

Российский Университет Дружбы Народов
Факультет физико-математических и естественных наук

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
IV СЕМЕСТР

Лектор: *Россовский Леонид*



**Российский университет
дружбы народов**
RUDN University

Автор: *Финаревский Леонид*
Проект на Github

весна 2024

Содержание

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Элементы теории меры и интеграла | 2 |
| 1.1 | Мера Лебега в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n | 3 |

1 Элементы теории меры и интеграла

Мера — счетно-аддитивная функция множества.

Определение 1.1. \mathcal{R} — семейство множеств называется *кольцом*, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{R}$

Определение 1.2. Кольцо называют σ -кольцом, если дополнительно $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ при $A_n \in \mathcal{R}$.

Определение 1.3. Функция $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$ называется *аддитивной*, если $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \emptyset$ выполнено $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Некоторые очевидные свойства

- ▷ $\varphi(\emptyset) = 0$
- ▷ $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, при $A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j)$ и $A_i \in \mathcal{R}$
- ▷ $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$
- ▷ $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$
- ▷ $A \subset B$ и $\varphi(A) < +\infty \Rightarrow \varphi(B \setminus A) = \varphi(B) - \varphi(A)$

Определение 1.4. \mathcal{R} — σ -кольцо, $\varphi : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty]$

φ называется *счётно-аддитивным*, если

$$A_n \in \mathcal{R}, A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \Rightarrow \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$$

Счетно-аддитивная функция удовлетворяет свойству непрерывности в следующем смысле:

- ▷ $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \dots, A = \bigcup A_n \Rightarrow \varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A)$, при $n \rightarrow \infty$

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus A_2, \dots$$

$$B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j), A_n = \bigcup_{i=1}^n B_n, A = \bigcup B_n$$

$$\varphi(A_n) = \varphi(B_1) + \dots + \varphi(B_n) \Rightarrow \varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$$

Определение 1.5. Мера — неотрицательная, счетно-аддитивная функция, определенная на σ -алгебре.

1.1 Мера Лебега в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n

Определение 1.6. Брус — $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$.

Примеры:

1) $\mu(I) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

2) $p = 1, \mathbb{R}^n = \mathbb{R}, \alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — монотонно-возраст

$\triangleright \mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$

$\triangleright \mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$

$\triangleright \mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$

$\triangleright \mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$

Определение 1.7. Элементарное множество — конечное объединение брусков. Обозначаем $A \in \mathcal{E}$

Любое элементарное множество можно представить в виде конечного объединения непересекающихся брусков.

$\mu(A), A \in \mathcal{E}, \mu(A) = \sum \mu(I_i)$ при $I_i \cap I_j = \emptyset (i \neq j)$

Результат $\mu(A)$ не зависит от разбиения A . А функция μ оказывается аддитивной.

\mathcal{E} является кольцом, а μ аддитивна на нем.

Задача. Любое открытое множество в \mathbb{R}^n можно представить в виде счетного числа брусков.

$0 \leq \mu$, конечность, аддитивность и регулярность на \mathcal{E} .

Определение 1.8. μ называется регулярной (на \mathcal{E}), если

$\forall A \in \mathcal{E}$ и $\forall \varepsilon > 0 \exists$ замкнутые $F \in \mathcal{E}$ и открытое $G \in \mathcal{E}$

$F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon$