Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Функциональный анализ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Россовский Леонид Ефимович*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в Github

весна 2024

Содержание

1 Семинар 1

1.1 Пример неизмеримого множества

Возьмем окружность S, $r_S = 1$, $\mu(S) = 2\pi$
Возьмем α такое, что $\frac{\alpha}{\pi}$ — иррационально.
Рассмотрим $R_{n\alpha}$, $n \in \mathbb{Z}$.
Орбита точки x $O(x) = \{R_{nx}(x) : n \in \mathbb{Z}\}$
$x \sim y$, если $y = R_{nx}(x)$ для некоторого n. Или же $O(x) = O(y)$
Возьмем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Тогда полученное множество E_0 неизмеримо.

$$E_n = R_{n\alpha}(E_0),\ n \in \mathbb{Z}$$

- ▷ $\bigcup_{\mathbb{Z}} E_n = S$
- ▷ $E_n \cap E_m = \varnothing\ (n \neq m)$
- ▷ $\mu(E_n) = \mu(E_0)$

$$2\pi = \mu(S) = \mu\left(\bigcup_{\mathbb{Z}} E_n\right) = \sum_{\mathbb{Z}} \mu(E_0)$$

Последнее, в зависимости от $\mu(E_0)$ либо 0, либо ∞.
Получаем противоречие.

1.2 Канторово множество C

Из единичного отрезка $C_0 = [0,\ 1]$ удалим среднюю треть, то есть интервал $(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3})$. Оставшееся точечное множество обозначим через C_1. Множество $C_1 = [0,\ \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\ 1]$ состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть, и оставшееся множество обозначим через C_2. Повторив эту процедуру опять, удаляя средние трети у всех четырёх отрезков, получаем C_3. Дальше таким же образом получаем последовательность замкнутых множеств $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$. Пересечение $C = \bigcap_{i=0}^{\infty} C_i$ называется канторовым множеством.

Свойства:

- ▷ Канторово множество имеет меру $\mu = 0$ (доказывается подсчетом суммы длин удаляемых интервалов)
- ▷ C замкнуто
- ▷ C нигде не плотно
- ▷ C имеет мощность континуума

Докажем последнее утверждение. Для этого воспользуемся троичной записью числа. Тогда числа из C записываются в троичной записи только цифрами 0 и 2. Но таких чисел столько же, сколько существует двоичных записей чисел на $[0, 1]$. Получается $C \equiv [0, 1]$

1.3 Неравенства Юнга, Гёльдера и Минковского

$p, q > 1 : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Теорема 1.1 (Юнг)**.** $ab \leqslant S_1 + S_2 = \int_0^a x^{p-1}dx + \int_0^b x^{q-1}dx = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

Теорема 1.2 (Гёльдер)**.** $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$b = (b_1, \dots, b_n)$

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. В силу однородности имеем право предположить, что $\sum_{i=1}^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$.

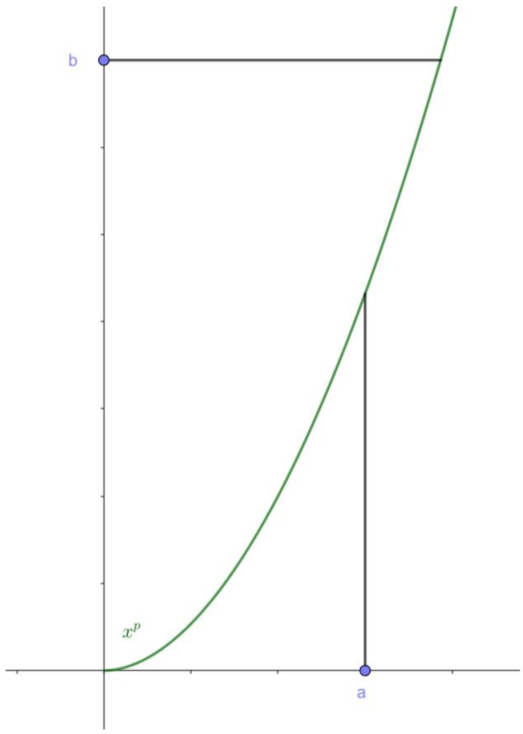
По неравенству Юнга

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i|^p}{p} + \frac{|b_i|^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum |a_i|^p + \frac{1}{q}\sum |b_i|^q = 1$$

□

Замечание 1. При $n \to \infty$ получим неравенство для рядов.

Замечание 2. Имеется аналог неравенства Гёльдера для интегралов



Теорема 1.3.

$$\int_X |fg| \; d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p \; d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q \; d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

2 Семинар 2

Докажем регулярность второго примера из лекции

Доказательство. $\underbrace{F}_{\text{замк.}} \subset A \subset \underbrace{G}_{\text{откр.}}$

$$\mu(G) - \varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$$

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — возрастающая
$A = (a, b]$
$\mu(A) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$
$G = (a, b + \delta)$
$\mu(G) = \alpha((b + \delta)-) - \alpha(a+)$
$\mu(G) - \mu(A) = \alpha((b + \delta)-) - \alpha(b+) \leqslant \alpha(b + \delta) - \alpha(b+) \to 0$, при $\delta \to 0$.
Аналогично для F. □

Теорема 2.1. *Любое открытое множество можно представить в виде счетного числа открытых параллелепипедов.*

Доказательство. Сначала разбиваем пространство на единичные кубы. Выбираем из них все те кубы (с замыканием), лежащие внутри множества. Те кубы, которые пересекают наше множество, разделим на 2^n частей. Берем среди кубов поменьше выберем все лежащие внутри. Повторяем это процесс до бесконечности. Утверждается, что объединение всех таких кубиков — открытое множество. Для любой точки множества достаточно рассмотреть кубик с ребром меньшим, чем расстояние до границы. □

Задача.

$$d(A, B) = \mu^*(A \triangle B)$$

$$d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$$

Доказательство. Докажем утверждение через монотонность меры. Достаточно просто доказать, что

$$A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$$

Если $x \in A, x \notin B$, то $x \in (A \backslash C) \cup (C \backslash B) \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$
Если $x \in B, x \notin A$ аналогично. □

2.1 Неравенства: продолжения

Теорема 2.2 (Минковский)**.**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Для самостоятельного вывода