

TD3 - STAT INFÉRENTIELLES - TESTS D'HYPOTHESES

Démarche générale

1. Choix de l'hypothèse nulle, H_0 : en fonction de l'énoncé, i.e. du problème.
2. Choix du risque de première espèce α (probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie) : choix arbitraire ou donné par l'énoncé.
3. Détermination de la variable de décision (appelée aussi statistique de test) T ainsi que sa loi sous H_0 (connue).
4. Calcul de la région critique (seuil de décision) en fonction de H_0 et de α .
5. Calcul de la valeur expérimentale de la variable de décision (à partir de l'échantillon).
6. Conclusion : si cette valeur expérimentale se trouve dans la région critique, on rejette l'hypothèse, sinon on l'accepte.

Exercice 1 Les spécifications d'un médicament indiquent que chaque comprimé doit contenir, en moyenne, 1.5 g de substance active. On suppose que la quantité de substance active présente dans un médicament suit une loi normale. Afin de vérifier que le fabricant du médicament se conforme bien aux spécifications, 100 comprimés sont choisis au hasard dans la production, puis analysés. On note x_i la quantité de substance active présente dans le comprimé i . On obtient:

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = 155.$$

- Q. 1.** Formuler l'hypothèse nulle et l'hypothèse alternative.
- Q. 2.** Dans un premier temps on suppose que l'on connaît l'écart-type de la distribution: $\sigma = 0.5$. En choisissant un risque de premier espèce $\alpha = 5\%$, la production respecte-t-elle l'indication mentionnée ?
- Q. 3.** On suppose maintenant que l'écart-type est inconnu. Qu'est-ce que cela change au test ?
- Q. 4.** Sur les 100 mesures effectuées, on obtient

$$\sum_{i=1}^{100} (x_i - \bar{x})^2 = 26.2,$$

où \bar{x} désigne la moyenne empirique des 100 échantillons. Toujours en supposant que l'écart-type théorique est inconnu, étudiez la conformité de la production aux spécifications (on gardera $\alpha = 5\%$).

Q. 5. On décide d'augmenter le nombre d'échantillons et de tester 1000 comprimés. On obtient cette fois:

$$\sum_{i=1}^{1000} x_i = 1550 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{1000} (x_i - \bar{x})^2 = 262$$

De nouveau, étudiez la conformité de la production aux spécifications.

Exercice 2 On compare deux serveurs web selon leur temps de réponse à une requête. 50 telles requêtes sont envoyées à chaque serveur. Le temps moyen de réponse pour notre échantillon sur le serveur 1 est de 682 ms (millisecondes), avec une variance empirique non biaisée $\tilde{S}_1^2 = 25 \text{ ms}^2$, et pour le serveur 2 le temps moyen de réponse est de 675 ms avec une variance empirique non biaisée $\tilde{S}_2^2 = 28 \text{ ms}^2$.

En supposant que les temps de réponse des 2 serveurs suivent une distribution normale de variance identique, déterminer s'il existe une différence significative entre le temps de réponses des deux serveurs, avec un niveau de confiance de 95%.

Exercice 3 Pour tester si un circuit électrique donné est sans défaut, on envoie une série de 100 impulsions en entrée. Si le circuit est sans défaut, 50 sont attendues en sortie. Ici on en observe 37 à la sortie (et 63 zéros). Avec un niveau de confiance de 95%, doit-on rejeter l'hypothèse que le circuit est sans défaut ?

Exercice 4 Reprendre l'exercice 3 du TD1. Soit X le score obtenu par une voiture.

Q. 1. Si on pense que le score X suit une loi de Poisson, quel serait son paramètre ? Calculez alors les effectifs théoriques.

Q. 2. Tester l'hypothèse que X suit une loi de Poisson de moyenne 1.7, avec un niveau de confiance de 95%.

Exercice 5 On classe 1000 individus en fonction de leur sexe et du fait qu'ils sont daltoniens ou non. On obtient les effectifs suivants :

	Homme	Femme
Normal	442	514
Daltonien	38	6

Calculer le χ^2 et déterminer si on peut penser que le fait d'être daltonien est indépendant du sexe avec un niveau de confiance de 99%.

Exercice 6 Un sérum supposé avoir un effet pour empêcher les rhumes est testé sur 500 individus. On compare les résultats enregistrés sur un an avec ceux de 500 personnes non traitées, et on obtient les effectifs suivants :

	pas de rhume	un rhume	au moins 2 rhumes
traité	252	145	103
non traité	224	136	140

Tester avec un niveau de confiance de 95% si le traitement a un véritable effet.