Fractales attractives

Quel lien entre la suite logistique et la génération de fractales ?

Léo Colombaro

Nous nous proposons dans cette étude de comprendre les mécanismes de la suite logistique ainsi qu'une notion qui lui est étroitement liée, les attracteurs. Outre certains de ces derniers considérés comme « étranges » par leur aspect, leurs propriétés sont particulièrement intéressantes lors de leur représentation graphique.

1 Suite logistique

A Définition et notions préliminaires

Pour commencer, on prend selon la définition de la suite logistique par récurrence, $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$, où l'on prend

- $\mu \in [0,4]$, réel nommé le curseur
- $x_0 \in]0,1[$, réel nommé le graine

B Modèle continu

On préfèrera rapidement se ramener à la fonction qui est associée à cette suite, puisque qu'elle permet une étude plus poussée, notamment grâce aux ressources mathématiques d'analyse sur une fonction continue et dérivable.

C Étude comportementale selon le curseur

La particularité de cette suite est son comportement selon μ, d'où l'on tire par une étude de cas des valeurs particulières.

D Théorème fondamental

Il est alors nécessaire de définir le théorème qui nous permet de caractériser le comportement de la suite au voisinage d'un point fixe, c'est-à-dire s'il est attractif ou répulsif. La démonstration se repose sur l'inégalité des accroissements finis.

2 Attracteurs

A Définition

Par définition, c'est un réel dont s'approchent indéfiniment une infinité de valeurs d'une suite. En application à la suite logistique, on détermine alors des cycles de récurrence.

B *Itérés de f associée à la suite logistique*

Ces derniers cycles mettent en avant des propriétés sur l'itération de la fonction (i.e. sur k avec $f^k = f \circ \ldots \circ f$), puisque les valeurs des abscisses des intersections entre ces cycles et la courbe ne sont rien d'autre que les abscisses des points fixes de l'itération de f suivante.

C *Attracteurs étranges*

On peut aussi chercher à augmenter de dimension, c'est-à-dire prendre la fonction f sur deux (ou plus) paramètres. On peut alors obtenir des représentations originales telles que l'attracteur de Hénon.

3 FRACTALES

A *Notions*

On défini grossièrement une fractale en tant qu'objet mathématique dont la création ou la forme ne trouve ses règles que dans l'irrégularité ou la fragmentation.

B *Applications*

On présente alors un programme JavaScript qui met en place la génération de la représentation de la fractale de Mandlebrot.

RÉFÉRENCES

- **Daniel Perrin**, *La suite logistique et le chaos*, IREM, 2008
- **Douglas Hofstadter**, *Jeux Mathématiques*, Pour la Science, 1982
- **Elmer G. Wiens**, *Nonlinear Dynamics*, www.egwald.ca
- **Mitchell Feigenbaum**, *Universal behavior in nonlinear systems*, Los Alamos Science, 1980
- **Robert Ferréol**, *Construire des fractals grâce aux AFC*, Tangente, 2004
- **Elisabeth Busser**, *Excursion au pays des attracteurs étranges*