Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Дифференциальные уравнения

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в GitHub

Весна 2024

Содержание

1 Семинар 1

1.1 Уравнение Эйлера

Дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

Так же, как и обычно, решения ищутся в виде $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}}$, где $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного дифф. уравнения

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

а $y_{\text{ч.}}$ — любое частное решение исходного уравнения.

Общий алгоритм решения. ▷ *Делаем замену* $|x| = e^t$

▷ *Составляем характеристический многочлен относительно переменной* t*:*

$$a_n \lambda(\lambda - 1)...(\lambda - n + 1) + \ldots + a_2 \lambda(\lambda - 1) + a_1 \lambda + a_0$$

▷ *Если* λ_i *— корни характеристического многочлена. Тогда общее решение однородного выглядит как:*

$$y_{o.o.} = \sum C_i e^{\lambda_i t}$$

При необходимости произвести овеществление.

▷ *По характеристическому многочлену для* t *"восстанавливваем"для него нелинейный диффур относительно* t *с правой частью* $f(x(t))$*. Находим частное решение любыми стандартными методами.*

Задача.

$$xy'' - 2\frac{y}{x} = \ln(-x)$$

Решение. 0) Приведем уравнение к "удобоворимому"виду

$$x^2 y'' - 2y = x \ln(-x)$$

1) Рассматриваем характеристический многочлен и находим общее решение однородного

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{о.о.}}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

2) Обращаемся к характеристическому многочлену для $y(t)$. Построим от него неоднородный диффур.

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$y''(t) - y'(t) + 2y(t) = x(t)\ln(-x(t)) = -te^t$$

Находим частное решение для обычного диффура

$$y_{\text{ч.}} = e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

Итоговое решение относительно t

$$y(t) = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}} = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

4) Вспоминаем, что $-x = e^t$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - x\left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(-x)}{2}\right)$$

Задача.

$$x^2y'' + xy' + 4y = 10x$$

Решение. 1) Рассматриваем характеристический многочлен и находим общее решение однородного

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda + 4 = 0$$

$$\lambda = \pm 2i$$

$$y_{\text{о.о.}}(t) = Ae^{-2it} + Be^{2it}$$

2) Сделаем овеществление:

$$y_{\text{о.о.}}(t) = Ae^{-2it} + Be^{2it} = A(\cos(-2t) + i\sin(-2t)) + B(\cos(2t) + i\sin(2t)) =$$
$$= \cos(2t)(A + B) + \sin(2t)(-Ai + Bi) = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)$$

3) Обращаемся к характеристическому многочлену для $y(t)$. Построим от него неоднородный диффур.

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$y''(t) + 4y(t) = 10x(t) = 10e^t$$

Находим частное решение для обычного диффура

$$y_{\text{ч.}} = 2e^t$$

Итоговое решение относительно t

$$y(t) = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}} = C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t) + 2e^t$$

4) Вспоминаем, что $x = e^t$

$$y(x) = C_1\cos(2\ln(x)) + C_2\sin(2\ln(x)) - 2x$$

2 Семинар 2

2.1 Краевые задачи

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

Рассматриваем такие граничные условия на уравнения

$$\begin{cases} \alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0 \\ \gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0 \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0 \end{cases}$$

Функция Грина $G(x,s)$, $x, s \in [x_0, x_1]$
Решения исходного дифференциального уравнения выглядят как:

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)\,ds$$

Интеграл не обязательно досчитывать.
Как построить функцию Грина по уравнению?

- ▷ Сама функция представляет собой

$$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x),\ x \in [x_0, s] \\ b(s)y_2(x),\ x \in [s, x_1] \end{cases}$$

- ▷ y_1 удовлетворяет диффуру при $f(x) \equiv 0$ и первому граничному уловию, но не второму
- ▷ y_2 удовлетворяет диффуру при $f(x) \equiv 0$ и второму граничному уловию, но не первому
- ▷ $G(x,s)$ непрерывна по переменной x в точке $x = s$
- ▷ $G(x,s)$ имеет разрыв производной в точке $x = s$, причем $G'(s+0,s) - G'(s-0,s) = \frac{1}{a_0}$

Как проверить, существует ли функция Грина для данного набора условий?

Утверждение 2.1. *Функция Грина для данной задачи существует тогда и только тогда, когда решением задачи при $f(x) \equiv 0$ и тех же граничных условиях является только $y \equiv 0$.*

Общий алгоритм решения. ▷ *Находим общее решение однородного диффура*

- ▷ *Находим условия на решения, при которых выполняется первое граничное условие*
- ▷ *Находим условия на решения, при которых выполняется второе граничное условие*
- ▷ *Проверяем, что решением системы при $f(x) \equiv 0$ является только $y \equiv 0$*

- ▷ *Подбираем* y_1 *и* y_2
- ▷ *Составляем систему на основе непрерывности и производной* $G(x,s)$
- ▷ *Находим* $a(s)$ *и* $b(s)$
- ▷ *Находим решения*

Задача.

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' = f(x) \\ y(1) = 0 \\ y'(3) = 0 \end{cases}$$

Решение. 1) Решаем однородный диффур:

$$x^2y'' + 2xy' = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1$$

$$y(t) = C_1 + C_2e^{-t}$$

$$y(x) = C_1 + \frac{C_2}{x}$$

2)

$$y(1) = C_1 + C_2 = 0$$

3)

$$y'(3) = -\frac{C_2}{x^2} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

4) Получаем, что при выполнении обоих ограничений $C_1 = C_2 = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$ — единственное решение.

5) В качестве y_1 и y_2 подходят $y_1 = 1 - \frac{1}{x}$ $(C_1 + C_2 = 0)$, $y_2 = 1$ $(C_1 = 1, C_2 = 0)$

6) Система на G:

$$\begin{cases} a(s)y_1(s) = b(s)y_2(s) \\ b(s)y_2'(s) - a(s)y_2'(s) = \frac{1}{a_0(s)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(s)(1 - \frac{1}{s}) = b(s) \\ -\frac{a(s)}{s^2} = \frac{1}{s^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{s} - 1 = b(s) \\ a(s) = -1 \end{cases}$$

7) Решение выглядит как

$$y(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)\,ds$$

где

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, \ x \in [1, s] \\ \frac{1}{s} - 1, \ x \in [s, 3] \end{cases}$$