<u>Exercice 3</u> : déterminer la limite de la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_k = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x/k)}{(1+x)^2}\,dx$$

Pour cela nous allons appliquer le théorème de convergence dominée donné planche 44. Soit (f_k) une suite de fonctions définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x \longmapsto f_k(x) = \frac{\sin(x/k)}{(1+x)^2}.$$

(f_k) converge simplement vers $f : x \longmapsto 0$ sur $[0,+\infty[$. Soit $g : x \longmapsto (1+x)^{-2}$ une fonction positive sur $[0,+\infty[$. On a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,+\infty[, \quad |\sin(x/k)| \leq 1$$

$$\text{\_\_\_\_\_\_}, \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}, \quad |f_k(x)| \leq g(x)$$

Montrons à présent que g est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,+\infty[$. Pour cela montrons que $|g| = g$ est intégrable au sens de Riemann généralisé sur $[0,+\infty[$. Soit $\varepsilon \in]0,+\infty[$, la fonction g est continue sur $[0,\varepsilon]$, il en est donc de même pour la fonction $|g|$. Par conséquent, $|g|$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0,\varepsilon]$ et on a :

$$J_\varepsilon = \int_0^\varepsilon |g(x)|\,dx = \int_0^\varepsilon (1+x)^{-2}\,dx$$

$$J_\varepsilon = -\left[(1+x)^{-1}\right]_0^\varepsilon = 1 - (1+\varepsilon)^{-1}$$

et : $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to +\infty} J_\varepsilon = 1.$

En conséquence, $|g|$ est intégrable au sens de Riemann généralisé, et donc g est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$. Alors, d'après le théorème de convergence dominée, $f : x \longmapsto 0$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, +\infty[$ et on a :

$$\lim_{k \to +\infty} \underbrace{\int_0^{+\infty} f_k(x)\, dx}_{I_k} = \int_0^{+\infty} \underbrace{f(x)}_{0}\, dx.$$

et donc :

$$\lim_{k \to +\infty} I_k = \int_0^{+\infty} 0 . dx = 0 .$$

La suite (I_k) converge donc vers 0.