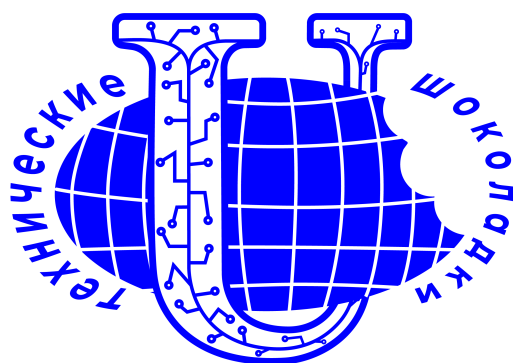


Российский Университет Дружбы Народов
Факультет физико-математических и естественных наук

Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е у р а в н е н и я

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*



Автор: *Финаревский Леонид*

Проект в Telegram

Проект в GitHub

Весна 2024

Содержание

1	Семинар 1	2
1.1	Уравнение Эйлера	2

1 Семинар 1

1.1 Уравнение Эйлера

Дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

Так же, как и обычно, решения ищутся в виде $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}}$, где $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного дифф. уравнения

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

а $y_{\text{ч.}}$ — любое частное решение исходного уравнения.

Существует 2 пути решения уравнения Эйлера:

▷ Через замену $|x| = e^t$

▷ Через замену $y = x^\lambda$

Будем рассматривать решение уравнения 2 порядка

$$1) \ x = e^t$$

$$y(t) = y(x(t))$$

$$y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = y'x$$

$$y''(t) = (y'x)'(t) = y''x^2 + y'x$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 y''(t) + (a_1 - 1)y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

А такое уравнение мы уже умеем решать

$$2) \ y = x^k$$

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 x^k k(k-1) + a_1 x^k k + a_0 = 0$$

$$a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

k находить мы умеем.

Замечание. Находить решения во первом случае приятнее, поскольку

▷ При методе вариации постоянных мы берем производные от более приятных функций

▷ После приведения характеристического многочлена относительно $x(t)$ легко находится характеристический многочлен относительно t ,
что тоже помогает при методе вариации постоянных.

Примеры задач

Задача.

$$xy'' - 2\frac{y}{x} = \ln(-x)$$

Решение. 0) Приведем уравнение к "удобоворимому" виду

$$x^2 y'' - 2y = x \ln(-x)$$

1) Рассматриваем характеристический многочлен и находим общее решение однородного

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{o.o.}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

2) Вспоминаем, что $-x = e^t$. Обращаемся к характеристическому многочлену для $y(t)$. Построим от него неоднородный диффур.

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$y''(t) - y'(t) + 2y(t) = x(t) \ln(-x(t)) = -te^t$$

Находим частное решение для обычного диффура

$$y_{ч.} = e^t \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2} \right)$$

Итоговое решение относительно t

$$y(t) = y_{o.o.} + y_{ч.} = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + e^t \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2} \right)$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - x \left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(-x)}{2} \right)$$