Systèmes élémentaires

Quelques systèmes

- ***Modèle numérique du 1^er^ ordre*** **:**

Le modèle numérique $G(z)$ du 1er ordre est obtenu par échantillonnage-blocage d'un processus analogique $A(p)$ du 1er ordre :

$$G(z)=\frac{z-1}{z}Z\left[\frac{A(p)}{p}\right] \qquad G(z)=Z\left[B_0(p).A(p)\right]$$

1er ordre analogique : $A(p)=\dfrac{K}{1+\tau p}$

1er ordre numérique : $G(z)=\dfrac{z-1}{z}Z\left[\dfrac{A(p)}{p}\right]=\dfrac{b_0}{z+a_0}$ (cf. Tables) avec : $\begin{cases} b_0=K(1+a_0) \\ a_0=-e^{-\frac{T}{\tau}} \end{cases}$

La fonction de transfert $G(z)$ est aussi du 1er ordre. Elle dépend fondamentalement de T.

$G(z)$ ***a pour pôle :*** $-a_0=e^{-T/\tau}=e^{-p_0T}$ ***avec :*** $p_0=-\dfrac{1}{\tau}$ ***: pôle du système analogique.***

- ***<u>Modèle numérique du 2ème ordre</u>* :**

2nd ordre analogique : $A(p) = \dfrac{1}{1 + 2\xi \dfrac{p}{\omega_n} + \left(\dfrac{p}{\omega_n}\right)^2}$ (modèle avec gain statique égal à 1)

ξ : amortissement (noté aussi m) ω_n : pulsation propre (notée aussi ω_0)

2nd ordre numérique : $G(z) = \dfrac{z-1}{z} Z\left[\dfrac{A(p)}{p}\right]$ (cf. Tables) $G(z) = Z[B_0(p)A(p)]$

La forme polynomiale donne directement les coefficients de la récurrence :

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \;;$$

La forme pôles et zéros autorise une équation évaluation des performances dynamiques :

$$G(z) = b_1 \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - \overline{z_1})}.$$

$$\alpha = e^{-\xi\omega_n T}$$

$$\omega_n' = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

$$a_0 = \alpha^2$$

$$a_1 = -2\alpha\cos(\omega_n T)$$

$$b_0 = \alpha^2 + \alpha\left[\xi\frac{\omega_n}{\omega_n'}\sin(\omega_n' T) - \cos(\omega_n' T)\right]$$

$$b_1 = 1 - \alpha\left[\xi\frac{\omega_n}{\omega_n'}\sin(\omega_n' T) + \cos(\omega_n' T)\right]$$

$$z_0 = -\frac{b_0}{b_1}$$

$$z_1 = e^{(-\xi\omega_n + j\omega_n')T}$$

$$\bar{z}_1 = e^{(-\xi\omega_n - j\omega_n')T}$$

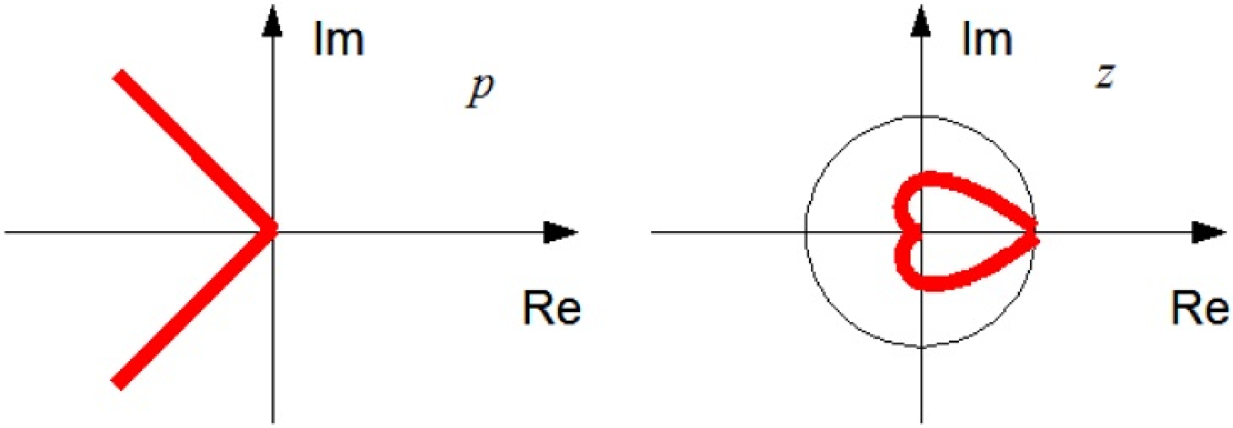
$\dfrac{K}{1+\dfrac{2\zeta}{\omega_n}p+\dfrac{p^2}{\omega_n{}^2}}$	$KK_1\dfrac{z-z_0}{\left(z-\overline{z_1}\right)\left(z-\overline{z_1}^*\right)}$ avec $\begin{cases}\begin{cases}\overline{z_1} = \rho e^{j\theta} \\ \overline{z_1}^* = \rho e^{-j\theta}\end{cases} \text{ et } \begin{array}{l}\rho = e^{-\zeta\omega_n T} \\ \theta = T\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\end{array} \\ K_1 = 1-\rho\left[\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\theta+\cos\theta\right] \\ z_0 = -\dfrac{\rho^2+\rho\left(\dfrac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\theta-\cos\theta\right)}{K_1}\end{cases}$

Transformées en z des processus usuels munis d'un BOZ

Pôles complexes conjugués

$$G(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2} \longrightarrow B_0G(z) = \frac{b_1 z+b_0}{z^2-2(e^{-\xi\omega_k T_e})\cos(\omega_d T_e)z+e^{-2\xi\omega_k T_e}}$$

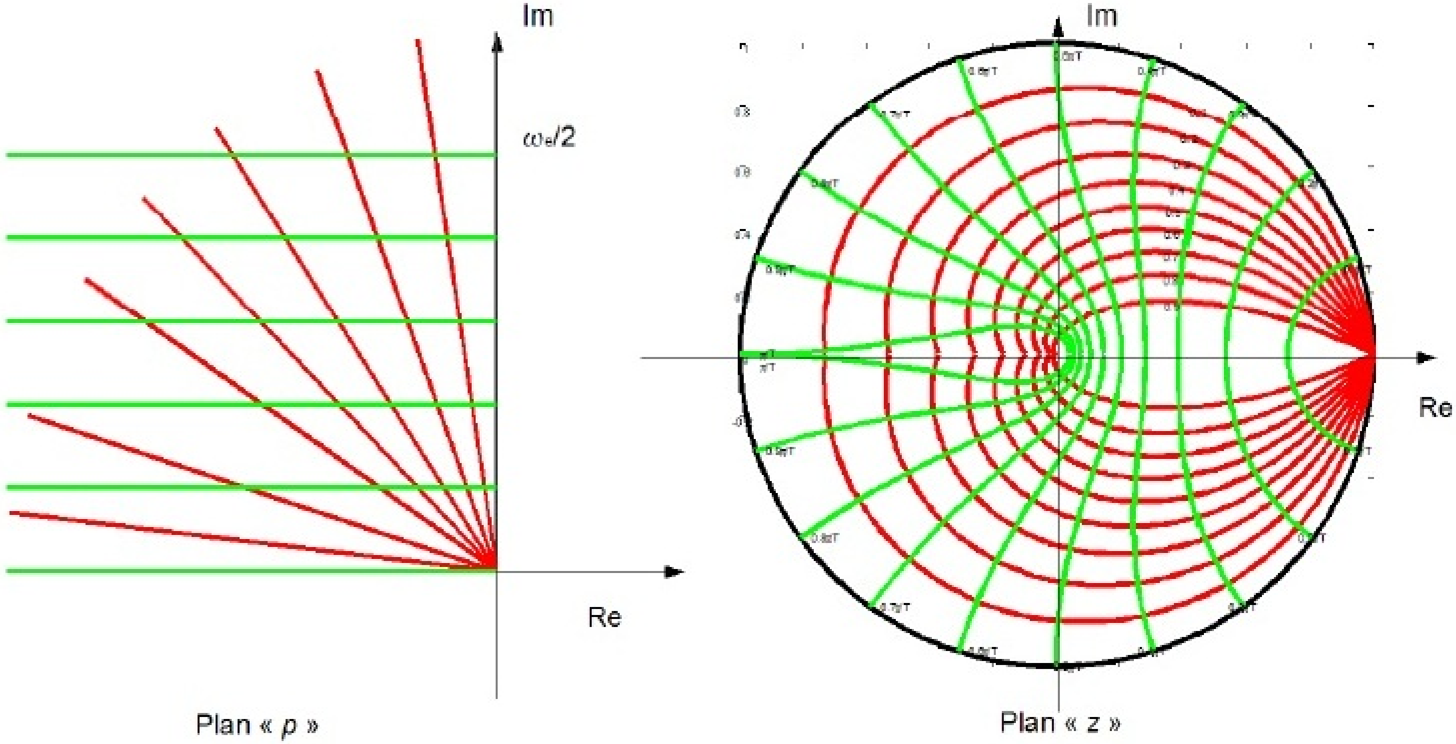
$$\begin{aligned} p_1,\overline{p_1} &= -\xi\omega_n \pm \imath\omega_d & \longrightarrow \quad z_1,\overline{z_1} &= e^{-\xi\omega_k T_e}\cos(\omega_d T_e) \pm \sqrt{e^{-2\xi\omega_k T_e}\cos^2(\omega_d T_e) - e^{-2\xi\omega_k T_e}} \\ \text{où} \ \ \omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\xi^2} & &= e^{-\xi\omega_k T_e}\left(\cos(\omega_d T_e) \pm \imath\sin(\omega_d T_e)\right) \\ & & &= e^{-\xi\omega_k T_e}e^{\pm\imath\omega_d T_e} \end{aligned}$$

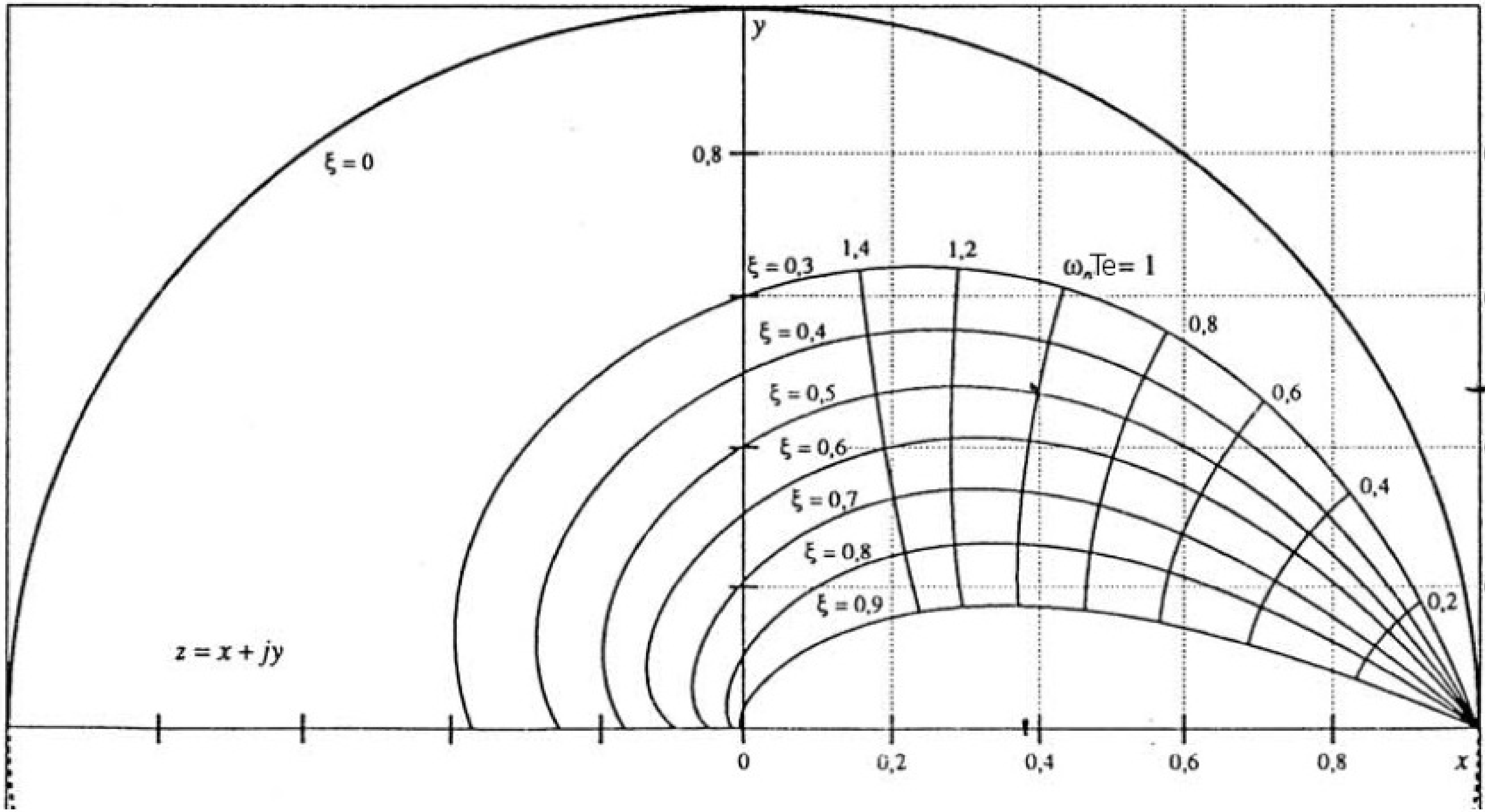


– Transformation des pôles complexes conjugués de p vers z.

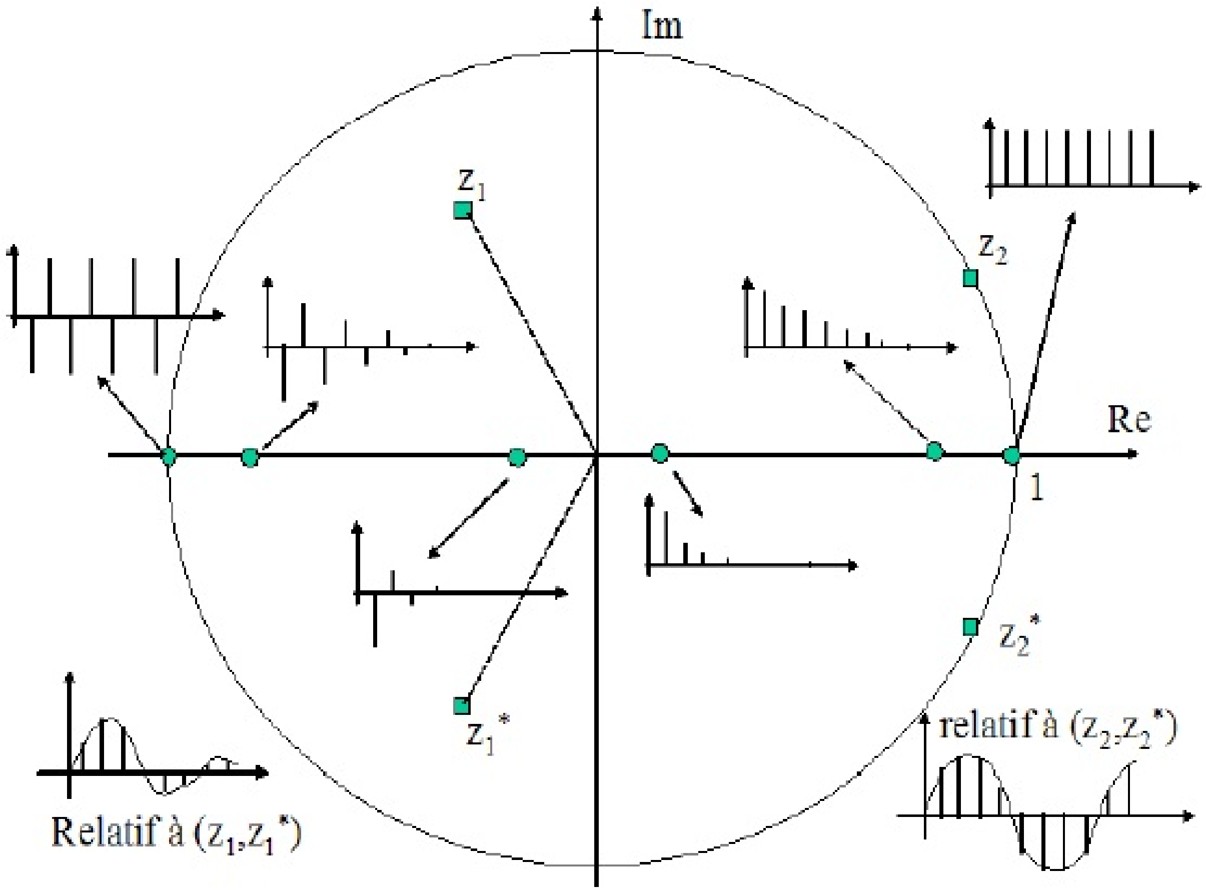
Généralisation Dans les deux cas nous avons bien la relation :

$$\begin{array}{ccc} \text{Pôle du système continu} & \longrightarrow & \text{Pôle du système échantillonné} \\ p_i & \longrightarrow & z_i = e^{T_e p_i} \end{array}$$

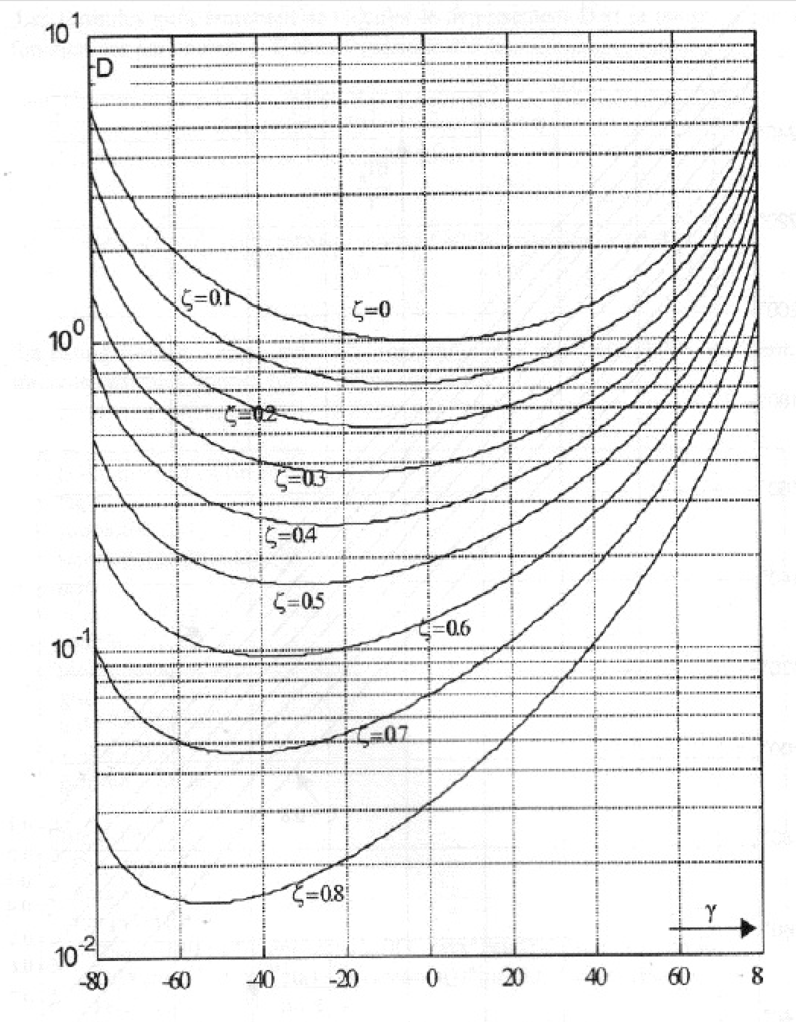




– Lieu des pôles iso-amortissement.

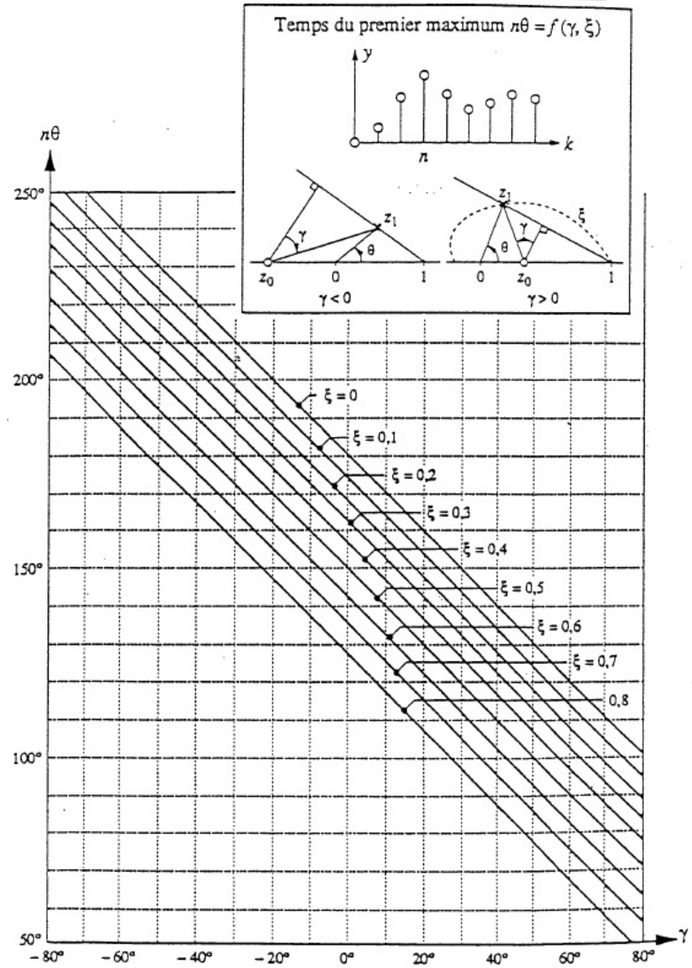


Réponse impulsionnelle en fonction de la position des pôles.

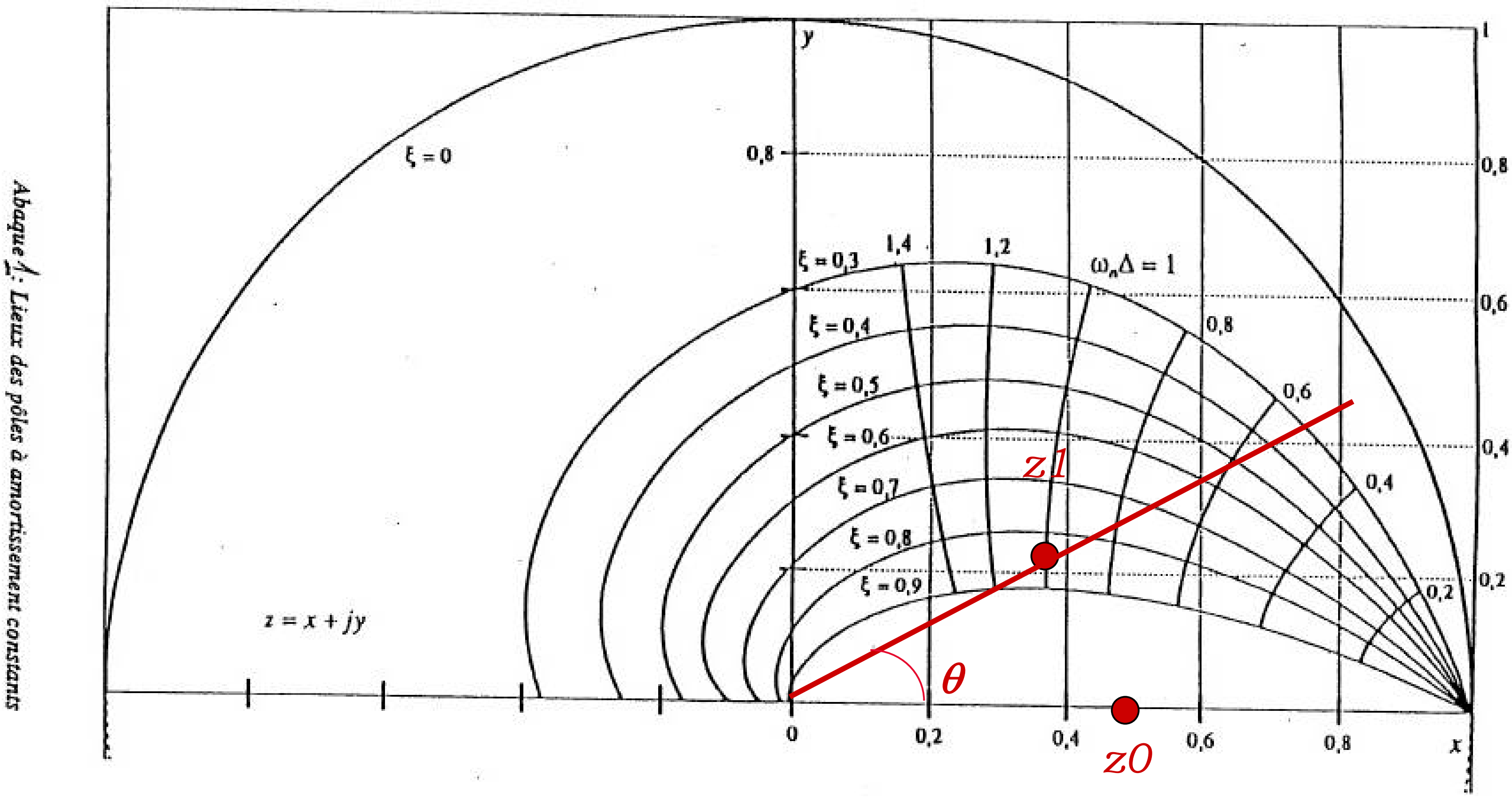


(Abaque du 2ème ordre numérique) : Dépassement indiciel.

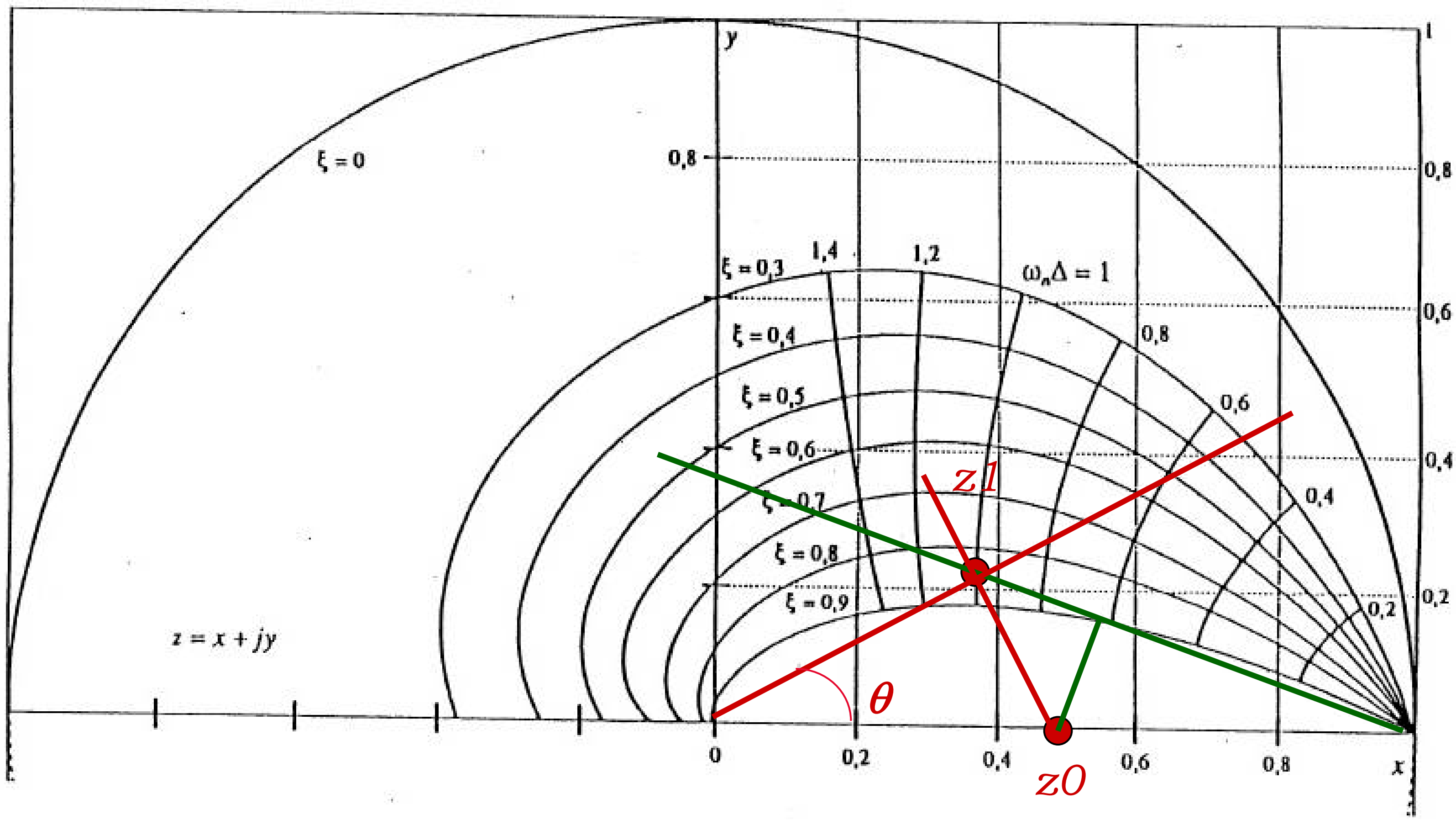
$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$



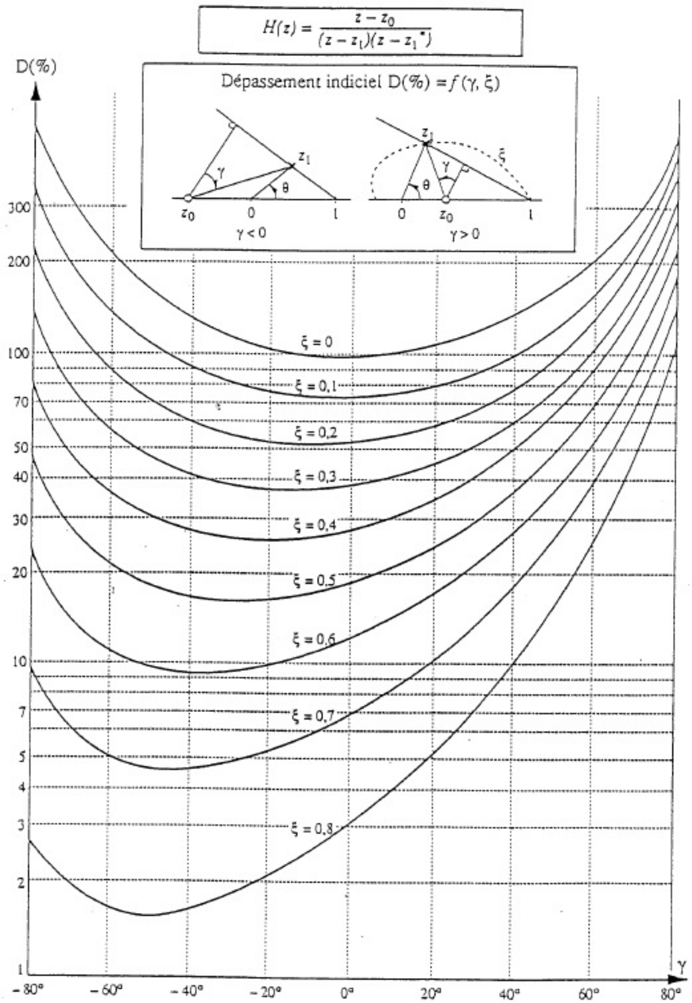
Abaque 3 : Instant du premier maximum



Abaque 1: Lieux des pôles à amortissement constants
ξ = 0
ξ = 0,3
ξ = 0,4
ξ = 0,5
ξ = 0,6
ξ = 0,7
ξ = 0,8
ξ = 0,9
1,4
1,2
$\omega_n\Delta = 1$
0,8
0,6
0,4
0,2
z = x + jy
y
x
1
z1
z0
θ

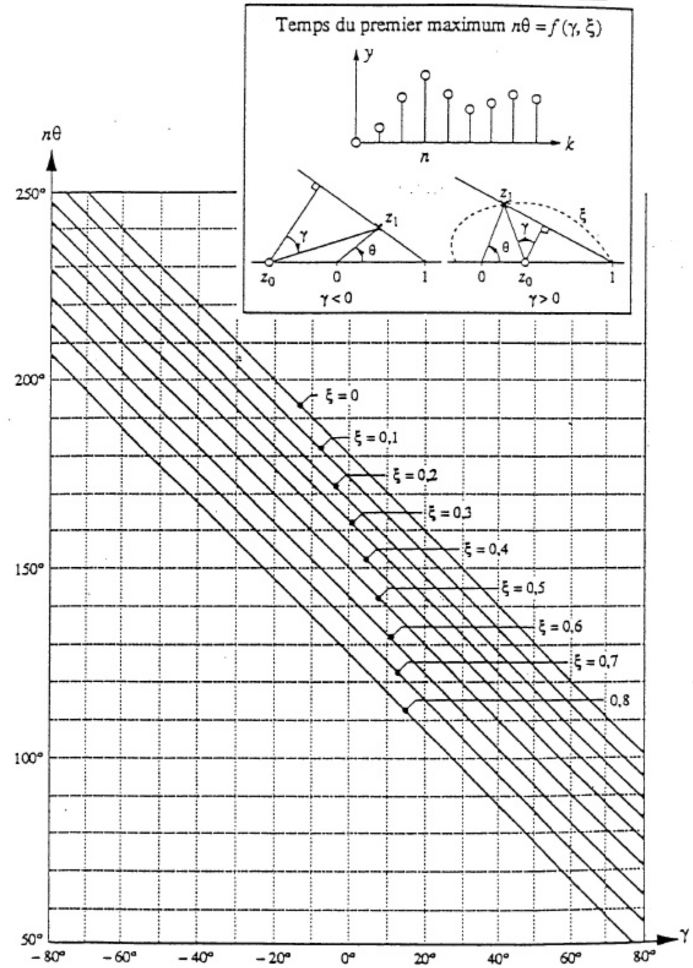


Abaque 1: Lieux des pôles à amortissement constants



Abaque 2: variation de D en fonction de γ

$$H(z) = \frac{z - z_0}{(z - z_1)(z - z_1^*)}$$



Abaque 3 : Instant du premier maximum

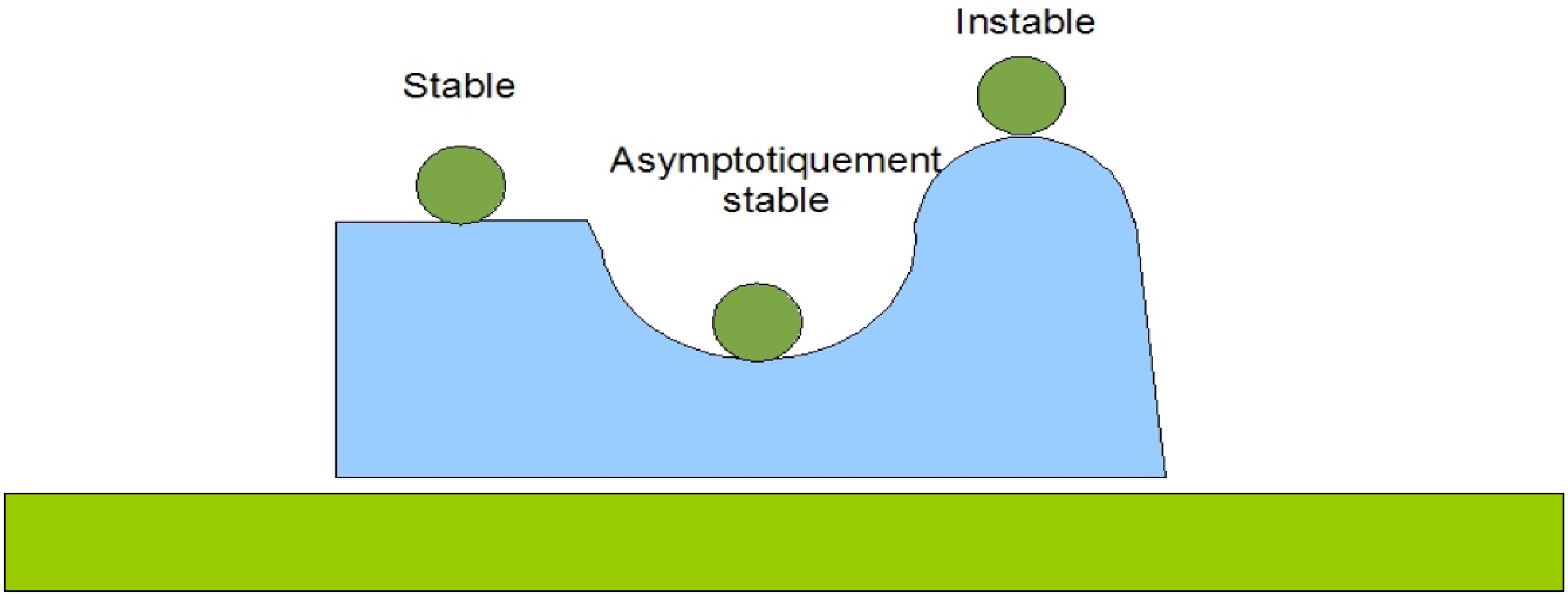
Analyse des Systèmes

Stabilité

Définition 1 *Un système est dit stable si, écarté de sa position de repos, celui-ci revient à cette position lorsque la cause qui l'en a écarté cesse.*

Définition 2 *Un système est dit stable si sa réponse à toute entrée bornée est bornée.*

Note : en appliquant ces définitions l'intégrateur pur n'est pas stable !



Une fonction F(z) de la forme :

$$F(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \cdots + \frac{C_n z}{z - z_n}$$

a pour original :

$$f(kT_e) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k + \cdots + C_n z_n^k$$

les C_i et les z_i étant complexes.

Pour que le système soit stable, il faut alors que :

$$\lim_{k \to \infty} f(kT_e) = 0$$

donc que :

$$|z_i| < 1$$

En d'autres termes, pour qu'un système soit stable, il faut et il suffit que les pôles de la fonction de transfert soient de module inférieur à 1.
Par abus de langage, nous inclurons dans l'ensemble des systèmes stables ceux ayant un ou plusieurs pôles en 1.[1]

1. Ceux-ci sont *marginalement stables*.

Critère algébrique de stabilité : critère de Jury

Soit $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ la fonction de transfert d'un système échantillonné.

$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \ldots + a_n^0 z^n$$

On construit la matrice de dimensions $(n-1) \times (n+1)$ suivante :

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots & a_{n-1}^0 & a_n^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_{n-1}^1 & 0 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_0^{n-2} & a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

dont les éléments sont définis comme suit :

$$a_k^{j+1} = \begin{cases} \begin{vmatrix} a_0^j & a_{n-j-k}^j \\ a_{n-j}^j & a_k^j \end{vmatrix} & \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-j-1 \\ 0 & \text{pour} \quad k > n-j-1 \end{cases}$$

Le polynôme $D(z)$ n'a aucun zéro de module supérieur à 1 si les $n+1$ conditions suivantes sont respectées :

1. $\sum_{i=0}^{n} a_i^0 = D(1) > 0$
2. $(-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i^0 = (-1)^n D(-1) > 0$
3. $\left|a_0^0\right| - a_n^0 < 0$
4. $\left|a_0^j\right| - \left|a_{n-j}^j\right| > 0$ pour $j = 1, \cdots, n-2$

Application du critère de Jury

Exemple a l'ordre 3 ($n = 3$) :

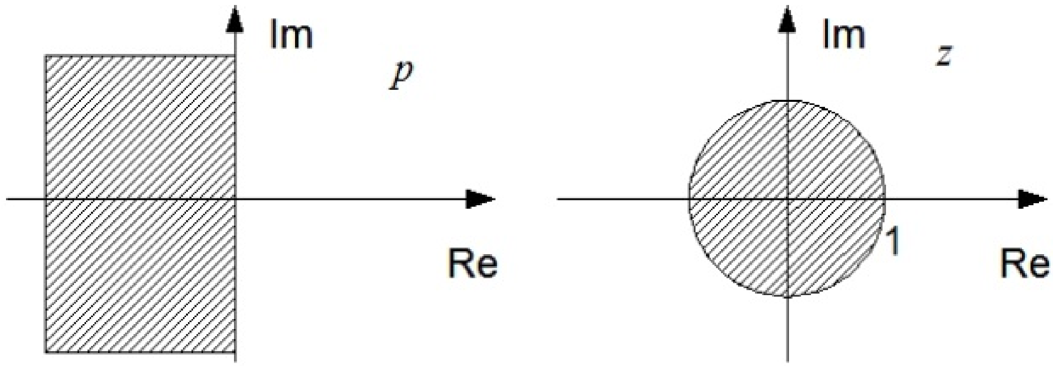
$$D(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + a_3^0 z^3$$

$$\begin{bmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & a_3^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & 0 \end{bmatrix}$$

1. $\sum_{i=0}^{3} a_i^0 = D(1) > 0$
2. $(-1)^3 \sum_{i=0}^{3} (-1)^i a_i^0 = (-1)^3 D(-1) > 0$ soit $D(-1) < 0$
3. $\left|a_0^0\right| - a_3^0 < 0$
4. $\left|a_0^1\right| - \left|a_2^1\right| > 0$ soit $(a_0^0)^2 - (a_3^0)^2 < a_0^0 a_2^0 - a_1^0 a_3^0$

Correspondance plan de *p* – plan de *z*

Pour connaître la stabilité d'un système il suffit alors de calculer le module des pôles du système. Ce calcul est le plus souvent fastidieux voire impossible. C'est pourquoi, il existe des critères de stabilité ne faisant pas directement le calcul des pôles mais qui permettent de savoir s'ils sont, ou pas, de module inférieur à 1.



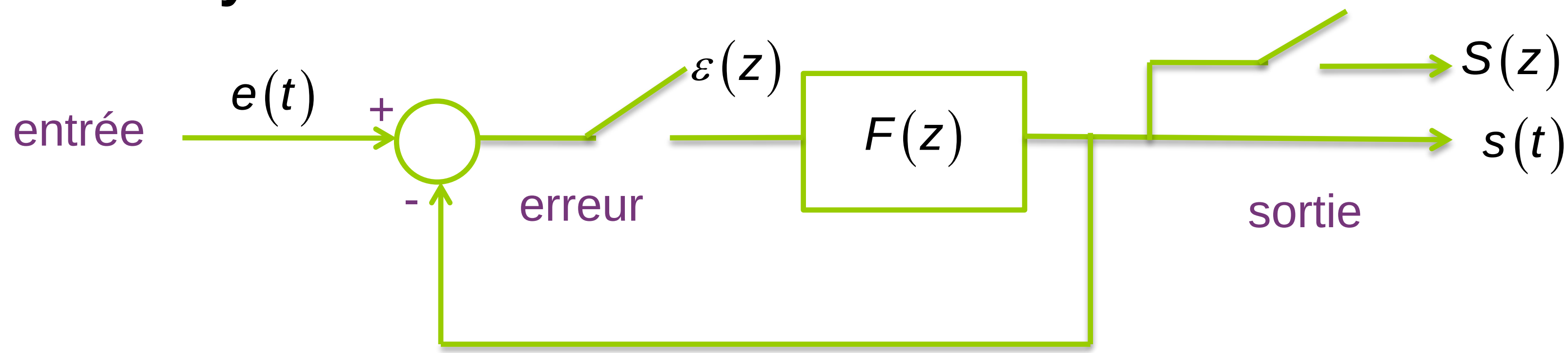
– Zones où les pôles sont stables en p et en z.

Lien entre un pôle simple en *p* et son transformé en *z* :

$$\frac{1}{p+a} \rightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}}$$

Le pôle en -*a* est transformé en un pôle en exp(-*aT*)

Cas d'un système asservi à retour unitaire



FTBF :

$$W(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}$$

FTBO :

$$T(z) = F(z)$$

Stabilité étudiée à partir de l'inspection de la position des racines de $1+T(z)$

→ Pas toujours accessibles

Théorème de Cauchy

Th. : lorsque z décrit un contour C dans le sens direct, le point E représentatif de son image $f(z)$ effectue autour de l'origine un nombre de tours N égal à la différence $Z – P$ où Z et P représentent respectivement le nombre de zéros et le nombre de pôles à l'intérieur de ce contour C.

Application à un système en boucle fermée (système à retour unitaire)

$$W(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}$$

Pour stabilité en boucle fermée

$W(z)$ ne doit pas avoir de pôles de module supérieur à 1

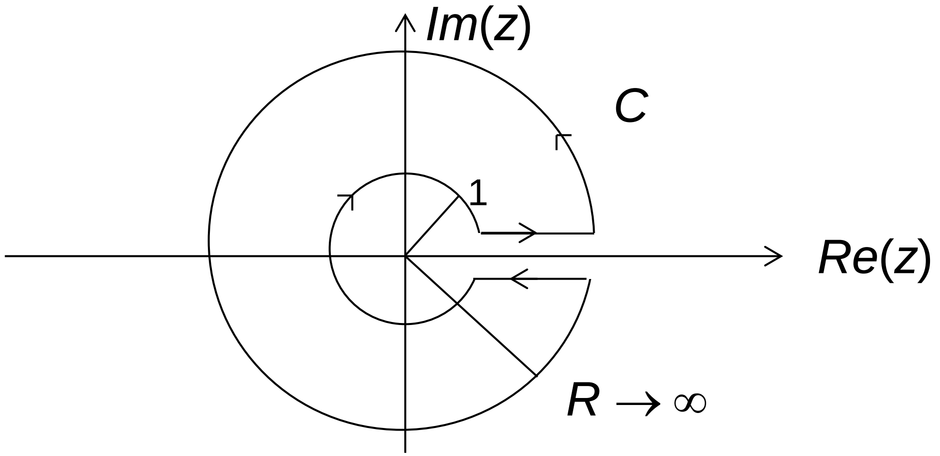
$1+T(z)$ ne doit pas avoir de zéros de module supérieur à 1

→ Etude de la stabilité à partir de la FTBO

Choix du contour

Contour choisi pour connaître le nombre de zéros de $1+T(z)$ de module supérieur à 1

$$f(z) = 1+T(z)$$

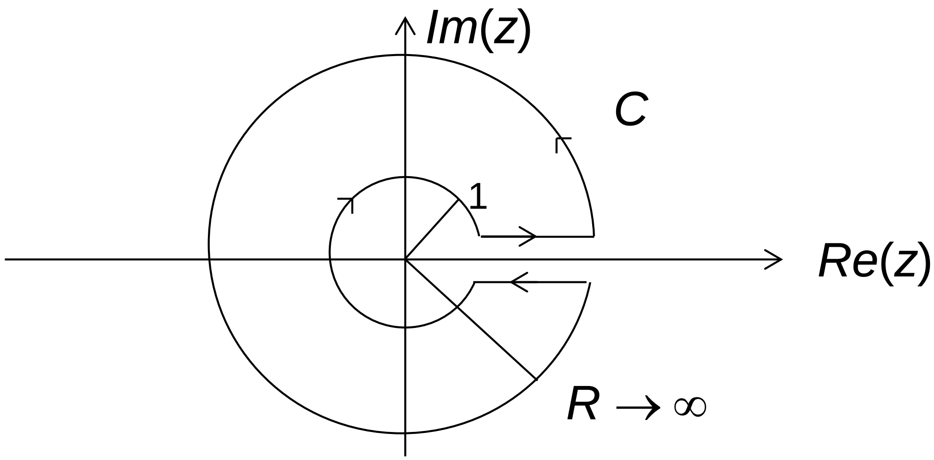


Le système en boucle fermée est stable si, lorsque z décrit le contour C dans le sens direct, le point E représentatif de $1+T(z)$ effectue autour de l'origine, en sens inverse, un nombre de tours égal au nombre P de pôles de $1+T(z)$ de module supérieur à 1.

NB :

- Nombre de tours de $1+T(z)$ autour de l'origine = nombre de tours de $T(z)$ autour du point critique –1 + j0.
- Nombre de pôles de $1+T(z)$ de module supérieur à 1 = nombre de pôles de $T(z)$ de module supérieur à 1.

Critère de stabilité de Nyquist



Un système en boucle fermée est stable si, lorsque *z* décrit dans le sens direct le contour *C*, le nombre de tours que fait $T(z)$ autour du point critique -1+*j*0, en sens inverse trigonométrique, est égal au nombre de pôles de $T(z)$ à l'intérieur de C (pôles de module supérieur à 1).

Si $P = 0, T(z)$ ne doit pas tourner autour du point critique.

Si le degré du numérateur de $T(z)$ est inférieur au degré du dénominateur, le cercle de rayon infini a une contribution nulle ($T(z)=0$).

Sur les bords, $T(z)$ prend des valeurs identiques mais avec un sens de parcours opposé (sauf si points particuliers), d'où une contribution nulle.

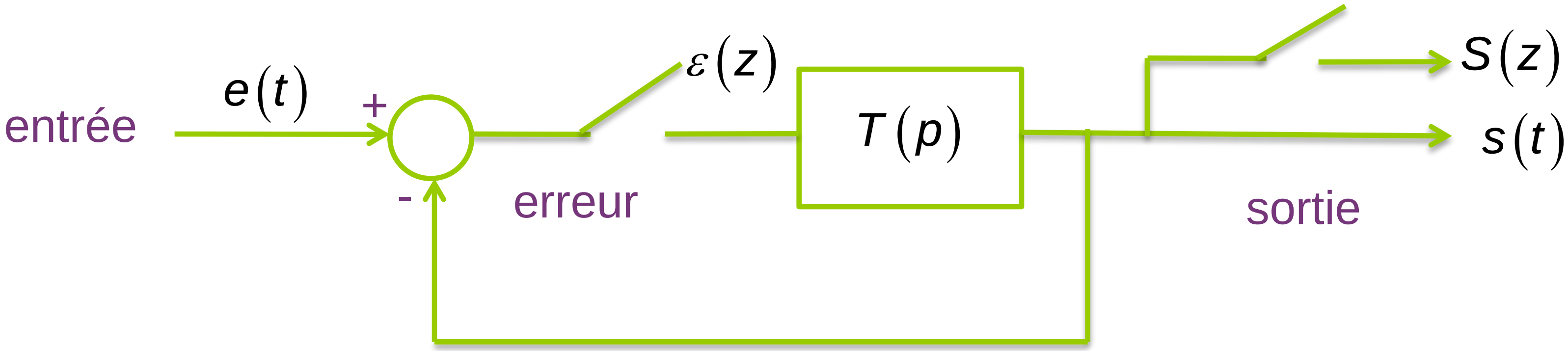
La seule contribution effective est due au cercle unité.

De plus, $T(z)$ étant à coefficients réels, $T(z)$ prend des valeurs conjuguées sur le demi-cercle supérieur et le demi-cercle inférieur.

On peut alors limiter le tracé à l'étude du demi-cercle supérieur et en déduire le lieu de $T(z)$ pour le cercle unité.

Rmq. : un système stable en BO sera stable en BF si le lieu de Nyquist laisse le point -1 sur sa droite (quand on parcourt le cercle unité dans le sens horaire) (*cf.* correspondance avec le cas continu).

Précision



$$S(z) = T(z)\varepsilon(z) = T(z)\big(E(z) - S(z)\big)$$

La transmittance en BF s'écrit :

$$W(z) = \frac{T(z)}{1+T(z)}$$

Pour le calcul de l'erreur en réponse à l'entrée, on choisit une entrée canonique de la forme

$$E(z) = \frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}$$ où $A(z)$ est un polynôme en z^{-1} de degré n

On peut donc écrire :

$$\varepsilon(z) = E(z) - S(z) = E(z)\left(1 - \frac{T(z)}{1+T(z)}\right) = E(z)\big(1 - W(z)\big)$$

Précision

$$\varepsilon(z)=\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}\frac{1}{1+T(z)}=\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}\left(1-W(z)\right)$$

L'erreur en régime permanent ou erreur statique vaut :

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\varepsilon(z)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}\left(1-W(z)\right)$$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to1}\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n}}\left(1-W(z)\right)=\lim_{z\to1}\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n}}\frac{1}{1+T(z)}$$

à condition que les pôles de $\varepsilon(z)$ soient de module inférieur à 1.

Si l'on veut une erreur statique nulle, il faut que :

$\left(1-W(z)\right)$ contienne le terme $\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$ en facteur

ou, de façon équivalente :

$T(z)$ contienne le terme $1/\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$ en facteur

Précision

D'autre part, si l'on veut annuler cette erreur en un temps fini, il faut que :

$$1 - W(z) = \left(1 - z^{-1}\right)^{n+1} . K(z)$$ où $K(z)$ est un polynôme

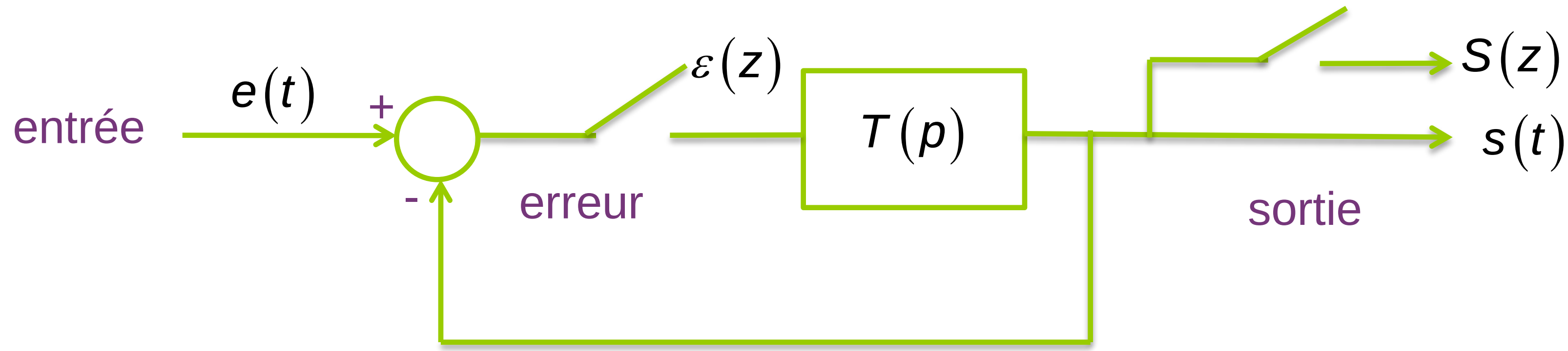
$$W(z) = 1 - \left(1 - z^{-1}\right)^{n+1} . K(z)$$

L'erreur sera nulle en un temps minimal pour un polynôme $W(z)$ de degré le plus faible possible

Dans la suite, on va considérer trois entrées.

Précision

Entrée en échelon de position



$$e(t)=u(t),\ e(n)=u(n),\ E(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad A(z)=1, \quad n=0$$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\varepsilon(z)=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}\frac{1}{1+T(1)}=\frac{1}{K_p}$$

où K_p est appelée constante d'erreur de position

$$K_p=\lim_{z\to1}\left(1+T(z)\right)$$

Précision

Entrée en échelon de position

Pas d'intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+T\left(z\right)} = \frac{1}{1+T\left(1\right)}$$

1 intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+T\left(z\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{K_p}{1-z^{-1}}} = 0$$

2 intégrateurs :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1+T\left(z\right)} = \frac{1}{1+\dfrac{K_p}{1-z^{-1}}} = 0$$

Précision

Entrée en rampe

$$e(t)=tu(t),\ e(n)=nT_e u(n),\ E(z)=\frac{T_e.z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \qquad A(z)=T_e.z^{-1}, \quad n=1$$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)}\frac{1}{1+T(z)}=\lim_{z\to 1}\frac{T_e.z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+T(z)\right)}$$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to 1}\frac{T_e z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+T(z)\right)}$$

où K_v est appelée constante d'erreur de vitesse

$$K_v=\lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\left(1+T(z)\right)$$

Précision

Entrée en rampe

Pas d'intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to1} \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+T\left(z\right)\right)} = \infty$$

1 intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to1} \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\frac{K_v}{1-z^{-1}}} = \frac{T_e}{K_v}$$

2 intégrateurs :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \lim_{z\to1} \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)\frac{K_v}{\left(1-z^{-1}\right)^2}} = 0$$

Précision

Entrée en entrée en accélération

$$e(t)=\frac{1}{2}t^2u(t),\ e(n)=\frac{1}{2}n^2T_e^2u(n),\ E(z)=\frac{1}{2}\frac{T_e^2.z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

avec $\quad A(z)=\frac{1}{2}T_e^2.z^{-1}\left(1+z^{-1}\right), \quad n=2$

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon(kT_e)=\lim_{z\to1}\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^n}\frac{1}{1+T(z)}=\lim_{z\to1}\frac{\frac{1}{2}T_e^2.z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+T(z)\right)}=\lim_{z\to1}\frac{T_e^2}{\left(1-z^{-1}\right)T(z)}=\frac{T_e^2}{K_a}$$

où $\quad K_a$ est appelée constante d'erreur d'accélération

$$K_a=\lim_{z\to1}\left(1-z^{-1}\right)^2T(z)$$

Précision

Entrée en accélération

Pas d'intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \infty$$

1 intégrateur :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \infty$$

2 intégrateurs :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon\left(kT_e\right) = \frac{T_e^2}{K_a}$$

Correcteurs

Quels correcteurs ?

Soit à corriger un système $G(z)$:

$$G(z) = \frac{(z-2)(z-0.5)}{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}$$

On se propose de créer un correcteur parfait, c'est-à-dire, la compensation parfaite du système par le correcteur $C(z)$ soit :

$$C(z) = \frac{1}{G(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Le système corrigé en boucle ouverte devient donc :

$$C(z)\ G(z) = \frac{1}{G(z)}\ G(z) = 1$$

C'est bien un système parfait, il est même inutile de boucler ! Bien entendu cela ne peut pas fonctionner et ce pour deux raisons.

Stabilité

$$C(z) = \frac{W(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

Inutile de se lancer dans une étude, le correcteur $C(z)$ est ostensiblement instable à cause du pôle en 2, donc extérieur au cercle unité.

Causalité Etudions l'équation récurrente de ce correcteur :

$$C(z) = \frac{W(z)}{\mathcal{E}(z)} = \frac{(z+0.7)(z-0.8)(z-1)}{(z-2)(z-0.5)}$$

donc

$$W(z)[(z-2)(z-0.5)] = \mathcal{E}(z)[(z+0.7)(z-0.8)(z-1)]$$

$$W(z)[z^2 - 2.5z + 1] = \mathcal{E}(z)[z^3 - 1.1\, z^2 - 0.46\, z + 0.56]$$

En multipliant droite et gauche par z^{-2}

$$W(z)[1 - 2.5z^{-1} + z^{-2}] = \mathcal{E}(z)[z - 1.1\ - 0.46\, z^{-1} + 0.56z^{-2}]$$
$$W(z) = \mathcal{E}(z)[z - 1.1\ - 0.46\, z^{-1} + 0.56z^{-2}] + W(z)[2.5z^{-1} - z^{-2}]$$

En revenant à l'original :

$$s(k) = e(k+1) - 1.1\ e(k) - 0.46\ e(k-1) + 0.56e(k-2) + 2.5s(k-1) - s(k-2)$$

$$s(k) = e(k+1) - 1.1\ e(k) - 0.46\ e(k-1) + 0.56e(k-2) + 2.5s(k-1) - s(k-2)$$

$w(k)$ est une fonction de la commande à l'instant suivant $\varepsilon(k+1)$! Ce correcteur n'est pas causal, il est donc impossible à réaliser.

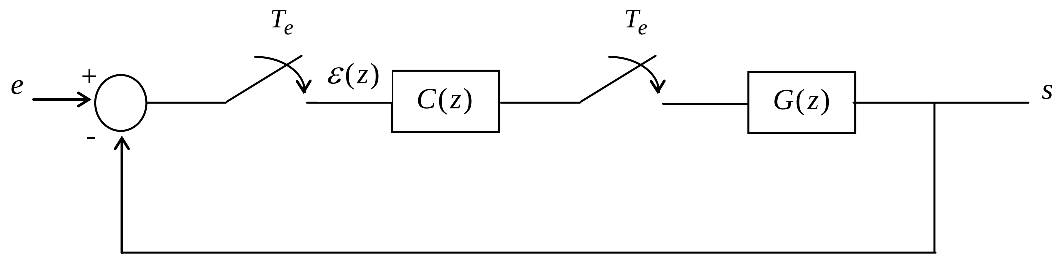
Les synthèses de correcteurs numériques conduisent souvent à des correcteurs non causaux et/ ou instables, il faut donc systématiquement vérifier :

- la causalité
- la stabilité

Faire la synthèse d'un asservissement consiste à inclure dans la boucle des éléments correcteurs destinés à rendre les performances conformes à certaines spécifications.

Intérêt des correcteurs numériques.

Bloc-diagramme



$G(z)$: Fonction de transfert en boucle ouverte du système non corrigé
$C(z)$: Correcteur

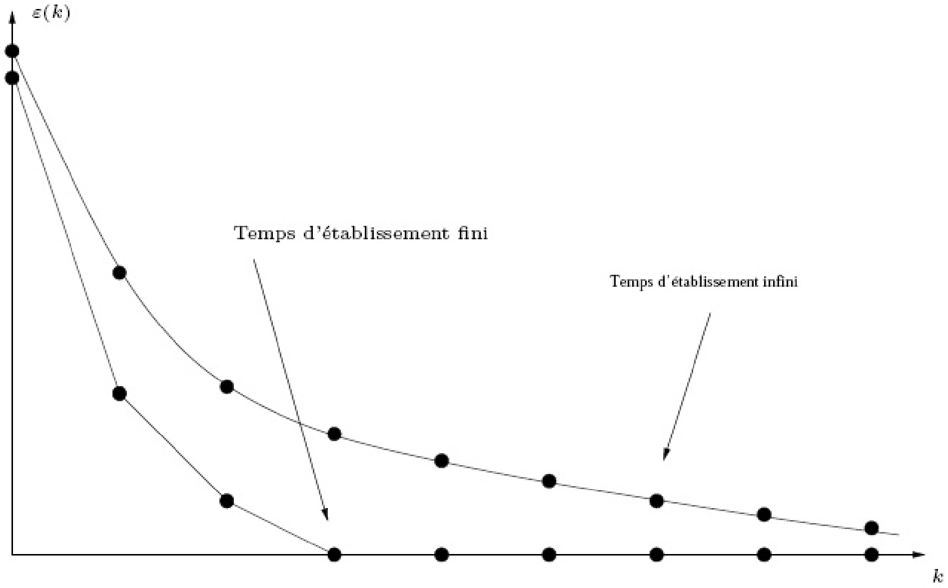
Différentes approches pour la synthèse des correcteurs

- 2 types étudiés :

- Synthèse d'un correcteur pour obtenir un temps de réponse minimal.

- Synthèse d'un correcteur par la méthode de Zdan.

Un système est dit "à temps d'établissement fini" lorsque son erreur $\varepsilon^{\star}(k) = 0$ en un nombre fini de périodes d'échantillonnage, l'entrée étant un polynôme en t spécifié (le plus souvent un échelon : t^0).



– Comparaison de l'erreur permanente entre un système à temps d'établissement fini ou infini.

Définition Un système est dit à temps d'établissement fini si l'erreur $\varepsilon^{\star}(t)$ s'annule en un nombre fini d'échantillons, pour une entrée $u(t) = t^m$ spécifiée.

Synthèse du correcteur pour obtenir un temps de réponse minimal

- *Dans cette méthode, les contraintes portent uniquement sur la réponse à une entrée donnée. On impose :*
  - *une erreur nulle en régime permanent en un temps fini*
  - *un temps de réponse minimal, i.e. l'erreur doit devenir nulle au bout d'un nombre d'échantillons le plus faible possible.*

- ***1ère contrainte*** *: soit une entrée $e(t)$ de la forme $t^n u(t)$ telle que*

$$E(z) = \frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}$$

où $A(z)$ est un polynôme en z^{-1} de degré n. Pour que l'erreur soit nulle en régime permanent il faut que :

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon(kT_e) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\varepsilon(z) = \lim_{z\to 1}\left(1-z^{-1}\right)\left(1-W(z)\right)\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}} = 0$$

où $W(z)$ est la fonction de transfert en boucle fermée.

- *Pour annuler l'erreur, il faut donc que* $\left(1-W\left(z\right)\right)$ *contienne le terme* $\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$ *en facteur, soit :*

$$1-W\left(z\right)=\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}.K\left(z\right)$$

Pour que cette erreur soit nulle en un temps fini, il faut que $K\left(z\right)$ *soit un polynôme. Ainsi :*

$$\varepsilon(z)=\left(1-W(z)\right)\cdot\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}=\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}\cdot K(z)\cdot\frac{A(z)}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}$$

Soit $\varepsilon(z)=K(z)\cdot A(z)=P(z)$, *nouveau polynôme du type*

$$P(z)=a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}$$

D'où $\varepsilon(n)=a_0\ \delta(n)+a_1\ \delta(n-1)+\ldots+a_N\ \delta(n-N)$,

$\varepsilon(n)$ *est donc nulle à partir de l'échantillon* $n=N+1$.

- ***2ème contrainte*** *: pour avoir une erreur nulle en un temps minimal, le degré de* $K(z)$ *en* z^{-1} *doit être le plus faible possible. Lorsque c'est possible, on prend* $K(z)=1$ *, d'où*

$$1-W(z)=\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$$

$$W(z)=1-\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$$

Mais cela peut entraîner une instabilité du système dans certaines situations.

Fonction de transfert en BF

$$W(z)=\frac{C(z)G(z)}{1+C(z)G(z)}$$

d'où

$$C(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)}$$

- ***1ère situation** : $G(z)$ n'a ni pôle ni zéro à l'extérieur du cercle unité et ne comporte pas de retard pur. On peut alors déterminer le correcteur $C(z)$ par la formule précédente en posant $K(z)=1$*

$$C(z)=\frac{1}{G(z)}\frac{1-\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}$$

- ***Exemple***

$$G(z)=\frac{1-0,5\,z^{-1}}{\left(1-0,3\,z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

On veut une erreur nulle pour une entrée en rampe en un temps fini minimal.

Calculer le correcteur correspondant.

2ème situation *:* $G(z)$ *a des pôles et/ou des zéros à l'extérieur du cercle unité. On écrit :*

$$G(z) = k_G \frac{N_1(z)N_2(z)}{D_1(z)D_2(z)}$$

où

$N_1(z)$ *et* $N_2(z)$ *ont leurs zéros à l'intérieur du cercle unité (ou sur le cercle unité).*

Notons que $N_2(z)$ *contient tous les retards purs du système.*

$D_1(z)$ *et* $D_2(z)$ *ont leurs zéros à l'extérieur du cercle unité (ou sur le cercle unité).*

- ***Exemple*** *: cas où $G(z)$ a seulement un zéro à l'extérieur du cercle unité*

$$G(z) = \frac{N_1(z)\left(1 - az^{-1}\right)}{D_1(z)}, \quad |a| > 1$$

Si l'on détermine le correcteur comme précédemment, on obtient :

$$C(z) = \frac{D_1(z)}{N_1(z)\left(1 - az^{-1}\right)} \cdot \frac{W_i(z)}{1 - W_i(z)}$$

où $W_i(z) = 1 - \left(1 - z^{-1}\right)^{n+1}$ *est la fonction de transfert que l'on voudrait obtenir pour avoir une erreur nulle en réponse à l'entrée de la forme* $t^n u(t)$. $W_i(z)$ *est la fonction de transfert idéale souhaitée.*

En fait, lors de la réalisation du correcteur, la valeur de « a » ne sera pas rigoureusement réalisée et deviendra a_r *(« a » réalisé)*

On a alors

$$C_r(z) = \frac{D_1(z)}{N_1(z)\left(1-a_r z^{-1}\right)} \cdot \frac{W_i(z)}{1-W_i(z)}$$

On suppose que les autres grandeurs sont parfaitement réalisées ; en fait, les erreurs dont elles peuvent être entachées n'entraîneront pas de difficultés.

On calcule alors la fonction de transfert effectivement réalisée $W_r\left(z\right)$ *à partir du correcteur* $C_r(z)$

$$W_r(z) = \frac{C_r(z)\,G(z)}{1+C_r(z)\,G(z)} = \frac{\left(1-az^{-1}\right)W_i(z)}{\left(1-a_r z^{-1}\right)\left(1-W_i(z)\right)+\left(1-az^{-1}\right)W_i(z)}$$

avec

$$C_r(z)\,G(z) = \frac{\left(1-az^{-1}\right)}{\left(1-a_r z^{-1}\right)} \cdot \frac{W_i(z)}{1-W_i(z)}$$

Il n'y a pas de réduction possible du dénominateur de $W_r\left(z\right)$ *et un pôle de module supérieur à 1 risque d'exister.*

Note : le problème serait le même si $G\left(z\right)$ *avait un pôle de module supérieur à 1.*

- *La **solution** consiste, dans la formule*

$$C(z) = \frac{1}{G(z)}\frac{W(z)}{1-W(z)}$$

- *à compenser les zéros de* $G(z)$ *de module supérieur à 1 par des zéros identiques dans* $W(z)$
- *à compenser les pôles de* $G(z)$ *de module supérieur à 1 par des zéros identiques dans* $1-W(z)$

Ainsi :

- $W(z)$ *comprendra le terme* $N_2(z)$ *et un polynôme à déterminer* $L(z)$ *(de degré le plus faible possible)*

- $1-W(z)$ *comprendra le terme* $D_2(z)$ *et un polynôme à déterminer* $M(z)$ *(de degré le plus faible possible) ainsi que le terme* $\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$

$L(z)$ et $M(z)$ seront déterminés par approches successives en partant des puissances les plus faibles et en les faisant croître tout en respectant les équations :

$$W(z) = N_2(z)L(z)$$

$$1 - W(z) = D_2(z)\left(1 - z^{-1}\right)^{n+1} M(z)$$

Le correcteur s'écrit alors

$$C(z) = \frac{1}{k_G}\frac{D_1(z)D_2(z)}{N_1(z)N_2(z)} \cdot \frac{N_2(z)L(z)}{D_2(z)\left(1 - z^{-1}\right)^{n+1} M(z)}$$

$$\boxed{C(z) = \frac{1}{k_G}\frac{D_1(z)}{N_1(z)} \cdot \frac{L(z)}{\left(1 - z^{-1}\right)^{n+1} M(z)}}$$

- ***Exemple***

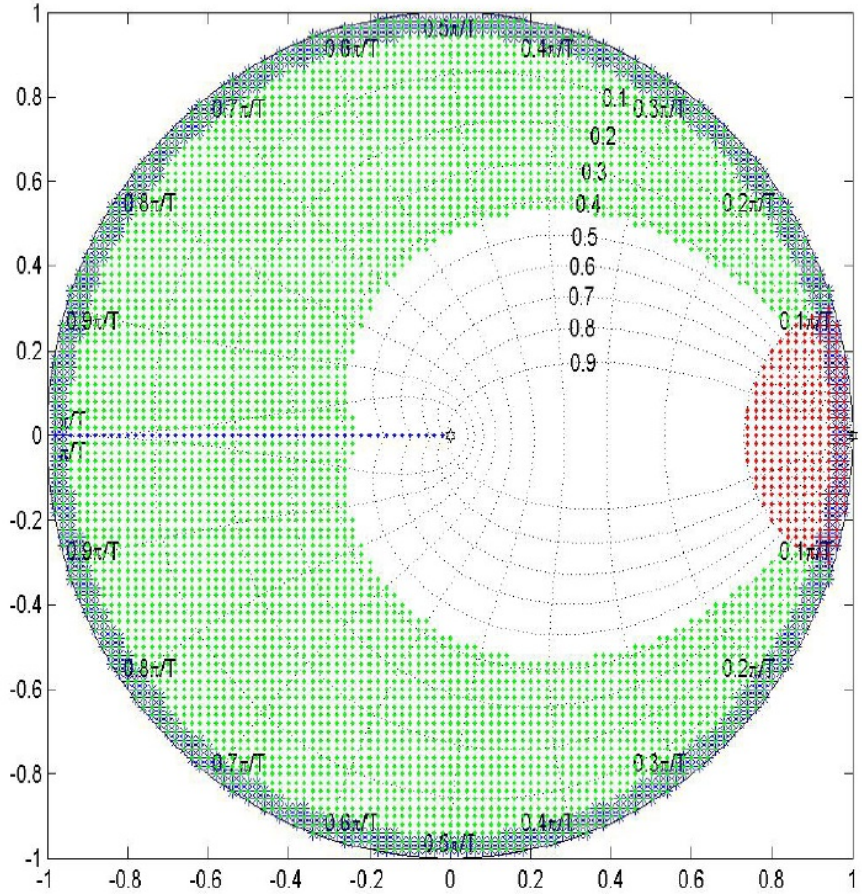
$$G(z) = \frac{1-2\,z^{-1}}{1-3\,z^{-1}} \cdot \frac{1-0{,}5\,z^{-1}}{1-0{,}2\,z^{-1}} \cdot z^{-1}$$

On veut une erreur nulle pour une entrée en échelon en un temps fini minimal.

Calculer le correcteur correspondant.

Solution

$$C(z) = \frac{1-0{,}2\,z^{-1}}{1-0{,}5\,z^{-1}} \cdot \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)} \cdot \frac{14-15\,z^{-1}}{1-10\,z^{-1}}$$



– Zones de placement des pôles en boucle fermée à éviter.

Les pôles du système en boucle fermée seront choisis en évitant les zones grisées de la figure

- Pas trop proches du cercle unité. En effet une petit variation de modèle (vieillissement, variation de masse, ...) pourrait engendrer une instabilité du système.
- Pas trop proches du point 1. Sinon, vous ne diminuez pas le temps d'établissement ou alors vous avez mal choisi la fréquence d'échantillonnage.
- Pas de facteur d'amortissement trop petit, cela conduit à des dépassements importants de la consigne et allonge le temps d'établissement.
- Pas de pôles réels négatifs, car ces pôles génèrent une oscillation amortie non souhaitable.

Un pôle est très souvent utilisé, le retard pur (en $z = 0$), pôle le plus "rapide".

Si vous respectez ces critères, vos pôles en boucle fermée devraient être dans la zone non grisée de la figure
Nous parlons peu des zéros de la fonction de transfert. Non pas qu'ils soient négligeables, bien au contraire! Ils ont une influence sur le comportement du système mais sont difficiles à contrôler. En fait, leur contrôle demande un correcteur un peu plus complexe.

II . Synthèse d'un correcteur par la méthode des pôles dominants (méthode de Zdan)

Les méthodes à temps d'établissement fini conduisent le plus souvent à des correcteurs qui génèrent des commandes trop importantes. Tous comptes faits, on cherche rarement d'aussi bonnes performances pour le système bouclé. En général, une amélioration d'un facteur 3 sur le temps d'établissement et une erreur statique voire de traînage nulle sont suffisantes, compte tenu des saturations du système.

La méthode de Zdan propose de calculer un correcteur tel que le système en boucle fermée se comporte comme un système du second ordre de pulsation propre ω_n et de facteur d'amortissement ξ donnés.

Synthèse du correcteur par la méthode de Zdan (méthode des pôles dominants)

- *Dans cette méthode, on désire obtenir un système en boucle fermée dont la fonction de transfert soit celle d'un système du second ordre ayant des caractéristiques données. On peut ainsi imposer des caractéristiques propres au système telles que : coefficient d'amortissement, valeur des dépassements, pulsation de résonance … De plus on peut imposer que l'erreur à un type d'entrée donné soit nulle en régime permanent.*

1. *On compense uniquement les pôles et les zéros de* $G(z)$ *de module inférieur à 1 (pour éviter l'instabilité de la fonction de transfert en boucle fermée).*

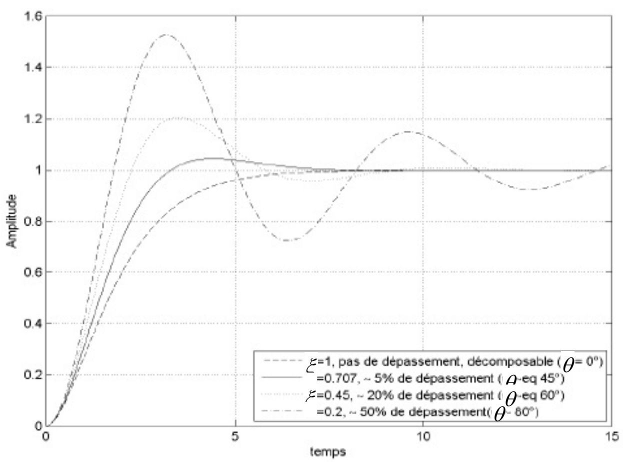
2. *On introduit des termes du type* $k\left(1+az^{-1}\right)/\left(1+bz^{-1}\right)$ *où les paramètres* k, a, b *sont déterminés pour obtenir les caractéristiques du second ordre fixées.*

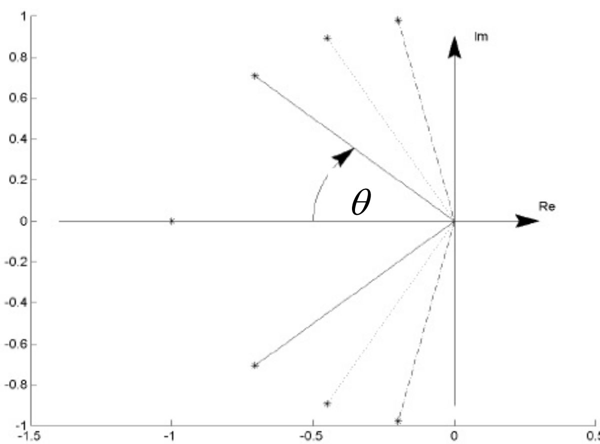
3. *Pour obtenir une erreur nulle en régime permanent à une entrée du type , on introduit dans un terme du type* $1/\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}$ *.*

$$\boxed{C(z)=\frac{D_1(z)}{N_1(z)}\cdot\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^{n+1}}\cdot k\frac{1+az^{-1}}{1+bz^{-1}}}$$

– Valeurs approximatives de l'angle θ des pôles et du dépassement indiciel en fonction du coefficient d'amortissement ξ

ξ	θ	Dépassement
1	0°	0 %
0.707	45°	5 %
0.45	60°	20 %
0.20	80°	50 %





– Relation entre dépassement et position des pôles dans le plan complexe

Pour

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Temps de réponse à 5% :

$$T_{r5\%} = \frac{3}{m\omega_0}$$

Temps de montée (10 à 90% de la valeur finale) :

$$T_m = \frac{\pi}{2\omega_0\sqrt{1-m^2}}$$

Premier dépassement

$$D1 = 100e^{-\frac{m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$