Российский Университет Дружбы Народов

Факультет физико-математических и естесственных наук

Функциональный анализ

IV СЕМЕСТР

Лектор: *Россовский Леонид Ефимович*

Автор: Финаревский Леонид

Проект в Telegram

Проект в Github

весна 2024

Содержание

1 Элементы теории меры и интеграла **2**

1.1 Мера Лебега в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ 3

1 Элементы теории меры и интеграла

Мера — счетно-аддитивная функция множества.

Определение 1.1. $\mathcal{R}$ — семейство множеств называется *кольцом*, если $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B,\ A \backslash B \in \mathcal{R}$

Определение 1.2. Кольцо называют σ-кольцом, если дополнительно $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ при $A_n \in \mathcal{R}$.

Определение 1.3. Функция $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ называется *аддитивной*, если $\forall A, B \in \mathcal{R} : A \cap B = \varnothing$ выполнено $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Некоторые очевидные свойства

- ▷ $\varphi(\varnothing) = 0$
- ▷ $\varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, при $A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A_i \in \mathcal{R}$
- ▷ $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$
- ▷ $A \subset B \Rightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)$
- ▷ $A \subset B$ и $\varphi(A) < +\infty \Rightarrow \varphi(B \backslash A) = \varphi(B) - \varphi(A)$

Определение 1.4. $\mathcal{R}$ — σ-кольцо, $\varphi : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$
φ называется *счётно-аддитивным*, если
$A_n \in \mathcal{R}, A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j) \Rightarrow \varphi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

Счетно-аддитивная функция удовлетворяет свойству непрерывности в следующем смысле:

- ▷ $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \ldots,\ A = \bigcup A_n \Rightarrow \varphi(A_n) \to \varphi(A)$, при $n \to \infty$

$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \backslash A_1,\ B_3 = A_3 \backslash A_2,\ \ldots$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing (i \neq j),\ A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_n,\ A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_n$$

$$\varphi(A_n) = \varphi(B_1) + \ldots \varphi(B_n) \Rightarrow \varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$$

Определение 1.5. Мера — неотрицательная, счетно-аддитивная функция, определенная на σ-алгебре.

1.1 Мера Лебега в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

Определение 1.6. Брус — $I = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$.

Примеры:
1) $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$
2) $p = 1$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — монотонно-возраст

▷ $\mu([a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$

▷ $\mu((a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$

▷ $\mu([a, b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$

▷ $\mu((a, b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$

Определение 1.7. *Элементарное множество* — конечное объединение брусов. Обозначаем $A \in \mathcal{E}$

Люблое элементарное множество можно представить в виде конечного объединение непересекающихся брусов.
$\mu(A)$, $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A) = \sum \mu(I_i)$ при $I_i \cap I_j = \varnothing (i \neq j)$
Результат $\mu(A)$ не зависит от разбиения A. А функция μ оказывается аддитивной.
$\mathcal{E}$ является кольцом, а μ аддитивна на нем.

Задача. *Любое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде счетного числа брусов.*

$0 \leqslant \mu$, конечность, аддитивность и регулярность на $\mathcal{E}$.

Определение 1.8. μ называется регулярной (на $\mathcal{E}$), если
$\forall A \in \mathcal{E}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ замкнутые $F \in \mathcal{E}$ и открытое $G \in \mathcal{E}$
$F \subset A \subset G$ и $\mu(G) - \varepsilon \leqslant \mu(A) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$