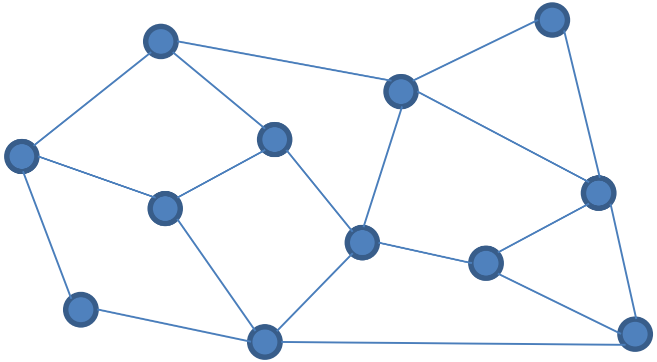
# Conceitos Fundamentais

Zenilton Patrocínio

# Grafo – Definição

**Conceito informal:** Grafo representa as <u>relações</u> entre um conjunto de <u>objetos</u>



Conjunto de vértices (ou nós) – V

- Representam os objetos

Conjunto de arestas (ou arcos) – E

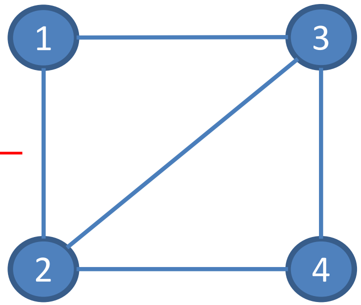
- Representam as relações

# Grafo – Definição

**Exemplo:**

Grafo G

{1, 2}




Aresta ≡ Par de vértices

Extremos (ou extremidades) da aresta

Conjunto de vértices (ou nós)

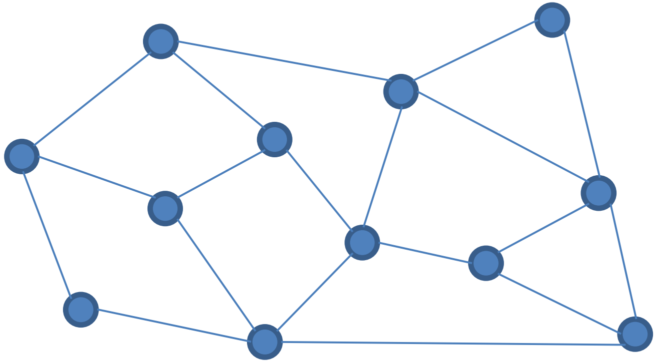
V = { 1, 2, 3, 4 }

Conjunto de arestas (ou arcos)

E = { {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4} }

# Grafo – Definição

**Conceito informal:** Grafo representa as relações entre um conjunto de objetos



**Definição formal:** Um grafo G é dado por um conjunto finito não vazio de vértices V e um conjunto de arestas E representando pares de vértices

**Notação:** Grafo G = (V, E)

V(G) E(G)

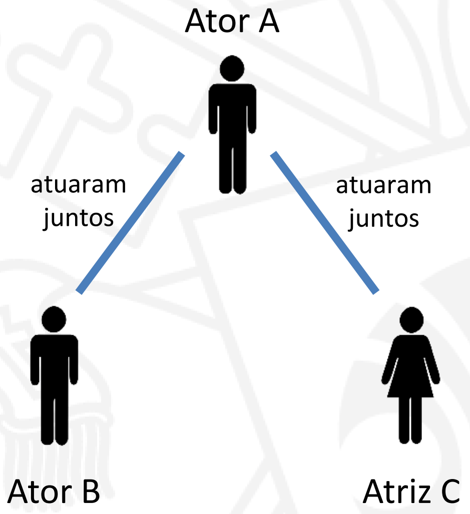
# Grafo Não Direcionado

Em um grafo dito **não direcionado**, a relação entre dois vértices (isto é, a aresta) é válida em ambas as direções, portanto

O vértice A está relacionado ao vértice B ⟺ O vértice B está relacionado ao vértice A

**Exemplo:**

- Vértices representam atores e
- Arestas representam o fato deles terem atuado juntos em um filme



# Grafo Não Direcionado

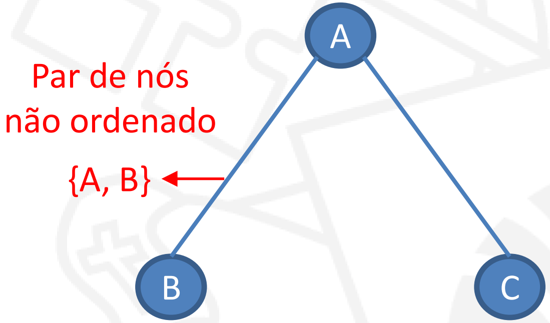
Em um grafo dito **não direcionado**, a relação entre dois vértices (isto é, a aresta) é válida em ambas as direções, portanto

O vértice A está relacionado ao vértice B ⟺ O vértice B está relacionado ao vértice A

**Exemplo:**

- Vértices representam atores e
- Arestas representam o fato deles terem atuado juntos em um filme

Grafo G = (V, E)




V = { A, B, C }

E = { {A,B}, {A,C} }

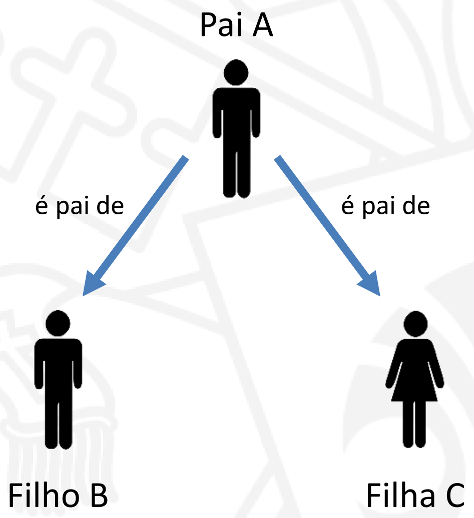
# Grafo Direcionado

Em um grafo dito **direcionado**, a relação entre dois vértices (ou a aresta) é válida apenas em uma das direções, portanto

| Se o vértice A está relacionado ao vértice B | ⇒ | O vértice B pode ou não estar relacionado ao vértice A |
|---|---|---|

**Exemplo:**

- Vértices representam pais e filho(a)s e
- Arestas representam relação de paternidade entre eles



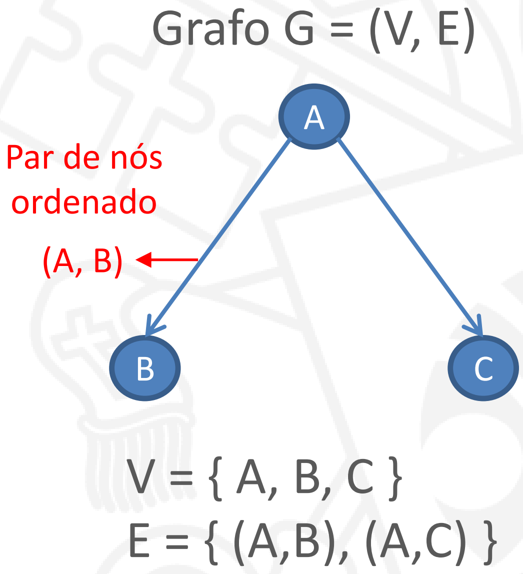
# Grafo Direcionado

Em um grafo dito **direcionado**, a relação entre dois vértices (ou a aresta) é válida apenas em uma das direções, portanto

Se o vértice A está relacionado ao vértice B ⇒ O vértice B pode ou não estar relacionado ao vértice A

**Exemplo:**

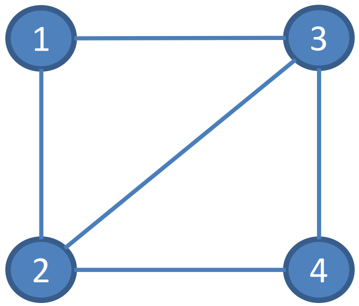
- Vértices representam pais e filho(a)s e
- Arestas representam relação de paternidade entre eles



# Grafo Não Direcionado × Grafo Direcionado

## Grafo Não Direcionado

$G_1 = (V_1, E_1)$

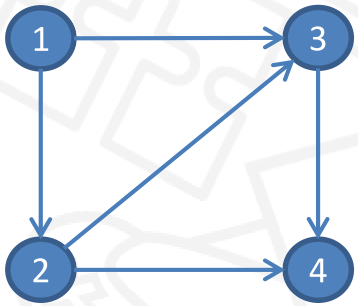



$V_1 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E_1 = \{ \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \}$

## Grafo Direcionado

$G_2 = (V_2, E_2)$



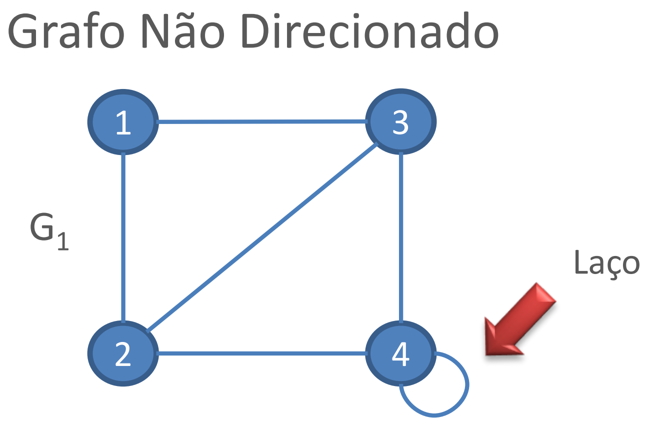

$V_2 = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$E_2 = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4) \}$

Conjunto de pares não ordenados × Conjunto de pares ordenados

# Laços

Um laço (ou *auto-loop*) é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo.

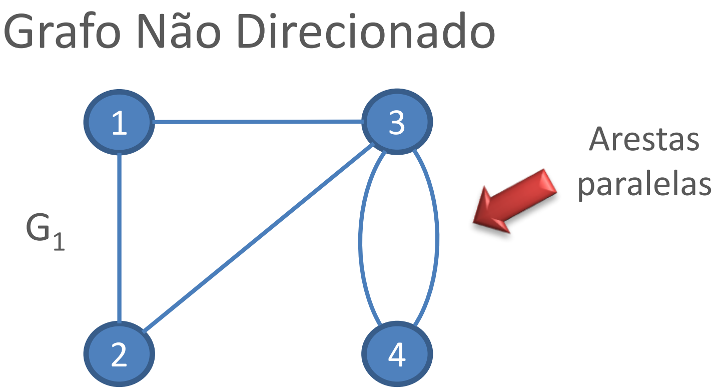


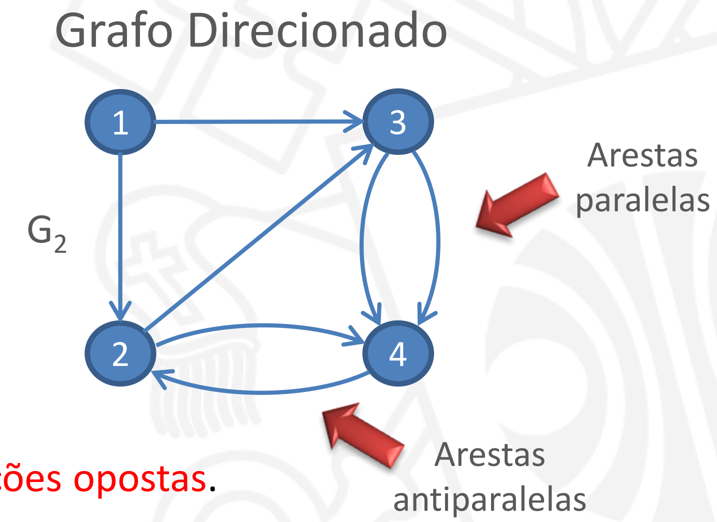


Laços permitem modelar relacionamentos de um objeto com ele mesmo.

# Arestas Paralelas e Antiparalelas

Duas arestas são ditas **paralelas** quando relacionam o mesmo par de vértices.



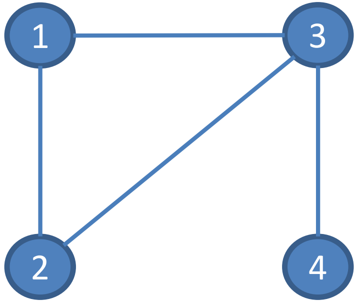




**Arestas antiparalelas** relacionam mesmos vértices em **direções opostas**.

# Grafo Simples

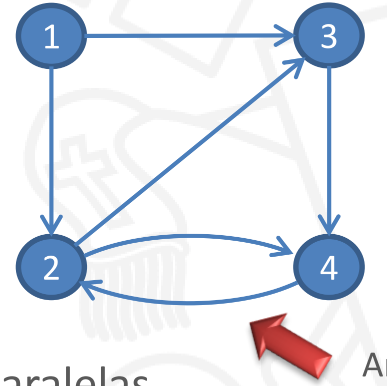
Grafo simples não possui laços nem arestas paralelas.

Grafo Simples Não Direcionado




$G_1$

Grafo Simples Direcionado




$G_2$

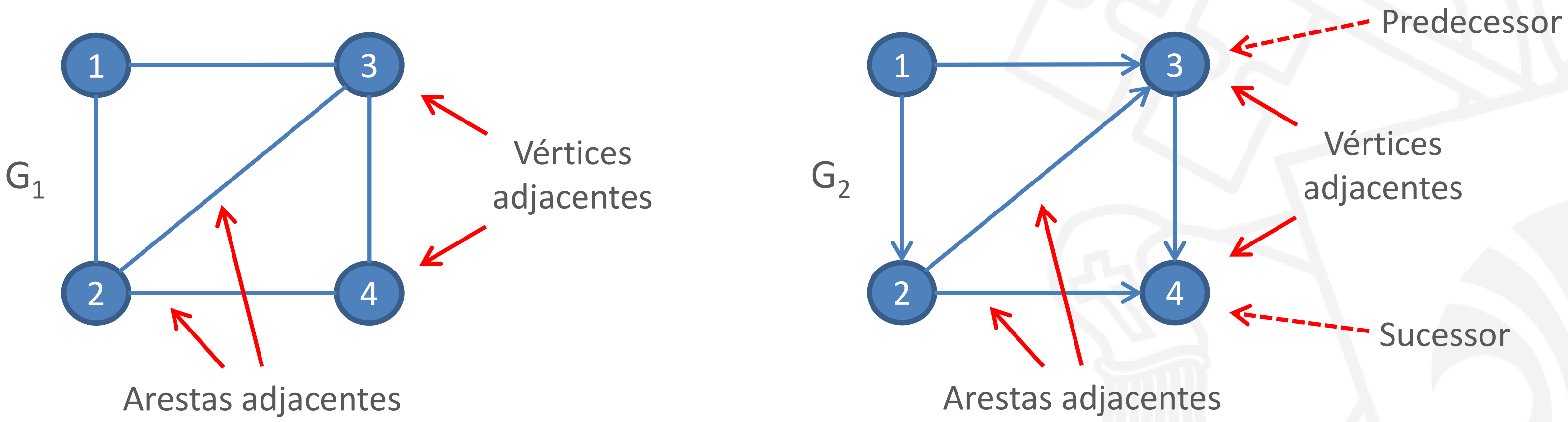
Arestas antiparalelas

Porém, grafo simples direcionado pode ter arestas antiparalelas.

# Relação de Adjacência / Vizinhança

# Relação de Adjacência

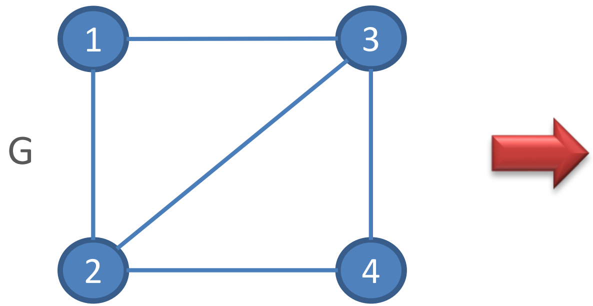
Dois vértices são ditos **adjacentes** se existir uma aresta entre eles.




Duas arestas que possuem um extremo comum também são ditas adjacentes.

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.




$\Gamma(1) = ?$

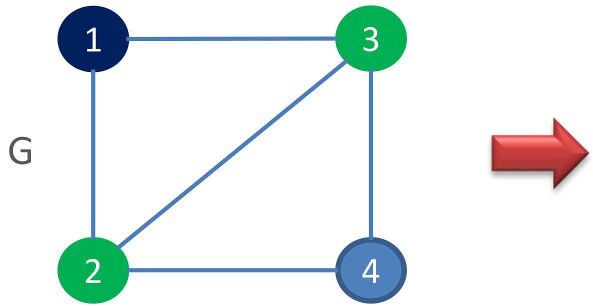
$\Gamma(2) = ?$

$\Gamma(3) = ?$

$\Gamma(4) = ?$

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.




$\Gamma(1) = \{2, 3\}$

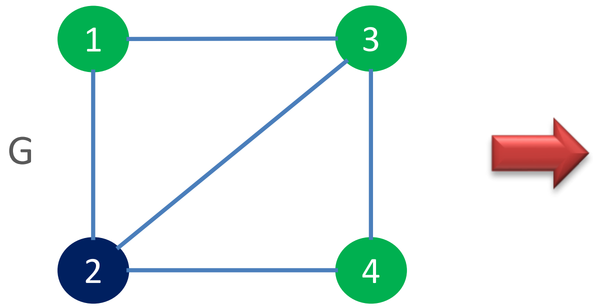
$\Gamma(2) = ?$

$\Gamma(3) = ?$

$\Gamma(4) = ?$

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.




$\Gamma(1) = \{2, 3\}$

$\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$

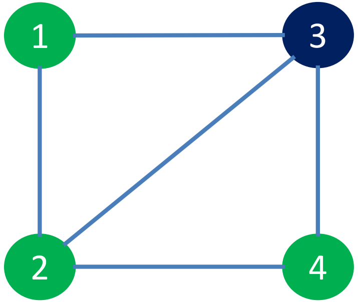
$\Gamma(3) = ?$

$\Gamma(4) = ?$

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.

G




$\Gamma(1) = \{2, 3\}$

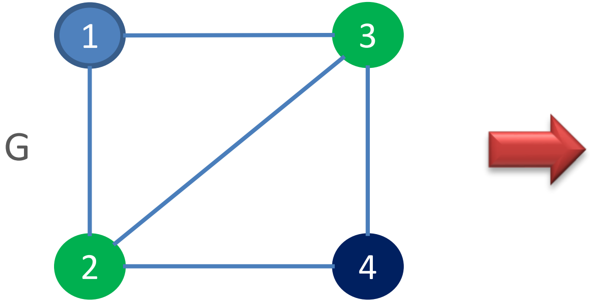
$\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$

$\Gamma(3) = \{1, 2, 4\}$

$\Gamma(4) = ?$

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.




$\Gamma(1) = \{2, 3\}$

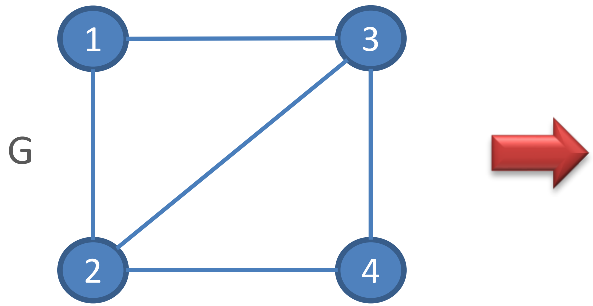
$\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$

$\Gamma(3) = \{1, 2, 4\}$

$\Gamma(4) = \{2, 3\}$

# Vizinhança

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a vizinhança de um vértice $v \in V$ – representada por $\Gamma(v)$ – é o conjunto com todos os vértices adjacentes a ele.




$\Gamma(1) = \{2, 3\}$

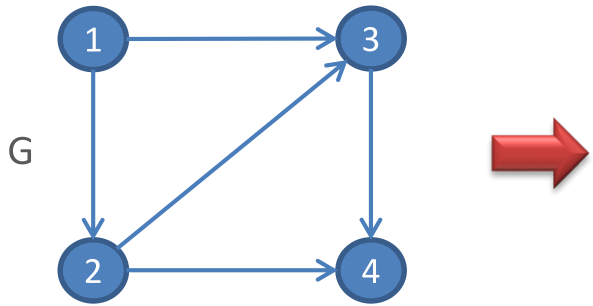
$\Gamma(2) = \{1, 3, 4\}$

$\Gamma(3) = \{1, 2, 4\}$

$\Gamma(4) = \{2, 3\}$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o conjunto de sucessores de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{+}(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.




$\Gamma^{+}(1) = ?$

$\Gamma^{+}(2) = ?$

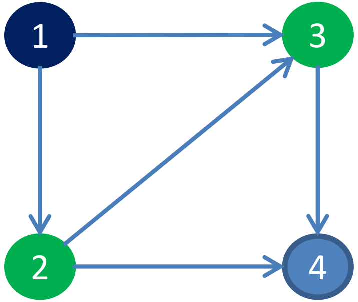
$\Gamma^{+}(3) = ?$

$\Gamma^{+}(4) = ?$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de sucessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^+(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.

G




$\Gamma^+(1) = \{2, 3\}$

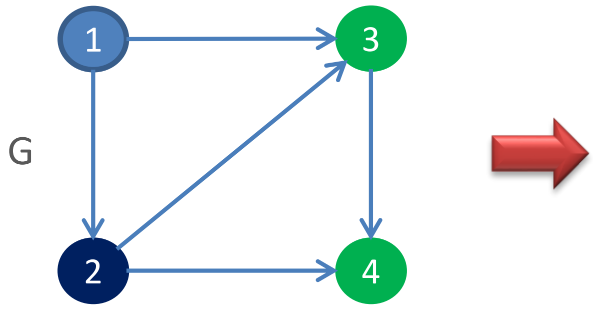
$\Gamma^+(2) = ?$

$\Gamma^+(3) = ?$

$\Gamma^+(4) = ?$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o conjunto de sucessores de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{+}(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.




$\Gamma^{+}(1) = \{2, 3\}$

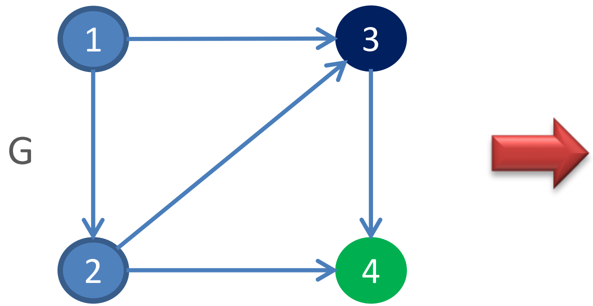
$\Gamma^{+}(2) = \{3, 4\}$

$\Gamma^{+}(3) = ?$

$\Gamma^{+}(4) = ?$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de sucessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^+(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.




$\Gamma^+(1) = \{2, 3\}$

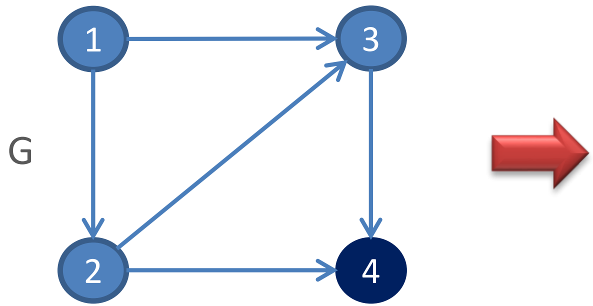
$\Gamma^+(2) = \{3, 4\}$

$\Gamma^+(3) = \{4\}$

$\Gamma^+(4) = ?$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de sucessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^+(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.




$\Gamma^+(1) = \{2, 3\}$

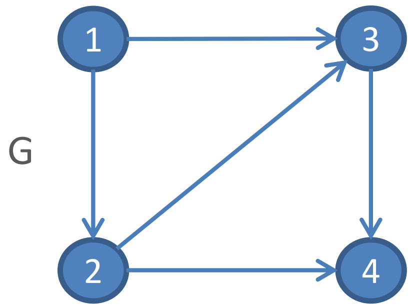
$\Gamma^+(2) = \{3, 4\}$

$\Gamma^+(3) = \{4\}$

$\Gamma^+(4) = \varnothing$

# Sucessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de sucessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{+}(v) = \{ w \in V \mid (v, w) \in E\}$.




$\Gamma^{+}(1) = \{2, 3\}$

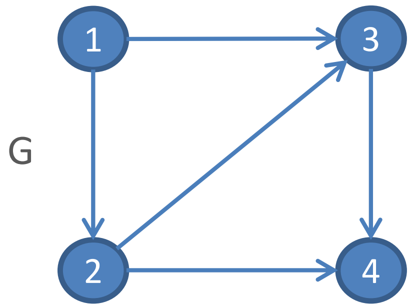
$\Gamma^{+}(2) = \{3, 4\}$

$\Gamma^{+}(3) = \{4\}$

$\Gamma^{+}(4) = \varnothing$

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de predecessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1)$ = ?

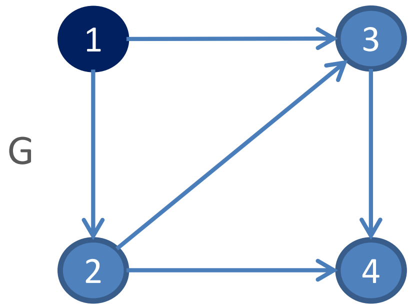
$\Gamma^{-}(2)$ = ?

$\Gamma^{-}(3)$ = ?

$\Gamma^{-}(4)$ = ?

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de predecessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1) = \varnothing$

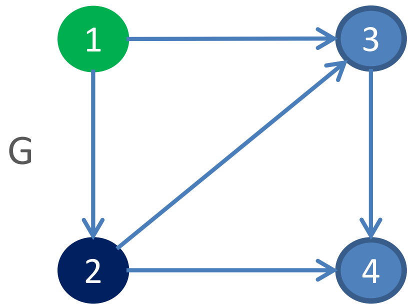
$\Gamma^{-}(2) = ?$

$\Gamma^{-}(3) = ?$

$\Gamma^{-}(4) = ?$

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de predecessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1) = \varnothing$

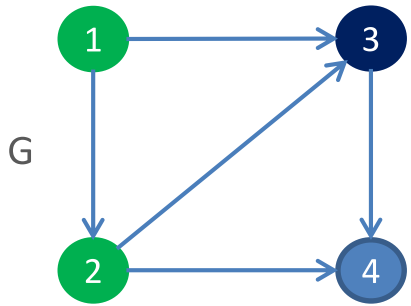
$\Gamma^{-}(2) = \{1\}$

$\Gamma^{-}(3) = ?$

$\Gamma^{-}(4) = ?$

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o conjunto de predecessores de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1) = \varnothing$

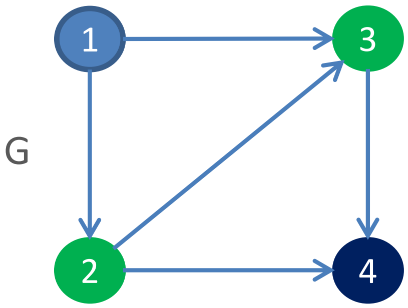
$\Gamma^{-}(2) = \{1\}$

$\Gamma^{-}(3) = \{1, 2\}$

$\Gamma^{-}(4) = ?$

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de predecessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1) = \varnothing$

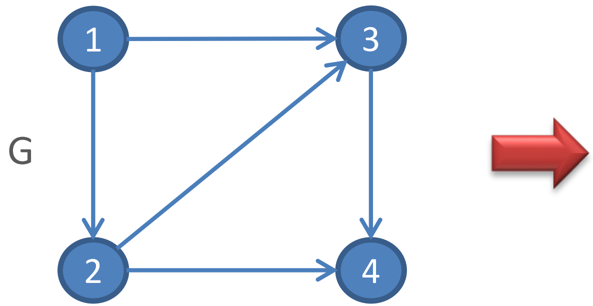
$\Gamma^{-}(2) = \{1\}$

$\Gamma^{-}(3) = \{1, 2\}$

$\Gamma^{-}(4) = \{2, 3\}$

# Predecessores

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **conjunto de predecessores** de um vértice $v$ é representado por $\Gamma^{-}(v) = \{ w \in V \mid (w, v) \in E\}$.




$\Gamma^{-}(1) = \varnothing$

$\Gamma^{-}(2) = \{1\}$

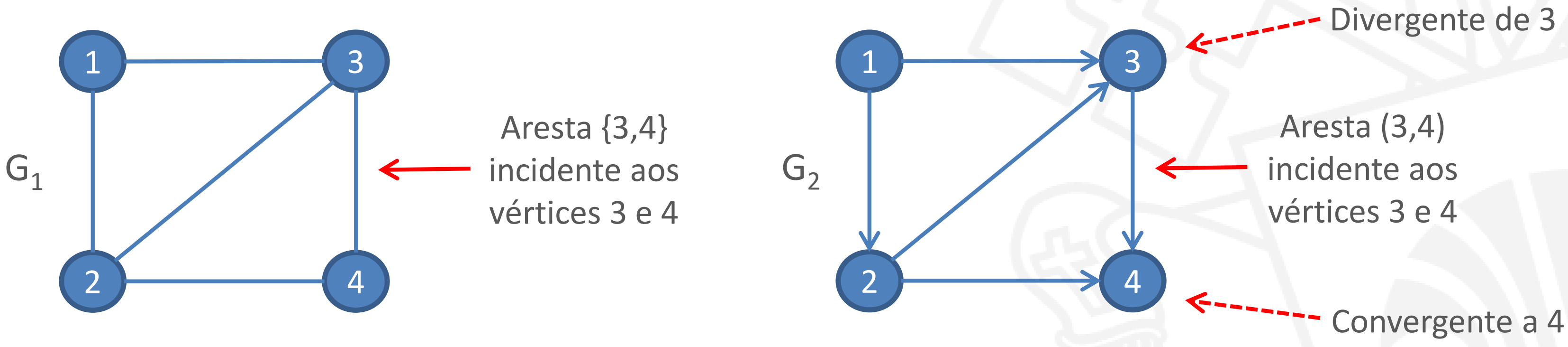
$\Gamma^{-}(3) = \{1, 2\}$

$\Gamma^{-}(4) = \{2, 3\}$

# Relação de Incidência / Grau

# Relação de Incidência

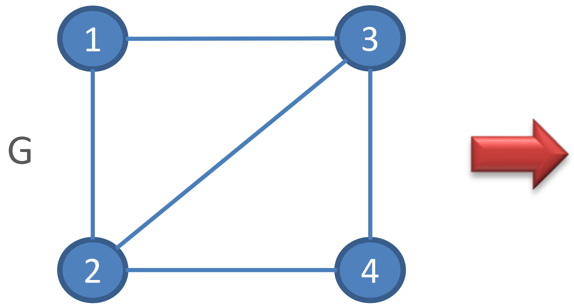
Uma arestas entre dois vértices é dita **incidente** a eles.




Em grafo direcionado, pode-se especializar essa relação entre vértice e aresta.

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o **grau** de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a $v$.




$d(1)$ = ?

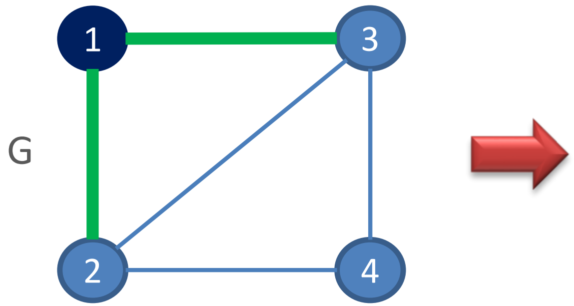
$d(2)$ = ?

$d(3)$ = ?

$d(4)$ = ?

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o grau de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a $v$.




$d(1) = 2$

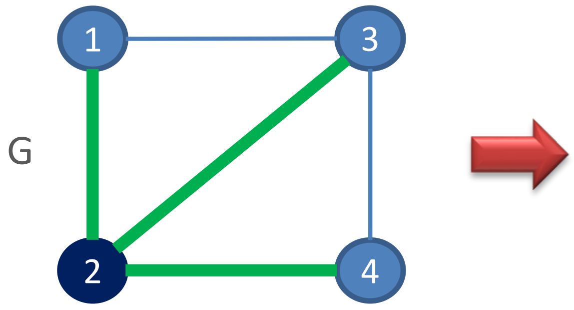
$d(2) = ?$

$d(3) = ?$

$d(4) = ?$

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o grau de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a $v$.




$d(1) = 2$

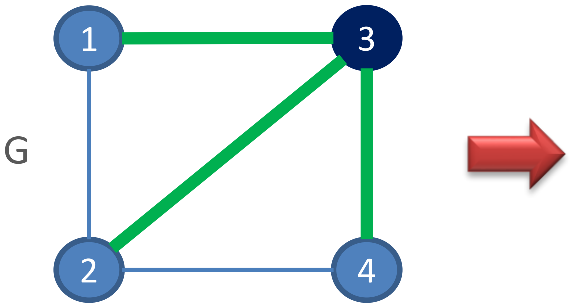
$d(2) = 3$

$d(3) = ?$

$d(4) = ?$

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o grau de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a $v$.




$d(1) = 2$

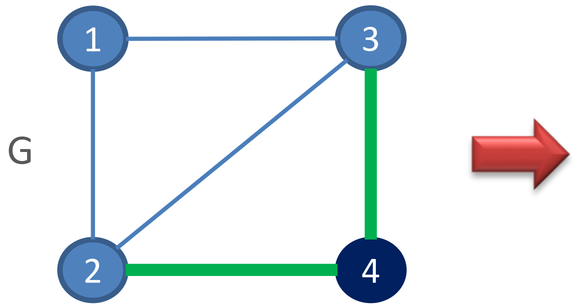
$d(2) = 3$

$d(3) = 3$

$d(4) = ?$

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o grau de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a $v$.




$d(1) = 2$

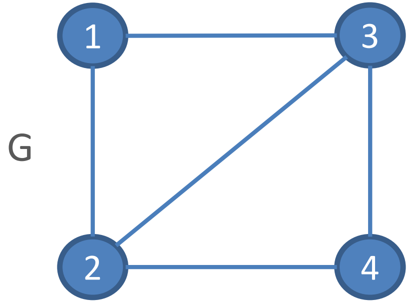
$d(2) = 3$

$d(3) = 3$

$d(4) = 2$

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), o grau de um vértice $v \in V$ – ou $d(v)$ – representa o número de arestas incidentes a *v*.




$d(1) = 2$

$d(2) = 3$

$d(3) = 3$

$d(4) = 2$

O **grau de um vértice** também corresponde ao **número de vértices adjacentes** a ele.

# Grau de Vértice

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a soma de graus de todos os vértices sempre será igual ao dobro do número de arestas, isto é,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\,|E|\,. \qquad \text{(Lema do aperto de mãos)}$$

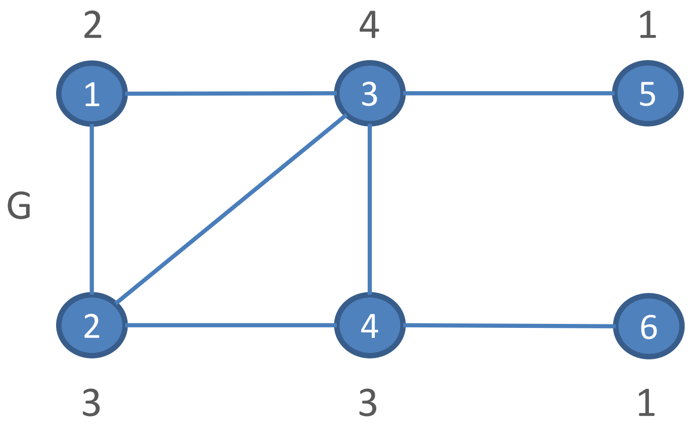
Além disso, é comum se representar o menor e maior valor de graus em um grafo por δ(G) e Δ(G), respectivamente, ou ainda

$$\delta(G) = \min_{v \in V} d(v)$$

$$\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$$

# Sequência de Graus

Dado um grafo não direcionado G = (V, E), a sequência de graus de G é uma lista com os valores de grau de todos os vértices em ordem não decrescente.



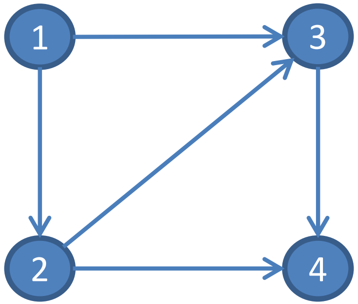

Sequência de graus

1 1 2 3 3 4

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de entrada um vértice $v \in V$ – representado por $d^-(v)$ – representa o número de arestas que entram em *v*.

G




$d^-(1) = ?$

$d^-(2) = ?$

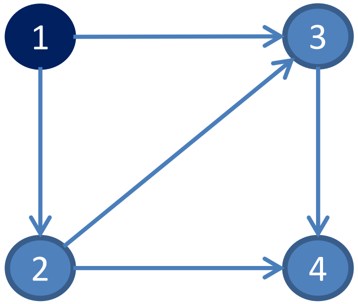
$d^-(3) = ?$

$d^-(4) = ?$

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **grau de entrada** um vértice $v \in V$ – representado por $d^-(v)$ – representa o número de arestas que entram em $v$.

G




$d^-(1) = 0$

$d^-(2) = ?$

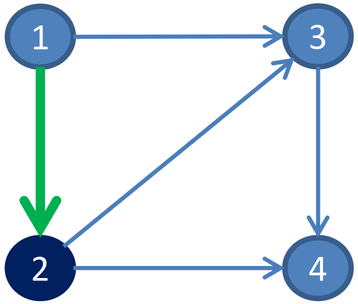
$d^-(3) = ?$

$d^-(4) = ?$

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **grau de entrada** um vértice $v \in V$ – representado por $d^{-}(v)$ – representa o número de arestas que entram em *v*.

G




$d^{-}(1) = 0$

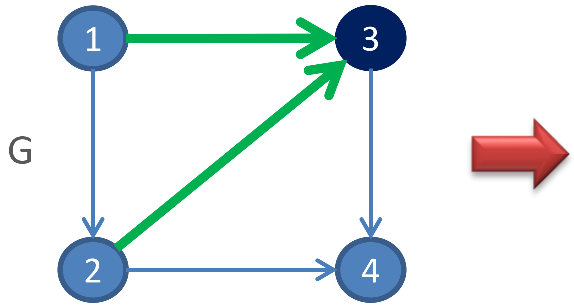
$d^{-}(2) = 1$

$d^{-}(3) = ?$

$d^{-}(4) = ?$

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **grau de entrada** um vértice $v \in V$ – representado por $d^{-}(v)$ – representa o número de arestas que entram em $v$.




$d^{-}(1) = 0$

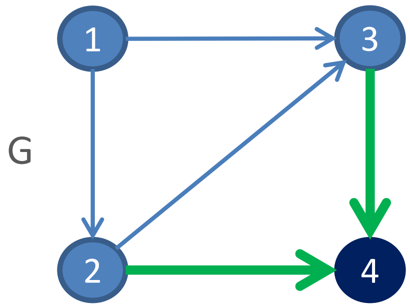
$d^{-}(2) = 1$

$d^{-}(3) = 2$

$d^{-}(4) = ?$

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o **grau de entrada** um vértice $v \in V$ – representado por $d^{-}(v)$ – representa o número de arestas que entram em $v$.




$d^{-}(1) = 0$

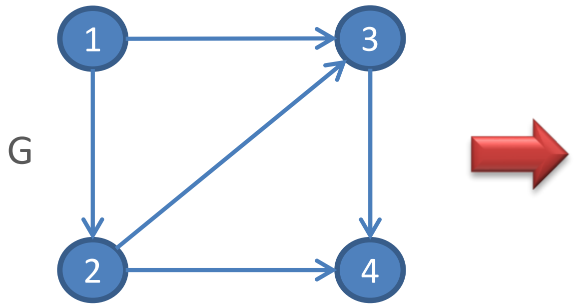
$d^{-}(2) = 1$

$d^{-}(3) = 2$

$d^{-}(4) = 2$

# Grau de Entrada de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de entrada um vértice $v \in V$ – representado por $d^{-}(v)$ – representa o número de arestas que entram em $v$.




$d^{-}(1) = 0$

$d^{-}(2) = 1$

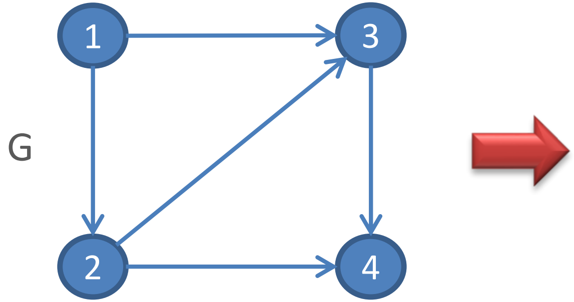
$d^{-}(3) = 2$

$d^{-}(4) = 2$

O grau de entrada também corresponde ao número de predecessores do vértice.

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = ?$

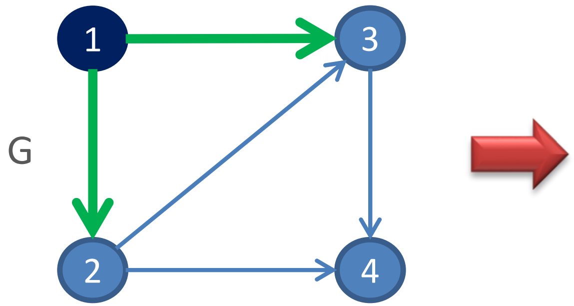
$d^+(2) = ?$

$d^+(3) = ?$

$d^+(4) = ?$

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = 2$

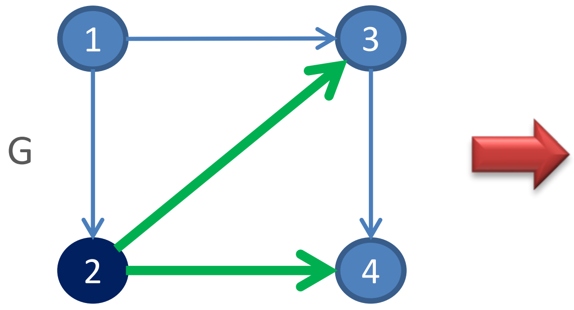
$d^+(2) = ?$

$d^+(3) = ?$

$d^+(4) = ?$

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = 2$

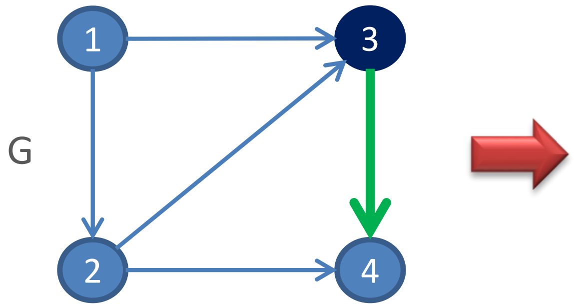
$d^+(2) = 2$

$d^+(3) = ?$

$d^+(4) = ?$

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = 2$

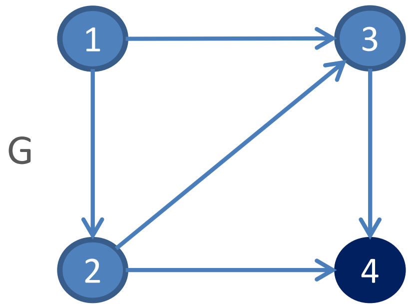
$d^+(2) = 2$

$d^+(3) = 1$

$d^+(4) = ?$

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = 2$

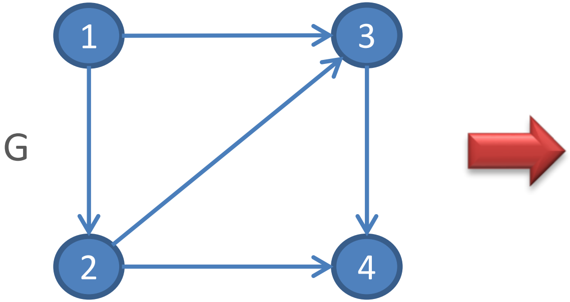
$d^+(2) = 2$

$d^+(3) = 1$

$d^+(4) = 0$

# Grau de Saída de Vértice

Dado um grafo direcionado G = (V, E), o grau de saída um vértice $v \in V$ – representado por $d^+(v)$ – representa o número de arestas que saem de $v$.




$d^+(1) = 2$

$d^+(2) = 2$

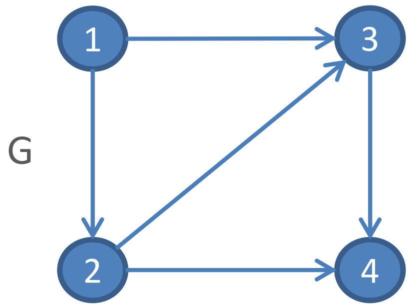
$d^+(3) = 1$

$d^+(4) = 0$

O grau de saída também corresponde ao número de sucessores do vértice.

# Grau de Entrada × Grau de Saída

Dado um grafo direcionado G = (V, E), pode-se calcular para cada vértice o seu **grau de entrada** e o seu **grau de saída**.




$d^-(1) = 0$ $\quad$ $d^+(1) = 2$

$d^-(2) = 1$ $\quad$ $d^+(2) = 2$

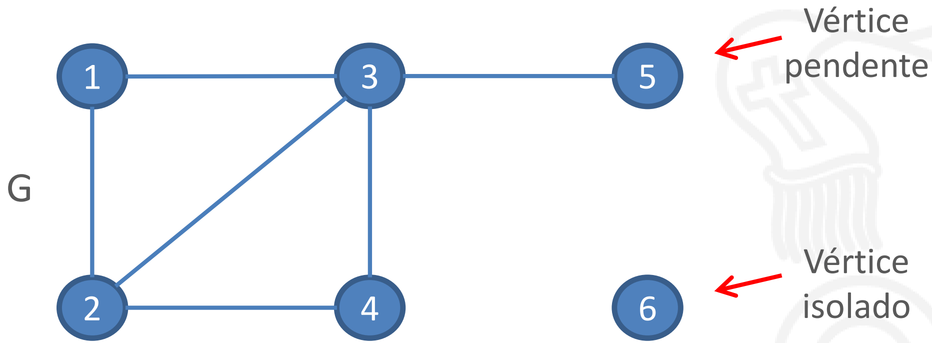
$d^-(3) = 2$ $\quad$ $d^+(3) = 1$

$d^-(4) = 2$ $\quad$ $d^+(4) = 0$

# Vértice Isolado / Vértice Pendente

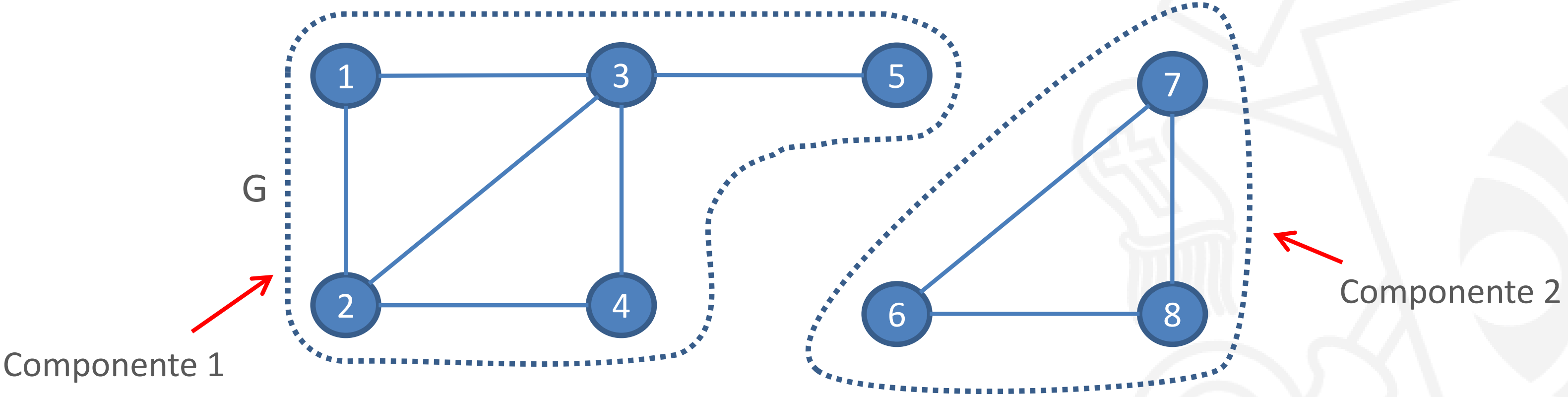
Um vértice é dito isolado quando não houver nenhuma aresta incidente a ele (ou ainda, quando o seu grau for nulo).

Um vértice é dito pendente quando houver apenas uma aresta incidente a ele (ou ainda, quando o seu grau for unitário).



# Componente

Um componente de grafo consiste em subconjunto de vértices (e suas arestas) que possuem relações (arestas) entre si não necessariamente de todos para todos e que não possuem relações (arestas) com os demais vértices do grafo.

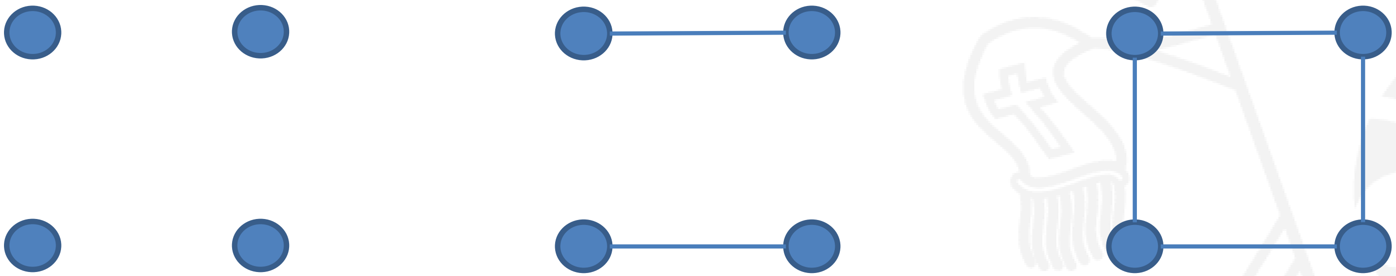


# Alguns Tipos de Grafos

# Grafo Regular

Um grafo regular é aquele em que todos os vértices possuem o mesmo grau.

Um grafo regular com vértices de grau *k* é chamado um grafo *k*-regular ou grafo regular de grau *k*.



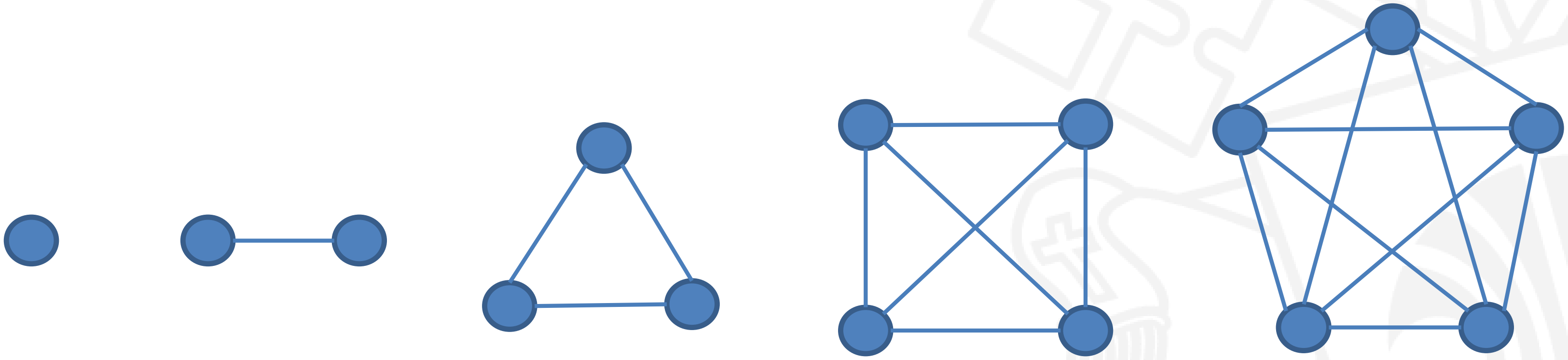
Grafo 0-regular

Grafo 1-regular

Grafo 2-regular

# Grafo Completo

Um grafo completo com $n$ vértices – denominado $K_n$ – é um grafo simples contendo uma aresta para cada par de vértices distintos.



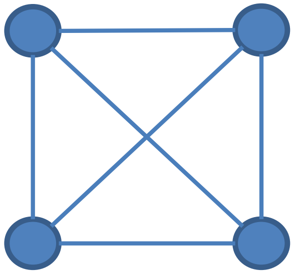
$K_1$ $K_2$ $K_3$ $K_4$ $K_5$

Todo grafo completo é regular.

# Grafo Completo

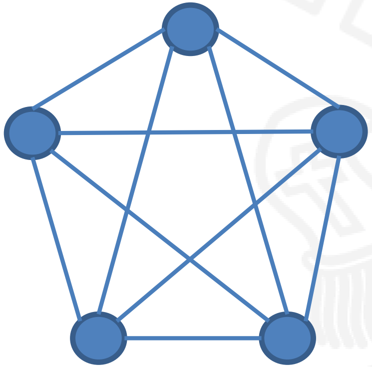
O número de arestas de um grafo completo $K_n$ com $n$ vértices é dado por

$$|E| = \frac{n \times (n-1)}{2}$$



$K_4$

$$|E| = \frac{4 \times (4-1)}{2} = $$
$$= \frac{12}{2} = $$
$$= 6$$

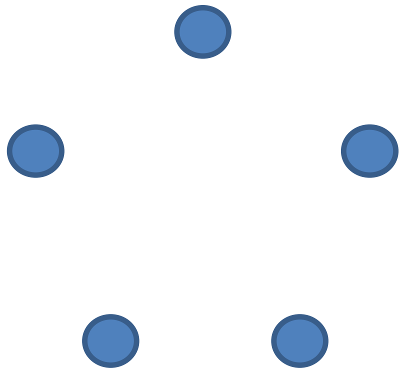


$K_5$

$$|E| = \frac{5 \times (5-1)}{2} = $$
$$= \frac{20}{2} = $$
$$= 10$$

# Grafo Nulo

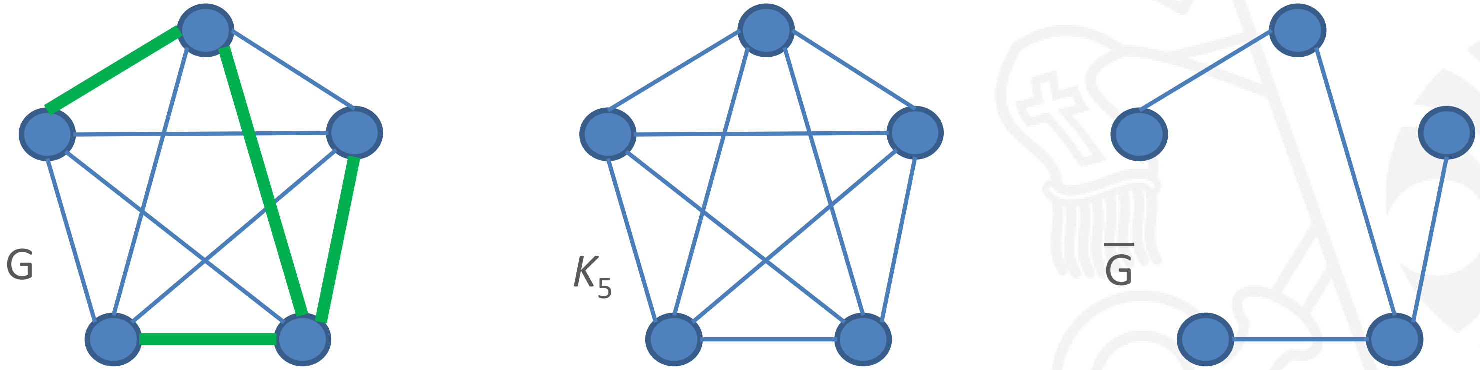
Um grafo nulo (ou vazio) é aquele sem nenhuma aresta (ou todos os vértices são isolados).



# Grafo Complementar

Dado um grafo G = (V, E), o **grafo complementar** de G – representado por C(G) ou $\overline{G}$ – possui:

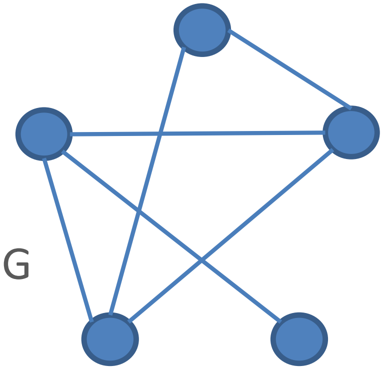
- os mesmo vértices de G e
- as arestas que faltam em G para ele se tornar um grafo completo.



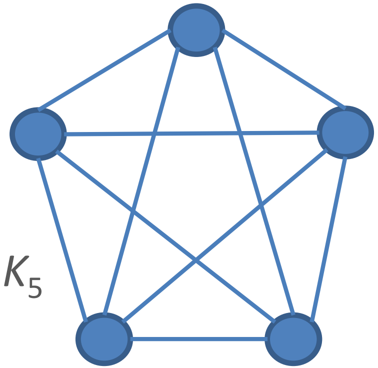
# Grafo Complementar

Dado um grafo G = (V, E), o grafo complementar de G – representado por C(G) ou $\overline{G}$ – possui:

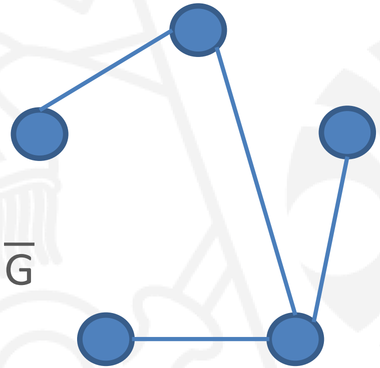
- os mesmo vértices de G e
- as arestas que faltam em G para ele se tornar um grafo completo.



G



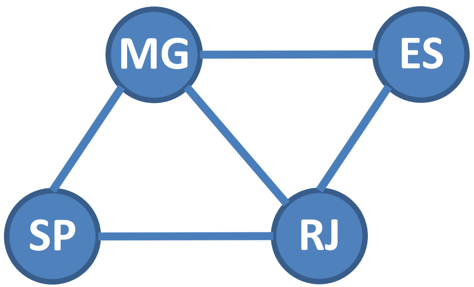
$K_5$

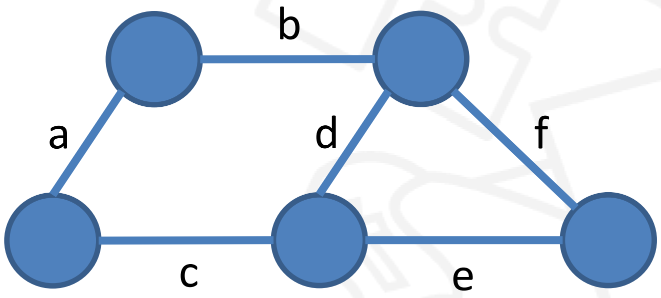


$\overline{G}$

# Grafo Rotulado

Um grafo é rotulado em vértices quando a cada vértice estiver associado um rótulo.

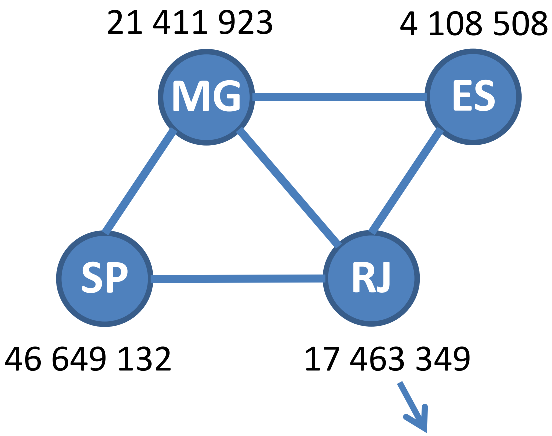


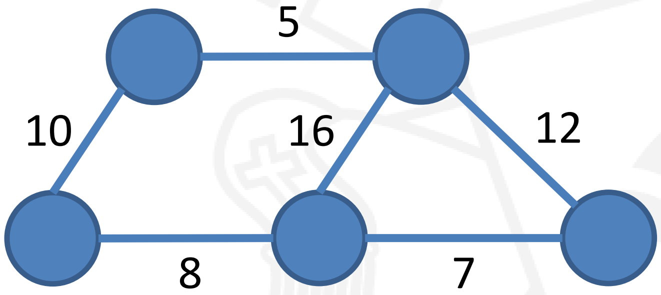

Já um grafo é rotulado em arestas quando a cada aresta estiver associada um rótulo.

# Grafo Ponderado

Um grafo é ponderado (ou valorado) em quando existe uma ou mais funções relacionando os vértices e/ou as arestas com um conjunto de números.

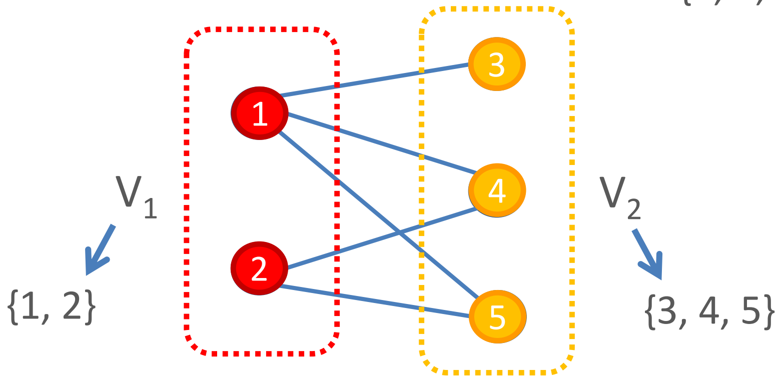


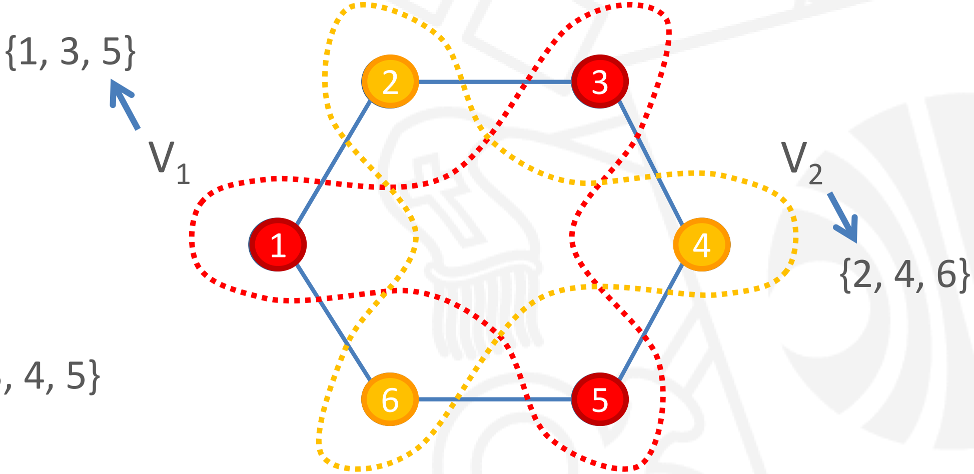

População (jul/21), Fonte: IBGE



# Grafo Bipartido

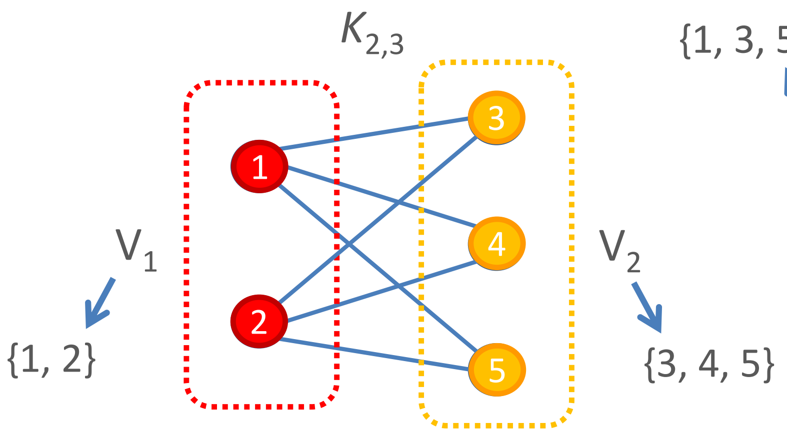
Um grafo G = (V, E) é **bipartido** (ou bipartite) quando o conjunto de vértices V puder ser particionado em 2 subconjuntos $V_1$ e $V_2$ disjuntos (ou sem elementos comuns) de forma que toda aresta de E conecta um elemento de $V_1$ a um elemento de $V_2$.

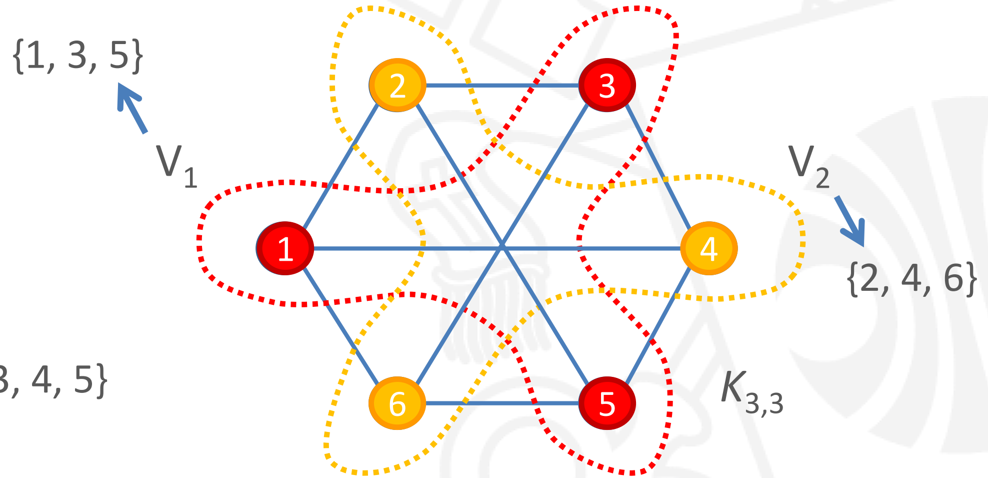


# Grafo Bipartido Completo

Um grafo G = (V, E) é bipartido completo ($K_{m,n}$) quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em 2 subconjuntos $V_1$ e $V_2$ disjuntos (isto é, sem elementos comuns) todo elemento de $V_1$ é adjacente a um elemento de $V_2$.

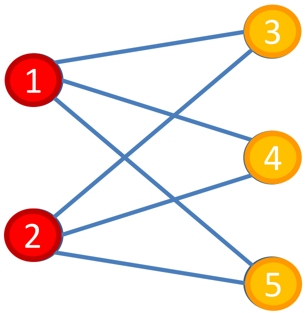


# Grafo Bipartido Completo

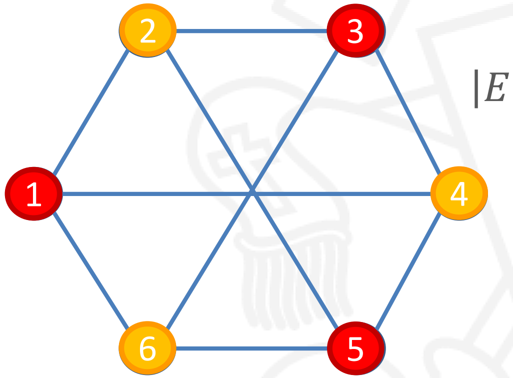
O número de arestas de um grafo bipartido completo $K_{m,n}$ com $m + n$ vértices é dado por $|E| = m \times n$

$K_{2,3}$




$|E| = \mathbf{2} \times \mathbf{3} = 6$

$K_{3,3}$




$|E| = \mathbf{3} \times \mathbf{3} = 9$