Российский Университет Дружбы Народов
Факультет физико-математических и естесственных наук

Дифференциальные уравнения

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Апушкинская Дарья Евгеньевна*

Автор: Финаревский Леонид
Проект в Telegram
Проект в GitHub

Весна 2024

Содержание

1 Зависимость решений от начальных данных и параметров

Пусть задано дифференциальное уравнение с параметром μ:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad f \in Lip_{x,\ loc}(G) \cap C(G) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall(\tau, \xi) \in G \ \ \exists! \text{ решение задачи Коши с начальными данными } (\tau, \xi)$$

$$x(t, \tau, \xi, \mu) \text{ — функция от } n + m + 2 \text{ переменных}$$

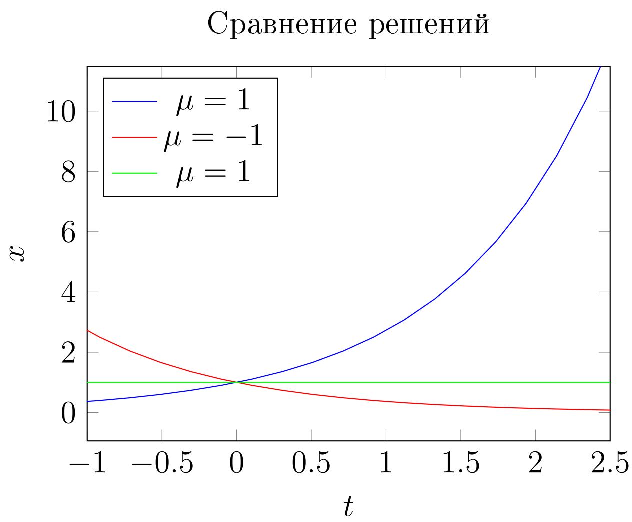
Пример

$$\frac{dx}{dt} = \mu x, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$

$$x = Ce^{\mu x}$$

$$x(t, \tau, \xi, \mu) = \xi e^{\mu(t-\tau)}$$

- $\mu = 0$ — прямая $x = \xi$
- $\mu = 1$ — экспонента
- $\mu = -1$ — обратная экспонента



1.1 Оценка разности двух решений

Имеются две системы ДУ: $x, y \in \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x) \\ \dot{y} = f_2(t, y) \end{cases}$$

Предположим, что кроме условий существования и единственности решения, выполняется еще

- $f_1 \in Lip(G)$ с константой L
- f_1 ограничена ($|f_1| \leqslant M$)
- Ограниченность разности функций ($|f_1 - f_2| \leqslant m$)

Теорема 1.1. *Пусть решения $x(t,\tau_1,\xi_1)$ и $y(t,\tau_2,\xi_2)$ определены на (a,b) и $\tau_1,\tau_2 \in (a,b)$. Тогда*

$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a))e^{L(b-a)}$$

Вспомним лемму Гронуолла, утверждающая, что при $\lambda,\mu \geqslant 0$ и $u(t) \in C$:

$$0 \leqslant u(t) \leqslant \lambda + \mu \left| \int_{t_0}^{t} u(s)\, ds \right| \quad \Rightarrow \quad u(t) \leqslant \lambda e^{\mu|t-t_0|}$$

Доказательство. Решения x, y удовлетворяют интегральным уравнениям

$$x(t,\tau_1,\xi_1) = \xi_1 + \int_{\tau_1}^{t} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\, ds$$

$$y(t,\tau_2,\xi_2) = \xi_2 + \int_{\tau_2}^{t} f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\, ds$$

$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant |\xi_1-\xi_2| + \left| \int_{\tau_1}^{t} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\, ds - \int_{\tau_2}^{t} f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\, ds \right| = A$$

Не умаляя общности, $\tau_1 < \tau_2$

$$\begin{aligned} A \leqslant |\xi_1-\xi_2| + \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1))\, ds \right| + \left| \int_{\tau_2}^{t} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1)) - f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\, ds \right| \leqslant \\ \leqslant |\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + \left| \int_{\tau_2}^{t} f_1(s,x(s,\tau_1,\xi_1)) - f_1(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\, ds \right| + \\ + \left| \int_{\tau_2}^{t} f_1(s,y(s,\tau_2,\xi_2)) - f_2(s,y(s,\tau_2,\xi_2))\, ds \right| \leqslant \\ \leqslant |\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + \left| \int_{\tau_2}^{t} L|x(s,\tau_1,\xi_1) - y(s,\tau_2,\xi_1)|\, ds \right| + m(b-a) \end{aligned}$$

Итого

$$|x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)| \leqslant (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a)) + L \left| \int_{\tau_2}^{t} x(s,\tau_1,\xi_1) - y(s,\tau_2,\xi_2) ds \right|$$

Применяя лемму Гронуолла для $\lambda = (|\xi_1-\xi_2| + M|\tau_1-\tau_2| + m(b-a))$, $\mu = L$ и $u(t) = |x(t,\tau_1,\xi_1) - y(t,\tau_2,\xi_2)|$, получаем утверждение задачи.

□

1.2 Теорема о непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметров

Дано дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,\mu), \quad \mu \in \mathbb{R}^m = \mathfrak{M}$$

Теорема 1.2. *Пусть $f \in C(G\times\mathfrak{M}) \cap Lip_x(G\times\mathfrak{M})$ и пусть решение $x(t,\tau_0,\xi_0,\mu_0)$ определено на (a,b).*

Тогда

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\ \forall(\tau, \xi, \mu) : \quad |\tau - \tau_0| < \delta,\ \ |\xi - \xi_0| < \delta,\ \ |\mu - \mu_0| < \delta$$

решение $x(t, \tau, \xi, \mu)$ *определено на* (a, b) *и*

$$|x(t, \tau, \xi, \mu) - x(t, \tau_0, \xi_0, \mu_0)| < \varepsilon \quad \forall t \in (a, b)$$

В данном курсе доказательство не приводится.