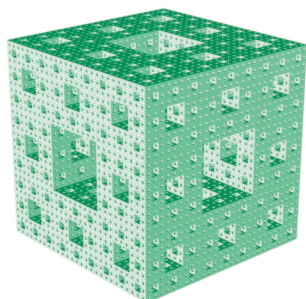


# Construire des fractals grâce aux AFC

Beaucoup d'objets naturels possèdent des parties semblables au tout : une fleur de chou-fleur est un chou-fleur en réduction, une branche d'arbre est un arbre miniature, etc. C'est cette remarque fondamentale qui va nous permettre de construire des objets fractals par une méthode simple due à J. E. Hutchinson (1970) et perfectionnée par Michael Barnsley.



L'éponge de  
Menger-  
Sierpinski.

Considérons un objet  $A$  qui est réunion d'objets plus petits  $A_1, A_2, \dots, A_p$  qui sont chacun des « réductions » de  $A$ . Formalisons les choses en disant qu'il existe des transformations  $f_1, f_2, \dots, f_p$  de l'espace dans lui-même qui transforment successivement  $A$  en  $A_1, A_2, \dots, A_p$ . Comme

$$A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_p(A),$$

on peut écrire :

$$A_1 = f_1(A)$$

$$= g_1(A_1) \cup g_2(A_1) \cup \dots \cup g_p(A_1)$$

$$\text{où } g_i = f_1 \circ f_i \circ f_1^{-1}.$$

Autrement dit, les  $p$  objets  $A_1, A_2, \dots, A_p$  sont eux-mêmes réunions chacun de  $p$  objets réduits et ainsi de suite à l'infini. On retrouve ici la propriété de zoom des fractals : plus on zoome, et plus c'est pareil.

*Même dans des cas très simples,  
l'attracteur d'une famille de contraction  
peut être fort complexe, et parfois très beau.*

Poussons un peu plus la formalisation : considérons  $p$  transformations d'un espace euclidien  $E$  ( $\mathbb{R}^n$  pour simplifier) dans lui-même  $f_1, f_2, \dots, f_p$  et associons-leur la transformation  $f$  de l'ensemble des parties de  $E$  dans lui-même (autrement dit ce que nous avons appelé plus haut les objets) définie par :

$$f(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_p(A).$$

L'objet que nous recherchons doit tout simplement vérifier  $f(A) = A$ , autrement dit être un point fixe de  $f$ .

Il existe en mathématiques de nombreux théorèmes dits « du point fixe », qui énoncent sous certaines conditions l'existence et/ou l'unicité d'un point fixe pour certaines transformations. L'un d'entre eux, dont l'énoncé précis se trouve dans tous les bons cours de spéciales, énonce que si l'espace est *complet*, et la transformation *contractante* (c'est-à-dire qu'elle réduit les distances), il y a toujours un point fixe unique et que de plus, en partant d'un élément quel-

conque et en itérant la transformation, on converge toujours vers ce point fixe. Ce théorème s'applique magnifiquement ici.

Si les  $p$  transformations  $f_1, f_2, \dots, f_p$  sont toutes contractantes dans  $E$  (autrement dit :

$\forall x, y \in E \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$  avec  $k$  constante  $< 1$ ) alors la transformation  $f$  est contractante dans l'ensemble des parties fermées et bornées non vides de  $E$  (les « compacts » de  $E$ ) muni d'une distance appelée « distance de Hausdorff » (voir encadré à la page xx) et on montre que cet ensemble est bien « complet ».

D'où le théorème :

**Pour toute famille de contractions  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  de  $E$ , il existe un unique compact non vide  $A$  vérifiant**

$A = f_1(A) \cup f_2(A) \cup \dots \cup f_p(A)$ , appelé l'attracteur de la famille de contractions (nous abrégerons en AFC). De plus, partant, d'un compact non vide  $A_0$  quelconque, l'itération  $A_n = f(A_{n-1})$  converge toujours vers  $A$  (au sens de la distance de Hausdorff) (voir [5] pour une démonstration).

Dans les exemples que nous allons examiner, les contractions  $f_1, f_2, \dots, f_p$  seront presque toujours de simples transformations affines de déterminant strictement inférieur à 1 en valeur absolue ; vous pourrez constater que même dans des cas très simples, l'attracteur  $A$  peut être fort complexe, et parfois très beau. Si les  $f_i$  sont des similitudes de rapport  $\lambda_i$  et si les  $f_i(A)$  sont disjoints (sauf éventuellement en des points frontiers),  $A$  est un fractal (en général - voir encadré sur la dimension topologique) de « dimension fractale »  $d$  définie par

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^d = 1.$$

Ce nombre  $d$  n'a pas été défini au

hasard, mais de façon à généraliser la notion de dimension entière classique : chacun sait qu'une similitude de rapport  $\lambda$  multiplie les longueurs des courbes (de « dimension » 1) par  $\lambda$ , multiplie les aires des surfaces (de « dimension » 2) par  $\lambda^2$  et multiplie les volumes des solides (de « dimension » 3) par  $\lambda^3$ .

## Dimension topologique et notion de fractal

La **dimension topologique** d'une partie de  $\mathbb{R}^n$  est un **entier** défini par récurrence qui exploite l'idée qu'un solide (dimension 3) a un contour qui est une surface (dimension 2), et qu'une surface a un bord qui est une courbe (dimension 1). Évidemment c'est plus compliqué car il peut ne pas y avoir de contour (par exemple pour une sphère) et on est obligé de définir la notion localement. De plus, la dimension peut ne pas être définie de façon unique ; pensons par exemple à la réunion d'une courbe et d'un solide (un ballon avec son fil !). La dimension topologique est une notion topologique, ce qui signifie que deux ensembles homéomorphes ont même dimension topologique (homéomorphe signifie intuitivement que les ensembles sont déduits l'un de l'autre par étirement, sans coupure ni recollement) et elle est toujours inférieure ou égale à la dimension fractale. On peut même montrer que c'est **la borne inférieure des dimensions fractales des ensembles homéomorphes à l'ensemble considéré**.

Par exemple, la dimension topologique de l'ensemble de Cantor est nulle, ainsi que celle du triangle de Cantor (dont la dimension fractale vaut 1), tandis que la dimension topologique de la courbe de Koch est 1.

Mandelbrot a défini un fractal par le fait que **sa dimension topologique soit strictement inférieure à sa dimension fractale**.

## SAVOIRS

## Les AFC

Une similitude de rapport  $\lambda$  devrait donc multiplier la « mesure » d'un ensemble de « dimension »  $d$  par  $\lambda^d$ .

L'ensemble  $A$  vérifiant

$$A = f_1(A) \cup \dots \cup f_p(A),$$

sa « mesure »  $\mu$  doit donc vérifier

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i^d \mu,$$

ce qui donne bien  $\sum_{i=1}^n \lambda_i^d = 1$ .

Lorsque les similitudes sont toutes de

rapports  $\frac{1}{m}$ , on obtient  $d = \frac{\ln n}{\ln m}$ .

Auparavant, voici comment obtenir très rapidement, grâce à votre micro, une image de l'attracteur  $A$ .

Puisqu'en partant de n'importe quel compact non vide et en appliquant  $f$  à l'infini on aboutit toujours à  $A$ , il suffit de prendre comme compact de départ un singleton, c'est-à-dire un point. Et au lieu de calculer à chaque étape les images des points par toutes les  $f_j$ , ce qui est beaucoup trop long, on en choisit une au hasard. Au bout de quelques coups, le nuage obtenu donne une très bonne idée de  $A$ .

### L'ensemble de Cantor

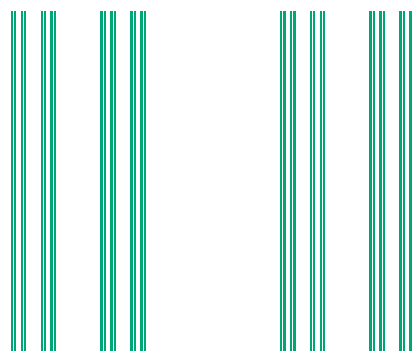
L'ensemble de Cantor est le premier AFC non trivial qui ait été étudié dans l'histoire des mathématiques. Mais il ne l'a pas été en tant que tel, car il possède beaucoup de propriétés étranges en plus de sa « fractalité ».

On peut le définir comme l'attracteur de la famille des deux homothéties de  $\mathbb{R}$  de rapport  $1/3$  et de centres  $0$  et  $1$ .

Le rapport  $1/3$  n'est pas choisi au hasard ! Tout d'abord, il doit être plus petit que  $1$  pour que  $F$  soit contractante. Et si l'on prenait  $1/2$  l'on obtiendrait le très bête segment  $[0, 1]$  qui n'est pas fractal...

Voici une vue de cet ensemble, que l'on a croisé avec  $[0, 1]$  pour obtenir une figure ayant une épaisseur.

Le véritable ensemble de Cantor est donc l'intersection de cette figure avec une droite horizontale.



La dimension fractale de l'ensemble de

Cantor est  $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63\dots$  ; mais ce qui avait motivé sa construction par Cantor en 1883 est sa propriété d'être un ensemble fermé sans point isolé tout en ayant un intérieur vide (c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle de longueur  $> 0$ )

Utilisons le théorème ci-dessus pour obtenir la construction classique de l'ensemble de Cantor : on part du compact  $[0, 1]$  et on applique  $F$  : on obtient

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

On réitère le procédé :

le passage de l'étape  $n$  à l'étape  $n+1$  consiste à remplacer chacun des  $2^n$  segments de longueur  $\frac{1}{3^n}$  par deux segments de longueur  $\frac{1}{3^{n+1}}$ .

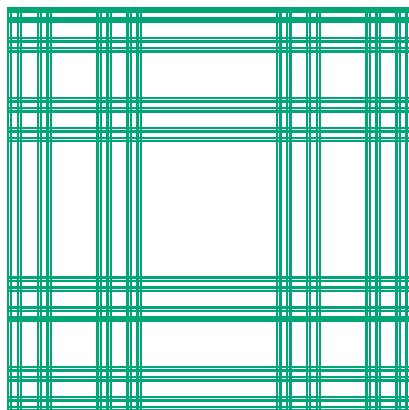
Le lecteur trouvera une foule de renseignements sur la topologie de cet ensemble fascinant dans [4].

Mais voici pour le plaisir quelques produits dérivés de l'ensemble de Cantor qui constituent des contre-exemples en

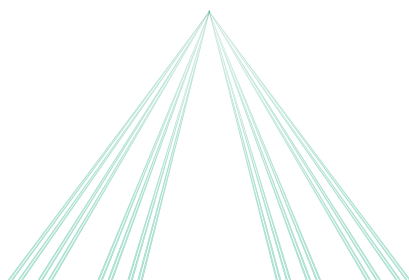
*Il y a dans le napperon de Sierpinski une infinité de copies de l'ensemble de Cantor.*

## DOSSIER : FRACTALS DÉTERMINISTES

topologie :

dimension fractale  $\ln 3 / \ln 2 = 1,585...$ 

Le tartan de Cantor



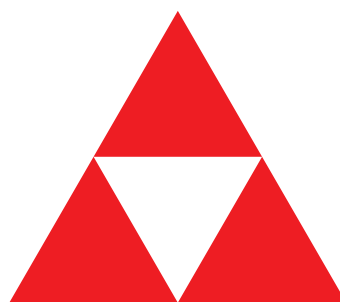
Le teepee de Cantor

### Le tapis de Sierpinski et ses généralisations

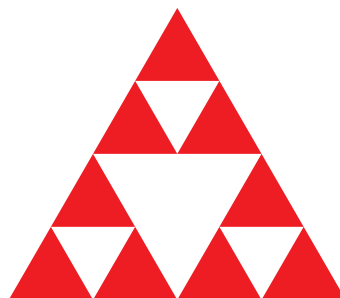
L'idée de l'ensemble de Cantor est de couper un segment en parties égales, d'enlever une de ces parties, et de recommencer. C'est cette idée qui préside aux tapis et éponges de Sierpinski que nous allons examiner.

Un triangle est classiquement la réunion de 4 triangles 1/2-homothétiques (séparés par les segments médians). Supprimons le triangle central, c'est-à-dire considérons uniquement les trois homothéties de rapport 1/2 centrées aux sommets.

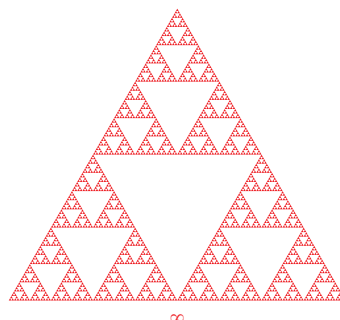
L'attracteur de cette famille est le « triangle (ou tamis) de Sierpinski », de



1



2

 $\infty$ 

Le triangle de Sierpinski

Un carré est la réunion de 9 carrés 1/3-homothétiques. Supprimons le carré central, c'est-à-dire considérons uniquement les 8 homothéties de rapport 1/3 centrées aux sommets et aux milieux des côtés.

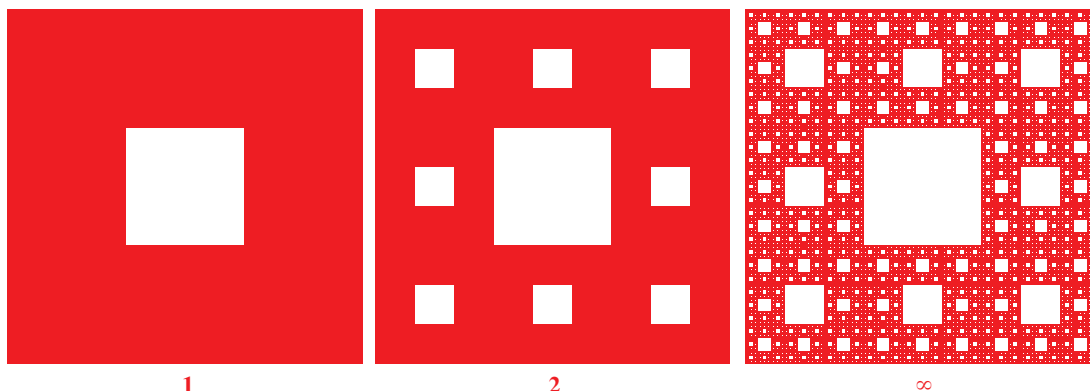
L'attracteur de cette famille est le *tapis* (ou *carpette*) de *Sierpinski*, de dimension fractale

$$3 \frac{\ln 2}{\ln 3} = 1,893...$$

Les diagonales et les médianes de cette

## SAVOIRS

## Les AFC



### La carpeite de Sierpinski.

carpeite sont semblables à l'ensemble de Cantor.

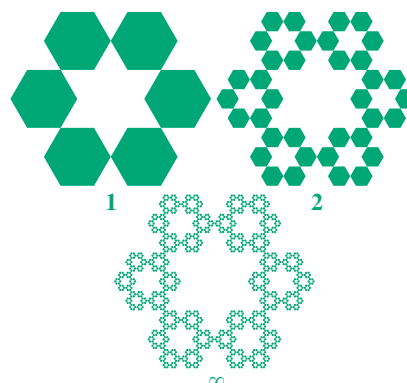
Un cube est la réunion de 27 cubes  $1/3$ -homothétiques (cf. le *Rubik's cube*). Supprimons le cube central ainsi que les six cubes centrés sur les faces, c'est-à-dire considérons uniquement les 20 homothéties de rapport  $1/3$  centrées aux sommets et aux milieux des arêtes.

L'attracteur de cette famille est l'éponge de Menger-Sierpinski, de dimension fractale  $\ln 20 / \ln 3 = 2,727...$

Les faces de cette éponge sont des tapis de Sierpinski.

Dans un hexagone, conservons uniquement les 6 hexagones  $1/3$ -homothétiques comme sur la figure suivante, c'est-à-dire considérons uniquement les 6 homothéties de rapport  $1/3$  centrées aux sommets.

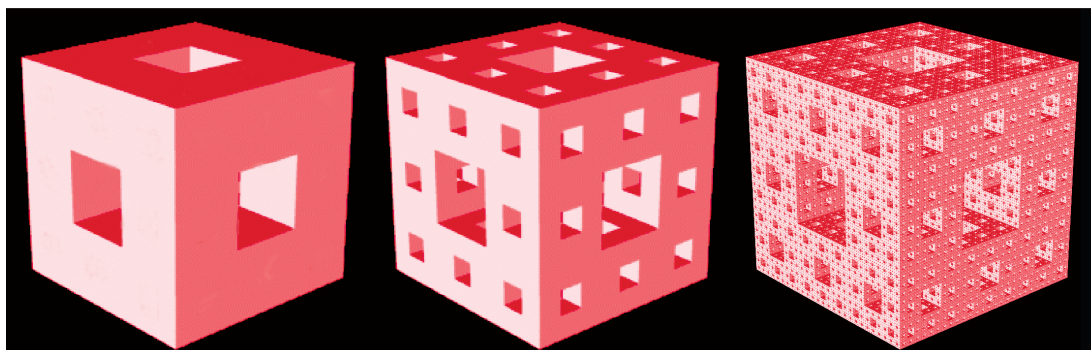
### L'éponge de Menger-Sierpinski.



La napperon de Koch

Nous avons dénommé l'attracteur, de dimension fractale  $\ln 6 / \ln 3 = 1,631$ , le *napperon de Koch* car la partie évidée centrale est un flocon de Koch.

Mais nous aurions pu tout aussi bien l'appeler *napperon de Sierpinski* pour son principe de construction, ou encore *napperon de Cantor* car il y a dans cet ensemble une foule de copies de l'ensemble de Cantor.



## DOSSIER : FRACTALS DÉTERMINISTES

Le lecteur aura à l'aide ces exemples compris la généralité de la méthode Sierpinski : on détermine dans une figure  $n$  figures semblables à la figure de départ qui ne se chevauchent pas, et on élimine le complémentaire de ces  $n$  figures. Puis dans chacune de ces figures, on réitère le procédé, ceci jusqu'à l'infini. La figure limite est l'attracteur de la famille des  $n$  similitudes ayant servi à créer les  $n$  figures ci-dessus.

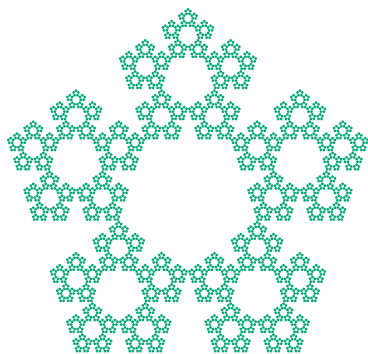
À vous de créer de beaux fractals avec cette méthode !

On peut aussi considérer l'attracteur

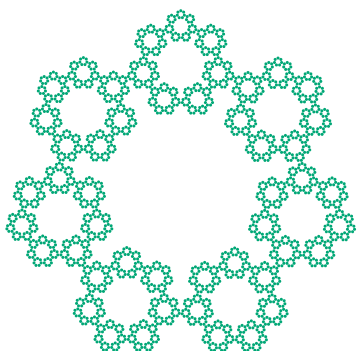
de  $n$  similitudes de rapport  $\frac{1}{4 \cos^2 \frac{\pi}{n}}$

centrées aux sommets d'un  $n$ -gone régulier. Nous l'avons baptisé *polygone de Koch* car ses "côtés" sont des courbes de Koch généralisées.

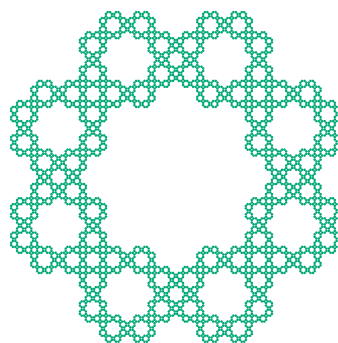
Voici quelques vues des cas  $n = 5, 7$  et  $8$ .



Pentagone de Koch



Heptagone de Koch



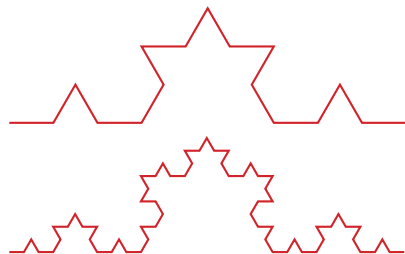
Octogone de Koch

### La courbe de Koch et ses généralisations

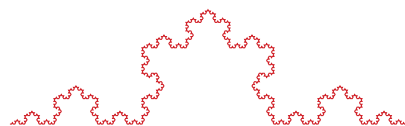
On part dans le plan du segment  $[0, 1]$  de l'axe des  $x$  que l'on remplace par 4 segments de longueur  $1/3$  ainsi placés :



Et on réitère le procédé pour chacun des 4 segments.



On considère donc les images itérées de  $[0, 1]$  par la famille formée des deux homothéties utilisées dans l'ensemble de Cantor et de deux similitudes directes de rapport  $1/3$  et d'angles  $\pi/3$  et  $-\pi/3$ . La courbe de Koch est l'attracteur de cette famille.



La courbe de Koch

*Cette courbe, dont la base est l'ensemble de Cantor, a été décrite par Von Koch en 1904 comme exemple de « courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire ».*



## SAVOIRS

## Les AFC

Comme il y a 4 similitudes de rapport  $1/3$ , sa dimension fractale est le double de celle de l'ensemble de Cantor, soit  $2(\ln 2/\ln 3) = 1,262$ . Cette courbe, dont la base est l'ensemble de Cantor, a été décrite par Von Koch en 1904 comme exemple de « courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire ».

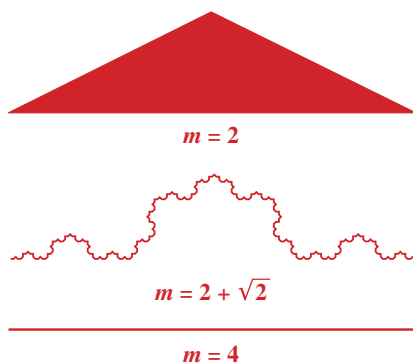
La figure formée de 3 courbes de Koch ainsi placées s'appelle traditionnellement un flocon de Koch.

On peut généraliser en prenant 4 similitudes de rapport  $1/m$  ( $2 \leq m \leq 4$ ) de façon à obtenir encore la ligne brisée continue :

**Le flocon de Koch.**



On obtient ainsi la courbe de Koch généralisée qui peut prendre toutes les dimensions entre 1 et 2 :



Le lecteur aura compris le principe général de la méthode Koch : le segment initial est remplacé par une ligne brisée continue ayant les mêmes extrémités et formée de segments de longueurs strictement inférieures (qui

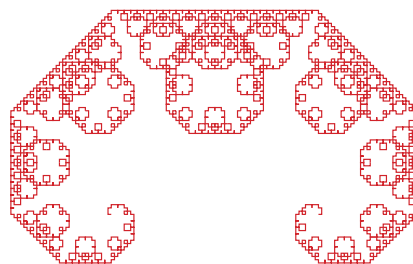
ne sont pas forcément égales) et le procédé est réitéré à l'infini. La « courbe » limite est l'attracteur des similitudes directes envoyant le segment initial sur chacun des segments de la ligne brisée.

Nous avons mis le mot courbe entre guillemets car nous allons voir que cet attracteur peut avoir une dimension (même topologique) strictement supérieure à 1 ! L'exemple le plus simple est celui de la courbe du C, dont les premières étapes de construction sont :



La courbe limite est l'attracteur de deux similitudes directes de rapport

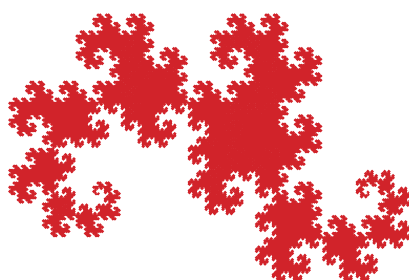
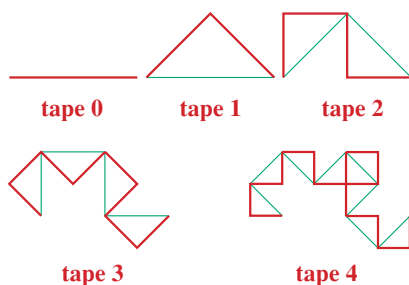
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et d'angles respectifs } \frac{\pi}{4} \text{ et } -\frac{\pi}{4}.$$



La dimension calculée par la formule  $d = \ln n / \ln m$  donne  $d = 2$ , mais comme il y a ici des chevauchements, la dimension fractale en est inférieure. Une façon d'éviter les chevauchements est de remplacer la première similitude par la similitude *indirecte* transformant le segment initial en le premier segment de la ligne brisée.

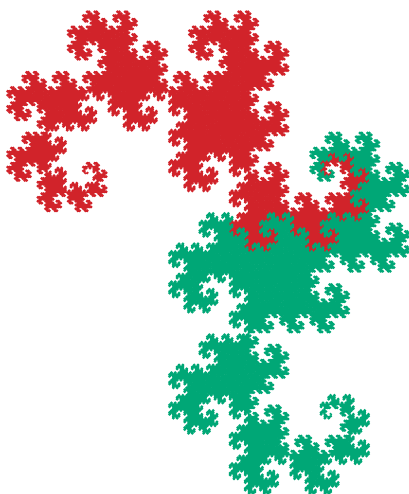
Ce simple changement modifie complètement l'allure de l'attracteur qui prend alors habituellement le nom de dragon (ainsi baptisé en 1960 par le physicien John Heighway).

## DOSSIER : FRACTALS DÉTERMINISTES

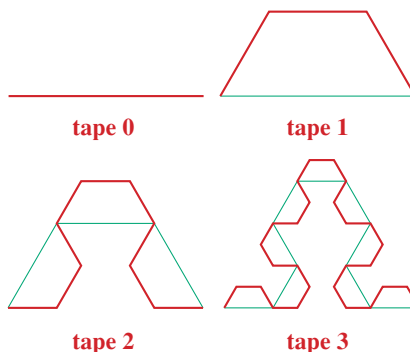


La courbe du dragon

Voici une vue permettant de voir que le dragon est la réunion des deux sous-dragons images de lui-même par les deux similitudes.



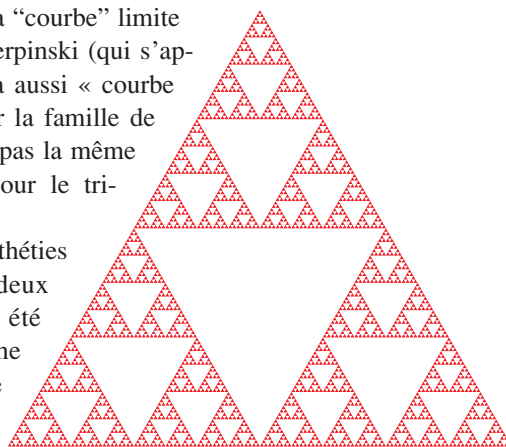
Cette propriété montre que les dragons peuvent paver le plan.  
Un autre exemple classique, avec trois segments, est donné par les constructions :



L'étonnant est que la "courbe" limite est le triangle de Sierpinski (qui s'appelle donc pour cela aussi « courbe de Sierpinski ») ; or la famille de similitudes n'est ici pas la même que celle utilisée pour le triangle.

Parmi les trois homothéties de rapport  $1/2$ , deux d'entre-elles ont été composées par une symétrie axiale, ce qui en fait des similitudes indirectes.

Les symétries laissant le triangle globalement invariant, l'attracteur final ne change pas.



La courbe de Sierpinski

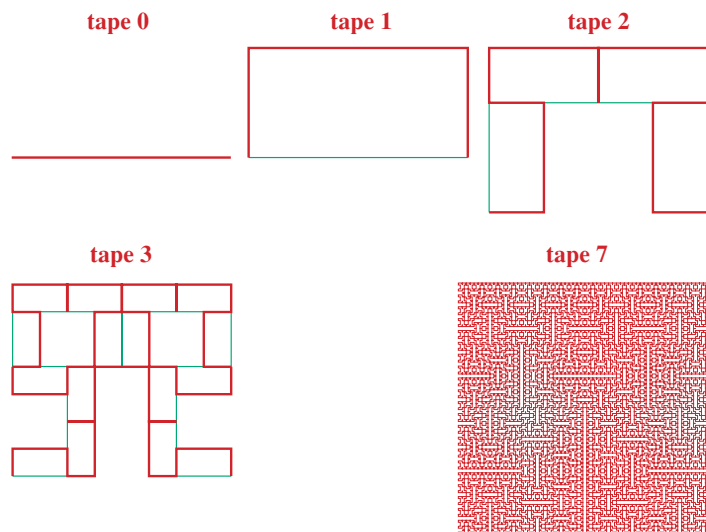
*La "courbe" du dragon est célèbre car elle possède une construction étonnante : si l'on replie  $n$  fois une feuille de papier sur elle-même, toujours dans le même sens et en marquant bien les plis, et qu'on la déplie en conservant les plis à  $90^\circ$ , on obtient, en regardant la tranche, la  $n$ ème étape de construction de la courbe du dragon. Évidemment, dans la pratique, l'épaisseur de la feuille fait qu'on dépasse difficilement la cinquième étape...*



## SAVOIRS

## Les AFC

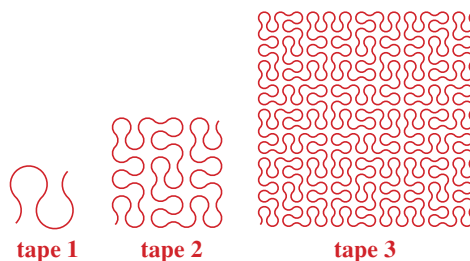
Passons de 3 à 4 segments pour examiner l'exemple historique de la courbe de Péano binaire dont voici les premières étapes de construction :



Il y a ici 4 similitudes de rapport  $1/2$  (2 homothéties et 2 similitudes indirectes), de sorte que la dimension fractale de l'attracteur est 2. Heureusement ! Car c'est un simple carré. Et c'est justement comme exemple de courbe passant par tous les points d'un carré que Peano a construit cette courbe en 1890.

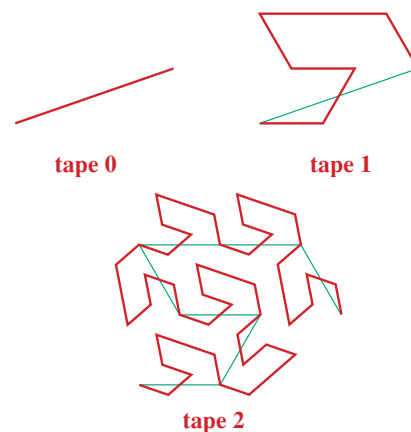
Continuons de rechercher des courbes de dimension fractale 2. Si la ligne brisée possède  $n$  segments de même longueur, cette longueur commune est forcément  $1/\sqrt{n}$ .

Pour  $n = 9$ , un exemple est la courbe de Peano ternaire dont voici les premières étapes de construction :

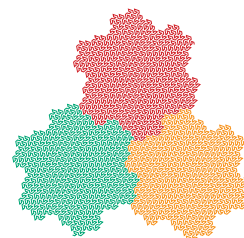
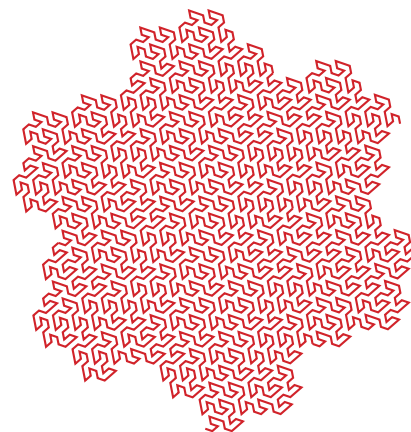


La famille de contractions est formée de 9 similitudes directes de rapport  $1/3$  et l'attracteur est aussi un carré.

Pour  $n = 7$ , un exemple étonnant est donné par la courbe de Gosper dont les premières étapes de construction sont :



Il y a donc ici sept similitudes de rapport  $1/\sqrt{7}$  et, comme dans le cas du dragon, l'attracteur fournit un modèle original de pavage du plan.



## DOSSIER : FRACTALS DÉTERMINISTES

## Les AFCF "naturels" (arbres, fougères, feuilles...)

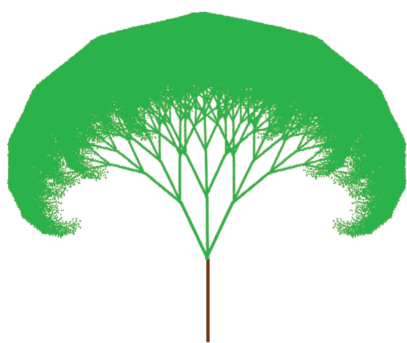
Pour modéliser un arbre, nous allons considérer que chacune de ses branches maîtresses (débutant à l'extrémité du tronc) est semblable à l'arbre entier. Autrement dit, considérer des similitudes transformant un segment  $[A, B]$  en des segments plus courts  $[B, C_i]$ .

Mais il ne faut pas oublier le tronc ! Pour cela nous utiliserons une application qui transforme le plan en le segment  $[A, B]$ , ou mieux en un rectangle de médiane  $[A, B]$  pour que le tronc ait une certaine épaisseur. Pour écrire le programme il n'y a pas besoin de connaître une telle application (mais le problème est intéressant !) car nous prendrons en fait chaque fois un point au hasard dans le rectangle.

En choisissant  $A(0, 0)$  et  $B(0, 1)$ , les similitudes auront pour matrices complètes :

$$\begin{bmatrix} r_i \cos(\theta_i) & -r_i \sin(\theta_i) & 0 \\ r_i \sin(\theta_i) & r_i \cos(\theta_i) & 1 \end{bmatrix}.$$

Voici une vue de l'attracteur pour un tronc de largeur  $1/20$ ,  $\theta_1 = -\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ ,  $\theta_3 = 0$  et  $r_i = 0,8$ .



Ce qui est étonnant, c'est qu'on a l'impression qu'il y a des feuilles alors qu'il n'y a que des branches qui s'en-

trecroisent. Mais cet arbre est très mathématique : y verrez-vous des spirales logarithmiques (approchées) ?

Essayez de faire varier les paramètres  $\theta_i$  et  $r_i$  vous constaterez que l'arbre peut prendre des formes très variées et parfois très réalistes.

Est-ce parce que la fougère est un arbre préhistorique que pour  $\theta_1 = -\theta_2 = 0,4\pi$  et  $\theta_3 = \pm 0,05$ ,  $r_1 = r_2 = 1/3$  et  $r_3 = 0,85$  on obtient un attracteur ressemblant fort à ce végétal ?

Si l'on prend  $\theta_1 = 0,05$ , la fougère sera incurvée vers la gauche, les feuilles de gauche incurvées vers le bas, et les feuilles de droite incurvées vers le haut.

R. F.



## Bibliographie [1]

M. F. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.

## [2]

<http://www.mathcurve.com/fractals/afc/afc.shtml>

## [3]

G. A. Edgar, *Measure, topology and fractal*, Springer-Verlag.

## [4]

F. Guénard et G. Lelièvre, *Compléments d'analyse*, volume 1, Cahiers de Fontenay, 1985.