$\boxed{4\text{-}23}$ Para $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = xy^4 - e^{x+4y}$$

calcule o diferencial de 3ª ordem.

O diferencial de 3º de f num ponto arbitrário (x,y) segundo o vetor $h = (h_1, h_2)$ é dado por:

$$d_h^3 f(x,y) = f_h'''(x,y) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y) =$$

$$= h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} =$$

$$= -h_1 e^{x+4y} - 3h_1^2 h_2 \left(4e^{x+4y}\right) +$$

$$+ 3h_1 h_2^2 \left(12y^2 - 16e^{x+4y}\right) + h_2^3 \left(24xy - 64e^{x+4y}\right).$$

• Cálculos auxiliares:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^4 - e^{x+4y} \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{x+4y} \begin{cases} \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -e^{x+4y} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -4e^{x+4y} \end{cases} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4y^3 - 4e^{x+4y} \begin{cases} \dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -4e^{x+4y} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 12y^2 - 16e^{x+4y} \end{cases} \end{cases}$$

só falta calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$:

• $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4xy^3 - 4e^{x+4y}$, e

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y} = 12xy^2 - 16e^{x+4y}$

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 24xy - 64e^{x+4y}$ • Fim.

$\boxed{4\text{-}25}$ Determine, caso existam, os extremos da função:

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{16}.$$

- Primeiro passo: determinar os pontos críticos da função ou seja resolver o sistema:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{x}{12}, -\frac{y}{8}\right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto existe um único ponto crítico

$$(x,y) = (0,0).$$

• Segundo passo: classificar os pontos críticos.

Em primeiro lugar determina-se a matriz hessiana dos pontos críticos:

$$\mathcal{H}((x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Como a matriz hessiana é constante, obviamente: $\mathcal{H}((0,0)) = \begin{bmatrix} -1/12 & 0 \\ 0 & -1/8 \end{bmatrix}$.

Em segundo lugar determina-se a cadeia de menores principais:

$\Delta_1 = -\frac{1}{12}$ e $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{12} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{96}$, assim $f''_{\text{hess}}(0,0)$ é definida negativa, logo $(0,0)$ é ponto de máximo. Fim

$\boxed{4\text{-}26}$ Estude a existência de extremos livres das funções:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

1º) Determinar os pontos críticos:

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 6z = 0 \end{cases}.$$

Este sistema de equações lineares pode ser resolvido da forma usual, mas também podemos escrevê-lo como um sistema linear homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcule-se a Característica do matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} L_2 + \frac{1}{2}L_1 \to L_2 \\ L_3 - L_1 \to L_3 \end{cases} \qquad L_3 - \frac{4}{3}L_2 \to L_3$$

assim, como a Característica da matriz é 3, o sistema é possível e determinado, razão pela qual tem uma única solução, que corresponde também ao único ponto crítico de f,

$$(x, y, z) = (0,0,0)$$

2º Classificação do ponto crítico.

- $$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}_{(0,0,0)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- Cálculo da cadeia de menores principais:

$$\Delta_1 = 2 \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \ \text{e} \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \ ,$$

Como todos os menores principais são maiores do que zero, $H(0,0,0)$ é definida positiva e $f(0,0,0)$ é mínimo local.

Fim

$\boxed{4\text{-}28}$ Determine, caso existam, os extremos da função:

$$f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2.$$

- Pontos críticos:

$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow (4x, 2y, 8z) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0).$

- Classificação dos pontos críticos:

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = H(0,0,0).$$

cálculo da cadeia de menores principais:

$\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 48$,

logo a forma é definida positiva, pelo que $(0,0,0)$ é ponto de mínimo local.

Fim

$\boxed{4\text{-}30}$ Estude os extremos relativos de:

$\boxed{a)}$ $f(x,y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 5$

- Cálculo dos pontos críticos:

$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow (y+2,\, 2y+x+3) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2=0 \\ 2y+x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ -4+x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases},$

existe um ponto crítico $(x,y)=(1,-2)$

- Classificação do ponto crítico:

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = H(1,-2)$

Cadeia de menores principais:

$\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

assim a forma é indefinida,

logo $(1,-2)$ é ponto de sela.

$\boxed{30.b)}$ $g(x,y) = x^2 + xy - 2y - 2x - 3$

$\cdot \nabla g = \vec{0} \Leftrightarrow (2x+y-2,\ x-2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+y-2=0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=2 \end{cases}$

temos um ponto crítico $(x,y) = (2,-2)$.

Classificação:

$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = H(2,-2)$

Cadeia de menores principais:

$\Delta_1 = 2$ e $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$,

logo a forma é indefinida,

pelo que $(2,-2)$ é ponto de sela.

$\boxed{30.\text{e})}$ $h(x,y) = x^2 + y - e^y$

- Pontos críticos:

$\nabla h = \vec{0} \Leftrightarrow (2x, 1-e^y) = (0,0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1 - e^y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

temos um ponto crítico $(x,y) = (0,0)$.

- Classificação dos pontos críticos:

- $$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -e^y \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Cadeia de menores principais

$$\Delta_1 = 2 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

pelo que a forma é indefinida e $(0,0)$ é ponto de sela.

$\boxed{30.d)}$ $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 2x + 10$

$\nabla f = \vec{0} \Leftrightarrow (2x+2y+2, 2x+2y+2) = (0,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 - x,$

assim os pontos críticos são da forma:

$(x, -1-x)$, com $x \in \mathbb{R}$.

• classificação dos pontos críticos:

$$\mathcal{H}((x,y)) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \mathcal{H}(x, -1, -x)$$

Cálculo da cadeia de menores principais

$$\Delta_1 = 2 \quad e \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

pelo que a forma é

<u>semi definida</u> positiva.

- Temos de calcular as direções singulares, isto é, resolver a equação

$$f''_{\text{vers } h}(x, -1-x) = 0.$$

$$f''_{\text{vers } h}(x, -1-x) = H^T \mathcal{H}((x, -1-x)) H =$$

$$= \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(h_1+h_2) & 2(h_1+h_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2(h_1^2 + h_1h_2) + 2(h_1h_2 + h_2^2) = 2h_1^2 + 4h_1h_2 + 2h_2^2 =$$

$$= 2(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2) = 2(h_1+h_2)^2;$$

Assim

$$f''_{\text{vers } h}(x, -1-x) = 0 \Leftrightarrow 2(h_1+h_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h_1 = -h_2.$$

Temos, assim, duas direções singulares

$$u^1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } u^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Finalmente, encontre-se o primeiro m onde $f^{(m)}_{vers\, h}(x,-1-x)$ não se anula nas direções singulares.

$$f^{(3)}_{vers\, h}(x,-1-x) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,-1-x) =$$

$$= h_1^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + h_1^2 h_2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + h_1 h_2^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} + h_2^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0,$$

porque: $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = 0$

e $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0$.

Dos cálculos anteriores, também se conclui que todos os $f^{(m)}_{vers\, h}(x,-1-x)$ com $m \geq 3$ anulam-se, logo não se pode concluir nada.

$\boxed{4-29}$ Para a função $f(x,y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 1$,

$\boxed{29.a)}$ prove que qualquer ponto da forma (x,x) ou $(x,-x)$ é um ponto estacionário;

- Pontos críticos ou estacionários:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4xy^2 = 0 \\ 4y^3 - 4x^2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2-y^2) = 0 \\ 4y(y^2-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y^2 = x^2 \\ y^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm x,$$

portanto os pontos estacionários são da forma:

(x,x) e $(x,-x)$.

$\boxed{29.b}$ Determine as direções singulares.

Vou fazer os cálculos apenas para os pontos da forma (x,x), os restantes cálculos ficam a cargo do aluno.

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 12x^2-4y^2 & -8xy \\ -8xy & 12y^2-4x^2 \end{bmatrix},$$

assim:

$$H(x,x)=\begin{bmatrix} 8x^2 & -8x^2 \\ -8x^2 & 8x^2 \end{bmatrix} = 8x^2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$f^{(2)}_{\text{vers } h}(x,x) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} 8x^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} =$$

$$= 8x^2(h_1-h_2)^2, \text{ pelo que}$$

$$f^{(2)}_{\text{vers } h}(x,x)=0 \Leftrightarrow 8x^2(h_1-h_2)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$x=0 \vee (h_1-h_2)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee h_1=h_2,$$

temos 2 direções $u^1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $u^2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$\boxed{29.c)}$ Mostre que todas as derivadas dirigidas se anulam segundo as direções singulares.

$$f^{(3)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(x,x) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,x) + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,x) +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,x) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,x) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{8}\left[24x + 3(-8x) + 3(-8x) + 24x\right] = 0$$

cálculos auxiliares

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = 24x \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,x) = 24x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = -8y \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,x) = -8x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,y) = -8x \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x,x) = -8x$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y) = 24y \quad , \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,x) = 24x$$

$$\bullet\ f^{(4)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(x,x)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4\left[\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,x)+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(x,x)+\right.$$

$$\left.+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(x,x)+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,x)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[24+6(-8)+24\right]=0$$

Cálculos auxiliares

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(x,y)=24 \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}(x,y)=0$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}(x,y)=24.$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}=-8$$

$$\bullet\ f^{(m)}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(x,x)=0,\ \text{para } m>4,$$

porque todas as derivadas parciais de ordem superior a 4 são nulas.

A direção u^2 fica a cargo do aluno.

29.d) Prove que 1 é mínimo absoluto de f.

Usando a sugestão:

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)^2 + 1.$$

Portanto $f(x,y) \geq 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

e por outro lado

$$f(0,0) = 1,$$

assim 1 é mínimo absoluto de f.

Fim