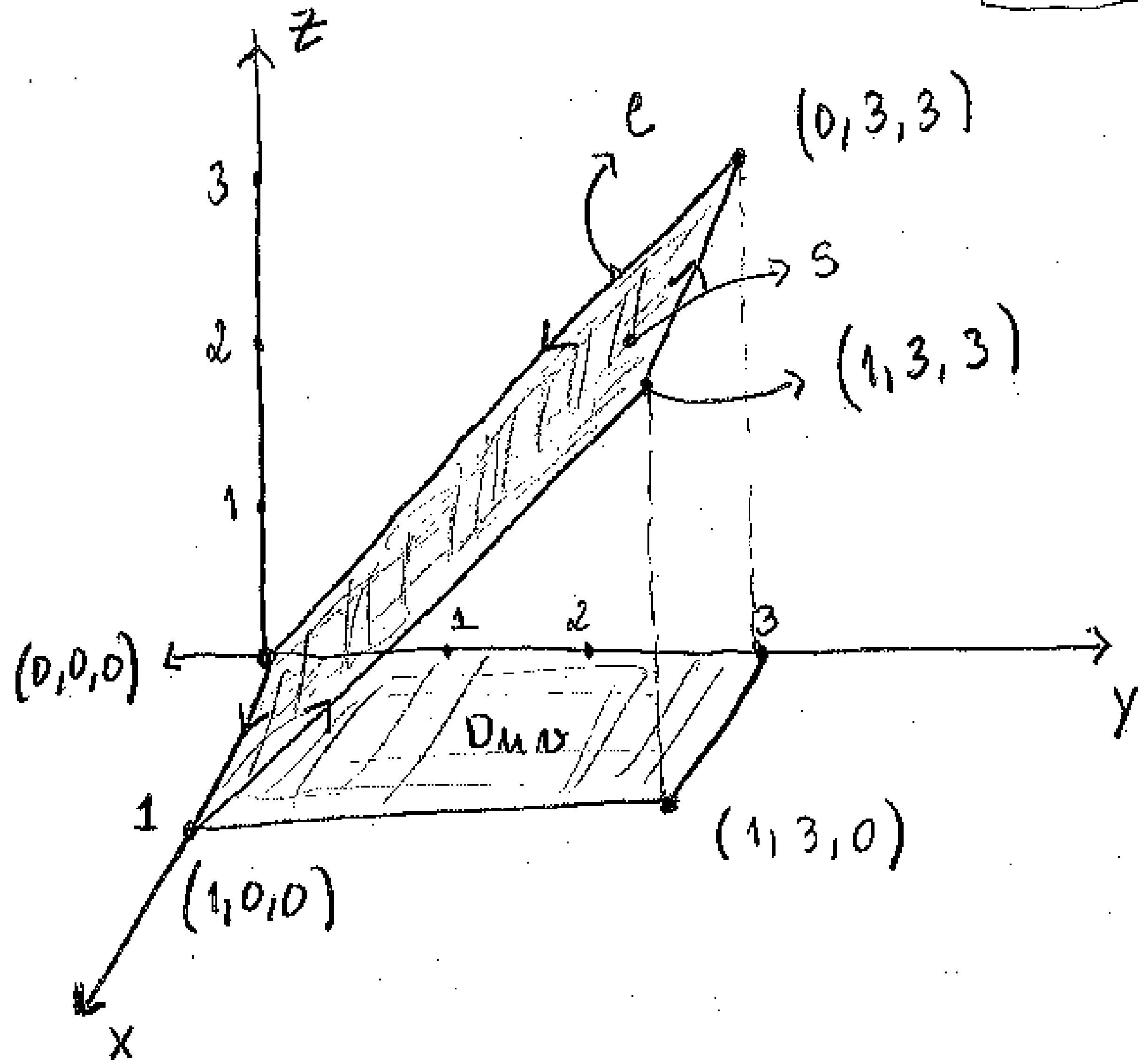
$$= \cdots \qquad \boxed{\begin{cases} u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\sin\theta \\ \rho^2 = u^2 + v^2 \end{cases}}$$

$\boxed{14-27}$

9) Determine o trabalho efectuado pelo campo vectorial

$$F(x,y,z) = x^2 e_1 + 4xy^3 e_2 + y^2 x e_3 =$$
$$= (x^2, 4xy^3, y^2 x)$$

numa partícula que percorre, no sentido positivo ou directo, o contorno do rectângulo situado no plano $z = y$ de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,3,3)$ e $(0,3,3)$.



O trabalho pedido é

$$T = \oint_C F\, d\alpha = \oint_C (x^2, 4xy^3, y^2)\, d\alpha;$$

usando integrais de linha seria necessário calcular 4 integrais, assim para reduzir os calculos vamos usar o teorema de Stokes:

- $rot(x^2, 4xy^3, y^2) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 4xy^3 & y^2 \end{vmatrix} =$

$= (2y, 0, 4y^3)$.

- Uma parametrização de S é:

$g(u,v) = (u, v, v)$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,3]$;

$g_u \times g_v = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$,

podemos agora efectuar os cálculos:

$$T = \oint_C (x^2, 4xy^3, y^2)\, d\alpha =$$

$$= \iint_S \text{rot}(x^2, 4xy^3, y^2) \,|\, n \, dS =$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 (2v, 0, 4v^3) \,|\, (0, -1, 1)\, dv\, du =$$

$$= \int_0^1 \int_0^3 4v^3 \, dv\, du = 81.$$

$\boxed{14\text{-}31}$

10) Determine, utilizando o teorema da divergência, o integral de superfície:

$$\iint_S F(x,y,z) \mid n \, dS.$$

para as superfícies e campos indicados:

1.a) S é a região limitada pelos planos coordenados ([redacted]) e pelos planos $x=1$, $y=1$ e $z=1$,

com $F(x,y,z) = (2x-z, x^2, -xz^2)$.

Observação:

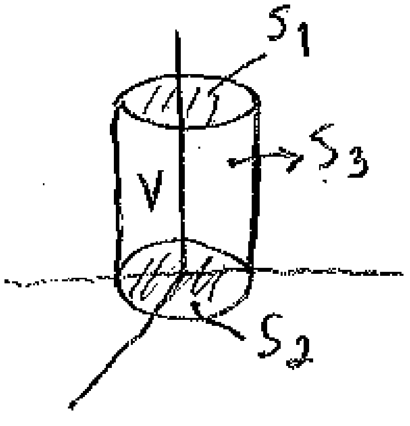
Se uma superfície, com certa regularidade, limita um sólido V, então:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz,$$

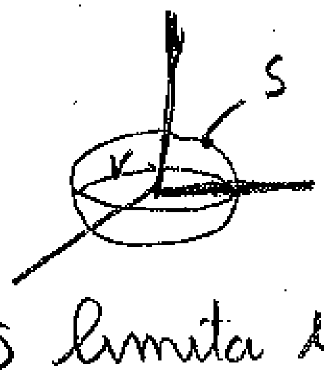
onde, para $F = (f_1, f_2, f_3)$,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

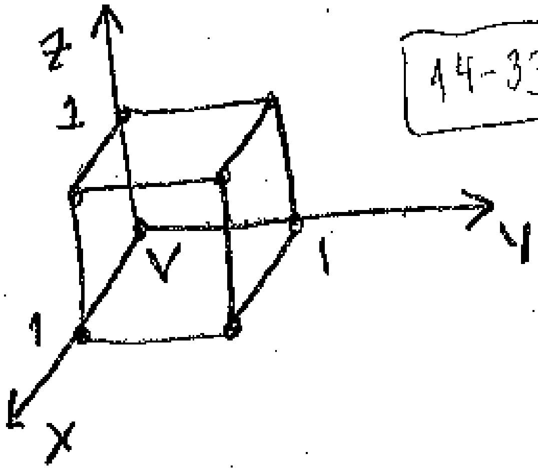
Exemplos de sólidos limitados por superfícies



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ limita um cilindro



S limita uma esfera.



14-33

$$V: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

Se usarmos integrais de superfície temos de calcular 6 integrais, um por cada face, usando integrais triplos basta calcular um.

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div}(2x - z, x^2, -xz^2) = 2 - 2xz.$$

Assim

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz =$$

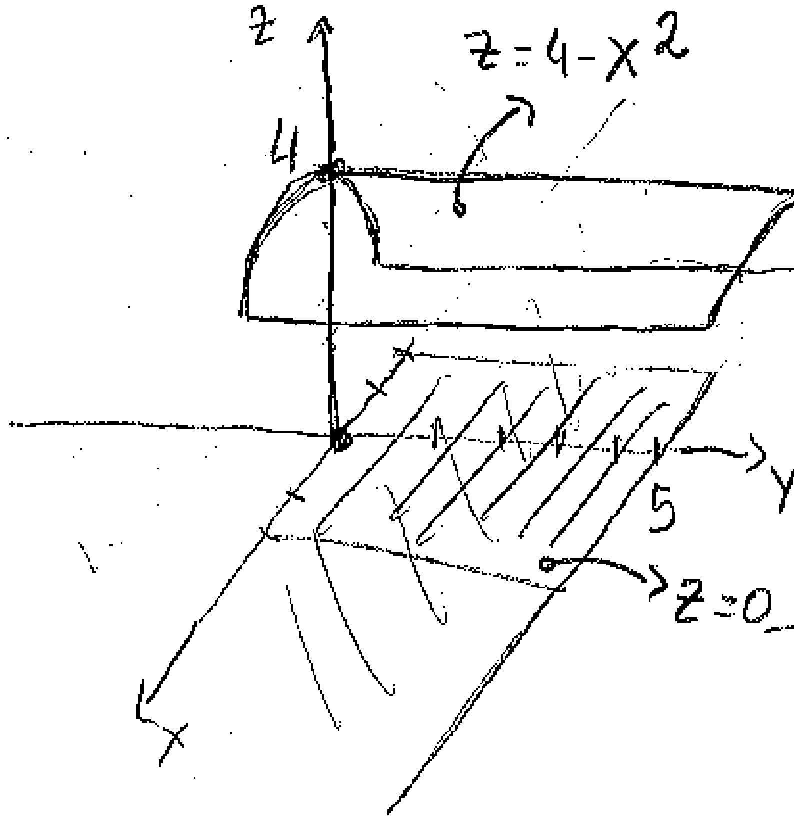
$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2 - 2xz \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \ldots$$

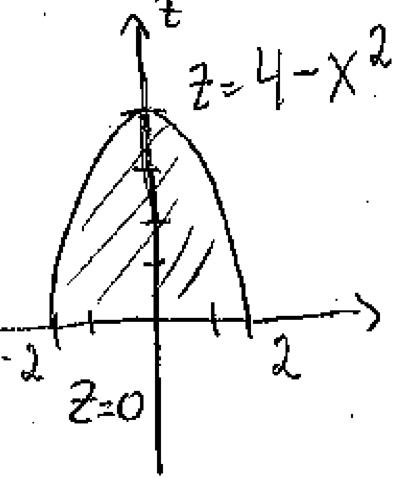
10.b) S é a região limitado por $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 5$, xoy $\underbrace{(z=0)}$ e xoz $\underbrace{(y=0)}$,

com:

$$F(x,y,z) = \left(x^3 + \sin z,\ x^2 y \cos z,\ e^{x^2+y^2}\right).$$



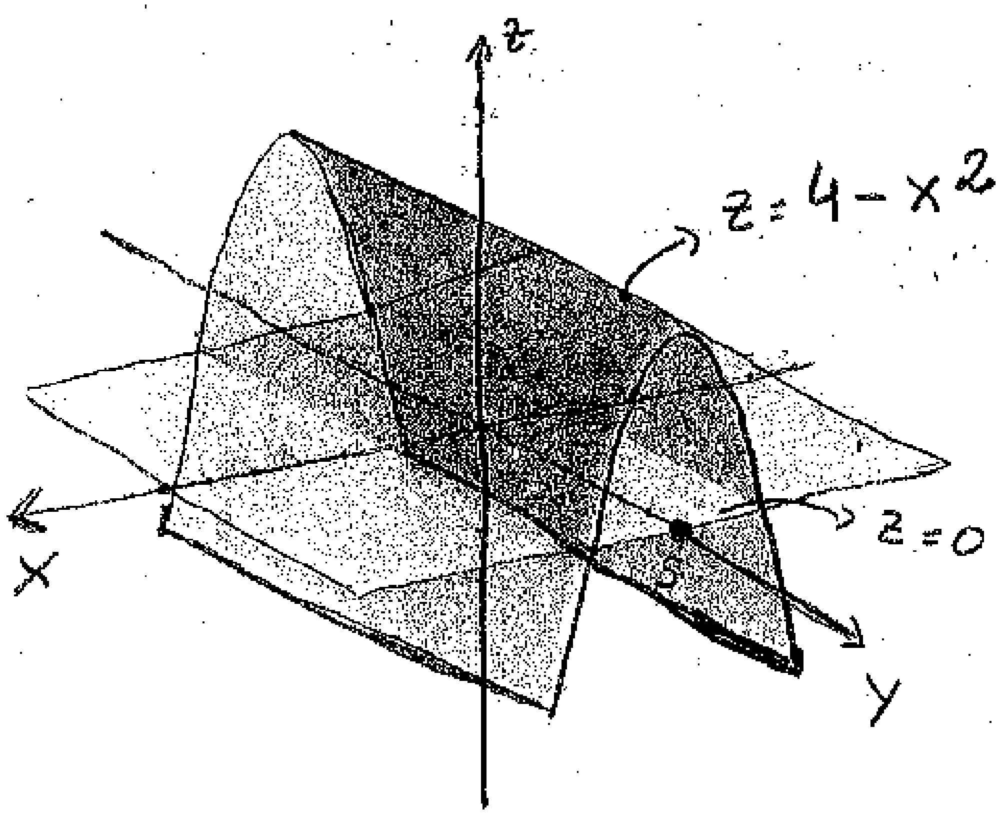
$$V: \begin{cases} 0 \le y \le 5 \\ -2 \le x \le 2 \\ 0 \le z \le 4 - x^2 \end{cases}$$



$\boxed{14-35}$

- $\operatorname{div}\left(x^3+\sin z,\ x^2 y\cos z,\ e^{x^2+y^2}\right)=$

$= 3x^2+x^2\cos z$



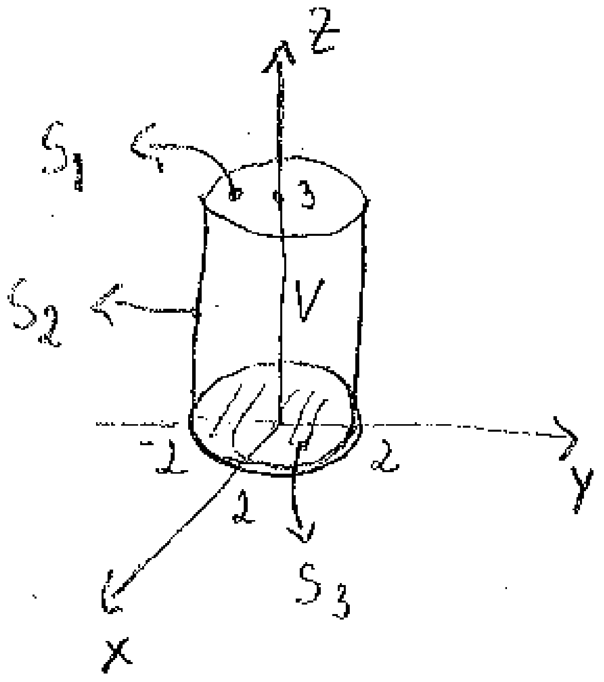
$$\iint_S \left(x^3+\sin z,\ x^2 y\cos z,\ e^{x^2+y^2}\right)\cdot n\,dS =$$

$$=\int_0^5\int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2} 3x^2+x^2\cos z\,dz\,dx\,dy .$$

$\boxed{14-36}$

10.c) S é a região limitada pelo cilindro circular reto $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=0$ e $z=3$, sendo

$$F(x,y,z) = x^3 e_1 + y^3 e_2 + z^3 e_3 =$$
$$= (x^3, y^3, z^3).$$



$$V_{\rho\theta} : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq z \leq 3 \end{cases}$$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$\boxed{14-37}$

- $\operatorname{div}(x^3, y^3, z^3) = 3(x^2+y^2+z^2)$

$$\iint_S (x^3, y^3, z^3) \cdot n \, dS =$$

$$= \iiint_V \operatorname{div}(x^3, y^3, z^3)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_V 3(x^2+y^2+z^2)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 3(\rho^2+z^2)\, \rho \, dz\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 3\rho^3 + 3z^2 \rho \, dz\, d\theta\, d\rho =$$

$= \dots$