Introdução à Probabilidade e Estatística

Universidade de Évora

Departamento de Matemática

Ano lectivo 2018/19

Ana Isabel Santos

Variáveis e Vetores Aleatórios

Definição de variável aleatória

Definição 1: Uma **variável aleatória** (v. a.), X, é uma função que associa um número real, $X(w)$, a cada elemento do espaço de resultados, w, ou seja,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto X(w) = x \end{aligned}$$

- Uma **variável aleatória** é **discreta** se toma um número finito ou infinito numerável de valores;

- Uma **variável aleatória** é **contínua** se toma valores num certo intervalo.

Função massa de probabilidade

Definição 2: Chama-se **função massa de probabilidade** (f.m.p.) de uma variável aleatória X, e denota-se por $f(x)$, à função que a cada $x \in D$ faz corresponder a probabilidade da variável aleatória X tomar esse valor, isto é,

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x) & \text{se } x \in D, \\ 0 & \text{se } x \notin D. \end{cases}$$

Propriedades da função massa de probabilidade:

- $0 \leq f(x_i) \leq 1, \;\; \text{para qualquer } x_i \in D;$
- $\sum_{x_i \in D} f(x_i) = 1.$

Função de distribuição

Definição 3: Chama-se **função de distribuição** de uma v. a. X e denota-se por $F(x)$ à função definida por

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i).$$

Propriedades da função de distribuição

Seja $F(x)$ uma função de distribuição e $x_1, x_2 \in D$ tais que $x_1 < x_2$, então

$i)$ $0 \leq F(x_1) \leq 1;$

$ii)$ $F(x_1) \leq F(x_2);$

$iii)$ $P(X > x_1) = 1 - P(X \leq x_1) \Leftrightarrow P(X > x_1) = 1 - F(x_1);$

$iii)$ $P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1).$

Parâmetros de variáveis aleatória: Média ou valor Esperado

Definição 4: Seja X uma v. a. com função massa de probabilidade $f(x)$. A **média** ou **valor esperado** de X, quando existe, define-se por:

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in D_x} x_i P(X = x_i) = \sum_{x_i \in D_x} x_i f(x_i).$$

Nota: A este parâmetro também chamamos *momento de ordem 1 relativamente à origem*.

Parâmetros de variáveis aleatória

Propriedades do valor esperado: Sejam X e Y duas v. a.'s e k uma constante real. Então:

1. $E(k) = k$;
2. $E(kX) = k\,E(X)$;
3. $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$;
4. Se X e Y são independentes, então $E(XY) = E(X).E(Y)$.

Parâmetros de variáveis aleatória: Variância e Desvio padrão

Definição 5: Seja X uma v. a. com função massa de probabilidade $f(x)$. A **variância** de X, quando existe, define-se por:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{x_i \in D_x} x_i^2 f(x_i) - \mu^2.$$

O **desvio padrão** da v. a. X, quando existe, define-se por: $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Nota: À variância também se chama *momento de ordem 2 em relação à média*.

Parâmetros de variáveis aleatória

Propriedades da variância: Sejam X e Y duas v. a.'s e k uma constante real.

Então:

1. $Var(k) = 0$;
2. $Var(k\,X) = k^2\,Var(X)$;
3. $Var(X + k) = Var(X)$;
4. $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2\,Cov(X,Y)$.

Vetores aleatórios

A $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ chama-se **vetor aleatório multivariado**.

No caso particular em que $k = 2$ tem-se que $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ representa o **vetor aleatório bivariado** ou o **par aleatório** ou a **v. a. bidimensional**.

Uma v. a. (X, Y) bidimensional diz-se **discreta** se e só se X e Y forem v. a. discretas.

Função de probabilidade conjunta

Definição 6: A **função de probabilidade conjunta** de uma v. a. (X, Y), que se denota por $f(x,y)$, é a função que designa a probabilidade dessa variável tomar cada um dos valores do seu domínio, $D \subset \mathbb{R}^2$, isto é,

$$f(x,y) = P(X = x, Y = y).$$

Propriedades da função de probabilidade conjunta:

- $0 \leq f(x,y) \leq 1, \ \text{ para qualquer } (x,y) \in D;$

- $\displaystyle\sum_{x \in D_x} \sum_{y \in D_y} f(x,y) = 1.$

Função de probabilidade marginal

Definição 7: Considere-se uma v. a. $(X,\ Y)$ discreta, com função de probabilidade conjunta $f(x,y)$.

A **função de probabilidade marginal,** $f_X(x)$, da v. a. discreta X é dada por

$$f_X(x) = P(X = x, -\infty < Y < +\infty) = \sum_{y \in D_Y} f(x,y), \quad x \text{ fixo.}$$

A **função de probabilidade marginal,** $f_Y(y)$, da v. a. discreta Y é dada por

$$f_Y(y) = P(-\infty < X < +\infty, Y = y) = \sum_{x \in D_X} f(x,y), \quad y \text{ fixo.}$$

Função de probabilidade condicionada

Definição 8: Considere-se uma v. a. $(X,\ Y)$ discreta, com função de probabilidade conjunta $f(x,y)$.

A **função de probabilidade de X condicionada a** $\{Y=y\}$ é dada por

$$f_{X|Y=y}(x) = P(X=x|Y=y) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

A **função de probabilidade de Y condicionada a** $\{X=x\}$ é dada por

$$f_{Y|X=x}(y) = P(Y=y|X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}.$$

Independência de variáveis aleatórias

Definição 9: Dada uma v. a. bidimensional $(X,\ Y)$, diz-se que X e Y **são independentes** se e só se

$$f(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y), \qquad \forall x \in D_X, \forall y \in D_Y.$$

Consequências:

- $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
- $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

Covariância

Definição 10: Seja (X, Y) uma v. a. bidimensional, com função de probabilidade conjunta $f(x,y)$.

A **covariância** entre X e Y, $Cov(X,Y)$ ou σ_{XY}, quando existe, define-se por

$$Cov(X,Y) = \sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = E(XY) - E(X)E(Y),$$

onde

$$E(XY) = \sum_{x \in D_x} \sum_{y \in D_y} xy\, f(x,y),$$

e avalia a influência que o afastamento de X, em relação à sua média, tem sobre o afastamento de Y à sua média.

Covariância

Propriedades da covariância:

Sejam X e Y duas v. a.'s e a, b, c e d constantes reais.

- Se X e Y são duas v. a.'s independentes, então $Cov(X,Y) = 0.$
- O **recíproco não é verdadeiro.** O facto da covariância ser nula não implica que X e Y sejam independentes, pois pode existir uma relação não linear entre as variáveis.
- $Cov(X,X) = Var(X);$
- $Cov(aX+b, cY+d) = acCov(X,Y).$

Coeficiente de correlação linear

Definição 11: Seja (X, Y) uma v. a. bidimensional, com função de probabilidade conjunta $f(x,y)$. A **correlação** entre X e Y, ρ_{XY}, quando existe, define-se por

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Propriedades do coeficiente de correlação:

- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1;$
- Se X e Y são duas v. a.'s independentes, então $\rho_{XY} = 0.$