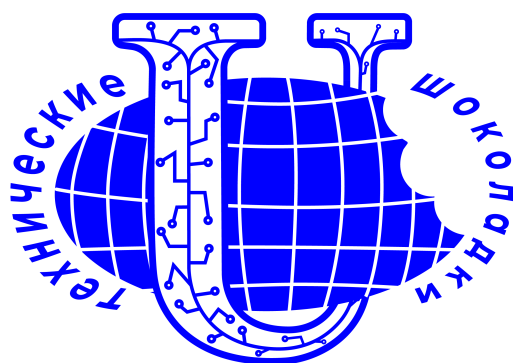


Российский Университет Дружбы Народов  
Факультет физико-математических и естественных наук

# Д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы е у р а в н е н и я

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*



Автор: *Финаревский Леонид*

*Проект в Telegram*

*Проект в GitHub*

Весна 2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Семинар 1</b>	<b>2</b>
1.1	Уравнение Эйлера . . . . .	2

# 1 Семинар 1

## 1.1 Уравнение Эйлера

Дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

Так же, как и обычно, решения ищутся в виде  $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}}$ , где  $y_{\text{о.о.}}$  — общее решение однородного дифф. уравнения

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

а  $y_{\text{ч.}}$  — любое частное решение исходного уравнения.

Существует 2 пути решения уравнения Эйлера:

▷ Через замену  $|x| = e^t$

▷ Через замену  $y = x^\lambda$

Будем рассматривать решение уравнения 2 порядка

1)  $x = e^t$

$$y(t) = y(x(t))$$

$$y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = y'x$$

$$y''(t) = (y'x)'(t) = y''x^2 + y'x$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 y''(t) + (a_1 - 1)y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

А такое уравнение мы уже умеем решать

2)  $y = x^k$

$$y' = kx^{k-1}$$

$$y'' = k(k-1)x^{k-2}$$

Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 x^k k(k-1) + a_1 x^k k + a_0 = 0$$

$$a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

$k$  находить мы умеем.

**Замечание.** Находить решения во первом случае приятнее, поскольку

▷ При методе вариации постоянных мы берем производные от более приятных функций

▷ После приведения характеристического многочлена относительно  $x(t)$  легко находится характеристический многочлен относительно  $t$ ,  
что тоже помогает при методе вариации постоянных.

Примеры задач

**Задача.**

$$xy'' + 2\frac{y}{x} = \ln(-x)$$

0) Приведем уравнение к "удобоворимому" виду

$$x^2y'' + 2y = x\ln(-x)$$

1) Рассматриваем характеристический многочлен и находим общее решение однородного

$$\lambda(\lambda - 1) + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{o.o.}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$$

2) Вспоминаем, что  $-x = e^t$ . Обращаемся к характеристическому многочлену для  $y(t)$ . Построим от него неоднородный диффуз.

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$y''(t) - y(t) + 2 = x(t) \ln(-x(t)) = -te^t$$