Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Дифференциальные уравнения

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в GitHub

Весна 2024

Содержание

1 Семинар 1

1.1 Уравнение Эйлера

Дифференциальное уравнение Эйлера имеет вид

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

Так же, как и обычно, решения ищутся в виде $y = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}}$, где $y_{\text{о.о.}}$ — общее решение однородного дифф. уравнения

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0,$$

а $y_{\text{ч.}}$ — любое частное решение исходного уравнения.
Существует 2 пути решения уравнения Эйлера:

- ▷ Через замену $|x| = e^t$
- ▷ Через замену $y = x^\lambda$

Будем рассматривать решение уравнения 2 порядка
1) $x = e^t$
$y(t) = y(x(t))$
$y'(t) = y'(x) \cdot x'(t) = y'x$
$y''(t) = (y'x)'(t) = y''x^2 + y'x$
Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 y''(t) + (a_1 - 1) y'(t) + a_0 y(t) = 0$$

А такое уравнение мы уже умеем решать
2) $y = x^k$
$y' = kx^{k-1}$
$y'' = k(k-1)x^{k-2}$
Тогда наше уравнение принимает вид

$$a_2 x^k k(k-1) + a_1 x^k k + a_0 = 0$$

$$a_2 k(k-1) + a_1 k + a_0 = 0$$

k находить мы умеем.
Замечание. Находить решения во первом случае приятнее, поскольку

- ▷ При методе вариации постоянных мы берем производные от более приятных функций
- ▷ После приведения характирестического многочлена относительно $x(t)$ легко находится характеристический многочлен относительно t,
  что тоже помогает при методе вариации постоянных.

Примеры задач

Задача.

$$xy'' - 2\frac{y}{x} = \ln(-x)$$

Решение. 0) Приведем уравнение к "удобоворимому"виду

$$x^2y'' - 2y = x\ln(-x)$$

1) Рассматриваем характеристический многочлен и находим общее решение однородного

$$\lambda(\lambda - 1) - 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{о.о.}}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$$

2) Вспоминаем, что $-x = e^t$. Обращаемся к характеристическому многочлену для $y(t)$. Построим от него неоднородный диффур.

$$\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$y''(t) - y'(t) + 2y(t) = x(t)\ln(-x(t)) = -te^t$$

Находим частное решение для обычного диффура

$$y_{\text{ч.}} = e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

Итоговое решение относительно t

$$y(t) = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.}} = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} + e^t\left(\frac{1}{4} - \frac{t}{2}\right)$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^2 - x\left(\frac{1}{4} - \frac{\ln(-x)}{2}\right)$$