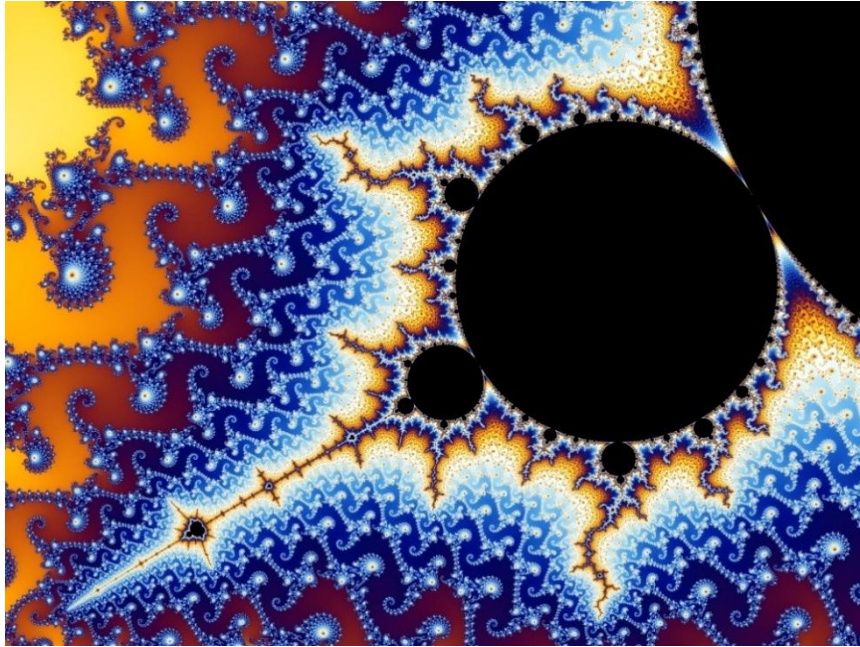


RAPPORT D'ÉTUDE

SUITES LOGISTIQUES

ENSEMBLES DE JULIA ET DE MANDELBROT



Présenté par

A.KADDOUR

M.VALLEYE

F.CORDIER

INTRODUCTION

Le but de notre étude consiste à mettre au point des algorithmes représentant les suites logistiques, les ensembles de Julia et celui de Mandelbrot. Ces concepts mathématiques sont plus couramment classés dans le domaine des suites. Nous verrons que selon les valeurs données (conditions initiales et constantes), ces suites seront convergentes, oscillantes ou même chaotiques. Ces suites donnent des graphiques remarquables (en plusieurs dimensions) que l'on définit comme ensembles. On abordera alors le sujet des fractales, des figures géométriques complexes qui se répètent indéfiniment dans l'espace. Elles apparaissent dans la vie quotidienne, peuvent être très utiles dans certains domaines et ont un rapport avec les ensembles de Julia et de Mandelbrot. Cette étude comporte trois parties :

- I. Les suites logistiques
- II. L'ensemble de Mandelbrot
- III. Les ensembles de Julia

Nous étudierons les concepts mathématiques de ces suites et nous illustrerons avec quelques exemples les comportements de celles-ci. Ensuite, nous implémenterons les algorithmes permettant de représenter ces suites, afin d'étudier leur comportement mathématique et graphique, en utilisant Scilab.

Les fractales sont utilisées pour décrire des objets irréguliers ou fragmentés. Elles ont été introduites en 1974 par Mandelbrot et suivent des règles déterministes. Elles incluent les ensembles de Julia qui se répètent un nombre indéfini de fois et de plus en plus petits, tout en conservant leurs motifs et leur proportion. Les structures fractales sont dites « auto-similaires », la partie est identique au tout.

Nous pouvons les retrouver dans différents domaines et parfois en tirer une grande utilité. Par exemple, dans le domaine de l'informatique, elles sont utilisées dans la compression d'images. Les fractales IFS (Systèmes de Fonctions Itérées) sont obtenues à l'aide de formules mathématiques répétitives. Celles-ci sont utilisées pour décrire des paysages naturels, des nuages, des plantes avec réalisme. Pour cela il faut repérer les parties similaires dans l'image (autosimilarité). Ainsi le poids de l'image sera réduit. Ce procédé est employé dans les jeux-vidéos ou au cinéma pour générer des images de synthèse.

Comment obtenir des structures aussi complexes que les fractales avec des algorithmes simples ?

SUITES LOGISTIQUES

Historique :

Cette suite a été popularisée en 1976, par le biologiste Robert May. Cette suite répond au modèle de Verhulst, en étant sa solution en temps discret. Ce modèle concerne la dynamique des populations et est un modèle de croissance proposé vers 1840.

Principe :

Une suite logistique est une suite particulière, dont la récurrence n'est pas linéaire. Sa relation de récurrence est donnée par :

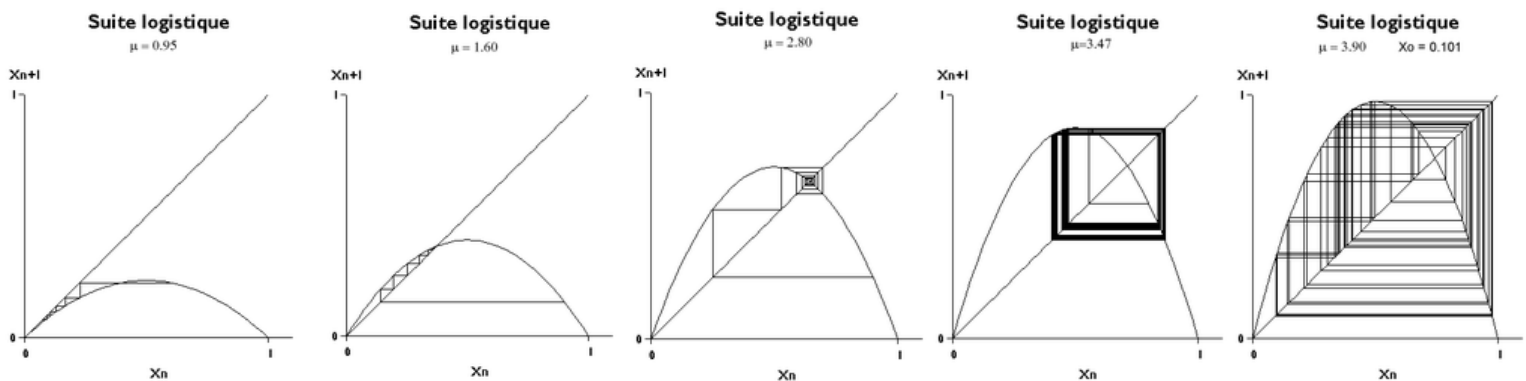
$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

La suite donnée se comporte différemment selon la valeur de μ :

- Si $0 \leq \mu \leq 1$ alors x_n tend vers 0.
- Si $1 \leq \mu \leq 2$ alors x_n tend vers $(\mu-1)/\mu$.
- Si $2 \leq \mu \leq 3$ alors x_n tend vers $(\mu-1)/\mu$ en aillant oscillé autour avant.
- Si $3 \leq \mu \leq 3,57$ alors la suite oscille entre plusieurs valeurs (puissances de 2), le nombre de valeurs croit plus μ est grand.
- Si $\mu = 3,57$ le chaos s'installe et les résultats diffèrent selon la condition initiale.
- Si $\mu > 4$, la suite diverge pour presque toutes les conditions initiales.

Les critères de convergence sont donc donnés par μ .

Exemples :



Graphes de suites logistiques, où μ varie entre 0 et 4

Ces différents graphes nous donnent le comportement de la suite en fonction de la valeur de μ . Nous pouvons observer différents cas où l'on a une convergence sans oscillations, une convergence avec oscillations, et une divergence de la suite (suite chaotique) n'admettant tout simplement aucune limite. La condition initiale X_0 est l'effectif de population initial (compris entre 0 et 1). Si la population est à son maximum, X sera égal à 1, si l'espèce meurt, X sera égal à 0.

Algorithme:

Le but étant de modéliser et visualiser graphiquement le comportement de ces suites, nous avons utilisé le code ci-dessous. Une suite logistique contient deux paramètres initiaux : la constante μ , qui donne le comportement de la suite et la condition initiale X_0 .

i) Programmation de la suite logistique en Scilab

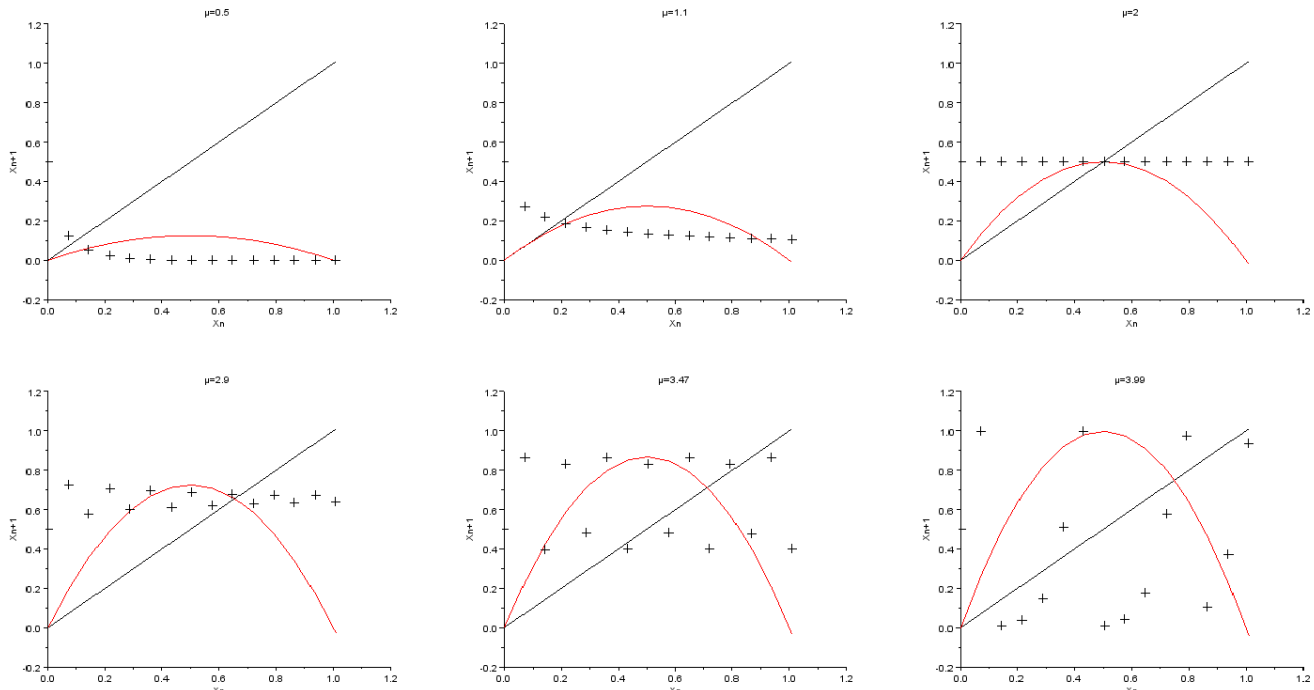
Version (For)

```
function [x]=suiteLogistique(mu,x1,n)
... x(1)=x1; ... //condition initiale-x1=x(0)
... i=2; ...
... for i=2:n ... //On calcule itérativement x2,x3,...,xn
... x(i)=mu*x(i-1)*(1-x(i-1));
... end;
... return x; ... //Retourne un vecteur contenant x1,x2,...,xn
endfunction
```

Cet algorithme est de complexité $O(n)$ car on effectue une boucle for pour n opérations simples. En entrée nous précisons les conditions initiales, et en sortie ressort un vecteur qui contient les n premiers éléments de la suite logistique.

ii) Graphes obtenus expérimentalement pour différentes valeurs de μ :

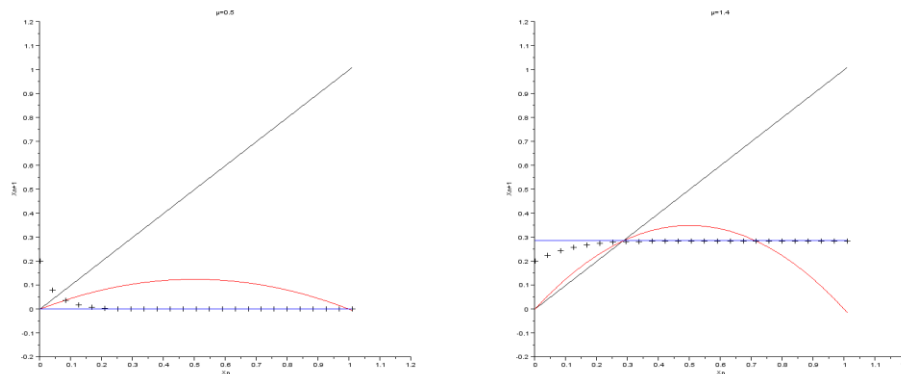
En fixant l'effectif de population initial à $1/2$, nous faisons varier la valeur de μ et nous pouvons observer le comportement de la suite logistique (convergence, divergence, oscillations).



Graphes des limites de X_n quand $X_0=1/2$

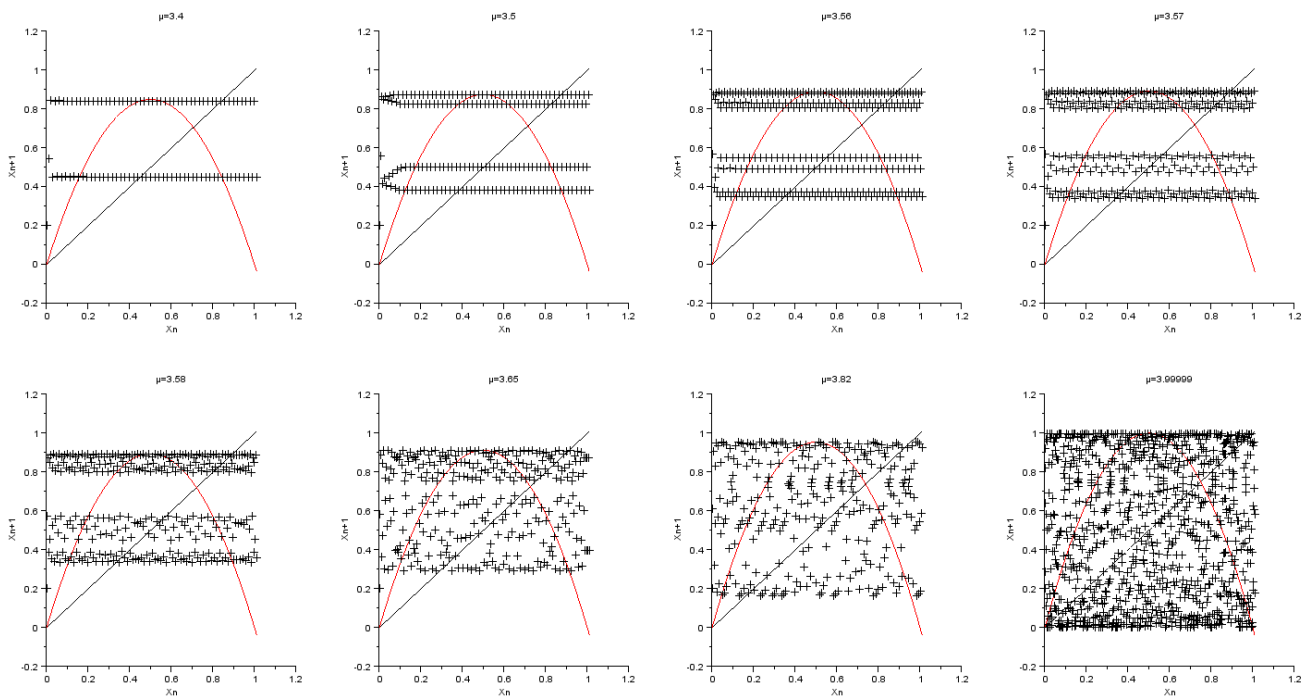
Nous avons fait de même pour d'autres valeurs de population initiale $X_0 \in [0 ; 1]$ et nous pouvons voir que le comportement aux limites dépend de la valeur de μ .

Comme il l'était détaillé dans la partie théorique, nous observons bien que pour une valeur de μ comprise dans un certain intervalle, la suite va avoir un comportement spécifique.



Graphes des limites de X_n pour $X_0=0.2$ (convergence simple)

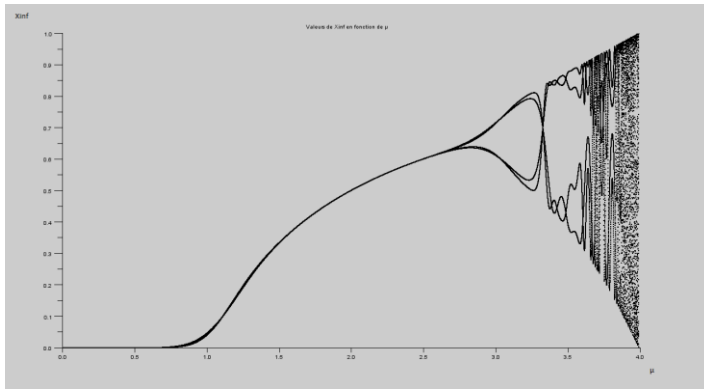
Les asymptotes respectives (en bleu) sont 0 et $(\mu-1)/\mu$. Pour μ compris entre 0 et 1, on observe une extinction de la population. Pour μ compris entre 1 et 3, la suite converge vers $(\mu-1)/\mu$, simplement pour μ compris entre 1 et 2 et avec oscillations quand μ est compris entre 2 et 3.



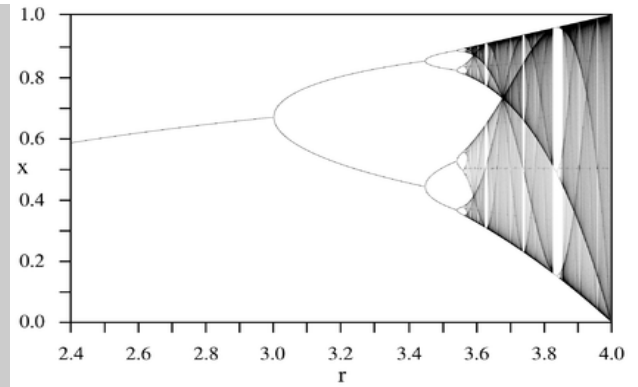
Graphes des limites de X_n pour $X_0=0.2$ (oscillations et chaos)

On observe que pour μ compris entre 3 et 3.57, la population oscille entre plusieurs valeurs puissances de deux (16 valeurs pour 3.57) et tend vers l'infini à partir de 3.57. Pour μ supérieur à 3.57 le chaos s'installe : la population oscille entre un nombre de valeurs infinies et le graphe dépend des conditions initiales. Pour des valeurs supérieures à 4, la population dépasse l'intervalle $[0 ; 1]$ et diverge complètement (valeurs infinies sur Scilab).

iii) Graphe des limites de suites en fonction de μ :



A gauche : Graphes des limites X_{inf} pour $X_0=0.5$ en fonction de μ (160.000 points)

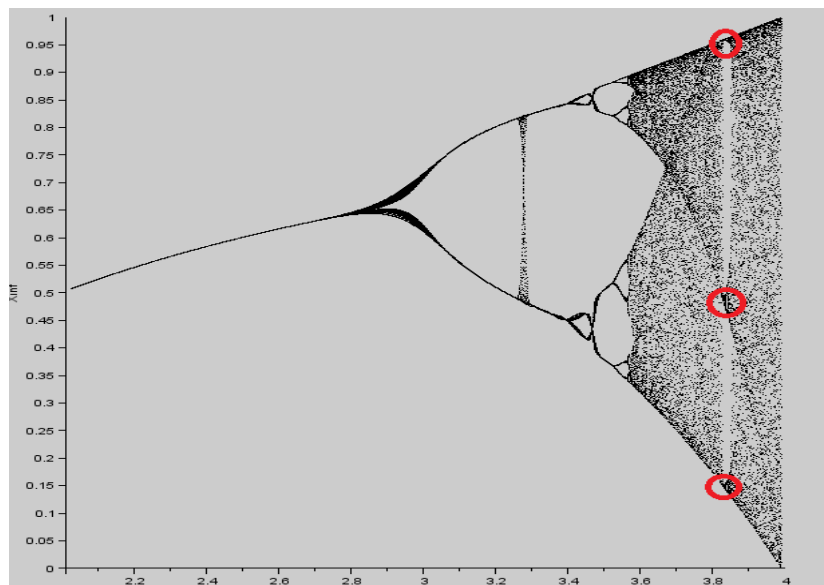


A droite : Diagramme de bifurcation avec $r=\mu$ (Wikipédia)

Ces graphes donnent le comportement des suites quand n tend vers l'infini (ici $n=20-26$, de sorte à observer la divergence). L'algorithme utilisé est très coûteux en nombre de calculs (processeur) et en mémoire. Pour dessiner ce graphe, il a fallu plusieurs millions d'opérations (ordre de grandeur de 10).

Nous observons que de légères variations de la population initiale X_0 entraînent des résultats très différents pour des valeurs de μ comprises entre 3 et 4. Le comportement que l'on observe à partir de $\mu=3$ est oscillatoire et plus μ croît, plus on observe d'oscillations, jusqu'à la valeur $\mu=3.57$ où l'on observe le chaos (la répartition des limites X_∞ est dense dans le graphe). Nous remarquons que le nombre de valeurs entre lesquelles X_∞ oscille pour des valeurs de μ entre 3 et 3.57 est une puissance de deux, avec cette puissance qui augmente de plus en plus en s'approchant de ~ 3.57 .

Notons tout de même que pour certaines valeurs de μ entre 3.57 et 4 la suite redevient oscillatoire : nous pouvons observer une « zone de vide » dans le graphe pour une valeur comprise dans un intervalle proche de 3.82, ou plutôt un phénomène d'oscillation entre 3 valeurs (entourées en rouge).



Graphes des limites X_∞ pour $X_0=0.99$, valeur remarquable $\mu=3.82$

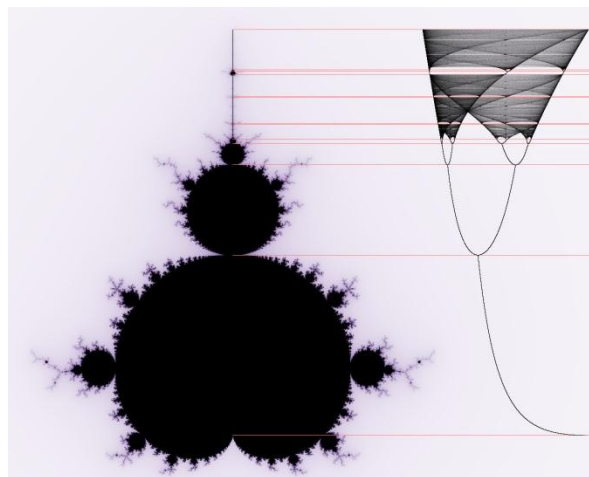
ENSEMBLES DE MANDELBROT

Historique :

L'ensemble de Mandelbrot a été découvert par Pierre Fatou et Gaston Julia peu avant la Première Guerre Mondiale dans le cadre de la dynamique complexe. Le nom de cet ensemble hérite de Benoît Mandelbrot, qui réalisa des représentations de cet ensemble quand il travaillait chez IBM. Cet ensemble a été représenté la première fois en 1978. D'autres mathématiciens ont apporté une contribution significative à l'étude de cet ensemble.

Principe :

L'ensemble de Mandelbrot est une fractale, définie par la suite récurrente où la condition initiale z_0 est nulle et $z_{n+1} = z_n^2 + C$. L'ensemble des points C du plan complexe tel que la suite ne tend pas vers l'infini en module, est l'ensemble de Mandelbrot. Cet ensemble est symétrique par rapport à l'axe réel et inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon 2. Cet ensemble possède des liens avec les suites logistiques et les ensembles de Julia (que nous aborderons ensuite). En posant $c = \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$, avec $\lambda = \mu$ (se référer à la partie sur les suites logistiques), nous pouvons mettre en correspondance le diagramme de bifurcation de l'équation logistique et l'ensemble de Mandelbrot, en conservant l'échelle à 1/1.



Comparaison entre l'ensemble de Mandelbrot et le diagramme de bifurcation de l'équation logistique

Algorithme :

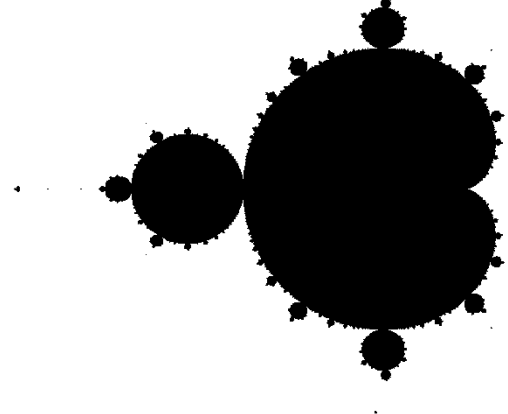
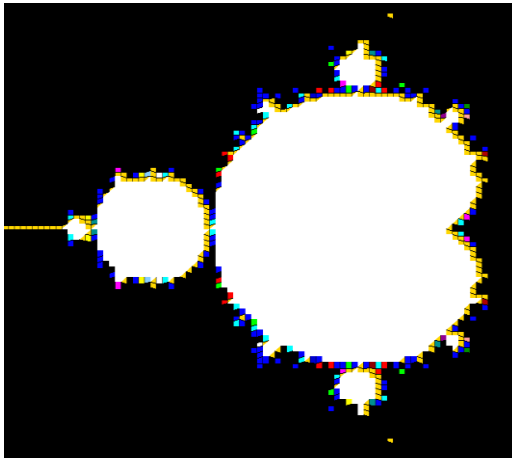
Ici, le but est de fixer la condition initiale z_0 et faire varier la valeur de C dans le plan complexe, en vérifiant à chaque fois si la suite (Z_n) converge ou non, et en traçant l'ensemble des points C qui font converger la suite donnée. L'ensemble qu'on visualise est alors l'ensemble de Mandelbrot.

i) Code

```
function [Z]=mandelnb()
p=120; // nombre de points
x1=-2;
x2=1;
y1=-1.5;
y2=1.5; // abscisse et ordonnées min et max
pasx=(x2-x1)/p;
pasy=(y2-y1)/p;
Z=zeros(p,p); //matrice nulle
for ligne = 1 : p
    for colonne =1 : p
        c=x1+(ligne-1)*pasx+(y1+(colonne-1)*pasy)*%i; // on fait varier C
        n=0;
        y=0; // condition initiale Z0
        while ((abs(y)<2)&(n<255))
            y=y^2+c; // Suite réccurente
            n=n+0.2;
        end
        Z(p+1-colonne, ligne)=n; // On remplit la matrice Z
    end
end
return Z;
endfunction

X=mandelnb();
surf(X);
```

ii) Visualisation de l'ensemble de Mandelbrot (à gauche Scilab, à droite Wikipédia



ENSEMBLES DE JULIA

Historique :

Les ensembles de Julia ont été définis dans le même contexte que les ensembles de Fatou, qui sont tous deux complémentaires. Respectivement définis vers 1920 par les deux mathématiciens Gaston Julia et Pierre Joseph Louis Fatou, ces ensembles forment des ensembles fractals.

Principe :

Soient deux nombres complexes C et z_0 . On définit la suite (z_n) par la relation récurrente suivante:

$$z_{n+1} = z_n^2 + C$$

On a alors pour une valeur fixée de C un ensemble de conditions initiales z_0 pour lesquelles la suite (z_n) est bornée. Cet ensemble de valeurs est alors appelé comme ensemble de Julia rempli. Toute condition initiale z_0 appartenant à cet ensemble fait converger la suite donnée. Les ensembles de Julia sont symétriques par rapport au point 0, et vérifient les théorèmes de Pierre Fatou. En fonction de la valeur de C nous obtenons différents ensembles : connexes et non connexes.

Algorithme :

i) Code :

```
function [X]=julia(c)
    p=120; // nombre de points
    x0 = -1.8; // abscisse min
    x1 = 1.8; // abscisse max
    y0 = -1.8; // ordonnée min
    y1 = 1.8; // ordonnée max
    pasx = (x1-x0)/p; // échelle
    pasy = (y1-y0)/p;
    X=zeros(p,p); // initialisation de la matrice à 0
    for i = 1:p
        for j = 1:p
            x = x0 + (i-1)*pasx + (y0 + (j-1)*pasy)*%i; //création de
Z0
            n = 0;
            y = x;
            while ((abs(y) < 2)&(n < 256)) // convergence possible
                y = y^2+c; //formule de la suite
                n = n+5; // pour les couleurs
            end
            X(p+1-j,i) = n; // on associe une couleur à un point
        end
    end
    return X;
endfunction

c1 = -0.038088 + 0.9754633*%i; // on fixe C
X1=julia(c1);
surf(X1); // on affiche un graphe
```

L'algorithme utilisé fonctionne presque sur le même principe que celui de Mandelbrot. Ici, le but est de fixer la constante C (complexe) et de faire varier la valeur de z_0 dans le plan complexe afin de déterminer l'ensemble de Julia associé à C . Si la suite donnée converge pour la valeur de z_0 et de C , nous dessinons ce point sur le graphe. Pour cela on stocke toutes les valeurs de z_0 telles que la suite converge dans une matrice. On se sert ensuite de la fonction surf, afin de visualiser l'ensemble de Julia avec un graphe en 3D.

Trois types d'ensemble de Julia :

Si on prend un point C appartenant à l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia associé : $J(C)$ contient le point $O(0,0)$. On dit alors que l'ensemble de Julia de C est connexe.

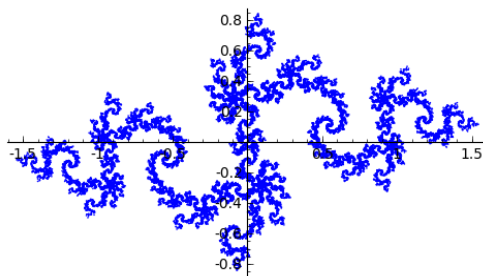
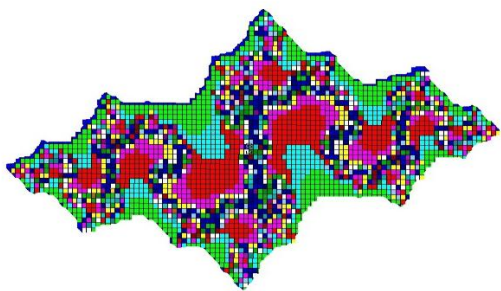
Dans le cas contraire, c'est-à-dire si le point le C n'appartient pas à l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia visible est dit poussière de Cantor.

En prenant un point à la frontière de l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia résultant aura une structure dendritique : connexe mais d'intérieur vide (par exemple $C=i$).

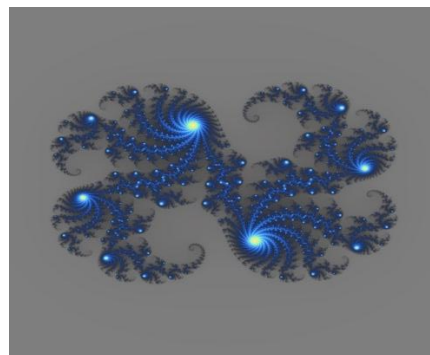
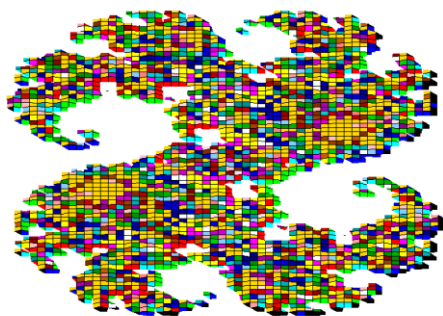
Nous pouvons dire que l'ensemble de Mandelbrot permet de « cartographier » les ensembles de Julia connexes et non connexes. De plus, l'ensemble de Julia de C et celui de son conjugué sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

ii) Visualisation des ensembles de Julia (à gauche Scilab, à droite sources Internet) :

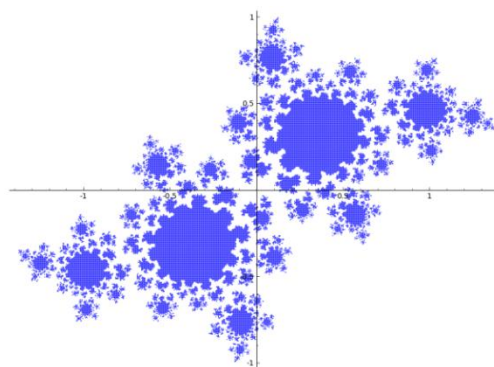
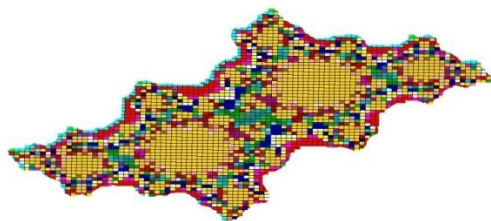
- Pour $C = -0.835 - 0.2321i$: ensemble de Julia connexe



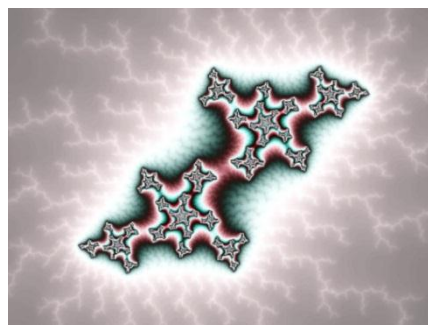
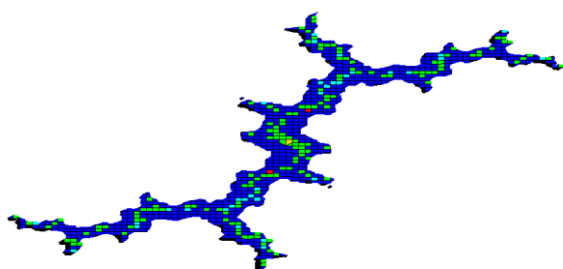
- Pour $C = 0.235 + 0.013i$: ensemble de Julia connexe



- Pour $c = -0.4 - 0.6i$: ensemble de Julia dit poussière de Cantor



- Pour $c = -0.181 - 0.667i$: structure dendritique : connexe mais d'intérieur vide



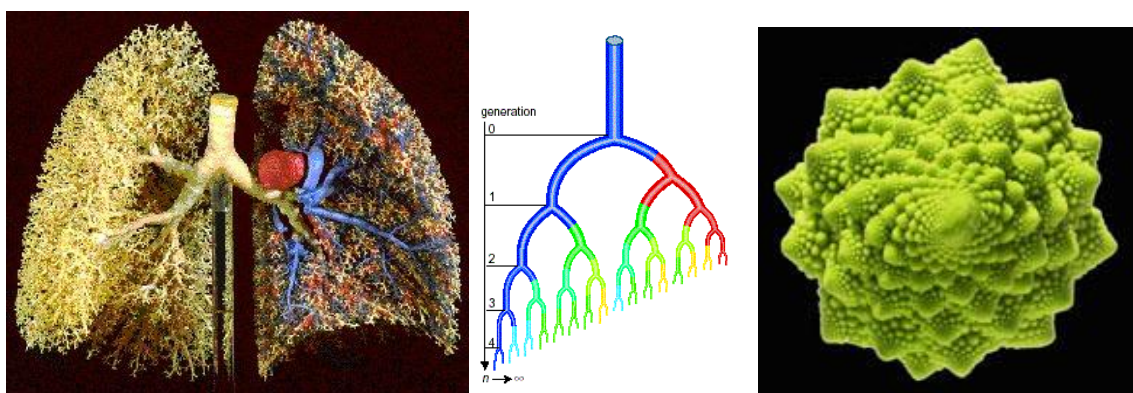
CONCLUSION

Notre étude sur les suites logistiques, les ensembles de Julia et de Mandelbrot nous a conduit à modéliser des notions mathématiques complexes que nous n'avions pas encore abordé de cette manière, et qui ont été découvertes que très récemment dans l'histoire des mathématiques. Malgré leur complexité et leurs différences, tant dans la forme que dans l'utilisation, ces suites et ces ensembles ont des particularités remarquables et sont très liés.

Nous avons étudié les suites logistiques, qui initialement avaient pour but la modélisation de la croissance d'une population, s'opposant au modèle de Malthus pour une croissance exponentielle. Ici nous avons pu constater que pour différentes valeurs de μ , nous pouvions obtenir une suite convergente, oscillante entre plusieurs valeurs, ou même chaotique où l'effectif de population dépendait fortement des conditions initiales.

Ensuite, nous nous sommes intéressés aux ensembles de Julia et de Mandelbrot. Ces modélisations donnent des fractales, des figures de motifs plus ou moins simples et qui se répètent un nombre indéfini de fois et de structures invariantes par changement d'échelles. Ainsi, en utilisant les suites récurrentes complexes nous pouvons générer ces figures géométriques généralement très esthétiques.

Ainsi, par volonté d'améliorer les théories sur les dynamiques de population, ces découvertes ont conduit à la formulation de la théorie du Chaos, mais aussi à la création des fractales. Celles-ci sont faciles à produire avec des algorithmes et sont d'une très grande utilité, notamment en informatique dans les images de synthèse et en cosmologie fractale (formation de l'univers, forme des galaxies). Cependant il faut savoir que l'on peut également trouver des exemples de fractales dans le domaine du vivant. En effet, au niveau de notre organisme, des organes tels que les poumons possèdent de nombreuses et complexes ramifications (bronches, bronchioles, alvéoles pulmonaires). Chez les végétaux, il existe le chou de Romanesco, un exemple type de fractales. Ce chou-fleur montre des spirales de cônes primaires. Ces cônes sont eux-mêmes constitués de cônes secondaires qui sont eux-mêmes constitués de cônes tertiaires. On obtient une structure fractale à trois niveaux.



(De gauche à droite : les poumons, le réseau pulmonaire et le chou Romanesco)