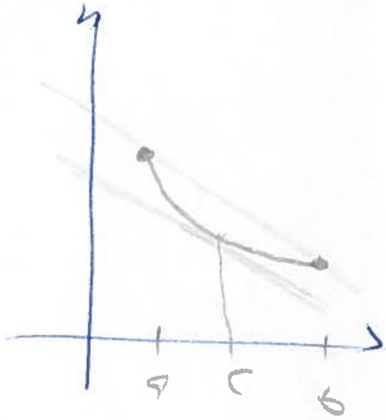
2ºF (explicação)

TEO. LAGRANGE

- f é contínua em $[a,b]$
- f diferenciável em $]a,b[$

$$\Rightarrow \exists\, c \in\,]a,b[\, : \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



(5) 2ºF 2016

$$\boxed{\frac{x}{1+x^2} \leq \operatorname{arctg} x \,, \quad x>0}$$

?

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad [a,b] \longrightarrow [0,x]$$

$$f' = \frac{1}{1+x^2}$$

T. Lagrange $\quad \exists\, c \in\,]a,x[\, :$

$0<c<x$

$$f'(c) = \frac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(0)}{x-0}$$

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{x} < \frac{1}{1+0^2}$$

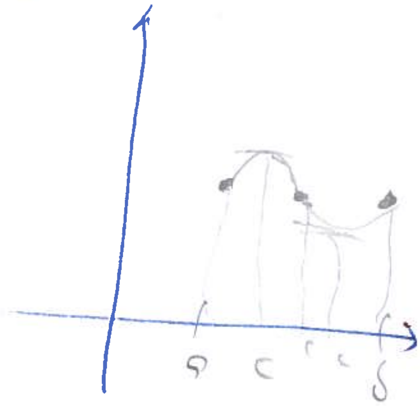
$$\frac{x}{1+x^2} < \operatorname{arctg} x < \frac{x}{1}$$

23/11

Teo. Rolle

- f cont. em $[a,b]$
- f dif. em $]a,b[$
- $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[: \quad f'(c) = 0$



Sim ③ 2.º F

$\underbrace{e^{x} - x - 2}_{f(x)} = 0$ tem exatamente 2 soluções

- $f(0) = -1$ ⊖
- $f(2) = e^{2}-2-2 = $ ⊕

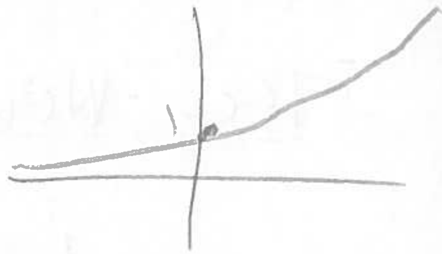
→ f é contínua em $[0,2]$

→ $f(0) \times f(2) < 0$

$\Rightarrow$ Pelo T. Bolzano $\exists c \in]0,2[: f(c) = 0$

pelo menos uma

⇒ Prova que é único



$$f' = e^x - 1 > 0 \quad \text{em }]0,2[$$

$]0,+\infty[$

f é estritamente crescente em $]0,+\infty[$

logo a ter um zero é único!

$\therefore$ Há exatamente um zero em $]0,2[$

$]0,+\infty[$

⇒ Outro em $]-2,0[$

- $f(-2) = e^{-2} \cancel{+2} \cancel{-2} = e^{-2}$ $\oplus$
- $f(0) = \ominus$

T.P.C. idem em $]-2,0[$

23/11

2

TEO. WEIERSTRASS: f contínua em $[a,b]$

$\Rightarrow$ tem máximo e mínimo

Série alternada $\sum (-1)^n a_n$ $\rightarrow \cos(n\pi)$

$$\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Ver conv. absoluta

$$\sum \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

grau num $= 0$ base - p.m. $= \frac{1}{2}$

" den $= 1/2$

diverge

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{1/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1/2}}{\sqrt{n+1}} = 1 > 0$$

e finito

$\therefore$ Por comparação as séries $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ e $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$

têm a mesma natureza.

Mas $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge (S. Dirichlet com $\alpha \leq 1$).

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{array}{l} \alpha \leq 1 \text{ div} \\ \alpha > 1 \text{ cv.} \end{array}}$$

$\therefore$ A mesma tb diverge.

$\therefore$ A série não converge absolutamente.

<u>Ver a conv. simples</u>

$$\sum (-1)^n \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}_{a_n}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{C. Leibnitz} \\ \sum (-1)^n a_n \\ \text{converge se} \\ \quad \cdot\ a_n \to 0 \\ \quad \cdot\ a_n \text{ decrescente} \end{array}}$$

- $a_n \to 0$? $\lim \frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$ ✓
- a_n é decrescente?

$$a_n \overset{?}{\geq} a_{n+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \quad ✓$$

$\therefore$ Pelo C. de Leibnitz a série conv. simplesmente

23/11

$$\sum (-1)^n \frac{e^{n+2}-1}{e^n+5}$$

M | a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n \times e^2 - 1}{e^n+5} = e^2$$

$\therefore$ Como o termo geral $\not\to 0$, a série diverge

2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}, & x<1 \\[2ex] a\,e^{\frac{x-1}{2}}, & x \geq 1 \end{cases}$$

a) f é diferenciável em $x=1$ (encontre a)

1º tem de ser contínua em $x=1$

f é <u>contínua</u> em $x=1$ se $\lim\limits_{x\to1^-} f = \lim\limits_{x\to1^+} f = f(1)$

- $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-1}{x^2-4x+3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to1} \dfrac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x-3)} = \dfrac{1}{-2}$

- $\lim\limits_{x\to1^+} a\, e^{\frac{x-1}{2}} = a$

- $f(1) = a$

$\therefore a = -1/2$

4

f é <u>diferenciável</u> em $x=1$ se $f'_e(1) = f'_d(1)$

- $f'_e(1) = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{\frac{x-1}{x^2-4x+3} - \overset{-1/2}{a}}{x-1} = \dfrac{0}{0}$

$= \dots = -1/4$

- $f'_d(1) = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{-\frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} - -\frac{1}{2}}{x-1} \overset{\dots}{=} -1/4$

f é dif. em $x=1$ $\quad f'(1) = -1/4$

23/4

3)

$$f' = \begin{cases} \left(\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}\right)' , & x<1 \\ \left(-\dfrac{1}{2} e^{\frac{x-1}{2}}\right)' , & x>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1(x^2-4x+3)-(x-1)(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} , & x<1 \\ -1/4 , & x=1 \\ -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} e^{\frac{x-1}{2}} , & x>1 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

$$f'_e(1) = f'_d(1) = -1/4$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

4) Eq. reta tangente a f em $x = b$ $\quad (b, f(b))$

$$y - f(b) = f'(b)(x-b)$$

$b=1$

$$f(1) = -\frac{1}{2} \; ; \; f'(1) = -1/4$$

Fica

$$y - \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow y = -\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$$

c) Monotonia e extremos

$$f' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x^2+2x-1}{(x^2-4x+3)^2} = 0 & , x<1 \\ \cancel{-\frac{1}{4} = 0} & , x=1 \\ \cancel{-\frac{1}{4} e^{\frac{x-1}{2}} = 0} & , x>1 \end{cases}$$

C.A.

$$\frac{-x^2+2x-1}{(x^2-4x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x-1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$ Não dá

Não tem zeros

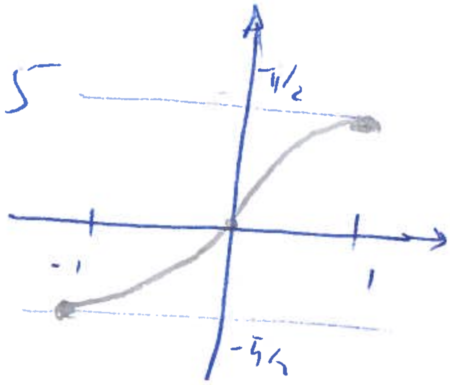
x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	
f		$\searrow$		$\searrow$	

f é sempre decrescente

23/11

arcsen x

① $f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - 5$



a) Domínio

$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ e } -1 \leq x \leq 1\}$

$= [-1, 1] \setminus \{0\}$

b) Uma função não definida no Domínio é contínua no seu domínio

c) $f(-1) = \frac{\arcsin(-1)}{-1} - 5 = \frac{-\pi/2}{-1} - 5 = \frac{\pi}{2} - 5$

$f(1/2) = \frac{\arcsin(1/2)}{1/2} - 5 = \frac{\pi/6}{1/2} - 5 = \frac{\pi}{3} - 5$

$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} - 5 = \frac{0}{0} - 5$

ind.

	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} \times \frac{\sin(x)}{\text{limitada}} = 0$$

$$\frac{1}{\ln(1+x)} \to 0$$

"infinitésimo × limitada ⇒ infinitésimo"

CA
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{R.C.}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

o limite é $1-5=-4$

d) f é prolongável por continuidade a $x=0$ se o limite existir $\lim_{x\to 0} f(x) = -4$

∴ é prolongável por continuidade a $x=0$

A função prolongada é $\tilde{f} = \begin{cases} \frac{\arcsin x}{x} - 5, & x \neq 0 \\ -4, & x=0 \end{cases}$

2,1/11

6