Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Дифференциальные уравнения

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в GitHub

Весна 2024

Содержание

1 Зависимость решений от начальных данных и параметров

Пусть задано дифференциальное уравнение с параметром μ:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f \in Lip_{x,\ loc}(G) \cap C(G) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall (\tau, \xi) \in G \ \ \exists! \text{ решение задачи Коши с начальными данными } (\tau, \xi)$$

$$x(t, \tau, \xi, \mu) \text{ — функция от } n + m + 2 \text{ переменных}$$

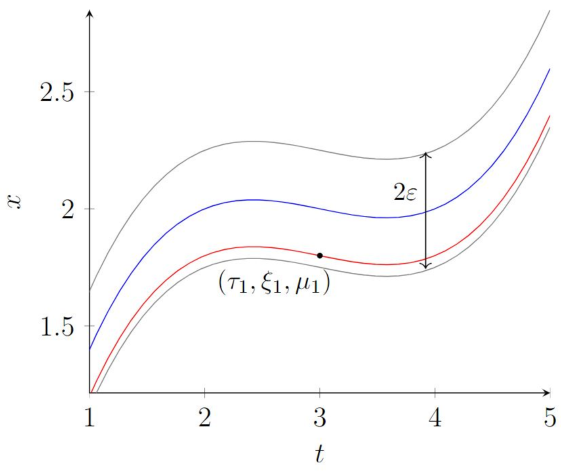
Пример

$$\frac{dx}{dt} = \mu x, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$x = Ce^{\mu x}$$

$$x(t, \tau, \xi, \mu) = \xi e^{\mu(t-\tau)}$$

- $\mu = 0$ — прямая $x = \xi$
- $\mu = 1$ — экспонента
- $\mu = -1$ — обратная экспонента



1.1 Оценка разности двух решений

Имеются две системы ДУ: $x, y \in \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ \dot{y} = f_2(t, y) \end{cases}$$

Предположим, что кроме условий существования и единственности решения, выполняется еще

- $f_1 \in Lip(G)$ с константой L
- f_1 ограничена ($|f_1| \leqslant M$)
- Ограниченность разности функций ($|f_1 - f_2| \leqslant m$)

Теорема 1.1. *Пусть решения $x(t,\tau_1,\xi_1)$ и $y(t,\tau_2,\xi_2)$ определены на (a,b) и $\tau_1,\tau_2 \in (a,b)$. Тогда*
$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a))e^{L(b-a)}$$

Вспомним лемму Гронуолла, утверждающая, что при $\lambda,\mu \geqslant 0$ и $u(t) \in C$:

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \lambda + \mu\left|\int_{t_0}^t u(s)\,ds\right| \quad\Rightarrow\quad u(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

Доказательство. Решения x, y удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x(t,\tau_1,\xi_1) = \xi_1 + \int_{\tau_1}^t f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\,ds$$
$$y(t,\tau_2,\xi_2) = \xi_2 + \int_{\tau_2}^t f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\,ds$$
$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant |\xi_1-\xi_2| + \left|\int_{\tau_1}^t f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\,ds - \int_{\tau_2}^t f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\,ds\right| = A$$

Не умаляя общности, $\tau_1 < \tau_2$

$$\begin{aligned}A \leqslant |\xi_1-\xi_2| + \left|\int_{\tau_1}^{\tau_2} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\,ds\right| + \left|\int_{\tau_2}^t f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1)) - f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\,ds\right| \leqslant \\ \leqslant |\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + \left|\int_{\tau_2}^t f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1)) - f_1(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\,ds\right| + \\ + \left|\int_{\tau_2}^t f_1(s,y(s,\tau_2,\xi_2)) - f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\,ds\right| \leqslant \\ \leqslant |\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + \left|\int_{\tau_2}^t L|x(s,\tau_1,\xi_1) - y(s,\tau_2,\xi_1)|\,ds\right| + m(b-a)\end{aligned}$$

Итого

$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a)) + L\left|\int_{\tau_2}^t x(s,\tau_1,\xi_1) - y(s,\tau_2,\xi_2)ds\right|$$

Применяя лемму Гронуолла для $\lambda = (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a))$, $\mu = L$ и $u(t) = |x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)|$, получаем утверждение задачи.

□

1.2 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров

Дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{M}$$

Теорема 1.2. *Пусть $f \in C(G\times\mathfrak{M}) \cap Lip_x(G\times\mathfrak{M})$ и пусть решение $x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)$ определено на (a,b).*

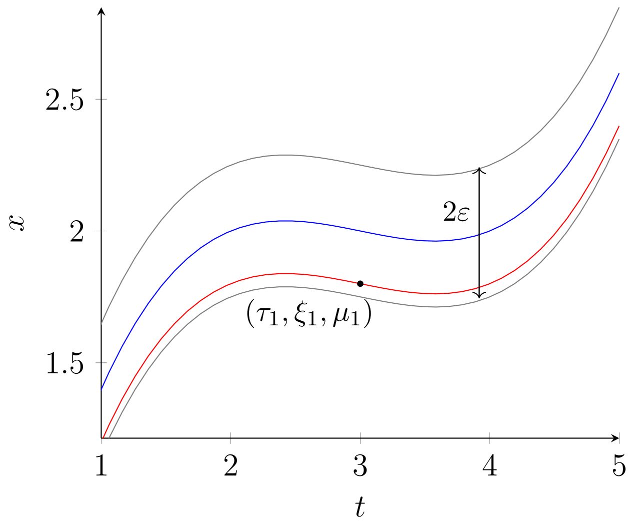
Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\ \forall (\tau, \xi, \mu): \quad |\tau - \tau_0| < \delta,\ \ |\xi - \xi_0| < \delta,\ \ |\mu - \mu_0| < \delta$$

решение $x(t, \tau, \xi, \mu)$ *определено на* (a, b) *и*

$$|x(t, \tau, \xi, \mu) - x(t, \tau_0, \xi_0, \mu_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in (a, b)$$

В данном курсе доказательство не приводится.



1.3 Дифференцируемость решений по начальным данным и параметрам

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$x(t, \tau, \xi, \mu)$ — решение задачи Коши с начальными данными (τ, ξ).

Теорема 1.3. *Пусть* $f \in C_1(G \times \mathfrak{M})$*. Тогда решение задачи Коши* $x(t,\tau, \xi, \mu)$ *с начальными данными* (τ, ξ) *непрерывно дифференцируемо по всем своим аргументам.*

Доказательство. Будем использовать, что:

▷ $x(t, \tau, \xi, \mu)$ решение

$$\frac{d}{dt} x(t, \tau, \xi, \mu) = f(t, x(t, \tau, \xi, \mu), \mu);$$

▷ $x(t, \tau, \xi, \mu)$ решение задачи Коши с начальными данными

$$x(\tau, \tau, \xi, \mu) = \xi.$$

По факту, хотим доказать, что:

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \mu}$$

существуют и непрерывны. Первое уже не раз доказывалось.

1) $\dfrac{\partial x}{\partial \tau} = v(t)$ — функция в $\mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \quad \Bigg| \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x(t, \tau, \xi, \mu))$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\tau}=\frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial\tau}}_{=0}+\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial\tau}}_{=v}+\frac{\partial f}{\partial\mu}\underbrace{\frac{\partial\mu}{\partial\tau}}_{=0}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{dx}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot v$$

Т.к. все принадлежит C_1, то 1 и 2 множители можно поменять местами.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial x}{\partial\tau}=\frac{dv}{dt}=\frac{\partial f}{\partial\tau}\cdot v \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Вспомним, что x еще и решение задачи Коши.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\quad\Bigg|\quad x(t,\tau,\xi,\mu)|_{t=\tau}=\xi$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial\tau}\bigg|_{t=\tau}+\frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\tau}+\frac{\partial x}{\partial\xi}\underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial\tau}}_{=0}+\frac{\partial x}{\partial\mu}\underbrace{\frac{\partial\mu}{\partial\tau}}_{=0}=\underbrace{\frac{\partial\xi}{\partial\tau}}_{=0}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial\tau}=0$$

$$f(\tau,\xi,\mu)=-v(\tau) \tag{1.2}$$

Объединяя 1.1 и 1.2, получаем задачу Коши для линейной системы.

$$\begin{cases}\frac{dv}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot v\\ v(\tau)=-f(\tau,\xi,\mu)\end{cases}$$

Значит, можно найти $v=\dfrac{\partial x}{\partial\tau}(t,\tau,\xi,\mu)$.

Пример.

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\mu\cdot x\\ x(\tau,\tau,\xi,\mu)=\xi\end{cases}$$

$$x(t,\tau,\xi,\mu)=\xi e^{\mu(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\tau}=-\mu\xi e^{\mu(t-\tau)}$$

С другой стороны

- $f(t,\tau,\xi,\mu)=\mu\cdot x\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\mu$
- $v(\tau)=-f(\tau,\xi,\mu)=-\mu\xi$

Получаем то же самое решение

2) Теперь считаем по ξ

$w(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \xi}$ — Якобиан ($\mathbb{M}_{n\times n}$)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \Bigg| \quad \frac{dx}{dt}(t,\tau,\xi,\mu) = f(t,x,\mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \xi}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \xi}}_{=w} + frac\partial f\partial\mu\underbrace{\frac{\partial \mu}{\partial \xi}}_{=0}$$

Первое и третье слагаемые 0 в силу независимости от ξ. Также меняем $\frac{d}{dt}$ и $\frac{\partial}{\partial \xi}$ местами в силу C_1.

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} w$$

Снова пользуемся, что x — решение.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \Bigg| \quad x(t,\tau,\xi,\mu)|_{t=\tau} = \xi$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \xi}}_{=0}\right|_{t=\tau} + \frac{\partial x}{\partial \tau}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \xi}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \xi}}_{=w}\frac{\partial \xi}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \cdot (E_n)$$

В силу независимости τ, t и μ от ξ получим, что

$$w(t) = E_n$$

Снова получаем задачу Коши относительно w

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot w \\ w(\tau) = E_n \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu \cdot x \\ x(\tau,\tau,\xi,\mu) = \xi \end{cases}$$

$$x(t,\tau,\xi,\mu) = \xi e^{\mu(t-\tau)}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = e^{\mu(t-\tau)}$$

С другой стороны

- ▷ $f(t,\tau,\xi,\mu) = \mu \cdot x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \mu$
- ▷ $w(\tau) = E_1 = 1$

Получаем то же самое решение

3) $z(t) = \dfrac{\partial x}{\partial \mu}$ — Якобиан ($\mathbb{M}_{n\times m}$)

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \quad \Bigg| \quad \frac{dx}{dt}(t,\tau,\xi,\mu) = f(t,x,mu)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \mu}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial \mu}}_{=z} + \frac{\partial f}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial \mu}$$

Снова меняем местами дифференциалы в левой части.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot z + \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

Начальные условия

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \quad \Bigg| \quad x(t,\tau,\xi,\mu)\big|_{t=\tau} = \xi$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial t}{\partial \mu}}_{=0}\Bigg|_{t=\tau} + \frac{\partial x}{\partial \tau}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial \mu}}_{=0} + \frac{\partial x}{\partial \xi}\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial \mu}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial x}{\partial \mu}}_{=z}\frac{\partial \mu}{\partial \mu} = \frac{\partial \xi}{\partial \mu}$$

Первое, второе и третье слагаемые 0.
$z(\tau) = 0_{(n\times m)}$
Итого мы и в третий раз получили задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot z + \frac{\partial f}{\partial \mu} \\ z(\tau) = 0_{n\times m} \end{cases}$$

Пример.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu\cdot x \\ x(\tau,\tau,\xi,\mu) = \xi \end{cases}$$

Для самостоятельного решения

□