



ELISABETH BUSSER

EXCURSION AU PAYS DES ATTRACTEURS ÉTRANGES

Une question mathématique contemporaine qu'on peut aborder avec une simple calculatrice, comme le fit M. FEIGENBAUM en 1975, c'est assez rare pour qu'on s'y attarde. Où l'on verra, avec des moyens de calcul élémentaires, que des systèmes dynamiques non linéaires, mais simples, peuvent avoir parfois des propriétés graphiques étrangement complexes.

Au siècle dernier déjà, les trappeurs canadiens s'étonnaient des fluctuations imprévisibles de la population des lynx sur leur territoire de chasse. Le mystère ne se dissipa que lorsqu'on eut l'idée de s'intéresser parallèlement à la population des lapins fréquentant la même zone. La modélisation mathématique de l'évolution conjointe de ces deux populations donne lieu à l'étude d'un système dynamique, qui permet de retrouver les lois de la nature : soit tendance vers un équilibre, soit des cycles, soit des évolutions chaotiques.

Ce qui régit dans le cas discret l'apparition de phénomènes susceptibles d'évoluer vers le chaos est une *boucle de rétroaction mathématique*, c'est-à-dire un calcul où l'on réinjecte le résultat qu'on vient d'obtenir pour lui faire faire le même parcours, cela signifie itérer le même calcul. Les mêmes phénomènes apparaissent dans de nombreux domaines, et sont étudiés simultanément, la théorie mathématique venant au secours de la physique,

de la biologie, de l'astrophysique ou de la météorologie.

■ Une histoire récente

Les mathématiciens ont commencé de leur côté, d'abord à la main, comme VERHULST en 1845. Il part d'une étude démographique pour construire un *diagramme de bifurcation*, pour le système dynamique :

$$x_{n+1} = \left(1 + a - \frac{ax_n}{b}\right) x_n, \text{ où } a \text{ est une constante positive et } a - \frac{ax_n}{b} \text{ le taux de croissance de la population concernée.}$$

Autour de 1900, VOLTERRA bâtit un modèle que les théoriciens de la génétique adapteront à l'étude des populations.

En 1963, le physicien LORENZ travaille sur les systèmes dynamiques continus qui modélisent les mouvements dans l'atmosphère. Il réussit à ne garder que 3 variables et aboutit au système :

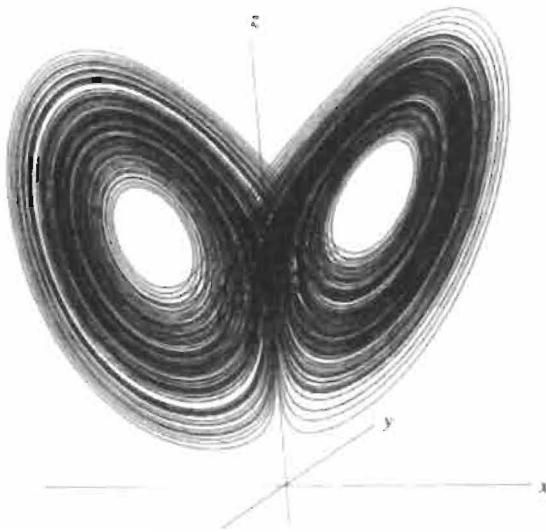
$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y;$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y;$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz;$$

où b , σ , r sont des constantes.

Avec $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$; $r = 28$, il obtient le célèbre "attracteur de Lorenz".



La figure est jolie, mais d'une telle complexité qu'on peut comprendre pourquoi les prévisions météo sont parfois si hasardeuses !

En 1975, le mathématicien américain Mitchell FEIGENBAUM met en évidence, à l'aide d'une simple calculatrice de poche, que les itérations d'une banale fonction du second degré mènent parfois à des résultats bizarres, non sans d'ailleurs quelque régularité.

Et l'histoire continue, émaillée de dessins chaque jour plus étonnantes au fur et à mesure des progrès des instruments de calcul : diagramme de HENON, décrivant les astéroïdes gravitant autour du soleil, ou l'eau qui s'égoutte du robinet, images insolites

de Peter DE JONG ou de J. CRUTCHFIELD, sans compter toutes celle que fabriquent aujourd'hui les ordinateurs du monde entier.

■ Tel est pris qui croyait prendre

C'est simple, mais il suffisait d'y penser : entre le lynx du Canada, et les lapins partageant le même territoire, la relation "proie-prédateur" est essentielle, et elle permet de décrire l'évolution de ces deux populations en interaction mutuelle. La modélisation se fait tout naturellement .

Si L_n est le nombre de lynx à l'année n , l_n celui des lapins cette même année, a le taux de croissance des lapins en l'absence de lynx, alors

$$\frac{l_{n+1} - l_n}{l_n} = a - bL_n$$

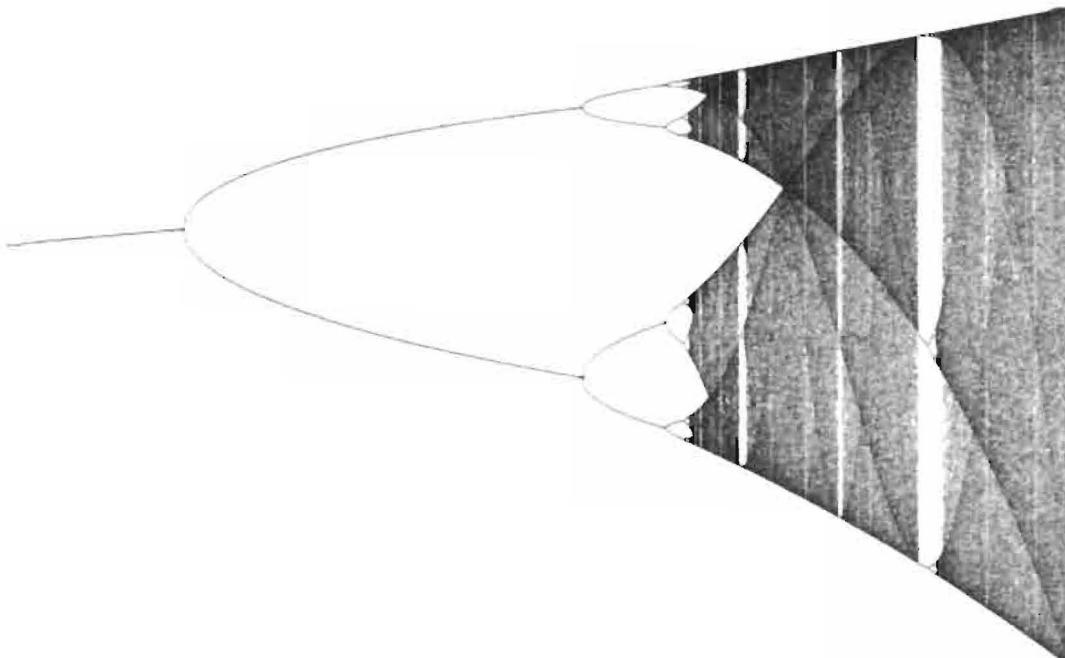
où bL_n est un terme correctif correspondant aux lapins mangés (eh, oui, c'est la loi de la nature !) par les lynx, évidemment proportionnel au nombre de prédateurs.

Si de plus q est le taux de disparition des lynx en l'absence de lapins,

$$\frac{L_{n+1} - L_n}{L_n} = -q + pl_n,$$

où pl_n est un terme correctif, taux de croissance des lynx en présence de lapins, proportionnel au nombre de proies.

Ainsi, $\begin{cases} l_{n+1} = l_n(1 + a - bL_n) \\ L_{n+1} = L_n(1 + pl_n - q) \end{cases}$

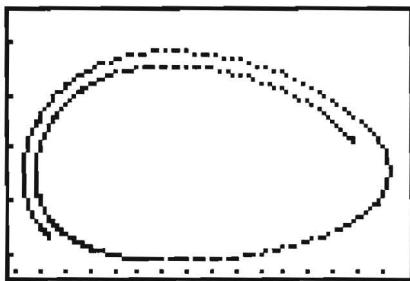


$\Lambda_1 = 0,75$

$\Lambda_2 \approx 0,86237$ $\Lambda_3 \approx 0,892$

1

Ce système d'équations est un *système dynamique discret*, où les variables ne dépendent pas d'un paramètre continu, mais de n , qui "saute" d'une valeur entière à la suivante. On peut déjà, sur une simple calculatrice, représenter l'évolution du nombre de lynx et de lapins en fonction du temps :

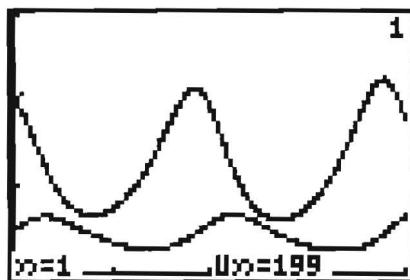


Tracé fait avec

$$a = 0,045, b = 0,001, p = 0,0002, q = 0,025.$$

On peut faire mieux, en représentant dans le plan repéré (*espace des phases*) l'évolution des points $M_n (l_n, L_n)$.

Tracé sur calculatrice TI 82 pour n de 1 à 3×99 .



C'est le caractère discret du système qui permet d'en faire une représentation sur l'écran graphique d'une calculatrice.

Sur ce diagramme, il apparaît que la population des prédateurs, au fur et à mesure du temps, varie en sens inverse de celle des proies : si les lynx prospèrent, ils se reproduisent abondamment, et cela réduit l'effectif des proies. Ceci rend la vie des futures générations de lynx difficile, la famine s'installe, et voilà l'effectif des lynx qui diminue, permettant aux lapins de prospérer, et ainsi de suite... Le point représentatif M_n tourbillonne dans

l'espace des phases sur une *orbite* plane. Elle peut être une courbe fermée (orbite périodique), elle peut aussi soit se resserrer autour d'un point fixe, soit se refermer sur une trajectoire elliptique. Elle peut enfin évoluer de manière chaotique. Nous dirons que ce point fixe, s'il existe, est un *attracteur* au même titre que l'ellipse-limite. Dans le cas d'un comportement chaotique, l'orbite est faite d'une multitude de points, dessinant une structure d'apparence feuilletée, que nous qualifierons d'*attracteur étrange*, comme celui de Lorenz présenté ci-dessus.

Nous venons de traiter ici d'un système bi-dimensionnel : deux relations de récurrence sont couplées, où les valeurs de la n ème génération sont réintroduites comme variables pour donner la $(n+1)$ ème génération, et ainsi de suite. Il peut bien sûr y avoir beaucoup plus de dimensions, mais aussi beaucoup moins, et l'architecture du système restera la même.

Vocabulaire

- **Itération d'une fonction** : calculs successifs de $f(x), f[f(x)], f[f[f(x)]], \dots$
- **Orbite d'un point** : c'est l'ensemble des itérés de ce point par f .
- **Attracteur** : Réel dont s'approchent indéfiniment une infinité de valeurs d'une suite.
- **Espace des phases** : C'est l'espace des (x, y, z) pour le système dynamique

$$\begin{cases} x(t+1) = f_1(x(t), y(t), z(t)) \\ y(t+1) = f_2(x(t), y(t), z(t)) \\ z(t+1) = f_3(x(t), y(t), z(t)) \end{cases}$$
- **Période** : une suite (U_n) est dite périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que pour tout n , $U_{n+p} = U_n$. p est la **période**.
- **Cycle** : (a, b, c) est un 3-cycle pour f si

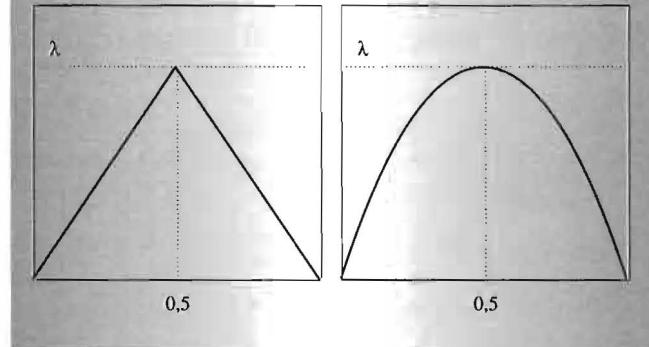
$$f(a) = b, f(b) = c, f(c) = a.$$

■ Jeu sur calculatrice

Beaucoup moins de dimensions ? Mais il n'en reste qu'une ! En effet, comprendre comment sont décrites les orbites, c'est d'abord comprendre comment sont faites les *itérations* successives d'une même fonction : $f, f \circ f = f^2, f \circ f \circ f = f^3 \dots$, considérant une modeste fonction du second degré définie par : $f(x) = 4\lambda x(1-x)$, où λ est précisément le paramètre (ou le *curseur*) qui va faire bouger les choses !

Pourquoi cette fonction et pas une autre ?

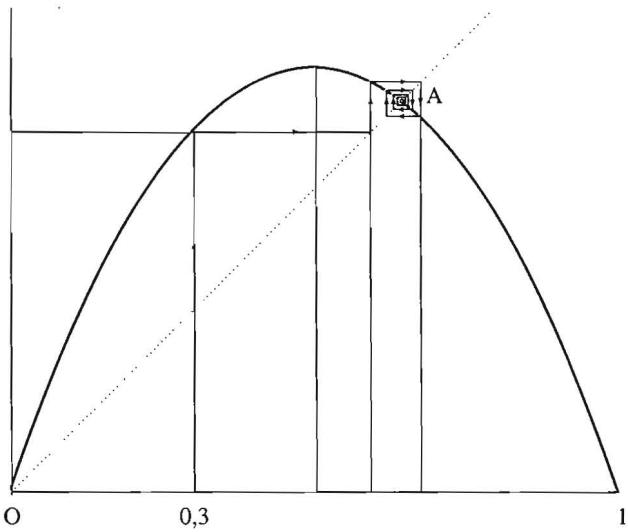
Comment choisir une fonction f qui, par itérations successives, présentera un comportement cyclique ou quasi-cyclique ? Une fonction monotone comme $2x$, ou x^3 , ne fera pas l'affaire, car les itérés n'ont rien de cyclique. Il faut donc une fonction non monotone, dont la courbe est par exemple un "chapeau pointu" ou un "dos d'âne". Nous choisirons le dos rond de la parabole, qui culmine au point de coordonnées 0,5 et 1, et coupe l'axe des abscisses en 0 et 1.



Nous nous limiterons à $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Par ailleurs, pour tout x , $0 \leqslant x \leqslant 1$, on est assuré d'avoir aussi $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ — et ce n'est pas la moindre propriété de cette fonction — si bien que l'itération de f ne fera pas sortir les valeurs de l'intervalle $[0, 1]$. f est représentée sur cet intervalle par un arc de parabole coupant l'axe des abscisses aux points 0 et 1, et dont le sommet a pour coordonnées $(0,5, \lambda)$. Comme $f'(x) = 4\lambda(1-2x)$, pour une valeur donnée de x , la pente de la tangente croît avec λ .

Nous pouvons maintenant commencer l'itération, à partir d'une valeur fixée x_0 de x , entre 0 et 1, que nous appellerons la *graine*.

Commençons par prendre $\lambda = 0,7$ et $x_0 = 0,3$ comme valeur de la graine. Une représentation graphique commode utilisant une navette entre la courbe représentative C_f de f et la droite Δ d'équation $y = x$ permet de visualiser en abscisses la suite des itérés, ou *orbite* de x_0 : 0,3 ; 0588 ; 067832 ; 061097 ; ... 0,64889 ; ... ; 0,64351 ; ... Les quatre premières décimales se stabilisent à la 31ème itération, et on peut admettre que la suite des itérés tend vers 0,643. Le comportement de cette suite pour une valeur donnée de λ est un premier renseignement. Nous chercherons aussi à en obtenir un autre : pour quelles valeurs de λ y a-t-il changement de comportement ?



Suivre l'orbite de la graine x_0 nous conduit à une valse du point représentatif M_n de coordonnées $(x_n, f(x_n))$ autour du point de la courbe dont l'abscisse et l'ordonnée sont égales, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$.

Cette équation a deux solutions :

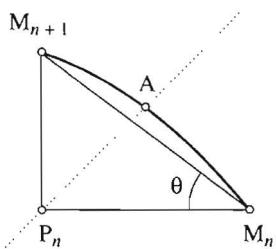
$x = 0$ et $x = 1 - \frac{1}{4}\lambda$, qui sont les abscisses des points O et A, intersection de C_f et de la droite Δ d'équation $y = x$, et que nous appellerons *points fixes* de f . Par analogie, nous parlerons également de points fixes pour les points géométriques A, ou O. Jouent-ils des rôles symétriques ? Considérons, pour le savoir, l'orbite d'une graine proche de 0,643, par exemple 0,64 : 64512 ; 0,64103 ; 0,64431 ; ... ; 0,6431 ; ..., et celle d'une graine voisine de 0, par exemple 0,02 : 0,05488 ;

0,14523 ; 0,34759 ; 0,63496 ; 0,649 ; ... ; 0,64303 ; ...
 Ainsi, l'orbite d'une graine voisine de 0,643 tend encore vers 0,643 alors que celle d'une graine proche de 0 tend aussi vers 0,643. Tout se passe comme si A attirait les itérés successifs, et O les repoussait.

■ Deux variétés de points fixes

Nous dirons donc que A est un point fixe *attracteur* tandis que O est un point fixe *répulsif*. Il existerait donc deux sortes de points fixes, mais comment les caractériser ?

Faisons un “zoom” autour du point fixe A :



Le point A est attracteur si, à l'étape $n + 1$, M_{n+1} est plus près de A que son antécédent M_n , c'est-à-dire si $M_{n+1}A < M_nA$. Or, si M_n et M_{n+1} sont assez proches de A, on peut assimiler le triangle curviligne $M_nM_{n+1}A$ au triangle $M_nM_{n+1}P_n$, et

l'inégalité précédente traduit que $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$. C'est dire que la valeur absolue de la pente de la tangente en A est inférieure à 1, ou encore que, en A, $|f'(x)| < 1$. Le nombre dérivé de f au point fixe va donc prendre une importance capitale : nous le nommerons *multiplicateur* M du point fixe.

On aura donc, pour $|M| < 1$ un point fixe attracteur, et pour $|M| > 1$ un point fixe répulsif.

Dans l'exemple précédent, comme

$$M(O) = 4\lambda = 2,8,$$

O sera répulsif, alors que

$$M(A) = 2 - 4\lambda = -0,8,$$

ce qui fait de A un point fixe attracteur.

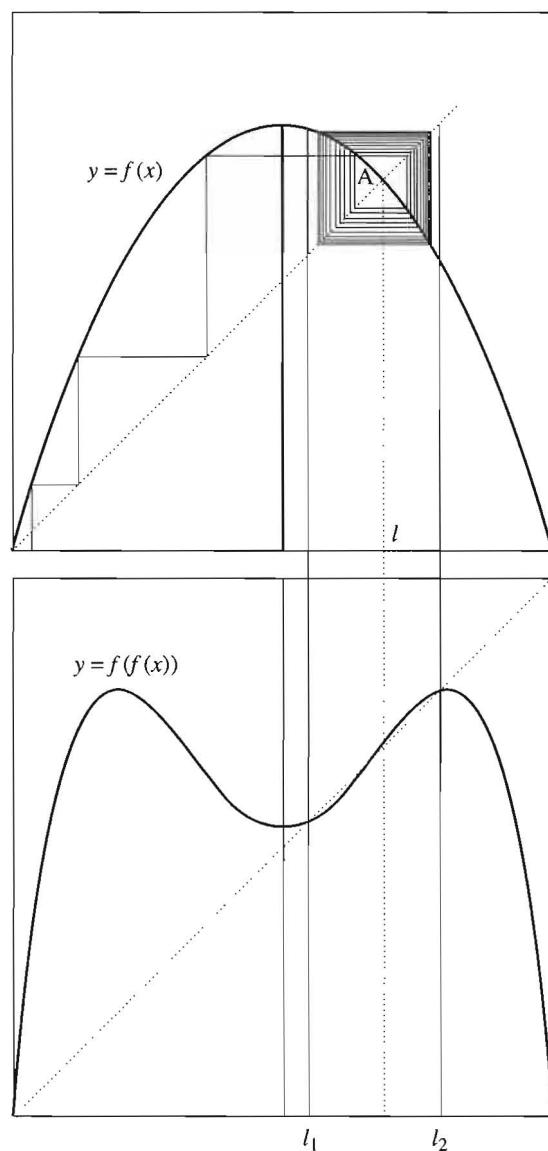
Plus généralement, pour un point fixe A, $|M(A)| = |2 - 4\lambda|$, et la condition $|M(A)| < 1$ donne $-1 < 2 - 4\lambda < 1$, donc $0,25 < \lambda < 0,75$. Le cas $\lambda = 0,25$ correspond aux points A et O

confondus, et on peut résumer la situation en disant que pour $0 \leq \lambda \leq 0,25$, O est attracteur, et pour $0,25 < \lambda \leq 0,75$, A est attracteur.

$\Lambda_1 = 0,75$ est une première valeur de *bifurcation*.

Mais, que se passe t-il au-delà ? Pour λ passant de $0,75 - \varepsilon$ à $0,75 + \varepsilon$, M passe de la valeur $-1 + 4\varepsilon$ à $-1 - 4\varepsilon$, en “traversant” la valeur -1 , et pour $\lambda = 0,75 + \varepsilon$, A est devenu répulsif.

Il se produit donc à chaque passage du multiplicateur M par -1 des phénomènes importants.



Prenons maintenant pour λ une valeur légèrement supérieure à 0,75, par exemple 0,785, et comme graine 0,04.

Dans un premier temps, les points se déplacent vers le point fixe A, dont on sait qu'il n'est plus

attracteur, puis ils s'en éloignent en spirale, tendant à accomplir une sorte de parcours carré les menant à occuper alternativement deux positions d'abscisses l_1 et l_2 , limites respectives des sous-suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) des itérés de rang pair et impair. C'est comme si l'attracteur avait éclaté en deux morceaux : il est devenu un *cycle d'ordre 2* (ou 2-cycle), et (l_1, l_2) est encore appelé attracteur, mais de période 2. C'est lui qui capture désormais l'orbite.

Bifurcations en cascade

Que s'est-il passé ? Utilisons pour comprendre le phénomène la courbe représentative C_g de $g = f \circ f$, et observons la correspondance entre les deux représentations graphiques. g a 4 points fixes : ceux de f , puisque si x vérifie $f(x) = x$, alors $g(x) = f(f(x)) = x$, et deux autres, l_1 et l_2 . En effet, l_1 et l_2 s'échangent par f : $f(l_1) = l_2$, et $f(l_2) = l_1$, d'où

$$g(l_1) = f(l_2) = l_1,$$

de même que

$$g(l_2) = f(l_1) = l_2.$$

C'est pourquoi la courbe "en dos de chameau" de $g = f^2$ coupe la droite Δ en quatre points, dont deux sont répulsifs.

Calculs

$$\begin{aligned} \text{Si } f(x) &= \lambda x(1-x), \\ f^2(x) &= \lambda^2 x(1-x)(\lambda x^2 - \lambda x + 1) \end{aligned}$$

La résolution de $f^2(x) = x$ donne une équation du second degré :

$$16\lambda^2 x^2 - \lambda(\lambda+1)x + \lambda + 1 = 0$$

qui a deux solutions dans le cas où λ est compris entre 0 et $\frac{3}{4}$:

$$l_1 = \frac{4\lambda(4\lambda+1) - 4\lambda\sqrt{(4\lambda-1)(4\lambda-3)}}{32\lambda^2}$$

$$l_2 = \frac{4\lambda(4\lambda+1) + 4\lambda\sqrt{(4\lambda-1)(4\lambda-3)}}{32\lambda^2}$$

Pour vérifier si les points B et C d'abscisses respectives l_1 et l_2 sont bien attracteurs, on calcule comme précédemment leur multiplicateur :

$$\begin{aligned} M(B) &= (f \circ f)'(l_1) = f'[f(l_1)] \times f'(l_1) \\ &= f'(l_1) \times f'(l_2), \end{aligned}$$

qui est d'ailleurs égal à $M(C)$.

La configuration du 2-cycle va persister tant que $|M| < 1$. Regardons ce que cela donne comme valeur-limite pour λ : l_1 et l_2 sont solutions de $g(x) = x$, c'est-à-dire :

$16\lambda^2 x^2 - 4\lambda(1+4\lambda)x + (1+4\lambda) = 0$, et on peut, sans résoudre cette équation, calculer $M(B)$, puisqu'il est égal à $16\lambda^2(1-2(l_1+l_2)+4l_1l_2)$, et

qu'on connaît la somme $l_1 + l_2 = \frac{1+4\lambda}{4\lambda}$ et le

$$\text{produit } l_1 l_2 = \frac{1+4\lambda}{16\lambda^2}.$$

On trouve finalement que $M(B)$ prend la valeur -1 pour

$$\lambda = \Lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{6}}{4}, \text{ soit environ } 0,86237\dots$$

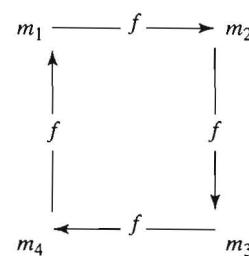
Λ_2 est une deuxième valeur de bifurcation.

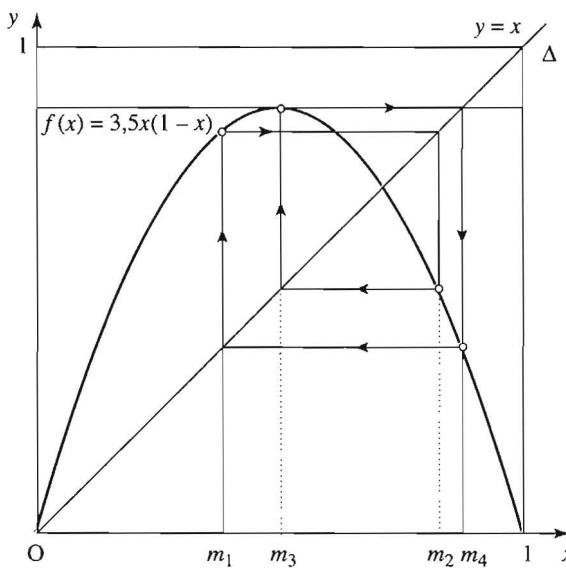
Par exemple, pour λ légèrement supérieur à Λ_2 , $\lambda = 0,875$, et donc $f(x) = 3,5 x(1-x)$, on verra les itérés successifs, à partir de la graine $x_0 = 0,1$,

se rapprocher du point fixe $\frac{5}{7} \approx 0,7143$ de f , qui devient répulsif à partir de 3 itérations, puis se rapprocher de la configuration de 2-cycle

$(l_1, l_2) = \left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ qui devient répulsive au bout de

12 itérations, pour se stabiliser enfin, après 34 itérations, autour d'une configuration de 4-cycle (m_1, m_2, m_3, m_4) répondant au schéma suivant :



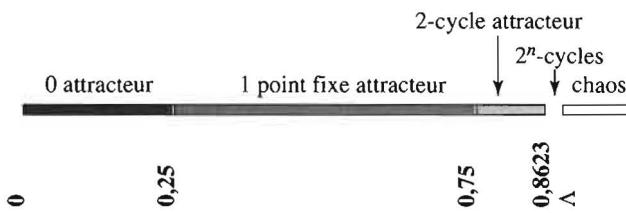


$$m_1 \approx 0,38282, m_2 \approx 0,82694, \\ m_3 \approx 0,50088, m_4 \approx 0,875.$$

m_1, m_2, m_3, m_4 sont bien sûr des points fixes de f^4 .

On imagine facilement la suite de l'histoire : la configuration de 4-cycle (m_1, m_2, m_3, m_4) va subsister jusqu'à ce que son multiplicateur

$M = f'(m_1) \times f'(m_2) \times f'(m_3) \times f'(m_4)$ passe la valeur -1 , ce qui se produira pour une **troisième valeur de bifurcation** Λ_3 , puis, en augmentant λ , le 4-cycle deviendra un 8-cycle pour une valeur Λ_3 , et ainsi de suite... avec doublement du cycle à chaque traversée du multiplicateur -1 . Le calcul des différentes valeurs de bifurcation Λ_n se fait en recherchant la condition sur λ d'existence de 2^n -cycles attracteurs parmi les points fixes de f qu'on itère 2^n fois. La suite des Λ_n converge assez rapidement vers une valeur que nous noterons Λ et qui vaut environ $0,89246418\dots$

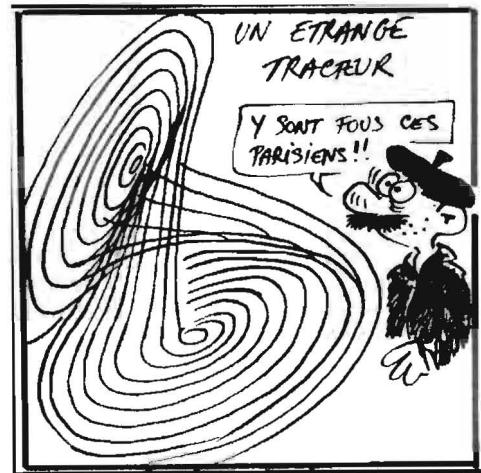


Avant d'examiner ce qui se passe pour $\lambda > \Lambda$, nous remarquerons, avec Mitchell FEIGENBAUM, d'étonnantes régularités récurrentes :

— Tout d'abord, chaque point donne naissance à deux attracteurs "jumeaux" dont la distance est environ 2,5 fois plus petite que celle de leurs

parents. Le mathématicien américain a même calculé exactement ce "taux de compression"-limite des attracteurs, et il a trouvé $\alpha \approx 2,502\,907\,875\dots$ Cela méritait bien le nom de **nombre de FEIGENBAUM**.

— Quant aux valeurs de la suite (Λ_n) , qui convergent vers Λ , elles le font également très régulièrement puisque le rapport $\frac{\Lambda_n - \Lambda_{n-1}}{\Lambda_{n+1} - \Lambda_n}$ a pour limite une constante $\delta \approx 4,669\,201\,660\,910\dots$, qui sera le **deuxième nombre de FEIGENBAUM**.



Voilà l'univers des bifurcations exploré ; nous entrons maintenant dans celui du chaos. Même si nous ne l'avons jamais exploré, nous pouvons l'imaginer, cet univers chaotique. Il nous est par exemple possible de considérer un pendule sans frottement. L'équation différentielle qui régit son mouvement est

$$x'' = -\frac{g}{a} \sin x,$$

où x est l'angle que fait la tige de suspension avec la verticale, a la longueur de ce fil et g l'accélération de la pesanteur. En traitant la vitesse angulaire comme une variable indépendante, on se ramène au système différentiel :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = g/a \sin x \end{cases}$$

Le plan, ensemble des points $M(x, y)$, est l'espace des phases. Dans cet espace, le point M décrit, si le pendule est sans frottement, une trajectoire périodique (cercle).

Si par contre on laisse traîner l'extrémité inférieure du pendule dans un bain d'huile, le pendule subit des frottements visqueux, et l'orbite de M dans l'espace des phases est une spirale qui se resserre autour d'un point. L'attracteur est un point.

Si maintenant le pendule amorti a son mouvement entretenu par un apport d'énergie (comme le balancier des anciennes horloges, dites "à échappement", doté à la fois d'un mécanisme lui fournissant l'énergie nécessaire à l'entretien des oscillations, et d'un échappement "à ancre" qui limitait l'énergie), l'amplitude des oscillations diminue pour se stabiliser à une valeur déterminée par l'échappement. La trajectoire dans l'espace des phases est alors une spirale qui s'enroule autour d'un cercle-limite, s'en rapprochant de plus en plus. L'attracteur est circulaire. Si on met en outre le pendule en oscillation forcée, grâce par exemple à un champ magnétique alternatif, le pendule s'agit de façon désordonnée, et la périodicité des oscillations semble disparaître. C'est le chaos, et la trajectoire de M dans l'espace des phases est constituée d'une multitude de points figurant une structure d'apparence feuilletée, un attracteur étrange.

■ L'univers chaotique

L'ordre qui réglait le comportement des suites d'itérés tant que λ était compris entre 0 et Λ est maintenant dépassé, et pour λ compris entre Λ et 1, les choses se compliquent. Les mathématiciens ont établi que c'est la connaissance de la suite (Λ'_n) des valeurs de λ annulant le multiplicateur M qui permettra la description de la nouvelle situation un peu comme les (Λ_n) décrivaient les cascades de bifurcations.

Or M est un produit de nombres dérivés de f , et il ne s'annulera que si l'un de ces nombres dérivés est nul, c'est-à-dire si l'un des éléments du cycle est 0,5.

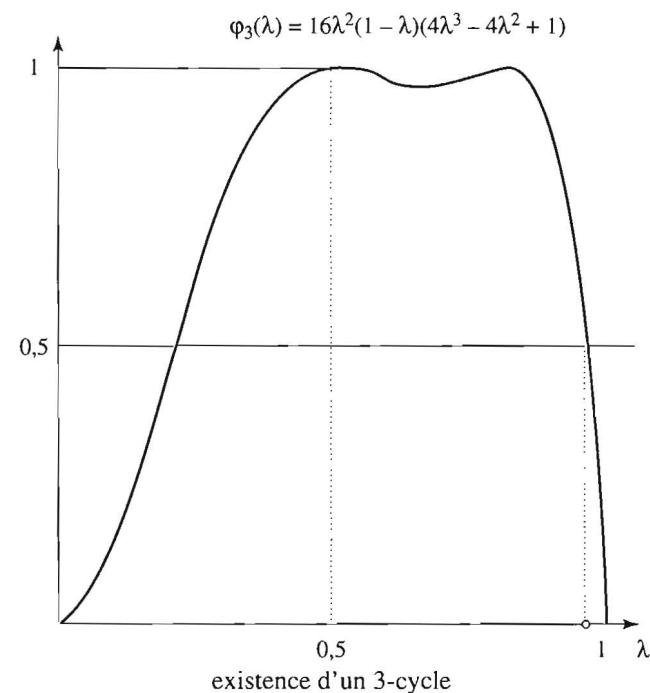
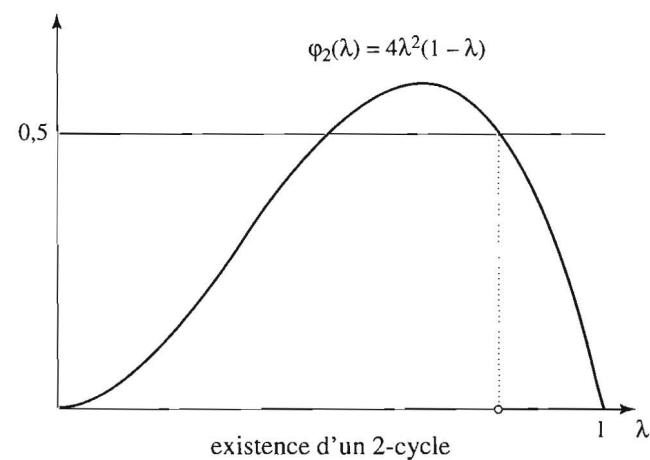
Les limites des régions chaotiques correspondent donc aux valeurs obtenues par itération de 0,5.

Un cycle de multiplicateur nul est donc constitué des images itérées de 0,5, qu'on peut calculer (du moins pour les premières) :

$$f(0,5) = l, \quad f^2(0,5) = 4\lambda^2(1 - \lambda), \\ f^3(0,5) = 16\lambda^2(1 - \lambda)(4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 1).$$

Rechercher les k -cycles reviendra donc à résoudre en λ les équations $f^k(0,5) = 0,5$.

Elles sont vite de degré élevé, mais on peut les résoudre par méthodes numériques, et elles ont chacune plusieurs solutions réelles. La suite des λ' sera celle des plus petites solutions supérieures à 0,5 correspondant aux nombres k de la forme 2^n . On trouve par exemple une seule valeur de λ donnant un 2-cycle, une seule pour un 3-cycle, mais deux pour un 4-cycle.

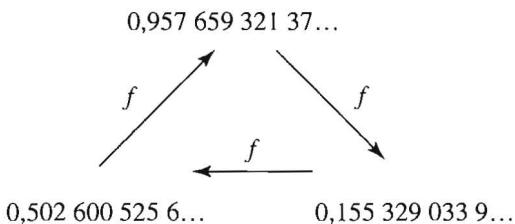


Le calcul du 3-cycle est abordable avec une simple calculatrice puisqu'il s'agit de résoudre

$$f^3(0,5) = 0,5, \text{ ou } 16\lambda^2(1 - \lambda)(4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 1) = 0,5.$$

On peut procéder graphiquement pour avoir simplement une idée du nombre de solutions.

On tombe effectivement, pour $\lambda = 0,957\ 96$, après 28 itérations successives, et quelle que soit la graine sur le 3-cycle :



Les cycles deviennent ici plus difficiles à déceler, car leur ordre peut être très grand : cela se produit très souvent (1091 valeurs pour un 15-cycle), et de manière très inattendue pour $\Lambda < \lambda < 1$, alors que le phénomène se produisait rarement — et en tout cas tout près de Λ — pour les valeurs de λ comprises entre 0 et Λ . Il peut aussi, pour deux valeurs très voisines de λ , soit exister un cycle, soit ne pas exister de cycle du tout.

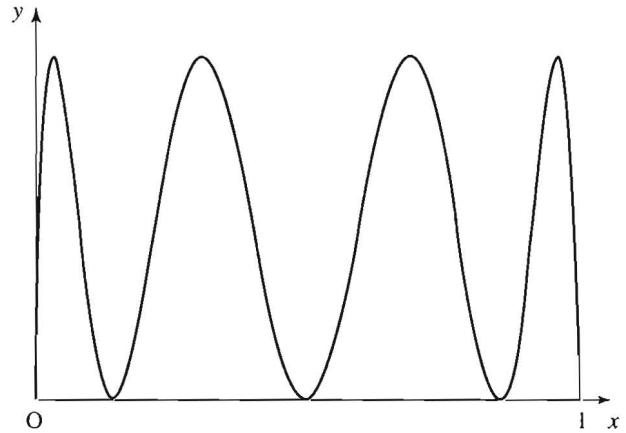
Il n'y a donc aucune régularité. On comprend maintenant pourquoi on parle de chaos. Pour les mathématiciens, ce chaos-là n'est d'ailleurs pas très grand puisque pour presque toutes les valeurs de λ il existe un cycle, même s'il peut être de très grande longueur. On notera cependant qu'il existe dans $[\Lambda, 1]$ une infinité de valeurs pour lesquelles il n'y a aucun cycle.

Nous n'en donnerons qu'un seul exemple, celui de $\lambda = 1$. C'est l'image même de la turbulence : pour des valeurs très voisines de la graine, on peut obtenir des suites d'itérés offrant des spectacles complètement différents :

0,7 ;	0,725 ;	0,73 ;
0,84 ;	0,7975 ;	0,7884 ;
0,5376 ;	0,64598 ;	0,6673 ;
0,99434 ;	0,91477 ;	0,88804 ;
0,022429 ;	0,31188 ;	0,3977 ;
0,8795 ;	0,85844 ;	0,8795 ;
0,32084 ;	0,48608 ;	0,95814 ;
0,87161 ;	0,99922 ;	0,16044 ;
0,44762 ;	0,0031 ;	0,5388 ;
0,98902 ;	0,01236 ;	0,99398 .

Pourquoi parler de turbulence ? Il y a, entre la valeur "paisible" $\lambda = 0,7$ de tout à l'heure, et cet-

te valeur "turbulente" λ autant de différence qu'entre un fluide s'écoulant doucement et un fluide brassé par une force externe, comme la crème qu'on remue dans le café. Dans un fluide s'écoulant doucement, les molécules suivent des "lignes de courant", et sont comme des voitures sur une autoroute à plusieurs voies : chaque voiture suit le même chemin que la précédente, et elles roulent (en principe) sur des voies parallèles, mais différentes. Dans le cas, par contre, d'un fluide brassé par une intervention extérieure, les courants moléculaires se séparent les uns des autres et s'emmêlent selon des tracés très irréguliers. Remous et tourbillons coexistent, et deux points qui étaient au départ très proches peuvent, au bout de peu de temps, se retrouver très éloignés l'un de l'autre. Ces trajets extrêmement divergents sont le signe de la turbulence.



Courbe représentant $f \circ f \circ f$ pour $\lambda = 1$.

$$f \circ f \circ f(x) = \\ 16x(1-x)(1-4x+4x^2)(64x^4 - 128x^3 + 80x^2 - 16x + 1)$$

Nous sommes jusqu'alors restés dans un univers de dimension 1, avec une récurrence du type $x_{n+1} = f(x_n)$. Dans l'exemple des lapins et des lynx, nous avons introduit une récurrence de dimension 2 :

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x, y) \\ y_{n+1} = f_2(x, y) \end{cases}$$

Lorsque la dimension devient de plus en plus élevée, il apparaît mathématiquement que la structure interne du système reste la même, et on a pu montrer que seule une des dimensions avait de l'importance après une période suffisamment

longue. On retrouve donc là l'universalité des constantes α et δ de FEIGENBAUM.



La seule différence entre l'univers que nous venons de considérer, de dimension 1, et un univers multidimensionnel est la **forme des attracteurs**. Nous n'avons jusqu'alors rencontré que des points fixes stables, attracteurs de période 1, ou des attracteurs périodiques, c'est-à-dire des points isolés. Dans le cas d'un système à 2 ou 3 dimensions, on peut aussi obtenir une courbe ou une surface relativement simples. Dans tous ces cas, modifier légèrement les valeurs initiales n'entraîne pas de modification notable du comportement des points attirés par l'attracteur.

Par contre, il est encore possible que le point $M_n(x_n, y_n)$ ne revienne jamais à sa position initiale (aucun cycle) et, dans un espace à plusieurs dimensions, il errera à l'intérieur d'un domaine fini. Cette région pourra, après un certain nombre d'itérations, prendre la forme d'un ensemble géométriquement très complexe, d'allure fractale : un **attracteur étrange**. Dans ce cas, le comportement de la suite des points M_n est chaotique, en ce sens qu'une faible modification des valeurs initiales peut donner une évolution très différente.

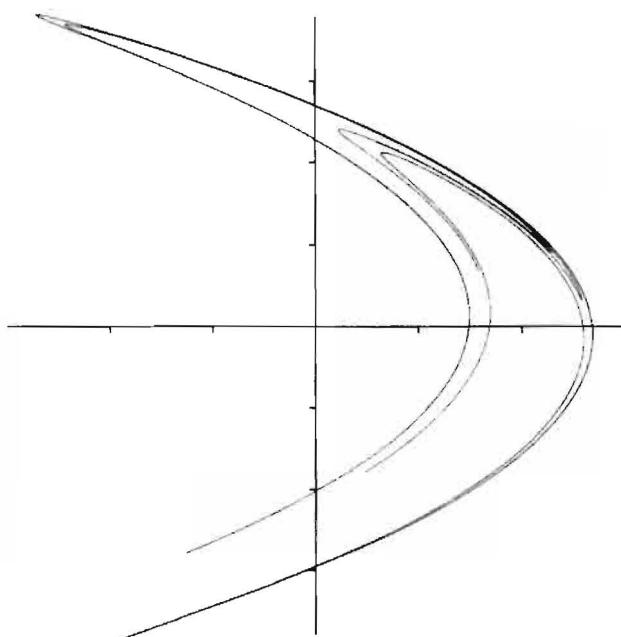
Un bel exemple est celui de l'*attracteur de HENON*, qui apparaît à propos du système dynamique discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - ax_n^2 + 1 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases}$$

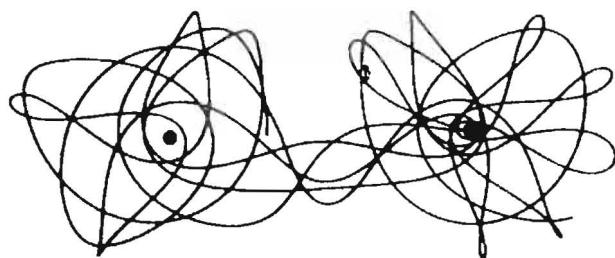
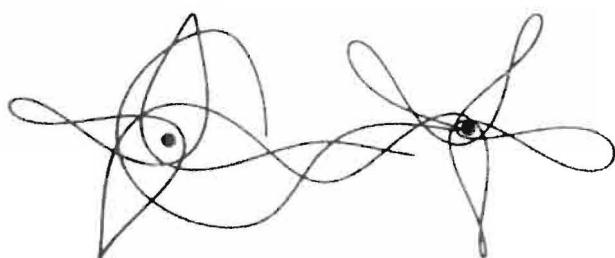
Pour les constantes $a = 1,4$ et $b = 0,3$, les points $M_n(x_n, y_n)$ tendent, lorsque n augmente indéfiniment, vers un attracteur étrange, dit *attracteur de HENON*.

Pour les constantes $a = 1,3$ et $b = 0,3$, l'attracteur est constitué de 7 points seulement, attirant pério-

diquement les points M_n .



Une humble fonction du second degré, qu'on peut traiter à la calculatrice de poche, nous a permis d'explorer un peu les mystères de la turbulence. Observations empiriques et découvertes peuvent donc s'étayer mutuellement et donner naissance à un réseau plus riche, point de départ de nouvelles démonstrations. N'est-ce-pas là toute la puissance des mathématiques d'aujourd'hui ?



Orbites typiques du problème des trois corps en mécanique céleste : mouvements chaotiques d'une petite planète autour de deux "soleils" de masse égale. En haut, l'amorce des trajectoires, en bas la suite...