

JEUX MATHÉMATIQUES

Les attracteurs étranges, de fragiles structures mathématiques entre l'ordre et le désordre, et les nombres de Feigenbaum.

par Douglas Hofstadter

« Vous ne pouvez savoir combien je suis heureux
Que nous nous rencontrions,
Je me sens étrangement attiré par
vous. »

Cole PORTER
« It's All Right with Me »

Il y a quelques mois en arpantant les couloirs du département de physique de l'Université de Chicago avec un ami, je repérai l'annonce d'un colloque international sur « les attracteurs étranges ». Mon regard était étrangement attiré par ce curieux titre et je demandai à mon ami de quoi il s'agissait. Il me dit que c'était un sujet de physique théorique très en vogue actuellement. Tel qu'il me le décrivit, cela semblait à la fois merveilleux et mystérieux.

L'idée fondamentale reposait sur ce que l'on pourrait appeler une boucle de rétroaction mathématique, c'est-à-dire un calcul dont le résultat peut être réintroduit dans le même calcul en tant que nouvelle valeur d'entrée, de la même façon que le son d'un haut-parleur peut y être renvoyé, par l'intermédiaire d'un microphone, et en ressortir. La plus simple de ces boucles pouvait, semble-t-il, engendrer des structures régulières ou des structures chaotiques (si tant est que ces mots ne sont pas contradictoires !) ; la différence se situait simplement dans la valeur d'un seul paramètre. Une très petite variation de ce paramètre pouvait changer du tout au tout le comportement du système bouclé sur lui-même. Cette image d'un ordre se fondant doucement en un désordre, d'une structure régulière se détériorant graduellement en une structure aléatoire, était à mon avis passionnante.

De plus, il semblait que des propriétés « universelles » et inattendues de la transition vers le chaos avaient été mises récemment à jour, des propriétés qui dépendaient uniquement de la présence de la rétroaction et qui étaient virtuellement indépendantes des autres parti-

cularités du système. Une telle généralité était importante car tout modèle mathématique qui conduirait par étapes vers un comportement chaotique, pourrait apporter une clé pour comprendre la survenue de la turbulence dans toutes sortes de systèmes physiques. La turbulence, à l'inverse de la plupart des phénomènes bien expliqués par la physique, est non linéaire : la somme de deux solutions des équations de la turbulence ne constitue pas une nouvelle solution. Les mathématiques du non linéaire sont bien moins comprises que celles du linéaire et c'est pourquoi une bonne description mathématique de la turbulence a depuis longtemps échappé aux recherches des physiciens pour qui elle constituait une percée théorique importante mais encore à faire.

Plus tard, en me documentant, je m'aperçus que ces idées étaient apparues simultanément dans de nombreuses disciplines, par exemple chez les mathématiciens qui avaient commencé à étudier l'itération de systèmes non linéaires à l'aide d'ordinateurs, chez les théoriciens de la météorologie et de la génétique des populations, tout comme chez les physiciens étudiant des objets aussi variés que les fluides, les lasers et les orbites planétaires ; tous avaient indépendamment mis en évidence des modèles mathématiques non linéaires présentant des boucles de rétroaction génératrices de chaos et avaient étudié leurs propriétés, chaque groupe découvrant quelques bizarries que les autres n'avaient pas trouvées. Bien plus, non seulement les théoriciens mais aussi les expérimentateurs de ces disciplines très éloignées avaient observé des phénomènes chaotiques qui présentaient des similitudes fondamentales. Je m'aperçus vite que la simplicité des idées sous jacentes leur conférait une élégance qui, selon moi, rivalise avec quelques-unes des plus belles théories des mathématiques classiques. De fait, il y a dans certains de ces travaux un style XVIII^e ou XIX^e siècle qui est agréablement concret à notre époque d'abstraction poussée.

Si ces idées n'ont été découvertes que récemment c'est probablement parce que les moyens d'étude sont entièrement modernes : un type d'expérimentation mathématique dans laquelle l'ordinateur joue le rôle du bateau de Magellan, du télescope de l'astronome ou de l'accélérateur de particules des physiciens. Les bateaux, les télescopes et les accélérateurs de particules doivent être toujours plus grands, toujours plus puissants et toujours chers pour pouvoir explorer les régions les plus cachées de la nature et parallèlement on a besoin d'ordinateurs plus gros, plus rapides et plus précis pour explorer les confins de l'espace mathématique. Tout comme il y eut un âge d'or dans l'exploration maritime et les découvertes faites grâce aux télescopes et aux accélérateurs, âge d'or caractérisé par un maximum de découvertes par rapport aux sommes dépensées, on peut espérer un âge d'or dans l'expérimentation mathématique de ces modèles du chaos. Peut-être cet âge est-il déjà passé ou sommes-nous en plein dedans ? Après cette période, nous devrions voir apparaître une vague de travaux théoriques qui coordonneront ces découvertes expérimentales.

Dans tous les cas, c'est une curieuse et passionnante branche des mathématiques qui est en train de se créer. En sautant la démarche traditionnelle « énoncé puis démonstration de théorème » des mathématiques et en exploitant la puissance de l'ordinateur, nous arrivons rapidement à des observations empiriques et à des découvertes qui peuvent s'étayer mutuellement et former un réseau riche et cohérent d'idées dont, à la longue, il sera facile d'extraire les démonstrations nécessaires car le domaine conceptuel aura été minutieusement quadrillé à l'avance. L'un des plus grands promoteurs de ce style de mathématiques a été Stanislaw Ulam qui, dès la naissance des ordinateurs, les a utilisés pour résoudre des problèmes d'itération non linéaire et aussi des problèmes appartenant à d'autres branches des mathématiques. Pour écrire cette rubrique je me suis inspiré des premières études de S. Ulam et de Paul Stein.

Assez de digressions ; commençons notre excursion vers la notion d'attracteur étrange, par celle, plus fondamentale, d'attracteur. Le domaine entier repose sur un concept : celui d'itération d'une fonction mathématique à valeur réelle, c'est-à-dire le comportement de la suite de valeurs $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots$, où f est une fonction particulière. La valeur initiale de x est appelée « la graine ». L'idée est de réintroduire la valeur de la fonction comme nouvelle valeur de la variable dans la fonction, et ainsi de suite, pour voir si une espèce de structure se dégage.

Un problème intéressant et pas trop difficile concernant l'itération d'une fonction est celui-ci : pouvez-vous trou-

ver une fonction p telle que pour n'importe quelle valeur réelle de x , $p(x)$ soit aussi réel et que $p(p(x))$ soit égal à $-x$? C'est la condition $p(x)$ réel ce qui complique le problème; autrement la fonction $p(x) = ix$ (où i est la racine carrée de -1) serait une solution. En fait, vous pouvez aussi concevoir ce problème comme la recherche d'une valeur réelle de la racine carrée du signe « moins ». Un problème voisin est de trouver une fonction à valeur réelle q ayant la propriété $q(q(x)) = 1/x$ pour tout x différent de 0. Remarquez que quelle que soit la façon dont vous construirez les fonctions p et q , chacune aura la propriété qu'à partir d'une graine quelconque, l'itération conduira à un cycle d'ordre quatre.

Plus généralement, quel type de fonction est-il susceptible, par itérations successives, de présenter un comportement cyclique ou quasi-cyclique? Une fonction simple telle que $3x$ ou x^3 lorsqu'elle est itérée, ne conduit à aucun comportement de ce type. La n -ième itération de $3x$ par exemple est $3 \times 3 \times 3 \times \dots \times 3 \times x$ avec n 3, c'est-à-dire $3^n x$ et la n -ième itération de x^3 est $((x^3)^n)^3 \dots$ avec encore n 3, c'est-à-dire x^{3^n} . Rien de cyclique dans ceci; les valeurs croissent de plus en plus. Pour inverser cette tendance, on a besoin d'une fonction avec une espèce de dos d'âne — un petit zigzag ou un tournant. Autrement dit, de façon plus technique, on a besoin d'une fonction non monotone : une fonction dont le graphe est replié, c'est-à-dire qui commence par monter, se courbe et descend ensuite.

Sur la partie gauche de la figure 1 nous avons une dent de scie avec un sommet pointu et, sur la partie droite,

un arc de parabole. Chacune de ces courbes croît à partir de l'origine et atteint un maximum appelé λ , puis décroît jusqu'à l'autre bout de l'intervalle. Bien évidemment, il y a une infinité de courbes qui passent par un maximum λ puis décroissent, mais parmi celles-ci, ces deux-là sont les plus simples, la parabole étant la plus agréable d'un point de vue mathématique. Son équation est $y = 4\lambda x(1-x)$, avec λ inférieur à 1.

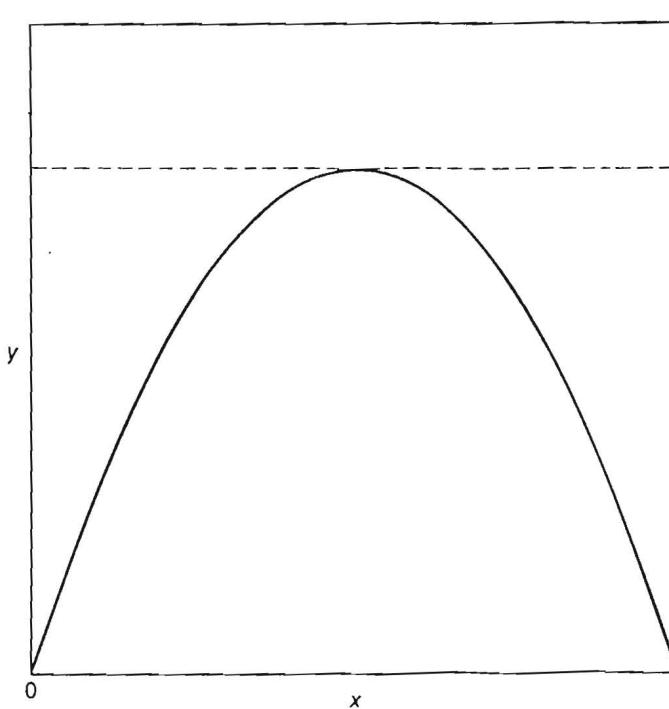
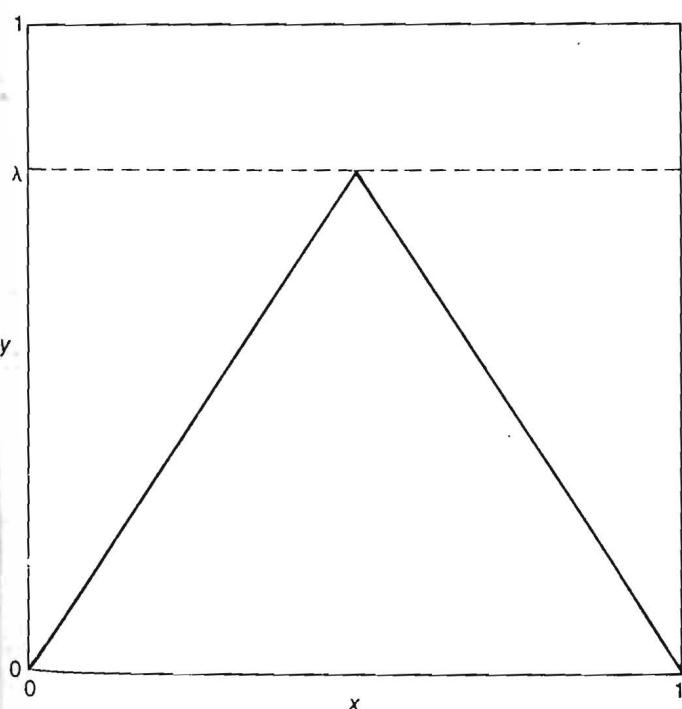
Nous n'autoriserons que des valeurs de x comprises entre 0 et 1. Comme le montre le graphe, pour n'importe quelle valeur de x dans cet intervalle, la valeur de la fonction y est toujours comprise entre 0 et λ . Par conséquent, la valeur de la fonction pourra toujours être réintroduite comme valeur de la variable, ce qui nous assure que les itérations successives seront toujours possibles. Lorsque vous itérez répétitivement une fonction « pliée » comme celle-ci, les valeurs successives de y que vous obtenez vont parfois croissant, parfois décroissant, se maintenant bien sûr toujours entre 0 et λ ; le repliement du graphe garantit des phénomènes intéressants lors des itérations, ainsi que nous allons le voir.

Il se trouve que les spectaculaires différences dans le degré de régularité des structures que j'ai signalées auparavant sont dues aux variations de la valeur de ce que l'on peut appeler le « curseur λ ». Selon la position du curseur, la fonction produit une incroyable variété d'« orbites », c'est-à-dire de suites $x, f(x), f(f(x)),$ etc. En particulier, pour λ inférieur à une certaine valeur critique ($\lambda_c = 0,892486417967\dots$), les orbites sont tou-

tes régulières et structurées (bien qu'il existe des degrés divers dans la régularité; en général c'est pour les valeurs les plus petites de λ que la structure des orbites est la plus simple), mais pour λ égal ou supérieur à cette valeur critique, cramponnez-vous! Vous obtiendrez une suite chaotique de valeurs $x, f(x), f(f(x))\dots$, quelle que soit la valeur positive de la graine que vous aurez choisie. Dans le cas de la parabole, le rôle critique joué par le curseur λ semble avoir été pour la première fois mis en évidence par P. Myrberg, au début des années 1960, mais son travail publié dans un journal obscur n'avait pas attiré l'attention. Quelque dix années plus tard, Nicholas Metropolis, Paul Stein et Myron Stein redécouvrent l'importance du curseur λ , pas seulement pour la parabole mais aussi pour beaucoup de fonctions. En fait, ils ont découvert moyennant certaines conditions topologiques, que seule la valeur de λ est importante et non la nature de la fonction. C'est ce que l'on a appelé « une structure universelle ».

Pour voir comment survient cette dépendance non intuitive de la position du curseur λ nous devons visualiser le processus d'itération de la fonction $f(x)$. C'est facile. Supposons que nous prenions λ égal à 0,7 : le graphe de $f(x)$ apparaît sur la figure 2. De plus, le trait en pointillé à 45 degrés représente la première bissectrice, c'est-à-dire la droite $y = x$. (Ce graphe ainsi que la plupart de ceux de cet article ont été réalisés sur un mini ordinateur par Mitchell Feigenbaum du Laboratoire américain de Los Alamos.)

Considérez les abscisses des deux points d'intersection de la droite à 45



1. Exemples de fonctions « repliées » comportant un maximum pointu (à gauche) ou doux (comme la parabole à droite).

degrés et de la courbe. Ce sont $x = 0$ et $x = 9/14 = 0,643$. Désignons par x^* l'abscisse non nulle. Par construction, $f(x^*)$ est égale à x^* et l'itération répétée de f pour cette valeur conduit à une boucle sans fin. Le même phénomène se produit si vous commencez l'itération par $x = 0$; cependant, la différence essentielle entre ces deux « points fixes » de f apparaît quand on prend une autre valeur initiale de x , par exemple une valeur proche de 0, soit 0,04, comme cela est indiqué sur la même figure; appelons cette valeur de départ x_0 . Nous allons décrire un procédé graphique élégant pour tracer l'orbite de n'importe quelle « graine » x_0 . Une droite verticale issue de l'abscisse x_0 coupe la courbe à l'ordonnée $y_0 = f(x_0)$. Pour itérer la fonction f , nous devons tracer une nouvelle verticale issue du point dont l'abscisse x a cette valeur y_0 de y . C'est ici que la droite à 45 degrés devient utile. Partant de l'ordonnée y_0 , nous nous déplaçons horizontalement jusqu'à couper la première bissectrice. Alors, comme sur cette droite y est égal à x , x et y sont tous deux égaux à y_0 . Appelons cette nouvelle valeur x_1 . Nous traçons maintenant une deuxième droite verticale. Celle-ci coupe la courbe à l'ordonnée $y_1 = f(x_1) = f(y_0) = f(f(x_0))$. Il suffit de recommencer. En bref, l'itération se réalise graphiquement en suivant une

recette simple : (1) se déplacer verticalement jusqu'à couper la courbe puis (2) se déplacer horizontalement jusqu'à couper la diagonale. Répéter les étapes (1) et (2) indéfiniment.

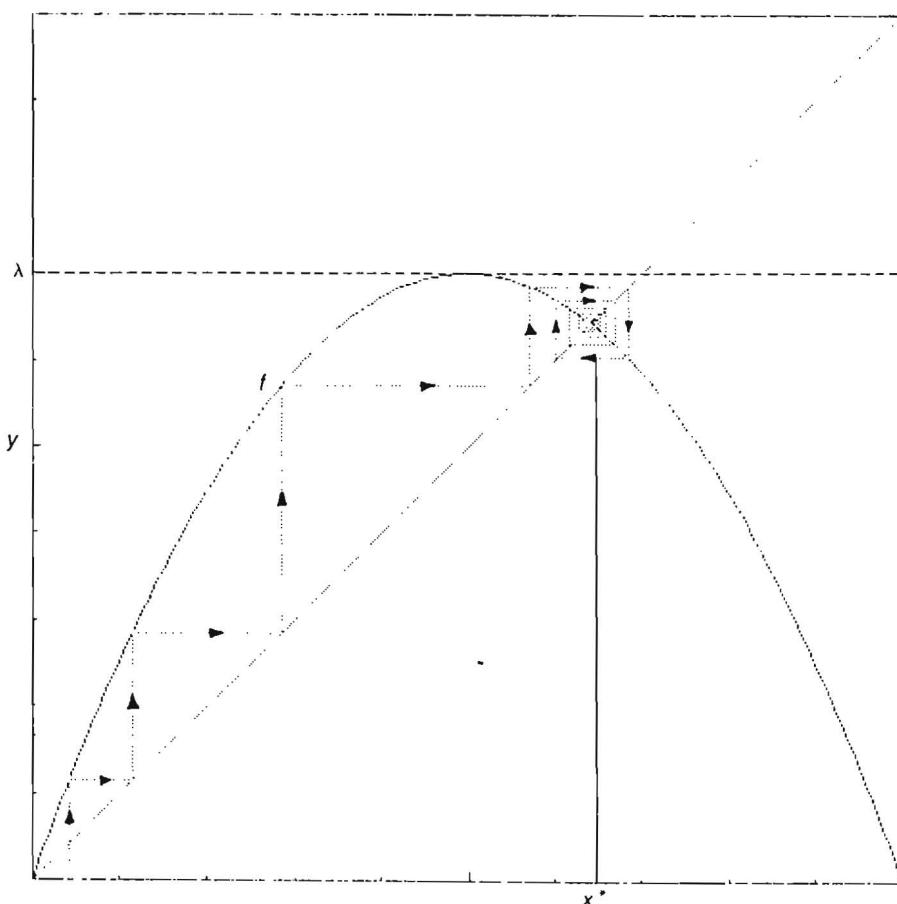
Le résultat de ce procédé avec la graine $x_0 = 0,04$ est visible sur la figure 2. Si l'on suit l'orbite, on est embarqué dans un maëstrom autour du point dont l'abscisse et l'ordonnée sont x^* . On se rapproche graduellement de ce point et, par conséquent, x^* est un type spécial de point fixe parce qu'il « attire » les valeurs itérées de $f(x)$. C'est l'exemple le plus simple d'un attracteur : toute graine (à l'exception de 0) convergera au cours de l'itération vers cette valeur stable de x . On appelle par conséquent x^* un point fixe stable. Par opposition, 0 est un point répulsif ou point fixe instable car l'orbite de n'importe quelle valeur initiale de x , même infiniment proche de 0, s'éloignera de 0 vers x^* . Remarquez que parfois l'itéré de f dépassera x^* , parfois il sera en-deçà, mais qu'il se rapprochera inexorablement de x^* , convergeant vers x^* comme les cigognes vers Strasbourg. A quoi est due cette différence qualitative fondamentale entre les deux points fixes (0 et x^*) de f ? Une analyse plus attentive de la figure vous montrera que c'est parce que la pente de la courbe au point zéro est trop forte. C'est la pente locale de la courbe qui détermine le déplace-

ment horizontal à chaque itération de f . Quand la pente est supérieure à 45 degrés (que ce soit en montant ou en descendant), les itérations vous éloigneront de plus en plus de votre point de départ. Par conséquent, le critère de stabilité pour un point fixe est simple : la pente de la fonction au point fixe doit être plus petite que 45 degrés. C'est effectivement le cas pour x^* lorsque λ est égal à 0,7. De fait, la pente en ce point est d'environ 41 degrés, alors qu'en 0 elle est bien plus grande que 45 degrés.

Que se passe-t-il quand on augmente λ ? La position de x^* (x^* est par définition l'abscisse du point d'intersection de la courbe $y = f(x)$ et de la droite $y = x$) changera et la pente de f en x^* augmentera aussi. Que se passe-t-il lorsque la pente atteint 45 degrés ou dépasse cette valeur? Cela se produit pour λ égal à $3/4$. Nous appellerons Λ_1 cette valeur spéciale du curseur λ . Regardons le diagramme pour une valeur de λ légèrement supérieure, par exemple $\lambda = 0,785$ (voir la figure 3).

Qu'arrive-t-il si l'on part d'une graine choisie au hasard? Prenons encore $x = 0,04$; l'orbite que l'on obtient est dessinée sur la moitié supérieure de la figure. Comme vous le voyez, il se passe de très jolies choses. Dans un premier temps, les points se déplacent vers le voisinage de x^* (maintenant un point fixe instable de f), puis s'éloignent en spirale et effectuent doucement une espèce de parcours carré convergeant vers deux valeurs spéciales x_1^* et x_2^* . Cette oscillation élégante est appelée un cycle d'ordre 2 et la paire de valeurs (x_1^* et x_2^*), qui constitue ce cycle d'ordre 2 est encore appelée un attracteur, plus précisément un attracteur de période 2. Ce terme signifie que ce cycle d'ordre 2 est stable : il attire les valeurs de x au fur et à mesure que f est itéré. L'orbite pour n'importe quelle valeur positive de la graine (à l'exception de x^*) effectuera en fin de compte la même danse : elle approchera asymptotiquement le cycle d'ordre 2 parfait composé des points x_1^* et x_2^* , mais ne les atteindra jamais exactement. En revanche, en pratique, la proximité devient si grande que l'on peut tout aussi bien dire que l'orbite a été « capturée » par l'attracteur.

Pour mieux éclairer le phénomène, considérons le graphe d'une nouvelle fonction construite à partir de l'ancienne, soit le graphe de $g(x) = f(f(x))$, l'itéré de f représenté sur la partie inférieure de la figure 3. Remarquons tout d'abord que tout point fixe de f est aussi un point fixe de g et, par conséquent, 0 et x^* seront des points fixes de g . Mais, d'autre part, nous observons que puisque $f(x_1^*)$ est égal à x_2^* et inversement $f(x_2^*)$ est égal à x_1^* , g aura deux nouveaux points fixes : $g(x_1^*) = x_1^*$ et $g(x_2^*) = x_2^*$. Graphiquement, x_1^* et x_2^* se caractérisent facilement : ce sont deux des quatre

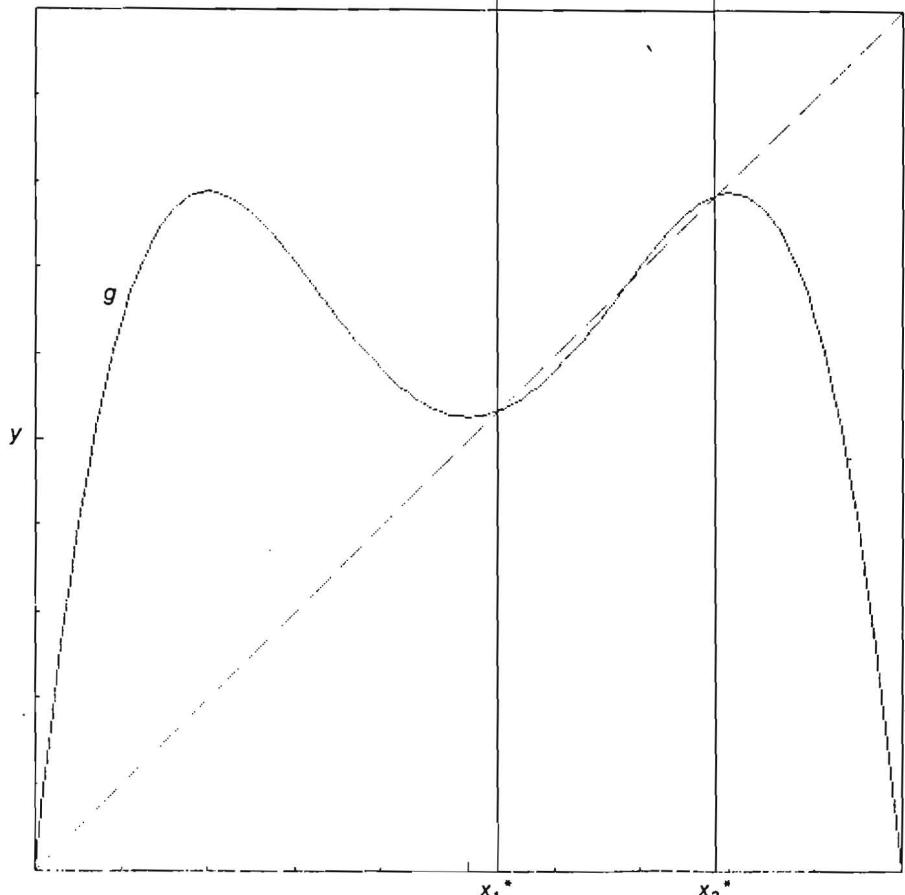
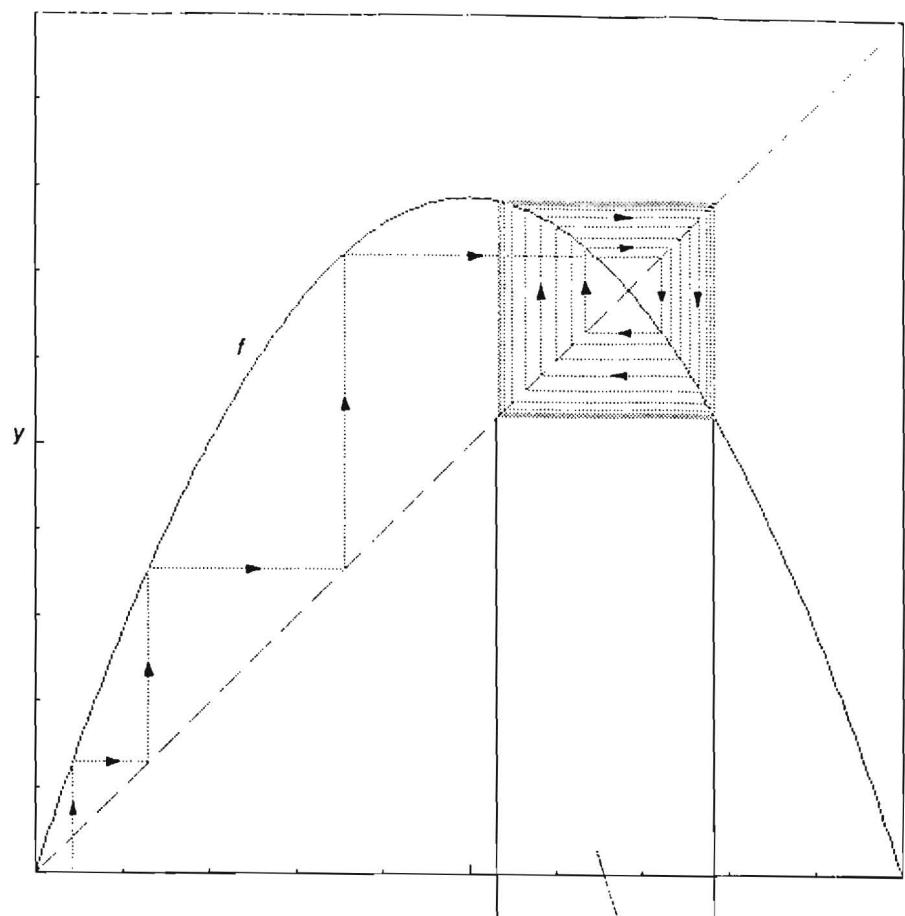


2. L'ajustement du « curseur λ » à la valeur 0,7 pour la fonction $f(x)$ engendre ce graphe et ce type de convergence.

oints d'intersection de la droite à 45 degrés avec la courbe à deux bosses de (x) . Comme nous l'avions vu, le critère de stabilité pour que n'importe quel point soit fixe sous effet de l'itération est que la pente en ce point soit inférieure à 45 degrés. Dans le cas présent, nous nous intéressons aux points fixes de g et, par conséquent, à la pente de g (distincte de la pente de f). De fait, sur la figure 3, nous voyons facilement qu'en 0 et x^* la pente de g est supérieure à 45 degrés, tandis qu'en x_1^* et x_2^* la pente de g est inférieure à 45 degrés. En fait, d'une façon assez marquable, non seulement ces deux pentes sont inférieures à 45 degrés, mais s'avère qu'elles sont égales (ou « associées » l'une à l'autre, comme on dit parfois).

Nous avons ainsi vu un attracteur de période un se transformer en un attracteur de période deux pour une valeur déterminée de λ ($\lambda = 3/4$). Plus précisément, à cette valeur, le point fixe unique x^* se dédouble en deux valeurs oscillantes x_1^* et x_2^* . Bien évidemment, ils coïncident à leur « naissance » mais, au fur et à mesure que λ croît, ils se séparent et s'éloignent de plus en plus l'un de l'autre. Cet accroissement de λ entraîne aussi une croissance de la pente de g en ces deux points fixes stables (de 0 jusqu'à ce que, pour une certaine valeur de λ , g , comme son géniteur f , atteigne son point de rupture (c'est-à-dire que les pentes identiques en x_1^* et x_2^* dépassent 45 degrés) ; alors chacun de ces deux points attractifs explosera engendrant son propre cycle d'ordre 2. (En fait, les cycles sont des cycles d'ordre 2 quand on se réfère à g ; pour ces nouveaux points font partie d'un attracteur de période quatre. Faites attention de bien distinguer f et g !) Ces deux dédoublements se produiront au même moment (c'est-à-dire pour la même valeur du curseur λ) puisque la pente de g en x_1^* est astreinte à être égale à celle de g en x_2^* . Cette valeur du curseur λ , appelée Λ_2 , est égale à 0,6237... (0,36237...)

Maintenant, vous pouvez anticiper la ligne mélodique du processus après avoir entendu le thème et une variation : vous avez probablement deviné que pour une nouvelle valeur particulière de Λ_3 , les quatre points de l'attracteur de f se dédoubleront simultanément, engendrant un attracteur périodique à huit points et, par la suite, que cette structure évoluera en se dédoublant à chaque fois qu'une valeur déterminée du curseur λ sera atteinte puis dépassée. Si telle est votre conjecture, elle est correcte et la raison profonde est la même à chaque fois : les pentes (identiques) aux points fixes stables d'un graphe donné atteignent l'angle critique de 45 degrés. Dans le cas du premier dédoublement (pour Λ_1), c'est la pente de f : elle mène au point unique x^* . Le dédoublement suivant est dû aux pentes



3. Une spirale convergeant vers un cycle d'ordre 2 stable (en haut de la figure) et les éléments du cycle x_1^* et x_2^* (en bas).

de g aux deux points fixes stables x_1^* et x_2^* qui atteignent simultanément 45 degrés. De la même façon, Λ_3 est la valeur de λ pour laquelle la pente de $h(x) = g(g(x)) = f(f(f(f(x))))$ atteint 45 degrés simultanément aux quatre points fixes stables de $h \dots$ et ainsi de suite. La figure 4 montre l'aspect bosselé de $h(x)$ pour une valeur de λ approximativement égale à 0,87.

Sur la figure 5, on a indiqué sur l'axe des x les positions des points fixes stables de f de Λ_1 jusqu'à Λ_6 (pour cette dernière valeur, il y en a 32, certains si proches qu'ils ne peuvent être distingués). La position de ces points est indiquée juste au moment où ils deviennent instables, un peu comme une cellule juste avant la mitose. Remarquez la structure ordonnée de la distribution des points attracteurs. En regardant les intervalles entre les éléments des différents doublets successifs d'attracteurs, vous pourrez constater que chaque ligne peut se déduire de la ligne précédente au moyen d'un schéma géométrique récurrent qui consiste à remplacer chaque point par deux points « jumeaux » en dessous. La structure de chaque amas local de points est similaire à celle de l'amas global, mais à une échelle plus petite (et avec une inversion de la droite et la gauche d'un amas local au voisin). Par exemple, dans la ligne du bas, un groupe local de huit points a été entouré

d'un cadre de couleur : ce groupe de points est comme une version miniature de la structure globale, deux lignes au-dessus. B. Mandelbrot dit qu'il est « scalant ».

La mise en évidence de cette régularité récurrente faite sur une calculatrice de poche par M. Feigenbaum est une des découvertes majeures dans le domaine. Elle stipule en particulier que pour construire la ligne $n + 1$ à partir de la ligne n , il suffit simplement que chaque point sur la ligne n donne naissance à deux jumeaux. La nouvelle génération de points doit être comprimée environ 2,5 fois plus que l'ancienne génération ; plus exactement, la distance entre deux nouveaux jumeaux doit être α fois plus petite que la distance entre leur parents et le jumeau de ce dernier, où α est une constante approximativement égale à 2,5029078750958928485... Cette règle s'applique d'autant mieux que n est grand.

Que peut-on dire des valeurs de Λ ? Convergent-elles asymptotiquement vers 1 ? Curieusement non. Les valeurs de Λ convergent rapidement vers une valeur particulière critique λ_c qui vaut approximativement 0,892486418... Et cette convergence est remarquablement régulière au sens où l'écart entre les valeurs successives de Λ diminue de façon géométrique. Plus précisément, le rapport $(\Lambda_n - \Lambda_{n-1}) / (\Lambda_{n+1} - \Lambda_n)$ appro-

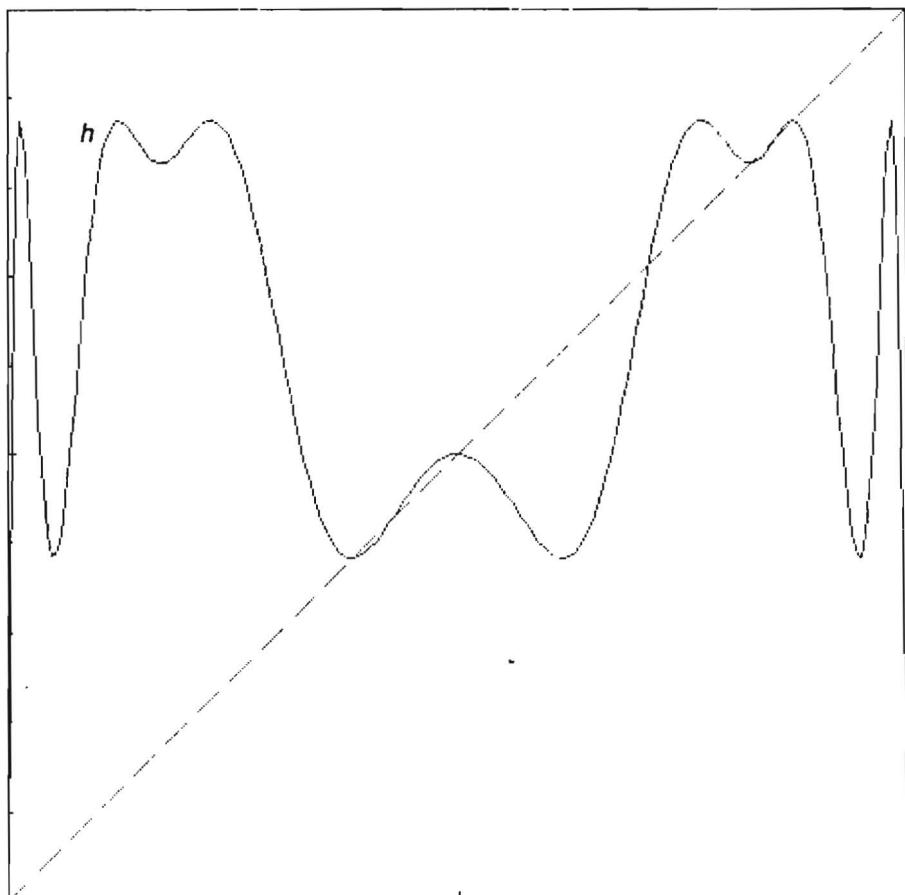
che une valeur constante baptisée δ par M. Feigenbaum mais que d'autres appellent plutôt la constante de Feigenbaum. Sa valeur est approximativement 4,669201660910299097...

En bref, au fur et à mesure que λ approche λ_c , à des valeurs précises déterminées par la constante δ de M. Feigenbaum, les attracteurs de f se dédoublent et le nombre croissant de ces attracteurs s'arrange géométriquement sur l'axe x selon une règle récurrente simple dont le paramètre principal est l'autre constante α de M. Feigenbaum.

Pour λ au-delà de λ_c , on pénètre dans le régime chaotique : le résultat de l'itération de f pour certaines valeurs de la graine conduit à une orbite qui ne converge vers aucun attracteur. Pour la plupart des graines, l'orbite reste périodique, mais la périodicité est difficile à détecter. En premier lieu, cette période est très longue ; en second lieu, l'orbite est bien plus chaotique qu'avant. Une orbite périodique typique, au lieu de converger rapidement vers un attracteur géométrique simple, musarde sur tout l'intervalle $[0,1]$ et son comportement est indistinguables d'un chaos absolu. Un tel comportement est dit ergodique. Bien plus, des graines voisines peuvent conduire, après un petit nombre d'itérations, à des orbites complètement différentes. Plus brièvement, il est bien plus avantageux, au-delà de λ_c , d'examiner le phénomène d'un point de vue statistique.

Ces concepts, tels que l'itération d'une fonction repliée, le doublement d'une période et le régime chaotique, quels liens ont-ils avec l'étude de la turbulence dans un écoulement hydrodynamique, les fluctuations erratiques des populations de proies et de prédateurs et l'instabilité des modes des lasers ? L'idée fondamentale réside dans le contraste entre un écoulement laminaire et un écoulement turbulent. Dans un fluide s'écoulant doucement, l'écoulement est laminaire, un mot doux et gentil qui signifie que les molécules se déplacent dans le fluide comme des voitures sur une route à plusieurs voies. Les caractéristiques fondamentales sont (1) que chaque voiture suit le même chemin que celle qui la précède et (2) que deux voitures voisines, qu'elles soient sur la même voie ou sur des voies différentes, pourront, au cours du temps, s'éloigner lentement l'une de l'autre (en fait, proportionnellement à leur différence de vitesse c'est-à-dire linéairement). Ces caractéristiques s'appliquent aussi aux molécules d'un fluide en écoulement laminaire ; dans ce cas, les voies sont appelées des lignes ou des surfaces de courant.

Au contraire, lorsqu'un fluide est brassé par une force externe, ce comportement paisible devient turbulent comme dans les vagues déferlantes sur une plage ou quand la crème est remuée dans le café. Le mot même de « turbulence » a une résonance plus âpre et

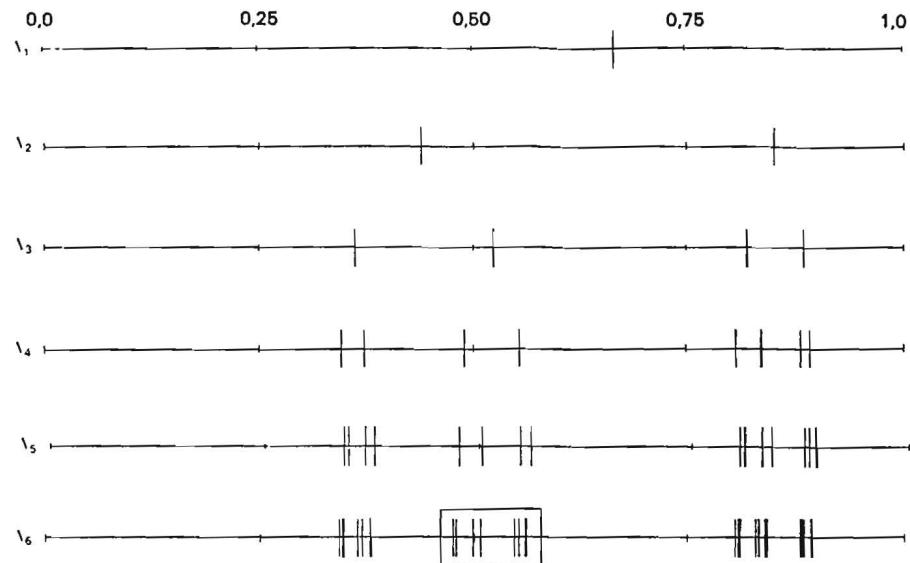


4. La courbe de $h(x)$ pour une valeur de $\lambda = 0,87$ est beaucoup plus accidentée que celle de $g(x)$.

plus anguleuse que le mot « lamine ». Ici, l'image d'une route à voies multiples n'est plus appropriée ; les courants se séparent les uns des autres et s'emmêlent selon des motifs irréguliers et changeants. Dans de tels systèmes coexistent des remous, des tourbillons et toute sorte de volutes de différentes tailles et, par conséquent, deux points qui étaient initialement très proches peuvent, en peu de temps, se retrouver dans des régions totalement différentes du fluide. Des trajets aussi rapidement divergents sont la marque même de la turbulence. La distance entre deux points peut croître exponentiellement avec le temps, plutôt que linéairement, et le coefficient du temps dans l'exponentielle est appelé le nombre de Lyapunov. Lorsque l'on parle du chaos à propos d'un écoulement turbulent, il s'agit de cette rapide et pratiquement imprévisible séparation des voisins. Un tel comportement est une étonnante réminiscence de la séparation rapide, dans le régime chaotique de λ , de deux orbites dont les graines étaient voisines au départ.

Notre parabole suggère que le scénario dans lequel de jolies orbites périodiques se défont en orbites chaotiques et désordonnées pourrait être mathématiquement identique à celui qui sous-tend la transition vers la turbulence dans un fluide ou dans un autre système. Cependant, pour discerner comment s'établit cette relation, il faut examiner le décor de plus près ; en particulier, nous devons brièvement étudier comment l'écoulement spatio-temporel d'un fluide ou de tout autre quantité comme la densité de population ou la monnaie est modélisé mathématiquement.

Dans de tels problèmes concrets, les équations les plus efficaces découvertes jusqu'à présent pour modéliser ces phénomènes sont des équations différentielles. Une équation différentielle relie le taux de variation continue d'une certaine quantité à la valeur actuelle de cette grandeur et les valeurs actuelles d'autres quantités. Qui plus est, la variable temps est elle-même continue, ne sautant pas d'un instant discret à un autre comme l'aiguille de certaines étranges horloges, mais s'écoule de façon continue, comme un liquide. Une façon de visualiser la structure définie par des équations différentielles est d'imaginer un espace multidimensionnel – qui peut avoir des milliers de dimensions ou simplement quelques-unes – dans lequel un point décrit continûment une trajectoire. A n'importe quel instant, le point unique contient toutes les informations sur l'état du système physique. Ses projections sur les divers axes donnent la valeur de tous les paramètres pertinents qui caractérisent l'état d'un système. Bien évidemment, cet espace – appelé espace des phases – a besoin d'un nombre énorme de dimensions, ne se-



5. Les attracteurs stables deviennent instables et « fissionnent » pour une suite de valeur Λ du curseur (de haut en bas).

rait-ce que pour décrire la forme d'une vague déferlant sur une plage. Au contraire, dans la relation simple prédateur-préy, deux dimensions suffisent : une variable x , représentant la population des prédateurs et l'autre, y , celle des proies.

Au fur et à mesure que le temps s'écoule, x et y varient en sens inverse l'un de l'autre : une grande population de prédateurs réduit la population des proies, tandis qu'une petite population de proies tend à diminuer la population des prédateurs. Dans un tel système, x et y sont représentés par un seul point qui tourbillonne selon une orbite plane continue. (Ici, le sens d'« orbite » est différent du sens utilisé dans le cas de l'itération de la fonction parabolique où l'orbite est constituée de sauts d'un point à un autre.) Une telle orbite est représentée sur la figure 6 ; elle est engendrée par une équation différentielle, dite de Duffing, et ressemble à la trajectoire décrite par une mouche dans une pièce ou, plus exactement, à l'« ombre » de la trajectoire de la mouche sur le mur. De fait, cette courbe bidimensionnelle qui se recoupe est la projection d'une courbe tridimensionnelle ne se recouplant pas : en effet, la trajectoire d'un point dans l'espace des phases ne doit « jamais » repasser par un même point ; cela découle du fait qu'un point de l'espace des phases représente l'état d'un système et caractérise toutes les informations sur ce système, particulièrement son histoire future, de telle sorte qu'il ne peut exister deux chemins différents partant d'un seul et même point.

En particulier, dans l'équation de Duffing, il existe une troisième variable dont je n'ai pas parlé jusqu'à présent. Si vous imaginez que x et y représentent les populations de prédateurs et de proies, alors z peut représenter un paramètre externe périodique comme,

par exemple, la hauteur du Soleil ou l'épaisseur de la neige sur le sol. Maintenant, nous allons associer l'image de la mouche bourdonnante avec l'exemple prédateurs-proies ; représentez-vous la chambre avec une mouche vrombissante, allant et venant entre deux murs. Admettons que la mouche mette une année pour traverser la chambre et revenir (la chambre est très grande ou la mouche vole lentement). Quoi qu'il en soit, au cours du vol de la mouche, son ombre sur l'un des deux murs décrira la courbe dessinée sur la figure 6. Si par hasard la mouche revient en un point de la chambre où elle est déjà passée, elle est condamnée à repartir perpétuellement le chemin qu'elle avait pris auparavant. Vous obtenez ainsi l'image d'une orbite continue dans l'espace des phases représentant l'état d'un système gouverné par des équations différentielles.

Maintenant, supposons que nous voulions établir une correspondance entre ces systèmes et des orbites discrètes. Comment faire ? Tout simplement remarquer que les valeurs de x , y et z n'ont pas besoin d'être observées à tout instant ; elles peuvent être échantillonées périodiquement, à une fréquence naturelle. Dans le cas d'une population d'animaux, l'année est la période évidente : la hauteur du Soleil est exactement périodique et le climat essaie tant bien que mal de se répéter d'une année exceptionnelle à l'autre ! Par conséquent, une suite naturelle de points (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) peut être sélectionnée, à raison d'un point par an, comme si un projecteur s'allumait périodiquement pour faire un instantané de la mouche à des moments annuels bien précis (comme un stroboscope), par exemple à minuit la veille de Noël. A tout autre instant, les pérégrinations de la mouche sont invisibles. Sur la fi-

Figure 7, on a représenté une suite discrète de points, le long de l'ombre du chemin de la mouche, repérés par des nombres indiquant l'instant où ils sont observés. Graduellement, après qu'un certain nombre « d'années » se sont écoulées, il y aura un nombre suffisant de ces points discrets et leur accumulation dessinera une forme reconnaissable. Cet ensemble de points est une « orbite »

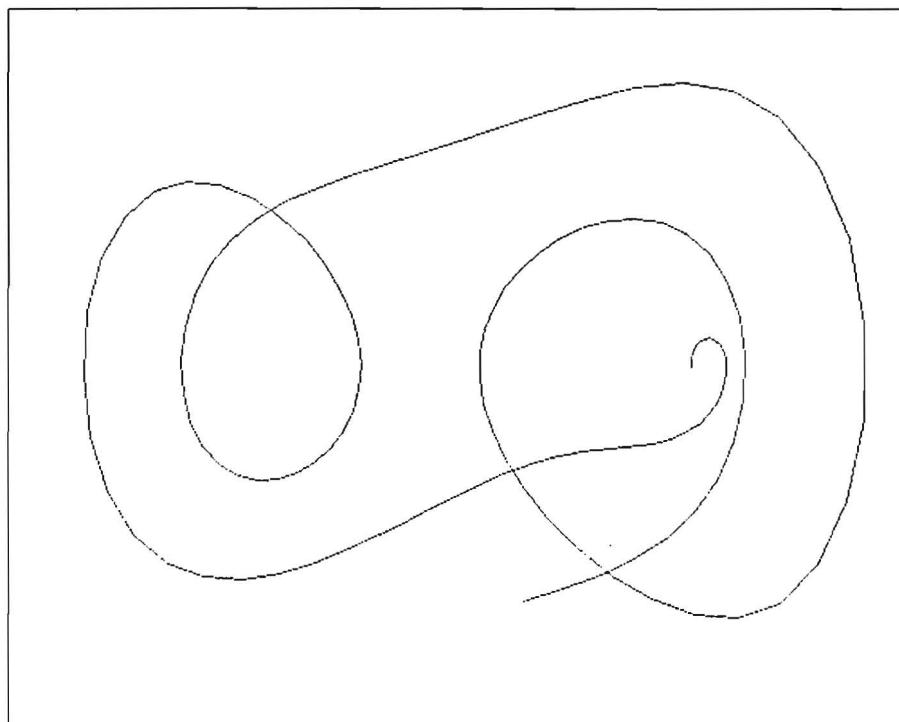
discrète et, par conséquent, elle est étroitement liée à l'orbite discrète définie par l'itération de la parabole $f(x)$. Dans le cas de la parabole, nous avons une simple relation de récurrence unidimensionnelle (ou itération) : $x_{n+1} = f(x_n)$. Ici, c'est une récurrence bidimensionnelle : $x_{n+1} = f_1(x_n, y_n)$ et $y_{n+1} = f_2(x_n, y_n)$.

Nous avons ici affaire à un système

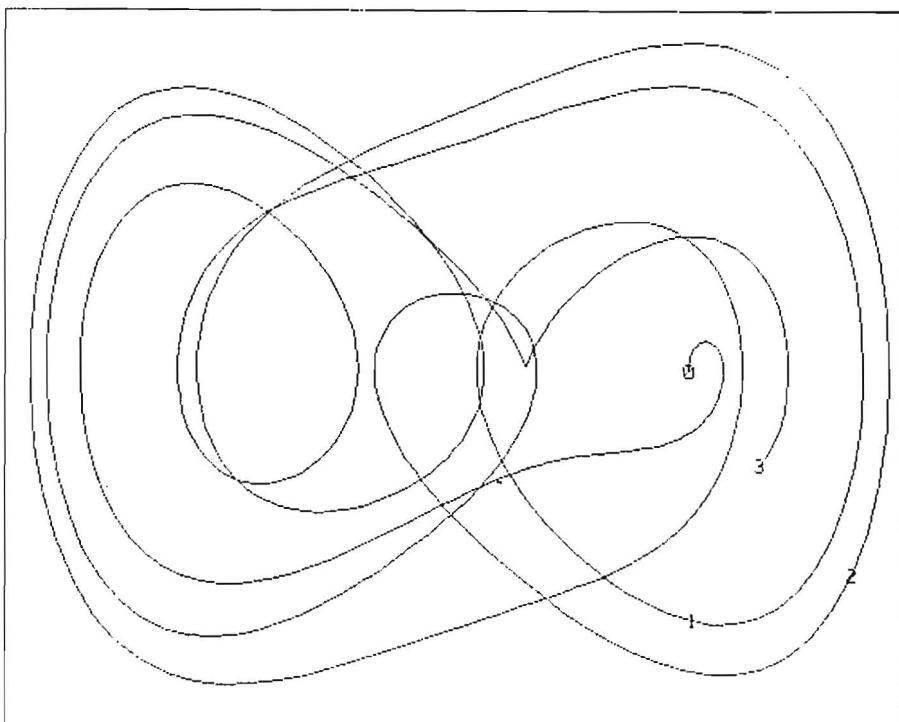
de relations de récurrence *couplées* dans lequel les valeurs de la n ème génération (x_n et y_n) sont réintroduites dans f_1 et f_2 comme nouvelles valeurs de la variable pour engendrer la $n+1$ ème génération, et ainsi de suite, de génération en génération. Bien évidemment, dans le cas où il y a beaucoup plus de dimensions, il y a d'autant plus d'équations de ce type. Néanmoins, l'architecture de tous ces systèmes reste la même : un point multidimensionnel (x_n, y_n, z_n, \dots) saute de place en place dans l'espace des phases au fur et à mesure qu'une variable discrète (n représentant les sauts discrets du temps) est incrémentée.

Remarquez que nous avons ainsi tourné la difficulté liée à la continuité de la variable temps qui intervient dans les équations différentielles. Nous l'avons fait en examinant comment un point est relié à son prédecesseur un « n » auparavant (ou n'importe quelle période naturelle associée au système). Mais existe-t-il toujours une « période naturelle » pour observer un système de plusieurs équations différentielles couplées ? Pas toujours mais souvent, et notamment dans toutes les situations où un comportement turbulent apparaît.

Pourquoi ? Tous les systèmes qui présentent un comportement turbulent sont « dissipatifs », ce qui signifie qu'ils dissipent ou dégradent de l'énergie à partir d'une forme très utilisable comme l'énergie électrique, en une forme moins utilisable telle que l'énergie thermique. Cela est dû aux frottements dans le cas d'un écoulement hydrodynamique et à l'équivalent abstrait des frottements dans le cas des autres systèmes que nous avons envisagés. Une conséquence usuelle du frottement est que les objets en mouvement auront tendance à s'arrêter si on ne leur fournit pas d'énergie. Maintenant, si l'on « entraîne » un système dissipatif avec une force périodique (imaginez par exemple que vous remuez une tasse de café avec une cuillère, selon un mouvement circulaire périodique), alors, bien sûr, le système ne s'arrêtera pas : il s'établira une espèce d'état stationnaire. Un tel état stationnaire est une orbite stable ou, dans notre langage, un attracteur dans l'espace des phases. De plus, comme nous avons entraîné le système avec un mouvement de cuillère périodique, nous avons une fréquence naturelle à laquelle on peut allumer un projecteur et observer l'état du système : par exemple à chaque fois que la cuillère, dans son mouvement circulaire, passe devant un repère fixe comme l'anse de la tasse. Cela déterminera notre « année ». De cette façon, on peut remplacer le temps continu par une suite discrète d'instants, pour autant que l'on étudie un système mû par une force périodique : par conséquent, les orbites continues pourront être remplacées par des orbites discrètes ce qui ramène l'itération sur la scène.



6. Une courbe engendrée par l'équation de Duffing ressemble à l'ombre du vol d'une mouche sur un mur.



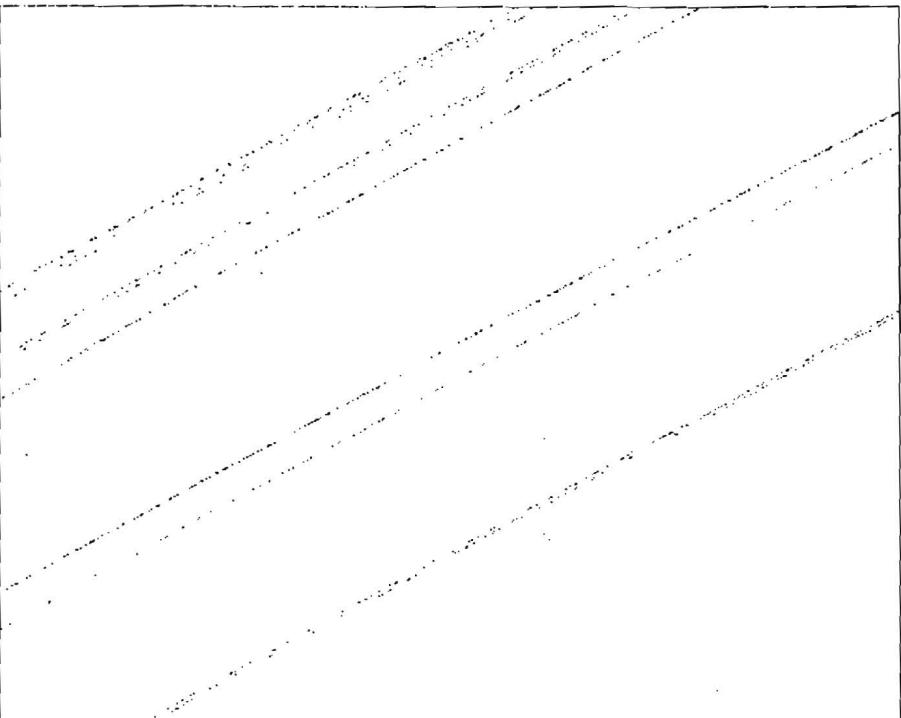
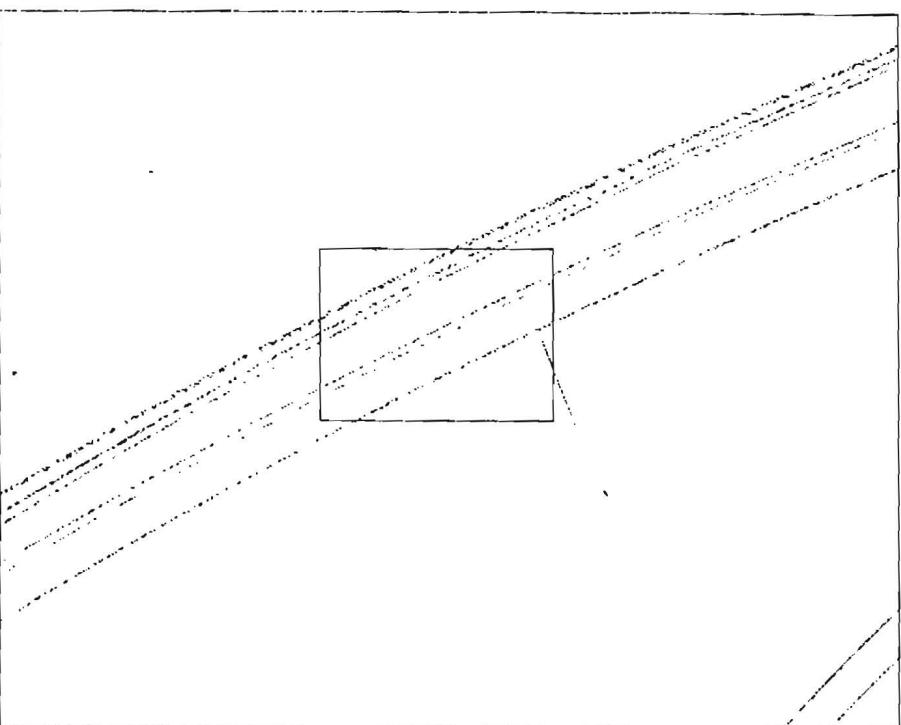
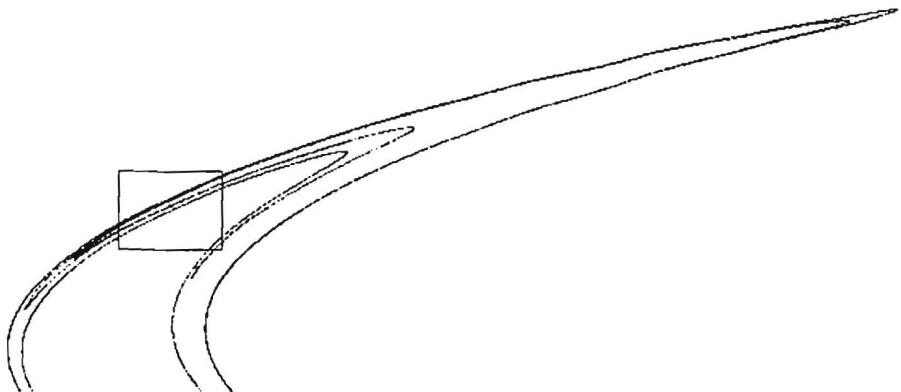
7. Les nombres sur la trajectoire du vol de la mouche représentent les positions de l'ombre de la mouche à intervalles réguliers.

Si la force motrice elle-même n'a pas une période naturelle (cela peut être simplement une force constante), il y a encore un moyen de définir une période naturelle, pour autant qu'une variable du système oscille entre deux valeurs extrêmes. Allumez votre projecteur juste au moment où cette variable atteint un extrémum ; le vol de la mouche sera ainsi toujours photographié à des instants discrets. Ce type de représentation discrète du vol de la mouche dans un espace multidimensionnel est appelé une projection de Poincaré.

Ces arguments ne sont bien sûr qu'intuitifs et il faudrait beaucoup plus de rigueur pour convaincre un mathématicien. Néanmoins, ils montrent comme un ensemble d'équations différentielles couplées peut être remplacé par un ensemble de relations de récurrences couplées. C'est l'étape essentielle qui nous conduit aux récentes découvertes sur la parabole.

En 1975, M. Feigenbaum découvrit que ses nombres α et δ ne dépendaient pas en réalité des détails de la forme de la courbe représentant $f(x)$, puisque toutes les courbes régulières de forme convexe qui culminent au même point font l'affaire. S'inspirant de l'universalité structurelle découverte par N. Metropolis, P. Stein et M. Stein, M. Feigenbaum décida d'étudier une sinusoïde au lieu d'une parabole. Il fut stupéfait de voir apparaître les mêmes valeurs numériques de α et δ (jusqu'à plusieurs décimales), qui caractérisaient le doublement de la période et l'apparition du chaos dans le cas de la parabole. Tout comme pour la parabole, il y a, pour la sinusoïde, un paramètre de hauteur λ et un ensemble déterminé de valeurs λ qui convergent vers une valeur critique λ_c . De plus, l'établissement du chaos est caractérisé par les mêmes nombres α et δ . M. Feigenbaum commença à suspecter qu'il y avait quelque chose d'universel là-dessous. Autrement dit, il pressentit que ce qu'il y avait de plus important que f elle-même c'était l'itération indéfinie de f . De fait, il subodora que f ne jouait peut-être aucun rôle dans l'établissement du chaos.

Bien sûr ce n'est pas aussi simple : M. Feigenbaum découvrit bientôt que ce qui importait dans f était sa structure au voisinage de son maximum. Le comportement à long terme des orbites dépend seulement d'un intervalle infinitésimal au voisinage du sommet du graphe et, finalement, ne dépend que du comportement à l'endroit exact du maximum. Le reste de la courbe, même très près du maximum, est sans importance. Une parabole présente ce que l'on appelle un maximum quadratique, tout comme une sinusoïde, un cercle et une ellipse. De fait, le comportement près d'un maximum ordinaire d'une fonction continue choisie au hasard pourra être



8. L'attracteur de Michel Hénon est agrandi en deux étapes, révélant ses détails indéfiniment imbriqués.

considéré comme de type quadratique en l'absence de circonstances spéciales ; par conséquent, le cas de la parabole, plutôt qu'une exception bizarre, semble être le cas général. Cette découverte empirique de M. Feigenbaum, concernant les deux facteurs d'échelle α et δ qui caractérisent l'établissement du chaos par l'intermédiaire d'attracteurs de périodes deux, représente un nouveau type d'universalité appelée universalité métrique, pour la distinguer de l'universalité structurelle précédemment rencontrée. Cette universalité métrique a été démontrée (au sens traditionnel des mathématiciens) dans le cas à une dimension par Oscar Lanford III.

L'apparition inattendue des constantes de M. Feigenbaum dans quelques modèles tarabiscotés de systèmes physiques réels, moins beaux et purs que les systèmes mathématiques, a conduit à des développements particulièrement passionnants. Valter Franceschini, de l'Université de Modane en Italie, a mis les équations de Navier-Stokes, qui gouvernent tous les écoulements hydrodynamiques, sous une forme se prêtant à la simulation par ordinateur. Pour ce faire, il a transformé ces équations en un ensemble de cinq équations différentielles couplées dont il a pu étudier numériquement sur ordinateur les projections de Poincaré. Il trouva d'abord que le système présentait des attracteurs se dédoublant périodiquement au fur et à mesure que les paramètres caractéristiques du système approchaient des valeurs où l'on s'attend à voir s'établir la turbulence. Ignorant le travail de M. Feigenbaum, il montra ses résultats à Jean-Pierre Eckmann de l'Université de Genève qui

l'invita immédiatement à calculer la vitesse de la convergence des valeurs de λ pour lesquelles un doublement de la période apparaissait. À sa grande surprise, les valeurs des constantes de M. Feigenbaum α et δ avec quatre décimales exactes apparaissent comme par miracle ! Pour la première fois un modèle mathématique précis de la turbulence physique réelle révélait que sa structure était intimement reliée à l'humble chaos se cachant dans la modeste parabole $y = 4\lambda x(1-x)$. Par la suite, J.P. Eckmann, Pierre Collet et H. Koch montrèrent que dans le comportement d'un système dissipatif régi par un paramètre multidimensionnel, toutes les dimensions sauf une n'avaient plus d'importance après une période suffisamment longue et que l'on pouvait par conséquent espérer que les caractéristiques d'un comportement unidimensionnel – précisément l'universalité métrique de M. Feigenbaum – réapparaîtraient.

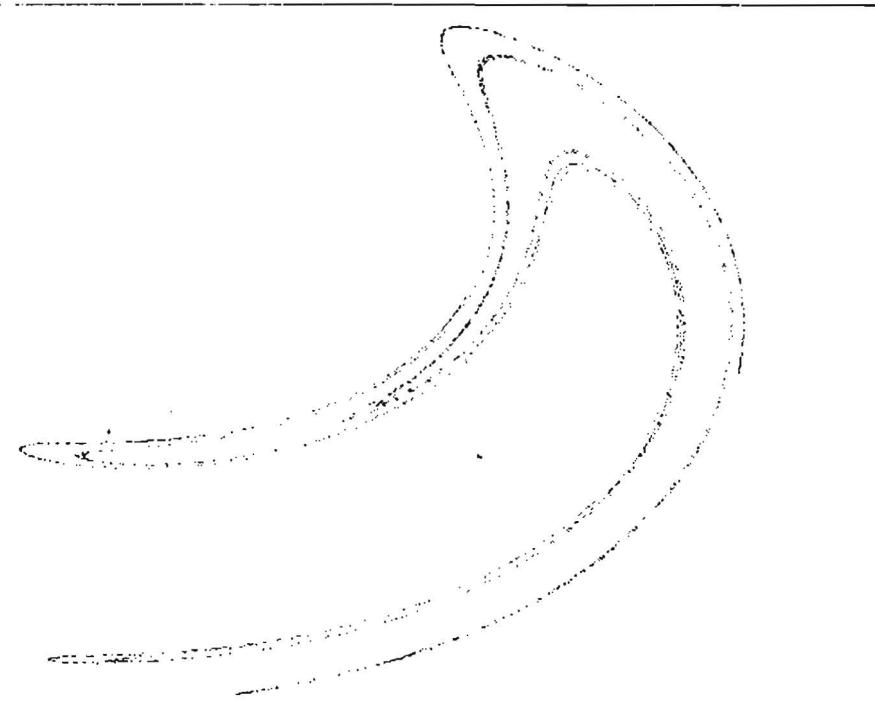
Depuis, de nombreux expérimentateurs ont décortiqué le comportement de systèmes physiques réels (pas seulement sur des modèles numériques), à la recherche d'une évolution par doublement de période. De tels comportements ont été observés dans certains types d'écoulements convectifs mais, jusqu'à présent, les mesures sont trop imprécises pour donner une base solide à l'idée que le modèle de la parabole peut décrire la nature de la véritable turbulence physique. Certes, il est tentant de penser que d'une façon ou d'une autre, tout ce qui importe vraiment est qu'un système de relations de récurrences couplées soit itéré mais que les propriétés détaillées de ces relations de

référence peuvent être entièrement ignorées si l'on ne s'intéresse qu'à l'établissement de la turbulence.

D'après M. Feigenbaum, on observe souvent une certaine disposition des nuages dans le ciel où un grand nombre de petits nuages s'étendent sur l'horizon ; une telle structure ne peut être entièrement accidentelle. Une loi hydrodynamique systématique doit agir. De plus, dit M. Feigenbaum, il doit exister une loi s'appliquant à un niveau plus élevé ou à plus grande échelle que les équations de Navier-Stokes qui sont fondées sur des volumes infinitésimaux de fluide et non sur de grands « amas ». Il semble que pour comprendre de telles structures célestes, il nous faille, d'une façon ou d'une autre, gommer les « détails » des équations de Navier-Stokes et concevoir une approche plus grossière mais plus réaliste de l'écoulement hydrodynamique. La découverte que l'itération conduit à une loi universelle, c'est-à-dire une indépendance par rapport aux détails de la fonction (ou des fonctions) itérée, nous permet d'espérer qu'une telle approche de l'hydrodynamique est sur le point d'émerger.

Nous avons parlé des attracteurs et de la turbulence, mais *quid* des attracteurs étranges ? Nous disposons maintenant des concepts nécessaires pour comprendre cette idée. Lorsqu'un système bidimensionnel (ou multidimensionnel) dissipatif, entraîné périodiquement, est décrit par un ensemble d'itérations couplées, l'ensemble des points obtenu par flashes périodiques du projecteur dessine une forme qui joue, dans ce système, le rôle que joue l'orbite simple dans le cas de la parabole. Le système multidimensionnel est, en outre, bien plus riche ; certes, il est possible d'avoir un point fixe stable ou un attracteur de période un. Cela signifie simplement qu'à chaque éclair du projecteur, le point représentant l'état du système est exactement au même endroit qu'auparavant. Il est aussi possible d'avoir un attracteur périodique : c'est-à-dire qu'après un certain nombre défini d'éclairs, le point est revenu à sa position précédente. Ce serait l'analogie des cycles d'ordre 2, des cycles d'ordre 4, etc. que nous avons vu apparaître avec la parabole.

Il y a encore une autre possibilité : le point ne revient jamais à sa position originelle dans l'espace des phases ; les éclairs successifs le montrent sautant de façon erratique à l'intérieur d'un domaine fini de l'espace des phases. Après un certain laps de temps, cette région pourra prendre forme devant les yeux de l'observateur, sous les éclairs périodiques du projecteur. Dans la majorité des cas étudiés jusqu'à maintenant, un phénomène inattendu se produit : ces sauts erratiques dessinent un délicat filigrane qui rappelle les « traces fantasmagoriques du givre sur une fenêtre ». Cette délicatesse est d'une nature assez



9. Un attracteur étrange engendré par l'équation de Duffing.

spécifique, étroitement reliée aux courbes « fractales » que décrit Benoit Mandelbrot dans son livre *Fractals* (Flammarion, 1973).

En particulier, n'importe quelle région d'un tel attracteur lorsqu'elle est agrandie se révèle tout aussi finement structurée que la figure plus grande dont elle est extraite. Autrement dit, il y a une régression infinie de détails, un emboîtement sans fin de structures. L'une des plus anciennes découvertes de ce type de structure appelée l'attracteur de M. Hénon, est représentée sur la figure 8 (Michel Hénon est directeur de recherches à l'Observatoire de Nice). Elle est engendrée par la suite des points (x_n, y_n) définis par les relations de récurrence $x_{n+1} = y_n - ax_n^2 + 1$ et $y_{n+1} = bx_n$. Ici, les valeurs de a et b sont respectivement $7/5$ et $3/10$; les valeurs initiales sont $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Le petit rectangle en haut de la figure 8 est agrandi dans la figure du milieu pour faire apparaître plus de détails et puis un autre rectangle dans la figure du milieu est agrandi pour révéler des détails encore plus fins dans la figure du bas. Remarquez qu'il apparaît comme une sorte de route à trois voies qui, lorsqu'elle est agrandie, donne naissance à plusieurs voies parallèles, la voie la plus externe se scindant en une nouvelle route à trois voies, et ainsi de suite. Toute section perpendiculaire de cette voie multiple donne naissance à ce que l'on appelle un ensemble de Cantor, obtenu par un procédé récurrent simple et célèbre.

Partons d'un intervalle fermé, disons $[0,1]$ (« fermé » signifie que l'intervalle comprend ses extrémités) et retirons un sous-intervalle ouvert quelconque. (Puisqu'un intervalle ouvert ne comprend pas ses extrémités, les deux points 0 et 1 resteront dans l'ensemble de Cantor.) Habituellement, l'intervalle extrait choisi est le tiers central ($1/3, 2/3$), mais cela n'est pas obligatoire. Il reste deux intervalles fermés. Soumettez-les au même type de processus, plus précisément, otez un sous-intervalle ouvert, à l'intérieur de chacun d'eux. Répétez ce processus à l'infini. Lorsque vous aurez achevé ce labeur infini, vous obtiendrez une structure délicate constituée de points isolés sur le segment $[0,1]$, comme des perles de rosée sur un fil. Cependant, il en existera une infinité non dénombrable et leur densité dépendra des détails de votre procédé d'élimination récurrent. Telle est la nature d'un ensemble de Cantor, et si ce type mystérieux de distribution est associé à la section d'un attracteur, l'attracteur est dit étrange (et pour cause).

Un autre magnifique attracteur étrange est engendré par les points « stroboscopés » $0, 1, 2, \dots, n$ du bas de la figure 7. Comme cette structure est issue de l'équation de Duffing, on l'appelle l'attracteur de Duffing et il est montré à un peu plus grande échelle sur

la figure 9. Notez la similitude remarquable avec l'attracteur de Hénon. C'est peut-être l'universalité qui montre là encore le bout de l'oreille. Il est intéressant de voir que pour la parabole, à la valeur critique λ_c , l'attracteur de f devient apériodique et est constitué d'une infinité de points. (Après tout, c'est le point culminant d'une suite infinie de dédoublements périodiques.) De plus, l'arrangement de cet ensemble non dénombrable sur l'intervalle $[0,1]$ a été construit à l'aide de la relation de récurrence de M. Feigenbaum faisant intervenir la constante α , comme représenté sur la figure 5 : cet attracteur particulier est lui-même un ensemble de Cantor. Par conséquent, la féconde parabole nous procure un exemple d'attracteur étrange à « une dimension ».

Dans le régime chaotique du cas plus général à k dimensions, la prédiction à long terme du chemin pris par un point est presque impossible. Deux points très voisins d'un attracteur étrange pourront, après quelques éclairs du projecteur, s'envoler en des lieux totalement différents. C'est ce que l'on appelle « la dépendance critique par rapport aux conditions initiales » et c'est une autre façon de définir un attracteur étrange.

Personne ne sait actuellement pourquoi, comment et quand des attracteurs étranges surgissent dans les régimes chaotiques à partir des itérations représentant les systèmes physiques dissipatifs, mais ces attracteurs semblent jouer un rôle central dans les mystères de la turbulence. David Ruelle, à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques à Bures-sur-Yvette, l'un des précurseurs de cette approche globale de la turbulence, écrivait : « ces systèmes de courbes, ces nuages de points, évoquent quelquefois des galaxies ou des feux d'artifice et, d'autres fois, des bourgeonnements bizarres et inquiétants. Il y a là tout un univers à explorer et des harmonies à découvrir ».

Robert May, un biologiste théoricien, dans son article de 1976 désormais célèbre sur le sujet, concluait par un plaidoyer que je trouve juste et que j'aimerais répéter : « Je souhaiterais... que l'on introduise (l'équation $y = 4\lambda x(1-x)$) très tôt dans les programmes de mathématiques. Cette équation peut être étudiée empiriquement par itération sur une calculatrice de poche ou même à la main. Son étude ne suppose aucun concepts sophistiqués autres que ceux du calcul élémentaire. Une telle étude enrichirait énormément l'intuition des étudiants sur les systèmes non linéaires.

Non seulement dans la recherche mais aussi dans le monde quotidien de la politique et de l'économie, tout irait bien mieux si plus de gens réalisaient que les systèmes simples non linéaires n'ont pas nécessairement des propriétés dynamiques simples. ■

“Prospective et Santé”
le n° 20 (hiver) vient de paraître
“Europe, Recherche et Santé”

Face au défi américain et japonais,
une recherche européenne
peut-elle s'affirmer ?
les opinions publiques
le souhaitent-elles ?
les pouvoirs politiques
en ont-ils la volonté ?
Ilya Prigogine, André Danzin,
Christian de Duve,
Jean-Jacques Salomon,
François Gros, Marcel Legrain,
Jean-François Bach,
Jacques Benveniste, Edgar Pisani,
et de nombreux autres,
tentent d'y répondre.



prospective et santé

Une revue “différente”
associant prospective
et réflexion sur l'homme,
la santé et les sciences
de la vie...

Les signatures
les plus prestigieuses...

Les thèmes
les plus actuels
et les plus provoquants,
ceux de votre avenir...

Prospective et Santé
9, rue Alfred de Vigny
75008 Paris

Revue trimestrielle
Le numéro : 30 F
Abonnement annuel :
France 90 F - Etranger 100 F