Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Функциональный анализ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Россовский Леонид Ефимович*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в Github

весна 2024

Содержание

1 Элементы теории меры и интеграла

Мера — счетно-аддитивная функция множества.

Определение 1.1. $\mathcal{R}$ — семейство множеств называется *кольцом*, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B,\ A \backslash B \in \mathcal{R}$

Определение 1.2. Кольцо называют *σ-кольцом*, если дополнительно $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ при $A_n \in \mathcal{R}$.

Определение 1.3. Функция $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ называется *аддитивной*, если $\forall A, B \in \mathcal{R}$: $A \cap B = \varnothing$ выполнено $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Некоторые очевидные свойства

- $\varphi(\varnothing) = 0$
- $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, при $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A_i \in \mathcal{R}$
- $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$
- $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$
- $A \subset B$ и $\varphi(A) < +\infty \Rightarrow \varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A)$

Определение 1.4. $\mathcal{R}$ — σ-кольцо, $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$
φ называется *счётно-аддитивным*, если
$A_n \in \mathcal{R}, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j) \Rightarrow \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

Счетно-аддитивная функция удовлетворяет свойству непрерывности в следующем смысле:

- $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \ldots,\ A = \bigcup A_n \Rightarrow \varphi(A_n) \to \varphi(A)$, при $n \to \infty$

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \backslash A_1,\ B_3 = A_3 \backslash A_2,\ \ldots$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing (i \neq j),\ A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_n,\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$$

$$\varphi(A_n) = \varphi(B_1) + \ldots \varphi(B_n) \Rightarrow \varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$$

Определение 1.5. *Мера* — неотрицательная, счетно-аддитивная функция, определенная на σ-алгебре.

1.1 Мера Лебега в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^p$

Определение 1.6. *Брус* — $I = \{x \in \mathbb{R}^p : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$.

Примеры:

- $\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$
- $p = 1$, $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно-возрастающая
  - $\mu([a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$
  - $\mu((a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$
  - $\mu([a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$
  - $\mu((a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$

Определение 1.7. *Элементарное множество* — конечное объединение брусов. Обозначаем $A \in \mathcal{E}$

Люблое элементарное множество можно представить в виде конечного объединение непересекающихся брусов.
$\mu(A)$, $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) = \sum \mu(I_i)$ при $I_i \cap I_j = \varnothing (i \neq j)$
Результат $\mu(A)$ не зависит от разбиения A. А функция μ оказывается аддитивной.
$\mathcal{E}$ является кольцом, а μ аддитивна на нем.

Задача. *Любое открытое множество в $\mathbb{R}^p$ можно представить в виде счетного числа брусов.*

$0 \leqslant \mu$, конечность, аддитивность и регулярность на $\mathcal{E}$.

Определение 1.8. μ называется *регулярной* (на $\mathcal{E}$), если
$\forall A \in \mathcal{E}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ замкнутые $F \in \mathcal{E}$ и открытое $G \in \mathcal{E}$
$F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$

Определение 1.9. *Внешняя мера* произвольного множества $E \in \mathbb{R}^n$ $\mu^*(E)$ определяется как:

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

где инфинум берется по всевозможным, не более чем счетными покрытиям $\{A_i\}$, $A_i \in \mathcal{E}$ множества E.

Замечание. В определении можно заменить открытые элементарные множества на открытые параллелепипеды.

Лемма 1.1. *Внешняя мера является монотонной:*

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$$

2 свойства внешней меры

- $\mu^*(A) = \mu(A)$, для $A \in \mathcal{E}$

▷ $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

Доказательство.

1) $\leqslant$

$A \in \mathcal{E}$, $\varepsilon > 0$, берем открытое $G \in \mathcal{E}$: $A \subset G$ и $\mu(G) \leqslant \mu(A) + \varepsilon$ (регулярность меры).

По определению внешней меры $\mu^*(A) \leqslant \mu(G) \leqslant \mu(A) + \varepsilon$.

В силу произвольности $\varepsilon \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu(A)$.

$\geqslant$

$\mu^*(A) \leqslant \infty \;\Rightarrow\; \forall \varepsilon > 0$ находится покрытие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$$

Находим замкнутое элементарное $F \subset A$, $\mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$. При этом F — компакт. Значит, $\exists N: \; F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$.

$$\mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon \leqslant \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) + \varepsilon \leqslant \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

В силу произвольности ε получаем утверждение.

2)
$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Если мера хоть какого-то ∞, то доказывать нечего.

$\forall n \; \mu^*(E_n) < \infty$

$\varepsilon > 0$, $E_n \subset \bigcup_{k=1}^{k_n} A_{nk}$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mu(A_{nk}) \leqslant \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\bigcup_n E_n \subset \bigcup_{n,k} A_{nk}$$

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mu(A_{nk}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

В силу произвольности ε получаем искомое.

□

Определение 1.10. $d(A, B) = \mu^*\big((A \backslash B) \cup (B \backslash A)\big)$

d удовлетворяет некоторым аксиомам метрики

- $d(A, B) = d(B, A)$
- $d(A, A) = 0$
- $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$
- $d(A, B) = 0$ **не** означает, что $A \equiv B$

Некоторые свойства

- $\mu^*(A) = d(A, \varnothing)$
- $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant d(A, B)$
- $d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$
- $d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$
- $d(A_1 \backslash A_2, B_1 \backslash B_2) \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2)$

Определение 1.11. Множество $A \in \mathbb{R}^p$ называется *конечно измеримым*, если

$$\exists \{A_n \in \mathcal{E}\}_{n=1}^{\infty} : d(A, A_n) \to 0, \text{ при } n \to \infty.$$

Определение 1.12. Подмножество $\mathbb{R}^p$ называется измеримым, если оно представимо в виде не более чем счетного объединения конечно измеримых множеств.

$\mathbb{M}_F(\mu)$ — всевозможные объединения конечно измеримых множеств
$\mathbb{M}(\mu)$ — все измеримые множества

Лемма 1.2.

$$A \in \mathbb{M}(\mu), \mu^*(A) < \infty \Rightarrow A \in \mathbb{M}_F(\mu)$$

Теорема 1.1 (Каратеодори)**.** $\mathbb{M}(\mu)$ — *σ-алгебра, а* μ^* *на ней счетно-аддитивна.*

Доказательство.

1) Докажем, что $\mathbb{M}_F(\mu)$ — кольцо, а μ^* аддитивна на $\mathbb{M}_F(\mu)$.
   Возьмем $A, B \in \mathbb{M}_F(\mu)$.
   $d(A, A_n), d(B, B_n) \to 0$ при $n \to \infty$ (аппроксимируем элементарными множествами)
   $\mu^*(A_n) \to \mu^*(A)$, $\mu^*(B_n) \to \mu^*(B)$
   Из свойств функции d:

$$A_n \cup B_n \to A \cup B \quad A_n \cap B_n \to A \cap B \quad A_n \backslash B_n \to A \backslash B$$

$$\mu(A_n \cap B_n) + \mu(A_n \cup B_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n)$$
$$\mu^*(A_n \cap B_n) + \mu^*(A_n \cup B_n) = \mu^*(A_n) + \mu^*(B_n)$$

   Предельным переходом получим

$$\mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

2) $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathbb{M}_F(\mu)$, причем A_i не пересекаются.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

$B_n = A_1 \cup \ldots \cup A_n \subset A$

$\mu^*(B_n) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) + \ldots + \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A)$

$n \to \infty : \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A)$

Осталось распространить равенство на случай, когда A_n просто измеримы (не обязательно конечно). Для этого достаточно воспользоваться Леммой 1.2.

$\square$