

Systèmes Cyber-Physiques 1

R. Le Bouquin Jeannès

ESIR

LTSI – INSERM U1099

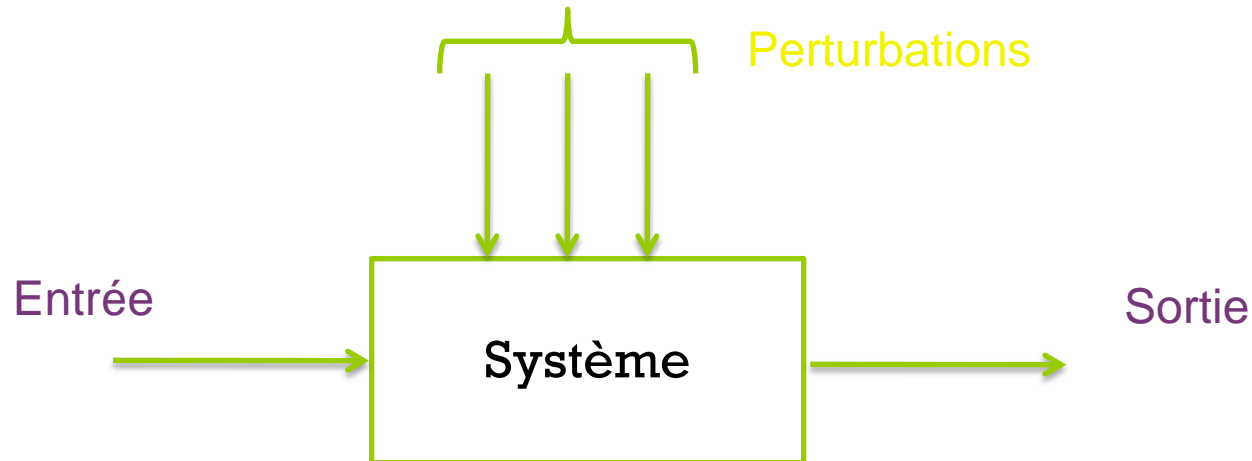
Plan

- ❑ Introduction
- ❑ Généralités : réponses et représentations
- ❑ Systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre
- ❑ Systèmes bouclés
- ❑ Précision
- ❑ Stabilité

Théorie du contrôle

□ Contrôle en boucle ouverte

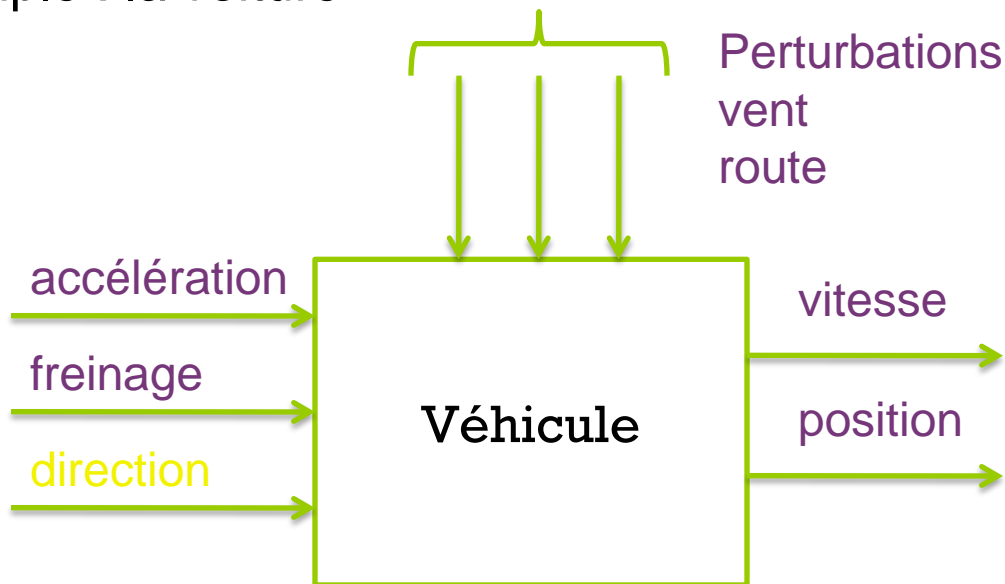
Dans un système en boucle ouverte (BO), la sortie est seulement fonction de l'entrée



Le système est sous l'influence de perturbations externes

Contrôle en boucle ouverte

□ Un exemple : la voiture

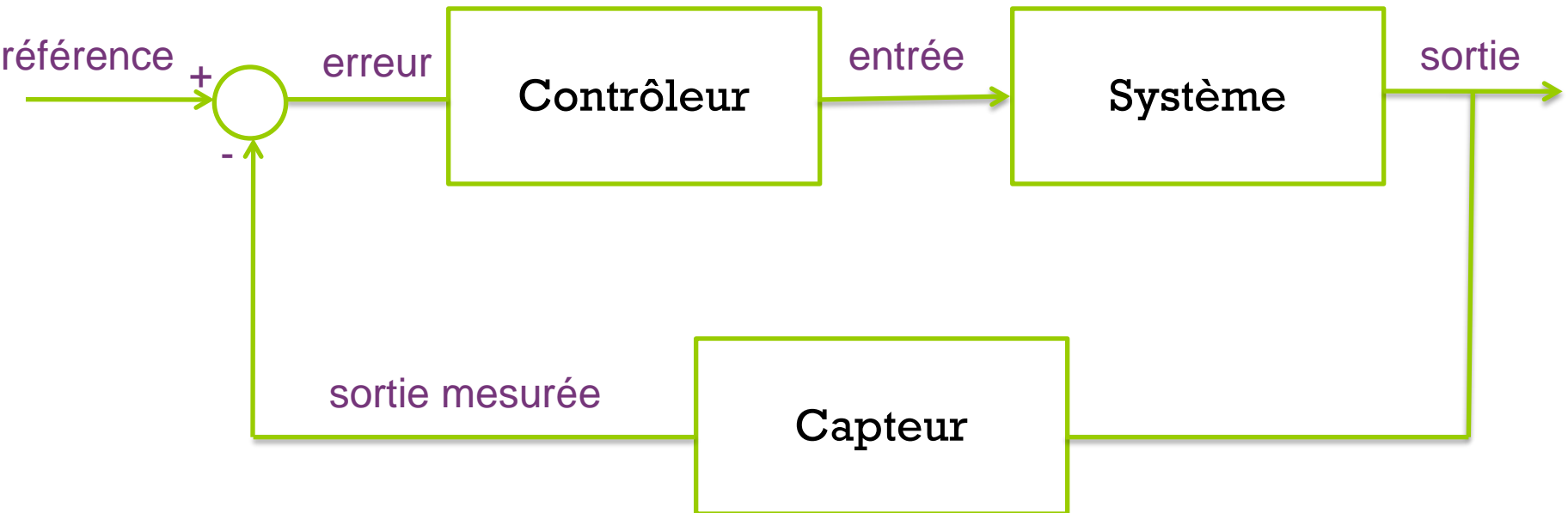


Seule l'entrée contrôle le système, il n'y a pas de « feed-back » pour minimiser les perturbations

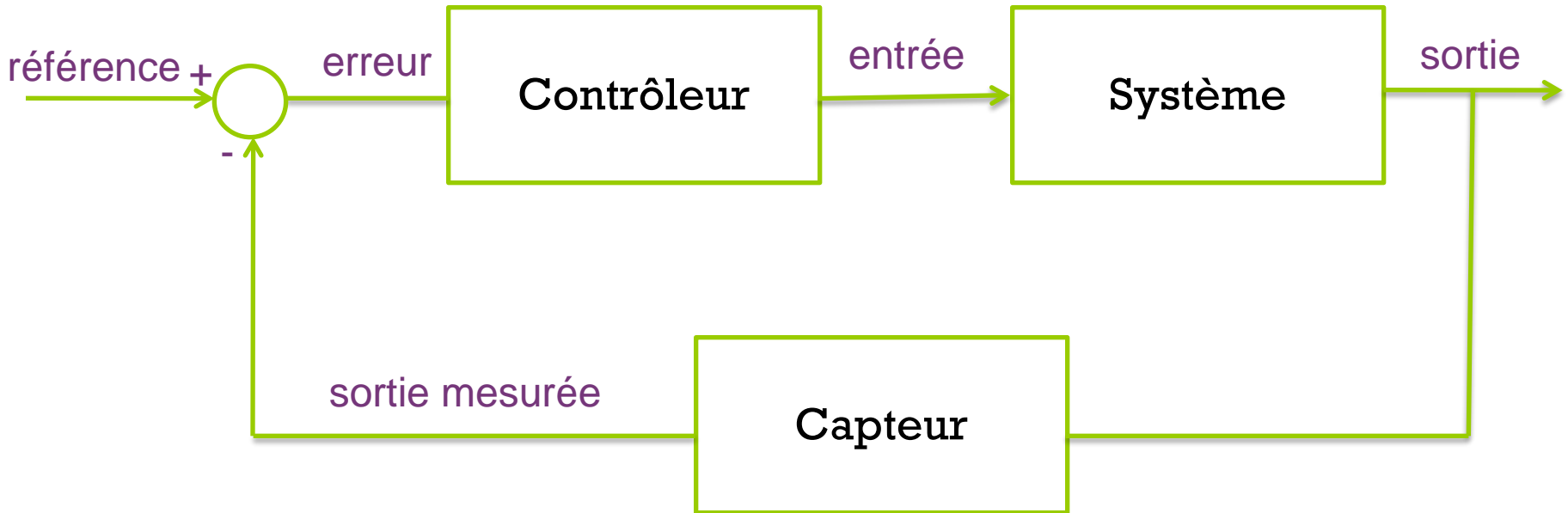
Contrôle en boucle fermée

L'objectif est de réduire la différence entre la référence et la sortie.

Le contrôleur agit sur l'entrée pour obtenir l'effet désiré en sortie du système.



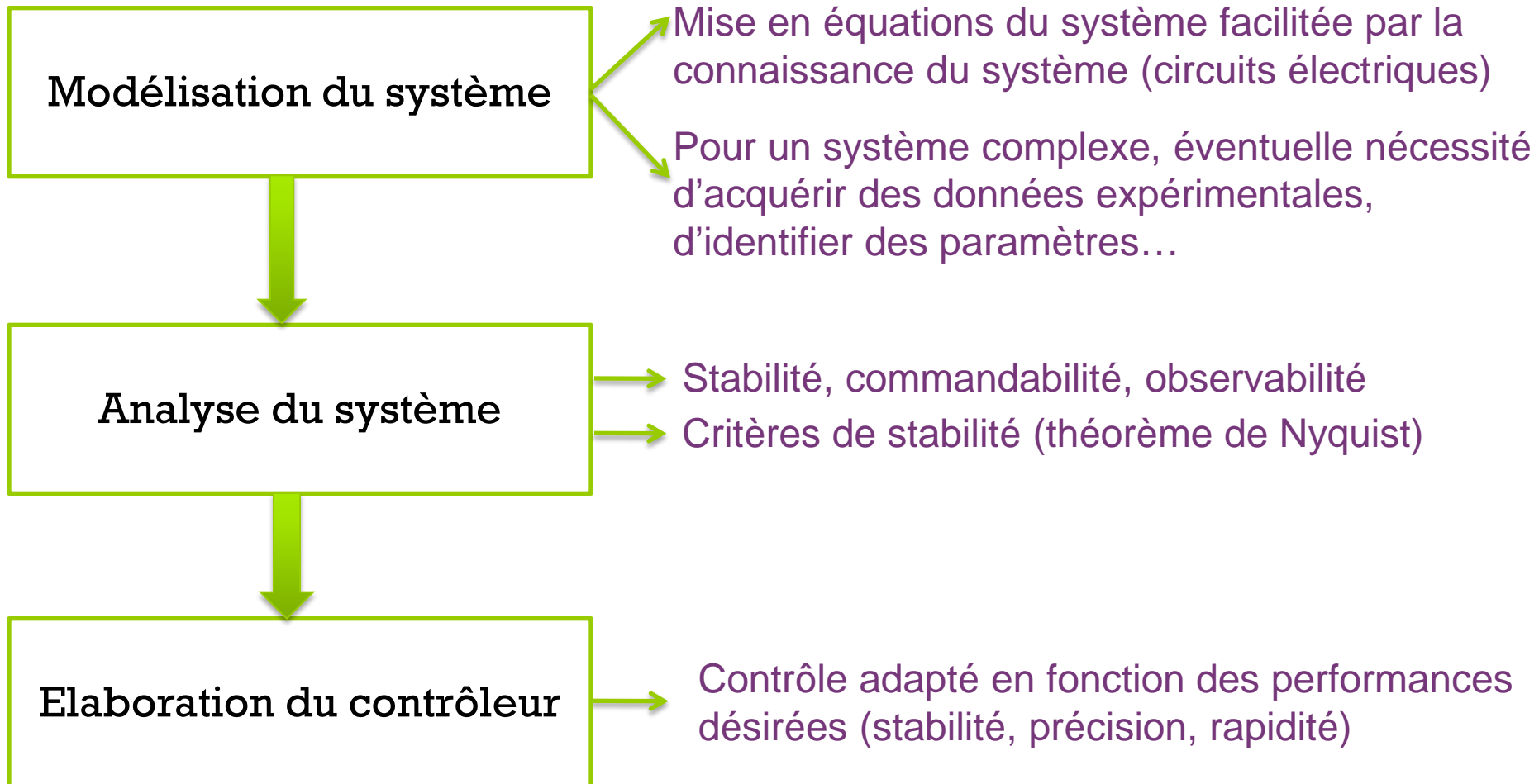
Contrôle en boucle fermée



Pour élaborer un contrôleur adapté, il faut avoir des informations sur le système.

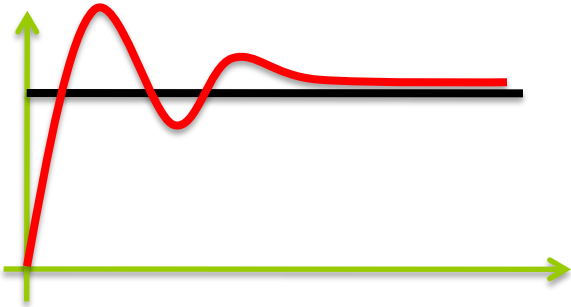
La façon la plus simple pour manipuler les propriétés d'un système est d'avoir une description mathématique de ce système (mise en équations).

Processus de contrôle

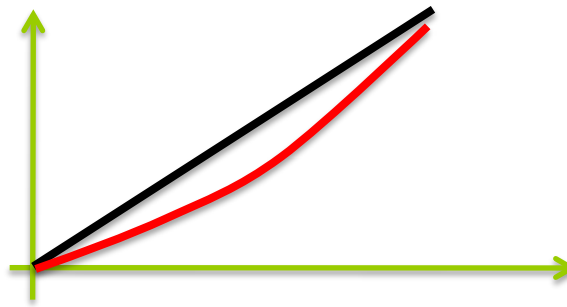


Propriétés du système

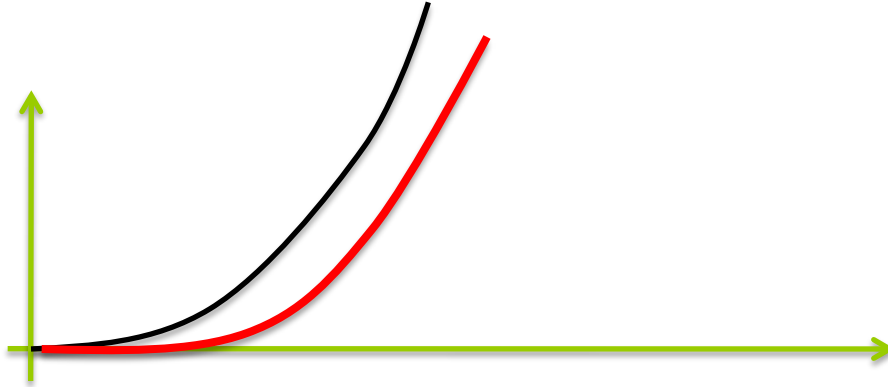
Réponse à un échelon



Réponse à une rampe

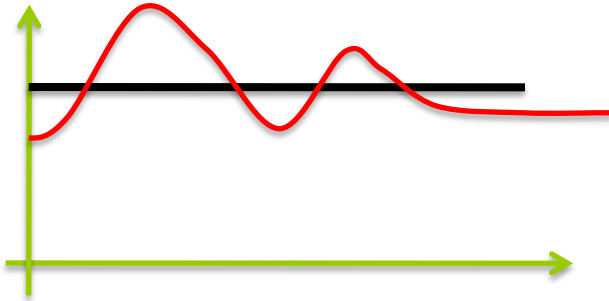


Réponse à une accélération

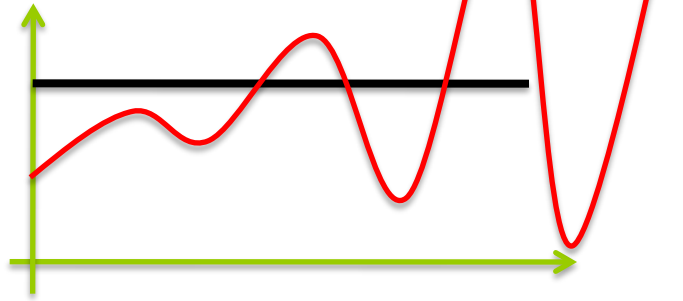


Propriétés du système

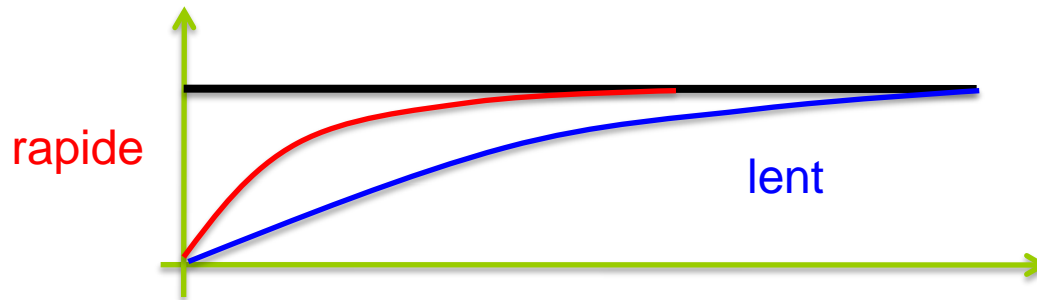
Stable



Instable

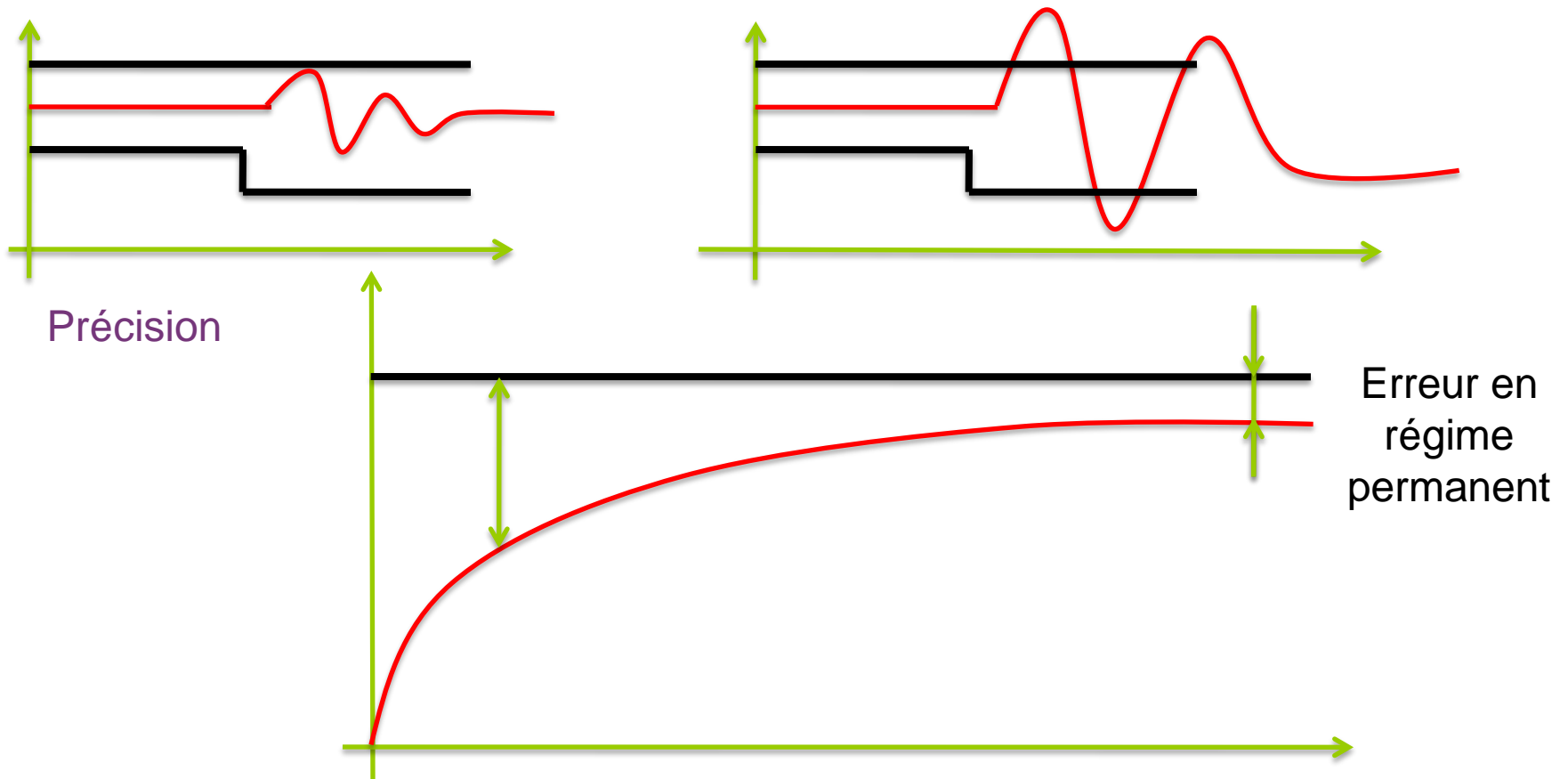


Rapidité de réponse



Propriétés du système

Sensibilité aux perturbations



Généralités :

Réponses et modes de représentation



Introduction

Pour avoir des informations sur un système

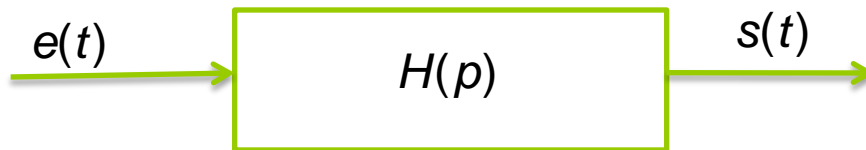


On peut définir un ensemble d'équations associées au système.



On peut tester expérimentalement sa réponse à différentes entrées.

$H(p)$: fonction de transfert du système



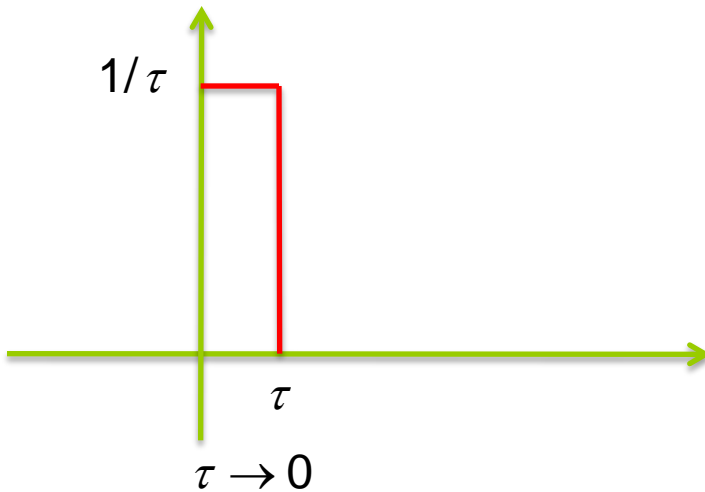
$$e(t) \rightarrow E(p)$$

$$s(t) \rightarrow S(p)$$

$$s(t) = h(t) * e(t) \rightarrow S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Entrées tests

Impulsion



En entrée : une impulsion de Dirac

$$e(t) = \delta(t)$$

$$\Rightarrow E(p) = 1$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p)$$

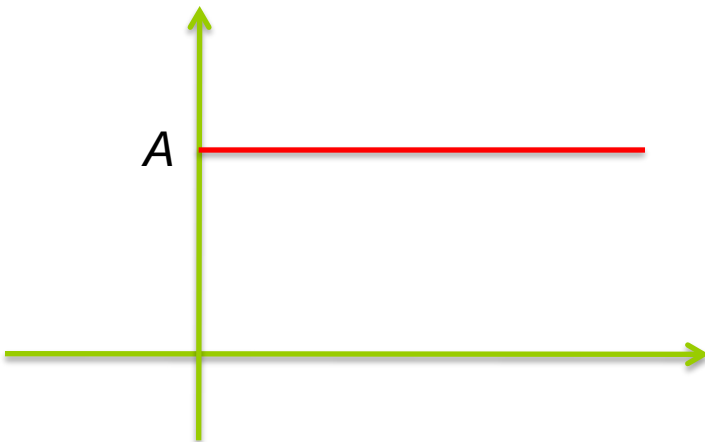
$$\Rightarrow S(p) = H(p)$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}(H(p))$$

$s(t)$ est la réponse impulsionnelle du système

Entrées tests

Entrée en échelon



Echelon unité

$$e(t) = Au(t)$$



$$E(p) = \frac{A}{p}$$



$$E(p) = \frac{1}{p}$$



$$S(p) = H(p)E(p)$$

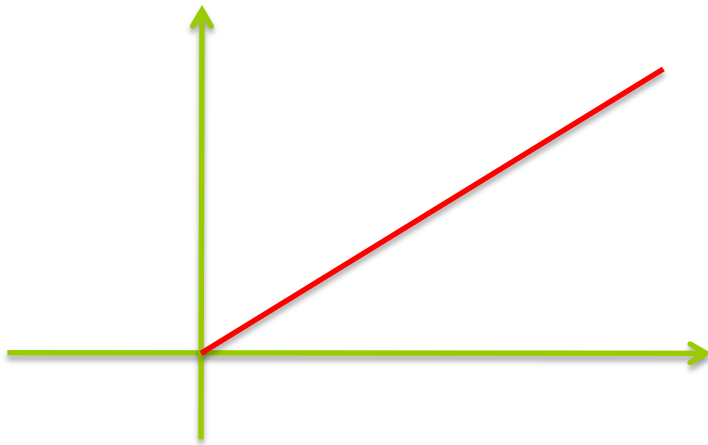


$$s(t) = L^{-1}\left(\frac{H(p)}{p}\right)$$

$s(t)$ est la réponse indicielle du système

Entrées tests

Entrée en rampe



$$e(t) = t.u(t)$$

$$\Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2}$$

$$\Rightarrow S(p) = H(p)E(p)$$

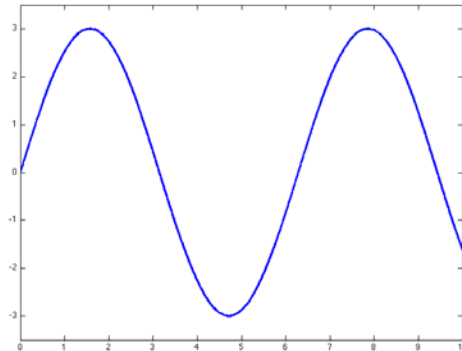
$$\Rightarrow S(p) = \frac{H(p)}{p^2}$$

$$\Rightarrow s(t) = L^{-1}\left(\frac{H(p)}{p^2}\right)$$

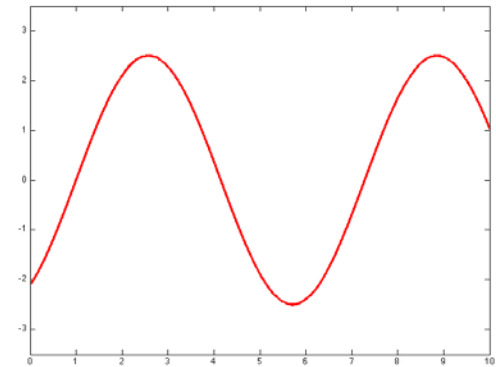
Entrées tests

Réponse harmonique

$$e(t) = E_m \sin(\omega t)$$



$$s(t) = S_m \sin(\omega t + \phi)$$



$H(p)$

L'entrée est sinusoïdale
d'amplitude E_m et de pulsation ω .

La sortie est sinusoïdale
d'amplitude S_m et de pulsation ω .

Modes de représentation

Réponse harmonique

En régime permanent, on a : $H(p) = H(j\omega)$

Comme $H(j\omega)$ est une quantité complexe, on écrit :



l'amplitude de $H(j\omega)$

$$|H(j\omega)| = \frac{S_m}{E_m}$$



la phase de $H(j\omega)$

$$\arg(H(j\omega)) = \phi$$

L'étude de la variation de l'amplitude et de la phase de H en fonction de ω caractérise la réponse du système en régime sinusoïdal permanent.

Diagramme de Bode

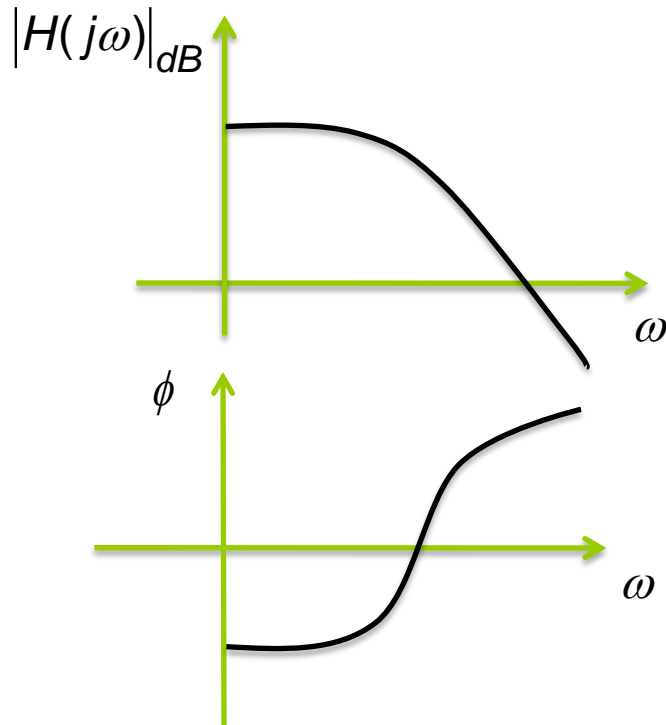
Diagramme de Nyquist

Diagramme de Black

Modes de représentation

Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est composé de 2 diagrammes



➡ L'amplitude est exprimée en dB :

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(j\omega)|$$

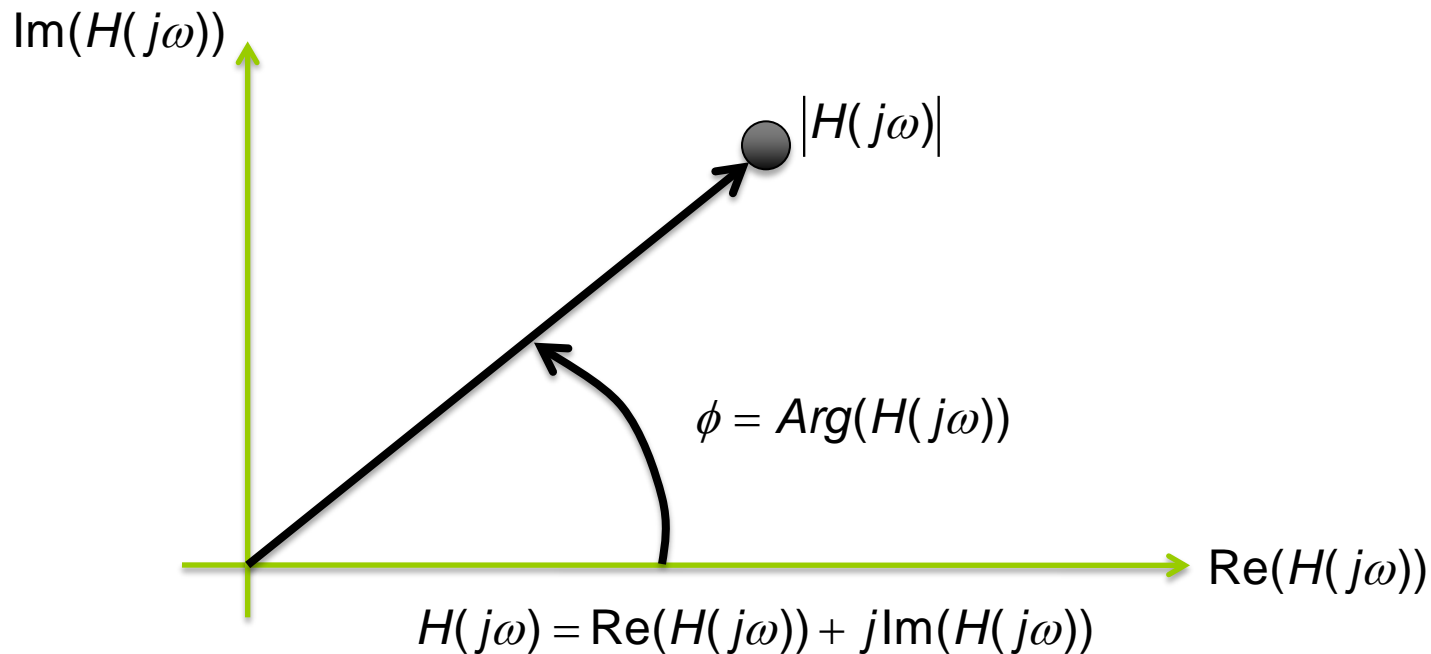
➡ La phase est exprimée par :

$$\phi = \text{Arg}(H(j\omega))$$

Modes de représentation

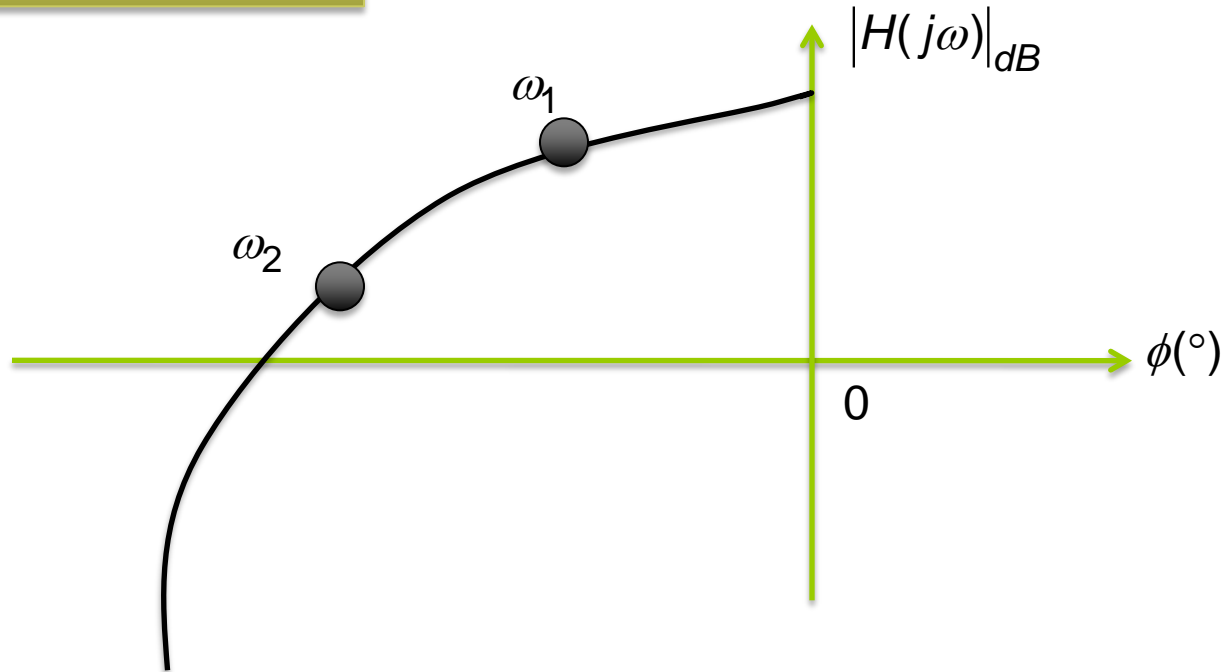
Diagramme de Nyquist

La partie imaginaire est représentée en fonction de la partie réelle pour $\omega : 0 \rightarrow \infty$



Modes de représentation

Diagramme de Black



Le diagramme de Black décrit les variations de $|H(j\omega)|_{dB}$ en fonction de l'argument de $H(j\omega)$.

Le modèle du premier ordre

Système linéaire continu

Rappels

Système continu : système qui intègre des variables en temps continu.

Système linéaire : système dont la réponse temporelle est liée à l'entrée par une relation linéaire à coefficients constants.

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Transmittance

On suppose des conditions initiales nulles. Le système est initialement au repos à $t = 0$.

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_np^n}$$

En régime sinusoïdal permanent, on remplace p par $j\omega$

$$H(j\omega) = \frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{b_0 + b_1j\omega + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1j\omega + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n}$$

Mise en équations

Equation
différentielle

$$y(t) + \tau \cdot \frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t)$$



Fonction
de transfert

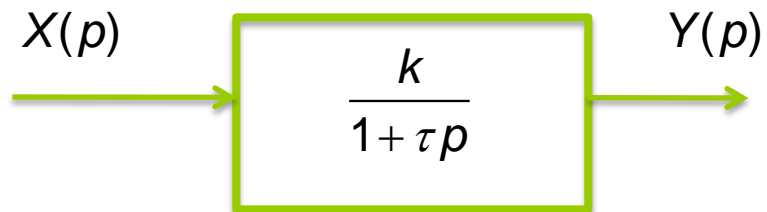
$$Y(p) + \tau \cdot p \cdot Y(p) = k \cdot X(p)$$

$$(1 + \tau p) \cdot Y(p) = k \cdot X(p)$$

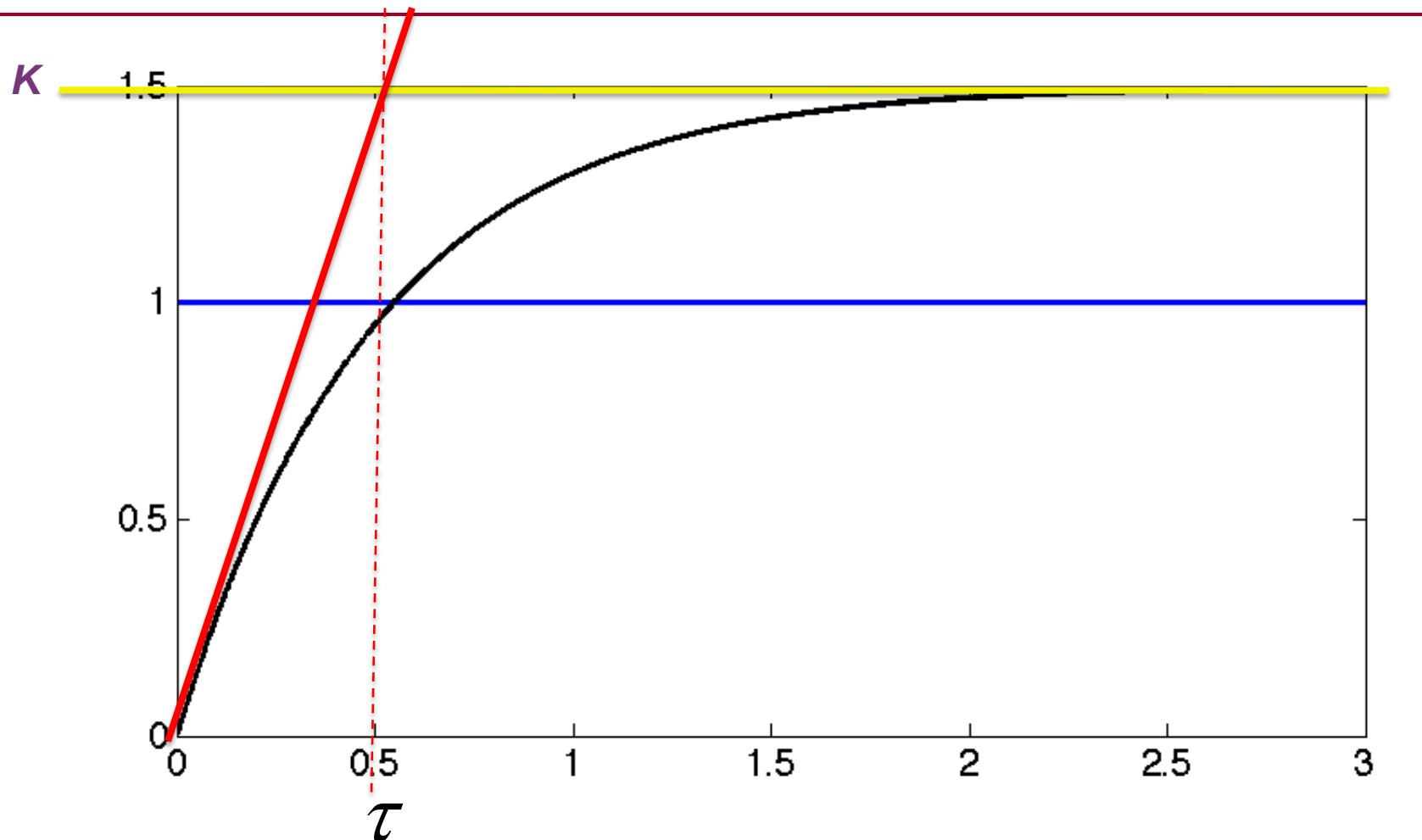
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau p}$$



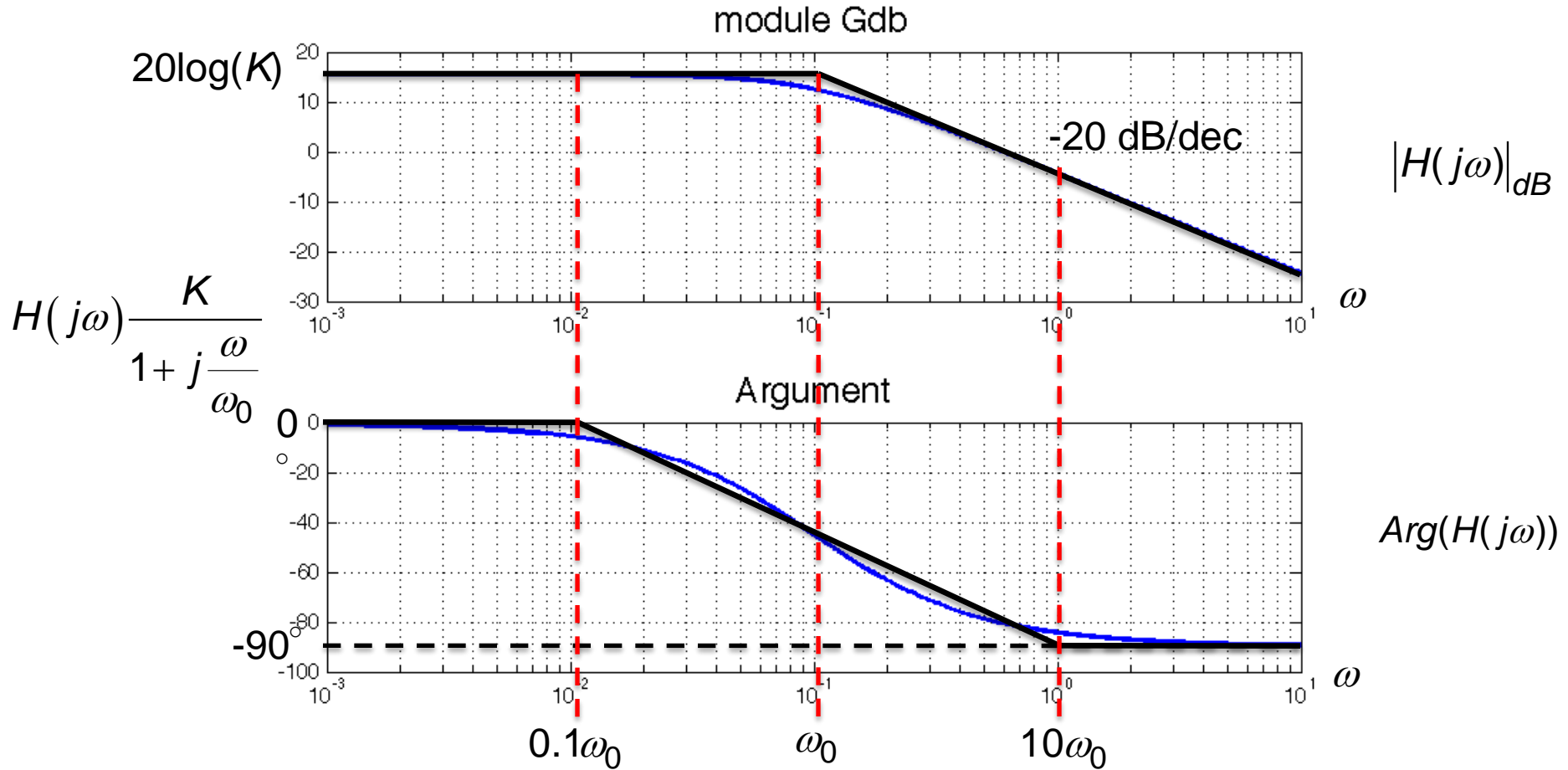
Bloc-
diagramme



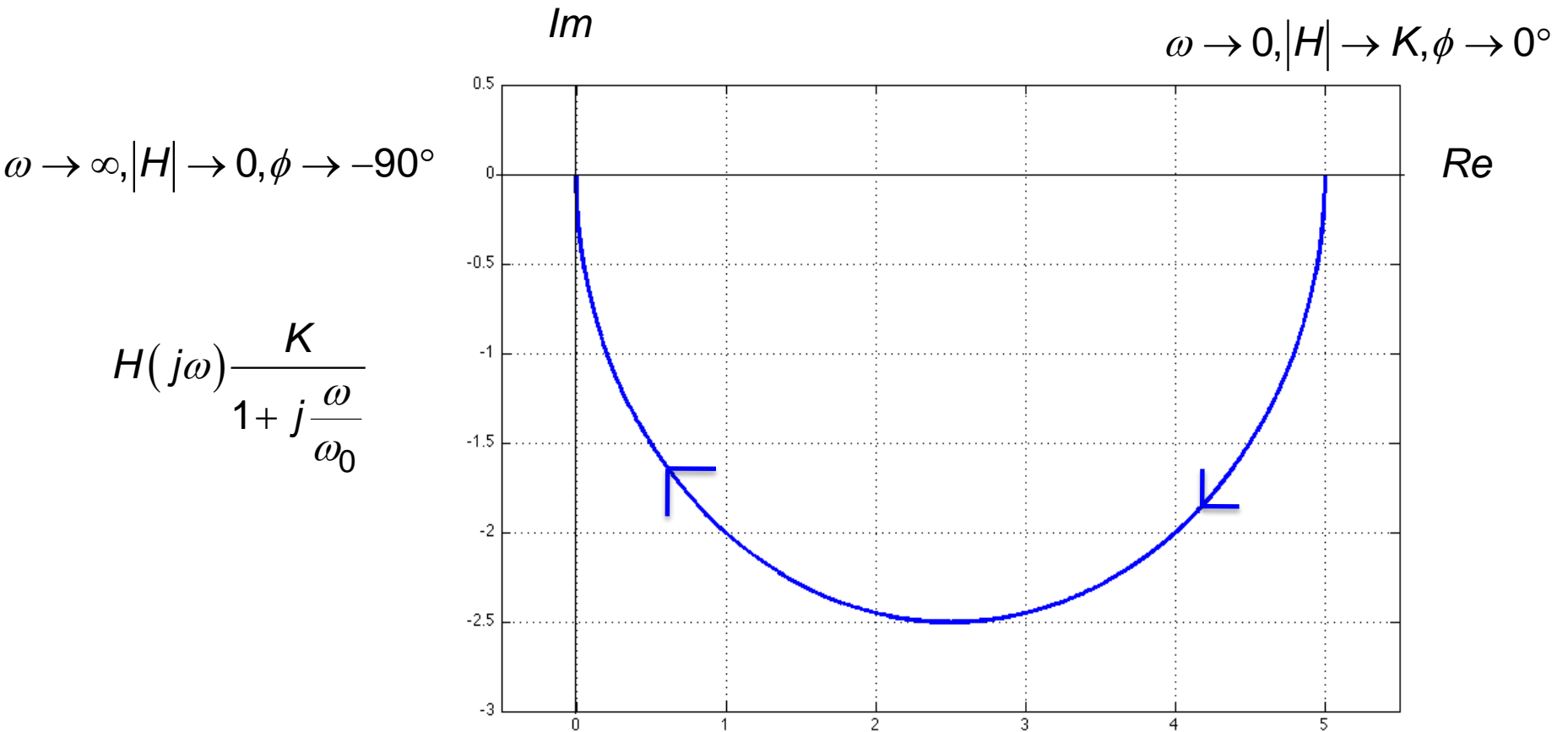
Réponse à un échelon



Représentation du gain dans Bode

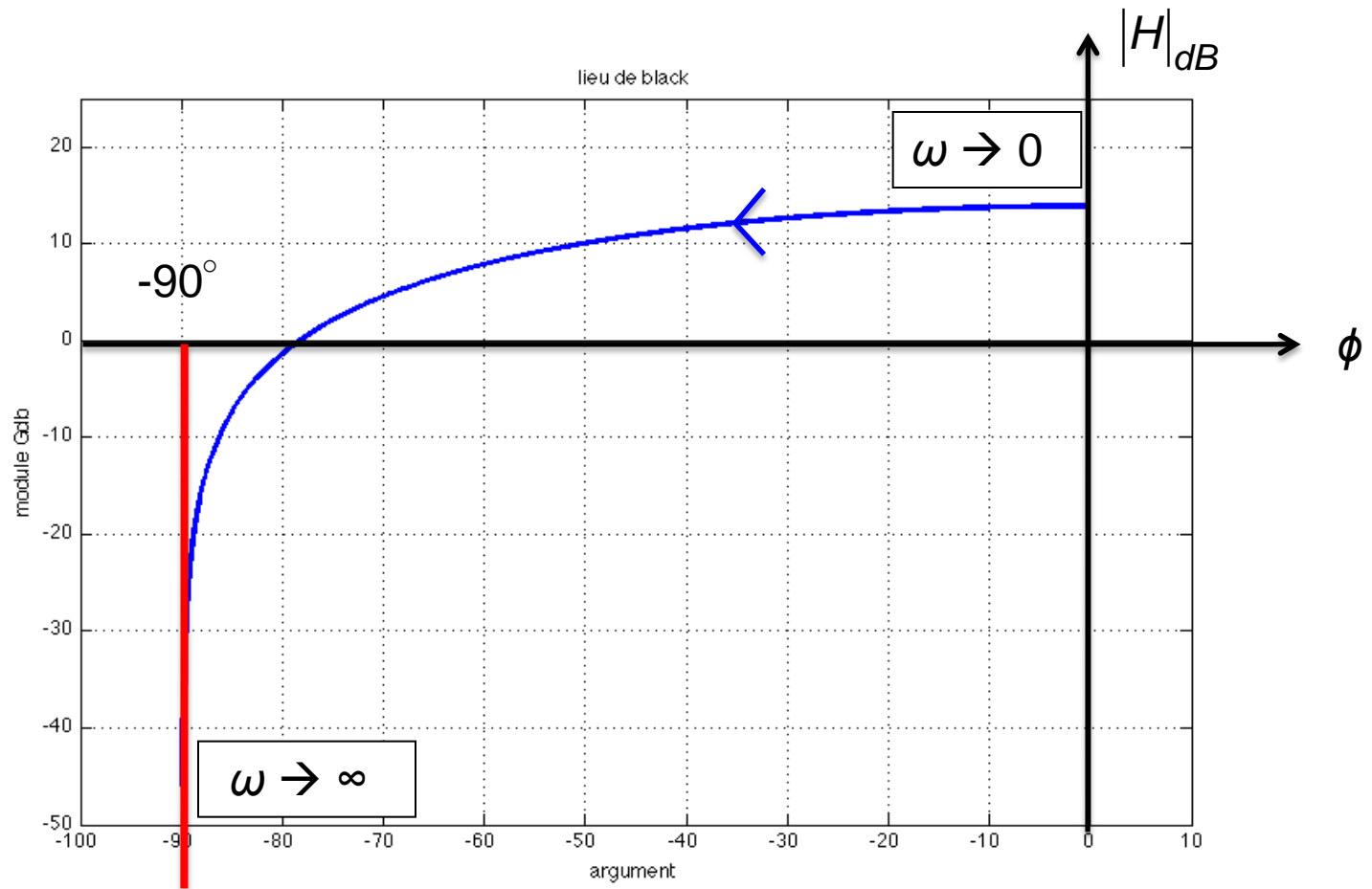


Représentation du gain dans Nyquist



Représentation du gain dans Black

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$



Le modèle du deuxième ordre

Mise en équations

Equation
différentielle

$$y(t) + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = K \cdot x(t)$$

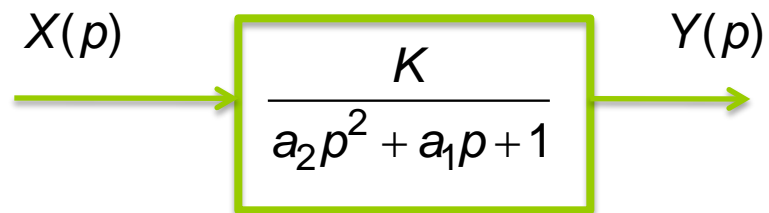


Fonction
de transfert

$$H(p) = \frac{K}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$



Bloc-
diagramme



Forme standard

$$H(p) = \frac{k}{a_2 p^2 + a_1 p + 1}$$

La forme standard d'un système du second ordre est la suivante :

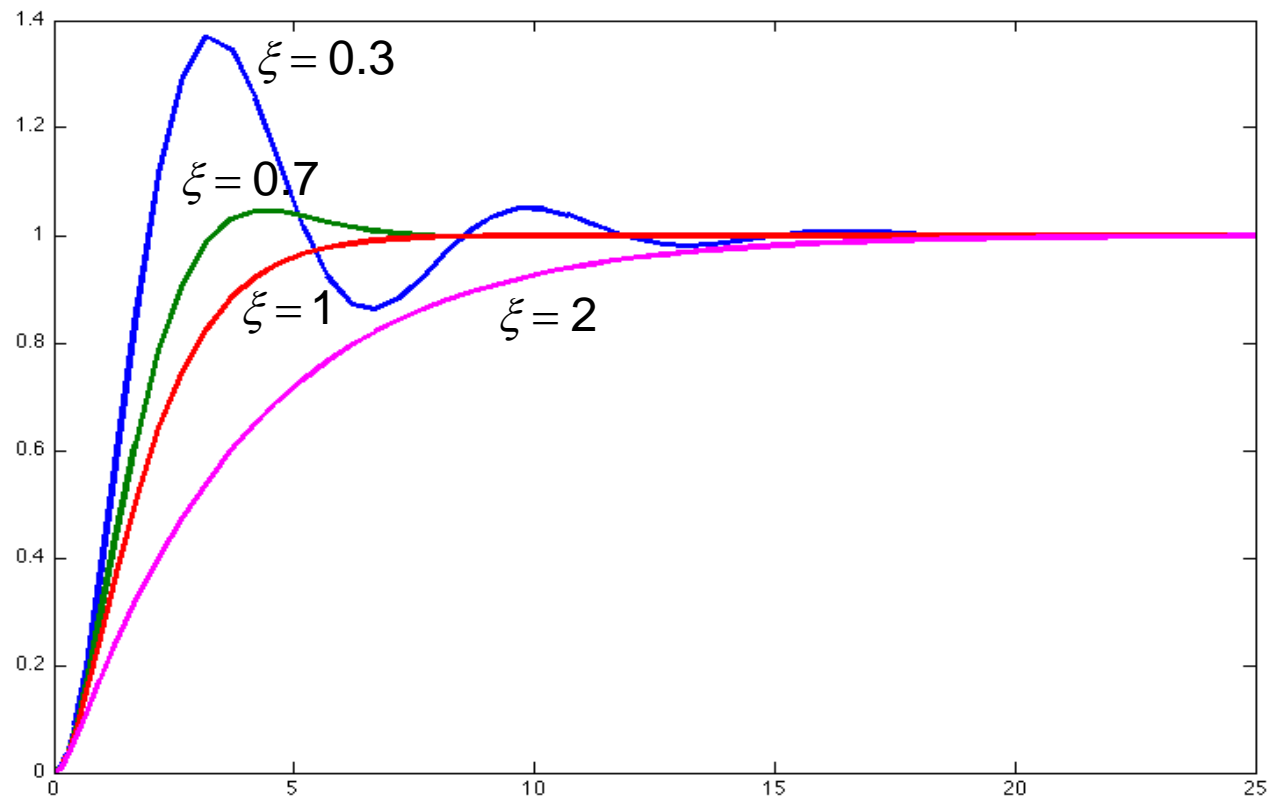
$$H(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1}$$

ξ : coefficient d'amortissement

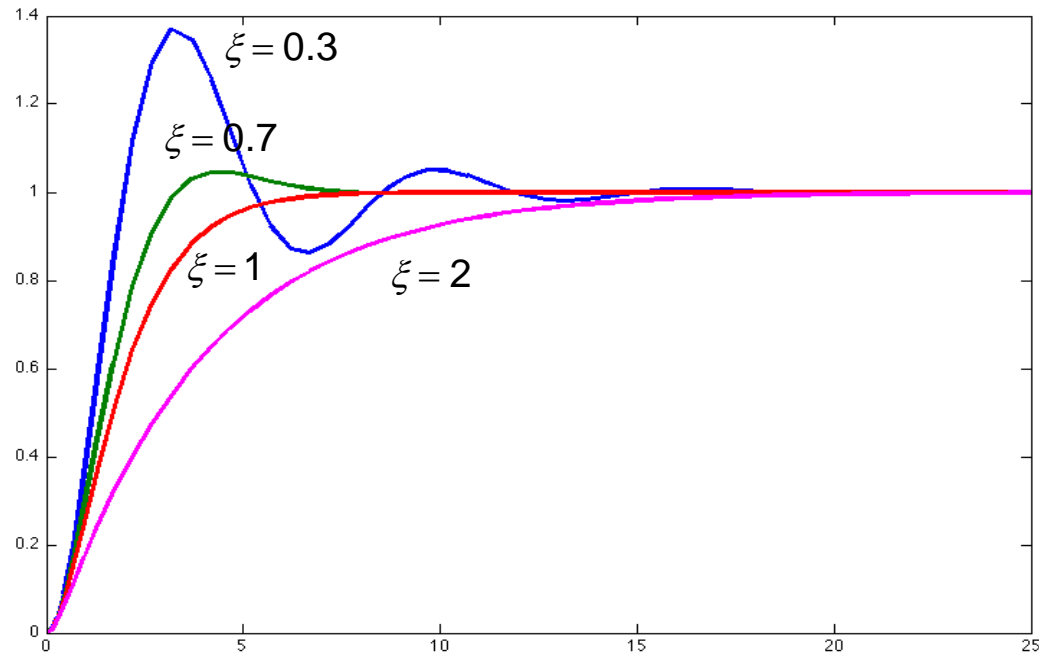
ω_n : pulsation propre

K : gain statique

Réponse temporelle en réponse à un échelon



Caractérisation de la réponse temporelle



Temps de réponse à 5% minimum pour $\xi = 0.7$

Utilisation d'abaques pour déterminer différentes grandeurs caractéristiques du système

Analyse de la réponse à un échelon unité

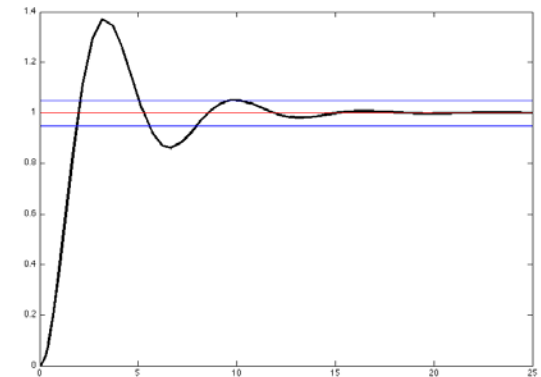
$$y(t) = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t + \phi\right) \right] u(t) \quad \text{avec} \quad \phi = \arccos \xi$$

Etude à différents instants, écart par rapport à la valeur 1

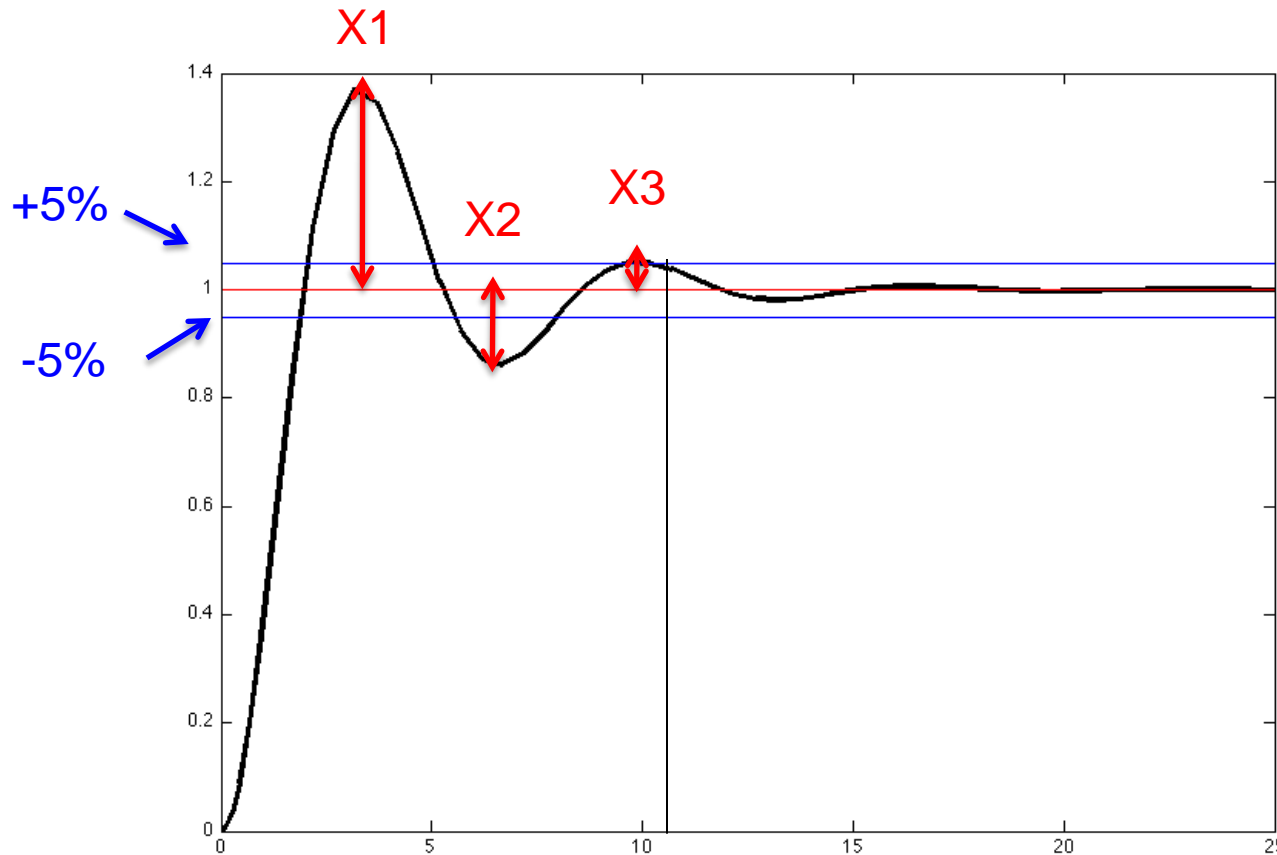
t	$y - 1$
0	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \phi = -\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\arccos \xi) = -1$
$T_p/2$	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n \frac{T_p}{2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \frac{T_p}{2} + \phi\right) = e^{-\xi\omega_n \frac{T_p}{2}}$
T_p	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n T_p} \sin(2\pi + \phi) = -e^{-\xi\omega_n T_p}$

Pseudo-période :

$$\omega_n\sqrt{1-\xi^2}T_p = 2\pi \rightarrow T_p = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{\omega_p}$$



Quelques caractéristiques



Dépassements

$$\frac{|X_{i+1}|}{|X_i|} = \frac{e^{-\xi\omega_n(i+1)\frac{T}{2}}}{e^{-\xi\omega_n i \frac{T}{2}}} = e^{-\xi\omega_n \frac{T}{2}}$$

$$\frac{|X_{i+1}|}{|X_i|} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Rapport entre le $i^{\text{ème}}$ dépassement et la valeur finale X_0

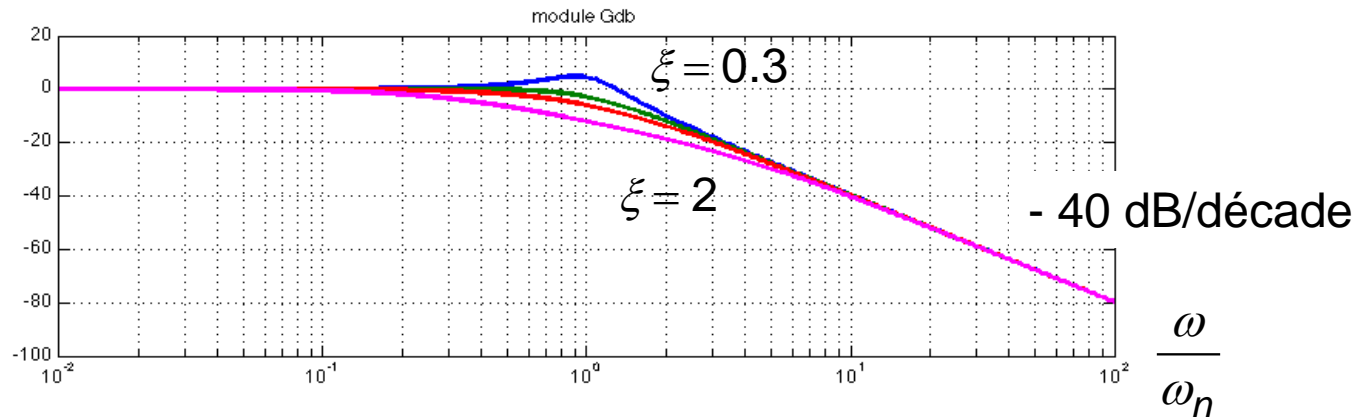
$$\frac{|X_i|}{|X_0|} = e^{-\xi i \omega_n T / 2} = e^{-\frac{\xi\pi i}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Temps de montée

$$t_m = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} (\pi - \arccos \xi)$$

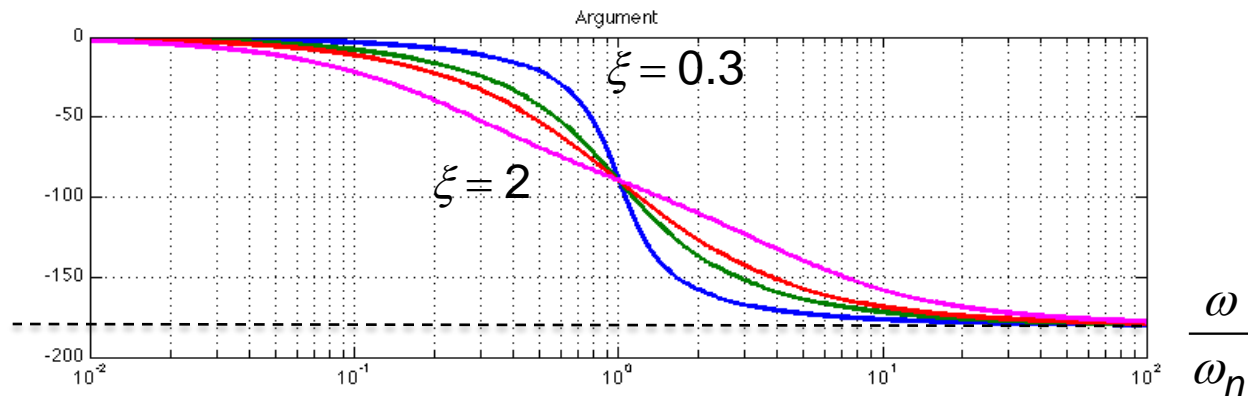
Représentation du gain dans Bode

$$|H(j\omega)|_{dB}$$

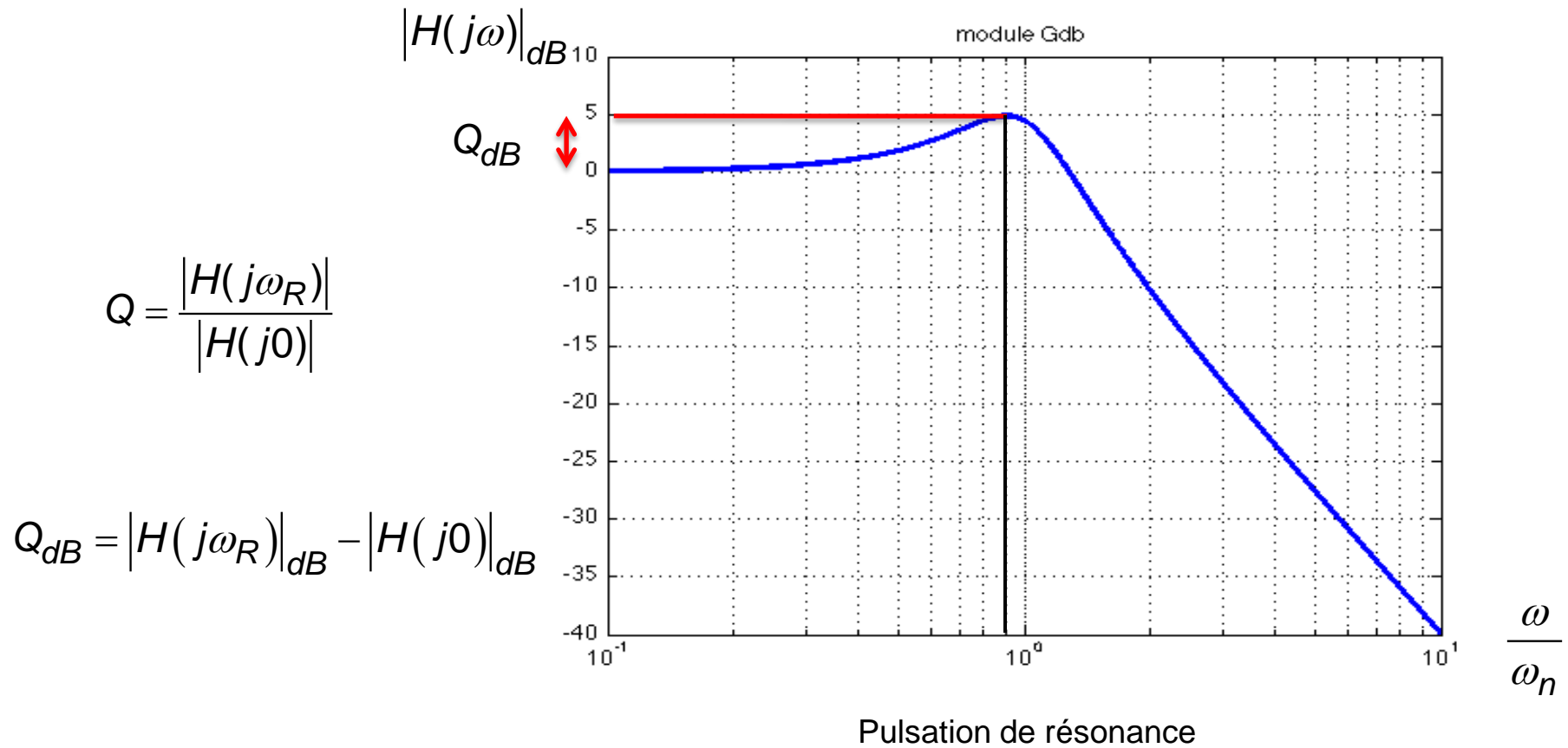


$$\text{Arg}(H(j\omega))$$

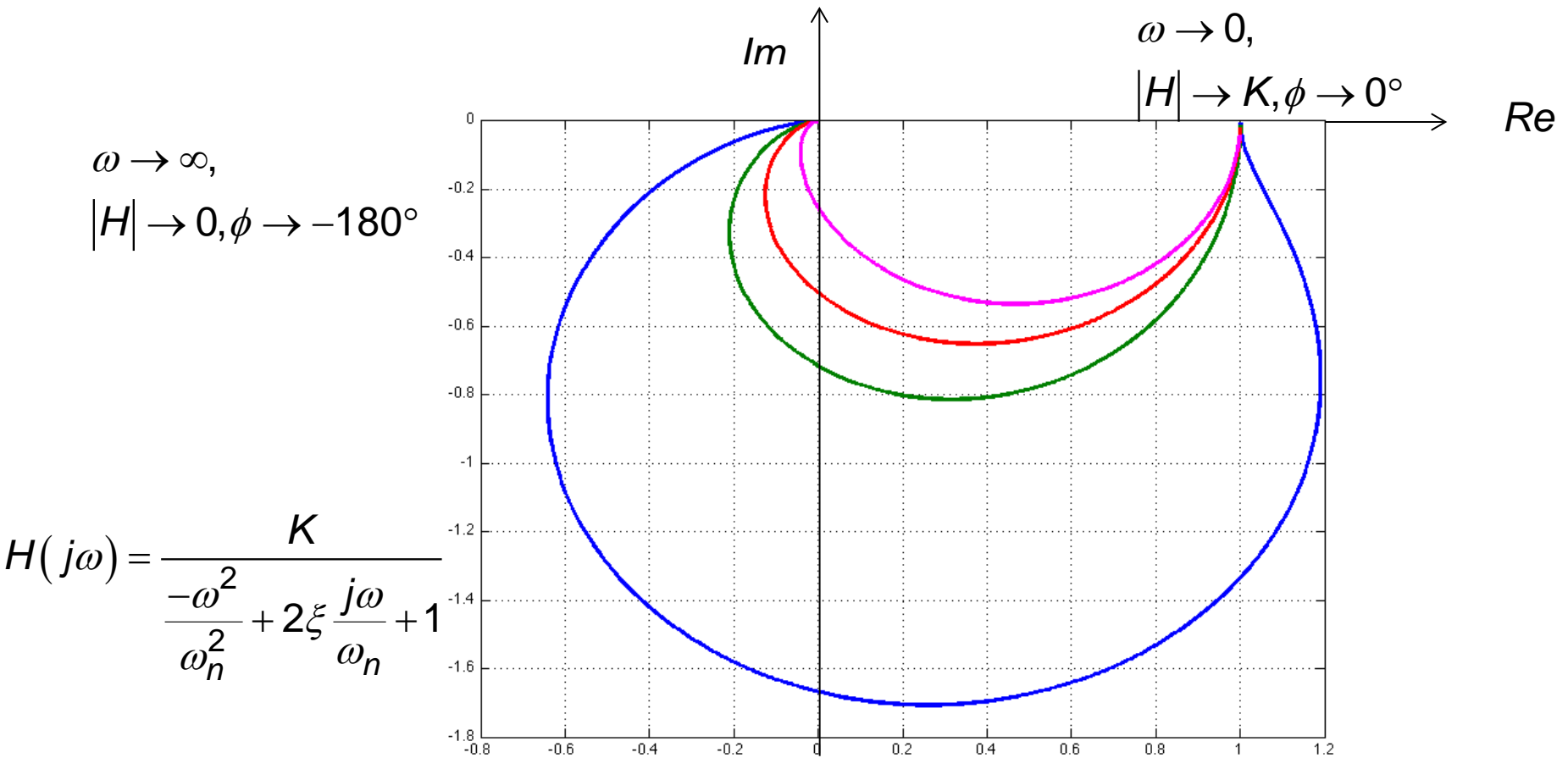
-
180°



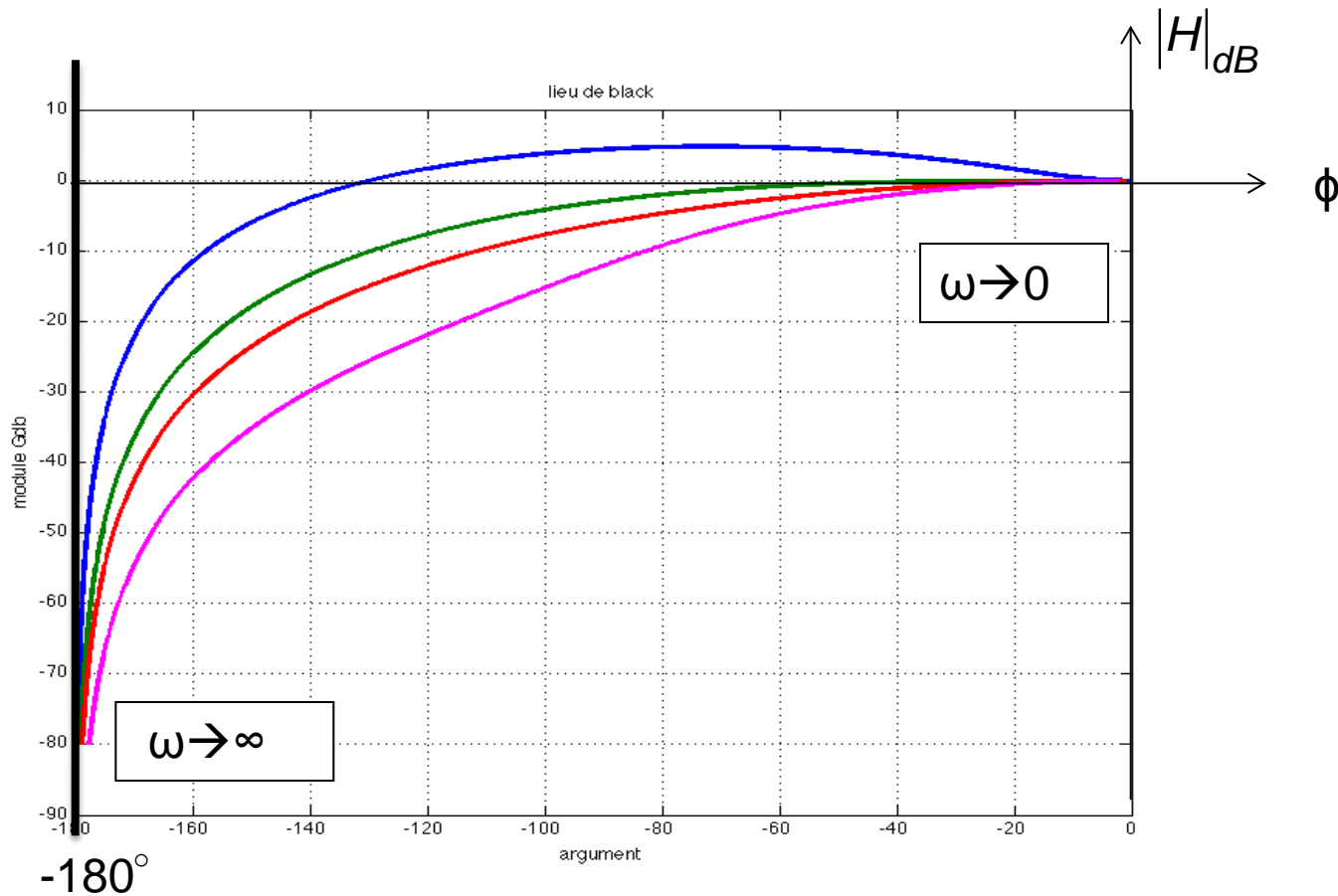
Caractéristiques dans Bode



Représentation du gain dans Nyquist

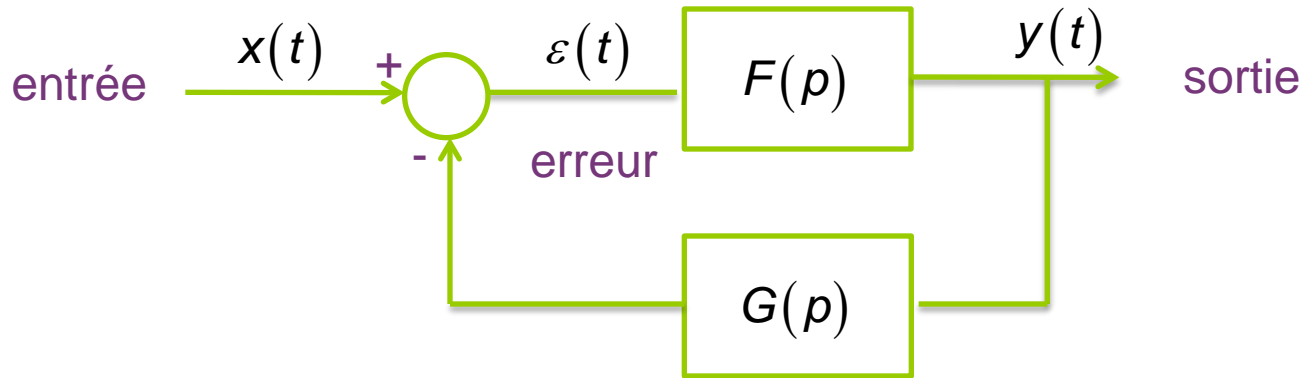


Représentation du gain dans Black



Systemes bouclés

Fonction de transfert



Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = W(p) = \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)}$$

$$W(p) = \frac{1}{G(p)} \frac{F(p)G(p)}{1 + F(p)G(p)}$$

Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

$$T(p) = F(p)G(p)$$

Si retour unitaire, $T(p) = F(p)$ et $W(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$

Ecart entre fonctions de transfert idéale et réelle

Fonction de transfert idéale $W_i(p) = \frac{1}{G(p)}$

Ecart relatif $\frac{W_i(p) - W(p)}{W_i(p)}$ ou $\frac{Y_i(p) - Y(p)}{Y_i(p)}$

$$\frac{\frac{1}{G(p)} - \frac{F(p)}{1 + F(p)G(p)}}{\frac{1}{G(p)}} = \frac{1}{1 + F(p)G(p)}$$

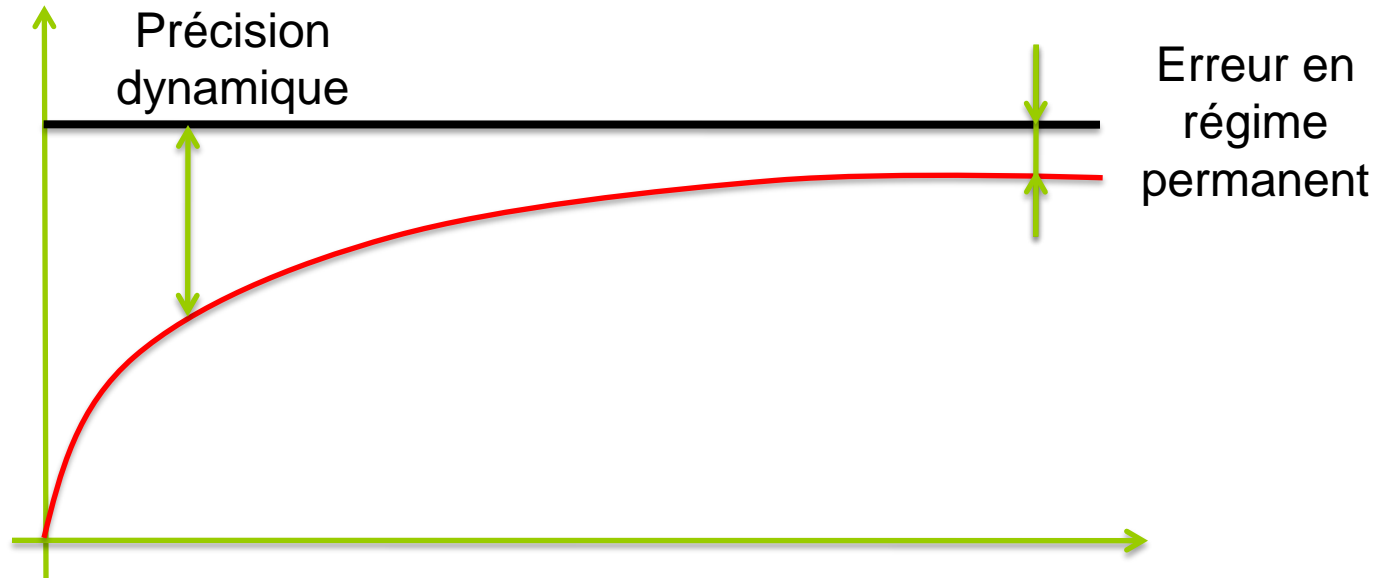
Transmittance d'erreur (en entrée)

$$\frac{\varepsilon(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + F(p)G(p)}$$

Précision



Précision



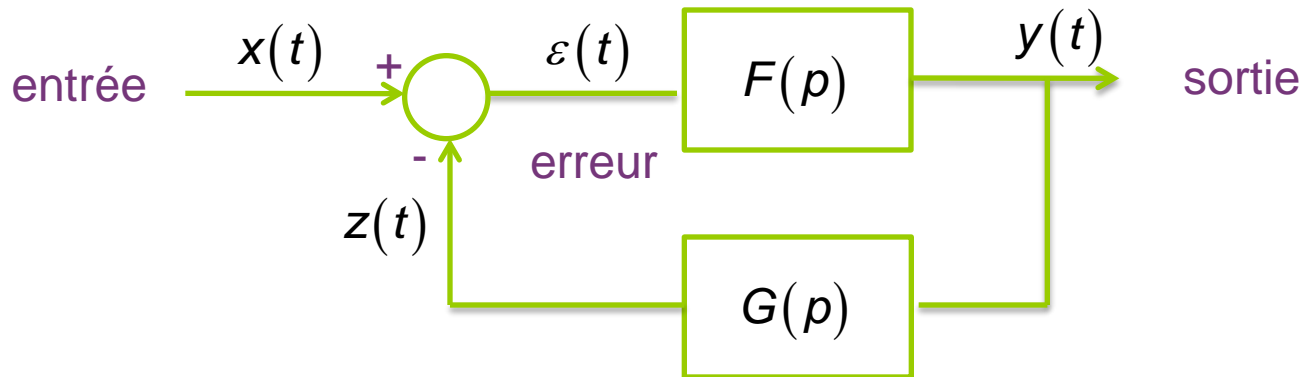
Erreur statique

Précision d'un système quand il est stabilisé avec une entrée en échelon

Erreur dynamique

Précision d'un système quand il n'est pas stabilisé

Erreur en régime permanent



Définition de l'erreur

$$\varepsilon(p) = X(p) - Z(p) = X(p) \frac{1}{1 + T(p)} \quad \text{avec} \quad T(p) = F(p)G(p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \frac{1}{1 + T(p)}$$

Ecriture de l'erreur

soit

$$T(p) = \frac{K}{p^n} \frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots}$$

ou

$$T(p) = \frac{K}{p^n} T_0(p) \quad \text{avec} \quad T_0(0) = 1$$

l'erreur s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \frac{1}{1 + T(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \frac{1}{1 + \frac{K}{p^n} T_0(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p) \frac{p^n}{p^n + K T_0(p)}$$

Entrée en échelon

soit $x(t) = X_0 \cdot u(t)$ ou $X(p) = \frac{X_0}{p}$

l'erreur s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{E}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} X_0 \frac{p^n}{p^n + K T_0(p)}$$

$$\text{si } n = 0, \quad \varepsilon(\infty) = \frac{X_0}{1 + K}$$

$$\text{si } n = 1, \quad \varepsilon(\infty) = 0$$

$$\text{si } n = 2, \quad \varepsilon(\infty) = 0$$

- Sans intégrateur, l'erreur est d'autant plus faible que K est grand.
- Un seul intégrateur suffit pour obtenir une erreur de position nulle.

Entrée en rampe

soit $x(t) = \alpha t.u(t)$ ou $X(p) = \frac{\alpha}{p^2}$

l'erreur s'écrit $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{\alpha}{p^2} \frac{p^n}{p^n + KT_0(p)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\alpha}{p} \frac{p^n}{p^n + KT_0(p)}$

$$\text{si } n = 0, \quad \varepsilon(\infty) = \infty$$

$$\text{si } n = 1, \quad \varepsilon(\infty) = \frac{\alpha}{K}$$

$$\text{si } n = 2, \quad \varepsilon(\infty) = 0$$

- Sans intégrateur, l'erreur est infinie.
- Un intégrateur permet d'obtenir une erreur finie d'autant plus faible que K est grand.
- A partir de deux intégrateurs, l'erreur devient nulle.

Entrée en parabole

soit $x(t) = \frac{1}{2}\beta t^2 \cdot u(t)$ ou $X(p) = \frac{\beta}{p^3}$

l'erreur s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\mathcal{E}(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\beta}{p^2} \frac{p^n}{p^n + KT_0(p)}$$

$$\text{si } n = 0, \quad \varepsilon(\infty) = \infty$$

$$\text{si } n = 1, \quad \varepsilon(\infty) = \infty$$

$$\text{si } n = 2, \quad \varepsilon(\infty) = \frac{\beta}{K}$$

Récapitulatif

<div> <div>entrée</div> <div>nombre d'intégrateurs</div> </div>	échelon $x(t) = X_0.u(t)$	rampe $x(t) = \alpha t.u(t)$	parabole $x(t) = \frac{1}{2}\beta t^2.u(t)$
$n = 0$	$\frac{X_0}{1+K}$	∞	∞
$n = 1$	0	$\frac{\alpha}{K}$	∞
$n = 2$	0	0	$\frac{\beta}{K}$

Stabilité



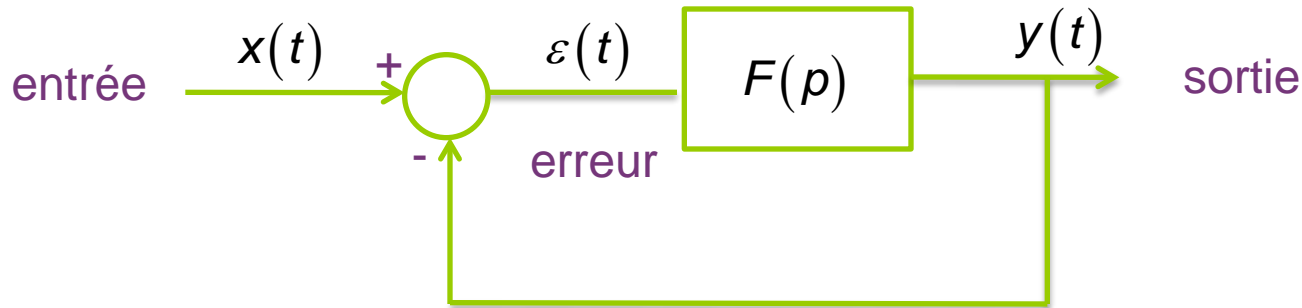
Introduction

Un système stable doit retourner à sa position initiale après une perturbation.

Un système instable diverge.

En pratique, pour tout système physiquement réalisable, un système linéaire est stable si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

Cas d'un système asservi à retour unitaire



FTBF :

$$W(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

FTBO :

$$T(p) = F(p)$$

Stabilité étudiée à partir de l'inspection de la position des racines de $1 + T(p)$



Pas toujours accessibles

Théorème de Cauchy

Th. : lorsque p décrit un contour C dans le sens direct, le point E représentatif de $f(p)$ effectue autour de l'origine un nombre de tours N égal à la différence $Z - P$ où Z et P représentent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles à l'intérieur de ce contour C .

Application à un système en boucle fermée

$$W(p) = \frac{T(p)}{1 + T(p)}$$

Pour stabilité en boucle fermée

$W(p)$ ne doit pas avoir de pôles à partie réelle positive

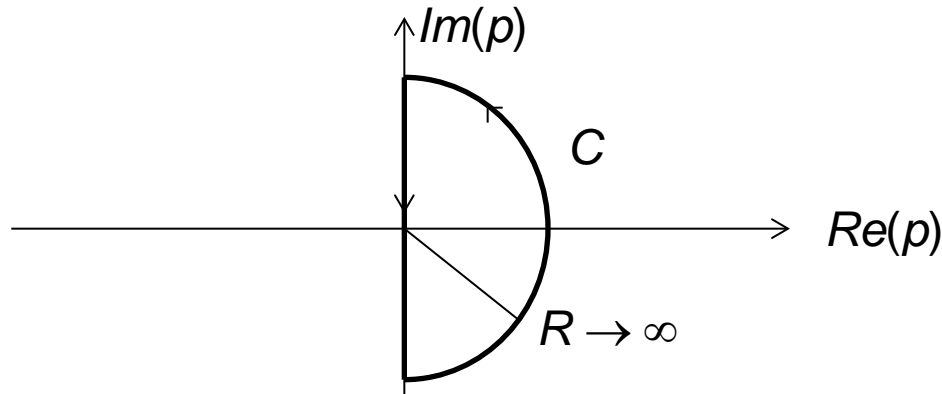
$1 + T(p)$ ne doit pas avoir de zéros à partie réelle positive

 Etude de la stabilité à partir de la FTBO

Choix du contour

Contour choisi pour connaître le nombre de zéros de $1 + T(p)$ à partie réelle positive

$$f(p) = 1 + T(p)$$

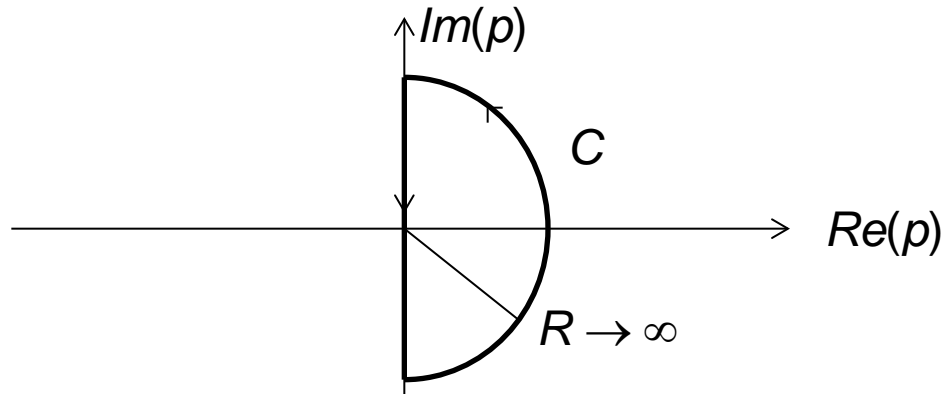


Le système en boucle fermée est stable si, lorsque p décrit le contour C dans le sens direct, le point E représentatif de $1 + T(p)$ effectue autour de l'origine, en sens inverse, un nombre de tours égal au nombre P de pôles de $1 + T(p)$ à partie réelle positive.

NB :

- Nombre de tours de $1 + T(p)$ autour de l'origine = nombre de tours de $T(p)$ autour du point critique $-1 + j0$.
- Nombre de pôles de $1 + T(p)$ à partie réelle positive = nombre de pôles de $T(p)$ à partie réelle positive.

Critère de stabilité de Nyquist



Un système en boucle fermée est stable si, lorsque p décrit dans le sens direct le contour C entourant le demi-plan droit, la courbe représentative de $T(p)$ effectue autour du point critique $-1+j0$ un nombre de tours en sens inverse trigonométrique égal au nombre P de pôles de $T(p)$ à partie réelle positive.

Simplifications

Critère simplifié

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ ne possédant pas de pôle à partie réelle positive. Le système en boucle fermée est stable si $N = 0$, *i.e.* $T(p)$ ne doit pas entourer le point -1.

Critère du revers

Pour une fonction de transfert en boucle ouverte $T(p)$ telle que :

- degré du numérateur < degré du dénominateur
- $T(p)$ à déphasage minimal
- $T(p)$ stable

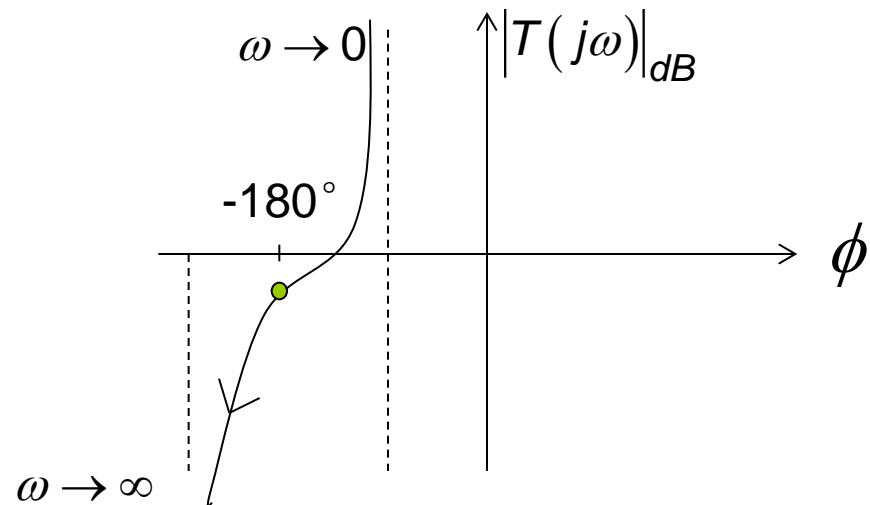
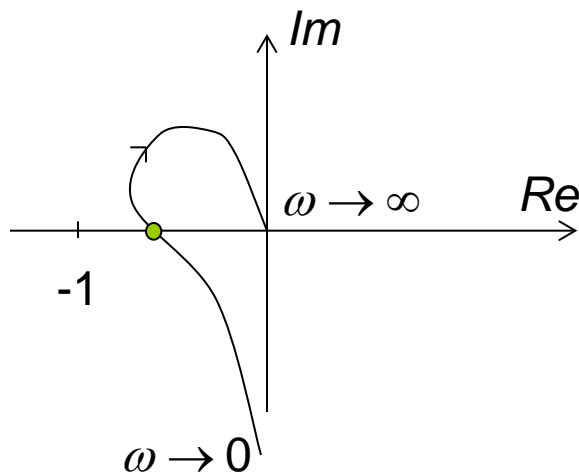
le système en boucle fermée est stable si, lorsque ω varie de 0 à $+\infty$, on laisse le point critique sur sa gauche.

Enoncé dans le plan de Black

Le point critique (-1) du plan de Nyquist a pour coordonnées $(-180^\circ, 0 \text{ dB})$ dans le plan de Black.

Critère dans le plan de Black

On constate qu'un contour stable, qui laisse le point critique à gauche dans le lieu de Nyquist, laisse le point critique à droite dans le plan de Black.



Marges de stabilité

Un système est d'autant plus stable que son lieu de transfert en boucle ouverte passe loin du point critique.

Marge de phase

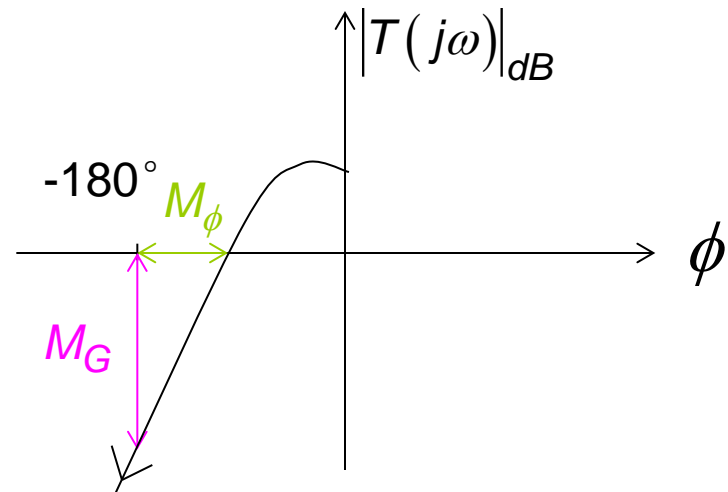
Variation de phase qui, à module constant, entraînerait l'instabilité

Marge de gain

Variation de gain qui, à phase constante, entraînerait l'instabilité

Valeurs courantes :

- Marge de phase : entre 45° et 50°
- Marge de gain : entre 10 et 15 dB



Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Soit $H(p)$ la fonction de transfert d'un système : $H(p) = N(p)/D(p)$

Examen de $D(p)$ pour savoir si certaines racines sont à partie réelle positive ou nulle.

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \text{ avec } a_n > 0$$

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	\dots
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	\dots
p^{n-2}	$c_n = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$c_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$c_{n-2} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	
\vdots	$d_n = \frac{c_n a_{n-3} - a_{n-1} c_{n-1}}{c_n}$	$d_{n-1} = \frac{c_n a_{n-5} - a_{n-1} c_{n-2}}{c_n}$		
\vdots	$e_n = \frac{d_n c_{n-1} - d_{n-1} c_n}{d_n}$	$e_{n-1} = \frac{d_n c_{n-2} - d_{n-1} c_n}{d_n}$		

Le coefficient a_{n-1} est le pivot de la 3^e ligne. La 4^e ligne s'obtient, comme la 3^e, en multipliant en diagonale les termes de la 2^e ligne et de la 3^e ligne, les termes obtenus étant tous divisés par le pivot de la 4^e ligne, et ainsi de suite. Si tous les coefficients de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh sont positifs, l'équation caractéristique ne possède que des racines à partie réelle négative.