

# Systemes Cyber-Physiques 2

*R. Le Bouquin Jeannès*

ESIR

LTSI – INSERM U1099



# Plan

---

- ❑ Introduction
- ❑ Généralités : échantillonnage
- ❑ Transformée en  $z$  (rappels)
- ❑ Transmittances échantillonnées
- ❑ Systèmes élémentaires
- ❑ Analyse des systèmes (stabilité, précision)
- ❑ Correcteurs

# **BIBLIOGRAPHIE**

---

*Y. Granjon - Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. Dunod, 2003.*

*Y. Granjon, Automatique. Dunod : Ellipses, 2001.*

*E. Godoy, E. Ostertag, Commande numérique des systèmes. Ellipses, 2005.*

# DEFINITION

---

## AUTOMATIQUE

- Science de la commande des processus
- Science qui traite de l'analyse et de la commande des systèmes dynamiques évoluant dans le temps

# COMMANDE

---

Le développement des microprocesseurs, puis microcontrôleurs permet aujourd'hui de mettre en œuvre des principes de commande très élaborés, notamment :

- le pilotage de systèmes complexes
- les commandes robustes
- l'identification en ligne
- la commande de systèmes non linéaires
- la commande prédictive
- ...

# APPLICATIONS

---

- Depuis 30 ans, commandes implantées sur un calculateur numérique.
- Mode de régulation appelée numérique par opposition à la commande analogique.
- En général, processus continu (variables évoluant d'une manière continue), exemples : avion, lanceur, dirigeable...
- Systèmes intrinsèquement discrets (économie, finance...)

# AVANTAGES

---

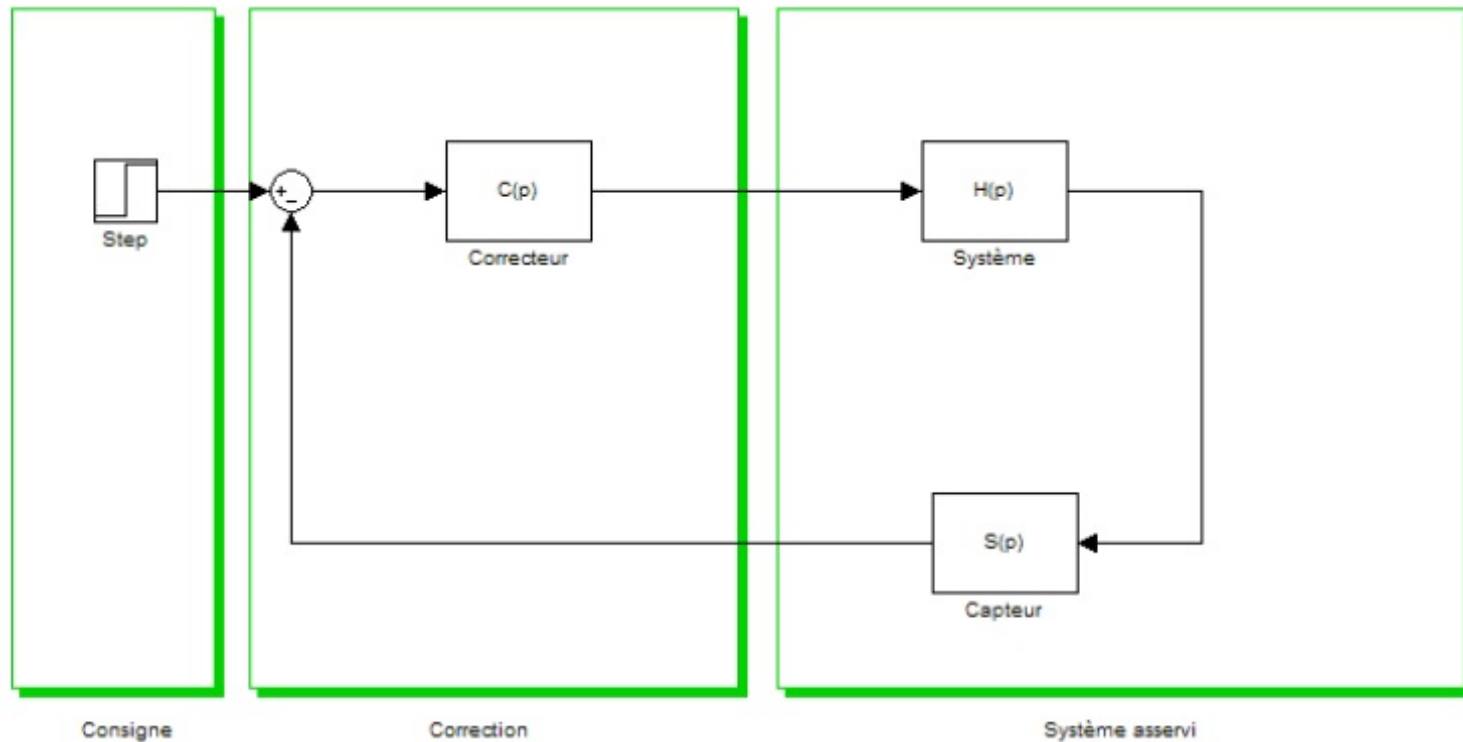
- ❑ Réalisation aisée de régulateurs complexes, lois de commande raffinées.
- ❑ Facilité de mise en œuvre de commandes anticipatrices (compensation par rapport à la consigne ou à certaines perturbations).
- ❑ Mise en œuvre d'algorithmes de régulation sans équivalent analogique.
- ❑ Insensibilité de la caractéristique entrée-sortie du régulateur aux parasites, aux variations de température, au vieillissement, etc.
- ❑ Pas de dispersion des paramètres du régulateur en cas de fabrication en série.
- ❑ Prise en compte de défauts, des limites et comportements particuliers du système à régler (non linéarités, saturations) par simple programmation.
- ❑ Linéarisation autour d'un point de fonctionnement ajustable.
- ❑ Changement de correcteur souple et rapide.
- ❑ Interface utilisateur conviviale.
- ❑ Plusieurs systèmes corrigés par un seul microprocesseur.

# INCONVENIENTS

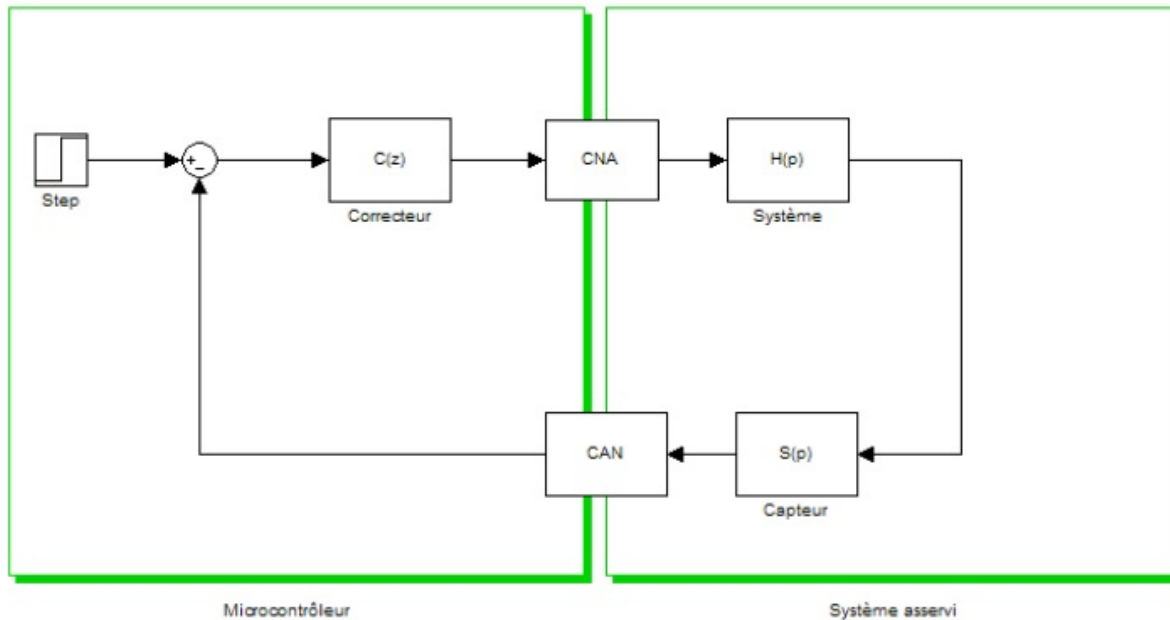
---

- Observation discontinue de la grandeur réglée, le système est en boucle ouverte entre deux instants d'échantillonnage.
- Sans précautions particulières, le bouclage numérique insère des non linéarités dans la boucle de régulation dues :
  - à la quantification des convertisseurs,
  - à la précision de calcul finie du microprocesseur,
  - au procédé d'échantillonnage (recouvrement spectral).
- Ces non linéarités peuvent avoir un effet déstabilisant (cycles limites) et introduisent des bruits supplémentaires, voire des battements.
- Insertion de retards purs dans la boucle de régulation dus au temps de conversion analogique-numérique (A/N) et numérique-analogique (N/A) et au temps d'exécution de l'algorithme de régulation, or les retards purs sont très déstabilisants.





– Système asservi linéaire continu.



– Système asservi linéaire échantillonné. (Ne cherchez pas les boites CAN et CNA sous simulink, elles n'existent pas! CAN est intrinsèque en passant de continu à échantillonné, CNA s'appelle en fait ZOH pour "Zero Order Hold".)

# ELEMENTS de TECHNOLOGIE

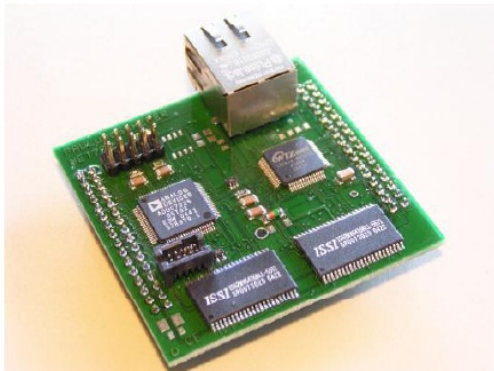
---



Kit de développement sur Bus VME.



Carte d'acquisition haute densité.  
96 voies analogiques 12 bits 3 Méch./s.



– Microcontrôleur ADUC.



– Carte microcontrôleur SSV DIL/NetPC DNP/5280.

# ELEMENTS de TECHNOLOGIE

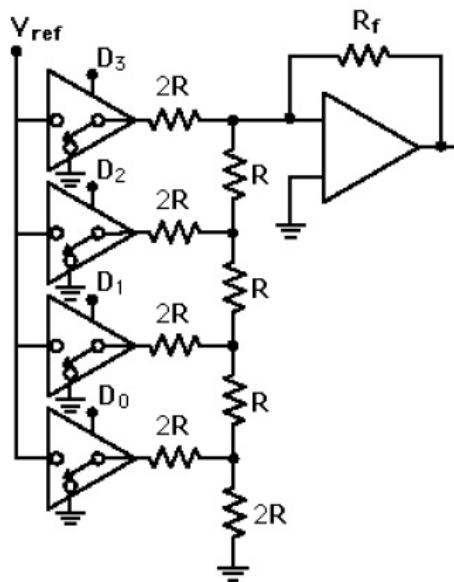
## ■ CAN (Convertisseur Analogique Numérique)

Convertisseur à rampe numérique	Convertisseur à pesées successives	Convertisseur flash
lent, précis	⇒	rapide, moins précis

# ELEMENTS de TECHNOLOGIE

## ▣ CNA (Convertisseur Numérique Analogique )

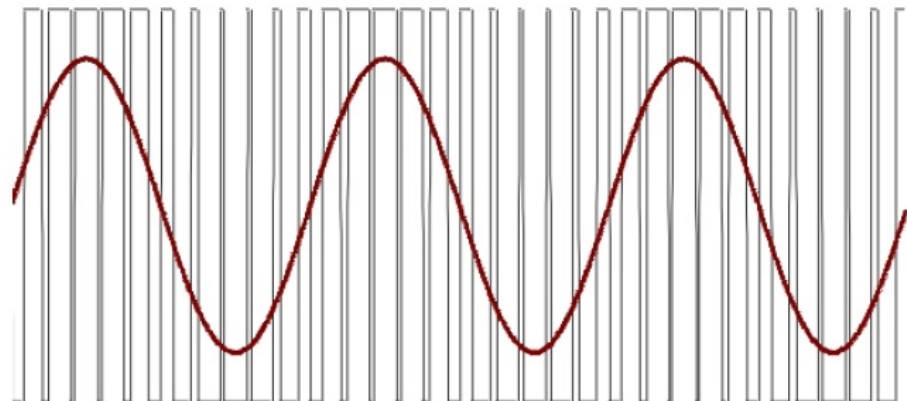
R/2R : consommateur en surface de silicium



Convertisseur  
numérique analogique de type  
réseau R-2R.

Modulation en largeur d'impulsion  
(MLI, en anglais PWM).

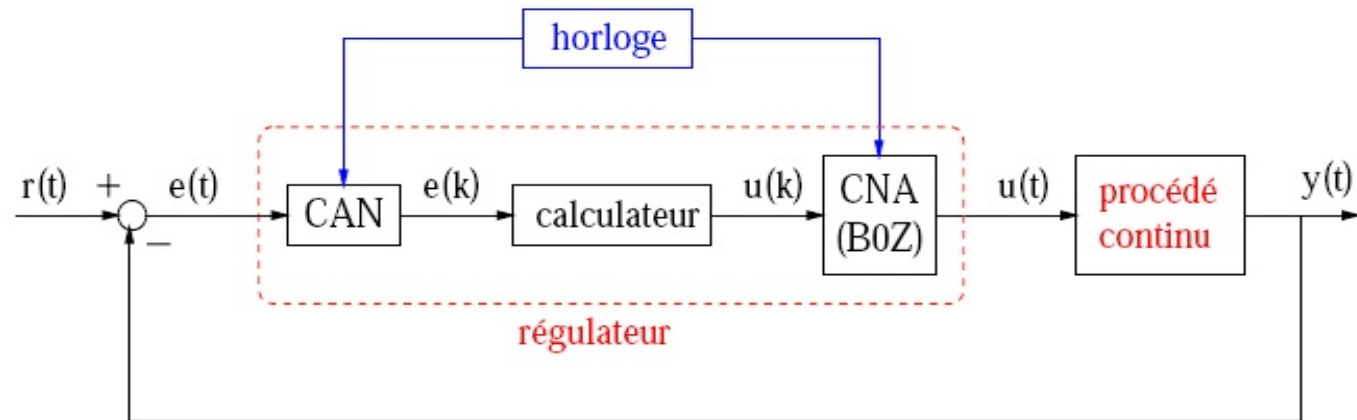
Le principe est de faire varier la valeur moyenne du signal de sortie binaire (0 - 5V) en faisant varier la largeur de l'impulsion. Un filtre RC permet d'extraire le signal désiré. Ne nécessite qu'un bit de sortie du microcontrôleur



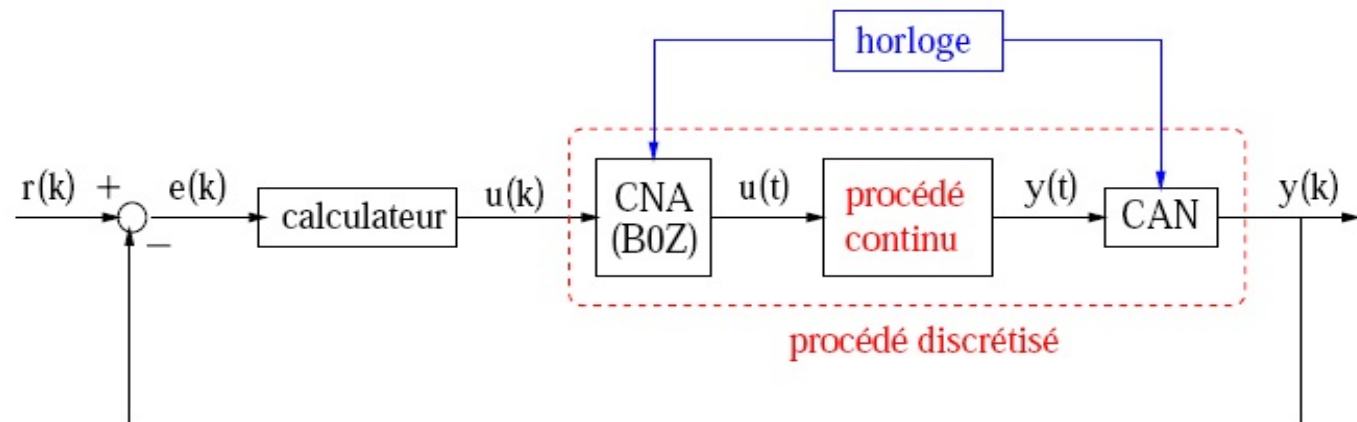
Signal modulé en modulation de largeur d'impulsion avant  
et après filtrage haute fréquence.

# Différentes architectures

modèle dynamique à temps continu :



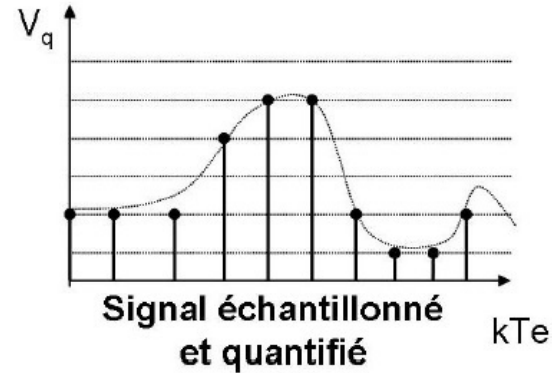
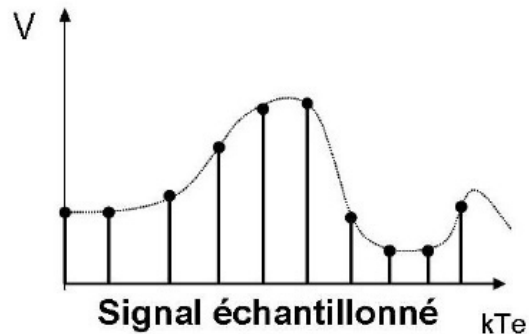
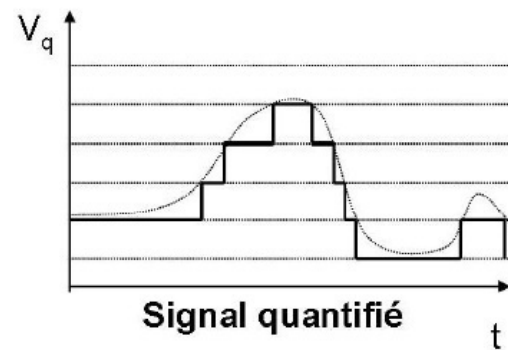
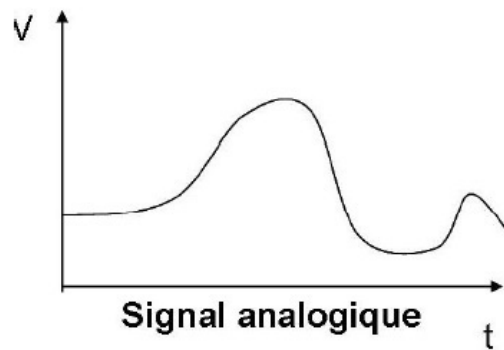
modèle dynamique à temps discret (échantillonné)



# Echantillonnage



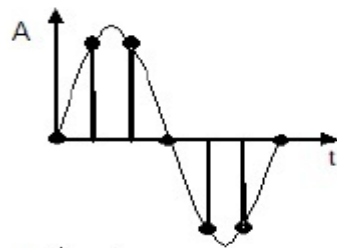
# Notions d'échantillonnage



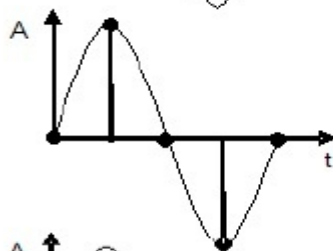
– Echantillonnage et quantification d'un signal.



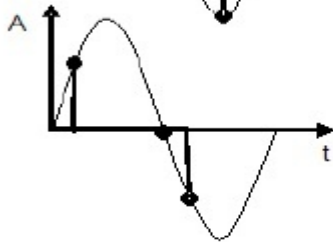
# Fréquence/période d'échantillonnage



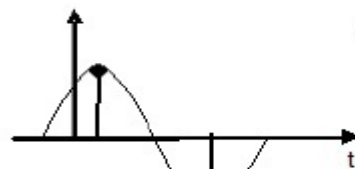
$T_e \ll 1/f$  : pas  
de problème



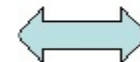
$T_e \sim 4/f$   
toujours pas  
de problème



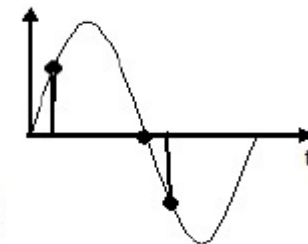
$T_e = 2/f$



A



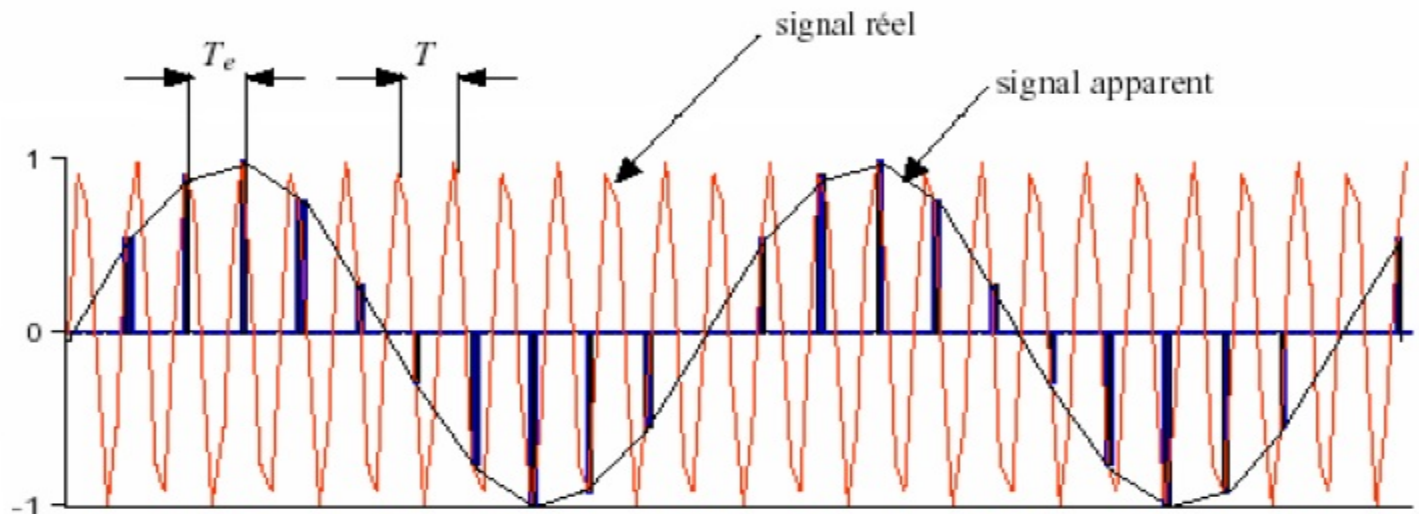
Lequel est  
l'original ?



– Signaux échantillonnés à différentes fréquences.

# Fréquence/période d'échantillonnage

En augmentant encore la période d'échantillonnage on tombe sur des aberrations .



– Signal ostensiblement sous-échantillonné.

# Recouvrement de spectre

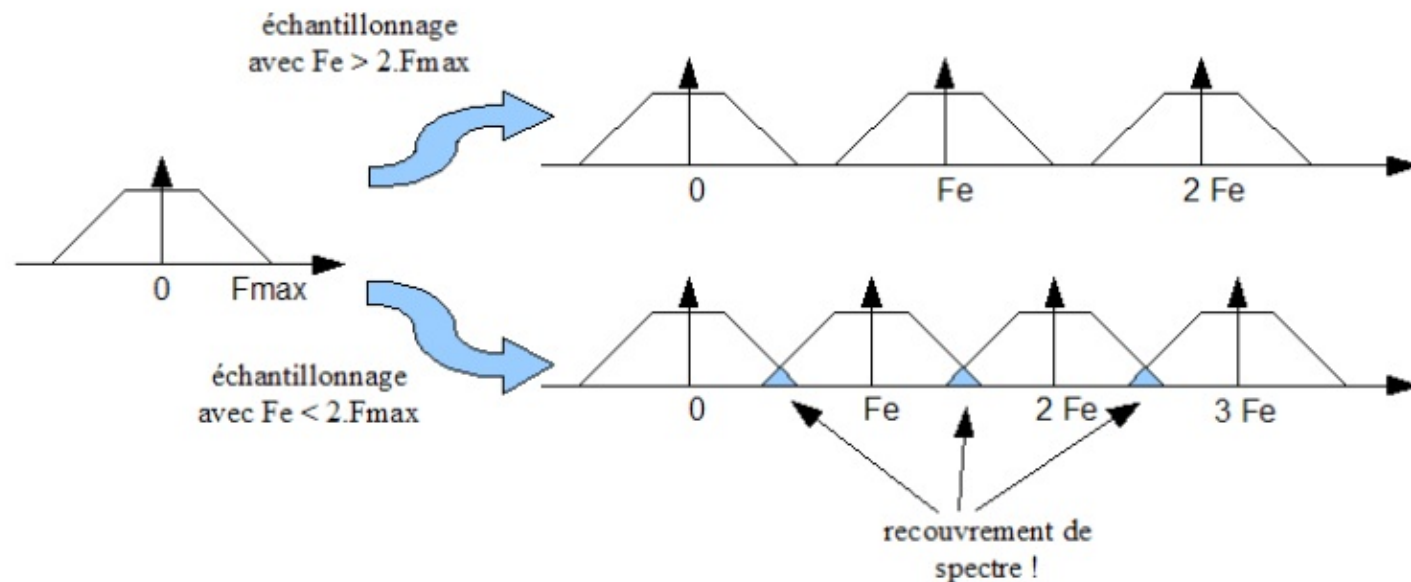
---

Sans entrer dans le détail, rappelons une constante des transformées usuelles, Laplace, Fourier et  $z$  : le produit de fonctions temporelles est transformée en un produit de convolution dans l'espace opérationnel. En particulier, pour la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}x(t) * y(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) Y(f) \\x(t) y(t) &\xrightarrow{\text{Fourier}} X(f) * Y(f)\end{aligned}$$

En fonction des valeurs relatives de  $F_{max}$  et  $F_e$  on obtient deux types de spectres différents.

# Recouvrement de spectre



Phénomène de recouvrement de spectre.

**Le théorème de Shannon** Toute fonction du temps  $f(t)$  possédant un spectre de fréquence limitée à  $\pm F_{max}$  peut être transformée par échantillonnage périodique, de fréquence  $F_e$  supérieure ou égale à  $2F_{max}$ , sans aucune perte d'information.

# Bruit sur la dérivée

La dérivée calculée par le taux de variation entre deux périodes d'échantillonnage tend vers la dérivée de la fonction.

$$\frac{df(t)}{dt} \simeq \frac{f(t) - f(t - T_e)}{T_e}$$

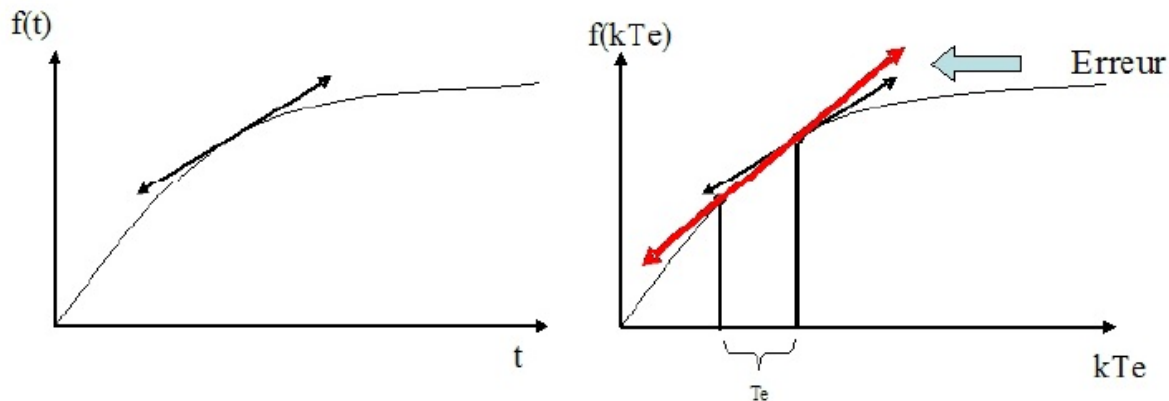
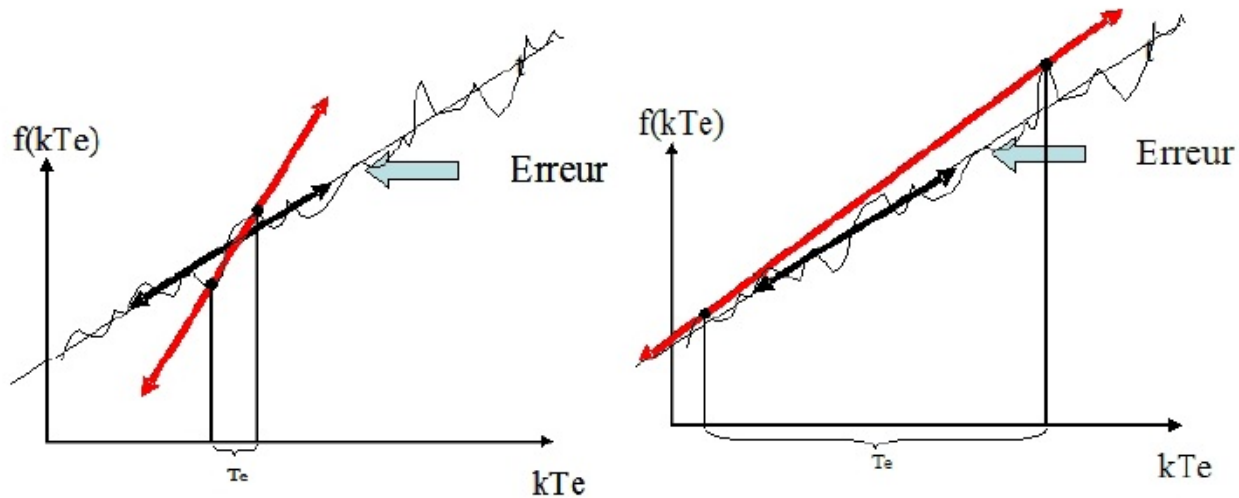


FIGURE 1.27 – Différence entre dérivée analogique et dérivée numérique.

Ceci n'est malheureusement vrai que dans le cas d'un signal sans bruit. Or les signaux sont toujours entachés de bruit et dans ce cas la proposition précédente n'est plus vraie.

# Bruit sur la dérivée



Influence de la période d'échantillonnage dans le cas de calculs de dérivées en présence de bruit.

Une période d'échantillonnage très petite implique un microcontrôleur très rapide et donc coûteux.

# Choix de la période d'échantillonnage

---

Les considérations précédentes montrent que :

- le théorème de Shannon est une limite fondamentale
- L'idée de suréchantillonner provoque énormément de bruit sur le calcul des dérivées et demande un microcontrôleur puissant donc cher.

Entre les deux, il existe un vaste choix de fréquences d'échantillonnage.

On pourra par exemple choisir la période d'échantillonnage telle que :

$$\frac{2\pi\tau}{25} \leq T_e \leq \frac{2\pi\tau}{5} \quad \text{pour un système du 1<sup>er</sup> ordre}$$

$$\frac{2\pi}{25\omega_n} \leq T_e \leq \frac{2\pi}{5\omega_n} \quad \text{pour un système du 2<sup>ème</sup> ordre}$$

# Rappels sur la Transformée en $z$



# Éléments sur la transformée en z

## Définitions

### Transformée en z.

Dans le cas des signaux causaux (signal nul pour  $t$  négatif), on définit la transformée en z du signal  $s(t)$  par :

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \cdot z^{-k} ; z \text{ est complexe comme } p, (z = e^{pT}).$$

On appelle transformée en  $z$  d'un signal  $f(t)$  la transformée de Laplace  $F^*(p)$  du signal échantillonné  $f^*(t)$ , dans laquelle on effectue la substitution

$$\boxed{z = e^{T_e p}}$$

Notation :  $\mathcal{Z}[F(p)]$  ou  $\mathcal{Z}[f(t)]$

Rappel : transformée de Laplace d'un signal

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

le signal  $f(t)$  échantillonné s'écrit  $f^*(t)$  avec :

$$f^*(t) = f(t) \delta_{T_e}(t)$$

avec  $\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$   $k \in \mathbb{Z}$  peigne de Dirac

Ainsi la transformée de Laplace du signal échantillonné est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^*(t)] &= \int_0^{\infty} \left( f(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \right) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t - kT_e) e^{-pt} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p} \end{aligned}$$

la fonction  $f$  étant nulle pour tout  $t < 0$ ,

$$F^*(p) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) e^{-kT_e p}$$

puis en posant  $z = e^{T_e p}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k}$$

Exemple :

$f(t) = U(t)$  échelon d'Heaviside

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

# Propriétés

Comme la transformée en  $z$  est la transformée de Laplace suivie d'un changement de variable, ses propriétés se déduisent de celles de la transformée de Laplace.

## Linéarité

$$\mathcal{Z}[af(t) + bg(t)] = aF(z) + bG(z)$$

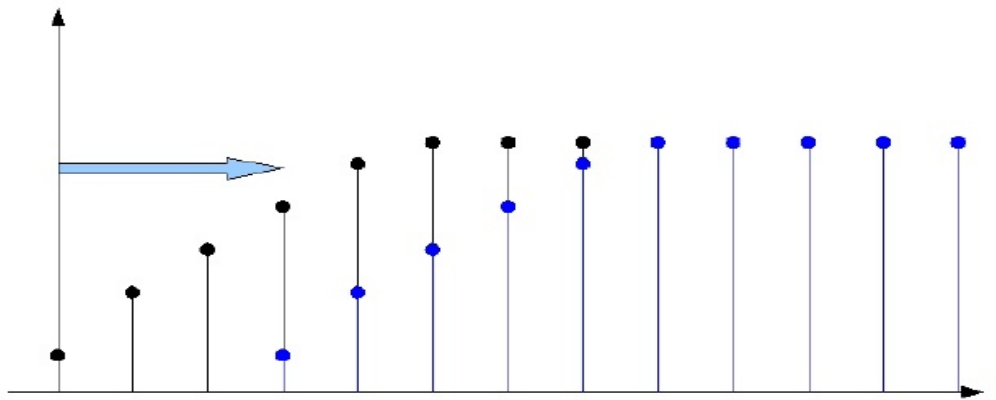
où  $a$  et  $b$  sont des constantes

## Translations réelles

### Retard de $k$ périodes

$$\mathcal{Z}[f(t - kT_e)U(t - kT_e)] = z^{-k}F(z)$$

Notez l'opérateur "retard"  $z^{-1}$

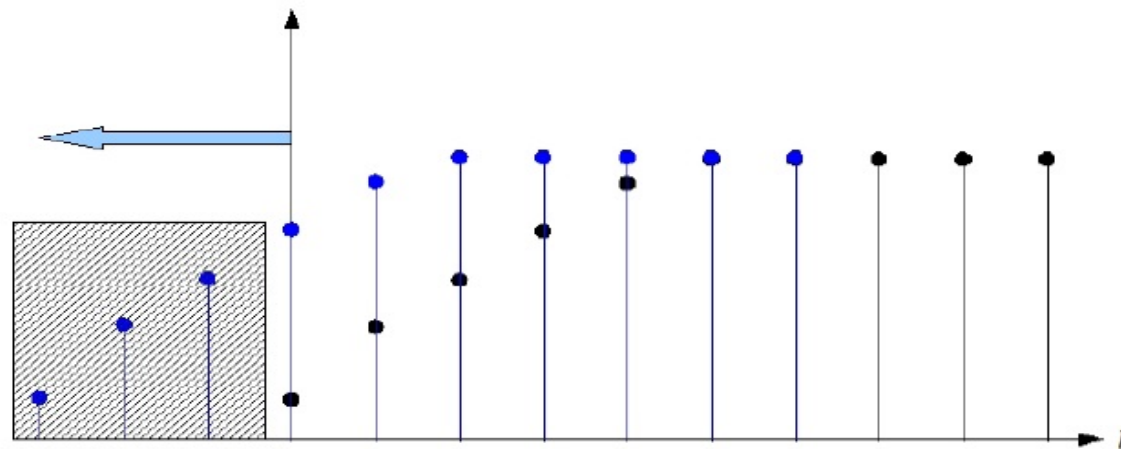


– Illustration de la propriété du retard.

## Avance de $k$ périodes

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k F(z) - z^k F(0) - z^{k-1} F(T_e) - z^{k-2} F(2T_e) - \dots - z F((k-1)T_e) \\ \mathcal{Z}[f(t + kT_e)U(t)] &= z^k \left[ F(z) - \sum_{n=0}^{k-1} f(nT_e) z^{-n} \right]\end{aligned}$$

Les valeurs initiales sont enlevées, sinon, le principe de causalité n'est plus respecté.



– Illustration de la propriété de l'avance.

## Translation complexe

$$\mathcal{Z}[e^{-aT_e} f(t)] = \mathcal{Z}[F(p + a)] = F(ze^{aT_e})$$

Changement d'échelle en  $z$

$$\mathcal{Z}[a^k f(kT_e)] = F\left(\frac{z}{a}\right)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f^*(t) = \lim_{k \rightarrow 0} f(kT_e) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Théorème de la convolution discrète

$$\mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_e)g((n-k)T_e) \right] = F(z)G(z)$$

C'est le théorème fondamental qui permet de transformer l'équation de la sortie d'un système,

en temporel : *sortie = convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle du système,*

en  $z$  : *sortie = produit de l'entrée avec la transmittance du système.*

Multiplication par  $t$

$$\mathcal{Z} [tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z)$$

Très utile pour démontrer la forme des signaux canoniques

Théorème de sommation

$$\mathcal{Z} \left[ \sum_{k=0}^n f(kT_e) \right] = \frac{z}{z-1} F(z)$$

## Par la théorie des résidus

C'est la méthode la plus à même de traiter tous les cas !  
des résidus.

elle implique la connaissance de la théorie

$$F(z) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus} \left\{ \frac{F(\xi)}{1 - e^{\xi T_e} z^{-1}} \right\}_{\xi=\xi_i}$$

où les  $\xi_i$  sont les pôles de la fonction de transfert  $F(p)$

Rappel : Théorie des résidus.

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2j\pi \sum \text{Res}$$

avec

$$\text{Res}(a) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \left( \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-a)^n f(z)] \right)$$

si le pôle  $a$  est un pôle simple d'ordre  $n$



## Par l'utilisation des tables

Ce sera la méthode utilisée dans le cadre de ce cours. Le plus souvent on possède la transformée de Laplace du système. On procède à une décomposition en éléments simples puis, à l'aide du tableau

on obtient la transformée en  $z$ . Notez que la connaissance des propriétés de la transformée en  $z$  est souvent nécessaire.

### Exemple

Soit à transformer en  $z$ , le système donné par sa fonction de transfert en  $p$  :

$$F(p) = \frac{4p^3}{(p^2 + 1)(p + 1)^3}$$

– Table des transformées de Laplace et en  $z$  usuelles.

$X(p)$	$x(t)$	$X(z)$
1	$\delta(t)$	1
$e^{-kT_e p}$	$\delta(t - kT_e)$	$z^{-k}$
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)=1$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$t$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_e}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$te^{-at}$	$\frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$	$t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2} - \frac{\tau(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$	$1 - (1 + \frac{t}{\tau})e^{-t/\tau}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_e/\tau}} - \frac{T_e z e^{-T_e/\tau}}{\tau(z-e^{-T_e/\tau})^2}$

– Table des transformées de Laplace et en  $z$  usuelles.

$X(p)$	$x(t)$	$X(z)$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{z \sin \omega T_e}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{z(z - \cos \omega T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega T_e + 1}$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{ze^{-aT_e} \sin \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{p}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_e} \cos \omega T_e}{z^2 - 2ze^{-aT_e} \cos \omega T_e + e^{-2aT_e}}$
$\frac{\omega_n^2}{p(p^2 + \omega_n^2)}$	$1 - \cos \omega_n t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_n T_e)}{z^2 - 2z \cos \omega_n T_e + 1}$
$\frac{1}{1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$	$\frac{\omega_p}{1 - \xi^2} e^{-\xi \omega_n t} \sin \omega_p t$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$	
$\frac{1}{p\left(1 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}\right)}$	$1 - \frac{\omega_n}{\omega_p} e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_p t + \psi)$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $\psi = \cos^{-1} \xi$	
$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z - e^{-aT_e}} - \frac{z}{z - e^{-bT_e}}$
$\frac{ab}{p(p+a)(p+b)}$	$1 - \frac{b}{a-b} e^{-at} - \frac{a}{a-b} e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z - e^{-aT_e})} - \frac{az}{(a-b)(z - e^{-bT_e})}$

## Décomposition en éléments simples

La forme de sa décomposition en éléments simples se déduit de la valeur et de la multiplicité de ses pôles. Il existe des réels  $a, b, c, d, e, f$  et un polynôme réel  $E$  tels que :

$$\frac{4p^3}{(p^2 + 1)(p + 1)^3} = E + \frac{a}{p + 1} + \frac{b}{(p + 1)^2} + \frac{c}{(p + 1)^3} + \frac{(dp + e)}{(p^2 + 1)}$$

Il s'agit désormais de déterminer la valeur de chaque coefficient indéterminé.

- Le degré du numérateur de  $F$  est strictement inférieur au degré de son dénominateur, donc  $E = 0$ .
- On multiplie de part et d'autre par  $(p + 1)^3$  et on fait  $p = -1$  pour obtenir  $c = -2$ .
- De même, on multiplie de part et d'autre par  $(p^2 + 1)$  et on fait  $p = i$  pour obtenir  $d = 1$  et  $e = -1$ .
- On étudie ensuite la limite de  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$ , ce qui donne  $a + d = 0$  d'où  $a = -1$ .
- Puis on calcule  $F(0) = 0$  d'où  $0 = a + b + c + e$  et donc  $b = 4$ .

Vérification, calculer par exemple  $F(1) = 1/4$ .

Ainsi la décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{4p^3}{(p^2 + 1)(p + 1)^3} = -\frac{1}{p + 1} + \frac{4}{(p + 1)^2} - \frac{2}{(p + 1)^3} + \frac{(p - 1)}{(p^2 + 1)}$$

Transformation en  $z$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{p+1} &\longrightarrow -\frac{z}{z-e^{-T_e}} \\
 \frac{4}{(p+1)^2} &\longrightarrow 4\frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\
 \frac{p-1}{(p^2+1)} &= \frac{p}{(p^2+1)} - \frac{1}{(p^2+1)} \longrightarrow \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z\sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1} \\
 -\frac{2}{(p+1)^3} &\longrightarrow \text{????}
 \end{aligned}$$

mais

$$\frac{1}{(p+a)^2} \longrightarrow t e^{-at} \longrightarrow \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2}$$

et

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 e^{-at}\right] = \frac{1}{(p+a)^3} \quad \mathcal{Z}[tf(t)] = -T_e z \frac{d}{dz} F(z)$$

donc

$$\mathcal{Z}[t \times t e^{-at}] = -T_e z \frac{d}{dz} \left[ \frac{T_e z e^{-aT_e}}{(z-e^{-aT_e})^2} \right] = \frac{T^2 e^{-aT} z (z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Z}\left[\frac{4p^3}{(p^2+1)(p+1)^3}\right] &= -\frac{z}{z-e^{-T_e}} + 4\frac{T_e z e^{-T_e}}{(z-e^{-T_e})^2} \\
 &+ \frac{T^2 e^{-aT} z (z+e^{-aT})}{(z-e^{-aT})^3} \\
 &+ \frac{z(z-\cos T_e)}{z^2-2z\cos T_e+1} - \frac{z\sin T_e}{z^2-2z\cos T_e+1}
 \end{aligned}$$

## ▣ Transformée inverse

### Théorie des résidus

la plus complexe à appliquer à la main, par contre elle est extrêmement simple à utiliser avec les logiciels de calcul symbolique tels que Maple ou Mathematica.

$$f(kT_e) = \sum_{\xi_i} \text{Résidus} \{ z^{k-1} F(\xi) \}_{\xi=\xi_i}$$

où les  $\xi_i$  sont les pôles de la fonction de transfert  $F(z)$

Exemple :

$$F(z) = \frac{z}{z-a} \frac{z}{z-1}$$

Il y a deux résidus en  $z = a$  et en  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2}{z-a} z^{k-1} = \frac{1}{1-a} \\ \text{Res}_{z=a} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{z^2}{z-1} z^{k-1} = \frac{a^{k+1}}{a-1} \end{aligned}$$

donc

$$F(kT_e) = \frac{1}{1-a} + \frac{a^{k+1}}{a-1} = \frac{1-a^{k+1}}{1-a}$$

## Par division polynomiale

On ne cherche alors que les premiers échantillons de la réponse d'un système à une entrée spécifiée.

Exemple : original de  $\frac{z}{z-0.5}$

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 z \\
 -z \quad + \quad 0.5 \\
 \hline
 0 \quad + \quad 0.5 \\
 \qquad -0.5 \quad + \quad 0.25z^{-1} \\
 \hline
 \qquad 0 \quad + \quad 0.25z^{-1}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 z - 0.5 \\
 \hline
 1 + 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2} + \dots
 \end{array}
 \end{array}$$

$f^*(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t - T_e) + 0.25\delta(t - 2T_e) + \dots$  donc  $f(0) = 1$ ,  $f(T_e) = 0.5$ ,  $f(2T_e) = 0.25, \dots$

## Par l'utilisation des tables

Méthode : décomposer  $\frac{F(z)}{z}$  en éléments simples

Puis à l'aide du tableau A.1

- Développer  $\frac{F(z)}{z}$  en éléments simples,
- rechercher les racines du dénominateur  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,
- construire

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{C_1}{z - z_1} + \frac{C_2}{z - z_2} + \frac{C_3}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n}{z - z_n},$$

- revenir à

$$F(z) = \frac{C_1 z}{z - z_1} + \frac{C_2 z}{z - z_2} + \frac{C_3 z}{z - z_3} + \dots + \frac{C_n z}{z - z_n}.$$

- Puis en utilisant

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[ \frac{z}{z - a} \right] = a^k,$$

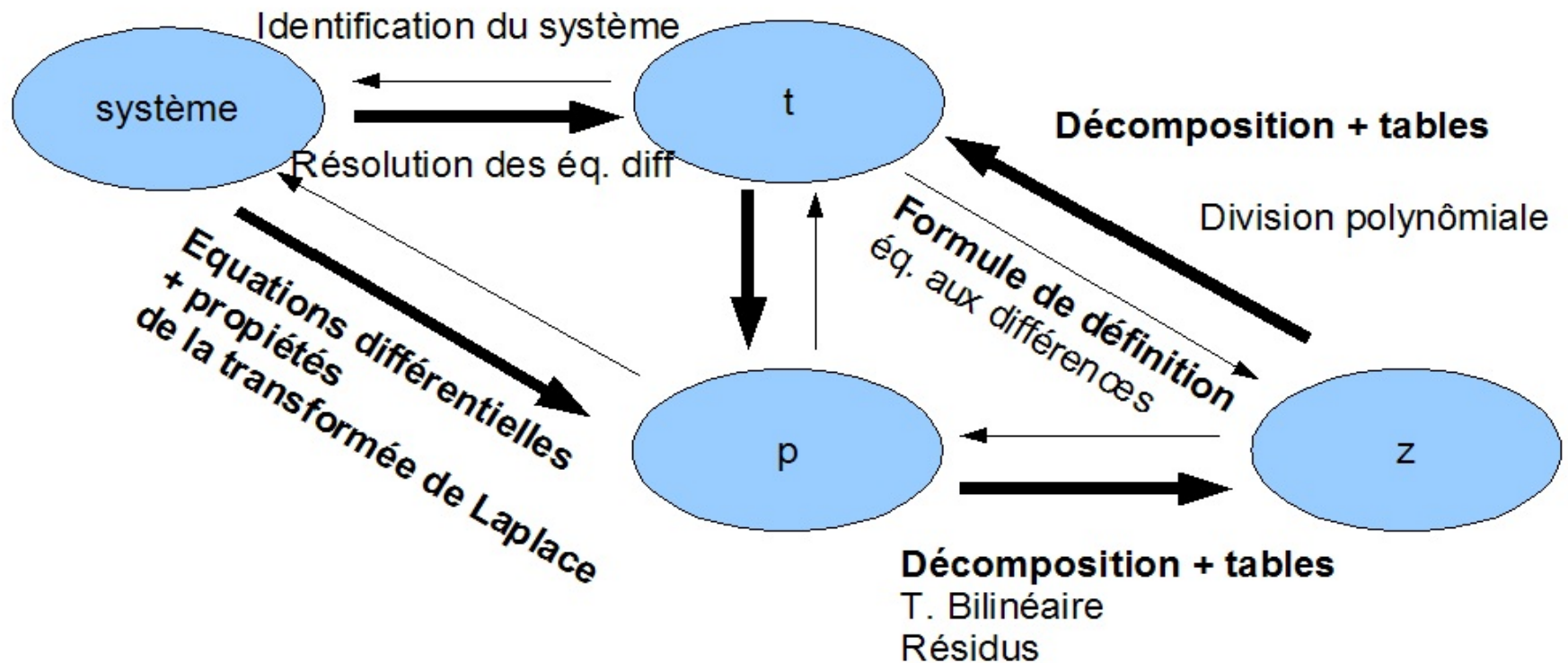
- on obtient :

$$f(kT_e) = C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + C_3 z_3^k + \dots + C_n z_n^k.$$

Remarque : les  $z_i$  peuvent être complexes, mais sont complexes conjugués deux à deux.



# En résumé



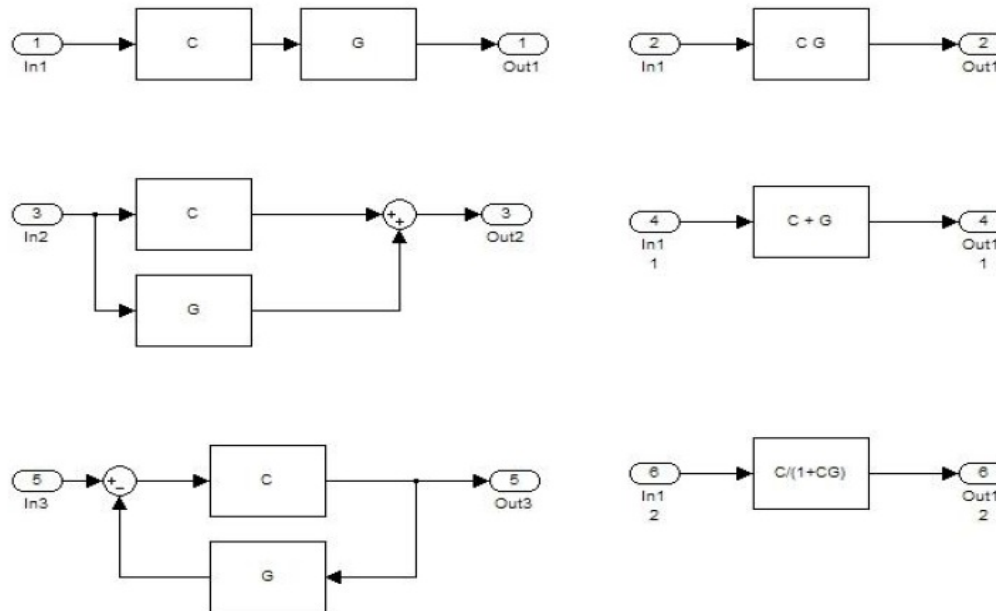
– Ensemble des transformations.

# Transmittances échantillonnées



# Quelques transmittances

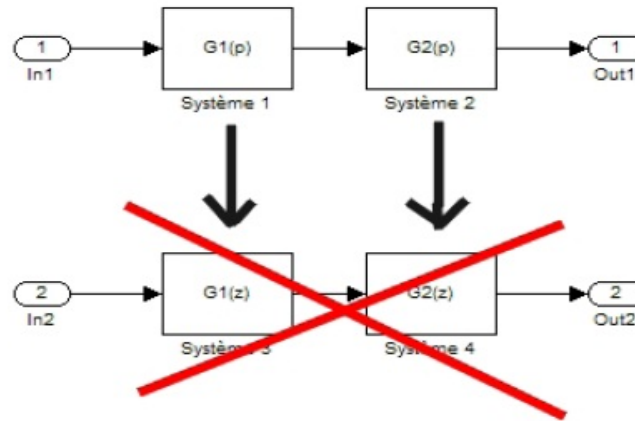
Rappels sur la réduction des schémas-blocs



– Opérations fondamentales de réduction des graphes. Le schéma de droite est équivalent à celui de gauche.

## Transformée en $z$ d'un schéma bloc

La figure décrit une partie de schéma bloc en  $p$ , il s'agit alors de transformer ce schéma en un schéma bloc en  $z$ . La tentation est grande de transformer terme à terme, mais c'est faux !



– Il est impossible de transformer un graphe en  $p$  en un graphe en  $z$  par transformation des différents blocs !

$$\begin{aligned} G_1(p) &\rightarrow G_1(z) \\ G_2(p) &\rightarrow G_2(z) \\ G(p) = G_1(p)G_2(p) &\nrightarrow G(z) = G_1(z)G_2(z) \end{aligned}$$

Pour que cela soit vrai il faut que le signal entre  $G_1$  et  $G_2$  soit un signal échantillonné.

**Exemple :** soit :  $G_1(p) = \frac{1}{p}$  et  $G_2(p) = \frac{1}{p+a}$

$$G_1(z) =$$

$$G_2(z) =$$

$$\mathcal{Z} [G_1(p)G_2(p)] =$$

Exemple : soit :  $G_1(p) = \frac{1}{p}$  et  $G_2(p) = \frac{1}{p+a}$

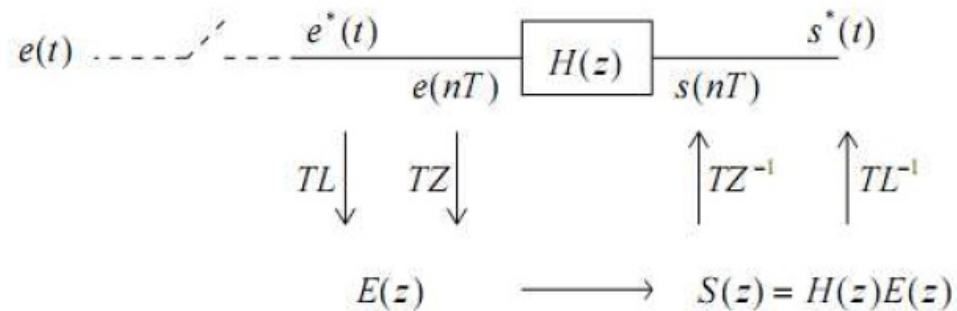
$$G_1(z) =$$

$$G_2(z) =$$

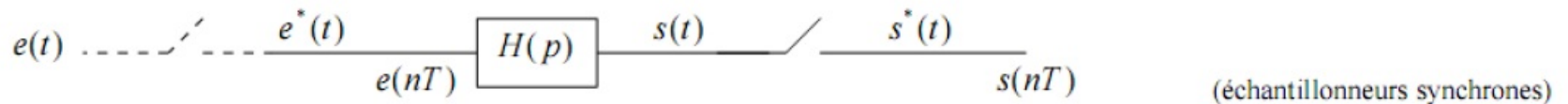
$$\mathcal{Z} [G_1(p)G_2(p)] =$$

$$G_1(p) = \frac{1}{p} \text{ et } G_2(p) = \frac{1}{p+a} \text{ alors } G_1(z) = \frac{z}{z-1} \text{ et } G_2(z) = \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$$
$$\text{et } \mathcal{Z} [G_1(p)G_2(p)] = \frac{(1-e^{-T_e/\tau})z}{(z-1)(z-e^{-T_e/\tau})} \neq \frac{z}{z-1} \frac{\tau z}{z-e^{-T_e/\tau}}$$

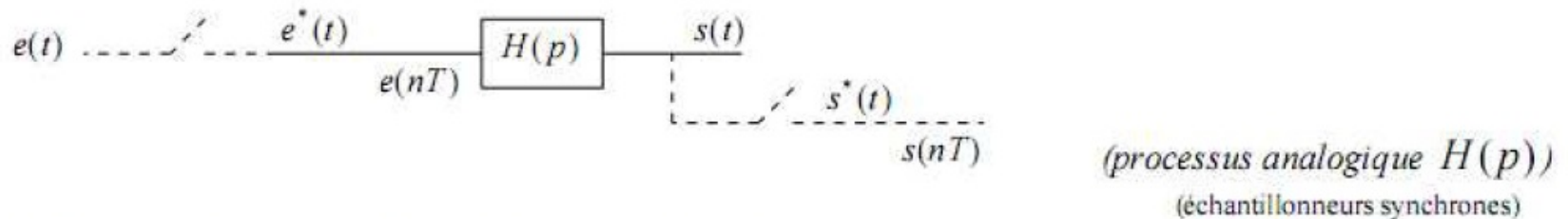
- Entrée numérique (échantillonnée)-sortie numérique (échantillonnée).



Ou,



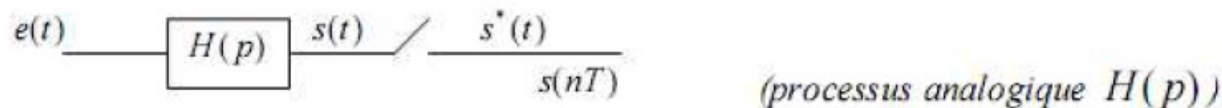
- Entrée numérique (échantillonnée)-sortie analogique.**



$$s(t) = TL^{-1}[S(p)] = TL^{-1}[H(p)E^*(p)] \quad \text{d'où: } s^*(t) \xrightarrow{TL} S^*(p) = S(z) = [H(p)E^*(p)]^* = H^*(p)E^*(p) = H(z)E(z)$$

$$S(p) = H(p)E^*(p) \quad \text{---} \rightarrow \quad S^*(p) = H^*(p)E^*(p) \quad \leftrightarrow \quad S(z) = H(z)E(z) \quad \text{avec: } H(z) = Z[H(p)]$$

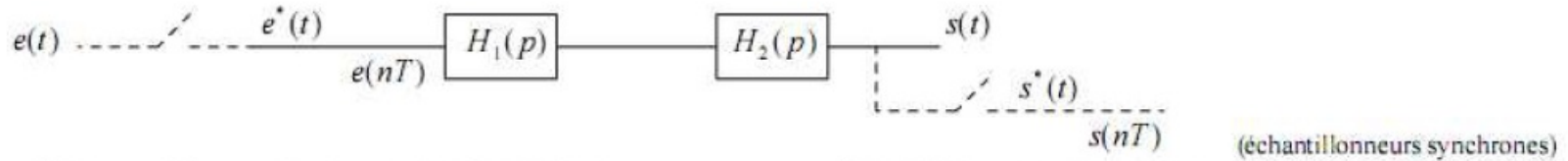
- Entrée analogique -sortie numérique.**



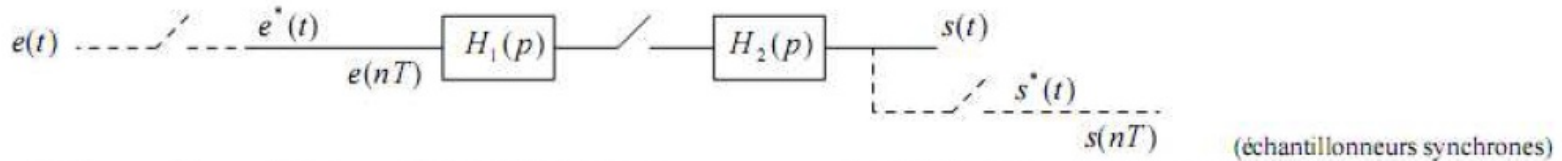
$$S(p) = H(p)E(p) \quad \text{---} \rightarrow \quad S^*(p) = \overline{HE}^*(p) \quad (\text{noté aussi } \overline{H(p)E(p)}^*) \quad \leftrightarrow \quad S(z) = \overline{EH}(z) \quad \text{avec: } \overline{EH}(z) = Z[\overline{EH}(p)]$$



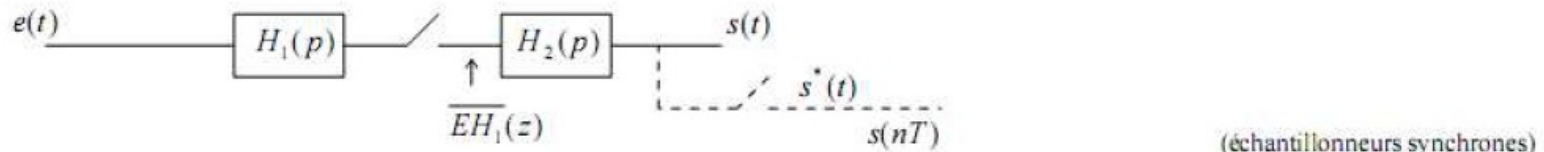
- Schémas blocs en cascade.



$$s^*(t) \xrightarrow{TL} S(z) = E(z) \overline{H_1 H_2}(z) \quad \text{avec :} \quad \overline{H_1 H_2}(z) = Z[H_1(p)H_2(p)]$$



$$s^*(t) \xrightarrow{TL} S(z) = E(z) H_1(z) H_2(z) \quad \text{avec :} \quad H_1(z) H_2(z) = Z[H_1(p)] \cdot Z[H_2(p)]$$

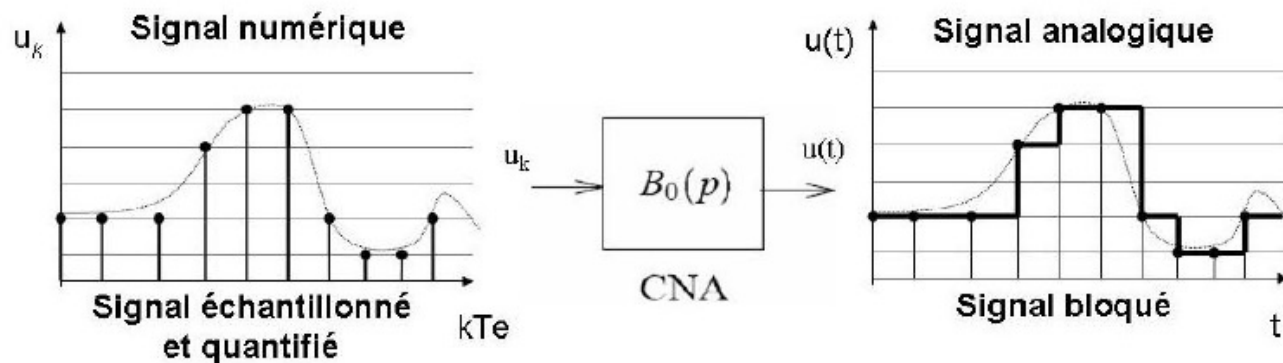


$$s^*(t) \xrightarrow{TL} S(z) = \overline{EH_1}(z) H_2(z) \quad \text{avec :} \quad \overline{EH_1}(z) = Z[E(p)H_1(p)]$$

## ■ BoZ : Bloqueur d'ordre 0

### Transformée d'un système précédé par un bloqueur d'ordre 0

Le bloqueur d'ordre 0 (en anglais "Zero Order Hold") est l'objet physique qui permet de passer d'un signal numérique échantillonné, qui ne contient que de l'information et seulement aux instants d'échantillonnage, à un signal analogique continu par morceaux.



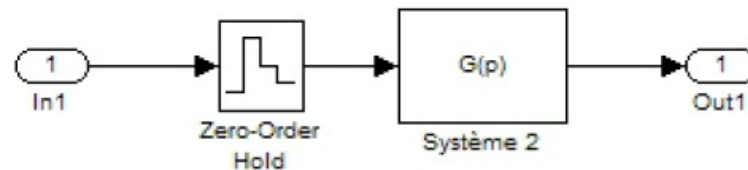
– Signaux d'entrée et de sortie d'un bloqueur d'ordre 0.

## Fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre 0

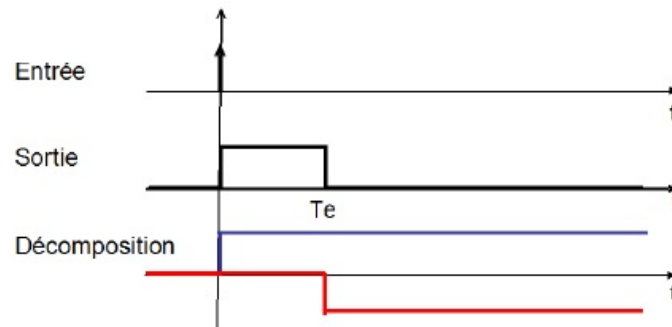
Rappel : La transformée de Laplace d'un système est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.  
Si l'on soumet un bloqueur d'ordre 0 à une impulsion, on obtient la sortie illustrée en figure

$$B_0(t) = U(t) - U(t - T_e)$$

$$B_0(p) = U(p) - U(p)e^{-T_e p}$$



- Transmittance continue précédée d'un bloqueur d'ordre 0.



- Réponse impulsionnelle d'un bloqueur d'ordre 0.

*Calcul de la transformée d'un système précédé d'un bloqueur d'ordre 0*

$$G(z) = Z \left[ L^{-1} \left[ B_0(p) H(p) \right] \right]$$

*Par souci de simplification d'écriture, on écrit :*

$$G(z) = Z \left[ B_0(p) H(p) \right]$$

*Donc*

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left[ \frac{1 - e^{-pT_e}}{p} H(p) \right] \\ &= Z \left[ \frac{H(p)}{p} - \frac{e^{-pT_e}}{p} H(p) \right] \end{aligned}$$

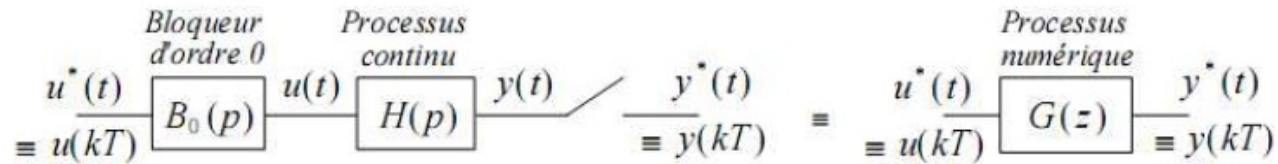
*En appliquant la linéarité de la transformation puis le théorème du retard, on obtient*

$$G(z) = Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right] - Z \left[ e^{-pT_e} \frac{H(p)}{p} \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right]$$

*D'où*

$$\boxed{G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left[ \frac{H(p)}{p} \right]}$$

# En résumé



avec:  $G(z) = Z[B_0(p)H(p)] = Z\left[\left(\frac{1 - e^{-pT}}{p}\right)H(p)\right] = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$

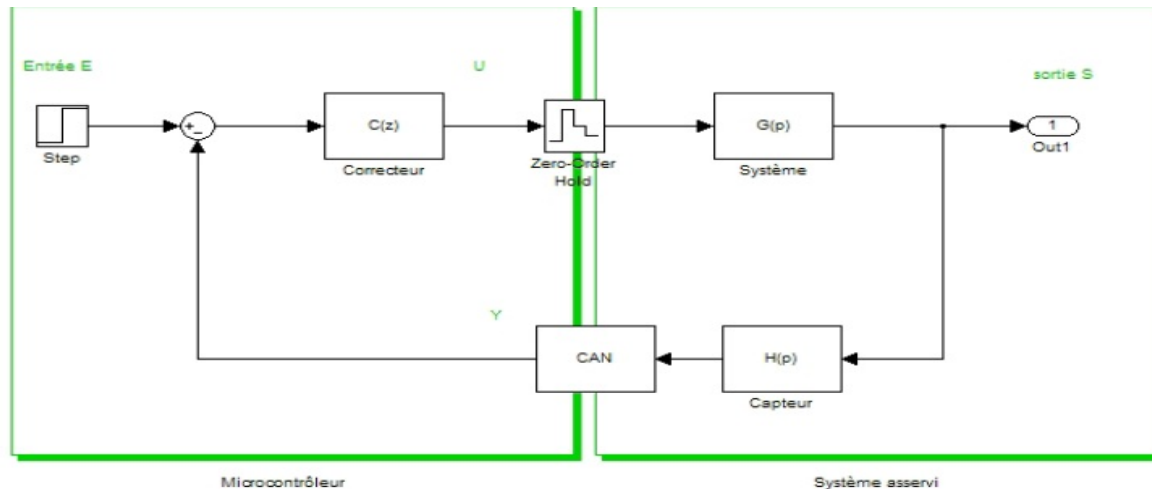
$$G(z) = (1 - z^{-1})Z\left[\frac{H(p)}{p}\right]$$

– Table des transformées en  $z$  des systèmes classiques précédés d'un bloqueur d'ordre 0.  $T_e$  est la période d'échantillonnage et  $a = e^{-T_e/\tau}$

Transmittance en $p$	Transmittance en $z$
$\frac{B_0(p)}{p}$	$\frac{T_e}{z-1}$
$\frac{B_0(p)}{1+\tau p}$	$\frac{1-a}{z-a}, a = e^{-T_e/\tau}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau p)}$	$\frac{(T_e - \tau(1-a))z - aT_e + \tau(1-a)}{z^2 - (1+a)z + a}$
$\frac{B_0(p)}{p^2(1+\tau p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (2+a)z^2 + (1+2a)z - a}$ $b_2 = \frac{T_e^2}{2} + T_e \tau + \tau^2(1-a)$ $b_1 = (\frac{T_e^2}{2} - 2\tau^2)(1-a) + T_e \tau(1+a)$ $b_0 = \tau^2(1-a) - aT_e(\tau + \frac{T_e}{2})$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_1 z + b_0}{z^2 - (e^{-T_e/\tau_1} + e^{-T_e/\tau_2})z + e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2}}$ $b_1 = \frac{\tau_1(1 - e^{-T_e/\tau_1}) - \tau_2(1 - e^{-T_e/\tau_2})}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = e^{-T_e/\tau_1} e^{-T_e/\tau_2} - \frac{\tau_1 e^{-T_e/\tau_2} - \tau_2 e^{-T_e/\tau_1}}{\tau_1 - \tau_2}$

Transmittance en p	Transmittance en z
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e}{\tau} \frac{a(z-1)}{(z-a)^2}$
$\frac{B_0(p)}{(1+\tau p)^3}$	$\frac{1-a}{z-a} - \frac{T_e(2\tau+T_e)a(z-1)}{\tau^2(z-a)^2} - \frac{T_e^2 a^2(z-1)}{\tau^2(z-a)^3}$
$\frac{B_0(p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$	$\frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 - (1+a_1+a_2)z^2 + (a_1+a_2+a_1 a_2)z - a_1 a_2}$ $a_i = e^{-T_e/\tau_i}$ $b_2 = T_e - \frac{\tau_1^2(1-a_1) - \tau_2^2(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_1 = -T_e(a_1 + a_2) - \frac{\tau_1^2(1+a_2)(1-a_1) - \tau_2^2(1+a_1)(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$ $b_0 = -T_e a_1 a_2 - \frac{\tau_1^2 a_2(1-a_1) - \tau_2^2 a_1(1-a_2)}{\tau_1 - \tau_2}$
$\frac{B_0(p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$ $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ $\xi < 1$	$\frac{b_0 + b_1 z}{z^2 - 2ze^{-\xi\omega_n T_e} \cos(\omega_p T_e) + e^{-2\xi\omega_n T_e}}$ $b_0 = e^{-2\xi\omega_n T_e} + e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} - \cos(\omega_p T_e) \right)$ $b_1 = 1 - e^{-\xi\omega_n T_e} \left( \frac{\xi \sin(\omega_p T_e)}{\sqrt{1-\xi^2}} + \cos(\omega_p T_e) \right)$

# Système bouclé échantillonné



– Système bouclé échantillonné.

## Transmittances échantillonnées de systèmes bouclés

Le problème posé en figure 2.10 est qu'il n'y a pas d'échantillonneur bloqueur entre la sortie  $s$  et la transmittance  $H(p)$ . Qu'à cela ne tienne, la transmittance en boucle fermée d'un système s'écrit :

$$\text{BoucleFermée} = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{chaîne directe} \times \text{chaîne de retour}}$$

Ici

$$F(z) = \frac{C(z) \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)]}{1 + C(z) \mathcal{Z}[B_0(p)G(p)H(p)]}$$