Aula - 9

$\boxed{4\text{-}33}$ Determine os extremos relativos da função $y = f(x)$ definida implicitamente pela equação:

$$y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0.$$

Resolução:

$$\varphi(x,y) = y^3 - 3x^2y + x^3 - 3 = 0$$

Verifiquemos que a equação $\varphi(x,y) = 0$ define implicitamente y em função de x:

- $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 3x^2 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \pm x$,

$\varphi(x,y)$ define y como função de x no conjunto: $\{(x,y) : y \neq \pm x\}$.

• Calculem-se agora os pontos críticos ou estacionários, estes são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6XY + 3X^2 = 0 \\ Y^3 - 3X^2Y + X^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X(X - 2Y) = 0 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = \sqrt[3]{3} \end{cases} \vee \begin{cases} X = 2Y \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ Y^3 - 12Y^3 + 8Y^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ -3Y^3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ Y = -1 \end{cases}.$$

Assim existem 2 pontos críticos:

$X_0 = 0$ e $X_1 = -2$, note-se que

$f(0) = \sqrt[3]{3}$ e $f(-2) = -1$.

A classificação dos pontos críticos faz-se através do sinal de:

$$-\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = -\frac{-6y+6x}{3y^2-3x^2} = \frac{6y-6x}{3y^2-3x^2}.$$

$$-\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}\left(0, \sqrt[3]{3}\right) = \frac{6\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{9}} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}} > 0,$$

assim: $x = 0$ é ponto de mínimo local e $f(0) = \sqrt[3]{3}$ é mínimo local.

$$-\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}(-2,-1) = -\frac{2}{3} < 0, \quad \text{logo}$$

$x_1 = -2$ é ponto de mínimo local

e $f(-2) = -1$ é mínimo local.

Fim

$\boxed{4\text{-}34^*}$ Determine os extremos relativos de $z = f(x,y)$ definida implicitamente pela equação:

$$x + 2xy + 3z^2 + x^2 z - 3 = 0$$

na vizinhança de pontos adequados.

Resolução:

$$\varphi(x,y,z) = x + 2xy + 3z^2 + x^2 . z - 3 = 0$$

Determinem-se os pontos onde a equação $\varphi(x,y,z) = 0$ define implicitamente z como função de (x,y):

- $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0 \Leftrightarrow 6z + x^2 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq -\dfrac{x^2}{6}$.

- Os pontos críticos ou estacionários são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2y + 2xz = 0 \\ 2x = 0 \\ x + 2xy + 3z^2 + x^2 z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -1/2 \\ x = 0 \\ z = \pm 1 \end{cases}.$$ Assim

existe um ponto $(x_0, y_0) = (0, -1/2)$, mas temos duas hipóteses deferentes:

$f(0, -1/2) = -1$ ou $f(0, -1/2) = 1$.

Para classificar os pontos críticos usa-se a matriz:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{6z+x^2} \begin{bmatrix} 2z & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Primeira hipótese:

$$\mathcal{H}(0,-1/2,-1) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Delta_1 = -1/3$, $\Delta_2 = -\frac{1}{9}$, logo o ponto $(0,-1/2)$, neste caso, é ponto de sela.

- Segunda hipótese:

$$\mathcal{H}(0,-1/2,1) = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Delta_1 = -1/3$, $\Delta_2 = -1/9$, logo a forma é indefinida e assim $(0,-1/2)$, neste caso, é ponto de sela.

4-37 Determine três números cuja soma seja 150 e de modo que o seu produto seja o máximo. 9-7

Resolução:

Pretende-se maximizar a função

$$f(x,y,z) = xyz$$

sujeita à restrição:

$$\varphi(x,y,z) = x+y+z-150 = 0.$$

Neste caso, a função Lagrangeana é:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f + \lambda\varphi = xyz + \lambda(x+y+z-150),$$

$n = 3$ e $m = 1$.

- Os pontos críticos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + \lambda = 0 \\ xz + \lambda = 0 \\ xy + \lambda = 0 \\ x + y + z = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\lambda}{z} \\ x = -\dfrac{\lambda}{z} \\ \lambda^2 + \lambda z^2 = 0 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ \lambda(\lambda + z^2) = 0 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\cancel{\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \lambda = 0 \\ z = 150 \end{cases}}}_{\substack{\text{este caso exclue-se} \\ \text{porque } f(0,0,150)=0}} \vee \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ \lambda = -z^2 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz - z^2 = 0 \\ xz - z^2 = 0 \\ — \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z(y-z) = 0 \\ z(x-z) = 0 \\ — \\ — \end{cases} \boxed{9\text{-}9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} z = 0 \\ — \\ \lambda = 0 \\ x + y = 15 \end{cases}}_{\text{esta solução não serve porque } f(x,y,0)=0} \vee \begin{cases} y = z \\ x = z \\ — \\ 3z = 150 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ y = 50 \\ z = 50 \\ \lambda = -2500 \end{cases}$$

Portanto o máximo se existir é:

$$f(50,50,50) = 50^3 = 125\,000.$$

Para classificar o ponto crítico, usando o método de Hessiano Orlado, temos de calcular n-m determinantes, ou seja 3-1=2 determinantes; sendo o primeiro:

$$\bar{H}_{m+n} = \bar{H}_{3+1} = \bar{H}_4 =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & Z & Y \\ 1 & Z & 0 & X \\ 1 & Y & X & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{0 \quad 1 \quad 1 \quad 1} \\ 1 \quad 0 \quad 50 \quad 50 \\ 1 \quad 50 \quad 0 \quad 50 \\ 1 \quad 50 \quad 50 \quad 0 \end{vmatrix} \end{array} =$$

$$(50, 50, 50, -2500)$$

(Vamos usar o teorema de Lagrange para calcular este determinante)

$$= (-1)\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 50 & 50 \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 50} \\ 1 & 50 & 0 \end{vmatrix} \end{array} + (1)\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 50} \\ 1 \quad 50 \quad 50 \\ 1 \quad 50 \quad 0 \end{vmatrix} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 50} \\ 1 \quad 50 \quad 0 \\ 1 \quad 50 \quad 50 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= -\left(-\begin{vmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 0 \end{vmatrix} - 50\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}^{=0}\right) + \begin{vmatrix} 50 & 50 \\ 50 & 0 \end{vmatrix} + 50\overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}^{=0} +$$

$$+ (-1)\left(\begin{vmatrix} 50 & 0 \\ 50 & 50 \end{vmatrix} + 50\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 50 \end{vmatrix}}_{=0}\right) =$$

$$= -2500 - 2500 - 2500 = -7500 < 0$$

O segundo e último determinante a calcular é

$$\overline{H}_{2m+1} = \overline{H}_{2+1} = \overline{H}_3(50, 50, 50, -2500) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 50 & 50 \\ 1 & 50 & 0 & 50 \\ 1 & 50 & 50 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 50 \\ 1 & 50 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = -\begin{vmatrix} 1 & 50 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 50 \end{vmatrix} =$$

$$= 100 > 0;$$

temos sinais alternados, como $\overline{H}_{2m+1} = \overline{H}_3 > 0$ que é o sinal de $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1 > 0$, logo o ponto crítico é um máximo. Fim

4-38 Determine e classifique os extremos das funções seguintes nas regiões indicadas:

38.d) $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$

sujeita às restrições

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

Resolução:

Queremos os extremos de

$f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$

sujeita a 2 duas restrições

$\varphi_1(x, y, z) = x + y + z - 4 = 0$ e

$\varphi_2(x, y, z) = x + 2y - 6 = 0;$

assim o Lagrangeano é:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = f + \lambda \varphi_1 + \mu \varphi_2 =$$

$$= 2x^2 + y + z + \lambda(x+y+z-4) + \mu(x+2y-6).$$

Os pontos críticos são as soluções de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + \lambda + \mu = 0 \\ 1 + \lambda + 2\mu = 0 \\ 1 + \lambda = 0 \\ x + y + z = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ \mu = 0 \\ \lambda = -1 \\ \frac{1}{4} + y + z = 4 \\ \frac{1}{4} + 2y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ \mu = 0 \\ \lambda = -1 \\ z = \frac{7}{8} \\ y = \frac{23}{8} \end{cases},$$

temos um candidato a extremo:

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8}, \frac{7}{8}, -1, 0\right).$$

- Para classificar o ponto crítico, primeiro note-se que $n = 3$ e $m = 2$, assim temos de calcular $n - m = 3 - 2 = 1$ determinantes, ou seja temos de calcular

$$\overline{H}_{n+m} = \overline{H}_5 .$$

$$\overline{\mathcal{H}}_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 16 > 0;$$

Como $\overline{\mathcal{H}}_{n+m} = \overline{\mathcal{H}}_{3+2} = \overline{\mathcal{H}}_5 > 0$ tem o mesmo sinal de $(-1)^m = (-1)^2 = 1 > 0$, temos um máximo. Fim.

38.e $g(x,y,z) = 2x + y^2 + 2z$

sujeita às restrições:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,z) = x + 2y + z - 10 = 0 \\ \varphi_2(x,y,z) = x + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

Resolução:

O Lagrangeano neste caso é:

$$\mathcal{L}(x,y,z) = g + \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2 =$$

$$= 2x + y^2 + 2z + \lambda(x + 2y + z - 10) + \mu(x + 2z - 8).$$

- Os pontos críticos ou estacionários do problema são a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + \lambda + \mu = 0 \\ 2y + 2\lambda = 0 \\ 2 + \lambda + 2\mu = 0 \\ x + 2y + z = 10 \\ x + 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = -2 \\ x = 6 - z \\ 6 - z + 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = -2 \\ x = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

O único ponto crítico é

$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = (4, 2, 2, -2, 0)$.

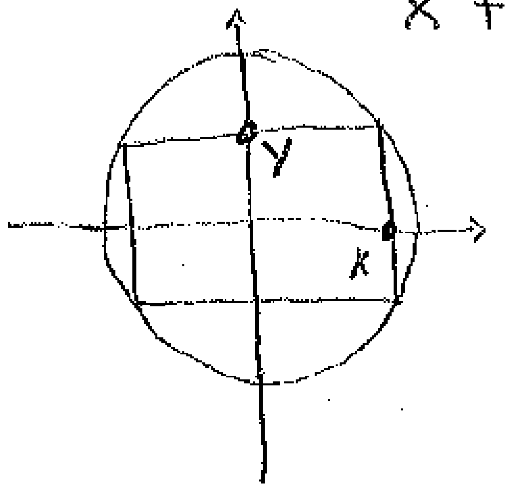
A classificação deste ponto fica a cargo do aluno. Fim

4-41

Determine o paralelopípedo rectangular de volume máximo inscrito numa esfera de raio r.

Resolução:

$x^2+y^2=r^2$



O volume pode ser calculado usando a fórmula:

$$\frac{V}{8}(x,y,z) = \boxed{f(x,y,z) = xyz},$$

com $x,y,z>0$.

Pretendemos maximizar

$f(x,y,z) = xyz$, sujeita à restrição

$$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2 = 0$$

com $r > 0$.

Assim o Lagrangeano é:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f + \lambda\varphi =$$

$$= xyz + \lambda(x^2+y^2+z^2-r^2).$$

Os pontos críticos são as soluções de:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \\ \varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz + 2\lambda x = 0 \\ xz + 2\lambda y = 0 \\ xy + 2\lambda z = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{2\lambda x}{y} \\ \dfrac{-2\lambda x^2 + 2\lambda y^2}{y} \\ = \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \lambda(y^2 - x^2) = 0 \\ (\lambda = 0 \text{ não serve}) \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -2\lambda \ (\lambda \text{ tem de ser} < 0) \\ y = x \ (y = -x \text{ não serve}) \\ x^2 - 4\lambda^2 = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ x = -2\lambda \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = x \\ \lambda = -x/2 \\ x^2 + x^2 + x^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ \lambda = -\sqrt{3}/6 \cdot r \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} r \end{cases}$$

O ponto é $(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r$ e

o volume é $V = \frac{8}{9}\sqrt{3}\, r^3$.

A classificação fica a cargo do aluno.

Fim