Contrôle continu no 3 en Mathématiques

ESIR, semestre 1, année 2011-2012

(Seules deux pages recto/verso manuscrites sont autorisées)

On rappelle le développement limité en 0 de fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

Etudiez les suites et séries de fonctions définies ci-dessous.

1. La suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x^2-1)}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ converge-t-elle simplement et uniformément sur l'intervalle $[-1,1]$? Justifiez vos réponses (sur 2 points).

   La suite de fonctions (f_n) converge simplement si et seulement si le polynôme x^2-1 est inférieur ou égal à zéro. En effet, si x^2-1 est strictement inférieur à zéro, alors (f_n) convergera simplement vers zéro. Si x^2-1 est nul, alors (f_n) est une suite de fonctions identiquement égales à un, et par conséquent (f_n) converge simplement vers un. Enfin, si x^2-1 est strictement supérieur à zéro, alors (f_n) divergera simplement vers $+\infty$. Reste donc à étudier l'ensemble de valeurs pour lesquelles x^2-1 est inférieur ou égal à zéro. On sait que tout polynôme du second degré est du signe de a à l'extérieur des racines (a est égal à un dans notre exercice). Les racines de x^2-1 sont quant-‡-elles égales à -1 et 1. Par conséquent x^2-1 est inférieur ou égal à zéro sur l'intervalle $[-1,1]$, intervalle sur lequel la suite de fonctions (f_n) converge simplement.

   Quant à la convergence uniforme de (f_n) sur l'intervalle $[-1,1]$, la continuité des fonctions f_n et la discontinuité de la limite simple de (f_n) sur l'intervalle $[-1,1]$ nous permettent d'affirmer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément $[-1,1]$.

2. Vers quelle limite la suite de fonctions (g_n) définie par $g_n(x) = (1+3x/\sqrt{n})^{\sqrt{n}}$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$ (sur 1 point)?

   On a pour tout x fixé de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \exp\big(\sqrt{n}\ln\big(1+3x/\sqrt{n}\big)\big) \\
g_n(x) &= \exp\left(\sqrt{n}\left(\frac{3x}{\sqrt{n}} - \frac{9x^2}{2n} + \frac{x^2}{n}\,\varepsilon\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

   D'o˘, pour tout x fixé de $\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \exp(3x) = g(x)$$

3. La série de fonctions $(\sum h_n)$ définie par $h_n(x) = (-1)^n / (e^x + \sqrt{n})$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$ converge-t-elle simplement, absolument, uniformément et normalement sur $\mathbb{R}$? Justifiez vos réponses (sur 5 points).

Intéressons-nous tout d'abord à la notion de convergence simple. Remarquons que pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ la série de fonctions $(\sum h_n)$ est une série alternée. Voyons si les trois hypothèses du théorème du même nom sont vérifiées, le cas échéant cela nous assurerait la convergence simple de cette série sur $\mathbb{R}$. La première hypothèse du théorème est bien vérifiée car on a bien $h_n(x) = (-1)^n |h_n(x)|$ pour tout x fixé de $\mathbb{R}$. Vérifier la seconde hypothèse du théorème consiste à vérifier que pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ la suite numérique $(|h_n(x)|)$ est décroissante, autrement dit que pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $|h_{n+1}(x)/h_n(x)| \leq 1$. Or la dernière inégalité est triviale au vu de la définition de $|h_n(x)|$. Par conséquent, la seconde hypothèse du théorème est bien vérifiée. Reste à voir si la troisième hypothèse du théorème est vérifiée, i.e. si pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ la suite numérique $(|h_n(x)|)$ tend vers zéro. Une fois de plus, la définition de $|h_n(x)|$ nous permet d'affirmer directement que cette hypothèse est bien vérifiée. En somme, d'après le théorème des séries alternées, nous pouvons affirmer que la série de fonctions $(\sum h_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Concernant la notion de convergence absolue, par définition de $|h_n(x)|$ il apparaît que pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ la série numérique $(\sum |h_n(x)|)$ aura le même comportement en l'infini que la série de Riemann $(\sum 1/\sqrt{n})$. Or d'après les résultats connus sur les séries de Riemann, nous pouvons dire que la série $(\sum 1/\sqrt{n})$ diverge. Par conséquent, pour tout x fixé de $\mathbb{R}$ la série numérique $(\sum |h_n(x)|)$ diverge, ce qui implique que la série de fonctions $(\sum h_n)$ ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, il ne peut pas y avoir de convergence normale de la série de fonctions $(\sum h_n)$. En effet, la convergence normale impliquerait la convergence absolue.

Pour finir, montrons que la série de fonctions $(\sum h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Nous allons pour cela utiliser la version "uniforme", si l'on peut dire, du théorème des séries alternées. Nous avons vu cette version dans le cours comme remarque du théorème d'Abel uniforme. Cette remarque nous dit, appliquée à notre exercice, que si i) $h_n(x) = (-1)^n |h_n(x)|$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et ii) la suite de fonctions $(|h_n|)$ est une suite décroissante convergeant simplement vers zéro sur $\mathbb{R}$, alors il suffit de vérifier que la suite de fonctions $(|h_n|)$ converge uniformément vers zéro pour pouvoir affirmer que la série de fonctions $(\sum h_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Notons que les points i) et ii) ont déjà été vérifiés précédemment. Il nous reste donc à étudier la convergence uniforme de $(|h_n|)$. Une étude rapide de variations de la fonction $|h_n| : x \to |h_n(x)|$ nous permet d'écrire :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{||h_n(x)| - 0|\} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{|h_n(x)|\} = \lim_{x \to +\infty} |h_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

ce qui implique la convergence uniforme vers zéro sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(|h_n|)$, et par conséquent la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $(\sum h_n)$.

4. Démontrez que la série de fonctions $(\sum k_n)$ définie par $k_n(x) = \sin(nx)/n$ pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$ de $\mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ (sur 4 points).

Cet exercice a été traité en cours magistral avec $\cos(nx)$ à la place de $\sin(nx)$ afin d'illustrer l'utilité du théorème d'Abel uniforme. Il suffit donc de reprendre le raisonnement fait dans cet exercice du cours. Ainsi, en posant $a_n(x) = \sin(nx)$ et $b_n(x) = 1/n = b_n$, on constate que les hypothèses ii) et iii) du théorème d'Abel uniforme sont clairement vérifiées. Quant à l'hypothèse i), on a :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{p=0}^{n} \sin(px)\right| &= \left|\mathrm{Im}\left(\sum_{p=0}^{n} \exp(\mathrm{i}px)\right)\right| \\
&\leq \left|\sum_{p=0}^{n} \exp(\mathrm{i}px)\right| = \left|\frac{\exp(\mathrm{i}(n+1)x)-1}{\exp(\mathrm{i}x)-1}\right| \\
&\leq \frac{2}{|\exp(\mathrm{i}x)-1|} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos(x)}}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $A = \sqrt{2}/\sqrt{1-\cos(\alpha)}$ pour vérifier l'hypothèse i) du théorème d'Abel uniforme. Les trois hypothèses étant vérifiées, nous en déduisons que la série de fonctions $(\sum k_n)$ converge uniformément sur l'intervalle $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.