(Aula-5)

Lista 2 15. b)

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 - yx^4}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

- Continuidade.

(i) Para $(x,y) \neq (0,0)$. Fora da origem a função é contínua pois é a divisão de funções contínuas.

(ii) Para $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2 - yx^4}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\left(r^2\cos^2\theta\sin^2\theta - r^3\cos^4\theta\sin\theta\right)}{r^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2\cos^2\theta\sin^2\theta - r^3\cos^4\theta\sin\theta =$$

$$= 0 = g(0,0).$$

Logo g é também contínua em $(0,0)$.

• Diferenciabilidade.

(i) Para $(x,y) \neq (0,0)$ a função g possui derivadas parciais de 1ª ordem, o seu cálculo fica a cargo do aluno, e estas são contínuas, logo a função é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(ii) Para $(0,0)$.

Recorde-se que se g é diferenciável em $(0,0)$ então para qualquer $h=(h_1,h_2)$:

$$g(h_1,h_2) = g'_x(0,0)\,h_1 + g'_y(0,0)\,h_2 + \varepsilon\,\rho,$$

com $\rho = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$ e $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon = 0$.

• Estude-se primeiro a existência das derivadas parciais:

$$g'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$g'_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{g(0,k)-g(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

• Finalizemos agora o estudo da diferenciabilidade:

$$g(h_1,h_2) = \rho\,\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{h_2^2 h_1^2 - h_2 h_1^4}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}};$$

e como $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \varepsilon = 0$ a função é diferenciável em $(0,0)$.

Use coordenadas polares.

Lista 2 16. a)

O diferencial de $z = f(x,y)$ no ponto $a = (a_1, a_2)$, segundo o vetor $h = (h_1, h_2)$ é:

$$(df)_h(a) = f'_x(a)\,h_1 + f'_y(a)\,h_2 .$$

Neste caso: $z = 2x^2 + y^2 - 5x - 3y$, $a = (-2, 1)$ e $h = (0.1, -0.3)$.

$f'_x(x,y) = 4x - 5$, $f'_x(-2,1) = -13$;

$f'_y(x,y) = 2y - 3$, $f'_y(-2,1) = -1$.

Assim:

$$(df)_{(0.1,-0.3)}(-2,1) = -13(0.1) + (-1)(-0.3) =$$

$$= -\frac{13}{10} + \frac{3}{10} = 1,$$

Lista 2 18. a)

- $f(x,y) = 4x^2 + 3xy + \frac{x}{y^2}$.

Sabemos que:

- $f(a+h) \simeq f(a) + (df)_h(a) = f(a) + f'_x(a)h_1 + f'_y(a)h_2$.

Definindo $a = (1,1)$ e $h = (0.02, -0.04)$, obtêm-se a e h tais que:

$$a + h = (1.02, 0.96).$$

$f'_x(x,y) = 8x + 3y + \frac{1}{y^2}$, $f'_x(1,1) = 12$,

$f'_y(x,y) = 3x - \frac{2x}{y^3}$, $f'_y(1,1) = 1$.

Assim:

$$f(1.02, 0.96) \simeq f(1,1) + f'_x(1,1)(0.02) + f'_y(1,1)(-0,04)$$

$$= 8 + 12(0,02) + 1(-0,04) =$$

$$= 8 + \frac{24}{100} - \frac{4}{100} = 8 + \frac{1}{5} = 8,2.$$

Lista 3 12. a)

$$u = f(x,y) = 2x^2 - y^2, \quad \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}.$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x \arrow[r, dash] & t \\ u \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\ & y \arrow[r, dash] & t \end{tikzcd}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

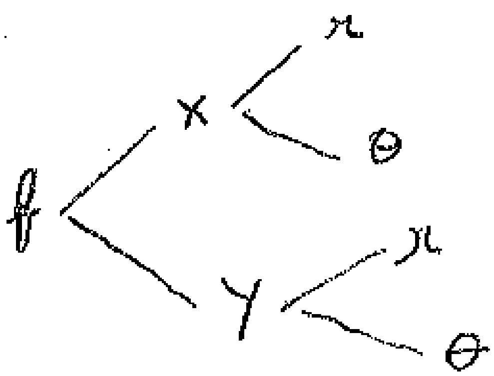
$$= 4x\cos t + (-2y)(-\sin t) =$$

$$= 4\sin t\cos t + 2\cos t\sin t =$$

$$= 6\sin t\cos t.$$

Lista 3 10)

$$f(x,y)=\frac{x+y}{xy}, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$



• $$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\theta+\left(-\frac{1}{y^2}\right)\sin\theta=$$

$$=-\left(\frac{\cos\theta}{r^2\cos^2\theta}+\frac{\sin\theta}{r^2\sin^2\theta}\right)=-\left(\frac{1}{r^2\cos\theta}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\right)$$

• $$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=$$

$$=-\frac{1}{x^2}(-r\sin\theta)-\frac{1}{y^2}(r\cos\theta)=$$

$$=\frac{\sin\theta}{r\cos^2\theta}-\frac{\cos\theta}{r\sin^2\theta}.$$

Lista 3 11)

- $g(x,y) = \left(e^{xy^2}, e^{x^2y}, xy\right)$;

- f é diferenciável, $f(1,1,0) = (1,0)$ e $f'(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

11. a) Como todas as derivadas parciais das funções coordenadas de g são contínuas g é diferenciável.

11. b) Recorde que:

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))\, g'(a).$$

- $g'(x,y) = \begin{bmatrix} y^2 e^{xy^2} & 2xy\, e^{xy^2} \\ 2xy\, e^{x^2y} & x^2 e^{x^2y} \\ y & x \end{bmatrix}$, $g'(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- $(g \circ f)'(1,1,0) = g'[f(1,1,0)]\, f'(1,1,0) =$

$$= g'(1,0)\, f'(1,1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- $(f \circ g)'(1,0) = f'[g(1,0)]\, g'(1,0) =$

$$= f'(1,1,0)\, g'(1,0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$