Mise à Niveau en Mathématiques (MNM)
ESIR, 1^{ere} année

Laurent Albera

INSERM UMR 642, Laboratoire Traitement du Signal et de l'Image, F-35042 Rennes, France
Université de Rennes 1, LTSI, Campus de Beaulieu, F-35042 Rennes, France

I - Ensembles et relations

Extensionalité : un *ensemble* est uniquement déterminé par les *éléments* qu'il contient. On peut ainsi définir un ensemble par extension en listant un à un tous ses éléments, par exemple $E = \{1, 2, 3\}$. En particulier, il existe un ensemble vide $\emptyset$ qui n'a aucun élément. Si l'élément e appartient à l'ensemble E, on note $e \in E$, sinon $e \notin E$. Un ensemble à un seul élément $\{e\}$ est un singleton. Si tous les éléments de A appartiennent aussi à B, A est inclus dans B, noté $A \subseteq B$, sinon $A \not\subseteq B$.

Ensemble des parties : l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est composé des *sous-ensembles* de E, il contient en particulier la partie vide $\emptyset$ et la partie pleine E.

Ensemble union : les éléments contenus dans l'un ou l'autre forment un ensemble qu'on appelle l'union
$A \bigcup B = \{x,\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Intersection : l'ensemble des éléments de A contenus également dans B est l'intersection de A et B, noté $A \bigcap B = \{x,\ x \in A \text{ et } x \in B\}$. Deux ensembles d'intersection vide sont *disjoints*. L'union et l'intersection sont des opérations associatives, commutatives et distributives l'une par rapport à l'autre.

Différence : $A \setminus B = \{x,\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

Complémentaire : $A^{\mathsf{c}} = B \setminus A$.

Produit cartésien : $A \times B = \{(x, y),\ x \in A \text{ et } y \in B\}$. Lorsque $A = B$, on notera $A^2 = A \times A$.

Partition : Une partition d'un ensemble E est un ensemble de parties disjointes de E dont l'union (disjointe) est égale à E.

Citons trois **partitions intéressantes** d'un ensemble E :

- les singletons de E;
- la partition pleine égale à E;
- pour un ensemble $A \subseteq E$, la partition $(A, \bar{A}^E)$.

Relation binaire : Une relation binaire $\mathcal{R}$ d'un ensemble E vers un ensemble F est décrite par un sous-ensemble R du produit cartésien $E \times F$, appelé le *graphe* de la relation.

Définitions : pour $(x, y) \in R$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que x et y sont en relation. On dit alors que la relation considérée est :

- *fonctionnelle* si tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F;
- une *application* si tout élément de E est en relation avec un et un seul élément de F;

Définitions (suite) :

- *injective* si tout élément de F est en relation avec au plus un élément de E;
- *surjective* si tout élément de F est en relation avec au moins un élément de E;
- *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

Il est possible de construire **d'autres relations binaires** à partir de $\mathcal{R}$:

- la relation *réciproque* $\mathcal{R}^{-1}$ qui, pour $(x, y) \in R$, met en relation y avec x ssi x est mis en relation avec y par $\mathcal{R}$;
- la relation *composée* $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ qui, pour deux relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$, met en relation x avec z ssi il existe y tel que i) $\mathcal{R}$ met en relation x et y et ii) $\mathcal{S}$ met en relation y et z.

Définitions : une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, i.e. mettant en relation deux éléments de E, est dite :

- *réflexive* si tout élément de E est en relation avec lui-même;
- *symétrique* si, pour tout couple (x, y) de E^2, on a $x\mathcal{R}y$ ssi $y\mathcal{R}x$;
- *anti-symétrique* si, pour tout couple (x, y) de E^2, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ implique $x = y$;
- *transitive* si, pour tout triplet (x, y, z) de E^3, on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ ssi $x\mathcal{R}z$.

Relation itérée : notée $\mathcal{R}^n$, c'est la relation définie comme la composée $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} \circ \ldots \circ \mathcal{R}$ faisant intervenir n fois la relation $\mathcal{R}$.

Ensembles équipotents : deux ensembles E et F sont dits *équipotents* s'il existe une application *bijective* mettant en relation E et F.

Ensembles subpotents : un ensemble E est dit *subpotent* à un ensemble F s'il existe une application *injective* de E dans F.

Relation d'équivalence : notée $\sim$, c'est une relation définie comme *réflexive*, *symétrique* et *transitive*. La relation $x \sim y$ se lit "x est équivalent à y".

Remarque : ranger des objets par classes partageant une même caractéristique est un processus mental fondamental. Par exemple on dispose d'un certain nombre de couleurs et on attribue à chaque objet qui se présente une couleur, c'est ce qu'on appelle construire une relation d'équivalence sur un ensemble : tous les objets de la même couleur sont équivalents.

La **classe d'équivalence** d'un élement $x \in E$, notée $\bar{x} = \{z \in E,\, z \sim x\}$, est l'ensemble des éléments qui sont en relation avec x. Un élément $z \in \bar{x}$ est appelé *représentant* de la classe $\bar{x}$.

L'**ensemble quotient** d'un ensemble E désigne l'ensemble des classes d'équivalence de E, noté $E/\!\sim = \{\bar{x},\, x \in E\}$.

Remarque : l'ensemble quotient d'un ensemble E définit une partition de E.

Exemple : le sous-ensemble ♂ de l'ensemble E des êtres humains et son complémentaire ♀ induisent une relation d'équivalence, la parité. L'ensemble quotient est un ensemble à deux élements noté $\{♂, ♀\}$.

Ensemble fini : E est fini si et seulement si (ssi) E ne peut être mis en bijection avec l'une de ses parties.

Cardinal : le cardinal d'un ensemble E, noté $|E|$ ou $\sharp E$ ou encore $\mathrm{Card}(E)$, est égal à n s'il existe une bijection de E sur $[\![1, n]\!] = \{1, \ldots, n\} = [1, n] \bigcap \mathbb{N}$. Supposons A et B finis, on a :

- $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$;
- si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B)$;
- si $A \subseteq B$, alors $\mathrm{Card}(B \setminus A) = \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A)$;
- $\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B)$;
- $\mathrm{Card}(A \bigcup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \bigcap B)$.
- si B^A désigne l'ensemble des applications de A dans B, alors $\mathrm{Card}(B^A) = \mathrm{Card}(B)^{\mathrm{Card}(A)}$.

Origines :

- Mise en correspondance au XVIIè siècle entre les valeurs de deux grandeurs (astronomie);
- Etude des fonctions comme des courbes durant le XVIIè siècle;
- Leibniz est le premier à utiliser le terme de *fonction*, à le définir indépendamment de toute référence à une courbe et introduire les mots *constante* et *variable*;
- Euler utilise en 1734 pour la première fois la notation $f(x)$.

Domaine de définition : La partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle est définie la fonction f considérée est appelé domaine de définition.

Exercice : Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes a) $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$, b) $g : x \mapsto (2\sin(x) - 1)^{-1/2}$ et $h : x \mapsto \sqrt{(2x+1)/(x-2)}$.

- **Parité :** f est paire (resp. impaire) ssi son domaine de définition E est symétrique par rapport à l'origine et $\{\forall x \in E, f(-x) = f(x)\}$ (resp. $\{\forall x \in E, f(-x) = -f(x)\}$).

- **Périodicité :** f est périodique de période T ssi $\{x \in E \Rightarrow x + T \in E\}$ et $f(x+T) = f(x)$

- **Graphe :** ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$.

Question : quelles particularités ont les graphes d'une fonction paire/impaire/périodique?

- **Injective :** $f : E \to F$ injective ssi $\{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\}$, autrement dit ssi tout élément de F admet au plus un antécédent dans E par f.

- **Image de f :** partie de $\mathbb{R}$ décrite par l'ensemble des valeurs $f(x)$ quand x décrit le domaine de définition E, i.e. (c'est-à-dire) $Im(f)=\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in E, y=f(x)\}=f(E)$

- **Surjective :** $f : E \rightarrow F$ surjective ssi (si et seulement si) $Im(f)=F$, i.e. ssi tout élément de F admet au moins un antécédent dans E par f.

- **Composée :** $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$.

- **Réciproque :** $f : E \rightarrow F$ admet une fonction réciproque g ssi f est bijective, alors définie par : $g \circ f = \mathrm{Id}_F$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. On note $g=f^{-1}$.

  Question : quelle particularité a le graphe de la réciproque d'une fonction donnée?

- **Minorant de f sur E :** on appellera minorant de f sur E tout nombre réel m tel que, pour tout x dans E, $f(x)$ est supérieure à m. L'existence du nombre m permet d'affirmer que f est minorée sur E. Par ailleurs, on dira que le minorant m est atteint ssi il existe x_0 dans E tel que $m = f(x_0)$ (définitions analogues pour *majorant*).

- **Valeur absolue :** $|x|$ désigne x si $x \geq 0$ et $-x$ si $x \leq 0$.

  Pour dire que $f(x)$ approche le nombre ℓ avec une erreur maximale de ϵ, on écrira $|f(x) - \ell| < \epsilon$, ce qui équivaut à $\ell - \epsilon < f(x) < \epsilon + \ell$

- **Fonction bornée :** on dira qu'une fonction f est bornée sur E si elle est à la fois minorée et majorée sur E, i.e. s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout x dans E, $|f(x)|$ est inférieure à M.

- **Inégalité triangulaire :** $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

Exercice : En écrivant $\mathbb{R}$ comme l'union de trois intervalles, simplifier la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-6x+9}$

- **Minimum local :** f présente un minimum local en x_0 ssi il existe un voisinage de x_0 inclu dans E tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout élément x de ce voisinage (définition analogue pour *maximum local*).

- **Sens de variation :** f sera dite *croissante* sur l'intervalle I ssi $\left\{\forall (x,y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)\right\}$ ou ssi son taux d'accroissement $\mathrm{Tx} = (f(x) - f(y)) \,/\, (x-y)$ est positif ou nul (définition analogue d'une fonction *décroissante*).

IV - Limites, continuité, dérivation pourquoi?

Besoin : calculer la valeur d'une fonction f pour une valeur donnée x_0 d'une certaine variable.

- Calcul exact ssi f est un polynôme;
- Calcul approché sinon et donc nécessité de maîtriser l'erreur de calcul commise.

Motivations fondamentales des trois chapitres à venir :

- **(limites)** quelle latitude α avons-nous sur la variable x au voisinage de x_0 pour que $f(x)$ approche ℓ avec une incertitude maximale de ϵ;
- **(continuité)** approcher autour d'une valeur x_0 la fonction f par une fonction constante;
- **(dérivabilité)** approcher la fonction f au voisinage de x_0 par un morceau de droite;
- **(formule de Taylor)** approcher la fonction f par un polynôme de degré n (erreur commise? hyp. sur f?)

IV.1 - Notion de limites

Intervalle : un intervalle de $\mathbb{R}$ est formé de tous les nombres réels compris, au sens large ou strict, entre deux réels appelés ses extrémités. Ainsi un intervalle est caractérisé par l'absence de "trous" : si l'on prend deux éléments x et y d'un intervalle, tout réel compris entre x et y appartient aussi à l'intervalle.

Voisinage d'un point : on dira que I est un voisinage du point x_0 de E si I est un intervalle ouvert de E centré sur x_0, i.e. s'il existe un nombre réel strictement positif ρ, appelé rayon de l'intervalle, tel que $I =]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.

Limite finie de f en x_0 (fini) : on dit que "la fonction f tend vers le nombre ℓ quand x tend vers x_0" lorsque pour tout voisinage J de ℓ il existe au moins un voisinage I de x_0 tel que, pour tout x dans I, $f(x)$ appartient à J. On appelle ℓ la limite de f quand x tend vers x_0, et l'on note $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Propriétés fondamentales des limites finies :

- si f admet une limite ℓ en x_0, alors ℓ est l'*unique* limite de f au voisinage de x_0;
- si f admet une limite ℓ en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0;
- si f admet une limite ℓ en x_0 et si dans un voisinage de x_0 la fonction f est positive ou nulle, alors ℓ est positive ou nulle;

Théorème d'encadrement : soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0, telles que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout x de ce voisinage. Si f et g admettent la même limite ℓ quand x tend vers x_0, alors h tend aussi vers ℓ quand x tend vers x_0.

Opérations sur les limites finies : soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0, sauf peut-être en x_0. Si f et g admettent respectivement les limites ℓ_1 et ℓ_2 quand x tend vers x_0, alors

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1+\ell_2$;
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)*g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) * \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_1*\ell_2$;
- si f est bornée et si $\ell_2=0$, alors $\lim_{x\to x_0}(f(x)*g(x))=0$;
- si $\ell_1\neq 0$, alors la fonction $1/f$ (resp. g/f) est définie au voisinage de x_0 (sauf peut-être en x_0) et admet pour limite $1/\ell_1$ (resp. ℓ_2/ℓ_1) quand x tend vers x_0;
- si g est continue en $x=\ell_1$, alors la composée $g\circ f$ tend vers $g(\lim_{x\to x_0} f(x))=g(\ell_1)$ quand x tend vers x_0.

Autres types de limites :

- (limite à droite de x_0) on dit que "f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite" si f tend vers ℓ lorsque x tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ (définition analogue pour *limite à gauche*);

- (limite *finie* de f en l'*infini*) on dit que "f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$" lorsque pour tout voisinage J de ℓ il existe au moins un nombre réel A tel que, pour tout x strictement supérieur à A, $f(x)$ appartient à J;

- (limite *infinie* de f en x_0 *fini*) on dit que "f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0" lorsque pour tout nombre positif non nul B il existe au moins un voisinage I de x_0 tel que, pour tout x dans I, $f(x)$ est strictement supérieure à B.

- (limite *infinie* de f en l'*infini*) on dit que "f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$" lorsque pour tout nombre positif non nul B il existe au moins un nombre réel A tel que, pour tout x strictement supérieur à A, $f(x)$ est strictement supérieure à B.

Exercice : montrer que $f(x)=\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}$ tend vers 3 quand x tend $+\infty$.

Formes indéterminées :

- sommes de limites infinies du type "$+\infty + -\infty$";
- produits du type "$0 * \pm\infty$";
- quotients du type "$0/0$", "$\pm\infty/\pm\infty$".

IV.1 - Notion de limites

Fonctions équivalentes : deux fonctions f et g définies et non identiquement nulles dans un voisinage de x_0 (éventuellement l'infini) sont dites équivalentes s'il existe une fonction ϵ définie dans un voisinage de x_0 (ou de l'infini) tendant vers 0 quand x tend vers x_0 (ou l'infini) telle que $f(x) = g(x) * (1 + \epsilon(x))$. On note alors $f \sim g$.

Opérations autorisées : si $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ au voisinage de x_0 (ou de l'infini), alors $f_1 * f_2 \sim g_1 * g_2$ et $f_1/f_2 \sim g_1/g_2$.

Exemples : au voisinage de 0, nous avons

- $\sin(x) \sim x \qquad \ln(1+x) \sim x \qquad e^x - 1 \sim x$;
- $x - \sin(x) \sim x^3/6 \qquad 1 - \cos(x) \sim x^2/2$;
- polynôme ∼ terme de plus haut degré;
- fraction rationnelle ∼ rapport des termes de degré maximal.

Exercice :

- Montrer, sans calcul de dérivée, que pour tout $x \in [-1/3, 1/3]$ on a :

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x}{2}-\frac{x^2}{6} \leq \sqrt{1+x}-1 \leq \frac{x}{2}$$

(indication : utiliser les identités remarquables)

- Montrer que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)$ existe et la calculer (indication : utiliser le fait qu'une fonction admet une limite en un point si elle admet la même limite à gauche et à droite de ce point).

Continuité en un point : soit f une fonction définie au voisinage de x_0, on dit que f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Propriétés fondamentales :

- si f est continue en x_0, alors f est bornée au voisinage de x_0 (et non nécessairement sur le domaine de définition);
- si f est continue en x_0 et $f(x_0)$ strictement positive (resp. négative), alors reste strictement positive (resp. négative) au voisinage de x_0;
- si f et g sont continues en x_0, alors $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0;
- si f et g sont respectivement continues en x_0 et $g(x_0)$, alors $f \circ g$ est continue en x_0.

IV.2 - Notion de continuité

Prolongement par continuité :

- nécessité parfois de travailler avec une fonction f i) définie au voisinage d'un point x_0 excepté au point x_0 et ii) admettant une limite ℓ au point x_0;
- on dit alors que l'on prolonge en $x = x_0$ par continuité la fonction f en posant $f(x_0) = \ell$;
- la nouvelle fonction est souvent notée f par abus de notation.

Exemple :

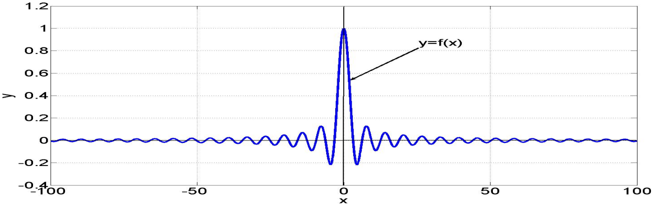

Figure: graphe d'une fonction prolongée par continuité en 0

Continuité à gauche d'un point : soit f une fonction définie sur $]x_0 - \rho, x_0]$ où ρ est un nombre strictement positif, on dit que f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Continuité à droite d'un point : soit f une fonction définie sur $[x_0, x_0 + \rho[$ où ρ est un nombre strictement positif, on dit que f est continue à droite de x_0 si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Proposition : soit f une fonction définie au voisinage du point x_0, f est continue en x_0 ssi f est continue à gauche et à droite de x_0.

Continuité sur un intervalle ouvert : soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$ de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue sur $]a, b[$ si f est continue en chaque point de $]a, b[$.

Continuité sur un intervalle fermé : soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, on dit que f est continue sur $[a, b]$ si f est continue en chaque point de $]a, b[$, continue à droite de a et à gauche de b.

Théorème des valeurs intermédiaires (1$^{\text{er}}$ énoncé) : soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.

Théorème (2$^{\text{eme}}$ énoncé) : soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si a et b sont deux points de I alors tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un point c de I, compris entre a et b.

Théorème (3$^{\text{eme}}$ énoncé) : l'image d'un intervalle par une fonction continue est encore un intervalle.

Théorème : une fonction continue sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ est bornée et y atteint ses bornes.

Dérivabilité en un point :

- une fonction f est dite dérivable au point x_0 si le taux d'accroissement $T(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ admet une limite finie quand x tend vers x_0;
- cette limite s'appelle dérivée de f en x_0 et se note $f'(x_0)$ ou encore $\frac{df}{dx}(x_0)$;

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Interprétation :

- (géométrique) pente de la tengente en x_0 au graphe de f dont l'équation est donnée par $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;
- (cinématique) vitesse instantanée à un instant x_0.

Théorèmes :

- une fonction dérivable en un point est continue en ce point;
- une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle admet une dérivée à gauche, une dérivée à droite et que ces deux dérivées sont égales.

Dérivée d'ordre n : on définit par récurrence la dérivée d'ordre n d'une fonction f comme étant la dérivée de la dérivée d'ordre $n-1$ de f et on la note $f^{(n)}$ ou bien $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Propriétés :

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
- $(\mathrm{C^{te}} f)'(x) = \mathrm{C^{te}} f'(x)$;

Propriétés (suite) :

- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$;
- $(f/g)'(x) = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g(x)^2$ si $g(x) \neq 0$;
- $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$ si $f'(x) \neq 0$;
- Formule de Leibnitz : $(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\, f^{(n-p)}\, g^{(p)}$ où $\mathrm{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ vérifie la relation $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-1}^p$.

Dérivées usuelles :

- $(\mathrm{C}^{\mathrm{te}})' = 0$;
- $(\sin(f(x)))' = f'(x)\, \cos(f(x))$;
- $(\cos(f(x)))' = -f'(x)\, \sin(f(x))$;
- $(f(x))^m)' = m\, f'(x)\, f(x)^{m-1}$;

Dérivées usuelles :

- $(\ln(f(x)))' = f'(x)/f(x)$;
- $(\exp(f(x)))' = f'(x)\,\exp(f(x))$;
- $(\tan(f(x)))' = f'(x)\,(1+\tan(f(x))^2) = f'(x)/\cos(f(x))$;
- $(\arccos(f(x)))' = -f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2}$;
- $(\arcsin(f(x)))' = f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2}$;
- $(\arctan(f(x)))' = f'(x)/(1+f(x)^2)$.

Exercice :

- démontrer l'égalité $2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) = \sin(p) - \sin(q)$
- utiliser la valeur de $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x$ et la continuité de cos sur $\mathbb{R}$, pour montrer que la dérivée de sin sur $\mathbb{R}$ est cos.

IV.2 - Notion de dérivabilité

Dérivabilité sur un intervalle : définition analogue à celle de continuité.

Fonction de classe C^k : on dit qu'une fonction est de classe C^k si elle est dérivable k fois de suite et si sa dérivée d'ordre k est continue. Une fonction indéfiniment dérivable sera dite de classe C^∞ (ex: les fonctions cos, sin, ln et exp).

Primitive : soit f une fonction définie sur un intervalle I, on appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème de Rolle : soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un point c appartenant à $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis : soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Interprétation : il existe au moins un point C $(c, f(c))$ du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) donnée par A $(a, f(a))$ et B $(b, f(b))$.

Inégalité des accroissements finis : soit f dérivable sur un intervalle I tel que f' est bornée sur I, autrement dit il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq M$. Alors, pour tous x et y de I, on a $|f(y) - f(x)| \leq M|y-x|$.

Interprétation cinématique : un mobile se déplaçant sur une trajectoire avec une vitesse inférieure à $\mathrm{V}_{\max}$ aura parcouru entre les instants x et y une distance inférieure à $(y-x)\mathrm{V}_{\max}$.

Théorème : une fonction dérivable sur un intervalle[1] y est constante ssi sa dérivée y est identiquement nulle.

Théorème : une fonction dérivable sur un intervalle y est croissante (au sens large) ssi sa dérivée y est positive ou nulle.

Théorème : soit f une fonction dérivable en un point x_0, si f admet un extremum (minimum ou maximum) local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque : en pratique, les extrema locaux sont à chercher parmi les points

- où f est dérivable, de dérivée nulle;
- où f n'est pas dérivable (ex: la fonction $f : x \longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0 et pourtant y est minimale).

[1] L'ensemble de points considérés doit absolument être un intervalle, par exemple une union disjointe d'intervalles ne conviendrait pas.

Théorème (formule de Taylor) : soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle I, alors pour tous points a et x de I, il existe un réel β strictement compris entre a et x tel que :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p + \frac{f^{(n+1)}(\beta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

où :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Remarque : β dépend à la fois de a et de x, mais aussi de n. Cette formule généralise le théorème des accroissements finis (cas où $n=0$) et se démontre à l'aide du théorème de Rolle.

Remarque : on écrit souvent la formule de Taylor-Lagrange en prenant $a = 0$. Le nombre $|\beta|$ devenant alors inférieur à $|x|$, β peut alors s'écrire sous la forme $\beta = \theta x$ où $\theta \in]0, 1[$. Sous ces conditions, la formule prend alors le nom de formule de MacLaurin.

Formule de MacLaurin : soit f une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur un intervalle I contenant 0, alors pour tout point x de I, il existe un réel θ strictement compris entre 0 et 1 tel que :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} x^p + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Exercice : écrire les formules de MacLaurin pour les fonctions cosinus, exponentielle et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Notion de DL : soit I un intervalle ouvert contenant le point x_0 et soit f une fonction à valeurs réelles continue en x_0. f possède un Développement Limité (DL) à l'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) au point a s'il existe un polynôme P à coefficients réels $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\begin{aligned}
\epsilon(x) &= \left(f(x) - P(x)\right)/(x - x_0)^n \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \\
\epsilon(x) &= \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) - \ldots - a_n(x - x_0)^n}{(x - x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0
\end{aligned}$$

Le DL de f à l'ordre n au point x_0 s'écrit alors :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

Remarque : par passage à la limite quand x tend vers x_0 et par continuité de f en x_0, on a $a_0 = f(x_0)$.

Thorème d'unicité : si la fonction f possède un DL à l'ordre n au point x_0 alors ce DL est unique.

Corollaire : soit $f(x) = P(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$ le DL de la fonction f à l'ordre n au point x_0. Si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors le polynôme P est lui aussi pair (respectivement impair).

Propositions : soit f continue en un point x_0 de $\mathbb{R}$, alors

- le DL de f à l'ordre 0 au point x_0 est $f(x) = f(x_0) + \epsilon(x)$ où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0;
- la fonction f est dérivable en x_0 ssi f possède un DL à l'ordre 1 de la forme $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x) + (x - x_0)\epsilon(x)$ où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Théorème : soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un point de I. La fonction f admet pour DL à l'ordre n au point x_0 :

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

Remarques :

- si les coefficients du DL d'une fonction de classe C^n sont ceux de la formule de Taylor au point x_0, la connaissance du DL ne permet pas à lui seul de connaître le reste de la formule de Taylor, et donc d'encadrer explicitement la fonction sur un intervalle donné;
- attention, une fonction peut posséder un DL à l'ordre n en un point et ne pas être de classe C^n en ce point : de manière générale, ne pas dériver les DL.

Exercice : soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=0$. Calculer la limite de $(f(x)+f(-x))/x^2$ quand x tend vers 0.

Proposition : soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit F une primitive de f. Si f admet au point x_0 le DL d'ordre n suivant :

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\epsilon(x)$$

alors le DL de F à l'ordre $n+1$ au point x_0 est donné par :

$$F(x)=F(x_0)+a_0(x-x_0)+a_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+a_2\frac{(x-x_0)^3}{3}+\\ \ldots+a_{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n}+a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+(x-x_0)^{n+1}\epsilon(x)$$

DL au point 0 de fonctions usuelles :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\
&\qquad \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Exercice : déterminer le DL de la fonction arctangente à l'ordre n en 0.

Remarque : en un point donné, des fonctions différentes peuvent admettre, pour tout n, le même développement limité à l'ordre n.

Proposition (somme de DL) : soient f_1 et f_2 deux fonctions avec pour DL respectifs à l'ordre n au point x_0, $f_1(x) = P_1(x) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x)$ et $f_2(x) = P_2(x) + (x - x_0)^n \epsilon_2(x)$. Le DL à l'ordre n au point x_0 de la fonction $f_1 + \lambda f_2$ pour tout nombre réel λ est donné par :

$$(f_1 + \lambda f_2)(x) = (P_1 + \lambda P_2)(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Hypothèses : soient f_1 et f_2 deux fonctions avec pour DL respectifs à l'ordre n au point x_0, $f_1(x) = P_1(x) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x)$ et $f_2(x) = P_2(x) + (x - x_0)^n \epsilon_2(x)$.

Proposition (produit de DL) : le DL à l'ordre n au point x_0 du produit $f_1 f_2$ est donné par :

$$(f_1 f_2)(x) = T_n(P_1 P_2)(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où $T_n(P)$ est le polynôme P tronqué à l'ordre n et où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Proposition (composée de DL) : si $f_2(x_0) = x_0$, alors le DL à l'ordre n au point x_0 de la composée $f_1 \circ f_2$ est donné par :

$$(f_1 \circ f_2)(x) = T_n(P_1 \circ P_2)(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Proposition (quotient de DL) : soient f_1 et f_2 deux fonctions admettant respectivement pour DL à l'ordre n au point x_0, $f_1(x) = P_1(x) + (x - x_0)^n \epsilon_1(x)$ et $f_2(x) = P_2(x) + (x - x_0)^n \epsilon_2(x)$. Si le nombre $f_2(x_0)$ est non nul, alors le DL à l'ordre n au point x_0 de la fonction f_1/f_2 est donné par :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = Q(x) + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division euclidienne de $P1$ par P_2 (selon les puissances croissantes) et où $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0.

Exercice : calculer le DL de la fonction tangente à l'ordre 5 au point 0.

"L'application la plus simple de la notion d'intégrale est la quadrature[2] des domaines plans. A cause de cette application, on fait souvent remonter la notion d'intégrale définie à Archimède[3] et à la quadrature de la parabole."

Henri Léon Lebesgue[4] (1875-1941), "Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives", 1904.

Questions : Qu'est-ce que l'intégrabilité d'une fonction? Sous quelle(s) condition(s)?

---

[2] Calcul de l'aire d'une figure plane.

[3] Grand scientifique grec de l'Antiquité (287 av. JC - 212 av. JC), à la fois physicien, mathématicien et ingénieur.

[4] Grand mathématicien français de la première moitié du vingtième siècle, il révolutionne et généralise le calcul intégral.

Théorème : soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout ϵ positif, il existe une subdivision $d = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ de $[a, b]$ et des nombres m_n et M_n tels que $m_n \leq f(x) \leq M_n$ sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ et vérifiant :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{N} M_n(x_{n+1} - x_n) - \sum_{n=1}^{N} m_n(x_{n+1} - x_n) \leq \epsilon$$

Remarque : ce théorème donne une condition suffisante simple d'intégrabilité de la fonction f. En effet, il assure que la borne supérieure s des sommes $\sum m_n(x_{n+1} - x_n)$ est égale à la borne inférieure S des sommes $\sum M_n(x_{n+1} - x_n)$, ces bornes étant calculées sur toutes les subdivisions possibles de $[a, b]$ et toutes les valeurs possibles de m_n et M_n.

Définitions :

- cette borne commune $\mathcal{A}$ (égale à s et S) s'appelle intégrale de f entre a et b et se note :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx$$

  écriture dans laquelle le signe d'intégration est le signe de sommation "passé à la limite" et et où dx symbolise l'accroissement $x_{n+1} - x_n$;

- on appelle somme de Riemann attachée à la subdivision $d = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ de $[a, b]$ toute somme $\sum_{n=1}^{N} f(y_n)(x_{n+1} - x_n)$ où y_n est un point de $[x_n, x_{n+1}]$.

Théorème : toute somme de Riemann d'une fonction f continue converge vers l'intégrale de f lorsque le pas de la subdivision considérée tend vers 0.

Remarque : si le pas tend vers 0, alors N tend vers $+\infty$.

Question : peut-on définir l'intégrabilité d'une fonction f bornée sur $[a, b]$, non nécessairement continue sur $[a, b]$?

Fonction en escalier : on dira qu'une fonction ϕ est en escalier sur $[a, b]$ quand il existe une subdivision $d = \{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ de $[a, b]$ telle que ϕ est constante sur chaque intervalle $[x_n, x_{n+1}[$.

Proposition : soit ϕ une fonction en escalier sur $[a, b]$ définie par $\phi(x) = \alpha_n$ pour tout x dans $[x_n, x_{n+1}[$, où α_n est une constante de $\mathbb{R}$ et $\{x_1, x_2, \ldots, x_{N+1}\}$ une subdivision de $[a, b]$. Alors l'intégrale de ϕ sur $[a, b]$ est égale à $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n(x_{n+1} - x_n)$.

Riemann-intégrable : une fonction bornée sur $[a, b]$ est dite Riemann-intégrable sur $[a, b]$ quand pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier ϕ_1 et ϕ_2 telles que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $\phi_1(x) \leq f(x) \leq \phi_2(x)$ et $\int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x))\, dx < \epsilon$.

Intégrale d'une fonction : l'intégrale de f sur $[a, b]$ est alors l'unique nombre réel $\mathcal{A}$ tel que $\int_a^b \phi_1(x)dx \leq \mathcal{A} \leq \int_a^b \phi_2(x)dx$ pour toutes les fonctions en escalier ϕ_1 et ϕ_2 vérifiant $\phi_1(x) \leq f(x) \leq \phi_2(x)$ sur $[a, b]$.

Remarque : $\mathcal{A}$ est alors la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier plus petites que f ou la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier plus grandes que f;

fonction continue par morceaux : une fonction est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision de $a_1 = a < a_2 < \ldots < a_P = b$ de $[a, b]$ telle que la fonction f est continue sur chaque intervalle ouvert $]a_p, a_{p+1}[$ et possède une limite à droite et à gauche de chaque point a_p.

Exemple de fonction Riemann-intégrable : une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ et son intégrale est la somme de ses intégrales sur les segments $]a_p, a_{p+1}[$.

VI.3 - Propriétés des fonctions intégrables

Inégalité de la moyenne[5] : si m et M sont respectivement un minorant et un majorant de f, alors on a :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Positivité : si $f(x)$ est positive ou nulle pour tout x de $[a,b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ est positive ou nulle.

Relation de Chasles : soit c un point de $[a,b]$. la fonction f est intégrable sur $[a,b]$ ssi elle est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$, et l'on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

[5] l'interprétation géométrique est claire : l'aire sous la courbe est plus grande que l'aire d'un rectange "sous la courbe" et plus petite que l'aire d'un rectangle "au-dessus de la courbe".

Remarque : par convention, et pour pouvoir écrire la relation de Chasles dans tous les cas on pose :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$.

Linéarité : soit λ un réel et soient f_1 et f_2 deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors la somme $f_1 + \lambda f_2$ est intégrable sur $[a, b]$ et l'on a :

$$\int_a^b (f_1(x) + \lambda f_2(x))\, dx = \int_a^b f_1(x)dx + \lambda \int_a^b f_2(x)dx$$

Relation d'ordre[6] : soient f_1 et f_2 deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ avec $a < b$ et $f_1(x) \leq f_2(x)$ pour tout x de $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx$$

Valeur absolue[7] : soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$, alors la fonction $|f|$ l'est également et on a :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Formule de la moyenne : soient f une fonction continue sur $[a, b]$, il existe un nombre c compris entre a et b tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

[6] Démonstration basée sur la linéarité et la positivité de l'intégrale.

[7] Démonstration basée sur la double inégalité $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$

Théorème : soient I un intervalle non réduit à un point, a un point de I et f une fonction continue sur I. La fonction F définie pour tout x de I par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est alors une fonction dérivable sur I, de dérivée égale à f. C'est donc la primitive de f nulle en a.

Théorème : soit f une fonction continue sur $[a, b]$, si F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$ alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad \left(= [F(x)]_a^b\right)$$

VI.5 - Outils d'intégration

Intégration par parties : soient f_1 et f_2 deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[a, b]$, on a alors :

$$\int_a^b f_1(x) f_2'(x) dx = [f_1(x) f_2(x)]_a^b - \int_a^b f_1'(x) f_2(x) dx$$

Exemple : calculer la quantité $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} x \cos(x) dx$.
On dérive le polynôme x pour en abaisser le degré. On pose donc :

$$\begin{array}{ll} f_2'(x) = \cos(x) & f_1(x) = x \\ f_2(x) = \sin(x) & f_1'(x) = 1 \end{array}$$

ce qui nous donne :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} & = & [x \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x) dx \\ & = & [x \sin(x)]_0^{\pi/2} + [\cos(x)]_0^{\pi/2} \\ \mathcal{A} & = & \pi/2 - 1 \end{array}$$

Exercice : démontrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\int_1^{\mathrm{e}} x^2 \ln(x)dx &= \frac{2\exp(3)+1}{9}\\ \int_1^{\sqrt{3}} \arctan(x)dx &= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Changement de variable : soient f_1 une fonction dérivable sur $[a, b]$ et f_2 une fonction continue sur un intervalle contenant l'image de $[a, b]$ par f_1, on a alors :

$$\int_a^b f_2(f_1(t))\, f_1'(t)dt = \int_{f_1(a)}^{f_1(b)} f_2(x)dx$$

Utilisation du changement de variable :

$$\int_a^b f_2(f_1(t))\, f_1'(t)dt = \int_{f_1(a)}^{f_1(b)} f_2(x)dx$$

- lorsque l'intégrale de gauche est celle que l'on veut réécrire sous la forme de celle de droite, il faut alors :
  1. poser $x = f_1(t)$ et $dx = f_1'(t)dt$,
  2. remplacer les bornes d'intégration a et b par $f_1(a)$ et $f_1(b)$;
- lorsque l'intégrale de droite est celle que l'on veut réécrire sous la forme de celle de gauche, il faut alors :
  1. choisir une fonction f_1 bijective de classe C^1,
  2. poser $x = f_1(t)$ et remplacer dx par $f_1'(t)dt$,
  3. remplacer les bornes d'intégration $\alpha = f_1(a)$ et $\beta = f_1(b)$ par $f_1^{-1}(\alpha)$ et $f_1^{-1}(\beta)$, où f_1^{-1} est l'application réciproque de f_1.

Exemple : calculer la quantité $\mathcal{A} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

C'est le second cas de figure décrit précédemment, à savoir il faut trouver une application f_1 bijective de classe C^1 afin de poser $x = f_1(t)$ et pouvoir passer de l'intégrale de droite à l'intégrale de gauche sensée être plus facile à calculer :

1. on choisit $f_1(t) = 2\sin(t)$, la fonction f_1 est bijective et de classe C^1 sur l'intervalle $[\pi/6, \pi/3]$ dont l'image par f_1 est l'intervalle d'intégration $[1, \sqrt{3}]$;
2. on pose $x = 2\sin(t)$ et on remplace dx par $2\cos(t)dt$;
3. on remplace les bornes d'intégration $\alpha = 1$ et $\beta = \sqrt{3}$ par $f_1^{-1}(\alpha) = \pi/6$ et $f_1^{-1}(\beta) = \pi/3$, où $f_1^{-1}(x) = \arcsin(x/2)$;

Exemple (suite) : on obtient alors l'intégrale suivante plus facile à calculer :

$$\mathcal{A} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8\sin^2(t)\cos(t)dt}{\sqrt{4-4\sin^2(t)}} = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{8\sin^2(t)\cos(t)dt}{2\sqrt{\cos^2(t)}}$$

En effet, on a :

$$\mathcal{A} = 4\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)\cos(t)dt}{|\cos(t)|}$$

et comme la fonction cosinus est positive sur l'intervalle $[\pi/6, \pi/3]$, on obtient :

$$\mathcal{A} = 4\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin^2(t)\cos(t)dt}{\cos(t)} = 4\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin^2(t)dt$$

Exemple (suite) : il reste alors à linéariser la fonction sinus au carré en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned}
\sin^2(t) &= \left(\frac{\exp(\imath t)-\exp(-\imath t)}{2\imath}\right)^2 \\
&= \frac{\exp(\imath t)^2-2\exp(\imath t)\exp(-\imath t)+\exp(-\imath t)^2}{-4} \\
&= \frac{\exp(\imath 2t)-2+\exp(-\imath 2t)}{-4} \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\exp(\imath 2t)+\exp(-\imath 2t)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\cos(2t)\right)
\end{aligned}$$

d'où :

$$\mathcal{A} = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1-\cos(2t))\,dt = 2\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \pi/3$$

Exercice : démontrer l'égalité suivante en posant $x = \tan(t)$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$$

Exercice : intégrer une fraction rationnelle ou bien un polynôme de cosinus ou de sinus peut nécessiter de faire le changement de variable $x = \tan(t/2)$, démontrer qu'il s'ensuit :

$$\cos(t) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad \tan(t) = \frac{2x}{1-x^2} \qquad \sin(t) = \frac{2x}{1+x^2}$$

et :

$$dx = \frac{1}{2}(1+x^2)dt$$

On appelle **fraction rationnelle** toute fonction f définie par une relation de la forme $f(x) = N(x)/D(x)$ où N et D sont des polynômes à coefficients réels. Rappelons les primitives de quelques fractions rationnelles de référence :

$$\begin{aligned}
\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \ln\left(|f(x)|\right) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \\
\int \frac{dx}{x-\alpha} &= \ln\left(|x-\alpha|\right) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \\
\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} &= -\frac{1}{x-\alpha} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \\
\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} &= -\frac{1}{(n-1)\,(x-\alpha)^{n-1}} + \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \\
\int \frac{dx}{x^2+\alpha^2} &= \frac{1}{\alpha}\arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}
\end{aligned}$$

On appelle **élément simple sur $\mathbb{R}$** une fraction rationnelle d'un des deux types suivants :

- type "racine réelle" : $\frac{a}{(x-\alpha)^n}$ où $(a, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^+$;
- type "racines complexes conjuguées" : $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$ où $(a, b, p, q) \in \mathbb{R}^4$ tels que $p^2 - 4q < 0$ et $n \in \mathbb{N}^+$.

Théorème : toute fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme (appelé partie entière de la fraction) et d'un certain nombre d'éléments simples dont le type est déterminé par le dénominateur de la fraction.

La partie entière (non nulle si le degré du numérateur de la fraction est supérieur ou égal à celui du dénominateur) s'obtient en effectuant la division euclidienne (selon les puissances décroissantes) du numérateur par le dénominateur.

Exemple : soit $F(x)$ la fraction définie par :

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{4x^8 + 3x^5 + x^2 - 3}{x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2}$$

La division euclidienne du numérateur par le dénominateur permet d'écrire :

$$F(x) = 4x^3 + 4x^2 + 12x + 27 + \underbrace{\frac{51x^4 + 54x^3 + 8x^2 - 51x - 57}{x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 2}}_{R(x)}$$

Il reste alors à décomposer la fraction $R(x)$ (dont le degré du numérateur est strictement plus petit que celui du dénominateur) en une somme d'éléments simples.

Théorème : une fraction rationnelle $R(x)$ dont le dénominateur est du second degré et dont le numérateur est au plus du premier degré s'écrit de façon unique sous l'une des trois formes suivantes :

- $R(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$ lorsque le dénominateur n'a pas de racines réelles, i.e. lorsque le discriminant $\Delta = p^2 - 4q < 0$;
- $R(x) = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$ lorsque le dénominateur a deux racines réelles distinctes, i.e. lorsque $\Delta = p^2 - 4q > 0$;
- $R(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha}$ lorsque le dénominateur admet une racine double réelle, i.e. lorsque $\Delta = p^2 - 4q = 0$.

Premier cas ($\Delta < 0$), on réécrit $R(x)$ sous la forme suivante :

$$R(x) = \frac{a}{2} \times \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{b-ap/2}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}$$

On peut alors intégrer chacune des deux fractions rationnelles :

$$\int R(x)dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx \quad + \quad (b-ap/2)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}$$

en utilisant les primitives de deux fractions de référence rappelées en début de section, ce qui nous donne :

$$\int R(x)dx = \frac{a}{2}\ln\left(\left|x^2+px+q\right|\right) \quad + \quad \frac{b-ap/2}{\sqrt{q-p^2/4}} \times \arctan\left(\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}}\right) + \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$$

Attention, le nombre $q-p^2/4$ est-il positif et non nul? le cas échéant, pourquoi?

Exercice : calculer une primitive des fractions suivantes :

$$R_1(x) = \frac{2x+1}{3x^2+3x+9} \qquad R_2(x) = \frac{1}{x^2+4x+7}$$
$$R_3(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$$

Deuxième cas ($\Delta > 0$), on réécrit $R(x)$ sous la forme :

$$R(x) = \frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

où A et B sont deux constantes réelles à identifier. En particulier, le coefficient A peut s'obtenir en multipliant de part et d'autre de l'égalité par $x-\alpha$ et en prenant $x=\alpha$ dans l'égalité. Le coefficient B s'obtient de la même manière mais en multipliant par $x-\beta$ et en posant $x=\beta$.

Exercice : calculer une primitive de la fraction suivante :

$$R_4(x) = \frac{x+2}{x^2 - 3x - 4}$$

Troisième cas ($\Delta = 0$), on réécrit $R(x)$ sous la forme :

$$R(x) = \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha}$$

où A et B sont deux constantes réelles à identifier. En particulier, le coefficient A peut s'obtenir en multipliant de part et d'autre de l'égalité par $(x-\alpha)^2$ et en prenant $x = \alpha$ dans l'égalité. Le coefficient B s'obtient en multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini.

Exercice : calculer une primitive de la fraction suivante :

$$R_5(x) = \frac{3x+1}{x^2 + 2x + 1}$$

Définitions :

- **Une suite est** une application $U : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le nombre $U(n)$ est noté U_n et est dit être un *terme* de la suite. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on dit que (U_n) est une suite de nombres complexes.

- Une suite (U_n) de *nombres réels* est dite **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que $U_n \leq M$ quel que soit n (définition analogue pour une suite *minorée*).

- Une suite (U_n) de *nombres réels ou complexes* est dite **bornée** si la suite $(|U_n|)$ est majorée.

- Une suite (U_n) de *nombres réels* est dite **croissante (resp. strictement croissante)** si l'on a $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} > U_n$) quel que soit n (définition analogue pour une suite décroissante).

Propriétés :

- **La somme** de deux suites (U_n) et (V_n) est la suite $(U_n + V_n)$.

- Si λ apparatient à $\mathbb{K}$, alors **le produit** de (U_n) par λ est la suite $(\lambda * U_n)$.

- **Le produit** de deux suites (U_n) et (V_n) est la suite $(U_n * V_n)$.

Remarque : pour montrer qu'une suite (U_n) est croissante, on peut vérifier que l'on a $U_{n+1} \geq U_n$ pour tout n, ou de manière équivalente, si tous ses *termes sont positifs*, que l'on a $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$.

Exercice : la suite (U_n) où $U_n = \frac{n}{2^n}$ est-elle décroissante? Est-elle bornée?

Définition : on dit que la suite (U_n) est convergente s'il existe un nombre fini ℓ appartenant à $\mathbb{K}$ tel que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\{\forall n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| < \epsilon\}$. On note $\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$.

Propriété : une suite convergente admet *une et une seule* limite.

Définition : la suite (U_n) est dite divergente si $\forall A > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\{\forall n \geq N \Rightarrow U_n > A$ ou $U_n < -A\}$. On note $\lim_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$.

Propositions :

- une suite convergente est bornée;
- soit (U_n) une suite bornée et (V_n) une suite convergeant vers 0. La suite $(U_n * V_n)$ converge alors vers 0;
- soient (U_n) et (V_n) deux suites convergentes de nombres réels. Si l'inégalité $U_n \leq V_n$ est vraie quel que soit n, on a alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \leq \lim_{n\to+\infty} V_n$;

Propositions :

- (corollaire) si (V_n) est une suite convergente de nombres réels positifs, alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$ est positive;
- soient (U_n) et (V_n) deux suites de nombres réels telles que $\lim_{n\to+\infty}(V_n) = +\infty$;
  - alors on a $\lim_{n\to+\infty}(1/V_n) = 0$;
  - si (U_n) est minorée, alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n + V_n) = +\infty$,
  - si (U_n) est minorée par un nombre réel strictement positif, alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n * V_n) = +\infty$,
  - si (U_n) est à termes >0 et converge vers 0, alors $\lim_{n\to+\infty}(1/U_n) = +\infty$,

Propositions :

- soient (U_n) et (V_n) deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ';
  - alors $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, on a $\lim_{n\to+\infty}(\lambda*U_n)=\lambda*\ell$,
  - alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n+V_n)=\ell+\ell'$ et $\lim_{n\to+\infty}(U_n*V_n)=\ell*\ell'$,
  - si $\ell\neq 0$, alors on a $\lim_{n\to+\infty}(1/U_n)=1/\ell$;

Théorème des gendarmes : soient (U_n), (V_n) et (W_n) des suites de nombres réels telles que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(U_n)\leq(V_n)\leq(W_n)$;

- si (U_n) et (W_n) convergent toutes deux vers ℓ (fini), alors il en est de même pour (V_n);
- si (U_n) converge vers $+\infty$, alors il en est de même pour la suite (V_n).

Théorème : soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en ℓ et soit (U_n) une suite convergeant vers ℓ dont tous les termes appartiennent à I. On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(U_n)) = f(\ell)$.

Propositions :

- soit (U_n) une suite de nombres réels divergeant vers $+\infty$ et soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(U_n)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))$;
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (|U_n|) = |\ell|$;
- soit (U_n) une suite convergente de nombres complexes, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = \ell$ ssi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathrm{Re}\{U_n\}) = \mathrm{Re}\{\ell\}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathrm{Im}\{U_n\}) = \mathrm{Im}\{\ell\}$.

Remarque 1 : ainsi, d'après la proposition précédente, pour calculer la limite d'une suite de nombre complexes, il suffit de calculer la limite de sa partie réelle et la limite de sa partie imaginaire.

Exercice : soit (U_n) la suite définie par $U_n = \exp\left(\frac{n^2}{cos(n)-2}\right)$. Etudier la suite (U_n), et si cette dernière converge, donner sa limite.

Remarque 2 : pour montrer que (U_n) tend vers ℓ, il suffit de montrer que la suite $(|U_n - \ell|)$ tend vers 0.

Proposition : soit (U_n) une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Posons $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$, alors $\lim_{n\to+\infty}(U_n) = \ell$ (ou $+\infty$) ssi $\lim_{n\to+\infty}(V_n) = \lim_{n\to+\infty}(W_n) = \ell$ (ou $+\infty$).

Exemple 1 : considérons la suite géométrique (a^n) avec $a \in \mathbb{K}$;

- si $|a| < 1$, alors (a^n) converge vers 0;
- si $a = 1$, alors (a^n) converge vers 1;
- si $|a| > 1$, alors (a^n) diverge.

Exemple 2 : considérons la suite $(n^p a^n)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$;

- si $|a| < 1$, alors $(n^p a^n)$ converge vers 0 pour tout entier relatif p;
- si $a > 1$, alors $(n^p a^n)$ tend vers $+\infty$ pour tout entier relatif p quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 1 : considérons la suite (U_n) à termes non nuls vérifiant $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| < L$ pour tout entier n, si L est strictement compris entre 0 et 1 alors la suite (U_n) converge vers 0.

Exemple 2 : la suite $\sqrt[n]{a}$ converge vers 1 pour tout nombre réel a strictement positif.

Exercice : montrer que les suites données ci-dessous sont convergentes et calculer leurs limites;

$$U_n = \frac{n+\sqrt{n}\ln(n)}{n+\sin(n)} \qquad V_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha^n+\beta^n} \text{ pour } (\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{*+})^2$$

$$W_n = (-1)^n \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \qquad Z_n = \frac{a^n}{n!} \text{ pour } a \in \mathbb{C}$$

Définition : soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On appelle $S_p = \sum_{n=0}^{p} U_n$ la somme partielle d'indice p de la série de terme général U_n.

On dit que la série de terme général U_n est **convergente** si la suite de ses sommes partielles est convergente. Dans ce cas, $S = \lim_{p\to+\infty} S_p$ s'appelle la somme de la série et on écrit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n$. On dit aussi que $\sum U_n$ converge. Lorsqu'une série n'est pas convergente on dit qu'elle diverge.

Proposition : si $\sum U_n$ converge, alors U_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration : U_n peut s'écrire $S_n - S_{n-1}$ qui par passage à la limite tend vers $S - S = 0$ quand n tend vers $+\infty$.

Proposition : soient $\sum U_n$, $\sum V_n$ et $\sum W_n$ trois séries telles que $W_n = U_n + V_n$. Si deux d'entre elles convergent alors la troisième converge également et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_n = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n \tag{1}$$

Proposition : modifier un nombre fini de termes d'une série n'en altère pas la nature.

Proposition : soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante, soit $\sum U_n$ une série de terme général U_n. Posons :

$$\begin{aligned} V_0 &= U_0 + U_1 + \ldots + U_{\phi(0)} \\ \forall k \geq 1, V_k &= U_{1+\phi(k-1)} + U_{2+\phi(k-1)} + \ldots + U_{\phi(k)-1} + U_{\phi(k)} \end{aligned}$$

On dit que la série V_n est obtenue à partir de la série de terme général U_n par **groupement de termes**. On a alors :

- $\sum U_n$ CV $\Rightarrow \sum V_k$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} V_k$;
- $\sum V_k$ CV et $|U_{1+\phi(k-1)}| + \ldots + |U_{\phi(k)}| \to 0$ quand $n \to +\infty$ $\Rightarrow \sum U_n$ CV;
- $U_n \geq 0$ CV et $\sum V_k$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV;
- $U_n \to 0$ quand $n \to +\infty$, $(\phi(k+1) - \phi(k))$ majorée et $\sum V_k$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV.

Proposition : une série à termes positifs ou nuls est croissante. Soit elle est majorée et elle converge, soit elle n'est pas majorée et elle diverge.

Proposition : soit $0 \leq U_n \leq V_n$, on a alors $\sum V_n$ CV $\Rightarrow \sum U_n$ CV et $\sum U_n$ DIV $\Rightarrow \sum V_n$ DIV.

Permutation de l'ordre des termes : soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection et ϕ^{-1} sa réciproque. Soient (U_n) et (V_n) deux suites de nombres réels tels que $V_n = U_{\phi(n)}$ et $U_n = V_{\phi^{-1}(n)}$. On dit que la série $\sum V_k$ s'obtient à partir de la série $\sum U_n$ en permutant l'ordre des termes par la bijection ϕ. Si $U_n \geq 0$, les séries $\sum V_k$ et $\sum U_n$ sont de même nature. Lorsqu'elles convergent elles sont égales.

Proposition : soient $U_n \geq 0$, $V_n \geq 0$ et $U_n \sim V_n$ quand $n \to +\infty$, les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont alors de même nature.

Comparaison avec une intégrale : soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction décroissante positive. Pour $n \geq n_0$, on pose $U_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n \geq n_0} U_n$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx$ ont même nature.

Exercice : étudier la nature de la série de terme général $U_n = (n \ln(n)^a)^{-1}$ pour $n \geq 2$ et selon les valeurs de a dans $\mathbb{R}$.

Test de Cauchy : si $\sqrt[n]{U_n} \to \ell < 1$ alors $\sum U_n$ converge.

Test d'Alembert : si $U_{n+1}/U_n \to \ell < 1$ alors $\sum U_n$ converge.

Exercice : étudier la nature de la série de terme général $U_n = a^n/n!$ pour a dans $\mathbb{R}$.

Remarque : si $U_{n+1}/U_n \to 1$ alors on est face à une indétermination. Par contre, si $U_{n+1}/U_n > 1$ pour $n \geq n_0$, alors la série diverge car le terme général ne tend pas vers 0.

On appelle **série géométrique** une série de la forme $S_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} a^n$. On a alors $S_p = a^{p+1} \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ et $S_p = a^{p+1}/(1-a)$.

Proposition : soit $\sum U_n$ une série à termes complexes (i.e. $U_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ pour tout n), $\sum U_n$ converge ssi les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ à termes réels sont toutes deux convergentes. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n) + \mathrm{i}(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$$

Définition : on dit que la série de terme général U_n est absolument convergente si la série de terme général $|U_n|$ est convergente.

Proposition : une série $\sum U_n$, telle que $U_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ pour tout n, converge absolument ssi les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Proposition : une série absolument convergente est convergente.

Théorème (produit de deux séries absolument convergentes) : soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Posons :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n$$

La série $\sum c_n$ est alors absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n)(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n)$$

Théorème des séries alternées : si $U_n = (-1)^n |U_n|$ pour tout n et si la suite $(|U_n|)$ tend vers zéro en décroissant, alors la série $\sum U_n$ converge.

Théorème (transformation d'Abel) : soit $U_n = a_n b_n \in \mathbb{C}$ pour tout n. Posons $A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p$. Si :

- la suite (A_n) est bornée;
- la suite (b_n) tend vers zéro;
- la série $\sum |b_{n+1} - b_n|$ converge;

alors la série $\sum U_n$ converge.

Corollaire : remplacer l'hypothèse "la série $\sum |b_{n+1} - b_n|$ converge" par "la suite réelle (b_n) est décroissante" dans le théorème précédent conduit au même résultat.

Soit E un ensemble, on appelle **distance** sur E une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;
- $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$;

Si d est une distance sur E un ensemble, on dit que (E, d) est un **espace métrique**.

Exemples : soient $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]^\mathsf{T}$ et $\boldsymbol{y} = [y_1, y_2]^\mathsf{T}$ deux vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^2$. Considérons les distances suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

- $d_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$;
- $d_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$;
- $d_\infty(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max(|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|)$.

Soit $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^{*+}$, on appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble $B(a,r) = \{x \in E, d(a,x) < r\}$.

Exemple : soit la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ définie par $B(0,1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, d(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) < 1\}$.

Exercice : représenter graphiquement la boule unité $B(0,1)$ de $\mathbb{R}^2$ lorsque la distance considérée est tout d'abord d_1, puis d_2 et enfin d_∞.

Soit $A \subset E$, on dit que A est un **ouvert** si pour tout point a de A il existe au moins une valeur réelle r strictement positive telle que $B(a,r) \subset A$.

Exercice : dans $(\mathbb{R}, d_1)$, les ensembles suivants sont-ils des ouverts?

$$]1,2[\quad [1,2[\quad \{2\} \quad]-\infty,+\infty[\quad]0,+\infty[\quad [0,+\infty[\quad \mathbb{Q}$$

Propriétés :

- $\emptyset$ et E sont des ouverts de E;
- toute réunion d'ouverts est un ouvert;
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice : soit $\Omega_n =]-1/n, 1/n[$. L'intersection infinie d'ouverts $\bigcap_{n=1}^{+\infty} \Omega_n$ est-elle un ouvert de $\mathbb{R}$?

On appelle **topologie** de E induite par d, la famille de tous les ouverts de E.

Soit $A \subset E$, on dit que A est un **fermé** ssi son complémentaire A^{c} est un ouvert de E.

Exercice : dans $(\mathbb{R}, d_1)$, les ensembles suivants sont-ils des fermés?

$$[1,2] \quad [1,2[\quad \{2\} \quad [0,+\infty[\quad \mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$$

Propriétés :

- $\emptyset$ et E sont des fermés de E;
- toute intersection de fermés est un fermé;
- toute réunion finie de fermés est un fermé.

Exercice : soit $\Phi_n = [1/n, 1-1/n[$. L'union infinie de fermés $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Phi_n$ est-elle un fermé de $\mathbb{R}$?

Soient $A \subset E$ et $a \in E$, on dit que a est **adhérent** à A ssi toute boule ouverte $B(a,r)$ de centre a et de rayon $r > 0$ contient au moins un point de A (i.e. $B(a,r) \bigcap A \neq \emptyset$).

Remarque : tout point de A est adhérent à A.

On appelle **adhérence** de A l'ensemble des points adhérents à A. On la note $\bar{A}$ et on a $A \subset \bar{A}$.

Exemples : les adhérences de $[1,2[$, $[1,2]$, $]2,+\infty[$ sont respectivement $[1,2]$, $[1,2]$ et $[2,+\infty[$.

Théorème : l'adhérence $\bar{A}$ de A est un fermé, le plus petit fermé qui contienne A.

Démonstration : montrons que $\bar{A}$ est égal à l'intersection de tous les fermés contenant A. Montrons tout d'abord que $\bar{A}$ est inclus dans cette intersection.

- Soit x un point quelconque de $\bar{A}$ et soit F un fermé quelconque de E contenant A. Faisons un raisonnement par l'absurde, supposons que F^{c} contienne le point x.
- F étant un fermé, F^{c} est obligatoirement un ouvert. Comme x est supposé appartenir à F^{c}, d'après la définition d'un ouvert, il existe au moins une boule ouverte $B(x, r)$ incluse dans F^{c}.
- Or x appartient à l'adhérence de A. Donc, par définition de l'adhérence, on a $B(x, r) \bigcap A \neq \emptyset$.

Démonstration (suite) :

- $B(x,r)$ étant incluse dans F^{c}, on a $F^{\mathsf{c}} \bigcap A \neq \emptyset$, d'où la contradiction car F est sensé contenir A (entrainant donc $F^{\mathsf{c}} \bigcap A = \emptyset$). Par conséquent, F^{c} ne peut pas contenir le point x qui appartient donc à F.

- x étant un point quelconque de $\bar{A}$, $\bar{A}$ est donc inclus dans F. F étant quant à lui un fermé quelconque contenant A, on en déduit que $\bar{A}$ est inclus dans tous les fermés contenant A, et donc dans l'intersection de ces derniers.

Montrons dans un second temps que l'intersection de tous les fermés contenant A, notée C, est elle-même incluse dans $\bar{A}$.

- Soit y un point quelconque de $\bar{A}^{\mathsf{c}}$.

Démonstration (suite) :

- Par définition de $\bar{A}$, il existe au moins une boule ouverte $B(y,r)$ telle que $B(y,r) \bigcap A = \emptyset$. $B(y,r)^{\complement}$ est par conséquent un fermé contenant A.

- C étant l'intersection de tous les fermés contenant A, C est donc inclus dans $B(y,r)^{\complement}$. De ce fait, le point y appartenant à $B(y,r)$ ne peut donc pas appartenir à C.

- On a alors $\bar{A}^{\complement} \bigcap C = \emptyset$, ce qui équivaut à dire que l'intersection C de tous les fermés contenant A est inclus dans $\bar{A}$.

Soient $A \subset E$ et $a \in E$, on dit que a est **intérieur** à A s'il existe une boule ouverte de centre a incluse dans A.

On appelle **intérieur** de A l'ensemble des points intérieurs à A. On le note $\mathring{A}$ et on a $\mathring{A} \subset A$.

Exemples : les intérieurs de $[2,3] \bigcup]5,7]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont respectivement $]2,3[\bigcup]5,7[$, $\emptyset$, $\emptyset$ et $\emptyset$.

Théorème : l'intérieur $\mathring{A}$ de A est un ouvert, le plus ouvert inclus dans A.

Soient $A \subset E$ et $a \in E$, on dit que a est **isolé** dans A s'il existe au moins une boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon $r > 0$ telle que $B(a, r) \bigcap A = \{a\}$.

Si tous les points de A sont isolés dans E, on dit que A est une **partie discrète** de E.

Exemples : le chiffre 5 est un point isolé de $[2, 3] \bigcup \{5\}$, quant à $\mathbb{N}$ c'est une partie discrète de $\mathbb{R}$ car tous ses points sont isolés dans $\mathbb{R}$.

Considérons à présent l'**exemple** de l'espace métrique (C, d) où $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$.

Dans (C, d), on appelle **disque ouvert** de centre a et de rayon $r > 0$ l'ensemble $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Dans (C, d), on appelle **disque fermé** de centre a et de rayon $r > 0$ l'ensemble $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Dans (C, d), on appelle **disque pointé ouvert** de centre a et de rayon $r > 0$ l'ensemble $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - a| < r\}$ inclus dans $\mathbb{C}$.

Remarque : une boule ouverte dans $\mathbb{C}$ est un disque ouvert, permettant ainsi de définir la notion d'ouvert et de fermé.

XI- Espaces métriques

Une partie A de $\mathbb{C}$ est **bornée** s'il existe au moint une valeur réelle M strictement positive telle que, pour tout point z de A, on ait $|z| \leq M$.

La partie A est appelé **compact** de $\mathbb{C}$ si A est fermée et bornée.

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit **connexe** si deux points quelconques de Ω peuvent être joints sans sortir de Ω.

Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est dit **simplement connexe** si tout chemin fermé inclus dans Ω peut être réduit à un point par déformation continue sans sortir de Ω.