Stat
TD2
14/12

Stat inférentielles

Estimat°

• Exercice 1 -

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 81)$, " X suit une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2 "

$x_1, \dots, x_{36}$: échantillons

$\bar{x} = \frac{1}{36} \cdot \sum x_i = 100$ $\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum X_i$ avec $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 = 81)$

$\boxed{\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)}$

$E(\bar{X}) = E(\frac{1}{n} \sum X_i)$
$= \frac{1}{n} \sum E(X_i) = \frac{1}{n} \sum \mu = \frac{n\mu}{n} = \mu$

$\cancel{X} = Var(\bar{X}) = Var(\frac{1}{n} \sum X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum Var(X_i) = \frac{Var(x_i)}{n}$

" μ est proche de $\bar{x} = 100$ " -> on cherche $t \in \mathbb{R}^+$ tq
$P(\bar{X} - t \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t) = 0{,}95$

mesure empirique / moyenne de 36 échantillons

déf. intervalle de confiance à 95 %

On cherche t tq :
$P(\bar{X} - t \leqslant \mu \leqslant \bar{X} + t) = 0{,}95$
$= P(-t \leqslant \mu - \bar{X} \leqslant t)$
$= P(-t \leqslant \bar{X} - \mu \leqslant t)$
$= P\left(\frac{-t}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant \frac{t}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}95$

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$
$\bar{X} - \mu \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2/n)$
$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$
loi normale centrée réduite.

loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ symétrique / r 0

$\Rightarrow P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leqslant t/(\sigma/\sqrt{n})\right) = 0{,}975$

$T \sim \mathcal{N}(0,1) \rightarrow P(T \leqslant ?) = 0{,}975$

On a $P(T \leqslant 1{,}96) = 0{,}975$

$P(-1{,}96 \leqslant T \leqslant 1{,}96) = 0{,}975$

Le t cherché vérifie $\frac{t}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 1{,}96$

$\varepsilon = 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{9}{\sqrt{36}} = 1{,}96 \cdot \frac{9}{6} = 2{,}94$

Intervalle de confiance à 95 %

$IC = \left[\bar{x} - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \boxed{[97{,}06 ; 102{,}94]}$

• Exercice 2 -

Y suit une loi de Bernoulli de param $p \in [0;1]$

Y var. binaire, $P(Y=1) = p$, $P(Y=0) = 1-p$

$Y_1, \dots, Y_n$ suivent une loi Bernoulli de param p (idpts)

$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $F_n = \frac{X_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i$

p est inconnu, on veut l'estimer

on fait n tirages, F_n = proport° de 1

"F_n est proche de p ?"

On prend F_n c estimateur de p.

1) Estimateur biaisé ?

biais $= E(F_n) - p = ?$

$E(Y) = 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1)$
$= p$

$E(F_n) = E(1/n \cdot \sum Y_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum E(Y_i)$

$= \frac{1}{n} \cdot \sum p = \frac{np}{n} = \boxed{p}$

biais $(E(F_n) - p)$ est nul donc F_n est un estimateur non biaisé de p.

2) Convergence ?

F_n est convergent s'il est sans biais et si sa variance $\to 0$

$Var(F_n) = V(\frac{1}{n} \sum Y_i) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum V(Y_i)$

si Y loi Bernoulli param p, $V(Y) = p(1-p)$

donc $V(F_n) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum p(1-p) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p(1-p)$

$= \frac{p(1-p)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Stat
TD2
14/11
(suite)

3) . Y suit loi de Bernoulli

$X_n = \sum Y_i \sim B(n,p)$

$$\boxed{P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$E(X_n) = np$
$V(X_n) = np(1-p)$

Pr n assez gd ($n > 30$), on peut prendre l'approximat°

$X_n \sim N(np, \sigma^2 = np(1-p))$

$F_n = \frac{X_n}{n} \sim N(p, \sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n})$

On cherche n tq

$P(|F_n - p| \leq 0,01) = 0,95$

$P(-0,01 \leq F_n - p \leq 0,01) = 0,95$

$$P\left(\frac{-0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \underbrace{\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,95 \Rightarrow P\left(\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq \frac{0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}\right) = 0,975$$

$\frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1)$

$\Rightarrow P(\ldots \leq 1,96) = 0,975$ (cf table)

Le n cherché est tq $\frac{0,01}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \geq 1,96$ ($\geq$ car n est entier)

$\Rightarrow n \geq 196^2 . p(1-p)$ $\Rightarrow$ $\boxed{n \geq 38416 \, p(1-p)}$

4) $p = 0,1 \Rightarrow n \geq 3458$

$p = 0,2 \Rightarrow n \geq 6149$

$p = 0,5 \Rightarrow n \geq 9604$