

Российский Университет Дружбы Народов
Факультет физико-математических и естественных наук

Ф у н к ц и о н а л ь н ы й а н а л и з

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Россовский Леонид Ефимович*



**Российский университет
дружбы народов**
RUDN University

Автор: *Финаревский Леонид*

Проект в Telegram

Проект в Github

весна 2024

Содержание

1	Семинар 1	2
1.1	Пример неизмеримого множества	2
1.2	Канторово множество C	2
1.3	Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского	3

1 Семинар 1

1.1 Пример неизмеримого множества

Возьмем окружность S , $r_S = 1$, $\mu(S) = 2\pi$

Возьмем α такое, что $\frac{\alpha}{\pi}$ — иррационально.

Рассмотрим $R_{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Орбита точки x $O(x) = \{R_{nx}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$

$x \sim y$, если $y = R_{nx}(x)$ для некоторого n . Или же $O(x) = O(y)$

Возьмем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Тогда полученное множество E_0 неизмеримо.

$$E_n = R_{n\alpha}(E_0), n \in \mathbb{Z}$$

$$\triangleright \bigcup_{\mathbb{Z}} E_n = S$$

$$\triangleright E_n \cap E_m = \emptyset \ (n \neq m)$$

$$\triangleright \mu(E_n) = \mu(E_0)$$

$$2\pi = \mu(S) = \mu\left(\bigcup_{\mathbb{Z}} E_n\right) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(E_0)$$

Последнее, в зависимости от $\mu(E_0)$ либо 0, либо ∞ .

Получаем противоречие.

1.2 Канторово множество C

Из единичного отрезка $C_0 = [0, 1]$ удалим среднюю треть, то есть интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Оставшееся точечное множество обозначим через C_1 . Множество $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2 . Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем C_3 . Далее таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$. Пересечение $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ называется канторовым множеством.

Свойства:

- \triangleright Канторово множество имеет меру $\mu = 0$ (доказывается подсчетом суммы длин удаляемых интервалов)
- $\triangleright C$ замкнуто
- $\triangleright C$ нигде не плотно
- $\triangleright C$ имеет мощность континуума

Докажем последнее утверждение. Для этого воспользуемся троичной записью числа. Тогда числа из C записываются в троичной записи только цифрами 0 и 2. Но таких чисел столько же, сколько существует двоичных записей чисел на $[0, 1]$. Получается $C \equiv [0, 1]$

1.3 Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского

$$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Теорема 1.1 (Юнг). $ab \leq S_1 + S_2 = \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b x^{q-1} dx = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Теорема 1.2 (Гёльдер). $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
 $b = (b_1, \dots, b_n)$

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. В силу однородности имеем право предположить, что $\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$.

По неравенству Юнга

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |a_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$$

□

Замечание 1. При $n \rightarrow \infty$ получим неравенство для рядов.

Замечание 2. Имеется аналог неравенства Гёльдера для интегралов

Теорема 1.3.

$$\int_X |fg| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$